Tome II, volume 6. **Fascicule 1.**

ENCYCLOPÉDIE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME II (SIXIÈME VOLUME),

CALCUL DES VARIATIONS. COMPLÉMENTS.

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

H. BURKHARDT ET **W. WIRTINGER**

(MUNICH) (VIENNE).

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG
B. G. TEUBNER

1913

(15 SEPTEMBRE)

Tome II; sixième volume; premier fascicule.

Sommaire.

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple, n'échappera à personne.

Fascicules sous presse:

Tome I, vol. 1: **Groupes finis discontinus,** fin (H. Burkhardt — H. Vogt). — **Additions et modifications.** — **Renseignements bibliographiques.** — **Index.**

Tome I, vol. 2: **Invariants,** fin (F. Meyer — J. Drach).

Tome I, vol. 3: **Applications de l'Analyse à la Théorie des nombres,** fin (P. Bachmann J. Hadamard — E. Maillet). — **Corps algébriques** (D. Hilbert — H. Vogt). — **Multiplication complexe** (H. Weber — E. Cahen.)

Tome I, vol. 4: **Économie politique mathématique,** fin (V. Pareto). — **Jeux** (W. Ahrens — C. A. Laisant).

Tome II, vol. 1: **Calcul intégral** (A. Voss — J. Molk).

Tome II, vol. 2: ***Fonctions analytiques*** (*W. F. Osgood — P. Boutroux — J. Chazy*).

Tome II, vol. 3: **Fonctions sphériques,** fin (A. Wangerin — A. Lambert — P. Appell). — **Fonctions sphériques à plusieurs variables** (P. Appell — A. Lambert).

Tome II, vol. 5: **Groupes continus de transformations** (H. Burkhardt — L. Maurer — E. Vessiot).

Tome III, vol. 1: **Notions de courbe et surface,** fin (H. von Mangoldt — L. Zoretti). — **Méthodes analytiques et synthétiques** (G. Fano — S. Carrus). — **Géométrie énumérative** (H. G. Zeuthen — M. Pieri).

Tome III, vol. 2: **Géométrie projective** (A. Schoenflies — A. Tresse). — **Configurations** (E. Steinitz — E. Merlin).

Tome III, vol. 3: **Coniques,** fin. **Faisceaux de coniques** (F. Dingeldey — E. Fabry). — **Courbes planes algébriques** (L. Berzolari).

Tome III, vol. 4: **Quadriques** (O. Staude — A. Grévy).

Tome IV, vol. 1: **Principes de la mécanique rationnelle** (A. Voss — E. Cosserat — F. Cosserat). — **Mécanique statistique** (P. et T. Ehrenfest — E. Borel.)

Tome IV, vol. 2: **Cinématique,** fin (A. Schoenflies — G. Koenigs). — **Mécanismes** (Grübler — G. Koenigs). — **Statique graphique** (L. Henneberg — H. Vergne).

Tome IV, vol. 3: **Appareils physiques les plus simples** (Ph. Furtwängler — A. Guillet)

Tome IV, vol. 6: **Balistique extérieure** (C. Cranz — E. Vallier). — **Balistique intérieure** (C. Cranz — C. Benoit). — **Développements concernant des recherches de Balistique exécutées en France** (F. Gossot — R. Liouville).

Tome IV, vol. 7: **Équations fondamentales de l'élasticité** (C. H. Müller — A. Timpe — L. Lecornu). — **Intégration des équations différentielles de l'élasticité** (O. Tedone — R. Garnier).

Tome V, vol. 1: **Mesure** (C. Runge — Ch. Ed. Guillaume).

Tome V, vol. 2: **Atomistique** (F. W. Hinrichsen — M. Joly — J. Roux). — **Stéréochimie** (L. Mamlock — J. Roux). — **Épures des cristaux** (Th. Liebisch — F. Wallerant).

Tome V, vol. 3: **Principes physiques de l'électricité; action à distance** (R. Reiff — A. Sommerfeld — E. Rothé).

Tome V, vol. 4: **Principes physiques de l'optique; anciennes théories** (A. Wangerin — C. Raveau.)

Tome VI, vol. 1: **Triangulation géodésique.** — **Mesure des bases et nivellement.** — **Déviation de la verticale** (P. Pizzetti — L. Noirel).

Tome VII, vol. 1: **Horloges et chronomètres** (E. Caspari). — **Mesure des angles** (F. Cohn — J. Mascart).

II 31. CALCUL DES VARIATIONS.

EXPOSÉ, D'APRÈS LES ARTICLES ALLEMANDS DE **A. KNESER** (BRESLAU),
E. ZERMELO (ZURICH) ET **H. HAHN** (CZERNOWITZ),
PAR **M. LECAT** (BRUXELLES).

Position de la question.

1. Objet du calcul des variations. Le calcul des variations a pour objet des problèmes d'*extrémés*[1]), c'est-à-dire de maximés et de minimés, de nature plus compliquée que les questions d'*extrémés ordinaires*[2]) dont s'occupe le calcul différentiel [II 3, **27** à **30**]. Celui-ci permet de déterminer les valeurs d'une ou de plusieurs variables *(géométriquement, des coordonnées de certains points)* pour lesquelles une fonction donnée de ces variables acquiert la plus grande ou la plus petite valeur. *Mais déjà la question géométrique fondamentale du plus court chemin entre deux points et celle de la courbe brachistochrone[3]), quoique résolues d'abord par *Jacques Bernoulli* et *L. Euler* par les méthodes du calcul différentiel ordinaire, ne peuvent être traitées d'une manière rigoureuse et complète que par d'autres théories.*

Le calcul des variations consiste dans la recherche des conditions dans lesquelles ont lieu les extrémés d'une quantité, qui peut être une intégrale définie (c'est le cas le plus fréquent), la solution d'une

---

1) *Le terme „extremum" a été employé pour la première fois par *P. du Bois-Reymond* [Math. Ann. 15 (1879), p. 564] pour désigner „maximum ou minimum" quand la distinction est inutile ou impossible [Cf. II 3, 27]. Au lieu de maximum, minimum, extremum, nous dirons toujours maximé, minimé et extrémé, ce qui, dans bien des cas, est plus avantageux [cf. II 3, **27** en partic. note 258].*

2) **D. Hilbert,* dans un cours professé à l'Université de Göttingue en 1904/5, a posé un problème d'extrémé qui comprend aussi bien celui du calcul des variations que celui des extrémés ordinaires: étant donné un ensemble infini d'êtres mathématiques quelconques a, b, ..., à chacun desquels on fait correspondre un nombre réel N_a, N_b, ..., il s'agit de déterminer quel est l'individu de l'ensemble qui correspond au plus grand ou au plus petit nombre.*

3) *Voir, au sujet de ces problèmes de géométrie, le dernier chapitre du présent article qui est consacré aux Applications du calcul des variations.*

équation différentielle, etc., dépendant de fonctions à déterminer[4]). *On fait donc jouer à des fonctions le rôle attribué, en calcul différentiel, à des variables. On peut toutefois envisager les questions de variations comme étant relatives aux extrémés de fonctions d'une infinité de paramètres[5]).*

Le calcul des variations est aujourd'hui considéré comme un cas particulier du calcul fonctionnel[6]). Cette conception, faisant apparaître des horizons nouveaux, semble appelée à jouer un rôle particulièrement important.

---

4) *Il existe des problèmes d'extrémé qui ne concernent ni le calcul différentiel, ni le calcul des variations; *P. L. Čebyšëv* [J. math. pures appl. (2) 13 (1868), p. 9/42; Œuvres 2, publ. par *A. A. Markov* et *N. J. Sonin*, St Pétersbourg 1907, p. 3/40, traduit du russe en français par *N. de Khanikov*] s'est occupé de telles questions. Il montre que si des conditions limitent la forme des fonctions inconnues, leur détermination, en vue d'extrémer (c'est-à-dire de maximer ou minimer) une intégrale, ou en *général* une somme quelconque Σ de valeurs, exige des procédés autres que ceux du calcul des variations. Il considère le cas (renfermant, entre autres applications, la solution de la question de l'interpolation parabolique d'après la méthode des moindres carrés) où la *fonction inconnue* y est supposée un polynome de degré donné, où tous les termes de la somme proposée Σ s'expriment au moyen de cette fonction, de ses dérivées et d'une variable indépendante, et forment une fonction également entière et de forme déterminée. Si Σ se réduit à une *intégrale*, on peut, d'après *P. L. Čebyšëv*, considérer le polynome comme valeur approchée de la fonction obtenue par le calcul des variations; mais, alors que ce calcul conduit notamment à intégrer une équation différentielle, la recherche du polynome revient à *remplir une condition* qui ne s'exprime pas par des équations de forme connue, d'où les procédés spéciaux de *P. L. Čebyšëv*, qui utilise les fractions continues. Voir aussi *P. L. Čebyšëv*, J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 157/60; Œuvres 2, p. 183/5; *A. Livenzov*, Mat. Sbornik (recueil Soc. math. Moscou) 10 (1879/82), mém. n° 1; *A. A. Markov*, O někotorych priloženijach algebraičeskich nepreryvnych drobej, Diss. St Pétersbourg 1884; Soobščěnija Charĭkovskago matěmatičeskago Obščestva 1882, p. 95/104; (2) 1 (1888), p. 250/76; Math. Ann. 24 (1884), p. 172 80; 47 (1896), p. 579 97; Acta math. 9 (1886/7), p. 57/70; 28 (1904), p. 243 302; Ann. Éc. Norm. (3) 3 (1886), p. 81 8; *C. A. Possé*, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, Paris 1886; Soobščěnija Charĭkovskago matěmatičeskago Obščestva [communic. Soc. math. Kharkov] 1885, p. 35/8; Math. Ann. 26 (1886), p. 593/6; *H. Liebmann*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 18 (1909), p. 433 49.*

5) *Récemment, *D. Hilbert* [n° **3**] a repris l'idée d'une analyse à une infinité de variables indépendantes.*

6) *C'est à ce point de vue que s'est placé le plus possible *J. Hadamard* dans ses Leçons sur le calcul des variations 1, Paris 1910 [Cours du Collége de France 1908], où un chapitre (p. 280/312) est consacré au calcul fonctionnel. Voir la préface de ces Leçons. Pour des *généralités* au sujet des rapports entre le calcul des variations et le calcul fonctionnel, voir encore l'Enseignement math. 14 (1912), p. 1 18, extrait de l'ouvrage: Hommage à Louis Olivier, Paris 1911, publié par la Revue générale des sciences.*

2. Problèmes fondamentaux. *On considère l'intégrale simple

$$J \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(p_1)}; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(p_2)}; \ldots; y_n, y_n', \ldots, y_n^{(p_n)})\, dx,$$

f étant une fonction connue de ses arguments; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des fonctions inconnues de x, se présentant avec leurs dérivées jusqu'à celles d'ordres $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Le plus souvent $n = 1$[7]) ou $p_i = 1$; on écrira alors respectivement J_p ou U_n; si $n = p = 1$, on écrira J_1.

L'intégrale J_p a joué un rôle important dans l'histoire du calcul des variations, bien qu'elle ne se présente guère, pour p quelconque, dans les applications géométriques ou mécaniques.

Le problème de Lagrange offre beaucoup plus d'intérêt. Il consiste à trouver les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ extrémant l'intégrale U_n, les fonctions inconnues satisfaisant à des équations dites *accessoires* ou *auxiliaires*, qui peuvent se présenter sous forme finie, cas des géodésiques, de l'intégrale hamiltonienne, ..., ou sous forme différentielle, cas de la brachistochrone dans un milieu résistant.

