

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR

---

PARIS --IMPRIMÉ CHEZ JULES BONAVENTURE, 55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

THÉORIE MÉCANIQUE  
DE  
LA CHALEUR

PAR  
M. Athanase DUPRÉ

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

(Partie expérimentale en commun avec M. Paul DUPRÉ)



PARIS  
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,  
SUCESSEUR DE MALLET-BACHELIER  
55, quai des Grands-Augustins, 55.

—  
1869

Tous droits réservés.



---

## PRÉFACE

---

Depuis la fin de l'année 1859 j'ai présenté à l'Académie, sur la *Théorie mécanique de la Chaleur*, une série de Mémoires presque tous publiés ensuite dans les *Annales de Chimie et de Physique*. Le moment me paraît venu de les corriger, de les mettre en ordre, de combler les lacunes et de donner à mes travaux une forme qui les rende plus utiles : celle d'un *Traité* destiné à servir pour l'enseignement. Je me suis placé dès le début au nombre de ceux qui considèrent les raisonnements *à priori* comme devant être écartés dans l'étude du monde matériel. Suivant moi, les déductions mathématiques, dont la grande utilité est incontestable, sont propres seulement à faire connaître d'une manière rigoureuse les conséquences des faits ou des lois fournis par l'observation, ou celles des hypothèses que l'on est quelquefois obligé de faire ; elles conduisent ou à rejeter ces hypothèses, ou à les admettre comme principes devenus certains lorsque des vérifications nombreuses et variées ne permettent plus le doute. Quoiqu'il soit généralement impossible, en suivant cette méthode seule satisfaisante, de fixer le point précis où une hypothèse doit être admise au nombre des vérités incontestables, on est en droit d'affirmer aujourd'hui que ce point est dépassé pour les deux principes fondamentaux de la *Théorie mécanique de la Chaleur*. Les conséquences déduites de ces principes sont immédiatement certaines ; malgré cela, les vérifications expérimentales sont encore très-utiles, et pour éclaircir les détails, et surtout

parce que, les données suffisamment précises manquant, il n'est pas toujours possible de calculer avec assez d'approximation l'effet de chaque cause.

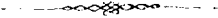
On a objecté contre mes travaux qu'ils ne rentrent pas tous dans la Théorie mécanique de la Chaleur; il est souvent difficile et toujours peu important, pourvu qu'on réalise des progrès, de décider s'ils appartiennent à la Thermodynamique, à la Mécanique ou à la Physique; d'ailleurs, certaines vérités s'enchaînent et ne doivent pas être séparées. On verra sans peine que je n'ai point eu l'intention d'écrire un Traité de Mécanique: les notions préliminaires par lesquelles je commence, ont pour but exclusif de faciliter à certains lecteurs l'accès des Chapitres suivants. Je ne ferai point ici l'énumération des perfectionnements que j'ai apportés à la Théorie mécanique de la Chaleur et des découvertes dont j'ai enrichi cette science dans l'étude de laquelle j'ai eu des devanciers illustres; mon travail actuel est destiné à en rendre l'enseignement plus aisé et plus fructueux. Les personnes qui tiendraient à prendre connaissance de mes droits peuvent le faire dans le Rapport de M. Bertin sur la Thermodynamique; j'y renvoie comme à un renseignement utile dans lequel toutefois certaines corrections sont rendues nécessaires par mes travaux récents et sans prétendre aucunement me soustraire, par l'autorité d'un nom, au jugement que les savants porteront sur mes travaux, devenus beaucoup plus faciles à apprécier dans ce Traité qu'ils ne l'étaient dans mes Mémoires. Pour éclaircir les questions de dates, je donne ci-après la liste des articles divers insérés successivement en mon nom dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, et dans les *Annales de Chimie et de Physique*.

J'ai toujours considéré les attractions astronomiques et les actions moléculaires comme les effets de forces véritables données à la matière par la volonté du Créateur, qui en a fixé les lois en vue des harmonies à produire. Cette opinion n'est

pas générale ; je l'ai adoptée parce qu'un examen attentif m'a montré, dans les autres opinions, des difficultés qui me semblent inextricables ; mais je tiens à faire remarquer que l'exactitude des résultats auxquels je parviens dans les Chapitres VIII et IX est indépendante de l'explication qu'on en donne. Les lois déduites logiquement des faits peuvent être prises pour point de départ en Mécanique moléculaire comme en Astronomie, sans qu'on soit d'accord sur leur origine, et conduire à de nouveaux progrès dont il est impossible de marquer la limite. Les mouvements des planètes sont les conséquences des attractions qu'elles éprouvent ; le calcul qu'on en fait demeure le même pour les savants dont je partage l'opinion et pour ceux qui considèrent les attractions comme des forces apparentes dues en réalité à des chocs ; il en est ainsi des calculs de Mécanique moléculaire. Quelques écrivains ont déclaré impossibles les attractions réelles ; mais, d'une part, les difficultés présentées contre l'existence de ces forces me semblent beaucoup moindres que celles qui ont été mises en avant contre l'admission du choc et de l'élasticité sans forces moléculaires, et, d'autre part, je ne vois aucune objection sérieuse à opposer à ceux qui considèrent les actions à distance comme produites directement par des forces spéciales appartenant à la matière et agissant invariablement suivant les lois que Dieu lui a données en la créant.

La méthode que j'ai suivie pour étudier les attractions à petites distances diffère de celles qui ont été adoptées par les auteurs dont je connais les travaux : je me suis appliqué autant qu'il m'a été possible à tirer les conséquences des faits connus et à exécuter beaucoup d'expériences nouvelles décrites principalement dans le Chapitre IX. Il est évident *à priori* que les valeurs des attractions sont liées avec le travail interne, et que le travail de désagrégation totale est lié avec les chaleurs latentes de volatilisation, lesquelles sont d'autant plus grandes,

toutes choses égales, d'ailleurs que ce travail est plus considérable. La force élastique d'une vapeur dépend encore des attractions, puisqu'elle n'est autre chose que la force expansive due à la chaleur, diminuée par les attractions qui tendent au contraire à amoindrir le volume. En Astronomie, on a pu déduire la loi newtonnienne de l'ensemble des faits contenus dans les lois de Képler ; en Mécanique moléculaire, il m'a semblé que la seule bonne marche à suivre est analogue. C'est en analysant les phénomènes mécaniques, physiques et chimiques qui dépendent des attractions, que je suis parvenu à plusieurs lois certaines : le lecteur verra que j'ai donné à la Mécanique moléculaire des bases très-incomplètes, il est vrai, mais solides. En étudiant les attractions dans des composés suffisamment nombreux, j'ai pu obtenir, par le calcul, les valeurs des attractions des corps simples ; quelques-unes sont négatives, c'est-à-dire qu'il existe des atomes qui se repoussent quand ils sont très-rapprochés. Enfin, il y a des faits qui sont conséquences des lois trouvées et qui n'ont pas encore été produits ; ils pourront l'être lorsque les expérimentateurs ne feront pas défaut ; on arrivera ainsi à joindre des vérifications nouvelles aux vérifications très-nombreuses contenues dans ce volume.





---

## LISTE DES NOTES ET MÉMOIRES

PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE.

1860. Sur le travail mécanique et ses transformations. Premier mémoire. (*C. R. de l'Acad.*, t. L, p. 588.)
1861. Deuxième mémoire et nouvelle rédaction du premier. (*C. R. de l'Acad.*, t. LII, p. 1183.)
1862. Troisième mémoire. (*C. R. de l'Acad.*, t. LIV, p. 907.)  
Supplément relatif à la mesure de la densité des vapeurs saturées. (*C. R. de l'Acad.*, t. LIV, p. 972.)  
Supplément relatif à la définition et à la mesure des températures. (*C. R. de l'Acad.*, t. LIV, p. 1065.)
1863. Sur la condensation des vapeurs pendant la détente ou la compression. (*C. R. de l'Acad.*, t. LVI, p. 960.)  
Discussion avec M. Reech. (*C. R. de l'Acad.*, t. LVII, p. 408 et 589.)  
Application de la théorie mécanique de la chaleur à la discussion des expériences de M. Regnault sur la compressibilité du gaz. (*C. R. de l'Acad.*, t. LVII, p. 774.)
1864. Mémoire sur la valeur de l'attraction au contact, la valeur du travail chimique dû à une élévation de température, la loi des chaleurs spécifiques des corps simples ou composés, et la seconde vaporisation des corps. (*C. R. de l'Acad.*, t. LVIII, p. 163.)  
Sur la loi de M. Regnault relative aux tensions maximum des vapeurs. (*C. R. de l'Acad.*, t. LVIII, p. 806.)  
Sur la vitesse d'écoulement des gaz par des orifices en minces parois. (*C. R. de l'Acad.*, t. LVIII, p. 1004.)  
Mémoire sur la résistance que les fluides opposent au mouvement. (*C. R. de l'Acad.*, t. LVIII, p. 1061.)  
Sur les lois de compressibilité et de dilatation des corps. (*C. R. de l'Acad.*, t. LIX, p. 490.)

**X LISTE DES NOTES ET MÉMOIRES PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE.**

- Réflexion sur les formules pour l'écoulement des fluides données par M. Zeuner, et réclamation de priorité relative à l'une d'elles. Nouveau théorème sur les capacités. (*C. R. de l'Acad.*, t. LIX, p. 596.)
- Réponse à deux notes de M. W. Thompson sur des questions de thermodynamique. (*C. R. de l'Acad.*, t. LIX, p. 768.)
- Théorie des gaz et comparaison des expériences de M. Regnault avec les lois qu'elle renferme. (*C. R. de l'Acad.*, t. LIX, p. 905.)
1865. Sur les chaleurs latentes. (*C. R. de l'Acad.*, t. LX, p. 339.)
- Sur les principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur, (*C. R. de l'Acad.*, t. LX, p. 718.)
- Lettre en réponse à des observations de M. A. Hirn concernant cette note. (*C. R. de l'Acad.*, t. LX, p. 864.)
- Réponse à des remarques de M. Clausius relative à la même communication. (*C. R. de l'Acad.*, t. LX, p. 1156.)
- Sur l'emploi des températures absolues dans la théorie mécanique de la Chaleur. (*C. R. de l'Acad.*, t. LX, p. 1024.)
- Cinquième mémoire sur la théorie mécanique de la chaleur. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXI, p. 582.)
- Réponse à des observations de M. Clausius. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXI, p. 738.)
1866. Sur le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXII, p. 39.)
- Théorie mécanique de la chaleur. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXII, p. 622.)
- Sur la loi qui régit le travail de réunion des corps simples et sur les attractions à petites distances. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXII, p. 791.)
- Sur la théorie de la diffusion. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXII, p. 1072.)
- Sixième mémoire sur la théorie mécanique de la chaleur. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXIII, p. 268 et 952.)
- Note sur la tendance d'un système matériel quelconque au repos absolu ou relatif. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXIII, p. 548.)
1867. Sur la vitesse du son. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXIV, p. 350.)
- Discussion avec M. Lamarle. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXIV, p. 593.)
- Septième mémoire sur la théorie mécanique de la chaleur. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXIV, p. 741.)
- Réponse à M. Lamarle. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXIV, p. 902.)
1868. Sur les attractions moléculaires et le travail chimique. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXVI, p. 141.)
- Réclamation de priorité relative à un mémoire de M. Jamin sur la compressibilité des liquides. (*C. R. de l'Acad.*, t. LXVII, p. 392.)

## LISTE DES MÉMOIRES

PUBLIÉS DANS LES *ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE*.

1864. Premier mémoire sur la théorie mécanique de la Chaleur. (*Annal.*, t. I, p. 168 et 173.)  
 Deuxième mémoire. Première partie. (*Annal.*, t. II, p. 183.)  
 Deuxième mémoire. Deuxième partie. (*Annal.*, t. III, p. 76.)
1865. Deuxième mémoire. Troisième partie. (*Annal.*, t. IV, p. 209.)  
 Troisième mémoire. (*Annal.*, t. IV, p. 426.)  
 Quatrième mémoire. (*Annal.*, t. V, p. 438.)
1866. Cinquième mémoire. (*Annal.*, t. VII, p. 189, 236, 257 et 406.)  
 Cinquième mémoire. Troisième partie. (*Annal.* t. IX, p. 328.)
1867. Sixième mémoire. (*Annal.*, XI, p. 194.)
1868. Septième mémoire. (*Annal.*, t. XIV, p. 64.)
- Notes diverses.





# THÉORIE MÉCANIQUE

DE

# LA CHALEUR

---

## CHAPITRE PREMIER

### NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Les corps sont étendus et impénétrables. Si l'un d'entre eux change sans cesse de lieu dans l'espace, on dit qu'il est en mouvement absolu, et, s'il change de position par rapport à un autre, on dit qu'il est en mouvement relatif. Nous ne pouvons observer que des mouvements relatifs, ils sont impossibles sans mouvement absolu. Un mouvement absolu de translation ou de rotation peut exister au contraire sans mouvement relatif.

Tout corps est inerte, c'est-à-dire incapable, sans cause extérieure, de passer du repos au mouvement ou, s'il possède une vitesse, d'en modifier la direction ou la grandeur. Cela résulte de l'ensemble des faits connus et n'est contesté par personne. Mais, si un corps ne peut rien sur lui-même, il n'est pas également dénué de tout pouvoir d'agir à distance sur un autre corps: les attractions qui produisent les phénomènes astronomiques, les attractions moléculaires qui s'y rattachent, suivent des lois imposées à la matière par la volonté toute-puissante et immuable du Créateur. A la vérité quelques personnes, au nombre desquelles se trouve un savant très-distin-

gué, le P. Secchi, ne considèrent point l'attraction universelle comme un fait irréductible ; mais, d'une part, l'opposition qu'on a voulu montrer entre l'attraction et l'inertie prise dans un sens absolu prouve tout au plus qu'il serait bon de changer ce dernier mot, et, d'autre part, il semble impossible d'accepter les chocs des atômes d'éther comme la cause véritable des actions mutuelles des astres et surtout comme la cause des attractions et des répulsions moléculaires.

L'état d'un corps peut être modifié de deux manières : ou par un choc, et, dans ce cas, il y a simple *communication* de mouvement ; ou par une action à distance, et alors il y a *création* de mouvement ; on observe aussi des phénomènes mixtes. Nous nous conformerons à l'usage qui veut qu'on appelle *force* toute cause de mouvement ; mais nous appellerons quelquefois *force vraie*, pour la distinguer de la force d'impulsion, celle qui peut produire le mouvement là où tout est en repos.

*Points matériels.* — Nous admettrons avec la plupart des savants que les corps sont composés d'atômes *étendus* excessivement petits et indivisibles *par les moyens naturels* ; groupés ensemble, ces atômes forment des *molécules* qui peuvent, suivant les circonstances, se décomposer et se reconstituer. Nous nommerons *points matériels*, des corps ou des parties de corps ayant des dimensions négligeables ; il est souvent fort commode et en même temps légitime de faire abstraction du volume, mais alors les mouvements de détail, les phénomènes internes échappent, et les résultats de l'analyse fournissent seulement une première approximation du mouvement général. C'est ainsi qu'on procède à l'étude des mouvements des astres considérés comme des points, et en particulier à celle du mouvement de la Terre autour du Soleil, sauf à reprendre la même question en tenant compte des quantités d'abord négligées ; ce qui conduit à des mouvements de détail encore mal connus, tels que le flux et le reflux, et oblige, ainsi qu'on le

verra plus loin, à admettre que, dans l'état final, les mouvements relatifs autres que les mouvements moléculaires auront cessé.

*Indépendance des mouvements simultanés.*—Quand un point matériel est animé d'une ou plusieurs vitesses de direction quelconque et sollicité en même temps par une ou plusieurs forces, chaque vitesse ou force influe sur le déplacement comme si elle existait seule; ainsi un projectile qui a reçu par l'action de la poudre une vitesse horizontale occupe à tout instant une position qu'on obtient, sauf la résistance de l'air, en portant sur la ligne horizontale le chemin dû à cette vitesse, puis de haut en bas le chemin dû à l'action de la pesanteur. Ce principe de l'indépendance des mouvements simultanés est au fond de toute étude mécanique; on l'emploie sans cesse, quelquefois même sans s'en apercevoir, puisque tous les corps qui sont à la surface de la Terre participent aux divers mouvements de notre planète; il est impossible d'en contester l'exactitude, car toutes ses conséquences se vérifient.

#### MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

Lorsqu'un point matériel qui n'est pas en repos n'est sollicité par aucune force, son mouvement ne peut être, à cause de l'inertie, que rectiligne et uniforme; on prend pour mesure de sa vitesse constante le nombre de mètres qu'il parcourt pendant chaque seconde ou, ce qui équivaut, le quotient obtenu en divisant un espace quelconque par le temps employé à le parcourir. Si plusieurs causes ont précédemment donné à un point des vitesses de même direction, il résulte du principe de l'indépendance des mouvements simultanés que sa vitesse actuelle a pour valeur l'excès de la somme des vitesses dans un sens sur la somme des vitesses de sens contraire, c'est-à-dire la somme algébrique.

Quand une force  $P$  agit sur un point matériel en repos ou animé d'une vitesse  $v$  de même direction, le mouvement est rectiligne et les variations de vitesse ne dépendent point de la vitesse déjà existante. Il en résulte que, si la force est constante, la vitesse éprouve des accroissements égaux dans des temps égaux ; le mouvement est uniformément varié. Si l'on nomme  $g$  l'accélération, c'est-à-dire l'accroissement de vitesse pendant une seconde, la variation pendant le temps  $t$  est

$$(1) \quad \Delta v = gt,$$

de sorte qu'on peut encore définir l'accélération en disant qu'elle est le rapport de l'accroissement de vitesse au temps pendant lequel cet accroissement s'opère.

Ne pouvant apprécier les causes que par leurs effets, il est naturel de définir *forces égales* celles qui, appliquées à un même point matériel, produisent des accélérations égales. Deux forces égales appliquées en sens contraires à un même point matériel produisent des accélérations simultanées qui se superposent et laissent le point en repos ; elles se font *équilibre*. Réciproquement, deux forces qui se font équilibre sont égales, puisque les accélérations simultanées qu'elles produisent ne diffèrent point. Il est évident que deux forces qui se font équilibre, étant appliquées en sens contraires à un même point matériel, se font encore équilibre lorsqu'on les applique à un point matériel différent ; par suite les accélérations qu'elles produisent sont toujours respectivement égales. Ces notions sont intimement liées avec le principe de l'indépendance des mouvements simultanés. On conclut immédiatement de ce même principe que deux forces appliquées successivement à un point matériel sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent, de sorte que le quotient  $\frac{P}{g}$  obtenu en divisant la force par l'accélération est invariable, c'est ce qu'on appelle la masse  $m$  du point matériel.



Dans le mouvement uniformément varié, si l'on nomme  $v_0$  et  $x_0$  les valeurs initiales de la vitesse et de l'espace parcouru, la vitesse au temps  $t$  a pour expression, d'après ce qui précède,

$$(2) \quad v = v_0 + gt.$$

L'espace  $dx$  parcouru pendant un temps infiniment petit  $dt$  a pour valeur

$$(3) \quad dx = v dt = (v_0 + gt) dt,$$

et l'on trouve, en intégrant, la relation

$$(4) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} gt^2.$$

*Force vive.*— Nous nommerons *force vive* la moitié du produit de la masse par le carré de la vitesse ; cette quantité  $\frac{Pv}{2g}$  se rencontrera sans cesse dans les questions que nous aurons à étudier, il est commode de lui donner un nom. Celui qu'elle a reçu prête à la critique ; nous le conserverons cependant, à cela près du facteur  $\frac{1}{2}$  placé ici contrairement à l'usage afin d'établir une correspondance utile entre les forces vives et les travaux. Pendant le temps  $dt$  l'accroissement de force vive est  $\frac{P(v + dv)^2}{2g} - \frac{Pv^2}{2g}$  ou, en réduisant,

$$(5) \quad \frac{Pv dv}{g}.$$

*Travail.*— Dans le mouvement qui nous occupe on nomme *travail* d'une force agissant sur un point matériel, le produit de la force par le chemin parcouru ; si 1 kilogramme descend de 1 mètre, le produit qui est 1 prend le nom de kilogram-mètre. Nous adopterons de préférence, comme beaucoup plus commode pour la formation des multiples et des sous-multiples, le mot *dyne* abrégé du mot *dyname* employé par plusieurs savants. Pendant le temps  $dt$  le travail  $Pdx$  a, par suite du

choix des unités, la même expression que la variation de force vive, car les équations (2) et (3) donnent

$$(6) \quad P dx = \frac{P v dv}{g}.$$

En général on nomme *travail d'une force appliquée à un point*, le produit qu'on obtient en la multipliant par le chemin parcouru projeté sur sa direction. On le compte positivement ou négativement suivant que le chemin se projette sur la direction dans laquelle la force tire ou sur son prolongement.

*Forces variables.* — Quand la force varie, on peut la supposer constante pendant un temps infiniment petit et l'équation (1) est alors applicable, on a

$$(7) \quad P = mg = m \frac{dv}{dt}.$$

La vitesse peut aussi être supposée constante pendant le même temps, ce qui donne

$$(8) \quad v = \frac{dx}{dt}.$$

La formule (6) s'applique encore à chacun des éléments du temps, et par suite à un temps fini : le travail dépensé pendant un temps quelconque égale la force vive produite.

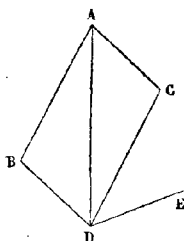
Tout ce qui précède a lieu pour un nombre quelconque de forces coïncidant en direction, car, d'après le principe de l'indépendance des mouvements simultanés, on peut les remplacer à chaque instant par une seule force égale à leur somme algébrique, de même qu'il est permis, lorsqu'on y trouve quelque avantage, de remplacer une force par plusieurs.

#### MOUVEMENT QUELCONQUE D'UN POINT MATÉRIEL.

*Composition et décomposition des vitesses.* — Nous représenterons, suivant l'usage, les vitesses d'un point matériel par

des longueurs égales ou proportionnelles portées sur leurs directions et dans le sens où elles ont lieu. Soient AB et AC (*fig. 1*) deux vitesses dont le point A est animé simultanément;

Fig. 1.



la vitesse AB seule le porterait en B à la fin de la première seconde, et d'après le principe de l'indépendance des mouvements simultanés, si on mène la ligne BD égale et parallèle à AC, on aura pour lieu du point à cette époque l'extrémité D de cette droite. D'ailleurs les espaces parcourus pendant un temps quelconque, en vertu des deux vitesses simultanées, étant toujours proportionnels à ces vitesses, on voit que le point se mouvra sans cesse sur la diagonale comme s'il était animé de la vitesse AD seule. De là on conclut que la résultante de deux vitesses, c'est-à-dire la vitesse unique par laquelle on peut les remplacer, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vitesses, laquelle devient la somme quand l'angle BAC s'annule. Dans le cas d'un nombre quelconque de vitesses, on mène par le point D une droite DE égale et parallèle à la troisième vitesse, et l'on a pour résultante la diagonale AE du parallépipède construit sur les trois premières vitesses. En continuant ainsi, on obtient un polygone plan ou gauche, et la ligne qui le ferme représente, comme pour les cas de deux ou de trois vitesses, la résultante définitive. Réciproquement, il est permis de rem-

placer une vitesse par celles que représentent les côtés de tout polygone qu'elle ferme.

D'après cela, si nous menons trois axes rectangulaires faisant avec la vitesse  $v$  du point matériel A des angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , on pourra remplacer cette vitesse par les trois vitesses simultanées  $v \cos \alpha, v \cos \beta, v \cos \gamma$ , et si l'on décompose de la même manière les vitesses  $v', v'', \dots$  dont le point A est animé en même temps, on arrivera à les remplacer par trois groupes de vitesses parallèles aux axes pour chacun desquels la résultante sera la somme algébrique <sup>1</sup>. En nommant V la résultante définitive et A, B, C les angles qu'elle fait avec les axes, on aura donc

$$(9) \quad V \cos A = \Sigma v \cos \alpha, \quad V \cos B = \Sigma v \cos \beta, \quad V \cos C = \Sigma v \cos \gamma,$$

$$(10) \quad V^2 = \Sigma^2 v \cos^2 \alpha + \Sigma^2 v \cos^2 \beta + \Sigma v^2 \cos^2 \gamma.$$

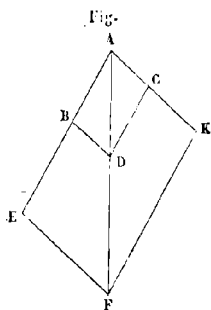
*Remarque.* — Il faut se garder de croire que la force vive correspondante à la résultante égale toujours la somme des forces vives correspondant aux composantes, comme cela arrive par exemple dans le cas particulier d'une seule vitesse décomposée parallèlement à trois axes rectangulaires; on verra plus loin l'importance de cette remarque.

*Composition et décomposition des forces.* — Lorsqu'un point A est sollicité par deux forces constantes P, P', il est commode de les représenter par deux longueurs proportionnelles AB, AC (*fig. 2*) prises sur les directions dans lesquelles elles tirent; ces droites peuvent représenter en même temps les accélérations  $g, g'$  dont le rapport est le même. A la fin d'un temps quelconque  $t$ , les espaces parcourus  $AE = \frac{1}{2}gt^2, AK = \frac{1}{2}g't^2$  étant proportionnels aux accélérations, le point viendra, par suite des deux mouvements simultanés, à l'extrémité F de la diagonale du parallélogramme AEFK, laquelle coïncide en direction avec

---

<sup>1</sup> Pour abrégér, les discussions relatives aux signes ont été partout omises dans ces notions préliminaires; le lecteur y suppléera facilement.

celle du parallélogramme ABCD, puisque les espaces sont proportionnels aux accélérations. On aura d'ailleurs, en appelant R et G la force et l'accélération représentées par AD,  $AF = \frac{1}{2}Gt^2$ , à cause de la similitude des triangles ACD, AKF ; le point matériel se meut donc comme si les forces P, P' étaient



remplacées par la force unique R. Ainsi, *la résultante de deux forces est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.*

Quand le point matériel est sollicité par un nombre quelconque de forces, on compose la première avec la seconde, leur résultante avec la troisième, et ainsi de suite, ce qui donne, comme dans le cas des vitesses, pour résultante définitive, le dernier côté d'un polygone. Si l'on mène par le point A trois axes rectangulaires suivant lesquels on décompose chacune des forces données afin de faciliter la recherche de leur résultante finale, on obtient des équations entièrement analogues à (9) et (10).

$$(11) \quad \begin{cases} R \cos A = \Sigma P \cos \alpha = X, \\ R \cos B = \Sigma P \cos \beta = Y, \\ R \cos C = \Sigma P \cos \gamma = Z; \end{cases}$$

$$(12) \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

A un instant quelconque, prenons pour origine le lieu du

point et pour axe des  $x$  la tangente à la trajectoire. Soit  $h$  l'espace parcouru pendant un temps infiniment petit  $dt$ , et par conséquent  $h \cos A$ ,  $h \cos \alpha$ ,  $h \cos \alpha'$ ... les projections de cet espace sur la résultante et sur les forces données, on aura, en multipliant par  $h$  la première des équations (11),

$$(13) \quad Rh \cos A = \Sigma Ph \cos \alpha,$$

et il en résulte ce théorème relatif aux forces qui sollicitent un point matériel :

*Le travail de la résultante égale la somme des travaux des composantes.*

Tout mouvement peut être remplacé par trois mouvements rectilignes simultanés parallèles aux trois axes rectangulaires ou projetés sur ces axes et produits par les forces  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Appliquant donc ce qui a été dit pour le cas du mouvement rectiligne, on arrive aux équations générales du mouvement d'un point matériel

$$(14) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

On trouve aussi pour expressions générales des composantes de la vitesse

$$(15) \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Dans chacun de ces trois mouvements le travail dépensé pendant le temps  $dt$  égale l'accroissement de force vive. Ce théorème s'applique aussi au mouvement résultant, car, d'une part, le travail de la résultante égale la somme des travaux des composantes, et, d'autre part, dans ce cas particulier, la force vive correspondante à la vitesse est, au temps  $t$  et au temps  $t + dt$ , égale à la somme des forces vives correspondantes aux composantes de la vitesse ; de sorte que la variation de force vive dans le mouvement résultant égale la somme des variations des forces vives dans les trois mouvements composants.

## MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS.

*Théorème des forces vives.* — D'après ce qui vient d'être dit, l'équation (6) est applicable au mouvement quelconque d'un point matériel, et l'on a :

$$(16) \quad X dx + Y dy + Z dz = m v dv,$$

ou bien, si l'on considère un mouvement fini,

$$(17) \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int (X dx + Y dy + Z dz).$$

Concevons écrites toutes les équations analogues relatives aux divers points matériels d'un système et faisons leur somme, il vient

$$(18) \quad \Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

*Dans le mouvement d'un système de points matériels quelconque, la somme des variations des forces vives des divers points, c'est-à-dire la variation de force vive du système, égale la somme des travaux des forces pendant le même temps.*

Ce théorème s'applique avec toutes ses conséquences au cas où les travaux des résistances passives (chocs, frottements, etc.) sont négligeables. Les points peuvent être soumis à des liaisons quelconques qu'on peut remplacer par des forces dont on tient compte lorsque la somme de leurs travaux pendant le temps considéré prend une valeur appréciable.

*Théorème de d'Alembert.* — En différenciant l'équation (18)

après avoir remplacé  $v^2$  par  $\frac{ds^2}{dt^2}$  ou  $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ , on trouve

$$(19) \quad \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = \Sigma \left( m \frac{d^2 x}{dt^2} dx + m \frac{d^2 y}{dt^2} dy + m \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right).$$

Si l'on remarque que les quantités  $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ ,  $m \frac{d^2 y}{dt^2}$ ,  $m \frac{d^2 z}{dt^2}$  sont

les expressions des forces qui produiraient les mouvements réels des points supposés libres, on arrive, pour les cas nombreux et presque toujours faciles à reconnaître de suite où il y a lieu de négliger la somme des travaux des forces qui remplacent les liaisons du système, à l'énoncé qui suit :

*La somme des travaux élémentaires des forces données égale à chaque instant celle des travaux élémentaires des forces capables de produire les mouvements réels des points supposés libres.*

Dans chaque cas particulier cette relation générale fournit les équations du mouvement en joignant aux forces données, lorsque cela est nécessaire, celles qui remplacent les liaisons.

*Condition d'équilibre ou théorème des vitesses virtuelles.* — Appliquant le principe de l'indépendance des mouvements simultanés, faisons abstraction des vitesses à un moment quelconque pris pour point de départ ; l'équation (18) après le temps  $dt$  se réduit à

$$(20) \quad \Sigma \frac{1}{2} m dv^2 = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Pour qu'on ait  $0 = dv = dv' = \dots$ , c'est-à-dire pour que le mouvement caractérisé par les valeurs de  $dx, dy, dz, dx', \dots$  n'ait pas lieu, il est nécessaire et suffisant que

$$(21) \quad \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = 0.$$

Pour qu'aucun mouvement n'ait lieu, c'est-à-dire pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux élémentaires ou moments virtuels des forces soit nulle pour tout déplacement possible. Dans un système à liaisons, on voit en général facilement que la somme des travaux des forces intérieures est négligeable, alors on considère exclusivement les forces données et les déplacements compatibles avec les liaisons.

*Théorème du mouvement du centre de gravité.* — Désignons par  $x_1, y_1, z_1$ , les coordonnées d'un point choisi à chaque instant, de telle sorte qu'on ait, en appelant  $M$  la somme des masses des



points matériels d'un système,

$$(22) \quad Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz;$$

il en résultera

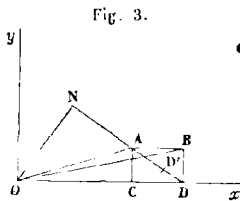
$$(23) \quad M \frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad M \frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad M \frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Substituant ces valeurs dans les sommes des équations (19) appliquées à tous les points, cela donne

$$(24) \quad M \frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \quad M \frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \quad M \frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z,$$

et la comparaison avec les équations (19) elles-mêmes montre de suite que le point déterminé de la sorte, qui n'est autre que le centre de gravité, se meut comme si toute la matière y était concentrée et comme si toutes les forces y étaient appliquées. Quand il n'existe que des forces intérieures, deux à deux, égales et de sens contraires, telles par exemple que les attractions mutuelles des parties, les seconds membres des équations (24) deviennent identiquement nuls, et le centre de gravité demeure invariable ou se meut d'un mouvement uniforme, quels que soient les mouvements respectifs des divers points.

*Théorème des aires.* — Considérons d'abord des points matériels se mouvant tous dans un même plan, et nommons *moment* d'une force par rapport à un point O, que nous prendrons pour origine, le produit de cette force R ou AD (*fig. 3*)



agissant sur le point A, multipliée par la perpendiculaire  $ON = r$  abaissée du point O sur sa direction. Convenons de

regarder les moments comme positifs lorsque la force tend à produire dans un certain sens la rotation autour du point O, et comme négatifs lorsqu'elle tend à faire tourner en sens contraire. Le moment de la force R est représenté par le double du triangle OAD, et l'on a

$$(25) \quad \text{OAD} = \text{OAC} + \text{ACD}.$$

Si l'on remplace cette force par ses deux composantes parallèles aux axes X ou AB, — Y ou AC, dont les moments sont représentés par les doubles des triangles OAC, OAB, et si, de plus, on remarque l'équivalence des triangles OAB, DAC qui ont bases égales  $AB = CD$  et hauteurs égales, on voit que l'équation (25) signifie que le moment de la résultante égale la somme des moments des composantes :

$$(26) \quad Rr = yX - xY.$$

Cette équation subsiste évidemment lorsqu'on représente la force R par une grandeur différente AD', et une simple remarque ou l'addition de deux forces qui se détruisent fait voir qu'elle a lieu aussi quand on remplace par leur résultante R deux forces non rectangulaires ou deux forces parallèles.

Cela posé, examinons ce qui arrive quand la somme des moments des forces d'un système est constamment nulle, c'est-à-dire lorsqu'on a sans cesse

$$(27) \quad \Sigma(yX - xY) = 0$$

ou, en remplaçant X et Y par leurs valeurs  $m \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $m \frac{d^2y}{dt^2}$ ,

$$(28) \quad \Sigma m \left( y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right) = 0.$$

Une première intégration donne

$$(29) \quad \Sigma m (y dx - x dy) = dt.$$

Après le temps  $dt$ , le point A (fig. 4) est venu en A', le rayon vecteur OA a décrit l'aire OAA' =  $d\lambda$ , qui, en négligeant les infiniment petits du second ordre, est évidemment la différence

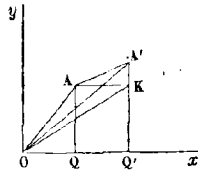
entre  $OAK = y dx$  et  $OA'K = x dy$  ; on a donc

$$(30) \quad d\lambda = y dx - x dy,$$

et par suite

$$(31) \quad \Sigma m d\lambda = C dt.$$

Fig. 4.



Une seconde intégration donne, en faisant commencer les aires avec le temps,

$$(32) \quad \Sigma m \lambda = C t,$$

c'est-à-dire que

*La somme des aires décrites par les rayons vecteurs menés aux divers points matériels du système multipliées respectivement par les masses est proportionnelle au temps.*

La somme des moments des forces intérieures est toujours nulle, et il suffit dans l'équation (27) de considérer les forces extérieures.

Un mouvement quelconque peut, d'après le principe de l'indépendance des mouvements simultanés, toujours être considéré comme résultant d'un mouvement parallèle à un plan ou projeté sur ce plan, et d'un mouvement parallèle à une perpendiculaire à ce plan ou projeté sur cette perpendiculaire ; il est permis de les étudier séparément. On peut donc appliquer le théorème des aires à un mouvement quelconque projeté sur un plan.

Si la quantité  $\Sigma m \lambda$  est nulle pendant un temps quelconque, ce qui entraîne  $C = 0$ , on en conclut qu'elle est constamment nulle.

D'après les deux théorèmes précédents, un homme, isolé dans l'espace et non sollicité par des forces extérieures, serait incapable, s'il était d'abord en repos, de mouvoir son centre de gravité, puisqu'en faisant agir ses muscles il ne développerait que des forces intérieures. Il lui serait impossible également de se donner un mouvement de rotation autour de ce point, puisque la somme des aires décrites par les éléments matériels qui constituent son corps, éléments qu'on peut prendre de telle sorte que leurs masses soient égales, est constamment nulle.

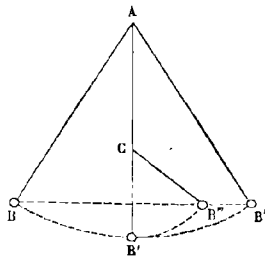
*Remarque.* — En toute rigueur, on ne peut composer et décomposer que des forces appliquées à un même point ; ce n'est qu'en supposant une rigidité complète, irréalisable d'une manière absolue, qu'on est conduit pour les corps solides à remplacer un système de force donné par un autre plus simple qui se déduit toujours avec facilité des notions qui précèdent. Cette manière de procéder est souvent fort commode et en même temps légitime si l'on ne perd pas de vue la supposition faite et si on ne l'emploie que dans les cas où la rigidité est au moins très-grande. Lorsque le corps est notablement flexible, il faut conserver sans modification le système de force réel ; on ne pourrait, par exemple, dans le cas d'un fil métallique flexible et élastique, remplacer deux forces constantes et égales appliquées à ses extrémités perpendiculairement à sa longueur, par une force égale à leur somme et appliquée en son milieu. Après l'établissement du régime le fil serait, du côté où les forces tirent, concave dans le premier cas et convexe dans le second ; le changement de forme aurait d'ailleurs fait naître en chaque point des forces élastiques convenables pour que chaque molécule soit sollicitée, dans le sens du mouvement devenu uniformément accéléré, par une force proportionnelle à sa masse.

## CHAPITRE II

### Principe de l'équivalence.

Nous avons vu, en l'absence de toutes résistances passives (telles que chocs, frottements, etc.), qu'un travail accompli est toujours remplacé par une force vive, et réciproquement. Ces deux quantités sont hétérogènes, et leur égalité numérique, sur laquelle s'appuient souvent les calculs, dépend du choix des unités; elles peuvent se remplacer l'une l'autre, elles sont *équivalentes*. L'usage s'est établi de dire que le travail qui disparaît *se transforme* en force vive; nous conserverons ce mot inexact dont l'emploi n'offre pas d'inconvénient grave, parce qu'il s'applique, à plus juste titre, au cas de la transformation de la force vive en chaleur, électricité, etc., et qu'un langage uniforme présente des avantages réels. Si 1 kilogramme de plomb est à une hauteur de  $0^m,2$ , nous dirons que le travail disponible a pour valeur  $0,2$  *dyne* et qu'il se transforme pendant la chute en une force vive ayant aussi pour valeur  $0,2$  *dyne*. Si le corps est attaché à l'extrémité inférieure B (*fig. 5*) d'un

Fig. 5.



long fil oblique AB dont la seconde extrémité est fixe, en l'abandonnant on le verra osciller sur l'arc BB' symétrique par

rapport à la verticale ; pendant la chute de B en B', le travail se transforme en force vive ; la force vive se transforme au contraire en travail pendant l'ascension de B' en B'', puis les mêmes phénomènes se reproduisent dans le mouvement inverse, et ainsi de suite. Si pendant la descente de B en B', on place un obstacle fixe, en C par exemple, le corps remontera suivant un arc B'B''' de rayon différent, mais la hauteur finale sera la même puisque le travail est régénéré intégralement.

Le principe de l'équivalence du travail et de la force vive facilite souvent la recherche ou la démonstration des principes secondaires ou des formules de physique et de mécanique ; on obtient alors des résultats dont l'exactitude est certaine sans entrer dans le détail des causes, qu'il serait fort difficile, dans certaines questions, d'analyser d'une manière complète. Avant d'aller plus loin, il sera bon de citer quelques exemples :

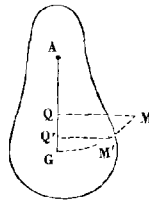
1<sup>o</sup> Quand un liquide très-peu visqueux sort, par un orifice en mince paroi, d'un vase dans lequel il s'élève à une hauteur  $h$  au-dessus de cet orifice, la sortie d'une gouttelette de poids  $P$  correspond à une dépense de travail  $Ph$ , et la force vive engendrée  $\frac{Pv^2}{2g}$  égale ce travail, car la somme des travaux dus aux liaisons et aux résistances passives est ici négligeable. On a donc, en supprimant le facteur commun, la formule bien connue

$$(33) \quad V^2 = 2gh,$$

qui devient certaine sans qu'on ait besoin de connaître les courbes suivies dans la masse liquide par les molécules qui affluent vers l'orifice. A mesure que nous avancerons, les avantages de cette manière de procéder deviendront plus saisissants, et il ne serait pas juste de reprocher à cette méthode, sans cesse employée dans la théorie mécanique de la chaleur, l'ignorance où elle nous laisse souvent des causes immédiates des phénomènes, car rien ne s'oppose à ce qu'on emploie concurremment les méthodes qui peuvent les faire découvrir.

2° Un corps solide est assujéti à tourner autour d'un axe horizontal A (fig. 6); son centre de gravité G est d'abord dans

Fig. 6.



le vertical de l'axe ; P désigne le poids du corps et  $a$  la distance AG du centre de gravité à l'axe. On fait tourner d'une quantité angulaire  $GM = ax_0$ , puis on abandonne. Lorsque, après le temps  $t$ , la distance est réduite à la valeur  $GM' = ax$ , la vitesse angulaire a pour expression  $\frac{dx}{dt}$ , et le travail accompli  $Pa(\cos x - \cos x_0)$ . D'autre part, une molécule quelconque du corps ayant pour masse  $m$ , et située à la distance  $r$  de l'axe, possède au temps  $t$  une vitesse absolue  $r \frac{dx}{dt}$  et, par conséquent, une force vive  $\frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ . L'application du principe de l'équivalence conduit immédiatement à la formule usitée

$$(34) \quad Pa(\cos x - \cos x_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \Sigma mr^2,$$

sans qu'on ait besoin de considérer les forces centrifuges.

3° Un corps de poids P, environné d'un fluide homogène, descend et parcourt un chemin  $h$ ; le travail dépensé est  $Ph$ . Mais ce mouvement n'a pu se produire sans qu'un égal volume de fluide, de poids P', monte et occupe la place laissée vacante; il y a donc eu un travail produit  $P'h$ ; de sorte que la dépense finale est seulement

$$(35) \quad (P - P') h.$$

Sans examiner si ce travail est transformé en force vive du

corps ou des molécules fluides, il suffit dans la question actuelle que nous connaissions sa valeur, c'est-à-dire l'effet, pour que nous en déduisions, en divisant par  $h$ , l'expression de la force, c'est-à-dire de la cause. Ainsi, *tout corps plongé dans un fluide supporte des pressions dont la résultante est une force verticale de bas en haut égale au poids du fluide déplacé.* Si la force est variable, sa valeur se déduit de la même manière de celle du travail en employant un chemin infiniment petit. Plus nous avancerons et mieux on appréciera le service rendu aux sciences par Coriolis et Poncelet, lorsqu'ils ont introduit le travail dans la plupart des discussions de mécanique.

*Extension du principe de l'équivalence.* — Quand deux corps dépourvus d'élasticité se choquent, de la force vive semble perdue. Lorsque, par exemple, dans l'appareil représenté par la *figure 5*, on abandonne à la fois deux pendules semblables AB, AB' également écartés de la verticale, les boules de plomb arrivent en B' animées de forces vives équivalentes aux travaux accomplis, se choquent, puis rentrent dans l'état de repos. La force vive perceptible a disparu, et ceux qui nous ont précédé la déclaraient détruite; aujourd'hui nous savons qu'elle est seulement transformée en chaleur ou force vive moléculaire imperceptible directement; sa valeur totale n'a point été altérée. Il en est ainsi toutes les fois que du travail ou de la force vive disparaît: il se produit du travail moléculaire ou de la force vive moléculaire qui se manifeste indirectement sous forme de chaleur, de magnétisme, d'électricité, de lumière, etc. Il y a longtemps déjà que l'attention a été appelée sur ces transformations remarquables par Montgolfier et Séguin, en France, ensuite d'une manière plus précise et plus hardie encore par Meyer, en Allemagne; cependant une idée si féconde ne pouvait servir de base à toute une science qu'autant que son exactitude deviendrait incontestable, et c'est principalement à M. Joule que revient le mérite de sa démonstra-



tion. On savait anciennement que les actions mécaniques développent de la chaleur ; mais ce n'est point assez qu'un corps s'échauffe par le frottement ou le choc pour qu'on soit autorisé à admettre l'équivalence de la force vive qui disparaît et de la chaleur qui apparaît ; il faut s'assurer, en outre, qu'il existe sans cesse une proportionnalité exacte entre ces deux quantités. M. Joule a fait plusieurs séries d'expériences pour déterminer leur rapport et prouver sa constance ; le talent et la ténacité dont il a fait preuve dans l'accomplissement de cette tâche sont bien dignes d'éloges. Nous citerons seulement quelques-uns des procédés mis en œuvre par ce savant distingué.

*Compression de l'air.* — Un récipient et une pompe foulante plongent dans l'eau d'un calorimètre ; en donnant 300 coups de piston, on comprime de l'air à 22 atmosphères dans le récipient et l'on calcule, au moyen de la loi de Mariotte, le travail total après avoir pris les mesures nécessaires. La variation de température fait connaître, par un calcul dans lequel entrent les capacités et les poids des diverses parties de l'appareil, la chaleur produite dont il faut retrancher celle qui est due au frottement du piston et qu'on évalue à la suite d'expériences faites en évitant la compression de l'air. En opérant ainsi et faisant avec soin les corrections convenables, M. Joule a trouvé que 444 dynes engendrent 1 calorie ; ce nombre porte le nom d'*équivalent mécanique de la chaleur*.

Le phénomène inverse, la dilatation de l'air sous l'eau, a causé un abaissement de température et, dans trois expériences de ce genre, M. Joule a trouvé pour équivalent d'une calorie 451, 447, 418 dynes.

*Choc et frottement des liquides.* — Une roue à palettes contenue dans un vase en partie plein d'eau ayant été mise en mouvement par des poids connus descendant de hauteurs connues, un certain travail total employé à produire des chocs et frottements fut évalué, ainsi que le nombre de calories cor-

respondant à ce travail ; après les corrections utiles et des expériences répétées, M. Joule trouva pour moyenne 430. En remplaçant l'eau par le mercure, il obtint 432.

Le *frottement des solides* lui a donné aussi 432 ; mais, après des recherches variées et après discussion du degré de confiance dû à chacune d'elles, M. Joule a admis pour valeur la plus probable de l'équivalent

$$E = 424.$$

Depuis, plusieurs savants se sont appliqués soit à reproduire les mêmes expériences, soit à étudier des transformations autres afin de constater que les circonstances n'influent pas sur la valeur de ce nombre fondamental. M. Favre a trouvé par le frottement, et avec l'emploi d'un calorimètre à mercure perfectionné, le nombre 413 ; l'étude d'une machine électro-magnétique, rendue plus facile à l'aide de dispositions ingénieuses, lui a donné 443, et l'étude de certaines actions chimiques 432.

M. Hirn a obtenu 432 comme moyenne d'expériences variées, et MM. Tresca et Laboulaye 433 par la compression de l'air.

Un savant suédois, M. Edlund, après des expériences dans lesquelles il mesurait très-soigneusement les variations de température d'un fil métallique tendu par un poids, puis détendu avec ou sans travail, est arrivé au nombre 434. Sa grande habileté comme expérimentateur et la discussion détaillée à laquelle il se livre dans ses Mémoires suffiraient pour donner confiance dans ce chiffre ; mais ce qui me paraît rendre tout doute impossible, c'est qu'il résulte, ainsi que je l'ai prouvé il y a longtemps et comme on le verra plus loin, de l'ensemble si remarquable des expériences de M. Regnault sur les chaleurs latentes, que l'équivalent mécanique de la chaleur est nécessairement très-voisin de

$$(36) \quad E = 433,5.$$

C'est ce dernier nombre que nous emploierons comme le plus probable ; il diffère peu d'ailleurs des nombres proposés jus-

qu'ici par les observateurs les plus estimés, et il y a lieu évidemment à ranger les écarts parmi les erreurs inévitables dans de telles expériences et à considérer comme bien établie la proportionnalité entre les travaux ou forces vives qui disparaissent et les quantités de chaleur qui les remplacent.

*Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* — Le principe de l'équivalence étant maintenant admis dans toute sa généralité, on peut s'en servir pour prouver les principes secondaires qui s'y rattachent et pour fixer l'extension qu'il convient de leur donner. Sans lui, par exemple, il serait difficile de préciser les cas où s'applique le principe de l'égalité de l'action et de la réaction au sujet duquel Laplace dit, en parlant des attractions et répulsions capillaires apparentes de deux plans verticaux parallèles :

« Quoique les deux plans n'agissent l'un sur l'autre que par l'action capillaire d'un fluide intermédiaire, cependant cette action réciproque est telle, que l'action est égale à la réaction. »

Ce principe a lieu aussi bien pour les attractions apparentes que pour les attractions réelles ; il s'applique aux faits secondaires comme aux faits irréductibles ; cela devient évident lorsqu'on le déduit du principe de l'équivalence. Supposons fixe l'un des deux plans considérés par Laplace et laissons mouvoir l'autre en l'obligeant à faire tout le travail possible et à prendre par conséquent une force vive négligeable. Cela fait, fixons-le à son tour et rétablissons la distance primitive par un mouvement du plan qui était d'abord immobile ; le travail dépensé égalera, d'après le principe de l'équivalence, le travail produit en premier lieu, et, pourvu qu'on envisage des mouvements infiniment petits, il en résulte l'égalité des deux forces dont l'une est l'action et l'autre la réaction. Ce raisonnement est général quoique présenté ici pour un cas particulier, et il ne souffre aucune objection si l'on ne considère que des attractions ou répulsions réelles ; pour les actions apparentes il est encore admissible, à

moins que les résistances passives qui influent sur leurs valeurs observées soient inégales dans les deux sens : les deux plans de Laplace fixés successivement ne donneraient point à l'expérimentateur des résultats égaux si le frottement au départ était plus grand pour l'un que pour l'autre.

*Remarque sur le principe des vitesses virtuelles.* — On a vu, page 12, une démonstration simple et depuis longtemps connue du principe des vitesses virtuelles ; mais on a fait sur sa complète généralité des objections qui disparaissent quand on le tire du principe de l'équivalence. Lorsqu'un système matériel soumis à des liaisons quelconques et à des forces  $P, P' \dots$  est en équilibre, on peut toujours concevoir des forces infiniment petites  $\pi, \pi' \dots$  appliquées à tous les points matériels qui le composent ou à une partie d'entre eux ; elles produiront un mouvement compatible avec les liaisons du système, et le travail total dépensé égalera la force vive produite. Les déplacements  $p, p' \dots$  étant supposés infiniment petits, le travail  $\Sigma \pi p$  et la force vive totale due aux forces ajoutées seront infiniment petits du second ordre, et les forces données ne produiront point de force vive puisqu'elles se font équilibre par hypothèse ; on aura donc

$$(37) \quad \Sigma Pp = 0.$$

Réciproquement, si l'on a  $\Sigma Pp = 0$ , les forces se font équilibre à l'aide des liaisons, car, appliquant le principe de l'indépendance des mouvements simultanés, on peut faire abstraction du mouvement préexistant, et il ne peut survenir un mouvement infiniment petit nouveau créé par les forces, puisque la force vive totale à la fin de ce mouvement doit évaluer la somme des travaux élémentaires, c'est-à-dire être nulle. Ce même mode de raisonnement fait voir aussi que, les forces étant en équilibre par hypothèse, on a  $\Sigma Pp = 0$  non-seulement, comme on l'a vu plus haut, quand le système est en repos, mais aussi alors que le mouvement existe.

---

## CHAPITRE III

**Chaleurs spécifiques.**

Pour rendre plus faciles les applications du principe de l'équivalence avec l'extension qui vient de lui être donnée, quelques éclaircissements relatifs aux températures et aux chaleurs spécifiques sont nécessaires. Afin de prévenir toute difficulté, nous éviterons de nous servir des températures absolues, comme on l'a souvent fait dans la théorie mécanique de la chaleur, sans les préciser suffisamment. Nous conserverons les degrés 0 et 100 généralement en usage, et nous emploierons pour la définition des autres températures les forces élastiques que prend un gaz parfait, par exemple l'hydrogène très-dilaté, lorsque son volume est assujéti à rester constant.

Quand un corps reçoit de la chaleur, elle se partage généralement en trois parties qui produisent trois effets différents :

- 1° L'élévation de température ;
- 2° Un travail externe qui est dû à ce que le corps en se dilatant surmonte les obstacles extérieurs ;
- 3° Un travail interne dû à l'écartement des atomes par la chaleur malgré les attractions qui s'y opposent.

Les deux dernières parties sont transformées en travail ; elles n'existent plus comme chaleur. La première seule subsiste et, à cause de cela, nous nommerons, comme l'a fait M. Rankine, *chaleur spécifique vraie*  $c$ , la quantité de chaleur nécessaire pour élever de  $t$  à  $t + 1$  degrés la température d'un kilogramme d'un corps, abstraction faite de la chaleur convertie en travail. Les physiciens appellent *chaleur spécifique à pression constante*  $c'$ , la quantité de chaleur qu'il faut fournir

à un kilogramme d'un corps pour qu'il passe de  $t$  à  $t + 1$  degrés sans que la pression change. Le même corps peut être pris à l'état gazeux ou à l'état liquide, par exemple ; dans le premier cas, le travail interne est souvent négligeable et le travail externe mérite d'être calculé ; dans le second cas, le travail externe est au contraire très-faible, tandis que le travail interne prend une grande valeur. D'après ces remarques on ne peut espérer obtenir des lois simples que dans la recherche des chaleurs spécifiques vraies ; mais l'expérience ne les donne point d'une manière immédiate.

Dans un corps en équilibre, la force expansive due à la chaleur égale la pression extérieure augmentée de la force de contraction due aux attractions mutuelles des molécules. A l'état gazeux, on considère généralement cette dernière force comme très-faible et presque toujours négligeable ; on doit à M. Gay-Lussac une expérience curieuse qui confirme cette manière de voir ; reprise et confirmée en Angleterre par M. Joule, puis soumise en France à une étude attentive par M. Regnault, elle est devenue célèbre. Voici en quoi elle consiste : deux ballons de capacités très-inégales sont l'un plein d'air comprimé, et l'autre vide ; on établit la communication entre eux en faisant tourner un robinet à large ouverture, et l'on constate finalement que le calorimètre dans lequel ils se trouvent n'a ni perdu ni gagné de la chaleur. M. Regnault l'a constaté même dans le cas où le volume devient 20 fois plus considérable. L'écoulement est accompagné d'une diminution de température, puisque de la chaleur devient force vive ; mais pendant les chocs qui produisent le repos final, cette force vive redevient chaleur. Si l'attraction des molécules était encore notable aux distances moyennes où elles se trouvent d'abord, le travail d'écartement pendant la dilatation considérable qui s'opère entraînerait une disparition sensible de chaleur. Si, au contraire, comme quelques écrivains l'ont avancé, la force expansive des

gaz était due à ce que les molécules, aux distances où elles s'y trouvent, se repoussent les unes les autres, le travail de répulsion serait transformé en force vive pendant l'écoulement, puis en chaleur finale, de sorte que la température s'élèverait. Ainsi, cette expérience importante prouve que le travail interne est très-faible ou négligeable dans les gaz simples et dans les gaz composés dans lesquels le changement de pression ne rend pas la combinaison plus ou moins intime<sup>1</sup>. Elle prouve aussi que leur force expansive est due aux mouvements qui constituent la chaleur et non à une force *vraie*, à une répulsion mutuelle des atomes. Lorsque le travail chimique est nul ou insensible, on peut donc, *du moins dans une première approximation*, considérer la chaleur spécifique vraie  $c$  comme l'excès de la chaleur spécifique à pression constante  $kc$  sur la chaleur équivalente au travail externe qui a pour valeur très-facile à calculer  $\frac{10333 \alpha}{1,3DE}$ .  $\alpha$  désigne le coefficient de dilatation,  $D$  la densité du gaz par rapport à l'air, et  $r^k,3$ , ou plus exactement  $1,29318$ , le poids d'un mètre cube d'air dans les circonstances normales. On est conduit à la formule

$$(38) \quad c = kc - \frac{10333 \alpha}{1,3DE}$$

déjà connue par Meyer, qui en a déduit le premier nombre 365 proposé pour l'équivalent mécanique de la chaleur ; il est beaucoup trop faible, et cela tient à ce que les chaleurs spécifiques adoptées alors en physique n'étaient point assez exactes. La chaleur spécifique à volume constant est difficile à mesurer directement, et le nombre  $E$  est aujourd'hui bien connu ; il est préférable de faire servir la relation (38) au calcul de  $c$ .

---

<sup>1</sup> On verra plus loin comment sa valeur, quoique très-faible, peut être calculée.

On trouve pour l'hydrogène 2,448, et pour les autres corps simples

$$(39) \quad c = \frac{2,448}{e},$$

$e$  désignant l'équivalent chimique ou la densité limite à l'état de vapeur très-dilatée et prise relativement à l'hydrogène, ou peut-être, dans quelques cas rares, un multiple ou un sous-multiple par un nombre très-simple de l'une de ces quantités qui sont d'ailleurs elles-mêmes en rapport simple.

Il ne faut pas perdre de vue que le dernier terme de l'équation (38) exprime le travail externe calculé au moyen des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, qui, pour certains gaz et en particulier pour le chlore et la vapeur de brôme, ne sont point assez approchées. On ne sera donc autorisé à dire que ces deux gaz et leurs analogues font exception à la loi de Petit et Dulong (39), que si l'anomalie qu'ils présentent, lorsqu'on calcule  $c$  au moyen des données expérimentales, persiste après qu'on aura étudié leurs véritables lois de compressibilité et de dilatation de manière à pouvoir en déduire la valeur exacte du travail externe. Il faudra aussi tenir compte du travail interne s'il n'est pas négligeable.

M. Regnault a prouvé que, pour plusieurs gaz simples, la chaleur spécifique à pression constante est indépendante du volume; il en résulte (38), dans le cas où les lois de Mariotte et de Gay-Lussac s'appliquent, qu'il en est ainsi de la chaleur spécifique vraie en supposant toujours le travail interne négligeable dans une première approximation. On peut déduire cette vérité de l'expérience sur l'expansion des gaz sans travail; car si l'on considère 1 kilogramme de fluide à 0 degré et sous la pression de 20 atmosphères, qu'on l'échauffe de 1 degré, puis qu'on le laisse prendre sans travail externe un volume 20 fois plus grand, la dépense de chaleur devra être la même que si l'expansion précède l'élévation de température, puisque l'état



primitif et l'état final sont les mêmes. Ainsi, deux gaz simples pris à 0 degré ont des chaleurs spécifiques vraies inversement proportionnelles à leurs équivalents, alors même qu'ils sont soumis à des pressions très-inégales. Il est fort probable que cette loi a lieu à toute température commune aux deux éléments comparés et non pas seulement pour les températures employées dans les expériences. Les équivalents chimiques ne dépendent ni du volume subissant des variations même très-grandes, comme dans les gazéifications, ni de la température, et il semble qu'on doit en conclure que la relation (39) devient générale lorsqu'on multiplie le second membre par une fonction inconnue  $F(t)$  de la température seule, la même pour tous les corps simples,

$$(40) \quad c = \frac{2,448F(t)}{e};$$

pour  $t=0$ , on a  $F(t) = 1$ .

*Corps composés.* — Il est naturel, pour les corps composés, d'admettre que la chaleur qui élève de 1 degré la température égale la somme des quantités de chaleur nécessaires pour produire le même effet sur chacun des éléments. M. Regnault a prouvé l'inexactitude de cette hypothèse appliquée aux chaleurs spécifiques à pression constante, mais son examen ne s'est pas étendu aux chaleurs spécifiques vraies. Soient  $a, b, c$  les équivalents de trois corps simples, et concevons un corps composé de  $\alpha$  équivalents du premier combinés avec  $\beta$  équivalents du second et  $\gamma$  équivalents du troisième. Pour élever de 1 degré la température des éléments séparés, il faudra (39) pour le premier  $a\alpha \cdot \frac{2,448}{a}$  ou  $2,448\alpha$ ; pour les trois  $2,448(\alpha + \beta + \gamma)$ . Mais  $a\alpha + b\beta + c\gamma$  est le poids total du composé, 1 kilogramme exigera donc

$$\frac{2,448(\alpha + \beta + \gamma)}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

D'ailleurs, le poids  $a\alpha + b\beta + c\gamma$  contient  $\alpha + \beta + \gamma$  équivalents

de corps simples divers, et, si l'on veut obtenir le poids d'un seul équivalent en prenant une sorte de moyenne, on est amené à définir l'équivalent de tout corps composé en disant que c'est le quotient obtenu en divisant le poids du composé par le nombre des équivalents des divers corps simples qui y entrent :

$$(41) \quad e = \frac{\sum a \alpha}{\sum \alpha}.$$

Alors, si l'hypothèse faite est vraie, la formule (40) devient entièrement générale.  $a = b = c$  redonne bien, comme cela doit être, la formule primitive.

Pour faire les vérifications, on peut construire un tableau contenant pour l'état de vapeur :

1° La densité limite  $D_1$  qui se confond souvent avec l'équivalent chimique  $e$  ;

2° La chaleur spécifique vraie donnée par la formule (39) ;

3° La somme  $C'_1$  de la chaleur spécifique vraie et du travail externe sous pression constante ;

4° La capacité  $C'$  ou  $Kc$  trouvée expérimentalement par M. Regnault ;

5° La différence  $C' - C'_1$ .

D'après la définition, on voit sans peine que  $C'_1$  est donné par la formule

$$(42) \quad C'_1 = \frac{0,9477 \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right) + 2,448}{e},$$

dans laquelle  $\alpha'$  désigne le coefficient de dilatation à pression constante, et  $\alpha = 0,003644 = \frac{1}{274,4}$  le coefficient limite à l'état de gaz parfait qui sera déterminé plus tard ; du moins c'est ce qui a lieu toutes les fois que la valeur de  $e$  se confond avec la densité relative à l'hydrogène. Le nombre 0,9477 est un coefficient  $\frac{10333 \times 0,003644}{1,3 \times 0,06926 \times 433,5}$  qui résulte de ce qui a été dit sur le travail externe déjà calculé pour la formule (38).

Pour la plupart des substances contenues dans le tableau suivant, la valeur de  $\alpha'$  n'a pas été mesurée, aussi les valeurs de  $C'_1$  contenues dans la 5<sup>e</sup> colonne ont-elles été calculées en supposant  $\alpha' = \alpha$ . Les corrections qui restent à faire ne sont point toujours négligeables : pour l'acide carbonique par exemple, la valeur de  $C'_1$  doit être augmentée de 0,0016, ce qui la porte à 0,2122. M. Regnault a donné les chaleurs spécifiques expérimentales de ce gaz aux diverses températures, et c'est à 91 degrés environ qu'on a  $C' - C'_1 = 0$ . Le travail interne physique étant supposé négligeable, on doit en conclure qu'il en est de même à ce point pour le travail chimique. Aux températures supérieures à 91 degrés, on a  $C' > C'_1$ , ce qui fait voir qu'une partie de la chaleur donnée sert à produire un travail de décomposition chimique, et que la combinaison devient moins intime à mesure que la température s'élève. Au-dessous de 91 degrés, on a  $C' < C'_1$  : une élévation de température rend la combinaison plus intime. Pour les autres corps on peut tirer des conséquences analogues.

Excepté pour les hydrogènes carbonés, les différences  $C' - C'_1$  sont faibles et les corrections qui restent à faire amoindriront encore certaines d'entre elles ; il y a donc lieu à considérer les lois qui précèdent comme bien vérifiées et comme pouvant être employées sans crainte désormais.

Quant aux corps simples, les valeurs de  $C' - C'_1$  sont négligeables pour l'oxygène et l'azote, mais plus élevées qu'on ne doit s'y attendre pour le chlore et la vapeur de brome. L'anomalie que présentent ces deux corps est probablement due à ce que les coefficients de dilatation sont considérables ; elle disparaîtrait complètement après la correction qu'il faut faire subir à  $C'_1$  si l'on avait  $\alpha' = 0,0050$ , ce qui n'offre rien d'improbable. On peut même, à l'appui de cette conjecture, faire remarquer dès à présent que le chlore dans l'acide chlorhydrique paraît ne point s'écarter de la loi générale.

NOMS.	FORMULES ou équivalents <i>e</i>	D <sub>1</sub>	C	C <sub>1</sub>	C'	C'—C <sub>1</sub>
Hydrogène.....	H	1	2,448	3,409	3,409	0
Oxygène.....	O	16	0,1530	0,2131	0,2175	+0,0044
Chlore.....	Cl	35	0,0699	0,0974	0,1210	+0,0236
Brôme.....	Br	80	0,0306	0,0426	0,0555	+0,0129
Azote.....	Az	14	0,1748	0,2435	0,2438	+0,0003
Acide carbonique....	$\frac{2}{3}C\frac{1}{2}O$	22	0,1669	0,2106	0,2169	+0,0063
Oxyde de carbone....	$C\frac{1}{2}O\frac{1}{2}$	14	0,1748	0,2435	0,2450	+0,0015
Protoxyde d'azote...	$\frac{2}{3}AzO\frac{1}{2}$	22	0,1669	0,2106	0,2262	+0,0156
Bioxyde d'azote.....	$Az\frac{1}{2}O$	15	0,1632	0,2273	0,2317	+0,0044
Hydr. proto-carboné.	$\frac{2}{3}C\frac{1}{2}H^2$	8	0,7650	0,8851	0,5929	-0,2922
Hydrogène bi-carboné.	$\frac{1}{3}CH^2$	14	0,5245	0,5931	0,4040	-0,1891
Acide sulfureux....	$\frac{2}{3}S\frac{1}{2}O$	32	0,1148	0,1448	0,1544	+0,0096
Acide chlorhydrique.	$Cl\frac{1}{2}H^2$	18	0,1360	0,1894	0,1852	-0,0042
Acide sulhydrique..	$\frac{2}{3}S\frac{1}{2}H$	17	0,2160	0,2725	0,2432	-0,0293
Ammoniaque.....	$\frac{1}{2}Az\frac{1}{2}H^2$	8,5	0,5760	0,6891	0,5084	-0,1807
Vapeur d'eau.....	$\frac{2}{3}HO\frac{1}{2}$	9	0,4080	0,5148	0,4805	-0,0343
Ether chlorhydrique..	$\frac{1}{4}CH^2Cl\frac{1}{2}$	32	0,3060	0,3360	0,2738	-0,0628
Ether sulfurique....	$\frac{2}{15}C^2H^5O^2$	37	0,4962	0,5222	0,4797	-0,0425
Alcool.....	$\frac{2}{9}CH^3O\frac{1}{2}$	23	0,4789	0,5207	0,4534	-0,0673
Sulfure de carbone..	$\frac{2}{3}C\frac{1}{2}S$	38	0,0966	0,1219	0,1570	+0,0351
Chloroforme.....	$\frac{2}{5}C\frac{1}{2}H^3Cl^2$	59	0,1037	0,1200	0,1567	+0,0367
Benzine.....	$\frac{1}{3}C^2H$	39	0,3680	0,3926	0,3754	-0,0172
Ess. de térébenthine..	$\frac{4}{9}C^2H^4$	68	0,4680	0,4821	0,5061	+0,0240
Esprit de bois.....	$\frac{1}{3}C^2H^2O^2$	16	0,4590	0,5191	0,4580	-0,0611
Ether sulhydrique...	$\frac{2}{15}C^2H^5S^2$	45	0,4080	0,4294	0,4008	-0,0286
Ether bromhydrique.	$\frac{1}{4}CH^2Br^2$	54,5	0,1797	0,1973	0,1896	-0,0077
Liq. des Hollandais..	$\frac{1}{4}CH^2Cl$	49	0,1998	0,2194	0,2293	+0,0099
Acétone.....	$\frac{1}{6}C^2H^3O^2$	29	0,4221	0,4552	0,4125	-0,0427
Ether acétique.....	$\frac{1}{4}C^2H^4O$	44	0,3894	0,4113	0,4008	-0,0105
Chlor. phosphoreux..	$\frac{2}{3}PhCl^2$	68,5	0,0893	0,1034	0,1347	+0,0313
Bi-chlorure de titane.	$\frac{1}{3}TiCl^2$	95	0,0773	0,0874	0,1290	+0,0416

Pour les corps simples,  $D_1$  égale le poids atomique ou est en rapport simple avec ce nombre ; ainsi la loi découverte en 1819 par Dulong et Petit peut être énoncée de la sorte :

*Le produit de la chaleur spécifique d'un corps simple par son poids atomique ou par un multiple ou un sous-multiple très-simple de ce nombre est constant.*

Dans l'état actuel de la science, on considère cette loi comme exacte pour la chaleur spécifique *vraie* seulement et le produit a pour valeur 2,448. Mais à l'époque de la découverte c'est à la chaleur spécifique à *pression constante* que l'on appliquait la loi de Dulong et Petit ; on le fait souvent encore aujourd'hui en admettant pour produit 3,24052. Les vérifications à l'appui sont contenues dans le tableau suivant ; elles réussissent parce que la différence  $3,2 - 2,4 = 0,8$  n'est que le quart environ du produit total et peut-être aussi parce que le travail interne auquel est due cette différence se trouve lui-même être grossièrement proportionnel à l'inverse du poids atomique.

NOMS.	<i>e</i>	<i>c'</i>	<i>ec'</i>	DIFFÉRENCE avec la moyenne 3,24	ÉCARTS relatifs.
Carbone.....	12	0,2411	2,89	0,35	$\frac{1}{10}$
Soufre.....	16	0,2026	3,24	0	0
Phosphore.....	16	0,1887	3,02	0,22	$\frac{1}{45}$
Fer.....	28	0,1138	3,41	0,17	$\frac{1}{59}$
Nickel.....	30	0,1086	3,26	0,02	$\frac{1}{102}$
Cobalt.....	30	0,1069	3,21	0,03	$\frac{1}{108}$
Cuivre.....	32	0,0951	3,04	0,20	$\frac{1}{16}$
Zinc.....	33	0,0955	3,15	0,09	$\frac{1}{36}$
Arsenic.....	37,5	0,0814	3,05	0,19	$\frac{1}{17}$
Sélénium.....	40	0,0837	3,35	0,11	$\frac{1}{29}$
Palladium.....	53	0,0593	3,14	0,10	$\frac{1}{32}$
Argent.....	54	0,0570	3,08	0,16	$\frac{1}{20}$
Cadmium.....	56	0,0567	3,17	0,07	$\frac{1}{46}$
Étain.....	59	0,0562	3,32	0,08	$\frac{1}{40}$
Uranium.....	60	0,0519	3,71	0,47	$\frac{1}{7}$
Iode.....	63	0,0541	3,41	0,17	$\frac{1}{19}$
Tellure.....	64	0,0515	3,30	0,06	$\frac{1}{51}$
Antimoine.....	64,5	0,0508	3,28	0,04	$\frac{1}{81}$
Or.....	98	0,0324	3,17	0,07	$\frac{1}{46}$
Osmium.....	99	0,0306	3,03	0,21	$\frac{1}{15}$
Iridium.....	99	0,0368	3,64	0,40	$\frac{1}{8}$
Platine.....	99	0,0324	3,21	0,03	$\frac{1}{108}$
Mercure.....	100	0,0324	3,24	0	0
Thallium.....	102	0,0335	3,42	0,18	$\frac{1}{18}$
Plomb.....	104	0,0314	3,21	0,03	$\frac{1}{108}$

## CHAPITRE IV

**Principe de l'égalité de rendement.**

On nomme *machines thermiques* les machines destinées à transformer la chaleur en travail ou le travail en chaleur. Leur étude présente des difficultés qui s'amointrissent beaucoup lorsqu'on envisage d'abord exclusivement celles qui sont

- 1<sup>o</sup> Périodiques,
- 2<sup>o</sup> Réversibles,
- 3<sup>o</sup> Sans chutes.

Une machine est dite *périodique* quand un certain nombre de phénomènes, après leur accomplissement, s'y reproduisent sans cesse dans le même ordre. On l'appelle *réversible* lorsqu'il est possible de la faire mouvoir en sens inverse avec production des mêmes phénomènes en ordre inverse. Dans un cas, par exemple, on lui fournit de la chaleur pendant chaque période et elle rend du travail; dans l'autre cas, on lui fournit au contraire le travail qu'elle rendait et l'on obtient pour résultat la chaleur qui lui était précédemment donnée. Enfin, si dans une machine thermique on évite toute transmission de chaleur soit par simple contact soit par rayonnement entre un corps chaud et un corps froid, on dit qu'*il n'y a pas de chute* : aucune quantité de chaleur ne tombe d'une température élevée à une température plus basse. Dans ces machines, on doit éviter tout choc, car il en résulterait un accroissement local de température, puis une chute. On doit aussi ne jamais mettre en contact deux corps ayant des tensions différentes, puisqu'il en résulterait un choc.

Dans les machines nombreuses qui remplissent sensiblement

ces trois conditions, figurent toujours deux réservoirs de chaleurs à températures différentes  $t_1$  et  $t_2 > t_1$ ; le premier perd une quantité de chaleur  $Q_1$  et le second gagne  $Q_2$  calories, ou bien l'inverse a lieu. Il existe pour cette classe particulière de machines un principe fort important dont voici l'énoncé :

*Toutes les machines thermiques périodiques, réversibles, où ne se produit aucune chute de chaleur, fonctionnant entre les mêmes températures, offrent un même rendement, c'est-à-dire donnent le même travail pour une même quantité de chaleur, ou la même chaleur quand on leur fournit le même travail.*

Ou encore, ce qui équivaut et rend les applications souvent plus faciles :

*Si, dans un assemblage de machines de ce genre, on emploie, en se servant d'un communicateur convenable, la force vive d'un volant pour produire de la chaleur au moyen des unes et cette chaleur pour rendre, au moyen des autres, de la force vive au volant, ces deux effets contraires sont égaux et l'appareil, pourvu qu'on néglige les résistances passives, possède la même force vive à la fin de chaque période complète après laquelle les mêmes mouvements se reproduisent dans le même ordre <sup>1</sup>.*

Pour donner une idée plus nette des machines de cette classe, il ne sera pas inutile de citer un exemple dans lequel nous évaluerons la chaleur en dynes, ce qui exige la multiplication des calories par  $E = 433,5$ . Nous agirons souvent ainsi désormais, afin de rendre comparables le travail et la chaleur équivalente et de pouvoir les faire entrer simultanément dans les calculs.

1. L'emploi d'un volant commun est sans importance au fond et je ne m'en sers que pour faciliter le langage; mais il est commode et ne présente d'ailleurs aucun inconvénient; cela suffit pour écarter toute critique relative à cet objet.



Concevons 1 kilogramme d'hydrogène très-dilaté et renfermé dans un corps de pompe ayant 1 mètre carré pour section, et soit  $u$  le volume à la température  $t$  sous la pression  $p$  kilogrammes par mètre carré. On a, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$(43) \quad \frac{pu}{274+t} = \frac{10333}{274 \times 1,293181} = a.$$

1<sup>o</sup> L'état initial étant  $(u_1, t_1, p_1)$ , faisons passer sans chute dans cet hydrogène à  $t_1$  degrés de la chaleur empruntée à un autre kilogramme d'hydrogène à  $t_2$  degrés, de manière à ce qu'ils échangent leurs températures; l'état final est  $(u_2, t_2, p_2)$ . Cela peut se faire au moyen d'une circulation extrêmement lente de l'une des masses gazeuses dans un tuyau à parois minces et bonnes conductrices, en même temps que l'autre masse gazeuse s'avance en sens contraire aussi avec lenteur entre la surface extérieure de ce tuyau et la surface intérieure d'un second tuyau concentrique et mauvais conducteur. Pendant cette opération, le volume de chaque masse gazeuse reste constant et, à cause de leur marche inverse, il existe sans cesse entre les parties contiguës une différence de température très-faible qui cause le refroidissement graduel de l'une et l'échauffement simultané de l'autre. L'échange *sans chute* est une limite qui correspond à un temps infini; on ne peut le réaliser d'une manière absolue même en pensée; mais il suffit, pour la rigueur des raisonnements, qu'on puisse en approcher autant qu'on veut par une augmentation indéfinie du temps qui n'entre point dans le calcul. Des remarques analogues, que nous supprimerons pour abréger, servent de réponses à toutes les objections pratiques.

2<sup>o</sup> Rendons au piston sa mobilité et laissons-le marcher jusqu'à ce que le volume devienne  $u_2 > u_1$ , mais très-lentement, ce qui est réglé par son mode de liaison avec le volant et en ayant soin de rendre sans cesse au gaz la chaleur qu'il perd en

accomplissant le travail qu'on emmagasine dans le volant à l'état de force vive. Pour cela, on se sert d'un corps à  $t_2$  dont la masse est assez grande pour qu'on puisse supposer sa température invariable. La valeur élémentaire du travail du gaz pendant qu'il pousse le piston est  $pdu$  ou bien (43)

$$a(274 + t_2) \frac{du}{u}.$$

On en conclut que la chaleur  $EQ_2$  perdue par le réservoir indéfini de chaleur à  $t_2$ , ou le travail total emmagasiné à l'état de force vive dans le volant, a pour expression

$$EQ_2 = a(274 + t_2) \log \frac{u}{u_1}.$$

3° Le volume demeurant constant, opérons un nouvel échange de température entre l'hydrogène de la machine et l'hydrogène accessoire, qui, revenant à son état primitif, pourra servir de nouveau indéfiniment. La première et la troisième opération n'entraîneront ni perte ni gain et ne devront point entrer dans le compte final.

4° Enfin comprimons l'hydrogène du corps de pompe jusqu'à ce qu'il reprenne son volume primitif  $u$ , mais sans laisser sa température croître. Cela peut se faire au moyen d'un second corps immense à la température  $t_1$ . Le travail dépensé par le volant équivaut à la chaleur reçue par ce réservoir à  $t_1$ ; ils ont pour valeur commune

$$EQ_1 = a(274 + t_1) \log \frac{u_2}{u_1}.$$

Là se termine la période destinée à recommencer indéfiniment, ce qui ne peut en aucune façon changer les rapports des quantités. Le travail gagné par le volant est  $E(Q_2 - Q_1)$ ; il est moindre que l'équivalent  $EQ_2$  de la chaleur à  $t_2$  donnée à la machine par le réservoir chaud, et le rendement  $R_2$  n'est autre

chose que le rapport de ces deux quantités

$$(44) \quad R_2 = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{t_2 - t_1}{274 + t_2}.$$

La quantité de chaleur transformée en travail  $Q_2 - Q_1$  est une différence, c'est l'excès de la chaleur donnée à la machine par le réservoir à  $t_2$  sur celle que la machine rend au réservoir à  $t_1$ ; celle-ci n'est pas transformée en travail, elle est seulement *transportée mécaniquement* d'un corps à l'autre. Au point de vue absolu, rien n'est anéanti; la somme des quantités de chaleur et de force vive n'a pas varié; mais une partie de la chaleur échappe ici au praticien qui n'en peut tirer parti pour l'industrie. Cette partie n'est pas d'ailleurs sans importance, elle devient même très-considérable quand on emploie des températures  $t_2$  et  $t_1$  très-voisines; c'est ce qu'on peut voir dans le tableau qui suit où l'on a supposé  $t_1 = 0$ .

$t_2$	R	$\frac{1}{R}$	$t_2$	R	$\frac{1}{R}$	$t_2$	R	$\frac{1}{R}$
1	0,0036	275,4	90	0,25	4,05	190	0,41	2,44
5	0,018	55,9	100	0,27	3,74	200	0,42	2,37
10	0,035	28,44	110	0,29	3,49	250	0,48	2,10
20	0,068	14,72	120	0,30	3,29	300	0,52	1,91
30	0,099	10,15	130	0,32	3,11	350	0,56	1,78
40	0,127	7,86	140	0,33	2,96	400	0,59	1,69
50	0,154	6,49	150	0,35	2,83	500	0,64	1,55
60	0,18	5,57	160	0,37	2,71	600	0,68	1,46
70	0,20	4,92	170	0,38	2,61	700	0,71	1,39
80	0,23	4,43	180	0,39	2,52	800	0,74	1,34

Pour  $t_2 - t_1 = 10$  avec  $t_1 = 0$  on ne peut transformer en travail que  $\frac{1}{28}$  de la chaleur disponible. Mais, en revanche, si l'on fait fonctionner la machine en sens contraire en prenant pour réservoir à  $t_1$  l'eau d'un étang à 0 degré et pour réservoir à  $t_2$  l'air d'un appartement à 10 degrés, avec 433,5 dynes, on fera

gagner à cet air 28 calories. Il n'y a rien en cela de contraire au principe de l'équivalence, car le travail employé donne par sa transformation une seule calorie; les 27 autres sont seulement transportées de l'eau froide à l'air. Ainsi la machine qui précède se montre, entre 0 degré et 10 degrés, très-désavantageuse lorsqu'on veut obtenir du travail, étant donnée de la chaleur, et très-avantageuse dans le cas contraire.

Au premier moment, il est naturel de soupçonner que l'exemple est mal choisi et qu'avec une autre machine la chaleur pourra être beaucoup mieux utilisée; mais nous verrons plus loin que toutes les machines qui sortent de la classe dont il s'agit donnent dans les mêmes circonstances un résultat plus défavorable encore, et que les machines qui rentrent dans cette classe donnent toutes exactement les mêmes résultats que celle qui vient d'être étudiée; on les nomme *machines parfaites*, parce que, ainsi qu'on le verra, leur rendement est maximum. Déjà, dans l'emploi du gaz, le rendement (44) se montre à peu près indépendant de la nature chimique et de la pression, puisque la constante 274 est sensiblement applicable à tous les cas *pour une première approximation*. Le travail interne ayant été négligé, on ne peut d'ailleurs s'attendre à une vérification plus exacte.

Plusieurs démonstrations *à priori* ont été données du principe de l'égalité de rendement énoncé au commencement de ce chapitre, mais on le présentait sous d'autres formes; aucune de ces démonstrations ne me paraît valable. Suivant moi, la seule manière de le rendre certain, c'est d'en déduire des conséquences *nombreuses et variées* en l'appliquant à des machines très-diverses; puis de s'assurer de l'exactitude de ces conséquences par leur comparaison avec les résultats des expériences déjà faites ou par des vérifications ultérieures. Cette méthode me paraît seule légitime; le monde matériel tel qu'il est doit son existence à un acte libre de la volonté du Créa-

leur ; aucun raisonnement n'est capable de faire découvrir les lois fondamentales qui le régissent et qui ne sont pas les seules possibles.

Dans l'étude des vérifications, il est au moins fort difficile de préciser le point où naît la certitude et au-delà duquel les raisonnements donnent des conséquences qui s'imposent ; il n'y a aucun inconvénient d'ailleurs à montrer, chaque fois que cela est possible, la concordance des résultats déduits des principes avec ceux que fournissent des expériences bien faites. Sous ce rapport un excès ne peut nuire, il ne peut même être inutile. Les vérifications rassemblées dans cet ouvrage sont *évidemment plus que suffisantes*, et dans l'état actuel de la théorie mécanique de la chaleur, on doit considérer comme certaines les conséquences bien déduites du principe de l'égalité de rendement, même celles qui n'ont pas été ou qui ne peuvent pas être vérifiées. Il serait naturel de les rejeter à la fin ; mais il est plus commode de demander au lecteur une confiance anticipée qui est sans danger puisqu'il reconnaîtra lui-même plus loin qu'elle est parfaitement bien fondée<sup>1</sup>.

Le second principe de la théorie mécanique de la chaleur a été découvert en 1824 par Sadi Carnot, puis développé plus tard avec quelques conséquences utiles dans un mémoire remarquable de M. Clapeyron. Mais il manquait à ces deux savants la connaissance du principe de l'équivalence, et ce n'est qu'après avoir été rectifiée et complétée par MM. Clausius et Rankine que la proposition de Carnot est devenue véritablement exacte. Depuis, on l'a présentée sous diverses formes qui

---

1. Les propriétés des fluides élastiques montrent que le second principe s'applique très-bien aux machines dans lesquelles les corps sont employés exclusivement à l'état gazeux ; ce principe conduit en outre aux lois que suivent les attractions à *très-petites* distances, puis à celles qui régissent les tensions maximum, les chaleurs latentes, etc. ; c'est par centaines que l'on compte aujourd'hui les vérifications obtenues.

laissaient à désirer, et M. Clausius dit lui-même dans l'un de ses Mémoires : « *Ce théorème reste enveloppé dans une forme abstraite sous laquelle il est difficilement accessible à l'intelligence, et l'on se sent forcé de chercher la vraie cause physique dont ce théorème est la conséquence.* »

En changeant la manière de présenter ce principe et son énoncé, j'ai eu précisément pour but d'en faire connaître le sens exact, de sorte que, dans les calculs nécessités par les applications, il n'y ait plus d'hésitations possibles sur le choix des quantités dont il faut tenir compte et sur le rôle qu'elles doivent jouer. C'est un avantage que ne présente point le théorème de l'équivalence des transformations de M. Clausius ; avec le principe de l'égalité de rendement, ce savant distingué n'eût certainement pas introduit dans les calculs les changements de désagrégation. D'ailleurs, le second principe, sous sa nouvelle forme, s'applique aussi facilement à des questions de magnétisme ou d'électricité, par exemple, qu'à des questions relatives à la chaleur.

Avant de passer aux applications du principe de l'égalité de rendement, nous allons en étudier quelques conséquences générales.

*Equivalence des descentes sans chutes et des ascensions.* — Quand on dispose d'une quantité de chaleur  $Q$  à la température  $t_1$  et d'un corps immense à  $t_0 < t_1$ , on peut toujours, d'après ce qui précède, obtenir, au moyen d'une machine parfaite, un travail  $EQ \frac{t_1 - t_0}{274 + t_1}$  ; mais en même temps une quantité de chaleur que nous représenterons par  $Q_1$  descend sans chute de  $t_1$  à  $t_0$ , et cette quantité a pour valeur

$$(45) \quad Q_1 = Q \frac{274 + t_0}{274 + t_1}.$$

Pour obtenir une ascension que nous appellerons équivalente, parce qu'elle la remplace sans qu'il y ait *finale*ment du travail

produit ou dépensé, il faut concevoir une seconde machine fonctionnant entre deux températures  $t'_0$  et  $t'_1 > t'_0$  choisies arbitrairement, et en faire usage pour obtenir, à l'aide du travail disponible  $Q \frac{t_1 - t_0}{274 + t_1}$ , une quantité de chaleur  $Q'_1$  à  $t'_1$ . Le rapport de ces deux dernières quantités est connu d'avance et détermine  $Q'_1$ ; on a

$$(46) \quad Q \frac{t_1 - t_0}{274 + t_1} : Q'_1 = \frac{t'_1 - t'_0}{274 + t'_0};$$

ou bien, en remplaçant  $Q$  par sa valeur précédente en fonction de  $Q_1$ ,

$$(47) \quad Q_1 \frac{t_1 - t_0}{274 + t_0} = Q'_1 \frac{t'_1 - t'_0}{274 + t'_0}.$$

Ainsi, pour que la descente sans chute de la température  $t_1$  à la température  $t_0$  d'une quantité de chaleur  $Q_1$  soit équivalente à l'ascension de  $t'_0$  à  $t'_1$  d'une quantité de chaleur  $Q'_1$ , il est nécessaire et suffisant que l'on obtienne des produits égaux en multipliant ces quantités chacune par une fraction ayant pour numérateur la différence des températures et pour dénominateur le binôme de dilatation correspondant à la température la plus basse.

Il n'est pas plus difficile d'établir les conditions d'équivalence entre plusieurs descentes sans chutes et plusieurs ascensions; on peut même les écrire de suite par analogie.

*Rendement maximum.* — Lorsqu'il existe une chute dans une machine fonctionnant entre les températures  $t_1$  et  $t_2 > t_1$ , on peut toujours à l'aide de machines accessoires parfaites opérer la descente sans chute et élever en même temps une quantité de chaleur positive donnée par l'équation (47), du réservoir à  $t_1$  au réservoir à  $t_2$ . La machine principale utilisant ensuite cette chaleur, le rendement se trouve accru et l'on sait de combien. On en conclut de suite que dans les machines périodiques, seules utiles dans l'industrie, pour avoir un *rende-*

*ment maximum*, il est nécessaire d'éviter les chutes. Le principe de l'égalité de rendement fait voir d'ailleurs que cette condition est suffisante puisque le choix de la machine devient *indifférent*. Ce même principe prouve que le rendement d'une machine parfaite fonctionnant entre  $t_3$  et  $t_1 < t_3$  est le même que celui d'un assemblage de deux machines parfaites fonctionnant la première entre  $t_3$  et  $t_2 < t_3$ , et la seconde entre  $t_2$  et  $t_1 < t_2$ . Cela résulte de ce que cet assemblage de deux machines peut être considéré comme *une* machine parfaite plus compliquée mais satisfaisant encore à la définition. On aperçoit facilement d'ailleurs l'identité de l'équation

$$(48) \quad \frac{t_3 - t_1}{274 + t_3} = \frac{t_3 - t_2}{274 + t_3} + \frac{274 + t_2}{274 + t_3} \cdot \frac{t_2 - t_1}{274 + t_2},$$

qui exprime que, pour chaque calorie, le travail fourni par une machine fonctionnant entre  $t_3$  et  $t_1$  égale le travail fourni par une machine fonctionnant entre  $t_3$  et  $t_2$ , plus le travail que l'on obtient d'une machine fonctionnant entre  $t_2$  et  $t_1$ , à laquelle on donne le reste de la calorie non utilisé par la première machine. L'extension de cette remarque à plus de deux machines n'offre aucune difficulté.

*Mouvement perpétuel.* — On a beaucoup cherché des combinaisons d'organes mécaniques capables de fournir un travail continu sans en recevoir aucun ou en recevant moins qu'elles ne rendent. Cette recherche est condamnée par le principe de l'équivalence; mais pour ceux qui n'étudient que ce principe, sans y joindre celui de l'égalité de rendement, le mouvement perpétuel apparaît comme possible à l'aide de la chaleur qu'une machine peut puiser en quantité indéfinie dans les corps qui l'environnent, tels que l'air atmosphérique, l'eau, etc. Toutefois, si l'on ne dispose que d'une quantité indéfinie de chaleur à *une seule température* sans avoir la possibilité de faire descendre cette chaleur dans un corps plus froid, le principe de l'égalité de rendement montre encore le mouvement



perpétuel compris de cette manière comme impossible. En effet, dans ce cas, les températures  $t_2$  et  $t_1$ , entre lesquelles la machine est obligée de fonctionner, deviennent égales, et le rendement *maximum*  $\frac{t_2 - t_1}{274 + t_2}$  est nul ; le résultat cherché ne peut donc être atteint. La réciproque est vraie : si le mouvement perpétuel est impossible, le principe de l'égalité de rendement a lieu ; car, dans l'hypothèse de rendements inégaux pour deux machines thermiques sans chute, périodiques et réversibles fonctionnant entre les températures  $t_1$  et  $t_2$ , l'une serait plus avantageuse pour fournir de la chaleur, étant donné du travail ; on pourrait l'employer dans ce sens, et la chaleur à  $t_2$ , fournie par elle, rendrait au moyen de l'autre machine un travail supérieur à celui qui aurait été dépensé d'abord, c'est-à-dire que, contrairement à l'hypothèse, on arriverait au mouvement perpétuel avec de la chaleur à une seule température.

---

## CHAPITRE V

## Équations générales.

Lorsqu'on prend 1 kilogramme d'un corps quelconque homogène, ayant pour volume  $u$  à la température  $t$  et sous la pression  $p$  kilogrammes par mètre carré, il arrive généralement que son état est déterminé par deux de ces trois quantités, de sorte qu'il existe entre elles une relation

$$(49) \quad p = f(u, t),$$

et toutes les fois que les variables  $u, t$  reviennent aux mêmes valeurs, il en est de même pour  $p$ . Nous allons considérer exclusivement les cas où il en est ainsi, écartant ceux où une altération chimique survient, ou bien une altération physique permanente, telle qu'une cristallisation par exemple. Les formules obtenues seront presque toujours applicables aux liquides et aux gaz ; on devra souvent au contraire les appliquer avec défiance aux solides, qui, après avoir subi des actions mécaniques, ne reviennent pas toujours identiquement à leur état primitif lorsque les forces cessent d'agir, et dans lesquels d'ailleurs la pression n'est pas toujours la même partout et dans tous les sens.

$u$  et  $t$  étant donnés, cela suffit pour caractériser l'état du corps, et tout ce qui s'y rapporte est déterminé ; nous pouvons donc représenter par  $\varphi(u, t) - \varphi(u_1, t_1)$  le travail interne accompli pendant le passage de l'état  $(u_1, t_1)$  à l'état  $(u, t)$ .

Cela posé, considérons un assemblage de machines thermiques parfaites, liées par un communicateur convenable avec un volant animé d'une grande force vive et disposées de manière à pouvoir, les unes donner de la chaleur quand on leur

fournit du travail, et les autres du travail quand on leur fournit de la chaleur ; supposons que la plus basse des deux températures entre lesquelles elles fonctionnent soit la même pour toutes et désignons-la par  $t_1$ . Le corps de pompe de l'une d'entre elles contient 1 kilogramme du corps qu'on veut étudier, il est d'abord à l'état  $(u_1, t_1)$ , et la pression  $p_1$  est la même dans tous les sens. La chaleur à  $t_1$  est fournie ou absorbée par un réservoir supposé immense.

1° Chauffons à volume constant jusqu'à la température  $t_2$  au moyen de quantités de chaleur élémentaires capables d'élever la température et d'équivaloir au travail interne, elles ont pour expression

$$\left[ C + \frac{d\varphi(u_1, t)}{E dt} \right] dt,$$

et leur production par les machines accessoires fait perdre au volant une force vive ayant pour valeur élémentaire

$$\left[ EC + \frac{d\varphi(u_1, t)}{dt} \right] R dt;$$

en tout

$$(50) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[ EC + \frac{d\varphi(u_1, t)}{dt} \right] R dt.$$

Dans l'étude d'une première machine, nous avons trouvé  $R = \frac{t - t_1}{274 + t}$ ; cette valeur est au moins approchée. Ici nous considérerons d'abord  $R$  comme une fonction inconnue de  $t$  et  $t_1$  qu'on sait être la même pour toutes les machines parfaites.

Le réservoir à  $t_1$  fournit la chaleur transportée mécaniquement

$$(51) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[ C + \frac{d\varphi(u_1, t)}{E dt} \right] (1 - R) dt.$$

2° Comprimons à température constante  $t_2$  pour atteindre l'état  $(u_2, t_2)$ ,  $u_2 < u_1$  étant arbitraire et indépendant de  $t_2$ ; dé-

signons par  $R_2$  ce que devient  $R$  quand on y change  $t$  en  $t_2$ . A chaque instant la machine principale fait perdre au volant un travail  $-f(u, t_2) du$  qui se transforme en chaleur, et cette chaleur équivalente est utilisée par les machines accessoires ainsi que celle  $-\frac{d\varphi(u, t_2)}{E du} du$  qui provient du travail interne.

Le volant reçoit

$$-\left[ f(u, t_2) + \frac{d\varphi(u, t_2)}{du} \right] R_2 du,$$

et sa perte finale est

$$(52) \quad - \int_{u_1}^{u_2} f(u, t_2) (1 - R_2) du + \int_{u_1}^{u_2} \frac{d\varphi(u, t_2)}{du} R_2 du.$$

Le réservoir à  $t_1$  reçoit la chaleur déplacée mécaniquement

$$(53) \quad - \int_{u_1}^{u_2} \left[ \frac{f(u, t_2)}{E} + \frac{d\varphi(u, t_2)}{E du} \right] (1 - R_2) du.$$

3° Refroidissons à volume constant  $u_2$ . La chaleur utilisée au moyen des machines accessoires a pour expression

$$-\left[ C + \frac{d\varphi(u_2, t)}{E dt} \right] dt;$$

le volant reçoit

$$(54) \quad - \int_{t_2}^{t_1} \left[ C + \frac{d\varphi(u_2, t)}{dt} \right] R dt,$$

et le réservoir à  $t_1$

$$(55) \quad - \int_{t_2}^{t_1} \left[ C + \frac{d\varphi(u_2, t)}{E dt} \right] (1 - R) dt.$$

4° Dilatons pour revenir à l'état  $u_1 t_1$  en maintenant la température constante au moyen du réservoir de chaleur à  $t_1$ ; le volant reçoit

$$(56) \quad \int_{u_2}^{u_1} f(u, t_1) du,$$

et le réservoir à  $t_1$  donne

$$(57) \quad \frac{1}{E} \int_{u_2}^{u_1} f(u, t_1) du + \int_{u_2}^{u_1} \frac{d\varphi(u, t_1)}{E du} du.$$

*Conclusion.* — La période étant complète, la somme algébrique des gains du volant (50), (52), (54), (56) doit être nulle d'après le principe de l'égalité de rendement et, d'après le principe de l'équivalence, on en conclut ensuite qu'il doit en être de même pour la somme algébrique des gains (51), (53), (55), (57) du réservoir de chaleur à  $t_1$ . Cela fournit deux équations dont la somme est une identité, ce qu'on pouvait prévoir puisque dans tous les détails de calcul on a fait usage du principe de l'équivalence. Voici la formule seule distincte à laquelle on arrive

$$(58) \int_{u_1}^{u_2} [f(u, t_1) - (1-R_2)f(u, t_2)] du = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d\varphi(u_2, t)}{dt} - \frac{d\varphi(u_1, t)}{dt} \right] R dt \\ - \int_{u_1}^{u_2} \frac{d\varphi(u, t_2)}{du} R_2 du.$$

$t_2$  et  $u_2$  étant arbitraires et indépendants, on peut les remplacer par  $t$  et  $u$ , puis différentier par rapport à  $t$ , on trouve en remplaçant (49)  $f(u, t)$  par  $p$

$$(59) \quad \varphi(u, t) - \varphi(u_1, t) = \frac{1-R}{R'} \int_{u_1}^u \frac{dp}{dt} du - \int_{u_1}^u p du.$$

Si maintenant on différentie par rapport à  $u$ , il vient

$$(60) \quad \frac{d\varphi(u, t)}{du} = \frac{1-R}{R'} \frac{dp}{dt} - p.$$

Cette dernière équation prouve que la fraction  $\frac{R'}{1-R}$  ne contient pas  $t$ ; on peut donc poser en nommant  $\psi(t)$  une fonction inconnue de  $t$ ,

$$\frac{R'}{1-R} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$$

et l'intégration donne

$$(1-R) = \frac{\psi_1(t_1)}{\psi(t)}.$$

$\psi_1$  et  $\psi$  ne sont d'ailleurs pas deux fonctions différentes; il est facile de le faire voir en concevant qu'on utilise une calorie

provenant d'une source à la température  $t_3$  d'abord au moyen d'une machine fonctionnant entre  $t_3$  et  $t_1 < t_3$ ; puis au moyen d'une machine *composée* formée 1° d'une partie qui reçoit la calorie et fonctionne entre  $t_3$  et une température  $t_2$  intermédiaire entre  $t_3$  et  $t_1$ ; 2° d'une seconde partie qui reçoit et utilise la chaleur non convertie en travail et seulement transportée du réservoir à  $t_3$  au réservoir à  $t_2$ . D'après le principe de l'égalité de rendement, le travail obtenu dans les deux cas est le même et il en résulte l'équation

$$1 - \frac{\psi_1(t_1)}{\psi_1(t_3)} = 1 - \frac{\psi_1(t_2)}{\psi_1(t_3)} + \frac{\psi_1(t_2)}{\psi_1(t_3)} \left[ 1 - \frac{\psi_1(t_1)}{\psi_1(t_2)} \right],$$

qui donne après réduction

$$\psi_1(t_2) = \psi_1(t_2);$$

ainsi  $1 - R$  est de la forme

$$(61) \quad 1 - R = \frac{\psi(t_1)}{\psi(t)}.$$

La fonction  $\psi$  qui reste seule ici ne peut évidemment être déterminée qu'après la définition des températures; comme il a été dit plus haut, pour éviter toute difficulté, nous ne nous servons point des températures absolues comme on l'a souvent fait dans la théorie mécanique de la chaleur sans les préciser suffisamment. Nous conserverons les degrés 0 et 100 généralement en usage et nous emploierons pour la détermination des autres températures les forces élastiques que prend un gaz à volume *constant* et dans lequel le travail interne dépend du volume seul; on a alors par définition

$$(62) \quad p = p(1 + \alpha t); \quad \frac{d^2 p}{dt^2} = 0;$$

puisque l'on appelle degré de température *le quotient obtenu en divisant la différence entre la pression actuelle et la pression à 0 degré par 100 fois la pression à 0 degré*.

L'équation (60) appliquée à ce gaz et différenciée par rapport

à  $t$  donne, en tenant compte de la valeur trouvée pour  $\frac{1-R}{R'}$ ,

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t)^2} \cdot \psi'(t) = 0.$$

On en conclut

$$\psi''(t) = 0$$

et, en désignant les constantes par A et BA,

$$(63) \quad \psi(t) = A(B+t); \quad 1-R = \frac{B+t_1}{B+t}; \quad R = \frac{t-t_1}{B+t}.$$

La forme de la fonction  $\psi(t)$  étant connue, l'équation (60) devient, en lui conservant toute sa généralité et en nommant T le *binôme de dilatation*  $B+t$ ,

$$(64) \quad \frac{d\varphi(u,t)}{du} = T \frac{dp}{dt} - p.$$

Si on la différentie par rapport à  $t$ , on trouve pour *tous les corps dans lesquels le travail interne dépend du volume seul*, la relation

$$(65) \quad \frac{d^2p}{dt^2} = 0,$$

d'où l'on conclut que  $\frac{dp}{dt}$  est fonction du volume seul, ce qui conduit à la loi suivante :

*Dans toutes les substances de cette classe, considérées à volume constant, les variations de force élastique sont proportionnelles aux variations de température et réciproquement quand cette loi se manifeste pour une substance, le travail interne dépend du volume seul.*

On peut donc les employer indifféremment pour la construction du thermomètre ; mais en pratique il serait au moins très-difficile d'utiliser les liquides en les empêchant de se dilater comme l'exige la définition.

Maintenant que la forme de la fonction R est connue, il

sera bon de reprendre l'équation (58) pour la simplifier. Si on intègre par parties le premier terme du second membre et complètement le dernier terme, les quantités finies disparaissent. On peut ensuite diviser tout par  $T_1$  ou  $B + t$ , et grouper dans le premier membre les termes qui contiennent  $t_2$ , il vient

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, t_2) du}{T_2} - \int_0^{t_2} \frac{\varphi(u_2, t) - \varphi(u_1, t)}{T^2} dt = \int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, t_1) du}{T_1} - \int_0^{t_1} \frac{\varphi(u_2, t) - \varphi(u_1, t)}{T^2} dt.$$

Alors  $t_2$  n'entrant point dans le second membre, on en conclut qu'il n'entre qu'en apparence dans le premier qui, au fond, contient seulement  $u_2$  et  $u_1$ . Il est évident d'ailleurs que ces quantités entrent de la même manière et ne sont point mêlées, de sorte que le premier membre est la différence d'une fonction de  $u_2$  et d'une fonction de  $u_1$ ; on a donc, en remplaçant  $t_2$  par  $t$ ,

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, t) du}{T} = \int_0^t \frac{\varphi(u_2, t) - \varphi(u_1, t)}{T} dt + \chi u_2 - \chi u_1,$$

ou bien, en considérant les deux derniers termes comme contenus implicitement dans celui qui les précède,

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{f(u, t) du}{T} = \int_0^t \frac{\varphi(u_2, t) - \varphi(u_1, t)}{T} dt.$$

Si on raisonne ensuite par rapport à  $u_2$  et  $u_1$  comme par rapport à  $t_2$  et  $t_1$ , on trouve

$$(66) \quad \int \frac{f(u, t) du}{T} = \int \frac{\varphi(u, t) dt}{T^2}.$$

Cette relation plus simple et plus élégante équivaut à la formule (58). Différenciée par rapport à  $t$ , elle donne

$$(67) \quad \varphi(u, t) = T \int \frac{dp}{dt} du - \int p du.$$



Si on la différentie de nouveau, mais par rapport à  $u$ , on retrouve (64). Si on la différentie au contraire une seconde fois par rapport à  $t$ , il vient

$$(68) \quad \frac{d\varphi(u,t)}{dt} = T \int \frac{d^2 p}{dt^2} du.$$

Il est facile d'obtenir une autre expression de la dérivée du travail interne par rapport à la température en faisant usage de la chaleur spécifique à pression constante  $c'$  qui se compose de trois parties énumérées au commencement du chapitre troisième. On trouve

$$(69) \quad E c' dt = E c dt + p du + \frac{d\varphi(u,t)}{du} du + \frac{d\varphi(u,t)}{dt} dt;$$

mais, la pression devant demeurer constante, cette relation n'est acceptable qu'autant qu'on y introduit cette restriction en faisant

$$(70) \quad \frac{dp}{du} du + \frac{dp}{dt} dt = 0$$

et éliminant  $du$ , ce qui donne

$$\frac{d\varphi(u,t)}{dt} = E(c' - c) + \left[ p + \frac{d\varphi(u,t)}{du} \right] \frac{\left( \frac{dp}{dt} \right)}{\left( \frac{dp}{du} \right)}.$$

Alors la relation cherchée s'obtient en substituant (64) la valeur de  $\frac{d\varphi(u,t)}{du}$

$$(71) \quad \frac{d\varphi(u,t)}{dt} = E(c' - c) + T \frac{\left( \frac{dp}{dt} \right)^2}{\left( \frac{dp}{du} \right)}.$$

Si on élimine  $\frac{d\varphi(u,t)}{dt}$  entre (68) et (71), on trouve

$$(72) \quad E(c' - c) = T \left[ \int \frac{d^2 p}{dt^2} du - \frac{\left( \frac{dp}{dt} \right)^2}{\left( \frac{dp}{du} \right)} \right].$$

La capacité à pression constante serait indépendante du volume si l'on avait

$$(73) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{d}{du} \left[ \frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dp}{du}\right)} \right].$$

Afin de rendre plus faciles certaines applications numériques, il est bon d'introduire, au lieu des dérivées partielles de la pression, les coefficients de dilatation et de compressibilité. Si on appelle  $\alpha'$  la limite du rapport de l'accroissement de l'unité de volume sous pression constante à l'accroissement de température et  $\beta$  la limite à température constante du rapport de la diminution de l'unité de volume à l'accroissement de pression exprimé en atmosphères, on a

$$(74) \quad \frac{dp}{dt} + \alpha' u \frac{dp}{du} = 0,$$

$$(75) \quad \frac{dp}{du} + \frac{10333}{\beta u} = 0,$$

et par suite

$$(76) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{10333 \alpha'}{\beta}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (64) et (71), elles deviennent

$$(77) \quad \frac{d\varphi(u,t)}{du} = 10333 T \frac{\alpha'}{\beta} - p,$$

$$(78) \quad \frac{d\varphi(u,t)}{dt} = E(c' - c) - 10333 T \frac{\alpha' u}{\beta}.$$

*Changement de température dû à une compression.* — Les formules précédentes permettent de calculer les changements de température produits par des compressions. Quand on augmente la pression exercée également en tous sens sur un corps, son volume diminue et la chaleur dans laquelle se transforment le travail mécanique interne et le travail externe

produit l'élevation de température ; on a donc, d'après le principe de l'équivalence,

$$E c dt = -p du - \frac{d\varphi(u,t)}{du} du - \frac{d\varphi(u,t)}{dt} dt.$$

En substituant les valeurs (75) et (76) des dérivées du travail interne, il vient

$$(79) \quad dt = - \frac{10333 T \alpha' du}{E c' \beta - 10333 T \alpha'^2 u}.$$

Il est plus commode pour la plupart des vérifications expérimentales d'introduire la différentielle de la pression au lieu de celle du volume ; on trouve alors

$$(80) \quad dt = \frac{\alpha' T u}{E c'} dp.$$

Cette formule remarquable est due à M. William Thomson qui l'a obtenue d'une autre manière. On peut sans grande erreur y remplacer les différentielles par les différences finies, car les quantités  $c'$ ,  $\alpha'$  et  $u$  varient très-lentement ; c'est ainsi que M. Hirn a calculé pour l'eau les résultats contenus dans le tableau suivant où ils sont mis en regard de ceux que l'expérience a donnés directement à M. Joule.

$t$	$\frac{\Delta p}{10333}$	$\Delta t$ calculé.	$\Delta t$ par expérience.
0		0	0
1,2	24,34	-0,0069	-0,0083
5	24,34	+0,0025	+0,0044
11,69	24,34	+0,0193	+0,0205
18,38	24,34	+0,0363	+0,0314
30	24,34	+0,0547	+0,0544
31,37	14,64	+0,0344	+0,0394
40,4	14,6	+0,0434	+0,0450

Lorsqu'on fait subir au mercure un accroissement de pres-

sion de 9 atmosphères en partant de la pression ordinaire, la formule indique pour variations

$$0^{\circ},0243 \quad 0^{\circ},0262 \quad 0^{\circ},0284 \quad 0^{\circ},0306 \quad 0^{\circ},0328$$

quand on a

$$0^{\circ} \quad 25^{\circ} \quad 50^{\circ} \quad 75^{\circ} \quad 100^{\circ}$$

pour températures initiales.