Ce problème est souvent appelé *problème le plus général* (par opposition au *problème le plus simple*, relatif à J_1), bien qu'il puisse être considéré comme cas particulier du *problème de Mayer*[8]), consistant à extrémer la solution d'une équation différentielle dans certaines conditions.

Dans le problème de Lagrange rentre le *problème isopérimétrique*[8]), où les équations accessoires expriment que des intégrales, prises entre les mêmes limites que celle à extrémer, ont des valeurs données. C'est le cas de la courbe fermée de longueur donnée et d'aire maximée. Dans ces différents problèmes, les limites d'intégration x_1 et x_2 peuvent être fixes et données, ou bien elles doivent être recherchées de manière à satisfaire à des conditions imposées.

Pour les intégrales multiples, on peut distinguer différents cas analogues.

Ces problèmes, qui font l'objet du calcul des variations, peuvent être divisés en deux catégories suivant que le nombre m des équations auxiliaires est nul ou ne l'est pas (il est en tout cas plus petit que n). Nous dirons, avec *J. Hadamard*[9]), que l'extrémé est *libre* lorsque les

---

7) *Si $n = 1$, on a, géométriquement, le cas du plan. Si $n = 2$, on a des problèmes de variations spatiaux; *J. L. Lagrange* et *W. R. Hamilton* [Trans. Irish. Acad. (Dublin) 16 (1830), p. 1 64] furent les premiers à en traiter.*

8) *Il y a toutefois une restriction à faire [voir plus loin n^os **39**, **48**].*

9) *Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907), p. 204; Calcul des variations[6]), voir en

fonctions cherchées sont soumises à des conditions qui, à l'exception de certaines conditions de régularité, sont exclusivement relatives aux valeurs de ces fonctions en des points en nombre fini. Dans ce cas, m est nul. L'extrémé est, au contraire, *lié* lorsqu'il y a des conditions portant sur l'ensemble des valeurs des fonctions inconnues (problèmes isopérimétrique, de Lagrange, de Mayer).*

Dans les problèmes tels qu'ils viennent d'être considérés, x est la variable indépendante. L'introduction d'un paramètre t pouvant présenter des avantages, on considère aussi, avec *K. Weierstrass*, les problèmes où l'intégrale est prise sous *forme paramétrique* [n° **12**]. *On écrira alors[10], par exemple pour J_1,

$$J_1^{(t)} = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt.$$

La manière dont on a à définir les fonctions (géométriquement, les variétés) acceptables, dépend de la nature du problème, mais l'intégrale doit toujours, pour ces fonctions, conserver une valeur finie.

On admet le plus souvent que f, fonction uniforme réelle de variables réelles, a des dérivées premières et secondes continues[11]) et que les y ont des dérivées premières continues[12]), sauf peut-être en des points isolés, entre les limites données x_1 et x_2. Ce sont les hypothèses classiques.

Il y a un cas où le problème de la recherche des extrémés de U_n [pour J_p, voir n° **11**] ne se pose pas: si, en effet, f est de la forme

$$P_0 + P_1 y_1' + \cdots + P_n y_n',$$

les P étant les dérivées partielles d'une même fonction φ de x et des y, l'intégrale est indépendante du choix de la ligne d'intégration

---

partic. la préface. Les mots „libre" et „lié" remplacent respectivement les termes „absolu" et „relatif". Cf. II 3, **27** et **30**, en partic. note 258.*

10) **J. Hadamard* [Calcul des variations[6])], utilisant les notations de *I. Newton* $\dot{x}, \dot{y}$ pour représenter les vitesses, écrit

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{f}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

et surmonte d'un trait les quantités qui interviennent sous la forme paramétrique.*

11) **O. Bolza* [Lectures on the calculus of variations, Chicago 1904; Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig et Berlin 1909] suppose en outre l'existence et la continuité des dérivées troisièmes.*

12) *La continuité des dérivées premières des y résulte d'autres hypothèses qui sont examinées au n° **10**.*

tant qu'on ne rencontre pas de point singulier de φ. On peut, dans tout problème de variations, ajouter à l'intégrale dont on recherche l'extrémé, une intégrale de cette espèce: seule la valeur de l'extrémé change.*

3. *Aperçu historique. L'histoire du calcul des variations[13]) se divise naturellement en trois périodes.

La première doit être considérée comme préparatoire; on peut faire remonter son origine à un échange de lettres entre *G. W. Leibniz* et *Jean Bernoulli*[14]). La question du solide de révolution de moindre résistance, considérée par *I. Newton* en 1687, le problème de la brachistochrone, proposé en 1696 par *Jean Bernoulli*[15]), et celui des isopérimètres[16]), proposé en 1697 par *Jacques Bernoulli*, furent l'occasion de recherches qui conduisirent à de nouvelles doctrines. *Jacques Bernoulli* et *Jean Bernoulli* imaginèrent, pour les deux derniers de ces problèmes, des méthodes de résolution qui reviennent toutes à remplacer un arc infiniment petit de la courbe cherchée par une ligne

---

13) *Voir *F. W. A. Murhard*, Specimen historiae atque principiorum calculi quem vocant variationum, Göttingue 1796; *C. H. Graeffe*, Commentatio historiam calculi variationum complectens, Göttingue 1825*; *F. Giesel*, Geschichte der Variationsrechnung 1, Torgau 1857 (jusqu'à *J. L. Lagrange*); *I. Todhunter*, A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century, Cambridge et Londres 1861 (bibliographie détaillée jusqu'à *L. O. Hesse*); **A. P. E. Guiraudet*, Thèse, Paris 1856, p. 31/54; Mém. Soc. sc. Lille (3) 9 (1863), p. 525 [1862]; *R. Reiff*, Math.-naturw. Mitt. Württemb. (1) 2 (1887), éd. Tubingue 1889, p. 90/8; *A. Kneser*, Abh. Gesch. math. Wiss. 25 (1907), p. 21/60.*

14) *Cf. *A. Kneser*, Abh. Gesch. math. Wiss. 25 (1907), p. 21/60.*

15) *La méthode employée par *Jacques Bernoulli* et après lui par *Jean Bernoulli* [Hist. Acad. sc. Paris 1718, M. p. 100; Opera 2, Lausanne et Genève 1742, p. 235; voir, plus loin, les applications] pour traiter ce problème est renfermée dans la théorie de Jacobi-Hamilton et elle est exposée par *C. Carathéodory* [Diss. Gött. 1904, appendice p. 63]; il montre [Nachr. Ges. Gött. (math.-phys.) 1905, p. 83/90; Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), p. 36/49] comment elle peut être appliquée au cas général du problème de Lagrange, pour lequel il obtient ainsi des conditions suffisantes pour l'existence de l'extrémé.*

16) *Pour l'histoire de ce problème, voir *J. L. Lagrange*, Leçons sur le calcul des fonctions, (3e éd.) Paris 1806, p. 425/8; Œuvres 10, Paris 1884, p. 384/8; *G. Eneström*, Upsala Universitets Årsskrift 1876, Math. och Naturv. mém. n° 2; *L. Anton*, Diss. Leipzig, éd. Dresde 1888. En ce qui concerne les problèmes qui touchent aux origines du calcul des variations, voir *Jean Bernoulli*, Acta Erud. 1696, p. 269; *Jacques Bernoulli*, id. 1697, p. 214; *Jean Bernoulli*, id. 1698, p. 52; *Jacques Bernoulli*, id. 1700, p. 261; id. 1701, p. 213; *Jean Bernoulli*, id. 1718, p. 15; Journal des savants 1697, p. 452; id. 1698, p. 172, 284, 477; *Jacques Bernoulli*, id. 1698, p. 78, 355; *Jean Bernoulli*, Hist. Acad. sc. Paris 1706, M. p. 235/45 [1701].*

brisée ayant un ou deux sommets qu'il s'agit de déterminer à l'aide du calcul différentiel ordinaire. *L. Euler* généralisa [n° 5] ce procédé.

J. L. Lagrange inaugure la seconde période. Il découvre la *méthode des variations* [n° **6**], ainsi appelée par *L. Euler* qui l'adopta avec enthousiasme[17]). Elle avait surtout pour but, au début, de résoudre les problèmes des isopérimètres sans considérations géométriques, mais *J. L. Lagrange* appliqua bientôt son procédé à d'importantes questions de mécanique. Développée, en vue des conditions suffisantes, par plusieurs mathématiciens, dont les plus saillants sont *A. M. Legendre*, *C. G. J. Jacobi* et *A. Clebsch*, cette méthode, parfois appelée *méthode de Jacobi-Clebsch*, ne repose que sur l'utilisation des variations, et fut considérée à tort [cf. n° **20**], par tous les auteurs de la seconde période, comme capable de fournir les conditions suffisantes de l'extrémé[18]).

La troisième période débute avec les travaux de *K. Weierstrass* qui, dans son cours sur le calcul des variations professé à l'Université de Berlin de 1865 à 1890, a non seulement montré les erreurs des anciennes théories, mais donné une formule qui constitue le fondement de la méthode actuelle[19]). Dans un cours professé au Collége de France, à partir de 1866, *G. Darboux*, utilisant le théorème de Gauss sur les coordonnées curvilignes, avait, indépendamment de *K. Weierstrass*, imaginé une méthode nouvelle [n° **29**] donnant les conditions suffisantes pour les problèmes d'extrémés se rattachant aux lignes géodésiques et aussi à certaines questions de mécanique. *A. Kneser*[20]), l'étendant à l'intégrale $J_1^{(t)}$, par l'introduction de la notion de transversalité, a établi ainsi ce qu'on peut appeler[21]) la *théorie de Darboux-Kneser*, analogue à

17) *Voir les lettres de *L. Euler* à *J. L. Lagrange* datées du 6 septembre 1755 et du 2 octobre 1759; *L. Euler*, Opera postuma mathematica et physica 1, S^t^ Pétersbourg 1862, p. 555; 558; *J. L. Lagrange*, Œuvres 14, Paris 1892, p. 144, 163. Voir aussi *L. Euler*, Novi Comm. Acad. Petrop. 10 (1764), éd. 1766, p. 51/95 [1760] (Note de *G. Eneström*).*

*Par contre, la *méthode des variations* fut critiquée par *A. Fontaine des Bertins*, Hist. Acad. sc. Paris 1767, éd. 1770, M. p. 588/613. Voir aussi *J. Ch. Borda* [id. M. p. 551/63], qui considère des exemples afin de comparer les méthodes de *L. Euler* et de *J. L. Lagrange*.*

18) *Toutefois, convenablement modifiées, elles peuvent, comme le montre notamment *L. Scheeffer* [n° **20**], fournir les conditions suffisantes pour un certain extrémé.*

19) *C'est surtout à partir de 1879 que *K. Weierstrass* a exposé ses résultats ou procédés nouveaux.*

20) *Lehrbuch der Variationsrechnung, Brunswick 1900.*

21) **J. Hadamard,* Calcul des variations[6]) 1, p. 381.*

celle de *K. Weierstrass* et valable, comme celle-ci, pour le cas d'un point extrême variable. *P. du Bois-Reymond*[22]), posant les problèmes avec précision et netteté, et *L. Scheeffer*[23]), montrant notamment que les circonstances qui mettent les anciennes méthodes en défaut peuvent se présenter effectivement, ont également contribué à jeter la lumière sur les principes fondamentaux du calcul des variations. D'autre part d'anciens élèves de *K. Weierstrass,* tels que *H. Hancock*[24]), *E. Zermelo*[25]), *W. F. Osgood*[26]) et surtout *A. Kneser*[27]), faisant connaître les découvertes de leur maître ou développant ses indications, ont préparé les progrès remarquables réalisés au début du vingtième siècle. C'est à *K. Weierstrass* que l'on doit les premières recherches sur l'existence des solutions, comme application de théorèmes d'existence des équations différentielles; cette importante question a encore fait l'objet de travaux récents, dont les plus marquants sont ceux de *D. Hilbert,* qui a imaginé, en 1900, une méthode nouvelle[28]) et l'a appliquée à un exposé rigoureux du *principe de Lejeune Dirichlet* (intégrales doubles): voir l'extrémé dans un intervalle[28a]) et les questions d'existence.