Les formules (79) et (80) s'appliquent encore à une expansion avec travail complet; mais si l'on met brusquement en communication l'espace rempli par le corps considéré et un autre espace exactement vide, de manière à produire une expansion *du* limitée, sans qu'aucun travail externe soit accompli, il faut simplement exprimer l'équivalence entre le travail interne et la chaleur due à l'abaissement de température. On a entre les différentielles *dt* et *du* la relation

$$(81) \quad -Ec dt = \frac{d\varphi(u,t)}{du} du + \frac{d\varphi(u,t)}{dt} dt,$$

qui devient, par l'emploi de (77) et (78),

$$(82) \quad dt = \left[ \frac{1}{\alpha' u} - \frac{p\beta}{10333 \alpha'^2 T u} \right] du,$$

ou bien, par l'emploi de (64) et (71),

$$(83) \quad dt = \frac{p \frac{dp}{du} - T \frac{dp}{dt} \frac{dp}{du}}{Ec' \frac{dp}{du} + \frac{T}{10333} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2} du.$$

*Valeur du rendement R.* — Nous avons trouvé (63) pour R l'expression  $\frac{t-t_1}{B+t}$  contenant encore une constante inconnue B qu'il importe de déterminer complètement. Pour y parvenir remplaçons dans (64) appliqué à un gaz dans lequel le travail interne dépend du volume seul, *p* et  $\frac{dp}{dt}$  par leurs valeurs (62).

Nous appuyant sur un théorème qui sera démontré dans le chapitre VIII, remplaçons aussi  $\frac{d\varphi(u,t)}{du}$  par le produit d'une constante  $\alpha$  et du carré  $\Delta^2$  de la densité relative à l'eau ; cela donne après réductions

$$(84) \quad B\alpha - 1 = \alpha \cdot \frac{\Delta}{p_0} \cdot \Delta.$$

$\frac{\Delta}{p_0}$  est à peu près constant d'après la loi de Mariotte, et si  $\Delta$  tend vers 0, on trouve

$$(85) \quad B = \lim \frac{1}{\alpha},$$

et il suffit, pour obtenir B, de chercher cette limite au moyen des expériences de M. Regnault. A la page 110 du tome I<sup>er</sup> de la relation de ses expériences, cet éminent physicien donne pour l'air pris à volume constant un tableau des valeurs de  $\alpha$  à l'aide duquel j'ai calculé une formule empirique

$$(86) \quad \alpha = \frac{1}{B} + A'h_0 + B'h_0^2,$$

donnant  $\alpha$  en fonction de la pression  $h_0$  exprimée en millimètres de mercure. B, A' et B' ont été obtenus en faisant accorder la formule avec les expériences dans lesquelles  $h_0$  avait pour valeurs 109,72 ; 760 ; 3655,56 ; cela donne

$$\frac{1}{B} = 0,003645116 ; \quad \log A' = \bar{8},4538710 ; \quad \log B' = \bar{12}.4757841.$$

Les résultats des autres expériences s'accordent bien avec ceux que donne le calcul, ainsi qu'on le voit dans le tableau suivant.

$h_0$	$\alpha$		DIFFÉRENCES.
	par expérience.	calculé.	
109,72	0,0036482	0,0036482	0
174,36	0,0036513	0,00364998	+0,0000013
266,06	0,0036542	0,00365247	+0,0000017
374,67	0,0036587	0,00365535	+0,0000033
375,23	0,0036572	0,00365536	+0,0000018
760,00	0,0036650	0,0036650	0
1678,40	0,0036760	0,0036842	-0,0000084
1692,53	0,0036800	0,00368468	-0,0000047
2144,18	0,0036894	0,00369235	-0,0000029
3655,56	0,0037091	0,0037091	0

La limite cherchée est donc

$$(87) \quad \frac{1}{B} = 0,003645; \quad B = 274,34.$$

Pour l'acide carbonique la même valeur de B employée avec

$$\log A' = \bar{8},7664542; \quad \log B' = \bar{13},5943804$$

donne aussi un accord satisfaisant entre les valeurs expérimentales de  $\alpha$  et les valeurs calculées; on a ainsi une vérification qui ressort du tableau suivant.

$h_0$	$\alpha$		DIFFÉRENCES.
	par expérience.	calculé.	
758,47	0,0036856	0,00368964	-0,000004
901,09	0,0036943	0,00369806	-0,000004
1742,73	0,0037523	0,00374809	+0,000004
3589,07	0,0038598	0,00385980	0

Le rendement  $R = \frac{t - t_0}{274 + t} = \frac{t - t_0}{T}$  se trouve de la sorte entièrement déterminé, et nous ferons usage de cette valeur désormais dans toutes les applications. Pour certaines d'entre

elles il est commode de donner à l'une des équations générales la forme élégante sous laquelle on la donne souvent. Si un corps considéré perd  $dQ$  calories à la température  $t$ , le volant gagne une force vive équivalente à  $(t-t_1)\frac{dQ}{T_1}$ ,  $t_1$  étant la température du réservoir immense de chaleur qui accompagne la machine. Ce réservoir lui-même gagne, comme on l'a vu,  $T_1\frac{dQ}{T}$ , et cette expression convient encore pour le cas d'un gain en supposant  $dQ$  négatif. Après une période complète, le réservoir à  $t_1$  doit se retrouver dans son état primitif; on a donc

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

puisque le facteur constant  $T_1$  peut être supprimé.

Si, pendant la période, une chute s'opère, le volant ne reçoit rien par suite de ce mouvement de la chaleur et le réservoir à  $t_1$  reçoit davantage; on peut donc affirmer qu'alors on a

$$\int \frac{dQ}{T} > 0,$$

et aussi que le volant a perdu de sa force vive initiale.

*Remarque.* — Le principe de l'égalité de rendement et les équations générales contenues dans ce chapitre peuvent être appliqués à des machines périodiques où il existe des chutes, pourvu qu'on en tienne compte dans les calculs en supposant que les machines accessoires parfaites produisent le déplacement de chaleur, ce qui ramène les machines à chutes au cas des machines sans chutes.

## CHAPITRE VI

## Théorie des gaz.

Les principes de l'équivalence et de l'égalité de rendement ne peuvent évidemment point suffire pour fonder la théorie des gaz puisqu'ils s'appliquent à tous les états et il aurait été impossible de rendre cette théorie satisfaisante sans les expériences de M. Regnault sur cette classe de corps ; je vais l'exposer ici et en confirmer les détails par la comparaison avec les résultats dus à cet habile observateur. Il semblerait préférable d'aborder de suite les vérifications les plus saillantes du second de ces principes, celles par exemple qui ont rapport aux changements d'état ; mais les vapeurs ne suivent pas assez exactement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac pour qu'on puisse, dans l'état actuel de la science, les bien étudier sans l'emploi, dans certains cas, de lois plus approchées.

Pour les obtenir, reprenons la formule générale (64). Si on néglige son premier membre qui est très-petit, elle s'intègre sans difficulté et donne

$$(88) \quad p = U_1 T = \frac{\Lambda T}{u + U}$$

$U$ , désigne une fonction arbitraire de  $u$  que l'on peut remplacer par une fraction ayant un numérateur  $\Lambda$  constant et pour dénominateur le binôme  $u + U$  dans lequel  $U$  désigne une fonction arbitraire de  $u$ . On voit déjà que l'on a considéré à tort la loi de Mariotte comme une conséquence théorique de



l'hypothèse que le travail interne est négligeable ; car elle rentre dans (88) seulement à titre de cas particulier.

De cette équation on tire

$$\frac{dp}{dt} = \frac{A}{u + U}$$

et la valeur de  $\frac{dp}{dt}$  étant très-faible en comparaison de  $p$ , la méthode des approximations successives s'applique ici avec succès ; il suffit de mettre  $\frac{A}{u + U}$  à la place de  $\frac{dp}{dt}$  dans (64) pour atteindre une seconde approximation à laquelle nous nous bornerons dans ce chapitre, il vient

$$(89) \quad p = \frac{AT}{u + U} - \frac{d\varphi(u, t)}{du}.$$

Dans les circonstances ordinaires  $\frac{d\varphi(u, t)}{du}$  est très-petit, et il en est de même de  $U$ , puisque la loi de Mariotte est presque exacte. *Entre des limites assignées et non trop étendues de température et de pression*, on aura donc une formule plus approchée et plus satisfaisante que celle qui résulte des lois de Mariotte et de Gay-Lussac en prenant  $u$  constant et égal à sa valeur moyenne ; puis faisant subir à cette quantité ainsi qu'à  $B$  une légère correction pour tenir compte de la valeur moyenne de  $\frac{d\varphi(u, t)}{du}$ . On a alors

$$(90) \quad p = \frac{A(B_1 + t)}{u + c_0 u_0} = \frac{10333(u_0 + c_0 u_0) B_1 + t}{u + c_0 u_0} \cdot \frac{B_1 + t}{B_1}.$$

. LOI DES COVOLUMES. — *A température constante, les tensions d'une masse gazeuse sont en raison inverse des volumes tous augmentés d'une petite quantité constante  $c_0 u_0$  qui les complète et porte le nom de covolume lorsque le volume  $u_0$ , dans les circonstances normales, est l'unité.*

*Fonction de M. Regnault.* — Dans la discussion de ses nombreuses expériences sur les lois de compressibilité des gaz, M. Regnault calcule les valeurs que prend à température constante la fonction  $\frac{pu}{p'u'} - 1$ , qui serait nulle, si la loi de Mariotte était exacte. Il exprime, à la page 410 du tome I<sup>er</sup> de la relation de ses expériences, le désir de voir appliquer l'analyse à la recherche de la valeur générale de cette fonction qu'il juge trop compliquée pour que l'expérience seule la fasse découvrir. On l'obtient facilement au moyen de l'équation (90). Appliquons-la successivement aux états  $p, t$  et  $p', t'$ , puis isolons les termes  $pu, p'u'$  et divisons; il vient

$$(91) \quad \frac{pu}{p'u'} - 1 = \frac{p'T_1 - pT'_1}{10333T_1^2} B_1 c_0 - \frac{t' - t}{T_1'}$$

Pour calculer le covolume au moyen de deux expériences quelconques, il faut résoudre par rapport à  $c_0$ , ce qui donne

$$(92) \quad c_0 = \left[ \left( \frac{pu}{p'u'} - 1 \right) T_1' + (t' - t) \right] \frac{10333T_1'}{B_1(p'T_1 - pT_1')}$$

L'emploi de ces deux équations n'offre aucune difficulté; d'ailleurs, M. Regnault ayant considéré exclusivement le cas où  $t' = t$ , il y a lieu à les simplifier en y introduisant cette hypothèse, on trouve

$$(93) \quad \frac{pu}{p'u'} - 1 = \frac{p' - p}{10333T_1} B_1 c_0$$

$$(94) \quad c_0 = \left( \frac{pu}{p'u'} - 1 \right) \frac{10333T_1}{B_1(p' - p)}$$

$C_0$  étant une quantité constante, on tire de (93) les conséquences suivantes :

1° *La fonction de M. Regnault est proportionnelle à la différence des deux pressions;*

2° *Elle est inversement proportionnelle au binôme de dilatation et, par conséquent, pour deux mêmes pressions, elle*

décroit, ainsi que le remarque M. Regnault, à mesure que la température s'élève, et elle tend à se confondre avec les erreurs d'expérience, surtout si la différence des pressions est faible.

Étant données trois des quatre quantités  $p$ ,  $u$ ,  $p'$ ,  $u'$  et la température, l'équation (93) donne facilement la quatrième.

*Vérifications expérimentales.*—M. Regnault donne pour l'air, l'azote, l'acide carbonique et l'hydrogène des tableaux contenant les résultats de ses observations et les valeurs numériques de sa fonction; je m'en suis servi pour calculer, au moyen de l'équation (94), les covolumes que j'ai mis en regard des données.

NUMÉROS des expériences.	$t$ .	$\frac{p'}{10333}$ .	$\frac{p'}{p}$ .	$\frac{760(p'-p)}{10333}$ .	$\frac{pu}{p'u'} - 1$ .	COVOLUMES.
<b>TABLEAU N° I. — Air atmosphérique.</b>						
1—2	4,04	1,9	2,0	738	0,001414	0,00148
3—4	»	»	»	737	0,001448	0,00152
5—6	»	»	»	737	0,001224	0,00128
7—8	»	»	»	738	0,001421	0,00148
						Moy. 0,00144
9—10	4,68	5,5	2,0	2097	0,002765	0,00102
11—12	»	»	»	2097	0,002759	0,00102
13—15	»	»	»	2099	0,002503	0,00092
					‡	Moy. 0,00099
12—14	4,68	8,4	3,0	4239	0,003539	0,00064
14—15	»	»	»	4238	0,003452	0,00063
15—16	»	»	»	4238	0,003309	0,00060
						Moy. 0,00063
17—18	4,88	5,4	2,0	2060	0,002709	0,00102
18—19	»	»	»	2057	0,002724	0,00102
20—21	»	»	»	2059	0,002713	0,00102
21—22	»	»	»	2061	0,002528	0,00095
23—24	»	»	»	2055	0,002898	0,00109
24—25	»	»	»	2055	0,002762	0,00104
						Moy. 0,00103

NUMÉROS des expériences.	$t.$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p''}{p}$	$\frac{760(p' - p)}{10333}$	$\frac{pu}{p'u} - 1.$	COVOLUMES.
26—27	4,91	10,8	2,0	4037	0,003253	0,00062
27—28	»	»	»	4039	0,003090	0,00059
29—30	»	»	»	4034	0,003302	0,00063
						Moy. 0,00062
31—32	4,90	11,1	2,0	4185	0,003336	0,00062
33—34	»	»	»	4189	0,003495	0,00065
35—36	»	»	»	4186	0,003335	0,00062
37—38	»	»	»	4190	0,003448	0,00064
						Moy. 0,00063
35—37	4,90	17,0	3,1	8763	0,005437	0,00048
37—39	»	»	»	8763	0,005703	0,00050
						Moy. 0,00049
40—41	4,80	17,6	2,0	6713	0,004286	0,00049
43—44	»	»	»	6701	0,004512	0,00052
44—45	»	»	»	6715	0,004599	0,00053
48—49	»	»	»	6687	0,004580	0,00053
						Moy. 0,00052
40—42	4,80	25,0	2,8	12232	0,008536	0,00054
42—44	»	25,4	»	12235	0,008813	0,00054
44—46	»	»	»	12545	0,008016	0,00050
47—49	»	»	»	12519	0,008064	0,00050
46—49	»	»	»	12540	0,007980	0,00049
						Moy. 0,00051
50—51	4,81	16,7	2,0	6338	0,004611	0,00056
53—54	»	»	»	6340	0,004752	0,00058
						Moy. 0,00057
50—52	4,81	25,5	3,0	13012	0,008930	0,00053
52—54	»	»	»	13007	0,008755	0,00052
						Moy. 0,00053
55—56	4,70	25,3	2,0	9215	0,006366	0,00053
57—58	»	»	»	9220	0,006132	0,00051
59—60	»	»	»	9200	0,006010	0,00050
60—61	»	»	»	9217	0,006346	0,00052
						Moy. 0,00052

NUMÉROS des expériences.	$t$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p'}{p}$	$\frac{760(p'-p)}{10333}$	$\frac{pu}{p'u'} - 1$	COVOLUMES.
<b>TABLEAU N° I (suite). — Air atmosphérique.</b>						
63—64	4,61	27,8	1,8	9497	0,005619	0,00046
64—65	"	"	"	9494	0,005622	0,00046
65—66	"	"	"	9669	0,005902	0,00047
						Moy. 0,00046
<b>TABLEAU N° II. — Azote.</b>						
1—2	5,09	2,0	2,0	752	0,001012	0,00104
2—3	"	"	"	751	0,001617	0,00167
3—4	"	"	"	752	0,000988	0,00102
4—5	"	"	"	752	0,000650	0,00067
5—6	"	"	"	752	0,000788	0,00081
						Moy. 0,00104
7—8	5,08	3,0	2,0	1157	0,000996	0,00067
8—9	"	"	"	1157	0,001074	0,00072
10—11	"	"	"	1155	0,001068	0,00072
11—12	"	"	"	1158	0,001014	0,00068
						Moy. 0,00069
13—14	5,14	5,7	2,0	2153	0,001097	0,00039
14—15	"	"	"	2154	0,000966	0,00035
15—16	"	"	"	2154	0,001381	0,00050
16—17	"	"	"	2154	0,001321	0,00047
17—18	"	"	"	2154	0,001245	0,00045
						Moy. 0,00043
19—20	5,10	8,0	2,0	3029	0,001950	0,00050
20—21	"	"	"	3031	0,001955	0,00050
21—22	"	"	"	3023	0,001840	0,00047
22—23	"	"	"	3022	0,001936	0,00050
						Moy. 0,00049
24—25	5,01	10,3	2,0	3889	0,002555	0,00051
25—26	"	"	"	3895	0,002115	0,00042
28—29	"	"	"	3890	0,002536	0,00050
29—30	"	"	"	3890	0,002377	0,00047
32—33	"	"	"	3890	0,002664	0,00053
						Moy. 0,00049

NUMÉROS des expériences.	$t$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p'}{p}$	$\frac{760(p'-p)}{10333}$	$\frac{pu}{p'u'} - 1$	COVOLUMES.
<b>TABLEAU N° II (suite). — Azote.</b>						
25—27	5,01	17,2	3,3	9160	0,005541	0,00047
27—29	"	"	"	9161	0,005222	0,00044
29—31	"	16,7	3,2	8791	0,004901	0,00043
31—33	"	"	"	8790	0,004907	0,00043
						Moy. 0,00044
34—35	4,96	13,0	2,0	4919	0,002952	0,00046
35—36	"	"	"	4924	0,002860	0,00045
38—39	"	"	"	4926	0,002830	0,00045
39—40	"	"	"	4927	0,002781	0,00044
42—43	"	"	"	4929	0,002769	0,00044
						Moy. 0,00045
35—37	4,96	28,0	3,2	10858	0,005691	0,00040
37—39	"	"	"	10858	0,005630	0,00040
39—41	"	"	"	10917	0,005596	0,00040
41—43	"	"	"	10917	0,005533	0,00039
						Moy. 0,00040
44—45	4,86	15,7	2,0	5917	0,003431	0,00045
45—46	"	"	"	5920	0,003271	0,00043
48—49	"	"	"	5917	0,003779	0,00049
49—50	"	"	"	5922	0,003213	0,00042
52—53	"	"	"	5922	0,003481	0,00045
						Moy. 0,00045
45—47	4,86	24,8	3,2	12983	0,006493	0,00039
47—49	"	"	"	12983	0,006569	0,00039
49—51	"	"	"	13069	0,006782	0,00040
51—53	"	"	"	13068	0,006999	0,00041
						Moy. 0,00040
54—55	4,96	19,0	2,0	7241	0,003770	0,00040
57—58	"	"	"	7250	0,003523	0,00040
60—61	"	"	"	7237	0,004088	0,00044
61—62	"	"	"	7240	0,003963	0,00042
						Moy. 0,00042
54—56	4,96	27,0	2,8	13057	0,006849	0,00041
56—57	"	"	"	13058	0,006836	0,00040
57—59	"	"	"	13199	0,007239	0,00042
59—61	"	"	"	13196	0,007413	0,00043
						Moy. 0,00042

NUMÉROS des expériences.	$t$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p'}{p}$	$\frac{760(p'-p)}{10333}$	$\frac{pv}{p'u} - 1$	COVOLUMES.
<b>TABLEAU N° II (suite). — Azote.</b>						
63—64	5,20	19,0	2,0	7241	0,003924	0,00042
66—67	"	"	"	7240	0,004174	0,00045
67—68	"	"	"	7243	0,004014	0,00043
70—71	"	"	"	7243	0,004287	0,00046
						Moy. 0,00044
63—65	5,20	27,0	2,8	13098	0,007309	0,00043
65—67	"	"	"	13098	0,007426	0,00044
67—69	"	"	"	13150	0,007779	0,00046
69—71	"	"	"	13151	0,007793	0,00046
						Moy. 0,00045
72—73	5,13	22,7	2,0	8621	0,004768	0,00043
75—76	"	"	"	8615	0,004723	0,00042
76—77	"	"	"	8620	0,004602	0,00041
79—80	"	"	"	8618	0,004515	0,00041
						Moy. 0,00042
72—74	5,13	27,5	2,4	12161	0,005739	0,00037
74—76	"	"	"	12154	0,005596	0,00036
76—78	"	"	"	12193	0,005861	0,00037
78—80	"	"	"	12195	0,005769	0,00037
						Moy. 0,000365
81—82	4,93	25,5	2,0	9686	0,005147	0,00041
82—83	"	"	"	9681	0,004657	0,00037
83—84	"	"	"	9675	0,004822	0,00039
84—85	"	"	"	9675	0,005032	0,00040
85—86	"	"	"	9680	0,004588	0,00037
86—87	"	"	"	9678	0,004881	0,00039
						Moy. 0,00039
88—89	4,09	27,8	1,9	10095	0,006456	0,00049
89—90	"	"	"	10095	0,006309	0,00048
90—91	"	"	"	10139	0,006458	0,00049
91—92	"	"	"	10143	0,006307	0,00048
92—93	"	"	"	10155	0,006552	0,00050
93—94	"	"	"	10154	0,006784	0,00051
						Moy. 0,00049

NUMÉROS des expériences.	$t$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p'}{p}$	$\frac{760(p'-p)}{10333}$	$\frac{pu}{p'u} - 1$	COVOLUMES.
<b>TABLEAU N° III. — Acide carbonique.</b>						
1—2	3,28	2,0	2,0	752	0,007597	0,00777
3—4	"	"	"	754	0,007725	0,00788
5—6	"	"	"	753	0,007636	0,00780
						Moy. 0,00782
7—8	3,27	2,0	2,0	752	0,008416	0,00861
9—10	"	"	"	752	0,007797	0,00797
10—11	"	"	"	752	0,007903	0,00808
						Moy. 0,00822
12—13	3,31	3,7	2,0	1374	0,012313	0,00689
15—16	"	"	"	1377	0,012940	0,00722
17—18	"	"	"	1375	0,013333	0,00746
18—19	"	"	"	1376	0,012751	0,00712
						Moy. 0,00717
20—21	3,32	5,6	2,0	2082	0,018973	0,00701
22—23	"	"	"	2083	0,019014	0,00702
24—25	"	"	"	2083	0,019442	0,00717
26—27	"	"	"	2083	0,019465	0,00718
						Moy. 0,00709
28—29	3,65	8,2	1,9	3017	0,028698	0,00732
29—30	"	"	"	3020	0,028494	0,00726
32—33	"	"	"	3020	0,029017	0,00739
33—34	"	"	"	3019	0,028517	0,00727
36—37	"	"	"	3020	0,028664	0,00731
						Moy. 0,00731
29—31	3,65	15,1	3,6	8341	0,087322	0,00807
31—33	"	"	"	8343	0,087460	0,00808
33—35	"	14,5	3,5	7861	0,081232	0,00796
35—37	"	"	"	7858	0,081232	0,00797
						Moy. 0,00802
38—39	3,56	9,5	1,9	3550	0,035040	0,00759
39—40	"	"	"	3552	0,034763	0,00753
42—43	"	"	"	3551	0,034929	0,00757
43—44	"	"	"	3554	0,034606	0,00749
46—47	"	"	"	3551	0,034763	0,00753
						Moy. 0,00754



NUMÉROS des expériences.	$t$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p'}{p}$	$\frac{760(p'-p)}{10333}$	$\frac{pu}{p'u} - 1$	COVOLUMES.
<b>TABLEAU N° III (suite). — Acide carbonique.</b>						
39—41	3,56 <sup>0</sup>	14,7	3,0	7386	0,076700	0,00799
41—43	"	"	"	7386	0,076597	0,00798
43—45	"	"	2,9	7391	0,077116	0,00803
45—47	"	"	"	7392	0,077034	0,00802
						Moy. 0,00800
48—49	3,20	12,3	1,9	4452	0,045625	0,00788
51—52	"	"	"	4458	0,045760	0,00789
52—53	"	"	"	4459	0,045070	0,00777
55—56	"	"	"	4453	0,045685	0,00789
						Moy. 0,00786
48—50	3,20	19,0	2,9	9497	0,107431	0,00870
50—52	"	"	"	9501	0,107296	0,00868
52—54	"	"	3,0	9603	0,108590	0,00869
54—56	"	"	"	9602	0,108435	0,00868
						Moy. 0,00869
57—58	3,16	16,8	1,9	5972	0,066137	0,00852
60—61	"	"	"	5971	0,066101	0,00852
						Moy. 0,00852
57—59	3,16	26,8	3,0	13464	0,177293	0,01013
59—61	"	"	"	13464	0,177220	0,01012
						Moy. 0,01012
62—63	3,15	20,4	1,8	7099	0,084278	0,00913
65—66	"	"	"	7086	0,084680	0,00919
66—67	"	"	"	7092	0,084672	0,00918
69—70	"	"	"	7075	0,084310	0,00917
						Moy. 0,00917
62—64	3,15	27,2	2,5	12373	0,169215	0,01051
64—66	"	"	"	12371	0,169437	0,01053
66—68	"	"	"	12253	0,167003	0,01048
68—70	"	"	"	12252	0,166640	0,01046
						Moy. 0,01049
71—72	2,68	22,9	1,8	7825	0,099830	0,00981
74—75	"	"	"	7833	0,099588	0,00978
76—77	"	"	"	7837	0,099912	0,00980
79—80	"	"	"	7841	0,099459	0,00975
						Moy. 0,00978

NUMÉROS des expériences.	$t$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p'}{p}$	$\frac{760(p' - p)}{10333}$	$\frac{pu}{p'u'} - 1$	COVOLUMES
<b>TABLEAU N° III (suite). — Acide carbonique.</b>						
71—73	2,68	27,5	2,2	11171	0,155787	0,01070
73—76	»	»	»	11171	0,155865	0,01070
76—78	»	»	»	11069	0,154232	0,01069
78—80	»	»	»	11077	0,153681	0,01065
						Moy. 0,01068
<b>TABLEAU N° IV. — Hydrogène.</b>						
					$1 - \frac{pu}{p'u'}$	COVOLUMES changés de sig.
1—2	4,41	5,8	2,0	2220	0,001416	0,00049
2—3	»	»	»	2217	0,001378	0,00048
5—6	»	»	»	2221	0,000627	0,00022
2—5	»	»	»	2222	0,000987	0,00033
1—6	»	»	»	2219	0,001077	0,00037
3—6	»	»	»	2217	0,001019	0,00035
						Moy. 0,00038
2—4	4,41	14,1	4,8	8504	0,005324	0,00048
4—6	»	»	»	8504	0,004980	0,00045
						Moy. 0,00047
7—8	4,22	10,5	2,0	4010	0,002422	0,00047
8—9	»	»	»	4016	0,003039	0,00058
						Moy. 0,00052
8—10	4,22	18,2	3,5	9843	0,006794	0,00053
8—12	»	»	»	9796	0,006441	0,00051
8—11	»	26,5	5,0	16122	0,013143	0,00063
						Moy. 0,00056
15—16	3,92	15,4	2,0	5887	0,003879	0,00049
16—18	»	»	»	5892	0,004174	0,00053
19—20	»	»	»	5901	0,003926	0,00050
22—23	»	»	»	5895	0,003927	0,00050
						Moy. 0,00050
15—17	3,92	25,0	3,3	13156	0,008567	0,000502
17—18	»	»	»	13162	0,008273	0,000485
19—21	4,19	26,5	3,5	14407	0,010408	0,000557
21—23	»	»	»	14405	0,010376	0,000555
						Moy. 0,000525

NUMÉROS des expériences.	$t$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p'}{p}$	$\frac{760(p'-p)}{10333}$	$1 - \frac{pu}{p'u'}$	COVOLUMES changés de signes.
<b>TABLEAU N° IV (suite). — Hydrogène.</b>						
24—25	3,86	24,5	2,0	9314	0,007067	0,000585
27—28	»	»	»	9309	0,006703	0,000555
24—27	»	»	»	9307	0,006651	0,000551
28—29	»	»	»	9308	0,006874	0,000569
31—32	»	»	»	9310	0,006382	0,000529
33—36	»	»	»	9303	0,006665	0,000552
						Moy. 0,000557
24—26	3,86	27,5	2,3	11728	0,007969	0,000525
26—28	»	»	»	11730	0,008020	0,000527
28—30	»	27,4	»	11633	0,007710	0,000511
30—32	»	»	»	11632	0,007791	0,000516
32—34	»	27,6	»	11809	0,007793	0,000509
34—36	»	»	»	11809	0,007783	0,000508
						Moy. 0,000516
<b>TABLEAU N° V. — Hydrogène.</b>						
1— 2	10,00	14,7	2,0	5610	0,003893	0,000546
2— 3	»	»	»	5614	0,004062	0,000570
5— 6	»	»	»	5607	0,004027	0,000606
6— 7	»	»	»	5602	0,004046	0,000569
9—10	»	»	»	5606	0,004161	0,000584
						Moy. 0,000575
2— 4	10,00	25,6	3,5	13908	0,010026	0,000568
4— 6	»	»	»	13909	0,009808	0,000561
2— 8	»	»	»	13904	0,010120	0,000573
6— 8	»	»	»	13906	0,009903	0,000561
						Moy. 0,000566
11—12	9,62	18,7	2,0	7153	0,005303	0,000583
12—13	»	»	»	7156	0,005403	0,000594
13—14	»	»	»	7159	0,005364	0,000589
14—15	»	»	»	7157	0,005154	0,000567
15—16	»	»	»	7154	0,005263	0,000579
16—17	»	»	»	7156	0,005372	0,000591
						Moy. 0,000584

NUMÉROS des expériences.	$t$	$\frac{p'}{10333}$	$\frac{p'}{p}$	$\frac{760(p' - p)}{10333}$	$1 - \frac{pu}{p'u'}$	COVOLUMES changés de signes.
<b>TABLEAU N° V (suite). — Hydrogène.</b>						
18—19	9,69	24,2	2,0	9273	0,006742	0,000573
19—20	"	"	"	9273	0,006797	0,000577
20—21	"	"	"	9284	0,006848	0,000581
21—22	"	"	"	9284	0,006723	0,000570
22—23	"	"	"	9283	0,006692	0,000568
						Moy. 0,000574
24—25	9,65	27,5	2,0	10517	0,007673	0,000575
25—26	"	"	"	10525	0,007627	0,000571
26—27	"	"	"	10512	0,007696	0,000576
27—28	"	"	"	10510	0,007616	0,000571
28—29	"	"	"	10520	0,007482	0,000561
29—30	"	"	"	10516	0,007515	0,000563
						Moy. 0,000569
31—32	9,65	27,8	1,9	9969	0,006703	0,000529
32—33	"	"	"	9967	0,006765	0,000534
33—34	"	"	"	9995	0,006773	0,000533
34—35	"	"	"	9993	0,006667	0,000525
35—36	"	"	"	10025	0,006729	0,000528
36—37	"	"	"	10030	0,006968	0,000546
						Moy. 0,000532
38—39	9,03	27,0	1,8	9402	0,006051	0,000505
39—40	"	"	"	9397	0,006268	0,000524
						Moy. 0,000514
42—43	8,95	27,0	1,6	8064	0,005270	0,000513
43—44	"	"	"	8084	0,005016	0,000487
44—45	"	"	"	8082	0,004882	0,000474
45—46	"	27,1	"	8124	0,005599	0,000541
46—47	"	"	"	8125	0,005540	0,000535
						Moy. 0,000510

Avant de discuter les valeurs des covolums contenues dans les tableaux qui précèdent, il est nécessaire d'examiner les causes qui peuvent les altérer. Les déterminations expérimentales de la fonction de M. Regnault, au moyen d'un grand tube de verre, contiennent deux sortes d'erreurs tellement faibles

que, dans des expériences ordinaires, elles devraient sans doute être négligées, mais la fonction est elle-même une quantité fort petite et il en résulte que l'erreur relative est très-appréciable :

1° Dans la partie du tube où il n'y a pas de mercure, le verre, jusqu'à la distance où l'attraction cesse d'être sensible, fait prendre au gaz une densité qui croît à mesure que la distance diminue ; le gaz *dissimulé* qui correspond à cet *accroissement* de densité n'agit pas pour produire la tension observée.

2° Le verre sec retient fortement, par attraction, le gaz qui le touche et, dans le passage du volume  $u$  au volume  $u'$ , le mercure ne racle pas tout à fait ce fluide adhérent.

L'action condensante des surfaces peut être, jusqu'à un certain point, étudiée analytiquement à l'aide des lois de Mariotte et Gay-Lussac, qui donnent ici une approximation très-suffisante.

Soient  $D'$  la densité du solide par rapport à l'eau,  $D$  la densité du gaz par rapport à l'air, et  $\frac{0,0013 Dp}{10333(1+\alpha t)}$  sa densité par rapport à l'eau. L'attraction du solide sur une molécule gazeuse à la distance  $r$  est proportionnelle au produit des densités par une fonction de cette distance ; elle est d'ailleurs proportionnelle à l'accroissement de pression, et l'on a

$$dp = - \frac{DD'p}{1+\alpha t} \varphi'(r) dr,$$

ou, en intégrant depuis l'infini jusqu'à  $r$  et appelant  $p_0$  la pression loin de la surface,

$$p = p_0 e^{\frac{DD'}{1+\alpha t} (\varphi^\infty - \varphi r)}$$

Au contact, cette équation devient

$$p_1 = p_0 e^{\frac{DD'}{1+\alpha t} (\varphi^\infty - \varphi_0)} = p_0 A^{\frac{DD'}{1+\alpha t}}.$$

Si nous considérons maintenant le poids  $x$  du gaz dissimulé

dans une tranche d'épaisseur  $dr$ , c'est-à-dire l'excès du poids de cette tranche sur celui d'un même volume de fluide situé loin de la surface, il est évidemment proportionnel à  $\frac{D(p-p_0)dr}{1+\alpha t}$ , et l'on a, en désignant par  $B$  un coefficient constant,

$$dx = -\frac{BD(p-p_0)}{1+\alpha t} dr.$$

La substitution pour  $p$  de la valeur précédemment trouvée donne ensuite

$$x = \frac{BDp_0}{1+\alpha t} \int_r^\infty \left[ e^{\frac{DD'}{1+\alpha t}(\varphi^\infty - \varphi r)} - 1 \right] dr,$$

et le poids total s'obtient en faisant  $r=0$ ; il est

$$x_0 = \frac{BDp_0}{1+\alpha t} F\left(\frac{DD'}{1+\alpha t}\right).$$

Si  $D$ ,  $D'$  et  $t$  varient de telle sorte que  $\frac{DD'}{1+\alpha t}$  ne change point,

les équations en  $p$  et  $x_0$  conduisent aux lois suivantes :

1° *Le rapport des pressions en un point où l'attraction est efficace et loin du solide est constant ;*

2° *Le poids du gaz dissimulé est proportionnel à la densité normale du gaz pourvu que l'on ne compare que des gaz également attirables par le verre ;*

3° *Il est en raison inverse du binôme de dilatation ;*

4° *Le poids du fluide dissimulé par décimètre carré est proportionnel à la pression  $p_0$  loin de la surface.*

Il résulte de cette dernière loi que, dans les expériences de M. Regnault, faites au moyen du grand tube, la condensation par les surfaces est sans influence appréciable, parce que, à cause de la diminution proportionnelle de la surface libre, le poids du gaz dissimulé demeure le même alors que la pression augmenté.

Pour évaluer la correction nécessitée par la seconde cause d'erreur, considérons d'abord le gaz à l'état  $p, u$ , et désignons par  $y$  la fraction de son poids qui reste emprisonnée entre le verre et le mercure après la réduction au volume  $u'$  moitié moindre. La pression *observée*  $p'$  est inférieure à celle qui existerait si la masse gazeuse se trouvait comprise entièrement dans le volume  $u'$ , ainsi qu'on l'a supposé dans l'équation (94); mais, comme la différence est très-faible, il suffit d'appliquer la loi de Mariotte et de remplacer dans (94) la pression observée  $p'$  par la pression corrigée  $\frac{p'}{1-y}$ , ce qui donne, en négligeant  $y^2$ ,

$$c_0 = \left( \frac{pu}{p'u'} - 1 \right) \frac{10333 T_1}{B_1(p'-p)} - \frac{10333 T}{B_1(p'-p)} \left[ 1 - \frac{p'}{p-p} \left( \frac{pu}{p'u'} - 1 \right) \right] y.$$

Le terme  $\frac{p'}{p-p} \left( \frac{pu}{p'u'} - 1 \right)$  est très-petit par rapport à 1, on peut encore obtenir une approximation suffisante en le supprimant, et il reste

$$(95) \quad c_0 = \left( \frac{pu}{p'u'} - 1 \right) \frac{10333 T_1}{B_1(p'-p)} - \frac{10333 T_1}{B_1(p'-p)} y.$$

On voit que la seconde cause d'erreur tend à diminuer la valeur absolue du covolume lorsqu'il est positif, et à l'augmenter lorsqu'il est négatif.

Dans les expériences de M. Regnault,  $T_1$  ou  $\frac{B_1+t}{B_1}$  diffère peu de l'unité;  $\frac{p'-p}{10333}$  varie entre 1 et 17; pour les grandes valeurs de cette dernière quantité, la correction des covolumes des gaz permanents doit se confondre avec les erreurs d'expériences et à cause de la petitesse du coefficient de  $y$ , et parce que la valeur même de cette quantité diminue beaucoup. Pendant son ascension, le mercure est si fortement appliqué contre le verre, qu'il ne reste presque plus de gaz entre ces deux corps.

Il est facile, quand on connaît l'erreur  $\delta$  du covolume, d'en

déduire la valeur de  $y$  et aussi une limite de l'épaisseur de la couche de gaz non râclé. L'équation (95) donne de suite

$$(96) \quad y = \frac{B_1(p' - p)}{10333 T_1} \delta.$$

Soit, dans l'hypothèse où le gaz non râclé aurait la même densité que celui qui occupe le volume  $u'$ ,  $\varepsilon$  l'épaisseur cherchée; la surface qui a cessé d'être libre égale évidemment la surface totale  $864^{\text{cc}},33$  donnée par M. Regnault, multipliée par  $p' - p$ , et l'on a pour le volume de la couche

$$864,33 \frac{p' - p}{p'} \varepsilon.$$

En divisant cette dernière quantité par le volume total  $237^{\text{cc}},7$  aussi donné par M. Regnault, on obtient une seconde valeur de  $y$  qui, substituée dans (96), donne

$$(97) \quad \varepsilon = \frac{237,7}{864,3} \cdot \frac{B_1 p'}{10333 T_1} \delta.$$

Cette valeur est certainement beaucoup trop forte puisqu'elle est obtenue en négligeant l'action condensante des surfaces du verre et du mercure.

*Covolume de l'air.* — Pour l'air, l'azote et l'hydrogène, la première cause d'erreur est sans influence, le second terme de la formule (95) négligé dans les calculs numériques doit faire trouver pour le covolume, dans le cas des faibles pressions, des valeurs trop fortes pour l'air et l'azote, trop faibles pour l'hydrogène; il doit se confondre au contraire avec les erreurs d'expériences pour les pressions considérables. En considérant d'abord dans le tableau n° 1 les expériences où la pression  $p'$  est comprise entre 17 et 28 atmosphères, on trouve pour moyenne des valeurs moyennes de chaque groupe

$$c_0 = 0,00051.$$



Le plus grand écart est 0,00006 ; il surpasse à peine les différences 0,00005 qui existent dans une même série entre les valeurs obtenues par les expériences 40 — 42 et les expériences 44 — 46 ou 46 — 49. D'ailleurs les variations ne suivent aucun ordre régulier, et rien ne s'oppose à ce que les observations relatives à l'air soient considérées comme confirmant la loi des covolumes et à ce que la valeur constante de  $c_0$  soit fixée à 0,00051. On ne peut objecter que les faibles pressions ont fourni des valeurs plus élevées puisque la cause de ce fait est connue à l'avance ; pour le second et le quatrième groupes les circonstances sont à peu près identiques, et l'on a  $\delta = 0,00049$ . En portant cette valeur dans (96) et (97) on trouve

$$y = \frac{1}{749} \quad \text{et} \quad \varepsilon < \frac{1}{1349};$$

on admettra volontiers, je pense, la possibilité de l'existence entre le verre et le mercure d'une couche d'air plusieurs fois moindre en épaisseur que  $\frac{1}{1349}$  de millimètre. Pour  $p' = 1,9$  la limite de  $\varepsilon$  est presque double.

*Covolume de l'azote.* — Les deux premiers groupes du tableau n° II étant exceptés, on trouve pour moyenne des moyennes

$$c_0 = 0,00044.$$

Les écarts se succèdent sans ordre et sont moindres que la différence entre les valeurs des covolumes correspondant aux expériences 74 — 76 et 93 — 94 faites à peu près dans les mêmes circonstances et avec une pression  $27^{\text{atm}},5$  fort considérable.

Pour le premier groupe on a  $\frac{p'}{10333} = 2$  et  $\delta = 0,0006$  ; (96) et (97) donnent

$$y = \frac{1}{1700} \quad \text{et} \quad \varepsilon < \frac{1}{3030}.$$

*Covolume de l'hydrogène.* — En ne considérant d'abord dans les tableaux nos IV et V que les groupes pour lesquels on a  $\frac{p'}{10333} > 18$ , on trouve pour moyenne des moyennes

$$c_0 = -0,00055.$$

Le plus grand écart est 0,000039 ; il est surpassé par la différence entre les moyennes 0,000566 et 0,000525 de deux séries d'expériences exécutées dans des circonstances à peu près identiques ; on peut donc l'attribuer aux erreurs accidentelles et admettre définitivement comme constante la valeur indiquée plus haut pour  $c_0$ .

Le premier groupe du tableau n° IV donne  $\delta = 0,00017$  ; on en conclut

$$y = \frac{1}{2028} \text{ et } \epsilon < \frac{1}{3888}.$$

D'ailleurs, la moyenne pour ce premier groupe est inférieure et non plus supérieure au covolume exact ; cela tient à ce que  $c_0$  est négatif, et cette circonstance avait été prévue par suite du calcul préalable de l'erreur.

*Covolume de l'acide carbonique.* — Le tableau n° III ne fournit point facilement la valeur certaine du covolume de l'acide carbonique ; la seconde cause d'erreur le rend trop fort pour les faibles pressions, et, dans le cas des grandes pressions, la première cause produit le même effet, parce que la loi de Mariotte n'est plus suffisamment approchée pour qu'on puisse appliquer la démonstration qui montre que cette cause d'erreur est sans influence. Mais on obtient un résultat digne de confiance au moyen des poids que M. Regnault donne à la page 148 du tome I de la relation de ses expériences. Sous les pressions

$$760, \quad 374,13, \quad 234,17$$

exprimées en millimètres de mercure, ce savant a trouvé pour

un volume constant de gaz à 0° les poids

$$19^{\text{er}}, 5396, \quad 9, 5845, \quad 5, 7345.$$

Si on appelle P, P' deux de ces poids, h, h' les colonnes de mercure qui mesurent les pressions correspondantes, l'équation (94), après la substitution de  $\frac{P'}{P}$  à la place de  $\frac{u}{u'}$ , donne pour covolume

$$(98) \quad c_0 = \frac{760 T_1}{B_1 (h' - h)} \left[ \frac{P' h}{P h'} - 1 \right].$$

En accouplant la première expérience successivement avec les deux autres et celles-ci entre elles, on obtient pour valeurs du covolume

$$0,007065, \quad 0,007151, \quad 0,007344.$$

La moyenne est

$$c_0 = 0,007187.$$

Ici la seconde cause d'erreur n'existe pas, et la première est sans influence pour des pressions aussi faibles : la loi de Mariotte est suffisamment approchée pour l'étude de l'air dissimulé qui allère alors les poids de quantités proportionnelles à leurs valeurs, ce qui ne change aucunement le rapport  $\frac{P'}{P}$ . Si maintenant on examine le tableau en partant de ce nombre incontestable, on voit que pour les 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> groupes dans lesquels les valeurs de  $\frac{p'}{10,333}$  sont 3,7; 5,6; 8,2, les covolumes diffèrent assez peu du résultat exact pour qu'on puisse attribuer les écarts aux erreurs accidentelles. Pour le premier et le second groupes dans lesquels  $\frac{p'}{10,333} = 2$ , on a  $\delta = 0,00009$ , et par suite

$$y = \frac{1}{1111} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{2020}.$$

Pour les derniers groupes, la première cause d'erreur devient très-influente, et il n'est pas certain que la seconde soit inefficace. Si l'on considère le dernier groupe on trouve

$$y = \frac{1}{19}$$

*Covolume de l'oxygène.* — Les covolumes de l'air et de l'azote étant connus, on peut en déduire celui de l'oxygène dans l'hypothèse où le travail interne serait négligeable. Si l'on admet pour composition de l'air en poids 76, 87 d'azote pour 100, le calcul donne

$$c_0 = 0,00078 ;$$

mais il ne faut pas perdre de vue que l'hypothèse rend ce résultat très-incertain.

*Conclusion.* — La discussion des expériences de M. Regnault prouve complètement que la loi des covolumes donne toute la précision désirable dans l'état actuel de la science. Toutefois, jusqu'à l'étude expérimentale des deux causes d'erreurs, on peut conserver quelques doutes pour l'acide carbonique soumis à de fortes pressions. Dans la suite nous emploierons la loi de Mariotte comme loi de *première approximation*, et celle des covolumes comme loi de *seconde approximation*. Il n'y a pas lieu d'ailleurs à chercher une formule rigoureuse applicable *dans certaines conditions aux gaz et aux vapeurs seulement*. Les deux premiers principes de la théorie mécanique de la chaleur n'en peuvent fournir d'autres que celles qui ont été données ou qui s'en distinguent uniquement par une forme plus commode dans quelques cas; il est utile de remarquer, en outre, que le caractère de généralité de ces théorèmes de l'équivalence et de l'égalité de rendement s'oppose à ce qu'on en déduise des relations complètement exactes et applicables plutôt à l'état gazeux qu'à l'état liquide. J'insiste sur ce point parce qu'il importe, surtout pour les jeunes lecteurs, d'éviter

la voie funeste ouverte par M. Hirn à propos des gaz ou vapeurs surchauffées. La proposition fondamentale que ce savant donne, à la page 180 de sa *Théorie mécanique de la chaleur*, seconde édition, et dont voici l'énoncé textuel :

*Lorsqu'une vapeur quelconque saturée, mais sèche, se précipite d'un réservoir où elle est tenue à une pression constante  $p_0$  dans un autre où elle est tenue aussi à une pression constante  $p_1 < p_0$ , sans recevoir ni perdre de chaleur du dehors; le produit de la pression initiale par le volume de l'unité de poids de vapeur à cette pression est égal au produit de la pression finale par le volume qu'occupe l'unité de poids de la vapeur sous cette pression et à la température que prend spontanément cette vapeur par suite de son passage brusque de la pression  $p_0$  à l'autre pression  $p_1$ ;*

Est appuyée de démonstrations inacceptables; il n'est pas difficile de faire voir son inexactitude. Je la passerais sous silence si M. Hirn n'en faisait un usage fréquent dans le reste de son ouvrage, dans les Mémoires qu'il a publiés dans les *Annales de Chimie et de Physique* et dans ses communications à l'Académie; il est devenu nécessaire de rejeter enfin hors de la science qui se fonde le théorème dont il s'agit et ses nombreuses conséquences.

Les formules qui précèdent fournissent les solutions de plusieurs problèmes relatifs aux gaz; par exemple, si nous supposons, dans les expériences 1 et 2 du tableau n° V relatif à l'hydrogène, tout connu excepté le plus petit volume, la formule (94) donne, en y mettant  $c_0 = -0,00055$ , le nombre 968,99, qui diffère à peine de 968,97, trouvé par l'expérience. Lorsque l'inconnue est une des pressions, on en calcule une première valeur en négligeant le premier membre, c'est-à-dire au moyen de la loi de Mariotte; ensuite cette valeur provisoire fait connaître la correction. Si les expériences n'avaient pas lieu à la même température, on emploierait l'équation (92) au lieu de (94).

Beaucoup de questions peuvent se résoudre à l'aide du volume du kilogramme; alors on particularise l'équation (90), dans laquelle A tient la place de  $\frac{10333(1+c_0)}{1,3DB_1}$ , elle devient,  $h$  désignant la pression en millimètres de mercure,

Pour l'air :

$$hu = 590,695(1 + 0,003667t) - 0,0003944h;$$

Pour l'azote :

$$hu = 605,682(1 + 0,003667t) - 0,0003503h;$$

Pour l'acide carbonique :

$$hu = 385,433(1 + 0,003688t) - 0,0036345h;$$

Pour l'hydrogène :

$$hu = 8479,32(1 + 0,003667t) + 0,0005455h.$$

La formule relative à l'acide carbonique rendrait probable, si on l'ignorait encore, que ce gaz se liquéfie à 0° sous une pression beaucoup moindre que 140 atmosphères.

*Coefficients de dilatation.* — Si l'on appelle  $\alpha_1$  le coefficient moyen de dilatation d'un gaz à volume constant, et si l'on applique la formule (90) successivement aux températures 0° et 100°, puis qu'on divise, on trouve un résultat déjà donné.

$$(99) \quad \alpha_1 = \frac{1}{B_1},$$

$\alpha'$  désignant le coefficient moyen de dilatation à pression constante entre 0° et 100°, la même formule donne, lorsqu'on l'applique à ces deux températures et qu'on remplace  $u_{100}$  par  $u_0(1 + 100\alpha')$ ,

$$(100) \quad \alpha' = \frac{1 + c_0}{B_1}.$$

La comparaison conduit à cette loi :

*L'excès du coefficient de dilatation à pression constante sur le coefficient de dilatation à volume constant égale le produit*

de ce dernier par le covolume. Ces quantités sont trop petites pour que les expériences, même celles de M. Regnault, permettent de vérifier la loi qu'elles suivent; mais il est bon de remarquer au moins que la différence des coefficients est généralement positive comme le veut la loi et qu'elle devient négative pour l'hydrogène, seul gaz connu pour avoir un covolume négatif.

*Changement de température produit par une compression.*— Les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, exprimées par la formule (43), suffisent pour l'étude théorique, dans les gaz, des changements de température produits par une compression ou une expansion avec travail complet. On en tire

$$\frac{dp}{dt} = \frac{10333}{1,3DB_1u}, \quad \frac{dp}{du} = -\frac{10333(B_1+t)}{1,3DB_1u^2},$$

et par suite (74) et (75)

$$\alpha' = \frac{1}{B_1+t} \quad \beta = \frac{1,3DB_1u}{B_1+t}.$$

La substitution dans la formule (79) donne ensuite, en faisant usage de (38),

$$\frac{dt}{B_1+t} = -(K-1)\frac{du}{u}$$

et l'on obtient sans difficulté la relation utile

$$(101) \quad \text{Log} \frac{B_1+t_2}{B_1+t_1} = (K-1) \text{Log} \frac{u_1}{u_2},$$

dans laquelle  $t_1$  et  $u_1$  sont les valeurs initiales de la température et du volume, tandis que  $t_2$  et  $u_2$  désignent les valeurs finales.

Des expériences ont été faites sur l'air par MM. Favre et Silbermann (*Annales de Chimie et de Physique*, tome xxxvii, 3<sup>e</sup> série); ce sujet leur a paru se joindre naturellement à leurs

recherches remarquables sur les quantités de chaleur dégagées dans les actions chimiques et moléculaires. En prenant l'air successivement sous les pressions  $\frac{1}{2}$ , 1, 2 atmosphères et doublant son volume, ils ont observé des variations  $5^{\circ}$ ;  $7^{\circ}$ , 6;  $12^{\circ}$ , 8 qui sont loin d'être égales comme le veut la théorie et qui n'approchent point du nombre  $58^{\circ}4$  que donne l'équation (101). L'air, sous la pression de 2 atmosphères, n'a présenté à ces messieurs que des abaissements de température de  $20^{\circ}$ , 4 et  $25^{\circ}4$  lorsqu'ils ont rendu son volume 4 et 8 fois plus grand; tandis que la formule, dans ces deux cas, donne les variations  $110^{\circ}$ , 24 et  $149^{\circ}$ , 52. En présence d'un désaccord aussi complet, il m'a paru que des expériences nouvelles étaient nécessaires; le succès en est dû au concours dévoué de M. Malaguti, que je prie de recevoir l'expression de ma reconnaissance.

Une cause d'erreur grave existe dans l'appareil de MM. Favre et Silbermann: pendant que le thermomètre de Bréguet dont ils font usage se met en équilibre de température avec la masse gazeuse, la surface du corps de pompe en cuivre absorbe elle-même une grande quantité de chaleur, et cela explique pourquoi leurs résultats sont si faibles. J'ai préféré me servir de l'appareil Clément et Désormes, modifié convenablement; les causes d'erreur y sont beaucoup moins importantes et plus faciles à corriger.

Le ballon de 25 litres environ, placé dans un réservoir d'eau, avait été revêtu intérieurement d'une couche de cire jaune, substance dont l'action, pour donner ou prendre de la chaleur, est moins énergique que celle du verre. Sa garniture communiquait, d'une part, avec un manomètre à eau qui recevait la pression par l'intermédiaire d'une masse d'huile à grande surface et dont le tube vertical, où se lisait la pression, paraissait seul hors du réservoir. D'autre part, le ballon communiquait,



par un tube à robinet, d'abord avec un appareil à dessécher de 4 mètres de développement, puis, par l'intermédiaire de cet appareil, avec un grand flacon muni de deux tuyaux à robinet permettant d'y faire arriver de l'eau quand on voulait accroître la pression intérieure, ou, au contraire, de laisser écouler ce liquide pour produire une dilatation.

Pour faire une expérience, l'un des opérateurs ouvrait le robinet d'écoulement de l'eau, puis le robinet du ballon qu'il refermait après un certain nombre de secondes indiqué par un appareil d'horlogerie. De son côté, l'autre observateur marquait le point le plus bas atteint par la surface de l'eau dans le manomètre et aussi le point où cette surface remontait pendant les deux secondes suivantes; le quart de cette ascension n'est pas beaucoup inférieur à la demi-vitesse initiale qu'on peut prendre, sans grande erreur, pour vitesse moyenne pendant la dilatation à peu près uniforme du gaz. La correction étant faible, ce moyen de l'effectuer suffit, et il est moins laborieux que celui auquel j'avais pensé d'abord et qui consisterait à opérer avec des ballons de diamètres très-différents, puis à lier ensemble, par une formule empirique, les résultats obtenus dans les mêmes circonstances et à faire ensuite le rayon infini afin d'éliminer la cause d'erreur. Pour les calculs, le point le plus bas a donc été abaissé d'un nombre de millimètres égal au quart du produit de la durée de l'écoulement par l'ascension pendant les deux premières secondes. Les indications du manomètre avant l'expérience et après le réchauffement n'exigeaient aucune correction; elles étaient prises à partir du niveau correspondant à la pression atmosphérique. Il n'a pas paru utile de tenir compte du changement de densité de l'eau par suite des variations de température. En joignant aux nombres ainsi obtenus la pression barométrique et la température  $t_1$  du réservoir d'eau, on avait tout ce qui est

nécessaire pour déterminer les diverses pressions et la variation de température.

Au moment où l'on ferme le robinet du ballon, le gaz a pour température  $t_2$  et pour tension  $p_2$ ; après le réchauffement, son volume n'ayant pas changé, et ces quantités étant devenues  $p_3$  et  $t_1$ , on a l'équation

$$\frac{B_1 + t_1}{B_1 + t_2} = \frac{p_3}{p_2},$$

d'où l'on déduit la variation de température

$$(102) \quad \delta = t_2 - t_1 = (B_1 + t_1) \frac{p_3 - p_2}{p_3}$$

correspondant aux données  $p_2$  et  $p_3$  de l'expérience. Elle s'applique, comme tout ce qui précède, aux compressions aussi bien qu'aux dilatations. D'un autre côté, l'équation (101), dans laquelle les rapports  $\frac{u_1}{u_2}, \frac{B_1 + t_2}{B_1 + t_1}$  doivent être remplacés par

$\frac{p_2}{p_1}$  et  $\frac{p_3}{p_2}$ , devient après simplification

$$(103) \quad K(\log p_1 - \log p_2) = \log p_1 - \log p_3;$$

elle donne  $p_3$  qu'on pourrait comparer immédiatement avec la valeur de cette quantité trouvée par expérience. Mais il vaut mieux s'en servir pour calculer  $t_2 - t_1$  au moyen de la formule (102) et comparer ensuite le résultat avec celui que fournit la même formule quand on y substitue toutes les pressions observées. Voici le tableau des nombres obtenus dans 22 expériences; les pressions sont exprimées en millimètres d'eau, ce qui est indifférent puisque ces quantités n'entrent dans les calculs que sous forme de rapports. On a pris pour  $K$  la valeur 1,40 qui résulte de l'équation (38), quand on y substitue la valeur de  $Kc$  trouvée par M. Regnault.

*Expériences du 27 mai 1862.*Le bain est à  $16^{\circ} \frac{3}{4}$  et la pression barométrique corrigée 10313.

NUMÉROS.	DURÉE de l'écoulement	ASCENSION en 2 secondes.	$p_1$ .	$p_2$ .	$p_3$ .	$\delta$		DIFFÉ- RENCES.	DIFFÉ- RENCES relatives
						par expé- rience.	calculé.		
1	6"	30 <sup>mm</sup>	10767	10078	10273	5,49	5,38	+0,11	$\frac{1}{60}$
2	7	24	10773	10121	10305	5,16	5,09	+0,07	$\frac{1}{70}$
3	7	26	10781	10118	10311	5,41	5,11	+0,30	$\frac{1}{18}$
4	2	21	10779	10340,5	10463,5	3,40	3,42	-0,02	$\frac{1}{170}$
5	3	19	10780,5	10476	10567	2,49	2,30	+0,19	$\frac{1}{13}$
6	3	23	10789,5	10468,5	10563	2,59	2,45	+0,14	$\frac{1}{18}$
7	6	28	10799	10094,5	10295	5,63	5,48	+0,15	$\frac{1}{37}$
8	6	26	10794,5	10271	10415,5	4,01	4,10	-0,09	$\frac{1}{13}$
9	4	20	10800	10579	10646	1,82	1,66	+0,16	$\frac{1}{11}$

*Expériences du 28 mai 1862.*Le bain est à  $16^{\circ} \frac{3}{4}$  et la pression barométrique est 10365.

NUMÉROS.	DURÉE de l'écoulement	ASCENSION en 2 secondes.	$p_1$ .	$p_2$ .	$p_3$ .	$\delta$		DIFFÉ- RENCES.	DIFFÉ- RENCES relatives
						par expé- rience.	calculé.		
1	6"	27 <sup>mm</sup>	10852,5	10219,5	10398,5	4,98	4,90	+0,08	$\frac{1}{60}$
2	5	24,5	10847	10264,4	10431,5	4,63	4,48	+0,15	$\frac{1}{31}$
3	7	28	10872,5	10127	10335	5,82	5,81	+0,01	$\frac{1}{880}$
4	5	27	10853	10317	10474	4,34	4,08	+0,26	$\frac{1}{17}$
5	5	19	10852	10403	10529	3,46	3,47	-0,01	$\frac{1}{348}$
6	4	23	10856	10395	10531	3,74	3,50	+0,24	$\frac{1}{16}$
7	7	34	10881	10187,5	10384	5,47	5,36	+0,11	$\frac{1}{50}$
8	4	27	10885	10401	10539	3,79	3,71	+0,08	$\frac{1}{47}$
9	5	23	10870	10250,5	10423	4,79	4,82	-0,03	$\frac{1}{100}$
10	5	23,5	10860	10276,5	10443	4,61	4,49	+0,12	$\frac{1}{38}$
11	$5\frac{1}{2}$	31	10846	10146,4	10346	5,58	5,41	+0,17	$\frac{1}{33}$

*Expériences du 31 mai 1862.*

Le bain est à 18° et la pression atmosphérique est 10348.

NUMÉROS.	DURÉE de l'écoulement	ASCENSION en 2 secondes.	$p_1$ .	$p_2$ .	$p_3$ .	$\delta$		DIFFÉ- RENCES.	DIFFÉ- RENCES relatives.
						par expé- rience.	calculé		
1	10 <sup>''</sup>	30 <sup>mm</sup>	11712	10058	10500,5	12 <sup>o</sup> ,24	12 <sup>o</sup> ,41	- 0,17	$\frac{1}{25}$
2	10	39	11683,5	10073	10496	11,71	12,19	- 0,48	$\frac{1}{73}$

On voit par ces tableaux que les différences entre les variations de température déterminées par l'expérience et le calcul sont généralement une très-petite fraction de la quantité à mesurer. Deux fois seulement, le premier jour, cette fraction a presque atteint  $\frac{1}{10}$ ; le second et le troisième jour, après avoir acquis l'habitude d'opérer, on n'a plus remarqué qu'une seule différence relative surpassant  $\frac{1}{25}$ , les autres étant presque toujours inférieures à  $\frac{1}{30}$ .

L'expérience n° 1 du troisième tableau, dans laquelle le rapport des pressions est  $\frac{7}{6}$ , a conduit à une variation de température 12°,24 presque égale au nombre 12°,8 obtenu par MM. Favre et Silbermann en faisant passer la pression de deux atmosphères à une; cela montre que leur procédé est défectueux. D'ailleurs, en admettant leurs résultats, on aurait pour l'équivalent mécanique de la chaleur un chiffre incomparablement plus fort que celui qui a été trouvé par M. Joule en comprimant de l'air; on a ainsi une seconde preuve expérimentale de la nécessité de leur faire subir de très-grandes corrections.

*Conclusion.*—Par les expériences rapportées ici, l'exactitude de la formule (101) est complètement mise hors de doute pour les variations de pression employées. Au-delà elle est incontestable pour ceux qui admettent le principe de l'équivalence ; on ne peut d'ailleurs lui opposer aucune expérience acceptable, et même on peut affirmer que les expériences faites en vue de trouver l'équivalent mécanique de la chaleur prouvent qu'elle est encore au moins approchée.

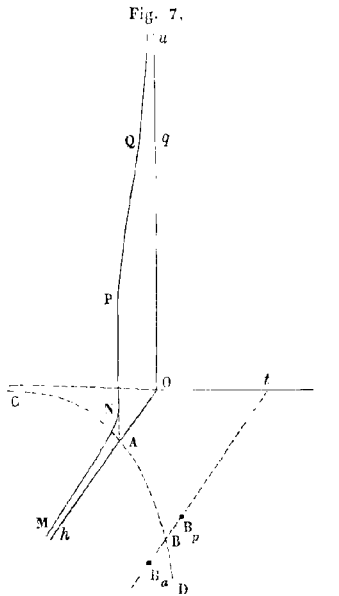
---

## CHAPITRE VII

## Changements d'état.

Avant d'appliquer le principe de l'équivalence et celui de l'égalité de rendement à l'étude des changements d'état, il est bon de préciser le sens de ces mots ; je prends pour exemple le passage de l'état liquide à l'état gazeux, mais les réflexions relatives à ce cas s'appliquent à tous les autres avec quelques modifications très-faciles à apercevoir. Une représentation graphique peut servir à mieux fixer les idées :

Soient  $ot, oh, ou$  (fig. 7), trois axes rectangulaires ; puisqu'il



existe une relation (51) entre  $h$  ou  $\frac{760p}{10333}$ ,  $t, u$ , on peut repré-

senter par une surface ce qui a rapport à ces trois variables. Faisons d'abord  $t=0$  et soit OA la tension maximum ; pour des valeurs plus grandes de la force élastique, la substance est liquide et son volume varie peu ; la surface coupe le plan  $pu$  suivant une courbe MN qui ne diffère pas beaucoup d'une droite parallèle à  $oh$ . Mais, quand la tension devient OA, cette courbe se relève en NP avec une rapidité si grande, que pour une diminution de  $h$  qu'on n'a pas encore pu mesurer, on obtient un accroissement NP de  $u$  très-considérable ; le liquide est transformé en gaz, *il change d'état*. Si la tension continue à décroître, la loi des covolumes s'applique, et enfin, pour  $h$  excessivement petit, on arrive à une loi entièrement ignorée. Toutes ces variations seraient fournies par la formule (49) si la fonction qui s'y trouve était connue. Pour une température plus élevée  $o'$ , c'est-à-dire pour un plan parallèle à celui des  $hu$ , la tension maximum  $t'B$  serait plus grande ; à cela près, les phénomènes seraient analogues. Si l'on conçoit un cylindre perpendiculaire au plan des  $ht$  et ayant pour directrice la courbe CABD des tensions maximum, si bien déterminée par M. Regnault pour un grand nombre de corps, la surface presque parallèle au plan des  $ht$  dans la partie CABD*h* se relèvera avec une extrême rapidité auprès de ce cylindre avec lequel elle se confondra sensiblement jusqu'à ce qu'elle le coupe suivant la ligne des volumes de la vapeur à saturation, lesquels diminuent, comme on sait, à mesure que la température augmente, jusqu'à approcher du volume à l'état liquide, qui est peut-être leur limite. Dans l'espace CAB*t* la surface s'écarte peu de celle qui correspond aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, du moins tant que les pressions ne sont pas presque nulles.

Au lieu du volume on peut examiner aussi les valeurs que prend la quantité de chaleur  $q$  à fournir au kilogramme du corps considéré, pour le faire passer de la tension  $h_1$  et de la

température  $t_1$  à une tension  $h$  et à une température  $t$ . On obtient une autre surface se confondant aussi à fort peu près avec le même cylindre dans une étendue qui correspond aux chaleurs latentes. En un point quelconque de cette surface, on peut mener une infinité de tangentes, et si on considère celle qui est parallèle au plan des  $hq$ , son coefficient angulaire est la capacité à pression constante  $c'$ . Soit B un point où la tension est maximum et  $B_a$ ,  $B_p$  deux points infiniment voisins pour lesquels la tension est un peu moindre et un peu plus grande ; de sorte qu'en  $B_a$  la substance est liquide, tandis qu'en  $B_p$  elle est gazeuse. Par ces deux points menons les tangentes à la surface parallèles au plan tangent au cylindre, leurs coefficients angulaires donneront les capacités à pression croissante suivant la loi de saturation antérieurement et postérieurement au changement d'état ; comme leur emploi sera très-commode et qu'il faut les distinguer de la capacité à pression constante, nommons-les  $c'_a$  et  $c'_p$ .

Pourvu qu'on ne suppose pas le travail interne fonction du volume seul, on peut étudier les changements d'état physiques et chimiques sans les distinguer d'abord. Considérons comme précédemment une machine principale dans laquelle se trouve 1 kilogramme du corps à étudier et des machines accessoires destinées à fournir les quantités de chaleur nécessaires ou à utiliser celles qu'on obtiendra. Supposons qu'on s'astreigne à ne s'écarter jamais des valeurs des variables propres au changement d'état que de quantités négligeables ; soient  $p_1$ ,  $u_1$ ,  $t_1$  les valeurs primitives des variables,  $t_1$  désignant pour chaque machine la plus basse des températures entre lesquelles elle fonctionne.

1° Dilatons sans changement d'état, portons à la température  $t_2$  et désignons par  $p_2$  et  $u_2$  la tension et le volume. Un travail

$$\int_{t_1}^{t_2} p \, du$$



sera produit; mais il faudra fournir au moyen des machines accessoires :

La chaleur équivalente ;

La chaleur  $\int_{t_1}^{t_2} c dt$  nécessaire pour élever la température;

La chaleur  $\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d\varphi(ut)}{E du} du + \frac{d\varphi(ut)}{E dt} dt \right]$  convertie en travail interne.

La perte finale aura donc pour expression

$$(104) \quad - \int_{t_1}^{t_2} p du + \int_{t_1}^{t_2} \frac{E(t-t_1) c dt}{274+t} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{t-t_1}{274+t} p du \\ + \int_{t_1}^{t_2} \frac{t-t_1}{274+t} \left[ \frac{d\varphi(ut)}{du} du + \frac{d\varphi(ut)}{dt} dt \right].$$

On peut profiter pour simplifier cette expression de ce que la chaleur  $c'_a dt$  à fournir pour élever la température de  $dt$  dans les circonstances actuelles se compose :

De la chaleur  $c dt$  qui sert exclusivement à élever la température ;

De la chaleur  $\frac{p du}{E}$  transformée en travail externe ;

Et de la chaleur  $\frac{d\varphi(ut)}{E du} du + \frac{d\varphi(ut)}{E dt} dt$  transformée en travail interne ;

de sorte qu'on a

$$(105) \quad c'_a dt = c dt + \frac{p du}{E} + \frac{d\varphi(ut)}{E du} du + \frac{d\varphi(ut)}{E dt} dt.$$

Cette relation conduit à remplacer (95) par

$$(106) \quad - \int_{t_1}^{t_2} p du + \int_{t_1}^{t_2} \frac{E(t-t_1) c'_a dt}{274+t}.$$

Le réservoir à  $t_1$  fournit la chaleur transportée mécaniquement, il perd

$$(107) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{274+t_1}{274+t} C'_a dt.$$

2° Donnons au corps la quantité de chaleur  $L_1$  pour en

changer l'état à température et sous pression sensiblement constantes; c'est ce que les physiciens appellent improprement *chaleur latente*. Le travail produit a pour expression

$$p_2(v_2 - u_2),$$

$v_2$  désignant le nouveau volume; mais les machines accessoires employées à produire  $L_2$  calories font perdre un travail

$$\frac{E(t_2 - t_1)}{274 + t_2} L_2,$$

dont il faut retrancher le travail précédent; il reste

$$(108) \quad \frac{E(t_2 - t_1)}{274 + t_2} L_2 - p_2(v_2 - u_2).$$

Le réservoir à  $t_1$  fournit

$$(109) \quad \frac{274 + t_1}{274 + t_2} L_2.$$

3° Faisons passer le corps à la température  $t_1$  sans changement d'état; le travail produit est

$$\int_{t_2}^{t_1} p \, dv;$$

mais il faut fournir

La chaleur équivalente moins celle qui résulte de l'abaissement de température;

Et la quantité de chaleur  $\int_{t_2}^{t_1} \left[ \frac{d\varphi(vt)}{E \, dv} \, dv + \frac{d\varphi(vt)}{E \, dt} \, dt \right]$  qui se transforme en travail interne.

La perte de travail est finalement

$$\begin{aligned} & - \int_{t_2}^{t_1} p \, dv + \int_{t_2}^{t_1} \frac{E(t-t_1)}{274+t} c \, dt + \int_{t_2}^{t_1} \frac{t-t_1}{274+t} p \, dv \\ & + \int_{t_2}^{t_1} \frac{t-t_1}{274+t} \left[ \frac{d\varphi(vt)}{dv} \, dv + \frac{d\varphi(vt)}{dt} \, dt \right], \end{aligned}$$

ou, en remarquant que l'on a pour  $c'_p$  une expression

$$(110) \quad c'_p = c + \frac{p \, dv}{E \, dt} + \frac{d\varphi(vt)}{E \, dv} \frac{dv}{dt} + \frac{d\varphi(vt)}{E \, dt}$$

tout à fait analogue à celle (105) de  $c'_a$ , et en réduisant,

$$(111) \quad \int_{t_2}^{t_1} p \, dv + \int_{t_2}^{t_1} \frac{E(t-t_1)}{274+t} C'_p \, dt.$$

Le réservoir à  $t_1$  fournit la chaleur transportée mécaniquement

$$(112) \quad \int_{t_2}^{t_1} \frac{274+t_1}{274+t} c'_p \, dt.$$

4° Comprimons pour changer l'état, en maintenant le corps sensiblement à la température  $t_1$  à l'aide du réservoir indéfini de chaleur à  $t_1$ ; la variation de tension est négligeable, et la dépense de travail a pour valeur

$$(113) \quad p_1 (v_1 - u_1).$$

Le réservoir à  $t_1$  reçoit

$$(114) \quad L_1.$$

*Conclusion.* — La période étant complète, la somme algébrique des pertes de travail du volant doit être nulle d'après le principe de l'égalité de rendement, ainsi que la somme des pertes de chaleur du réservoir à  $t_1$  d'après le principe de l'équivalence. Cela fournit deux équations dont la première doit être divisée par l'équivalent mécanique de la chaleur pour qu'on puisse la combiner avec la seconde; j'écris le quotient de celle-ci par  $274+t_1$  et la somme des deux, en séparant les termes qui contiennent  $t_1$  de ceux qui contiennent  $t_2$ , ce qui exige qu'on remplace  $\int_{t_1}^{t_2}$  par  $\int_0^{t_2} - \int_0^{t_1}$ :

$$(115) \quad \int_0^{t_2} \frac{c'_a - c'_p}{274+t} \, dt + \frac{L_2}{274+t_2} = \int_0^{t_1} \frac{c'_a - c'_p}{274+t} \, dt + \frac{L_1}{274+t_1},$$

$$(116) \quad \int_0^{t_2} (c'_a - c'_p) \, dt - \int_0^{t_2} \frac{(v-u)}{E} \, dp + L_2 \\ = \int_0^{t_1} (c'_a - c'_p) \, dt - \int_0^{t_1} \frac{v-u}{E} \, dp + L_1.$$

Dans la dernière inégalité une simplification provient de l'intégration par parties du terme  $\int_{t_1}^{t_2} \frac{pd(v-u)}{E}$ . Les seconds membres sont indépendants de  $t_2$ : il en est de même des premiers qui ne varient pas quand cette variable change. On a donc, en renfermant les constantes dans les intégrales et supprimant les accents désormais inutiles, les relations générales

$$(117) \quad \int \frac{c'_u - c'_v}{274+t} dt + \frac{L}{274+t} = 0,$$

$$(118) \quad \int (c'_u - c'_v) dt - \int \frac{v-u}{E} dp + L = 0.$$

La différentielle de (117) est

$$(119) \quad c'_v = c'_u + L' - \frac{L}{274+t}.$$

Si de (110) on retranche la différentielle de (118) on obtient la formule de Clapeyron, qui est très-importante à cause des conséquences nombreuses et remarquables qu'on peut en tirer :

$$(120) \quad EL = p' (274+t) (v-u).$$

VÉRIFICATIONS. — *Première approximation.*

Il n'existe point d'expériences donnant les volumes  $v$  à saturation et dans lesquelles on puisse avoir confiance. Pour une première approximation, on peut négliger  $u$  dans la formule (120) et remplacer  $v$  par sa valeur  $\frac{10333(274+t)}{274 \times 1,3D}$  déduite des lois de Mariotte et de Gay-Lussac; il vient

$$(121) \quad L = \frac{10333}{274 \times 1,3E} \cdot \frac{(274+t)^2}{D} \cdot \frac{p'}{p}.$$

Voici les résultats que fournit cette équation appliquée aux liquides pour lesquels j'ai des données suffisantes en employant pour  $E$  la valeur 433,5.

NOMS DES SUBSTANCES.	D	POINT D'ÉBUL- LITION.	L		
			calculé.	observé par M. Regnault.	observé par d'autres expé- rimentateurs.
Chlorure de carbone $\text{C}^2\text{Cl}^6$ .	5,33	75°	47,2	46,64	
Ether iodhydrique.....	5,475	64,58	46,1	48,17	
Chloroforme.....	4,1244	60	60,73	61	
Essence de térébenthine.	4,698	155	65,63	68,8	69 Favre.
Essence de citron.....	4,7	165	71,07		70 F.
Mercure.....	6,926	350	71,6		77,50
Soufre.....	6,654	440	84,68		72,40
Sulfure de carbone.....	2,63	46	85,0	83,54	
Ether sulfurique.....	2,55	35	90,12	89,76	91 F.
Benzine.....	2,695	80	92,9	92,26	91,6 F.
Ether chlorhydrique.....	2,227	10	92,8	92,1	
Acide sulfurique.....	2,2112	—10	94,2		94,56 F.
Acétone.....	2,004	55	129,3	130,03	
Alcool.....	1,5895	78,21	210,0	214,05	208 F.
Esprit de bois.....	1,12	67	272,1		264 F.

Ce tableau renferme des vérifications fort remarquables, qui ne permettent aucun doute au sujet des lois qu'on peut lire dans la formule (121) et qui lient ensemble les chaleurs latentes et les tensions maximum. Ces lois supposent le principe de l'égalité de rendement, sans lequel il eût été impossible de découvrir ces rapports intimes entre des quantités que l'on croyait, avant la théorie mécanique de la chaleur, tout à fait indépendantes les unes des autres.

Remplaçons maintenant dans la formule (121) la chaleur latente  $L$  par une valeur  $L_0 + L/t$  approchée, mais linéaire, pour plus de simplicité; cela donne, en divisant par  $(274 + t)^2$  et intégrant,

$$(122) \quad \log \frac{p}{p_0} = \log \frac{h}{h_0} = B \frac{t}{274 + t} - A \log \frac{274 + t}{274}$$

M. Regnault a fait voir que les chaleurs latentes ne peuvent pas toutes être fournies avec une approximation suffisante par des formules empiriques du premier degré; les lois de Mariotte

et de Gay-Lussac ne sont point non plus suffisamment exactes. Cependant la formule (122) représente beaucoup mieux qu'on ne doit s'y attendre les forces élastiques des liquides étudiés par M. Regnault et auxquels je l'ai appliquée. Cela tient à ce que les quantités négligées sont assez petites et surtout à ce qu'il est possible d'en obtenir une valeur approchée qui se fond dans les termes du deuxième membre en altérant les paramètres A et B. Nous n'avons cependant plus que deux constantes qui ne sont même pas arbitraires, car elles doivent s'écarter peu de leurs valeurs en fonction des chaleurs latentes données par les équations

$$(123) \quad BM - A = \frac{1,3 DEL_0}{10333},$$

$$(124) \quad -A = \frac{274 \times 1,3 DEL'}{10333},$$

M, dont le logarithme est 0,3622157, est le module dont l'introduction permet de considérer dans (122) les logarithmes népériens comme remplacés par des logarithmes ordinaires. Je réunis de suite en un tableau quelques-uns des résultats qui seront obtenus plus loin et qui fournissent des vérifications satisfaisantes de l'équation (123) :

NOMS DES SUBSTANCES.	BM - A	$\frac{1,3 DEL_0}{10333}$	DIFFÉ- RENCES.	DIFFÉRENCES relatives.
Eau.....	19,56	20,47	0,91	$\frac{1}{22}$
Sulfure de carbone.....	12,46	13,03	0,55	$\frac{1}{22}$
Chlorure de carbone C <sup>2</sup> Cl <sup>2</sup> .	14,82	15,04	0,22	$\frac{1}{67}$
Chloroforme.....	14,40	14,99	0,59	$\frac{1}{25}$

Il est remarquable que, dans les conditions où elle a été ob-

tenue, la formule (122) puisse faire pressentir un phénomène indiqué plusieurs fois par M. Regnault; elle montre que, pour

$$(125) \quad t = \frac{274(BM - A)}{A} = -\frac{L_0}{L'}$$

la dérivée de la force élastique est nulle. Cela indique au moins, puisque la formule n'est qu'approchée, la tendance de la courbe vers la direction horizontale observée par ce savant.

Comme exemples, je vais donner maintenant quelques applications détaillées en les faisant précéder du tableau des valeurs de  $\log \log \frac{274+t}{274}$  et de  $\log \frac{t}{274+t}$ , utiles pour effectuer les calculs.

$t$	$\log \log \frac{274+t}{274}$	$\log \frac{t}{274+t}$	$t$	$\log \log \frac{274+t}{274}$	$\log \frac{t}{274+t}$
-40°	2,8351837	1,2320585	105°	1,1483031	1,4420648
-35	2,7727214	1,1649009	110	1,1655070	1,4565826
-30	2,7013806	1,0889779	115	1,1818459	1,4702754
-25	2,6178796	1,0010023	120	1,1973947	1,4832182
-20	2,5167217	2,8954725	125	1,2122200	1,4954762
-15	2,3876034	2,7620816	130	1,2263808	1,5071067
-10	2,2074001	2,5776996	135	1,2399280	1,5181608
-5	3,9023184	2,2685342	140	1,2529089	1,5286834
0	— ∞	— ∞	145	1,2653635	1,5387151
5	3,8944047	2,2527068	150	1,2773295	1,5482916
10	2,1915684	2,5460342	155	1,2888401	1,5574457
15	2,3638469	2,7145571	160	1,2999253	1,5662065
20	2,4850268	2,8320573	165	1,3106124	1,5746004
25	2,5782333	2,9216538	170	1,3209261	1,5826517
30	2,6537613	2,9936427	175	1,3308890	1,5903821
35	2,7171044	1,0535144	180	1,3405220	1,5978116
40	2,7715404	1,1045448	185	1,3498442	1,6049583
45	2,8191852	1,1488554	190	1,3588725	1,6118392
50	2,8614806	1,1878574	195	1,3676231	1,6184696
55	2,8994556	1,2226078	200	1,3761111	1,6248636
60	2,9338693	1,2538541	205	1,3843496	1,6310313
65	2,9652986	1,2821711	210	1,3923517	1,6369940
70	2,9941917	1,3080049	215	1,4001293	1,6427534
75	1,0209286	1,3317089	220	1,4076929	1,6483133
80	1,0457184	1,3535673	225	1,4150527	1,6537134
85	1,0688722	1,3738122	230	1,4222184	1,6589272
90	1,0905579	1,3926359	235	1,4291991	1,6639886
95	1,1109366	1,4101989	240	1,4360024	1,6688903
100	1,1301461	1,4266367	245	1,4426367	1,6736444

*Sulfure de carbone.* — Je me suis servi pour la détermination de A et B des données suivantes extraites du tableau de M. Regnault, p. 402 du tome second de la relation de ses expériences :



$$\log \frac{h_{65}}{h_0} = 1,0226307,$$

$$\log \frac{h_{130}}{h_0} = 1,6918566,$$

$$\log h_0 = 2,1069045,$$

et j'ai trouvé

$$\log A = 0,2637155 \text{ et } \log B = 0,7941306.$$

Voici les résultats rapprochés de ceux que M. Regnault a calculés avec la formule à deux exponentielles, et qui s'accordent très-bien avec les expériences :

t	h par la formule		DIFFÉRENCES	$\frac{h'}{10}$
	à deux exponentielles.	(122).		
-20°	47,30	47,63	+0,33	
-15	61,64	61,91	+0,27	0,32
-10	79,44	79,63	+0,19	0,40
-5	101,29	101,40	+0,11	0,48
0	127,91	127,91	0	0,59
5	160,01	159,91	-0,10	0,71
10	198,46	198,26	-0,20	0,84
15	244,13	243,84	-0,29	1,00
20	298,03	297,64	-0,39	1,17
25	361,13	360,70	-0,43	1,36
30	434,62	434,17	-0,45	1,58
35	519,66	519,21	-0,45	1,83
40	617,53	617,11	-0,42	2,10
45	729,53	729,20	-0,33	2,40
50	857,07	856,77	-0,30	2,72
55	1001,57	1001,37	-0,20	3,07
60	1164,51	1164,44	-0,07	3,46
65	1347,52	1347,52	0	3,88
70	1552,09	1552,17	+0,08	4,32
75	1779,88	1779,96	+0,08	4,80
80	2032,53	2032,66	+0,13	5,32
85	2311,70	2311,79	+0,09	5,87
90	2619,08	2619,07	-0,01	6,45
95	2956,34	2956,17	-0,17	7,06
100	3325,15	3324,78	-0,37	7,71
105	3727,19	3726,59	-0,60	8,39
110	4164,06	4163,27	-0,79	9,10
115	4637,41	4636,46	-0,95	9,84
120	5148,79	5147,86	-0,93	10,62
125	5699,69	5699,04	-0,65	11,43
130	6291,60	6291,60	0	12,26
135	6925,90	6927,10	+1,20	

*Chloroforme.*—Le tableau de M. Regnault, p. 415, donne  
 $\log h_{180} = 3,9412231$ ,  $\log h_{100} = 3,3853453$ ,  $\log h_{40} = 2,5673323$ .

Au moyen de ces nombres, j'ai trouvé

$\log h_0 = 1,786173$ ,  $\log A = 0,5737619$ ,  $\log B = 0,8965928$ .

t	h par la formule		DIFFÉRENCES	$\frac{h'}{10}$
	à deux exponentielles.	(122).		
20 <sup>0</sup>	160,47	161,18	+0,71	
25	200,18	200,85	+0,67	0,87
30	247,51	247,73	+0,22	1,03
35	303,49	303,58	+0,09	1,22
40	369,26	369,26	0	1,43
45	446,01	446,01	0	1,66
50	535,05	535,05	0	1,91
55	637,71	637,82	+0,11	2,20
60	755,44	755,67	+0,23	2,52
65	889,72	890,11	+0,39	2,87
70	1042,11	1042,66	+0,55	3,25
75	1214,20	1214,84	+0,64	3,65
80	1407,64	1408,44	+0,80	4,10
85	1624,10	1624,90	+0,80	4,58
90	1865,22	1865,96	+0,74	5,08
95	2132,85	2133,27	+0,42	5,63
100	2428,54	2428,54	0	6,24
105	2754,03	2753,43	-0,60	6,82
110	3110,99	3109,62	-1,37	7,47
115	3501,03	3498,71	-2,32	8,15
120	3925,74	3922,36	-3,38	8,85
125	4386,60	4382,15	-4,45	9,60
130	4885,10	4879,61	-5,49	10,36
135	5422,53	5416,20	-6,33	11,15
140	6000,16	5993,37	-6,79	11,97
145	6619,20	6612,40	-6,80	12,80
150	7280,62	7274,87	-5,75	13,66
155	7985,35	7981,73	-3,62	14,54
160	8734,20	8734,20	0	15,42
165	9527,82	9533,34	+5,52	

*Benzine.* — En employant les tensions maximum à 40, 100, 160 degrés prises dans les tableaux de M. Regnault, p. 428, on trouve

$$\log h_0 = 1,4480395, \quad \log A = 0,4917750, \quad \log B = 0,8951272.$$

<i>t</i>	<i>h</i> par la formule		DIFFÉRENCES	$\frac{h'}{10}$
	à deux exponentielles.	(122).		
30°	120,24	120,86	+0,62	
35	149,26	149,54	+0,28	0,63
40	183,62	183,62	0	0,75
45	224,06	223,87	-0,19	0,88
50	271,37	271,04	-0,33	1,02
55	326,41	325,29	-1,12	1,19
60	390,10	389,77	-0,23	1,37
65	463,43	463,18	-0,25	1,57
70	547,42	547,31	-0,11	1,80
75	643,18	643,19	+0,01	2,04
80	751,86	752,04	+0,18	2,31
85	874,63	874,91	+0,28	2,61
90	1012,75	1013,05	+0,30	2,93
95	1167,46	1167,67	+0,21	3,28
100	1340,06	1340,06	0	3,64
105	1531,83	1531,46	-0,37	4,04
110	1744,12	1743,23	-0,89	4,47
115	1978,22	1976,65	-1,56	4,91
120	2235,44	2233,09	-2,35	5,39
125	2517,06	2513,87	-3,19	5,89
130	2824,35	2820,30	-4,05	6,41
135	3158,51	3153,75	-4,76	6,96
140	3520,73	3515,52	-5,21	7,54
145	3912,11	3906,89	-5,22	8,13
150	4333,71	4329,17	-4,54	8,74
155	4786,51	4783,60	-2,91	9,38
160	5271,43	5271,43	0	9,97
165	5783,03	5793,78	+10,75	10,69
170	6340,72	6351,90	+11,18	

*Chlorure de carbone*  $C^2Cl^8$ . — En prenant dans le tableau de la page 439

$$\log h_0 = 1,5178554, \quad \log \frac{h_{80}}{h_0} = 1,5322381, \quad \log \frac{h_{180}}{h_0} = 2,3810645,$$

on trouve

$$\log A = 0,5518687, \quad \log B = 0,9020947.$$

Les différences, beaucoup plus grandes que pour les autres substances, sont cependant encore moindres que celles qui correspondent à 1 degré de température; les deux tensions données p. 439 et 434 pour la température 40° diffèrent de 8,30, ce qui correspond à 1 degré environ dans cette partie de l'échelle:

t	h par la formule		DIFFÉRENCES	h'
	à deux exponentielles.	(122).		
0°	32,95	32,95	0	1,9
10	55,97	55,35	— 0,62	2,9
20	90,99	89,42	— 1,57	4,4
30	142,27	139,28	— 2,99	6,2
40	214,81	210,24	— 4,57	8,5
50	314,38	308,29	— 6,09	11,6
60	447,43	440,43	— 7,00	15,4
70	621,15	614,37	— 6,78	19,8
80	843,29	838,65	— 4,64	25,1
90	1122,26	1122,26	0	31,2
100	1467,09	1474,77	+ 7,63	38,3
110	1887,44	1905,94	+18,50	46,3
120	2393,67	2425,64	+31,97	55,5
130	2996,88	3043,64	+44,76	65,8
140	3709,04	3769,46	+60,42	77,1
150	4543,13	4612,22	+69,09	90,2
160	5513,14	5580,42	+67,28	104,6
170	6634,37	6681,86	+47,49	120,5
180	7923,55	7923,54	— 0,01	138,3
190	9399,02	9311,44	—87,58	

*Ether chlorhydrique.* — J'ai pris dans le tableau de la page 446

$$\log \frac{h_{40}}{h_0} = 0,7438977, \quad \log \frac{h_{100}}{h_0} = 1,2730329, \quad \log h_0 = 2,6676210,$$

et j'ai trouvé

$$\log A = 0,2534485, \quad \log B = 0,7537503.$$

t	h par la formule		DIFFÉRENCES.	$\frac{h'}{10}$
	à deux exponentielles.	(122).		
-10 <sup>0</sup>	302,09	303,39	+1,30	
- 5	376,72	377,28	+0,56	1,63
0	465,18	465,18	0	1,96
5	569,32	568,94	-0,38	2,26
10	691,11	690,54	-0,57	2,63
15	832,56	832,08	-0,48	3,05
20	996,23	995,79	-0,44	3,52
25	1184,17	1183,97	-0,20	4,02
30	1398,99	1399,05	+0,06	4,59
35	1643,24	1643,53	+0,29	5,21
40	1919,58	1919,97	+0,39	5,87
45	2230,71	2231,13	+0,42	6,60
50	2579,40	2579,40	0	7,72
55	2968,43	2967,83	-0,60	8,27
60	3406,54	3405,31	-1,23	9,10
65	3878,52	3875,87	-2,65	9,99
70	4405,03	4401,09	-3,94	11,04
75	4982,72	4977,36	-5,36	12,09
80	5614,11	5607,83	-6,28	13,19
85	6301,61	6294,84	-6,77	14,33
90	7047,51	7044,50	-3,01	15,52
95	7853,92	7849,70	-4,22	16,75
100	8722,76	8722,76	0	

*Éther bromhydrique.* — J'ai pris pour données dans le tableau de la page 453

$$\log h_0 = 2,2189816, \quad \log \frac{h_{65}}{h_0} = 1,0239249,$$

$$\log \frac{h_{130}}{h_0} = 1,6903867,$$

et j'ai obtenu

$$\log A = 0,3234326, \quad \log B = 0,8035967.$$

t	h par la formule		DIFFÉRENCES	$\frac{h'}{10}$
	à deux exponentielles.	(122).		
0°	165,57	165,57	0	0,77
5	207,21	207,16	— 0,05	0,92
10	257,40	257,00	— 0,40	1,09
15	316,92	316,25	— 0,67	1,30
20	387,03	386,20	— 0,83	1,52
25	469,07	468,20	— 0,85	1,77
30	564,51	563,71	— 0,80	2,05
35	674,92	674,27	— 0,65	2,37
40	801,92	801,49	— 0,43	2,73
45	947,28	947,12	— 0,16	3,11
50	1112,79	1112,80	+ 0,01	3,53
55	1300,35	1300,55	+ 0,25	3,99
60	1511,92	1512,07	+ 0,15	4,49
65	1749,47	1749,46	— 0,00	5,04
70	2015,06	2014,66	— 0,40	5,61
75	2310,73	2309,63	— 1,10	6,23
80	2638,57	2636,63	— 1,90	6,90
85	3000,63	2997,53	— 3,10	7,60
90	3398,95	3394,49	— 4,40	8,35
95	3835,53	3829,60	— 5,93	9,14
100	4312,32	4304,96	— 7,36	9,96
105	4831,22	4822,61	— 8,61	10,82
110	5394,01	5384,66	— 9,35	11,71
115	6002,41	5993,08	— 9,33	12,64
120	6658,00	6649,92	— 8,08	13,60
125	7362,25	7357,10	— 5,15	14,58
130	8116,47	8116,49	0	15,60
135	8921,92	8930,01	+ 8,09	16,63
140	9779,56	9799,37	+ 19,81	17,67

*Éther iodhydrique.* — J'ai pris pour données dans le tableau de la page 156

$$\log h_0 = 1,6227320, \quad \log \frac{h_{30}}{h_0} = 0,6053346,$$

$$\log \frac{h_{60}}{h_0} = 1,0867500,$$

et j'ai obtenu

$$\log A = 0,6001352, \quad \log B = 0,9010968.$$

$t$	$h$ par la formule		DIFFÉRENCES.	$\frac{h'}{10}$
	à deux exponentielles.	(122).		
0°	41,95	41,95	0	
5	54,14	54,20	+0,06	0,28
10	69,20	69,31	+0,11	0,33
15	87,64	87,78	+0,14	0,41
20	110,02	110,15	+0,13	0,49
25	136,95	137,03	+0,08	0,59
30	169,07	169,07	0	0,70
35	207,09	206,96	-0,13	0,83
40	251,73	251,46	-0,27	0,97
45	303,77	303,39	-0,38	1,12
50	364,00	363,55	-0,45	1,30
55	433,21	432,87	-0,34	1,48
60	512,25	512,25	0	

*Mercure.* — J'ai pris pour données les forces élastiques indiquées à la page 519 par M. Regnault pour les températures 256, 384, 512 degrés, et j'ai obtenu la formule

$$\log h = 6,639662 - \frac{274B}{274+t} + A \log \frac{274+t}{274};$$

$$\log A = 0,1844351, \quad \log B = 0,9966067;$$

A a changé de signe.

t	h par la formule		DIFFÉRENCES.	h' 10
	à deux exponentielles.	(122).		
230°	43,35	44,25	— 1,10	.
240	58,82	58,06	— 0,76	1,5
250	75,75	75,44	— 0,31	1,9
260	96,73	97,12	+ 0,39	2,36
270	123,01	123,94	+ 0,93	2,95
280	155,17	156,85	+ 1,68	3,55
290	194,46	196,96	+ 2,50	4,35
300	242,15	245,49	+ 3,34	5,25
310	299,69	303,80	+ 4,11	6,3
320	368,73	373,46	+ 4,73	7,55
330	450,91	456,13	+ 5,22	9,0
340	548,35	553,76	+ 5,41	10,6
350	663,18	668,36	+ 5,18	12,4
360	797,74	802,23	+ 4,49	14,5
370	954,65	957,81	+ 3,16	17,1
380	1139,65	1137,82	— 1,83	19,6
390	1346,71	1345,13	— 1,58	22,4
400	1587,96	1582,89	— 5,07	25,9
410	1863,73	1854,48	— 9,25	29,5
420	2177,53	2163,40	— 14,13	33,5
430	2533,01	2513,58	— 19,43	37,8
440	2933,99	2909,11	— 24,88	42,5
450	3384,35	3354,30	— 30,05	47,8
460	3888,14	3853,77	— 34,37	53,2
470	4449,45	4412,35	— 37,10	59,2
480	5072,43	5035,18	— 37,25	65,6
490	5761,32	5727,63	— 33,69	72,7
500	6520,25	6495,30	— 24,99	74,6
510	7353,44	7344,20	— 9,24	87,2
520	8264,95	8280,40	+ 15,44	



*Acide sulfureux.* — J'ai pris pour données dans le tableau de la page 590 les tensions maximum aux températures  $-20, 20, 60$  degrés, et j'ai obtenu

$$\log h_0 = 3,065522; \quad \log A = 0,4945580; \quad \log B = 0,7924138.$$

t	h par la formule		DIFFÉRENCES.	$\frac{h'}{10}$
	à deux exponentielles	(122).		
-30°	287,47	289,42	+1,95	
-25	373,79	374,63	+0,84	1,92
-20	479,46	479,46	0	2,34
-15	607,90	607,09	-0,81	2,83
-10	762,49	761,00	-1,49	3,39
-5	946,90	944,92	-1,98	4,03
0	1165,06	1162,85	-2,21	4,75
5	1421,14	1419,01	-2,13	5,54
10	1719,55	1717,82	-1,73	6,43
15	2064,90	2063,90	-1,00	7,43
20	2462,05	2462,05	0	8,51
25	2915,97	2917,17	+1,20	9,69
30	3431,80	3434,28	+2,48	10,99
35	4014,78	4018,44	+3,66	12,39
40	4670,23	4674,81	+4,58	13,89
45	5403,52	5408,71	+5,19	15,50
50	6220,01	6224,50	+4,49	17,22
55	7125,02	7127,97	+2,95	19,03
60	8123,80	8123,61	-0,19	20,96
65	9221,40	9216,82	-4,58	

*Éther méthylique.* — Données prises dans le tableau de la page 593 :

$$\log h_0 = 3,2739314, \quad \log \frac{h_{20}}{h_0} = 0,4053139,$$

$$\log \frac{h_{-30}}{h_0} = -0,5131020.$$

Résultats obtenus :

$$\log A = 0,1523956, \quad \log B = 0,6778176.$$

$t$	$h$ par la formule		DIFFÉRENCES.	$\frac{h'}{10}$
	à deux exponentielles.	(122).		
-30°	576,54	576,54	0	
-25	716,08	717,00	+0,92	3,06
-20	882,00	883,58	+1,58	3,61
-15	1077,67	1079,56	+1,89	4,24
-10	1306,63	1308,36	+1,73	4,95
-5	1572,51	1573,60	+1,09	5,73
0	1879,02	1879,02	0	6,57
5	2229,93	2228,49	-1,44	7,49
10	2628,97	2625,97	-3,00	8,50
15	3079,80	3075,53	-4,27	9,58
20	3586,01	3581,28	-4,73	10,72
25	4151,00	4147,37	-3,63	11,91
30	4777,99	4777,99	0	

*Eau.* — Pour l'eau on a, d'après M. Regnault,

$$(126) \quad L = 607 - 0,708t.$$

Une formule linéaire représente, dans ce cas particulier, les chaleurs latentes avec toute l'approximation désirable. Il en résulte qu'il y a lieu à substituer dans (120) la valeur de  $v$  tirée de (90) et non celle que l'on déduit des lois de Mariotte et de Gay-Lussac. On arrive alors à une relation

$$\log \frac{h}{h_0} = B \frac{t}{274+t} - A \log \frac{274+t}{274} + \frac{G}{10333} \int \frac{274}{274+t} p' dt,$$

qui contient un terme de plus que (122). Intégrons ce terme par parties, il vient

$$\log \frac{h}{h_0} = B \frac{t}{274+t} - A \log \frac{274+t}{274} + \frac{274G(p-p_0)}{10333(274+t)} + \int \frac{374G p dt}{10333(274+t)^2}.$$

Mais, le terme non encore intégré étant très-petit, il est évident qu'on en peut obtenir une valeur suffisamment approchée de la même forme que le trinôme qui le précède, et il reste, B, A, G ayant subi une altération,

$$(127) \quad \log \frac{h}{h_0} = B \frac{t}{274+t} - A \log \frac{274+t}{274} + \frac{274G(p-p_0)}{10333(274+t)}.$$

Lorsqu'on veut obtenir des valeurs très-exactes des tensions maximums au moyen de cette formule, il faut calculer B, A, G à l'aide de trois valeurs expérimentales de  $\frac{h}{h_0}$ ; et comme, pour l'eau, la valeur de  $h$  à la température de la glace fondante est connue avec peu d'approximation relative, j'ai pris pour 0 la température de l'eau bouillante, ce qui exige qu'on remplace 274,4 par 374,4.

J'ai calculé deux formules, l'une en employant les températures —70, 70, 130 degrés et l'autre avec —90, 50, 110 degrés. En examinant les écarts déjà très-légers pour chacune d'elles, il devenait évident qu'on les améliorerait par une combinaison dans laquelle prédominerait beaucoup l'influence de la première; je les ai ajoutées après avoir multiplié celle-ci par 4, et j'ai pris le cinquième du résultat. Cela donne

$$(128) \quad \log B = 0,8894359, \quad \log A = 0,6509106, \quad \log G = \bar{3},03727.$$

$t$	$\log \frac{p}{10333}$	$h$		DIFFÉ- RENCES.	$h'$	$h$	DIFFÉ- RENCES.
		calculé.	par la courbe de M. Regnault				
-130°	4,7057737	0,38			0,036	0,38	
-120	3,0782278	0,94	0,91	+0,03	0,077	0,92	+ 0,01
-110	3,4372497	2,14	2,08	+0,06	0,167	2,13	+ 0,05
-100	3,7819442	4,55	4,60	-0,05	0,338	4,53	- 0,06
-90	2,0810819	9,14	9,16	-0,02	0,609	9,11	- 0,05
-80	2,3594860	17,39	17,39	0	1,074	17,36	- 0,03
-70	2,6181858	31,57	31,55	+0,02	1,812	31,55	0
-60	2,8588378	54,92	54,91	-0,01	2,936	54,92	+ 0,01
-50	1,0828798	91,95	91,98	-0,03	4,581	92,00	+ 0,02
-40	1,2917601	148,68	148,79	-0,11	6,912	148,79	0
-30	1,4867100	232,86	233,09	-0,23	10,114	233,08	- 0,01
-20	1,6689741	354,37	354,64	-0,27	14,400	354,69	+ 0,05
-10	1,8397178	525,25	525,45	-0,20	20,01	525,57	+ 0,12
0	0	760,00	760,00	0	27,142	760	0
10	0,1500694	1075,6	1073,7	+1,9	36,270	1074,7	+ 1,00
20	0,2920811	1491,9	1489	+2,9	47,350	1488,8	- 0,20
30	0,4254684	2031,1	2029	+2,1	60,90	2003,52	- 5,48
40	0,5526362	2718,2	2713	+5,2	77,06	2702,55	-10,45
50	0,6720979	3580,8	3572	+8,8	96,17		
60	0,7863591	4649,4	4647	+2,4	118,46		
70	0,8944327	5956,2	5960	-3,8	144,15		
80	0,9968456	7536,6	7545	-8,4	173,42		
90	1,0936060	9427,7	9428	-0,3	206,49		
100	1,1858850	11669	11660	+9	243,46		
110	1,2747653	14304	14308	-4	284,40		
120	1,3594860	17378	17390	-12	329,42		
130	1,4396443	20933	20915	+18	377,96		

Dans la cinquième colonne se trouvent les différences entre les valeurs de  $h$  données par la formule (126) et celles données par la courbe de M. Regnault; jusqu'à 60 degrés au-dessus de la glace fondante, elles sont de quelques centièmes de millimètres seulement; au-delà elles sont moindres que  $\frac{h'}{10}$  et cor-

respondent par conséquent à des différences de température moindres que 0,1 degré; M. Regnault pense que les erreurs expérimentales peuvent aller jusque-là; c'est pour cette raison que j'ai, dans la plupart des tableaux qui précèdent, mis en regard  $\frac{h'}{10}$  et les différences.

Dans la septième colonne j'ai indiqué les valeurs de  $h$  fournies par la formule abrégée

$$(129) \quad \log \frac{h}{h_0} = 7,8 \frac{t}{374+t} - 4,58 \log \frac{374+t}{374};$$

la huitième colonne contient les différences analogues aux précédentes; jusqu'à 30 degrés au-dessus de l'eau bouillante, elles sont négligeables.

Il est facile de ramener les formules (127) et (129) à l'échelle thermométrique ordinaire, avec laquelle on peut employer encore l'équation

$$(130) \quad \log h = 10,68076 - 3,50104 \log \frac{274+t}{274} - 10,01512 \frac{274}{274+t},$$

qui, depuis  $-20^\circ$  jusqu'à  $+230^\circ$ , donne des différences constamment moindres que celles qui correspondent à  $\frac{1}{6}$  de degré.

Les nombreuses applications qui précèdent prouvent suffisamment que la loi de première approximation qui régit les tensions maximum d'un même liquide à diverses températures est bien celle que fait connaître la formule (122) à laquelle m'a conduit la théorie mécanique de la chaleur. Si on l'applique à trois températures et qu'on élimine A et B, on trouve une relation dans laquelle entrent seulement les températures et les tensions correspondantes, outre la tension à  $0^\circ$ : mais l'énoncé sous cette forme est très-compiqué; il se simplifie un peu quand on prend pour unité la tension maximum à  $0^\circ$ ; on peut alors énoncer ma loi de la manière suivante :

*La différence entre le quotient du logarithme de la tension*

*maximum par le binôme de dilatation à une température quelconque  $t$  et le quotient analogue pour une autre température  $t'$  est proportionnelle à la différence entre deux fractions relatives, la première à la température  $t$ , la seconde à la température  $t'$  et ayant pour numérateur le produit du coefficient de dilatation par la température et pour dénominateur le produit du binôme de dilatation par son logarithme.*

Le binôme de dilatation  $1 + \alpha t$  est ici l'unité augmentée du produit du coefficient de dilatation  $\frac{1}{274,4}$  par la température; j'emploie ordinairement la même expression pour désigner le binôme  $274 + t$ , c'est pour cela que je prévient le lecteur.

M. Regnault, par une discussion très-remarquable de ses expériences, a fait voir que les tensions maximum sont bien représentées, après la détermination convenable des cinq constantes, par la formule à deux exponentielles de Biot. Il a même trouvé qu'une formule à une seule exponentielle est souvent suffisante et peut en tous cas lier ensemble les nombres correspondant à des températures qui occupent une grande étendue sur l'échelle thermométrique. Il est assez surprenant que la formule (122) et la formule à une exponentielle, si différentes l'une de l'autre, puissent ainsi représenter une même loi approchée, et il importe de chercher les valeurs des paramètres de l'équation  $\log h = a + b\beta^t$  en fonction de A et B. Je ferai remarquer d'abord qu'on peut regarder  $t$  comme représentant la température, quoique M. Regnault ait généralement pris un point de départ autre que la glace fondante; cela change seulement la valeur de  $b$ . D'ailleurs, pour  $h = h_0$ , on a  $t = 0$  et on peut adopter la forme

$$(131) \quad \log \frac{h}{h_0} = -b(1 - \beta^t).$$

La comparaison avec (122) conduit à l'identité

$$(132) \quad B \frac{t}{274 + t} - A \log \frac{274 + t}{274} = -b(1 - \beta^t),$$

qui a pour dérivée

$$(133) \quad \frac{h'}{h} = \frac{274BM - A(274+t)}{M(274+t)^2} = \beta t \cdot b \log_n \beta.$$

En faisant successivement  $t=0$  et  $t=1$ , on obtient

$$(134) \quad \frac{h'_0}{h_0} = b \log_n \beta = \frac{BM - A}{274M},$$

$$(135) \quad \beta b \log_n \beta = \frac{274(BM - A) - A}{M(274+1)^2},$$

et l'élimination de  $b$  fait connaître de suite la valeur de  $\beta$ ; elle est

$$(136) \quad \beta = \frac{(274)^2}{(274+1)^2} \left[ 1 - \frac{A}{274(BM - A)} \right].$$

Les valeurs trouvées précédemment pour  $B$  et  $A$  montrent que la fraction  $\frac{A}{274(BM - A)}$  est très-petite; en la négligeant, on a

$$(137) \quad \beta = \left( \frac{274}{274+1} \right)^2 \text{ et } \log \beta = \bar{1}, 996844.$$

Si l'on porte cette valeur dans (134), puis qu'on développe le logarithme en négligeant les puissances de  $\frac{1}{274}$  supérieures à la première, on trouve

$$(138) \quad -b = \frac{BM - A}{2M} = \frac{274}{2} \cdot \frac{h'_0}{h_0},$$

et la formule à une exponentielle devient

$$(139) \quad \log \frac{h}{h_0} = \frac{BM - A}{2M} \left[ 1 - \left( \frac{274,4}{274,4+1} \right)^{2t} \right].$$

*Loi de Regnault.* — La valeur approchée de  $\beta$  est indépendante de  $A$  et de  $B$ ; elle est la même pour tous les liquides; c'est à  $M.$  Regnault qu'est due cette remarque importante qui

établit une relation entre les tensions maximum de substances diverses, ce qui n'avait pas encore été fait. J'ai montré que cette constante générale n'est autre que le carré de l'inverse de l'unité augmentée du nombre fondamental  $\frac{1}{274,4}$ . Je vais maintenant chercher la loi qui en résulte.

Si dans l'équation (131) on remplace  $h$  et  $b$  par  $H$  et  $b_1$ , pour l'appliquer à une autre substance considérée à la même température, on obtient ensuite, en éliminant  $\beta$ , l'équation

$$(140) \quad \frac{1}{b_1} \log \frac{H}{H_0} = \frac{1}{b} \log \frac{h}{h_0},$$

qui, appliquée à deux températures, fournit, par soustraction,

$$(141) \quad \frac{1}{b_1} \log \frac{H_1}{H_2} = \frac{1}{b} \log \frac{h_1}{h_2}.$$

La formule (140) montre que la loi de Regnault peut être énoncée ainsi :

*Le rapport des logarithmes des quotients des tensions maximum de deux vapeurs prises à la même température par leur tension à 0° est constant, quelle que soit cette température.*

L'équation (141) prouve qu'on peut remplacer la température fixe 0° par toute autre.