De nos jours, une quatrième période semble devoir prendre naissance, grâce à l'influence des idées du calcul fonctionnel [cf. II 26, **26**] et à la généralisation de la notion de variation.

Il convient également de signaler ici l'importante découverte,

---

22) Math. Ann. 15 (1879), p. 283/314; 564/76. *Cf. Jahrb. Fortschr. Math. 12 (1880), éd. 1882, p. 299/302.*

23) Math. Ann. 26 (1886), p. 197/208; *Ber. Ges. Lpz. 37 (1885), math. p. 92/105. C'est l'étude des extrémés ordinaires qui a conduit *L. Scheeffer* à ces travaux [cf. II 3, **29**].*

24) *Annals of math. (1) 9 (1894/5), p. 179/90; (1) 10 (1895 6), p. 81/8, 159/74; (1) 11 (1896/7), p. 20/32; (1) 12 (1898/9), p. 33/44; Lectures on the calculus of variations, Cincinnati 1904. On pourrait citer aussi *G. Kobb* comme promoteur du calcul des variations; ses travaux [Öfversigt Vetensk.-Akad. förhandl. (Stockholm) 47 (1890), p. 385/99; Acta math. 16 (1892/2), p. 65/140; 17 (1893), p. 321/44] contiennent toutefois bien des lacunes.*

25) Diss. Berlin 1894.

26) Annals of math. (2) 2 (1900/1), p. 105/29; *traduit par *S. Dickstein*, Wiadomości matematyczne (Varsovie) 5 (1901), p. 179/210.*

27) *Variationsrechnung[20]); Math. Ann. 50 (1898), p. 27/50; 51 (1899), p. 321/45; 55 (1902), p. 86/107; 56 (1903), p. 169/232. On peut ajouter *V. P. Ermakov*, Otčet i protokoly fiziko-matematičeskago obščestva pri Kievskom universetě (travaux Soc. phys.-math. Univ. Kiev) 31 (1891), mém. n° 9, p. 1/44; id. 1903, mém. n° 2, p. 1/35; trad. J. math. pures appl. (6) 1 (1905), p. 97/137; Mat. Sbornik [recueil Soc. math. Moscou] 16 (1891/3), p. 369/414.*

28) *Cette méthode a aussi de l'importance dans l'étude des équations différentielles et dans la théorie des fonctions.*

28a) *Nous nous conformons à la terminologie adoptée dans l'article II 3, n° **27**.*

faite en 1904 par *D. Hilbert,* de rapports existant entre le calcul des variations, la théorie des équations intégrales et celle des équations différentielles[29]). Il montre comment les équations intégrales linéaires peuvent être appliquées à des problèmes de variations.

D'autre part *D. Hilbert* attache une grande valeur à l'idée de considérer ces problèmes comme étant des questions de calcul différentiel à une infinité de variables [cf. n° **1**]; elle conduit, en effet, à généraliser les problèmes de variations[30]). Tout cela contribuera sans doute à accélérer les progrès du calcul des variations.*

4. *__Extrémé en un point; extrémé dans un intervalle: extrémé faible; extrémé fort.__* L'erreur des anciens auteurs, signalée par *K. Weierstrass,* était la non-distinction entre l'extrémé *en un point* et l'extrémé *dans un intervalle*[31]). Or le calcul des variations proprement dit ne permet de déterminer que l'extrémé en un point, c'est-à-dire de rechercher une fonction qui donne à l'intégrale une valeur plus petite que toute fonction *suffisamment voisine de la première.* Il suffit de comparer, par un calcul direct, les extrémés en différents points, généralement en nombre fini, ainsi obtenus pour déterminer lequel est le plus grand ou le plus petit d'entre eux, l'extrémé dans un intervalle n'étant autre chose, à part une restriction qui est la même que pour les extrémés ordinaires du calcul différentiel [II 3, **27**], que le plus grand des maximés ou le plus petit des minimés. Mais pour que le problème de l'extrémé dans un intervalle soit entièrement résolu, il faut que l'on sache démontrer *a priori* l'existence d'un tel extrémé. Autrefois, l'on croyait que celle-ci était établie en même temps que l'existence d'une borne inférieure finie de l'intégrale. Cette erreur résultait de la confusion, d'ailleurs néfaste dans plusieurs domaines des mathématiques, entre la notion de minimé et celle de borne inférieure [n° **62**].

E. Zermelo[32]) a précisé la notion d'extrémé en un point, en distinguant systématiquement divers modes de *voisinage.* Deux fonctions f et φ sont dites avoir entre elles, dans l'intervalle où on les considère, un

---

29) *Nachr. Ges. Gött. (math.-phys.) 1904, p. 49/91, 213/59; 1905, p. 307/38; 1906, p. 157/227, 439/80; 1910, p. 355/417, 595/618, en partic. p. 616/8.*

30) *Rend. Circ. mat. Palermo 27 (1909), p. 59/74 en partic. p. 65/6 [1908]. L'application de la théorie des fonctions à une infinité de variables au calcul des variations a été faite pour la première fois par *W. Cairns* [Diss. Göttingue 1907], à propos de l'utilisation des équations intégrales dans la solution du problème isopérimétrique.*

31) *Cf. II 3, **27**, note 258.*

32) *Diss. Berlin 1894, p. 28. D'après *E. Zermelo,* qui revendique la priorité, cette distinction n'aurait pas été faite par *K. Weierstrass*, contrairement à ce qu'indique *J. Hadamard,* Calcul des variations[6]) 1, p. 49.*

voisinage d'ordre p défini par le nombre positif ε, si l'on peut établir une correspondance univoque et réciproque entre les deux variables x_1, x_2 telle qu'on ait[33])

$$|f(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon,$$

$$|x_1 - x_2| < \varepsilon, \quad \left|\frac{d^\pi f(x_1)}{d x_1^\pi} - \frac{d^\pi \varphi(x_2)}{d x_2^\pi}\right| < \varepsilon \qquad (\pi = 1, 2, \ldots, p).$$

Le voisinage est plus ou moins *étroit* suivant que ε est plus ou moins petit. Cela permet de différencier entre les extrémés en un point, correspondant à des voisinages d'ordres 0, 1, 2, ... Les fonctions inconnues n'intervenant qu'avec les dérivées premières, *A. Kneser* dit que l'extrémé (sous-entendu en un point) est *fort* (*starkes* Extremum), quand il correspond au voisinage d'ordre 0, et que l'extrémé est *faible* (*schwaches* Extremum)[34]), quand le voisinage est d'ordre 1. Une fonction $f(x)$ correspond, pour l'intégrale, à un minimé faible, si l'on peut assigner un nombre ε tel que toute fonction $\varphi(x)$ *acceptable*[35]), c'est-à-dire satisfaisant aux conditions imposées, et ayant avec $f(x)$ un voisinage d'ordre 1 défini par le nombre ε, donne à cette intégrale une valeur au moins égale à celle que donne $f(x)$. Il est évident que les conditions suffisantes du minimé fort entraînent celles du minimé faible et que l'inverse a lieu pour les conditions nécessaires.

Dans le cas où il y a, dans la fonction f, des dérivées d'ordre supérieur jusqu'à p (par exemple quand il s'agit de l'intégrale J_p), *J. Hadamard*[6]) dit, avec *A. Kneser*, que l'extrémé fort correspond au voisinage d'ordre $p-1$ et l'extrémé faible au voisinage d'ordre p[36]).

---

33) Géométriquement, dans le voisinage du premier ordre, les tangentes aux points voisins des deux courbes, prises chacune dans le sens positif (sens de t croissant, dans le cas de la forme paramétrique), font entre elles un angle très petit; *dans le voisinage d'ordre 2, la normale principale et la courbure, c'est-à-dire les éléments géométriques du second ordre, sont également très voisins.*

34) *Variationsrechnung[20]), p. 54. Dans l'édition allemande de l'Encyclopédie, *A. Kneser* emploie les expressions „*Extremum im weiteren Sinne*" pour extrémé fort et „*Extremum im engeren Sinne*" pour extrémé faible. Les anglais emploient les termes *strong* et *weak*. Parfois on applique ces qualificatifs au mot variation: on dit qu'une *variation* [définition n° 6] est *faible* ou *forte* suivant qu'elle correspond à un voisinage d'ordre 1 ou 0, ou bien d'ordre p ou $p-1$. Voir *W. F. Osgood*[26]), p. 106; cf. *O. Bolza*, Calculus of variations[11]), p. 72; Variationsrechnung[11]), p. 94, où est donné un exemple de variation forte dû à *K. Weierstrass* et modifié par *E. Goursat*. Les allemands disent même *extrémales* [définition n° 9] *fortes* (*starke Extremalen*).*

35) *L'ensemble des fonctions acceptables (*zulässige Vergleichsfunktionen*, en allemand) définit le *champ fonctionnel* [de *S. Pincherle*] au point de vue de *J. Hadamard*.*

36) *Les dénominations qu'utilise *J. Radon* [Sitzgsb. Akad. Wien 119 IIa

**J. Hadamard*[37]), s'appuyant sur le théorème de *K. Weierstrass* d'après lequel toute fonction continue dans un intervalle est représentable, dans cet intervalle, avec une approximation aussi grande qu'on veut, par un polynome, et utilisant une extension de *P. Painlevé*, démontre que si une ligne ne fournit pas l'extrémé d'une intégrale U_n, les fonctions acceptables étant continues mais certaines ayant des dérivées discontinues, elle ne le fournira pas davantage, non seulement si l'on ajoute la condition que les dérivées jusqu' à un ordre déterminé quelconque soient continues, mais même si l'on impose celle que les fonctions acceptables soient *analytiques* et holomorphes. *J. Hadamard*[38]) étend cet important théorème au problème isopérimétrique et au problème de Mayer.

Le maximé et le minimé *stricts* (*eigentliches*, *proper*) ou *impropres* se définissent comme dans le cas des extrémés ordinaires[39]).*

La variation première et les conditions du premier ordre de l'extrémé libre.

5. Considérations infinitésimales d'Euler. *I. Newton*, *Jean Bernoulli*, *Jacques Bernoulli* et *L. Euler* lui-même avaient résolu des problèmes de variations particuliers par des méthodes reposant sur des considérations infinitésimales. *L. Euler*[40]) les généralisa plus tard au cas de l'intégrale J_p. Remplaçant[41]) y par $y+\varepsilon$, les dérivées $y^{(\nu)}$ par les quotients dont elles sont les limites, et l'intégrale par la somme finie correspondante, il obtient, pour l'accroissement de l'intégrale, l'expression

$$\varepsilon \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots\right),$$

(1910), p. 1257 et suiv.], pour le cas de $J_2^{(t)}$, ne sont pas conformes à celles du texte: il conserve l'extrémé faible, mais l'extrémé fort devient l'extrémé *demi-fort* (*halbstark*) et l'extrémé correspondant au voisinage d'ordre zéro est ce qu'il appelle l'extrémé fort. *O. Bolza* [Calculus of variations[11]), p. 244] avait employé l'expression extrémé demi-fort (*semi-strong minimum*), mais pour désigner tout autre chose que *J. Radon*; il s'agit du problème isopérimétrique [voir plus loin].*

37) *Calcul des variations[6]) 1, p. 51/6; voir aussi *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 86.*

38) *Calcul des variations[6]) 1, p. 215/6, 241/4.*

39) **O. Stolz*, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung 1, Leipzig 1893, p. 199 [cf. II 3, 27].*

40) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausanne et Genève 1744. En partie, trad. allemande de *P. Stäckel* dans *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften n° 46, Leipzig 1894. *Voir aussi *A. Kneser*, Abh. Gesch. math. Wiss. 25 (1907), en partic. p 55/60.*

41) Comm. Acad. Petrop. 8 (1736), éd. 1741, p. 185; Methodus[40]), p. 26, 71.

Δx étant la différence constante de deux valeurs successives de x. Il en conclut que l'équation différentielle obtenue en égalant à zéro l'expression se trouvant entre parenthèses est une condition nécessaire pour l'extrémé de J_p. La faiblesse de son raisonnement réside dans l'interversion des passages aux limites $\lim \varepsilon = 0$ et $\lim \Delta x = 0$.

6. Introduction des variations par Lagrange. *J. L. Lagrange*[42]) a, le premier, considéré des *variations* générales. Il désigne par Z une quantité quelconque, composée d'une manière donnée à l'aide de

$$x,\ y,\ z,\ dx,\ dy,\ dz,\ d^2x,\ \ldots$$

Entre x, y, z sont supposées exister deux équations finies.

Les différentielles d désignent le déplacement sur la variété simple correspondant au système de valeurs (x, y, z). Si cette variété change infiniment peu, Z reçoit l'accroissement[43]) δZ.

J. L. Lagrange pose alors comme évidentes les relations

$$d\delta Z = \delta d Z, \tag{1}$$

$$\delta \int Z = \int \delta Z,$$

d'où il suit que, si u est une quantité quelconque intervenant dans Z, on a, en intégrant par parties,

$$\int Z d\delta u = Z\delta u - \int \delta u dZ; \tag{2}$$

de sorte qu'on peut faire disparaître du signe intégral toute variation d'une différentielle; on a ainsi une relation de la forme

$$\delta \int Z = M + \int (P\delta x + Q\delta y + R\delta z),$$

où M ne dépend que des variations et de leurs différentielles prises aux limites d'intégration, tandis que P, Q, R, qui ne contiennent aucune variation, satisfont à l'identité[44])

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{3}$$

Si $\int Z$ doit être extrémée pour un choix convenable de la relation

42) Misc. Taurinensia [Mélanges de philos. et de math. Soc. Turin] 2 (1760/1), éd. 1762, math. p. 173/95; Œuvres 1, Paris 1867, p. 335/62; trad. allemande de *P. Stäckel* dans *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften, n° 47, Leipzig 1894. *Voir aussi les lettres adressées à *L. Euler* par *J. L. Lagrange*, Œuvres 14, Paris 1892, p. 140/3, 147/51 et les réponses de *L. Euler*, id. p. 144/5, 152/3; un aperçu de la partie de ces lettres qui concerne le calcul des variations a été donné par *G. Eneström*, Bull. bibl. storia mat. 12 (1879), p. 828/38.*

43) *Le symbole δ se trouve pour la première fois dans la lettre du 12 août 1755; *J. L. Lagrange*, Œuvres 14, Paris 1892, p. 140.*

44) *J. L. Lagrange*, Œuvres 1, Paris 1867, p 345/7.

entre x, y, z, *J. L. Lagrange* conclut de l'indépendance des variations de x, y, z, qu'on doit avoir

$$M = 0, \quad P = Q = R = 0,$$

les trois dernières relations se réduisant, à cause de l'identité (3), à deux équations différentielles, à l'aide desquelles on peut déterminer y et z, comme fonctions de x. La première équation exprime une condition entre les valeurs de x, y, z et de leurs dérivées, prises aux limites d'intégration.

J. L. Lagrange[45]) a étendu ces considérations au cas d'une variété simple dans un domaine à un nombre quelconque de variables, en admettant aussi que la fonction sous le signe intégral dépend des limites d'intégration et qu'on impose des relations quelconques entre les valeurs des variables et de leurs dérivées prises aux limites.

7. Formule fondamentale d'Euler. *L. Euler*[46]) observe que, si une courbe résulte de la variation d'une autre, tout point de l'une correspond d'une manière univoque à un point de la seconde, de sorte que si Z et $Z + dZ$ sont les valeurs de Z en deux points voisins P_1 et P_2 de la courbe *primitive*, aux points correspondants P_1' et P_2' de la courbe *variée*, ces valeurs deviennent $Z + \delta Z$ et

$$Z + dZ + \delta(Z + dZ),$$

et comme le passage direct de P_1' à P_2' augmente la quantité $Z + \delta Z$ de sa différentielle, on a

$$Z + dZ + \delta(Z + dZ) = Z + \delta Z + d(Z + \delta Z);$$

d'où résulte la première équation (1). La seconde est une conséquence immédiate de la définition de la variation[47]).

De ces propriétés fondamentales de la variation *L. Euler*[48]) conclut que

$$\delta y' = \frac{d\delta y}{dx} - y' \frac{d\delta x}{dx},$$

$$\delta y'' = \frac{d\delta y'}{dx} - y'' \frac{d\delta x}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

et, pour le cas où f renferme n fonctions inconnues[49]) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ avec

45) Misc. Taurinensia [Mélanges de philos. et de math. Soc. Turin] 4 (1766/9), seconde pagination p. 163/87; Œuvres 2, Paris 1868, p. 37/63; trad. de *P. Stäckel*[42]).

46) Institutiones calculi integralis 3, St Pétersbourg 1770, p. 468/9, 484/5.

47) Id. p. 482/3, 506/7.

48) Id. p. 524.

49) **L. Euler* ne fait le calcul que pour $n = 2$, mais la généralisation est évidente.*

éventuellement leurs dérivées supérieures, en posant

$$\omega_i = \delta y_i - y_i' \delta x \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a en outre

$$\omega_i^{(\nu)} = \delta y_i^{(\nu)} - y_i^{(\nu+1)} \delta x \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

L'intégration par parties, faite suivant la formule (2), fait disparaître les termes en $\delta y_i', \delta y_i'', \ldots$ sous le signe intégral et donne

$$(4) \quad \delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f dx = \int_{x_1}^{x_2} \Big(\sum_{(i)} M_i \omega_i \Big) dx + \Big[f \delta x + \sum_{(i)} \sum_{(\nu)} M_{i,\nu} \omega_i^{(\nu)} \Big]_{x_1}^{x_2},$$

où

$$M_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y_i''} - \cdots,$$

$$M_{i,\nu} = \frac{\partial f}{\partial y_i^{(\nu)}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(\nu+1)}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y_i^{(\nu+2)}} - \cdots.$$

Si les limites d'intégration sont fixes, le crochet disparaît[50]).

S. D. Poisson[51]), adoptant l'idée de *J. L. Lagrange* [fin du n° 6], ajoute au second membre de l'équation (4) la quantité

$$\delta x_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx + \delta x_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx,$$

pour le cas où l'intégrant dépend des limites d'intégration.

Il remarque[52]) que la quantité ω_i est l'accroissement que reçoit y_i quand, x étant constant, on passe de la courbe primitive à la courbe variée. Cette quantité ω_i est parfois appelée *variation pure, tronquée* (*reine, abgestumpfte Variation*)[53]), la *variation composée* (*gemischte Variation*)[54]) δy ayant lieu lorsque x varie en même temps. Si $\delta x = 0$, on a

$$\omega_i = \delta y_i, \quad \delta y_i' = \frac{d \delta y_i}{dx};$$

le signe de la variation est donc alors permutable avec celui de la dérivée prise par rapport à x.

---

50) *Dans le cas de $n = 1$, on supprimera la lettre i.*

51) Mém. Acad. sc. Institut France (2) 12 (1833), p. 236 [1831].

52) Id., p. 241.

53) **A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 16.*

54) *F. L. Stegmann*, Lehrbuch der Variationsrechnung und ihrer Anwendung bei Untersuchungen über das Maximum und Minimum, Cassel 1854, p. 281; *pour ce qui concerne les notations, voir la préface, p. 7. On représente parfois les variations composées par $\delta(y)_i$, les autres par $(\delta y)_i$ [cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 49]. *G. Erdmann* [Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 363] écrit respectivement $[\delta y_i]$, δy_i.*

$_*$On peut alors écrire, pour la variation de l'intégrale, dans le cas d'une seule inconnue (J_1) et des limites fixes, les deux expressions

$$\int_{x_1}^{x_2} M \delta y dx, \quad \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'\right) dx.$$

La variation des variables indépendantes a joué, dans l'ancien calcul des variations, un rôle très important et souvent néfaste[55]).*

8. Variation spéciale résultant de l'introduction d'un paramètre variable. *L. Euler*[56]) a cherché à comprendre la notion de la variation dans celle de la différentielle, en admettant que le passage d'une courbe à une voisine (courbe variée) est réalisé quand varie un paramètre t qui entre dans l'équation de la courbe, et, désignant par t_0 la valeur de t correspondant à la courbe primitive, il pose[57])

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t = t_0} dt,$$

ce qui attribue à l'opération δ les propriétés formelles fondamentales de l'opération d, $_*$c'est-à-dire ce qui réduit le calcul de Lagrange à un procédé de différentiation[58]).*

L. Euler[59]) savait que l'idée de considérer la courbe variée comme individu d'une famille à un paramètre particularise la notion de varia-

55) $_*$Un exposé correct de la variation des variables indépendantes est donné par *C. Jordan*, Cours d'Analyse, (2e éd.) 3, Paris 1896, p. 463.*

56) Novi Comm. Acad. Petrop. 16 (1771), éd. 1772, p. 35/70 [1771]; réimpr. Institutiones calculi integralis 4, St Pétersbourg 1794, p. 592.

57) $_*$Ainsi que *F. L. Stegmann*, Variationsrechung[54]) et *G. Erdmann* [Z. Math. Phys. 26 (1881), p. 76]. Par contre *M. Ohm* [Lehre des Grössten und Kleinsten, Berlin 1825, p. 1 330], *G. W. Strauch* [Theorie und Anwendung des sogenannten Variationscalcüls 1, Zurich 1849, p. 1/499; 2, Zurich 1854, p. 1 788] et *F. N. M. Moigno* [Leçons sur le calcul différentiel et intégral 2, Paris 1844] écrivent

$$\delta y = \left(\frac{\delta y}{\delta t}\right)_{t = t_0},$$

variation que *F. L. Stegmann* représente par δ' et appelle „Variationsquotient".*

58) $_*$*A. L. Cauchy* [C. R. Acad. sc. Paris 40 (1855), p. 261/7; Œuvres (1) 12, Paris 1900, p. 197/204] montre sur des exemples que s'il suffit, pour réduire le calcul des variations au calcul différentiel, de faire correspondre les changements de forme des fonctions aux changements de valeur d'un paramètre variable, réciproquement il suffit d'introduire, dans plusieurs des principales formules de l'analyse infinitésimale, un paramètre variable, pour les transformer en d'autres qui s'expriment aisément à l'aide des notations propres au calcul des variations. *A. L. Cauchy* annonce la publication d'une étude plus approfondie de cette question, mais cette annonce est restée vaine.*

59) Novi Comm. Acad. Petrop. 10 (1764), éd. 1766, p. 55 [1760].

tion. Cette spécialisation n'a aucun inconvénient tant qu'il s'agit de la recherche de conditions nécessaires pour l'existence d'un extrémé, mais elle a été le point de départ de nombreuses méthodes erronées pour l'obtention des conditions suffisantes [n° **20**]. Mais déjà *J. L. Lagrange* avait évité cet écueil, car s'il emploie la même spécialisation dans la troisième édition de ses Leçons sur le calcul des fonctions[60]), il n'en est pas de même pour sa Théorie des fonctions analytiques[61]), où il s'occupe des conditions suffisantes [n° **14**]. Il n'y utilise que le concept général de la variation.