Si dans l'équation (131) on remplace  $b$  par sa valeur (138), on est conduit à

$$(142) \quad \log \frac{h}{h_0} = \frac{274}{2} \cdot \frac{h'_0}{h_0} (1 - \beta')$$

et, comme  $\beta$  est constant, on a cet autre énoncé :

*Le logarithme du quotient de la force élastique à une température quelconque par la force élastique à 0° se déduit du quotient de la dérivée de la tension maximum à 0° par cette tension elle-même, en multipliant par une fonction de la température qui est indépendante de la nature du corps.*



Enfin les équations (133) et (134) donnent la formule

$$(143) \quad \frac{p'}{p} = \frac{h'}{h} = \frac{h'_0}{h_0} \cdot \beta^t = \frac{274B}{(274+t)^2} - \frac{A}{M(274+t)},$$

d'où il résulte que *le rapport de la dérivée de la tension maximum à la tension elle-même égale un nombre constant multiplié par une fonction de la température qui est la même pour tous les corps*. Le coefficient constant est la valeur que prend à 0° le rapport dont il s'agit.

*Chaleurs latentes.* — Pour arriver aux lois de première approximation, relatives aux chaleurs latentes, portons dans (121) la valeur (143) de  $\frac{p'}{p}$ ; il vient

$$(144) \quad L = \frac{10333}{1,3DE} \cdot \frac{h'_0}{h_0} \cdot \frac{(274+t)^2}{274} \cdot \beta^t = L_0 \left( \frac{274+t}{274} \right)^2 \beta^t;$$

et l'on voit que :

*Les chaleurs latentes à diverses températures se déduisent, pour chaque liquide, de la chaleur latente à 0° en la multipliant par une fonction de t qui est la même pour tous les corps,*

ou, ce qui équivaut :

*Le rapport des chaleurs latentes de deux corps pris à la même température est indépendant de cette température.*

Pour vérifier la loi dont on vient de lire deux énoncés successifs, comparons d'abord le sulfure de carbone et le chlorure de carbone C<sup>2</sup>Cl<sup>8</sup>. M. Regnault, pour le premier de ces liquides, donne l'expression de la chaleur totale de vaporisation,

$$X = 90,00 + 0,14601 t - 0,0004123 t^2$$

et celle de la quantité de chaleur qui est abandonnée à l'état liquide, pendant le passage de t° à 0°,

$$Q = 0,23523 t + 0,0000815 t^2.$$

Une soustraction fournit, pour la chaleur latente, la formule

$$(145) \quad L = 90,00 - 0,08922t - 0,0004938t^2,$$

au moyen de laquelle il est facile de dresser, par la méthode des différences, le tableau des valeurs numériques de dix en dix degrés.

On peut aussi mettre l'équation précédente sous la forme

$$(146) \quad L = 90 (1 - 0,00099133t - 0,000053756t^2),$$

qui répond au premier énoncé.

Pour le chlorure de carbone, on a

$$(147) \quad L_1 = 52,00 - 0,05172t - 0,000263t^2,$$

ou bien

$$(148) \quad L_1 = 52 (1 - 0,00099462t - 0,0000050777t^2).$$

Ainsi que l'exige la loi, dans (146) et (148), les deux parenthèses sont, sensiblement identiques avec leur moyenne

$$(149) \quad F_1(t) = 1 - 0,00099298t - 0,00000521665t^2.$$

Cette fonction est la même que celle  $\left(\frac{274+t}{274}\right)^3$  qui figure dans l'équation (135); voici le tableau de ses valeurs aux diverses températures :

$t$	$F_1(t)$	$\log F_1(t)$	$L$ observé.	$L$ calculé.	$L_1$ observé.	$L_1$ calculé.	$\frac{L}{L_1}$
0 <sup>n</sup>	1,00000	0	90,00	89,75	52,00	52,12	1,73
10	0,98955	$\bar{1},99544$	89,06	88,81	51,46	51,57	1,73
20	0,97805	$\bar{1},99036$	88,02	87,78	50,86	50,98	1,73
30	0,96551	$\bar{1},98476$	86,88	86,65	50,21	50,32	1,73
40	0,95193	$\bar{1},97860$	85,64	85,43	49,51	49,61	1,73
50	0,93730	$\bar{1},97188$	84,31	84,12	48,76	48,85	1,73
60	0,92163	$\bar{1},96455$	82,87	82,71	47,95	48,03	1,73
70	0,90491	$\bar{1},95661$	81,34	81,21	47,09	47,16	1,73
80	0,88715	$\bar{1},94800$	79,70	79,62	46,18	46,24	1,73
90	0,86835	$\bar{1},93869$	77,97	77,93	45,21	45,26	1,72
100	0,84853	$\bar{1},92867$	76,14	76,15	44,20	44,22	1,72
110	0,82764	$\bar{1},91784$	74,21	74,28	43,13	43,14	1,72
120	0,80570	$\bar{1},90617$	72,19	72,31	42,01	41,99	1,72
130	0,78272	$\bar{1},89360$	70,06	70,25	40,83	40,79	1,72
140	0,75870	$\bar{1},88007$	67,84	68,09	39,60	39,54	1,71
150	0,73363	$\bar{1},86548$			38,32	38,24	
160	0,70252	$\bar{1},84974$			36,99	36,88	

En ajoutant aux logarithmes de la fonction  $F_1(t)$ , que l'on trouve dans la troisième colonne, le logarithme de 90, puis cherchant les nombres correspondants, on obtient très-vite pour le sulfure de carbone les chaleurs latentes calculées inscrites dans la cinquième colonne; elles diffèrent peu des chaleurs latentes observées contenues dans la quatrième colonne. La sixième et la septième colonne fournissent, pour le chlorure de carbone, des vérifications analogues aussi très-satisfaisantes; enfin la huitième colonne montre que le rapport  $\frac{L}{L_1}$  est constant comme le veut le second énoncé.

M. Regnault n'a publié jusqu'à présent les données nécessaires au calcul de l'expression générale des chaleurs latentes que pour quatre autres substances; on a

Pour l'eau :

$$607 - 0,708t;$$

Pour l'éther sulfurique :

$$94,00 - 0,07900 t - 0,00085143 t^2;$$

Pour le chloroforme :

$$-67,00 - 0,09485 t - 0,000050716 t^2;$$

Pour l'acétone :

$$140,5 - 0,13999 t - 0,000912 t^2.$$

La formule simplifiée, relative à l'eau, a été déduite, par M. Clausius, des données de M. Regnault.

Pour l'alcool, ce dernier savant donne

$$Q = 0,547541 t - 0,001121837 t^2 + 0,0000022060 t^3;$$

je me suis servi de cette expression pour former le tableau des valeurs numériques de Q que j'ai retranchées de celles obtenues par expériences pour X. J'ai pris le chlorure de carbone pour point de comparaison général et j'ai inscrit dans le tableau qui suit les quotients indépendants de la température d'après la loi :

t	CHLOROFORME.	ÉTHER SULFURIQUE.	ACÉTONE.	EAU.	ALCOOL.
0°	1,32	1,81	2,70	11,7	4,65
10	1,32	1,81	2,70	11,7	4,64
20	1,32	1,81	2,70	11,7	4,73
30	1,32	1,81	2,70	11,7	4,79
40	1,32	1,81	2,70	11,7	4,81
50	1,32	1,80	2,69	11,7	4,79
60	1,32	1,80	2,69	11,8	4,75
70	1,32	1,79	2,68	11,8	4,68
80	1,32	1,78	2,67	11,9	4,61
90	1,32	1,77	2,67	12,0	4,56
100	1,32	1,76	2,66	12,1	4,50
110	1,32	1,74	2,64	12,3	4,47
120	1,32	1,72	2,63	12,4	4,45
130	1,32		2,62	12,6	4,43
140	1,32		2,60	12,8	4,44
150	1,32			13,1	4,45
160	1,32			13,3	

CHALEURS LATENTES. — *Seconde approximation.*

Dans (120), au lieu d'employer les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, remplaçons maintenant  $v$  par sa valeur tirée de la formule (90), après le changement de  $u$  en  $v$ , et représentons par  $\alpha_1$  le coefficient de dilatation à volume constant  $\frac{1}{B_1}$ . Soit d'ailleurs  $D_1$  la densité limite de la vapeur par rapport à l'hydrogène, laquelle est généralement un nombre entier, et posons

$$(150) \quad \frac{11,157 \times 10333 \times 274,4}{433,5 D_1} = F, \quad \frac{D_1(v + c_0 v_0)}{11,157} = a;$$

l'équation (120) modifiée devient

$$(151) \quad L = \frac{F(274 + t)}{274} \cdot \frac{h'}{h} [1 + \alpha_1 t - ah].$$

Cette équation, si l'on connaissait par des mesures directes  $\alpha_1$  et  $c_0 v_0$ , fournirait les chaleurs latentes aux diverses températures, sans qu'on soit obligé d'en mesurer une seule, et les nombres obtenus expérimentalement par M. Regnault serviraient aux vérifications; elle exprime les lois que suivent les chaleurs latentes d'un même liquide, mais ces lois sont trop compliquées pour qu'il soit utile de les énoncer en langage ordinaire.

Ce n'est que pour l'eau que l'on connaît le coefficient de dilatation  $\alpha_1 = 0,00367$ , et l'approximation n'est pas même bien certaine. Pour trouver les valeurs de  $\alpha_1$  et  $a$  actuellement inconnues quand il s'agit des autres vapeurs et procéder aux vérifications, il est commode de mettre l'équation (151) sous la forme

$$(152) \quad \frac{274 L}{F(274 + t)} \cdot \frac{h}{h'} = z = 1 + \alpha_1 t - ah;$$

la quantité  $z$  peut être facilement calculée pour chaque tem-

pérature au moyen des tableaux dressés par M. Regnault d'après ses expériences.

*Points correspondants.* — La détermination de  $\alpha_1$  et  $a$  exige l'emploi de deux valeurs  $z_1$  et  $z_2$  de  $z$  correspondant à deux températures différentes  $t_1$  et  $t_2$  convenablement choisies. Lorsque  $t_1$  et  $t_2$  sont tels, qu'on a

$$(153) \quad \frac{h_1}{t_1} = \frac{h_2}{t_2},$$

comme il arrive pour le sulfure de carbone aux températures  $10^{\circ},5$  et  $63^{\circ},2$ , qui donnent  $\frac{h_2}{h_1} = \frac{t_2}{t_1} = 6$ , les deux équations obtenues en particularisant (143) sont rentrantes et ne peuvent servir au calcul des deux inconnues, qui seraient *mal déterminées* si l'on prenait seulement des températures voisines de celles qui jouissent de cette propriété.  $t$  et  $h$  étant les abscisses et les ordonnées d'une courbe, les *points correspondants* dont il est question se trouvent sur une droite passant par l'origine, et la condition de leur existence est qu'on puisse mener par ce point une tangente à la courbe qui ne la touche pas en un point d'inflexion. La rotation de la droite autour de l'origine dans le sens convenable donne des points correspondants qui, se confondant d'abord, s'écartent ensuite de plus en plus l'un de l'autre. D'ailleurs les coordonnées du point de contact satisfont évidemment à la relation

$$(154) \quad h' = \frac{h}{t},$$

qui devient, par la substitution (133) de  $\frac{h'}{h}$ ,

$$(155) \quad \frac{1}{t} = \frac{274 \text{ BM}}{(274+t)^2} - \frac{A}{274+t}.$$

Si, pour simplifier, on pose  $y = \frac{274+t}{274}$ , l'équation à ré-

soudre est

$$(156) \quad (1 + A)y^2 - (BM + A)y + MB = 0,$$

et, pour que ses racines soient réelles, il faut qu'on ait

$$(157) \quad (BM - A)^2 > 4BM.$$

Cette inégalité est grandement satisfaite pour toutes les substances que j'ai étudiées. Pour le chlorure de carbone en particulier, l'abscisse du point de contact est 22°,045, et les points correspondants sont toujours situés l'un plus près de l'origine et l'autre plus loin. Pour cette substance, la seconde racine de l'équation (156) fournit une valeur de  $t$  qui sort des limites entre lesquelles l'application des formules est légitime.

Les équations rentrantes doivent être complètement identiques, et par conséquent, si l'on pose

$$(158) \quad k = \frac{h_2}{h_1} = \frac{t_2}{t_1}, \quad \text{ou} \quad k - 1 = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{t_2 - t_1}{t_1},$$

on doit avoir

$$(159) \quad z_1 - \frac{z_2 - z_1}{k - 1} = 1.$$

Il est facile de rendre cette formule applicable à deux points quelconques, en transportant l'origine au point où l'axe des abscisses est coupé par la droite qui les joint. En désignant, pour abrégé, sa distance à l'origine par

$$(160) \quad \delta = \frac{kt_1 - t_2}{k - 1},$$

on trouve

$$(161) \quad z_1 - \frac{z_2 - z_1}{k - 1} = 1 + \alpha_1 \delta.$$

Cette relation, qu'on obtient aussi par l'élimination de  $a$  entre les équations que donne l'application successive de (152) aux températures  $t_1$  et  $t_2$ , reproduit (159) comme cela doit être quand on y fait  $\delta = 0$ . Elle donne le coefficient de dilatation au moyen de deux chaleurs latentes. En faisant dans (152)  $t = \delta$

et retranchant, on obtient une autre relation

$$(162) \quad z_1 - z_0 - \frac{z_2 - z_1}{k-1} = ah_0,$$

qui fournit la valeur de  $a$  en fonction de deux différences. Dans les cas particuliers où  $h_2$  est assez faible pour qu'il y ait lieu à négliger le second membre, le rapport de ces différences doit évaluer  $k-1$ . Cette vérification réussit sur le sulfure de carbone pour  $\delta=0$ ,  $t_1=10^{\circ},5$  et  $t_2=63^{\circ},2$ ; mais elle est beaucoup plus parfaite quand on tient compte du petit terme  $ah_0$ .

On peut encore appliquer de suite l'équation (152) à trois températures  $t_1, t_2, t_3$  et éliminer  $z_1$  et  $a$ , ce qui donne une relation générale entre les  $z$  qui permet de procéder de suite à la vérification de la théorie par sa comparaison avec les données de l'expérience. On trouve

$$(163) \quad z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3 = 1 + \lambda + \mu,$$

en posant, pour abrégér,

$$(164) \quad \lambda = \frac{t_3 h_1 - t_1 h_3}{t_2 h_3 - t_3 h_2},$$

$$(165) \quad \mu = \frac{t_1 h_2 - t_2 h_1}{t_2 h_3 - t_3 h_2}.$$

*Application à l'eau.* — En introduisant dans l'équation (163) les données relatives aux températures  $t_2=100$ ,  $t_3=195$  pour lesquelles M. Regnault déclare les chaleurs latentes très-dignes de confiance, et faisant, en outre,  $t_1=80$ , on obtient d'abord  $z_1$  et ensuite, au moyen de l'équation (151) et de la valeur de  $F$  donnée un peu plus bas, la chaleur latente à  $80^{\circ}$ . Ce dernier nombre diffère de celui que l'expérience a fourni, seulement de  $\frac{1}{250}$ . La formule (163) exprime donc bien la loi des chaleurs latentes aux diverses températures; la concordance, à la vérité, est quelquefois un peu moins approchée, mais les différences relatives dans chaque cas ne dépassent point les erreurs d'observation possibles.



Pour déterminer  $\alpha_1$  on peut employer les mêmes données et faire dans (161)  $t_1 = 100$ ,  $t_2 = 195$ ; le résultat obtenu dépend de la valeur prise pour F. Avec  $\log \frac{1}{F} = \bar{4},1841804$ , qui correspond à  $E = 433,5$ , on trouve  $\alpha_1 = 0,00367$ .  $E = 437,17$  donne  $\log \frac{1}{F} = \bar{4},1880108$  et  $\alpha_1 = 0,00379$ ;  $\alpha_1$  croît de 0,000032 pour une variation de E égale à 1. Toutes les expériences sur le coefficient de dilatation s'opposent à l'adoption définitive du chiffre fourni par les calculs de première approximation sur les chaleurs latentes, aussi bien qu'à l'adoption du chiffre 424 dont l'usage est très-répandu et qui correspond à  $\alpha_1 = 0,00337$ . Elles sont favorables au contraire à l'emploi du nombre 433,5, qui est nécessairement très-approché. Cependant, comme ces expériences sont surtout relatives au coefficient de dilatation à pression constante et qu'elles laissent un peu à désirer sous le rapport de la précision, il est à regretter qu'on n'ait pu encore fixer la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur par des expériences *directes* et inspirant la même confiance que celles qui ont servi à M. Regnault à fixer les valeurs de plusieurs autres nombres fondamentaux. En attendant, nous emploierons exclusivement le nombre 433,5, et, la valeur de F étant ainsi fixée, l'équation (152), appliquée à deux températures fort éloignées de donner des points correspondants, fournit pour chaque corps les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha$ , après quoi on calcule sans peine les valeurs du second membre de cette équation de 10 degrés en 10 degrés pour les mettre en regard des  $\alpha$ , ainsi que les chaleurs latentes calculées pour les comparer avec les nombres obtenus par expériences. Voici le tableau des résultats relatifs à l'eau, substance pour laquelle on a

$$\log \frac{11,157 a}{D_1} = \log a' = \bar{5},2019521$$

quand on emploie pour  $\alpha$ , et F les nombres 0,00367 et 6543,64.

$t$	L	$\frac{11,157}{9}(1+\alpha_1 t) - ah$	$\log \frac{h'}{h}$	$\log \frac{h'}{h}$	$\frac{EL}{10535(274+t)} \cdot \frac{h}{h'}$	$\frac{EL}{10535(274+t)} \cdot \frac{h}{h'}$	L	L
0	606,5	1,23962	2,86680	2,86097	1,25953	1,27655	596,9	589,0
10	599,5	1,28505	2,82248	2,82623	1,33027	1,31884	579,1	584,1
20	592,6	1,33041	2,79088	2,79253	1,36618	1,36100	577,1	579,3
30	585,7	1,37569	2,75919	2,75981	1,40479	1,40279	573,6	574,4
40	578,7	1,42081	2,72806	2,72799	1,44370	1,44396	569,5	569,4
50	571,6	1,46572	2,69726	2,69701	1,48362	1,48447	564,7	564,4
60	564,7	1,51031	2,66703	2,66683	1,52439	1,52509	559,5	559,2
70	557,6	1,55446	2,63739	2,63739	1,56472	1,56474	553,9	553,9
80	550,6	1,59803	2,60856	2,60865	1,60457	1,60423	448,4	548,5
90	543,5	1,64080	2,58070	2,58056	1,64244	1,64298	543,0	542,8
100	536,5	1,68257	2,55284	2,55310	1,68257	1,68157	536,5	535,5
110	529,4	1,72304	2,52799		1,71232		532,7	
120	522,3	1,76192	2,50178		1,74894		526,2	
130	515,1	1,79883	2,47705		1,78087		520,3	
140	508,0	1,83339	2,45267		1,81282		513,8	
150	500,7	1,86514	2,42901		1,84235		506,9	
160	493,6	1,89359	2,40597		1,87110		499,5	
170	486,2	1,91823	2,38343		1,89752		491,5	
180	479,0	1,93850	2,36137		1,92355		482,7	
190	471,6	1,95381	2,33980		1,94741		473,2	
195	468,0	1,95941	2,32916		1,95941		468,0	
200	464,3	1,96354	2,31864		1,97057		462,6	
210	456,8	1,96707	2,29784		1,99197		451,1	

Dans ce tableau la deuxième colonne contient les chaleurs latentes données par M. Regnault dans le tome I de la relation de ses expériences, p. 748;

La quatrième colonne contient les valeurs de  $\log \frac{h'}{h}$  tirées de son tableau, p. 624;

La sixième colonne, celles de  $\frac{11,15727}{9}z$ , qui se déduisent des nombres pris dans la deuxième et dans la quatrième;

La huitième colonne renferme la chaleur latente calculée au

moyen des nombres pris dans la troisième et la quatrième colonne, et portés dans l'équation (151).

Les colonnes cinquième, sixième et neuvième présentent des résultats analogues obtenus en se servant, au lieu du tableau de M. Regnault pour les forces élastiques, de la relation (129).

Les différences relatives entre les nombres observés et calculés ne dépassent point  $\frac{1}{80}$  entre 50 degrés et 210 degrés; on peut les attribuer aux erreurs d'expériences commises tant dans la mesure des chaleurs latentes que dans celles des tensions maximum.

Dans le voisinage de la température 0 degré, elles sont beaucoup plus fortes. Elles ne peuvent provenir de ce que la loi des covolumes a été appliquée à un intervalle trop grand, bon à partager en deux parties, allant, par exemple, l'un de 50 degrés à 210 degrés, et l'autre de 0 degré à 50 degrés avec des valeurs moindres pour  $\alpha_1$  et  $a$ ; car, dans cette partie de l'échelle, les valeurs de  $t$  et de  $h$  sont trop faibles pour que les différences dues à ces diminutions de  $\alpha_1$  et  $a$  aient quelque importance.

Je crois qu'elles viennent principalement des erreurs sur  $\frac{h'}{h}$ , quantité imparfaitement connue aux basses températures.

J'ai supprimé les résultats relatifs aux températures 220 degrés et 230 degrés, qui correspondent aux extrémités des courbes, parce que cette circonstance s'oppose à ce qu'on obtienne une exactitude aussi grande: à 230 degrés, la différence relative entre les chaleurs latentes observée et calculée s'élève à  $\frac{1}{20}$ . D'ailleurs, il n'est pas impossible que les valeurs

moyennes de  $\alpha_1$  et de  $a'$  entre 100 degrés et 195 degrés ne soient point assez approchées quand on les applique à la température 230 degrés et à la pression 27<sup>atm.</sup>,5. Ces remarques faites pour l'eau me dispenseront d'en faire d'analogues pour d'autres substances.

*Chloroforme.*—La quantité  $\frac{E}{10333} \cdot \frac{h}{h'} \cdot \frac{L}{274+t}$  devient, quand on y introduit la valeur (133) de  $\frac{h}{h'}$ ,

$$\frac{E}{10333} L : \left( \frac{274BM}{274+t} - A \right),$$

et, pour le chloroforme, on a (p. 102)

$$\log BM = 1,2588085, \quad A = 3,74767.$$

L'application aux températures 60 degrés et 120 degrés, qui sont très-loin d'être correspondantes, donne

$$\alpha_1 = 0,00393048, \quad \log \alpha' = \bar{6},6856723,$$

et conduit aux résultats contenus dans le tableau suivant :

$t$	$L$	$\frac{11,457}{59} (1 + \alpha, t) - \alpha/h$	$\frac{E}{10333} L : \left( BM \frac{274}{274+t} - A \right)$	$L$ calculé	DIFFÉ- RENCES.
20	65,08	0,20319	0,20729	63,79	+1,29
30	61,11	0,21020	0,21319	63,21	+0,90
40	63,12	0,21705	0,21893	62,58	+0,54
50	62,13	0,22368	0,22457	61,88	+0,25
60	61,13	0,23004	0,23004	61,13	0,00
70	60,11	0,23608	0,23535	60,30	-0,19
80	59,09	0,24174	0,24051	59,39	-0,30
90	58,05	0,24696	0,24548	58,40	-0,35
100	57,01	0,25166	0,25028	57,32	-0,31
110	55,95	0,25578	0,25485	56,15	-0,20
120	54,89	0,25926	0,25926	54,89	0,00
130	53,81	0,26204	0,26344	53,53	+0,28
140	52,73	0,26407	0,26741	52,07	+0,69

*Sulfure de carbone.*— Les calculs ont été faits de la même manière avec

$$\log BM = 1,1563463, \quad A = 1,83534.$$

L'application aux températures 60 degrés et 120 degrés donne

$$\alpha_1 = 0,004017367, \quad \log \alpha' = \bar{5},0883499,$$

et conduit aux résultats contenus dans le tableau suivant :

$t$	L	$\frac{11,157}{38} (1 + \alpha_1 t) - a'h$	$\frac{EL}{10333} \cdot \left( \frac{274 BM}{274 + t} - A \right)$	L calculé	DIFFÉ- RENCES.
0°	90,00	0,29204	0,30200	87,03	+2,97
10	89,06	0,30297	0,31140	86,65	+2,41
20	88,02	0,31355	0,32031	86,16	+1,86
30	86,88	0,32477	0,32867	85,85	+1,03
40	85,64	0,33323	0,33646	84,82	+0,82
50	84,31	0,34184	0,34363	83,87	+0,44
60	82,87	0,35011	0,35011	82,87	0
70	81,34	0,35716	0,35589	81,63	-0,29
80	79,70	0,36307	0,36085	80,19	-0,49
90	77,97	0,36767	0,36502	78,54	-0,57
100	76,14	0,37081	0,36830	76,66	-0,52
110	74,21	0,37233	0,37065	74,55	-0,34
120	72,19	0,37205	0,37205	72,19	0
130	70,06	0,36984	0,37236	69,59	+0,47

*Ether sulfurique.* — Pour cette substance j'ai fait usage des valeurs de  $h$  et de  $h'$  tirées du tableau que donne M. Regnault à la page 393.

L'application aux températures 60 degrés et 120 degrés donne

$$\alpha_1 = 0,004484814; \quad \log a' = \bar{5},0681005,$$

et conduit aux résultats contenus dans le tableau suivant :

$t$	L	$\frac{11,157}{37} (1 + \alpha_1 t) - a'h$	$\frac{EL}{10333} \cdot \left( \frac{274 BM}{274 + t} - A \right)$	L calculé	DIFFÉ- RENCES.
0°	94,00	0,29939	0,31225	90,13	+3,87
10	93,12	0,31169	0,32230	90,05	+3,07
20	92,08	0,32347	0,33127	89,91	+2,17
30	90,86	0,33460	0,34101	89,15	+1,71
40	89,48	0,34491	0,34913	88,40	+1,08
50	87,92	0,35422	0,35633	87,40	+0,52
60	86,19	0,36353	0,36251	86,15	+0,04
70	84,30	0,36904	0,36760	84,63	-0,33
80	82,23	0,37413	0,37151	82,81	-0,58
90	79,99	0,37737	0,37414	80,68	-0,69
100	77,59	0,37853	0,37540	78,24	-0,75
110	75,01	0,37727	0,37521	75,42	-0,41
120	72,26	0,37316	0,37354	72,19	+0,07

*Chlorure de carbone.* — Pour cette substance on a

$$\log BM = 1,2643104, \quad A = 3,563433.$$

L'application aux températures 60 degrés et 120 degrés donne

$$\alpha_1 = 0,003870835; \quad \log a' = 6,9474711,$$

et conduit aux résultats contenus dans le tableau suivant :

$t$	L	$\frac{11,157}{77} \cdot (1 + \alpha_1 t) - a' t$	$\frac{EL}{10335} \cdot \left( \frac{274 BM}{274 + t} - A \right)$	L calculé	DIFFÉRENCES.
0°	52,00	0,14462	0,14720	51,08	+0,92
10	51,46	0,15002	0,15187	50,83	+0,63
20	50,86	0,15532	0,15722	50,25	+0,61
30	50,21	0,16048	0,16193	49,76	+0,45
40	49,51	0,16544	0,16641	49,22	+0,29
50	48,76	0,17017	0,17065	48,62	+0,13
60	47,95	0,17460	0,17460	47,95	0
70	47,09	0,17867	0,17824	47,20	-0,11
80	46,18	0,18231	0,18156	46,37	-0,19
90	45,21	0,18545	0,18450	45,44	-0,23
100	44,20	0,18800	0,18711	44,41	-0,21
110	43,13	0,18989	0,18928	43,37	-0,24
120	42,01	0,19101	0,19101	42,01	0
130	40,83	0,19127	0,19223	40,63	+0,20
140	39,60	0,19057	0,19296	39,11	+0,49
150	38,32	0,18879	0,18707	38,67	-0,35

*Conclusion.* — La formule (120) repose sur le principe de l'égalité de rendement. Dans une étude de première approximation, nous l'avons appliquée conjointement avec les lois de Mariotte et de Gay-Lussac aux forces élastiques des vapeurs saturées et aux chaleurs latentes. Nous avons été conduits à des résultats nombreux et à des lois qui s'accordent trop bien avec les faits pour qu'il soit possible d'attribuer au hasard de telles vérifications; le principe de Carnot est donc désormais certain et les lois de Mariotte et de Gay-Lussac sont applicables aux vapeurs voisines de la saturation comme aux gaz quand on veut bien négliger les erreurs légères dépassant un peu celles que les expériences donnent toujours. Cela est contraire à l'opinion de beaucoup de physiciens qui admettent que les

vapeurs, à plusieurs degrés de la saturation, s'écartent *rapidement* de ces lois ; mais cette opinion, que je ne partage nullement, a été adoptée à la suite d'expériences dans lesquelles la condensation par les surfaces altère profondément les résultats observés. Les remarques faites depuis longtemps par M. Regnault m'autorisent à écarter de la discussion, comme peu dignes de confiance, les nombres obtenus au moyen de procédés directs, souvent fort ingénieux d'ailleurs.

Dans une seconde approximation, la loi des covolumes nous a conduits à une concordance plus complète, qui ne laisserait guère à désirer si l'on avait de bonnes déterminations expérimentales des covolumes et des coefficients de dilatation.

*Détente des vapeurs avec travail complet.* — Ainsi que le fait M. Regnault, désignons par  $\lambda$  la chaleur totale de vaporisation, c'est-à-dire la chaleur  $\int_0^t c'_a dt$  nécessaire pour porter de  $0^\circ$  à  $t^\circ$  1 kilogramme du liquide, plus la chaleur latente ; on a

$$(166) \quad \lambda = \int_0^t c'_a dt + L$$

et, par conséquent,

$$(167) \quad \lambda' = c'_a + L'.$$

La valeur (119) de la capacité  $c'_p$  devient alors

$$(168) \quad c'_p = \lambda' - \frac{L}{274 + t};$$

c'est à M. Clausius que cette formule importante est due, ainsi que l'introduction de cette dernière espèce de chaleur spécifique. Il résulte de la définition qu'une détente infiniment petite avec travail complet a lieu sans que la saturation cesse, si l'on a

$$(169) \quad \lambda' - \frac{L}{274 + t} = 0.$$

L'inégalité

$$(170) \quad \lambda' - \frac{L}{274 + t} < 0$$

caractérise les détentees qui s'effectuent avec condensation, et l'inégalité

$$(171) \quad \lambda' - \frac{L}{274 + t} > 0$$

celles qui produisent une surchauffe.

Les formules empiriques de M. Regnault font voir que l'eau satisfait à la relation (170) ; il en résulte que sa vapeur saturée se condense en partie pendant la détente et se surchauffe pendant la compression. Cette conséquence de la théorie mécanique de la chaleur a été donnée par M. Clausius, et, depuis, M. Hirn l'a vérifiée par des expériences directes ; il a en outre prouvé que l'éther sulfurique est dans le cas contraire.

En résolvant à l'aide des formules empiriques de M. Regnault l'équation (169), j'ai constaté pour plusieurs liquides l'existence d'une température à laquelle la détente s'effectue avec saturation continuée, et j'ai fait voir que ces substances se comportent comme l'eau au-dessous de ce point remarquable, tandis qu'au-dessus, elles se comportent comme l'éther. M. Cazin a obtenu des vérifications satisfaisantes pour le chloroforme. Voici à peu près les températures d'inversion :

118	degrés	pour la benzine ;
122	—	le chloroforme ;
127	—	le chlorure de carbone $C^2Cl^6$ ;
130	—	l'alcool ;
142	—	l'éther chlorhydrique ;
197	—	l'éther iodhydrique ;
200	—	l'acétone.

*Seconde vaporisation.*— Les densités de la vapeur de soufre trouvées à 500 degrés par M. Dumas, à 1000 degrés par M. Bineau, à 860 et à 1040 degrés par MM. Deville et Troost, présentent une anomalie qui mérite de fixer l'attention. M. Deville admet pour densité limite  $D_1 = 32$  ou  $D = 2,2176$ .



Avec cette densité, la formule (90) donne, sous la pression normale,

$$v + c_0 v_0 = 0,348711 (1 + \alpha_1 t),$$

et si l'on substitue les volumes 1,44122 et 1,67029 (\*) trouvés pour le kilogramme de vapeur à 860 et à 1040 degrés, on obtient deux équations qui donnent

$$(172) \quad \alpha_1 = 0,0036495 \quad \text{et} \quad c_0 v_0 = 0,001955;$$

par suite la formule générale devient

$$(173) \quad v + 0,001955 = 0,348711 (1 + 0,0036495 t).$$

En y faisant  $t = 0$  on en tire  $v_0 = 0,346756$  et, comme  $c_0 v_0$  est connu,

$$(174) \quad c_0 = 0,005638;$$

mais cette valeur du covolume ne pourrait devenir certaine que si les densités à 860 et à 1040 degrés étaient connues avec un plus grand nombre de chiffres. L'équation (173) donne, pour  $t = 500$ ,  $v = 0,983$ , tandis que le volume trouvé par M. Dumas est seulement 0,329. Il est impossible d'attribuer une différence si considérable aux erreurs d'expériences; on ne peut pas davantage supposer fautive à ce degré la loi des covolumes que j'ai appliquée ici pour donner un exemple de la manière de s'en servir et quoique les lois de Mariotte et Gay-Lussac fussent suffisantes. Il est évident que la vapeur de soufre sous la pression atmosphérique et à une température comprise entre 500 et 860 degrés change d'état: elle triple de volume pour un changement de température  $\Delta t$  probablement très-faible (\*\*); le soufre à trois atomes devient soufre à un atome, et, comme la

(\*) Je conserve constamment trop de chiffres décimaux dans les calculs pour éviter les accumulations d'erreurs, sachant bien qu'on ne peut compter sur les derniers.

(\*\*) Cette idée a été émise par M. Deville dans une leçon professée à la Société chimique de Paris le 17 février 1860, p. 29.

démonstration des formules relatives aux changements d'état a été faite à un point de vue très-général, elles s'appliquent à cette seconde vaporisation aussi bien qu'à la première. Les données manquant, même pour le soufre pris ici comme exemple, nous sommes réduits à ne pas tenir compte des changements qu'éprouve, avec la température la chaleur latente de seconde vaporisation. En supposant cette quantité constante dans l'équation (121), l'intégration donne

$$(175) \quad \log \frac{h_1}{h_2} = \frac{3EL}{2 \times 10333 \times 0,348711} \cdot \frac{274(t_1 - t_2)}{(274 + t_1)(274 + t_2)}$$

Soit  $t_1$  la température à laquelle s'effectue la seconde vaporisation sous une atmosphère et  $t_2$  sous une demi-atmosphère, on ne s'éloignera pas beaucoup de la vérité en prenant  $(274 + t_1)(274 + t_2) = 274^2 \times 12$ , et on a, pour valeur suffisamment approchée,

$$(176) \quad L(t_1 - t_2) = 12542.$$

Si  $L \leq 35$ , on a  $t_1 - t_2 \geq 360$ , et, comme  $t_1$  est moindre que 860, il en résulte que  $t_2$  est inférieur à 500. La chaleur de première vaporisation est 84, on ne peut guère douter qu'elle soit inférieure à 35 dans la seconde vaporisation, où la substance passe seulement de l'état gazeux à un état gazeux plus avancé, et il me paraît presque certain qu'en opérant sous une demi-atmosphère à 500 degrés, M. Dumas aurait trouvé la même densité que MM. Deville et Troost. Quoique la seconde vaporisation n'ait pas lieu à 500 degrés sous la pression ordinaire, le fait de la dissociation de l'acide carbonique dans l'acide carbonique observé par M. Deville doit faire présumer que la vapeur à 3 atomes peut contenir dans ces circonstances de la vapeur à un atome capable d'en diminuer un peu la densité; mais l'égalité du nombre 6,654 trouvé par M. Dumas, dont l'autorité est si grande, et de la densité calculée  $96 \times 0,0693 = 6,653$ , montre que cette cause d'erreur est négligeable. Il n'en serait point

ainsi, sans doute, à une température beaucoup plus voisine de celle où se produit le changement d'état.

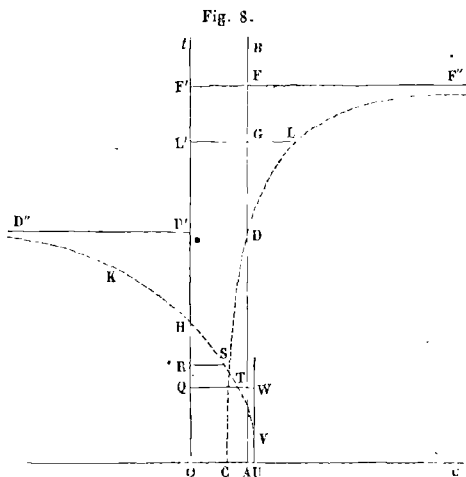
*Changement d'état chimique.* — En parlant des capacités, j'ai fait voir comment la différence  $c' - c'_1$  entre la capacité effective et la capacité calculée, sans tenir compte du travail interne, indique, suivant son signe, une combinaison chimique qui devient plus intime ou moins intime à mesure que la température s'élève; j'ai cité comme exemple l'acide carbonique qui, au-delà de 91 degrés, se trouve dans le second cas. Si l'on nomme  $t$  la température à laquelle ce gaz est décomposé totalement en oxyde de carbone et oxygène, la chaleur de décomposition est  $\int_{91}^t (c' - c'_1) dt$ , et l'équation

$$(177) \quad \int_{91}^t (c' - c'_1) dt = 1564,$$

dans laquelle 1564 indique la chaleur obtenue pendant la combinaison de ces deux substances, permettrait le calcul de la température à laquelle on n'a plus qu'un mélange si les mesures s'étendaient assez loin pour  $c'$  et si la valeur de  $c$  était constante ou connue en fonction de  $t$ . Mais il se peut qu'à un certain moment, une élévation de température  $\Delta t$  très-faible suffise pour compléter la décomposition, enfin qu'il y ait, selon l'expression si bien choisie par M. Deville, *un changement d'état chimique*. A ce moment,  $c' - c'_1$  devient énorme et le produit  $(c' - c'_1) \Delta t$  est ce qu'on nomme *chaleur latente* ou *chaleur de décomposition*, suivant qu'il s'agit d'un changement d'état physique ou chimique, sauf à défalquer le travail externe quand cela est utile.

Nous sommes donc en présence de deux hypothèses, et, comme les changements de densité observés jusqu'ici dans les expériences ne se sont point montrés graduels de manière à lier, au moins à peu près, la densité après la décomposition avec la densité primitive par la loi des covolumes, j'admettrai de suite la seconde, qui me paraît seule conciliable avec les

faits. Il est facile de s'en faire une idée plus nette à l'aide d'une représentation graphique que j'appliquerai à la vapeur d'eau.



Soit (fig. 8)  $OC$  l'axe des capacités et  $Ot$  celui des températures. Si nous considérons 1 kilogramme de vapeur d'eau, sa capacité vraie sera la même avant et après la décomposition, indépendante du volume et sensiblement indépendante de la température dans les limites où ont été faites les expériences de M. Regnault. Il en sera de même de  $c'_1$ , que l'on pourra représenter par la ligne  $AB$  à peu près droite au moins dans sa partie inférieure, qui correspond aux températures employées par ce savant. Quant à la ligne  $CDF''$  des capacités effectives, elle sera d'abord plus rapprochée de l'axe des températures, puisque  $c'$  est inférieur à  $c'_1$  (p. 30); elle coupera  $AB$  en un point  $D$  déterminé par la température  $OD$ , où la combinaison est maximum, et analogue à celle de 91 degrés déjà signalée (p. 31) pour l'acide carbonique. Ensuite la ligne  $CDF''$  s'écartera de plus en plus de l'axe des températures pour devenir enfin presque asymptote de la parallèle  $F'F''$  à l'axe des capacités menée par le point  $F'$  correspondant à la température  $OF'$  de décomposition totale. La chaleur de décomposition est repré-

sentée par la surface  $DF'F''$ , de sorte qu'on a

$$(178) \quad \int_{OD'}^{OF'} (c' - c'_1) dt = DFF''.$$

Cela posé, considérons 1 kilogramme de gaz tonnant. Aux basses températures, sa capacité effective est sans doute la même que si les gaz étaient séparés et se confond, par conséquent, au moins à fort peu près, avec celle que donne le calcul; nous pouvons la représenter par la portion de droite  $UV$  se confondant avec  $AB$  ou s'en écartant très-peu. Mais si l'on chauffe le mélange jusqu'à une certaine température  $OH$ , capable de produire l'explosion, la chaleur spécifique devient négative, puisque la température s'élève ensuite beaucoup, sans chaleur venue du dehors; et cela tient à ce que la combinaison, qui devient de plus en plus intime, produit à chaque instant plus de chaleur qu'il n'en faut pour cette élévation de température; de là cette action, si brusque qu'on est tenté de considérer cette combinaison comme un phénomène qui n'offre rien de graduel. La courbe  $HKD''$  devient enfin presque asymptote de la parallèle  $D'D''$  à l'axe des capacités, qui correspond à la température de combinaison maximum. Si  $OL'$  désigne la température finale, on a, d'après le principe de l'équivalence,

$$(179) \quad \text{Surface } HD'D'' = \text{Surface } D'DLL',$$

et, à ce point, il y a un commencement de décomposition qui disparaît lorsqu'on refroidit jusqu'à la température  $OD'$ . Ce commencement de décomposition s'oppose à ce que la température finale soit aussi élevée qu'on pourrait le croire en n'en tenant pas compte.

Au-dessous de la température  $OH$ , il me paraît extrêmement probable que les deux parties  $UV$  et  $HKD''$  de la courbe des capacités effectives du gaz tonnant se raccordent par un trait continu  $HV$ , et cela permet de prédire deux faits qu'on pourra vérifier, je l'espère, au moins pour certains gaz :

1<sup>o</sup> Si on élève la température des deux gaz *séparés*, jusqu'à la valeur OQ par exemple ; puis, qu'on les mêle, il y aura un léger commencement de combinaison et production d'une quantité de chaleur VTW, qui élèvera la température jusqu'à OR, de telle sorte qu'on ait

$$(180) \quad \text{Surface TVW} = \text{Surface RSTQ};$$

ainsi, à des températures convenablement choisies, eu égard à la pression, le mélange de deux gaz qui tendent à se combiner produit une élévation de température ;

2<sup>o</sup> Si la température OQ des deux gaz séparés est suffisamment élevée pour qu'on ait

$$(181) \quad \text{Surface TVW} > \text{surface HQT},$$

le mélange produira la combinaison brusque, c'est-à-dire qu'on peut produire une détonation en mêlant deux gaz pris à une température inférieure à celle qui serait nécessaire pour produire cet effet si le mélange avait eu lieu à froid.

Le principe de l'équivalence appliqué à la question actuelle exige que la chaleur totale de décomposition égale la chaleur totale de combinaison, et on a, en confondant UV avec AB,

$$(182) \quad \text{Surface VDD}' = \text{surface DFF}''.$$

A chaque température correspondent deux états chimiques et deux capacités effectives distinctes, QT et QW par exemple pour la température OQ ; dans le premier de ces deux états la combinaison est à peine commencée, tandis que dans le second, elle est presque maximum. Le passage de l'un de ces états à l'autre est accompagné d'un très-grand travail chimique qui n'est pas indépendant de la température primitive ; mais les différences sont négligeables en comparaison de la quantité mesurée : c'est pour cela que j'ai pu donner dans l'un de mes Mémoires la loi des quantités de chaleur dues aux combinaisons chimiques, quoique l'on ne sache point en-

core déterminer avec précision les circonstances dans lesquelles cette loi s'applique.

*Remarque.* — L'équation (120) sans cesse invoquée dans ce Chapitre repose sur une hypothèse que j'ai indiquée depuis longtemps comme nécessaire à sa démonstration et qui est évidemment très-voisine de la vérité dans le cas des gazéifications, tandis qu'elle n'est pas toujours suffisamment approchée lorsqu'on considère les passages de l'état solide à l'état liquide ou les changements inverses. On suppose, dans les raisonnements, que le changement d'état est dû à des variations infiniment petites de température ou de pression, et, par suite, on ne doit s'attendre à voir réussir *complètement* les vérifications expérimentales qu'autant que le phénomène est produit par une variation *négligeable* de ces quantités. L'hypothèse, *exprimée ou non*, est toujours au fond du calcul, puisque, après avoir nommé  $u$  et  $v$  les volumes *avant* et *après* et  $L$  la chaleur fournie *pendant* la durée du phénomène, on suppose ces trois quantités relatives à une température  $t$  *unique*. En toute rigueur, un changement d'état exige, sous pression constante par exemple, une élévation de température qui n'est pas infiniment petite dans le sens véritable de ce mot, et le phénomène se produit avec une rapidité ordinairement très-grande, mais cependant d'une *manière continue*. Le commencement et la fin ne peuvent être précisés mathématiquement; ils ne peuvent même pas être définis avec une approximation satisfaisante quand il s'agit de la fusion de certains solides. Dans les calculs relatifs aux vaporisations, par exemple, on fait usage des chaleurs latentes obtenues par les expérimentateurs en employant dans les calculs *jusqu'à la saturation* les capacités à l'état liquide et à l'état gazeux *loin de la saturation*; la valeur adoptée pour  $L$  et par suite pour le premier membre de l'équation (120) est donc relative à une substance *idéale* qui se comporterait de part et d'autre très-près du changement d'état comme la sub-

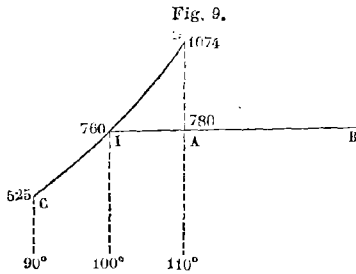
stance *réelle* loin de la saturation et n'en différerait qu'en ce que ce changement d'état serait produit par une variation *infinitement petite* de température ou de pression. Pour être *conséquent* et pour donner aux quantités  $v$  et  $u$  un sens *précis* rentrant dans l'hypothèse qui alors se vérifie *par définition*, il faut bien fixer encore ces deux volumes au moyen de la même substance idéale et les déterminer par des procédés déduits de cette manière de les envisager. Il n'en demeure pas moins *nécessaire*, pour qu'on ait le droit de regarder la formule comme fort approchée, que la substance réelle change d'état par une variation *très-faible* de température ou de pression; car le principe de l'égalité de rendement n'est établi que pour les substances réelles, et l'emploi de la substance idéale amène entre autres changements la concentration, à une température unique, de la chaleur latente contenue dans un intervalle très-petit, mais non nul. On a essayé, dans l'étude de la fusion de certains solides, de déterminer les chaleurs spécifiques quand les modifications qui constituent le changement d'état sont commencées, afin d'obtenir la chaleur latente avec une approximation plus grande. Puisque le phénomène est continu, un succès *complet* dans ce genre de correction, *s'il était possible*, amènerait la coïncidence exacte de ce qu'on *prendrait* pour le commencement et la fin du phénomène; la chaleur latente deviendrait nulle, ainsi que la différence  $v-u$ , et l'équation (120) se réduirait à  $0 = 0$ . La théorie ne s'oppose point sans doute à ce qu'on fixe autrement que par la considération de la substance idéale indiquée plus haut le commencement et la fin du changement d'état; mais, pour l'application effective de la formule, il faut que le moyen employé soit *précis*, qu'il détermine un intervalle de température *négligeable* et n'exige que des mesures *possibles*. En respectant ces conditions, on pourrait même appliquer légitimement l'équation (120) à une *partie* du phénomène; mais elles sont très-difficiles



à concilier, et cette vue purement théorique ne sera peut-être jamais utilisée.

Dans l'état actuel de la science, ainsi que je l'ai dit déjà, le premier membre de (120) est connu par rapport à la substance idéale, et il est naturel de le comparer avec le premier membre évalué au même point de vue. Le volume  $u$  du liquide est très-petit en comparaison du volume  $v$  de la vapeur, dont la mesure est la seule difficulté sérieuse ; toutefois, en écartant la nécessité de faire les expériences à saturation, on les rend plus abordables. Voici une marche qui me semble pouvoir être adoptée.

On vaporiserait un poids connu de liquide dans un espace connu et limité avec précision, puis, à diverses reprises, on ferait varier la température en changeant la pression de manière à maintenir constant le volume sans trop approcher de la saturation. Après avoir opéré toutes les corrections, y compris celle qui est relative à l'action condensante des surfaces, laquelle serait moins difficile à cause de l'éloignement de la saturation, on tracerait une ligne AB (fig. 9) ayant pour ab-



scisses les températures et pour ordonnées les tensions en millimètres de mercure.

Il suffirait de construire ensuite la ligne CD des tensions maximum de M. Regnault pour obtenir, en prolongeant AB, une intersection qui donnerait la température et la tension maximum correspondant au volume relatif pour lequel se

ferait la série d'observations. D'autres séries fourniraient, en augmentant ou diminuant le poids du liquide, les valeurs de  $v$  pour d'autres températures, et on dresserait un tableau exact des volumes à saturation et par suite des différences  $v - u$  nécessaires à connaître pour opérer les vérifications qui pourraient consister, par exemple, en un grand nombre de déterminations de l'équivalent mécanique de la chaleur coïncidant ensemble, aux erreurs d'expériences près.

Si la ligne AB ne s'écartait pas sensiblement d'une droite, on en conclurait que, dans les circonstances considérées, la dérivée du travail interne par rapport au volume est sensiblement indépendante de la température ; on serait mis en possession d'une donnée précieuse sur la nature intime des substances soumises à cette étude. Dans ce cas, on obtiendrait d'ailleurs avec facilité la valeur de cette dérivée en retranchant du coefficient angulaire de la droite AB le produit de l'abscisse à l'origine par  $\frac{1}{274,4}$ , ou bien, ce qui équivaut, en calculant, pour deux températures suffisamment distantes, la quantité

$$(183) \quad \frac{p_2(274 + t_1) - p_1(274 + t_2)}{t_2 - t_1}.$$

Les mêmes expériences fourniraient la valeur du coefficient de dilatation à volume constant, dont la connaissance eût été si utile pour donner plus de précision aux calculs de seconde approximation relatifs aux chaleurs latentes. On l'obtiendrait au moyen des mêmes données et de la relation

$$(184) \quad \alpha_1 = \frac{p_2 - p_1}{p_1 t_2 - p_2 t_1}.$$

On calculerait ensuite sans difficulté le covolume.

*Liquéfactions.*—Les formules (117), (118), (119), (120) ont été établies d'une manière générale ; elles s'appliquent aussi bien au passage de l'état solide à l'état liquide qu'au passage de

l'état liquide à l'état gazeux ; mais il ne faut pas oublier que leur démonstration, ainsi que je l'ai fait remarquer, suppose *négligeable* la variation de température pendant laquelle le changement d'état s'opère, ce qui n'a pas toujours lieu dans les solides, dont certains se ramollissent peu à peu au lieu de se liquéfier brusquement. La plupart des vérifications sont impossibles par suite du manque actuel de données expérimentales. M. W. Thomson s'est servi de l'équation (120) pour calculer en y faisant  $t=0$ ,  $u=0,001087$ ,  $v=0,001$ ,  $L=79,06$  la valeur de la dérivée  $h'$  que l'on trouve égale à 140 atmosphères et négative. Ce savant en a conclu que le point de fusion de la glace s'abaisse de 1 degré pour un accroissement de pression de 140 atmosphères ou  $\frac{1}{140}$  de degré par atmosphère. M. J. Thomson a plus tard constaté par expériences que sous les pressions  $8^{\text{atm}},1$  et  $16^{\text{atm}},8$  le point de fusion est  $-0^{\circ},059$  et  $-0^{\circ},129$ , ce qui donne bien une variation de  $\frac{1}{140} = 0,007$  par atmosphère.

La formule (119) contient deux capacités dont les définitions précises ont été données dans le n° 48 ; elle ne sont réellement pas connues ; par exemple, pour la glace prise avant et après sa fusion, on doit employer ici les quantités de chaleur correspondant à la variation de température de 1 degré accompagnée d'un accroissement de pression de 140 atmosphères et non sous pression constante. Si ces capacités différaient peu, ce qui n'est pas du tout certain, des capacités à pression constante 1 et  $0,504$ , on aurait, à  $-1$  degré sous 140 atmosphères, en faisant les substitutions dans (119),

$$I' = 0,724;$$

c'est-à-dire que la diminution de chaleur latente serait  $0,0052$  calorie pour chaque accroissement de pression de 1 atmosphère.

---

## CHAPITRE VIII

**Actions moléculaires.**

## ATTRACTION AU CONTACT.

Nous avons vu dans le chapitre V comment la théorie mécanique de la chaleur conduit à des formules qui fournissent les valeurs des dérivées du travail interne lorsqu'aucune des données expérimentales nécessaires ne fait défaut. Avant la découverte des principes nouveaux, de telles questions étaient véritablement inabordables. Leur importance en mécanique, en physique et en chimie est si grande qu'on ne doit pas craindre d'en faire une étude détaillée ; nous allons nous y livrer dans ce chapitre et dans le suivant. Nous ferons servir les relations obtenues, en les associant avec d'autres quand le besoin s'en fera sentir, à la démonstration de théorèmes et de lois qui ont rapport aux propriétés les plus intimes de la matière. Mais, avant de commencer, il est utile de faire une remarque mise en avant par la plupart des auteurs qui ont écrit sur cette matière: le travail interne dépend *surtout* du volume qui ne peut s'accroître sans que les attractions moléculaires soient surmontées; il doit arriver cependant que, dans la plupart des cas, une variation de température à volume maintenu constant entraîne des changements de position des molécules et par suite la production d'un travail interne. Toutefois, nous admettrons avec presque tous les savants, et cela semble être une conséquence des faits connus, qu'en l'absence de tout travail chimique appréciable, cette dernière

portion du travail interne est généralement beaucoup plus faible que celle qui dépend du volume et qu'elle peut être négligée au moins dans une première approximation. Au reste, la relation (65) et la loi qui en découle caractérisent les corps dans lesquels le travail dépend exclusivement du volume; (71) et (78) fournissent des relations équivalentes plus commodes dans certaines applications:

$$(185) \quad E(c' - c) + T \frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dp}{du}\right)} = 0,$$

$$(186) \quad E(c' - c) = 10333 T \frac{\alpha'^2 u}{\beta}.$$

Lorsque les données physiques relatives à un corps vérifient l'une des équations (65), (185), (186), on peut calculer le travail interne au moyen de la formule (64) ou de la formule (77); mais là ne se borne point leur utilité. Le nombre obtenu par elles fait connaître en même temps deux autres quantités d'une grande importance au sujet desquelles il est nécessaire d'établir de nouveaux théorèmes: l'attraction au contact et le travail de désagrégation totale.

*Attraction au contact.* — Concevons dans un corps une section plane qui le partage en deux parties. Si l'on veut séparer ces parties, on devra vaincre une force d'attraction totale qui, rapportée au mètre carré, sera indépendante de l'étendue de la surface de séparation et aussi des dimensions de chaque partie perpendiculairement à cette surface pourvu qu'elles dépassent le rayon  $\epsilon$  de la sphère d'attraction sensible. Soit  $A$  cette force que nous nommerons *attraction au contact*; pour chaque élément de la surface de séparation, elle est la somme des composantes normales des attractions des molécules situées sur des droites qui traversent cet élément. Pour démontrer l'égalité numérique de la dérivée  $\frac{d\varphi(u,t)}{du}$  du travail interne

et de l'attraction au contact  $A$ , supposons un accroissement de volume  $du$  pendant lequel une distance quelconque prise dans le corps croîtra d'une fraction  $k$  de sa valeur, et soient  $x, y, z$  les coordonnées d'un point rapporté à trois axes rectangulaires. Considérons un cube très-petit ayant pour dimensions initiales  $\delta x, \delta y, \delta z$  et évaluons le travail qui accompagne la dilatation du corps supposé homogène. Pendant que  $\delta x$  devient  $\delta x(1+k)$ , le cube surmonte les attractions des molécules situées de part et d'autre et dont la résultante  $A_1 \delta y \delta z$  tend vers  $A \delta y \delta z$  à mesure que  $\delta x$  diminue;  $A_1$  est moindre que  $A$  qui doit en prendre la place lorsqu'on passe à la limite: cela résulte des définitions. Le travail correspondant à l'accroissement de  $\delta x$  est donc

$$A_1 \delta y \delta z \times k \delta x.$$

Pendant l'accroissement de  $\delta y$ , la force est  $A_1 \delta z \delta x(1+k)$  et le chemin parcouru  $k \delta y$ ; on a donc pour expression du travail

$$A_1 \delta x \delta y \delta z k(1+k).$$

Enfin l'accroissement de  $\delta z$  est accompagné d'un travail

$$A_1 \delta x \delta y \delta z k(1+k)^2,$$

et le travail complet produit par le cube pendant sa dilatation a pour valeur

$$A_1 \delta x \delta y \delta z (3k + 3k^2 + k^3).$$

Rien ne s'oppose à ce qu'on imagine le volume total  $u$  décomposé en cubes égaux à celui dont il vient d'être question et alors on a pour la somme des travaux analogues

$$A_1 u (3k + 3k^2 + k^3) \text{ ou } A_1 du.$$

Cette quantité est plus faible que le travail interne, puisqu'il s'accomplit aussi du travail dans l'intérieur des cubes; mais l'erreur commise est d'autant moindre que  $\delta x$  est lui-même plus faible, et elle disparaît totalement lorsqu'on passe à la

limite, ce qui exige qu'on remplace  $A_1$  par  $A$ . On a donc en supprimant le facteur commun  $du$ ,

$$(187) \quad \frac{d\phi(u, t)}{du} = A$$

et l'on arrive à ce théorème :

*La dérivée partielle du travail mécanique interne prise par rapport au volume égale l'attraction par mètre carré qu'exercent l'une sur l'autre les deux parties du corps situées des deux côtés d'une section plane.*

Quand il s'agit des solides et des liquides, le second terme de la valeur (77) trouvée précédemment est négligeable, et l'on a

$$(188) \quad A = 10333 (274 + t) \frac{\alpha'}{\beta};$$

quand  $t$  est nul ou négligeable en présence de 274, comme cela arrive aux températures ordinaires, il vient

$$(189) \quad A = 10333 \times 274,4 \frac{\alpha'}{\beta}.$$

Si un corps a pour densité par rapport à l'eau  $\Delta = 5$ , on peut concevoir chaque cinquième de ses molécules distribué uniformément dans l'espace que ce corps occupe et nommer  $a$  l'attraction au contact due à l'un de ces cinquièmes seulement; alors  $A$  vaudra évidemment vingt-cinq fois  $a$  et, en général, on aura la relation

$$(190) \quad A = a \Delta^2.$$

Il résulte de (188) et (190) que, dans les solides et les liquides,

*Le quotient obtenu en divisant le coefficient de dilatation à pression constante par le coefficient de compressibilité est proportionnel au carré de la densité et en raison inverse du binôme de dilatation.*

La valeur de  $\beta$  est encore inconnue pour la plupart des corps; remplaçons dans (189) cette quantité par son expression au moyen du coefficient d'élasticité  $Q$  et substituons en même

temps pour A sa valeur (190); il vient, en rapportant désormais les attractions au contact au millimètre carré,

$$(191) \quad a = \frac{274,4 \alpha' Q}{1000 000 k \Delta^2}.$$

$k$  désigne un nombre que Poisson croyait égal à  $\frac{3}{2}$ , tandis que Cagnard lui attribuait la valeur 2 et M. Wertheim le faisait égal à l'unité seulement. Les théoriciens ont basé leurs calculs relatifs à l'élasticité sur des hypothèses incertaines, et les observateurs n'ont soumis à leurs expériences que des corps trop peu variés pour qu'on puisse, dans l'état actuel de la science, affirmer même que  $k$  est constant pour tous les corps solides. Voici les résultats obtenus pour cinq métaux :

NOMS.	$\Delta$	$e$	$\alpha'$	Q	$\Delta k$	$ak$	$ae^2 K$	MOYENNES.
Fer.....	7,8	28	0,0000124	18600	189,9	3,121	2447	2591
Fer.....	»	»	»	20800	212,3	3,490	2736	
Cuivre....	8,9	32	0,0000171	10520	148,1	1,870	1914	2070
Cuivre....	»	»	»	12450	175,3	2,213	2266	
Palladium.	11,3	53	0,0000100	9789	80,59	0,6311	1773	1887
Palladium.	»	»	»	11044	90,9	0,7121	2000	
Or.....	19,25	98	0,000015	8131	101,1	0,2728	2620	2209
Or.....	»	»	»	5584	69,42	0,1874	1799	
Platine....	22	99	0,0000090	15520	115,0	0,2376	2329	2451
Platine....	»	»	»	17150	127,1	0,2626	2573	

Ces métaux sont rangés ici dans l'ordre que leur assignent les équivalents chimiques, et cela rend facile à apercevoir la loi qui régit les attractions au contact ramenées à l'unité de poids spécifique. A l'inspection de la septième colonne, on reconnaît de suite qu'elles décroissent plus vite que les inverses des équivalents : par exemple, l'équivalent de l'or est à peu près triple de celui du cuivre, et la valeur de  $a$  pour ce dernier métal est environ neuf fois plus grande. S'il en était ainsi pour les autres corps simples, on serait conduit à la loi suivante :



*Les attractions au contact des corps simples ramenées à l'unité de densité sont en raison inverse des carrés de leurs équivalents chimiques, ou, ce qui équivaut, le produit de l'attraction au contact d'un corps simple ramenée à l'unité de poids spécifique par le carré de son équivalent est une quantité constante.*

La neuvième colonne du tableau renferme ces produits dont la moyenne est  $\frac{2242}{k}$ . Les écarts pour ces cinq métaux sont moindres que ceux que l'on remarque pour un même métal quand on tient compte de l'incertitude des données ; il y a donc lieu à admettre cette loi, car il paraît impossible d'attribuer au hasard les quatre vérifications dont il s'agit : elle sera d'ailleurs plus loin amplement confirmée.

Voici maintenant les résultats obtenus en appliquant la formule (189) à quelques liquides :

NOMS.	$\Delta$	$e$	$\alpha'$	$\beta$	A	$a$
Eau à 100°. . . . .	0,9586	4,5	0,00086	0,000040	61,0	66,3
Éther. . . . .	0,7263	3,7	0,001513	0,000111	38,6	73,2
Alcool. . . . .	0,8151	3,83	0,00105	0,000083	35,9	54,0
Esprit de bois. . . . .	0,8207	4,33	0,00118	0,000091	36,8	54,6
Chloroforme. . . . .	1,5215	19,92	0,00111	0,000062	50,8	21,9
Essence de térébenthine	0,876	3,78	0,0007	0,000073	27,2	35,4
Mercure. . . . .	13,596	50	0,00018	0,0000035	145,8	0,8
Sulfure de carbone. . . .	1,2931	12,7	0,0012	0,0000835	40,7	24,3

*Remarque.* — Il ne faut pas perdre de vue que, dans ce qui précède, l'attraction au contact est obtenue en supposant que le travail interne dépend du volume seul. Dans les cas où il en est autrement, lorsque, par exemple, une élévation de température à volume constant suffit pour changer le groupement moléculaire ou rendre moins intime la combinaison des éléments d'un corps qu'on étudie, les valeurs de  $\alpha'$  et de  $\beta$  peuvent être altérées par cette circonstance qui n'influe pas

d'ailleurs sur l'attraction au contact, force qui, comme on le verra plus loin, ne dépend que de la densité et de la nature chimique. Il est donc à craindre que les valeurs qui viennent d'être obtenues ne soient pas toujours suffisamment approchées. Nous verrons plus loin une formule avec laquelle ce genre d'erreurs est beaucoup moins à craindre ; quand les données fournies par l'observation seront plus nombreuses, on pourra d'ailleurs faire servir la loi précédemment obtenue et celles que nous y joindrons, à distinguer et à mettre à part un petit nombre de résultats peu dignes de confiance.

*Seconde remarque.* — L'attraction au contact étant la force à vaincre pour produire la rupture, d'un fil métallique par exemple, on peut être surpris de voir qu'elle l'emporte en général sur la résistance à la rupture mesurée par des observateurs habiles ; mais cela tient à ce qu'il est impossible, dans les expériences, d'égaliser la tension. On peut légitimement comparer le fil à un faisceau de fils plus fins qui, tendus inégalement, se rompraient les uns après les autres. La différence est considérable pour les liquides, même après les expériences intéressantes de M. Donny, qui montrent que la cohésion est beaucoup plus grande dans l'eau qu'on ne le croit généralement ; mais il ne faut pas perdre de vue que ce qui vient d'être dit pour les solides s'applique mieux encore aux liquides.

*Travail de désagrégation totale.* — Soit  $u$  le volume d'un kilogramme d'un corps quelconque à la température  $t$  maintenue constante et sous la pression  $p$ . Supposons pour fixer les idées que ce corps ait la forme cubique et partageons-le au moyen de plans parallèles en  $n$  tranches d'épaisseur très-petite  $\delta x$  et de base  $s$  ; on a alors

$$(192) \quad u = ns \delta x.$$

Lorsqu'on veut séparer l'une de l'autre deux parties du cube dont l'épaisseur surpasse la distance  $\epsilon$  au-delà de laquelle les

attractions cessent d'être sensibles, il faut vaincre d'abord l'attraction au contact  $sA$  ; mais la résistance à surmonter décroît très-vite à mesure que les deux tranches s'éloignent parallèlement l'une de l'autre, nommons-la  $sy$  lorsqu'elles sont séparées par une distance  $x < \epsilon$ . A la distance  $x + \delta x$ , elle sera  $sy + s\delta y$ , et si l'on suppose fixe la première partie du cube, il suffit évidemment de soustraire ces deux quantités l'une de l'autre pour avoir l'attraction de cette partie fixe, d'épaisseur plus grande que  $\epsilon$ , sur la couche d'épaisseur  $\delta x$  comprise entre les distances  $x$  et  $x + \delta x$ ; cela donne

$$-s\delta y.$$

Pendant un éloignement  $\delta x$ , cette tranche est attirée de moins en moins ; par conséquent le travail dépensé est inférieur à

$$-s\delta x \delta y.$$

La séparation complète exige un travail moindre que

$$-s\delta x \int_A^0 \delta y = sA\delta x.$$

Si, pendant le parcours  $\delta x$ , on attribue au contraire à la force la valeur qu'elle possède à la fin, on obtient un résultat trop faible ; ainsi le travail nécessaire pour séparer une tranche surpasse

$$s(A + \delta A)\delta x.$$

Pour isoler les  $n$  tranches dont le corps entier se compose, on voit, en tenant compte de (192), qu'il faut un travail compris entre

$$Au \text{ et } (A + \delta A)u.$$

Si l'on fait décroître  $\delta x$  de plus en plus,  $\delta A$  devient négligeable, et il reste pour valeur

$$(193) \quad Au.$$

Il est évidemment permis de ne pas tenir compte de ce que les parties voisines de la surface ont d'incomplet, de ce que

l'on effectue réellement  $n - 1$  séparations et non  $n$  ; enfin de ce que la surface primitive peut différer de celle d'un cube : tout cela est négligeable.

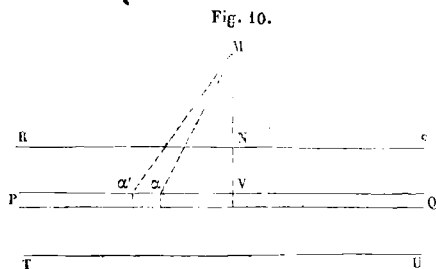
Le partage ultérieur d'une tranche en filets n'exige qu'un travail infiniment petit du premier ordre, et le partage des filets en cubes n'occasionne même plus qu'une dépense de travail infiniment petite du second ordre ; en d'autres termes, dans une tranche d'épaisseur infiniment petite, la ténacité ou l'attraction au contact a disparu. Ainsi, on arrive à ce nouveau théorème :

*Le travail de désagrégation totale d'un kilogramme d'un corps quelconque égale le produit de l'attraction au contact par le volume, ou, ce qui équivaut, le travail de désagrégation totale de l'unité de volume égale l'attraction au contact.*

M. Massieu, ingénieur des mines et mon collègue à la Faculté de Rennes, m'a proposé une démonstration différente, que je vais donner ici avant d'exposer une partie des conséquences de mon théorème.

« Désignons par  $f(\rho)$  l'attraction de deux points matériels du poids d'un kilogramme, à la distance  $\rho$  ;  $f(\rho)$  étant une fonction qui décroît vite et qui s'annule dès que  $\rho$  atteint une certaine valeur limite  $\varepsilon$  toujours très-petite.

1° *Valeur de l'attraction au contact.* — » Soit maintenant un point matériel M de un kilogramme et cherchons son attrac-



tion sur un corps indéfini RSTU (fig. 10) limité du côté du

point M par une surface plane RS. Prenons dans ce corps, dont le poids spécifique est représenté par  $\Delta$ , une couche infiniment mince PQ, dont la distance MV au point M sera désignée par  $r$ ,  $\lambda$  représentant la distance MN du point M à la surface limite RS. Nous allons chercher l'attraction sur le point M de la couche PQ indéfinie et d'épaisseur infiniment petite  $dr$ .

» Considérons un petit cylindre découpé normalement dans cette couche PQ et ayant pour base l'espace annulaire  $\alpha\alpha'$  compris entre deux cercles de centre V et de rayons  $V\alpha$  et  $V\alpha'$ . L'attraction de ce petit cylindre sur le point M sera dirigée suivant MV et sera égale, en désignant  $V\alpha$  par R,  $\alpha\alpha'$  par  $dR$  et l'angle  $VM\alpha$  par  $\theta$ , à

$$2\pi R dR dr \Delta f(\rho) \cos \theta,$$

$\rho$  étant la distance M $\alpha$ ; or on a

$$R^2 + r^2 = \rho^2, \quad \cos \theta = \frac{r}{\rho}.$$

Comme  $r$  est constant pour toute la couche PQ, on aura

$$R dR = \rho d\rho \quad \text{et} \quad R dR \cos \theta = r d\rho.$$

La force attractive du petit cylindre annulaire  $\alpha\alpha'$  sera donc

$$2\pi \Delta r dr f(\rho) d\rho$$

et l'attraction  $dE$  de la couche totale PQ sera

$$dE = 2\pi \Delta r dr \int_r^\infty f(\rho) d\rho.$$

$\int_r^\infty f(\rho) d\rho$  est une fonction de  $r$  qui s'annule dès qu'on a  $r > \epsilon$  puisque alors  $f(\rho)$  est nul.

» Posons

$$r \int_r^\infty f(\rho) d\rho = \varphi(r);$$

$\varphi(r)$  s'annulera aussi dès que  $r$  sera  $> \epsilon$ ; nous aurons donc

$$dE = 2\pi \Delta \varphi(r) dr.$$

En intégrant cette expression depuis  $r = MN$  ou  $\lambda$  jusqu'à  $r = \infty$ ,

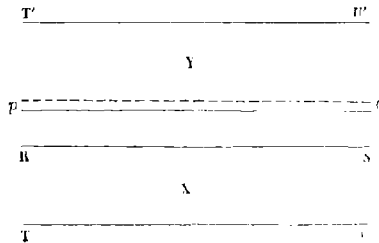
ou simplement jusqu'à  $r = \varepsilon$ , j'aurai la valeur de l'attraction  $E$  exercée par tout le corps RSTU sur le point M ; c'est-à-dire

$$E = 2 \pi \Delta \int_{\lambda}^{\varepsilon} \varphi(r) dr.$$

Ceci posé, nous allons facilement trouver l'expression de l'attraction au contact par unité de surface, par mètre carré par exemple.

» Soit un corps indéfini divisé idéalement en deux parties X et Y (fig. 11) par un plan RS.

Fig. 11.



» Supposons que nous prenions dans le plan PQ une surface de 1 mètre carré ; l'attraction au contact des deux parties X et Y l'une sur l'autre sera la résultante des attractions de la partie X, et toutes ses attractions seront normales à RS ; on n'aura donc qu'à les ajouter pour avoir leur résultante.

» L'attraction  $dA$  exercée par la partie X sur la couche  $pq$  de la partie Y située à la distance  $\lambda$  de la surface de séparation RS et d'épaisseur  $d\lambda$  sera, par mètre carré, d'après ce qui précède,

$$dA = 2 \pi \Delta \times \Delta d\lambda \int_{\lambda}^{\varepsilon} \varphi(r) dr = 2 \pi \Delta^2 d\lambda \int_{\lambda}^{\varepsilon} \varphi(r) dr.$$

» Si nous intégrons l'expression précédente depuis  $\lambda = 0$  jusqu'à  $\lambda = \varepsilon$ , nous aurons, pour l'attraction au contact par unité de surface,

$$A = 2 \pi \Delta^2 \int_0^{\varepsilon} d\lambda \int_{\lambda}^{\varepsilon} \varphi(r) dr,$$

ou bien, en remarquant que  $\frac{d}{d\lambda} \int_{\lambda}^{\varepsilon} \varphi(r) dr = -\varphi(\lambda)$  et en intégrant par parties

$$A = 2\pi\Delta^2 \left\{ \left[ \lambda \int_{\lambda}^{\varepsilon} \varphi(r) dr \right]_0^{\varepsilon} + \int_0^{\varepsilon} \lambda \varphi(\lambda) d\lambda \right\}.$$

Or la première partie de la valeur de A est nulle ; on a donc

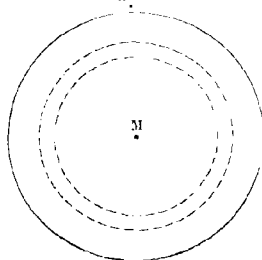
$$A = 2\pi\Delta^2 \int_0^{\varepsilon} r \varphi(r) dr.$$

2° *Travail de désagrégation totale.* — » Une molécule M est soumise à l'attraction de toutes les molécules qui l'entourent jusqu'à la distance limite  $\varepsilon$  ; la désagrégation sera complète, par définition, quand chaque molécule M du corps aura été amenée à une distance de toutes les autres plus grande que  $\varepsilon$ .

» Le travail total de désagrégation s'obtiendra en prenant la somme des travaux de toutes les forces réciproques exercées par les molécules les unes sur les autres, depuis les positions que ces molécules occupent, jusqu'à celles où elles doivent être amenées pour que la désagrégation soit complète. Cherchons d'abord le travail opéré dans la désagrégation par les forces qui agissent sur une molécule M du corps ; nous désignerons par  $\mu$  le poids de cette molécule.

» Imaginons autour du point M (fig. 12) une couche matérielle

Fig. 12.



infiniment mince, comprise entre deux sphères de centre M

et de rayons  $r$  et  $r + dr$  ; le poids de cette couche sera

$$4\pi r^2 dr \times \Delta,$$

et le travail opéré par les forces attractives que les divers éléments de cette couche exercent sur la molécule M, dans la désagrégation complète, sera

$$4\pi r^2 \Delta \mu dr \int_r^\varepsilon f(\rho) d\rho.$$

Si nous intégrons maintenant cette expression depuis  $r=0$  jusqu'à  $r=\varepsilon$ , nous aurons le travail  $dT$  de toutes les forces attractives exercées sur la molécule M par toutes les autres ; nous aurons donc

$$dT = 4\pi \Delta \mu \int_0^\varepsilon r^2 dr \int_r^\varepsilon f(\rho) d\rho = 4\pi \Delta \mu \int_0^\varepsilon \varphi(r) r dr.$$

Soit  $n$  le nombre des molécules de poids  $\mu$  comprises dans l'unité de volume du corps : en multipliant l'expression précédente par  $n$ , on aurait la valeur non pas du travail total T de désagrégation, mais du double du travail, puisque les forces attractives exercées par les molécules les unes sur les autres sont réciproques et qu'en faisant ce qui vient d'être dit on aura compté deux fois le travail de chacune de ces forces ; on aura donc

$$T = 2\pi n \mu \Delta \int_0^\varepsilon \varphi(r) r dr;$$

mais  $n\mu$  n'est autre chose que le poids de toutes les molécules comprises dans l'unité de volume, on a donc

$$n\mu = \Delta;$$

d'où

$$T = 2\pi \Delta^2 \int_0^\varepsilon \varphi(r) r dr,$$

d'où

$$T = A \quad \text{et} \quad \alpha = 2\pi \int_0^\varepsilon \varphi(r) r dr.$$

A est l'attraction au contact par unité de surface, T est le tra-



vail de désagrégation totale de l'unité de volume ; le travail de désagrégation totale pour le volume  $u$  sera donc  $Au$ , et, si  $u$  représente le volume d'un kilogramme de la substance,  $Au$  sera le travail de désagrégation totale de ce kilogramme. »

Étudions maintenant les conséquences du théorème relatif au travail de désagrégation totale. Dans l'expression  $Au$  on peut d'abord remplacer les deux facteurs par  $a \Delta^3$  et  $\frac{1}{1000 \Delta}$  ; il en résulte

$$(194) \quad Au = a \Delta^3 u = \frac{a \Delta}{1000} = \frac{a}{1000000 u}$$

et l'on arrive à la loi suivante :

*Pour un même corps prenant des volumes variés, le travail de désagrégation restant à accomplir est proportionnel à la densité ou en raison inverse du volume.*

Cela posé, considérons un kilogramme d'un liquide à saturation, c'est-à-dire sous la pression de la vapeur saturée qu'il peut produire à la température à laquelle il se trouve, et conservons les notations précédemment employées. Pour passer à l'état de vapeur, ce corps exige une quantité de chaleur équivalente au travail  $EL$  ; si l'on retranche le travail externe  $p(v-u)$  et si l'on ajoute le travail  $A_1 v$  de désagrégation totale, en parlant de l'état gazeux, on obtient évidemment le travail total de désagrégation à partir de l'état liquide ; on a donc, en continuant à rapporter  $A$  et  $a$  au millimètre carré pour éviter les trop grands nombres,

$$(195) \quad 1000000 Au = EL + 1000000 A_1 v - p(v-u).$$

Dans cette relation le signe  $<$  doit remplacer le signe  $=$  quand le passage à l'état de vapeur est accompagné d'un travail chimique non négligeable.

La loi qui précède donne d'ailleurs

$$A_1 v = A u \frac{u}{v};$$

on peut donc mettre (195) sous la forme

$$(196) \quad 1000000 \Lambda u = 1000 a \Delta = \frac{EL}{1 - \frac{u}{v}} - pv.$$

Toutes les fois que  $\frac{u}{v}$  est négligeable par rapport à un et  $pv$  par rapport à  $EL$ , il reste seulement

$$(197) \quad 1000000 \Lambda u = 1000 a \Delta = EL;$$

mais il vaut mieux employer la relation

$$(198) \quad 1000 a \Delta = 0,9 EL,$$

afin de tenir compte à peu près du second terme qui est généralement compris entre  $\frac{1}{8}$  et  $\frac{1}{15}$  de la valeur du premier.

Quoique dans la formule (195) on puisse presque toujours négliger  $\frac{u}{v}$ , j'en ai tenu compte au moyen de la relation

$$(199) \quad \frac{u}{v} = \frac{1,3 D p}{10333000 \Delta (1 + \alpha t)};$$

$pv$  a été obtenu par la formule

$$(200) \quad pv = \frac{10333 (1 + \alpha t)}{1,3 D},$$

dans laquelle  $D$  désigne, comme précédemment, la densité par rapport à l'air. Pour l'acide carbonique, afin d'éviter les erreurs dues à la loi de Mariotte, je me suis servi de l'équation

$$\frac{1}{10333} pv = 0,507149(1 + 0,003688 t) - \frac{0,0036345}{10333} p,$$

déjà donnée dans le Chapitre VI.

Au lieu des chaleurs latentes qu'on ne connaît pas toujours, il est quelquefois fort utile de pouvoir employer les tensions maximum; on en rend l'usage facile en substituant la valeur

de  $\frac{EL}{v-u}$  tirée de la formule de Clapeyron (120) dans (196), ce

qui donne

$$(201) \quad a \Delta = p v \left[ (274 + t) \frac{p'}{p} - 1 \right].$$

La même substitution faite dans (198) conduit à

$$(202) \quad a \Delta = 0,9 p v (274 + t) \frac{p'}{p}.$$

*Remarque.* — Dans les gazéifications, il s'opère un travail physique considérable, en présence duquel le travail dû aux variations de groupement moléculaire est sans doute généralement faible. Les formules qui viennent d'être obtenues paraissent à cause de cela plus dignes de confiance. Appliquons-les d'abord à des substances formées exclusivement de carbone, d'oxygène et d'hydrogène.

*Eau.* — Dans l'eau, le groupement moléculaire change considérablement comme on le sait ; il est donc naturel de s'attendre à ne point trouver pour  $a$  exactement la même valeur de 0 à 100 degrés au moyen des données, très-exactes cependant, qu'on possède pour ce liquide. Le tableau suivant montre en effet des différences assez notables :

$t$	$a$ calculé par la formule (196).	$a$ calculé par la formule (201).	L observé.	L calculé.	DIFFÉ- RENCES.
10	250,12	242,5	606,5	547,4	59
20	246,67	237,8	599,5	548,4	51
30	243,57	236,9	592,6	548,7	44
40	240,72	235,5	585,7	548,4	37
50	238,00	234,1	578,7	547,8	31
60	235,42	232,6	571,6	546,7	25
70	233,05	231,2	564,7	545,3	19
80	230,70	229,6	557,6	543,6	13
90	228,51	228,4	550,6	541,6	9
90	226,35	227,4	543,5	539,4	4
100	224,49	226,1	536,5	536,8	0

Si, dans la formule (196), on néglige  $\frac{u}{v}$  et si l'on remplace  $a$  par 224,49, on trouve

$$L = \frac{1000 \Delta}{E} \left[ 224,49 + \frac{10.333 pv}{\Delta} \right].$$

C'est au moyen de cette expression que j'ai calculé les valeurs de  $L$  contenues dans la cinquième colonne.

A 100 degrés, les variations dans le groupement moléculaire sont probablement moins à craindre. Pour cette raison j'emploierai désormais pour valeur de  $a$  le nombre

$$a = 225,3,$$

qui est la moyenne entre 224,5 et 226,1 obtenus par les chaleurs latentes et les forces élastiques à cette température.

*Alcool méthylique*,  $\text{CH}_3\text{HO}$ . — En employant pour la température de l'ébullition  $66^{\circ},78$ , la valeur  $\log \frac{p'}{p} = \bar{2},58558$  due à M. Regnault, la valeur  $\log \Delta = \bar{1},87692$  due à M. Is. Pierre et  $D = 1,12$ , on trouve, au moyen de la formule (201),

$$a = 143,15.$$

*Alcool vinique*,  $2\text{C}_2\text{H}_5\text{HO}$ . — Les mêmes expérimentateurs ont donné  $\log \frac{p'}{p} = \bar{2},60039$ ;  $\log \Delta = \bar{1},87236$  pour la température d'ébullition  $78^{\circ},26$ . On a, d'après Gay-Lussac,  $D = 1,6123$ , il en résulte

$$a = 111,74.$$

*Éther vinique*,  $4\text{C}_2\text{H}_5\text{HO}$ . — Pour cette substance, les données sont, à  $34^{\circ},97$ ,  $\log \frac{p'}{p} = \bar{2},55377$ ;  $\log \Delta = \bar{1},84290$ ;  $D = 2,586$ . Cela conduit à

$$a = 50,42.$$

Si l'on emploie la chaleur latente 91 au lieu des forces élas-

tiques, on trouve

$$a = 56,64.$$

*Alcool amylique*,  $5\text{C}_2\text{H}_5\text{HO}$ . — Lorsqu'on met dans la formule (196)

$$L = 120,38, \quad \log \Delta = \bar{1},85551, \quad D = 3,147,$$

elle donne

$$a = 67,81.$$

*Acide butyrique*,  $\text{C}^2\text{H}^3\text{O}$ . — Avec  $L = 115$ ,  $\Delta = 0,8363$ , nombres relatifs à la température  $163^\circ$ , et  $D = 3,0492$ , on obtient

$$a = 54,77.$$

*Ether acétique*,  $\text{C}^2\text{H}^3\text{O}$ . — A  $74^\circ$ , on a, d'après M. Regnault,  $L = 111,6$ ; d'après M. Is. Pierre,  $\Delta = 0,8222$ . En y joignant  $D = 3,0492$ , on trouve

$$a = 55,0.$$

L'acide butyrique et l'acide acétique sont des substances isomères que j'ai rapprochées à dessein pour faire voir que l'attraction au contact ramenée à l'unité de densité ne dépend pas du groupement moléculaire; plus loin on verra que cette vérité ne peut plus faire l'objet d'un doute, car l'attraction exercée par un corps simple sur lui-même ou sur un autre corps simple se montrera la même quelles que soient les combinaisons dans lesquelles ces éléments se trouvent engagés. Cela étant, on peut, dans tous les calculs d'attraction au contact, multiplier ou diviser tous les exposants d'une formule par un même nombre puisque cela ne change point la composition centésimale.

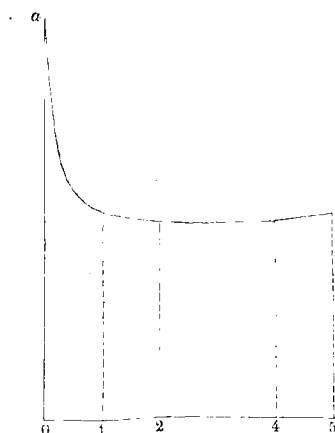
Les alcools et les éthers simples sont tous renfermés dans la formule



qui s'applique à l'eau quand on fait  $n = 0$ , et à l'hydrogène carboné,  $\text{CH}$ , lorsqu'on suppose  $n = \infty$ .

En prenant  $n$  pour abscisse et  $a$  pour ordonnée, on trace facilement la courbe des attractions au contact des substances de cette classe ; elle est représentée par la figure suivante :

Fig. 13.



Si l'on prend au contraire pour abscisse  $\frac{1}{n}$  et pour formule générale

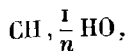
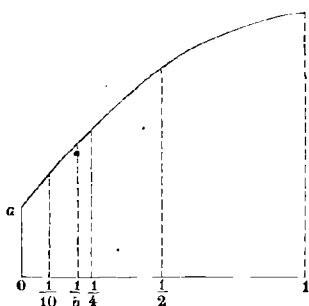


Fig. 14.



on obtient une autre courbe, qui, prolongée de sentiment, donne la valeur de  $a$  pour l'hydrogène carboné, CH ; mais il n'y a pas beaucoup à compter sur son exactitude.

Dans ces deux figures, on voit que l'éther sulfurique sort de la série dans laquelle il resterait si la valeur de  $a$  était 78 au lieu de 50,42 ou 56,64, qu'on a trouvé par les forces élastiques et les chaleurs latentes. Ceci montre que, dans cette substance, le groupement moléculaire varie beaucoup pendant le changement d'état.

En dehors du groupe des alcools et des éthers, j'ai pu me procurer les données nécessaires pour calculer les attractions au contact de quelques corps contenant aussi pour éléments le carbone, l'oxygène et l'hydrogène.

*Benzine*,  $C^2H$ . — M. Regnault donne pour la température 80 degrés,  $h' = 23,145$ ,  $h = 760$ ; et M. Longuinine donne  $\Delta = 0,8126$ ; on a d'ailleurs  $D = 2,695$ . De là il résulte

$$a = 47,54.$$

*Essence de térébenthine*,  $C^2H^4$ . — A 155 degrés, on a

$$h' = 16,989, \quad h = 686,3, \quad D = 4,698, \quad \Delta = 0,74?$$

Il en résulte

$$a = 34,73.$$

*Acide carbonique*,  $CO^2$ . — A la température  $-8$  degrés, on a, d'après M. Regnault,  $\log \frac{p'}{p} = \bar{2},45349$ ; en y joignant  $\Delta = 0,98$  et  $D = 1,529$ , on trouve  $a = 27,2$ . A 27 degrés, les données sont  $\log \frac{p'}{p} = \bar{2},34884$ ,  $\Delta = 0,72$ , et l'on en conclut  $a = 25,2$ . La moyenne est

$$a = 26,2.$$

*Acide acétique*,  $C^2H^3O^3$ . — A 120 degrés, la chaleur latente trouvée par MM. Favre et Silbermann est 102. La densité est environ 0,944; cela donne

$$a = 42,16.$$

*Acétone*,  $C^3H^3O$ . — A 55 degrés, on a, d'après M. Regnault,

$h' = 25,762$ ;  $h = 725,95$ ; si l'on y joint  $\Delta = 0,75$  et  $D = 2,0036$ , on obtient

$$a = 68,31.$$

Avant de faire connaître les attractions au contact des corps qui ne sont pas formés exclusivement de carbone, d'oxygène et d'hydrogène, pour lesquels j'ai pu réunir des données suffisantes, je vais soumettre au calcul les résultats précédents afin d'en déduire les conséquences qu'ils renferment. Pour y parvenir plus facilement, nous joindrons aux lettres **A** et **a** des indices qui en préciseront le sens :  $a_n^o$ , par exemple, désignera l'attraction au contact par millimètre carré, qui a lieu quand de l'hydrogène et de l'oxygène ayant la même densité que l'eau sont séparés par un plan qui leur sert de limite commune;  $a_o^o$ , ou plus simplement  $a_o$ , s'applique au cas d'une substance unique, l'oxygène, par exemple, dans l'intérieur de laquelle on imagine une section plane. Si la densité est  $\Delta$  pour le corps H, et  $\Delta'$  pour le corps O, l'attraction au contact A devient  $\Delta\Delta'$  fois plus considérable, et l'on a

$$(203) \quad A_n^o = \Delta\Delta' a_n^o.$$

Quand la même substance se trouve de part et d'autre du plan et avec une densité constante, cette formule devient

$$A = a\Delta^2,$$

et l'on retrouve l'équation (190).

A l'aide de cette notation il est facile de développer la valeur de l'attraction au contact d'un composé quelconque; il suffit d'écrire qu'elle égale la somme des attractions au contact des éléments. Prenons pour exemple la benzine,  $C^2H = 13$ , qui, en lui supposant la densité 1 pour faciliter les calculs, contient de l'hydrogène ayant pour densité  $\frac{1}{13}$  et du carbone ayant pour densité  $\frac{12}{13}$ . On aura



$$a = \left(\frac{1}{13}\right)^2 a_{11} + \left(\frac{12}{13}\right)^2 a_c + 2 \times \frac{1}{13} \times \frac{12}{13} a_{12}''.$$

Le dernier terme est double parce qu'il exprime l'attraction de l'hydrogène situé de chaque côté du plan sur le carbone situé de l'autre côté. Si nous chassons le dénominateur, et si nous remplaçons  $a$  par sa valeur donnée à l'article benzine, il vient

$$(204) \quad 8034,9 = 4 \times 6^2 a_c + a_{11} + 24 a_{12}''.$$

C'est l'équation de la benzine; elle fournit une relation entre les quantités inconnues  $a_{11}$ ,  $a_c$ ,  $a_{12}''$ . Dans les équations des corps étudiés jusqu'ici se trouvent encore comme inconnues  $a_{10}$ ,  $a_{11}^0$ ,  $a_c^0$ ; mais elles sont assez nombreuses pour fournir les valeurs de toutes ces quantités. Toutefois, il est très-utile, surtout afin d'apprécier plus sincèrement l'approximation sur laquelle on peut compter, d'éviter autant que possible la complication des calculs; dans ce but, je vais procéder d'abord à la recherche des trois premières inconnues seulement. L'équation de l'essence de térébenthine est

$$(205) \quad 40141 = 25 \times 6^2 a_c + 16 a_{11} + 240 a_{12}''.$$

Pour en obtenir une troisième, je considère chacun des corps appartenant au groupe  $n\text{CH}_2\text{HO}$  comme formé du corps binaire  $\text{HO} = 9$  et du composé  $\text{CH} = 7$ . Alors l'équation générale est

$$a = \frac{81 a_{10} + 126 a_{11}'' n + 49 a_{12}'' n^2}{(7n + 9)^2}.$$

L'étude de l'eau a donné  $81 a_{10} = 18249$ . Pour obtenir les valeurs de  $126 a_{11}''$  et  $49 a_{12}''$ , appliquons la formule aux alcools méthylique et éthylique en faisant  $n = 1$  et  $n = 2$ , il vient

$$126 a_{11}'' + 49 a_{12}'' = 36647 - 18249 = 18398,$$

$$2 \times 126 a_{11}'' + 4 \times 49 a_{12}'' = 59109 - 18249 = 40860.$$

De là on tire, après avoir divisé la dernière équation par 2,

$$49 a_{12}'' = 20430 - 18398 = 2032,$$

$$126 a_{11}'' = 2 \times 18398 - 20430 = 16366;$$

mais la valeur de  $49a_{cn}$ , différence faible obtenue avec des nombres très-grands, peut présenter une erreur relative considérable. Sans perdre de vue cette remarque, joignons-la cependant aux équations de la benzine et de l'essence de térébenthine après l'avoir développée, ce qui donne

$$(206) \quad 2032 = 6^2 a_c + a_n + 12 a_c^m.$$

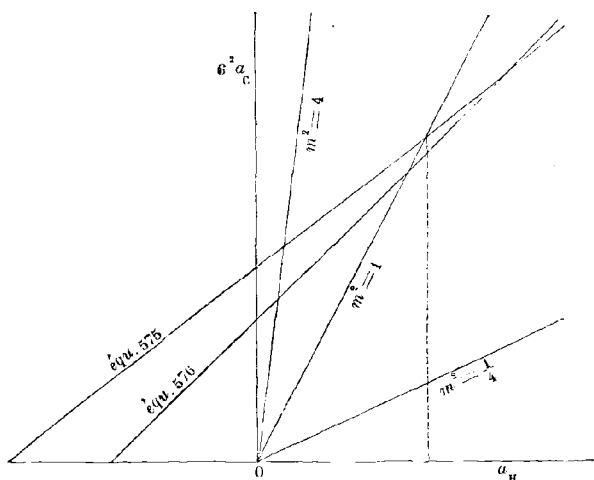
Éliminons  $a_c^m$ , cela conduit aux deux relations

$$(207) \quad 6701,66 = 2,5 \times 6^2 a_c - a_n,$$

$$(208) \quad 3970,9 = 2 \times 6^2 a_c - a_n,$$

dont la première seule mérite confiance, parce qu'elle est obtenue sans faire usage de (206). Pour faire cesser l'incertitude résultant de la grande erreur possible sur le premier membre de (206), nous remarquerons que  $6^2 a_c$  doit égaler  $a_n$  d'après la loi relative aux éléments, ou bien en être un multiple par un carré simple,  $m^2 = 9, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$ . Or il suffit de construire les droites (fig. 15) représentées par (207) et (208), quand on prend

Fig. 15.



pour abscisse  $a_n$  et pour ordonnée  $6^2 a_c$ , pour voir de suite que,

parmi les droites  $6^2 a_c = m^2 a_H$ , celle que donne  $m^2 = 1$  est la seule acceptable. L'échelle des ordonnées est de 1 millimètre, et celle des abscisses de  $\frac{1}{2}$  millimètre pour 100 unités. Ce point étant éclairci, les équations (208) et (204) donnent

$$a_H = 4467,8, \quad a_c = 107,5,$$

$$a_c'' = -596, \quad 24 a_c'' = -14304.$$

La valeur de  $49 a_{cH}$  peut alors être calculée au moyen de sa valeur en fonction de  $a_c$ ,  $a_H$ ,  $a_c''$ , et l'on trouve 1784 au lieu de 2032. Ces calculs nous mettent en présence de deux faits remarquables certains, quoique non observables directement.

1° Si l'on pouvait amener l'hydrogène à l'état solide et le réduire en un fil d'un millimètre carré de section, on aurait à vaincre, pour le rompre, une force de 4468 kilogrammes environ, en supposant qu'il prenne la même densité que l'eau; cette force serait 100 fois plus considérable si l'hydrogène, que l'on a souvent rapproché des métaux, avait pour densité 10 à l'état solide. Toutefois il ne faut point oublier que la charge qui produit la rupture est puissamment aidée par la force expansive due à la chaleur, laquelle devient probablement nulle au moment même de la séparation; mais alors la densité et l'attraction ont été amoindries dans une proportion qu'il paraît impossible de déterminer aujourd'hui.

2° L'hydrogène et le carbone, qui s'attirent à grandes distances, se repoussent énergiquement à des distances faibles, et, si ces deux corps étaient placés l'un d'un côté, l'autre de l'autre côté d'un même plan, il faudrait, pour les maintenir en contact, une force de 596 kilogrammes par millimètre carré dans le cas où ils auraient même densité que l'eau. De l'hydrogène pur en contact, dans les circonstances normales, avec la surface parfaitement nette d'un diamant serait repoussé avec une force

qui, exprimée en atmosphères, s'élèverait à

$$\frac{59600 \times 3,5 \times 0,0013 \times 0,0693}{1,0333} = 18.$$

Un contact véritable serait donc impossible; le vide se produirait au contraire, mais seulement jusqu'à une distance moindre que  $\varepsilon$ , et par conséquent très-petite. Un amas de poussière de diamant ou de charbon suffisamment fine serait imperméable à l'hydrogène.

Maintenant la formule générale des éthers et des alcools peut être complètement mise en nombres; elle est

$$(209) \quad a = \frac{18249 + 16366n + 1784n^2}{(7n + 9)^2};$$

si l'on y fait  $n=5$  pour l'appliquer à l'alcool amylique, on trouve  $a=74,7$ . Ce nombre surpasse de  $\frac{1}{10}$  celui que donne l'expérience; à cause des variations de groupements moléculaires qui accompagnent le changement d'état, des erreurs aussi fortes se retrouveront souvent; cependant, il sera facile d'améliorer la formule (209) en évitant de la calculer avec des données relatives aux faibles valeurs de  $n$  seulement: j'attendrai, pour le faire, que j'aie des données suffisantes pour plusieurs grandes valeurs de la variable. Il n'y a point pour  $a$  de maximum ou minimum, car la valeur

$$n = \frac{9}{7} \frac{a_{no} - a_{ci}^{no}}{a_{ch} - a_{ci}^{no}},$$

qui annule la dérivée, est négative. Si on l'applique aux forces de réunion en changeant  $a$  en  $f$ , on trouve  $n=6,38$ ; la figure 13 indique un minimum moins éloigné.

Dans cette théorie, le nombre fondamental est l'attraction au contact dans l'hydrogène ayant pour densité 1; et la loi relative aux corps simples (page 148) a pour expression algébrique

$$a = \frac{a_n}{e^x},$$

ou bien

$$(210) \quad ae^2 = a_{11}.$$

Pour un corps simple, tel que le mercure, dont les forces élastiques et les densités sont bien connues, les erreurs à craindre sont probablement moins graves. Les valeurs de  $a$  calculées au moyen des données de M. Regnault pour les températures  $150^\circ$ ,  $250^\circ$ ,  $350^\circ$  sont 1, 8; 2, 0; 2, 2. Elles croissent avec la température au lieu de diminuer, comme pour l'eau; les causes d'erreur agissent en sens contraire. Il y a lieu évidemment de prendre pour  $e$  la moitié, 50, de l'équivalent employé par les chimistes, et l'on obtient

$$ae^2 = 5000$$

avec la moyenne

$$a = 2,0$$

des nombres donnés par l'expérience. Cette valeur de  $a_{11}$  surpasse de  $\frac{1}{10}$  celle qui a été obtenue par la benzine et l'essence de térébenthine; elle me paraît mériter plus de confiance, et je l'adopte provisoirement.

*Seconde loi.* — La loi relative aux corps simples ne m'a présenté aucune exception. Si l'on veut chercher à l'étendre aux composés, il me semble naturel de les représenter par une formule dans laquelle la somme des exposants soit 1: par exemple, le sulfure de carbone sera représenté par

$$S^{\frac{2}{3}} C^{\frac{1}{3}} = \frac{38}{3}.$$

$\frac{38}{3}$  est un nombre dans lequel se trouve *un seul équivalent* formé de deux tiers d'équivalent de soufre et un tiers d'équivalent de carbone; c'est ce que j'appelle l'équivalent du sulfure de carbone, et cette définition est facile à généraliser. En appelant A, B, C, ... les équivalents des corps simples et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... les nombres d'équivalents de chacun d'eux qui entrent dans le

composé, on a pour expression générale  $\frac{\Sigma A \alpha}{\Sigma \alpha}$  et pour valeur de l'attraction au contact  $a_n \left( \frac{\Sigma \alpha}{\Sigma A \alpha} \right)^2$ . Je me bornerai à faire l'application de la loi, étendue hypothétiquement de la sorte aux composés binaires : on a, en développant,

$$(211) \quad a = \frac{(\alpha + \beta)^2}{(A\alpha + B\beta)^2} a_n = \frac{A^2 \alpha^2 a_n + B^2 \beta^2 a_n + 2\alpha\beta AB a_n}{(A\alpha + B\beta)^2}.$$

Les quantités  $a_\alpha$ ,  $a_\beta$  peuvent être remplacées par  $\frac{a_n}{A^2}$ ,  $\frac{a_n}{B^2}$ ; il en résulte des réductions qui conduisent à la formule très-simple

$$(212) \quad a_\alpha = \frac{a_n}{AB},$$

qui équivaut à la précédente même dans le cas d'un composé quelconque. Elle renferme la loi suivante :

*L'attraction au contact de deux corps simples ramenée à la densité de l'eau égale le nombre fondamental divisé par le produit de leurs équivalents.*

La première loi en est un cas particulier, et on la retrouve en faisant  $A = B$ .

La seconde loi, énoncée de la sorte, souffre beaucoup d'exceptions; pour savoir si elle s'applique, il est indifférent de déduire  $a_\alpha$  de l'équation du composé ou de former le produit de la valeur de  $a$  par le carré de l'équivalent défini plus haut.

Pour l'eau, cet équivalent est  $\frac{9}{2}$ ; car on va voir bientôt que, de l'oxygène,  $e = 8$ , et le produit

$$ae^2 = 225,3 \times \frac{81}{4} = 4562$$

nous offre une première vérification de la seconde loi, de laquelle on conclut, sans entrer de nouveau dans les détails,

$$a_n^0 = \frac{a_n}{1 \times 8}.$$

Revenons maintenant à la recherche des inconnues que contiennent les équations des corps composés de carbone, oxygène, hydrogène : elle sera facilitée par la relation que nous venons d'obtenir. Profitons-en pour écrire, en les simplifiant, les équations de l'acide butyrique et de l'acide acétique :

$$55228 = 12a_H + 8^2a_O + 4 \times 48a_C,$$

$$195474 = 43a_H + 9 \times 8^2a_O + 24 \times 48a_C.$$

Joignons-y l'équation de l'acide carbonique, qui donne, sans accumulation d'erreurs, l'expression de  $48a_C$  :

$$12681 = a_H + 4 \times 8^2a_O + 4 \times 48a_C.$$

Les deux premières, après substitution de  $48a_C$ , deviennent

$$42547 = 11a_H - 3 \times 8^2a_O,$$

$$119388 = 37a_H - 15 \times 8^2a_O,$$

et il est facile maintenant de constater que, pour l'oxygène, on a  $e = 8$  ou  $8^2a_O = a_H$ ; car cette hypothèse conduit à  $a_H = 5318$  et  $a_H = 5427$ . En supposant  $8^2a_O = 4a_H$  ou  $8^2a_O = \frac{a_H}{4}$  on obtient des valeurs de  $a_H$  inégales et très-éloignées de celle que donne le mercure. On a donc

$$a_O = \frac{a_H}{8^2},$$

et par suite l'équation de l'acide carbonique donne

$$-48a_C = 3080.$$

Ce résultat permet de calculer directement d'une manière complète la formule des alcools et des éthers, qui devient

$$(213) \quad a = \frac{(4 + 4n + 2n^2)a_H - 13312n - 7152n^2}{(7n + 9)^2}.$$

Si l'on applique successivement l'équation (212) aux corps A, B et aux corps A', B', la comparaison donne

$$(214) \quad ABa_A^B = A'B'a_{A'}^B.$$

Pour l'hydrogène et le carbone, le produit n'égale point  $a_n$ , et la seconde loi est en défaut ; il en est de même pour le carbone et l'oxygène ; mais les produits 3080 et 3576, tous deux négatifs, ne diffèrent pas extrêmement de leur moyenne et pourraient être considérés comme satisfaisant à l'équation qui précède.

Pour terminer ce qui a rapport aux substances composées exclusivement d'oxygène, hydrogène, carbone, on peut substituer dans leurs équations les deux valeurs numériques de  $a_c^0$  et  $a_c^1$ , puis les expressions de  $a_c$ ,  $a_o$ ,  $a_n^0$  trouvées en fonction de  $a_n$  et données d'ailleurs par les deux lois ; chacune de ces équations fournit alors une valeur du nombre fondamental, et, en procédant de la sorte, on obtient, pour la première ou la seconde loi, autant de vérifications moins 3 qu'il y a de lignes dans le tableau ; car il faut seulement distraire l'équation du mercure qui donne  $a_n$  et les équations qui donnent  $a_c^1$  et  $a_c^0$ . Voici le tableau des résultats, auxquels je joins ceux qui proviennent de quelques composés qui seront étudiés plus loin :



NOMS des substances.	FORMULES.	e	t	Δ	L	log $\frac{p'}{p}$	a	a <sup>2</sup>	BARÈMES DE LILLIAD.
Eau.....	H <sup>2</sup> O	4,5	100 <sup>0</sup>	0,95863	536,5	2,55358	225,3	4562	4 11
Alcool méthylique....	CH <sup>3</sup> O		66,78	0,75323		2,58558	143,15	5711	4 7
Alcool éthylique.....	C <sup>2</sup> H <sup>5</sup> O		78,26	0,74535		2,60039	111,74	5717	4 7
Ether éthylique.....	C <sup>4</sup> H <sup>10</sup> O		34,97	0,69617		2,55377	56,64	4716	4 7
Alcool amylique.....	C <sup>5</sup> H <sup>6</sup> O		131,8	0,7170	120,38		67,81	5090	4 58
Acide butyrique.....	C <sup>2</sup> H <sup>2</sup> O		163	0,8363	115,0		54,77	5187,5	4 27
Ether acétique.....	C <sup>2</sup> H <sup>2</sup> O		74	0,8222	111,6		55,0	5196	4 25
Benzine.....	C <sup>2</sup> H		80	0,8126		2,48365	47,54	4468	4 9
Essence de térébenth. Aarbonique...	C <sup>8</sup> H <sup>6</sup> CO		155 —8	0,74? 0,98?		2,39366 2,45349	34,73 26,2	4468 5000	4 9 0
Acide acétique.....	C <sup>3</sup> H <sup>3</sup> O <sup>3</sup>		120	0,944?	102		42,16	5180	4 28
Acétone.....	C <sup>3</sup> H <sup>3</sup> O		55	0,75?		2,55007	68,31	5612	4 8
Mercure.....	Hg	50	250				2,0	5000	0
Chlore de carbone..	CCl <sup>3</sup>	7,7	75	1,4823		2,48590	12,49	4628	4 13
Ether chlorhydrique..	C <sup>2</sup> H <sup>5</sup> Cl <sup>1,5</sup>		12,5	0,90343		2,57077	40,196	4447	4 9
Chloroforme.....	C <sup>2</sup> HCl <sup>1,5</sup>		60	1,4130		2,52322	46,924	4900	4 80
Brome.....	Br	8,0	63	2,9688	44,21		5,870	4174	4 6
Ether bromhydrique..	C <sup>2</sup> H <sup>5</sup> Br <sup>1,5</sup>		38,37	1,3952		2,59640	20,35	5104	4 50
Hydro-carb. de brome.	C <sup>2</sup> H <sup>2</sup> Br <sup>1,5</sup>		131,6	1,89?		2,44327	9,88	5040	4 125
Iode.....	I	12,7	175	3,9186	23,95		2,270	4068	4 5
Ether iodhydrique..	C <sup>4</sup> H <sup>5</sup> I <sup>2</sup>		55	1,850		2,53429	9,7492	5139	4 36
Soufre.....	S	16	450	1,554?		2,20418	21,70	5556	4 9
Sulfure de carbone..	CS <sup>2</sup>	3,8	46,20	1,2258		2,49857	26,36	4361	4 8
Gaz sulfhydrique....	SH		0	0,89?		2,47052	53,58	5161	4 31
Acide sulfureux.....	SO <sup>2</sup>		—10	1,4612		2,64797	25,30	5182	4 27
Cyanogène.....	CAz		2,2	0,866?		2,54363	44,66	5031	4 101
Protoxyde d'azote...	Az <sup>2</sup> O		0	0,9370		2,33858	27,83		
Id.	»		20	0,8365		2,32142	34,72	4840	4 31
Chlorure de bore....	B <sup>3</sup> O <sup>2</sup> Cl <sup>1,5</sup>		17	1,35		2,55130	14,48	4722	4 8
Chlorure d'étain....	Sn <sup>2</sup> Cl <sup>3</sup>		115,4	1,984	29,82		5,9197	4002	4 5
Phosphore.....	Ph	3,1	290	1,55?		2,55810?	46,82	5000	0
Chlorure phosphoreux.	Ph <sup>2</sup> Cl <sup>3</sup>		74	1,4825		2,48709	14,011	4709	4 17
Chlorure de silicium...	SiCl <sup>1,5</sup>		60	1,4034		2,18825	4,864	4720	4 18
Chlorure d'arsenic....	As <sup>3</sup> Cl <sup>3</sup>		138,8	1,92217	45,31		9,22	5400	4 12

L'inspection de ce tableau prouve qu'il est nécessaire dans ce genre de recherches de tolérer des écarts de  $\frac{1}{8}$  à  $\frac{1}{10}$ , dont les causes sont d'ailleurs connues. On n'hésitera point malgré cela à admettre les lois, servant de base aux calculs qui précèdent, si l'on remarque que, dans la comparaison de l'hydrogène et du mercure, par exemple, on est forcé de se servir de la valeur de  $a_{\text{H}}$  donnée par des moyens qui amènent des accumulations d'erreurs et de multiplier par 2500 la quantité  $a_{\text{H}}$ , très-petite, et par conséquent difficile à déduire des expériences avec une grande exactitude. Au reste je vais indiquer encore quelques autres vérifications.