$_*$En ce qui concerne, en général, la nature analytique des variations, il résulte d'une démonstration de *J. Hadamard* [n° **4**] qu'il est indifférent, pour le problème U_n, de considérer des variations analytiques ou des variations simplement continues avec points anguleux isolés. De même, pour une intégrale J_p, on peut employer des variations à dérivée $p^{\text{ième}}$ discontinue en des points isolés, pourvu que les $p-1$ premières dérivées soient continues, cette dernière condition étant, par contre, essentielle.*

9. Conditions du premier ordre. Contrairement à ce qui s'est fait au n° **7**, δy_i ou δy désigneront dans la suite, sauf indication contraire, des variations pures. Si, n étant égal à l'unité, δy, en même temps qu'un nombre convenable de ses dérivées, s'annule aux limites, il résulte comme cas particulier de la formule fondamentale d'Euler la suivante:

$$\delta J_p = \int_{x_1}^{x_2} M \delta y \, dx.$$

J. L. Lagrange[62]) démontre, le premier, d'une manière rigoureuse que cette variation doit s'annuler pour que l'intégrale J_p puisse être extrémée. Pour cela, il remplace y par $y+\varepsilon u$, ε étant une constante supposée suffisamment petite, u étant fonction de x. La variation première est alors représentée par l'ensemble des termes linéaires en

60) $_*$Leçons sur le calcul des fonctions, (3^e éd.) Paris 1806, p. 401 501 [leçons 21 et 22 reproduites J. Éc. polyt. (1) cah. 14 (1808); Œuvres 10, Paris 1884, p. 364/98, 399/451. L'usage des variations spéciales est passé de là dans la plupart des traités ultérieurs.*

61) $_*$Théorie des fonctions analytiques, (1re éd.) Paris an V, p. 198/220; (2^e éd.) Paris 1813; (3^e éd.) Paris 1847; Œuvres 9, Paris 1881, p. 296/310, 311/21. Ces deux travaux de *J. L. Lagrange* ont été traduits par *A. L. Crelle* [Abh. Akad. Berlin 1833, éd. 1835, math. Klasse p. 40 et suiv.], mais avec commentaires dans le texte et changement des notations.*

62) $_*$Fonctions analyt.[61]), (2^e éd.) p. 273; (3^e éd.) p. 277;* Œuvres 9, p. 297.

ε dans le développement de l'intégrale suivant les puissances ascendantes entières de ε, et par conséquent, la variation de l'intégrale ne s'annulant pas, l'accroissement de J_p pourrait être positif ou négatif, et l'intégrale ne pas être extrémée; d'où la nécessité de l'évanouissement de δJ_p.

J. L. Lagrange en déduit la première condition nécessaire pour l'existence de l'extrémé, **condition du premier ordre*, suivant la terminologie de *J. Hadamard*[63]). C'est l'*équation différentielle d'Euler*[64]) [n⁰ 5]*

$$M = 0. \tag{5}$$

Pour plusieurs fonctions inconnues, on a de même comme condition du premier ordre

$$M_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

équations différentielles du second ordre (pour $p = 1$), linéaires par rapport aux y''.

J. L. Lagrange tente de démontrer que l'équation (5) résulte de

$$\delta J_p = 0,$$

δy étant arbitraire, quoiqu'il ait d'abord considéré ce fait comme évident. On l'a cru longtemps, et *F. N. M. Moigno* ainsi que *L. L. Lindelöf*[65]) l'admettaient encore.

*En réalité, ce fait repose sur un lemme démontrable et appelé aujourd'hui *lemme fondamental du calcul des variations*. Pour n quelconque, il s'énonce comme suit: M_i étant des fonctions déterminées de x, continues dans l'intervalle d'intégration (x_1, x_2), si l'on a

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{(i)} M_i \delta y_i dx = 0$$

pour toutes les déterminations des δy_i telles que ces fonctions s'annulent en x_1 et x_2, il est nécessaire que les M_i soient identiquement nuls

63) *Calcul des variations[6]). C'est la dénomination qui sera adoptée dans cet article.*

64) *On l'appelle souvent *l'équation différentielle de Lagrange*. Mais comme *J. L. Lagrange* [Leçons sur le calcul des fonctions, (3ᵉ éd.) Paris 1806, p. 438; Œuvres 10, Paris 1884, p. 397] écrit lui-même: „Cette équation est celle que *L. Euler* a trouvée le premier" [*L. Euler*, Methodus[40]), p. 36; trad. *P. Stäckel*, p. 54]; nous adoptons avec *O. Bolza* [Calculus of variations[11]) p. 22; Variationsrechnung[11]), p. 32] la dénomination utilisée dans le texte.*

65) *L. L. Lindelöf*, Variations-Kalkylens Theori, Helsingfors 1856; *F. N. M. Moigno* et *L. L. Lindelöf*, Leçons sur le calcul des variations, Paris 1861.

dans l'intervalle (x_1, x_2), sauf peut-être[66]) aux points de discontinuité, supposés en nombre fini, de ces fonctions. Ce lemme, qui est souvent employé ailleurs que dans le calcul des variations pour transformer des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, reste vrai si les δy_i doivent avoir une ou plusieurs dérivées nulles aux limites (ou même en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration) et si les δy_i sont assujettis à avoir une ou plusieurs dérivées continues, ou même à être analytiques[66]). *A. Rosenblatt*[67]) montre que le lemme est encore valable quand les δy_i sont des polynomes. Plusieurs démonstrations ont été données pour $n = 1$.*

Supposant que M est différent de zéro dans tout l'intervalle (x_1, x_2), *F. L. Stegmann*[68]) pose pour J_p

$$\delta y = \frac{(x - x_1)^{\mu}(x_2 - x)^{\nu}}{M}\varepsilon,$$

et, choisissant les exposants de manière qu'un nombre convenable de quantités δy, $\delta y'$, ... s'annulent aux limites, il en conclut que δJ_p diffère de zéro, et que M ne peut être différent de zéro en aucune partie de l'intervalle d'intégration. Cette démonstration peut être considérée comme satisfaisante.

H. E. Heine[69]) et *P. du Bois-Reymond*[70]) procèdent d'une manière analogue, mais ils observent de plus que M doit être fonction continue de x. $_*$*Ch. Méray*[71]) donne une autre démonstration.*

E. Zermelo[72]), suivant les indications données par *K. Weierstrass* dans un cours professé à l'Université de Berlin, pose

$$\delta y = \varepsilon(x - x_1)^m(x_2 - x)^m e^{-\varrho^2(x - x_0)},$$

M étant supposé différent de zéro pour $x = x_0$, $x_1 < x_0 < x_2$; en prenant ϱ suffisamment grand dans l'intervalle (x_1, x_2), il montre que δJ_p est différent de zéro.

$_*$Une autre fonction remplissant le même but et intéressante, elle, par son interprétation géométrique, a été donnée par *H. A. Schwarz*[73]).*

---

66) $_*$Cf. *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 63/5.*

67) $_*$Archiv Math. Phys. (3) 15 (1909), p. 284/5.*

68) $_*$Variationsrechnung[54]), p. 90 (§ 24).*

69) Math. Ann. 2 (1870), p. 188/91.

70) Math. Ann. 15 (1879), p. 297, 305.

71) $_*$Ann. Éc. Norm. (2) 7 (1878), p. 187/92.*

72) Diss. Berlin 1894, p. 35, 41.

73) $_*$Cours professé à l'Université de Berlin; cf. *H. Hancock*, Calculus of variations[24]), n° 78. Au sujet de l'établissement de l'équation différentielle d'Euler, voir encore *G. A. Bliss*, Amer. math. Monthly 15 (1908), p. 47/54.*

$_*$*A. Kneser*[74]) appelle *extrémale*[75]) (*Extremale*) toute courbe satisfaisant à l'équation différentielle d'Euler ou, en général, aux conditions du premier ordre pour l'extrémé de l'intégrale. Sauf dans les cas d'exception signalés plus bas, il y a, pour $n = 1$, une double famille d'extrémales dans le plan. Les deux constantes que contient l'intégrale générale se déterminent alors par la condition que la courbe cherchée passe par les deux points donnés. Il peut se présenter des cas où l'on ne peut satisfaire à cette condition.

L. Euler[76]) a observé qu'on obtient immédiatement une première intégrale, quand y ou x ne figure pas dans la fonction f. Pour n quelconque, un cas d'intégrabilité est celui, bien connu en Dynamique, où la fonction f ne dépend pas de l'un des y; on a encore une intégrale première, dans le cas où f est linéaire par rapport à l'un des y, son coefficient étant fonction de x seul.

A. Guldberg[77]) montre que l'invariance de l'intégrale J_1 pour un groupe de transformations continu quelconque (et en particulier pour le groupe continu $\xi = x + a$ auquel on peut le ramener par un changement de coordonnées) entraîne l'existence d'une intégrale première.

D. C. Gillespie[78]) recherche les solutions de l'équation différentielle en se servant du théorème d'indépendance de *D. Hilbert* [nº **23**][79]).

En ce qui concerne la dégénérescence de l'équation $M = 0$, *L. Euler*[80]) a montré que lorsque

$$A \equiv f_{y'^2}$$

est nul pour tout système de valeurs de x, y, y', ce qui a lieu si f est de la forme

$$P(x, y) + N(x, y)y',$$

l'équation différentielle se réduit à une équation finie. On a une identité si, en outre,

$$P_y = N_x.^*$$

74) $_*$Variationsrechnung [20]), p. 24.*

75) $_*$*V. P. Ermakov*[27]) dit „chemin de Lagrange"; *E. P. Culverwell*[193]) et *W. A. Zimmermann* [Zapiski novoross. Universit. Odessa 68 (1896), p. 1/270] disent „courbe stationnaire".*

76) $_*$Methodus[40]), p. 46/7.*

77) $_*$Forhandlinger Videnskabs-Selskabet Christiania 1902, éd. 1903, mém. nº 7; voir aussi Rend. Circ. mat. Palermo 21 (1906), p. 66/74, où il classe les problèmes J_1 à l'aide des groupes.*

78) $_*$Diss. Göttingue 1906; Bull. Amer. math. Soc. 13 (1906/7), p. 345/8.*

79) $_*$*G. Darboux,* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal 3, Paris 1894, p. 59/65.*

80) $_*$Methodus[40]), p. 48.*

*Ce sont les seuls modes de dégénérescence de l'équation d'Euler. Il y a alors respectivement un nombre fini d'extrémales (et la courbe cherchée doit être choisie parmi elles), ou bien une infinité (toutes les courbes en sont) et l'intégrale J_1 est indépendante du chemin d'intégration. Réciproquement, si l'intégrale a la même valeur pour toutes les courbes acceptables, l'équation différentielle d'Euler doit être identiquement vérifiée.

G. Frobenius[81]) montre que, dans le cas des dérivées d'ordre supérieur, l'équation différentielle d'Euler ne peut se réduire à une équation différentielle d'ordre impair sans se réduire aussi à une équation différentielle de l'ordre pair immédiatement inférieur, ce qui généralise le résultat de *L. Euler*.

Pour n quelconque, si le déterminant fonctionnel [A pour $n = 1$, cf. fin du n° **13**] des équations des extrémales par rapport aux y'' (ou le hessien de f par rapport aux y') n'est pas nul, ces équations sont résolubles en $y_1'', \ldots, y_n''$, qu'elles donnent sous forme de fonctions continues en x, y_i, y_i'. *J. Hadamard*[82]) dit alors que le problème est *ordinaire*. *L. Königsberger*[82a]) donne, pour le cas de n quelconque et des dérivées supérieures, la condition pour que la variation δJ s'annule identiquement. On peut rattacher à ces questions le *problème inverse* du calcul des variations, qui est traité plus loin.*

Les extrémités de l'arc d'intégration étant variables, la formule (4) donne, outre les équations des extrémales, cette autre condition nécessaire que la somme des *termes aux limites (Grenzglieder)*, termes en dehors du signe intégral, doit s'annuler pour toutes les variations acceptables des variables aux limites.

Les variables sont, en général, liées entre elles par des équations déterminées dont on peut tenir compte, d'après *J. L. Lagrange*[83]), comme dans les problèmes d'extrémé lié ordinaire [voir II 3, **30**].

Si le point $P_1(x_1, y_1)$ est mobile sur une courbe donnée Γ_1, on a entre les coefficients angulaires de l'extrémale λ et de la ligne Γ_1 au point P_1, une relation qu'on appelle *condition de transversalité*; on dit que Γ_1 rencontre *transversalement* l'extrémale en P_1. La même chose peut se dire pour P_2, ou simultanément pour P_1 et P_2. Le

81) *J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 185/213, en partic. p. 206 [1877]. Voir aussi *A. Hirsch*, Math. Ann. 49 (1897), p. 49 et suiv.*

82) *Calcul des variations[6]) 1, p. 90.*

82a) *Math. Ann. 62 (1906), p. 118/21. Voir plus loin les intégrales multiples.*

83) Leçons sur le calcul des fonctions, (3e éd.) Paris 1806, p. 468; Œuvres 10, Paris 1884, p. 422/3.

2*

cas des limites variables est examiné en détail plus loin [voir n° **29** et, en particulier, n^os **30** à **32**].

*Si l'on compare la valeur de l'intégrale prise de P_1 à P_2 le long de l'extrémale λ à la valeur de cette intégrale prise le long d'une ligne L infiniment voisine de λ, entre P_1' et P_2', l'intégrale disparaît de la formule (4), mais le crochet subsiste. *La formule aux limites* ainsi obtenue fait donc connaître, sans signe d'intégration, la variation infiniment petite de l'intégrale et montre que cette variation est indépendante du changement de forme de la ligne variée et qu'elle ne dépend que des déplacements infinitésimaux des extrémités. Ce fait se rattache au théorème de *C. F. Gauss*[84]) sur les lignes géodésiques [cf. n° **29**], et toutes les propriétés analytiques des équations du calcul des variations en découlent. La formule aux limites est encore valable si la ligne primitive, au lieu d'être une extrémale libre, est une extrémale sur une surface et, plus généralement, s'il y a des relations en termes finis.*

10. *__Objection de P. du Bois-Reymond.__* Les hypothèses les moins restrictives que l'on puisse faire, au sujet des fonctions considérées, sont celles qui sont nécessaires pour que l'intégrale existe, ce qui n'exige pas que les y aient des dérivées premières. C'est le cas des intégrales généralisées.

Si le problème posé était de trouver, parmi les fonctions y deux fois dérivables, celles qui extrêment l'intégrale, le procédé employé par *J. L. Lagrange* [n° **6**], pour trouver la première condition nécessaire, serait absolument correct. Mais si, outre l'hypothèse que f et ses dérivées partielles sont finies, on suppose seulement l'existence et, sauf des discontinuités isolées, la continuité des dérivées premières de y*, le procédé suivi pour obtenir la condition du premier ordre prête à objection, comme l'a remarqué *P. du Bois-Reymond*[85]).

Ce procédé est basé, en effet, sur l'existence des dérivées secondes, *ce qui, si l'on s'en tient aux hypothèses classiques [n° **2**], impose à la courbe cherchée λ une condition de plus qu'aux courbes acceptables de comparaison L. Cette objection est dite *objection de Paul du Bois-Reymond.**

Pour démontrer qu'en opérant d'une manière rigoureuse on

---

84) **J. Hadamard* [Calcul des variations[6]), 1, p. 143] propose d'appeler *formule de Gauss* la formule aux limites, pour $n = 3$.*

85) Math. Ann. 15 (1879), p. 313/4; voir aussi p. 564 et suiv.

n'obtient pas d'autre solution, *P. du Bois-Reymond*[85]) part encore de l'expression

$$\delta J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y'\right) dx,$$

mais il effectue l'intégration par parties, non sur le second terme, mais sur le premier, ce qui introduit une quadrature. Il est ainsi amené à démontrer le lemme appelé *lemme de Paul du Bois-Reymond,* d'après lequel, si N est fonction de x, continue dans l'intervalle d'intégration (x_1, x_2), et si

$$\int_{x_1}^{x_2} y' N dx = 0$$

pour toutes les fonctions y nulles en x_1 et x_2 et qui possèdent une dérivée y' continue dans (x_1, x_2), on a $N =$ constante dans tout cet intervalle.

$_*$*P. du Bois-Reymond* démontre ce lemme en le considérant comme un problème isopérimétrique spécial.* *D. Hilbert*[86]) a donné une méthode élégante montrant que N a une valeur constante aux points de continuité, s'il y a un nombre fini de discontinuités. $_*$Il montre que de la dérivabilité de $f_{y'}$ résulte l'existence de y'' pour toute valeur de x telle que $f_{y'^2}$ n'est pas nul.*

E. Zermelo[87]) s'occupe aussi de l'objection de *P. du Bois-Reymond* pour le cas des dérivées d'ordre supérieur. $_*$Il étend le lemme en démontrant que si la fonction N est continue dans l'intervalle (x_1, x_2) et si

$$\int_{x_1}^{x_2} N \frac{d^p \eta}{d x^p}\, dx = 0$$

pour toute fonction η de classe $C^{(p)}$[119]) dans (x_1, x_2) et dont les $p-1$ premières dérivées s'annulent en x_1 et x_2, N est fonction entière et de degré $p-1$.*

$_*$La démonstration de *E. Zermelo,* très simple, est nouvelle, même pour le cas où $p = 1$[88]). Celle de *E. Jacobsthal*[89]) n'en diffère que très peu. *Nadechda Nikolajevna Gernet*[90]), se bornant au cas spécial du

86) $_*$Dans un Cours professé à l'Université de Göttingue en 1899.* Cf. *J. K. Whittemore,* Annals of math. (2) 2 (1900/1), p. 130/6, en partic. p. 132.

87) Math. Ann. 58 (1904), p. 558/64.

88) $_*$*J. Radon* [Sitzgsb. Akad. Wien 119 II^a (1910), p. 1264] applique, le premier, ce lemme pour J_2.*

89) Sitzgsb. Berliner math. Ges. 9 (1910), p. 82/4.

90) Diss. Göttingue 1902, p. 15 et suiv.; $_*$cf. *J. Hadamard,* Calcul des variations[6]) 1, p. 484 et suiv.*

problème *régulier* (ainsi appelé par *D. Hilbert* quand $f_{y'^2}$ est différent de zéro pour *tout* y'), répond à l'objection en s'appuyant sur le théorème de *W. F. Osgood* [n° **28**]. Elle établit, sans supposer l'existence des dérivées secondes sur λ, que cette courbe ne peut extrémer sans être extrémale, sauf le cas des solutions discontinues [n° **34**]. Mais cette démonstration n'établit pas que la variation première elle-même ne peut s'annuler. Par contre, et pour la même raison, elle s'applique aux intégrales généralisées, en ne considérant que l'extrémé fort, puisqu'il ne peut être question de voisinage du premier ordre[91]).

H. Hahn[92]), qui s'est aussi occupé de cette question pour le problème de Lagrange [n° **47**] et pour celui de Mayer, a montré que toute courbe rectifiable, possédant une tangente déterminée en chaque point, doit être extrémale, si elle extrême[93]). Ce résultat[94]) est plus général que ceux obtenus précédemment. Le problème le plus général, consistant à trouver parmi toutes les courbes pour lesquelles l'intégrale simple J_1 peut être définie, celles pour lesquelles J_1 est minimée, n'a pas encore reçu de solution.

Le cas des intégrales doubles, où l'importance de l'objection est très considérable, est examiné plus loin.*

11. Intégrabilité[95]). La condition nécessaire et suffisante pour que f contenant une seule fonction inconnue se présentant avec les dérivées supérieures [cf. fin du n° **2**] soit dérivée exacte, c'est-à-dire pour qu'il existe, pour y fonction arbitraire de x, une fonction

$$F(x, y, y', \dots)$$

liée à f par la relation

$$\frac{dF}{dx} = f(x, y, y', \dots),$$

est que l'équation différentielle d'Euler, ou, pour plusieurs fonctions y, que les équations

$$M_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

soient identiquement vérifiées (et par conséquent que la variation de l'intégrale soit identiquement nulle) quels que soient les δy.

L. Euler a, le premier, fait cette remarque pour une[96]) et puis

91) **J. Hadamard*, Calcul des variations[6]), 1, p. 488 et suiv.*

92) *Math. Ann. 63 (1907), p. 254 et suiv.*

93) *Voir encore *W. H. Young*, Rend. Circ. mat. Palermo 30 (1910), p. 27/32.*

94) *Voir aussi *L. Tonelli*, Rend. Circ. mat. Palermo 32 (1911), p. 328/31.*

95) Pour un exposé historique détaillé, voir *I. Todhunter*, History[13]), p. 505/30; *[voir aussi II 16, **20**].*

96) Novi Comm. Acad. Petrop. 10 (1764), éd. 1766, p. 134 [1760]. Pour plus de détails, voir II 16, **20**.

pour deux[97]) fonctions inconnues. $_*$Mais il ne l'a démontrée qu'après *J. de Condorcet*[98]).

A. J. Lexell[99]) donne les critères d'intégrabilité répétée d'une expression différentielle et démontre, sans utiliser le calcul des variations[100]), la suffisance de la condition énoncée.

J. L. Lagrange[101]) donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité avec une ou deux variables dépendantes et, pour les expressions différentielles du second ordre, il donne des indications qui sont développées, sans le secours des variations, par *F. Joachimsthal*[102]) et *J. L. Raabe*[103]).

S. F. Lacroix[104]) établit sans variations que la condition est nécessaire; *F. Sarrus*[105]) donne la meilleure démonstration de la nécessité; *S. D. Poisson*[106]) exprime l'intégrale sous forme finie quand $M = 0$.*

$_*$*J. Bertrand*[107]) montre comment il faut intégrer quand la condition est satisfaite et donne les conditions d'intégrabilité répétée*; il considère aussi le cas où il y a deux variables dépendantes, $_*$et celui de l'intégrale double

$$\iint V\,dx\,dy,$$

V étant fonction de x, y, z et des dérivées de z par rapport à x et y; il établit la suffisance sans utiliser les variations, en simplifiant les

---

97) $_*$Institutiones calculi integralis 3, S[t] Pétersbourg 1770, p. 556.*

98) $_*$Du calcul intégral, Paris 1765, p. 8/13; voir aussi Hist. Acad. sc. Paris 1768, éd. 1771, p. 54/5. La démonstration de *J. de Condorcet* est élégante.*

99) $_*$Novi Comm. Acad. Petrop. 15 (1770), éd. 1771, p. 127; 16 (1771), éd. 1772, p. 171.*

100) $_*$Mais les complications sont telles que, suivant *J. L. Lagrange*[101]), on ne peut juger de l'exactitude de la démonstration.*

101) $_*$Théorie des fonctions analytiques, (1[re] éd.) Paris an V, p. 217 et suiv.; Leçons sur le calcul des fonctions, (3[e] éd.) Paris 1806, p. 401 et suiv.;* Œuvres 9, Paris 1881, p. 317/21; 10, Paris 1884, p. 364/83.