*Chlorure de carbone.* — A la température 75 degrés, on a, d'après M. Regnault,  $h' = 22,214$ ,  $h = 725,66$ ; et, d'après M. Is. Pierre,  $\Delta = 1,4823$ . En y joignant  $D = 5,3364$ , on trouve

$$a = 12,49,$$

ce qui donne pour équation du bi-chlorure de carbone, en posant  $\gamma_1 = ke$ ,

$$74054 = (1 + k^2) a_{\text{H}} + 12ke a_{\text{Cl}}^{\text{Cl}}.$$

Pour savoir si la seconde loi s'applique à cette substance, il faut remplacer  $6e a_{\text{Cl}}^{\text{Cl}}$  par  $a_{\text{H}}$ , ce qui conduit à l'équation

$$(k^2 + 2k + 1) a_{\text{H}} = (k + 1)^2 a_{\text{H}} = 74054.$$

$k = 3$  donne ensuite

$$e = \frac{71}{3}, \quad a_{\text{H}} = 4628, \quad \left(\frac{71}{3}\right)^2 a_{\text{Cl}} = a_{\text{H}}.$$

C'est la seule valeur de  $k$  acceptable; elle va d'ailleurs être confirmée, et l'on peut regarder le corps qui nous occupe comme offrant une vérification de la seconde loi.

*Éther chlorhydrique.* — A la température 12°,5 on a

$$h' = 28,29, \quad h = 761,835, \quad \Delta = 0,90343, \quad D = 2,227;$$

avec ces données on trouve

$$a = 40,196,$$

et, pour l'équation de l'éther chlorhydrique, après avoir remplacé  $240 a_{\text{H}}^{\text{cl}}$  par  $-143040$  et  $a_{\text{cl}}$ ,  $a_{\text{cl}}^{\text{cl}}$  par leurs expressions en  $a_{\text{H}}$  qui viennent d'être obtenues,

$$310270 = 55,25 a_{\text{H}} + 5 \times 71 a_{\text{H}}^{\text{cl}}.$$

En remplaçant  $71 a_{\text{H}}^{\text{cl}}$  par  $3 a_{\text{H}}$  il vient

$$\frac{71}{3} a_{\text{H}}^{\text{cl}} = a_{\text{H}} = 4447;$$

et l'on a une nouvelle vérification de la seconde loi.

*Chloroforme.* — A 60 degrés les données sont

$$h' = 25,201, \quad h = 755,44, \quad \Delta = 1,4130, \quad D = 4,1407,$$

et il en résulte

$$a = 16,924.$$

L'équation du chloroforme, après réductions produites par la substitution des quantités maintenant connues, se réduit à

$$a_{\text{H}} = 4900.$$

Elle confirme avec une approximation suffisante ce qui a rapport au bi-chlorure de carbone et à l'éther chlorhydrique.

La valeur de  $e$  admise pour le chlore est les deux tiers de l'équivalent chimique 35,5. Si on remplaçait cet équivalent par 72, en changeant les formules usitées, il satisferait à la loi de Proust, se rapprocherait de 80 et de 127 admis pour deux corps analogues, le brome et l'iode; enfin, il serait triple du nombre  $e$  obtenu par les attractions au contact, et ce rapport se présente comme on va le voir pour le brome et l'iode.

*Brome.* — A la température 63 degrés, on a, d'après M. Regnault,  $\lambda = 50,95$ ; la chaleur spécifique est 0,107, ce qui donne  $L = 44,21$ . On a d'ailleurs  $D = 5,544$  et, d'après M. Is. Pierre,  $\Delta = 2,9688$ ; il en résulte

$$a = 5,870.$$

On en conclut  $e = \frac{80}{3}$ , puis

$$ae^2 = 4174.$$

Cette valeur est trop faible, et, cependant, le dénominateur de  $e$  ne peut être remplacé ni par 2 ni par 4, puisqu'il en résulterait pour  $ae^2$  les valeurs inacceptables 1855 et 7420.

*Éther bromhydrique.* — A 38°,37 M. Regnault donne  $h' = 30,006$ ,  $h = 760$  et, d'après M. Is. Pierre,  $\Delta = 1,3952$ ; en y joignant  $D = 3,7058$ , on trouve

$$a = 20,35.$$

L'équation de l'éther bromhydrique est, après réductions,

$$377710 = 50a_n + 30 \times \frac{80}{3} a_n^{br} + 24 \times 6 \times \frac{80}{3} a_c^{br}.$$

Il est évident que la seconde loi est ici en défaut, quoique les analogies du chlore et du brome portent d'abord à supposer le contraire.

*Hydro-carbure de brome.* — A la température 131°,6, on a

$$h' = 21,09, \quad h = 760, \quad D = 6,514, \quad \Delta = 1,89;$$

il en résulte

$$a = 9,88,$$

et l'équation

$$115921 = 17a_n + 12 \times \frac{80}{3} a_n^{br} + 12 \times 6 \times \frac{80}{3} a_c^{br}.$$

Posons  $\frac{80}{3} a_n^{br} = x a_n$  et  $6 \times \frac{80}{3} a_c^{br} = y a_n$ ; déjà nous avons appris, en étudiant l'éther bromhydrique, que  $x$  et  $y$  n'égalent point l'unité, comme le veut la seconde loi. Mais, si l'on profite des deux équations qui renferment ces quantités pour en calculer les valeurs, on trouve à peu près  $x = 2$  et  $y = -\frac{3}{2}$ ; c'est-à-dire que l'on a

$$1 \times \frac{80}{3} a_n^{br} = 2 a_n \quad \text{et} \quad 6 \times \frac{80}{3} a_c^{br} = -\frac{3}{2} a_n.$$

Ces relations réduisent l'équation de l'éther bromhydrique à

$$a_H = 5104,$$

et celle de l'hydro-carbure de brome à

$$a_H = 5040.$$

En même temps elles conduisent à modifier et à étendre la seconde loi qu'on peut énoncer de la sorte :

*Si, pour deux éléments quelconques, on forme le produit de leur attraction au contact par les nombres B, C en rapports simples avec leurs équivalents et que fait connaître leur étude ou celle de l'ensemble des composés dans lesquels ils entrent, on obtient l'attraction au contact de l'hydrogène ou un multiple par un nombre K positif ou négatif simple :*

$$(215) \quad a_B^C = K \frac{a_H}{BC}.$$

Alors la première loi pourrait être généralisée de manière à comprendre la seconde, mais la valeur

$$(216) \quad e^2 = \frac{(\sum B\beta)^2}{\sum B^2 + 2\sum K\beta\gamma} \quad :$$

pour un composé quelconque s'obtiendrait en divisant le carré de la formule mise en nombres par la somme des carrés de ses exposants et de leurs doubles produits multipliés respectivement par les valeurs convenables de K. Cela résulte de l'application de la formule (211) à un composé quelconque. Si on la simplifie au moyen de (212) et (215), ce qui donne

$$(217) \quad a = \frac{\sum \beta^2 + 2\sum K\beta\gamma}{(\sum \beta\gamma)^2} a_H,$$

on voit de suite qu'avec la définition précédente de  $e^2$ , la valeur de  $a$  suit pour les corps composés la même loi que pour les corps simples. Il y aura lieu de rechercher si les équivalents des composés définis de la sorte peuvent être utiles en chimie.

On pourrait peut-être faire rentrer dans cette loi  $6 \times 8 a_c$  et

$6a_c^H$ , en les supposant égaux, au signe près, à  $\frac{2a_u}{3}$ , ce qui exigerait pour  $a_c^0$  la valeur  $a_u = 4620$ , et pour  $a_c^H$  la valeur  $a_u = 5364$ .

*Iode.* — A 175 degrés, on a, d'après MM. Favre et Silbermann,  $L = 23,95$ ; en y joignant  $D = 8,716$  et  $\Delta = 3,9186$ , on trouve

$$a = 2,270,$$

et l'on en conclut

$$e = \frac{127}{3}, \quad ae^2 = 4068.$$

Cette valeur du nombre fondamental est trop faible; mais elle serait plus considérable sans doute si l'on connaissait la véritable valeur de  $\Delta$  au lieu de celle que j'ai calculée au moyen de coefficients de dilatation pour des intervalles de température qui ne sont pas les mêmes que dans le calcul.

*Éther iodhydrique.* — A 55 degrés, on a

$$h' = 14,825, \quad h = 433,21, \quad D = 5,47, \quad \Delta = 1,850.$$

Il en résulte

$$a = 9,7492$$

et l'équation

$$380300 = 50a_u + 30 \times \frac{127}{3} a_u^1 + 24 \times 6 \times \frac{128}{3} a_u^1.$$

Si l'on pose  $\frac{127}{3} a_u^1 = xa_u$  et  $6 \times \frac{127}{3} a_c^1 = ya_u$ , on arrive, en remarquant que  $380300$  égale  $5139 \times 74$ , à

$$30x + 24y = 24.$$

Cette relation est vérifiée quand on y fait, par analogie avec le brome,  $x = 2$  et  $y = -\frac{3}{2}$ ; mais cette solution n'est pas certaine parce que le second membre  $24$  peut être modifié, et aussi parce qu'il existe d'autres solutions simples entre lesquelles on ne pourra choisir à coup sûr qu'en étudiant d'autres substances contenant de l'iode.

*Soufre.* — A la température 450 degrés, on a, d'après M. Regnault,

$$h' = 12,48, \quad h = 779,89;$$

si l'on y joint  $D = 6,654$  et  $\Delta = 1,554$  (?), on obtient

$$a = 21,70.$$

Il en résulte

$$e = 16, \quad ae^2 = 5556.$$

*Sulfure de carbone*,  $CS^2 = 38$ . — A 46 degrés, les données sont

$$h' = 23,954, \quad h = 760, \quad D = 2,63, \quad \Delta = 1,2258.$$

Il en résulte

$$a = 26,36$$

et

$$\left(\frac{38}{3}\right)^2 a = ae^2 = 4361.$$

Le sulfure de carbone fournit encore une vérification de la seconde loi.

*Gaz sulfhydrique.* — A 0 degré, on a

$$h' = 242,477, \quad h = 8206,29, \quad D = 1,1912, \quad \Delta = 0,89(?).$$

Il en résulte

$$a = 53,58$$

et l'équation

$$15484 = 2a_n + 32a_s^n;$$

pour que la seconde loi fût applicable à cette substance avec le coefficient  $\frac{1}{2}$ , il faudrait qu'on eût

$$16a_s^n = \frac{1}{2}a_n \quad \text{et} \quad a_n = \frac{15484}{3} = 5161.$$

*Acide sulfureux*,  $SO^2 = 32$ . — A la température — 10 degrés, on a

$$h' = 33,90, \quad h = 762,49, \quad \Delta = 1,4612, \quad D = 2,234.$$

Avec ces données, on trouve

$$a = 25,30$$

et l'équation

$$25910 = 5a_n + 4 \times 8 \times 16a_s^2.$$

Il est probable que  $8 \times 16 a_0^2$  est nul, et il en résulte

$$a_n = 5182.$$

*Ammoniaque.* — A la température 10 degrés, M. Regnault donne

$$h' = 162,539, \quad h = 4612,19,$$

et, d'après M. d'Andréeff, on a  $\Delta = 0,6232$ . Si l'on y joint  $D = 0,591$ , on trouve

$$a = 203.$$

L'étude de l'ensemble des composés d'azote montre que

$e = \frac{14}{2} = 7$ ; l'équation de l'ammoniaque est

$$58\,646 = 13 a_n + 12 \times 7 a_n^2,$$

et l'on voit que  $a_n^2$  est nul ou négatif. La première hypothèse donne

$$a_n = 4511.$$

*Cyanogène.* — A 2°,2 on a, d'après Faraday,

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{28,6}, \quad \Delta = 0,866, \quad D = 1,806.$$

Il en résulte

$$a = 44,66$$

et l'équation

$$30190 = 8 a_n + 8 \times 6 \times 7 a_n^2,$$

d'où l'on conclut

$$-6 \times 7 a_n^2 = \frac{1}{4} a_n, \quad a_n = 5031.$$

*Protoxyde d'azote.* — A 0 degré, on a, d'après M. Regnault,

$$h' = 597,944, \quad h = 27\,421,$$

et, d'après M. d'Andréeff,  $\Delta = 0,9370$ . En y joignant  $D = 1,527$ , on trouve

$$a = 27,83.$$

A 20 degrés les données sont

$$h' = 880,974, \quad h = 42\,028, \quad \Delta = 0,8365,$$



et il en résulte

$$a = 34,72.$$

Si l'on adopte provisoirement la valeur intermédiaire 30, on arrive à l'équation

$$14520 = 5a_n + 4 \times 7 \times 8a_{\lambda}^2.$$

On ne peut guère douter de l'application de la seconde loi avec le coefficient  $-\frac{1}{2}$ , et l'on a

$$7 \times 8a_{\lambda}^2 = -\frac{1}{2}a_n, \quad a_n = 4840.$$

*Chlorure de bore.* — A 17 degrés, M. Regnault donne  $\log \frac{p'}{p} = 2,55130$ , et d'après MM. Wöhler et Deville, on a  $\Delta = 1,35$ . Si l'on y joint  $D = 4,07$ , on trouve

$$a = 14,48.$$

En adoptant pour le bore  $e = \frac{10,89}{2}$ , il en résulte, pour le chlorure de bore,  $e = \frac{117,39}{6,5}$ , ce qui donne

$$ae^2 = 4722,$$

et fournit une nouvelle vérification de la seconde loi.

*Chlorure d'étain.* — A 115,4 degrés, on a

$$L = 29,82, \quad \Delta = 1,984, \quad D = 9,2,$$

ce qui donne

$$a = 5,9197.$$

Il est probable que, pour l'étain, la valeur de  $e$  égale  $\frac{59}{2}$ , nombre fourni par la force de réunion de ce métal; il en résulte, pour le chlorure d'étain,  $e = \frac{130}{5} = 26$ , et par suite

$$ae^2 = 4002.$$

*Phosphore.*—Pour cette substance les données précises manquent. M. Schrœtter, dans le tome XXIV de la 3<sup>e</sup> série des *Annales de Chimie et de Physique*, p. 415, donne avec réserve pour forces élastiques en millimètres aux températures 165, 170, 180, 200, 209, 218, 226, 230 degrés les nombres 120, 173, 204, 266, 339, 359, 393, 514. J'en ai déduit pour  $\log \frac{p'}{p}$  aux températures 167<sup>o</sup>,5, 175, 190, 209, 221, 224, 228 degrés les valeurs  $\bar{2},85947$ ,  $\bar{2},21605$ ,  $\bar{2},12029$ ,  $\bar{2},18329$ ,  $\bar{2},05320$ ,  $\bar{2},47445$ ,  $\bar{2},82463$ . Il est difficile de tirer parti de ces résultats pour calculer l'attraction au contact. J'ai préféré me servir de la valeur  $e = \frac{31}{3}$ , obtenue par les forces de réunion pour le phosphore; elle est probablement convenable aussi pour les attractions au contact, et elle donne

$$a = \frac{5000}{\left(\frac{31}{3}\right)^2} = 46,83.$$

Si maintenant on emploie pour une première approximation 1,5 comme densité du phosphore à 290 degrés, la formule (202) donne

$$\log \frac{p'}{p} = \bar{2},55810.$$

Ce nombre ne sort pas des limites entre lesquelles se trouvent renfermés ceux qui sont déduits des expériences de M. Schrœtter.

*Chlorure phosphoreux.* — A 74 degrés, on a, d'après M. Regnault,  $h' = 23,4566$ ;  $h = 764,1534$  et, d'après M. Is. Pierre,  $\Delta = 1,4825$ . Si on y joint  $D = 4,742$ , on trouve

$$a = 14,011.$$

Le chlorure phosphoreux est composé de 31 de phosphore et de 106,5 de chlore. Sa formule, en employant les valeurs des équivalents données par les attractions au contact pour le phosphore et le chlore, est  $\text{Ph}^3\text{Cl}^{45} = 137,5$ . L'équivalent

de ce composé est donc  $e = \frac{137,5}{7,5} = 18,33$  et l'on en conclut

$$ae^2 = 4\,709,$$

ce qui constitue une vérification de la seconde loi,

*Chlorure de silicium.* — A 60 degrés, on a

$$h' = 12,915, \quad h = 837,23, \quad \Delta = 1,4034, \quad D = 5,94;$$

on en conclut

$$a = 4,864,$$

et l'équation

$$79\,060 = 21,25a_H + 9 \times 21 \times \frac{71}{3} a_{Si}^{cl}.$$

Il est évident que  $21 \times \frac{71}{3} a_{Si}^{cl}$  est négatif; si nous le supposons égal à  $\frac{a_H}{2}$  en valeur absolue, il vient

$$a_H = 4\,720.$$

Mais ce résultat aurait besoin d'être confirmé.

*Chlorure d'arsenic.* — A 138°,8, on a

$$L = 45,31, \quad \Delta = 1,92217, \quad D = 6,2667.$$

Il en résulte

$$a = 9,22,$$

et, si l'on suppose pour l'arsenic  $e = \frac{75}{3}$ ,

$$ae^2 = \left(\frac{181,5}{7,5}\right)^2 a = 5\,400.$$

*Attraction au contact dans les gaz.* — Lorsqu'on tire de la formule (90) les valeurs de  $p$  et de  $\frac{dp}{dt}$  pour les substituer dans (64) et qu'on supprime les quantités négligeables, on trouve, pour valeur de l'attraction au contact dans un gaz,

$$(218) \quad \frac{d\varphi(vt)}{dv} = A = 10\,333 \frac{v_0}{v} \frac{B - B_1}{B_1} = 10\,333 \frac{v_0}{v} \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha}.$$

En profitant de l'équation (190) on peut encore écrire

$$(219) \quad (0,0013D)^2 a = 10\,333 \frac{v_0}{v} \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha}.$$

Si l'on connaît l'attraction au contact, ces relations donnent le coefficient de dilatation à volume constant: pour le sulfure de carbone, par exemple, on trouve  $\alpha_1 = 0,0038$ . La question inverse se résout avec la même facilité; mais il ne faut pas perdre de vue que la différence très-petite  $\alpha_1 - \alpha$  est connue avec peu de précision.

L'attraction au contact dans un gaz peut encore être obtenue au moyen de l'équation (190); par exemple, on a pour la vapeur de mercure  $a = 2,0$  et dans les circonstances normales  $\Lambda = 0,0013 \times 6,976$ ; il en résulte

$$\Lambda = 0,000163.$$

*Conclusion.* — En résumé il existe, même en écartant les résultats douteux qu'il sera facile de modifier plus tard, trop de vérifications de la première loi pour qu'on puisse refuser de l'admettre comme certaine surtout si l'on considère que les écarts sont en général de  $\frac{1}{10}$  seulement alors que les valeurs de  $e^2$  varient de 1 à 2500.

La seconde loi est moins bien établie; son exactitude est cependant fort difficile à contester après tout ce qui précède.

La quantité  $a\Lambda^2$  ou  $\Lambda$  se présente sous trois aspects différents; j'ai fait voir qu'avec un choix convenable des unités, le nombre qui la représente exprime:

- 1° la dérivée du travail interne,
- 2° l'attraction au contact,
- 3° le travail de désagrégation totale.

#### APPLICATIONS.

Maintenant que les valeurs de  $a$  et  $\Lambda$  sont connues pour beaucoup de corps simples ou composés, il est facile de s'en ser-

vir pour résoudre diverses questions très-difficiles sans leur emploi. Il suffira de donner quelques exemples, et, pour abrégé les calculs, je ferai usage des formules simplifiées (198) et (202); avec les équations (196) et (201) on obtiendrait une plus grande approximation probable.

*Chlore liquide.* — Pour le chlore, on a  $e = \frac{71}{3}$  et, par conséquent,

$$a = \frac{5000 \times 9}{71^2} = 8,927.$$

La densité est 1,33 au point d'ébullition — 33°,6 déterminé par M. Regnault. Cela suffit pour qu'on puisse tirer des formules

$$L = 30,43, \quad h' = 14,6.$$

La valeur de  $h'$  est à peu près égale à celle que donne le mercure sous la même pression.

*Carbone.* — Pour cette substance, l'attraction au contact est

$$a = \frac{5000}{36} = 138,9.$$

À la température ordinaire, la densité du carbone cristallisé est 3,5; si l'on admet 3 comme valeur au point d'ébullition inconnu, il en résulte

$$L = 1068.$$

*Gaz oléfiant.* —  $\Lambda = 6^{\circ},7$ , on a, d'après Faraday,

$$\log \frac{p'}{p} = 2,42225;$$

si l'on y joint

$$D = 0,985 \quad \text{et} \quad a = \frac{5000 \times 2 - 7152}{49} = 58,12,$$

ou trouve, pour valeur de la densité, qui, je crois, n'a point encore été observée,

$$\Delta = 0,93.$$

*Oxygène.* — On a d'abord

$$a = \frac{5000}{64} = 78,12,$$

et, comme ce gaz n'a point été liquéfié, on ne peut obtenir, en se bornant toujours à une première approximation, que le quotient

$$\frac{L}{\Delta} = 200.$$

Pour l'hydrogène on trouve de la même manière

$$\frac{L}{\Delta} = 12800.$$

*Loi des chaleurs latentes.* — Si on remplace dans la formule (198)  $\Delta$  par  $\Delta^0(1 + \alpha t)$ ,  $\alpha$  désignant le coefficient moyen de dilatation, et 0,9 par  $K$ ; puis qu'on divise l'une par l'autre les équations obtenues en faisant l'application à deux liquides différents pris à la même température, il vient

$$\frac{L}{L_1} = \frac{\Delta_0 a}{\Delta_1 a_1} \frac{K_1}{K} \frac{1 + \alpha_1 t}{1 + \alpha t}.$$

M. Is. Pierre, à l'occasion de ses expériences remarquables, a fait des réflexions très-judicieuses sur les coefficients de dilatation; il faut en tenir grandement compte quand on veut beaucoup d'exactitude. Mais, dans une première approximation, on peut admettre que, pour la plupart des liquides,  $1 + \alpha_1 t$  diffère peu de  $1 + \alpha t$ ; la fraction  $\frac{K_1}{K}$ , obtenue en divisant l'un par l'autre les coefficients tous deux voisins du nombre 0,9 qui les remplace dans la formule abrégée, est presque égale à 1. Ainsi, on est en droit d'affirmer l'existence d'un nombre constant voisin de l'unité, intermédiaire entre les valeurs extrêmes et qui peut être substitué sans beaucoup d'erreur au produit  $\frac{K_1(1 + \alpha_1 t)}{K(1 + \alpha t)}$ . De là résulte la loi que j'ai donnée précédemment pour les chaleurs latentes (*Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. V, p. 441) et que j'ai vérifiée au moyen des expériences de M. Regnault.

*Loi de Regnault.* — La formule (202) donne de la même manière

$$\frac{p}{p'} : \frac{p'_1}{p_1} = \text{const.},$$

et l'on voit que la théorie des attractions au contact fait retrouver la loi qui établit une liaison entre les forces élastiques de vapeurs diverses; elle est due à M. Regnault, et c'est en m'appuyant sur elle que j'ai obtenu d'abord la loi des chaleurs latentes.

Ces deux lois sont conséquences de calculs dans lesquels on néglige les perturbations causées par les variations de structure des corps simples ou les variations de structure et de groupement chimique dans les composés. Les nombreuses valeurs de  $a_R$  trouvées précédemment ne s'accordent qu'à  $\frac{1}{10}$  près; cela suffit pour montrer que ces variations ne sont pas entièrement négligeables et qu'une exactitude très-grande en thermodynamique est incompatible avec l'hypothèse que le travail interne est fonction du volume seul. On est souvent forcé de faire usage de cette hypothèse; mais il ne faut point perdre de vue qu'elle n'est qu'approchée, et pas toujours suffisamment, comme on va le voir par l'examen de quelques chaleurs spécifiques.

*Chaleurs spécifiques.* — La quantité de chaleur  $c'$  dépensée pendant que la température d'un kilogramme s'élève d'un degré se compose :

- 1° de la capacité vraie C,
- 2° du travail interne,
- 3° du travail externe.

La capacité vraie a été étudiée précédemment, on a

$$C = \frac{2,448 N}{D_1},$$

$D_1$  désignant la densité limite relative à l'hydrogène et N le

nombre des volumes des corps simples pris à l'état de vapeurs qui entrent dans un volume du composé.

Quant au travail interne, la théorie des attractions au contact permet actuellement de le calculer en le supposant, pour une première approximation, fonction du volume seul;  $1000000A$  ou  $1000000a\Delta^2$  est sa dérivée par rapport au volume; il suffit de la multiplier par la variation de volume  $\alpha'v$  et de diviser par  $E$ , ce qui donne

$$\frac{1000000A\alpha'v}{E} \quad \text{ou} \quad \frac{1000a\alpha'\Delta}{E} \quad \text{ou} \quad 0,9\alpha'L.$$

Le travail externe a pour valeur le produit du nombre 10333 par la variation de volume  $\alpha'v$ ; exprimé en calories, il est

$$\frac{10333\alpha'v}{E} \quad \text{ou} \quad \frac{10,333\alpha'}{E\Delta},$$

et l'on arrive à l'équation

$$C' = \frac{2,448N}{D_1} + \frac{1000a\alpha'\Delta}{E} + \frac{10,333\alpha'}{E\Delta}.$$

*Mercure.* — Pour ce liquide pris à 0 degré, on a

$N=1$ ,  $D_1=100$ ,  $\alpha'=0,00017905$ ,  $\Delta=13,596$ ,  $a=2,0$ , et il en résulte

$$C' = 0,02448 + 0,01123 + 0,00000314 = 0,0357.$$

L'expérience a donné le nombre 0,0333, qui est inférieur de  $\frac{1}{14}$ . Le travail externe est négligeable; il en est ainsi pour les solides et les liquides.

*Eau à 100 degrés.* — Les données sont

$N=\frac{3}{2}$ ,  $D_1=9$ ,  $\alpha'=0,00086$ ,  $\Delta=0,95863$ ,  $a=225,3$ ,

et l'on en conclut

$$C' = 0,4080 + 0,4285 = 0,8365.$$



M. Regnault a trouvé par expérience 1,008 ; il y a donc ici une erreur relative de  $\frac{1}{6}$  environ.

*Sulfure de carbone à 0 degré.* — On a

$N = \frac{3}{2}$ ,  $D_1 = 38$ ,  $\alpha' = 0,0011398$ ,  $\Delta = 1,293$ ,  $a = 27,18$ ,  
et il en résulte

$$C' = 0,0966 + 0,09242 = 0,1890.$$

L'expérience donne 0,2352 ; l'erreur relative est environ  $\frac{1}{5}$ .

Ces exemples suffisent pour montrer que le travail qui correspond aux variations de groupements moléculaires n'est pas négligeable.

*Vapeur d'eau à 100 degrés.* — On a

$N = \frac{3}{2}$ ,  $D_1 = 9$ ,  $\alpha' = 0,00367$ ,  $\Delta = \frac{0,0013 \times 0,622}{1,367}$ ,  $a = 225,3$ ,  
et il en résulte

$$C' = 0,4080 + 0,01123 + 0,1487 = 0,5679.$$

M. Regnault a trouvé par expérience 0,4805 ; l'erreur relative est  $\frac{1}{3,5}$ .

#### EXPANSION DES GAZ OU VAPEURS SANS TRAVAIL EXTERNE.

Deux vases contiennent des volumes  $V$  et  $V'$  d'une même substance gazeuse à 0 degré et sous les pressions  $p$  et  $p' < p$  ; examinons ce qui doit arriver lorsqu'on les met en communication par une large ouverture et qu'on suppose les parois sans influence sur les phénomènes de chaleur. Dans le premier vase, de la chaleur disparaît en quantité équivalente à la force vive qui se produit ; puis, dans le second vase, cette force vive se retransforme en chaleur. En même temps un travail interne s'opère dans chaque masse gazeuse, et il influe aussi sur les températures finales. Ainsi posé, le problème se com-

plique, et l'on peut d'ailleurs supposer les deux températures initiales quelconques et différentes l'une de l'autre ; je me propose d'y revenir après la publication des expériences de M. Regnault, mais je me bornerai ici à traiter le cas plus simple où, l'équilibre étant établi, on cherche seulement la température finale commune aux deux masses gazeuses. Il faut alors envisager le travail interne, et il est inutile de tenir compte des forces vives. Pour la première masse gazeuse le travail de désagrégation totale est  $1000000AV$  ou  $1000000a\Lambda^2V$  et la valeur de  $\Lambda$  est  $0,0013Dp$  si on nomme comme précédemment  $D$  la densité relative à l'air. La substitution donne

$$(1,3)^2 D^2 p^2 V a.$$

Après l'expansion la pression est  $p'' = \frac{pV + p'V'}{V + V'}$  et la masse gazeuse a pris un volume  $\frac{pV}{p''}$  en négligeant la variation de température, qui est sans influence sensible. Le travail de désagrégation totale est devenu

$$(1,3)^2 D^2 pV \frac{pV + p'V'}{V + V'} a,$$

et l'on a pour différence, ou travail interne,

$$(1,3)^2 D^2 p(p - p') \frac{VV'}{V + V'} a.$$

Pour la seconde masse gazeuse, la quantité analogue est

$$(1,3)^2 D^2 p'(p - p') \frac{VV'}{V + V'} a,$$

et l'on a pour travail interne total, en ayant égard aux signes,

$$(1,3)^2 D^2 (p - p')^2 \frac{VV'}{V + V'} a.$$

Pour obtenir la valeur absolue de la variation de température, il suffit évidemment de diviser par le produit de l'équivalent mécanique de la chaleur, de la capacité vraie et du poids total du gaz  $1,3D(pV + p'V)$ , ce qui donne

$$\frac{1,3D(p - p')^2 VV'a}{EC(V + V')(pV + p'V)}$$

Il est facile d'appliquer cette expression à la recherche du résultat qu'on devrait obtenir, s'il était possible d'éviter les erreurs, dans l'expérience devenue célèbre de Gay-Lussac, reprise et confirmée en Angleterre par M. Joule et en France par M. Regnault. Il suffit de supposer  $p' = 0$ ,  $p = 10$ ,  $v = v'$ ,  $a = 5000$ ,  $D = 0,0693$ ,  $C = 2,448$  et d'effectuer les calculs pour voir que, dans le cas cité par M. Regnault à la page 680 du tome XXXVI des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, la variation de température atteindrait  $2^{\circ},1$  si on employait l'hydrogène au lieu de l'air atmosphérique et si les parois étaient sans influence. Avec de l'oxygène cette variation serait quadruple et avec le chlore deux fois et un quart plus grande. La densité ne joue point dans ce phénomène un rôle aussi important qu'on l'a cru. Pour trouver le résultat relatif à l'air, il faut calculer d'abord la valeur de  $a$  pour cette substance. Les chimistes admettent généralement que les mélanges gazeux sont très-intimes et non formés, pour l'air par exemple, de masses d'oxygène disséminées entre des masses d'azote. J'admets provisoirement cette hypothèse sauf à indiquer plus loin des expériences au moyen desquelles il sera possible de la juger. Soient  $a, a', a''$  les valeurs de l'attraction au contact pour le premier gaz, pour le second et pour le mélange; soit encore  $a_1$  la valeur de cette quantité pour le cas où le premier gaz agit sur le second et  $q, q'$  les poids de ces gaz mêlés ensemble. On a

$$(220) \quad (q + q')^2 a'' = q^2 a + q'^2 a' + 2qq' a_1$$

ou, en remplaçant  $q$  par  $1,3DV$  et  $q'$  par  $1,3D'V'$

$$(221) \quad a'' = \frac{D^2 p^2 V^2 a + D'^2 p'^2 V'^2 a' + 2DD'pp'VV'a_1}{(DpV + D'p'V')^2};$$

$D$  et  $D'$  peuvent être considérés, si l'on veut, comme représentant ici les densités relatives à l'hydrogène.

Pour l'air on a  $q = 23,13$ ,  $q' = 76,87$ ,  $a = \frac{5000}{64}$ ,  $a' = \frac{5000}{49}$ ,  
 $a_1 = -\frac{5000}{112}$ ; et il en résulte

$$a'' = 50.$$

Avec ce nombre et  $C = 0,17$ , on trouve, pour variation de température dans l'expérience de M. Regnault,  $4^{\circ},4$ .

Dans le cas où  $p = 1,5$  et  $p' = 0,5$ , la variation de température est vingt fois plus faible; mais, si l'on suppose  $p = 20$  avec  $p' = 0$ , on obtient le double de  $4^{\circ},4$ .

Dans ces sortes d'expériences il y aura peut-être avantage à se servir, suivant l'idée de Clément et Désormes, du volume à pression constante ou de la pression à volume sensiblement constant, de la masse gazeuse elle-même pour constater les variations de température: M. Hirn l'a essayé dans des conditions peu favorables. Il n'est pas nécessaire, pour obtenir un résultat exact, d'attendre l'équilibre de température; car, si une portion quelconque du gaz perd  $q$  calories, son volume diminue de  $\frac{q\alpha}{1,3DpKC}$ ,  $KC$  étant la chaleur spécifique à pression constante. Cette quantité est indépendante du poids de la substance refroidie, et par conséquent l'augmentation de volume de la partie de la masse gazeuse qui reçoit les  $q$  calories opère une compensation exacte. Ainsi la distribution de la chaleur est indifférente pourvu qu'on réussisse à éviter l'action des parois de l'enceinte ou à en tenir compte.

VARIATIONS DE TEMPÉRATURE PRODUITES PAR LES  
MÉLANGES GAZEUX.

Quoiqu'il ne soit pas plus difficile de traiter le cas général, je supposerai, pour éviter les longueurs, que l'on mêle deux gaz pris à 0 degré et sous la pression d'une atmosphère. Soient  $q$  et  $q'$  leurs poids.

Pendant qu'ils sont séparés, le travail de désagrégation totale est

$$(222) \quad 1,3 D q a + 1,3 D' q' a'.$$

Après le mélange la densité relative à l'air est devenue

$$(223) \quad \frac{D D' (q + q')}{D q' + D' q},$$

et la valeur de  $a''$  est fournie par l'équation (219); on a donc pour travail total de désagrégation

$$(224) \quad \frac{1,3 D D'}{D q' + D' q} (q^2 a + q'^2 a' + 2 q q' a_1).$$

Le travail interne ou travail de désagrégation déjà accompli dans l'ensemble par suite du mélange s'obtient en formant la différence qui est, après réductions,

$$(225) \quad \frac{1,3 q q'}{D q' + D' q} (D^2 a + D'^2 a' - 2 D D' a_1).$$

Il est évident qu'on ne restreint pas la généralité de la formule lorsque, la destinant à la recherche de la température  $t$  du mélange, on fait  $q' = 1$ . Admettons cette valeur et faisons l'application au cas de l'oxygène et de l'hydrogène; on a

$$8a = a_{\text{H}}; \quad a' = a_{\text{O}}; \quad 8a_1 = a_{\text{H}}; \quad D = 16 \times 0,0693 = 16 D'.$$

La chaleur correspondant à une variation de 1 degré à volume constant est

$$2,448 + \frac{2,448}{16} q,$$

et une simple division fournit la quantité cherchée

$$(226) \quad t = \frac{1,3 \times 0,0693 \times 5000 \times 16}{2,448E} \frac{q}{(q+16)^2}.$$

La variation de température est nulle pour  $q=0$  et pour  $q=\infty$  comme on pouvait le prévoir ; elle est maximum et de  $\frac{1}{10}$  de degré environ pour  $q=16$ . Ainsi le mélange de l'hydrogène et de l'oxygène à volumes égaux produit une élévation de température de  $\frac{1}{10}$  de degré qu'on réussira sans doute à mettre en évidence. Mais cette conclusion suppose que le mélange est assez intime pour que les particules de chaque gaz ne conservent que des dimensions fort petites par rapport à  $\epsilon$ , et, si les expériences en montrent l'inexactitude, il faudra abandonner l'opinion reçue.

Rien ne s'oppose à ce qu'on applique aux dissolutions ce qui vient d'être dit pour les gaz ; avec la théorie des attractions au contact on peut calculer les variations de température dans l'hypothèse d'un mélange très-intime. Si les résultats trouvés sont en désaccord avec les expériences, on en conclura que la division n'est pas poussée assez loin pour que les dimensions des particules soient très-petites par rapport à  $\epsilon$ . On verra plus loin que l'étude des forces de réunion permet de préciser et d'étendre davantage cette conséquence.

Lorsqu'un mélange de gaz ou de liquides produit de la chaleur, c'est-à-dire un travail positif, on peut affirmer l'existence d'une force, car il n'y a pas de travail sans force. Mais, parce qu'une somme de travaux élémentaires peut être positive alors que les premiers éléments de cette somme sont nuls ou négatifs, il n'est pas permis d'affirmer que les corps mis en contact se mélangeront d'eux-mêmes : cela est probable et non certain. Je pense toutefois qu'une étude détaillée de cette partie de la science jettera beaucoup de lumière sur les phénomènes d'endosmose et de diffusion.

## TRAVAIL CHIMIQUE.

La théorie des attractions au contact conduit pour le travail chimique à des conjectures en partie très-probables que je vais maintenant exposer. Il est commode de prendre les composants et les composés à l'état gazeux sauf à tenir compte, quand il y a lieu et qu'on peut le faire, des chaleurs latentes par le calcul. Il est indifférent d'ailleurs de partir de la pression atmosphérique normale et de la température 0 degré; car, ainsi qu'on l'a vu précédemment, le travail interne qui correspond à un changement de densité dans les gaz est négligeable en présence du travail chimique. Le travail externe ou atmosphérique, quoique beaucoup plus considérable, sera lui-même négligé dans cette première étude : la combinaison de deux litres d'hydrogène avec un d'oxygène donne 6<sup>cal</sup>,162; pendant la réduction à deux litres de vapeur, le travail externe produit  $\frac{10,333}{433,5}$  calories, c'est-à-dire un nombre 258 fois moindre, et l'on voit que, dans l'état actuel de la science, il n'est pas nécessaire de tenir compte des changements de volume.

Lorsque deux atomes se combinent, le travail chimique qui s'accomplit, et que nous évaluerons en calories, ne dépend donc pas sensiblement de la distance initiale, qui est indifférente. Cette distance est d'ailleurs beaucoup moindre que  $\epsilon$ , et, dans l'expression générale de l'attraction à laquelle nous parviendrons plus loin, le terme proportionnel à  $\frac{1}{e^2}$  doit être seul conservé. Supposons-le applicable jusqu'à la réunion complète et prenons pour poids atomiques les valeurs de  $e$  fournies par les attractions au contact. Les conséquences de cette double hypothèse s'obtiennent aisément. Pour en faciliter l'étude nous représenterons par la lettre T accompagnée d'indices le travail de réunion de deux atomes; T<sup>o</sup> ou simplement T<sub>o</sub> désignera le

travail de réunion de deux atomes d'oxygène,  $T_H^O$  celui d'un atome d'hydrogène se combinant avec un atome d'oxygène.

*Première loi.* — Si l'on compare le travail de réunion de deux atomes d'oxygène dans un peroxyde, par exemple, et celui de deux atomes d'hydrogène, et si l'on examine ce qui arrive lorsque les deux atomes d'oxygène sont assez rapprochés pour s'attirer fortement, il est facile de conclure des lois des attractions à petites distances précédemment trouvées, qu'ils s'attirent juste autant que les deux atomes d'hydrogène situés à la même distance l'un de l'autre. Cela résulte de ce que l'attraction est en raison composée des masses et en raison inverse du carré du poids atomique, ce qui donne l'unité pour rapport final. D'ailleurs, les forces étant égales à toute distance, les travaux ne peuvent différer, et l'on est conduit à cette loi :

*Le travail de réunion de deux atomes semblables est indépendant de leur nature,*

$$(227) \quad T_x = T_H.$$

*Seconde loi.* — Si maintenant nous comparons par exemple le travail  $T_S^C$  de combinaison d'un atome de soufre et d'un atome de carbone avec  $T_H$ , à même distance l'attraction totale est dans le premier cas  $6 \times 16$  fois plus grande à cause des masses, et  $6 \times 16$  fois moindre à cause de la nature des corps (seconde loi des attractions au contact); il y a donc compensation exacte, c'est-à-dire que

*Le travail de combinaison de deux atomes quelconques est indépendant de leur nature,*

$$(228) \quad T_x^y = T_H.$$

Mais l'étude des attractions au contact a montré que la seconde des lois qui les régissent n'est certaine que dans un petit nombre de cas et qu'elle ne devient probable dans toute sa généralité qu'autant qu'on introduit un coefficient  $k$  très-



simple et qui est quelquefois négatif. Il y a donc lieu à modifier dans le même sens l'énoncé qui précède :

*Le travail de combinaison de deux atomes dissemblables égale le nombre fondamental  $T_n$  multiplié par un facteur simple qui est assez souvent l'unité,*

$$(229) \quad T_X = k T_n.$$

La première loi rentre dans la seconde si l'on fait  $X=Y$  et  $k=1$ .

*Combustion du soufre,  $SO^2=32$ .*—Lorsqu'un premier atome se combine avec un second, le travail est  $T_n$ ; mais si l'atome binaire formé en appelle à lui un troisième, son attraction étant double, le nouveau travail a pour valeur  $2T_n$  et le travail total est  $(1+2)T_n$ . En général la réunion de  $n$  atomes produit un travail

$$[1+2+3+\dots+(n-1)]T_n,$$

si le coefficient  $k$  ne diffère point de l'unité, et si le nombre  $n$  n'est point assez grand pour diminuer notablement le travail de combinaison de certains atomes en les empêchant de se rapprocher.

Dans le cas actuel, MM. Favre et Silbermann ont obtenu pour chaleur produite par gramme de combustible  $2^{\text{cal}},2211$ . Pour 16 grammes de soufre contenant le même nombre d'atomes  $n$  qu'un gramme d'hydrogène et se réunissant chacun avec deux atomes d'oxygène, on a, en supposant  $k=1$ ,

$$3nT_n = 2,2211 \times 16,$$

d'où

$$nT_n = 11,79.$$

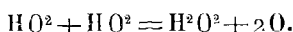
*Combustion de l'hydrogène,  $H^2O^2$ .*—Un gramme d'hydrogène produit en brûlant  $34^{\text{cal}},462$ ; ce nombre est triple du précédent et donne

$$nT_n = 11,49.$$

Pour expliquer le résultat, on peut admettre que la molécule

d'eau est quaternaire; sa formation produit  $(1 + 2 + 3)T_H = 6T_H$  ou  $3T_H$  par atome d'hydrogène.

*Eau oxygénée*,  $H_2O^2$ .—La décomposition de l'eau oxygénée est exprimée par l'équation



La formation de l'atome ternaire  $H_2O^2$  est accompagnée d'une production de chaleur  $3T_H$  et celle de l'atome quaternaire d'une production de chaleur  $6T_H$ ; il n'y aurait ici ni perte ni gain dans l'hypothèse d'un dégagement d'oxygène à l'état ordinaire. Mais on sait que l'oxygène qu'on sépare à froid d'un composé dans lequel il se trouve est toujours ozoné. La chaleur obtenue par MM. Favre et Silbermann en décomposant le bi-oxyde d'hydrogène est peut-être due à cet état particulier du gaz. S'il en était ainsi, la décomposition produite à une température suffisamment élevée ne donnerait ni chaleur ni froid; il est fâcheux qu'elle n'ait point été étudiée. L'ozone n'est peut-être que de l'oxygène dont les atomes sont combinés deux à deux par exemple, ce qui expliquerait à la fois la chaleur observée pendant le phénomène dont il s'agit et aussi le rôle chimique de l'oxygène ozoné. Plusieurs expériences plus faciles à imaginer qu'à faire pourront servir à résoudre ces questions; il sera intéressant d'examiner le gaz extrait du bi-oxyde d'hydrogène, de voir s'il absorbe de la chaleur et change de volume en reprenant son état ordinaire et s'il produit moins de chaleur quand on l'emploie pour la combustion du carbone.

On peut aisément trouver d'autres explications de la chaleur de décomposition de l'eau oxygénée, mais on n'arrivera à la certitude qu'après des expériences indiquées par chacune d'elles, comme devant servir à les juger.

*Combustion du phosphore*,  $Ph^3O^5 = 71$ . — D'après Laplace et Lavoisier, la chaleur produite pendant la combustion du phosphore est  $5^{cal},885$  par gramme d'oxygène; pour 40 grammes d'oxygène contenu dans 71 grammes d'acide, on a  $235^{cal},4$ .

Chaque molécule est composée de 8 atomes, et sa formation devrait produire  $28T_H$ ; mais si l'on suppose que, dans le phosphore ordinaire, les atomes sont combinés 3 à 3, ce nombre se réduit à 25, et il vient

$$nT_H = 9,42.$$

En rejetant cette hypothèse, on aurait  $nT_H = 8,41$ . Ces nombres sont tous deux trop faibles et semblent indiquer que, dans la combinaison d'un atome d'oxygène avec un atome de phosphore, le facteur  $k$  est moindre que l'unité. En lui donnant pour valeur  $\frac{1}{2}$ , on arrive à l'équation

$$\left(3 + 10 + 15 \times \frac{1}{2}\right) nT_H = 20,5 nT_H = 235,4,$$

d'où l'on conclut

$$nT_H = 11,48.$$

Si le résultat expérimental est rendu certain par de nouvelles expériences, cette explication deviendra très-probable.

*Combustion du carbone*,  $CO^2 = 22$ . — Un gramme de carbone en brûlant donne, d'après MM. Favre et Silbermann,  $8^{cal},08$ ; mais ce nombre doit être augmenté de la chaleur employée à produire la volatilisation,  $1^{cal},07$ . On a donc pour 6 grammes  $54^{cal},90$  ou  $5nT_H$  et

$$nT_H = 10,98.$$

Il en résulte  $T_C^o = 2T_H$  et  $k = 2$ . D'après cela, l'oxyde de carbone  $CO = 14$  doit produire, pendant sa formation,  $2nT_H$  et, pendant sa combinaison avec 8 grammes d'oxygène,  $3nT_H$ .

*Combustion de l'oxyde de carbone*. — D'après MM. Favre et Silbermann, 1 gramme d'oxyde de carbone donne en brûlant  $2,^{cal}4027$  et par conséquent 14 grammes produisent  $33,6378$ . Ce nombre est bien triple de  $nT_H$ , comme cela doit être, et l'on en tire

$$nT_H = 11,2126.$$

*Combustion du gaz oléfiant.* — Un gramme de ce combustible donne, en brûlant,  $11^{\text{cal}},8578$ ; 28 grammes donnent  $11,8578 \times 28 = 332,0184$ . D'ailleurs, d'après ce qui précède,  $C^{\text{t}}$  donne  $20nT_{\text{H}}$  et  $H^{\text{t}}$  donne  $12nT_{\text{H}}$ , en tout  $32nT_{\text{H}}$ . Mais de ce nombre il faut déduire la chaleur employée à produire la décomposition, laquelle a pour expression

$$16nT_{\text{C}}^{\text{u}} + 6nT_{\text{C}} + 6nT_{\text{H}} \quad \text{ou} \quad 16nT_{\text{C}}^{\text{u}} + 12nT_{\text{H}},$$

et le reste doit être égalé au nombre fourni par l'expérience, ce qui donne

$$20nT_{\text{H}} - 16nT_{\text{C}} = 332,0184.$$

La valeur trouvée précédemment pour  $T_{\text{H}}$  montre que l'on a

$$T_{\text{C}}^{\text{u}} = -\frac{1}{2}T_{\text{H}};$$

puis l'on obtient

$$nT_{\text{H}} = 11,8578.$$

Le facteur  $k = -\frac{1}{2}$  présente une valeur négative mais simple.

Le travail  $T_{\text{C}}$  est l'excès d'un travail négatif dont l'existence était prouvée par l'étude des attractions au contact, sur un travail positif qui se produit quand les atomes de carbone et d'hydrogène déjà très-rapprochés s'attirent et se combinent.

*Combustion du gaz des marais*,  $C^{\text{t}}H^{\text{t}} = 16$ . —  $C^{\text{t}}$  donne en brûlant  $10nT_{\text{H}}$  et  $H^{\text{t}}$  donne  $12nT_{\text{H}}$ , en tout  $22nT_{\text{H}}$ . Mais, de ce nombre, il faut déduire la chaleur employée à produire la décomposition :

$$8nT_{\text{C}}^{\text{u}} + nT_{\text{C}} + 6nT_{\text{H}} \quad \text{ou} \quad 3nT_{\text{H}}.$$

Le reste  $19nT_{\text{H}}$  doit être égalé à 16 fois  $13^{\text{cal}},063$ , c'est-à-dire à 16 fois la chaleur que produit, en brûlant, 1 gramme d'hydrogène proto-carboné; cela donne

$$nT_{\text{H}} = 11,0.$$

*Combustion du cyanogène*,  $CA_2 = 16$  — La combustion d'un

gramme produit  $5^{\text{cal}},244$  d'après Dulong ; pour 13 grammes on a  $68^{\text{cal}},172$ . C donne, en brûlant,  $5nT_H$ , c'est-à-dire un nombre inférieur, et cela prouve que la décomposition du cyanogène produit de la chaleur. Quoique les attractions au contact aient déjà mis en évidence un travail négatif, je crois bon d'attendre que les expériences aient été répétées malgré la grande et juste autorité qu'on accorde dans la science à l'illustre physicien qui les a faites.

Parmi les valeurs de  $nT_H$  déjà obtenues, celles qui inspirent le plus de confiance sont les suivantes :

	<i>cal.</i>
Combustion du soufre . . . . .	11,79
Combustion du carbone . . . . .	10,98
Combustion de l'oxyde de carbone . . . . .	11,21
Combustion du gaz oléfiant . . . . .	11,86
Combustion du gaz des marais. . . . .	11,00.

La moyenne est

$$nT_H = 11,37.$$

Elle sera adoptée provisoirement et quelquefois employée dans ce qui va suivre.

*Combustion de l'antimoine*,  $SbO^k = 154$ . — Un litre d'oxygène employé à la combustion de l'antimoine donne, d'après Dulong,  $5^{\text{cal}},4816$  ; pour 32 grammes on trouve  $122^{\text{cal}},7$ . Une partie de cette chaleur doit être attribuée à la solidification de l'oxygène, le nombre peut être réduit à  $113,7 = 10nT_H$ . Cela s'accorde avec la théorie, qui donne bien

$$(1 + 2 + 3 + 4)T_H = 10T_H.$$

*Combustion du zinc*. — Un litre d'oxygène donne  $7^{\text{cal}},7566$  ; 8 grammes donnent  $42,39 = 11,37 \times 3 + 8,28$ . Pour le zinc s'unissant à l'oxygène on a  $k=3$ , et la différence 8,28 doit être attribuée aux chaleurs latentes et aux erreurs d'expériences. On peut aussi supposer  $k=1$  et admettre la formule  $Zn^kO$ .

*Combustion du fer*,  $FeO = 36$ . — Pour 28 grammes de fer

ou 8 grammes d'oxygène, MM. Favre et Silbermann ont obtenu  $37,80 = 34,11 + 3,69$ . Dulong a obtenu  $34,78 = 34,11 + 0,67$ . On a encore  $k = 3$  ou bien la formule  $\text{Fe}^3\text{O}$ .

*Combustion du cuivre, CuO.* — Pour  $31^{\text{gr}},75$  de cuivre ou 8 grammes d'oxygène, MM. Favre et Silbermann ont obtenu  $21^{\text{cal}},72 = 22,74 - 1,02$ . La différence peut être attribuée aux erreurs d'expériences, et l'on a probablement  $k = 2$ .

*Combustion du plomb, PbO = 111.* — MM. Favre et Silbermann ont obtenu  $27^{\text{cal}},41 = 22,74 + 4,76$ , et l'on en conclut  $k = 2$ .

*Combustion de l'argent, AgO = 116.* — MM. Favre et Silbermann ont obtenu  $6^{\text{cal}},113 = \frac{11,37}{2} + 0,428$ . Il en résulte  $k = \frac{1}{2}$ .

*Combustion du carbone dans le protoxyde d'azote, Az'O = 22.* — En faisant brûler du carbone dans du protoxyde d'azote MM. Favre et Silbermann ont trouvé que la décomposition de 22 grammes de cette substance produit  $8^{\text{cal}},72$ . Il faut ajouter à ce nombre la chaleur  $nT_H = 11,37$ , qui a servi à transformer  $\text{Az}'$  en  $\text{Az} + \text{Az}$ , et l'on obtient

$$nT_{\Lambda}^{\circ} = - \frac{8,72 + 11,37}{2} = - 10,045 = - nT_H.$$

Ainsi dans la combinaison de l'azote avec l'oxygène on a  $k = - 1$ .

*Bi-oxyle d'azote, Az'O = 30.* — La décomposition donnerait une quantité de chaleur  $4nT_H$ , dont la moitié serait employée à décomposer  $\text{Az}'$  et  $\text{O}^2$ ; la chaleur apparente serait double de celle que donne le protoxyde pour la même quantité d'azote. Au lieu de supposer la molécule quaternaire, on peut admettre deux molécules binaires  $\text{AzO} + \text{AzO}$ , et la chaleur apparente indiquée par la théorie sera la même.

*Acide azoteux, Az'O = 38.* — Pour la même quantité d'azote

la théorie indique la même chaleur de décomposition que dans le cas précédent, savoir :  $6n T_H$  résultant de la séparation de  $Az^2$  et  $O^3$  dont la décomposition fait perdre  $n T_H + 3n T_H$ .

*Acide hypo-azotique*,  $Az^2 O^4 = 46$ . — La séparation de  $Az^2$  et  $O^4$  donnerait  $8n T_H$ ; mais la décomposition de  $Az^2$  et  $O^4$  absorberait  $n T_H + 6n T_H$ , et il resterait seulement pour chaleur apparente  $n T_H$ .

On peut admettre pour composition  $Az O^2 + Az O^2$ ; alors on arrive à une chaleur apparente de décomposition double  $2n T_H$ , et l'expérience suffira pour apprendre quel est le groupement réel.

*Acide azotique*,  $Az^2 O^5 = 54$ . — La séparation de  $Az^2$  et  $O^5$  donne  $10n T_H$ ; mais la décomposition de  $Az^2$  et  $O^5$  absorbe  $n T_H + 10n T_H$ . En définitive la décomposition de l'acide azotique donnerait du froid et non de la chaleur, comme celle des autres composés oxygénés d'azote. Pour 54 grammes, il faudrait dépenser  $n T_H$  ou  $11^{cal},37$ .

*Ammoniaque*,  $Az^2 H^3 = 17$ . — MM. Favre et Silbermann ont constaté que la chaleur développée par la formation de 17 grammes d'ammoniaque est  $7,576 \times 3 = 22,728$ . Cette quantité est évidemment  $2n T_H$ , et il en résulte, en développant,

$$6n T_H^A + n T_{Az} + 3n T_H = 2n T_H.$$

Comme on a, d'après la première loi,  $T_{Az} = T_H$ , on en conclut

$$T_H^A = -\frac{1}{3} T_H;$$

$k = -\frac{1}{3}$  : c'est une vérification de la seconde loi. Quoiqu'il n'y ait pas d'oxygène dans l'ammoniaque, je rapproche cette substance des corps précédents afin de montrer un exemple de plus des répulsions de l'azote à distances très-petites remplacées par des attractions un peu avant le rapprochement extrême qui a lieu dans les combinaisons.

*Chloruration de l'hydrogène*,  $H^2 Cl^2 = 73$ . — MM. Favre et Silbermann ont trouvé que la formation de 73 grammes d'acide chlorhydrique produit  $47^{cal},566$ , c'est-à-dire  $4n T_H$ . Il faut en conclure que, dans le chlore ordinaire, les atomes sont combinés 3 à 3, et l'on est conduit à l'équation

$$6n T_H^{Cl} + n T_H = 4n T_H;$$

d'où

$$T_H^{Cl} = \frac{1}{2} T_H,$$

nouvel exemple de la loi des multiples.

*Chloruration du zinc*,  $Z^2n Cl^3 = 136,5$ . — D'après MM. Favre et Silbermann la chaleur produite pendant la formation de  $136^{gr},5$  de chlorure de zinc est  $101^{cal},4$ . Il en résulte

$$6n T_{Zn}^{Cl} + n T_{Zn} = 101,4.$$

Le nombre  $101,4$  est trop fort, car il renferme la chaleur latente du chlore; il est donc probable qu'on a

$$T_{Zn}^{Cl} = T_H.$$

*Chloruration du fer*. — On trouve de même

$$6n T_{Fe}^{Cl} + n T_{Fe} = 99,4 \quad \text{avec} \quad T_{Fe}^{Cl} = T_H.$$

*Chloruration du plomb*. — On a pour le plomb

$$6n T_{Pb}^{Cl} + n T_{Pb} = 89,0 \quad \text{avec} \quad T_{Pb}^{Cl} = T_H.$$

*Chloruration de l'argent*,  $Ag Cl^3 = 287$ . — La formation de 287 grammes de chlorure d'argent donne  $69^{cal},6$ . Si, pour l'argent,  $e = 108$ , l'explication est encore la même, mais il faut admettre une grande erreur expérimentale en moins. Si on suppose  $e = 216$ , il en résulte

$$3n T_{Ag}^{Cl} = 69,6 \quad \text{et} \quad T_{Ag}^{Cl} = 2 T_H.$$



Dans cette hypothèse, l'oxydation de l'argent doit être expliquée autrement qu'on ne l'a vu plus haut, on a alors

$$2nT_{Ag}^o + nT_o = 12,226 \quad \text{avec} \quad T_{Ag}^o = 0.$$

*Chloruration du cuivre,  $CuCl^3$ .* — Pour 71 grammes de chlore on a 58<sup>cal</sup>,6, et l'on en conclut

$$6nT_{Cu}^{Cl} + nT_{Cu} = 58,6 \quad \text{avec} \quad T_{Cu}^{Cl} = \frac{1}{2}T_H.$$

*Chloruration du potassium,  $K^2Cl^3$ .* — Pour 71 grammes de chlore on obtient 220<sup>cal</sup>,6; il en résulte

$$6nT_K^{Cl} + nT_K = 202,6 \quad \text{avec} \quad T_K^{Cl} = 3T_H.$$

*Chloruration du sodium,  $Na^2Cl^3$ .* — Pour 71 grammes de chlore on a 189<sup>cal</sup>,8, et l'on en conclut

$$6nT_{Na}^{Cl} + nT_{Na} = 189,8 \quad \text{avec} \quad T_{Na}^{Cl} = 3T_H.$$

Je ne crois pas utile de pousser plus loin cette première étude, qui laisse sans doute beaucoup à désirer. Elle rend plus probable, dans quelques corps simples, l'existence de groupes atomiques, que d'autres faits indiquaient déjà, et il est possible que cela conduise plus tard à rendre compte des modifications allotropiques qu'on observe dans ces éléments, ainsi que des changements qu'elles produisent probablement dans les chaleurs de combinaison.

## CHAPITRE IX

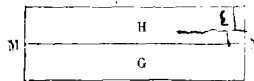
## Actions moléculaires (suite).

## CAPILLARITÉ.

Dans ce chapitre on va lire une théorie des phénomènes capillaires en grande partie nouvelle et qui conduit à des explications plus faciles et plus complètes des faits connus. Cette théorie m'a fait découvrir des lois que des expériences nombreuses ont ensuite confirmées; de plus, jointe à la théorie des attractions au contact, elle m'a permis de donner à la mécanique moléculaire une base encore très-incomplète mais solide. Afin d'exprimer plus commodément les quantités fort petites dont il sera question, je prendrai pour unité le millimètre et le milligramme, à moins que je n'avertisse du contraire; l'unité de travail sera donc le millionième de millidyne.

Considérons en premier lieu un corps quelconque ayant la forme d'un parallépipède rectangle dont la section plane MN (fig. 16) est un carré d'un millimètre de côté et dont l'épaisseur

Fig. 16.



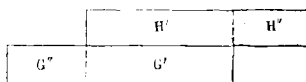
à partir de cette section surpasse la distance  $\epsilon$  au-delà de laquelle l'attraction devient négligeable. Si nous devons opérer perpendiculairement à MN la séparation en deux parties G, H, dont l'une sera supposée fixe, il faut employer une force d'abord égale à l'attraction au contact A mais qui diminue très-

vite, devient  $z$  à la distance  $x$  et 0 à toute distance supérieure à  $z$ . Négligeons ce qu'il y a d'incomplet dans les attractions près des bords et nommons  $F$  le travail dépensé par unité de surface produite ; on aurait la relation  $zF = \int_0^z z dx$ , si les couches contiguës au plan  $MN$  avaient, en devenant surfaces, conservé la même densité. Mais ces couches se sont dilatées ; elles ont facilité la séparation, et le travail *effectif*  $zF$  est moindre que le travail  $\int_0^z z dx$  calculé dans l'hypothèse du maintien de la densité primitive. Ce dernier travail est évidemment proportionnel *pour une même substance* au carré de la densité  $\Delta$ , et nous pouvons le représenter par  $f\Delta^2$  ; si nous désignons en outre par  $zh$  la différence entre le travail calculé et le travail effectif, nous aurons l'équation

$$(230) \quad \frac{1}{2} \int_0^z z dx = f\Delta^2 = F + h.$$

*Séparation par glissement.* — Concevons maintenant que l'on sépare les deux parties  $G, H$  en les faisant glisser l'une sur l'autre. Après qu'elles ont pris les positions relatives indiquées dans la figure 17, les portions  $G', H'$  ne tendent en aucune ma-

Fig. 17.



nière, par leurs attractions, à produire ou à empêcher le glissement. Au contraire, la résultante des attractions de  $H''$  sur  $G'$  est une force bissectrice de l'angle droit, qu'on peut remplacer par une composante normale inefficace et une composante parallèle aux faces de glissement, seule efficace, et que nous appellerons *force de réunion*. L'action de  $H'$  sur  $G''$  donne une seconde force semblable. Le chemin parcouru pendant la sé-

paration par glissement est 1 ; le travail et la double force de réunion possèdent donc la même valeur numérique. D'ailleurs, quand on néglige les frottements et les changements de densité, il ne se produit aucun phénomène de chaleur ou d'électricité dont il faille tenir compte, et il résulte du principe de l'équivalence que le travail  $2f\Delta^2$  dépensé dans la séparation perpendiculaire égale le travail de réunion par voie de glissement :  $2f\Delta^2$  est donc aussi la valeur de ce dernier travail et de la double force de réunion *quand on néglige les frottements et les changements de densité*. Si les corps sont différents,  $\Delta^2$  doit être remplacé par  $\Delta\Delta'$ . Il est évident d'ailleurs qu'on peut, dans les raisonnements qui précèdent, remplacer les angles droits par des angles quelconques et qu'il n'est pas même nécessaire que le côté hors de la face de glissement soit une ligne droite.

Si, maintenant, nous rentrons dans la réalité, la force de réunion *effective* est moindre que la force de réunion *calculée*  $f\Delta^2$ . Sa valeur est  $F$  ou  $f\Delta^2 - h$ . Cela résulte de ce que, le chemin étant 1 dans la réunion par glissement, pour le cas considéré, le travail et la force ont une même expression, et de ce que le travail de réunion par glissement ne peut différer du travail de séparation perpendiculaire. Pour justifier cette dernière affirmation, il suffit de remarquer que, si la différence n'était pas nulle, on obtiendrait un travail disponible indéfiniment croissant au moyen de réunions et de séparations successives opérées les premières par la voie qui donne le plus de travail et les dernières par la voie qui en donne le moins; on arriverait donc au mouvement perpétuel, ce qui a été démontré impossible avec de la chaleur à une seule température.

*Théorème fondamental.* — On peut toujours faire passer un corps d'une forme quelconque à une autre en séparant perpendiculairement ou par voie de glissement des parties qu'on réunit ensuite entre elles et avec les portions du corps qui doivent être renflées. Or, d'après ce qui précède, les séparations ne

peuvent être opérées qu'à l'aide d'un travail total ayant pour valeur le produit de la force de réunion  $F$  par la somme des surfaces créées et, d'autre part, les réunions produisent un travail total dont on obtient la mesure en multipliant aussi par  $F$  la somme des surfaces réunies ; nous en concluons que

*Le travail dépensé ou produit quand la surface d'un corps croît ou décroît de  $\Delta s$  égale le produit de la force de réunion par la variation de surface.*

(231)

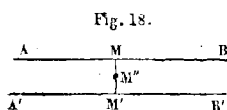
$F\Delta s$ .

Ce théorème, que je nomme fondamental parce qu'il conduit à des conséquences nombreuses et très-utiles, est applicable quelle que soit la manière dont la surface varie ; car, ainsi qu'on l'a vu à propos de la comparaison des séparations perpendiculaires et par glissement, les circonstances n'influent point sur le résultat final. Il est bon de remarquer aussi que la démonstration légèrement modifiée est encore valable quand on néglige les variations de densité près de la surface. Il m'arrivera souvent de me placer dans ce dernier cas, et le lecteur s'en apercevra sans peine, alors même que j'oublierais de l'en prévenir.

*Force de contraction des couches superficielles.* — L'ordre de faits dont il s'agit doit être étudié expérimentalement dans les liquides, parce que, dans les solides, un frottement considérable s'oppose à la production des phénomènes. Si nous concevons, par exemple, une lame plane d'une épaisseur beaucoup plus grande que  $\epsilon$  et formée au moyen d'un liquide glycérique que M. Plateau a fréquemment employé dans ses travaux remarquables, une diminution ou un accroissement d'étendue  $\Delta s$  entraîne la production ou la perte, à cause de l'existence de deux surfaces, d'un travail  $2F\Delta s$  proportionnel à cette diminution ou à cet accroissement et indépendant de la vitesse avec laquelle le changement s'opère. Comme il ne peut exister de travail sans force, il faut en conclure l'existence d'une force tendant à diminuer la surface, et la valeur du travail montre qu'elle a

pour expression  $2F$  par unité de longueur dans une section normale. Puisque cette force demeure la même pour toute vitesse, elle subsiste pendant le repos ; mais il importe d'en rechercher la cause.

*Cause de la force de contraction ; lieu où elle réside.* — Soit AB (fig. 18), un élément de la surface d'un liquide et A'B' un



plan parallèle mené dans le corps à la distance  $\epsilon$ . Si l'on considère un point situé dans ce plan ou plus éloigné de la surface, et qu'on envisage une tranche infiniment mince et de surface infiniment petite  $\omega$  qui y passe, les résultantes des attractions des molécules situées de part et d'autre sur des droites qui traversent  $\omega$  compriment la tranche avec une force qui n'est autre chose que l'attraction au contact définie précédemment. La direction de  $\omega$  n'influe point sur sa valeur. Si l'on considère, au contraire, un point situé entre les deux plans et qu'on y envisage deux tranches infiniment minces ayant leurs bases  $\omega$  dirigées l'une parallèlement et l'autre normalement à la surface, les résultantes perpendiculaires à ces deux éléments ne seront plus égales ; la petite masse  $M''$ , par exemple, sera soumise à des pressions produites par des attractions au contact incomplètes et qui seront évidemment plus grandes parallèlement au plan tangent que dans le sens normal. A défaut d'obstacle, la différence produit son effet ; en tout cas, elle constitue une *tension*. Cette force, dont j'ai d'abord démontré l'existence et la valeur totale, varie depuis le point  $M'$  où elle est nulle jusqu'au point  $M$  où elle redevient nulle. Elle réside donc exclusivement dans la couche superficielle d'épaisseur  $\epsilon$  et sa valeur totale est  $F$  pour un rectangle normal de dimensions  $1$  et  $\epsilon$  ; cela résulte comme il a été dit déjà de l'expression du travail fournie par le théorème fondamental. Ainsi, avec les unités

choisies, un même nombre  $F$  servira de mesure pour trois quantités différentes :

1<sup>o</sup> Le travail effectif de séparation par unité de surface mise à nu,

2<sup>o</sup> La force de réunion par unité de longueur de l'arête,

3<sup>o</sup> La force contractile des couches superficielles des liquides.

Avant de faire connaître les vérifications expérimentales du théorème fondamental et de l'existence de la tension dans la couche superficielle des liquides, je vais démontrer quelques autres théorèmes qui en dépendent.

1<sup>o</sup> *Tout corps tend à prendre une surface minimum.* — Tout changement de forme avec diminution de surface entraîne la production d'un travail *indépendant de la vitesse* ; ce changement tend donc à se produire, et il se produit de fait, si les frottements sont négligeables, comme dans les liquides presque dépourvus de viscosité. La surface devient alors minimum et le corps prend la forme sphérique s'il est libre. Dans le cas de liaisons avec des solides, la surface prend la forme correspondante à la valeur minimum parmi toutes celles qui sont compatibles avec les liaisons <sup>1</sup>.

2<sup>o</sup> La valeur  $Au$  que nous avons trouvée pour expression du travail de désagrégation totale d'un kilogramme d'un corps a été obtenue en supposant négligeable l'influence de la surface ; elle l'est en effet ; mais, au point de vue théorique, il est plus satisfaisant d'avoir une valeur rigoureuse. Soit  $Au - \omega$  l'expression exacte ;  $\omega$  dépend de l'étendue  $s$  de la surface. Augmentons cette étendue de  $ds$ , ce qui exige (231) une dépense de travail  $Fds$  ; le travail de désagrégation totale ultérieure sera moindre de cette quantité, qui égale, par conséquent, la variation de  $Au - \omega$  ; on a donc

1. J'engage beaucoup les jeunes gens qui ont besoin de modèles, à lire les Mémoires remarquables de M. Plateau et de M. Lamarie sur ce sujet, dont M. Van der Mensbrugge s'est aussi occupé avec succès à diverses reprises.

$$d\omega = F ds,$$

et on en conclut, en remarquant que  $\omega$  deviendrait nul s'il était possible d'annuler  $s$  :

$$\omega = F s.$$

Ainsi, *le travail de désagrégation totale de 1 kilogramme d'un corps quelconque égale le produit de l'attraction au contact par le volume, moins le produit de la force de réunion par la surface, ou, ce qui équivaut, le travail de désagrégation totale de l'unité de volume égale l'attraction au contact moins le produit de la force de réunion par la surface.*

3<sup>o</sup> Dans la séparation perpendiculaire à laquelle est relative l'équation (230),  $z$  varie de  $A$  à 0, et, sa valeur moyenne étant désignée par  $\theta A$ , on peut affirmer que le coefficient  $\theta$  est compris entre 0 et 1; on a donc

$$F = \frac{1}{2} \theta A \varepsilon$$

ou

$$(232) \quad \frac{F}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \theta A,$$

c'est-à-dire que

*Dans la couche superficielle d'épaisseur  $\varepsilon$ , la force de contraction moyenne  $\frac{F}{\varepsilon}$  ou, ce qui équivaut, l'excès de l'attraction au contact moyenne parallèlement au plan tangent sur l'attraction au contact moyenne dans le sens normal égale la moitié de l'attraction au contact moyenne de 0 à  $\varepsilon$  dans la séparation perpendiculaire.*

4<sup>o</sup> Parallèlement au plan tangent, l'attraction au contact varie de 0 à  $A$ ; elle a une valeur moyenne que nous pouvons désigner par  $\theta' A$ ,  $\theta'$  étant un second coefficient compris encore entre 0 et 1. Elle surpasse, comme on vient de le voir, de  $\frac{\theta A}{2}$  l'attraction au contact moyenne dans le sens normal; la valeur de cette dernière quantité est donc

$$(233) \quad \theta' A = \frac{\theta A}{2}.$$



Dans ce qui suit, nous bornant à une première approximation, nous négligerons (230) la quantité  $h$ , c'est-à-dire que nous négligerons les variations de densité près de la surface. On obtient alors facilement une autre expression de (233) en remarquant que, si on nomme  $x$  la distance  $MM'$  (*fig.* 18) et si on conserve les mêmes notations que dans l'équation (230), l'attraction au contact normale en  $M'$  égale la valeur complète  $A$ , qu'on obtient en ajoutant au-dessus de  $AB$  une tranche plus épaisse que  $\varepsilon$ , moins l'attraction  $z$  due à cette tranche. Ainsi, en  $M'$  et pour une épaisseur  $dx$  infiniment petite comptée sur la normale, la valeur de l'attraction au contact est  $A - z$ ; on aura donc la valeur moyenne en faisant la somme des produits  $(A - z)dx$  et la divisant par  $MM' = \varepsilon$ , ce qui donne

$$\frac{1}{\varepsilon} \int^{\varepsilon} (A - z) dx \text{ ou } A - \frac{2F}{\varepsilon}$$

ou

$$(234) \quad A - \theta A.$$

Les deux dernières formes sont obtenues au moyen des relations (230) et (232). De la comparaison avec (232) on tire

$$(235) \quad \theta = 1 - \frac{\theta}{2}$$

et, après substitution dans  $\theta A$  et dans (233), on en conclut les théorèmes qui suivent :

*Parallèlement au plan tangent, l'attraction au contact moyenne de 0 à  $\varepsilon$  égale l'excès de l'attraction au contact sur la force de contraction moyenne.*

*Dans le sens normal l'attraction au contact moyenne de 0 à  $\varepsilon$  égale l'excès de l'attraction au contact sur l'attraction moyenne de 0 à  $\varepsilon$  dans la séparation perpendiculaire.*

Pour compléter l'étude *théorique* de cette importante question, je vais donner, des théorèmes qui précèdent, pour le cas où on néglige les variations de densité près de la surface, des démonstrations basées sur le calcul direct des attractions; elles sont dues à mon jeune et savant collègue, M. Massieu, que j'ai

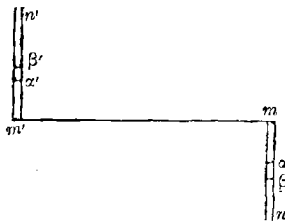
prié d'entreprendre ce travail; il s'y est prêté avec une complaisance dont je suis heureux de pouvoir le remercier ici.

« Lorsqu'on approche des limites d'un corps, l'attraction au contact n'est plus tout à fait aussi grande qu'en *pleine matière*; elle n'est d'ailleurs plus normale à la section plane faite dans le corps et à laquelle on la rapporte; mais quand il s'agit de la pression produite sur une tranche infiniment mince, c'est la composante normale qu'il faut considérer. Cherchons à tenir compte, du moins par une première approximation, de cette circonstance.

» Pour y arriver, conservant les notations de la page 152, nous allons d'abord établir un théorème qui est très-utile dans toutes les considérations de forces moléculaires.

» Considérons deux cylindres infiniment déliés  $mn$  et  $m'n'$  parallèles entre eux et normaux à un même plan  $mm'$ ; on suppose ces deux cylindres terminés sur ce plan en  $m$  et  $m'$  et s'étendant indéfiniment à partir de là, mais en sens contraires. Cherchons (*fig. 19*) la composante  $X$ , parallèle aux deux cylindres, de l'attraction exercée par l'un d'eux,  $mn$  par exemple, sur le second  $m'n'$ . Prenons pour cela un élément infiniment

Fig. 19.



petit  $\alpha\beta$  du premier cylindre et un élément  $\alpha'\beta'$  du second; posons

$$\begin{aligned} mx &= x, & m'a' &= x'; \\ \alpha\beta &= dx, & \alpha'\beta' &= dx'. \end{aligned}$$

$\rho$  désignant la distance de ces deux éléments et  $\Delta$  le poids spé-

cifique commun aux deux cylindres, on aura, pour l'attraction de  $\alpha\beta$  sur  $\alpha'\beta'$ , en appelant  $d\sigma$  et  $d\sigma'$  les aires des sections droites des deux cylindres,

$$\Delta^2 d\sigma d\sigma' dx dx' f(\rho);$$

la composante de cette force parallèle aux deux cylindres sera donc

$$\Delta^2 d\sigma d\sigma' dx dx' f(\rho) \frac{x+x'}{\rho}.$$

La somme  $dX$  de ces composantes, pour tous les éléments du premier cylindre et pour le même élément  $\alpha'\beta'$  du second, sera

$$dX = \Delta^2 d\sigma d\sigma' dx' \int_0^\infty f(\rho) \frac{x+x'}{\rho} dx.$$

Mais en désignant par  $p$  la distance  $mm'$  des bases des deux cylindres, on a

$$\rho^2 = p^2 + (x+x')^2,$$

d'où

$$\rho d\rho = (x+x') dx,$$

$$dX = \Delta^2 d\sigma d\sigma' dx' \int_r^\infty f(\rho) d\rho,$$

$r$  représentant ici la distance de l'élément  $\alpha'\beta'$  à la base  $m$  du premier cylindre; on peut prendre d'ailleurs  $\epsilon$  pour limite supérieure de l'intégrale précédente, puisque  $f(\rho)$  est nul pour des valeurs de  $\rho$  plus grandes que  $\epsilon$ .

» Posant donc

$$F(r) = \int_r^\epsilon f(\rho) d\rho,$$

il vient

$$dX = \Delta^2 d\sigma d\sigma' F(r) dx'.$$

Si nous intégrons maintenant cette expression par rapport à  $x'$  depuis  $x' = 0$  jusqu'à  $x' = \infty$ , nous aurons la composante  $X$  de l'attraction du cylindre entier  $mn$  sur le cylindre entier  $m'n'$ . Or, on a

$$r^2 = p^2 + x'^2,$$

d'où

$$dx' = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - p^2}}.$$

On aura donc, puisque  $x' = 0$  correspond à  $r = p$  et que  $F(r)$

s'annule dès que  $r$  surpasse  $\varepsilon$ ,

$$X = \Delta^2 d\sigma d\sigma' \int_p^\varepsilon \frac{rF(r) dr}{p \sqrt{r^2 - p^2}}$$

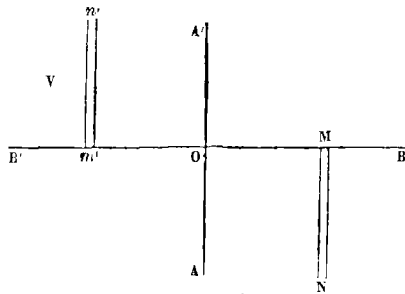
ou, en posant

$$\psi(p) = \int_p^\varepsilon \frac{rF(r) dr}{p \sqrt{r^2 - p^2}},$$

$$X = \Delta^2 d\sigma d\sigma' \psi(p).$$

» Ceci posé, considérons (fig. 20) deux corps indéfinis U et V

Fig. 20.



terminés aux faces de deux angles dièdres AOB et A'OB' tangents par leur arête O et formés par deux plans rectangulaires AA' et BB'; l'attraction du corps U sur le corps V pourra se décomposer en deux composantes égales et respectivement perpendiculaires aux plans BB' et AA'; nommons F leur valeur rapportée à l'unité de longueur de l'arête commune O des deux dièdres.

» Pour trouver F, nous allons considérer d'abord dans le corps V un petit cylindre  $m'n'$  infiniment délié et de base  $d\sigma$  et chercher la composante normale au plan BB' de l'attraction du corps U sur ce petit cylindre. Pour cela décomposons le corps U en tranches infiniment minces telles que MN parallèles au plan AO; nommons  $q$  la distance  $m'M$  de la base du petit cylindre à la tranche MN et  $dq$  l'épaisseur de cette tranche. La tranche MN peut elle-même être découpée, par des plans nor-

maux à l'arête O, en parallélépipèdes infiniment déliés et perpendiculaires au plan BB'; nommons  $y$  la distance de la base de l'un de ces parallélépipèdes au point M, qu'on suppose être le pied de la perpendiculaire abaissée de  $m'$  sur la tranche MN et soit  $p$  la distance de cette base au point  $m'$ . La composante perpendiculaire au plan BB' de l'attraction du parallélépipède considéré sur le cylindre  $m'n'$  sera égale à

$$\Delta^2 d\sigma' dy dq \psi(p).$$

Pour étendre cette expression à toute la tranche MN, nous remarquerons que l'on a

$$p^2 = q^2 + y^2,$$

$$dy = \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - q^2}},$$

ce qui donne, pour l'expression considérée,

$$\Delta^2 d\sigma' dq \frac{p \psi(p) dp}{\sqrt{p^2 - q^2}}.$$

et il ne restera plus qu'à intégrer depuis  $p=q$  jusqu'à  $p=\infty$  et à doubler le résultat, ce qui donne

$$2\Delta^2 d\sigma' dq \int_q^\infty \frac{p \psi(p) dp}{\sqrt{p^2 - q^2}}.$$

Enfin, pour avoir la composante de l'attraction exercée par le corps U tout entier sur le cylindre  $m'n'$ , il suffira d'intégrer l'expression précédente depuis  $q=t$  jusqu'à  $q=\infty$ , ou simplement  $q=\varepsilon$ ,  $t$  représentant la distance de la base  $m'$  du cylindre à l'arête O, ce qui donne

$$2\Delta^2 d\sigma' \int_t^\infty dq \int_q^\infty \frac{p \psi(p) dp}{\sqrt{p^2 - q^2}}.$$

Maintenant découpons le second corps V en couches infiniment minces parallèles au plan AA';  $t$  sera la distance de l'une de ces tranches à l'arête O et  $dt$  son épaisseur. Considérons la portion de cette tranche comprise entre deux plans perpendiculaires à l'arête O et interceptant sur elle une longueur égale

à l'unité; la composante  $dF$  de l'attraction du corps U sur cette portion de la tranche considérée sera égale à

$$dF = 2\Delta^2 dt \int_t^\varepsilon dq \int_q^\varepsilon \frac{p \psi(p) dp}{\sqrt{p^2 - q^2}},$$

et, si nous voulons étendre cette expression à toute la portion du corps V comprise entre les deux plans normaux à l'arête O que nous avons définis tout à l'heure, il faudra l'intégrer depuis  $t=0$  jusqu'à  $t=\varepsilon$  ou simplement jusqu'à  $t=\varepsilon$ , ce qui donnera

$$F = 2\Delta^2 \int_0^\varepsilon dt \int_t^\varepsilon dq \int_q^\varepsilon \frac{p \psi(p) dp}{\sqrt{p^2 - q^2}}.$$

F représentera ainsi la composante normale au plan BB' de l'attraction du corps U sur le corps V rapportée à l'unité de longueur de leur arête terminale commune O.

» Pour simplifier la valeur de F, considérons d'abord l'intégrale

$$\int_q^\varepsilon \frac{p \psi(p) dp}{\sqrt{p^2 - q^2}},$$

qui est égale, en remplaçant  $\psi(p)$  par sa valeur, à

$$\int_q^\varepsilon \frac{d dp}{\sqrt{p^2 - q^2}} \int_p^\varepsilon \frac{F(r) r dr}{\sqrt{r^2 - p^2}} = \int_q^\infty \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - q^2}} \int_p^\infty \frac{F(r) r dr}{\sqrt{r^2 - p^2}}.$$

Désignons cette expression par  $\Omega$  et posons

$$r^2 = p^2 + x^2.$$

$p$  ne variant pas dans la seconde intégrale, on a

$$r dr = x dx,$$

d'où

$$\frac{r dr}{\sqrt{r^2 - p^2}} = dx.$$

Il vient alors

$$\Omega = \int_q^\infty \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - q^2}} \int_0^\infty F(\sqrt{p^2 + x^2}) dx.$$

Si nous posons en outre

$$p^2 = q^2 + y^2,$$

d'où, puisque  $q$  est une constante,

$$\frac{p \, dp}{\sqrt{p^2 - q^2}} = dy,$$

on aura

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty F(\sqrt{q^2 + y^2 + x^2}) \, dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty F(\sqrt{q^2 + y^2 + x^2}) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Si nous considérons l'espace superficiel indéfini compris entre les côtés  $Ox$  et  $Oy$  d'un angle droit, l'intégrale double qui donne la valeur de  $\Omega$  équivaudra évidemment à l'intégrale de l'expression  $d\sigma F(\sqrt{q^2 + r^2})$  étendue à tout cet espace et où  $d\sigma$  représente un élément de l'espace superficiel  $yOx$ , et  $r$  sa distance au point  $O$ .

» On pourra alors prendre pour  $d\sigma$  l'aire comprise entre deux cercles infiniment voisins décrits du point  $O$  comme centre et faire par conséquent

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} r \, dr,$$

ce qui donnera

$$\Omega = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r F(\sqrt{q^2 + r^2}) \, dr;$$

et, si l'on pose

$$q^2 + r^2 = r'^2,$$

on aura, puisque  $r \, dr = r' \, dr'$ ,

$$\Omega = \frac{\pi}{2} \int_q^\infty r' F(r') \, dr',$$

ou, en supprimant les accents désormais inutiles et remarquant que  $r F(r)$  n'est autre chose que la fonction  $\varphi(r)$  précédemment définie,

$$\Omega = \frac{\pi}{2} \int_q^\infty \varphi(r) \, dr = \frac{\pi}{2} \int_q^\infty \varphi(r) \, dr.$$

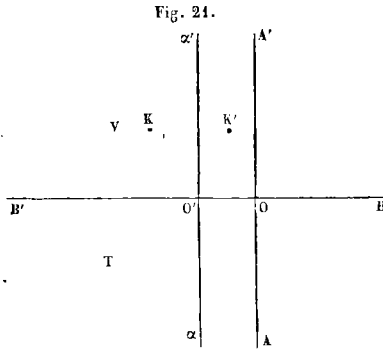
Portant cette valeur de  $\Omega$  dans celle de  $F$ , il vient

$$F = \pi \Delta^2 \int_0^\varepsilon dt \int_t^\varepsilon dq \int_q^\varepsilon \varphi(r) dr.$$

En intégrant par parties successivement par rapport à  $t$  et à  $q$ , on obtient facilement

$$(I) \quad F = \frac{\pi \Delta^2}{2} \int_0^\varepsilon r^2 \varphi(r) dr = f \Delta^2.$$

» Imaginons maintenant un corps terminé par un plan  $AA'$  (fig. 21) et divisons ce corps en deux parties  $V$  et  $T$  par un plan  $BO'$



perpendiculaire à la face limite  $AA'$ . Nous avons trouvé pour l'attraction au contact dans cette section  $B'O$  par unité de surface et à une distance des limites du corps plus grande que  $\varepsilon$ , c'est-à-dire en pleine matière,

$$(II) \quad A = 2\pi\Delta \int_0^\varepsilon r \varphi(r) dr = a \Delta^2;$$

or, près de la limite  $AA'$  du corps, l'attraction au contact n'a plus réellement une valeur aussi grande.

» Si nous menons dans l'intérieur du corps un plan  $\alpha O \alpha'$  parallèle au plan limite  $AA'$  et à une distance de ce plan égale à  $\varepsilon$ , la partie du corps comprise entre les plans  $\alpha \alpha'$  et  $AA'$  sera la zone limite de ce corps. Un point  $K$  pris dans la partie  $V$



du corps et en dehors de cette zone sera attiré de tous les côtés également par la partie T ; la résultante de ces attractions sera en outre perpendiculaire au plan de la section B'O ; mais un point K' de la zone limite ne sera plus attiré également dans tous les sens, parce que la partie attirante T n'est pas assez étendue du côté du point O.

» L'attraction au contact dans la zone limite serait encore égale à A par unité de surface si la partie attirante T, au lieu d'être terminée par le plan OA, était prolongée indéfiniment à droite de ce plan ; or, nous connaissons l'attraction de la partie AOB, ainsi ajoutée, sur la portion V du corps donné et celle de A'OB sur T ; nous savons qu'elle consiste, outre les composantes normales à AA', en deux forces égales et contraires tendant à presser l'une contre l'autre les parties A'OO'α' et AOO'α de la zone limite. Ces forces ont pour valeur F par unité de longueur de l'arête d'intersection O des plans AA' et BB'.

» Ainsi, lorsque la partie AA'B est ajoutée au corps, l'attraction au contact dans la zone limite, pour une longueur de l'arête O égale à l'unité, et par conséquent pour le rectangle  $\epsilon \times 1$ , est égale à Aε ; il faut retrancher la pression produite par les deux forces dont il s'agit et l'attraction au contact pour le rectangle  $\epsilon \times 1$  devient Aε — F ; elle a donc pour valeur moyenne

$$A - \frac{F}{\epsilon}.$$

Ceci s'applique sans erreur appréciable à un élément d'une surface courbe coupé par un plan normal à cette surface.

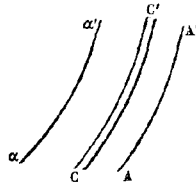
» Soit maintenant AA' (fig. 22) la surface limite d'un corps, αα' une surface menée dans l'intérieur du corps et dont la distance à la première est en chaque point égale à ε ; l'intervalle de ces deux surfaces sera la zone limite. Prenons dans l'intérieur de cette zone une couche CC' parallèle à nos deux

surfaces et située partout à la distance  $h$  de  $AA'$ , l'attraction au contact sur cette surface sera, d'après ce qu'on a vu,

$$2 \pi \Delta^2 \int_0^h d\lambda \int_\lambda^\varepsilon \varphi(r) dr.$$

Si on multiplie cette expression par  $dh$ , qu'on intègre de  $h=0$

Fig. 22.



à  $h = \varepsilon$  et qu'on divise le résultat par  $\varepsilon$ , on aura la moyenne  $A'$  de l'attraction au contact normale à la surface du corps dans l'épaisseur de la zone limite ; donc

$$A' = \frac{2 \pi \Delta^2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon dh \int_0^h d\lambda \int_\lambda^\varepsilon \varphi(r) dr,$$

ou bien

$$A' = \frac{2 \pi \Delta^2}{\varepsilon} \left[ \varepsilon \int_0^\varepsilon d\lambda \int_\lambda^\varepsilon \varphi(r) dr - \int_0^\varepsilon dh \int_h^\varepsilon d\lambda \int_\lambda^\varepsilon \varphi(r) dr \right],$$

et, en ayant égard aux relations précédemment trouvées,

$$A' = A - \frac{\pi \Delta^2}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon r^2 \varphi(r) dr,$$

ou

$$A' = A - \frac{2 F}{\varepsilon}.$$

Ainsi donc, dans la zone limite d'un corps, l'attraction au contact moyenne, par unité de surface, est égale, tangentiellement au corps, à

$$A - \frac{F}{\varepsilon}$$

et, normalement à la surface du corps, à

$$A - \frac{2 F}{\varepsilon};$$

l'excès de la première sur la seconde

$$\frac{F}{\varepsilon}$$

représente la force qui produit la contraction tangentielle.

» Imaginons que l'on coupe un corps solide en deux parties par un plan et qu'on sépare ces deux parties en éloignant l'une d'elles suivant la normale au plan de séparation; lorsque l'écartement des deux parties sera égal à  $x$ , leur attraction mutuelle aura pour valeur

$$A' = 2\pi\Delta^2S \int_x^\varepsilon d\lambda \int_\lambda^\varepsilon \varphi(r) dr,$$

S'étant l'aire de la section faite dans le corps. Le travail nécessaire pour la séparation complète sera

$$T' = \int_0^\varepsilon A' dx = 2\pi\Delta^2S \int_0^\varepsilon dx \int_x^\varepsilon d\lambda \int_\lambda^\varepsilon \varphi(r) dr.$$

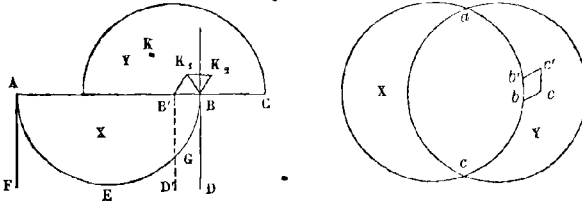
Or, en intégrant par parties et successivement par rapport à  $x$  et  $\lambda$ , on trouve facilement

$$T' = S\pi\Delta^2 \int_0^\varepsilon r^2 \varphi(r) dr = 2FS.$$

» Si, au lieu d'éloigner les deux parties du corps l'une de l'autre par *séparation normale*, comme vous venons de le supposer, nous les éloignons par *séparation tangentielle*, en faisant glisser une de ces parties sur l'autre, le travail nécessaire pour produire la séparation de cette nouvelle manière sera encore nécessairement égal à  $T'$ , puisque les attractions mutuelles ne dépendent que des grandeurs des distances des molécules qui s'attirent; il est intéressant toutefois d'établir ce fait par un calcul direct. Soit donc un corps coupé en deux parties X et Y (fig. 23) et supposons, pour bien préciser nos raisonnements, qu'on laisse la partie X fixe et qu'on enlève l'autre partie Y en la faisant glisser sur la première.

» Supposons encore que le plan de séparation ABC soit horizontal et figurons le corps en élévation et en plan quand la

Fig. 23.



séparation est en partie effectuée. Les forces qui s'opposent à la séparation sont les composantes horizontales des attractions exercées par X sur les différents éléments de Y; or, ces attractions sont normales au plan de séparation ABC, sauf pour les éléments de Y qui se trouvent à une distance moindre que  $\epsilon$  de la limite du corps X et par conséquent de la portion *abc* du périmètre de ce corps.

» Remarquons d'abord que, suivant cette portion *abc* de son périmètre, nous pouvons supposer, sans rien changer au résultat, que le corps X est terminé par un cylindre vertical dont BD et AF figurent des arêtes; en effet, nous ajoutons ainsi ou nous retranchons à ce corps une certaine quantité de matière; mais prenons un point matériel, G par exemple, situé près du périmètre *abc*, son attraction sur le corps Y est normale à AC; donc, en rectifiant en quelque sorte le corps inférieur X suivant le cylindre AFCD, on ne modifie en rien la force qui s'oppose à la séparation.

» Ceci posé et le corps X étant supposé terminé latéralement par le cylindre indiqué, si nous prenons dans le corps supérieur Y un point matériel K dont la distance à la portion *abc* du périmètre du corps inférieur X soit plus grande que  $\epsilon$ , l'attraction exercée par X sur ce point sera nulle ou normale à ABC; elle ne s'opposera donc pas à la séparation, mais il n'en

sera plus de même pour des points matériels tels que  $K_1, K_2$ , dont la distance à la même limite  $abc$  sera plus petite que  $\varepsilon$ .

« Soit  $DB$  la trace verticale du plan tangent en un point  $B$  ou  $b$  au cylindre vertical circonscrit au corps  $X$  et supposons que les points  $K_1, K_2$  soient placés symétriquement par rapport à ce plan tangent ; joignons  $K_1$  et  $K_2$  à  $B$  et menons  $K_1B'$  parallèle à  $K_2B$  ; il est clair que le point  $K_1$  étant placé à égale distance du plan tangent  $BD$  et d'un plan  $B'D'$  qui lui serait parallèle, la portion du corps  $X$  située entre ces deux plans exercera sur le point  $K_1$  une attraction normale à  $AB$  ; donc la force qui agit sur le point  $K_1$  pour s'opposer à la séparation ne provient que de la partie  $AB'D'$  du corps  $X$ , et elle doit être égale à la force qui provient de l'attraction de ce corps entier sur le point  $K_2$ . Donc, enfin, nous pouvons, pour calculer la force qui s'oppose à la séparation, ne pas tenir compte des points du corps  $Y$  situés dans l'intérieur du cylindre  $BDAF$ , et ne considérer par conséquent que la portion du corps  $Y$  extérieure à ce cylindre, sauf à doubler le résultat obtenu. Or la composante horizontale de l'attraction du corps  $X$  sur cette partie extérieure du corps  $Y$  est à chaque point normale au périmètre  $abc$  et égale à  $F$  par unité de longueur de ce périmètre.

« Considérons un élément  $bb'$  de ce périmètre ; lorsque le corps  $Y$  se déplace très-peu en glissant, les points de ce corps qui étaient primitivement en  $b$  et  $b'$  viennent en  $c$  et  $c'$  ; la force  $F \times bb'$  qui s'oppose à la séparation sur l'élément  $bb'$  du périmètre a produit un travail résistant précisément égal au produit de  $F$  par l'aire du parallélogramme infinitésimal  $bb'cc'$  ; or, la somme de tous les parallélogrammes semblables répartis tout le long du périmètre  $abc$  représente précisément la surface mise à nu à chaque instant sur chacun des deux corps  $X$  et  $Y$  ; donc, à chaque instant, le travail des forces résistantes considérées est égal au produit de cette surface par  $F$ , et, quand

la séparation est complète, le travail effectué par ces forces est égal à  $FS$ ,  $S$  étant la surface totale de la section  $AB$  du corps ; enfin, comme il faut doubler ce résultat, d'après ce que nous avons dit, on aura pour le travail total de la séparation

$$2 FS$$

ou

$$S \pi \Delta^2 \int_0^{\epsilon} r \varphi(r) dr,$$

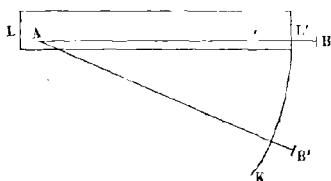
comme on l'avait trouvé. Ajoutons qu'au début de la séparation la force qui s'oppose à cette séparation n'est pas égale à ce qu'elle devient plus tard quand la saillie  $Bc$  du corps  $Y$  sur le corps  $X$  surpasse  $\epsilon$  ; mais la différence qui en résulte est négligeable dans le travail total. »

#### VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

L'existence de la force de contraction des couches superficielles des liquides, rendue certaine par les preuves théoriques qui précèdent, est facile à démontrer aussi par l'observation ; je vais décrire d'abord deux des petits appareils que nous avons imaginés dans ce but et la manière d'en faire usage.

$LL'$  (fig. 24) est une lame métallique horizontale faisant corps

Fig. 24.

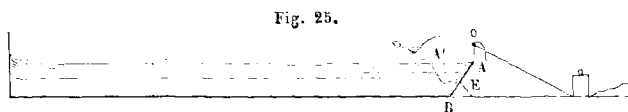


avec une autre lame  $LK$  qui peut être de même largeur. Celle-ci est verticale, et sa tranche supérieure se présente dans le même plan horizontal que  $LL'$  et affecte la forme d'un arc de cercle ayant son centre en  $A$ . Un petit fil métallique  $AB$  est

posé sur LL' et pénètre par son extrémité recourbée à angle droit dans un trou A, ce qui le force à décrire un secteur quand on le fait mouvoir sans qu'il cesse d'être en contact avec LK. En B il porte un disque de papier destiné à faire mieux apercevoir de loin ses mouvements. Pour faire usage de cet appareil, on mouille la lame et le fil avec de l'eau de savon ou mieux avec le liquide de M. Plateau ; puis on fait passer le fil de la position AB à la position AB', ce qui détermine la formation d'une lame liquide. Si alors on lâche le disque, on voit la lame glycérique se contracter rapidement et ramener le fil à son point de départ. L'expérience réussit encore très-bien même quand on prend l'appareil par son support et qu'on place le plan LLM dans un vertical de manière à donner à la force contractile le poids du fil à vaincre. En modifiant la forme de l'appareil, on obtient facilement aussi des lames glycériques rectangulaires dont trois côtés sont fixes tandis que le quatrième est mû par la force de contraction aussitôt qu'on l'abandonne.

Tous les liquides ne se réduisent point en lames avec la même facilité ; voici pour l'eau, que je prends comme exemple, un moyen de montrer la force contractile.

Un vase très-peu profond dont la coupe verticale est représentée en ABCD (*fig. 25*) a trois de ses parois latérales fixes. Le



quatrième AB consiste en une lame métallique mince, bien droite, légèrement oblique en dehors et simplement posée en B sur le fond du vase. Un petit appendice E empêche cette lame de tomber ; de plus, on a fixé sur sa face extérieure un petit fil rigide qui monte et se termine par un pavillon destiné

à rendre visibles de loin les mouvements de la lame. Un léger fil de lin est attaché à ce porte-pavillon par un bout et à un objet fixe par l'autre afin d'empêcher le mouvement de la lame à l'intérieur. L'objet fixe peut être un poids posé sur le fil flexible après qu'on l'a tendu en l'éloignant du vase. Quand on veut faire l'expérience, après avoir terminé ces préparatifs, on verse de l'eau dans le vase de manière à amener la surface au niveau du bord supérieur de la lame qui doit être mouillée partout; puis on brûle le fil, et aussitôt la force de contraction de la couche superficielle du liquide fait tourner la lame autour de sa base et la jette en dedans malgré la poussée hydrostatique qui tend à produire le mouvement en sens contraire.

La théorie de cette petite expérience, dans laquelle la force contractile se manifeste si bien, n'offre aucune difficulté. Si on nomme  $\alpha$  l'angle que la lame fait avec l'horizon et  $l$  la dimension de cette lame perpendiculaire à sa base, le moment de la force qui tend à produire la rotation intérieure est  $Fl \sin \alpha$  ou  $f\Delta^2 l \sin \alpha$  par unité de longueur; la résultante des pressions a pour moment de signe contraire  $\frac{1}{6} l^3 \Delta \sin \alpha$ . L'équilibre, si l'on suppose négligeable le moment du poids de la lame, exige que ces quantités soient égales, ce qui donne, en simplifiant,

$$(236) \quad l = \sqrt{6f\Delta}.$$

La valeur de  $l$  convenable pour l'équilibre est donc :

- 1° *Indépendante de l'obliquité;*
- 2° *Proportionnelle à la racine carrée de la force de réunion rapportée à l'unité de densité;*
- 3° *Proportionnelle à la racine carrée de la densité.*

La poussée l'emportera, et la lame tendra à être jetée en dehors si l'on a

$$(237) \quad l > \sqrt{6f\Delta}.$$

Le mouvement que l'on veut produire pour prouver l'exi-



sistence de la force de contraction exige que l'inégalité

$$(238) \quad l < \sqrt{6f\Delta}$$

soit vérifiée. Il faut même éviter le voisinage de l'égalité, puisque les résistances passives, quoique très-faibles, ne sont cependant pas nulles. Le liquide le plus avantageux est l'eau, pour laquelle on trouvera plus loin  $f = 7,5$ ; on a

$$(239) \quad l < \sqrt{45} = 6,7.$$

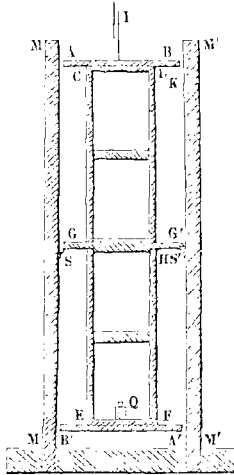
Nous avons employé  $l=3$ , et l'on peut avec ce nombre verser de l'eau jusqu'à ce que la surface soit nettement convexe; cette surcharge n'empêche pas le mouvement d'être rapide; 4 millimètres ou 4<sup>m</sup>,5 sont encore très-admissibles. Avec le mercure, on obtient des forces assez considérables; mais la valeur 4,7 de  $l$  qui donne l'équilibre est moindre que pour l'eau.

*Dynamètre.*—Pour soumettre à des vérifications le théorème fondamental, quoique son exactitude ne soit nullement douteuse, nous avons fait usage d'un instrument que nous avons fait construire pour nos recherches relatives à la théorie mécanique du magnétisme. A l'époque où nous les avons commencées, nous avons senti vivement combien serait utile dans les sciences d'observation un bon instrument destiné à la mesure immédiate du travail sans qu'il soit besoin de connaître ses facteurs et d'opérer une intégration. Il est fort difficile en effet d'obtenir d'une manière suffisamment exacte les lois des actions magnétiques et de calculer avec assez d'approximation le travail gagné ou perdu pendant l'éloignement ou le rapprochement, pendant les passes d'aimantation ou de désaimantation, etc. C'est au moyen de l'appareil qui nous a servi alors à la mesure directe de ces genres de travaux, et qui pourra rendre de grands services dans diverses circonstances, que nous avons obtenu les résultats qui vont suivre.

Il consiste en un rectangle CDEF dont les dimensions égalent

vingt fois celles qu'on lui voit dans la *fig.* 26, et qui présente en son milieu un axe en bois garni de couteaux G, G' autour des-

Fig. 26.



quels il peut tourner. Les supports S, S' de ces couteaux sont portés par les montants MM, M/M' assemblés avec un pied à vis calantes. Le rectangle porte en A'B' un barreau d'acier aimanté qui n'agit dans les expériences actuelles que par sa masse et en AB un second barreau semblable muni d'une aiguille dont la pointe I parcourt pendant les oscillations un arc de rayon R divisé en millimètres. Des pièces mobiles permettent de rendre d'abord ce balancier indifférent à toutes les positions. Cela fait, on ajoute en Q un poids P dont le centre de gravité décrit un arc de rayon  $r$  ; l'axe GG' doit être très-mobile et bien horizontal. Lorsqu'on écarte le balancier de sa position d'équilibre d'un côté ou de l'autre, on peut l'arrêter en introduisant la petite tige K dans la boucle que termine un fil enroulé sur une bobine portée par le bâtis de la machine, et il suffit de faire tourner à frottement la bobine dans un sens ou dans l'autre pour amener la pointe I de l'aiguille sur une division choisie

à volonté. Lorsqu'on brûle le fil, la pointe revient d'abord au zéro en parcourant un nombre de millimètres  $a'$  connu d'avance; puis elle s'écarte de l'autre côté d'un nombre de millimètres moindre  $a$ , si on a obligé le balancier à produire un travail pendant cette première oscillation. Dans la lecture de  $a'$  et de  $a$ , il est bon de prendre des précautions pour éviter les erreurs de parallaxe.

Il est évident que le travail dépensé pendant la descente du poids a pour valeur  $Pr \left( 1 - \cos \frac{a'}{R} \right)$ ; pendant l'ascension, un travail  $Pr \left( 1 - \cos \frac{a}{R} \right)$  est produit au contraire. Il en résulte que, abstraction faite des frottements qui nécessitent une correction, le travail T qu'on a fait accomplir extérieurement au dynamètre (\*), a pour valeur

$$(240) \quad T = Pr \left( \cos \frac{a}{R} - \cos \frac{a'}{R} \right)$$

ou encore

$$(241) \quad T = 2Pr \sin \frac{a' + a}{2R} \cdot \sin \frac{a' - a}{2R}.$$

Lorsqu'on a besoin d'une très-grande précision, on emploie cette formule pour les calculs à effectuer en ne perdant pas de vue que les nombres de degrés contenus dans les arcs  $\frac{a' + a}{2R}$  et  $\frac{a' - a}{2R}$  ont pour expressions  $\frac{180(a' + a)}{2\pi R}$  et  $\frac{180(a' - a)}{2\pi R}$ . Mais quand les angles sont petits et qu'une exactitude extrême n'est pas indispensable, on remplace le second sinus par l'arc ou même les deux. Cela donne une formule simplifiée d'un usage beaucoup plus commode

$$(242) \quad T = \frac{Pr}{2R^2} (a' + a)(a' - a).$$

---

(\*) Nous le nommons ainsi, parce qu'il sert à mesurer les dynes.

Avec notre dynamètre en bois elle a toujours suffi.

Quant aux frottements, ils sont très-faibles, et la correction qui les concerne est facile à obtenir ; nous l'avons étudiée en même temps que celle qui correspond à la résistance de l'air après avoir dressé un tableau des écarts observés à diverses reprises pendant 100 oscillations du balancier faites librement.