102) $_*$Progr. Berlin 1844;* J. reine angew. Math. 33 (1846), p. 95/116.

103) J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 181/212 [1844].

104) $_*$Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, (1[re] éd.) 2, Paris an VIII, p. 238 et suiv.; pour la condition suffisante, voir p. 249, 764. *S. F. Lacroix* s'appuie sur le calcul des variations et améliore la démonstration de *L. Euler*.*

105) $_*$Ann. math. pures appl. 14 (1823/4), p. 197/205, voir aussi id. p. 319/23; C. R. Acad. sc. Paris 1 (1835), p. 115/7; résumé par *I. Todhunter*, History calculus variations[13]), p. 523/9. *E. H. Dirksen* [Abh. Akad. Berlin 1836, éd. 1838, math. Klasse, p. 79/98], tant pour la nécessité que pour la suffisance, procède à peu près comme *F. Sarrus*.*

106) Mém. Acad. sc. Institut France (2) 12 (1833), p. 260/70 [1831].

107) J. Éc. polyt. (1) cah. 28 (1841), p. 249/75, en partic. p. 255, 265.

recherches de *S. D. Poisson*; mais il fait intervenir une quantité qui peut devenir infinie ou indéterminée.

J. P. M. Binet[108]) donne la meilleure démonstration de la suffisance; elle est exempte de ce défaut; *G. Brun*[109]) trouve une nouvelle démonstration de la suffisance, basée sur le calcul des variations.

J. Bertrand[110]) met la condition d'intégrabilité sous une forme plus élégante que celle de *L. Euler* et qui conduit, en principe, à des opérations plus simples[111]). Les conditions sous la forme ordinaire sont déduites par *R. S. Minich* d'un système plus simple[112]). *A. de Morgan*[113]), *E. Stoffel* et *D. Bach*[114]), ainsi que *A. Winckler*[115]), se sont aussi occupés de ces questions.*

12. Représentation paramétrique; généralités. Équation d'Euler sous forme paramétrique. Afin de ne pas devoir se limiter à la considération de courbes pour lesquelles y est fonction univoque de x, c'est-à-dire où l'abscisse croît toujours dans le même sens et où il n'y a pas de tangente parallèle à l'axe des y, *K. Weierstrass*[116]) trans-

---

108) *_*F. N. M. Moigno,_* Calcul diff.[57]), p. 550/63.*

109) *Rukovodstvo k variaciannomu isčisleniju (Traité de calcul des variations), Odessa 1848; voir l'exposé de *I. Todhunter,* History calculus variations[18]), p. 529/30.*

110) *C. R. Acad. sc. Paris 28 (1849), p. 350/1; J. math. pures appl. (1) 14 (1849), p. 123/31.*

111) *Voir aussi *F. Sarrus*, C. R. Acad. sc. Paris 28 (1849), p. 439/42; J. math. pures appl. (1) 14 (1849), p. 131/4.*

112) *Ann. sc. mat. fis. 1 (1850), p. 321/36, surtout § 1 [extrait d'un mémoire non publié]; *S. R. Minich* ne démontre pas la réciproque, d'ailleurs aisée à vérifier.*

113) *Trans. Cambr. philos. Soc. 9, part. II (1850/1), § 4.*

114) *J. math. pures appl. (2) 7 (1862), p. 49/61; en partant de l'équation de condition et sans utiliser les variations, ils mettent $f(x, y, y', \dots, y^{(p)})\,dx$ sous forme d'une expression différentielle du premier ordre renfermant $x, y, y', \dots, y^{(p-1)}$, considérées comme variables indépendantes et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité de ces fonctions.*

115) *Sitzgsb. Akad. Wien 88 II (1883), p. 820/35.*

116) *Dans un cours professé à l'Université de Berlin en 1865. Bien avant *K. Weierstrass, J. L. Lagrange* avait utilisé la représentation paramétrique pour traiter le problème de la brachistochrone en milieu résistant (voir le chapitre consacré ici aux applications) et *W. R. Hamilton* [Trans. Irish Acad. (Dublin) 17 (1837), p. 1/144 [1832]] pour étudier le problème de variations spatial ($n = 2$), que *G. A. Bliss* et *Ch. M. Mason* [Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 440/66; 11 (1910), p. 325/40] ont traité complètement de cette manière. Dans sa théorie des rayons lumineux, *W. R. Hamilton* [Trans. Irish Acad. (Dublin) 15 (1828), p. 1 [1824]; 16 (1830), p. 1/64] avait été conduit à des intégrales de forme paramétrique.* *E. Zermelo*, Diss. Berlin 1894; *H. Hancock*[24]); *A. Mayer* [Ber. Ges. Lpz. 48 (1896), math. p. 438/65] et *A. Kneser* [voir en partic. Variationsrech-

forme systématiquement l'intégrale par l'introduction d'une nouvelle variable indépendante quelconque; en d'autres termes, il considère l'intégrale sous la *forme paramétrique* au lieu de prendre la *forme ordinaire*. *Pour une seule fonction inconnue, on écrit

$$J_1^{(t)} \equiv \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt;$$

dans le cas de plusieurs fonctions inconnues, on opère de même, U_n devenant $U_n^{(t)}$.

Dans les questions géométriques, on prend souvent l'arc d'extrémale comme variable indépendante. C'est ainsi qu'opère *K. Weierstrass*, notamment dans son étude de la variation seconde [cf. n° **19**].

On se sert parfois de la fonction F mise sous la forme

$$F(x, y, \cos\theta, \sin\theta),$$

avec, si s est l'arc d'extrémale,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta.$$

Les formules qui permettent de passer à la forme paramétrique ou inversement sont simples et évidentes.*

K. Weierstrass[117]) a donné la condition pour que l'intégrale $J_1^{(t)}$ ne dépende que de la forme et des extrémités de la ligne d'intégration, c'est-à-dire pour qu'elle soit invariante pour une transformation paramétrique. Il faut et il suffit que F soit *positivement homogène*[118]) et de degré 1 en x' et y', *c'est-à-dire telle qu'on ait

$$(a) \qquad F(x, y, kx', ky') = k \cdot F(x, y, x', y')$$

pour tout système de valeurs de x, y, x', y' du domaine où F est de classe C'''[119]) et pour toute valeur positive de k[120]). Si, comme par

---

nung[20])] opèrent aussi en représentation paramétrique. *G. Kobb*[24]) l'a utilisée pour les intégrales doubles. *Depuis lors, elle est d'usage courant. *J. Radon* [Monatsh. Math. Phys. 22 (1911), p. 53/63] et *G. Vivanti* [Rend. Circ. mat. Palermo 33 (1912), p. 268/74] l'emploient pour les intégrales multiples.*

117) *Cf. *A. Kneser,* Variationsrechnung[20]), p. 7.*

118) **O. Bolza*, Calculus of variations[11]), p. 119; Variationsrechnung[11]), p. 194.*

119) **O. Bolza* [Variationsrechnung[11])] dit qu'en représentation ordinaire une fonction est de *classe* $C^{(p)}$ dans un intervalle, quand la dérivée $p^{\text{ième}}$ existe et est continue dans cet intervalle. Une fonction $f(x)$ est dite de classe $D^{(p)}$ dans un certain intervalle $[x_1\, x_2]$, lorsqu'elle est continue dans $[x_1\, x_2]$ et que cet intervalle peut être décomposé en un nombre fini de segments où $f(x)$ est de classe $C^{(p)}$. La définition des fonctions de classe $C^{(p)}$, $D^{(p)}$, en représentation paramétrique [Variationsrechnung[11]), p. 191], est analogue à celle posée pour la forme ordinaire. Voilà pour les fonctions. Quant aux courbes, *O. Bolza* [Variationsrechnung[11]),

exemple dans le cas où F est fonction rationnelle ou même analytique et uniforme de x' et y', l'homogénéité n'était pas ainsi limitée, aucun extrémé fort ne serait possible pour la forme paramétrique [cf. note 128].*

E. Zermelo[121]) s'est occupé de la condition pour $J_p^{(t)}$. $_*$Mais, dans le cas des dérivées d'ordre supérieur, la forme paramétrique, dont les propriétés deviennent plus compliquées, n'a plus le même intérêt théorique [n° **21**].*

$_*$Comme la représentation paramétrique introduit une fonction arbitraire, il est possible, d'une infinité de manières, de représenter une courbe quelconque; et l'on peut établir une correspondance arbitraire entre les points de la ligne variée et ceux de la ligne primitive. On en profite généralement pour faire correspondre les limites d'intégration. La variation peut être choisie *normale* à la courbe considérée; mais cette correspondance peut ne pas être compatible avec la précédente, si les limites ne sont pas fixes.

Pour les problèmes géométriques, cette méthode est non seulement préférable, mais on ne peut s'en dispenser, car elle seule est susceptible de fournir une solution complète. Il ne peut être question, en effet, de diviser la courbe en arcs partiels sur chacun desquels x varierait dans un sens constant, ni d'effectuer un changement de coordonnées pour ramener un cas à l'autre, puisque la forme des courbes variées est arbitraire.

Mais, si la représentation (forme) paramétrique réalise un progrès important, qu'il y ait une ou plusieurs inconnues, c'est à tort que l'on a cru que la représentation (forme) ordinaire, où x est pris comme variable indépendante, est surannée; celle-ci doit être appliquée lorsqu'il s'agit de déterminer une *fonction* extrémant une intégrale, *problème de fonctions* (*Funktionenproblem*)[122]), comme dans le principe d'Hamilton et celui de la moindre action sous la forme de Lagrange, où les coordonnées des points dépendent du temps, considéré comme variable indépendante.*

---

p. 190] dit qu'une courbe représentée paramétriquement est *de classe* $C^{(p)}$ si l'on peut choisir le paramètre t de manière que les fonctions $x(t)$, $y(t)$ soient de classe $C^{(p)}$ dans l'intervalle $[t_1 t_2]$ considéré et que leurs dérivées ne s'annulent pas ensemble dans cet intervalle. Il appelle *courbe ordinaire* une courbe de classe C' ou composée d'un nombre fini d'arcs de courbe de classe C'.*

120) $_*$*L. Tonelli* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 20 I (1911), p. 229/35; (5) 21 I (1912), p. 448/53, 554/9] donne la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire la transformation paramétrique pour que l'équation (a) ait lieu (Note de *G. Vivanti*).*

121) Diss. Berlin 1894, p. 3/23.

122) $_*$*O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 189 et suiv.*

$_*$Au contraire, la représentation paramétrique s'impose pour les *problèmes de courbes* (*Kurvenproblem*)[122]) ou *de surfaces* (*Flächenproblem*)[123]) s'il s'agit d'intégrales doubles [n° **57**]. Il en est de même dans le principe de la moindre action sous la forme de Jacobi, où intervient l'action maupertuisienne se présentant sous forme paramétrique, les forces agissantes et les liaisons étant indépendantes du temps, dont on fait abstraction pour ne considérer que la forme de la trajectoire.

On distingue les *problèmes-x* (*x-Probleme*) des *problèmes-t* (*t-Probleme*)[124]). A tout problème-t correspond un problème-x, obtenu en introduisant la condition

$$x'(t) > 0.$$

Les problèmes-t peuvent posséder des solutions qui ne satisfont pas à cette condition et qui par là ne sont pas solutions du problème-x. Un exemple est fourni par la solution discontinue du problème de la surface de révolution de moindre volume[125]).