*Première série d'expériences.* — Afin d'apprécier le degré de confiance que mérite notre premier appareil construit assez grossièrement, nous avons jugé convenable de l'employer d'abord à la mesure d'un travail connu. On a fixé en H, perpendiculairement au plan du balancier, une traverse qui portait un arc situé dans un plan vertical, ayant son centre sur l'axe et pour rayon 362,5. Un fil fin enroulé sur cet arc dans une partie de sa longueur pendait verticalement et soutenait un poids  $q$  qui montait ou descendait de quantités faciles à calculer au moyen de  $a'$  et  $a$  ; elles ont pour valeur

$$(a' + a) \frac{362,5}{R},$$

et le travail a pour expression

$$(243) \quad T_1 = q(a' + a) \frac{362,5}{R}.$$

Si les résistances passives étaient nulles ainsi que les erreurs d'observation, on aurait  $T_1 = T$  ; en réalité  $T_1$  doit surpasser  $T$  d'une quantité qui n'est autre chose que le travail produit par les résistances passives. On en obtient une valeur suffisamment approchée en observant la diminution  $2\delta$  éprouvée par  $a'$  après une oscillation double et prenant la moitié

$$(244) \quad \frac{Pr(a' + a)\delta}{2R^2}$$

du travail correspondant. Cela conduit à l'équation

$$(245) \quad a' - a \pm \delta = \frac{362,5 \times 2R}{Pr} q.$$

On avait  $R = 609$ ,  $r = 482,8$ ,  $P = 30100$  milligrammes ; ainsi, avec  $q = 2000$ , la quantité  $a' - a \pm \delta$  devait se montrer constante et égale à  $60,76$ . Avec  $q = 3000$ , on devait trouver  $91,14$  et avec  $q = 4000$ , la valeur constante  $121,52$ . Après avoir noté le point de départ adopté pour une expérience et qu'on avait soin de prendre tantôt d'un côté du zéro, tantôt de l'autre, on brûlait le fil et on observait les écarts successifs pendant dix ou douze oscillations ; chacun d'eux pouvait être comparé avec le précédent et le suivant et donner ainsi deux vérifications. Les expériences étaient plusieurs fois répétées, et les résultats concordaient généralement ; lorsqu'ils différaient d'une unité, on prenait la moyenne :

$$q = 2,000;$$

$$a = 66, 124, 64, 121\frac{1}{2}, 61\frac{1}{2}, 119\frac{1}{2}, 59, 117, 57, 115.$$

$a'$	$a$	$\delta$	$a' - a \pm \delta$
124	66	1	59
124	64	$1\frac{1}{4}$	$58\frac{3}{4}$
$121\frac{1}{2}$	64	$1\frac{1}{4}$	$58\frac{3}{4}$
$121\frac{1}{2}$	$61\frac{1}{2}$	1	59
$119\frac{1}{2}$	$61\frac{1}{2}$	1	59
$119\frac{1}{2}$	59	$1\frac{1}{4}$	$59\frac{1}{4}$
117	59	$1\frac{1}{4}$	$59\frac{1}{4}$
117	57	1	59
115	57	1	59

La moyenne des valeurs de  $a' - a \pm \delta$  est 59, qui ne diffère de  $60,76$  que de  $\frac{1}{35}$  ; d'ailleurs une partie de cette différence

peut être attribuée à la perte de travail due aux oscillations du poids  $q$ ; elles étaient fort peu amples, mais on n'a pas réussi à les éviter d'une manière absolue. Avec

$$q = 3000,$$

nous avons obtenu

$a = 160, 70\frac{1}{2}, 157\frac{1}{2}, 68, 155, 65\frac{1}{2}, 152, 62\frac{1}{2}, 150, 60, 148, 58, 145.$

$a'$	$a$	$\delta$	$a' - a \pm \delta$
160	$70\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$88\frac{1}{4}$
$157\frac{1}{2}$	$70\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$88\frac{1}{4}$
$157\frac{1}{2}$	68	$1\frac{1}{4}$	$88\frac{1}{4}$
155	68	$1\frac{1}{4}$	$88\frac{1}{4}$
155	$65\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	88
152	$65\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	88
152	$62\frac{1}{2}$	1	$88\frac{1}{2}$
150	$62\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$88\frac{3}{4}$
150	60	1	89
148	60	1	89
148	58	$1\frac{1}{2}$	$88\frac{1}{2}$
145	58	$1\frac{1}{2}$	$88\frac{1}{2}$

La moyenne des valeurs de  $a' - a \pm \delta$  est à peu près  $88\frac{1}{2}$  qui diffère de 91,14 de 2,64 ou  $\frac{1}{35}$ ; l'erreur relative est la même que dans le cas précédent. Avec

$$q = 4000,$$

nous avons obtenu

$a = 169, 50, 166, 48, 164, 45, 162, 42, 159, 39, 156, 37, 154.$

$a'$	$a$	$\delta$	$a' - a \pm \delta$
169	50	$1\frac{1}{2}$	$117\frac{1}{2}$
166	50	1	117
166	48	1	117
164	48	$1\frac{1}{2}$	$117\frac{1}{2}$
164	45	1	118
162	45	$1\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
162	42	$1\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
159	42	$1\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
159	39	$1\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$
156	39	1	118
156	37	1	118
154	37	1	118

La moyenne est à peu près 118, sa différence avec 121,52 est 3,52 ou  $\frac{1}{35}$  environ, comme avec  $q = 2000$  et 3000.

La conclusion à tirer de cette première série d'expériences est que notre instrument nous permet, malgré ses défauts, d'obtenir d'une manière directe à moins de  $\frac{1}{35}$  près la mesure de travaux très-petits variant ici de 205 000 à 521 000 lorsqu'on emploie pour unité le milligramme élevé à 1 millimètre. Ces nombres exprimés en millidynes deviennent 0,205 et 0,521. Un appareil construit avec le même soin que les balances de précision permettra sans nul doute d'atteindre au moins les dix-millionièmes de dyne ou kilogrammètre.

*Seconde série d'expériences.*—Pour vérifier le théorème fondamental en ce qui concerne les lames glycériques planes, nous avons employé l'appareil représenté *fig. 26*. La lame étant formée et l'extrémité B du fil métallique AB étant liée avec le balancier du dynamètre au moyen d'un fil très-fin et très-flexible, on mettait l'appareil en marche comme précédemment. Pendant l'expérience la surface glycérique croît et décroît suivant le sens dans lequel s'opère l'oscillation; deux observateurs lisent, l'un les numéros des divisions entre lesquelles se trouvent les millimètres parcourus sur I/K par le fil-rayon, et l'autre les nombres  $a$  et  $a'$  de millimètres que l'aiguille du balancier parcourt à droite et à gauche du zéro du dynamètre. On observait au moins deux oscillations complètes; dans les mêmes circonstances les résultats concordent assez souvent dans leurs parties entières; lorsqu'on obtenait des différences, elles ne dépassaient jamais l'unité, et on prenait la moyenne.

*Expériences du 16 décembre 1866.*

NUMÉROS des expériences.	I	II	III	IV	V	VI
1	326	$179\frac{1}{2}$	315	113	$81\frac{1}{2}$	100
2	300	$154\frac{1}{2}$	291	113	$81\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{2}$
3	300	$198\frac{1}{2}$	291	83	52	$72\frac{1}{2}$
4	285	212	278	63	33	54
5	270	228	264	43	14	35
6	260	236	255	30	2	23
7	310	$117\frac{1}{2}$	$298\frac{1}{2}$	143	109	$128\frac{1}{2}$
8	300	131	289	128	95	114



Ici, on a toujours observé deux oscillations seulement; quand on brûlait le fil, AB (*fig.* 24) se trouvait sur une division de L/K marquée dans la colonne I et la pointe de l'aiguille sur la division indiquée dans la colonne IV. Les colonnes II et III font connaître les positions de AB à la fin de la première et de la dernière oscillation; les colonnes V et VI font connaître les positions correspondantes de l'aiguille du dynamètre. Dans la première expérience la surface S engendrée pendant la première oscillation a pour valeur, en tenant compte des deux faces de la lame :

$$S = (326 - 179\frac{1}{2}) 248,5 = 36406 ;$$

248,5 est le rayon du secteur glycérique. Pendant le retour ou la deuxième oscillation, on a de même

$$S' = (315 - 179\frac{1}{2}) 248,5 = 33672.$$

Pendant la première oscillation le dynamètre perd un travail

$$T = \frac{Pr}{2R^2} (a' + a) (a' - a) = \frac{Pr}{2R^2} \times 194,5 \times 31,5 = 120030$$

et pendant la seconde il gagne

$$T' = \frac{Pr}{2R^2} \times 181,5 \times 18,5 = 65784.$$

Les valeurs de P, r, R sont les mêmes que dans la série précédente et l'on a  $\log \frac{Pr}{2R^2} = 1,29207$ .

Pour obtenir le travail perdu ou gagné par unité de surface, par millimètre carré, il faut évidemment former les quotients  $\frac{T}{S}$  et  $\frac{T'}{S'}$  qui sont ici 3,297 et 1,954. Voici le tableau des résultats calculés de la sorte

NUMÉROS des expér.	log S	log S'	log T	log T'	$\frac{T}{S}$	$\frac{T'}{S'}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{T}{S} + \frac{T'}{S'} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{T}{S} - \frac{T'}{S'} \right)$
4	4,56117	4,52727	5,07930	4,81812	3,297	1,954	2,626	0,677
2	4,55819	4,53046	5,07930	4,81812	3,320	1,939	2,629	0,690
3	4,40180	4,36147	4,91376	4,69899	3,251	2,175	2,713	0,538
4	4,25865	4,21487	4,75146	4,55381	3,111	2,183	2,647	0,464
5	4,01858	3,95163	4,51034	4,30449	3,103	2,254	2,678	0,425
6	3,77554	3,67408	4,24438	4,01223	2,943	2,178	2,560	0,382
7	4,67976	4,65301	5,22495	4,95776	3,509	2,017	2,763	0,746
8	4,62322	4,59399	5,15888	4,89097	3,433	1,981	2,707	0,726

Pendant que le dynamètre agrandit la lame, il surmonte en même temps les résistances passives; le travail  $\frac{T}{S}$  qu'il donne pour chaque unité de surface produite est donc trop fort; pendant le mouvement contraire, le travail capillaire se transmet diminué du travail dû aux résistances passives. D'après cela, il est naturel de prendre la moyenne arithmétique  $\frac{1}{2} \left( \frac{T}{S} + \frac{T'}{S'} \right)$  comme représentant la véritable valeur cherchée et la demi-différence  $\frac{1}{2} \left( \frac{T}{S} - \frac{T'}{S'} \right)$  comme le travail dû aux résistances passives rapporté à l'unité de surface engendrée. Les valeurs de la demi-somme se trouvent dans la huitième colonne du tableau; leur moyenne 2,67 est moindre que la valeur 2,85 trouvée en prenant la force de réunion par le procédé des pesées qui sera décrit plus loin, et la différence relative est  $\frac{1}{16}$ . Une partie de cette différence doit être attribuée aux frémissements, quelquefois appréciables à l'œil, que le fil AB éprouve pendant le mouvement. Lorsque la force contractile mène le dynamètre, le mouvement est moins régulier que dans le cas inverse.

Le 23 décembre 1866 de nouvelles expériences ont été effectuées, et cette fois on observait six, sept ou huit oscillations

avant d'arrêter l'appareil ; on opérait plusieurs fois dans les mêmes conditions et l'on prenait comme précédemment les moyennes quand il y avait lieu. Voici les nombres correspondants lus par les deux observateurs ; ceux sur lesquels s'arrêtait l'aiguille du dynamètre sont contenus dans la première ligne :

*Première expérience.*

103, 121, 87, 107, 74, 94, 62,  
120, 287, 132, 277, 142, 267, 151.

*Deuxième expérience.*

73, 91,5, 60, 80, 49, 69, 38, 59, 28,  
140, 262, 149, 253,5, 158, 245, 166, 238, 172.

*Troisième expérience.*

43, 63, 32, 53, 23, 44, 15, 36,  
160, 238, 168, 231,5, 175, 224,5, 181, 218.

*Quatrième expérience.*

97, 64, 83, 50,5, 70, 38,5, 59, 28, 48,  
300, 180,5, 288,5, 189,5, 279,5, 198, 270,5, 207,5, 263.

*Cinquième expérience.*

67, 36, 56, 26, 47, 17, 38,  
270, 193, 262, 200,5, 254,5, 207,5, 248.

La température était 3°,5. Chaque groupe de deux oscillations consécutives peut être l'objet de calculs analogues à ceux qui précèdent ; les résultats obtenus de la sorte sont contenus dans le tableau qui suit :

Nos des expé- riences.	Nos des groupes.	Log S	Log S'	Log T	Log T'	$\frac{T}{S}$	$\frac{T'}{S'}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{T}{S} + \frac{T'}{S'} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{T}{S} - \frac{T'}{S'} \right)$
1	1	4,61805	4,58566	5,14161	4,89759	3,339	2,051	2,695	0,644
1	2	4,58566	4,55670	5,14161	4,88090	3,597	2,110	2,853	0,743
1	3	4,55670	4,52666	5,06826	4,88090	3,248	2,261	2,754	0,493
1	4	4,52670	4,49224	5,06826	4,81841	3,480	2,119	2,780	0,680
1	5	4,49224	4,45679	4,99034	4,81841	3,149	2,284	2,716	0,433
2	6	4,48169	4,44841	4,97079	4,77541	3,084	2,123	2,603	0,480
2	7	4,44841	4,41445	4,97079	4,73923	3,330	2,112	2,721	0,609
2	8	4,41445	4,37533	4,89402	4,73923	3,017	2,312	2,665	0,352
2	9	4,37533	4,33485	4,89402	4,66498	3,301	2,139	2,720	0,581
2	10	4,33485	4,29296	4,81281	4,66498	3,006	2,355	2,680	0,326
2	11	4,29296	4,25266	4,81281	4,60106	3,310	2,231	2,770	0,540
2	12	4,25266	4,21487	4,72295	4,60106	2,953	2,433	2,693	0,260
3	13	4,28742	4,24043	4,76115	4,61841	2,977	2,388	2,682	0,295
3	14	4,24043	4,19810	4,76115	4,54371	3,317	2,216	2,766	0,550
3	15	4,19810	4,14738	4,65000	4,54371	2,831	2,491	2,661	0,170
3	16	4,14738	4,08994	4,65000	4,44036	3,181	2,241	2,711	0,470
3	17	4,08994	4,03382	4,52532	4,44036	2,725	2,550	2,637	0,088
3	18	4,03382	3,96353	4,52532	4,32186	3,101	2,282	2,691	0,409
4	19	4,47270	4,42875	5,01741	4,73814	3,505	2,039	2,772	0,733
4	20	4,42875	4,39097	4,92943	4,73814	3,167	2,224	2,696	0,471
4	21	4,39097	4,34957	4,92943	4,66309	3,455	2,058	2,756	0,699
4	22	4,34957	4,30649	4,82581	4,66309	2,994	2,273	2,634	0,361
4	23	4,30649	4,25567	4,82581	4,59282	3,306	2,173	2,740	0,567
4	24	4,25567	4,19467	4,72295	4,59282	2,933	2,501	2,717	0,216
4	25	4,19467	4,13962	4,72295	4,47391	3,375	2,159	2,767	0,608
5	26	4,28182	4,23418	4,79627	4,55689	3,269	2,102	2,686	0,583
5	27	4,23418	4,18421	4,68300	4,55689	2,811	2,359	2,585	0,226
5	28	4,18421	4,12772	4,68300	4,47761	3,154	2,238	2,696	0,458
5	29	4,12772	4,06743	4,57537	4,47761	2,804	2,571	2,688	0,117
5	30	4,06743	4,00279	4,57537	4,35465	3,221	2,248	2,735	0,480

La moyenne des valeurs de  $\frac{1}{2} \left( \frac{T}{S} + \frac{T'}{S'} \right)$  est 2,71; elle est

inférieure de  $\frac{1}{20}$  à la force de réunion 2,85 indiquée plus haut.

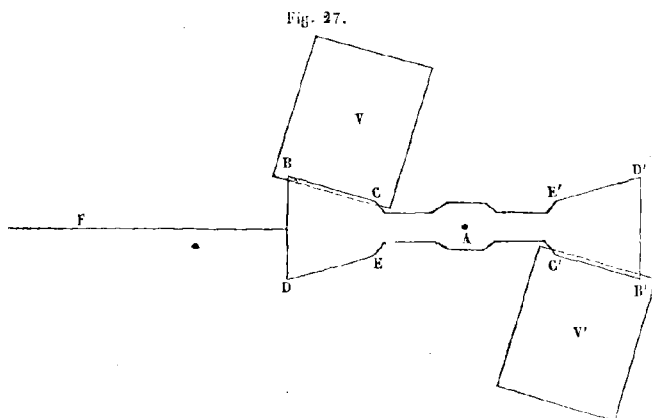
Cela tient, comme il a été dit, aux frémissements du fil AB; cette circonstance, qui amène la transformation d'une certaine quantité de travail en chaleur, se présente surtout lorsque la force capillaire conduit le dynamètre, ainsi que le prouvent

les valeurs du travail des résistances passives qui sont plus grandes de deux en deux dans les groupes appartenant à une même expérience. Le dernier jour, nous avons obtenu un peu plus d'approximation,  $\frac{1}{20}$  au lieu de  $\frac{1}{16}$ , à cause de l'habitude de lire vite.

En ce qui concerne les variations de surface des lames glycériques, on peut considérer le théorème fondamental comme vérifié expérimentalement; nous ne nous attendions même pas à obtenir de suite une telle approximation avec un premier appareil destiné d'abord uniquement à servir de modèle pour en faire construire un autre après quelques expériences préalables.

*Troisième série d'expériences.* — La disposition adoptée dans la seconde série ne peut servir que pour les liquides donnant des lames. Dans le cas général il faut la changer. En voici une qui convient pour un liquide quelconque.

Une lame de bois horizontale, représentée au cinquième dans la *fig. 27*, est assujettie à tourner autour d'un axe A exactement



vertical. En F, elle porte un fil d'acier roide dont le bout éloigné de l'axe décrit une circonférence de 318,5 de rayon;

c'est cette extrémité qu'on relie, au moyen d'un long fil fin et flexible, avec le dynamètre, comme dans la série précédente. En BC, DE se trouvent appliquées contre le bois, dont l'épaisseur est 10 millimètres, deux lames métalliques fixées par des vis de pression après qu'on a mis leurs bords inférieurs dans un même plan horizontal, ce dont on s'assure au moyen d'une surface mercurielle en équilibre. Sur ces bords se trouve tendu un morceau de toile de coton qui présente une surface plane sans aspérités notables. Un vase rectangulaire V peu profond, et qui monte et descend à volonté sans que son ouverture cesse d'être horizontale, est placé au-dessous et réglé de manière à ce que l'étoffe tendue touche la surface du liquide qui le remplit. Pendant les oscillations du balancier, le contact a lieu sur une étendue qui varie à chaque instant, ce qui entraîne un gain ou une dépense de travail que le dynamètre fait connaître. Les expériences et les calculs se font comme dans les cas précédents, mais il importe de ne pas laisser une distance appréciable entre la surface du liquide dans le vase et la surface de l'étoffe, parce qu'alors un travail dû au poids du liquide soulevé, positif pour une oscillation et négatif pour l'oscillation suivante, se joindrait au travail capillaire et en altérerait la valeur.

De l'autre côté de l'axe se trouvent une autre lame d'étoffe B'C'D'E' et un autre vase V'; la surface mise à nu pendant une oscillation est donc quadruple d'un trapèze ayant pour hauteur 56 millimètres. Sa base moyenne est distante de l'axe de 86 millimètres; elle se déduit du chemin parcouru par l'extrémité de la tige F en multipliant par la fraction  $\frac{86}{318,5}$ , et ce chemin lui-même se déduit de  $a' + a$  en multipliant par la fraction  $\frac{485,5}{609}$ , dont le numérateur est la distance du point d'attache du dynamètre à la ligne des couteaux. On a donc pour

travail calculé

$$(246) \quad T_1 = 4 \times 56 (a' + a) \frac{86 \times 485,5}{318,5 \times 609} F,$$

et l'équation (228) devient ici, en se rappelant que 7,5 est la valeur de F pour l'eau qui a été le premier liquide essayé,

$$(247) \quad a' - a \pm \delta = \frac{2R^2}{Pr} \cdot \frac{4 \times 56 \times 86 \times 485,5}{318,5 \times 609} F = 18,46.$$

Trois expériences ont été faites et reproduites chacune plusieurs fois; dans le cas d'un défaut de concordance toujours léger, on prenait la moyenne. Voici les résultats obtenus en prenant pour écart initial 71:

$$a = 71, 83, 63, 76, 56, 69, 49, 63, 43, 56, 37.$$

$a'$	$a$	$\delta$	$a' - a \pm \delta$
83	71	4	16
83	63	3,5	16,5
76	63	3,5	16,5
76	56	3,5	16,5
69	56	3,5	16,5
69	49	3	17
63	49	3	17
63	43	3,5	16,5
56	43	3,5	16,5
56	37	3,5	15,5

La moyenne des valeurs de  $a' - a \pm \delta$  est 16,45, et la constance de ce nombre indiquée par la théorie se manifeste dans la limite des erreurs d'expériences.

Ayant été pris ensuite 82 pour écart initial, on a observé douze oscillations après avoir brûlé le fil, et on a obtenu les écarts successifs qui suivent:

$$a = 82, 94, 73, 86, 65, 77, 57, 69, 49, 62, 41, 53, 33.$$

$a'$	$a$	$\delta$	$a' - a \pm \delta$
94	82	4,5	16,5
94	73	4	17
86	73	4	17
86	65	4,5	16,5
77	65	4	16
77	57	4	16
69	57	4	16
69	49	3,5	16,5
62	49	4	17
62	41	4,5	16,5
53	41	4	16
53	33	4	16

Avec 92 pour écart initial, on a obtenu :

$$a = 92, 72, 85, 64, 76, 56, 68, 47, 60, 39, 51, 31.$$

$a'$	$a$	$\delta$	$a' - a \pm \delta$
92	72	3,5	16,5
85	72	4	17
85	64	4,5	16,5
76	64	4	16
76	56	4	16
68	56	4,5	16,5
68	47	4	17
60	47	4	17
60	39	4,5	16,5
51	39	4	16
51	31	4	16

Le second et le troisième tableau donnent 16,42 et 16,46 pour moyennes des valeurs de  $a' - a \pm \delta$ . La moyenne définitive 16,44 diffère de la valeur calculée 18,46 de 2,02, ou un peu moins de  $\frac{1}{9}$ . Eu égard aux difficultés de ce genre d'expériences et aux imperfections de nos appareils, ce résultat est satisfaisant, et le théorème fondamental de la capillarité doit être



considéré comme vérifié expérimentalement d'une manière directe.

L'alcool amylique, le seul liquide que nous ayons, après l'eau, soumis à un examen analogue, s'est montré difficilement maniable. Par des causes qui seront étudiées plus loin, ce liquide sort du vase et se répand sur les supports avec assez de promptitude pour qu'il n'y ait lieu à compter sur des écarts successifs suffisamment approchés que pendant les deux ou trois premières oscillations. Même avec cette restriction, les valeurs de  $a' - a \pm \delta$  fournies par le dynamètre ont été moins voisines de la valeur calculée; l'erreur s'est élevée à  $\frac{1}{6}$  et quelquefois à  $\frac{1}{5}$ ; elle a toujours été en moins, comme on devait le prévoir d'après la nature de la cause.

#### MESURE DES FORCES DE RÉUNION.

Les forces de réunion produisent des effets très-nombreux qui peuvent, pour la plupart, servir à déterminer leur valeur; mais l'approximation qu'ils fournissent n'est pas à beaucoup près toujours la même. L'emploi des pesées constitue le procédé le meilleur, et nous en donnerons d'abord la description\*.

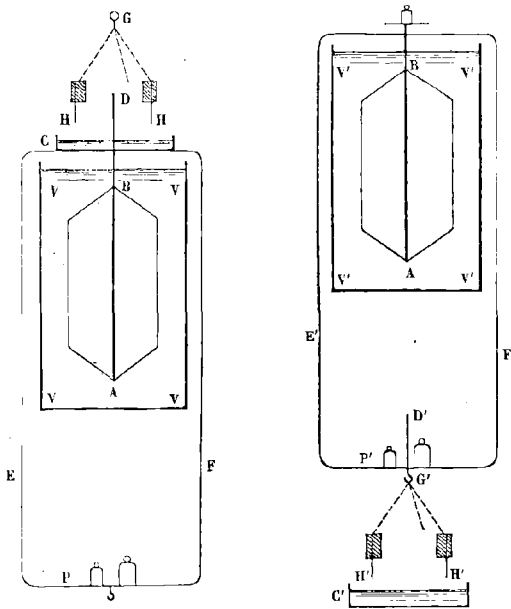
Un vase VVVV (*fig.* 28) contient de l'eau et un flotteur en laiton AB solidement soudé en A et B à une tige d'acier fine et roide ABD, qui fait corps avec une cuvette cylindrique C, et aussi avec un fil de laiton CEPF. En P est un plateau à crochet pour mettre des poids et suspendre au besoin des objets quelconques. La partie D de la tige traverse une plaque fixe qui la guide; elle présente en un point de sa longueur un repère qui

---

(\*) Nous avons employé des aréomètres pour toutes nos recherches; mais il nous a semblé qu'une bonne balance appropriée aux mêmes usages serait préférable.

doit coïncider avec la pointe d'une aiguille quand on a produit l'affleurement. Des butées limitent dans les deux sens la course de cet aréomètre. Plus haut, un treuil permet de faire monter et descendre, sans secousse et de quantités faciles à

Fig. 28.



apprécier exactement, une lame  $HH'$ , annulaire ou non, encastée dans une pièce lourde que portent trois fils se réunissant en un seul  $G$  : des vis permettent de régler les longueurs de chacun de ces trois fils de manière à amener le bord inférieur de la lame en contact avec une surface mercurielle, ce qui assure son horizontalité. Dans le cas où le liquide mouille, voici la manière de mesurer une force de réunion avec cet appareil, qui, bien employé, donne une grande précision.

On verse d'abord le liquide à examiner, l'eau par exemple, dans la cuvette  $C$ , et l'on produit l'affleurement au moyen d'une

charge suffisante placée en P très-bas, ce qui augmente beaucoup la stabilité de l'équilibre; puis on fixe le flotteur en exerçant sur sa tige une légère pression.

Ensuite on abaisse lentement le porte-lame, sans le faire osciller, jusqu'à ce que le bord inférieur de la lame touche le liquide de la cuvette, et, *aussitôt* que le contact a lieu, on cesse de mouvoir le treuil. On rend au flotteur sa liberté, il monte, et l'on ajoute, pour le ramener au point d'affleurement, un poids  $q$  qui, mis à part, sert de mesure à la force de réunion. Nous étudierons plus loin les conditions pour qu'un liquide mouille un solide; ici nous supposons qu'elles sont remplies et que la couche adhérente a une épaisseur plus grande que  $\epsilon$ , et cependant d'un poids négligeable. La gaine liquide dont l'anneau métallique est revêtu agit alors seule, et la nature du métal employé est indifférente, car les actions moléculaires réciproques des particules du liquide sont seules en jeu. A cette condition, la valeur de  $q$  observée au moyen de l'aréomètre, ou mieux encore d'une balance appropriée à cet usage, donne  $F$  avec exactitude. Cherchons la formule nécessaire pour effectuer le calcul, mais en adoptant la disposition représentée par la seconde partie de la figure où les mêmes lettres accentuées désignent les mêmes choses, et où la cuvette est fixe et le porte-lame soutenu par l'aréomètre; cette disposition a été bien plus souvent employée parce qu'elle est plus commode. Après avoir produit l'affleurement et fixé le flotteur, on verse peu à peu le liquide dans la cuvette, et l'on cesse aussitôt que sa surface atteint le bord de la lame. Le flotteur étant rendu libre et l'affleurement rétabli, concevons un nouvel enfoncement infiniment petit, produit au moyen de forces infiniment petites, et exprimons que la somme des travaux est nulle d'après le principe de l'équivalence. Soient :

$p$  le périmètre de la lame cylindrique en comptant les deux faces;

$e$  son épaisseur ;

$h$  la profondeur à laquelle le bord inférieur de cette lame est enfoncé au-dessous de la surface primitive du liquide ;

$P$  le périmètre intérieur de la cuvette mouillée par le liquide ;

$k$  le rapport de la section de la lame à la section  $s$  du vase ;

$v$  le volume élevé au-dessus du plan général de la surface autour de la lame ;

Enfin  $\Delta$  la densité du liquide :

1° On aura évidemment pour travail de la force  $q$  le produit

$$- q dh.$$

2° Un volume de liquide  $p e dh$ , dont la place est prise par la lame, se trouve soulevé jusqu'à la surface actuelle située à une hauteur  $h'$  différente de  $h$  ; car l'ascension du volume  $v$  a fait baisser la surface générale de  $\frac{v}{s}$ , et la descente de la lame l'a fait monter au contraire de  $h k$ , de sorte qu'on a

$$(248) \quad h' = h(1 + k) - \frac{v}{s}.$$

Le travail dont il s'agit a pour expression, d'après cette remarque,

$$- D p e h' dh.$$

3° Le travail de réunion du liquide a pour valeur, d'après le théorème fondamental, le produit de  $F$  par la surface recouverte tant au bord du vase que sur les deux surfaces de la lame. Cette surface serait  $p dh$  si le niveau du liquide ne s'exhausait point de  $k dh$  ; à cause de cette circonstance, on a pour travail de réunion

$$\left[ P k + p (1 + k) \right] dh . F.$$

Il n'y a pas d'autre travail produit. La somme des résultats obtenus est nulle, et l'on a finalement

$$(249) \quad q + D p e h' = \left[ p + (P + p) k \right] F,$$

d'où, en remplaçant  $h'$  par sa valeur et  $pe$  par  $ks$

$$(250) \quad F = \frac{q + Dshk(1+k) - Dkv}{p + (P+p)k}.$$

Dans les expériences on avait  $h=0$ , et la formule usuelle se réduit à

$$(251) \quad F = \frac{q - Dkv}{p + (P+p)k};$$

le terme

$$(252) \quad \frac{Dsk(1+k)}{p + (P+p)k} h$$

servait seulement à apprécier l'erreur sur  $F$  correspondant à une erreur de niveau déterminée. La quantité  $k$ , sans être nulle, était elle-même très-petite, et l'on avait à peu près

$$(253) \quad F = \frac{q}{p};$$

ainsi, dans une pesée relative à l'eau, on a eu  $p=300$ ;  $s=5000$ ;  $P=250$ ;  $k=0,003$  et  $D=1$ . La formule (253) donnait

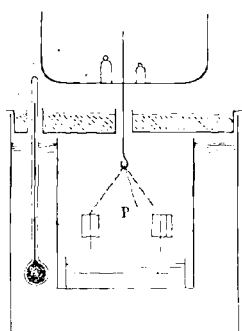
$$(254) \quad F = 7,50,$$

en employant des lames bien mouillées; la formule (234) donnait  $F=7,50 - 0,0224 = 7,4776$ . La correction était très-faible; on peut la négliger dans une première approximation; quand on veut en tenir compte, il faut remplacer le poids  $Dv$  soulevé, par sa valeur très-approchée  $q$ , laquelle serait même sa valeur exacte si  $k$  était négligeable. Nous nous sommes assurés, pour les liquides mouillant bien, que des lames de platine, d'aluminium, d'argent, de cuivre, donnent le même résultat; mais on avait toujours soin de mouiller la lame *un peu* trop haut pour éviter l'action directe du métal et, pour les liquides très-volatils, cette précaution était prise au dernier moment. Pour ces dernières substances, on empêchait l'évaporation autant que possible, et le poids  $q$ , étant connu par une première opération, n'était accepté qu'après plusieurs expériences qui pouvaient alors se faire avec rapidité. C'est de la sorte et par plusieurs

autres procédés qui seront décrits plus loin, qu'on a obtenu une grande partie des nombres contenus dans le tableau qui suit. Pour le mercure, on s'est servi successivement d'une lame de cuivre et d'une lame d'argent amalgamées; l'expérience a donné  $F = 42$  environ, mais le mercure s'altérait pendant l'opération qui n'a pas paru mériter une grande confiance. Le nombre 49 indiqué dans le tableau a été obtenu au moyen de l'écoulement par gouttes.

Pour le soufre, la lame était en argent; la couronne  $P$  (fig. 29), qui la portait, se trouvait renfermée, en même temps qu'un vase de verre contenant le soufre, dans une enceinte à température suffisamment élevée au moyen d'un bain chauffé par une

Fig. 29.



lampe à plusieurs becs. On opérât une première fonte, puis on laissait refroidir afin d'avoir une surface horizontale. On établissait ensuite l'équilibre en mettant la lame en contact avec cette surface et on opérât de nouveau la fusion; les poids enlevés pour rétablir l'affleurement faisaient connaître la force de réunion; mais une expérience spéciale a été nécessaire pour déterminer la densité dans les mêmes circonstances; elle n'a pas été faite avec toutes les précautions nécessaires, parce que la valeur de  $F$  laissait elle-même à désirer à cause de l'action chimique du soufre sur l'argent. Dans certains cas analogues, on doit, pendant l'expérience, maintenir l'enceinte pleine d'un gaz autre que l'air.

NOMS.	FOR- MULES.	$e$	$\Delta_0$	$F_0$	$f$ observé.	$f$ calculé.	$\sqrt{f\Delta}$
Hydrogène.....	H <sup>1</sup>	1	»	»	26,69	26,69	»
Carbone.....	C	6	»	»	4,47	4,47	»
Azote.....	Az	7	»	»	3,81	3,81	»
Oxygène.....	O	8	»	»	3,34	3,34	»
Phosphore à 46°.....	Ph	$\frac{31}{3}$	1,750	8,407	2,745	2,67	2,19
Soufre à 128°.....	S	16	1,877	6,239	1,771	1,668	1,823
Chlore.....	Cl	$\frac{71}{3}$	1,33	1,967	1,190	1,128	1,258
Étain.....	Sn	$\frac{59}{2}$	7,29	51,2	0,963	0,905	2,650
Antimoine.....	Sb	$\frac{61}{2}$	6,712	35,3	0,783	0,875	2,292
Cuivre.....	Cu	31,75	8,85	77,4	0,979	0,841	2,943
Sélénium liquide.....	Se	40	4,3?	»	0,64	0,6672	1,659
Argent.....	Ag	54	10,5	53,7	0,487	0,494	2,261
Cadmium.....	Cd	56	8,7	34,3	0,454	0,477	1,987
Bismuth.....	Bi	70	9,822	36,5	0,378	0,381	1,927
Brome.....	Br	80	3,187	3,758	0,37	0,334	1,032
Iode à 110°.....	I	84	4,144	5,439	0,3167	0,3152	1,146
Or.....	Au	98	19,5	96,2	0,253	0,272	2,221
Mercuré.....	Hg	100	13,596	49,17	0,266	0,2669	1,905
Plomb.....	Pb	103	11,352	36,0	0,279	0,259	1,780
Benzine.....	C <sup>2</sup> H	»	0,897	3,154	3,920	3,920	1,875
Essence de térébenth.....	C <sup>2</sup> H <sup>6</sup>	»	0,876	2,910	3,792	3,792	1,823
Eau.....	HO	»	1,0	7,5	7,5	7,5	2,739
Alcool vinique.....	C <sup>2</sup> H <sup>3</sup> O	»	0,8151	2,471	3,719	3,719	1,741
Éther vinique.....	C <sup>4</sup> H <sup>5</sup> O	»	0,7263	1,883	3,570	3,633	1,624
Alcool amylique.....	C <sup>2</sup> H <sup>6</sup> O	»	0,827	2,542	3,716	3,610	1,753
Éther acétique.....	C <sup>2</sup> H <sup>2</sup> O	»	0,896	2,586	3,221	3,352	1,733
Proto-chlorure de carb.	C <sup>2</sup> Cl <sup>3</sup>	»	1,619	2,967	1,132	1,170	1,354
Bi-chlorure de carbone.	CCl <sup>3</sup>	»	1,619	2,980	1,1367	1,186	1,298
Proto-chlor. de soufre.	S <sup>4</sup> Cl <sup>3</sup>	»	1,628	4,747	1,791	1,732	1,708
Chlorure de phosphore.	Ph <sup>2</sup> C <sup>3</sup>	»	1,6162	3,042	1,19	»	1,387
Chloroforme.....	C <sup>2</sup> H <sup>3</sup> Cl <sup>3</sup>	»	1,48	2,960	1,351	1,399	1,414
Liqueur des Hollandais.	C <sup>2</sup> H <sup>4</sup> Cl <sup>3</sup>	»	1,268	3,480	2,164	2,172	1,657
Éther bromhydrique..	C <sup>4</sup> H <sup>5</sup> Br	»	1,4733	2,420	1,115	»	1,282
Sulfure de carbone....	CS <sup>2</sup>	»	1,2931	3,570	2,135	2,107	1,651
Bi-chlorure d'étain....	Su <sup>2</sup> Cl <sup>3</sup>	»	2,28	2,712	0,5217	0,5203	1,091
Acide hypo-azotique...	AzO <sup>2</sup>	»	1,42	2,42	1,20	1,21	1,305

A la simple inspection des nombres contenus dans la sixième colonne de ce tableau, on voit que les forces de réunion, pour les corps ramenés par le calcul à la densité de l'eau, sont loin d'être indépendantes de la nature de la substance comme on l'a cru si longtemps (\*). La loi qu'elles suivent pour les corps simples est mise en évidence par les résultats indiqués dans les dix-sept premières lignes et dont plusieurs ont été obtenus par des procédés qui seront décrits plus loin ; en voici l'énoncé :

*Les forces de réunion des corps simples sont inversement proportionnelles aux équivalents chimiques.*

Cet ordre de faits n'est pas moins contraire à l'hypothèse de l'unité de la substance matérielle que ce que nous avons vu précédemment pour les attractions au contact ; il peut servir conjointement avec les lois relatives aux chaleurs spécifiques et aux attractions au contact à fixer les poids atomiques. Toutefois, il n'est pas certain que les trois lois fourniront toujours le même résultat et qu'il n'y ait point lieu à modifier leurs énoncés, en disant que le nombre  $e$  qui y entre est le poids atomique ou un nombre en rapport simple avec cette quantité. Nous avons déjà trouvé quelques cas où il en est ainsi ; des expériences plus nombreuses achèveront d'éclaircir ce point.

En adoptant pour les forces de réunion le même genre de notations que pour les attractions au contact, l'expression algébrique de la loi qui précède est

$$(255) \quad f = \frac{f_H}{e},$$

et, si on l'étend aux composés, on trouve pour analogues des

(\*) M. Lechartier, mon collègue à la Faculté de Rennes, a bien voulu se charger de la purification des corps employés dans nos expériences sur les forces de réunion ; je suis heureux de pouvoir lui témoigner ici toute ma reconnaissance pour son dévouement ; sa grande habileté nous a été extrêmement utile.



équations (211) et (212)

$$(256) \quad f = f_H \cdot \frac{\sum \beta}{\sum B\beta},$$

$$(257) \quad f_b^c = f_H \cdot \frac{B+C}{2BC}.$$

De là deux lois dont la dernière s'énonce ainsi :

*La force de réunion d'un corps simple ayant pour équivalent B agissant sur un autre corps simple ayant pour équivalent C égale le produit de la force de réunion de l'hydrogène par une fraction dont le numérateur est la somme des équivalents et le dénominateur leur double produit.*

Il existe plusieurs vérifications ; mais, pour certains corps compris dans le tableau, par exemple pour l'hydrogène agissant sur le carbone, cette seconde loi est en opposition avec les faits. Il est probable qu'elle devra être modifiée et généralisée comme la seconde loi des attractions au contact. Alors (257) sera remplacé par

$$(258) \quad f_b^c = K f_H \frac{B+C}{2BC},$$

et l'énoncé deviendra celui-ci :

*La force de réunion d'un corps simple agissant sur un autre égale le produit de la force de réunion de l'hydrogène par une fraction dont le numérateur est la somme des équivalents et le dénominateur leur double produit ; mais il existe des cas où ce résultat doit être multiplié par un facteur simple qui est quelquefois négatif sans cesser d'être simple. Ainsi on a :*

$$\begin{array}{r}
 \int_{\text{H}}^{\text{O}} \\
 \int_{\text{S}}^{\text{Cl}} \\
 \int_{\text{H}}^{\text{Cl}} \\
 \int_{\text{S}}^{\text{Cl}} \\
 \int_{\text{Ph}}^{\text{Cl}} \\
 \int_{\text{C}}^{\text{Cl}} \\
 \int_{\text{H}}^{\text{C}} \\
 \int_{\text{Az}}^{\text{O}}
 \end{array}
 \quad
 k = \begin{array}{r}
 \frac{3}{2} \\
 \frac{3}{2} \\
 1 \\
 1 \\
 \frac{2}{3} \\
 \frac{1}{2} \\
 0 \\
 -\frac{1}{2}
 \end{array}$$

Toutefois, nous ne possédons point encore assez de résultats dignes de confiance pour autoriser dès à présent une affirmation précise. Si, plus tard, cette loi devient certaine, on pourra, comme pour les attractions au contact, généraliser la première loi de manière à y comprendre la seconde; mais alors la valeur de  $e$  pour un composé quelconque s'obtiendra en divisant le carré de la formule mise en nombre par la réunion de

La somme des résultats obtenus en multipliant chaque équivalent par le carré de son exposant,

Et de la somme des produits obtenus en multipliant chaque équivalent par son exposant et par chacun des autres exposants et aussi par les valeurs convenables de  $k$ :

$$(259) \quad e = \frac{\sum^2 B \beta}{\sum B \beta^2 + \sum k B \beta \gamma}$$

Pour trouver cette expression on suit la même marche que pour trouver  $e^2$  dans le cas des attractions au contact (p. 177), mais les deux résultats ne s'accordent pas toujours.

Il y a trop de ressemblance entre la manière d'appliquer le calcul aux forces de réunion des corps composés et ce qu'on a vu dans le Chapitre relativement aux attractions au contact, pour qu'il soit utile d'exposer de nouveau la marche à suivre. C'est au moyen des valeurs de  $f$  pour la benzine et pour l'essence de térébenthine que le nombre fondamental  $f_{II}$ , qui sert à calculer toutes les forces de réunion des corps simples, a été obtenu; les équations à résoudre sont pour l'essence de térébenthine, qui contient  $\frac{30}{34}$  de carbone et  $\frac{4}{34}$  d'hydrogène:

$$\frac{30^3}{34^3} f_c + \frac{4^3}{34^3} f_{II} + \frac{2 \times 30 \times 4}{34^2} f_c^{\pi} = 3,792;$$

3,792 est la valeur de  $f$  trouvée pour ce liquide par expérience.

En remplaçant (252) la quantité  $f_c$  par  $\frac{f_{II}}{6}$ , et simplifiant, il vient

$$(260) \quad 166 f_{II} + 240 f_c^{\pi} = 3,792 \times 1156.$$

On trouve de même pour la benzine

$$(261) \quad 25 f_{II} + 24 f_c^{\pi} = 3,920 \times 169,$$

et l'ensemble de ces deux équations donne

$$(262) \quad f_{II} = 26,69,$$

et

$$(263) \quad f_c^{\pi} = -0,2.$$

Cette dernière valeur ne pourra être considérée comme méritant confiance qu'après une seconde approximation qui exigera des modifications dans les appareils. La seconde loi fait présumer qu'ici la valeur de  $k$  est 0.

Cet exemple fait bien comprendre comment on peut obtenir des forces de réunion qu'il est impossible de mesurer directement, et, comme la résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré renfermant un égal nombre d'in-

connues n'offre aucune difficulté, il semble aisé d'atteindre de la sorte tous les corps simples en employant un nombre de composés suffisant. Mais ici la pratique n'est point aussi facile que la théorie, et les erreurs expérimentales, même faibles, peuvent altérer beaucoup les résultats déduits d'équations un peu compliquées; cela tient à ce que, sans être exactement rentrantes, ces équations peuvent mal déterminer les inconnues. Avec certaines classes de composés, on arrive même à des valeurs indéterminées; par exemple, les alcools et les éthers simples contiennent trois éléments: l'hydrogène, le carbone et l'oxygène. Il est facile d'égaliser aux nombres trouvés par expériences, leurs forces de réunion exprimées en fonction de  $f_H, f_C, f_O, f_H^H, f_H^C, f_H^O, f_C^O$ ; mais il ne suffit pas de se procurer de la sorte six équations pour en déduire ces six quantités considérées comme inconnues. Cela tient à ce que les composés de ce genre ont pour formule générale  $C^n H^n, 2HO$ , de sorte qu'on peut les considérer *tous* comme formés de deux corps binaires  $CH$  et  $HO$ ; leur étude expérimentale peut faire connaître  $f_{CH}, f_{HO}, f_{CH}^{HO}$ ; mais, après la détermination de ces trois quantités, elle ne peut rien fournir. L'eau, qui appartient à cette classe de corps et est donnée par la formule quand on fait  $n=0$ , a été étudiée avec soin, et l'on a  $f_{HO}=7,5$ ; il ne reste que deux inconnues qu'on peut déduire des équations relatives à l'éther et à l'alcool viniques, qu'on obtient en faisant  $n=8$  et  $n=4$  dans l'équation générale

$$(264) \quad f_{C^n H^n, 2HO} = \frac{49n^2 f_{CH} + 324 f_{HO} + 252n f_{CH}^{HO}}{(7n + 18)^2}.$$

On peut aussi obtenir  $f_{CH}$  par le calcul; car on a d'après ce qui précède

$$(265) \quad f_{CH} = \left(\frac{6}{7}\right)^2 f + \left(\frac{1}{7}\right) f_H + \frac{12}{49} f_c^{HH} = 3,76.$$

Alors  $f_O^H$  demeure seule inconnue et l'alcool vinique suffit

pour fournir

$$(266) \quad f_{\text{CH}}^{\text{no}} = 2,816.$$

Rien ne s'oppose plus à ce qu'on mette en nombre la formule (264) qui devient,

$$(267) \quad f_{\text{C}_7\text{H}_{18}, 2\text{H}_2\text{O}} = \frac{184,24n^2 + 709,63n + 2430,0}{(7n + 18)^2}.$$

On peut ensuite calculer par son moyen la force de réunion d'un alcool ou d'un éther simple quelconque et la comparer avec celle que donne l'expérience. Nous avons obtenu deux bonnes vérifications avec l'alcool amylique et l'éther vinique.

Quand on remplace dans (257) et (264)  $f_{\text{H}_2\text{O}}$  et  $f_{\text{CH}}^{\text{no}}$  par leurs expressions détaillées, on trouve

$$(268) \quad f_{\text{H}}^{\text{o}} = 22,95$$

et

$$(269) \quad f_{\text{C}}^{\text{o}} = -0,33.$$

En y joignant les données qui précèdent, ces nombres permettent de calculer *a priori* la force de réunion d'un composé quelconque d'hydrogène, d'oxygène et de carbone; l'application à l'éther acétique nous a fourni une très-bonne vérification. Nous en avons encore obtenu une assez satisfaisante pour de la glycérine prise dans le commerce et dont la pureté n'était pas complète.

*Composés contenant du chlore.* — Le protochlorure de carbone contient 6 de carbone et 35,5 de chlore, en tout 41,5. Son équation est

$$(41,5)^2 f = 6^2 f_{\text{C}} + (35,5)^2 f_{\text{Cl}} + 6 \times 71 f_{\text{C}}^{\text{Cl}}.$$

Le tableau fait connaître la valeur de  $f = 1,132$  et celle de  $f_{\text{C}} = \frac{26,69}{6}$ ; on peut donc effectuer en partie les calculs, et l'on trouve

$$(35,5)^2 f_{\text{Cl}} + 6 \times 71 f_{\text{C}}^{\text{Cl}} = 1789,5.$$

Le perchlorure donne de même

$$4 \times (35,5)^2 f_{\text{Cl}} + 2 \times 6 \times 71 f_{\text{C}}^{\text{Cl}} = 6579,4.$$

L'élimination donne  $f_{\text{Cl}} = 1,190$  qui ne diffère de  $\frac{26,69}{\left(\frac{71}{3}\right)} = 1,128$

que de  $\frac{1}{19}$ ; on a donc pour le chlore

$$e = \frac{71}{3}.$$

On trouve ensuite pour  $f_{\text{C}}^{\text{Cl}}$  un nombre qui, porté dans (254), fournit pour  $K$  une valeur comprise entre  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{3}$ ; mais ce nombre est fort incertain parce qu'il provient d'une différence faible obtenue en retranchant l'une de l'autre deux quantités considérables.

Si l'on écrit les équations de la liqueur des Hollandais et du chloroforme simplifiées en remarquant que  $f_{\text{C}}^{\text{H}}$  est nul ou négligeable, elles donnent d'abord, pour  $f_{\text{H}}^{\text{Cl}}$ , une valeur qui, mise dans (258), conduit à  $K = 1$ . Ensuite on arrive pour  $f_{\text{C}}^{\text{Cl}}$  à une détermination plus probable correspondant à  $K = \frac{1}{2}$ .

Les coefficients à introduire dans (258) étant ainsi donnés par un premier calcul, rien ne s'oppose à ce qu'on s'en serve pour calculer ensuite complètement les forces de réunion, pour les comparer avec celles qui résultent de l'observation directe: c'est ainsi que la septième colonne du tableau a été formée.

Ces exemples suffisent pour montrer la marche qui a été suivie, et il n'est pas utile d'entrer dans les détails pour chaque substance en particulier.

Tous les calculs de ce genre sont admissibles pour les combinaisons chimiques. Mais ils supposent les composants assez bien mêlés pour que leurs particules distinctes aient de petites

dimensions par rapport à  $\epsilon$ , et c'est ce qui n'a pas toujours lieu dans les dissolutions.

*Réflexions sur la loi de l'attraction.* — Jusqu'à présent les valeurs des attractions au contact et des forces de réunion sont les seules données au moyen desquelles on puisse obtenir des conséquences relatives à la loi des attractions moléculaires; dans l'état actuel de la science, l'expression générale de l'attraction d'un corps sur un autre est inconnue, on peut seulement affirmer, qu'à de grandes distances, elle est de la forme

$$(270) \quad \frac{b}{r^2},$$

$r$  étant la distance et  $b$  une constante. Les phénomènes de la pesanteur montrent qu'en continuant à prendre pour unités le millimètre et le milligramme, on a

$$(271) \quad b = 0,000\,000\,000\,0068,$$

dans le cas où les deux points matériels ont l'un et l'autre pour poids un milligramme.

On a souvent cherché, pour l'expression générale, des développements suivant les puissances négatives entières de la distance dont l'emploi dans les calculs permette d'expliquer les phénomènes physiques; il est possible de montrer qu'ils sont incompatibles avec les faits connus aujourd'hui. Pour y parvenir, désignons par  $br^m$  un terme quelconque d'un développement de ce genre dans lequel  $m$  est négatif. Les intégrations indiquées dans les formules (1) et (2), page 220, données par M. Massieu, s'effectuent sans difficulté, et on arrive à

$$(272) \quad A = 2 \pi \Delta^2 \Sigma \left[ \frac{b \epsilon^{m+4}}{m+1} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{m+4} \right) - \frac{0^{m+4}}{(m+1)(m+4)} \right];$$

$$(273) \quad F = \frac{1}{2} \pi \Delta^2 \Sigma \left[ \frac{b \epsilon^{m+5}}{m+1} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{m+5} \right) + \frac{0^{m+5}}{(m+1)(m+5)} \right].$$

Les termes finis et déterminés sont seuls admissibles ; cela exclut  $m = -1$ ,  $m = -4$ ,  $m = -5$ , et fait voir que, dans chaque parenthèse, le second terme est toujours nul ; attachons-nous maintenant à exclure  $m < -5$  et pour cela posons

$$(274) \quad m = -5 - m', \quad \text{et} \quad b = -b',$$

afin de mettre les signes en évidence. Il vient

$$(275) \quad A = 2 \pi \Delta^2 \Sigma \frac{b' \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{m'+1} \right)}{(m'+4) \varepsilon^{m'+1}},$$

$$(276) \quad F = \frac{1}{2} \pi \Delta^2 \Sigma \frac{b' \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{m'} \right)}{(m'+4) \varepsilon^{m'}}.$$

Pour un corps déterminé (232), on a,  $\theta$  étant moindre que 1,

$$2F = \theta A \varepsilon ;$$

il en résulte, en substituant les valeurs de F et de A, puis simplifiant

$$(277) \quad \Sigma \frac{4\theta b' \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{m'+1} \right)}{(m'+4) \varepsilon^{m'}} = \Sigma \frac{b' \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{m'} \right)}{(m'+4) \varepsilon^{m'}}.$$

Chaque somme doit demeurer sensiblement la même quand on remplace  $\varepsilon$  par des nombres arbitraires plus grands ; il faut donc que les termes dans lesquels cette quantité entre à la même puissance soient égaux chacun à chacun. Cela donne

$$4\theta \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{m'+1} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{m'},$$

ou, en simplifiant

$$(278) \quad \theta = \frac{3}{16} + \frac{3}{16m'}.$$

$\theta$  étant déterminé, cette dernière équation montre que  $m'$  n'admet qu'une seule valeur au plus ; si on la porte dans A et F, les expressions de ces quantités ne demeureront point sensiblement invariables quand on remplacera  $\varepsilon$  par des nombres



supérieurs. La loi de l'attraction universelle ne peut donc être exprimée par une suite de termes proportionnels aux inverses des puissances entières de la distance. Les motifs d'exclusion qui viennent d'être fournis pour les valeurs de  $m'$  conviennent pour  $m = -2$  et  $m = -3$  ou  $m' = -3$  et  $m' = -2$ ; mais on peut aussi traiter à part ces deux cas.

Le terme astronomique  $\frac{b}{r^3}$ , qui, dans l'expression générale, est seul sensible dès que la distance devient un peu grande, est entièrement connu et on vient de voir (268) quelle est la valeur numérique de  $b$ . En la substituant ici et faisant  $\varepsilon = 1$ ,  $\Delta = 1$ , on trouve pour le cas de deux lames d'eau d'un millimètre d'épaisseur

$$(279) \quad F = 0,00000000000089,$$

$$(280) \quad A = 8F.$$

Cet exemple suffit pour montrer combien ce terme est loin de donner quelque chose d'appréciable en mécanique moléculaire; il faut dans cette science n'en tenir absolument aucun compte, puisque les erreurs expérimentales à craindre sont bien plus d'un million de fois l'erreur qu'on commet en le négligeant.

Avec  $m = -3$ , on obtient

$$(281) \quad A = \frac{2}{3} \pi \Delta^3 b \varepsilon; \quad F = \frac{1}{16} \pi \Delta^3 b \varepsilon^2;$$

d'où

$$(282) \quad \frac{F}{A} = \frac{3}{32} \varepsilon; \quad b = \frac{27}{64\pi} \cdot \frac{A^2}{F\Delta^2}.$$

Dans le cas de l'eau on a  $\Delta = 1$ ;  $F = 7,5$ ;  $A = 226600000$  et, par suite,

$$(283) \quad \varepsilon = 0,000000353; \quad b = 919400000000.$$

Avec cette valeur de  $b$ , on voit que deux milligrammes d'eau

placés à 1 millimètre de distance s'attireraient mutuellement avec une force supérieure à 9 millions de kilogrammes ; ce résultat suffit encore pour exclure  $m = -3$  et s'accorde avec les précédents pour motiver l'abandon que je propose d'un genre de développement plusieurs fois essayé.

REMARQUE. — En toute rigueur l'attraction s'étend jusqu'à l'infini et quelques explications sont nécessaires pour justifier complètement l'emploi que je fais de la quantité  $\varepsilon$  introduite depuis longtemps dans la science. Pour un corps quelconque, l'attraction exercée sur une molécule par un filet de matière qui s'étend depuis  $x < \varepsilon$  jusqu'à  $\lambda > \varepsilon$  peut toujours être considérée comme la somme de l'action de  $x$  à  $\varepsilon$  et de l'action de  $\varepsilon$  à  $\lambda$  ; si on appelle  $\omega$  l'intégrale des actions de cette dernière espèce négligées dans un calcul, il suffit d'écrire cette quantité dans les relations obtenues pour les rendre exactes. La valeur de  $\omega$ , que je supprime parce qu'elle est au-dessous des erreurs qui résultent des données expérimentales, dépend du choix de  $\varepsilon$ . Avec une valeur  $\varepsilon_1$  trop faible,  $\omega$  surpasse les erreurs dues aux expériences, et l'on a une *limite inférieure* du nombre qu'il convient de choisir pour  $\varepsilon$  eu égard à l'état actuel de la science ; si l'on peut montrer que, pour une autre valeur  $\varepsilon_2$ ,  $\omega$  est moindre que les erreurs provenant des expériences, on a ce que j'appellerai une *limite supérieure*. Le même degré d'exactitude ne peut pas toujours être obtenu dans des expériences diverses ; cela rend nécessaire une discussion quelquefois très-épineuse, qui est heureusement inutile dans une première approximation parce qu'on n'emploie que des limites fort éloignées, mais qui pourra rendre de plus en plus difficiles les approximations successives. Ici, comme en astronomie, des observations plus précises forceront à tenir compte de quantités négligées avec raison précédemment.

*Attraction universelle.* — Quand deux corps séparés par une distance  $r$  s'attirent mutuellement, qu'ils sont simples, de

même nature et ont l'un et l'autre pour poids 1 milligramme, on est conduit par l'ensemble des faits connus à exprimer la force par le trinôme

$$(284) \quad \frac{R_0}{e^0} + \frac{R_1}{e^1} + \frac{R_2}{e^2},$$

dans lequel  $e$  désigne le poids atomique et  $R_0, R_1, R_2$ , des fonctions de la distance dont la première est seule connue par suite de l'étude des mouvements astronomiques.

Le premier terme  $\frac{R_0}{e^0}$  ou  $R_0$  est complètement négligeable lorsque la distance est très-faible, lorsqu'elle est par exemple une petite fraction de millimètre. A une distance plus considérable, on admet, au contraire, qu'il est seul sensible et que l'attraction est indépendante de  $e$  ou de la nature chimique de la substance. Toutefois, les expériences de Cavendish, de Reich et de Baily n'ont pas été dirigées de manière à donner cette conséquence d'une manière certaine, et il est fort à souhaiter qu'elles soient reprises dans un vide aussi parfait qu'on le pourra faire et au moyen de corps simples ayant des poids atomiques très-différents.

La loi des forces de réunion prouve que, dans l'attraction de deux angles droits opposés au sommet, ou dans le travail de séparation perpendiculaire de 0 à  $\epsilon$ , le second terme est prédominant et que la fonction  $R_1$  est la même pour tous les éléments chimiques.

La loi des attractions au contact, dans laquelle le dernier terme se montre à son tour seul sensible, fait voir que la fonction  $R_2$  est aussi indépendante de la nature chimique du corps simple que l'on considère.

Pour bien faire comprendre que ces deux conséquences ne sont point incompatibles, nommons désormais, afin d'éviter la confusion,  $\epsilon'$  la distance au-delà de laquelle  $\frac{R_2}{e^2}$  devient insen-

sible et remarquons d'abord qu'elle est très-petite par rapport à la distance  $\epsilon$  au-delà de laquelle le terme  $\frac{R_1}{e^1}$  devient insensible à son tour, puisque  $\frac{R_2}{e^2}$  n'influe pas sur le travail total F de séparation de 0 à  $\epsilon$  (\*). On peut considérer l'attraction au contact comme se composant de l'attraction A' de la couche comprise entre 0 et  $\epsilon'$  et de l'attraction A'' de la couche comprise entre  $\epsilon'$  et  $\epsilon$ ; alors on aura

$$(285) \quad A = A' + A'';$$

A'' proportionnel à l'inverse de l'équivalent sera très-petit par rapport à A' proportionnel à l'inverse du carré de l'équivalent. Cela posé, considérons le travail F comme composé du travail de séparation de 0 à  $\epsilon'$ , plus du travail de séparation de  $\epsilon'$  à  $\epsilon$  et nommons  $\theta'A'$  et  $\theta''A''$  les valeurs moyennes de l'attraction dans ces deux intervalles; il vient

$$(286) \quad 2F = \theta'A'\epsilon' + \theta''A''(\epsilon - \epsilon'),$$

et l'on voit clairement que, si  $\epsilon'$  est assez petit par rapport à  $\epsilon$ ,  $\theta'A'\epsilon'$  peut être négligeable en présence de  $\theta''A''\epsilon$  quoique A' soit grand par rapport à A''.

Ces éclaircissements peuvent être donnés aussi en comparant l'attraction au contact avec la valeur  $F\sqrt{2}$  de l'attraction de la matière contenue dans un angle droit sur celle que renferme l'angle opposé par le sommet. Si, par exemple,  $\epsilon'$  est 100 fois moindre que  $\epsilon$ , la quantité de matière qui éprouve une attraction proportionnelle à l'inverse du carré de l'équivalent est 100 fois ou 10 000 fois moindre que celle qui éprouve une attraction proportionnelle à l'inverse de la première puissance de l'équivalent, suivant qu'il s'agit de l'attraction au contact

---

(\*) Les limites  $\epsilon'_1$  et  $\epsilon'_2$  de  $\epsilon'$  se définissent comme celles de  $\epsilon$ .

ou de la force de réunion. Cela suffit pour faire comprendre pourquoi l'action qui prédomine dans un cas n'est pas celle qui prédomine dans l'autre.

Le trinôme (281) est relatif au cas de deux particules appartenant à un même corps simple ; dans le cas de deux corps simples différents, l'expression de la force est

$$(287) \quad R_0 + \frac{K(e + e_1)R_1}{2ee_1} + \frac{K'R_2}{ee_1};$$

$e, e_1$  désignent les poids atomiques des corps qui agissent l'un sur l'autre ;  $K, K'$  sont des facteurs très-simples, souvent égaux à l'unité, et qui, dans certains cas, sont négatifs sans cesser d'être simples. En supposant égaux les nombres  $e, e_1$  et faisant  $K = K' = 1$  on retombe, comme cela doit être, sur l'expression relative aux corps simples et qui s'applique aussi à une classe de composés agissant chacun sur lui-même.

*Remarque.*—Dans le calcul des forces de réunion qui ne peuvent être mesurées directement, comme celles de l'hydrogène et de l'oxygène par exemple, les changements de densité près de la surface ont été négligés, et il est à craindre que cela ait conduit à des erreurs appréciables. Aussi n'avons-nous présenté les nombres obtenus que comme une première approximation ne laissant planer aucun doute sur les lois, mais de nature à faire souhaiter des recherches relatives aux corrections qui devront être effectuées plus tard. Les changements de température et de pression font varier la densité d'un corps, notamment près de la surface ; il est facile de soupçonner à priori combien il peut être utile, pour trouver la valeur de la petite différence  $h$  entre les forces de réunion calculées et effectives, d'étudier théoriquement et expérimentalement l'influence de la température et de la pression sur ces dernières. Je vais indiquer la marche à suivre et faire connaître des théorèmes sur lesquels on pourra s'appuyer, en me bornant à la seule application rendue possible par les belles expériences de M. Wolff sur l'eau.

## INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR LES FORCES DE RÉUNION.

Lorsqu'on opère, suivant une section plane, la séparation d'une masse liquide en deux parties, on dépense par demi-millimètre carré un travail que j'ai nommé  $f\Delta^2$ , en supposant que les deux couches superficielles, ayant 1 millimètre carré pour surface totale, ne se dilatent point pendant la séparation, ou plutôt en regardant comme négligeables les effets de leur dilatation. En réalité, les deux tranches infiniment petites les plus voisines de la surface passent d'une pression énorme, que l'attraction au contact étudiée dans le chapitre précédent fait connaître, à la pression de 1 atmosphère ; sa dilatation ne peut manquer d'être très-notable. Les autres tranches se dilatent aussi, quoique de moins en moins, à mesure qu'elles s'éloignent de la surface, jusqu'à la distance  $\epsilon$ , où aucun changement n'a lieu. Il se produit :

1° Une dilatation totale  $\delta$  à température sensiblement constante ;

2° Un travail interne correspondant  $i$ , par suite de l'écartement des molécules ;

3° Un travail externe  $h$ .

Comme je l'ai déjà fait remarquer, ce dernier travail facilite la séparation qui, à cause de cela, exige un travail *effectif*  $F$  moindre que le travail *calculé*  $f\Delta^2$ , et l'on est conduit à la relation déjà donnée

$$(288) \quad F = f\Delta^2 - h.$$

Au moyen des deux principes fondamentaux de la théorie mécanique de la chaleur, cherchons les relations qui lient ensemble ces diverses quantités :

1° Augmentons d'abord de 1 millimètre carré à température constante  $t_2$  la surface totale  $s$  d'une masse liquide donnée, ayant pour poids 1 milligramme. Le volant d'une machine

thermique parfaite employée à produire cet effet perdra une force vive correspondant à  $F_2$ . En appelant  $t_1$  la température du réservoir de chaleur de la machine composée autant qu'il sera utile, le volant devra en outre fournir, pour empêcher le refroidissement, une chaleur équivalente à  $i_2 + h_2$ , et la dépense totale sera

$$F_2 + (i_2 + h_2) \frac{t_2 - t_1}{274 + t_2}.$$

En même temps le réservoir à  $t_1$  aura perdu la chaleur simplement transportée et qui équivaut à

$$(i_2 + h_2) \frac{274 + t_1}{274 + t_2}.$$

2° Refroidissons maintenant de  $t_2$  à  $t_1$  et emmagasinons la chaleur distribuée dans cet espace. Sa valeur serait

$$\int_{t_1}^{t_2} E c' dt,$$

si la couche  $\epsilon$ , qui se dilate plus qu'en pleine matière, n'avait, à cause de cela, une capacité plus grande; soit  $\frac{\chi}{E}$  la quantité à ajouter pour une variation de 1 degré dans le volume  $1 \times 1 \times \epsilon$ ; la chaleur emmagasinée a pour valeur exacte en millionnièmes de millidyne

$$\int_{t_1}^{t_2} E c' dt + \int_{t_1}^{t_2} (s + 1) \chi dt.$$

3° Opérons actuellement une diminution de surface d'un millimètre carré à température constante  $t_1$ , le volant gagnera

$$F_1,$$

et le réservoir à  $t_1$  recevra une quantité de chaleur équivalente à

$$i_1 + h_1.$$

4° Cela fait, réchauffons de  $t_1$  à  $t_2$  au moyen de la chaleur

emmagasinée et donnons à la machine la quantité  $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\chi}{E} dt$ , devenue disponible par suite de la diminution de surface. L'emploi de cette quantité de chaleur fera gagner au volant

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{t - t_1}{274 + t} \chi dt,$$

et au réservoir

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{274 + t_1}{274 + t} \chi dt.$$

Le retour aux circonstances primitives est complet, il n'y a pas eu de chute, et il résulte du principe de l'égalité de rendement et de celui de l'équivalence que le volant ne peut avoir rien perdu ni gagné non plus que le réservoir à  $t_1$ , c'est-à-dire qu'on a les deux équations

$$(289) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{t - t_1}{274 + t} \chi dt = F_2 - F_1 + (i_2 + h_2) \frac{t_2 - t_1}{274 + t_2},$$

$$(290) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{274 + t_1}{274 + t} \chi dt = i_2 - i_1 + h_2 - h_1 - \frac{t_2 - t_1}{274 + t_2} (i_2 + h_2) \\ = \frac{274 + t_1}{274 + t_2} (i_2 + h_2) - (i_1 + h_1).$$

Cette dernière égalité peut être mise sous la forme

$$(291) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\chi dt}{274 + t} = \frac{i_2 + h_2}{274 + t_2} - \frac{i_1 + h_1}{274 + t_1}.$$

En ajoutant (289) et (290) on trouve

$$(292) \quad \int_{t_1}^{t_2} \chi dt = F_2 - F_1 + i_2 - i_1 + h_2 - h_1.$$

Si on différentie par rapport à  $t_1$  ou  $t_2$ , il vient

$$(293) \quad \chi = \frac{dF}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dh}{dt}.$$

On a aussi en différentiant (291) puis multipliant par  $274 + t$

$$(294) \quad \chi = \frac{di}{dt} + \frac{dh}{dt} - \frac{i + h}{274 + t}.$$



Les équations (293) et (294) combinées donnent

$$(295) \quad i + h = -(274 + t) \frac{dF}{dt};$$

puis on tire de (294) et de (295)

$$(296) \quad \chi = -(274 + t) \frac{d^2F}{dt^2}.$$

De là deux théorèmes relatifs à la matière contenue avant la dilatation dans un parallépipède rectangle ayant pour base un millimètre carré à la surface à naître et pour hauteur  $\varepsilon$  :

*La somme du travail interne et du travail externe exécutés pendant la séparation égale le produit du binôme de dilatation  $274 + t$  pris négativement et de la dérivée de la force de réunion par rapport à la température.*

*L'excès de la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température après la séparation sur celle qui est nécessaire pour produire le même effet avant la séparation égale le produit du binôme de dilatation pris négativement et de la dérivée seconde de la force de réunion par rapport à la température.*

Des équations (288), (294) et (296), on tire sans peine, en négligeant les quantités très-petites,

$$(297) \quad \frac{dh}{dt} = \frac{dF}{dt} + 2F\alpha',$$

$$(298) \quad \frac{di}{dt} = 2F\alpha' - (274 + t) \frac{d^2F}{dt^2},$$

et l'on peut calculer la variation du travail interne et celle du travail externe pour un changement de température de 1 degré, lorsque l'expérience a fait connaître la valeur de F en fonction de t et aussi le coefficient de dilatation  $\alpha'$ .

Dans une première approximation on peut supposer que le travail interne dépend du volume seul, et il devient possible de le calculer au moyen des données physiques connues et de la dilatation. Il faut donner à 1 milligramme une chaleur équi-

valente au travail  $1000E c'$  pour élever de 1 degré sa température à pression constante. Le travail externe  $\frac{10333\alpha'}{\Delta}$  est dans ce cas négligeable, et, si l'on retranche le produit de  $1000E$  par la chaleur spécifique vraie, il reste  $1000E(c' - c)$  pour le travail interne correspondant à la dilatation  $\frac{\alpha'}{\Delta}$ ; la valeur complète, lorsqu'il est utile de ne pas supprimer le petit terme comme nous allons le faire ici, est

$$1000E(c' - c) - \frac{10333\alpha'}{\Delta}.$$

Les valeurs de  $c'$ ,  $c$ ,  $\alpha'$  peuvent être supposées constantes dans une première approximation, le travail interne est proportionnel à la dilatation et indépendant, pourvu que la dilatation totale reste la même, de la quantité de matière et du changement de température. Il en résulte qu'on a

$$(299) \quad i = \frac{1000E(c' - c)\Delta}{\alpha'} \delta.$$

On peut évaluer autrement cette quantité : la dérivée du travail interne est  $a\Delta^2$ , comme on l'a vu page 152; il suffit de multiplier par l'accroissement du volume  $\delta$  pour obtenir le travail interne, et il vient

$$(300) \quad i = A\delta = a\Delta^2\delta;$$

mais les valeurs moyennes qu'il conviendrait de prendre pour  $\Delta$ , et plus haut pour  $c'$ , peuvent différer notablement de celles que les physiiciens ont obtenues, et la valeur de  $a$  doit être réduite en milligrammes.

Dans la production du travail  $h$ , le chemin parcouru est  $\delta$  et la force varie de la pression due à 1 atmosphère à la valeur complète de l'attraction au contact; soit  $\theta A$  sa valeur moyenne, c'est-à-dire celle qui donnerait, étant supposée uniforme, le

même travail total;  $\theta$  est un coefficient moindre que 1, et l'on a

$$(301) \quad h = \theta A \delta = \theta x \Delta^2 \delta.$$

Une simple division donne ensuite

$$(302) \quad h = \theta i.$$

Ces expressions de  $i$  et de  $h$  étant mises dans l'équation (295), il vient

$$\delta = \frac{-(274+t) \frac{dF}{dt}}{\frac{1000E(c'-c)\delta}{\alpha'} + \theta A} = \frac{-(274+t) \frac{dF}{dt}}{(1+\theta)A}.$$

Dans cette dernière relation, on peut sans très-grande erreur négliger  $\theta$ , et les applications numériques deviennent faciles pour les liquides qui ont été soumis aux expériences convenables. On peut aussi remplacer  $\theta$  par 0 et 1 successivement, ce qui donne deux limites entre lesquelles  $\delta$  se trouverait certainement compris, sans la restriction qui précède,

$$(303) \quad \frac{-(274+t) \frac{dF}{dt}}{A} > \delta > \frac{-(274+t) \frac{dF}{dt}}{2A}.$$

Cette restriction laisse à la seconde inégalité toute sa rigueur, et il est très-probable qu'il en est de même de la première, parce qu'elle s'éloigne beaucoup de l'égalité. Nous prendrons

$$(304) \quad \delta = \frac{-3(274+t) \frac{dF}{dt}}{4A}.$$

La valeur de  $\delta$  peut s'obtenir d'une autre manière. Reprenons l'équation (230), dans laquelle nous supprimerons  $h$ , afin de la faire servir à la recherche d'une valeur *approchée* de  $\delta$ ; elle est

$$(305) \quad \int_0^e z dx = 2F.$$

Lorsque la couche d'épaisseur  $\delta$ , située d'abord en pleine

matière, vient à la surface, une tranche d'épaisseur  $dx$ , située à la distance  $x$  de cette surface, supporte une pression moindre, et la différence a pour valeur  $z$  par millimètre carré en négligeant la perte d'attraction due à l'affaiblissement de la densité.

La diminution en atmosphère est  $\frac{z}{10333}$ , et, si l'on nomme  $\beta$  le coefficient de compressibilité moyen, la dilatation de cette tranche de volume  $1 \times 1 \times dx$  a pour expression  $\frac{\beta_1 z dx}{10333}$ ;  $h$  étant la somme des quantités analogues, on en conclut

$$(306) \quad \delta = \frac{\beta_1}{10333} \int_0^e z dx = \frac{2\beta_1 F}{10333}.$$

Dans les applications numériques il ne faut pas perdre de vue que les équations simplifiées qui précèdent ne peuvent être employées qu'avec une certaine défiance relative au degré d'approximation qu'elles fournissent.

*Eau.* — On doit à M. Woolf des résultats très-dignes de confiance relatifs à l'eau prise à diverses températures; il a mesuré l'ascension dans des tubes capillaires, mais on verra plus loin qu'un calcul simple et facile permet d'en déduire la valeur de la force de réunion  $F$ , toutes les fois que la couche liquide adhérente aux parois conserve une épaisseur plus grande que  $s$  (\*). Voici le tableau des nombres utiles à connaître pour la question qui nous occupe :

(\*) Cette condition peut être remplie aux températures ordinaires et cesser de l'être à des températures élevées; cette remarque suffit pour écarter les difficultés examinées par M. Woolf dans une partie de son Mémoire (*Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, tome XLIX).

$t$	ASCENSION.	$\Delta$	F observé.	F calculé.	DIFFÉRENCES.
5,73	100,729	0,999977	7,5545	7,5534	0,0011
10,601	99,816	0,999676	7,4838	7,4838	0
20,3	97,964	0,998134	7,3336	7,3392	0,0056
32,39	95,875	0,994964	7,1544	7,1521	0,0023
39,376	94,540	0,992699	7,0387	7,0386	0,0001
51,486	92,275	0,987442	6,8337	6,8337	0
61,83	90,350	0,982325	6,6565	6,6504	0,0061
82,27	86,085	0,970474	6,2659	6,2659	0
100,00	»	»	»	5,9083	»

La formule empirique

$$F = 7,6330 - 0,013697t - 0,000035496t^2,$$

qui a servi à calculer les nombres contenus dans la cinquième colonne, représente suffisamment bien les résultats obtenus par l'expérience pour ce liquide irrégulier ; elle donne

$$\frac{dF}{dt} = -0,013697 - 0,000071t,$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = -0,000071.$$

Ces valeurs portées dans les équations (295) et (296) conduisent, en adoptant la température 100 degrés pour toutes les applications, à

$$i + e = 7,7875,$$

$$\chi = 0,0266.$$

Ce dernier résultat exprime, d'après sa définition, le travail correspondant à la quantité de chaleur qu'il faut ajouter pour élever de 1 degré la température du volume  $1 \times 1 \times \varepsilon$  porté à la surface, à celle  $1000 \text{ Ec}'/\varepsilon$  qui est nécessaire pour produire le même effet en pleine matière. Dans la couche  $\varepsilon$  à la surface, la chaleur spécifique de l'eau est donc augmentée de  $\frac{1}{50}$  en-

viron. Mais cette conséquence suppose  $\varepsilon$  égal à  $\frac{1}{388000}$  de millimètre, et jusqu'à présent cette quantité est mal connue et l'on peut seulement affirmer que ce chiffre provisoire ne peut être 39 fois trop grand ni 39 fois trop faible, puisque  $\varepsilon$  est compris entre une limite supérieure obtenue par M. Plateau dont il sera question plus loin et ma limite inférieure donnée par l'équation (232) dans laquelle  $\theta$  est inférieur à 1 :

$$(307) \quad \varepsilon > \frac{2F}{\Lambda}.$$

Les équations (297) et (298) montrent que les travaux interne et externe  $i$  et  $h$  produits pendant la dilatation qui résulte du passage du volume  $1 \times 1 \times \varepsilon$  de l'intérieur à la surface sont, le premier plus grand, le second moindre, quand la température est plus élevée, et que leurs variations pour une différence de 1 degré sont 0,03683 et -0,0105.

La dilatation totale de ce volume  $\varepsilon$ , quand il cesse d'être en pleine matière et passe à la surface, est comprise entre deux limites fournies par la double inégalité (303) dans laquelle il faut faire  $\Delta = 0,958634$ ;  $\alpha' = 0,00087$ ;  $\Lambda = 225000000$ ; on trouve

$$0,000000346 > \delta > 0,000000173.$$

La moyenne est

$$\delta = 0,00000026.$$

L'équation (306) lorsqu'on y porte cette valeur et  $F = 5,9083$  donne ensuite

$$\beta_1 = 0,000023.$$

La variation  $\delta$  du volume  $\varepsilon$  étant connue à  $\frac{1}{3}$  près, c'est-à-dire beaucoup mieux que la quantité  $\varepsilon$  elle-même, l'équation (300) donne

$$i = 5,85;$$

puis on tire de l'équation (295)

$$h = 1,94; \quad \theta = 0,33 = \frac{1}{3}.$$

Enfin, les deux valeurs de  $i$  (299) et (300), dans lesquelles on a introduit une relation précédemment établie entre les capacités et les attractions au contact, conduisent à

$$e' - e = 0,452.$$

Ce dernier nombre est moindre que celui qui a été trouvé expérimentalement, 0,592; la différence 0,14 doit être attribuée au travail chimique qui dans l'eau accompagne l'élévation de température.

Quoique encore très-imparfaite, la détermination des quantités dont les valeurs précédent me paraît bien propre à montrer le parti que l'on peut tirer de la thermodynamique pour l'étude de sujets qui, sans elle, seraient véritablement inabordable.

#### INFLUENCE DE LA PRESSION SUR LES FORCES DE RÉUNION.

Considérons maintenant une masse liquide à la température  $t_1$  qu'on maintiendra constante au moyen d'un réservoir indéfini destiné à fournir de la chaleur à certains moments et à en recevoir dans d'autres.

1° La pression externe exprimée en atmosphères étant d'abord  $p_1$  diminuons de 1 la surface  $S+1$  et emmagasinons, dans le volant d'une machine parfaite, le travail produit

$$F_1.$$

Le réservoir gagnera en même temps une quantité de chaleur équivalente à la somme

$$i_1 + h_1$$

du travail interne et du travail externe produits par le passage du volume  $1 \times 1 \times \varepsilon$  en pleine matière.

2° Abaissons la pression externe de  $p_1$  à  $p_2$ ; le changement

de densité modifiera la valeur  $A$  de l'attraction au contact en milligrammes par millimètre carré, de sorte qu'en pleine matière, la pression évaluée en atmosphères passera de  $\frac{A_2}{10333} + p_2$  à  $\frac{A_1}{10333} + p_1$ .

3° Augmentons la surface de 1; le volant perdra

$$F_1,$$

et le réservoir perdra la chaleur équivalente à

$$i_1 + h_1.$$

4° Repassons de la pression externe  $p_1$  à  $p_2$  ou, en pleine matière, de  $\frac{A_1}{10333} + p_1$  à  $\frac{A_2}{10333} + p_2$ ; cette opération est l'inverse de la seconde et, de leur ensemble, il ne résulterait pour le volant et le réservoir ni perte ni gain si nous n'avions actuellement un volume  $\epsilon$  de plus à la surface et de moins en pleine matière. Pour évaluer les différences qui en proviennent et que les équations doivent contenir, entrons dans les détails en faisant abstraction des quantités communes.

Dans la seconde opération, le volume  $\epsilon$  est en pleine matière, le coefficient de compressibilité ordinaire  $\beta$  est applicable (\*).

(\*) On est à tort dans l'usage de considérer ce coefficient trouvé par les expériences connues, comme se rapportant à la pression externe  $p$  établie sur le liquide du piézomètre; il est relatif à la pression  $\frac{A}{p} + p$ , quantité très-considérable (22500 atmosphères pour l'eau). Les changements qu'on peut faire subir à la pression externe sont si faibles en comparaison du premier terme, qu'on doit s'attendre à n'obtenir pour  $\beta$  que des variations difficiles à distinguer des erreurs commises dans les corrections de capacité du piézomètre. Ce n'est qu'en changeant la température qu'on peut modifier notablement la densité, et par suite  $\frac{A}{10333}$ ; le coefficient de compressibilité éprouve alors une variation due à deux causes agissant à la fois.



Dans le passage de  $\frac{\Lambda_2}{10333} + p_2$  à  $\frac{\Lambda_1}{10333} + p_1$ , ce volume  $\varepsilon$  produit un travail externe

$$\frac{10333}{2} \beta \varepsilon (p_2^2 - p_1^2),$$

qu'on emmagasine dans le volant et qui est le produit de la pression moyenne sur l'unité de surface  $\frac{10333}{2} (p_1 + p_2)$  par la variation de volume  $\beta \varepsilon (p_2 - p_1)$ .

Le réservoir perd la chaleur correspondant à la somme de ce travail externe et du travail interne. Pour une variation de volume égale à celle que produit dans un milligramme un changement de température d'un degré, le travail interne serait, comme on l'a vu plus haut,  $1000 E (c' - c) - \frac{10333 \alpha'}{\Delta}$ ; pour la dilatation actuelle, on a

$$\left[ 1000 E (c' - c) - \frac{10333 \alpha'}{\Delta} \right] \frac{\beta \varepsilon (p_2 - p_1) \Delta}{\alpha'}.$$

Sa valeur en fonction des attractions au contact s'obtient en remplaçant  $1000 E (c' - c)$  par  $a \alpha' \Delta$  ou par  $\frac{A \alpha'}{\Delta}$ ; elle est

$$(A - 10333) \beta \varepsilon (p_2 - p_1).$$

Dans la quatrième opération, on obtient deux résultats tout-à-fait analogues; ils ne diffèrent qu'en ce que le coefficient moyen de compressibilité à la surface  $\beta_1$  pendant le passage de  $p_1$  à  $p_2$  est autre que  $\beta$  et en ce que le volume est  $\varepsilon + \delta$ .

En définitive, l'ensemble de ces deux opérations fait gagner au volant

$$- \frac{10333}{2} (p_2^2 - p_1^2) [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta],$$

et au réservoir

$$\frac{10333}{2} (p_2^2 - p_1^2) [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta] + (A - 10333) (p_2 - p_1) [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta].$$

Toute la chaleur en jeu dans ces opérations, qui ramènent la masse liquide exactement à son état primitif, est à la température  $t_1$ ; le rendement de la machine est donc nul et le volant ne peut avoir finalement ni perdu ni gagné de la force vive; cette remarque conduit à une première équation. On en obtient une seconde en exprimant que le réservoir à  $t_1$  n'a lui-même fait ni perte ni gain; cela donne

$$(308) \quad F_2 - F_1 = \frac{10333}{2} (p_2^2 - p_1^2) [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta],$$

$$(309) \quad i_2 - i_1 + h_2 - h_1 + \frac{10333}{2} (p_2^2 - p_1^2) [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta] \\ + (A - 10333) (p_2 - p_1) [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta] = 0,$$

ou, en passant aux limites pour obtenir des résultats rigoureux,

$$(310) \quad \frac{dF}{dp} = 10333 p [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta],$$

$$(311) \quad \frac{di}{dp} + \frac{dh}{dp} + 10333 p [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta] \\ + (A - 10333) [(\varepsilon + \delta) \beta_1 - \varepsilon \beta] = 0.$$

L'équation générale (230) donne d'ailleurs

$$(312) \quad \frac{dF}{dp} + \frac{dh}{dp} = 2f\Delta \frac{d\Delta}{dp},$$

et, comme on a par définition  $\beta = -\frac{1}{u} \frac{du}{dp} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dp}$ , il vient

$$(313) \quad \frac{dF}{dp} + \frac{dh}{dp} = 2\beta f \Delta^2 = 2\beta (F + h).$$

De ces diverses relations on tire encore

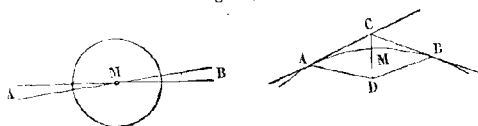
$$(314) \quad -\frac{di}{dp} = 2f\Delta^2 + \frac{A - 10333}{10333} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{dF}{dp}.$$

Le manque de données expérimentales s'oppose à toute application numérique de cette théorie de l'influence des changements de pression sur les valeurs des forces de réunion.

## PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

*Pression normale en un point d'une surface liquide en équilibre.* — Lorsque la surface d'un liquide en équilibre présente une portion plane, la force de contraction de la couche superficielle ne produit aucune pression normale. Dans tout autre cas, son effet dans cette direction en un point M quelconque (fig. 31) est facile à calculer. De ce point comme centre, avec

Fig. 31.



$ds$  pour rayon, traçons une circonférence sur la surface ou plutôt une courbe sphérique, menons par la normale  $n$  plans prolongés faisant entre eux des angles infiniment petits  $\frac{\pi}{n}$  égaux et désignons par  $z$  la valeur par unité de surface de la pression normale cherchée. Pour le cercle de rayon  $ds$ , la pression sera  $\pi ds^2 z$ . En A et en B, dans deux dièdres opposés, la tendance à la contraction donne deux forces égales entre elles qui s'exercent perpendiculairement à l'arc de circonférence et qui ont chacune pour valeur  $\frac{\pi ds}{n} F$ . Elle se coupent sur la normale sous un angle  $\frac{2 ds}{\rho}$ ,  $\rho$  étant le rayon de courbure de la section normale considérée. Leur résultante a pour valeur

$$(315) \quad \frac{2 \pi ds^2}{n \rho} F.$$

En l'ajoutant à la résultante des deux forces contenues dans le double dièdre perpendiculaire, on obtient pour somme

$$(316) \quad \frac{2 \pi F ds^2}{n} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right),$$

et, d'après le théorème d'Euler, on n'altérera point ce résultat si l'on regarde désormais  $\rho$  et  $\rho_1$  comme les deux rayons de courbure principaux. L'action normale totale s'obtient en multipliant par  $\frac{n}{2}$ ; en l'égalant à  $\pi ds^2 z$  et réduisant, on arrive à la formule

$$(317) \quad z = F \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right),$$

qui est très-générale et sera invoquée fréquemment dans la suite.

Il est bon de l'appliquer en particulier à plusieurs cas importants :

1° Dans le cas d'une surface engendrée par la révolution d'une ligne donnée autour de l'axe vertical des  $y$ , on a

$$(318) \quad z = \Delta y = F \left[ \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} + \frac{y'}{x \sqrt{1 + y'^2}} \right];$$

2° Pour un ombilic,

$$(319) \quad z = \frac{2F}{\rho};$$

3° Si l'une des courbures principales est nulle, il reste

$$(320) \quad z = \frac{F}{\rho}.$$

Les deux courbures peuvent changer de sens ensemble ou séparément, et il est nécessaire d'accorder aux signes une grande attention.

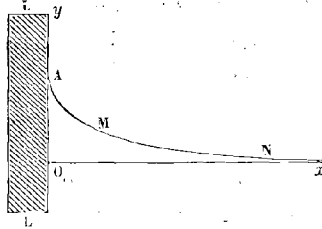
Ces formules sont depuis longtemps connues; on en trouve une démonstration simplifiée dans un Mémoire de M. Bertrand sur la capillarité (*Journal de Math. pures et appliquées*, t. XIII); ce Mémoire remarquable renferme aussi plusieurs théorèmes intéressants dont il sera question plus loin. La démonstration qui précède offre l'avantage d'être intimement liée avec ma

nouvelle manière d'expliquer les phénomènes de la capillarité. Ces phénomènes sont très-nombreux et difficiles à classer : nous examinerons d'abord ceux dans lesquels un seul corps agit sur lui-même, et nous étudierons ensuite les cas dans lesquels plusieurs corps différents agissent les uns sur les autres.

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES DANS LESQUELS UN SEUL CORPS  
AGIT SUR LUI-MÊME.

*Ascension auprès d'un plan mouillé.*— Quand on plonge une lame solide plane et verticale dans un liquide dont une couche plus épaisse que  $\epsilon$  adhère partout à sa surface, le solide est sans action sensible sur les particules liquides qui sont encore mobiles, de sorte qu'elles prennent des positions d'équilibre dues uniquement aux attractions mutuelles des diverses parties d'une seule substance. Il est évident que la surface à étudier est un cylindre à génératrices horizontales; la *fig. 32* repré-

Fig. 32.



sente une section par un plan perpendiculaire à ces génératrices. Au long de la lame LL, le liquide monte jusqu'au point A où la courbe est tangente à la droite OA que nous prendrons pour axe des  $y$ , celui des  $x$  coïncidant avec la surface primitive qui sera supposée indéfinie. En un point M quelconque, la pression normale due à la pesanteur est  $\Delta y$ ; la pression capillaire agit en sens contraire, et sa valeur est donnée par

l'équation (320). Puisqu'il y a équilibre, ces deux quantités sont égales et on a pour équation de la courbe AMN

$$(321) \quad \Delta y = \frac{-F y'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'angle de raccordement est nul, non-seulement en A avec l'axe des  $y$ , comme on vient de le dire, mais aussi au point N de rencontre avec l'axe des  $x$  à une distance finie ou infinie de l'origine; cela résulte de ce qu'au sommet d'un angle non nul, on aurait  $\rho = 0$ , et par suite (320)  $z = \Delta y = \infty$ , ce qui est impossible.

Multiplions l'équation (321) par  $2y'$  et intégrons; il vient, en déterminant la constante par l'hypothèse  $y = 0$ ,  $y' = 0$ ,

$$(322) \quad \Delta y^2 = 2F \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \right).$$

En faisant  $y' = \infty$ , on obtient l'ordonnée à la paroi OA ou  $h$ ,

$$(323) \quad h = \sqrt{\frac{2F}{\Delta}} = \sqrt{2f\Delta}.$$

En intégrant (322) on trouve pour équation finie de la courbe

$$(324) \quad x = \sqrt{f\Delta} \log \frac{2\sqrt{f\Delta} + \sqrt{4f\Delta - y^2}}{y(1 + \sqrt{2})} - \sqrt{4f\Delta - y^2} + \sqrt{2f\Delta}.$$

On détermine la constante en remarquant qu'on a  $y = \sqrt{\frac{2F}{\Delta}}$  pour  $x = 0$ ; on peut constater ensuite que  $y$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers l'infini, c'est-à-dire que la courbe a pour asymptote l'axe des  $x$ .

Pour obtenir la surface du segment AMNO, multiplions

(321) par  $dx = \frac{dy'}{y'}$ , il vient

$$(325) \quad \int y dx = -\frac{F}{\Delta} \int \frac{dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \left( -\frac{F y'}{\Delta \sqrt{1 + y'^2}} \right)_0^\infty = \frac{F}{\Delta}.$$

Le poids soulevé par unité de longueur prise sur la base hori-

zontale de la lame est donc

$$(326) \quad \Delta \int y \, dx = F.$$

En A la force contractile pour un rectangle horizontal  $1 \times \varepsilon$  est F; cette remarque fournit une seconde manière beaucoup plus simple d'atteindre le même but.

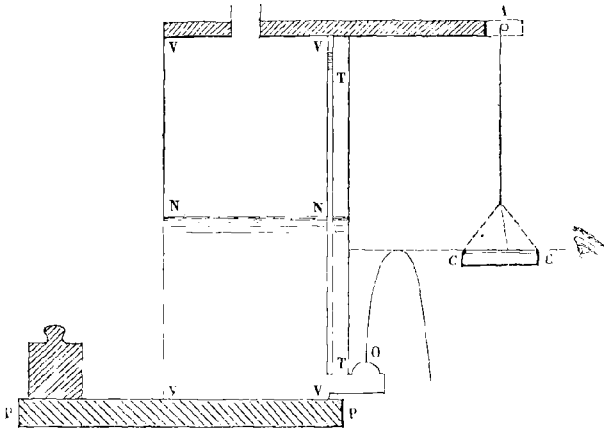
Les phénomènes capillaires sont très-nombreux et très-variés. Déjà le lecteur a été prévenu que, pour en faciliter l'étude, ils seront ici partagés en deux classes, dont la première comprend ceux qui reconnaissent pour cause les attractions mutuelles des molécules d'une seule substance homogène composée ou non, et la seconde ceux dans lesquels il faut tenir compte des attractions de molécules dissemblables. La théorie des phénomènes de la première classe que nous envisageons actuellement est plus difficile lorsque les surfaces présentent deux courbures non négligeables, parce que généralement les intégrations ne peuvent être effectuées et qu'il n'est pas toujours possible d'y suppléer par des artifices. Pour cette raison, nous examinerons *d'abord*, autant que possible, les questions dans lesquelles figurent des surfaces ayant une de leurs courbures principales nulle ou négligeable comme dans le cas précédent.

*Écoulement.* — Dans l'écoulement d'un liquide par un orifice circulaire de petit diamètre en mince paroi, le travail dépensé pour accroître la surface malgré la force de contraction qui s'y oppose n'est point négligeable; il en résulte, quand le jet s'échappe de bas en haut, une perte de hauteur de laquelle on peut déduire la force de réunion.

Pour ce genre d'expériences, nous avons employé un appareil composé d'un vase en fer-blanc VVVV (*fig. 33*), fixé sur une planche PP et contenant de l'eau, par exemple jusqu'en NN. Un tube de verre TT, communiquant avec le vase et divisé en millimètres, faisait connaître, après une légère correction relative à la capillarité, le niveau intérieur et la hauteur  $h$  au-

dessus de l'ouverture  $O$  correspondant au zéro de l'échelle. Une cuvette  $CC$ , pleine de mercure, s'élevant un peu au-dessus

Fig. 33.



des bords, pouvait être élevée ou abaissée sans secousse par le jeu d'un treuil  $A$  sur lequel s'enroulait le fil qui la portait, et cette disposition permettait de lire sur l'échelle la hauteur  $h'$  du sommet de la parabole liquide. Avant son inscription dans le tableau, on diminuait cette hauteur de la demi-épaisseur du jet en  $S$ . De temps en temps on mesurait  $h$  et la valeur correspondante de  $h'$ ; mais on avait soin de n'accepter ni les hauteurs assez grandes pour qu'en  $S$  le jet fût divisé, ni les hauteurs très-petites donnant un jet mal formé. Quelquefois le sommet de la parabole s'abaissait sans cause apparente, puis remontait par un bond; on attendait toujours que le régime fût bien établi pour prendre les mesures.

Pour obtenir une relation entre les quantités desquelles dépendent les résultats ainsi observés, considérons 1 milligramme d'eau au sommet de la parabole et égalons le travail  $h$ , dû à la chute, à la somme des travaux accomplis augmentée



de la force vive actuelle; on trouve

$$(327) \quad h = t + t' + t'' + h' + \frac{2F}{r'} + \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{2g},$$

en appelant :

$t$  le travail dû au frottement des molécules liquides les unes contre les autres;

$t'$  le travail dû au frottement des molécules liquides contre les bords de l'ouverture;

$t''$  le travail dû au frottement des molécules liquides contre l'air;

$r'$  le rayon du jet à son sommet;

$\alpha$  l'angle du premier élément de l'axe du jet avec l'horizon;

$a$  la vitesse initiale des molécules liquides.

$a \cos \alpha$  est la vitesse horizontale initiale du milligramme considéré; elle demeure sensiblement invariable et subsiste seule au sommet, où la force vive se réduit par conséquent à  $\frac{a^2 \cos^2 \alpha}{2g}$ ;

c'est le dernier terme de l'équation.

L'avant-dernier terme  $\frac{2F}{r'}$  est le travail dû à l'accroissement de surface. En effet,  $l$  étant la longueur occupée au sommet du jet par ce milligramme, sa surface libre est  $2\pi r'l$ , et le travail nécessaire pour la produire  $2\pi r'lF$ , d'après le théorème fondamental de la capillarité. D'ailleurs on a, par hypothèse,  $\pi r'^2 l \Delta = 1$ , et cela donne bien pour le travail  $2\pi r'lF$  la valeur  $\frac{2F}{r' \Delta}$ , ou  $\frac{2F}{r'}$  dans le cas de l'eau dont la densité est 1.

Supposons maintenant que  $h'$  décroisse de plus en plus et tende vers zéro, la quantité  $\frac{a^2 \cos^2 \alpha}{2g}$  aura pour limite zéro, les quantités  $t''$  et  $t$  tendront vers le frottement au départ qui est négligeable ici. Quant à  $t'$ , il s'est montré négligeable à toutes

vitesse, car il n'a pas changé sensiblement les résultats lorsque l'ouverture  $o$ , au lieu d'être percée dans du laiton de  $0,1$  d'épaisseur, l'a été dans du laiton de  $0,25$ . Le rayon du jet  $r'$  au sommet a été étudié expérimentalement ; il diminue avec  $h'$ , et sa limite a paru ne pas différer sensiblement du rayon  $r$  de l'ouverture ; on a donc

$$(328) \quad \lim h = \frac{2F}{r}.$$

Pour un liquide autre que l'eau, il faut rétablir le facteur  $\Delta$ , ce qui donne pour formule générale

$$(329) \quad \lim h = \frac{2F}{\Delta r}.$$

*Application à l'eau.* — Pour l'eau nous avons obtenu les résultats indiqués dans le tableau suivant, où  $h$  et  $h'$  sont relatifs au diamètre  $1,5$  ; tandis que  $h_1$  et  $h'_1$ ,  $h_2$  et  $h'_2$  sont relatifs aux diamètres  $2$  et  $2,5$  ; la température était  $5$  degrés :

$h$	$h'$	$h_1$	$h'_1$	$h_2$	$h'_2$
38	15	$27 \frac{1}{2}$	12	28	$14 \frac{1}{2}$
$40 \frac{1}{2}$	16	$31 \frac{1}{2}$	14	30	$25 \frac{1}{2}$
42	19	34	18	48	34
$47 \frac{1}{2}$	22	$42 \frac{1}{2}$	24	$53 \frac{1}{2}$	38
$47 \frac{1}{2}$	$24 \frac{1}{2}$	$42 \frac{1}{2}$	$24 \frac{1}{2}$	$62 \frac{1}{2}$	46
$51 \frac{1}{2}$	26	49	$29 \frac{1}{2}$	63	47
$56 \frac{1}{2}$	31	$51 \frac{1}{2}$	$33 \frac{1}{2}$	68	50
$62 \frac{1}{2}$	36	$66 \frac{1}{2}$	$44 \frac{1}{2}$	$77 \frac{1}{2}$	60
$63 \frac{1}{2}$	37	$66 \frac{1}{2}$	$45 \frac{1}{2}$	$84 \frac{1}{2}$	65
$68 \frac{1}{2}$	41	$76 \frac{1}{2}$	$53 \frac{1}{2}$	86	67
$73 \frac{1}{2}$	44	85	$61 \frac{1}{2}$	$97 \frac{1}{2}$	76
$76 \frac{1}{2}$	47				
$86 \frac{1}{2}$	55				

Afin de tirer parti de ces données, nous avons tracé des lignes ayant pour abscisses les  $h'$  et pour ordonnées les  $h$ ; elle n'ont pas montré de courbure appréciable et, en prolongeant jusqu'à l'axe des  $h$  les droites ainsi obtenues, nous avons trouvé la limite cherchée. Nous avons porté d'ailleurs sur l'axe des  $h$ , à partir de l'origine, les valeurs

$$\frac{2F}{r} = 20,0,$$

$$\frac{2F}{r_1} = 15,0,$$

$$\frac{2F}{r_2} = 12,0,$$

obtenues au moyen de l'aréomètre, et il y a eu accord satisfaisant, comme on peut le voir sur les figures 34, 35, 36, relatives aux diamètres 1,5, 2 et 2,5.

Fig. 34.

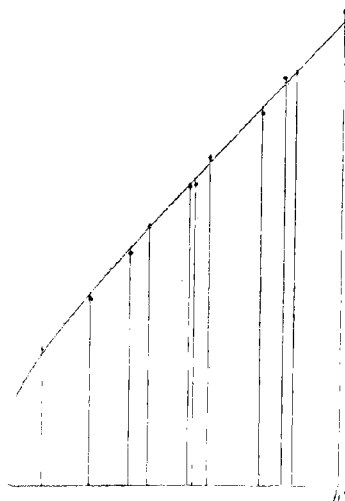


Fig. 35.

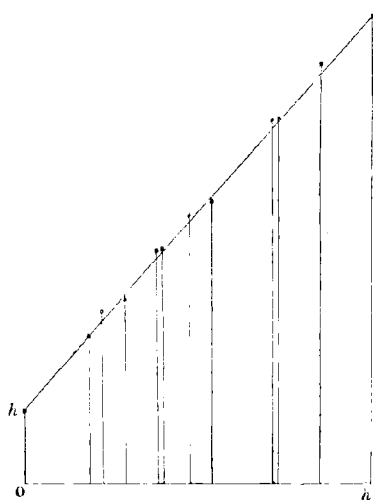
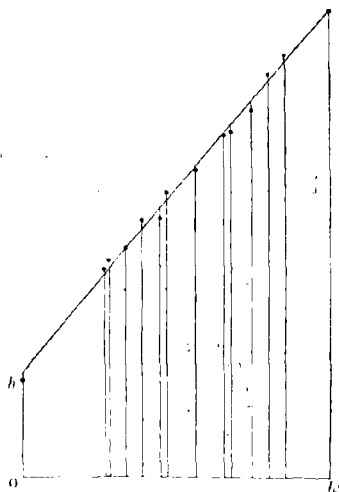


Fig. 36.



*Application au sulfure de carbone.*—Nous avons tenu à étudier avec le même appareil l'écoulement d'un autre liquide à force de réunion notablement différente, et nous avons choisi pour cela le sulfure de carbone du commerce, pour lequel l'aréomètre nous a donné  $F=3,62$ . La densité était 1,251, et  $\frac{2F}{r\Delta}$  avait pour valeurs

7,7      5,8      4,6.

Voici le tableau des résultats obtenus et les lignes qui les représentent :

$h$	$h'$	$h_1$	$h'_1$	$h_2$	$h'_2$
51	39	$46\frac{1}{2}$	37	61	$48\frac{1}{2}$
45	34	42	34	52	$41\frac{1}{2}$
39	28	37	29	44	$32\frac{1}{2}$
$35\frac{1}{2}$	24	31	23	$39\frac{1}{2}$	$30\frac{1}{2}$
$30\frac{1}{2}$	19	23	16	34	$24\frac{1}{2}$
$24\frac{1}{2}$	14	$18\frac{1}{2}$	12	30	$22\frac{1}{2}$
		$12\frac{1}{2}$	6	$24\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$

Fig. 37.

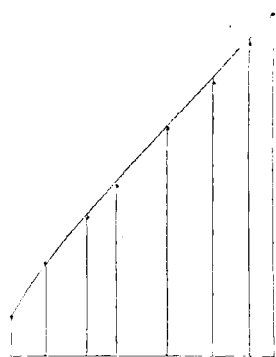


Fig. 38.

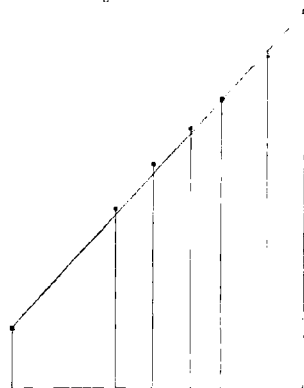
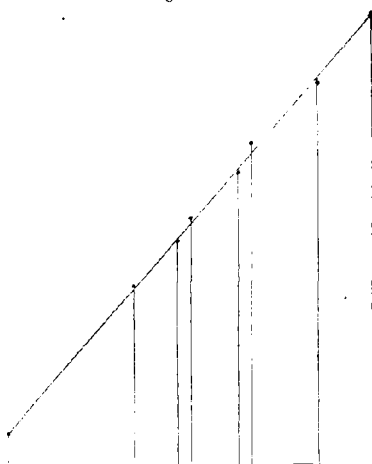


Fig. 39.



On voit qu'ici comme pour l'eau l'accord est satisfaisant, et qu'il est impossible de contester la relation (329). Ainsi, les forces de réunion exercent sur l'écoulement des liquides une influence très-réelle, et cette influence est très-appreciable dans le cas des petites ouvertures; on comprend d'ailleurs facilement que la vitesse de sortie du liquide doit être diminuée par la pression capillaire. Toutefois, la précision avec laquelle

ce phénomène fait connaître les forces de réunion est beaucoup moindre que celle donnée par l'aréomètre, et les expériences qui précèdent me paraissent fournir plutôt une vérification remarquable de l'une des conséquences de la force de contraction qu'un exemple de la manière d'en déterminer une valeur suffisamment approchée. Je reviendrai plus loin sur ce sujet à propos de l'anomalie singulière que présente l'eau de savon; on verra ce qui se passe dans l'écoulement venir confirmer complètement l'explication de cette dérogation apparente aux lois de l'attraction capillaire.

Nous venons d'étudier une veine dont un élément peut être considéré comme à peu près cylindrique, pendant que les molécules qui composent cette veine se meuvent avec rapidité; nous allons étudier maintenant un cylindre vertical en repos, et nous le supposerons altéré par la pesanteur, comme cela arrive dans les expériences faites par Simon, de Metz, avec un ou deux disques mouillés.

« Appliquons (\*) d'abord le calcul au double problème dont voici l'énoncé :

» Étant donné un disque qu'on élève horizontalement à partir de la surface libre d'un liquide qui le mouille, déterminer :

» 1<sup>o</sup> la hauteur maximum que peut atteindre ce plan, avant que le liquide s'en détache ;

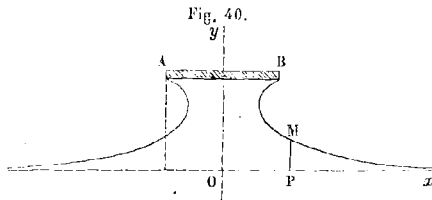
» 2<sup>o</sup> le poids maximum du liquide soulevé et la hauteur correspondante du disque au-dessus de la surface libre.

» Il est clair que la pression extérieure n'a aucune influence sur le phénomène puisqu'elle s'exerce sur la masse liquide soulevée, par l'intermédiaire de la surface capillaire et aussi,

(\*) Les 28 pages suivantes sont dues à mon fils R. Dupré, sous-ingénieur des constructions navales; elles sont extraites d'un travail plus étendu et portant sur un plus grand nombre de questions relatives en général à la capillarité.

en sens contraire, par le liquide du vase; Simon l'a d'ailleurs vérifié dans des expériences spéciales faites sous le récipient d'une machine pneumatique.

» Les deux seules forces agissantes sont la pesanteur et la force contractile de la surface capillaire; leurs actions se contrebalancent. Si donc nous prenons pour axes des coordonnées (fig. 40) la verticale  $oy$  passant par le centre du disque et qui



est axe de révolution de la surface à étudier, puis la perpendiculaire  $ox$  coïncidant avec la surface libre indéfinie du liquide, l'équation de la méridienne de la surface capillaire est (317)

$$\Delta y = F \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right);$$

$\Delta$  est la densité du liquide,

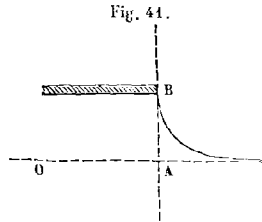
$F$  sa force de réunion,

$\rho$  et  $\rho_1$  les rayons de courbure principaux.

» La forme de cette surface dépend de l'élévation du disque au-dessus du liquide. Si nous supposons que la hauteur du disque soit d'abord nulle et croisse peu à peu, l'angle qu'il fait avec la surface est égal d'abord à deux droits, puis diminue d'une manière continue; car, là où le liquide est soulevé, la surface doit être concave, au moins dans un sens, pour exister.

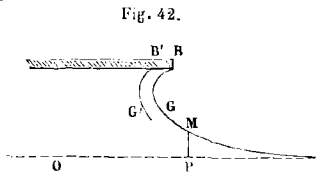
» Il arrivera donc un moment où l'élément le plus élevé de la méridienne sera vertical: nous aurons dans ce cas le même résultat que si le disque horizontal était remplacé par un cylindre vertical de même diamètre. Car, l'équilibre existant, on

peut concevoir solidifié tout le liquide compris dans l'intérieur du cylindre AB (fig. 41) sans que cet équilibre soit troublé.



» Si, à partir de ce moment, on continue à soulever le plan, la méridienne capillaire deviendra, dans sa partie supérieure, concave du côté de l'axe des  $x$ , et enfin tout le liquide soulevé retombera.

» Cette séparation ne peut pas se produire en un point quelconque M (fig. 42), car la courbure peut toujours augmenter en ce point de manière à faire équilibre à la colonne soulevée, si cela n'a pas déjà lieu.



» Il faut donc que la séparation s'effectue en B. Or quand l'angle que la méridienne  $\gamma$  fait avec le disque n'est pas nul, le liquide ne peut pas retomber. Car, si on admet que BG soit venu en B'G', la courbure étant infinie en B', la force normale serait elle-même infinie et ramènerait B' en B. On ne peut pas dire, il est vrai, que cette force normale soit infinie, parce que la démonstration de la formule qui en donne la valeur suppose le rayon de courbure très-grand par rapport à  $\epsilon$ ; mais nous pouvons affirmer que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, la force normale serait très-considérable, et cela suffit pour qu'on puisse tirer la conclusion qui précède.



» Il peut se faire, cependant, que la séparation n'ait point lieu en B; cela arrive dans le cas où, par suite de l'élevation du disque, le cercle de gorge se réduit à zéro : ce cas sera examiné plus loin.

» Ce lemme une fois démontré, on peut résoudre les deux problèmes précédents ou au moins indiquer la marche à suivre pour en découvrir la solution.

» Il est clair que la hauteur  $y_1$  du disque au-dessus de la surface libre détermine la surface capillaire et l'effort à exercer pour soutenir le système; il existe donc deux relations distinctes donnant, en fonction de  $y_1$ : l'une la forme de la méridienne capillaire, c'est l'intégrale seconde de l'équation

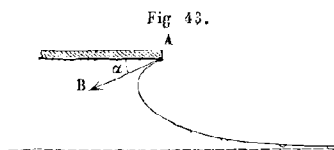
$$(330) \quad \Delta y = F \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right) = F \left[ \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} + \frac{y'}{x \sqrt{1 + y'^2}} \right];$$

l'autre, la valeur des poids qui maintiennent le disque dans sa position.

» Soit  $q$  la somme de ces poids; elle fait équilibre :

1° à la succion  $\pi R^2 \Delta y$ , exercée sous le disque de rayon  $R$ , par l'eau soulevée ;

2° à la traction de la surface capillaire. Cette traction s'exerce suivant AB (fig. 43), et elle est égale à  $F$  par millimètre. C'est



donc en tout  $2\pi RF$ . Mais le poids  $q$  ne fait équilibre qu'à la somme des composantes verticales  $2\pi RF \sin \alpha$  ou encore  $2\pi RF \frac{y'_1}{\sqrt{1 + y'^2_1}}$ , en désignant par  $y'_1$  la valeur de  $y'$  particularisée pour le point A.

» On a donc

$$(331) \quad q = \pi R^2 \Delta y_1 + 2\pi R F \frac{y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2}}.$$

» En intégrant une première fois l'équation (330) on obtient

$$(332) \quad y' = \varphi_1(x, y, c).$$

La constante  $c$  se détermine en remarquant que pour  $x = \infty$  on a  $y = 0$  et  $y' = 0$ ; donc le rayon  $R$  n'entre point explicitement dans cette relation, qui contient seulement  $\frac{F}{\Delta}$ , et peut être mise sous la forme

$$(333) \quad y' = \varphi\left(x, y, \frac{F}{\Delta}\right).$$

De cette remarque il résulte que, si l'on compare deux disques, les méridiennes n'ont aucun point commun ou coïncident complètement.

» Une seconde intégration introduit  $R$  et  $y_1$ ; car, pour déterminer la constante  $c'$  il faut faire  $x = R$  et  $y = y_1$ ; donc

$$(334) \quad \psi\left(x, y, \frac{F}{\Delta}, c'\right) = 0.$$

» **PREMIER PROBLÈME.** — Déterminer le maximum de  $y$ .

» Or on sait que, quand  $y$  est maximum, l'angle de la méridienne capillaire avec le disque est nul; il suffit donc dans (333) de faire

$$y' = 0 \quad \text{et} \quad x = R.$$

La valeur donnée par cette équation pour  $y$  est le maximum cherché; elle contient  $\frac{F}{\Delta}$  et  $R$ ; le maximum dépend donc de ces deux quantités: c'est ce que confirment les expériences de Simon (*Annales de Chimie et de Physique*, 1851, t. XXXII, p. 31).

» **SECOND PROBLÈME.** — *Déterminer le poids maximum du liquide soulevé et la hauteur correspondante du disque au-dessus de la surface libre.*

» L'expression générale (331) du poids établissant l'équilibre pour une hauteur  $y_1$  du disque est fournie par

$$q = \pi R^2 \Delta y_1 + 2\pi R F \frac{y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2}}$$

On égalera à zéro la dérivée de cette expression de  $q$ , ce qui donnera une relation propre au maximum. En la joignant aux équations précédentes particularisées pour  $x = R$ ,  $y = y_1$ ,  $y' = y_1'$ , on peut calculer les quantités  $y_1$  et  $y_1'$  qui, portées dans (331), donnent l'effort maximum en fonction de  $R$  et  $\frac{F}{\Delta}$ .

» Dans cette recherche, on peut tirer d'abord  $y_1'$  de (333) et mettre sa valeur dans (331); on a alors à chercher le maximum d'une fonction d'une seule variable  $y_1$ , ce qui fournit  $y_1$  et par suite  $q$ .

» On peut encore laisser l'expression de  $q$  telle qu'elle se présente dans (331), et, dans ce cas, il faut trouver le maximum d'une fonction de deux variables  $y_1$  et  $y_1'$  liées entre elles par (333). Les valeurs déterminées par ce calcul de maximum seront substituées dans l'expression générale de  $q$  et en fourniront la plus grande valeur.

» *Résolution des deux problèmes pour le cas d'une seule courbure.* — Comme on ne peut pas intégrer l'équation (330), il est impossible d'obtenir la solution analytique complète des questions étudiées expérimentalement par Simon; je vais maintenant considérer le cas idéal plus simple d'un rectangle de largeur  $2L$  et indéfini en longueur; dans les calculs, le poids  $q$  sera celui qui correspond à l'unité de longueur et la méridienne capillaire sera remplacée par l'intersection de la surface courbe et d'un plan perpendiculaire à la longueur du rectangle.

Le résultats expérimentaux de Simon ne pourront plus immédiatement servir pour les vérifications ; mais on en pourra déduire au moyen de courbes ou de formules d'interpolation ce qui se passerait si la seconde courbure était nulle, c'est-à-dire dans le cas du rectangle.

» Avec l'hypothèse actuelle, les équations (317) et (331) deviennent

$$(335) \quad \Delta y = \frac{F}{\rho} \quad \text{ou} \quad \Delta y = \frac{F y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et

$$(336) \quad q = 2L \Delta y_1 + 2F \frac{y'}{\sqrt{1 + y_1'^2}}.$$

Dans l'équation (335) il faut prendre le radical avec le signe + pour la portion de la courbe qui est située au-dessous de la ligne de gorge et le signe — pour la portion supérieure.

» On a donc, en attribuant au radical sa valeur absolue :

» Pour la partie inférieure

$$\Delta y = + \frac{F y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

» Pour la partie supérieure

$$\Delta y = - \frac{F y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant une première fois, il vient pour la partie inférieure

$$\Delta y^2 = c - \frac{2F}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

ou, en remarquant que pour  $y = 0$  on a  $y' = 0$ ,

$$(337) \quad \Delta y^2 = 2F \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \right).$$

Cette relation s'applique jusqu'à la ligne de gorge où  $y'$  de-

vient infini, ce qui donne

$$(338) \quad \Delta y^2 = 2F, \text{ d'où } y = \sqrt{\frac{2F}{\Delta}}.$$

Au-dessus, l'intégrale est

$$\Delta y^2 = c' + \frac{2F}{\sqrt{1+y^2}},$$

et la constante se détermine par l'application à la ligne de gorge, ce qui donne

$$(339) \quad c' = 2F = c \text{ et } \Delta y^2 = 2F \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right).$$

Cette double équation, qu'on peut écrire

$$(340) \quad \Delta y^2 = 2F \left( 1 \mp \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right),$$

le signe supérieur s'appliquant à la partie basse de la méridienne, ne contient ni  $L$  ni  $x$ ; la relation qui lie le coefficient angulaire à l'ordonnée est indépendante de ces quantités, et, par suite, si l'on considère deux rectangles quelconques à bords parallèles et élevés à la même hauteur, les surfaces capillaires sont parallèles, c'est-à-dire capables de coïncider complètement, si l'on donne à l'une des deux un mouvement de translation horizontale d'une étendue suffisante. De plus, comme cette équation ne contient pas non plus l'élévation du plan au-dessus de la surface libre du liquide, nous pouvons dire que

» Si le rectangle s'élève ou s'abaisse, la surface capillaire ne fait que se transporter horizontalement et grandir aux dépens de la portion parasite, ou bien diminuer tandis que cette portion augmente.

» Ce théorème ne s'applique point au cas de deux courbures. En effet, pour qu'il soit vrai, il faut que  $y'$  soit fonction de  $y$  seulement :

$$y' = \varphi(y);$$

alors on aurait

$$y'' = y' \varphi'(y) = \psi(y),$$

et, après la substitution de ces valeurs de  $y'$  et  $y''$  dans (330), on voit que  $\frac{F}{\Delta}$  ne changeant pas,  $x$  devrait être déterminé par  $y$  seul, et quelles que soient les valeurs de  $L$  et  $y_1$ , ce qui est impossible.

» L'équation (340) montre que la ligne de gorge est élevée au-dessus de la surface libre du liquide d'une quantité  $\sqrt{\frac{2F}{\Delta}}$ , égale à la racine carrée du double de la force de réunion divisé par la densité.

» Enfin les surfaces capillaires relatives à divers liquides ayant des équations qui ne diffèrent que par la constante  $\frac{2F}{\Delta}$  sont toutes semblables.

» PREMIER PROBLÈME. — Pour avoir la plus grande hauteur, il faut faire  $y' = 0$  dans (339); on trouve alors

$$(341) \quad y_1 = \sqrt{\frac{4F}{\Delta}};$$

on peut encore la déduire de l'équation (339), mise sous une autre forme, puisque  $y' = \tan \alpha$  on a, par substitution,

$$(342) \quad \Delta y^2 = 2F (1 + \cos \alpha),$$

et une discussion très-simple montre que le signe + s'applique à toute la courbe. En appliquant cette relation au point de rencontre de la courbe et du disque, et prenant la dérivée, on trouve

$$\Delta y_1 y'_1 = -2F \sin \alpha,$$

et l'on voit que  $\sin \alpha$  est nul en même temps que  $y'_1$ ; alors (342) donne pour  $y_1$  la valeur déjà obtenue.

» Cherchons maintenant si cette loi se vérifie pour l'eau.  
Pour ce liquide

$$F=7,5, \quad \Delta=1,$$

et par conséquent

$$y_1=5,48.$$

Or, si nous traçons une courbe ayant pour abscisses les inverses des diamètres des disques expérimentés par Simon, et pour ordonnées les hauteurs maxima observées (page 31), cette courbe aura pour ordonnée à l'origine la valeur correspondant à  $2R=\infty$ , c'est-à-dire au cas du rectangle. La courbe d'erreur fournit

$$y_1=5,10.$$

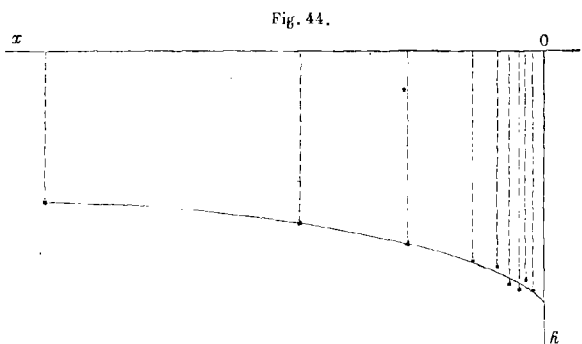
» Ce nombre est peu différent de celui que le calcul nous a fourni; l'erreur relative est seulement  $\frac{1}{14}$ .

» Considérons maintenant des liquides de natures différentes, les hauteurs maxima devant être (341) proportionnelles à  $\sqrt{\frac{F}{\Delta}}$  et égales au double de ce radical; mettons ces quantités dans un tableau pour en faciliter la comparaison :

NOMS DES SUBSTANCES.	$\Delta$	F	$y_1$ observé.	$y_1$ calculé ou $2\sqrt{\frac{F}{\Delta}}$	ERREURS relatives.
Eau.....	1	7,5	5,10	5,48	$\frac{1}{14}$
Alcool.....	0,815	2,47	2,80	3,48	$\frac{1}{5}$
Éther.....	0,726	1,88	2,24	3,22	$\frac{1}{3}$
Huile d'olive.....	0,915	3,48	3,47	3,90	$\frac{1}{9}$
Huile de naphth....	0,847	2,65	3,01	3,54	$\frac{1}{7}$

Tous ces résultats sont trop faibles; Simon, par exemple, donne pour l'eau 5,10 au lieu de 5,48. Cette différence s'explique par une légère obliquité du disque ou une secousse, ce qui est très-difficile à éviter complètement. Ces deux causes d'erreurs se montrent, ainsi qu'on devait s'y attendre, d'autant plus à redouter, que les liquides sont plus fluides.

» Je donnerai uniquement ici, comme exemple, la courbe relative à l'eau; ses dimensions étant réduites au tiers, elle donne le nombre cherché avec moins d'approximation certaine que celle qui a conduit au chiffre 5,10.



» Dans tout ce qui vient d'être dit la largeur  $2L$  du rectangle employé a été supposée assez considérable pour que les deux surfaces capillaires opposées ne pussent se rencontrer avant que le disque ait atteint la hauteur  $\sqrt{\frac{4F}{\Delta}}$ .

» Il est intéressant, étant donnée une largeur  $2L$  suffisamment faible, de calculer pour quelle hauteur cette rencontre a lieu, et de déterminer aussi la largeur pour laquelle le liquide se détache du disque en même temps que les deux surfaces capillaires se rencontrent.

» Pour résoudre ces questions, il faut intégrer de nouveau



l'équation (339). Résolue par rapport à  $y'$ , elle devient

$$(343) \quad y' = \frac{y \sqrt{\Delta(4F - \Delta y^2)}}{\Delta y^2 - 2F},$$

et le second membre doit être pris avec le signe  $+$ , car nous ferons usage de la partie supérieure de la courbe pour laquelle  $y'$  est positif. En séparant les variables, on a

$$(344) \quad dx = \frac{\left(y^2 - \frac{2F}{\Delta}\right) dy}{y \sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y^2}} = \frac{y dy}{\sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y^2}} - \frac{\frac{2F}{\Delta} dy}{y \sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y^2}}.$$

» Le premier terme de la valeur de  $dx$  a pour intégrale  $-\sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y^2}$ ; quant au second, on l'intègre en employant une des transformations connues, en posant par exemple  $\sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y^2} = \sqrt{\frac{4F}{\Delta}} + z$ , ce qui donne facilement le résultat cherché :

$$(345) \quad x + c = -\sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y^2} + \sqrt{\frac{F}{\Delta}} \ln \frac{\sqrt{\frac{4F}{\Delta}} + \sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y^2}}{y}.$$

» Prenons pour axe des  $y$  la tangente verticale à la courbe, laquelle rencontre la ligne de gorge; il faudra (338) que, pour  $x = 0$ , on ait  $y = \sqrt{\frac{2F}{\Delta}}$ , ce qui donne pour valeur de la constante

$$(346) \quad -c = \sqrt{\frac{2F}{\Delta}} - \sqrt{\frac{F}{\Delta}} \ln(1 + \sqrt{2}) = 0,532841 \sqrt{\frac{F}{\Delta}}.$$

» L'équation (345), dans laquelle on suppose cette valeur à  $c$ , donne, quand on y fait  $y = \sqrt{\frac{4F}{\Delta}}$ , la valeur maxima de  $L$ ,

pour laquelle il y a rencontre des lignes de gorge :

$$(347) \quad L_2 = \sqrt{\frac{F}{\Delta}} \left[ \sqrt{2} - l(1 + \sqrt{2}) \right] = 0,532841 \sqrt{\frac{F}{\Delta}}.$$

» La loi indiquée par cette formule peut s'énoncer ainsi :

» *Pour divers liquides, la largeur de rectangle pour laquelle la séparation se fait à la fois par rencontre des lignes de gorge et par décollement est proportionnelle à la racine carrée du rapport de la force de réunion du liquide à sa densité.* Dans le cas de l'eau, on trouve  $2L_2 = 2,92$ . Pour un autre liquide, il suffit de multiplier ce nombre par le rapport  $\sqrt{\frac{F_1}{\Delta_1}} : \sqrt{\frac{F}{\Delta}}$ .

» Enfin, étant donnée la hauteur  $y_1$  à laquelle on veut amener un rectangle, on peut chercher quelle largeur il doit avoir pour que les deux surfaces capillaires soient alors en contact. La solution est fournie par l'équation (345), dans laquelle il faut faire  $y = y_1$  et  $x = L$ , ce qui donne

$$(348) \quad L = -c - \sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y_1^2} + \sqrt{\frac{F}{\Delta}} l \left( \frac{\sqrt{\frac{4F}{\Delta}} + \sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y_1^2}}{y_1} \right).$$

» Il est clair que  $y_1$  ne peut varier qu'entre  $\sqrt{\frac{2F}{\Delta}}$  et  $\sqrt{\frac{4F}{\Delta}}$ , c'est-à-dire, pour le cas de l'eau, entre 3,873 et 5,478. Voici, pour ce liquide, un tableau de quelques valeurs correspondantes de  $y_1$  et de  $2L$  :

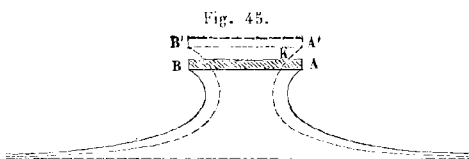
$y_1$	$2L$
3,873	0,0000
4,194	0,0275
4,515	0,1161
4,836	0,2828
5,157	0,5741
5,478	2,9184

» SECOND PROBLÈME. — *Poids maximum du liquide soulevé.*  
— *Hauteur correspondante du disque au-dessus de la surface libre.*

» L'équation générale (336) qui lie le poids d'eau soulevée à la hauteur est

$$q = 2L\Delta y_1 + 2F \frac{y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2}}.$$

» On peut trouver géométriquement la relation entre  $y_1$  et  $y_1'$  propre au maximum de  $q$ . En effet, c'est le rectangle qui supporte finalement tout le poids de l'eau soulevée, et ce poids est maximum en même temps que le volume; mais, lorsqu'on élève ou abaisse (fig. 45) le rectangle de AB en A'B', par



exemple, les surfaces capillaires se transportent horizontalement, et l'on a pour accroissement du volume

$$2L dy_1 - 2y_1 \times AK.$$

Pour que  $y_1$  soit la valeur cherchée, il faut donc que l'on ait

$$2L dy_1 - 2y_1 \times AK = 0,$$

ou

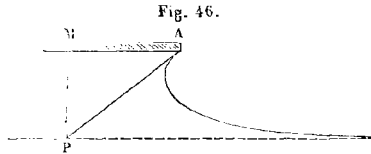
$$(349) \quad y_1' = \frac{y_1}{L},$$

théorème qui peut s'énoncer ainsi :

» *La tangente de l'angle que fait la surface capillaire avec le rectangle, dans le cas du maximum de  $q$ , égale le rapport de l'élévation du plateau à sa demi-largeur ;*

» Ou encore

» *L'angle de la surface capillaire avec le rectangle, dans le cas du maximum de  $q$ , s'obtient (fig. 46) en joignant le bord du*



*rectangle au pied de la perpendiculaire abaissée du milieu du plateau sur la surface libre du liquide.* »

» *Remarque.* Supposons  $dy_1$  constant et  $AK$  croissant,  $y'_1$ , c'est-à-dire  $\frac{dy}{AK}$ , diminue, ce qui ne peut arriver pour cette courbe capillaire sans que  $y_1$  augmente; donc, en vertu de (349),  $L$  doit croître. Ainsi :

» *Lorsqu'on prend des rectangles de largeurs variables, les hauteurs propres au maximum croissent avec ces largeurs.*

» Ce corollaire se verra géométriquement plus loin.

» Quant au théorème qui précède, on peut aussi l'établir au moyen de la théorie générale des maxima. Nous avons à trouver le maximum de  $q$ , c'est-à-dire (336) de la fonction

$$2L\Delta y_1 + 2F \frac{y'_1}{\sqrt{1+y_1'^2}},$$

sachant que  $y_1$  et  $y'_1$  sont liées par l'équation (339) :

$$\Delta y_1^2 - 2F \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+y_1'^2}} \right) = 0.$$

En posant  $y'_2 = \tan \alpha_1$ , ces relations prennent les formes suivantes :

$$(350) \quad q = 2L\Delta y_1 + \overset{q}{2}F \sin \alpha,$$

$$(351) \quad \Delta y_1^2 - 2F(1 + \cos \alpha) = 0.$$

En égalant à zéro la dérivée de la valeur de  $q$  et celle du premier membre de (351), il vient

$$\begin{aligned}\Delta y_1 dy_1 + F \sin \alpha_1 d\alpha_1 &= 0, \\ L \Delta dy_1 + F \cos \alpha_1 d\alpha_1 &= 0.\end{aligned}$$

L'élimination de  $dy_1$  donne immédiatement la valeur (349) trouvée précédemment pour  $\tan \alpha$  ou  $y'_1$ .

» *Relation entre les valeurs de  $L$  et de  $y_1$  propres au maximum de  $q$ .* — Portons dans (339) la valeur de  $y'_1$  tirée de (349); il vient

$$(352) \quad L = \frac{y_1^2 - \frac{2F}{\Delta}}{\sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y_1^2}}.$$

$L$  doit toujours être positif; sa valeur varie de 0 à  $\infty$  lorsque  $y_1^2$  croît de  $\frac{2F}{\Delta}$  à  $\frac{4F}{\Delta}$ . Du reste, nous pouvons représenter géométriquement la variation de  $y_1$  avec  $L$ . Pour cela posons

$$y_1^2 = Y \quad \text{et} \quad L^2 = X;$$

l'équation (352), élevée au carré, devient, par l'introduction de ces nouvelles variables,

$$(353) \quad XY + Y^2 - \frac{4F}{\Delta} X - \frac{4F}{\Delta} Y + \frac{4F^2}{\Delta^2} = 0.$$

Sous cette forme elle représente une hyperbole dont le centre a pour coordonnées

$$X_c = -\frac{4F}{\Delta}, \quad Y_c = \frac{4F}{\Delta}.$$

La direction des axes est fournie par

$$\tan 2\alpha = -1.$$

Donc

$$\alpha = \frac{7\pi}{8}.$$

Enfin les axes ont pour longueurs

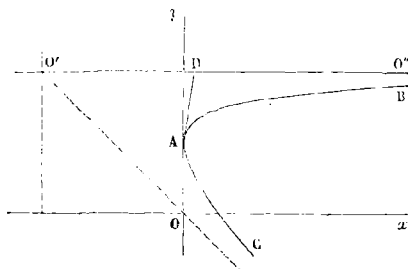
$$a = \frac{\frac{2F}{\Delta}}{1 + \sqrt{2}},$$

$$b = \frac{\frac{2F}{\Delta}}{1 - \sqrt{2}};$$

l'une des asymptotes passe par l'origine et l'autre est horizontale.

» Si nous traçons (fig. 47) cette hyperbole, nous voyons que la branche supérieure est parasite comme fournissant des va-

Fig. 47.



leurs négatives pour  $X$  et par suite des valeurs imaginaires pour  $L$ . Quant à la branche inférieure, elle vient toucher l'axe des  $Y$  au point  $A$ , dont l'ordonnée est  $\frac{2F}{\Delta}$ , et elle a pour asymptote supérieure la droite  $y = \frac{4F}{\Delta}$ . Elle redescend au-dessous du point  $A$ , en se rapprochant indéfiniment de  $oo'$ .

» L'examen de l'équation (340) nous montre que  $Y$  est toujours compris entre  $\frac{2F}{\Delta}$  et  $\frac{4F}{\Delta}$ . Donc la branche  $AC$  est parasite et  $AB$  seule peut être utile.

» J'ai fait voir précédemment qu'un rectangle ne peut pas toujours entraîner le liquide jusqu'à ce qu'il atteigne la hauteur  $\sqrt{\frac{4F}{\Delta}}$ , et que cette exception se produit par la rencontre des lignes de gorge. Pour la même raison, lorsque L est suffisamment petit, il est possible que le poids du liquide soulevé n'atteigne point sa valeur maximum, mais ait seulement une plus grande valeur correspondant au moment où les deux gorges se rencontrent. Cherchons quelle largeur doit avoir un rectangle pour que les gorges se rencontrent au moment où ce plan atteint la hauteur  $y_1$ , correspondant au maximum de  $q$ .

» Pour cela, il faut faire  $x = L$  et  $y = y_1$  dans l'intégrale (345). Cela donne

$$(354) \quad x = \sqrt{\frac{F}{\Delta}} \left[ \sqrt{2} - l(1 + \sqrt{2}) \right] - \sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y_1^2} \\ + \sqrt{\frac{F}{\Delta}} l \frac{\sqrt{\frac{4F}{\Delta}} + \sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y_1^2}}{y_1}.$$

» En remplaçant L par  $\sqrt{X}$  et  $y_1$  par  $\sqrt{Y}$ , et traçant la courbe qui résulte de cette équation nouvelle, sa rencontre avec la branche d'hyperbole précédemment considérée fait connaître la valeur cherchée de L et par suite l'extrémité de l'arc utile.

» Les deux courbes n'ont de commun que le point A; donc tout l'arc hyperbolique AB est utile, et c'est le seul qui donne la marche du phénomène.

» Pour divers liquides, les équations des hyperboles ne diffèrent que par la valeur du paramètre  $\frac{F}{\Delta}$ ; elles sont semblables, ainsi que les arcs utiles. Le rapport de similitude pour deux liquides caractérisés par F et  $\Delta$ , F' et  $\Delta'$ , est  $\sqrt{\frac{F}{\Delta}} = \sqrt{\frac{F'}{\Delta'}}$ .

» Enfin, pour terminer ce sujet, je fais remarquer que  $y_1^2$ , dans le voisinage de  $\frac{4F}{\Delta}$ , varie très-peu pour une grande variation de  $L^2$ , comme le montre nettement la branche AB, dont l'asymptote est horizontale.

» Quant au poids  $q$ , il est facile d'en trouver une expression simple en remplaçant, dans le second terme de la valeur générale (336) de cette quantité,  $y_1$  par  $\frac{y_1}{L}$ , puis  $L$  par sa valeur (348); il vient

$$(355) \quad q = 2 L y_1 \Delta + \Delta y_1 \sqrt{\frac{4F}{\Delta} - y_1^2}.$$

On pourrait remplacer, au contraire,  $y_1$  par sa valeur en  $L$ ; mais l'expression précédente montre, sans qu'on en change la forme, que, pour les grandes valeurs de  $L$  correspondant aux valeurs de  $y_1^2$ , voisines de  $\frac{4F}{\Delta}$ , on peut supprimer le dernier terme et prendre tout simplement

$$(356) \quad q = 2 L y_1 \Delta.$$

» *Le rapport du poids maximum  $q$  de liquide soulevé par un rectangle de largeur notable au poids d'une colonne du même liquide, ayant pour base le rectangle et pour hauteur la hauteur qui donne le maximum de  $q$ , est sensiblement égal à l'unité. L'erreur relative décroît jusqu'à zéro, lorsque  $L$  croît jusqu'à l'infini.*

» Puisqu'on écarte le cas d'un rectangle de largeur faible,  $y_1$  varie très-peu avec  $L$  et égale à fort peu près  $\sqrt{\frac{4F}{\Delta}}$ . En remplaçant  $y_1$  par cette quantité dans l'équation précédente, on



trouve la formule

$$(357) \quad \frac{q}{\alpha L} = \sqrt{4F\Delta},$$

qui conduit à une loi approchée que Simon a déduite de ses expériences pour le cas des disques.

» *Le rapport du poids maximum soulevé à l'aire du rectangle est sensiblement constant.*

» Voici un tableau des valeurs de  $q$ , calculées, dans le cas de l'eau, pour diverses largeurs de rectangle, avec les formules (355), (356) et (357) :

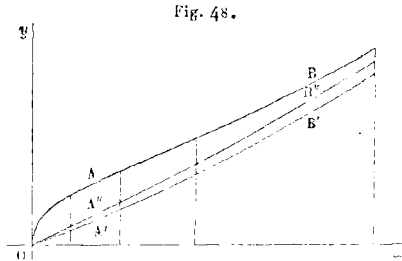
$y_1$	$\alpha L$	$q$ par la formule		
		(355)	(356)	(357)
3,873	0,000	0,000	0,000	0,000
4,194	0,735	20,940	6,165	8,053
4,515	1,737	29,686	15,685	19,031
4,836	3,261	43,978	31,540	35,728
5,157	6,885	80,568	71,053	74,432
5,478	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

» Ce tableau nous montre que la loi donnée par la formule (357) est plus approchée que celle que la relation (356) exprime; cela ne doit pas surprendre, puisque, pour obtenir l'équation (356), nous négligeons le second terme du deuxième membre de (355), tandis que pour obtenir la loi de Simon (357), nous faisons encore cette omission, mais en augmentant le terme conservé.

» Toutefois, la formule (355) est applicable à des largeurs plus grandes que 12 millimètres; elle donne alors des erreurs relatives moindres que  $\frac{1}{10}$ . Il en est de même *à fortiori* pour la formule correspondant à la loi de Simon.

» Voici une représentation graphique des trois sortes de va-

leurs de  $q$  prises pour ordonnées, celles de  $L$  servant d'abscisses :



» Lorsque, dans les expériences de Simon, les disques ont un diamètre suffisant, on peut négliger la seconde courbure dans l'équation de la surface capillaire, et se servir, pour le calcul du maximum de poids, des formules suivantes analogues à celles trouvées dans le cas d'un rectangle :

$$(358) \quad y_1 = \sqrt{\frac{4F}{\Delta}} \cos \frac{\alpha_1}{2},$$

$$(359) \quad q = \pi R^2 \Delta y_1 + 2\pi R F \sin \alpha_1,$$

$$(360) \quad 2y_1 = R \tan \alpha_1,$$

$$(361) \quad \sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{R}{4\sqrt{\frac{4F}{\Delta}} + \sqrt{\left(\frac{R}{4\sqrt{\frac{4F}{\Delta}}}\right)^2 + \frac{1}{2}}}.$$

» C'est au moyen de ces formules qu'on a calculé le tableau suivant pour l'eau :

R	$\alpha_1$	$\gamma_1$	q calculé.	q observé.	Erreurs relatives.
20,5	27°26'	5,32	7470	6700	+ $\frac{1}{10}$
27	21°40'	5,36	12740	11500	+ $\frac{1}{10}$
28	21°02'	5,38	13713	12500	+ $\frac{1}{11}$
33,75	17°44'	5,40	19774	17950	+ $\frac{1}{11}$
38,25	15°50'	5,42	25622	23600	+ $\frac{1}{12}$
54	11°25'	5,45	50400	48400	+ $\frac{1}{25}$
67,5	9°12'	5,47	83480	75700	+ $\frac{1}{11}$
81	5°44'	5,48	113360	108000	+ $\frac{1}{20}$

## FILS FLOTTANTS.

» Depuis très-longtemps on sait que des fils métalliques, des aiguilles à coudre par exemple, peuvent flotter sur l'eau quoique beaucoup plus denses. Simon s'est encore occupé de ce phénomène, et, en employant le lait, il n'a pu réussir avec un diamètre supérieur à 1<sup>mm</sup>,25; il a aussi fait usage du platine et du mercure. Beaucoup plus récemment, M. Van der Mensbrugghe a étudié ce sujet de nouveau; cependant il reste encore beaucoup à faire.

» On ne peut établir la théorie de ces phénomènes sans les préciser complètement, et sans remarquer d'abord qu'un solide mouillé coule de suite lorsqu'on le pose sur un liquide moins dense; ce n'est donc qu'à cause de l'adhérence d'une couche d'air qui ne disparaît point complètement, même sous le récipient de la machine pneumatique, que l'acier et le lai-

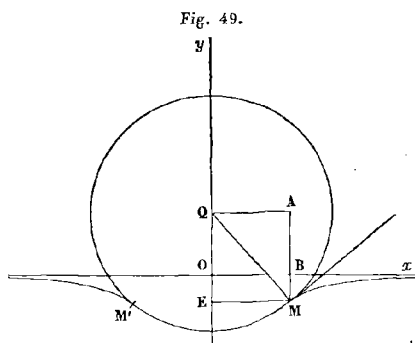
ton, substances que l'eau mouille, peuvent flotter. Plusieurs cas se présentent à l'esprit :

» 1<sup>o</sup> On peut concevoir l'absence complète de tout gaz et un solide que le liquide ne mouille point.

» 2<sup>o</sup> La couche gazeuse peut être assez mince pour que l'action du solide sur le liquide ne soit pas entièrement négligeable.

» 3<sup>o</sup> L'épaisseur de cette couche peut suffire pour empêcher toute action appréciable du solide sur le liquide; alors l'action du gaz sur le liquide est elle-même trop faible pour qu'il y ait lieu à en tenir compte.

» Ce dernier cas sera d'abord examiné ici, parce qu'il est le seul qu'on puisse réaliser approximativement dans les expériences avec quelque facilité. Le fil sera supposé homogène et parfaitement cylindrique, creux ou massif, et de densité moyenne ou uniforme  $D$ ; nous étudierons d'abord l'équilibre dans un cas quelconque, représenté *fig. 49*.



La section droite du fil et celle de la surface capillaire sont tangentes en  $M$ ; nous prendrons pour axe des  $x$  l'asymptote horizontale de la courbe capillaire, et pour axe des  $y$  l'axe vertical de symétrie; nous conserverons d'ailleurs les notations précédentes et nous compterons les  $y$  positivement de haut en bas. Le

point  $M(x, y)$  appartenant encore à la courbe capillaire, on en conclut que la relation (342) est applicable :

$$(362) \quad y = 2\sqrt{f\Delta} \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha,$$

et l'inspection de la figure donne d'ailleurs, en posant  $OQ = -\beta$  et en nommant  $r$  le rayon,

$$(363) \quad x = r \sin \alpha,$$

$$(364) \quad y - \beta = r \cos \alpha.$$

Pour trouver l'équation d'équilibre, la seule qui manque encore, il suffit de considérer une unité de longueur horizontalement, et d'égaliser le poids  $\pi r^2 D$  du solide, qui est la seule force verticale agissant de haut en bas, à la somme de la résultante des pressions capillaires et de la poussée hydrostatique.

» En un point quelconque de l'arc  $ME$  ayant pour abscisse  $x$ , la pression capillaire normale a pour expression  $\frac{F}{r}$ , ce qui donne  $\frac{F ds}{r}$  pour un élément  $r \times ds$ . La composante verticale s'obtient en multipliant par  $\frac{dx}{ds}$ , elle est  $\frac{F dx}{r}$ , et la somme que l'on obtient en intégrant de  $-x$  à  $+x$  a pour valeur

$$\frac{2Fx}{r}.$$

On l'obtiendrait très-facilement aussi en remarquant qu'elle égale la somme des composantes verticales des forces contractiles en  $M$  et  $M'$ , ce qui donne encore

$$2F \sin \alpha \quad \text{ou} \quad \frac{2Fx}{r}.$$

Quant à la poussée verticale, elle égale évidemment le double du poids du liquide remplissant le cylindre qui a pour base

OBME, et pour hauteur 1. Or on a

$$\begin{aligned} \text{OBME} &= \text{QME} + \text{QMA} - \text{QABO} = \frac{1}{2}r^2\alpha + \frac{1}{2}x(y - \beta) + \beta x \\ &= \frac{1}{2}r^2\alpha + \frac{1}{2}x(y + \beta), \end{aligned}$$

et par suite la résultante des poussées hydrostatiques est

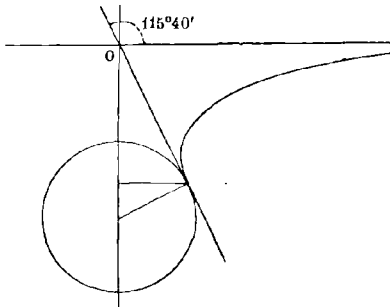
$$\Delta [r^2\alpha + x(y + \beta)];$$

l'équation d'équilibre est donc

$$(365) \quad \frac{\pi r^2 D}{\Delta} = 2f\Delta \sin \alpha + r^2\alpha + x(y + \beta).$$

Il est facile par une discussion embrassant tous les cas, y compris celui que représente la figure 50, de montrer que les équations

Fig. 50.



tions qui précèdent sont générales. Si l'on élimine entre elles  $x$ ,  $y$ ,  $\beta$ , il vient, en posant pour abrégier

$$(366) \quad r = \frac{2\sqrt{f\Delta}}{z};$$

$$(367) \quad \frac{2\pi D}{\Delta} = z^2 \sin \alpha + 2\alpha + 4z \sin \alpha \sin \frac{1}{2}\alpha - \sin 2\alpha.$$

Étant données  $f$ ,  $\Delta$ ,  $r$ ,  $D$ , l'équation (366) donne  $z$ ; puis (367) donne  $\alpha$ ; (362) donne  $x$ ; (363) donne  $y$ , et (364) donne  $\beta$ , sans élimination nouvelle et sans longueurs de calculs autres

que celles qui proviennent de la résolution de l'équation (367).

» Pour un même liquide caractérisé par  $f$  et  $\Delta$ , on peut :

» 1<sup>o</sup> Faire varier la densité  $D$  du solide en conservant la même valeur au rayon  $r$ , et chercher la valeur maximum de  $D'$  au-delà de laquelle l'équilibre devient impossible.

» 2<sup>o</sup> Supposer au contraire  $D$  constant et chercher la valeur maximum de  $r$ .

» Si l'on prend pour variable indépendante  $\alpha$ , il faut, dans le premier cas, écrire la dérivée de (367) par rapport à  $\alpha$  et à  $D$ , considéré comme fonction de  $\alpha$ , puis faire  $D'=0$ , ce qui revient à supposer  $D$  constant et à dériver par rapport à  $\alpha$  seulement. Dans le second cas, la même remarque s'applique à  $r$ ; de sorte que l'équation

$$(368) \quad z^2 + 2z \left( 2 \sin \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang} \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \right) + 4 \sin \alpha \operatorname{tang} \alpha = 0$$

convient pour résoudre les deux problèmes. Pour éviter les longueurs, on peut attribuer diverses valeurs successives à  $\alpha$  et former un tableau des valeurs correspondantes de  $z$  fournies par l'équation qui précède et de celles de  $D$  que donne ensuite l'équation (367). On montre aisément que, dans le cas du maximum,  $\alpha$  surpasse  $\frac{\pi}{2}$ , et, comme alors les valeurs de  $z$  sont de signes contraires, le choix n'offre aucune difficulté, puisque  $z$  doit être positif. Voici le type d'un de ces calculs dans lequel l'angle  $\alpha$  est supposé de  $100^\circ$  ou  $\alpha = 100 \cdot \frac{\pi}{180}$ .

ÉQUATION (368).

$\log 2 = 0,30103$	$— \log \operatorname{tg} 100^\circ = 0,75368$	$\log 4 = 0,60206$
$\log \sin 50^\circ = 1,88425$	$\log \cos 50^\circ = 1,80807$	$\log \sin 100^\circ = 1,99335$
$\log 1,532 = 0,18528$	$\log 3,645 = 0,56175$	$— \log \operatorname{tg} 108^\circ = 0,75368$
		$\log 22,340 = 1,34909$

» La parenthèse a pour valeur  $1,532 - 3,645 = -2,113$  et l'équation (368) devient

$$z^3 - 2 \times 2,113 z - 22,340 = 0.$$

On en tire

$$z = 7,290, \text{ d'où } 2r = \frac{4\sqrt{7,5}}{z} = 1,503.$$

ÉQUATION (367).

$\log z = 0,86273$	$\log \frac{\pi}{180} = \bar{2},24188$	$\log 4 = 0,60206$
$\log z = 0,86273$	$\log 200 = \underline{2,30103}$	$\log z = 0,86273$
$\log \sin 100^\circ = \bar{1},99335$	$\log 3,491 = 0,54291$	$\log \sin 100^\circ = \bar{1},99335$
$\log 52,337 = 1,71881$		$\log \sin 50^\circ = \bar{1},88425$
		$\log 21,998 = 1,34239$
$-\log \sin 200^\circ = \bar{1},53405 = \log 0,342.$		

Le second membre de l'équation (367) a pour valeur

$$52,337 + 3,491 + 21,998 + 0,342 = 78,158.$$

CALCUL DE  $D = 12,44.$

$$\text{Log } 78,158 = 1,89297$$

$$\text{Log } \frac{1}{2\pi} = \bar{1},20182$$

$$\text{Log } D = \underline{1,09479}$$

D'après cela, si l'on donne  $2r = 1,503$ , on pourra changer la substance du fil et en accroître la densité, mais pas au-delà de 22,44, car alors l'équilibre deviendrait impossible. L'angle  $\alpha$  aura dans ce cas pour valeur  $100^\circ$ .

» Si l'on adopte au contraire pour densité invariable 12,44, la valeur la plus grande qu'on pourra donner au diamètre du



fil sans rendre l'équilibre impossible sera 1,503, et l'angle  $\alpha$  sera toujours de 100°.

» On résout ainsi les deux questions simultanément. Voici les résultats obtenus par suite de deux autres calculs analogues à celui qui précède :

$$\begin{array}{llll} \alpha = 102^\circ & \alpha = 5,921 & 2r = 1,85 & D = 8,955 \\ \alpha = 102^\circ 30' & \alpha = 5,646 & 2r = 1,94 & D = 8,326. \end{array}$$

En admettant la proportionnalité des différences dans cet intervalle, on en déduit, pour  $D = 8,48$  employé dans une série d'expériences sur un laiton,

$$\alpha = 102^\circ 22' 40'' \quad \alpha = 5,713 \quad 2r = 1,92 \quad D = 8,48.$$

Au reste, j'ai dressé un tableau dans lequel on trouve les valeurs de  $\alpha$ ,  $2r$ ,  $D$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\beta$  correspondant aux diverses valeurs de  $\alpha$ , et j'ai construit les courbes qui lient ces quantités entre elles. On montre aisément que l'abscisse minimum de la surface capillaire (*fig. 50*) possède toujours une assez grande valeur positive quand il y a équilibre, et cela dispense d'examiner, comme dans certaines questions étudiées précédemment, si, même alors que l'équation (365) est satisfaite, la rencontre des parties saillantes des surfaces capillaires opposées ne vient pas rendre impossible un équilibre calculé en faisant abstraction de cette circonstance.

» Dans les expériences de ce genre, les observateurs ont trouvé un obstacle au succès dans les actions aux deux extrémités du fil; nous avons supprimé cet obstacle en faisant usage d'anneaux ayant la forme de tores construits avec soin (\*). Le diamètre est assez grand pour que la seconde courbure soit négligeable; on fait varier la densité en changeant la sub-

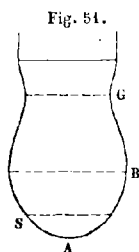
---

(\*) J'ai fait les expériences avec mon frère Paul, à qui est due l'idée de remplacer les fils par des anneaux de grand diamètre.

stance, en remplaçant, par exemple, le fer et le cuivre par l'or, l'argent, l'aluminium et d'autres substances métalliques ou non. Quand le liquide, qu'on fait varier aussi en construisant un autre tableau, mouille l'anneau trop facilement, on l'enduit par les procédés de la galvanoplastie, ou autrement, d'une couche mince d'une substance convenablement choisie. Le temps nous a manqué pour finir nos vérifications; elles seront publiées plus tard en même temps que l'étude des causes d'erreurs. »

#### TENSION DANS L'INTÉRIEUR DES GOUTTES.

Lorsqu'une goutte  $ABG$  (*fig. 51*) se trouve en équilibre, si l'on y fait une section horizontale  $s$  ayant pour contour une circonférence  $c$ , puis qu'on appelle  $\alpha$  l'angle de la tangente à



la méridienne avec l'horizon, et  $h$  la différence de niveau entre cette section et la surface liquide dans un *grand* vase avec lequel la goutte communique, la condition d'équilibre du segment  $A$  séparé de la sorte est facile à exprimer.

1° Ce segment de volume  $v$  tend à tomber en vertu de son poids  $v \Delta$ .

2° Il supporte de haut en bas la pression  $sh \Delta$ .

3° La force contractile de la couche superficielle s'exerce sur

le pourtour  $c$ , et la somme de ses composantes verticales a pour valeur  $cF \sin \alpha$  ou  $cf\Delta^2 \sin \alpha$ .

Cette dernière force devant faire équilibre aux deux autres, on a l'équation

$$(369) \quad cf\Delta \sin \alpha = sh + v.$$

L'angle  $\alpha$  devient droit pour la section maximum B et pour la section minimum G, c'est-à-dire pour le cercle de gorge ; on a alors

$$(370) \quad cf\Delta = \frac{2}{3}h + v.$$

Dans le cas des *petites* gouttes,  $2R$  désignant le diamètre de la section B, on peut, sans erreur appréciable, remplacer le volume du segment par celui de la demi-sphère,  $\frac{2}{3}\pi R^3$ , et il vient en simplifiant

$$(371) \quad 2f\Delta = R \left( h + \frac{2}{3}R \right).$$

Si maintenant nous appliquons (371) au cercle de gorge de diamètre  $2R_1$ , et si nous appelons  $\rho$  le rayon de courbure négatif, ce qui permet d'exprimer la pression

$$(372) \quad h\Delta = F \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{\rho} \right),$$

nous trouvons pour poids de la goutte

$$(373) \quad Q = v\Delta = \pi R_1^3 F \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Ainsi :

*Le poids d'une goutte en équilibre limitée au cercle de gorge égale la pression capillaire interne qui serait exercée sur ce cercle si la courbure principale négative était changée de sens.*

L'application de (373) au cercle horizontal de rayon  $R_2$  sur

la circonférence duquel l'une des courbures est nulle donne

$$(374) \quad Q = 2\pi R_1 F \sin \alpha - \pi R_2^2 F \frac{\sin \alpha}{R_2} = \pi R_1 F \sin \alpha,$$

et l'on voit que :

*La résultante des forces de contraction sur la circonférence de ce cercle égale le double du poids de la goutte qu'il limite.*

Les gouttes peuvent être posées sur un support horizontal au lieu d'être suspendues comme dans le cas précédent ; la formule (369) est encore applicable et se démontre de la même manière, mais le volume prend un signe contraire ; si l'on met ce signe en évidence, on arrive à la relation

$$(375) \quad v = sh - cf \Delta \sin \alpha,$$

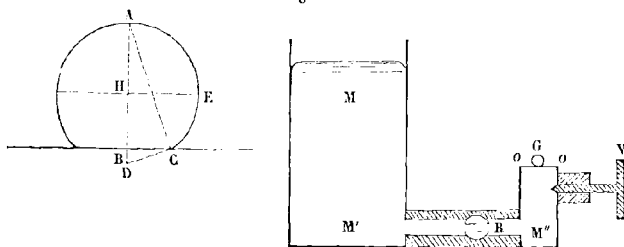
que M. Bertrand a obtenue le premier par un artifice d'analyse très-ingénieux. Il n'est pas seulement permis de l'appliquer au volume total de la goutte et à sa base comme le fait ce savant, elle est vraie pour une section horizontale quelconque et le volume du segment qu'elle porte. Dans le second membre,  $sh$  est le volume de liquide qu'il faudrait placer sur la section  $s$  pour annuler la différence de niveau et le deuxième terme  $cf \Delta \sin \alpha$  est le *volume abaissé* dans le cas où la section considérée est au-dessus de la section maximum ; dans le cas contraire, il exprime l'excès du volume nécessaire pour compléter le cylindre  $sh$  sur la partie de la goutte extérieure à ce cylindre. Lorsque le support est sans action appréciable et qu'on applique la formule à la base, on a  $\alpha = 0$ , ce qui conduit au théorème suivant :

*Si, sur la base de la goutte, on élève un cylindre vertical terminé au niveau M (fig. 52), la portion extérieure de la goutte sera précisément convenable pour achever de le remplir.*

*Vérifications expérimentales.* — La fig. 52 représente une portion de la coupe verticale de l'appareil que nous avons fait construire par M. Deleuil pour étudier expérimentalement le théorème de M. Bertrand. Une masse de mercure  $MM'M''$  rem-

plît un syphon en verre et en fer, dont le diamètre en M est assez grand pour que la capillarité soit sans influence appréciable. Et ce syphon se termine par une plaque d'acier qu'un

Fig. 52.



peu de suif fait adhérer suffisamment et qui présente une très-petite ouverture conique. R est un robinet au moyen duquel on fait agir ou l'on supprime à volonté la pression due à la différence de niveau  $M_0 = h_1$ .

Pour produire une goutte G, on ferme le robinet, puis on fait avancer la vis v, et le mercure sort en prenant à fort peu près la forme sphérique tant que son volume est très-petit; il est facile d'amener la section horizontale maximum de la goutte à prendre un diamètre  $2R = 2HE$  assigné d'avance; il suffit de faire marcher lentement la vis dans un sens ou dans l'autre.

Un même pied porte cette partie de l'instrument et un petit cathétomètre dont la lunette à fort grossissement contient un micromètre au moyen duquel on peut lire les dimensions de la goutte à  $\frac{1}{100}$  de millimètre près.

Pour faire une expérience on mesure d'abord la différence de niveau  $MO = h_1$ , puis on produit une goutte trop petite pour laquelle on note le diamètre  $2R$ ; l'ouverture du robinet suffit pour la faire rentrer aussitôt malgré la pression qui s'y oppose. On recommence en augmentant  $2R$  jusqu'à ce que

l'ouverture du robinet soit suivie au contraire d'un accroissement rapide de la goutte ou plutôt d'un véritable écoulement. Si l'on arrive de la sorte à constater que, pour  $2R = 0,83$ , la goutte est avalée, tandis que, pour  $2R = 0,85$ , elle grossit; on en conclut que l'équilibre instable qu'il s'agit d'étudier a lieu quand  $2R = 0,84$  à moins de  $\frac{1}{100}$  de millimètre. Dans l'une de nos expériences ce chiffre a été obtenu avec  $h_1 = 16,54$ .

Lorsqu'on est arrivé à ce point, on reproduit la goutte de diamètre  $2R = 0,84$  et on achève l'expérience en mesurant à l'aide du micromètre :

1° La hauteur  $AB = a$ ;

2° Le diamètre de la base  $2BC = 2r$ .

Ces deux déterminations sont rendues plus faciles par la nature du support, qui, étant bien poli, sert de miroir, de sorte qu'on aperçoit deux gouttes coïncidant par leurs bases et faisant, là où elles se coupent, un angle  $2i$  double de l'angle de raccordement qui sera étudié plus loin et dont la constance sera démontrée.

Voici le tableau des résultats obtenus :

NUMÉROS des expériences.	NUMÉROS des objectifs.	$2R$	$a$	$2r$	$h_1$	$2R'$	$f$	$i$
1	2	1,09	0,95	0,655	10,70	1,06	0,20	37°6'
2	2	1,56	1,31	0,965	8,56	1,49	0,22	38.13
3	2	1,64	1,33	1,07	8,38	1,54	0,22	40.44
4	1	1,575	1,30	1,00	8,52	1,49	0,22	39.25
5	1	2,26	1,71	1,525	6,86	2,05	0,23	42.22
6	3	0,84	0,72	0,58	16,54	0,78	0,25	43.40
7	3	0,72	0,58	0,56	17,88	0,715	0,23	51.00

La seconde colonne de ce tableau contient le numéro de l'objectif. Deux lentilles ont été employées ensemble ou séparément et ont fourni trois grossissements. Lorsqu'on employait le no 1,

il fallait vingt divisions du micromètre divisé en cinquantièmes de millimètre pour couvrir un millimètre d'une échelle substituée à la goutte; avec le n° 2, il en fallait vingt-neuf, et cinquante avec le n° 3.

Dans la septième colonne se trouve le diamètre AD d'un cercle situé entièrement à l'intérieur de la méridienne et déterminé géométriquement par la construction de l'angle droit ACD. Sa valeur est

$$(376) \quad 2R' = AD = AB + BD = a + \frac{r^2}{a};$$

il montre si le défaut de sphéricité est négligeable.

La neuvième colonne renferme les valeurs des angles de raccordement du mercure et du fer trouvés au moyen de la relation

$$(377) \quad \sin i = \frac{r}{R},$$

que l'inspection de la figure rend évidente. Leur constance se montre peu approchée, même quand on fait abstraction des expériences 6 et 7 dans lesquelles le diamètre de base  $2r$  approche trop du diamètre du trou, qui, aux dentelures près, s'est montré de 0,56 quand on a cherché à le lire à l'aide de la lunette micrométrique. Une couche d'air tantôt plus, tantôt moins épaisse, quoique très-mince, suffit pour altérer les résultats (\*).

Enfin, la huitième colonne contient la valeur de la force de réunion qui résulte de chaque expérience calculée au moyen de la formule (375) modifiée. Il est facile, à l'aide des nombres contenus dans la première ligne du tableau, de s'assurer que le volume  $v$ , qui forme le premier membre de l'équation, est beaucoup plus faible (environ sept fois dans la première ex-

---

(\*) Voir le mémoire de M. Quincke, *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LV, p. 227.

périence) que le terme  $sh$  ; si l'on remarque en outre que le terme suivant ne pourrait que dans le vide être déterminé avec une précision peut-être encore insuffisante, il deviendra évident que le volume  $v$  est difficile à distinguer des erreurs d'observation ou au moins à obtenir avec une faible erreur relative. Pour mettre en évidence la loi physique utile qui résulte de l'équation de M. Bertrand, il vaut mieux, dans une première approximation, considérer comme égaux les deux termes du second membre et, dans une deuxième approximation, remplacer le volume de la goutte par son expression approchée au moyen des longueurs observées. Toutefois, la difficulté que présente la détermination de l'angle  $i$ , que la couche d'air adhérente peut altérer beaucoup, rend préférable l'application à la coupe horizontale maximum ; alors  $\sin \alpha = 1$ ,  $s = \pi R^2$ ,  $c = 2\pi R$ . On peut d'ailleurs, sans erreur sensible, remplacer  $v$  par  $\frac{2}{3}\pi R^3$  et  $h$  par  $h_1 + R - a$ , du moins pour les petites gouttes, et on arrive à soumettre aux vérifications expérimentales la formule

$$(378) \quad f = \frac{R \left( h_1 + \frac{R}{3} - a \right)}{2 \Delta}.$$

C'est en l'employant que l'on a calculé les nombres contenus dans la huitième colonne. Leur moyenne 0,227 (\*) est inférieure à la force de réunion 0,267 trouvée par des procédés plus sûrs ; la différence est d'environ  $\frac{1}{7}$  de la vraie valeur :

(\*) Mon fils Paul a fait du 21 au 29 mai 1868 une nouvelle série de six expériences, qui l'ont conduit à une valeur moyenne qui ne diffère de celle-ci que dans le chiffre des millièmes. Mais, ayant ensuite changé le mode d'éclairage, il a obtenu le nombre 0,264, qui rentre dans la loi générale, à une différence négligeable près.



quoique assez considérable, elle paraîtra peu surprenante si l'on réfléchit aux difficultés de cette série d'expériences.

Lorsque le diamètre  $2R$  devient assez grand pour qu'il y ait lieu de négliger la seconde courbure principale et à ne tenir compte que de celle de la méridienne, on trouve, en intégrant une première fois l'équation de cette courbe, et prenant l'axe de révolution pour axe des  $y$  et la section du support horizontal pour axe des  $x$ ,

$$(379) \quad 2ay - y^2 = 2f\Delta \left( \cos i \pm \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \right),$$

le signe + devant être employé quand  $y'$  est négatif et le signe - quand il est positif.

Si l'on fait  $y' = 0$  et  $y = a$ , il vient

$$(380) \quad a = \sqrt{2f\Delta(1 + \cos i)} = 2 \cos \frac{i}{2} \sqrt{f\Delta}.$$

$y' = \infty$  donne pour hauteur de la section maximum

$$(381) \quad y_1 = a - \sqrt{2f\Delta} = \left( 2 \cos \frac{i}{2} - \sqrt{2} \right) \sqrt{f\Delta}.$$

Lorsque le volume croît de plus en plus, ces quantités tendent vers deux limites dont bientôt elles ne diffèrent pas sensiblement. La différence  $a - y_1$  est indépendante de l'angle  $i$ , ce qui était facile à prévoir.

Pour le mercure, nous avons constaté par expérience l'exactitude de ces déductions en ce qui concerne le nombre  $a$  dont la valeur est bien 3,8 lorsque le support est sans action efficace;  $i = 40$  degrés donne 3,6. La valeur de  $y_1$  est plus difficile à mesurer avec exactitude.

Si l'on substitue, dans la valeur  $v\Delta$  du poids de la goutte, d'abord l'expression de  $v$  donnée par M. Bertrand, puis celle de  $a$  qui vient d'être obtenue, on trouve en remplaçant  $s$  et  $c$

par  $\pi r^2$  et  $2\pi r$ ,

$$Q = 2\pi r^2 \cos \frac{i}{2} \sqrt{F\Delta} - 2\pi r F \sin i,$$

et, quand l'action du support est négligeable, on a plus simplement

$$Q = 2\pi r^2 \sqrt{F\Delta} = 2\pi r^2 \sqrt{f\Delta^3}.$$

De là on tire la formule

$$(382) \quad F = \frac{1}{4\pi^2 \Delta} \cdot \frac{Q^2}{r^4} \quad \text{ou} \quad f = \frac{1}{4\pi^2 \Delta^3} \cdot \frac{Q^2}{r^4},$$

qui permet d'obtenir  $F$  ou  $f$  au moyen des données expérimentales.  $2r$  a été mesuré au moyen d'un cathétomètre horizontal dans trois expériences qui ont conduit aux résultats suivants :

$$r = 3,16, \quad Q = 1490, \quad F = 41,5, \quad f = 0,224;$$

$$r = 7,42, \quad Q = 8340, \quad F = 42,75, \quad f = 0,231;$$

$$r = 11,44, \quad Q = 19820, \quad F = 42,73, \quad f = 0,231.$$

Le support était en marbre recouvert d'une mince feuille de papier,  $i$  n'était pas entièrement négligeable, et l'on voit que, malgré cela,  $F$  tend vers une limite qui n'est pas très-éloignée de la vérité. On a donc encore un nouveau procédé pour la mesure des forces de réunion ; il ne peut donner une grande exactitude, mais dans certains cas, il est difficile d'en employer un autre. C'est ce qui arrive par exemple pour les métaux fondus que nous avons étudiés avec M. Lechartier, mon collègue à la faculté des sciences de Rennes, à qui revient la plus grande part dans cette série d'expériences.

Au fond d'un vase convenablement choisi pour chaque cas, on pressait de la terre d'os au moyen d'un pilon en fer dont l'extrémité avait exactement la forme d'un segment sphérique de 70 ou 100 millimètres de rayon. On chauffait le métal environné d'hydrogène ou d'acide carbonique quand cela était utile,

et on obtenait de la sorte une goutte qu'on pouvait examiner après sa solidification. On mesurait le diamètre  $2r$  de la circonférence de contact avec le support et le poids de la goutte. De ce dernier nombre on retranchait le poids du segment sphérique ayant pour valeur approchée

$$\frac{\pi \Delta r^4}{280} \text{ ou } \frac{\pi \Delta r^4}{400},$$

et on négligeait les erreurs dues à l'attraction du support et à son défaut d'horizontalité vers la circonférence de contact. Les résultats sont réunis dans le tableau suivant :

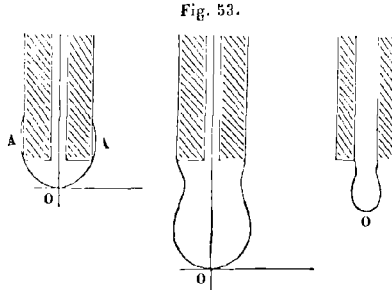
NOMS DES SUBSTANCES.	$e$	$e$ calculé.	$\Delta$	Q	Q corrigé.	$r$	$f$	F	$f_{\text{H}}$
Étain . . .	29,5	27,7	7,29	13774	13026	10,36	0,963	51,2	28,4
Antimoine	30,5	34,1	6,712	11837	10883	10,61	0,783	35,3	23,9
Cuivre . . .	31,75	27,3	8,85	7672	7525	6,78	0,979	77,4	31,1
Argent . . .	54	54,8	10,5	3546	3501	4,845	0,487	53,7	26,3
Cadmium.	56	58,8	8,7	4853	4724	6,595	0,454	34,3	25,4
Bismuth . .	70	70,5	9,822	10784	10005	9,17	0,378	36,5	26,5
Or . . . . .	98	105,6	19,5	12048	11762	6,50	0,253	96,2	24,8
Mercure . .	100	115,5	13,596	19820	19820	11,44	0,231	42,7	23,1
Plomb . . .	103	95,5	11,352	15310	13809	10,425	0,279	36,0	28,8

D'après la loi, les produits des nombres contenus dans la seconde colonne et dans la huitième doivent égaier  $f_{\text{H}}$  ou 26,69. Ils sont contenus dans la dixième colonne, et la valeur moyenne 26,5 s'accorde très-bien avec la force de réunion de l'hydrogène ; les écarts de part et d'autre sont acceptables si l'on ne perd point de vue les causes d'erreur inhérentes à cette méthode.

#### ÉCOULEMENT PAR GOUTTES.

Pour forcer un liquide à s'échapper sous forme de gouttes successives, on peut adopter des dispositions extrêmement variées ;

nous ne considérerons ici que des appareils de révolution par rapport à un axe vertical et donnant par suite des gouttes terminées aussi par des surfaces de révolution. L'étude se trouvera ainsi réduite à la recherche de la méridienne et des conséquences de cette forme. Au point le plus bas, en  $o$  (fig. 53), se



trouve un ombilic, et le rayon  $R$  de courbure en ce point suffit, avec la nature du liquide, pour déterminer entièrement la surface de la goutte, puisqu'en rapportant la méridienne à l'axe de figure pris pour axe des  $y$  et à sa tangente au point le plus bas pris pour axe des  $x$ , on a (317)

$$(383) \quad \Delta y = \frac{2F}{R} - F \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right)$$

ou bien

$$(384) \quad \Delta y = \frac{2F}{R} - F \left[ \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y'}{x\sqrt{1 + y'^2}} \right].$$

Pour un même liquide ou pour deux liquides ayant même densité et même force de réunion, il ne peut exister deux figures semblables, puisque l'équation (324) et l'équation

$$(385) \quad \Delta'K^2y = \frac{2F}{R} - F \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right),$$

obtenue en changeant  $y$ ,  $R$ ,  $\rho$  et  $\rho_1$  en  $Ky$ ,  $KR$ ,  $K\rho$ ,  $K\rho_1$ , ne peuvent avoir lieu simultanément lorsque  $K$  diffère de l'unité.

Si l'on conçoit une goutte semblable formée avec un liquide différent, la relation (384) devient

$$(386) \quad \Delta' K^3 y = \frac{2F'}{R} - F' \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right),$$

et, pour qu'elle subsiste en même temps que (384), il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(387) \quad K = \sqrt{\frac{F' \Delta'}{F \Delta}} = \sqrt{\frac{f' \Delta'}{f \Delta}}.$$

La huitième colonne du tableau page 251 contient la valeur de  $\sqrt{f \Delta}$  pour chaque liquide pris à zéro et pour quelques solides pris un peu au-dessus du point de fusion ; on obtient alors par une simple division le rapport de similitude pour deux gouttes de liquides quelconques. Si l'on introduit dans leur intérieur, pour accroître graduellement leurs volumes, des quantités proportionnelles à  $K^3$  et à 1 des substances qui les forment et si les forces de réunion qui déterminent la surface agissent assez promptement, la similitude se maintiendra sans cesse jusqu'à la rupture suivant la gorge. On aura donc, en appelant  $v$  et  $v'$  les volumes,  $Q$  et  $Q'$  les poids,

$$(388) \quad \frac{v'}{v} = K^3 = \left( \frac{f' \Delta'}{f \Delta} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{Q'^2}{Q^2} = \frac{f'^3 \Delta'^5}{f^3 \Delta^5};$$

ainsi la quantité  $f \sqrt[3]{\frac{\Delta^5}{Q^2}}$  est indépendante de la nature chimique de la substance, et on arrive, en désignant par  $N$  un nombre constant, à la formule générale

$$(389) \quad f \sqrt[3]{\frac{\Delta^5}{Q^2}} = f' \sqrt[3]{\frac{\Delta'^5}{Q'^2}} = N,$$

ou à la loi suivante :

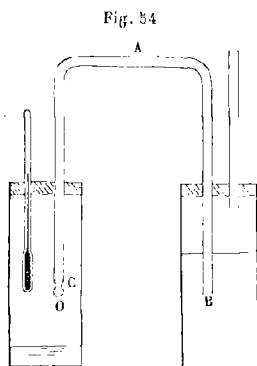
*La force de réunion d'un liquide ramenée à l'unité de densité, multipliée par la racine cubique de la cinquième puissance de*

*la densité et par la racine cubique du carré de l'inverse du poids d'une goutte, donne un produit constant.*

Mais pour que ces lois se manifestent dans les expériences, il faut que les supports ne soient pas un obstacle à la similitude, et cela exige des précautions qui ne sont point les mêmes dans tous les cas.

Si par l'orifice intérieur (fig. 53) d'un tube capillaire vertical, on fait sortir un liquide qui le mouille, un renflement AA se forme d'abord ; il s'amincit ensuite, puis disparaît un peu avant la chute de la goutte. A cette époque, la surface en équilibre se termine supérieurement par une portion cylindrique, et, pour que le second liquide soit en équilibre sous une surface semblable, il est nécessaire et suffisant, d'après ce qui précède, que les rayons des tubes soient dans le rapport K.

Pour faire une expérience, on pèse un petit vase en verre c (fig. 54), puis ayant amorcé le syphon A, dont l'extrémité B



plonge dans le liquide qu'on veut examiner, on reçoit les gouttes et on les compte avec soin ; une seconde pesée suivie d'une division fournit le poids de chacune d'elles. En faisant monter ou descendre le vase B, on peut accélérer ou retarder l'écoulement à volonté ou même le suspendre si cela est utile.

Pour éviter l'évaporation on n'établit avec l'atmosphère que des communications très-restreintes. Deux tubes A et A' ont été employés successivement pour chaque liquide; leurs diamètres mesurés au moyen d'une lunette micrométrique avaient pour valeurs en millimètres

$$(390) \quad d = 2,413 \quad \text{et} \quad d' = 2,921.$$

Ici, comme précédemment dans beaucoup d'autres occasions, je conserve trop de chiffres pour éviter l'accumulation des erreurs dans les calculs. Connaissant les poids Q et Q' des gouttes d'un même liquide obtenues ainsi avec deux diamètres inégaux, il était facile de trouver avec une approximation suffisante, à l'aide d'une proportion, le poids Q'' correspondant à un diamètre d'' un peu différent, et pour lequel la comparaison avec les résultats obtenus pour un autre liquide était légitime.

Quand il s'est agi de vérifier la constance de N, on a pris d' comme correspondant à  $\sqrt{f\Lambda} = 1,8$ ; il en est résulté

$$(391) \quad d'' = \frac{\sqrt{f\Lambda}}{1,8} d',$$

puis

$$(392) \quad Q' - Q'' = \frac{2,921}{1,8(d' - d)} (1,8 - \sqrt{f\Lambda}) (Q' - Q),$$

avec

$$(393) \quad \log \frac{2,921}{1,8(d' - d)} = \log \frac{2,921}{1,8 \times 0,508} = 0,50440.$$

Si l'on joint à la valeur de Q'', déterminée de la sorte, les données du tableau page 251, rien ne manque pour calculer la valeur (389) du nombre constant et vérifier son invariabilité. Nous avons obtenu pour moyenne 0,4415 en écartant le chiffre relatif au chloroforme, qui nous inspire moins de confiance. Voici le tableau des résultats :

NOMS DES SUBSTANCES.	$t$	$Q$	$Q'$	$f$	$\sqrt{f\Delta}$	$N = \sqrt[3]{\frac{\Delta^3}{Q'^2}}$
Ether acétique. . . . .	20,5	13,55	14,90	3,221	1,687	0,4425
Benzine. . . . .	21,0	17,10	18,47	3,920	1,853	0,4461
Liqueur des Hollandais. . . . .	22,0	18,10	19,50	2,164	1,644	0,4431
Alcool vinique. . . . .	20,5	12,80	14,30	3,719	1,741	0,4407
Ether vinique. . . . .	22,0	9,75	10,60	3,570	1,503	0,4351
Bichlorure de carbone. . . . .	23,0	14,75	16,35	1,137	1,353	0,4318
Ess. de térébenthine. . . . .	24,0	15,30	16,85	3,792	1,800	0,4444
Sulfure de carbone. . . . .	21,0	18,67	20,30	2,135	1,641	0,4348
Chloroforme. . . . .	19,0	15,52	16,95	1,279	1,382	0,4093
Esprit de bois. . . . .	20,5	13,48	14,57	3,845	1,763	0,4546
Eau. . . . .	25,0	39,7	48,4	7,5	2,739	»
Protochlor. de soufre. . . . .	28,0	»	25,71	1,800	1,601	»
Chlor. de phosphore(*) . . . . .	20,5	14,60	17,25	1,165	1,356	»

On voit que la constance de  $N$  se confirme pleinement; pour presque tous les liquides étudiés, les écarts sont très-faibles et du même ordre que ceux qu'on observe en recommençant plusieurs fois les mêmes expériences.

Ces recherches conduisent à un nouveau procédé commode et quelquefois seul applicable pour obtenir les forces de réunion. L'équation (389), résolue par rapport à  $f$ , donne

$$(394) \quad f = N \sqrt[3]{\frac{Q}{\Delta^3}},$$

et, sous cette forme, elle fournit, en employant  $Q$  ou  $Q'$ , une première valeur de la quantité  $f$  d'abord inconnue. On s'en sert pour calculer  $\sqrt{f\Delta}$ , puis on procède à une seconde approximation suivie de plusieurs autres, si cela est nécessaire; mais on s'aperçoit bien vite qu'un nouveau calcul conduit à une correction négligeable. En général, la seconde approxima-

(\*)  $d = 2,537$ ;  $d' = 2,90$ .



tion suffit. Pour la liqueur des Hollandais, un premier calcul avec  $Q$  donne  $\log f = 0,32273$ ; la seconde approximation conduit à  $\log f = 0,33209$ , et comme l'aréomètre a donné  $\log f = 0,33533$ , on voit que les nombres fournis par ces deux procédés différents s'accordent à  $\frac{1}{140}$  près.

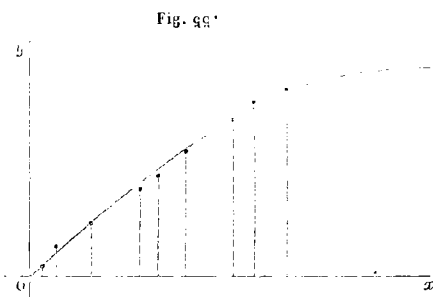
Le calcul de  $Q''$  suppose négligeable l'erreur qu'on commet en supposant les variations des poids proportionnelles aux variations des diamètres. Pour voir jusqu'à quel point il est permis d'opérer de la sorte, nous avons fait pour l'eau une série d'expériences avec des tubes variés, et, à la température d'environ 25 degrés, nous avons obtenu les poids

4,25, 12,4, 21,9, 35,1, 40,8, 50,0 65,0, 70,0, 76,5, 85,6

pour les diamètres

0,2, 0,52, 1,15, 2,15, 2,252, 3,04, 4,06, 4,445, 5,12, 10,435.

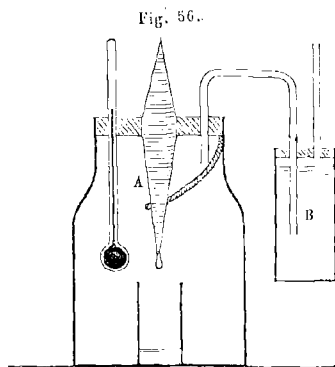
Si l'on prend pour abscisses les diamètres décuplés et pour ordonnées les demi-poids des gouttes, ces résultats sont représentés par la courbe suivante (fig. 54).



Les points ne se placent pas très-bien sur une même courbe, si l'on n'accepte pas plusieurs sinuosités qui nous ont paru nettement indiquées par le degré d'approximation sur lequel

nous croyons pouvoir compter. Toutefois, l'eau ne mouille pas toujours assez parfaitement le verre pour que nous puissions garantir l'exactitude de résultats que, faute de temps, nous n'avons pu vérifier avec toutes les précautions désirables. Quoi qu'il en soit, la forme de la courbe jusqu'au point qui correspond à  $2r = 4,445$  montre que l'emploi des parties proportionnelles ne peut pas conduire à des erreurs bien graves et justifie la manière de calculer les valeurs de  $Q''$  et de  $N$ . Pour de grandes abscisses; les tangentes à la courbe tendent à devenir parallèles à l'axe des abscisses, et la construction fait sentir l'existence d'une asymptote, ce que l'on pouvait prévoir.

Au lieu de soutenir les gouttes au moyen d'un tube dont le diamètre extérieur est pris proportionnel à  $\sqrt{l\Delta}$ , on peut disposer verticalement un cône A (fig. 56), à la surface duquel un



syphon et une mèche de coton conduisent le liquide avec une vitesse qu'on augmente ou qu'on diminue en soulevant ou en abaissant le réservoir B. Les gouttes sont reçues dans un petit vase qu'on met brusquement en place lorsque l'écoulement a été rendu convenable. Le cône peut supporter des gouttes semblables de divers liquides; le rapport de similitude

s'établit, parce que la goutte prend pour base une section horizontale du cône plus ou moins élevée suivant la valeur de  $\sqrt{\Delta}$ .

Nous avons fait travailler avec soin une tige de laiton terminée par deux cônes, ayant pour angles

$$\alpha = 12^{\circ} 29' \text{ et } \alpha' = 19^{\circ} 21'.$$

Toutes les quantités obtenues avec le cône le moins aigu ont été distinguées par un accent dans le tableau qui suit :

NOMS DES SUBSTANCES.	t	$\Delta$	Q	N	t'	$\Delta'$	Q'	N'
Choroforme.....	18,5	1,491	4,025	0,9833				
Benzine.....	17,5	0,8810	5,55	1,0124	15,0	0,8835	9,325	0,7199
Bichlor. de carb....	17,0	1,586	4,025	0,9822	14,5	1,591	6,425	0,7131
Esprit de bois....	17,0	0,8067	4,50	0,9682				
Ess.de térébenthine	17,0	0,8642	5,30	0,9780	14,5	0,8659	8,725	0,7038
Liquour des Holl..	20,0	1,240	5,575	0,9852				
Alcool.....	17,5	0,8001	4,775	0,9044				
Alcool amylique....	18,5	0,8094	5,075	0,8988				
Eau.....	17,0	0,998794	20,2	1,0092				

Pour les substances qui attaquent le laiton, nous avons fait usage d'un syphon formé avec un tube capillaire dont l'extrémité A était effilée en cône; le liquide arrivait alors par l'intérieur. Les résultats ont été satisfaisants, quoiqu'un peu moins réguliers, à cause de l'impossibilité d'obtenir à la lampe une forme aussi exacte qu'avec le tour.

Dans ces expériences, nous avons employé des appareils de formes assez variées, et nous nous sommes servis, pour régler l'écoulement dans certains cas, d'un robinet très-peu ouvert au lieu d'une pression très-faible. C'est ce qui a été fait notamment pour l'étude des liquides ne mouillant par le verre, comme le mercure, le phosphore fondu, etc.; les raisonne-

ments et les calculs précédents s'appliquent encore, pourvu que le diamètre intérieur du tube égale le diamètre extérieur exigé lorsque le liquide mouille, et pourvu que l'angle de raccordement soit nul, ce qui arrive, par exemple, lorsqu'une couche d'air adhérente ou solide rend son action négligeable. Cette circonstance se présentait sans doute dans l'emploi du mercure et du verre; car, sans cela, l'angle du raccordement eût été considérable, et nous n'aurions pu trouver pour force de réunion de ce métal liquide, à  $\frac{1}{40}$  près, la valeur déjà obtenue au moyen de la loi et aussi par l'aréomètre et une lame d'argent.

Pour le phosphore, le soufre et l'iode, nous avons profité des expériences très-bonnes que l'on doit à M. Billet sur les changements de volumes de ces trois corps, et la densité étant connue un peu au-dessus de la fusion, l'écoulement par gouttes nous a fourni les valeurs des forces de réunion.

*Phosphore liquide.* — Avec un tube de verre de 2,25 non mouillé, nous avons eu  $Q=52,25$ , et l'on a d'ailleurs, d'après M. Billet,  $\Delta=1,750$ . En prenant la benzine pour point de comparaison, on trouve  $f=2,745$ ;  $e=9,723$ .

*Soufre liquide.* — Le bout du tube de verre par lequel l'écoulement s'opérait étant convenablement dépoli, le soufre adhérerait et le cercle d'attache des gouttes avait pour diamètre le diamètre extérieur du tube 3,73; le poids de la goutte était 45,4. La formule (389), résolue par rapport à  $f$ , donne

$$(395) \quad f = f' \sqrt[3]{\frac{Q^2 \Delta^{15}}{Q'^2 \Delta^3}}$$

Si l'on adopte  $e=16$ , on trouve pour force de réunion calculée 1,668, et par suite ( $\Delta$  ayant pour valeur 1,877)

$$\sqrt[3]{f \Delta} = 1,770.$$

Pour le bichlorure de carbone, on a  $f' = 1,137$  et  $\sqrt{f'\Delta'} = 1,353$ . Pour rendre la comparaison légitime, il faut prendre le poids  $Q''$  d'une goutte de cette matière correspondant à un diamètre  $\frac{3,73 \times 1,353}{1,770} = 2,852$ . Au moyen des valeurs de  $Q$  et  $Q'$  contenues dans le tableau de la page 332, lesquels correspondent aux diamètres 2,413 et 2,921, on trouve par la méthode des parties proportionnelles,

$$Q'' = 16,13;$$

la formule (395) donne ensuite  $f = 1,771$ . Cette valeur ne surpasse que de  $\frac{1}{17}$  celle qui a été donnée par la loi, et l'on est dispensé par cette confirmation immédiate de l'équivalent usité en chimie de faire usage des approximations successives. On peut encore les éviter dans les expériences qui ne comportent pas une très-grande précision, en profitant de ce que la partie de la courbe (page 333), la plus voisine de l'origine, diffère peu d'une ligne droite passant par ce point, surtout quand on ne considère que des diamètres compris entre 2 et 4 ou peu éloignés des limites de cet intervalle. Soit

$$Q' = B' d' = 16 d'$$

l'équation de cette droite pour l'eau, que nous prendrons comme point de comparaison. On a vu que  $d'$  a pour valeur obligée  $d\sqrt{\frac{f'\Delta'}{f\Delta}}$ ; substituons  $Q'$  et  $d'$  dans (395) et réduisons, il vient

$$(396) \quad f = f' \frac{Q\Delta'^2}{B'd\Delta^2} = \frac{7,5}{16} \cdot \frac{Q}{\Delta^2 d}$$

Dans cette formule simplifiée, tout est connu, excepté  $f$ , dont la valeur s'obtient sans hypothèse et sans tâtonnements; appliquée au cas actuel, elle donne

$$f = 1,62, \quad e = \frac{26,69}{1,62} = 16,48.$$

Elle est commode dans tous les cas, et comme elle fournit une valeur immédiatement approchée, un second calcul en suivant la marche précédente suffira toujours lorsqu'il y aura lieu à ne pas s'en tenir à la première approximation.

Si l'on voulait employer un liquide de comparaison autre que l'eau, le coefficient angulaire B de la ligne droite différencierait de B', et serait fourni par la relation

$$\frac{B}{B'} = \frac{F}{F'} \quad \text{ou} \quad B = \frac{16}{7,5} F,$$

qui est donnée immédiatement par (396), quand on remplace  $f\Delta^2$ ,  $f'\Delta'^2$ , Q par F, F', Bd.

*Iode liquide.*  $\Delta = 4,144$ ,  $d = 2,02$ ,  $Q = 26$ , donnent  $f = 0,35$ ,  $e = 76$ . Au moyen de l'ascension dans un tube capillaire, nous avons trouvé  $f = 0,3167$ ,  $e = 84,27$ . La différence relative est  $\frac{1}{10}$ .

*Sélénium liquide.* —  $\Delta = 4,300$ ,  $Q = 33,5$ ,  $d = 1,35$ , donnent  $f = 0,63$ ,  $e = 42,4$ . A l'état liquide, la densité est sans doute moindre que 4,3; si elle était connue, on trouverait pour  $f$  une valeur plus grande, et pour  $e$  une valeur moindre.

*Bulles.*—La force de contraction des couches superficielles liquides ayant été étudiée théoriquement au début de ce chapitre, il est facile de vérifier par expériences la plupart des phénomènes que sa connaissance fait prévoir. Considérons ici en particulier les bulles gazeuses renfermées dans une enveloppe liquide très-mince, telles que les bulles de savon. La formule (317) s'applique à la couche superficielle extérieure et à la couche superficielle intérieure, de sorte que l'excès de pression interne mesuré par une colonne d'eau a pour valeur totale

$$(397) \quad z = \frac{8F}{2r}.$$

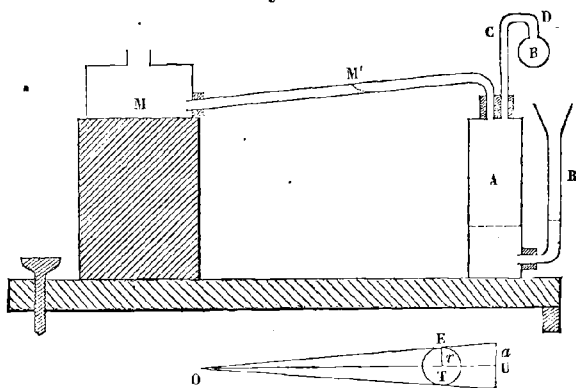
Lorsqu'on veut seulement en prouver l'existence, il suffit de

souffler une bulle à l'extrémité d'un tube, et de l'observer ensuite en laissant le tube ouvert : elle diminue rapidement de diamètre et finit par disparaître. En soufflant deux bulles aux extrémités d'un tube en U renversé, on peut constater facilement que la tension intérieure est d'autant plus grande que le rayon est moindre ; il suffit de les observer pendant quelque temps : on remarque que la petite bulle s'amoindrit jusqu'à disparaître, tandis que la grosse bulle augmente de volume. Un robinet à trois voies, placé sur la partie horizontale du tube en U, rend ce petit appareil très-commode : par l'une des trois voies on fait arriver, au moyen d'un petit bout de tube, le gaz nécessaire. La loi qui régit ce genre de phénomène consiste en ce que

*Le produit du diamètre d'une bulle par l'excès de la tension intérieure sur la pression externe est un nombre constant qui égale 8 fois la force de réunion.*

Pour le vérifier, nous avons employé successivement plusieurs appareils que je vais décrire. Dans le premier (fig. 57),

Fig. 57.



un vase A contient de l'eau dans sa partie inférieure, et au moyen d'un tube robinet R, on peut accroître ou diminuer la

masse de ce liquide. La partie supérieure communique d'une part avec un manomètre à alcool  $M'$ , incliné au dixième, et d'autre part avec l'atmosphère par un tube CDB. On marque le point  $M'$ , où l'alcool s'arrête sous la pression atmosphérique, puis on introduit dans l'eau de savon l'extrémité B, qui prend par capillarité une quantité de liquide trop abondante. Après en avoir ôté une partie, on verse de l'eau peu à peu en R; une bulle est soufflée, et le manomètre donne, en tenant compte de la densité de l'alcool, de l'inclinaison et de la variation de niveau dans le vase M, la valeur de  $z$ . Ensuite on place l'œil auprès d'un trou percé dans une plaque fixe, et on lit, par projection conique sur une échelle, la valeur  $2a$  du diamètre apparent de la bulle dans le sens horizontal et dans une direction presque verticale. Dans le cas d'une légère différence, qui ne se montre qu'autant qu'on a laissé trop de liquide, on prend la moyenne. La valeur trouvée de la sorte est trop grande; elle doit subir une correction. On a évidemment

$$\frac{2r}{a} = \frac{OE}{OU} = \frac{\sqrt{OT^2 - r^2}}{OU},$$

et on en conclut

$$2r = \frac{OT \cdot a}{\sqrt{OU^2 + a^2}}.$$

Dans les expériences faites,  $a^2$  s'est trouvé négligeable en présence de  $OU^2$ , et il a suffi d'employer la formule simplifiée

$$2r = \frac{OT}{OU} a.$$

En combinant cette équation avec (397), on obtient

$$2az = \frac{OU}{OT} 16 F.$$

La loi à vérifier immédiatement consiste en ce que *le produit du diamètre apparent par l'indication  $y$  du manomètre est un*



nombre constant; car la vraie valeur de  $z$  est proportionnelle à la dénivellation manométrique. Nous avons essayé des eaux de savon plus ou moins chargées; pour abrégér, je ne rapporterai que les expériences relatives à celle pour laquelle l'aréomètre a donné  $F=2,68$ ; l'alcool avait pour densité 0,828; la tangente de l'angle du tube manométrique avec l'horizon était  $\frac{19,25}{199}$ ; on avait de plus  $OT=412$  et  $OU=441$ :

$a$	$y$	$ay$	$a$	$y$	$ay$
8	$32\frac{1}{4}$	258	$15\frac{1}{2}$	17	$263\frac{1}{2}$
9	$28\frac{3}{4}$	259	16	16	256
9	$27\frac{1}{2}$	$247\frac{1}{2}$	16	$16\frac{1}{2}$	264
9	$27\frac{3}{4}$	250	18	15	270
$9\frac{1}{2}$	$26\frac{1}{2}$	252	20	13	260
10	26	260	20	13	260
10	26	260	$20\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$256\frac{1}{2}$
11	23	253	25	$10\frac{1}{4}$	$256\frac{1}{4}$
13	$20\frac{1}{4}$	$263\frac{1}{4}$	29	$8\frac{1}{2}$	$246\frac{1}{2}$
13	19	247	$29\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{2}$	$253\frac{1}{4}$

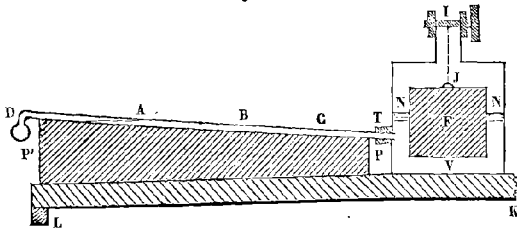
La moyenne des  $ay$  est 256,8. En partant de là, on a trouvé  $F=2,40$ , au lieu de 2,68 obtenu par l'aréomètre; la différence relative était environ  $\frac{1}{9}$ . Mais dans le vase M, les variations de niveau avaient été à tort considérées comme négligeables, et la différence relative est tombée au-dessous de  $\frac{1}{20}$ , quand on a tenu compte de cette cause d'erreur.

L'emploi d'une eau de savon mêlée de glycérine, a conduit à une concordance un peu plus approchée entre la valeur 3,20, trouvée par l'aréomètre, pour la force de réunion, et celle donnée par les bulles.

Des infusions de bois de Panama et de saponaire ont fourni, au contraire, par les deux procédés, des résultats un peu plus différents.

La plus grande cause d'erreur provenait de la méthode employée pour la mesure des diamètres; nous y avons remédié en observant les volumes dans des tubes dont les sections étaient déterminées par les poids d'alcool ou de mercure renfermés dans une longueur bien connue. Une planche (*fig. 58*),

Fig. 58.



portée en L par deux petits pieds, et en K par une vis calante, est rendue horizontale au moyen d'un niveau à bulle d'air; on y a fixé solidement un plan PP' incliné au dixième, sur lequel se trouve assujéti le tube ABC, qui est la pièce la plus importante de l'appareil. Ce tube se termine en D par un ajustage qu'on change à volonté; en T, il pénètre dans un liége qui ferme la tubulure du vase à alcool V. Dans ce vase, il existe un flotteur F, soutenu par un fil IJ, qu'on peut allonger ou raccourcir en faisant tourner dans un sens ou dans l'autre un treuil sur lequel il s'enroule, ce qui permet de faire monter ou descendre le niveau NN du liquide.

Pour faire une expérience, on marque sur une bande de papier qui recouvre la moitié du contour du tube :

1° Un point de départ arbitraire A ;  
 2° Un point B, tel que la pression due à la colonne AB soit précisément celle qui doit exister dans la bulle D qu'on a l'intention de produire : un calcul basé sur la force de réunion déterminée par l'aréomètre la donne facilement d'avance ; mais on ne l'emploie qu'après lui avoir fait subir les corrections rendues nécessaires par l'obliquité du tube, la densité du liquide et le rapport de la section du tube à la section du vase diminuée de celle du flotteur ;

3° Un point C choisi de manière que le cylindre d'air BC ait le même volume que la bulle D.

Ensuite on amène l'alcool en C et l'on met un peu d'eau de savon en D, ce qui ferme l'orifice demeuré libre jusqu'à ce moment ; puis on souffle la bulle par un mouvement du flotteur. Un grand excès de pression est nécessaire pour démarrer, parce que la demi-bulle qui se forme d'abord possède un diamètre bien moindre ; mais on ramène avec soin le liquide en B, on attend même que celui qui mouille le verre plus haut se soit écoulé lentement, afin d'assurer l'exactitude du volume. Alors on crève la bulle que l'on avait entourée d'un large tube destiné à servir de paravent ; on ôte, au moyen d'un petit linge, l'eau de savon qui rebouche quelquefois l'ajutage, et l'on constate que l'alcool s'arrête bien en A, comme le veut la théorie. Quand on ne connaît point la force de réunion à l'avance, on l'obtient ainsi après quelques tâtonnements dans lesquels on fait varier la pression.

Pour obtenir plus de précision, nous avons employé successivement deux tubes bien calibrés ABC, l'un pour les grosses bulles et l'autre pour les petites. On les a pesés pleins d'alcool ayant pour densité 0,848, puis simplement mouillés à l'intérieur par ce liquide, comme ils le sont dans l'expérience même après 10 minutes d'attente. Les sections étaient 21,70 et 3,646. On s'est servi de ces nombres pour calculer les longueurs L

et  $l$  qui donnent les volumes des sphères, dont les diamètres varient de 4 à 22 millimètres. Nous avons fait usage d'une eau de savon pour laquelle l'aréomètre a donné 2,733; avec ce chiffre, nous avons calculé la valeur de  $z$ , correspondante aux divers diamètres et évaluée en alcool, puis la valeur  $z_1 = AB$ , en faisant les corrections indiquées plus haut. Pour le petit tube,  $z_2$  doit être distingué de  $z_1$ , parce que les corrections ne sont pas toutes les mêmes.

Nous avons aussi employé une eau de savon mêlée de glycérine, donnant à l'aréomètre  $F = 3,317$ ; pour éviter la confusion, on a accentué les  $z$  relatifs à ce dernier liquide dans le tableau suivant, où tous les nombres se trouvent rassemblés :

$d$	$L$	$l$	$z$	$z_1$	$z_2$	$z'$	$z'_1$	$z'_2$
4		9,5	64,4		62,6	75,7		73,7
5		18,5	51,6		50,1	60,6		59,0
6		31,9	42,9		41,8	50,5		49,2
7		50,7	36,8		35,8	43,7		42,1
8		75,5	32,2		31,3	37,9		36,8
9		108,4	28,6		27,8	33,7		32,8
10	24,1	147,6	25,8	24,7	25,1	30,3	29,0	29,4
11	32,1	196,5	23,4	22,4	22,8	27,5	26,3	26,9
12	41,7		21,5	20,6		25,2	24,1	
13	53,0		19,8	19,0		23,3	22,3	
14	66,2		18,4	17,6		21,6	20,7	
15	81,4		17,2	16,5		20,2	19,3	
16	98,8		16,1	15,4		18,9	18,1	
17	118,5		15,1	14,4		17,8	17,0	
18	140,7		14,3	13,7		16,7	16,0	
19	165,5		13,6	13,0		15,9	15,2	
20	193,0		12,9	12,3		15,1	14,4	
21	223,4		12,3	11,8		14,4	13,8	
22	256,9		11,7	11,2		13,7	13,1	

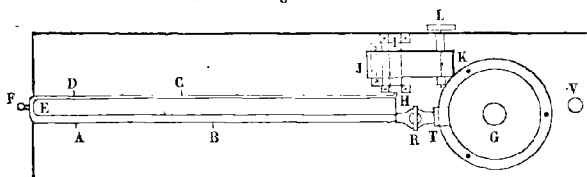
L'air contenu dans le tube et dans la bulle étant comprimé, le volume produit est un peu trop faible, mais il est facile de s'assurer que cette cause d'erreur est négligeable; on a seulement remplacé par 9,5 la valeur 9,4 de  $l$ , qui correspond à  $d = 4$ .

Avec cet appareil, on n'a plus remarqué de désaccord nettement appréciable entre les indications des bulles et celles de l'aréomètre; il est certain que, pour les bulles les plus favorables, une différence relative de  $\frac{1}{60}$  aurait pu être aisément constatée. Les expériences ont été faites à 14 degrés, et l'on a eu soin d'éviter les variations notables de température (\*).

Pour étudier les bulles formées avec un liquide quelconque, il a fallu modifier encore l'appareil, parce les mouvements rapides de l'alcool, après la production de la bulle, la faisaient crever lorsque le liquide n'était point suffisamment visqueux.

Le tube manométrique FRT (*fig. 59*), toujours incliné au

Fig. 59.



dixième et adapté à un vase de fer-blanc, en partie plein d'alcool, est muni d'un robinet R à sa partie inférieure. En E, il communique latéralement avec un second tube EDCH, bien calibré et à section connue par la pesée du mercure capable de remplir une longueur déterminée. HI est un court tube de caoutchouc fermé en I; au-dessus, en JK, se trouve une lame

---

(\*) Quand nous avons exécuté ces expériences sur les bulles de grands diamètres, nous ne savions pas encore que M. Henri et M. Plateau avaient traité ce point avant nous. Des recherches remarquables de ce dernier savant, nous ne connaissons que les premières parties, où ce sujet n'entre pas. Ses vues théoriques ne sont pas les mêmes, et nos appareils, d'un usage plus commode dans les cours, sont destinés à des mesures plus variées.

de bois fixée en J par deux fils faisant l'office de charnière, et, en K, un autre fil, qui s'enroule sur un treuil, sert à abaisser graduellement la lame par la rotation lente de la tête L du treuil. Cette disposition permet, en pressant plus ou moins, de faire avancer ou reculer, dans le tube CD, le mercure dont le tube en caoutchouc est rempli.

Lorsqu'on veut produire une bulle à l'extrémité de l'ajutage fixé en F et l'étudier, il faut ouvrir le robinet, aspirer, au moyen d'un tube disposé pour cela, l'air qui est au-dessus de l'alcool dans le vase G, puis, laissant le robinet à peine ouvert, saisir, pour le fermer, le moment où l'alcool est en B. Ce point a été marqué d'avance, de telle sorte que la distance au point A d'équilibre, sous la pression atmosphérique, soit convenable pour mesurer la pression interne connue d'avance. Cela fait, on marque sur le tube à volumes une longueur CD qui correspond au volume de la bulle choisie, après quoi on amène le mercure en C au moyen de la presse.

C'est alors seulement qu'on ferme l'ajutage avec une très-petite quantité de liquide, d'eau par exemple, et la presse agissant de nouveau, le mercure poussé jusqu'en D souffle une bulle dont le volume et le diamètre se trouvent parfaitement déterminés.

En ouvrant le robinet, on ne troublerait pas l'équilibre si la pression établie d'avance était exactement celle de l'intérieur de la bulle. Comme on ne peut atteindre cette égalité absolue, on produit plusieurs fois la même bulle en variant la pression AB, et l'on reconnaît que cette pression est trop forte ou trop faible suivant que l'on voit la bulle croître et crever ou être avalée. Cette méthode, analogue à celle que l'on emploie dans les pesées, conduit assez vite à une approximation très-satisfaisante. Elle réussit tout aussi bien quand la force de réunion est entièrement inconnue, mais elle exige alors des tâtonnements un peu plus nombreux.

Nous avons étudié avec soin des bulles d'eau de 3<sup>mm</sup>,5, de 3<sup>mm</sup> et de 2<sup>mm</sup>,5 de diamètre, en employant pour cela deux appareils dans lesquels les tubes à volumes avaient pour sections 0,3632 et 0,1642; l'alcool du manomètre avait pour densité 0,8262. La pression calculée était d'abord corrigée pour les erreurs de pente, de température et de variation de niveau dans le réservoir en fer-blanc. Le volume calculé était accru de manière à former exactement la bulle choisie, malgré la compression intérieure, et diminué du volume du segment qui manque à la bulle pour être complètement sphérique. Pour d'aussi petits diamètres, les pressions sont assez considérables pour que la première de ces deux corrections ne puisse être négligée; par exemple pour la bulle de 2,5 de diamètre, la colonne cylindrique d'air chassé par le mercure avait une longueur de 49,8, et la correction qu'il fallait lui faire subir était de 8,4. Dans certaines séries d'expériences, on a laissé invariable le volume corrigé, et la pression a été successivement accrue et diminuée de  $\frac{1}{60}$  de sa valeur, après quoi elle s'est montrée constamment trop forte dans le premier cas et trop faible dans le second. Dans d'autres séries on a, au contraire, laissé la pression invariable et augmenté ou diminué le diamètre de la bulle de  $\frac{1}{60}$  de sa valeur; les défauts de concordance avec l'indication de l'aréomètre se sont toujours montrés inférieurs à  $\frac{1}{60}$ . Lorsqu'on veut resserrer l'intervalle beaucoup plus, on voit les bulles tantôt s'accroître et tantôt être avalées sous des pressions qu'on cherche cependant à rendre identiques, et cela montre que les erreurs d'expériences s'opposent à une plus grande approximation avec les moyens employés.

Dans le second tube dont le diamètre était de 0,46, nous avons examiné quelle influence pouvait avoir le frottement,

et elle nous a paru négligeable, lorsque la bulle de 2,5 était produite par un mouvement du mercure dans le haut du tube à volumes, de manière à rendre très-court l'espace nuisible; alors les résultats obtenus se sont accordés avec le calcul à  $\frac{1}{60}$  près comme avec le premier tube de 0,68 de diamètre.

En formant la bulle avec de l'air qui, poussé par le mercure, ne pouvait se rendre dans son intérieur qu'après avoir parcouru une longueur de 235 millimètres dans le tube à volumes, on a observé une pression qui indiquait que la dixième partie environ de l'air déplacé se trouvait arrêtée par le frottement. Un tel résultat est de nature à faire craindre que les pressions n'aient été qu'imparfaitement transmises dans certaines expériences dues à divers observateurs qui ont fait usage de tubes beaucoup plus petits.

Il est indispensable d'employer des ajutages parfaitement mouillés par le liquide; sans cette précaution, l'air sort en se mêlant avec celui qui adhère aux parois, et la bulle ne se forme pas; pour le mercure, il faut se servir d'un ajutage métallique amalgamé. La forme du bec a aussi de l'importance: les bords de l'ouverture ne doivent être ni trop épais, ce qui altérerait la forme des bulles, ni trop minces, ce qui rendrait leur production plus difficile.

*Bulles intérieures.* — Lorsqu'on plonge dans un liquide l'extrémité de l'ajutage F de l'appareil représenté dans la *fig. 58*, on arrive facilement à produire des bulles intérieures, auxquelles il faut encore appliquer la formule (319), mais en remarquant qu'il n'existe plus qu'une couche superficielle sphérique. Nous avons employé successivement deux genres d'ajutages: dans l'un, l'ouverture se présentait en haut et la poussée du liquide tendait à détacher la bulle; dans l'autre, le contraire avait lieu. Avec les premiers, on ne pouvait faire des bulles d'un diamètre supérieur au double du diamètre de



l'orifice, parce que la force de contraction du cylindre liquide annulaire qui adhérait à la surface intérieure du tube devenait plus grande que la tension de l'air dans la bulle; l'extrémité de ce cylindre se fermait, et la bulle ainsi détachée montait aussitôt. Avec les ajutages du second genre, la poussée, appliquant la bulle contre le bout du tube, entravait le passage du liquide nécessaire pour la fermeture du cylindre, et on a pu produire des bulles d'un diamètre plus grand.

Les expériences se faisaient comme pour les bulles extérieures, mais il fallait tenir compte en outre de la pression produite par la charge au-dessus du centre de la bulle. Pour rendre cette correction plus facile avec les ajutages de la seconde espèce, l'eau, qui a surtout été prise comme exemple, n'atteignait d'abord pas l'orifice; on en ajoutait peu à peu au moyen d'une pipette, qui, à la fin, donnait des gouttes qu'on posait sur la surface sans choc, et on ne manquait pas de s'arrêter aussitôt que le bout de l'ajutage était réuni au liquide. Comme le vase était grand, on arrivait de la sorte à établir très-exactement, au-dessus du centre de la bulle, une charge égale à son rayon ou plutôt à la hauteur d'un segment connu.

La concordance avec les indications de l'aréomètre a eu lieu à moins  $\frac{1}{30}$  près, pour les bulles de 2<sup>mm</sup>,5 de diamètre, et à moins de  $\frac{1}{45}$  près, pour les bulles de 2 millimètres de diamètre que la poussée du liquide déformait moins.

Les bulles et les lames planes formées avec certains liquides, avec l'eau de savon par exemple, ou mieux avec le liquide glycérique de M. Plateau, se laissent très-bien presser et déformer sans se rompre. Si l'on forme une lame au moyen de l'appareil décrit page 226, ou bien en plongeant dans le liquide glycérique et retirant ensuite un fil métallique en forme d'an-

neau muni d'un manche, on peut, sans causer la rupture de cette lame, y produire un creux considérable en la pressant avec une pointe mouillée d'air ou d'autre gaz. La lame reprend la forme plane en repoussant la pointe aussitôt que la pression devient trop faible pour maintenir la déformation. On peut même lancer de la sorte une petite flèche, et calculer d'avance sa vitesse en s'appuyant sur le théorème fondamental. Lorsque par une cause quelconque la rupture s'est produite, la même théorie donne la vitesse des molécules pendant que la lame se résout en une gouttelette. Soient  $v$  cette vitesse,  $e$  l'épaisseur de la lame supposée sensiblement la même partout, et  $2s$  la surface qui a déjà disparu, en tenant compte des deux faces, le travail capillaire accompli est  $2sF$ . Il égale la force vive  $\frac{se\Delta}{2g}v^2$ , car les frottements sont négligeables dans les liquides; de là on conclut l'équation

$$(398) \quad v = \sqrt{\frac{4gF}{2\Delta}} = \sqrt{\frac{4g f \Delta}{2}}$$

qui conduit aux lois suivantes :

1° *La vitesse des particules liquides dans une lame qui se contracte après qu'on l'a crevée, est indépendante de la forme et de l'étendue de la surface qui a déjà disparu et par suite constante ;*

2° *Elle est proportionnelle à la racine carrée de la force de réunion ramenée à l'unité de densité ;*

3° *Elle est proportionnelle à la racine carrée de la densité ;*

4° *Elle est en raison inverse de la racine carrée de l'épaisseur.*

Quand un liquide glycérique a pour force de réunion 3 et une densité voisine de 1, on trouve que la vitesse est 32 mètres par seconde, si l'épaisseur a été réduite à  $\frac{1}{9000}$  de millimètre, point qu'on peut atteindre dans les expériences.

Dans le vide, une lame glycérique cylindrique indéfinie en longueur se réduirait promptement à un filet liquide, qui, comme l'a fait voir M. Plateau, se résoudrait lui-même en globules; l'étude de ce phénomène n'est pas plus difficile. Soient  $r_0, e_0$  le rayon et l'épaisseur au début, et supposons à cette époque la vitesse nulle ainsi que le temps. Soient  $r, e, v$ , les valeurs au temps  $t$ ,  $v$  désignant la vitesse dans le sens du rayon. On a d'abord évidemment

$$re = r_0 e_0.$$

Après un nouveau temps  $dt$ , la double surface  $4\pi r$  par unité de longueur a éprouvé une diminution  $-4\pi dr$ , et le travail capillaire correspondant est

$$-4\pi F dr.$$

D'ailleurs le volume du liquide est  $2\pi re$ , son poids  $2\pi re\Delta$ , et sa force vive  $\frac{\pi re\Delta}{g}v^2$ . La variation de cette dernière quantité  $\frac{2\pi re\Delta}{g}v dv$  égale le travail élémentaire, et en remplaçant  $re$  par  $r_0 e_0$ , on arrive à l'équation

$$r_0 e_0 \cdot 2v dv = -4F dr,$$

qui donne

$$(399) \quad v^2 = \frac{4gF}{r_0 e_0} (r_0 - r),$$

On déduit de là

$$(400) \quad v = -\frac{dr}{dt} = 2\sqrt{\frac{gF}{r_0 e_0}} \sqrt{r_0 - r};$$

intégrant de nouveau, il vient

$$(401) \quad t = \sqrt{\frac{r_0 e_0}{gF}} (r_0 - r).$$

Pour  $r = 0$ , on a

$$(402) \quad T = r_0 \sqrt{\frac{e_0}{gF}};$$

c'est le temps nécessaire pour la fermeture complète. La vitesse finale est

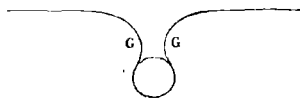
$$(403) \quad V = 2\sqrt{\frac{gF}{e_0}}.$$

Avec  $F = 3$ ,  $r_0 = 5$ ,  $e_0 = \frac{1}{10000}$ , on trouve

$$T = \frac{1''}{3431}, \quad V = 34,31 \text{ mètres.}$$

Ceci rend facile à comprendre la cause d'un fait qui étonne au premier abord. Au moyen de l'appareil décrit page 226, on produit une lame horizontale ayant la forme d'un secteur circulaire de 25 centimètres de rayon, par exemple, puis on laisse tomber au travers un grain de plomb ou de toute autre matière solide; on peut employer une boule de liège de 10 à 12 millimètres de diamètre. Après la chute, on retrouve la lame entière comme auparavant, si le corps n'est point trop gros ou la vitesse d'arrivée trop grande. Avec le liquide qui nous a servi, la boule de liège opérant la rupture quand on la laissait tomber d'une hauteur plus grande que 25 centimètres. Après l'expérience, nous avons de suite pensé à une explication dont l'exactitude est facile à vérifier en produisant le phénomène avec lenteur: on donne à la boule un manche en y piquant une aiguille, puis on la fait passer doucement au travers de la lame, et l'on voit se former une poche de plus en plus profonde qui se rétrécit en gorge GG (fig. 60) au-dessus du

Fig. 60.



liège et finit par se fermer complètement. Quand on laisse tomber la balle, elle crève la lame au-dessous de la gorge qui ne se referme d'une manière complète qu'autant qu'elle peut le

aire avant que la force contractile ait fait disparaître la lame. Comme on le voit les deux phénomènes précédemment étudiés tendent à se produire simultanément ici.

Lorsqu'une bulle communique avec l'atmosphère par une ouverture en mince paroi, on peut admettre que le travail capillaire est employé à peu près entièrement à produire la force vive de l'air qui s'échappe à chaque instant; car la force vive des molécules liquides n'est qu'une fraction négligeable de celle que la force contractile tend à produire (\*). En profitant de cette remarque et nommant  $s$  la section contractée,  $r_0$  la valeur primitive du rayon,  $r$ ,  $v$ ,  $p$  le rayon de la bulle, la vitesse de l'air et la pression en atmosphères au temps  $t$ , on peut résoudre complètement la question. Le volume de l'air qui sort pendant le temps  $dt$  est, à la température  $\theta_1$  sensiblement constante et après le passage de la pression intérieure  $p_1$  à la pression extérieure  $p_2$ ,  $s v dt$  ou  $-4\pi r^2 dr$  et sa force vive est  $\frac{1,3 \times 274 p_2 s v^3 dt}{2g(274 + \theta_1)}$ .

D'après le principe de l'équivalence, cette quantité égale le travail capillaire effectué, c'est-à-dire la variation de surface  $16\pi r dr$  par la force de réunion, et l'on a les équations

$$(404) \quad -sv dt = 4\pi r^2 dr$$

---

(\*) D'après le principe de l'équivalence, l'action d'une force extérieure n'est complète qu'autant qu'elle ne produit pas de force vive appréciable dans le corps auquel elle est appliquée; ainsi un corps suspendu par un fil au plateau d'une balance n'agit en vertu de tout son poids que s'il est en repos ou en mouvement uniforme. Dans le cas où le fil serait porté par un mécanisme qui le déroulerait de manière à permettre au poids de descendre d'un mouvement uniformément accéléré, celui-ci agirait sur la balance comme si la pesanteur était réduite dans le rapport de la différence des accélérations à l'accélération due à la pesanteur. Son action serait nulle si la différence des accélérations était nulle, et l'on constaterait alors, au moyen de l'appareil, la loi de la chute des corps en même temps que la valeur de  $g$ .

et

$$(405) \quad -16\pi F r dr = \frac{1,3 \times 274 p_2 s v^3 dt}{2g(274 + \theta_1)}$$

En éliminant  $\frac{dr}{dt}$ , on trouve

$$(406) \quad v^2 = \frac{8gF(274 + \theta_1)}{1,3 \times 274 p_2 r};$$

on a d'ailleurs (379) la relation

$$\frac{4F}{r} = 10333(p_1 - p_2),$$

qui, combinée avec la précédente, donne

$$v^2 = \frac{2g \times 10333(274 + \theta_1)}{1,3 \times 274} \frac{p_1 - p_2}{p_2},$$

et l'on retombe sur la formule de Bernoulli.

Pour obtenir le temps, éliminons  $v$  entre (404) et (406), il vient

$$(407) \quad -dt = \frac{2\pi}{5} \sqrt{\frac{1,3 \times 274 p_2}{2gF(274 + \theta_1)}} \cdot r^{\frac{5}{2}} dr,$$

et par suite

$$t = \frac{4\pi \sqrt{1,3 \times 274 p_2}}{75 \sqrt{2gF(274 + \theta_1)}} (r_0^{\frac{7}{2}} - r^{\frac{7}{2}}).$$

Le temps nécessaire pour la disparition totale de la bulle s'obtient en faisant  $r = 0$ , ce qui donne, en négligeant l'influence de la température et supposant la pression atmosphérique normale,

$$(408) \quad T_0 = \frac{4}{75} \pi \sqrt{\frac{1,3 r_0^7}{2gF}}.$$

Pour deux bulles de rayons différents soumises à la même température et à la même pression externe, on a

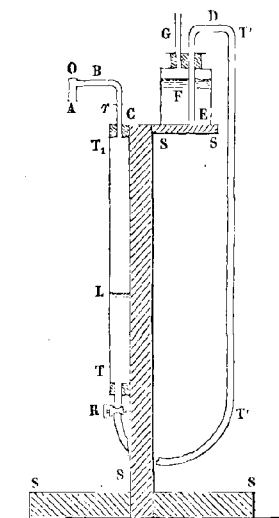
$$(409) \quad \frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{r_1^7}{r_0^7}.$$

*Les carrés des temps nécessaires pour qu'elles se vident sont proportionnels aux septièmes puissances de leurs diamètres ou de leurs rayons.*

Nous avons fait les expériences de vérification au moyen de l'appareil représenté par la *fig. 61* et dont voici la description.

S est un support en bois.

Fig. 61.



TT<sub>1</sub> est un tube à volumes solidement fixé au support, bien calibré et ayant pour diamètre 22<sup>mm</sup>,80. Inférieurement, il est mis en communication avec le flacon F par un tube plus petit T'DE en caoutchouc dans presque toute sa longueur; un robinet R permet d'interrompre à volonté cette communication.

Le flacon F, qui contient de l'eau, se place, comme on le voit sur la figure, lorsqu'on veut faire arriver le liquide dans le tube à volumes; lorsqu'on veut au contraire retirer l'eau, on descend le flacon au bas de l'appareil. Le tube G permet l'entrée ou la sortie de l'air.

L'extrémité supérieure du tube à volume  $TT_1$  communique, au moyen du petit tube  $BC$ , avec un ajutage  $OA$  en laiton de 5 millimètres de diamètre; en  $O$  se trouve un disque mince percé d'une ouverture ayant pour diamètre  $1^{\text{mm}},15$ .

Lorsqu'on veut faire une expérience, on amène d'abord l'eau jusqu'au point  $L$  marqué d'avance à la distance  $T_1L = H$  qui correspond au volume de la bulle qu'on veut produire. On ferme ensuite l'ouverture  $A$  avec un peu de liquide glycérique; celui qui nous a servi avait pour force de réunion mesurée par l'aréomètre 2,833. Cela fait on pose le doigt en  $O$ , puis on ouvre le robinet jusqu'à ce que liquide atteigne le repère  $r$ ; la bulle produite se trouve avoir exactement le diamètre voulu parce que le volume  $c$  a été choisi de manière à loger l'eau élevée d'abord en  $L$  par capillarité sur toute la circonférence intérieure.

A ce moment l'expérience est préparée, l'observateur écoute les battements d'un chronomètre qui donne les demi-secondes, et lève le doigt au moment où l'un d'entre eux se fait entendre; il compte les intervalles jusqu'à la disparition totale de la bulle, en évitant avec soin toute agitation de l'air. Le tableau suivant renferme les résultats que nous avons obtenus; les temps ont été observés plusieurs fois, et la concordance a toujours été complète, si ce n'est pour l'expérience n° 1, dont la durée a paru surpasser 5 demi-secondes d'une quantité qui n'a pas pu être bien appréciée. L'épaisseur des lames glycériques change quand on répète une même expérience; l'invariabilité du temps suffit donc pour prouver que la force vive des molécules liquides est vraiment négligeable.



NUMÉROS des expériences.	$r_0$	II	T	$\frac{r_0^2}{T^2}$	ÉCARTS de la moyenne.	K	ÉCARTS de la moyenne.
1	0,0125	0,0200	2 <sup>n</sup> ,5	7629	$\frac{1}{10}$	0,7282	$\frac{1}{21}$
2	0,015	0,0346	5	6834	$\frac{1}{60}$	0,6892	$\frac{1}{120}$
3	0,0175	0,0550	8,5	6957	$\frac{1}{1160}$	0,6954	$\frac{1}{1738}$
4	0,020	0,0821	13,5	7023	$\frac{1}{97}$	0,6987	$\frac{1}{188}$
5	0,0225	0,1169	20,5	6946	$\frac{1}{1390}$	0,6948	$\frac{1}{3475}$
6	0,025	0,1603	29,5	7014	$\frac{1}{110}$	0,6982	$\frac{1}{217}$
7	0,0275	0,2134	41,5	6906	$\frac{1}{154}$	0,6928	$\frac{1}{316}$
8	0,030	0,2770	56	6974	$\frac{1}{302}$	0,6962	$\frac{1}{579}$
Moyennes.....				6951		0,6950	

Les moyennes ont été prises sans tenir compte de l'expérience n° 1, dont le peu de durée ne permettait point assez d'approximation. La cinquième colonne contient les valeurs du quotient  $\frac{r_0^2}{T^2}$ , sans avoir égard à la place occupée par la virgule; ces valeurs, la première exceptée, diffèrent fort peu de la moyenne, et la loi théorique reçoit une confirmation très-satisfaisante.

L'équation (408) rend facile le calcul de la section contractée, et aussi du rapport  $k$  de cette section avec la surface du cercle  $o$  dont notre appareil micrométrique a fourni le diamètre avec beaucoup d'exactitude. Les valeurs de  $k$ , la première exceptée, ne diffèrent pas sensiblement de leur moyenne 0,695; cette constance, approchée sous des pressions variables, a été mise en évidence depuis longtemps par des observateurs très-

habiles, et le nombre trouvé ici ne diffère pas beaucoup de celui qu'ils ont obtenu. Il les surpasse un peu; mais on n'avait point encore expérimenté sous des pressions aussi faibles.

*Limite supérieure de  $\epsilon$ .* — Lorsqu'on suppose, pour une première approximation, que la densité des liquides est la même jusqu'à la surface, les raisonnements qui ont servi (p. 208 et 209) à établir l'égalité numérique entre le travail de séparation perpendiculaire et la force de contraction des couches superficielles liquides, sont applicables tant que l'épaisseur primitive surpasse  $2\epsilon$ , et ils conduisent à admettre que *la force de contraction est indépendante de l'épaisseur, pourvu que cette épaisseur atteigne ou surpasse  $\epsilon$* ; au-dessous, la force contractile est moindre. Il en résulte un moyen d'obtenir une limite supérieure de  $\epsilon$  pour les liquides qui se réduisent facilement en lames persistantes, et c'est à M. Plateau que la science le doit. Après avoir soufflé une bulle communiquant avec un manomètre, on attend qu'elle prenne une épaisseur de moins en moins grande et qu'elle montre des couleurs d'après lesquelles on détermine cette épaisseur. En même temps on constate que la pression interne demeure constante, ce qui prouve que l'épaisseur surpasse encore  $\epsilon$ ; on arrive de la sorte, pour le liquide glycérique que nous avons examiné, à

$$\epsilon < \frac{1}{9000}.$$

Si l'on tient compte des variations de densité près de la surface, le dénominateur 9000 doit être augmenté et porté en toute rigueur théoriquement au double, comme le fait M. Plateau; mais la dilatation très-faible obtenue (p. 274) pour la couche  $\epsilon$  passant, dans l'eau, de l'intérieur à la surface, et le décroissement très-rapide des attractions moléculaires lorsque la distance augmente, suffisent pour montrer que, à partir de  $2\epsilon$ , une diminution d'épaisseur ne peut entraîner une diminution *sensible expérimentalement* dans la pression interne. Les

raisonnements faits en supposant la densité constante ne peuvent évidemment conduire ici qu'à une erreur légère; on le constate avec facilité quand on les examine une seconde fois à ce point de vue.

*Volumes soulevés ou abaissés.* — L'élévation des liquides dans les tubes de petits diamètres, lorsqu'ils sont de nature à pouvoir être bien mouillés, est un phénomène très-anciennement connu; on peut l'expliquer et en trouver théoriquement la loi au moyen du théorème exprimé par l'équation (319), ou en égalant le poids soulevé à la force de contraction totale. Mais, comme il y a quelque avantage à donner successivement des exemples de démonstrations variées, je vais appliquer le principe des vitesses virtuelles, et considérer le cas où le tube est incliné d'une manière quelconque. Je supposerai que le vase dans lequel plonge le tube a une étendue assez grande pour que les variations de niveau y soient négligeables, et je nommerai  $r$  le rayon du tube et  $h$  la hauteur de la colonne soulevée. L'équilibre existant, si l'on attribue à  $h$  un accroissement  $dh$  infiniment petit, le travail dû à la pesanteur aura pour expression  $\pi r^2 h \Delta \cos \alpha \cdot dh$ , en désignant par  $\alpha$  l'angle du tube avec l'horizon. En même temps, la surface intérieure du tube, mouillée d'avance par une couche liquide plus épaisse que  $\epsilon$ , sera recouverte dans une étendue  $2\pi r \cos \alpha \cdot dh$ ; d'après le théorème fondamental, un travail capillaire  $2\pi r F \cos \alpha \cdot dh$  sera donc accompli et le principe des vitesses virtuelles fournira l'équation d'équilibre

$$\pi r^2 h \Delta \cos \alpha \cdot dh = 2\pi r F \cos \alpha \cdot dh,$$

ou, en simplifiant

$$(410) \quad \Delta r h = 2F, \quad \text{ou} \quad r h = 2f \Delta.$$

Ainsi, les hauteurs des colonnes soulevées obliquement ou verticalement sont inversement proportionnelles aux diamètres des

*tubes, proportionnelles à la force de réunion du liquide et à l'inverse de la densité.*

Pour que cette loi soit applicable, il faut, d'après la manière dont elle vient d'être établie, que l'épaisseur de la couche adhérente surpasse  $\epsilon$  et soit cependant négligeable par rapport au rayon du tube, et que le poids du ménisque soit négligeable aussi. Dans ces circonstances, elle se vérifie parfaitement, et l'on peut citer comme preuves les expériences faites avec beaucoup d'habileté par plusieurs observateurs très-dignes de confiance. Mais, comme avant nous on ne déterminait point les forces de réunion par des pesées qui permettent de calculer les hauteurs à l'avance, nous avons tenu à faire un certain nombre d'expériences avec les produits préparés purs par M. Lechartier. Un petit cathétomètre construit dans ce but, et pourvu d'une lunette micrométrique convenable, servait à déterminer les diamètres des tubes et les hauteurs. Nous avons aussi mesuré directement les hauteurs avec une échelle, en ayant soin d'incliner le tube au dixième pour augmenter l'approximation. Les diamètres mesurés à l'aide du micromètre et du cathétomètre donnaient des résultats qui ne différaient pas de plus d'un centième de millimètre. Les pesées de mercure occupant une longueur connue ont aussi donné des résultats concordants.

Tableau des hauteurs comptées verticalement auxquelles s'élèvent divers liquides dans un tube ayant pour rayon moyen  $0,7\frac{1}{4}$ :

NOMS DES SUBSTANCES.	$t$	$h = \frac{2f\Delta}{r}$	$h_1$	$h_2 + \frac{r}{3}$	ÉCARTS POUR $h_1$	ÉCARTS POUR $h_2$
Éther acétique.....	15,5	7,72	7,65	7,35	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{20}$
Benzine.....	15,5	9,34	9,13	9,11	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{39}$
Liqueur des Hollandais.	15,5	7,33	6,9	7,03	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{23}$
Alcool vinique.....	15,5	8,04	7,6	7,95	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{88}$
Éther vinique.....	1,5	7,02	6,5	6,35	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{10}$
Bichlorure de carbone.	14,5	4,90	4,29	4,63	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{17}$
Ess. de térébenthine..	19,5	8,81	8,6	8,71	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{44}$
Chloroforme.....	14,0	5,18	4,64	4,83	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{15}$
Alcool amylique.....	21,5	8,27	8,0	8,25	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{400}$
Eau.....	20,0	20,3	20,87	20,0	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{66}$

La troisième colonne contient la hauteur calculée au moyen de la force de réunion fournie par l'aéromètre; *a priori*, il est à présumer qu'elle est un peu forte pour les liquides très-volatils (\*), parce que, dans ce cas, le thermomètre indique une température plus élevée que celle de la couche superficielle. Aussi surpasse-t-elle légèrement, en général, les hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  contenues dans les colonnes suivantes, et obtenues, la première avec un tube incliné et la seconde avec le cathétomètre. Ces remarques s'appliquent encore au tableau suivant, relatif à un tube de rayon moyen 0,368. Les valeurs de  $h_2$  ont

(\*) La vitesse avec laquelle un liquide s'évapore n'est pas déterminée uniquement par son point d'ébullition; elle dépend beaucoup aussi de la facilité avec laquelle s'opère la diffusion de sa vapeur dans le milieu gazeux.

été augmentées de  $\frac{r}{3}$ , afin de tenir compte du ménisque de la manière usitée dans l'approximation où on lui suppose la forme sphérique :

NOMS DES SUBSTANCES.	$t$	$h = \frac{2f\Delta}{r}$	$h_1$	$h_2 + \frac{r}{3}$	ÉCARTS pour $h_1$	ÉCARTS pour $h_2$
Éther acétique.....	15,5	15,52	15,64	14,94	$\frac{1}{130}$	$\frac{1}{26}$
Benzine.....	15,5	18,78	19,04	18,24	$\frac{1}{73}$	$\frac{1}{34}$
Liqueur des Hollandais.	15,5	14,74	14,7	14,20	$\frac{1}{370}$	$\frac{1}{26}$
Alcool vinique.....	17,5	16,17	16,6	15,92	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{64}$
Éther vinique.....	1,5	14,11	13,4	12,92	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{11}$
Bichlorure de carbone.	14,5	9,85	9,5	9,38	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{20}$
Ess. de térébenthine..	19,5	17,71	18,2	17,54	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{103}$
Chloroforme.....	14,0	10,43	10,3	10,04	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{27}$
Alcool amylique.....	21,5	16,62	16,5	15,76	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{18}$
Eau.....	20,0	40,76	42,08	40,64	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{330}$

Quatre autres expériences ont encore été faites pour obtenir des forces de réunion au moyen des hauteurs, dans des tubes de petits diamètres. Le brome à la température de 22 degrés s'est élevé à 7<sup>mm</sup>,58 dans un tube de 0<sup>mm</sup>,31 de rayon, ce qui donne  $f=0,377$ ; avec l'aréomètre, nous avons obtenu la valeur 0,37, peu différente, et qui est inscrite dans le tableau général.

Pour l'acide hypo-azotique à 15 degrés, nous avons eu  $h=9,74$  avec  $r=0,35$ , et il en résulte  $f=1,20$ .

Le perchlorure d'étain a donné  $h=7,32$  avec  $r=0,325$  à la température de 26 degrés, et par suite  $f=0,5217$ .

L'iode liquide a bien mouillé un tube de verre légèrement dépoli. Nous avons obtenu  $h=5,0$  avec  $r=1,05$ , et comme on a, d'après M. Billet,  $\Delta=4,144$ , cela donne  $f=0,3167$ , puis  $e=84,27$ .

La marche suivie pour trouver l'équation (410) s'applique tout aussi facilement au cas plus compliqué dans lequel on est obligé de tenir compte des variations de niveau dans le vase où plonge le tube capillaire, et du poids du ménisque, ou bien au cas d'un tube en U, à branches ayant des diamètres inégaux; il est inutile de les étudier ici en détail. Nous passerons aussi sous silence l'étude de l'ascension entre deux lames; le lecteur y suppléera sans peine.

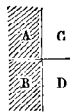
Quand les solides sont mouillés par une couche d'air adhérente plus épaisse que  $\epsilon$ , on observe d'autres faits produits encore par l'action d'une seule substance sur elle-même, parce que l'action de l'air peut être négligée sans erreur appréciable; déjà quelques phénomènes de ce genre ont été précédemment étudiés. En ce qui concerne les tubes, un abaissement remplace l'élévation, et on peut en déterminer la valeur en continuant l'application du principe des vitesses virtuelles ou théorème relatif aux travaux élémentaires. La formule précédemment obtenue demeure la même, et il n'y a rien à changer dans sa démonstration, sauf le signe de  $dh$ . Les seules difficultés que présente cette question se rencontrent dans les expériences et tiennent à ce qu'il est impossible d'assurer l'adhérence d'une couche gazeuse d'épaisseur plus grande que  $\epsilon$ ; peut-être qu'on y réussirait mieux en remplaçant l'air par un autre gaz et en changeant la nature des parois du tube, qui peut même n'être pas transparent sans que les expériences deviennent pour cela impossibles.

Dans l'étude de la capillarité, on n'a pas toujours à consi-

dérer des masses liquides ayant toutes leurs parties à la même température ; de là peuvent résulter divers phénomènes dont nous allons examiner quelques-uns.

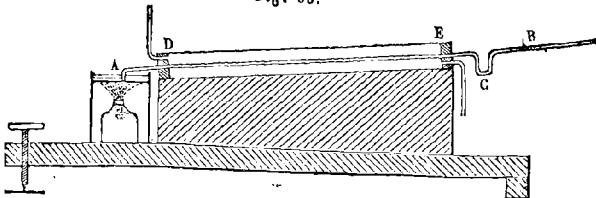
Supposons d'abord une paroi solide mouillée par une couche liquide AB (*fig. 62*), immobilisée par adhérence; la couche voi-

Fig. 62.



sine CD peut glisser dessus, et l'on veut savoir si cet effet tend à se produire lorsque la température n'est point uniforme. Soit  $t$  la température des portions A et C qui se touchent,  $t + dt$  celle des parties B et D. La force de réunion  $F'$  de A et D ne sera point la même que dans le cas de l'égalité de température; elle aura pour valeur  $f\Delta\Delta'$ ,  $\Delta$  et  $\Delta'$  étant les deux densités. Mais la force de réunion de B et C sera aussi  $f\Delta\Delta'$ , et, comme ces deux forces tendent à produire le glissement en sens contraire, l'équilibre existera. Il en résulte que, dans un tube capillaire mouillé, la hauteur de la colonne soulevée est indépendante de la température dans le réservoir, pourvu qu'il soit de grand diamètre, et indépendante de la température en un point quelconque de la colonne. Ce n'est qu'autant qu'on change la température du ménisque qu'on produit une variation dans la force soulevante. Nous avons vérifié ces résultats, déjà con-

Fig. 63.



nus en partie, au moyen de l'appareil (*fig. 63*), dans lequel un



tube de verre AB, incliné au dixième, plonge par son extrémité inférieure dans un réservoir d'eau. Sa longueur presque entière est environnée d'un manchon DE plein d'eau froide. On chauffe d'abord le réservoir A au moyen d'une petite lampe placée dessous; la surface capillaire B demeure invariable, pourvu qu'il en soit ainsi sensiblement de la surface liquide en A.

Dans une seconde expérience, on chauffe la partie DE en faisant circuler dans le manchon un courant d'eau bouillante; la surface capillaire que l'on peut protéger par un écran demeure froide, parce que, vers C, le tube a été recourbé en U, afin d'empêcher le courant d'eau chaude. La force soulevante reste encore la même; mais la densité de la colonne soulevée a diminué, et, par cette cause, la surface B monte légèrement.

Enfin, on chauffe le ménisque B, et aussitôt on le voit descendre rapidement.

Le petit théorème sur l'inefficacité des variations de température loin du ménisque est facile à établir aussi par la considération des travaux élémentaires dont il a été donné plusieurs exemples précédemment.

Les effets qu'on pourrait produire au moyen de changements locaux de température dans les couches superficielles liquides sont nombreux et variés. On pourrait, par exemple, diviser un vase horizontal très-peu profond en deux compartiments, par une cloison assujettie à tourner autour de sa base; puis remplir ces compartiments, l'un d'eau chaude et l'autre d'eau froide. La cloison, mouillée de part et d'autre, serait sollicitée par deux forces contractiles inégales et s'inclinerait du côté de l'eau froide aussitôt qu'on brûlerait un fil destiné à la maintenir en place d'abord.

Comme exemple de mouvement alternatif continu, je citerai encore la disposition suivante. Un tube métallique vertical est assujetti, au moyen d'organes mécaniques convenables, à

monter et descendre pendant qu'un petit volant tourne. Ce tube, amalgamé à l'extérieur, plonge dans du mercure, et la machine est disposée de telle sorte que, par une circulation d'air alternativement chaud et froid dans l'intérieur du tube, on rend la force contractile plus ou moins grande pendant l'ascension que pendant la descente, et cela suffit pour fournir un léger travail disponible. Il est facile d'imaginer d'autres machines thermo-capillaires, et je ne vois pas d'obstacle à leur exécution et à leur marche, pourvu qu'on ne leur demande qu'un travail suffisamment faible.

On peut encore montrer l'action d'une différence de température en pressant une lame d'eau de savon avec une tige de fer arrondie par son extrémité. Si la tige est froide, la lame devient concave, puis reprend la forme plane quand on retire le métal. Au contraire, lorsque la tige est chaude, la lame crève immédiatement. La différence de température rend moindres les forces contractiles des couches superficielles sur les deux faces et rend l'équilibre impossible. Le liquide touché et chauffé est entraîné par la force supérieure, un trou se produit et la lame disparaît avec une grande rapidité.

*Condition pour qu'un liquide mouille un solide.* — Dans ce qui précède, nous avons considéré les faits produits par les actions mutuelles des diverses parties d'un *seul* liquide. Les solides ont été supposés sans action appréciable, soit parce qu'une couche d'air d'une épaisseur plus grande que  $\epsilon$  adhérerait à leur surface, soit parce que cette surface était garnie d'une couche liquide analogue, rendue immobile par la même cause. Un solide ne peut pas être ainsi mouillé par un liquide quelconque, et il est utile de rechercher la condition de ce phénomène.

Lorsqu'une lame solide rectangulaire, de poids  $q$  par unité de longueur, a ses bases horizontales et se trouve assujettie à se mouvoir dans un plan faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizon, il

faut par unité de longueur, pour commencer à la sortir très-lentement d'un liquide où elle est complètement immergée, une force

$$4F' - 2F + 2l\varphi' + q \sin \alpha,$$

si la séparation s'effectue suivant les faces de contact des deux corps, et si on appelle

$F'$  la force de réunion quand ils agissent l'un sur l'autre ;

$F$  la force de réunion du liquide ;

$\varphi'$  la force de frottement au départ du solide contre le liquide pour chaque millimètre carré ;

$l$  la hauteur du rectangle.

La force nécessaire dans l'hypothèse où le solide emporterait avec lui une couche liquide d'épaisseur  $e$ , serait

$$2F + 2l\varphi + 2le\Delta \sin \alpha + q \sin \alpha,$$

$\varphi$  désignant la force de frottement au départ du liquide contre lui-même pour chaque millimètre carré, et  $\Delta$  la densité du liquide.

Il est évident que, la force motrice croissant d'une manière continue, le mouvement commencera à s'effectuer lorsqu'elle égalera la plus faible de ces deux forces et que la condition nécessaire et suffisante pour que le solide sorte *mouillé* est, après simplification,

$$(411) \quad F' > F - \frac{1}{2}l(\varphi' - \varphi) + \frac{1}{2}le\Delta \sin \alpha.$$

A cause de la petitesse de  $e$ (\*), le dernier terme est généralement

(\*) Pourvu que le mouvement de la lame soit assez lent, on peut affirmer que le rayon de la sphère d'attraction sensible du solide agissant sur le liquide surpasse cette quantité ; car la pesanteur tend à opérer la séparation suivant une surface aussi rapprochée du solide que possible. Tout auprès de ce solide, l'attraction au contact rend le frottement au départ plus considérable ; mais, au delà du rayon de la sphère d'attraction sensible, le

négligeable; il en est de même du frottement au départ, et il reste

$$(412) \quad F' > F.$$

La recherche de cette condition est fort simple et peut s'opérer de plusieurs manières, quand on veut bien négliger immédiatement les petites quantités.

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES DANS LESQUELS PLUSIEURS  
CORPS AGISSENT.

*Tension d'une goutte liquide contenue dans un liquide différent.* Supposons le liquide extérieur contenu dans un vase cylindrique de rayon R, mouillé par lui, et soient

frottement est indépendant de la distance; il en est encore à fort peu près indépendant aux distances qui ne sont pas beaucoup inférieures à ce rayon. Il en est de même du travail et de la force de séparation dans le cas où le solide sort mouillé.

Si la vitesse de la lame augmente, ce qui fait croître très-vite la force de frottement, plusieurs couches liquides minces glissent les unes sur les autres parallèlement à la surface avec des vitesses relatives d'autant moindres que leur nombre est plus grand, et cette circonstance amoindrit le travail de frottement ainsi que la force nécessaire pour le produire. On pourrait obtenir une limite du rayon de la sphère d'attraction sensible en pesant la lame d'abord sèche, et ensuite après l'avoir retirée verticalement du liquide en lui imprimant une vitesse uniforme et connue; l'accroissement de poids donnerait, par un calcul facile, l'épaisseur moyenne de la couche liquide entraînée. Une série d'expériences du même genre, dans lesquelles on ferait varier convenablement la vitesse, étant représentée par une formule empirique ou par une courbe, ferait enfin connaître l'épaisseur correspondante à une vitesse nulle, c'est-à-dire la limite cherchée. Ces détails font bien comprendre l'utilité de la précaution que nous avons toujours prise, dans la recherche des forces de réunion par les pesées ou par les ascensions dans les tubes, de mouiller le solide un peu au-dessus du liquide un instant avant d'opérer la mesure.

$F$  la force de réunion du liquide de la goutte,  
 $r$  le rayon de cette goutte sensiblement sphérique,  
 $F_1$  la force de réunion du liquide extérieur,  
 $F'$  la force de réunion du premier liquide avec le second,  
 $\beta$  la distance du centre de la goutte à la surface horizontale  
 du liquide extérieur de densité  $\Delta$ .

La goutte, communiquant par un point de la surface avec un appareil manométrique, peut perdre une partie de sa substance, ou recevoir du liquide semblable à celui qui la compose; l'appareil fournit la mesure de la pression intérieure  $z$ .

Appliquons le principe des vitesses virtuelles, qui n'est ici qu'un cas particulier de celui de l'équivalence. L'équilibre existant, ajoutons au système des forces infiniment petites négligeables, ainsi que les travaux qu'elles produisent, et donnons-leur un sens tel que le rayon de la goutte croisse de  $dr$ ; puis calculons les divers travaux effectués; leur somme sera nulle, car les forces du système sont en chaque point deux à deux égales et contraires.

1° La surface sphérique croît de  $8\pi r dr$ , et il en résulte pour le liquide de la goutte un travail de séparation  $8\pi F r dr$ . Pour le second liquide, c'est  $8\pi F_1 r dr$ , et si l'on compare les deux liquides ensemble, leur surface commune s'est accrue, ce qui a causé un travail de réunion  $16\pi F' r dr$ . En tout on a

$$8\pi r dr (F + F_1 - 2F'),$$

2° Pour un élément  $\omega$  appartenant à la surface sphérique, le travail dû à la force  $z$  est  $\omega z dr$ ; pour la surface entière, cela donne, en tenant compte du signe,

$$-4\pi r^2 z dr.$$

3° En grossissant, la goutte soulève une certaine quantité de liquide qui vient s'étaler à la surface. Pour apprécier le

travail correspondant, soit

$$x^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

l'équation de la méridienne en prenant pour axe des  $y$  comptées positivement de haut en bas la verticale du centre, et pour axe des  $x$  une perpendiculaire contenue dans la surface libre. Entre deux plans horizontaux menés à des profondeurs  $y$  et  $y + dy$ , le liquide soulevé a pour volume  $2\pi x dr \sqrt{1 + y'^2}$ , et le travail élémentaire a pour expression  $2\pi \Delta x y dr \sqrt{1 + y'^2}$ . L'intégrale depuis  $y = \beta - r$  jusqu'à  $y = \beta + r$  a pour valeur

$$4\pi r^2 \beta \Delta dr.$$

4<sup>o</sup> Dans le vase dont je suppose les bords mouillés d'avance, le liquide soulevé occupe une hauteur  $\frac{4r^2}{R^2} dr$ , puisque le volume de la couche sphérique est  $4\pi r^2 dr$ ; le travail de réunion a pour valeur

$$-2\pi R \times \frac{4r^2}{R^2} dr \times F_1 \quad \text{ou} \quad -\frac{8\pi F_1 r^2 dr}{R}.$$

La somme algébrique de ces quantités étant nulle, on arrive, après réductions, à la formule

$$(413) \quad z = \frac{2(F + F_1 - 2F')}{r} + \Delta \beta - \frac{2F_1}{R}.$$

Quand le rayon du vase est très-grand et que la goutte très-petite est fort près de la surface, les deux derniers termes sont négligeables, et l'on retombe sur la formule (319), à cela près que la force de contraction  $F$  doit être remplacée par

$$(414) \quad F + F_1 - 2F'$$

toutes les fois que la couche superficielle d'épaisseur  $\epsilon$ , au lieu d'être en contact avec le vide, est en contact avec un autre liquide.

L'assimilation du trinôme (414) à  $F$  peut être justifiée d'une autre manière. Considérons des masses des deux liquides terminées par des faces planes parallèles de 1 millimètre carré chacune, et supposons d'abord dans ces faces une contraction linéaire infiniment petite  $\delta$ ; des travaux élémentaires  $2F\delta$  et  $2F_1\delta$  s'effectueront. Opérons maintenant la réunion, il en résultera un travail  $2F'(1-2\delta)$ . En nommant  $F_2$  la force de contraction des deux surfaces en contact et changeant l'ordre des opérations, au lieu de la somme des trois quantités précédentes, on aurait eu  $2F'+2F_2\delta$ . Le résultat devant être le même, on trouve bien comme précédemment

$$(415) \quad F_2 = F + F_1 - 2F'.$$

Si les deux liquides sont identiques, ou si l'on a seulement  $2F' = F + F_1$ , il vient

$$F_2 = 0.$$

Lorsque le liquide de la goutte est remplacé par un gaz,  $F$  et  $F'$  sont négligeables; on obtient, en supprimant l'indice de  $F_1$  devenu inutile,

$$(416) \quad z = \frac{2F}{r} + \Delta\beta - \frac{2F}{R}.$$

Si c'est au contraire le liquide extérieur qu'on remplace par un gaz,  $F_1$ ,  $F'$  et  $\Delta\beta$  sont négligeables; il vient

$$(417) \quad z = \frac{2F}{r}.$$

Enfin, si les deux liquides ont la même densité, comme dans une partie des belles expériences de M. Plateau, on peut obtenir la pression intérieure  $z$ , abstraction faite des pressions hydrostatiques: sans supposer le rayon de la goutte très-petit, on trouve

$$(418) \quad z = \frac{2(F + F_1 - 2F')}{r} - \frac{2F}{R}.$$

ou simplement

$$(419) \quad z = \frac{2(F + F_1 - 2F')}{r}$$

si le vase est très-grand.

*Diffusion.* — Lorsque deux liquides ou deux gaz sont en contact, leur différence de densité tend à empêcher le mélange; elle tend aussi à les séparer, s'ils ont été d'avance mêlés par des moyens mécaniques. Mais cette cause bien connue est rarement seule en jeu dans ces circonstances, et l'étude des forces de réunion peut éclaircir en partie ce qu'il y a d'obscur dans les phénomènes observés. Désignons toujours par  $F$ ,  $F_1$ ,  $F'$  les forces de réunion du premier fluide avec lui-même, du second fluide avec lui-même, du premier fluide avec le second, et considérons d'abord ce qui se passe quand une masse du premier fluide se trouve complètement environnée par le second.

Si l'on conçoit que la surface commune croisse de  $\omega$ , un travail de réunion  $2F'\omega$  sera produit. En même temps la surface totale de chacun des deux fluides croîtra aussi de  $\omega$ , ce qui suppose un travail de séparation  $(F + F_1)\omega$ . Ainsi un travail

$$(2F' - F - F_1)\omega$$

sera accompli, et sa valeur sera positive si la condition

$$(420) \quad 2F' > F + F_1$$

est remplie. Comme, en l'absence de force vive, il ne peut exister de travail sans force, il est certain que, dans ce cas, le mélange s'effectuera de lui-même en produisant une quantité de chaleur équivalente au travail opéré, et l'on est en droit d'affirmer que :

*La diffusion a lieu toutes les fois que la force de réunion des deux fluides l'un avec l'autre surpasse la moyenne arithmétique entre leurs forces de réunion respectives.*



Du moins elle tend à se produire, et la différence de densité est la seule cause qui pourrait l'empêcher.

Tant qu'une parcelle de l'un des fluides possède des dimensions supérieures à  $\epsilon$ , son expansion dans l'autre fluide continue, puisque les forces de réunion demeurent les mêmes; mais, pour des dimensions moindres, ces forces varient suivant des lois encore inconnues, et l'on ne peut dire ce qui arrive. Toutefois, en s'arrêtant à  $\epsilon$ , on obtient facilement une limite inférieure de la quantité de chaleur qui accompagne la diffusion. Elle est très-notable dans certains cas, et il en résulte qu'une variation de température ne peut servir à prouver l'existence d'une *combinaison chimique*.

Lorsque l'inégalité (420) est remplacée par l'équation

$$(421) \quad 2 F' = F + F_1,$$

il ne reste point de force autre que la différence de densité, du moins si l'on ne considère point les actions entre des quantités de matières extrêmement petites et rapprochées, comme les actions chimiques, par exemple.

Enfin si l'on a

$$(422) \quad 2 F' < F + F_1,$$

les fluides tendent à se séparer avec élévation de température lorsqu'ils ont été d'avance mélangés par des moyens mécaniques qui, dans ce cas, ont causé un refroidissement, abstraction faite de la chaleur correspondante au travail externe. Ici  $F'$  peut être moindre que  $F$  ou  $F_1$ ; mais il peut arriver aussi que  $F'$  surpasse  $F$  ou  $F_1$ . Alors, quoique la diffusion capillaire soit impossible, l'un des deux fluides peut quelquefois pénétrer dans l'autre avec production d'un travail positif; en voici un exemple :

Supposons deux gouttes très-petites de rayons  $R$  et  $R_1$  d'abord séparées, puis pénétrant la seconde dans la première. La sur-

face  $4\pi R_1^2$  de la seconde demeure invariable, et sa réunion avec le liquide de la première donne un travail  $8\pi R_1^2 F'$ . La première ne change pas de volume et prend, par conséquent, un rayon  $\sqrt[3]{R_1^3 + R^3}$ . Sa surface croît de  $4\pi [(R_1^3 + R^3)^{\frac{2}{3}} + R_1^2 - R^2]$ , ce qui occasionne une dépense de travail égale à cet accroissement multiplié par  $F$ . Le travail final a donc pour valeur

$$(423) \quad 8\pi R_1^2 F' - 4\pi F [(R_1^3 + R^3)^{\frac{2}{3}} + R_1^2 - R^2],$$

et il est positif quand a lieu l'inégalité

$$(424) \quad 2R_1^2 F' > [(R_1^3 + R^3)^{\frac{2}{3}} + R_1^2 - R^2].$$

Si  $R_1 = R$ , il reste

$$F' > \frac{F}{\sqrt[3]{2}}.$$

Cette condition est remplie lorsque  $F'$  surpasse  $F$ ; toutefois, il ne faut pas perdre de vue que le travail *total* peut être positif sans qu'il en soit ainsi sans cesse pour le travail élémentaire pendant que le phénomène se produit. Au début se présente d'ailleurs un autre obstacle depuis longtemps indiqué par M. Plateau et d'autres observateurs : quand deux sphères liquides ou gazeuses s'avancent l'une vers l'autre jusqu'à se choquer, on les voit souvent ne pas crever et se réunir, même alors que leur nature chimique ne diffère nullement; elles se déforment, puis se repoussent comme des corps élastiques. Lorsqu'elles ne sont plus séparées que par une mince couche du fluide qui les entoure, l'adhérence de ce fluide aux deux sphères, dans certains cas, rend considérables les frottements de ses molécules, et cela suffit pour empêcher la réunion. Quant à l'élasticité, elle s'explique par la tendance à la forme sphérique due à la force contractile des couches superficielles.

La diffusion d'un fluide, et en particulier d'un liquide, ne s'effectue pas toujours dans un autre fluide; elle peut se faire à la surface d'un liquide ou d'un solide, quelquefois même en sur-

montant la pesanteur. Prenons pour exemple un solide dont la surface horizontale est à une hauteur  $h$  au-dessus de celle du liquide, un tube amorcé allant de l'une de ces surfaces à l'autre. Si l'on suppose que le liquide s'avance sur le solide et couvre une étendue  $\omega$  d'une couche ayant pour épaisseur  $\delta$ , un travail  $2(F' - F)\omega$  sera produit,  $F$  désignant la force de réunion du liquide et  $F'$  celle du liquide avec le solide. Le travail contraire dû à la pesanteur a pour expression  $\delta h \omega \Delta$ ; la dissémination s'opèrera donc si

$$2(F' - F)\omega > \delta h \omega \Delta,$$

ou si l'on a

$$(425) \quad h\delta < \frac{2(F' - F)}{\Delta}.$$

La hauteur d'élévation possible sera d'autant plus grande que la différence des forces de réunion  $F'$  et  $F$  sera plus considérable. Elle dépendra en outre de  $\delta$  et croîtra quand le liquide, manquant de viscosité, pourra s'étendre en couche plus mince. On peut facilement faire monter de la sorte du naphte sur du verre à plus de 8 millimètres. Si la hauteur  $h$  est nulle sensiblement, la condition (425) se réduit à

$$(426) \quad F > F'.$$

Elle s'applique au cas bien connu de certaines huiles s'étendant sur l'eau en couches très-minces qui apparaissent avec de brillantes couleurs.

Un éminent chimiste, M. Chevreul, a constaté qu'un liquide qui mouille un solide peut quelquefois être déplacé par un autre liquide; c'est ce qui arrive, par exemple, si l'on met en contact avec l'eau du kaolin imbibé d'huile ou en contact avec l'huile de la céruse imbibée d'eau. Ce genre de phénomènes s'explique encore par les forces de réunion.

Au lieu de poussière, considérons, pour plus de facilité, une lame solide de surface  $S$  mouillée d'un liquide ayant pour force

de réunion  $F$ , et avec lequel sa force de réunion est  $F'$ . Supposons-la plongée dans un autre liquide de force de réunion  $F_1$ , et qui a d'ailleurs  $F'_1$  pour force de réunion avec la lame et  $F'_2$  pour force de réunion avec le premier liquide. Concevons que ce premier liquide soit déplacé et évaluons les travaux perdus et gagnés.

La lame du premier liquide, d'épaisseur très-faible et de surface totale  $2S$ , se sépare du solide dans une étendue  $S$  et du second liquide dans une même étendue; cela exige une dépense de travail

$$2(F' + F'_2)S.$$

En même temps, si l'on a la relation  $F + F_1 > 2F'_2$ , elle prend à peu près la forme d'une sphère de surface négligeable, ce qui fait gagner un travail

$$2FS.$$

Enfin la réunion de la lame avec le second liquide, dont la surface ne change pas sensiblement, donne un travail

$$2F'_1S.$$

Le déplacement effectif a lieu si le travail produit l'emporte sur le travail dépensé, c'est-à-dire lorsque se trouve satisfaite la relation

$$(427) \quad F + F'_1 > F' + F'_2.$$

Les calculs qui précèdent suffisent pour bien montrer la marche à suivre dans l'application qu'on peut faire du théorème fondamental à des questions de capillarité très-variées. Dans ce qui suit, je supprimerai quelquefois des détails que le lecteur rétablira sans peine; il distinguera toujours aisément aussi les cas où le passage de l'expression du travail à celle de la force est légitime.

*Tendance d'un liquide à passer à la surface d'un mélange dont il fait partie.* — Il est facile de calculer la condition pour que deux liquides étant mêlés, l'un d'entre eux tende, abstrac-

tion faite des différences de densité, à passer à la surface. Dans nos expériences sur de l'eau chargée d'une faible quantité de savon, nous en avons donné un exemple remarquable. Sa force de réunion, obtenue par les pesées ou bien par nos appareils à mesurer la tension dans l'intérieur des bulles, était  $F = 2,733$ ; mais, ayant étudié ce liquide au moyen de l'appareil représenté fig. 33, p. 284, la valeur de F s'est montrée la même que pour l'eau pure, dont il différerait très-peu par sa composition chimique moyenne. Les diamètres des ouvertures étant toujours les mêmes, on trouve, pour valeurs de  $\frac{2F}{r}$ ,

	20	15	12
ou	7,3	5,5	4,4

suivant que l'on adopte pour F la valeur 7,5, relative à l'eau, ou celle que l'aréomètre a fournie pour l'eau de savon. Je conserverai les mêmes notations et la même disposition dans les tableaux qu'aux pages 285 et suivantes; voici nos résultats et les lignes qui les représentent :

$h$	$h'$	$h_1$	$h'_1$	$h_2$	$h'_2$
$34\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	28	12	$38\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$
40	17	39	21	$47\frac{1}{2}$	33
$49\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{4}$	46	$26\frac{1}{2}$	62	$47\frac{1}{2}$
$55\frac{1}{2}$	$30\frac{3}{4}$	54	32	$84\frac{1}{2}$	67
$68\frac{1}{2}$	$40\frac{3}{4}$	$57\frac{1}{2}$	35	$100\frac{1}{2}$	$80\frac{1}{2}$
77	$46\frac{3}{4}$	69	$44\frac{1}{2}$	$120\frac{1}{2}$	98
$86\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{4}$	93	$65\frac{1}{2}$		

Fig. 64.

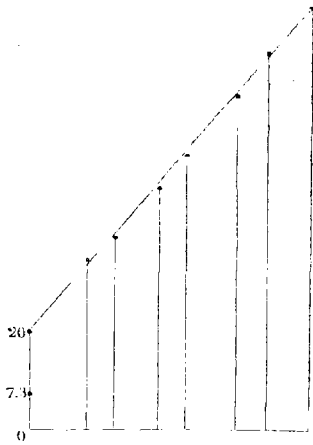


Fig. 65.

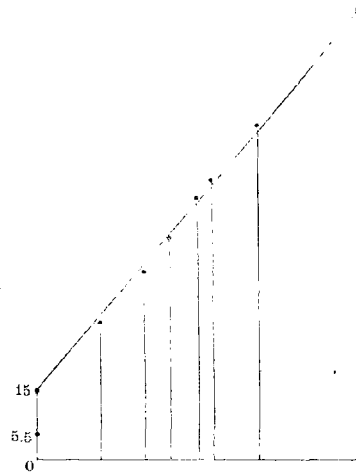
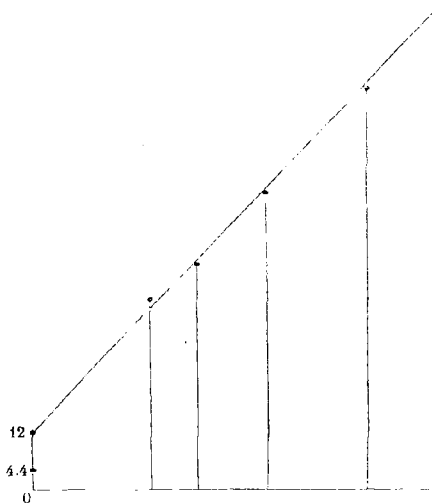


Fig. 66.



Les lois relatives aux forces de réunion qui ont été prouvées dans ce chapitre montrent clairement que ces quantités dé-

pendent de la nature chimique des corps et que le groupement moléculaire n'influe en aucune manière sur leurs valeurs, qui peuvent être calculées au moyen de la composition centésimale et sont les mêmes pour les substances isomères. Toutefois cela suppose les éléments uniformément distribués et non placés çà et là sous forme de particules, dont les dimensions ne seraient point très-petites par rapport à  $\epsilon$ . Il en résulte qu'une dissolution de  $\frac{1}{1250}$  de savon dans l'eau doit avoir, en supposant l'homogénéité, à fort peu près la même force de réunion 7,5 que l'eau pure. Les résultats des expériences qu'on vient de lire n'ont donc rien de surprenant. Ils viennent confirmer l'explication que j'avais donnée de la petitesse du nombre  $F=2,733$  trouvé par les méthodes statiques, à cause de la tendance de l'une au moins des substances produites par la réaction du savon et de l'eau, à se porter à la surface. L'écoulement rapide ne permet point à ce triage de s'opérer, et la véritable valeur de  $F$  se trouve mise en évidence.

*Diffusion de l'alcool dans l'eau.* — La condition (420) a été obtenue en considérant des particules liquides de dimensions supérieures à  $\epsilon$ ; elle est relative à ce qu'on peut appeler la *diffusion capillaire*. Lorsqu'elle n'est point satisfaite, on n'est pas en droit pour cela d'affirmer que les liquides considérés ne peuvent se dissoudre mutuellement; car la diffusion peut s'opérer de manière à ce que les parties qui s'étendent et se disséminent aient des dimensions moindres que  $\epsilon$ ; elles obéissent alors à des forces analogues aux forces de réunion, mais de valeurs inconnues: c'est la diffusion à un plus haut degré ou *supra-capillaire*. Il en est ainsi pour l'eau et l'alcool que nous avons étudiés d'une manière plus particulière. On a, pour ces deux substances,

$$F=7,5, \quad F_1=2,471, \quad F+F_1=9,971.$$

Pour obtenir  $F' = f' \Delta_1$ , il faut remarquer d'abord que  $f'$  est la force de réunion de l'eau et de l'alcool ramenés à la densité 1. L'eau contient de l'hydrogène ayant pour densité  $\frac{1}{9}$  et de l'oxygène de densité  $\frac{8}{9}$ , l'alcool contient de l'hydrogène, de l'oxygène et du carbone dont les densités sont  $\frac{3}{23}$ ,  $\frac{8}{23}$ ,  $\frac{12}{13}$ . Il en résulte qu'on a

$$f' = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{23} f'' + \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{23} f''_H + \frac{1}{9} \cdot \frac{12}{23} f''_C + \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{23} f''_H + \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{23} f''_H + \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{23} f''_C,$$

ou, en réduisant et substituant les valeurs numériques précédemment trouvées,

$$f' = 4,802,$$

et par suite

$$(428) \quad 2F' = 7,83 < F + F_1.$$

La diffusion capillaire serait donc impossible si l'on avait la certitude qu'une seconde approximation ne viendrait pas modifier les trois nombres qui précèdent et surtout  $F'$ .

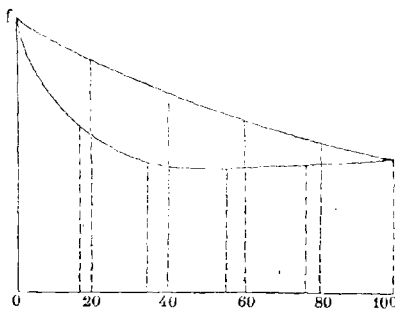
La première approximation rend probable que les particules de l'un des deux liquides au moins ne possèdent plus, après le mélange, que des dimensions inférieures à  $\epsilon$ ; mais, en admettant cela et supposant les chiffres exacts, on aurait tort d'en conclure que ces dimensions sont négligeables par rapport à  $\epsilon$ , et, dans l'exemple actuel, le contraire serait vrai. Nous avons pu nous en assurer en déterminant, au moyen de l'aréomètre et de l'ascension dans les tubes capillaires, les forces de réunion de mélanges d'eau et d'alcool en proportions variées et en les calculant d'autre part dans l'hypothèse de l'homogénéité à l'aide des



forces de réunion fournies par l'étude des composés d'oxygène, hydrogène et carbone. Voici nos résultats et une figure qui les représente :

TEMPÉRA- TURES.	POIDS D'ALCOOL pour 100 de mélange.	$f$ calculé.	$f$ observé.	DIFFÉRENCE relative.
5°	0	7,5	7,5	0
17	16,7	6,6	4,6	$\frac{1}{3,3}$
5	20	6,48	4,34	$\frac{1}{3}$
17	34,8	5,8	3,7	$\frac{1}{2,8}$
5	40	5,60	3,59	$\frac{1}{2,8}$
17	54,5	5,1	3,6	$\frac{1}{3,4}$
5	60	4,84	3,50	$\frac{1}{3,6}$
17	76,2	4,1	3,6	$\frac{1}{5,5}$
5	80	4,21	3,61	$\frac{1}{7}$
5	100	3,715	3,715	0

Fig. 67.

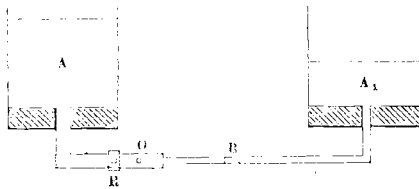


L'inspection du tableau et de la *fig. 67* montre clairement que

la dissolution d'alcool dans l'eau constitue un mélange qui n'est pas assez intime pour que les dimensions des particules soient très-petites par rapport à  $\epsilon$  : il en est ainsi au moins dans la couche superficielle, puisque les forces de réunion calculées surpassent notablement les forces de réunion observées, ce qui ne pourrait avoir lieu dans l'hypothèse.

*Endosmose.* — Si l'on remplit totalement d'alcool un petit ballon et qu'ensuite on ferme son ouverture par un morceau de vessie solidement ficelée, puis qu'on le fasse séjourner dans de l'eau, on voit la vessie prendre une forme convexe qui montre qu'une certaine quantité de ce liquide a passé dans le ballon. Cette expérience est ancienne ; mais c'est à M. Dutrochet que la science doit la première étude sérieuse des phénomènes auxquels il a donné le nom d'*endosmose*. On peut en essayer l'explication en considérant ce qui se passe dans l'un des pores de la membrane assimilé à un tube de peu de longueur et de très-petit diamètre ; la *fig. 68* représente un appareil dans lequel

Fig. 68.



nous avons imité cette disposition. Un premier réservoir A, à grande section, contient un liquide que je désignerai par la même lettre ; un autre liquide  $A_1$  remplit partiellement un second réservoir ; ils s'avancent l'un et l'autre dans un très-petit tube de rayon  $r$  jusqu'en B où ils se touchent. En général, les forces de réunion exigent, pour qu'il y ait équilibre en B, des pressions inégales que je vais calculer. Soient

$h$  et  $h_1$ , les hauteurs des colonnes, de densité  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ , des liquides A,  $A_1$ , qui exercent leurs pressions en B,

- F et  $F_1$  leurs forces de réunion,  
 $F'$  la force de réunion de A avec  $A_1$ ,  
 $F'_1$  celle de A avec la paroi solide  $A_1$  du tube,  
 $F'_2$  celle de  $A_1$  avec  $A_2$ .

Supposons un mouvement infiniment petit  $\omega$ , vers A, de la surface B suivant laquelle les deux liquides coïncident, et évaluons les travaux positifs et négatifs accomplis pendant ce mouvement :

1° Le liquide  $A_1$  exerce une pression  $\pi r^2 \Delta_1 h_1$  qui produit un travail  $\pi r^2 \Delta_1 h_1 \omega$ ;

2° Le liquide A donne de même le travail  $-\pi r^2 \Delta h \omega$ ;

3° La surface du liquide  $A_1$  croît de  $2\pi r \omega$ , ce qui, d'après le théorème fondamental, donne pour valeur du travail  $-2\pi r \omega F_1$ ;

4° En supposant d'abord le solide non mouillé, la surface de contact de  $A_1$  avec  $A_2$  augmente de la même quantité, et de cette réunion résulte un travail  $4\pi r \omega F'_1$ ;

5° Pour A les deux quantités analogues sont  $2\pi r \omega F$  et  $-\pi r \omega F'_1$ . Si la somme des travaux positifs l'emporte sur celle des travaux négatifs, c'est-à-dire si l'on a

$$(429) \quad r \Delta_1 h_1 + 2F + 4F'_1 > r \Delta h + 2F_1 + 4F'_1,$$

le mouvement vers le réservoir A se produira de lui-même. Il aura lieu vers  $A_1$  si l'inégalité est de sens contraire, et, enfin, l'égalité est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre.

Quand le tube de communication est d'avance mouillé dans toute son étendue par le liquide A, le calcul précédent est encore applicable pourvu qu'on remplace  $F'_2$  par  $F'$  et  $F'_1$  par F. Alors on a, pour condition du mouvement vers A,

$$(430) \quad \Delta_1 h_1 - \Delta h > \frac{2}{r} (F + F_1 - 2F');$$

pour condition du mouvement vers  $A_1$ ,

$$(431) \quad \Delta_1 h_1 - \Delta h < \frac{2}{r} (F + F_1 - 2F');$$

et pour condition d'équilibre

$$(432) \quad \Delta_1 h_1 - \Delta h = \frac{2}{r} (F + F_1 - 2F').$$

Nous avons pris pour objets d'une série d'expériences, de l'eau placée en A, et de l'alcool purifié par M. Lechartier et placé en A. Le diamètre du tube de verre était 0,48; c'est-à-dire qu'on avait  $r=0,24$ .

Pour faire une expérience, on versait de l'alcool dans le réservoir A, et lorsque le tube, d'abord bien desséché, se trouvait plein, on arrêtait l'écoulement par la fermeture du robinet R. On débouchait ensuite une petite ouverture située en  $o$  et l'on absorbait un peu d'alcool avec du papier buvard, puis on refermait. Par là, on donnait lieu à l'entrée d'un index d'air dans la partie extrême du tube située dans le réservoir A, qui recevait alors sa charge d'eau. En donnant issue, avec beaucoup de précaution, à une nouvelle quantité d'alcool par l'ouverture  $o$ , on amenait l'index en B, et, tout aussitôt après, on fermait en  $o$ , puis on ouvrait le robinet pour voir le sens du mouvement avec les charges d'alcool et d'eau employées. La bulle d'air est indispensable pour empêcher le mélange rapide par diffusion et pour rendre visible la limite de séparation; il est évident d'ailleurs que sa présence n'influe pas sur les travaux produits. Elle n'empêche pas la couche d'alcool adhérente au verre, de se mêler peu à peu à l'eau, et voilà pourquoi l'expérience doit être effectuée rapidement. Nous avons d'abord préparé un petit cathétomètre pour mesurer  $h$  et  $h_1$ , mais les frottements ne permettent pas une approximation assez grande pour que cet instrument soit utile dans cette circonstance. Nous avons trouvé, après des expériences assez nombreuses faites à la température de 17 degrés, que l'équilibre avait lieu avec

$$h = 44,5 \quad \text{et} \quad h_1 = 19.$$

En augmentant et diminuant la hauteur de l'alcool de 3 mil-

limètres, on obtient dans des sens contraires des mouvements décidés et des vitesses à peu près égales ; de sorte qu'en supposant  $h_1 = 19$ , l'erreur sur  $h$  nous a paru moindre que 1 à 2. Si l'on tient compte de la température on a

$$\Delta = 0,8006 \quad \text{et} \quad \Delta_1 = 0,99879;$$

la valeur du premier membre de l'équation (414) est donc

$$- 16,65,$$

et l'on conclut

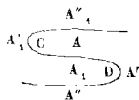
$$(433) \quad F + F_1 - 2F' = - 2,0.$$

Ce résultat diffère, même par le signe, de celui qui a été trouvé à la page 380 ; plusieurs causes peuvent produire cet écart considérable qui peut tenir :

- 1<sup>o</sup> Aux erreurs sur  $F$ ,  $F_1$  et surtout  $F'$  ;
- 2<sup>o</sup> Aux erreurs sur  $\Delta$  et  $\Delta_1$  provenant de ce que, vers la surface commune aux deux liquides, les pressions dues aux attractions au contact ne sont point les mêmes qu'en pleine matière ;
- 3<sup>o</sup> Enfin à ce que la couche d'alcool adhérente au verre peut ne point rester intacte, comme il a été supposé dans le calcul, lorsque l'eau s'avance.

On peut d'ailleurs refuser d'admettre l'assimilation du phénomène capillaire qui vient d'être étudié en détail, à ce qui se passe, pendant l'endosmose, dans l'un des pores de la membrane ; d'abord parce que le diamètre du tube qui nous a servi est beaucoup plus grand que celui des pores. On peut objecter aussi que la bulle d'air qui sépare l'eau et l'alcool empêche la diffusion et change tout à fait les circonstances. Lorsque la diffusion capillaire s'effectue, chaque partie, A par exemple, du premier liquide A A' A'' (fig. 69), s'avance dans le second liquide

Fig. 69.



parce que, vers les parties saillantes telles que  $c$ , la pression

normale tire en dehors puisqu'on a  $F + F_1 - 2F' < 0$ . En même temps les parties saillantes du second liquide s'avancent dans le premier. Mais il n'est point supposable que les résistances au mouvement soient exactement les mêmes de part et d'autre, et l'on doit admettre que l'un des liquides marchera plus vite que l'autre ; par suite, son épaisseur décroîtra plus rapidement, ce qui rendra la courbure en C plus grande et fera croître, par conséquent, de plus en plus la différence des vitesses. Dans la diffusion *supra-capillaire*, il faut remplacer F,  $F_1$ ,  $F'$  par des forces qui n'ont pas les mêmes valeurs ; mais cela ne change point les conséquences. On est conduit de la sorte à admettre, dans chaque pore de la cloison, des diffusions simultanées de sens contraires et s'effectuant avec des vitesses qui peuvent être fort inégales ; rien ne paraît s'opposer à ce que l'on considère l'endosmose comme un cas particulier de la diffusion, car on sait depuis longtemps que les deux liquides traversent simultanément la cloison en quantités ordinairement très-différentes.

*Équilibre d'une lame dans un liquide qui ne la mouille point.* — Considérons une lame verticale d'épaisseur  $\delta$ , de périmètre  $p$ , en comptant les deux faces et de hauteur indéfinie. On l'enfonce à une profondeur  $h$  au-dessous de la surface primitive d'un liquide contenu dans un vase de périmètre intérieur P. Le liquide ne mouille ni la lame ni le vase ; sa force de réunion avec lui-même est F ; avec la lame et avec le vase, elle est  $F'$  et  $F'_1$ . Cherchons la force  $q$  qui peut maintenir la lame en équilibre, abstraction faite de son poids. En ajoutant des forces infiniment petites, produisons un nouvel enfouissement  $dh$  et énumérons les travaux effectués.

1° Le travail dû à la force  $q$  est

$$q dh.$$

2° Un volume de liquide  $p \delta . dh$  est soulevé jusqu'à la sur-

face nouvelle distante de

$$h' = \frac{h}{1-K} + \frac{v}{S(1-K)},$$

$K$  désignant le rapport de la section de la lame à la section  $s$  du vase, et  $v$  le volume abaissé au-dessous du plan général de la surface autour de la lame.  $\Delta$  étant la densité du liquide, le travail dû à la pesanteur a pour expression

$$\Delta p \delta . h' dh.$$

3° La surface de la lame recouverte pendant le mouvement surpasse  $p dh$ , puisque le niveau s'exhausse; elle a pour valeur  $\frac{p dh}{1-K}$  et le travail de réunion égale  $2F' \frac{p dh}{1-K}$ . Mais la surface du liquide s'accroît de la même quantité, ce qui donne un travail de séparation  $F \frac{p dh}{1-K}$ ; en définitive on a

$$\frac{p dh}{1-K} (2F' - F).$$

4° Au bord intérieur du vase, une nouvelle surface  $\frac{PK}{1-K} dh$  est couverte, ce qui donne encore un travail de réunion et un travail de séparation ayant pour somme algébrique

$$\frac{K}{1-K} P (2F'_1 - F) dh.$$

La somme totale des travaux devant être nulle, en ayant égard à leurs signes, on arrive à la formule

$$(434) \quad q = p (F - 2F') + \Delta p . \delta . h' \\ + \frac{K}{1-K} [p (F - 2F') + P (F - 2F'_1)].$$

Lorsque la section du vase est immense,  $K$  devient négligeable

et il reste

$$(435) \quad q = p(F - 2F') + \Delta p \delta \cdot h'$$

Le troisième terme de cette valeur de  $q$  est la poussée hydrostatique; le second  $2pF'$  est la force de réunion du solide avec le liquide. Le premier,  $pF$ , représente la poussée de bas en haut, exercée sur la base de la lame par la force de contraction du liquide. On peut prouver analytiquement que telle est sa valeur, quelle que soit la forme de la surface qui termine inférieurement la lame. Pour abrégér, je considérerais seulement le cas où, entre deux plans verticaux infiniment voisins et perpendiculaires à la lame, cette surface peut être supposée cylindrique. Soit  $b$  la distance de ces deux sections; la pression sur un rectangle compris entre elles et ayant pour seconde dimension  $ds$  est  $\frac{Fb ds}{\rho}$ . Si l'on prend la verticale pour axe des  $y$ , cette pression a pour composante parallèle à cet axe

$$\frac{Fb dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour avoir la poussée totale exercée de bas en haut par la couche liquide contractile sur la base de la lame, il faut intégrer depuis  $y' = -\infty$  jusqu'à  $y' = +\infty$ , puis multiplier par  $\frac{p}{b}$ , ce qui donne bien  $pF$ , quelles que soient d'ailleurs l'épaisseur de la lame et la courbe de raccord.

En mettant à part la poussée hydrostatique, on voit que la force de réunion est, par unité de longueur, dans ces circonstances,

$$(436) \quad 2F' - F;$$

elle se réduit bien à  $F$  toutes les fois que l'on a  $F' = F$ , ce qui renferme le cas où la lame est mouillée d'une couche assez épaisse pour empêcher son action directe.

Dans  $h'$  le volume abaissé peut souvent, avec une approxi-



mation suffisante, être remplacé par

$$\frac{p(F - 2F')}{\Delta}$$

et cela donne

$$h' = \frac{h}{1 - K} + \frac{p(F - 2F')}{\Delta s(1 - K)}.$$

Lorsque le liquide mouille la lame et la paroi intérieure du vase, on a  $F' = F'_1 = F$ , et la formule se simplifie; elle devient

$$(437) \quad q = -pF + \left[ \Delta p \delta h - \frac{pF}{\Delta s} - KF(P + p) \right] \frac{1}{1 - K}.$$

Si, dans certaines expériences, on cherche comme on l'a vu page 247, à rendre nulle la hauteur  $h$ , il reste

$$(438) \quad -q = F \left[ p + \frac{p}{\Delta s(1 - K)} + \frac{K}{1 - K}(P + p) \right],$$

et, pour  $q$ , l'expression de l'erreur est

$$\frac{\Delta p \cdot \delta \cdot h_1}{1 - K},$$

$h_1$  désignant l'erreur d'affleurement.

D'après ce que je viens de dire sur l'équilibre d'une lame non mouillée, il semble tout aussi facile d'obtenir (435) la valeur de  $2F' - F$  au moyen des pesées, que d'obtenir celle de  $F$  quand le liquide mouille la lame; on peut, par exemple, trouver  $2F' - F$  pour le platine plongeant dans le mercure, et même en déduire, par un calcul fort simple, la valeur de  $F'$ . Mais l'adhérence de l'air qu'il est très-difficile de chasser complètement, même dans le vide, et l'imperfection du poli qui empêche le contact complet du solide et du liquide, constituent des causes d'erreurs qui nous ont empêché de faire une série d'expériences de ce genre, malgré son importance. On peut appliquer les formules relatives au cas où le liquide ne mouille pas la lame à celui où leur action mutuelle est rendue

négligeable par l'interposition d'une couche d'air d'épaisseur suffisante; il suffit pour cela de faire dans ces formules  $F' = 0$ .

*Ascension d'un liquide dans un tube non mouillé.* — Soit que l'on considère les forces de réunion et de séparation, ou bien qu'on envisage les travaux élémentaires en partant de l'état d'équilibre, les questions de capillarité les plus diverses se résolvent presque toujours très-facilement au moyen des méthodes déjà souvent appliquées; nous ajouterons cependant quelques mots encore sur l'ascension dans un tube capillaire ou entre deux lames, dans le cas où le liquide ne mouille point. Pour abrégér, je supposerai le diamètre du tube très-petit, quoique la recherche du poids soulevé dans le cas général n'offre aucune difficulté. L'équilibre existant, soit  $h$  la hauteur au-dessus du niveau dans le vase de très-grand diamètre où plonge le tube vertical; soient  $F$  et  $F'$  les forces de réunion du liquide avec lui-même et avec la paroi. Si l'on conçoit une ascension nouvelle infiniment petite  $dh$ , la somme des travaux élémentaires sera nulle; or celui qui est dû à la pesanteur a pour expression  $\pi \Delta r^2 h dh$ ,  $\Delta$  désignant la densité du liquide. La surface du liquide s'accroît de  $2\pi r dh$ , ce qui correspond à un travail  $2\pi r F dh$ , et la surface de contact du liquide et du tube s'accroît de la même quantité, ce qui entraîne la production d'un travail  $4\pi r F' dh$ . En tenant compte des signes et opérant les réductions, on a donc

$$(439) \quad \Delta r h = 2(2F' - F).$$

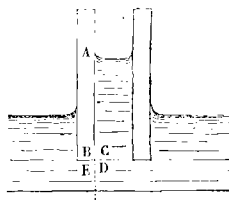
Si une couche d'air d'épaisseur plus grande que le rayon de la sphère d'attraction sensible adhère à la surface du tube, on peut faire  $F' = 0$ , car cette quantité est négligeable, et il reste

$$(440) \quad \Delta r h = -2F.$$

La hauteur est négative; à cela près sa valeur est la même que dans le cas d'un tube mouillé.

*Ascension d'un liquide entre deux lames non mouillées.* — Le cas général se résout sans peine par la considération des travaux élémentaires ; supposons cependant, pour abrégé, que le vase a de très-grandes dimensions, et dans le but de présenter des exemples de l'emploi de chaque méthode, considérons ici les forces de réunion. Désignons par  $r$  la distance des deux lames et conservons d'ailleurs les notations qui précèdent. Il suffit évidemment d'envisager, pour obtenir la condition d'équilibre, ce qui existe entre deux plans perpendiculaires aux lames et distants l'un de l'autre de 1 millimètre. Les forces qui tendent (fig. 70) à soulever auprès de la première lame sont  $F'$  en A,

Fig. 70.



et encore  $F'$  provenant de l'action de B sur D ; mais l'action de E sur C tend à abaisser et sa valeur est  $F$ . Des forces égales existent pour la seconde lame, et le poids du liquide soulevé et tenu en équilibre par ces diverses forces, a conséquemment pour expression

$$2(2F' - F),$$

quelle que soit la distance des deux lames, et sans qu'il y ait lieu à exiger que le ménisque soit négligeable. Si les lames étaient habillées d'air, il faudrait faire  $F' = 0$ , et l'on aurait la valeur du poids abaissé. Le liquide est soulevé ou abaissé suivant que  $2F'$  surpasse  $F$  ou lui est inférieur. Les lames laissent le liquide partout horizontal et au même niveau si l'on a  $2F' = F$ .

Dans le cas où les lames sont assez rapprochées pour que le poids du ménisque soit négligeable, on peut égaler l'expression précédente du poids soulevé au produit du volume  $rh$  par la densité, et l'on obtient la formule connue

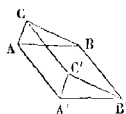
$$(441) \quad \Delta rh = 2(2F' - F).$$

Le liquide s'élève à la même hauteur entre deux lames et dans un tube dont le rayon égale la distance de ces deux lames. Cette proposition résulte immédiatement de la comparaison des formules (439) et (441).

On passe au cas où les lames sont mouillées en faisant  $F' = F$  et au cas où elles sont habillées d'air en faisant  $F' = 0$ .

*Angle de raccordement.* — Lorsqu'un liquide ne mouille point un solide en contact avec lequel il se trouve, l'angle de raccordement peut prendre toutes sortes de valeurs déterminées dans chaque cas particulier par  $F'$  et  $F$ . Soit  $AA'$  (fig. 71), un

Fig. 71.



élément de l'intersection de la surface  $AA'CC'$  du solide et de celle  $AA'BB'$  du liquide. Menons en  $A$  et en  $A'$  deux plans  $ABC$ ,  $A'B'C'$  perpendiculaires à  $AA'$ ; puis ajoutons aux forces existantes des forces infiniment petites par rapport à elles, et qui feront marcher le liquide de telle sorte que l'élément  $AA'BB'$  de la surface libre deviendra  $CC'BB'$ . L'élément  $AA'$  du périmètre sera remplacé par la ligne  $CC'$ , distante d'une quantité arbitraire que nous pouvons supposer du troisième ordre, afin que les rayons de courbure ne varient que de quantités négligeables. Opérons de même pour une portion finie du périmètre ou pour le périmètre entier, mais de manière à ce que nulle

part les faces ABC, A'B'C' ne soient mises à nu, et de manière aussi à ne faire varier partout les rayons de courbures que de quantités infiniment petites, ce qui est évidemment possible.

L'accroissement de surface du liquide est

$$\Sigma AA'(AC + BC - AB),$$

et le travail de séparation correspondant

$$\Sigma AA'(AC + BC - AB)F;$$

le travail de réunion du solide et du liquide correspond à la surface  $\Sigma AA' \times AC$ , et il a pour valeur

$$\Sigma AA' \times AC \times 2F'.$$

D'ailleurs le travail dû à la pesanteur est un infiniment petit d'un ordre plus élevé proportionnel au produit  $AA' \times AC \times AB$ , et il en est de même des travaux des forces ajoutées. Le théorème conduit donc à la relation.

$$\Sigma AA' [AC(F - 2F') - (AB - BC) 2F'] = 0.$$

Les éléments de l'intégrale sont, si l'on veut, tous positifs; ils sont donc nuls chacun en particulier, ce qui donne

$$(442) \quad \cos i = \frac{AB - BC}{AC} = \frac{F - 2F'}{F}.$$

Cette expression a bien la même forme que celle qui a été trouvée par Laplace d'une manière peu satisfaisante, et que Gauss et M. Bertrand (Mémoire déjà cité, p. 280) ont justifiée depuis. Ma méthode offre l'avantage de faire connaître plus complètement la signification des constantes. On voit que *l'angle de raccordement est constant et que l'on obtient son sinus* *verse en divisant le double de la force de réunion du liquide avec le solide, par la force de réunion du liquide avec lui-même.*

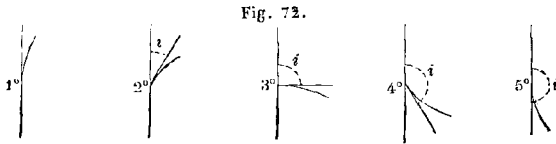
Il peut se présenter plusieurs cas qu'il est utile d'énumérer :  
 1°  $F'$ , très-petit et négligeable par rapport à  $F$ , donne sensiblement  $i = 0$ ;

2°  $F' < \frac{F}{2}$  donne  $90^\circ > i > 0^\circ$ ;

3°  $F' = \frac{F}{2}$  donne  $i = 90^\circ$ ;

4°  $F > F' > \frac{F}{2}$  donne  $180^\circ > i > 90^\circ$ ;

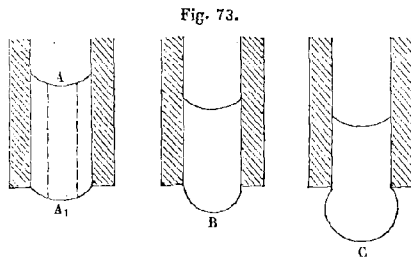
5°  $F - F' > 0$ , mais négligeable par rapport à  $F$ , donne sensiblement  $i = 180^\circ$ .



Au delà le liquide mouille, et il suffit d'ailleurs de lire attentivement la démonstration pour voir qu'elle n'est plus applicable.

La relation (435) montre que, pour une lame verticale, la force résultante tend à abaisser dans le premier et le second cas, à soulever dans le quatrième et le cinquième, et qu'elle ne tend ni à soulever ni à abaisser dans le troisième.

*Colonne liquide soutenue dans un tube isolé.* — Considérons



maintenant un tube vertical (fig. 73) dans lequel se trouve une

colonne liquide en équilibre, ce qui exige évidemment qu'elle descende jusqu'au bas. Prenons, pour plus de simplicité, un cylindre de révolution et concevons un cylindre de même espèce et de même axe, mais de plus petit rayon; les deux bases, l'une concave A et l'autre convexe A<sub>1</sub>(\*), auront même périmètre  $2\pi r$ , et si l'on continue à désigner par  $\alpha$  l'angle de l'horizon avec la tangente à la méridienne, on aura la relation

$$(443) \quad Q = 2\pi r F (\sin \alpha + \sin \alpha_1),$$

qui exprime que le poids soutenu égale la résultante verticale des forces de contraction s'exerçant sur les contours des deux bases;  $\alpha$  est relatif à la base supérieure et  $\alpha_1$  à la base inférieure.

Si  $r$  croît jusqu'à la valeur R du rayon du tube,  $\sin \alpha$  devient le cosinus de l'angle de raccordement, et l'on a

$$(444) \quad Q = 2\pi R (\cos i + \sin \alpha_1) F.$$

$\sin \alpha_1$  étant moindre que l'unité, ou au plus égal à ce nombre, on en conclut

$$(445) \quad Q \leq 2\pi R F (1 + \cos i) = 4\pi R F'.$$

D'après ce qui précède, le poids soutenu lorsque l'une des extrémités du tube plonge dans le liquide est

$$(446) \quad Q' = 2\pi R F \cos i;$$

une simple division conduit maintenant à l'équation donnée par M. Bertrand à la page 205 de son Mémoire :

$$(447) \quad \frac{Q}{Q'} = \frac{V}{V'} = 1 + \frac{1}{\cos i} = \frac{2F'}{2F' - F}.$$

(\*) Il peut arriver que les surfaces soient toutes deux convexes; mais les légers changements qui en résultent n'embarrasseront aucun lecteur.

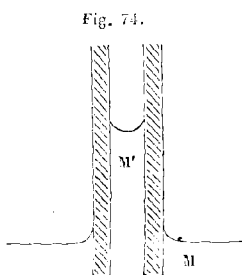
Ce savant académicien arrive à l'inégalité par une méthode qui ne laisse pas bien voir si la limite peut être atteinte; ici, au contraire, on voit qu'elle le sera dans le cas où le ménisque inférieur B touchera le cylindre, c'est-à-dire quand on aura  $\alpha_1 = 90$  degrés. Sur le périmètre du ménisque supérieur,  $\alpha$  est constant et égal à  $i$ ; en bas, il n'en est point ainsi, parce que la base du tube de verre et sa surface interne se coupent sous un angle fini et ne présentent pas cette continuité que suppose la démonstration relative à l'angle de raccordement.

Lorsque  $\alpha_1 = 90$  degrés, le poids soutenu  $4\pi R F'$  est maximum. *Il est indépendant de F et déterminé exclusivement par la force de réunion du solide agissant sur le liquide.* Pour un poids moindre donné, (444) fait connaître les valeurs de  $\alpha_1$ , qui correspondent à deux figures d'équilibre différentes A<sub>1</sub> et C; mais C est une figure d'équilibre instable, car, si l'on imagine que le liquide remonte d'une très-petite quantité,  $\alpha_1$  croît, et, les forces soulevantes l'emportant sur le poids, l'ascension continue jusqu'à ce que la figure A<sub>1</sub> ait été atteinte. Si l'on imagine, au contraire, un léger abaissement,  $\alpha_1$  diminue et le liquide continue à descendre. Quand le poids est maximum, si l'on conçoit une légère ascension,  $\alpha_1$  diminue, ce qui occasionne le retour à la fig. B; mais une légère descente produite par une cause quelconque se continue d'elle-même, puisqu'elle occasionne aussi une diminution de  $\alpha_1$ . L'équilibre est donc stable dans un sens et instable dans l'autre, de sorte qu'il est physiquement impossible sans le secours des frottements. Toutefois, l'équilibre étant stable avant qu'on atteigne le poids maximum, on peut approcher de plus en plus de cette limite, pourvu qu'on enlève tout l'air contenu entre le liquide et la paroi du tube; avec le mercure, par exemple, il faudrait opérer un vide aussi parfait que possible, et l'on ne serait point encore certain qu'aucune quantité d'air ne serait retenue par adhérence.

*Attractions et répulsions apparentes.* — Les phénomènes



capillaires sont très-nombreux et très-variés, il est impossible de les expliquer tous. Après la lecture de ce qui précède, l'étude théorique de la plupart d'entre eux est sans difficulté sérieuse. Il en est ainsi, par exemple, pour les attractions et les répulsions capillaires apparentes au sujet desquelles je ne dirai que quelques mots relatifs à deux cas particuliers. Considérons (*fig. 74*) deux lames métalliques amalgamées, verticales, paral-



lèles et placées dans le vide. Elles plongent dans du mercure qui s'élève entre elles à une certaine hauteur. Pour une molécule quelconque M, il y a équilibre entre la pression  $p$  augmentée de l'attraction au contact A et la force expansive P due à la chaleur, de sorte qu'on a

$$(448) \quad p = P - A.$$

Un accroissement de pression diminue le volume et fait croître P, ce qui rétablit l'équilibre ; une diminution agit en sens contraire ; A varie d'ailleurs en même temps un peu. Pour une molécule M' située entre les deux lames, plus haut que le niveau extérieur, la force P est inférieure à A et la pression  $p$  est négative ; cela tient à la pression capillaire normale de dedans en dehors produite par la force contractile de la couche superficielle qui termine le ménisque. Il résulte de là une tendance des lames à se rapprocher ; chacune d'elle est tirée par le liquide

qui y adhère et la loi de cette action est facile à établir. Lorsque les angles de raccordement ne sont pas nuls comme dans le cas actuel, il faut avoir égard aux forces contractiles; c'est pour n'avoir pas connu leur existence que l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* est arrivé à un théorème relatif aux attractions et répulsions capillaires apparentes qui n'est pas complètement exact (\*). Comme exemple, je citerai une des circonstances dans lesquelles il n'est pas applicable. Une plaque métallique

Fig. 75.



amalgamée sur sa face AB (fig. 75) est immergée dans du mercure de manière que son bord AC se confond avec la surface NN'. La face CD, au contraire, n'est point mouillée par le liquide qui s'abaisse auprès d'elle jusqu'en D où se voit un angle de raccordement  $i$ . D'après le théorème de Laplace il y a tendance au mouvement horizontal que je suppose rendu seul possible à l'aide d'organes mécaniques convenables, et la résultante des forces horizontales égale la pression hydrostatique sur AB, c'est-à-dire

$$(449) \quad \frac{13,596}{2} \cdot \overline{AB}^2$$

par unité de largeur. S'il en était ainsi, on pourrait obtenir un travail sans dépense, ce qui est contraire au principe de l'équivalence(\*\*). En assujettissant deux plans analogues à tourner autour d'un même axe vertical, on réaliserait une machine symétrique à mouvement perpétuel. Mais si, conservant les notations précédentes, on calcule les forces contractiles, on trouve en A

(\*) *Mécanique céleste*, t. IV, p. 435 et 506.

(\*\*) Chapitre II.

une force  $F$  contraire à ce mouvement et en  $D$  une force  $F \sin i$  favorable, ce qui donne pour résultante

$$(450) \quad F(1 - \sin i);$$

d'ailleurs, l'équation de la surface capillaire donne

$$\overline{AB}^2 = \frac{2F(1 - \sin i)}{13,596},$$

et l'on voit que les forces contraires (449) et (450) produisent un équilibre horizontal dont l'existence pouvait être affirmée *à priori*.

J'ai longuement insisté dans le Chapitre qui précède et plus encore dans celui-ci sur l'étude des phénomènes dus aux actions moléculaires; j'espère que le lecteur en admet l'importance maintenant et qu'il ne considère pas comme superflues les parties relatives à des faits dont l'examen peut, à première vue, paraître inutile. Pour plusieurs branches des sciences physiques, une nouvelle voie est ouverte par les théorèmes et les lois que j'ai obtenus; l'intérêt de la science exige qu'elle soit suivie, et, pour qu'il en soit ainsi, je me suis efforcé d'attirer une confiance complète par des vérifications nombreuses et variées. Les applications les plus intéressantes ne sont pas toujours les plus faciles; on me pardonnera, je l'espère, en faveur des preuves qu'ils fournissent et de la certitude à laquelle ils conduisent pour des vérités qu'il serait fort difficile et quelquefois impossible de contrôler d'une manière directe, les détails dans lesquels je suis entré sur certains phénomènes qui sembleraient devoir être passés sous silence. Dans un travail si étendu, il est difficile qu'il ne se soit pas glissé quelques erreurs de détail, surtout en ce qui concerne le travail chimique pour lequel il n'existe encore que des données trop peu nombreuses; mais l'ensemble ne paraît aucunement pouvoir être ébranlé par leur rectification.

*Sur l'unité de la substance matérielle. On a déduit des lois de*

Képler, pour les grandes distances, la valeur de l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance ; on l'a trouvée la même pour diverses planètes. Les astronomes en ont conclu l'identité de la substance matérielle qui les constitue ; cette proposition mérite un examen attentif.

Considérons deux particules d'hydrogène et deux particules d'oxygène toutes quatre extrêmement petites et de même poids. A toutes distances, supérieures à 1 millimètre par exemple, et égales, la première attirera autant la seconde que la troisième attirera la quatrième ; du moins telle est l'opinion reçue. Admettons-la *provisoirement*, quoique les expériences de Cavendish, plusieurs fois répétées par des physiciens très-habiles, n'aient pas été faites de manière à l'établir pour les distances usitées dans les expériences de physique. En résulte-t-il que l'oxygène et l'hydrogène sont identiques ? Non, sans doute.

D'après ce qui vient d'être établi, si l'on diminue considérablement la distance, si l'on prend  $\frac{1}{200000}$  de millimètre, par exemple, la première particule attirera la seconde 8 fois plus que la troisième, et à une distance beaucoup plus faible encore, ce sera 64 fois plus au lieu de 8. De ces différences d'action, il y a lieu à conclure la non-identité, et cette conséquence me paraît beaucoup plus légitime que la conséquence admise généralement, puisqu'une ressemblance prouvée ne s'oppose pas à ce qu'on découvre ensuite des dissemblances. Ceux-là seulement qui refusent de considérer les actions à distance comme faits irréductibles peuvent encore admettre l'unité de la substance matérielle. Pour moi, les éléments chimiques soumis à des lois *diverses* par la volonté du Créateur diffèrent les uns des autres par des *propriétés essentielles* ; les uns se repoussent dans les circonstances où d'autres s'attirent : je n'admets point l'unité de la substance matérielle. Chercher à expliquer les lois des attractions astronomiques,

celles des attractions et répulsions à *petites* et à *très-petites* distances par le choc des molécules d'éther, cela me paraît être un grand pas rétrograde, un véritable retour à quelque chose de comparable aux tourbillons de Descartes, et qui soutient aussi mal un examen sérieux.

*Récapitulation des lois qui donnent les équivalents.* — Avant nos recherches, on ne connaissait qu'une relation entre les équivalents chimiques et les quantités que mesurent les physiciens. Outre les capacités calorifiques, on peut aujourd'hui rattacher les équivalents au travail chimique, aux attractions au contact et aux forces de réunion. Nous allons donner ici un tableau de leurs valeurs calculées de ces diverses manières, en omettant l'emploi du travail chimique dont l'étude est encore trop peu avancée.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

des équivalents des corps simples calculés par les attractions au contact, les forces de réunion et les capacités calorifiques.

NOMS DES SUBSTANCES.	<i>e</i> calculé par les attractions au contact.	<i>e</i> calculé par les forces de réunion.	<i>e</i> calculé par les capacités calorifiques.	<i>e</i> usité en chimie.
Hydrogène.....	1	1	1	1
Carbone.....	6	6	6	6
Azote.....	7	7	14	14
Oxygène.....	8	8	16	8
Phosphore.....	10	10	15	30
Soufre.....	16	16	16	16
Chlore.....	24	24	36	36
Brome.....	27	81	81	81
Fer.....	28	»	28	28
Étain.....	»	30	60	60
Antimoine.....	»	31	62	62
Cuivre.....	32	32	32	32
Sélénium.....	»	40	40	40
Iode.....	42	84	63	126
Mercure.....	50	100	100	100
Palladium.....	53	»	53	53
Argent.....	»	54	54	108
Cadmium.....	»	56	56	56
Bismuth.....	»	70	105	210
Or.....	98	98	98	98
Platine.....	99	»	99	99
Plomb.....	»	103	103	103

Pour la moitié des vingt-deux corps simples qui figurent dans ce tableau, les équivalents calculés se confondent entre eux et avec l'équivalent employé par la plupart des chimistes. Pour les onze autres, on remarque des différences; mais les nombres obtenus se déduisent les uns des autres en multipliant par des nombres simples tels que  $1\frac{1}{2}$ , 2, 3. Les attractions au contact donnent la plus faible valeur qui devra probablement être adoptée en chimie, puisque les lois du travail chimique se rattachent à celles des attractions au contact. Sauf pour l'iode,

l'équivalent donné par les forces de réunion est moindre que celui qui résulte des capacités calorifiques. L'exception que présente l'iode devra être vérifiée ultérieurement, parce que les expériences relatives à ce corps ne nous ont pas paru mériter une confiance complète.

*Limite du nombre des molécules par millimètre cube.* — De la connaissance de l'attraction au contact  $A$ , étudiée dans le chapitre VIII, et de celle de la force de réunion  $F$ , étudiée dans le présent chapitre, on peut déduire une limite du nombre  $N$  des molécules contenues dans un millimètre cube d'un corps quelconque. Au moyen de plans parallèles à l'une des faces, opérons le partage de ce cube en  $n$  tranches, ayant chacune pour épaisseur la distance des centres de deux molécules voisines, et arrachons ces tranches les unes après les autres. Pour chacune de ces opérations, on dépensera en travail  $2F_1$ , évidemment beaucoup moindre que le travail  $2F$ , nécessaire pour séparer deux tranches dont les épaisseurs surpassent  $\epsilon$ . Le travail total  $2nF_1$  sera donc inférieur à  $2nF$ . Mais, pourvu que la densité ne soit pas extrêmement faible, le travail de désagrégation restant à effectuer est négligeable en présence du travail total de désagrégation, et l'on peut remplacer  $2nF_1$ , qui est inconnu, par le travail de désagrégation totale  $A$ , et l'on a

$$2nF > A.$$

Cette inégalité ne peut même conduire qu'à une limite de  $n$  très-éloignée, puisque  $F$  surpasse considérablement  $F_1$ . Remarquons maintenant que  $N$  est le produit de  $n^3$  par un coefficient qui dépend de l'arrangement des molécules et serait  $\sqrt{2}$ , si les centres des molécules voisines étaient également éloignés les uns des autres et situés aux sommets d'un tétraèdre régulier. Puisque la limite est très-éloignée, ce coefficient peut d'ailleurs sans difficulté être remplacé par 1, ce qui donne

$$(451) \quad N > \left(\frac{A}{2F}\right)^3.$$

## L'application à l'eau conduit à

$$N > 225\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

*Dans un cube de ce liquide ayant pour côté 1 millième de millimètre, lequel pèse mille millions de fois moins que 1 milligramme, et ne peut être vu qu'à l'aide d'un bon microscope, il y a donc plus de deux cent vingt-cinq mille millions de molécules.*

NOTE. — Pendant l'impression de ce chapitre, M. Plateau a fait paraître sa huitième série, dans laquelle il donne, depuis la page 6 jusqu'à la page 30 (*Bruxelles, M. Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique*), des détails sur la tension des couches superficielles liquides qu'il a beaucoup étudiée comme l'ont fait aussi plusieurs autres savants distingués. Malgré les éloges qu'il me donne, ce dont je suis heureux de pouvoir lui témoigner ici ma reconnaissance, je ne puis laisser sans réponse quelques-uns des passages de son nouveau mémoire. Pour abrégé, je parlerai seulement des points les plus importants. Après examen du travail de M. Plateau et de mon neuvième chapitre, le lecteur fera facilement lui-même les remarques omises.

A la page 15, M. Plateau attribue à M. Lamarle la première démonstration théorique de l'existence de la force contractile des couches superficielles liquides; il indique celle qui a été publiée par ce savant en 1864, et fait connaître que j'en ai contesté l'exactitude qui a été maintenue par M. Lamarle (*Comptes rendus de l'Académie, t. LXIV, pp. 593, 739 et 902*). Ensuite, au lieu de la reproduire, il la modifie d'après les indications de M. Lamarle lui-même, et termine en disant que « sous cette forme, elle n'est plus tout à fait théorique, et revient au fond à celle de M. Henry, rendue plus précise et plus complète. » Je persiste dans mon opinion en ce qui concerne la démonstration de 1864; quant à la démonstration nouvelle, elle n'est plus entièrement théorique; en outre, elle est postérieure à la mienne: elle ne peut donc figurer dans ce débat, dont je regrette beaucoup la prolongation.

A la page 18 et à la page 28, M. Plateau parle ensuite d'un second point de vue sous lequel M. Lamarle envisage la tension qu'il attribue à ce que la densité est moindre près de la surface, de sorte que, par une contraction de la couche superficielle, une portion des molécules de cette couche pas-



sant dans l'intérieur et diminuant ainsi d'écartement, la tendance générale de l'attraction au rapprochement des molécules se satisfait en partie. Je ne parlerais point de cette opinion sur la plus importante question de capillarité, si elle n'était incompatible avec ce que j'ai établi à la page 266, où j'ai prouvé que l'amointrissement de la densité près de la surface produit une diminution de la force contractile loin d'en être l'unique cause. Si l'on voulait se contenter d'une vue un peu vague, il faudrait dire, suivant moi, que la surface diminuant de deux millimètres carrés, par exemple, chacun d'eux se trouve en contact avec l'autre, au lieu d'être en contact avec le vide, et que l'attraction trouve à se satisfaire autant que possible par ce rapprochement; c'est une idée que j'ai eue il y a longtemps, mais qui ne me satisfait point; cela me paraît bon seulement comme premier pas au-devant de la vérité à découvrir.

A la page 24, M. Plateau dit :

« M. Dupré tire aussi un procédé de l'écoulement goutte à goutte, et sa méthode évite l'inconvénient signalé par M. Hagen. »

Je dois faire remarquer ici que ma méthode n'évite pas seulement l'inconvénient signalé par M. Hagen, mais qu'elle évite encore une autre cause d'erreurs tenant à ce que le poids d'une goutte, un instant avant la chute, fait équilibre à la tension sur la circonférence de gorge qui est différente du périmètre de l'ouverture employé par ce savant.

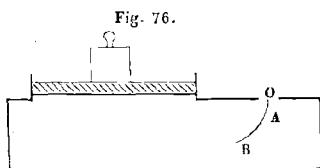
Enfin, M. Plateau, à la page 28, s'occupe de la cause de la tension, et, après l'énumération de cinq hypothèses, il admet que ce sont les courbures qui la produisent, même dans le cas des surfaces planes ou à courbures moyennes nulles. Il donne pour ce cas une explication qui lui a été suggérée par M. Lamarle, et qui consiste à dire que ces surfaces sont toujours raccordées à d'autres par des portions à fortes courbures transversales dont la tension se propage, en vertu de la continuité, à toute l'étendue des surfaces qu'elles bordent. Une telle explication ne conduirait pas à l'équilibre, mais à un courant dans la couche superficielle, allant des parties planes ou des éléments à courbures nulles vers les parties courbées, ce qui est en opposition avec les faits. On peut aussi faire voir, par la considération des travaux, qu'elle est inadmissible, et je prie en outre le lecteur de remarquer que je n'ai point présenté (p. 210 et p. 214 à 226) mon explication sous forme d'hypothèse; je ne connais pas d'ailleurs d'objection contre les preuves que j'ai fournies.

## CHAPITRE X

Écoulement et résistance des fluides. — Transmission  
du son.

## ÉCOULEMENT DES FLUIDES.

Diverses hypothèses ont été faites pour faciliter l'application du calcul à la détermination *à priori* de la vitesse d'écoulement des fluides en général ; l'expérience ne les a pas confirmées. Soit (fig. 76) un réservoir dans lequel un piston chargé



maintient la pression constante  $p_1$  en kilogrammes par mètre carré,  $o$  l'orifice de sortie et  $p$ , la pression à l'extérieur ; l'alimentation du jet, après l'établissement du régime, force à admettre que les molécules fluides affluent vers l'orifice avec des vitesses graduellement croissantes. Pour étudier leur marche dans les liquides, il suffit d'y mettre en suspension des particules solides de même densité, et l'on constate ainsi, au moins grossièrement, la forme AB des courbes suivies ou des filets. Dans les gaz, aucune observation, même rapide et non accompagnée de mesures, n'a pu être faite ; l'analogie n'en est pas moins certaine. Considérons d'abord un fluide de ce dernier genre, et, pour étudier ce qui se passe, coupons norma-

lement un filet en un point quelconque et en un autre point plus rapproché de l'ouverture et situé à une distance infiniment petite  $dx$  du premier. Soient

$p$  la pression exercée en arrière sur la tranche, et  $dp$  son excès sur la pression en avant,

$w$  la vitesse de cette tranche,

$\omega$  sa base,

$\theta$  sa température et  $T$  le binome  $274 + \theta$ ,

$D$  la densité par rapport à l'air pris sous la même pression et à la même température.

Le volume de la tranche est  $\omega dx$ , et sa masse a pour valeur

$$m = \frac{1,3D}{10333g} \cdot \frac{274}{T} \cdot \omega dx.$$

Cela posé, appliquons les formules générales (7) et (8), p. 6, il vient

$$\omega dp = m \frac{dw}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

ou, en remplaçant  $m$ ,

$$(1) \quad \frac{dp}{p} = \frac{1,3D}{10333g} \cdot \frac{274}{T} \cdot \frac{dx d^2x}{dt^2} = \frac{1,3D}{2 \times 10333g} \cdot \frac{274}{T} \cdot dw^2.$$

Sans connaître la forme des filets, on peut appliquer cette équation à chaque tranche et faire la somme ou intégrer entre les limites  $p_1$  et  $p_2$ ; cela suffit pour obtenir la vitesse finale

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = w^2 = \frac{10333 \times 2gT}{1,3D \times 274} \log_n \frac{p_1}{p_2}.$$

Cette formule est due à Navier. Elle suppose :

1° Que l'influence de la variation de température est négligeable, ou que de la chaleur venue du dehors maintient la température exactement constante ;

2° Que la pesanteur est sans action sensible ;

3<sup>o</sup> Que la pression exercée par le gaz d'une tranche sur la tranche contiguë égale sa tension.

Dans le cas du repos, la dernière proposition est certaine; lorsqu'il y a mouvement, elle est contestable, quoique des auteurs éminents en aient souvent fait usage : récemment encore, M. Zeuner s'est appuyé dessus pour étudier la question qui nous occupe. Toutefois, les difficultés qu'on peut mettre en avant pour refuser de l'admettre ne sont pas de nature à la rendre douteuse aujourd'hui, parce que l'expérience a toujours confirmé les conséquences qui en ont été déduites, et nous l'emploierons dans ce qui va suivre.

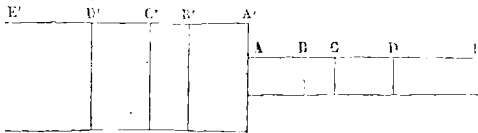
On a objecté contre l'équation (2) qu'elle donne

$$(3) \quad w = \infty$$

lorsqu'on y fait  $p_1 = 0$ , circonstance qui se présente si l'écoulement a lieu dans le vide; mais la loi de Mariotte employée dans la démonstration ne peut être légitimement appliquée pour des volumes très-grands, et, d'ailleurs, la première restriction admise n'est plus possible dans le cas d'une détente trop considérable. Ainsi, l'objection est sans valeur, mais on ne doit jamais perdre de vue que la formule logarithmique n'est approchée qu'autant que la loi de Mariotte est applicable, et l'on ne doit s'en servir qu'avec les restrictions mentionnées.

*Écoulement dans le vide.* — Envisageons actuellement le cas extrême de l'écoulement dans le vide, et supposons l'emploi de dispositions qui rendent négligeables les frottements. Un

Fig. 77.



tuyau fixe ABCD (fig. 77) de section  $\omega$  contient un gaz de den-

sité uniforme  $\delta$ , par rapport à l'eau, ayant pour température  $\theta$ , et exerçant une pression  $p_1$ . Ce gaz est d'abord contenu dans un espace limité par le fond A du tuyau, et un second disque au delà duquel le tuyau est vide; tout est en repos. Concevons que ce disque soit enlevé subitement : les premières tranches gazeuses vont prendre des vitesses graduellement croissantes, jusqu'à ce que la détente atteigne le point où la force expansive due à la chaleur, amoindrie par la dilatation et le refroidissement, soit devenue précisément égale à l'attraction au contact correspondant à la densité actuelle  $\delta_1$ . A ce moment, une tranche n'est soumise à aucune force, sa vitesse  $w_2$  devient invariable; les couches qui n'ont pas encore atteint une vitesse aussi considérable continuent à se dilater; puis, après avoir atteint la vitesse finale, elles suivent les premières tranches sans agir sur elles, et leur état est désormais fixé. *Le régime étant établi*, on a donc à un moment donné :

1° Une portion indéfinie DE du tube qui est vide ;

2° Une portion DC remplie par un gaz sans tension dont la densité est  $\delta_2$  et qui se meut d'un mouvement uniforme avec une vitesse  $w_2$ ; ses parties ne réagissent plus les unes sur les autres, ou, pour parler plus exactement, il n'existe plus de tension, parce que la force expansive due à la chaleur est équilibrée par l'attraction au contact. Nous désignerons sa température par  $\theta_2$ ;

3° Une portion CB dans laquelle la densité croît de  $\delta_2$  à  $\delta_1$ , et la tension de 0 à  $p_1$ ;

4° Une portion BA, encore pleine du gaz donné complètement en repos, puisque chaque tranche est comprise entre deux tranches qui lui font subir des pressions égales à sa tension.

Les lois de compressibilité et de dilatation n'étant point connues, il est impossible, *même en supposant qu'il n'y a ni liquéfaction, ni transmission de chaleur par conductibilité*, de

déterminer complètement par le calcul les quantités qui viennent d'être définies. Mais on peut, à l'aide des principes généraux, les comparer avec les quantités analogues pour un autre gaz ou pour le même gaz pris dans des circonstances différentes, et arriver à quelques conséquences remarquables.

Pour y parvenir, concevons un second tube A'B'C'D' de section  $\Omega$ , ayant même axe et même fond que le premier ; supposons qu'on enlève le disque qui empêche l'expansion au même instant ; employons des lettres majuscules pour désigner les mêmes quantités et considérons seulement le cas où l'on a

$$(4) \quad P_1 \Omega = p_1 \omega.$$

La fixité du fond et de toute la partie solide du système est assurée par cette condition, tant que les masses gazeuses AB, A'B' ne sont point épuisées. A une époque quelconque  $t$ , évaluons la variation de force vive pendant un temps infiniment petit  $dt$ , en supposant que tout le système est animé d'une vitesse constante  $x$  parallèle à l'axe, ce qui évidemment n'influe point sur la chaleur transformée en force vive et en travail interne, ni sur l'accroissement de force vive.

Soit  $z$  la longueur dont AB diminue ; la quantité de gaz correspondante a pour masse  $\frac{z \omega \delta_1}{g}$ , et, pour force vive au temps  $t$ ,

$$\frac{z \omega \delta_1}{2g} x^2,$$

puisque la vitesse est  $x$ . Au temps  $t + dt$ , une masse gazeuse égale a augmenté la longueur CD de  $z$  en arrière et de  $w_2 dt$  en avant ; elle possède une force vive

$$\frac{z \omega \delta_1}{2g} (w_2 + x)^2,$$

et la force vive gagnée a pour valeur

$$(5) \quad \frac{z\omega\delta_1}{2g}(w_2^2 + 2w_2x).$$

BC a changé de place sans variation de force vive; il en est de même de CD, abstraction faite de son accroissement, et la valeur totale de la force vive gagnée par le système a pour expression

$$(6) \quad \frac{z\omega\delta_1}{2g}w_2^2 + \frac{Z\Omega\Delta_1}{2g}W_2^2 + x\left[z\omega\delta_1w_2 + Z\Omega\Delta_1W_2\right].$$

Cette quantité étant indépendante de  $x$ , on en conclut

$$(7) \quad z\omega\delta_1w_2 + Z\Omega\Delta_1W_2 = 0.$$

D'ailleurs les longueurs  $z$  et  $z + w_2 dt$  contiennent la même masse et sont entre elles dans le rapport inverse des densités  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , ce qui donne

$$(8) \quad \frac{z + w_2 dt}{z} = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2} w_2 dt.$$

$z$  s'obtient de la même manière; mais cette lettre désignant une longueur absolue et  $W_2$  étant négatif, il faut changer  $w_2$  en  $-W_2$ , et l'on a

$$(9) \quad Z = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2} W_2 dt.$$

Après substitution dans (7), on trouve enfin, (4) servant à éliminer  $\omega$ ,

$$(10) \quad \frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta} \cdot \frac{\delta_2 w_2^2}{p_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 - \Delta_2} \cdot \frac{\Delta_2 W_2^2}{P_1}.$$

Cette relation a lieu en toute rigueur; le théorème sur les quantités de mouvement la donne aussi avec facilité, ainsi que le théorème relatif au mouvement du centre de gravité. En négligeant  $\delta$ , par rapport à  $\delta_1$  et  $\Delta_1$ , en présence de  $\Delta_2$ , on en

obtient une très-approchée et plus simple

$$(11) \quad \frac{\delta_2 w_2^2}{p_1} = \frac{\Delta_2 W_2^2}{P_1}.$$

Toutes les fois que les tensions initiales sont les mêmes, on arrive à la loi suivante :

*Les densités finales sont inversement proportionnelles aux carrés des vitesses finales.*

Pour obtenir maintenant d'autres relations, faisons usage des lois de Mariotte et de Gay-Lussac quoiqu'elles ne soient pas toujours très-approchées.

Dans le cas de deux gaz pris dans les circonstances normales, l'oxygène et l'hydrogène par exemple, on a  $P_1 = p_1$ ,  $\Omega = \omega$ ,  $\delta_1 = 16 \Delta_1$ , et l'hypothèse qui se présente à l'esprit comme la plus probable, d'après ce qui précède, est

$$(12) \quad \delta_2 = 16 \Delta_2;$$

il en résulte

$$(13) \quad W_2 = 4 w_2.$$

Pour en montrer l'exactitude, concevons, à une époque quelconque, que l'hydrogène soit distribué dans le tuyau A'B'C'D'E', et l'oxygène dans le tuyau ABCDE, de telle sorte que les tranches d'hydrogène 4 fois plus épaisses et plus éloignées de AA', aient même tension que les tranches correspondantes d'oxygène, et aussi même température, mais des vitesses 4 fois plus considérables. Si l'on examine ce qui arrive à deux tranches correspondantes pendant un nouveau temps  $dt$ , celle d'hydrogène parcourra un espace 4 fois plus considérable, et, comme la force qui la pousse est la même, le travail dépensé sera 4 fois plus grand. D'ailleurs le principe de l'équivalence donne

$$(14) \quad MW dW = T, \quad \text{ou} \quad dW = \frac{T_r}{MW}.$$



M désignant la masse de cette tranche et T, le travail dont elle est l'objet. Pour l'oxygène l'accroissement de vitesse est 4 fois moindre, puisqu'il en est ainsi du numérateur de la fraction qui l'exprime, tandis que les dénominateurs sont égaux; donc déjà

*Les rapports des vitesses, et par suite des épaisseurs et des densités, des tranches correspondantes subsistent après le temps dt.*

Si l'on considère 1 milligramme de part et d'autre, l'accroissement de force vive est 16 fois plus considérable pour l'hydrogène, et par conséquent il perd une quantité de chaleur 16 fois plus grande, et de là résulte que

*La variation de température est la même pendant le temps dt, puisque les capacités sont dans le rapport de 16 à 1. Tel est du moins le résultat qu'on peut admettre dans une première approximation, dans laquelle on suppose que le travail interne n'altère pas sensiblement les relations cherchées.*

La similitude de distribution définie plus haut, existe au début, et, puisqu'elle persiste lorsque le temps croît, elle existe à un instant quelconque, et l'équation (13) se trouve confirmée. Ainsi

*Lorsqu'on laisse s'opérer, sans chaleur venue du dehors, la détente complète de deux gaz pris à la même température et sous la même pression, les densités finales sont dans le même rapport que les densités initiales, et les vitesses sont inversement proportionnelles aux racines carrées de ces densités.*

Il est possible de déterminer la température et la vitesse finales en admettant à la vérité les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, ainsi que la constance de la capacité, dans des intervalles assez considérables pour rendre les résultats très-incertains et en négligeant le travail interne.

*Température finale.* — Si dans la formule (101), p. 83, on remplace le rapport des volumes par celui des densités, on

trouve la relation

$$(15) \quad (k - 1) \log \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \log \frac{T_1}{T_2},$$

qui permet le calcul de la valeur de  $T_2 = 274 + \theta_2$  et par conséquent celle de  $\theta_2$  correspondant à chaque valeur attribuée à  $\Delta_2$ . Pour la question actuelle, il faut supposer  $\Delta_2$  très-petit et  $\theta_2$  diffère peu de  $-274$ ;  $\theta_1$  n'influe pas sur la température finale, qui est aussi indépendante de  $K$ , c'est-à-dire de la nature du gaz. Le travail interne est ici véritablement négligeable; car il est inférieur au travail total de désagrégation qui, dans l'hydrogène par exemple, occasionnerait une variation de température

$$x = 0^0,5$$

donnée (Chapitre VIII) par la relation

$$5000 \times 1000000 \times 0,001 \times 0,0013 \times 0,0693 = 433,5 \times 2,448 x.$$

*Vitesse finale.*— Le principe de l'équivalence, en supposant, ce qui est très-incertain, que la capacité demeure constante à peu près, fournit une équation qui donne la vitesse finale; il suffit d'écrire que la chaleur perdue  $(274 + \theta_1) c$  équivaut à la force vive gagnée  $\frac{w_2^2}{2g}$ ,

$$(16) \quad w_2^2 = (274 + \theta_1) \times 2g E c.$$

Pour l'hydrogène on obtient, en supposant  $\theta_1 = 0$ ,

$$w_2 = 2388^m.$$

Pour l'oxygène, la capacité est 16 fois moindre, et par conséquent la vitesse finale est 4 fois plus faible, comme on l'a déjà vu:

$$w_2 = 597.$$

La valeur de  $\theta_1$ , qui est sans influence sur la température finale,

influe au contraire sur la vitesse et la densité finales qui se produisent lors de l'écoulement dans le vide.

*Gaz pris avec deux tensions différentes.* — Si l'on suppose (fig. 77) les tuyaux occupés primitivement en partie par deux masses d'un même gaz à la même température, mais soumises à des pressions différentes ; si l'on admet, par exemple, de l'hydrogène à zéro et soumis à des pressions de 1 et 9 atmosphères, on a (11)

$$(17) \quad \delta_2 w_2^2 = 9 \Delta_1 W_1^2,$$

avec

$$(18) \quad 9\omega = \Omega.$$

Un raisonnement tout à fait analogue à celui de la page 412 montre que les vitesses finales seront les mêmes, ainsi que les températures, et que le rapport 9 des densités persistera, de sorte que, comme vérification, la formule (11) est satisfaite.

*Remarque.* — Il peut paraître surprenant que l'absence de tension soit possible avec même température finale et des densités finales différentes ; mais on conçoit qu'une densité 9 fois plus grande peut, dans le cas d'une raréfaction extrême, augmenter la force expansive due à la chaleur et l'attraction au contact sans que ces deux quantités cessent d'être égales. D'ailleurs, il s'agit ici de théorèmes approchés et non de théorèmes absolus.

*Application de la théorie mécanique de la chaleur à l'écoulement des fluides.* — La formule (2) peut être démontrée à l'aide du principe de l'égalité de rendement, comme je l'ai fait dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 10 juin 1861, ou en s'appuyant sur le principe de l'équivalence, comme l'a fait plus tard le savant M. Zeuner, qui s'est servi d'ailleurs de ce même principe pour obtenir une autre formule qu'il importe de comparer avec elle ; nous allons entrer dans les détails nécessaires.

On a vu, p. 44, que le principe de l'égalité de rendement équivaut à la négation de la possibilité du mouvement perpétuel, à laquelle Clapeyron l'avait rattaché il y a longtemps déjà; toutefois, les machines *réversibles* ont seules été envisagées. Quand on considère aussi les machines périodiques, sans chute et *non réversibles*, on peut encore affirmer que, si le principe de l'égalité de rendement a lieu, le mouvement perpétuel est impossible; mais la démonstration *à priori* de la réciproque cesse d'être valable. Il est intéressant de rechercher si le second principe est encore applicable et s'il est permis de l'énoncer pour toutes les machines périodiques sans chute en écartant la restriction relative à la réversibilité. La question actuelle nous offre une occasion de vérifier le théorème étendu de la sorte.

Concevons qu'au moyen d'une turbine parfaite on communique à un volant la force vive du jet gazeux et que l'on charge d'ailleurs le volant de comprimer le gaz nécessaire pour alimenter le jet; examinons ce qui se passe dans ces deux machines et dans le volant commun.

Soient  $\theta_1$  et  $\frac{p_1}{10333}$  la température et la pression en atmosphères dans le vase où la compression existe, et, pour plus de simplicité, supposons qu'on dispose d'un réservoir indéfini de chaleur aussi à la température  $\theta_1$ ; l'écoulement s'opère dans un vase où la température  $\theta_2$  est plus élevée, par exemple, et la pression  $\frac{p_2}{10333}$  moindre.

1° Pendant qu'un poids  $q$  extrêmement petit du gaz prend la vitesse  $w$ , le réservoir de chaleur à  $\theta_1$ , au moyen de dispositions inutiles à décrire dans une question purement théorique, donne

$$\frac{q w^2}{2 g E}$$

calories à la masse gazeuse contenue dans le premier vase pour

compenser la chaleur transformée en force vive et maintenir la température constante.

2° Le poids  $q$  de gaz agit par l'intermédiaire de la turbine parfaite sur le volant qui reçoit une force vive équivalente à

$$\frac{q w^2}{2 g E}.$$

3° Avant de se réunir à la seconde masse gazeuse, le poids  $q$ , qui en a maintenant la tension et non la température, reçoit à pression constante  $q \cdot k c (\theta_2 - \theta_1)$  calories obtenues au moyen d'une machine accessoire mise en rapport avec le volant qui perd une force vive équivalente à

$$q \cdot k c \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\theta - \theta_1}{T} d\theta \quad \text{ou} \quad q \cdot k c (\theta_2 - \theta_1) \left[ 1 - \frac{T}{\theta_2 - \theta_1} \log_n \frac{T_2}{T_1} \right];$$

$k c$  étant la capacité à pression constante.

En même temps le réservoir à  $\theta_1$  perd

$$q \cdot k c T_1 \log_n \frac{T_2}{T_1}.$$

Pendant que la masse  $q$  s'introduit dans le second vase, une pompe à action continue enlève une masse égale, ce qui fait gagner au volant une force vive équivalente à

$$\frac{10333 T_2}{27 \times 1,3 \cdot D E}$$

calories ;  $D$  désignant la densité par rapport à l'air.

4° Ce gaz étant isolé, on le refroidit à volume constant de  $\theta_2$  à  $\theta_1$  en utilisant la chaleur au moyen d'une machine accessoire, ce qui donne au volant l'équivalent de

$$q \cdot c (\theta_2 - \theta_1) \left[ 1 - \frac{T_1}{\theta_2 - \theta_1} \log_n \frac{T_2}{T_1} \right]$$

calories et au réservoir de chaleur à  $\theta_1$  degrés

$$q c T_1 \log_n \frac{T_2}{T_1}.$$

La pression devient

$$p' = \frac{T_1}{T_2} p_2.$$

5° On comprime de  $p'$  à  $p_1$  à température  $\theta_1$ , maintenue constante; le volant perd l'équivalent de

$$q (k c - c) T_1 \log_n \frac{p_1}{p'},$$

ou

$$q (k c - c) T_1 \left( \log_n \frac{p_1}{p_2} + \log_n \frac{T_2}{T_1} \right),$$

et le réservoir à  $\theta_1$ , reçoit la chaleur équivalente

$$q (k c - c) T_1 \left( \log_n \frac{p_1}{p_2} + \log_n \frac{T_2}{T_1} \right)$$

calories.

6° On refoule la masse  $q$  dans le premier vase. Cela fait perdre au volant l'équivalent de

$$\frac{10333 q T_1}{274 \times 1,3.DE}$$

calories et compense la sortie simultanée d'une masse pareille par l'ouverture en mince paroi.

CONCLUSION. — La période est achevée; tout recommence et il y a lieu d'appliquer le principe de l'égalité de rendement et celui de l'équivalence, c'est-à-dire d'égaliser à 0 la somme algébrique des gains du volant et celle des gains du réservoir de chaleur à  $\theta_1$ . On obtient deux équations qui fournissent nécessairement la même valeur pour  $w$  et dont l'une ne sert qu'à vérifier les calculs; il vient, en tenant compte de (38), p. 27,

$$(19) \quad w^2 = \frac{2 \times 10333 q T_1}{274 \times 1,3.D} \log_n \frac{p_1}{p_2}.$$

Cette équation prouve que la température de la masse gazeuse dans laquelle l'écoulement s'opère est sans influence sur la vitesse si l'extension donnée au second principe est légitime.

Lorsqu'on veut bien admettre cela comme évident, ou supposer les deux températures égales, la démonstration précédente se simplifie beaucoup ; c'est à ce point de vue que j'avais d'abord traité la question.

La formule (19) montre que le carré de la vitesse d'un gaz qui, dans les circonstances précisées, s'échappe par un orifice en mince paroi, obéit aux lois suivantes :

1° Il est proportionnel au logarithme du quotient des deux tensions et indépendant de leurs valeurs respectives pourvu que ce quotient ne change pas ;

2° Il est proportionnel au binôme de dilatation de la masse comprimée et indépendant de la température du gaz dans lequel l'écoulement a lieu ;

3° Il est inversement proportionnel à la densité du gaz qui s'écoule.

Bernouilli, par une assimilation non justifiée des gaz aux liquides, a obtenu une valeur différente bien connue,

$$(20) \quad w^2 = \frac{10333 \times 2gT_1}{274 \times 1,3.D} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1},$$

qu'il est utile de comparer avec celle qui précède. Considérons d'abord les vitesses faibles comprises entre 0 et 40 mètres ; la formule logarithmique appliquée à l'air donne, pour  $\theta_1 = 0$ , les résultats suivants :

$w$	$b = 10\,000 \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right)$	$w$	$b = 10\,000 \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right)$
1	0,06	22	31
2	0,25	23	34
3	0,57	24	37
4	1,02	25	40
5	1,6	26	43
6	2,3	27	46,5
7	3,1	28	50
8	4,1	29	54
9	5,2	30	57
10	6,4	31	61
11	7,7	32	65
12	9,2	33	69,5
13	10,8	34	74
14	12,6	35	78
15	14,4	36	83
16	16,3	37	87
17	18,4	38	92
18	20,7	39	97
19	23,0	40	102
20	25,5	45	130
21	28	50	161

Quand la pression la plus faible est celle de l'atmosphère, la différence  $b$  des deux pressions en dix-millièmes d'atmosphère n'est autre chose que la quantité

$$10\,000 \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right),$$

dont les valeurs sont contenues dans ce tableau. En augmentant  $b$  de  $\frac{1}{30}$  de sa valeur, il se trouve évalué en millimètres d'eau.

Pour une vitesse assignée, la formule de Bernoulli indique une pression plus grande, et la nouvelle valeur de  $b$  surpasse la précédente d'une petite quantité qu'on obtient avec une ap-



proximation très-souvent suffisante en calculant seulement son premier terme

$$(21) \quad \frac{b^3}{20\,000};$$

pour  $w = 40$ , la correction est  $\frac{1}{2}$ , et, pour les expériences ordinaires, on peut jusque-là employer l'une ou l'autre de ces formules qui conduisent au contraire à des nombres très-différents pour les vitesses considérables, comme on le voit dans le tableau qui suit, où  $\theta_1$  est encore supposé nul.

$\frac{p_1}{p_2}$	VITESSE PAR LA FORMULE		$\frac{p_1}{p_2}$	VITESSE PAR LA FORMULE	
	(19).	(20).		(19).	(20).
1,01	39,5	39,4	2,9	408,5	320,5
1,02	55,7	55,4	3	414,5	323,5
1,03	68,1	67,6	4	466,2	342,9
1,04	78,4	77,6	5	502,4	354,1
1,05	87,5	86,4	6	530,0	361,5
1,06	95,6	94,2	7	552,3	366,6
1,07	103,0	101,3	8	570,9	370,3
1,08	109,8	107,8	9	586,9	373,3
1,09	116,2	113,8	10	600,8	375,6
1,1	122,2	119,4	20	685,3	385,9
1,2	169,0	161,6	30	730,2	389,3
1,3	202,8	190,2	40	760,4	390,9
1,4	229,6	211,6	50	783,1	391,9
1,5	252,1	228,6	60	801,1	392,6
1,6	271,4	242,5	70	816,1	393,1
1,7	288,4	254,1	80	828,8	393,4
1,8	303,5	263,9	90	839,8	393,7
1,9	317,2	272,5	100	849,6	393,9
2,0	329,6	280,0	200	911,3	394,9
2,1	341,0	286,5	300	945,6	395,3
2,2	351,6	292,4	400	969,1	395,4
2,3	361,3	297,7	500	987,0	395,5
2,4	370,4	302,4	600	1001,3	395,6
2,5	379,0	306,7	700	1013,3	395,6
2,6	387,0	310,6	800	1023,6	395,7
2,7	394,6	314,2	900	1032,6	395,7
2,8	401,7	317,4	1000	1040,6	395,7

Si l'on considère le cas où de l'air à 6 atmosphères coule dans de l'air à  $\frac{1}{10}$  d'atmosphère, on a

$$\frac{p_1}{p_2} = 60,$$

et la première formule indique une vitesse plus que double de celle que donne la seconde ; on verra plus loin que celle de Bernoulli est en défaut.

Ce qui précède suppose, comme il a été dit, la température maintenue constante et l'influence de la pesanteur négligeable ; la première condition a pu être réalisée par un artifice dont la description trouvera place dans la relation de nos expériences. L'hypothèse de la transmission des pressions *pendant le mouvement* comme *pendant le repos* a aussi été admise et on va la retrouver dans le travail de M. Zeuner sur le même sujet. Cet auteur distingué, appliquant le premier principe à la question de l'écoulement, obtient son équation générale en exprimant qu'il y a égalité entre la force vive  $\frac{w^2}{2g}$  produite pendant la sortie d'un kilogramme et le travail d'expansion  $\int_{v_1}^{v_2} p \, dv$  augmenté de l'excès  $p_1 v_1 - p_2 v_2$  du travail produit par le poids qui descend (*fig. 76*) sur le travail dû au gaz qui ne peut sortir sans surmonter la pression extérieure

$$(22) \quad \frac{w^2}{2g} = p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p \, dv,$$

$v_1$  et  $v_2$  désignant comme précédemment le volume initial et le volume final du kilogramme.

Si l'on suppose pour les liquides  $v$  constant, on retombe sur la formule usuelle depuis longtemps déduite des principes de la théorie mécanique de la chaleur.

Si l'on suppose pour les gaz la température constante et si

l'on fait usage de la loi de Mariotte, on retombe sur la formule logarithmique (19). Dans l'écoulement réel, la température baisse, et cela diminue la tension et par conséquent la vitesse; la formule logarithmique conduit donc à des vitesses trop grandes.

Enfin, M. Zeuner a considéré le cas où l'on suppose que la force vive se produit exclusivement auprès de l'orifice de sortie; de telle sorte que chaque petite masse gazeuse se refroidit par suite de sa détente sans recevoir aucune quantité de chaleur des corps environnants. Cette dernière hypothèse est évidemment de nature à fournir pour la vitesse une valeur plus faible que celle qui a lieu dans l'écoulement réel. Les lois de Mariotte et de Gay-Lussac donnent d'abord (38) et (43)

$$(23) \quad p v = E(k - 1) c T;$$

d'où

$$(24) \quad \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

L'hypothèse faite est d'ailleurs exprimée par l'équation

$$(25) \quad E c d \theta = - p dv,$$

ou, pour l'expansion totale,

$$(26) \quad \int_{v_1}^{v_2} p dv = E c (\theta_1 - \theta_2) = E c (T_1 - T_2).$$

Mais on peut aussi dans l'équation différentielle (25) remplacer  $p$  par sa valeur tirée de (23), séparer les variables et intégrer; il vient, en faisant usage de (24),

$$(27) \quad \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}},$$

et il suffit de substituer dans (22), pour obtenir la vitesse,

$$(28) \quad w^2 = 2 g E \cdot k c (T_1 - T_2) = \frac{2 \times 10333 g}{274 \times 1,3.D} (T_1 - T_2),$$

ou bien (27)

$$(29) \quad w^2 = 2gE.kc.T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

$$= \frac{2 \times 10\,333 \text{ g T}_1}{274 \times 1,3.D} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \cdot \frac{K}{K-1}.$$

Cette formule fournit, pour la vitesse, des valeurs qui diffèrent peu de celles que donne la formule logarithmique tant que le rapport de la pression initiale à la pression finale n'est pas très-considérable; et si l'on prend la moyenne des deux résultats pour vitesse réelle, on peut affirmer que l'erreur est moindre que la demi-différence. Les nombres obtenus au moyen de la formule de Bernoulli sortent bientôt de l'intervalle compris entre les deux limites, et l'on est certain qu'elle ne peut être employée que pour les faibles vitesses ou pour des vitesses de 40 à 60 mètres, quand on ne tient pas à une grande approximation.

Lorsque les vitesses atteignent de grandes valeurs, les limites données par (19) et (29) s'écartent beaucoup l'une de l'autre: pour  $\theta_1 = 20^\circ$  et  $\frac{p_1}{p_2} = 2$ , on trouve, avec la formule logarithmique,

$$w = 341,4,$$

et, avec la formule (29),

$$w = 330,6, \quad \theta_2 = -34^\circ.$$

Quand  $\frac{p_1}{p_2} = 10$ , la formule logarithmique donne

$$w = 622,3,$$

et la formule (29)

$$w = 540,5, \quad \theta_2 = -124^\circ.$$

Passons maintenant aux expériences de vérifications.

EXPÉRIENCES SUR LA VITESSE D'ÉCOULEMENT DES GAZ  
PAR DES ORIFICES EN MINCES PAROIS.

La vitesse d'écoulement des gaz par des orifices en minces parois n'a pas encore été mesurée d'une manière satisfaisante. On possède de très-bonnes déterminations de la dépense, notamment par MM. Poncelet et Pécelet; mais, comme la section de la veine, là où la détente est complète, ne peut être mesurée directement, il est impossible d'en déduire avec certitude la vraie valeur de la vitesse; la vitesse une fois connue peut servir au contraire avec la dépense à calculer la section à dépense complète. La mesure directe de la vitesse des molécules gazeuses m'ayant paru impossible, j'ai cherché un artifice au moyen duquel on puisse la faire dépendre d'une quantité dont la détermination soit plus facile. Je vais, en prenant l'air pour exemple, exposer l'idée principale qui m'a conduit à la construction de deux appareils avec l'un desquels j'ai obtenu des résultats très-satisfaisants.

Si un courant de gaz à température maintenue constante sort, par une ouverture en mince paroi, du récipient où il est comprimé et vient rencontrer perpendiculairement l'ouverture plane d'un vase muni d'un manomètre, aussitôt que le régime est établi, on constate que la pression est la même dans le vase et dans le récipient muni pour cela d'un second manomètre. La même chose arrive quand on adapte au vase des ajutages de dimensions et de formes variées, pourvu que le plan de l'ouverture reste perpendiculaire à la direction du courant.

Cela posé pour obtenir, étant donnés  $p_2$  et  $\theta$ , des valeurs correspondantes de  $p_1$  et  $w$ , et contrôler par conséquent les indications de la formule (19), il est indifférent de mesurer  $p_1$  dans le récipient ou dans le vase. Prenons ce dernier parti; puis, au lieu de faire mouvoir l'air, faisons marcher le vase dans l'atmosphère en repos et donnons-lui, au moyen d'un moteur

convenable, une vitesse  $w$  bien connue et exactement perpendiculaire au plan de son ouverture. Munissons d'ailleurs l'ajutage d'un robinet, qui, ouvert d'abord pendant un temps plus que suffisant pour l'établissement du régime, se fermera ensuite avant que le mouvement ait cessé d'être uniforme et de s'effectuer avec la vitesse  $w$ . Nous pourrons, après le retour au repos, déterminer à loisir par des mesures manométriques la valeur de  $p_2$  qui correspond à  $w$  et dresser un tableau qui, aux erreurs d'expériences près, devra se confondre avec les tableaux des pages 420 et 421.

On peut aussi procéder à la mesure de  $p_2$  pendant le mouvement même ; quoique cette méthode n'ait été employée qu'en dernier lieu, comme elle est de beaucoup la plus commode et la meilleure, je la décrirai d'abord. Mais, auparavant, je vais faire connaître les résultats que nous avons obtenus en répétant les expériences relatives à l'action d'un courant de gaz sur une surface plane percée d'une ouverture communiquant avec un manomètre, expériences sur lesquelles nous devons appuyer nos nouvelles recherches.

Le courant produit par un ventilateur à réaction Perrigault, animé par un poids d'un mouvement bien uniforme, était reçu dans un régulateur qui alimentait un jet sortant par une ouverture verticale en mince paroi dont le diamètre pouvait être changé. Dans l'axe horizontal du jet, à une distance variable à volonté, se présentait un tube cylindrique en communication avec un manomètre à alcool incliné au dixième ; ce tube, porté par l'alidade d'un cercle gradué horizontal, pouvait recevoir des ajutages divers ayant toujours même axe que le jet et dont l'ouverture se trouvait dans un plan vertical passant par le centre du cercle ; le vernier devait être au zéro pour constater l'action perpendiculaire, et cette disposition avait été adoptée pour pouvoir ensuite étudier l'action oblique.

Un second manomètre indiquait la pression dans le régulateur ; elle s'est montrée constamment la même que celle indiquée par le premier manomètre, les plus grandes différences correspondant à peine à  $\frac{1}{40}$  de millimètre de mercure, et cela :

- 1° avec un ajutage cylindrique ;
- 2° avec un ajutage conique convergent ;
- 3° avec un ajutage conique divergent ;
- 4° avec un ajutage terminé par une plaque mince présentant une petite ouverture en son centre.

Les vitesses employées n'étaient point assez grandes pour que la détente pût changer notablement la température.

Pour servir de point d'appui à ce qui précède, ces faits suffisaient ; mais nous avons tenu à vérifier aussi l'action oblique. Si l'on fait tourner l'alidade d'un angle  $\alpha$  dont le cercle donne la mesure, l'axe du jet gazeux, au lieu de coïncider avec la normale comme dans les expériences précédentes, fait avec elle ce même angle  $\alpha$  ; la vitesse se décompose en une vitesse inefficace

$$w \sin \alpha,$$

parallèle au plan de l'orifice et une vitesse perpendiculaire

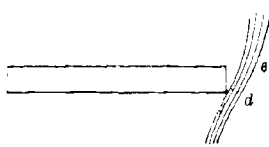
$$w \cos \alpha,$$

de sorte que, pour les vitesses faibles seules employées dans les expériences, l'indication fournie par le manomètre quand on plaçait le vernier au zéro, laquelle était proportionnelle au carré de la vitesse, devait décroître dans le rapport de 1 à  $\cos^2 \alpha$ .

En particulier, pour  $\alpha = 90$  degrés, l'action doit être nulle. Dans ce cas, avec un ajutage cylindrique (*fig.* 78), on observe une succion considérable et qui tient à ce que les filets de vent auxquels l'ajutage fait obstacle, changent de direction et pren-

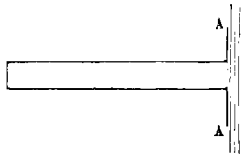
ment de  $d$  en  $e$  une direction pour laquelle  $\alpha$  surpasse  $90$  degrés.

Fig. 78.



On prévient cette action étrangère à celle que nous voulons étudier, en terminant l'ajutage par une armature AA (fig. 79),

Fig. 79.



consistant en un disque métallique mince qui s'oppose à ce que l'air soit dérangé de sa direction au-devant du plan de l'ouverture ; alors le manomètre reste immobile, au moins à peu près. Pour obtenir une immobilité complète, il faut non-seulement que le diamètre de l'armature soit suffisant eu égard à la vitesse du courant, mais encore que l'orifice soit à une distance convenable de la naissance du jet pour que la détente soit exacte. Le courant artificiel employé dans ces expériences ne représente pas aussi bien que l'atmosphère en repos dans laquelle se meuvent les ajutages de l'appareil décrit un peu plus loin, un vent parfaitement régulier, uniforme et indéfini ; trop près de l'ouverture, la détente n'est pas tout à fait complète, et le liquide du manomètre, au lieu de demeurer immobile, indique un léger excès de pression ; trop loin, la divergence des filets gazeux occasionne une raréfaction que le manomètre indique encore, quoiqu'elle soit incomparablement plus faible que celle qui a lieu en l'absence de l'armature. La



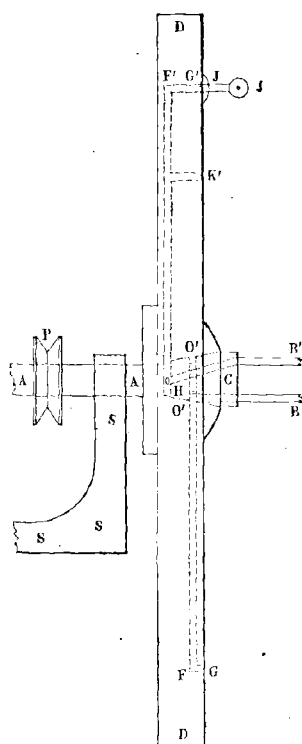
distance la meilleure n'a pu être déterminée avec beaucoup de précision, ce qui, du reste, n'est pas nécessaire ; en la rendant invariable au moyen des vis de pression, on a pu constater l'exactitude de la loi du cosinus carré déjà connue, mais non vérifiée. Pour faire une expérience, on attendait que le mouvement donnât une action perpendiculaire invariable, qu'on notait ; puis on mettait le vernier sur le degré 35, par exemple, à droite du zéro, ensuite sur 35 à gauche, et on revenait au zéro pour constater de nouveau l'action perpendiculaire. Les obliquités égales en sens contraires ont toujours donné des résultats peu différents, ce qui prouve la bonne construction de l'appareil : on prenait d'ailleurs la moyenne. C'est ainsi qu'ont été obtenus les résultats consignés dans les tableaux suivants et mesurés en millimètres sur le tube du manomètre à alcool incliné au dixième ; le jet sortait par un orifice circulaire en mince paroi de 35 millimètres de diamètre et parcourait, avant d'atteindre le centre de l'ouverture de l'ajutage, 10 centimètres le premier jour et 12 les autres jours.

$\alpha$	ACTIONS perpendicu- laires.	MOYENNES des deux ac- tions obliques.	ACTIONS obliques cal- culées.	DIFFÉRENCES.
<i>Expériences du 21 juin 1863.</i>				
20°	565	501	499	+ 2
30	560	435	420	+ 15
40	560	335	328	+ 7
50	570	260	235	+ 25
60	560	150	140	+ 10
70	560	70	65	+ 5
<i>Expériences du 22 juin 1863.</i>				
20°	550	490	485	+ 5
30	550	420	413	+ 7
40	550	340	323	+ 17
50	535	235	221	+ 14
60	570	150	142	+ 8
70	570	72	66	+ 6
80	550	10	16	- 6
<i>Expériences du 5 septembre 1863 (armature de 27 millimètres de diamètre).</i>				
20°	431	382	381	+ 1
40	431	258	253	+ 5
60	431	108	108	0
70	431	55	50	+ 5
<i>Expériences du 6 septembre 1863.</i>				
10°	433,5	420,5	420,5	5
20	433,5	381	383	- 2
30	433,5	325	325	0
40	433,5	256,5	254	+ 2,5
50	433,5	184	179	+ 5
60	433,5	116	108	+ 8
70	433,5	61	51	+ 10
80	433,5	21	13	+ 8
<i>Expériences du 7 septembre 1863.</i>				
10°	433,5	420,5	420,5	0
20	433,5	381	383	- 2
30	433,5	325	325	0
40	433,5	255,5	254	+ 1,5
50	433,5	183	179	+ 4
60	433,5	116	108	+ 8
70	433,5	61	51	+ 10
80	433,5	21	13	+ 8

Après la relation de ces expériences préalables, revenons aux expériences dont nous avons posé le principe et qui doivent servir à confirmer l'exactitude de l'équation (19) applicable au cas où la température est constante, cas que l'artifice indiqué réalise.

Un arbre AA (*fig. 80*) est placé sur un support sss et peut re-

Fig. 80.



cevoir au moyen d'une corde passant sur la poulie P un mouvement de rotation rapide produit par un moteur et un communicateur convenables. Un disque DD, qui fait corps avec l'arbre, tourne en même temps que lui, et sa partie centrale qui pré-

sente une cavité tronc-conique, frottée contre un tronç de cône plein immobile C sur le contour duquel a été creusée une rainure circulaire O'O'. Un premier manomètre relié au tube B'O communique par le tube rayon OF' dans certaines expériences avec l'ouverture G', dans d'autres avec l'ouverture K'; on a soin de fermer l'ouverture inutile. Un second manomètre relié au tube BO' communique par le tube-rayon O'F avec l'ouverture G.

Pendant la rotation,  $w$  désignant la vitesse tangentielle à la distance  $r_1 = 0^m,159$  du centre, en G ou G', la vitesse à une distance quelconque  $r$  a pour expression  $\frac{wr}{r_1}$ , et l'accélération due à la force centrifuge  $\frac{w^2 r}{r_1^2}$ . La pression exercée suivant le rayon prolongé, par un élément de la masse gazeuse de tension  $p$ , occupant à cette distance une longueur  $dr$ , est en posant, pour abrégé,

$$(30) \quad B = \frac{1,3 \times 274 D}{2 \times 10333 g (274 + \theta)},$$

$$(31) \quad dp = \frac{2 B p w^2 r dr}{r_1^2},$$

et l'on en conclut, en désignant par  $p_2$  la constante arbitraire

$$(32) \quad \log \frac{p}{p_2} = \frac{B w^2 r^2}{r_1^2}.$$

Lorsque le liquide du manomètre demeure immobile pendant l'expérience, l'hypothèse  $r = 0$  montre que  $p_2$  est la pression atmosphérique; alors la pression  $p_1$  en G' est donnée par les tableaux pages 420 et 421, puisque (19) et (32) sont identiques. Or, cette immobilité est complète à toutes vitesses quand on fait tourner l'appareil après avoir vissé en G' un ajustage ss terminé par une armature plane passant par l'axe de rotation; cet ajustage représente le vase mobile dans l'air en repos, et, puisque

l'air comprimé qui le remplit est en équilibre sous la pression due au courant relatif et sous celle que produit la force centrifuge, on est en droit d'affirmer l'égalité de ces deux forces; l'expression de la dernière n'est ni contestable ni contestée; donc la première a la même valeur, et la formule (19) se trouve démontrée expérimentalement.

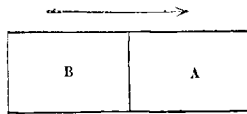
Pendant que le tube rayon  $OF/G'$  sert pour l'expérience qui vient d'être décrite, le manomètre correspondant au canal  $BO'/FG$ , qui ne se termine par aucun ajutage, sert de compteur à force centrifuge et fait connaître, à l'aide du tableau, page 420, la vitesse tangentielle tant qu'on peut négliger la différence qui existe entre  $\frac{b}{10000 + b}$  et  $\frac{b}{10000}$ . S'il indique par exemple pour  $b$ , en dix-millièmes d'atmosphère, la valeur 130, on en conclut tout de suite que le plateau fait 45 tours par seconde et que l'ajutage parcourt 45 mètres dans le même temps, car le rayon a été choisi pour donner une circonférence de 1 mètre. Si pour cette vitesse on applique la formule de Bernoulli, on trouve que la pression due à l'action perpendiculaire du courant sur l'ajutage, au lieu d'égaliser rigoureusement la pression produite par la force centrifuge, la surpasse de 85 dix-millièmes d'atmosphère, ce qui doit occasionner, dans un manomètre au dixième contenant de l'alcool, une variation de niveau de 10 millimètres certainement très-appreciable. L'expérience a été faite de la sorte avec tous les soins nécessaires pour éviter les erreurs, et l'équilibre a eu lieu comme avec le manomètre vertical, les vibrations du plancher occasionnant seulement des oscillations d'environ 2 millimètres *de part et d'autre* du point d'équilibre. Ainsi, l'on peut montrer expérimentalement (ce qui a déjà été établi théoriquement) que la formule de Bernoulli doit être abandonnée pour les grandes vitesses, et qu'il ne faut en faire usage comme plus commode pour les calculs que pour des vitesses ordinaires ou

bien jusqu'à 50 mètres quand une exactitude extrême n'est pas nécessaire.

Tout cela s'appuie, comme il a été dit déjà, sur l'action perpendiculaire d'un courant gazeux sur des ajutages variés, laquelle résulte d'expériences connues répétées par nous. On peut encore conclure cette action d'un raisonnement *à priori* qui n'est peut-être pas à l'abri de toute objection, mais qui offre l'avantage de faire connaître aussi l'action du courant dirigé en sens contraire ; comme ce dernier résultat est, ainsi que le premier, d'accord avec l'expérience, ceux même qui n'accepteraient pas le raisonnement autrement que comme moyen d'exploration, ne pourraient craindre d'adopter pour les déductions subséquentes une base inexacte.

Concevons un cylindre divisé en deux compartiments A et B (*fig. 81*) par une cloison perpendiculaire à ses génératrices et

Fig. 81.



mis en mouvement dans une atmosphère tranquille soumise à la pression  $p_2$ , dans le sens indiqué par la flèche, avec une vitesse  $w'$  exactement perpendiculaire aux plans des orifices. En avant l'air se comprimera jusqu'à ce que le régime soit complètement établi ; alors le gaz A de tension  $\frac{p_1}{10333}$  tendra à sortir avec une vitesse  $w$  déterminée par  $p_1$  et  $p_2$  ; le gaz extérieur tendra à entrer, en vertu du mouvement relatif, avec une vitesse  $w'$ , et puisqu'il y a équilibre, on aura

$$(33) \quad w' = w.$$

En arrière le même raisonnement montre que le régime ne sera établi que quand le rapport de la pression extérieure  $p_2$  à

la pression  $p_2$  dans le compartiment B, correspondra aussi à la vitesse  $w$ , de sorte que, étant donnés  $p_1$  et  $w$ ,  $p_1$  et  $p_2$  devront (32) être calculés au moyen des équations

$$(34) \quad \log \frac{p_1}{p_2} = B w^2,$$

$$(35) \quad \log \frac{p_2}{p_3} = B w^2 ;$$

et l'on a ce théorème, qu'on peut appliquer à un disque puisqu'il a lieu quelle que soit la profondeur des compartiments A et B et qui servira plus loin pour calculer la résistance des gaz :

*Lorsqu'un disque se meut dans un fluide indéfini, d'un mouvement uniforme perpendiculaire à son plan, les relations qui existent entre la force élastique du milieu et les forces élastiques des couches qui touchent les bases sont celles qui, dans l'écoulement, correspondraient à la vitesse imprimée à ce disque.*

La comparaison des équations (34) et (35) donne

$$(36) \quad p_2^2 = p_1 p_3,$$

et cette formule renferme une loi simple qui s'énonce ainsi :

*Quand un disque se meut dans un milieu indéfini, d'un mouvement uniforme perpendiculaire à son plan, la force élastique du milieu est moyenne proportionnelle entre les tensions en avant et en arrière de ce disque.*

Prenons pour unité la tension du milieu qui, dans les expériences de vérification, était l'atmosphère. Soit, en dix-millièmes d'atmosphère, comme précédemment,  $b$  l'excès de pression en A et  $b'$  la diminution en B ; (36) donne

$$(37) \quad b' = \frac{b}{1 + \frac{b}{10000}} = b - \frac{b^2}{10000} + \frac{b^3}{(10000)^2} - \dots$$

Pour  $w = 25$ , on a

$$b = 40 \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{10000} = 0,16;$$

usque-là on peut donc sans grande erreur supposer  $b' = b$ . Il est facile de vérifier ce résultat théorique avec l'appareil décrit page 431, que l'on fait tourner en sens contraire; le manomètre compteur donne  $b$ , et celui qui correspond à l'ajutage doit donner, à fort peu près, le double, puisque de ce côté l'action de la force centrifuge et la succion résultant du recul s'ajoutent.

Pour de grandes vitesses, il faudrait non-seulement tenir compte de ce que  $b'$  différerait sensiblement de  $b$ , mais aussi de ce que l'action de la force centrifuge serait amoindrie par suite de la diminution de densité de l'air.

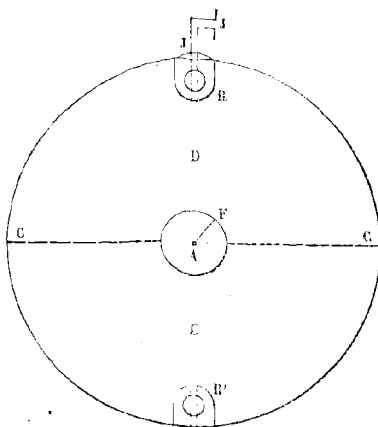
L'expérience a d'abord donné  $b'$  notablement moindre que  $b$ , même en ne dépassant point 25 mètres de vitesse. Il a été facile de constater avec de la fumée d'amadou que le frottement du plateau contre l'air produisait presque dans le sens des rayons un courant assez rapide dû à la force centrifuge, et parallèlement à l'axe de rotation un second courant qui alimentait le premier; cet afflux continu diminuait la raréfaction que le mouvement tendait à produire. Un petit paravent, formé par une mince lame métallique qui présente une surface plane parallèle au plateau, reliant deux portions de cylindres de révolution autour de l'axe de l'appareil, a suffi pour diminuer beaucoup l'influence de cette cause d'erreur et amener le manomètre compteur à indiquer 41 lorsque le manomètre de l'ajutage donnait 80. L'erreur relative  $\frac{1}{40}$ , qui subsiste, peut être regardée comme négligeable, surtout si l'on remarque qu'elle a lieu dans le sens indiqué par la cause qui la produit évidemment. On voit bien d'ailleurs pourquoi ces courants ac-



cessoires n'ont pas nui au succès complet de l'expérience faite en sens contraire.

*Autre appareil.*—Avant l'appareil décrit page 431, nous avons employé une roue creuse (fig. 82) montée sur un arbre A et qui,

Fig. 82.



mue entre deux pointes par un poids, pouvait faire au moins 60 tours par seconde. Cette roue était divisée, au moyen d'une cloison CC passant par l'axe, en deux compartiments D, E qui ne communiquaient avec l'extérieur que par les robinets R et R'. Des ressorts disposés convenablement tendaient sans cesse à fermer ces robinets, que l'on pouvait cependant maintenir ouverts au moyen de fils attachés d'une part à leurs manivelles, et d'autre part à deux petits anneaux fixés sur l'arbre. En R se trouvait vissé un ajustage JJ présentant une ouverture pratiquée dans une plaque mince dont le plan passait par l'axe de rotation de l'appareil. Les robinets étant tenus ouverts, on laissait agir le poids ; au bout d'un certain temps le mouvement devenait uniforme, puis le régime définitif s'établissait ; on poussait alors un petit couteau dans ses glissières, et la section des deux

ils amenait la fermeture des robinets. Il ne restait plus qu'à mesurer la raréfaction produite en E par la force centrifuge et la raréfaction plus grande ou la compression en D suivant le sens dans lequel le mouvement avait eu lieu. Mais, l'action de la force centrifuge et la forme de l'instrument venant compliquer les résultats, les vérifications expérimentales ont dû être précédées d'une application de l'analyse.

*Action de la force centrifuge seule.*—Soient  $AF=r_0$ ,  $AC=r_1$  et  $w$  la vitesse à la circonférence; l'équation (32), évidemment applicable ici et dans laquelle, après le remplacement de  $r^2$  par  $r^2 - r_1^2$ ,  $p_2$  désigne la pression à l'orifice, c'est-à-dire la pression atmosphérique dans les expériences qui ont été faites, donne la pression  $p$  à une distance  $r$  du centre pendant le mouvement :

$$(38) \quad \log \frac{p}{p_2} = \frac{B w^2 (r^2 - r_1^2)}{r_1^2}.$$

Après le retour au repos, une pression uniforme s'établit dans tout le compartiment E; sa valeur s'obtient avec facilité, en exprimant que le poids de la masse gazeuse n'a pas changé en même temps que sa distribution. Cela donne, en supprimant les facteurs communs,

$$(39) \quad p' (r_1^2 - r_0^2) = \int_r^{r_1} 2 p r dr,$$

ou, en remplaçant (31)  $2 p r dr$  par  $\frac{r_1^2 dp}{B w^2}$ ,

$$(40) \quad p' = \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{p_2 - p_0}{B w^2}.$$

$p_0$  a la valeur fournie par l'équation (32), modifiée comme il

a été dit précédemment :

$$(41) \quad \log_n p_0 = \log_n p_2 - \frac{B w^2 (r_1^2 - r_0^2)}{r_1^2},$$

et si, pour simplifier, nous supposons l'appareil plongé dans une atmosphère où règne la pression normale  $\frac{p_2}{10333} = 1$ , on a

$$(42) \quad \log_n \frac{p_0}{10333} = - \frac{B w^2 (r_1^2 - r_0^2)}{r_1^2}.$$

*Action en avant.* — La pression sur la surface antérieure de l'ajutage étant désignée par  $p_1$  comme dans la méthode précédente, l'équation (34) donne

$$(43) \quad \log_n \frac{p_1}{10333} = B w^2.$$

Après la détermination de la constante pour le cas actuel, (32) fournit d'ailleurs la pression à la distance  $r$  du centre

$$(44) \quad \log_n \frac{p}{10333} = \frac{B w^2 r^2}{r_1^2},$$

et le moyen employé dans le cas précédent donne ensuite la pression  $p''$  après le retour au repos :

$$(45) \quad p'' = \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{p_1 - p'_0}{B w^2},$$

avec

$$(46) \quad \log_n \frac{p'_0}{10333} = \frac{B w^2 r_0^2}{r_1^2}.$$

La comparaison des formules (38), (42) et (43) prouve que, pendant le mouvement, la pression en atmosphères en un

point quelconque dans le compartiment D peut être obtenue en multipliant la pression à la même distance du centre dans le compartiment E par la pression  $\frac{p_1}{10\,333}$  à l'ouverture J de l'ajutage dont la longueur dans le sens du rayon est supposée négligeable; en particulier on a

$$p'_0 = \frac{p_1 p_0}{10\,333},$$

et alors (44) et (39) donnent

$$(47) \quad p'' = \frac{p_1 p'}{10\,333} \quad \text{ou} \quad \frac{p''}{p'} = e^{Bw^2}.$$

*Action en arrière.* — En conservant  $\frac{p_3}{10\,333} < 1$  pour désigner la pression sur la surface qui fuit, le théorème de la page 434 donne

$$(48) \quad \log_n \frac{p_3}{10\,333} = -Bw^2,$$

et la comparaison avec (42) prouve qu'on a la relation  $p_1 p_3 = 10\,333^2$  déjà obtenue. L'équation (32), quand on y détermine la constante de manière à avoir  $p = p_3$  pour  $r = r_1$ , devient

$$(49) \quad \log_n \frac{p}{p_3} = \frac{Bw^2(r^2 - r_1^2)}{r_1^2} \quad \text{ou} \quad \log_n \frac{p}{10\,333} = \frac{Bw^2(r^2 - 2r_1^2)}{r_1^2}.$$

Au repos la pression uniforme a pour valeur

$$(50) \quad p''' = \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{p_3 - p_0}{Bw^2},$$

avec

$$(51) \quad \log_n p''' = \frac{Bw^2(r_0^2 - 2r_1^2)}{r_1^2} = \log_n p'_0 + 2 \log_n p_3,$$

ou bien

$$(52) \quad p''_0 = p'_0 p_3^2 = p_0 p_1 p_3^2 = p_0 p_3.$$

La comparaison des équations (39), (50) et (51) donne encore un théorème fort simple analogue à ceux des cas précédents :

$$(53) \quad p''' = \frac{p' p_3}{10333} = p' e^{-B w^2}.$$

Enfin de (47) et (53) on tire la relation

$$(54) \quad p'^2 = p'' p''',$$

qui montre que, après le retour au repos, *la pression produite par la force centrifuge seule est moyenne proportionnelle entre les pressions produites par le mouvement en arrière et par le mouvement en avant.*

Les résultats qui précèdent ont été soumis à des vérifications expérimentales que je ne rapporterai pas ici en détail, parce que je n'y vois aucune utilité après ce que j'ai dit de la méthode exposée en premier lieu ; je répéterai seulement que les nombres, sans s'écarter trop de la vérité, sont en général beaucoup moins approchés, même après les corrections aux indications manométriques et les corrections rendues nécessaires par la longueur de l'ajutage, qui n'était réellement pas négligeable.

*Expériences sur la force centrifuge.* — Quoique les lois relatives à la force centrifuge soient depuis longtemps admises par tous les savants, l'appareil (fig. 80) offrait un moyen si facile de les soumettre à des vérifications expérimentales, que nous avons cru devoir en profiter. La corde sans fin a été tendue assez pour éviter tout glissement, puis on a laissé le poids, dont la course était considérable, produire un mouvement

uniforme, ce que le manomètre au dixième à alcool, précédemment désigné sous le nom de manomètre compteur à force centrifuge, indiquait très-bien ; alors un observateur a compté pendant une minute les tours de la corde sans fin, tandis qu'un autre observateur marquait l'indication du manomètre devenue constante ; la comparaison aux diverses vitesses avec les nombres fournis par la formule n'a jamais donné de différences surpassant 4 millimètres ( $\frac{1}{40}$  de millimètre de mercure d'après la manière ordinaire de compter les pressions). Pour déterminer le rapport entre le nombre de tours de la corde et celui du plateau, un mouvement lent et prolongé a été produit, pendant lequel deux personnes comptaient directement les deux nombres dont on avait besoin.

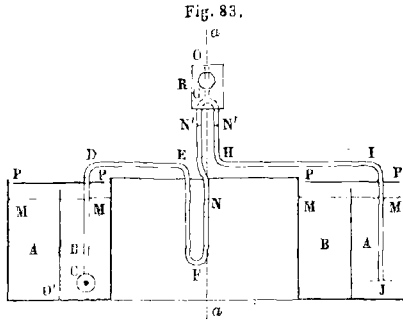
Pour des faibles vitesses, les valeurs de  $\frac{b}{10000 + G}$  se réduisent à  $\frac{b}{10000} = Bv^2$  ;  $b$  est proportionnel au carré de la vitesse. Il en résulte que si en G on remplace l'ajutage par le bouton qui fermait l'ouverture  $K'$  dans les expériences précédentes, les deux manomètres de l'appareil fourniront pour  $b$  des valeurs doubles l'une de l'autre si les distances de  $K'$  et de G au centre sont entre elles comme 1 et  $\sqrt{2}$ . Cette loi s'est encore très-exactement vérifiée.

EXPÉRIENCES SUR LA VITESSE D'ÉCOULEMENT DES LIQUIDES  
PAR DES ORIFICES EN MINCES PAROIS.

Quoique dans l'état actuel de la science elles soient beaucoup moins utiles, nous avons tenu à faire pour les liquides, en prenant l'eau comme exemple, des expériences analogues à celles qui viennent d'être décrites pour les gaz. Après avoir constaté de nouveau, au moyen d'un appareil construit dans ce but, l'exactitude des lois connues depuis longtemps et relatives

à l'action perpendiculaire et à l'action oblique d'un courant liquide sur une surface plane, nous avons encore comparé l'action normale avec la force centrifuge dans un mouvement de rotation. Un calcul tout semblable à celui qui a été fait pour les gaz montre que ces deux actions se font équilibre et cela permet l'emploi d'un appareil analogue à celui de la *fig. 80*, p. 431.

Un tube CDEFNGO (*fig. 83*) est assujéti à tourner autour d'un



axe vertical *aa* auquel une manivelle est adaptée. Ouvert par les deux bouts, ce tube se termine en C par une armature verticale percée d'une petite ouverture en son centre et qui tourne dans un espace annulaire BB rempli de liquide jusqu'en M. Le tube lui-même est plein de C en N. Pendant la marche, le courant exerce en C une pression ayant pour mesure (théorème de la p. 434) la hauteur H due à la vitesse  $w$ ; la force centrifuge tend au contraire à faire sortir le liquide, et la pression qui en provient a pour mesure  $\frac{w^2}{2g}$ . Or l'équilibre a lieu à toutes vitesses; ces deux quantités sont donc égales, et la formule usuelle

$$(55) \quad \frac{w^2}{2g} = H$$

se trouve confirmée par une expérience dont le succès est

complet quand on empêche la rotation du fluide au moyen d'une cloison qui ne présente que l'ouverture indispensable pour le passage du tube et de son armature.

Dans la rotation en sens contraire, la dépression en C, pour les faibles vitesses essayées, égale l'action due à la force centrifuge, et l'effet total a pour mesure  $2H$ . Pour démontrer expérimentalement cette seconde partie du théorème (p. 434), on a employé en même temps que le tube CDENO, le tube rayon opposé JIHO terminé en J par une armature horizontale plongeant dans le liquide d'un second compartiment annulaire AA qui communique avec BB par l'ouverture O'. Les distances à l'axe des points C et J sont entre elles comme 1 et  $\sqrt{2}$ .

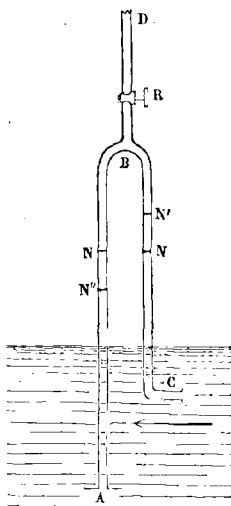
On élève le liquide par aspiration jusqu'en N'N', on ferme le robinet R qui supprime toute communication extérieure directe, et on procède à l'expérience. Pendant le mouvement, les deux niveaux en N' et N' éprouvent des abaissements égaux très-faibles provenant d'une légère dilatation de l'air qui remplit le siphon au moyen duquel les deux tubes communiquent ensemble ; puis l'équilibre se maintient. L'action de la force centrifuge en HI a pour mesure  $2H$  ; en ED sa mesure est H ; la dépression en C a donc bien pour mesure  $2H - H = H$ .

En J l'armature horizontale est nécessaire pour empêcher une succion analogue à celle que j'ai décrite pour les gaz (p. 428) ce qui altérerait profondément les résultats. L'emploi de ces disques minces, dont j'ai remarqué la grande utilité en étudiant la loi du cosinus carré, peut être utile dans d'autre cas. Par exemple, l'appareil de Pitot perfectionné par M. Darcy renferme un tube ABC (fig. 84) dans lequel on peut, par une aspiration, faire monter l'eau jusqu'en NN où elle se maintient ensuite à cause de la fermeture du robinet R. Si le liquide dans lequel plonge l'instrument est en repos, on observe égalité de niveau dans les deux branches ; s'il existe, au contraire, un courant dans le sens indiqué par la flèche, l'eau monte en N', descend



en  $N''$ , et la différence de niveau  $H$  donne pour valeur de la

Fig. 84.



vitesse cherchée

$$(56) \quad w = \sqrt{2gH}:$$

du moins c'est ce que la théorie indique. En réalité, on est obligé de se servir d'un coefficient de correction particulier pour chaque appareil, sans parvenir encore à obtenir des indications bien exactes. J'ai pensé que l'emploi des armatures ferait disparaître les anomalies, et c'est ce qui a eu lieu : après leur efficacité complète dans l'appareil (*fig. 84*), on n'en pouvait déjà plus douter. Le tube de Darcy, modifié de la sorte, rendra certainement désormais de bons services pour la mesure de la vitesse des cours d'eau, sans qu'on ait besoin d'employer un coefficient de correction déterminé par des expériences préalables. Quand on veut mesurer une compo-

sante de la vitesse, l'armature C est aussi indispensable que l'armature A.

RÉSISTANCE QUE LES GAZ OPPOSENT AU MOUVEMENT.

Lorsqu'un solide se meut dans un gaz, la résistance qu'il doit vaincre est évidemment égale à la pression qu'il éprouverait au repos s'il recevait l'action du fluide se mouvant avec la même vitesse et dans la même direction mais en sens contraire ; de sorte qu'il est impossible d'étudier théoriquement ou par expérience l'une de ces questions sans l'autre. L'importance de ce sujet est si grande que les hommes les plus éminents s'en sont occupés : Newton, Daniel Bernouilli, d'Alembert, Euler, Smeaton, Coulomb et beaucoup d'autres se sont efforcés d'y appliquer le calcul ou bien d'arriver par l'observation à des résultats dignes de confiance. Toutefois le peu d'accord qu'on trouve entre eux semble indiquer qu'il est nécessaire de soumettre cette partie de la mécanique à un nouvel examen, et de lui donner, s'il se peut, des bases plus solides.

Le théorème démontré précédemment p.434 et confirmé par expérience dans les pages suivantes fournit la valeur théorique de la résistance dans le cas d'un disque qui se meut perpendiculairement à la surface. Pour maintenir le mouvement uniforme, il faut vaincre à chaque instant l'excès de la pression en avant sur la pression en arrière, c'est-à-dire qu'il faut employer une force ayant pour expression

$$(57) \quad (p_1 - p_2)S,$$

S étant la surface d'une des bases du disque exprimée en mètres carrés ;  $p_1$  et  $p_2$  sont donnés par les équations (34) et (35). Pour les vitesses faibles, on peut remplacer

$$\log_n \left[ 1 + \left( \frac{v_1}{10333} - 1 \right) \right]$$

par

$$\frac{p_1}{10333} - 1,$$

et l'expression (57) devient, en prenant pour unité la tension  $\frac{p_2}{10333}$  du milieu et en tenant compte de (36),

$$(58) \quad \frac{274 \times 1,3 \cdot D}{g(274 + \theta)} S w^3 \quad \text{ou} \quad B_1 S w^3.$$

La résistance est donc :

- 1° proportionnelle à la surface ;
- 2° proportionnelle au carré de la vitesse ;
- 3° proportionnelle à la densité du fluide ;
- 4° en raison inverse du binôme de dilatation  $274 + \theta$ .

Pour le cas particulier où le mouvement s'effectue dans l'atmosphère à 10 degrés sous la pression normale, on a

$$(59) \quad \log B_1 = \log \frac{1,3 \times 274}{g(274 + 10)} = 0,1272.$$

Si l'on suppose  $S = 1$  et  $w = 6$ , on obtient pour valeur de la résistance  $4^{\text{kil}},58$ . Borda et Hutton ont trouvé par expérience  $4^{\text{kil}},87$  ; mais, avec les moyens employés par ces savants, une erreur relative de  $\frac{1}{34}$  a bien pu être commise dans la vitesse, et elle suffit pour expliquer cette différence.

Mariotte a donné  $0^{\text{kil}},179$  pour la pression exercée sur  $0^{\text{m}},105$  par un vent de  $3^{\text{m}},898$  ; la théorie conduit au nombre  $0^{\text{kil}},20294$ , et la différence de sens opposé à la précédente s'expliquerait par une erreur de  $\frac{1}{17}$  dans la mesure de la vitesse. Au lieu de  $0^{\text{kil}},20294$  l'emploi des équations rigoureuses (34) et (35) conduit à  $0^{\text{kil}},20299$ , ce qui prouve que le calcul simplifié fournit une approximation plus que suffisante. Quand la vitesse

atteint 20 mètres, l'erreur n'est encore que de  $\frac{1}{1200}$  de la valeur trouvée 50<sup>kil</sup>,88 par mètre carré; mais, pour une vitesse de 400 mètres, le résultat obtenu en remplaçant le logarithme par le premier terme de son développement est plus de 9 fois trop petit. Il faut alors conserver l'expression exacte

$$(60) \quad 10\,333S (e^{Bw^2} - e^{-Bw^2}).$$

Un officier de la marine française, M. Thibault, a fait aussi un grand nombre d'expériences sur l'action de l'air en mouvement; la disposition ingénieuse de ses appareils et ses précautions délicates pour éviter les erreurs l'ont conduit à rejeter quelques conclusions fausses admises par ses devanciers. A l'époque où il a entrepris son travail, on n'avait point encore tous les moyens d'observation en usage aujourd'hui, aussi trouve-t-il pour la valeur de B, le nombre 0,1151 trop faible de  $\frac{1}{10}$ . L'emploi du mouvement de rotation a pu causer cette différence, beaucoup moindre du reste que certaines erreurs commises précédemment par ceux qui n'ont pas eu, comme M. Thibault, l'attention de tenir compte de ce que les variations de distance à l'axe, des diverses parties de la surface choquée par l'air, influent beaucoup sur les résultats.

*Remarque.* — Plusieurs auteurs ont avancé que la pression due à l'action perpendiculaire du vent sur une plaque n'est pas égale à celle qu'on observe quand cette plaque se meut perpendiculairement dans l'air en repos avec la même vitesse. Les différences observées tiennent sans doute à ce qu'ils n'ont pas employé un véritable courant indéfini. La quantité qu'il s'agit de mesurer est la somme d'un accroissement de pression en avant et d'une diminution en arrière; si le courant peut être considéré comme indéfini, la colonne d'air située derrière la

plaque ne pourra être en repos : le frottement s'y opposerait à défaut d'autre cause. Une dépression derrière la plaque en est la conséquence évidente ; il en résulte que les filets de vent se replient de manière à y reformer le courant complet à *une distance suffisante*. Si, au lieu d'un courant indéfini, on emploie un jet de gaz débouchant dans l'atmosphère, la plaque produit la divergence des filets dont la vitesse décroît d'ailleurs rapidement à mesure qu'ils s'avancent ; le courant ne peut se reformer derrière l'obstacle ; on observe un phénomène différent et plus compliqué.

Quand il s'agit d'une surface plane oblique, on se borne à considérer la composante normale de la vitesse, ce qui conduit à changer dans les expressions (58) et (59)  $w^2$  en  $w^2 \cos^2 \alpha$  ; la valeur de la résistance devient pour les faibles vitesses

$$(61) \quad B, S w^2 \cos^2 \alpha,$$

et, pour les grandes vitesses,

$$(62) \quad 10333 S (e^{B w^2 \cos^2 \alpha} - e^{-B w^2 \cos^2 \alpha}).$$

Mais il n'est pas certain, surtout pour les grandes vitesses, que la composante de la vitesse parallèle à la plaque n'altère aucunement les effets de la composante normale.

Smeaton dans ses recherches expérimentales sur l'eau et le vent, donne, aux nos 1, 2, 3, 4, p. 41, dans la huitième colonne du tableau, pour valeurs de la résistance de l'air agissant sur les quatre ailes de son petit moulin à vent quand la roue ne tourne pas, les nombres

$$12,59 \quad 7,56 \quad 8,12 \quad 9,81.$$

En tenant compte de l'obliquité indiquée dans la troisième

colonne et exprimant les kilogrammes en livres anglaises, l'expression (61) donne

$$12,32 \quad 6,89 \quad 8,36 \quad 9,68.$$

Les différences sont les unes en plus, les autres en moins ; les erreurs relatives

$$\frac{1}{18} \quad \frac{1}{10,3} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{74}$$

sont peu considérables, et on doit regarder ces résultats, ainsi que les précédents, comme confirmant la théorie autant qu'elle peut l'être par des expériences faites à des époques où les appareils laissaient beaucoup à désirer. Cet accord est d'ailleurs beaucoup plus satisfaisant que si l'on avait seulement montré *à priori* la proportionnalité entre la résistance et le carré de la vitesse ; car ici la valeur même de

$$(63) \quad B_1 = \frac{274 \times 1,3 \cdot D}{g(274 + \theta)}$$

est établie en dehors de toute expérience relative à la résistance de l'air. Il est très-utile au progrès de la science de déterminer ainsi, toutes les fois que cela est possible, non pas seulement la forme des expressions algébriques des quantités qu'on étudie, mais aussi les valeurs des paramètres. En les calculant à l'aide de quelques-uns des résultats que la formule doit donner, on se prive de la meilleure vérification, et, si les expériences n'embrassent pas une grande étendue, l'expression théorique, traitée ainsi comme les formules empiriques, peut, surtout lorsqu'elle renferme plusieurs coefficients, fournir des résultats approchés sans qu'il y ait lieu à y voir une confirmation des raisonnements et des calculs.

*Application au mouvement des projectiles.* — Supposons qu'un cylindre ayant pour longueur  $l$  et  $Q$  pour poids du mètre cube se meuve parallèlement à ses génératrices à peu près horizontalement dans l'atmosphère sous la pression ordinaire  $\frac{p_2}{10333} = 1$ . La résistance à vaincre (57), (36) est  $S(p_1 - p_2)$  ou  $S\left(p_1 - \frac{1}{p_1}\right)$ : la masse du mobile est  $\frac{Qsl}{g}$ , et on en conclut pour valeur de l'accélération

$$(64) \quad -\frac{dw}{dt} = \frac{g\left(p - \frac{1}{p}\right)}{Qt}.$$

D'ailleurs, si l'on appelle  $z$  l'espace parcouru, on a

$$(65) \quad dz = w dt,$$

et l'on peut, en y joignant la différentielle de (34)

$$(66) \quad \frac{dp}{p} = \frac{274 \times 1,3}{10333g(274 + \theta)} w dw,$$

éliminer  $w$  et  $dw$ , ce qui donne

$$(67) \quad -dz = \frac{Qt(274 + \theta)}{274 \times 1,3} \frac{dp}{p^2 - 1}.$$

La pression initiale et la pression finale en avant étant désignées par  $p'$  et  $p''$ , on en conclut

$$(68) \quad z = \frac{MQl(274 + \theta)}{2 \times 274 \times 1,3} \left( \log \frac{p'' + 1}{p'' - 1} - \log \frac{p' + 1}{p' - 1} \right).$$

$M$ , qui a pour logarithme 0,362 2157, est le module au moyen

duquel on remplace les logarithmes népériens par les logarithmes ordinaires.

Ainsi le passage de la tension en avant  $p'$  à la tension  $p''$  a lieu dans un parcours dont la longueur est :

1° proportionnelle à la densité du projectile par rapport au gaz ;

2° proportionnelle à sa longueur ;

3° proportionnelle au binôme de dilatation  $274 + \theta$ .

Comme exemple, soient  $\theta_1 = 0$  ;  $l = 0,1$  ;  $Q = 7200$  (fonte) et  $p' = 600$ . On a pour logarithme du coefficient

$$\log \frac{0,1 \cdot M Q l}{2 \times 1,3} = 2,80686,$$

et pour valeur du second terme de  $z$  le nombre 0,9230.

Si on attribue ensuite à  $p''$  les valeurs

$$60 \quad 10 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 1\frac{1}{2},$$

on trouve pour les valeurs de  $z$  correspondantes

$$8,36 \quad 54,94 \quad 112 \quad 192 \quad 305 \quad 447.$$

Quand le projectile a parcouru ces nombres de mètres, la vitesse initiale 1001,3 est réduite à

$$801,1 \quad 600,8 \quad 502,4 \quad 414,5 \quad 329,6 \quad 252,1.$$

Au début le mobile perd 200 mètres de vitesse dans un espace de 8<sup>m</sup>,36, tandis qu'à la fin il ne perd plus que 77<sup>m</sup>,5 dans un parcours de 142 mètres.

Considérons maintenant un projectile cylindrique terminé en avant par un cône ayant pour demi-angle au sommet ( $90^\circ - \alpha$ ), et calculons la valeur de  $z$  en appliquant aux élé-



ments triangulaires de la surface conique la loi du cosinus carré. La tension de la couche d'air en contact avec la surface du cône est donnée (p. 435) par l'équation

$$(69) \quad \log \frac{p}{10333} = B w^2 \cos^2 \alpha \quad \text{ou} \quad \left( \frac{p}{10333} \right)^{\cos^2 \alpha} = e^{B w^2},$$

d'où l'on déduit

$$(70) \quad w \, dw = \frac{1}{2 B \cos^2 \alpha} \frac{dp}{p}.$$

Dans le sens de l'axe du cylindre, on a en avant pour pression résultante,  $S$  étant toujours la section droite,

$$(71) \quad S p.$$

En arrière rien n'est changé; la tension est  $e^{-B w^2}$  ou  $\left( \frac{p}{10333} \right)^{-\cos^2 \alpha}$  et la pression en kilogrammes

$$(72) \quad S p^{-\frac{1}{\cos^2 \alpha}};$$

de sorte que la résistance à vaincre pour le projectile a pour expression

$$(73) \quad S \left( p - p^{-\frac{1}{\cos^2 \alpha}} \right).$$

Si on nomme  $l$  la hauteur du cylindre augmentée du tiers de la hauteur du cône, le poids sera encore  $Q l S$ , et l'accélération due à la résistance de l'air,

$$(74) \quad -\frac{dw}{dt} = \frac{g}{Q l} \left( p - p^{-\frac{1}{\cos^2 \alpha}} \right),$$

multipliée et divisée par  $w$ , donnera très-facilement la valeur de  $z$  en fonction de  $p$  par la simple substitution de  $w \, dt$  et  $w \, dw$

tirés de (65) et (70); on trouve

$$(75) \quad dz = -\frac{Ql(274+0_1)}{274 \times 1,3 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \frac{dp}{p^2 - p^{-\tan^2 \alpha}}.$$

Pour rendre plus facile une application numérique, supposons  $\alpha = 45$  degrés et conservons d'ailleurs les données de la page 452. L'intégration conduit à la formule

$$(76) \quad z = \frac{2Ql(274+0_1)}{3 \times 274 \times 1,3} \left( \log_n \frac{\sqrt{p^2+p+1}}{p-1} + \sqrt{3} \cdot \text{arc tang} \frac{\sqrt{3}}{2p+1} \right)_{p=p'}^{p=p''}.$$

Pour une vitesse de  $849^m,6$  l'équation (69) et le tableau de la page 421 prouvent qu'on a  $p = \sqrt{100} = 10$ ; la substitution dans le second membre de (76) donne alors pour résultat 164. Voici le tableau de résultats analogues trouvés de la même manière :

$\left(\frac{p}{10333}\right)^2$	$\frac{p}{10333}$	$w$	$z$	$\left(\frac{p}{10333}\right)^2$	$\frac{p}{10333}$	$w$	$z$
1,01	1,005	39,5	2843	1,8	1,342	303,5	1227
1,02	1,010	55,7	2585	1,9	1,379	317,2	1185
1,03	1,015	68,1	2433	2,0	1,415	329,6	1148
1,04	1,020	78,4	2325	2,1	1,450	341,0	1115
1,05	1,025	87,5	2242	2,2	1,484	351,6	1085
1,06	1,030	95,6	2173	2,3	1,517	361,3	1058
1,07	1,035	103,0	2107	2,4	1,550	370,4	1033
1,08	1,040	109,8	2065	2,5	1,582	379,0	1009
1,09	1,045	116,2	2020	2,6	1,613	387,0	988
1,1	1,049	122,2	1988	2,7	1,644	394,6	968
1,2	1,096	169,0	1730	2,8	1,674	401,7	949
1,3	1,141	202,8	1581	2,9	1,703	408,5	932
1,4	1,184	229,6	1476	3	1,733	414,5	915
1,5	1,225	252,1	1396	5	2,237	502,4	706,6
1,6	1,265	271,4	1330	100	10	849,6	164
1,7	1,304	288,4	1275	1000	31,63	1040,6	52,6

A l'aide de ces nombres, les applications se font immédiatement; par exemple, les deux dernières lignes montrent, au moyen de deux soustractions, que la vitesse initiale étant 1040,6

un parcours de 112 mètres la diminue de 191 mètres. Si la vitesse initiale est seulement de 303,5 pour qu'elle subisse une diminution de 194 mètres à peu près, il faut un parcours de 838 mètres, environ 8 fois plus considérable.

On emploie en réalité des projectiles dont la partie antérieure, coupée par un plan conduit suivant l'axe de figure, donne une section ogivale dont j'examinerai l'influence un peu plus loin. Quoiqu'on ne puisse nullement la confondre avec un cône, elle se rapprocherait plutôt cependant du cône, pour lequel on a

$$\tan^2 \alpha = 6 \quad \text{ou} \quad \alpha = 67^{\circ} 47',$$

que de celui qui vient d'être étudié. Pour cette nouvelle valeur de l'obliquité et pour une longueur réduite  $l = 0,14$ , l'intégration donne une formule plus compliquée, dont les coefficients sont faciles à modifier quand la valeur de  $l$  est autre :

$$(77) \quad z = \left( a \log \frac{p+1}{p-1} + b \log \frac{p^2+p\sqrt{2}+1}{p^2-p\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2} c N - \frac{1}{2} d N' \right)_{p=p'}^{p-p''};$$

$$\log a = 3,19601; \quad \log b = 3,04550; \quad \log c = \bar{1},44805; \quad \log d = \bar{1},59856.$$

$N$  désigne le nombre des minutes contenues dans l'arc qui a pour tangente  $\frac{p\sqrt{2}}{p^2-1}$  et  $N'$  dans l'arc qui a pour tangente  $p$ .

Il a été tenu compte du module, et les logarithmes indiqués sont des logarithmes ordinaires. Pour une vitesse choisie à volonté, on obtient d'abord la valeur de  $p$  au moyen de la relation précédemment établie :

$$(78) \quad \log \frac{p}{10333} = k w^3; \quad \log k = \bar{7},59749.$$

Voici les résultats obtenus pour diverses valeurs de  $w$ .

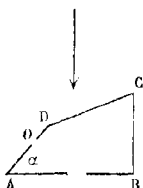
$w$	$\frac{p}{10333}$	$z$	PARCOURS qui fait perdre 1000 mètres de vitesse.	$w$	$p$	$z$	PARCOURS qui fait perdre 1000 mètres de vitesse.
$\infty$	$\infty$	-2143		500	1,2559	2287	483
1000	2,4878	51	415	400	1,1570	2771	530
900	2,0922	466	440	300	1,0855	3300	650
800	1,7919	906	456	200	1,0371	3950	1002
700	1,5630	1362	459	100	1,00915	4952	
600	1,3883	1820	467	50	1,00228	5912	

La théorie de la résistance de l'air, liée, comme on l'a vu dans tout ce qui précède, à celle de l'écoulement, est confirmée par les expériences faites avec l'appareil décrit p. 431. Pendant que la plaque de l'ajutage marche en avant ou en arrière, le tube rayon qui communique par un bout avec le tube de l'ajutage et par l'autre avec le manomètre, sert à opérer une prise d'air en un point de la surface qui se meut et à mesurer la tension pendant le mouvement. Quoique cela puisse paraître superflu, j'ai voulu expérimenter le cas du cône qui vient d'être étudié analytiquement. Nous avons fixé sur la plaque de l'ajutage la base d'un cône creux construit avec  $\alpha = 45$  degrés et présentant une très-petite ouverture, puis nous avons constaté que, pendant la marche, la tension à la surface de ce modèle de projectile était bien celle qu'indique la loi du cosinus carré. Le manomètre compteur marquant par une ascension de 80 millimètres une vitesse d'environ 35 mètres, l'autre manomètre a donné 43; l'erreur relative  $\frac{1}{14}$  était négligeable, car les faibles dimensions du cône ne permettaient pas d'espérer une précision plus grande. Dans le mouvement de recul du cône, on a obtenu 40 avec 65; l'erreur relative est  $\frac{1}{12}$ .

Jusqu'à présent je n'ai considéré que les phénomènes simples: l'air rencontrait une surface plane perpendiculairement ou obli-

quement, puis il s'échappait vers les bords sans pouvoir ensuite agir directement ou indirectement sur d'autres parties du corps. Pour des surfaces différentes, il se manifeste des perturbations dont la cause est facile à apercevoir ; par exemple, la *fig.* 85 représente la section droite d'un prisme quadrilatéral

Fig. 85.

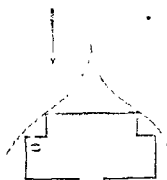


creux qui a été substitué au cône employé dans l'expérience précédente ; la face AB collée sur l'ajutage passait par l'axe de l'appareil et les arêtes étaient perpendiculaires au plateau ; une prise d'air était faite en O où l'on avait  $\alpha = 45$  degrés. Dans la marche en avant, on devait obtenir la moitié seulement de l'effet dû à la force centrifuge, puisque  $\cos^2 45 = \frac{1}{2}$  ; le manomètre compteur donnant 80, le second manomètre aurait dû indiquer 40. On a trouvé 61 à deux reprises, et cette anomalie avait été prévue ; l'air dont l'action s'exerçait sur la face CD, pour laquelle  $\alpha$  était moitié moindre, empêchait, en s'échappant vers l'arête D, l'action des filets de vent qui devaient rencontrer AD et tendait même à produire sur cette face une dépression. Le résultat obtenu n'a donc rien qui puisse surprendre ; mais il prouve l'existence de perturbations qui ne permettent point de décomposer, comme on l'a fait jusqu'ici, les surfaces courbes en éléments pour appliquer à chacun d'eux la loi du cosinus carré, à moins qu'on ne se trouve évidemment dans un cas particulier où l'action troublante n'existe pas, comme cela arrive pour le cône se mouvant dans la direction de son axe.

Dans le mouvement en arrière du prisme, il n'y a pas eu de perturbation sensible.

On a monté ensuite sur l'ajutage une pièce creuse dont la section est représentée *fig. 86* de grandeur naturelle.

Fig. 86.



Elle était composée de deux cylindres ayant un axe commun parallèle au plateau et perpendiculaire au rayon. Un trou était pratiqué en O dans une surface plane annulaire sur laquelle le vent paraissait devoir exercer son action maximum. Je présu- mais que la nappe formée par le vent dévié par la base du cy- lindre antérieur protégerait cet endroit contre toute action di- recte, qu'elle servirait de paravent très-efficace ; c'est en effet ce qui a eu lieu, comme le prouvent les résultats suivants :

Manomètre compteur :

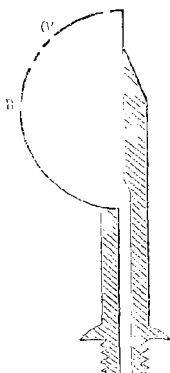
20	40	50	60	70	80	90	100	110
19,8	38,6	48,4	58,4	69,6	80	90,4	100,2	110,2.

On voit même que, pour les grandes vitesses, une raréfaction est produite, sans doute parce que les filets divergents entraînent par frottement une partie de l'air contenue dans l'es- pace angulaire situé au-devant de l'anneau sur lequel la prise d'air a été faite. Cette expérience pourra faire disparaître une partie des difficultés que les savants ont rencontrées dans l'é- tude de la résistance de l'air.

Il était intéressant d'étudier la résistance que l'air oppose aux projectiles usités. Un ajutage terminé par une demi-sphère creuse, représenté *fig. 87* de grandeur naturelle, a été percé de

plusieurs trous très-petits, qu'on bouchait, sauf un, pour opérer

Fig. 87.



successivement des prises d'air en différents points de la surface; les manomètres étaient inclinés au cinquième et contenaient de l'alcool, on prenait 5 millimètres pour 1.  $\beta$  désignant la distance du point B où la direction du vent rencontre perpendiculairement la surface, à l'ouverture O' par laquelle la demi-sphère communique avec l'extérieur, voici les résultats obtenus:

$$\beta = 25^\circ.$$

Manomètre compteur :

20 40 50 60 70 80 90 100,

Manomètre de l'ajutage :

8 15 20 24 28 32 36 38.

$$\beta = 35^\circ.$$

Manomètre compteur :

20 40 50 60 70 80 90,

Manomètre de l'ajutage :

15 29 37 44 52 60 68.

$$\beta = 45^\circ.$$

Manomètre compteur :

20 40 50 60 70 80 90 100,

Manomètre de l'ajutage :

21,4 41,4 55 66,4 78 89,6 101,4 113.

$$\beta = 80^\circ.$$

Manomètre compteur :

20 40 50 60 70,

Manomètre de l'ajutage :

35 70 89 107 125.

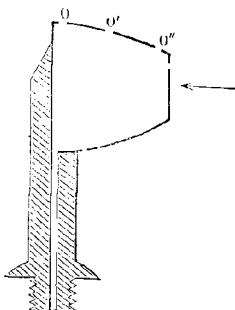
Ainsi qu'on devait s'y attendre d'après ce qui précède, ce n'est que sur une *portion* de la surface antérieure d'un boulet en mouvement que l'air possède une force élastique supérieure à la pression atmosphérique ; à 80 degrés la raréfaction est considérable ; elle s'élève pour les faibles vitesses aux  $\frac{3}{4}$  de celle qui se produit en arrière où la surface est plane ; à 45 degrés on observe encore une dépression qui croît avec la vitesse. Cela prouve que le point de tangence O de la nappe d'air qui s'épanouit en avant du boulet correspond à une valeur de  $\beta$  comprise pour les faibles vitesses entre 40 et 45 degrés ; mais, pour les vitesses que la poudre communique aux projectiles, cette valeur de  $\beta$  est sans doute beaucoup moindre, et il n'est guère douteux que la surface sphérique, au lieu d'être en contact avec de l'air comprimé dans la moitié de son étendue, éprouve un accroissement de pression sur sa quinzième partie au plus.

Pour  $\beta = 0$  le manomètre de l'ajutage est resté à peu près stationnaire, ce qui marque une pression égale à celle due à la force centrifuge ; on a seulement observé un excès de  $0^{\text{mm}},8$ . Avec les vitesses employées, la pression s'est montrée environ les  $\frac{3}{5}$  de celle due à la force centrifuge pour  $\beta = 25$  degrés et le  $\frac{1}{4}$  pour  $\beta = 35$  degrés.



Enfin une balle creuse de la forme actuellement en usage, représentée de grandeur naturelle (*fig. 88*), a été aussi montée

Fig. 88.



sur un ajutage, et la prise d'air a été établie successivement en O, O' et O'' à  $1^{\text{mm}},5$  de la base postérieure, au milieu de la longueur et à  $1^{\text{mm}},5$  de la base antérieure; on a obtenu les résultats suivants :

En O.

Manomètre compteur :	20	40	50	60	70,
Manomètre de l'ajutage :	31	63	80	97	114.

En O'.

Manomètre compteur :	20	40	50	60	70,
Manomètre de l'ajutage :	32	64	82	99	117.

En O''.

Manomètre compteur :	20	40	50	60,
Manomètre de l'ajutage :	19,4	39	49,2	59,2.

On voit que la petite base supporte seule un excès de pression dont j'ai donné précédemment la valeur théorique. En O' la force élastique égale à peu près la pression atmosphérique; en O' et en O la dépression est, pour les faibles vitesses, environ la moitié de celle due à la force centrifuge. Toutefois, ce rapport

croît avec la vitesse, et cela tient à ce que la *nappe-paravent* entraîne par frottement, avec plus d'efficacité à mesure que la vitesse augmente, l'air contenu dans l'espace qui la sépare des flancs de la balle; n'ayant pu produire des vitesses de 300 mètres, il nous a été impossible de décider par des mesures directes jusqu'où cette raréfaction peut aller en balistique.

Sur la petite base antérieure la pression au milieu est celle que la théorie indique; mais à 1 millimètre du bord, on a trouvé un peu moins: le manomètre de l'ajutage a indiqué une dépression de 9 millimètres quand le manomètre compteur a marqué 80.

*Application à un obus oblong de 4.*— Son poids y compris la charge est de 4 kilogrammes; le diamètre de sa petite base est de 0<sup>m</sup>,036; celui de la grande base 0<sup>m</sup>,084. La forme est à peu près celle de la balle qui vient d'être étudiée. En appelant R la résistance effective et  $x$  la perte de vitesse dans un parcours de 100 mètres, on a

$$R = \frac{4}{100g} w x, \quad \log \frac{4}{100g} = 3,61044.$$

Des expériences qui ne donnent point une précision suffisante pour cette discussion ont fourni le nombre 5 pour  $x$  lorsque  $w$  est compris entre 225 et 166; cette valeur est 8 quand  $w$  est entre 316 et 284. On en conclut

	$R = 10^{\text{kil}}, 3$	9,2	4,5	4,1,
pour	$w = 316$	284	225	203.

D'un autre côté si l'on calcule la résistance pour un cylindre de même diamètre que la base antérieure, on trouve

$R = 14,3$	11,3	6,9	5,6;
------------	------	-----	------

les différences sont

4,0	2,1	2,4	1,5.
-----	-----	-----	------

Les tensions sur la grande base ont pour valeurs en atmosphères

$$0,5287 \quad 0,5974 \quad 0,7231 \quad 0,7690.$$

Si les différences sont dues à ce que les pressions sur les flancs sont moindres qu'en arrière, elles doivent être

$$0,4431 \quad 0,5525 \quad 0,6718 \quad 0,7369.$$

*Mouvement entretenu uniforme malgré la résistance de l'air.*

—Lorsqu'une surface plane d'un mètre carré se meut perpendiculairement avec une vitesse  $w$  dans l'atmosphère en repos, la résistance (57), (36) a pour expression  $p - \frac{1}{p}$  et le travail nécessaire pour entretenir le mouvement uniforme égale

$$(79) \quad \left(p - \frac{1}{p}\right) w \text{ kgm.} \quad \text{ou} \quad \left(p - \frac{1}{p}\right) \frac{w}{75} \text{ chev.}$$

Si la valeur de  $w$  est considérable, on fait usage de la relation (34) et l'on trouve, pour  $\theta_1 = 0$  et  $p = 10\,333$ :

$$80\,000\,000 \quad 6\,400\,000 \quad 800\,000 \quad 130\,000 \text{ chev.,}$$

quand on suppose  $w$  égal à

$$1\,000 \quad 800 \quad 600 \quad 400 \text{ mètres.}$$

Dans le cas où la vitesse ne dépasse point celles en usage sur les chemins de fer, on peut employer l'expression plus simple (58), et le travail nécessaire est donné par la formule

$$(80) \quad B_1 w^3 \text{ kgm.} \quad \text{ou} \quad \frac{B_1 w^3}{75} \text{ chev.,}$$

avec

$$\log \frac{B_1}{75} = \log 0,001\,696 = \bar{3},22\,944.$$

$w = 10$  donne alors  $1^{\text{ch}},7$ . Au reste, d'après ce qui a été dit

précédemment, il ne suffit pas, pour obtenir la résistance qu'éprouve un train, de multiplier ce résultat par le nombre de mètres carrés contenus dans la section de ce train déterminée au moyen des règles connues; la question est compliquée et mériterait une étude spéciale dans laquelle on ferait varier la forme de la partie du train la plus avancée; des manomètres appropriés à la circonstance serviraient à déterminer pendant la marche, au moyen de prises d'air faites successivement dans tous les points utiles à examiner, les tensions nécessaires pour les calculs à l'aide desquels on arriverait à connaître la disposition la meilleure.

*Chute dans l'air. Vitesse limite.* — Considérons un cylindre qui se meut de haut en bas parallèlement à ses arêtes dans l'atmosphère en repos et en vertu de la pesanteur seule: la résistance qu'il éprouve a pour expression  $S \left( p - \frac{1}{p} \right)$  et son poids est  $QSl$ . Au début, la vitesse croît, et par suite la résistance; pour trouver la vitesse limite, il faut évidemment égaler les deux forces antagonistes, et on a l'équation

$$p - \frac{1}{p} = Ql,$$

à laquelle il faut joindre

$$\log \frac{p}{10333} = Bw^2.$$

Si la vitesse finale est faible, on arrive à une formule plus simple;  $b$  désignant toujours comme précédemment  $10000 \left( \frac{p}{10333} - 1 \right)$ , on trouve en négligeant  $\left( \frac{p}{10333} - 1 \right)^2$ ,

$$b = 1000 Bw^2,$$

et par suite

$$(81) \quad w^2 = \frac{Ql}{2 \times 10333B} = \frac{gQl(274 + \theta)}{274 \times 1,3.D} = \frac{gQl(274 + \theta)}{274Q}.$$

La vitesse limite est :

- 1<sup>o</sup> proportionnelle à la racine carrée de la densité du solide ;
- 2<sup>o</sup> proportionnelle à la racine carrée de la longueur du cylindre ;
- 3<sup>o</sup> proportionnelle à la racine carrée du binôme de dilatation du gaz ;
- 4<sup>o</sup> enfin proportionnelle à l'inverse de la racine carrée de la densité de ce gaz.

*Des moulins à vent.* — Quand la roue d'un moulin à vent est en repos, l'action que le vent exerce sur elle se calcule facilement au moyen de la formule (58), et on a vu (p. 449) que les résultats théoriques s'accordent avec ceux que Smeaton a obtenus dans ses expériences. Il paraît naturel de calculer de la même manière l'action sur la roue quand elle se meut, sauf à employer la vitesse relative, comme l'a fait Coriolis, à qui l'on doit la théorie de ce genre de machines. Ce savant s'est borné, suivant l'usage de l'époque, à calculer une formule avec paramètre déterminé après coup, de manière à la faire accorder à peu près avec les observations. J'ai regardé comme très-utile de partir de la valeur de  $B$ , que j'ai établie théoriquement et que Coriolis connaissait par expérience, afin de comparer les résultats donnés *à priori* par le calcul avec ceux de la pratique.

Smeaton, dans le tableau déjà cité p. 449, détermine par expérience le travail maximum et l'inscrit dans la neuvième colonne ; je vais le mettre en regard du travail calculé pour les mêmes circonstances :

NUMÉROS.	$\alpha$	TRAVAIL		RAPPORTS.
		PAR EXPÉRIENCE.	CALCULÉ.	
2	120	441	198	2,2
3	15	464	183	2,5
4	18	462	161,5	2,9
1	35	318	74	4,3

On voit que pour l'airage 12 degrés le résultat du calcul est plus de deux fois trop petit, et lorsque l'airage est 35 degrés, ce rapport augmente encore beaucoup et devient supérieur à 4. Il y a donc désaccord complet entre les indications de la théorie et les nombres de Smeaton trouvés dans les expériences où la roue tourne.

L'explication de cette anomalie apparente n'est pas difficile: on a eu tort jusqu'à présent de confondre deux cas bien distincts, celui où le régime peut s'établir et celui où cela est impossible. Les raisonnements, les calculs et les expériences qui précèdent sont relatifs au premier cas; ici, au contraire, la rotation des ailes amène sans cesse chacun de leurs éléments dans une nouvelle position où le vent soufflait sans obstacle: cet élément reçoit à chaque instant *le choc* de molécules gazeuses animées de toute leur vitesse au lieu de *la pression* qu'il éprouverait s'il était en repos et si, le régime étant établi, l'air coulait sur les flancs concaves de la proéminence d'air dont il a été question plus haut.

Le même désaccord se remarque quand on compare avec les indications théoriques la formule usuelle

$$0,13 S w^3 \text{ kgm},$$

qui sert à calculer le travail produit, et dans laquelle S désigne la surface de l'une des ailes évaluée en mètres carrés. En mettant à part le facteur  $S w^3$ , la théorie donne pour expression du coefficient

$$(82) \quad \frac{4 \times 1,3 \sin^3 \alpha \omega}{r_1 - r_0} \frac{\omega}{w} \left[ \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \cot^2 \alpha - \frac{2 \omega}{3 w} (r_1^3 - r_0^3) \cot \alpha + \frac{\omega^2}{w^2} \frac{r_1^4 - r_0^4}{4} \right],$$

$r_1$  désignant le rayon de la roue,

$r_0$  la partie de ce rayon voisine du centre, qui n'est pas couverte de toile,

$\omega$  la vitesse angulaire.

L'expérience ayant montré que les meilleures valeurs de  $\alpha$  et de  $\frac{\omega}{w}$  sont 15 degrés et  $\frac{2,6}{r_1}$ , introduisons ces nombres dans

l'expression (82), ainsi que la valeur ordinaire  $\frac{2}{13}$  du rapport  $\frac{r_0}{r_1}$ : le coefficient devient, tout calcul fait,

$$0,0554.$$

L'expérience a conduit les praticiens à adopter le nombre 0,13, qui le contient 2,35 fois, ce qui diffère peu du résultat fourni par les expériences en petit de Smeaton indiquées plus haut.

On doit donc cesser d'appliquer aux cas où le régime ne s'établit point de la manière indiquée plus haut ce qui est démontré théoriquement ou par expérience pour le cas contraire, et par suite considérer l'étude des roues à vent comme une chose qui doit être reprise.

Ces remarques seront très-utiles dans beaucoup d'autres questions de mécanique relatives aux gaz et aux liquides, par exemple pour expliquer l'action des rames, la natation et aussi le vol des oiseaux. Cette dernière question d'ailleurs a été traitée à un point de vue qui n'est pas complètement exact: le travail nécessaire pour empêcher la chute n'est pas aussi grand qu'on l'a dit.

L'influence de l'établissement du régime a été rendue très-évidente par une expérience sur une petite roue à vent placée à l'un des bouts du fléau d'une balance. Pendant l'action du courant très-constant produit au moyen du ventilateur mû par le poids, on mesurait la pression parallèle à l'axe, alors que la rotation de la roue était empêchée par un fil; puis, ce

fil ayant été coupé, on rétablissait l'équilibre, et pour cela il fallait augmenter de sa moitié environ le poids précédent. Les résultats étaient très-appreciables ; dans l'une des expériences on a eu 30 et 45 grammes. Chaque aile se composait d'une partie non inclinée et d'une portion inclinée de moins grande étendue servant à produire la rotation ; pour celle-ci, il aurait fallu tenir compte, après la section du fil, de la diminution de vitesse relative du vent, ce qui eût augmenté la différence observée ; mais l'appareil n'était pas disposé de manière à permettre de compter les tours.

On a aussi préparé une roue à quatre ailes non inclinées qu'on laissait tomber en assurant la verticalité de la chute au moyen d'un fil tendu passant par son axe ; on a compté les temps employés par elle à descendre sans tourner et en tournant avec une rapidité qu'on essayait de rendre la même dans diverses expériences ; pour la hauteur de chute et les dimensions d'ailes employées, ces temps se sont trouvés à peu près dans le rapport de 4 à 6.

*Résistance opposée au mouvement par les liquides.* — La résistance opposée à une plaque qui se meut perpendiculairement à sa surface dans un liquide est évidemment, comme pour les gaz, la somme de l'accroissement de pression en avant et de la dépression en arrière produits par le mouvement. Pour les vitesses faibles, elle a donc pour mesure une colonne 2H. La valeur en kilogrammes à employer en mécanique est par conséquent  $2 Q' S H$  ou

$$(83) \quad \frac{Q'S}{g} w^2 ;$$

elle est :

- 1<sup>o</sup> proportionnelle à la surface ;
- 2<sup>o</sup> proportionnelle au carré de la vitesse ;
- 3<sup>o</sup> proportionnelle à la densité du liquide qui sous le volume d'un mètre cube a pour poids  $Q'$ .



Les expériences de vérification ont été décrites p. 443. Ici comme pour les gaz, le coefficient du carré de la vitesse est déterminé par la théorie indépendamment de toute expérience sur la résistance elle-même. Il y a tant de ressemblance d'ailleurs entre les phénomènes de ce genre relatifs aux liquides et aux fluides élastiques, que je crois inutile de reproduire, avec quelques modifications légères, ce qui a été dit plus haut. Je ferai seulement remarquer que la vitesse limite d'un cylindre qui tombe parallèlement à ses génératrices s'obtient au moyen de l'équation

$$(84) \quad w^2 = \frac{Q \, l \, g}{Q'}$$

Ainsi la formule (81), en y faisant  $\theta = 0$ , car ici j'ai négligé l'influence de la température, est applicable aux liquides, et les lois que suit la vitesse limite sont les mêmes pour tous les fluides.

#### TRANSMISSION DU SON.

Ainsi que M. Regnault l'a dit dans ses Mémoires à diverses reprises, les gaz eux-mêmes ne sont point *parfaitement* élastiques; d'ailleurs l'écoulement des gaz et la transmission du son dans leur intérieur ne peuvent s'effectuer sans chocs internes; il résulte de là que ces phénomènes sont accompagnés de transformation de force vive en chaleur. Je pense qu'il est très-difficile, et même impossible dans l'état actuel de la science, de tenir compte de ces pertes dont l'influence heureusement peut être négligée sans inconvénient grave dans une première approximation; de même que pour l'écoulement et la résistance des fluides, il va en être fait complètement abstraction dans l'étude qui va suivre.

Bornons-nous à considérer le cas d'un tuyau horizontal d'un mètre carré de section plein d'un gaz quelconque dans lequel

se propagent, perpendiculairement à l'axe, des ondes alternativement condensées et raréfiées. Supposons les frottements négligeables, admettons les lois de Mariotte et de Gay-Lussac et faisons une section verticale en un point A d'une onde où la vitesse de propagation est  $W$ , celle des molécules gazeuses  $w$ ; soient, comme précédemment,  $\theta$  la température et  $p$  la pression en kilogrammes par mètre carré. A une distance  $dx$  en A', faisons une seconde section dans laquelle  $w$ ,  $p$ ,  $\theta$  présenteront des accroissements  $dw$ ,  $dp$ ,  $d\theta$ , et soit  $dt$  le temps nécessaire pour que la propagation qui a lieu de A vers A' ait rendu propres à la section A' les quantités applicables d'abord à la section A. On aura évidemment

$$(85) \quad dx = W dt.$$

Pendant le temps  $dt$ , l'accroissement du volume  $dx$  de la tranche est  $dw dt$ , et cela suffit pour que les formules connues de la théorie mécanique de la chaleur (p. 83) donnent la variation de température

$$(86) \quad \frac{d\theta}{274 + \theta} = (k - 1) \frac{dw dt}{dx};$$

$k$  est le rapport de la capacité à pression constante à la capacité à volume constant.

D'ailleurs, pendant ce temps  $dt$ , la masse de la tranche ne change pas; cette circonstance s'exprime en égalant les produits des pressions par les volumes et par les inverses des binômes de dilatation, ce qui donne après réductions

$$(87) \quad \frac{dp}{p} dx = \frac{dx d\theta}{274 + \theta} - dw dt.$$

Enfin, toujours pendant le même temps, la force vive gagnée par la tranche égale le travail obtenu en multipliant la différence

de pression  $dp$  par le chemin parcouru  $w dt$  en présence duquel disparaît l'accroissement  $dw dt$  de  $dx$ . On a donc encore la relation

$$(88) \quad w dp dt = \frac{274 \times 1,3 \cdot Dpw dx dw}{g(274 + \theta)}$$

En combinant les équations qui précèdent, on en tire sans peine plusieurs formules utiles faisant connaître trois des quantités  $p, w, \theta, W$  en fonction de la quatrième. La formule connue

$$(89) \quad W = \sqrt{\frac{10333 g k}{1,3}} \sqrt{\frac{274 + \theta}{274}} = 332,4 \sqrt{\frac{274 + \theta}{274}},$$

applicable à la transmission dans l'atmosphère, en fait partie; mais  $274 + \theta$  et  $W$  sont légèrement variables d'un bout à l'autre d'une onde, de sorte que son sens n'est pas tout à fait celui qu'on y attache. Si, en un point particulier, à l'extrémité de l'onde par exemple,  $\theta_0$  désigne la valeur que prend  $\theta$ , on a

$$(90) \quad W_0 = 332,4 \sqrt{\frac{274 + \theta_0}{274}},$$

et le sens de la formule ordinaire se trouve mieux précisé. Si l'on désigne par  $p_0, w_0$  les valeurs particulières que prennent  $p$  et  $w$  au même point, on trouve encore les équations

$$(91) \quad W - W_0 = \frac{w - w_0}{2},$$

$$(92) \quad \frac{W}{W_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{2k}}.$$

Elles font voir comment les variations légères de la vitesse de propagation sont liées avec les vitesses des molécules et avec la

pression. La seconde donne déjà une certaine approximation lorsqu'on la remplace par

$$(93) \quad \frac{W - W_0}{W_0} = \frac{1}{2k} \frac{p - p_0}{p_0}.$$

On aperçoit de suite les conséquences qui résultent des variations de  $W$  pour la diminution d'intensité du son à mesure que la distance augmente et aussi pour le défaut de symétrie des ondes. Toutefois la diminution d'intensité tient principalement aux chocs internes.

La température et la pression en chaque point sont liées par l'équation

$$(94) \quad \frac{p}{p_0} = \left( \frac{274 + \theta}{274 + \theta_0} \right)^k;$$

la vitesse des molécules et la pression par la relation

$$(95) \quad \frac{p}{p_0} = \left( 1 + \frac{w - w_0}{2W_0} \right)^{2k}.$$

Pour presque tous les calculs d'approximation, il est mieux d'employer des formules contenant les différences

$$(96) \quad \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{k(\theta - \theta_0)}{274 + \theta_0} = \frac{k(w - w_0)}{W_0}.$$

$W$  diffère peu de  $W_0$ ; nous arrivons donc en dernier lieu à la loi suivante :

*Le rapport de la variation de vitesse des molécules à la vitesse de propagation est proportionnel à l'excès de pression ; il égale le quotient qu'on obtient en divisant cet excès par le produit de la pression et du nombre  $k$  dont la valeur pour l'air est 1,41.*

---

## CHAPITRE XI

### TENDANCE DE TOUT SYSTÈME MATÉRIEL AU REPOS ABSOLU OU RELATIF.

---

Pendant longtemps on a considéré les corps comme tendant par nature au repos, de telle sorte que, même en l'absence de tout obstacle, la vitesse d'un mouvement non entretenu par une force décroîtrait sans cesse et finirait par s'éteindre. Aujourd'hui nous connaissons mieux les lois qui régissent la matière ; nous savons que, si un travail s'opère, un autre travail égal, moléculaire ou non, est produit, à moins qu'il ne naisse une force vive moléculaire ou non moléculaire ; et réciproquement, si une force vive disparaît, une force vive égale apparaît ou bien un travail devient disponible. Des rapports d'équivalence incontestables permettent d'appliquer une même mesure à ces diverses quantités et de dire que, dans un système matériel quelconque isolé, leur somme ne peut varier sans que ce fait constitue une véritable dérogation aux lois de la nature ; par suite, le repos absolu, s'il n'existe pas d'abord, ne peut s'y produire ; c'est en cela que consiste le premier principe de la théorie mécanique de la chaleur, ou principe de l'équivalence. Mais, si l'on veut bien faire abstraction des mouvements dont l'observation directe est impossible, tels que les mouvements des particules matérielles constituant la chaleur, le repos absolu relatif du système après un certain temps devient possible. Il y a plus, si l'on tient compte du second principe fondamental de la théorie mécanique de la chaleur, on peut démontrer qu'un système quelconque tend sans cesse vers cet

*état*; c'est en ce sens restreint que l'ancienne opinion doit être conservée.

Pour établir ce théorème, concevons que le système supposé existant seul soit arrivé à l'équilibre de température, après la transformation en chaleur de tous les travaux disponibles et de toutes les forces vives; il y aura repos absolu dans les parties visibles et non dans les atomes. Soit  $t_1$  la température: imaginons, en dehors du système, une machine thermique périodique-réversible fonctionnant sans chute et mise en rapport avec un immense réservoir à  $t_1$  et aussi avec un volant pourvu d'une force vive plus que suffisante.

Cela posé, reprenons le système dans son état initial et admettons qu'on amène, à l'aide de cette machine qui peut fonctionner dans les deux sens, qui peut fournir du travail en recevant de la chaleur ou de la chaleur en recevant du travail, le système donné, à l'état de repos qui vient d'être défini; d'après l'hypothèse il n'aura rien perdu ni gagné, et, d'après le principe de l'équivalence, il en sera de même du réservoir à  $t_1$  et du volant considérés ensemble. Mais une certaine quantité de chaleur aura été perdue par le réservoir, tandis qu'une force vive équivalente aura été gagnée par le volant; c'est cette quantité que je nomme *distance de l'état actuel du système au repos* ou, pour abrégé, simplement *la distance*. Il existe des cas où le repos du système est possible avec plusieurs distributions différentes de la matière qui le compose; afin de préciser complètement la définition, je la rapporte à celle de ces distributions qui occasionne la plus grande transformation de chaleur à  $t_1$  en force vive emmagasinée dans le volant. Cette chaleur est d'ailleurs indépendante, d'après le principe de l'égalité de rendement, du choix et de l'ordre des opérations.

Considérons maintenant le système abandonné à lui-même; les changements qui s'y produisent ont lieu *sans chute* ou *avec chute*.

Dans le premier cas, *la distance demeure invariable*, puisque la machine accessoire peut ramener le système au point de départ sans que la force vive du volant varie.

Dans le second cas, *la distance diminue*. Pour le bien voir, il suffit de remarquer que la machine accessoire peut (44), p.39 (second principe fondamental), ramener *sans chute* le système au point de départ en perdant une force vive

$$Eq \frac{t_1 - t_2}{274 + t_2} - Eq \frac{t_1 - t_3}{274 + t_3} \quad \text{ou} \quad Eq \frac{T_1 (T_3 - T_2)}{T_3 T_2},$$

pour  $q$  calories tombées de  $t_3$  à  $t_2$ . La distance actuelle est donc l'excès de la distance primitive sur cette quantité; elle est *moindre*, et l'on sait de combien.

Dans tout système fini qui n'est point en repos relatif, il se produit sans cesse des chutes finies dans des temps finis, soit par rayonnement ou conductibilité, soit par des chocs ou des frottements. La distance qui ne peut être infinie tend donc à devenir nulle, à moins que le système ne rencontre un état d'équilibre de température et de repos relatif ou absolu qui arrête les chutes; ainsi le théorème est démontré.

*Limite supérieure de la distance.* — Non-seulement la distance ne peut être infinie comme il vient d'être dit; mais elle ne peut jamais atteindre le double de la somme des travaux disponibles et des forces vives. Afin de rendre la démonstration de cette vérité plus facile, considérons d'abord un cas particulier; supposons la température uniforme et égale à  $t_2 < t_1$  et supposons en outre des travaux disponibles et des forces vives non moléculaires ayant pour équivalent total  $q$  calories.

Pour atteindre sans chute l'état final servant à définir la distance, on pourra communiquer d'abord au volant la force vive du système et celle qui équivaut aux travaux disponibles; puis on portera, à l'aide de la machine, et toujours sans chute, le système entier à la température  $t_1$  en lui donnant  $q$  calories

fournies par le réservoir à  $t_1$ . Chaque élément  $dq$  dont se compose cette quantité de chaleur sera descendu par la machine de la température  $t_1$  à une température inférieure  $t$  comprise entre  $t_1$  et  $t_2$ . D'après la formule (44), p. 39, cela ne peut s'effectuer sans que le volant acquière aux dépens du réservoir à  $t$ , une force vive équivalente à

$$\frac{T_1 - T}{T_1} dq < dq.$$

Ainsi, en définitive, la force vive gagnée par le volant, c'est-à-dire *la distance*, est comprise entre  $q$  et  $2q$ .

Dans le cas général, on peut d'abord rendre la température uniforme et la chaleur déplacée pour cela sans chute fait gagner au volant pour chaque élément  $dq$  abaissé de  $t'$  à  $t''$  une force vive équivalente à

$$\frac{T' - T''}{T'} dq < dq.$$

On retombe ensuite dans le premier cas, et l'on peut affirmer que

*La distance est toujours moindre que le double de la somme des travaux disponibles dans le système et des forces vives ; elle est souvent moindre que cette somme.*

*Conclusion.* En ce qui concerne l'avenir :

*Tout système matériel tend vers le repos relatif ou absolu ; mais on ne peut généralement, dans l'état actuel de la science, indiquer le temps nécessaire pour qu'il atteigne son état final.*

En ce qui concerne le passé :

*Les mouvements relatifs observés actuellement dans un système matériel quelconque ont eu un commencement ; car, en supposant le contraire, il est toujours possible d'atteindre en arrière une époque assez éloignée pour que la somme des*



perdes de distance surpasse le double de la somme des forces vives et des travaux disponibles, ce qui est absurde.

Si l'on applique ces conclusions au monde matériel considéré dans son ensemble, on voit que l'existence des mouvements qui produisent les harmonies que nous admirons dans les œuvres du créateur, suffit pour prouver qu'ils ont eu un commencement extra-naturel et qu'ils tendent vers une fin naturelle.

Une partie des théorèmes de mécanique relatifs aux corps solides s'applique en toute rigueur, seulement à des corps rigides qui n'ont pas d'existence réelle; l'usage qu'on en fait en astronomie suppose négligeables les *perdes de distance* causées par les chutes continuelles. Ces pertes sont relativement faibles, il est vrai; mais elle s'accroissent avec le temps, et je suis convaincu que des observations bien dirigées, suffisamment précises et assez éloignées, finiront par mettre en lumière la tendance générale des corps vers le repos relatif ou absolu.

---

---

# TABLE DES MATIÈRES.

---

## CHAPITRE I. — Notions préliminaires.

	Pages.
Définitions.....	1
Indépendance des mouvements simultanés.....	3
<i>Mouvement rectiligne d'un point matériel</i> .....	3
Force vive.....	5
Travail.....	5
<i>Mouvement quelconque d'un point matériel</i> .....	6
Composition et décomposition des vitesses.....	6
Composition et décomposition des forces.....	8
Le travail de la résultante égale la somme des travaux des composantes.....	10
<i>Mouvement d'un système de points matériels</i> .....	11
Théorème des forces vives.....	11
Théorème de d'Alembert.....	11
Condition d'équilibre ou théorème des vitesses virtuelles.....	12
Théorème du mouvement du centre de gravité.....	12
Théorème des aires.....	13
Remarque sur les solides réels.....	16

## CHAPITRE II. — Principe de l'équivalence.

Équivalence des travaux et des forces vives.....	17
Extension du principe de l'équivalence. Expériences de vérification.....	20
Valeur la plus probable de l'équivalent mécanique de la chaleur.....	22
Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.....	23
Remarque sur le principe des vitesses virtuelles.....	24

## CHAPITRE III. — Chaleurs spécifiques.

Définitions.....	25
Loi des chaleurs spécifiques vraies pour les corps simples.....	28
Son extension aux corps composés.....	29
Chaleurs spécifiques à pression constante.....	33

## CHAPITRE IV. — Principe de l'égalité de rendement.

Définition des machines considérées.....	33
Énoncé du principe de l'égalité de rendement. Application simple..	36
Remarque sur ce second principe de la théorie mécanique de la chaleur.....	40
Équivalence de descentes sans chute et des ascensions.....	42
Machines à rendement maximum ou machines parfaites.....	43
Remarques sur le mouvement perpétuel.....	44

## CHAPITRE V. — Équations générales.

Application du principe de l'égalité de rendement à un corps quel- conque.....	46
Conclusion.....	49
Définition des températures.....	50
Dérivée du travail interne par rapport au volume.....	51
Corps dans lesquels le travail interne dépend du volume seul.....	51
Dérivée du travail interne par rapport à la température.....	52
Autres expressions des dérivées du travail interne.....	53
Changement de température dû à une compression.....	54
Détermination complète du rendement.....	56
Remarque sur l'application du second principe aux machines fonc- tionnant avec des chutes de chaleur.....	59

## CHAPITRE VI. — Théorie des gaz.

Loi des covolumes.....	61
Fonction de M. Regnault.....	62
Vérifications expérimentales.....	63
Condensation des gaz par l'attraction des solides.....	72
Covolumes de l'air, de l'hydrogène, de l'acide carbonique, de l'azote. Conclusion.....	76
Théorème à rejeter ainsi que ses nombreuses conséquences.....	81
Formules destinées à remplacer les formules usuelles quand une grande précision est nécessaire.....	82
Coefficients de dilatation.....	82
Changements de température dus à une compression. Expériences de vérification.....	83

## CHAPITRE VII. — Changements d'état.

Définitions.....	90
Application des deux principes fondamentaux.....	92

	Pages.
Formules générales .....	95
Formule de Clapeyron .....	96
Vérifications expérimentales. Première approximation .....	96
Formule exprimant la loi des tensions maximum. Applications. $\frac{1}{2}$	
Énoncé de la loi .....	97
Loi de Regnault .....	115
Loi des chaleurs latentes .....	117
Chaleurs latentes. Seconde approximation .....	121
Points correspondants .....	122
Application à l'eau .....	124
Autres applications. Conclusion .....	128
Détente des vapeurs avec travail complet .....	131
Seconde vaporisation .....	132
Changements d'état chimique .....	135
Remarque sur la théorie des changements d'état .....	139
Densités des vapeurs à saturation .....	141
Liquéfactions .....	142

#### CHAPITRE VIII. — Actions moléculaires. Attraction au contact.

Caractère des corps dans lesquels le travail interne dépend du volume seul .....	145
Attraction au contact. Définition. Théorème .....	145
Loi des attractions au contact des corps simples .....	149
Travail de désagrégation totale. Théorème .....	150
Autre démonstration du même théorème par M. Massieu .....	152
Loi du travail de désagrégation totale dans une substance dont le volume varie .....	157
Formule pour calculer le travail de désagrégation totale dans un corps quelconque .....	158
Recherche des valeurs du travail de désagrégation totale ou de l'attraction au contact dans les corps composés et dans les corps simples .....	159
Le groupement moléculaire n'influe pas sur les attractions à très-petites distances .....	161
Notations. Formules. Applications. Méthode pour calculer les attractions au contact .....	164
Cohésion de l'hydrogène à l'état solide .....	167
Le charbon en poudre très-fine est imperméable à l'hydrogène pur ..	168
Seconde loi des attractions au contact .....	169
Tableau des attractions au contact dans un grand nombre de corps simples ou composés .....	173
Extension et modification de la seconde loi des attractions au contact	177

**TABLE DES MATIÈRES.**

	481 Pages.
Conclusion.....	184
Applications. Chaleur latente du chlore et dérivée de sa tension maximum.....	184
Chaleur latente du carbone.....	185
Densité du gaz oléfiant à l'état liquide.....	185
Rapport de la chaleur latente et de la densité dans l'hydrogène et dans l'oxygène liquides.....	185
Loi des chaleurs latentes et loi de Regnault trouvées par les attractions au contact.....	186
Dans certains cas l'hypothèse que le travail interne dépend du volume seul ne donne point assez d'approximation. Chaleurs spécifiques calculées.....	187
Expansion des gaz ou vapeurs sans travail externe.....	189
Variations de température produites par les mélanges gazeux.....	193
Travail chimique.....	195
Première loi.....	196
Seconde loi. Applications.....	196

**CHAPITRE IX. — Actions moléculaires (suite). Capillarité.**

Travail de séparation perpendiculaire et par glissement. Force de réunion.....	206
Théorème fondamental.....	208
Force de contraction des couches superficielles.....	209
Cause de la force de contraction.....	210
Tout corps tend à prendre une surface minimum.....	211
Remarque sur le travail de désagrégation totale.....	211
Théorèmes sur les attractions au contact moyennes dans la couche superficielle.....	212
Démonstrations par M. Massieu des mêmes théorèmes au moyen du calcul direct des attractions.....	214
Vérifications expérimentales.....	226
Effets de la force contractile.....	226
Dynemètre.....	229
Première série d'expériences.....	232
Seconde série d'expériences.....	236
Troisième série d'expériences.....	241
Mesure des forces de réunion par la balance.....	245
Tableau des forces de réunion.....	251
Loi des forces de réunion des corps simples.....	252
Seconde loi.....	253
Extension et modification de la seconde loi des forces de réunion...	253
Notations. Méthode pour calculer les forces de réunion.....	255

	Pages.
Réflexions sur la loi de l'attraction.....	259
Forme de l'expression de l'attraction universelle.....	262
Cas des corps simples.....	263
Cas des corps composés.....	265
Remarque.....	265
Influence de la température sur les forces de réunion.....	266
Influence de la pression sur les forces de réunion.....	275
<i>Phénomènes capillaires. Pression normale en un point d'une surface</i>	
liquide en équilibre.....	279
<i>Phénomènes capillaires dans lesquels un seul corps agit sur lui-même.</i>	281
Ascension auprès d'un plan mouillé.....	281
Écoulement.....	283
Cylindre vertical en repos altéré par la pesanteur. Expériences de Simon de Metz.....	290
Hauteur maximum pour laquelle le cylindre se détache.....	294
Poids maximum soulevé et hauteur correspondante.....	295
Cas où, dans les expériences de Simon de Metz, la seconde courbure est négligeable.....	295
Étude de la surface capillaire.....	296
Hauteur maximum.....	298
Rencontre des lignes de gorge.....	300
Poids maximum. Angle limite.....	303
Rencontre des lignes de gorge avant que le poids soit maximum... ..	307
Fils flottants.....	311
Vérifications expérimentales.....	317
Tension dans l'intérieur des gouttes.....	318
Théorème de M. Bertrand. Autres théorèmes.....	320
Tableau des forces de réunion de neuf métaux.....	327
Écoulement par gouttes.....	327
Bulles.....	338
Vitesse avec laquelle une lame liquide disparaît quand on la crève..	350
Bulles qui se vident, Lois des durées de l'écoulement.....	353
Limite supérieure du rayon $\epsilon$ de la sphère d'attraction sensible.....	358
Volumes soulevés ou abaissés. Ascension dans les tubes.....	359
Surfaces liquides à températures non uniformes.....	364
Condition pour qu'un liquide mouille un solide.....	366
<i>Phénomènes capillaires dans lesquels plusieurs corps agissent les uns</i> <i>sur les autres.....</i>	368
Tension dans une goutte liquide environnée d'un liquide différent... ..	368
Diffusion.....	372
Tendance d'un liquide à passer à la surface d'un mélange dont il fait partie.....	376

TABLE DES MATIÈRES.

483

	Pages.
Diffusion de l'alcool dans l'eau.....	379
Endosmose.....	382
Équilibre d'une lame solide dans un liquide qui ne la mouille point..	386
Ascension d'un liquide dans un tube non mouillé.....	390
Ascension d'un liquide entre deux lames non mouillées.....	391
Angle de raccordement.....	392
Colonne liquide soutenue dans un tube isolé.....	394
Attractions et répulsions apparentes.....	396
Sur l'unité de la substance matérielle.....	399
Récapitulation des lois qui donnent les équivalents.....	401
Limite du nombre des molécules par millimètre cube.....	403
Note.....	404

CHAPITRE X. — Écoulement et résistance des fluides.  
Transmission du son.

Écoulement des fluides et en particulier des gaz.....	406
Écoulement des gaz dans le vide. Théorèmes sur les densités et les vitesses finales.....	408
Application de la théorie mécanique de la chaleur à l'étude de l'écoulement des fluides et en particulier des gaz.....	415
Conclusion. Formule logarithmique. Cas auquel elle s'applique.....	418
Formule de Bernouilli.....	419
Formules de M. Zeuner.....	422
Écoulement des gaz dans les circonstances ordinaires. La vitesse est comprise entre les deux valeurs fournies par la formule logarithmique et la formule de M. Zeuner.....	424
<i>Expériences sur la vitesse d'écoulement des gaz par des orifices en minces parois.....</i>	<i>425</i>
Expériences préalables relatives à l'action d'un courant de gaz sur une surface plane.....	426
Expériences sur la vitesse d'écoulement d'un gaz par des orifices en minces parois. Théorèmes divers.....	431
Autre méthode. Théorèmes divers.....	437
Action perpendiculaire d'un courant de gaz sur une surface plane. Compression en avant. Raréfaction en arrière.....	439
<i>Expériences sur la vitesse d'écoulement des liquides par des orifices en minces parois.....</i>	<i>442</i>
Expériences préalables sur l'action d'un liquide sur une surface plane.	443
Expériences sur la vitesse d'écoulement d'un liquide par des orifices en minces parois.....	443
Tube de Pitot modifié.....	444

	Pages.
<i>Résistance que les gaz opposent au mouvement.</i> —Théorie.....	446
Application au mouvement de projectiles.....	454
Cas des surfaces brisées ou courbes.....	457
Mouvement entretenu uniforme malgré la résistance de l'air.....	463
Chute dans l'air. Vitesse limite.....	464
Des moulins à vent.....	465
Expérience pour prouver l'influence de l'établissement du régime... ..	467
<i>Résistance opposée au mouvement par les liquides.</i> .....	468
Chute dans les liquides. Vitesse limite.....	469
<i>Transmission du son.</i> Cas d'un tuyau horizontal indéfini de très-grand diamètre. Formules.....	469
 CHAPITRE XI. — Tendance de tout système matériel au repos absolu ou relatif.....	 473

## IN DE LA TABLE DES MATIÈRES.