Mais, comme l'a montré *T. J. I'anson Bromwich*[126]) sur un exemple particulier, un problème-x peut aussi avoir des solutions qui ne satisfont pas au problème-t. Cette remarque n'est autre, en réalité, qu'un cas particulier* d'un théorème dû à *K. Weierstrass*[127]), en vertu duquel l'intégrale $_*$sous forme paramétrique[128])* ne peut posséder un extrémé fort si F est fonction rationnelle de x', y', $_*$ou, plus généralement[129]), fonction analytique uniforme de x', y', tandis que le problème-x correspondant peut très bien admettre une telle solution.*

Comme l'a montré *E. Zermelo,* ce théorème de *K. Weierstrass* ne s'applique pas s'il y a des dérivées supérieures; $_*$mais il est indépendant du nombre des inconnues. Malgré donc que des formules de transformation permettent de passer d'une forme de l'intégrale à l'autre, celles-ci ne peuvent être substituées l'une à l'autre, du moins pour l'extrémé fort. Pour l'extrémé faible [et *a fortiori* pour tous les pro-

---

123) $_*$*O. Bolza,* Variationsrechnung[11]), p. 652.*

124) $_*$Cf. *O. Bolza,* id. p. 199.*

125) $_*$Voir le chapitre de cet article consacré aux applications.*

126) $_*$Math. Assoc., Math. gazette London 3 (1905), p. 179 et suiv.*

127) $_*$Donné par lui dans un cours en 1879.* Cf. *E. Zermelo*, Diss. Berlin 1894, p. 62.

128) $_*$Dans l'édition allemande de l'Encyclopédie, *A. Kneser* omet cette restriction. Un autre exemple montrant que certaines intégrales n'ont pas de minimé fort sous forme paramétrique alors qu'elles en ont sous forme ordinaire est celui, évident *a priori*, de l'action hamiltonienne, où la quantité sous le signe intégral est rationnelle et quadratique par rapport aux dérivées.*

129) $_*$*J. Hadamard,* Calcul des variations[6]), 1, p. 80, 402 *

blèmes qui regardent la variation seconde (n^os **13** et suiv.)], il y a équivalence complète.*

*En ce qui concerne la variation première, il n'y a rien de particulier au cas de la forme paramétrique, si ce n'est que les équations exprimant la condition du premier ordre ne sont pas indépendantes, à cause de l'homogénéité [130]) de F, et ne sont pas résolubles par rapport aux dérivées secondes, contrairement au cas de la forme ordinaire.

Pour le cas de $J_1^{(t)}$, conduisant aux deux équations

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0, \qquad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0,$$

on peut, en utilisant l'identité d'Euler sur les fonctions homogènes, écrire, avec *K. Weierstrass* [131]), l'équation unique

$$T = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1 (x'y'' - x''y') = 0, \tag{6}$$

où

$$F_1 = \frac{F_{x'^2}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'^2}}{x'^2};$$

d'où l'on déduit la suivante

$$\frac{F_1}{R} + \frac{F_{xy'} - F_{yx'}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \tag{7}$$

exprimant le rayon de courbure R d'une extrémale en fonction des coordonnées d'un point et du rapport $\frac{y'}{x'}$ définissant la direction de la tangente en ce point. On a, si les extrémités sont fixes

$$\delta J_1^{(t)} = \int T(dy\,\delta x - dx\,\delta y),$$

l'expression entre parenthèses étant invariante pour toute transformation paramétrique, transformation de variations changeant la correspondance entre la courbe variée et la courbe considérée, mais ne modifiant pas celle-ci [132]). Il en est de même pour la courbure.*

La variation seconde dans le problème de l'extrémé libre.

13. La variation seconde. *A. M. Legendre* [133]) eut, le premier, l'idée de considérer la variation seconde, dans le but de distinguer le maximé du minimé.

---

130) *Cette remarque a été faite par *W. R. Hamilton* [Trans. Irish Acad. (Dublin) 17 (1837), p. 6 [1832]] pour le problème spatial.*

131) **E. Zermelo*, Diss. Berlin 1894, p. 37.*

132) *Cf. *J. Hadamard*, Calcul des variations [6]), p. 93; *A. L. Underhill*, Diss. Chicago 1907; Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 316 et suiv.*

133) Hist. Acad. sc. Paris 1786, éd. 1788, M. p. 7/37; addition id. 1787, éd.

C. G. J. Jacobi[134]) définit la variation seconde des intégrales U_n et J_p, pour des valeurs déterminées des inconnues et des dérivées, aux extrémités de l'arc d'intégration, comme étant l'intégrale, prise entre ces limites, de la double somme des termes quadratiques, respectivement par rapport à $\delta y_\nu, \delta y_\nu'$ et $\delta y, \delta y', \ldots, \delta y^{(p)}$, obtenus en développant, par la formule de Taylor, les fonctions

$$f(x; y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n; y_1' + \delta y_1', \ldots, y_n' + \delta y_n')$$

et

$$f(x; y + \delta y, y' + \delta y', \ldots, y^{(p)} + \delta y^{(p)}).$$

Cette définition, contrairement à celle qu'avait donnée *A. M. Legendre*, se généralise immédiatement au cas des variations supérieures.

On a beaucoup discuté sur la question de ces variations[135]). *G. Erdmann*[136]), introduisant un paramètre [cf. n° 8], pose

$$\delta^k u = \frac{\partial^k u}{\partial t^k} dt^k,$$

ce qui permet de formuler les règles d'opération, comme pour le signe différentiel.

Appliquant le signe δ aux deux expressions de la variation première [n° 7], on obtient

$$\delta^2 J_1 = \delta \int_{x_1}^{x_2} M \delta y dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta y \delta M dx + \int_{x_1}^{x_2} M \delta^2 y dx,$$

$$\delta^2 J_1 = \delta \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta^2 y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta^2 y' \right) dx.$$

*Si $\delta y'$ n'est pas nul aux limites ou s'il présente des discontinuités, la première expression, établie par *C. G. J. Jacobi*, reste valable, mais la seconde doit être corrigée par des termes contenant les valeurs de $\delta \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y$ aux extrémités, ou les variations brusques de cette quantité.

1789, M. p. 348/51; *P. Stäckel* dans *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften n° 47, Leipzig 1894, p. 59 et suiv.

134) J. reine angew. Math. 17 (1837), p. 9; Werke 4, Berlin 1886, p. 42.

135) *C. H. Schnuse*, Introduction à sa trad. [Die Grundlehren der Variationsrechnung, Brunswick 1859] de *J. H. Jellett*, An elementary treatise on the calculus of variations, Dublin 1850; **A. Mayer* [Ber. Ges. Lpz. 33 (1881), math. p. 42/7] applique la variation troisième à des problèmes d'extrémés ordinaires.*

136) Z. Math. Phys. 22 (1877), p. 324/31 [1876]; 23 (1878), p. 370; 26 (1881), p. 73/97, en partic. p. 76.

Mais lorsque les extrémités sont fixes et que $\delta y'$ est continu, les expressions sont équivalentes.*

Si la ligne considérée satisfait à la première condition de l'extrémé, c'est-à-dire est une extrémale, les termes en $\delta^2 y$ et $\delta^2 y'$ disparaissent et il ne reste que la première intégrale dans chaque expression. On peut ainsi écrire

$$(8) \qquad \delta^2 J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \delta y \, \delta M \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (A \delta y'^2 + 2 B \delta y \delta y' + C \delta y'^2) dx,$$

en posant

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} = B, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C.$$

*L'expression représentée par δM est un polynome différentiel linéaire du second ordre par rapport à δy. L'équation obtenue en l'égalant à zéro est dite l'*équation aux variations* correspondant à l'équation des extrémales. On a cette équation dès que l'on connaît f et l'équation générale des extrémales. Le polynome δM est identique à son adjoint. Réciproquement tout polynome différentiel du second ordre, identique à son adjoint, peut être considéré comme dérivant d'une variation seconde d'intégrale définie[137]). La propriété que possède l'équation aux variations d'être identique à son adjointe n'a pas lieu pour une équation linéaire du second ordre quelconque, mais on peut ramener toute équation de cette forme à remplir cette condition en multipliant son premier membre par un facteur convenable.

Pour plusieurs fonctions inconnues et extrémités fixes, on a de même

$$\delta^2 U_n = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \delta M_i \delta y_i \, dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_1} \Big(\sum_{i,k=1}^{n} A_{i,k} \delta y_i' \delta y_k' + 2 B_{i,k} \delta y_i \delta y_k' + C_{i,k} \delta y_i \delta y_k \Big) dx,$$

en posant

$$(10) \qquad A_{i,k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i' \partial y_k'}, \quad B_{i,k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k'}, \quad C_{i,k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k}.$$

Les équations

$$\delta M_i = 0$$

137) ***R. G. D. Richardson* [Math. Ann. 68 (1910), p. 279 et suiv.] montre que toute équation différentielle du second ordre identique à son adjointe peut être considérée comme équation différentielle d'un problème de variations avec une condition auxiliaire quadratique et avec ou sans conditions auxiliaires linéaires. Pour l'étude de ce problème et la condition du minimé, voir le problème de Lagrange.*

sont linéaires et du second ordre en δy_i. Le discriminant de la forme quadratique

$$\Phi \equiv \sum_{i,k} A_{i,k}\, \delta y_i' \,\delta y_k'$$

est le déterminant fonctionnel, par rapport aux y_i'', des premiers membres des équations des extrémales. Il se réduit à A si $n = 1$. S'il ne s'annule pas dans l'intervalle (x_1, x_2), auquel cas les équations des extrémales sont résolubles par rapport aux y'', la forme quadratique Φ est une forme quadratique générale et par conséquent décomposable en une somme de n carrés de formes linéaires indépendantes. Le problème est alors *ordinaire* au sens de *J. Hadamard* [n° **9**]. Le système différentiel $\delta M_i = 0$ est identique à son adjoint.*

14. La condition de Legendre. *Pour que $\delta^2 J_1$ ait un signe déterminé quel que soit δy, il suffit que la forme quadratique qui se trouve entre parenthèses dans l'égalité (8) soit définie quel que soit x, ou le carré d'une expression linéaire en δy, $\delta y'$.

Lorsque $B = 0$, $C = 0$, la variation seconde se réduit à

$$\int_{x_1}^{x_2} A\, \delta y'^2\, dx,$$

d'où la condition $A \geqq 0$ nécessaire pour un minimé; pour un maximé, c'est $A \leqq 0$. On peut ramener à ce cas particulier la discussion du cas général.*

A. M. Legendre ajoute à cet effet à la variation seconde l'expression nulle

$$[\alpha\, \delta y^2]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(\alpha\, \delta y^2)}{dx}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} (2\alpha\, \delta y\, \delta y' + \alpha' \delta y^2)\, dx,$$

ce qui donne

$$(11) \qquad \delta^2 J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \{A\, \delta y'^2 + 2(B + \alpha)\, \delta y\, \delta y' + (C + \alpha')\, \delta y^2\}\, dx.$$

Il détermine la fonction α de x par la condition que le discriminant de la forme quadratique en δy, $\delta y'$ s'annule, c'est-à-dire que

$$A(C + \alpha') - (B + \alpha)^2 = 0.$$

*C'est une équation de Riccati. Elle est dite *équation différentielle de Legendre.**

La forme quadratique en question devient ainsi le carré d'une expression linéaire réelle en δy, $\delta y'$, multipliée par A. La variation seconde de l'intégrale a donc encore le signe de cette quantité.

A. M. Legendre montre de même que

$$\delta^2 J_2, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$$

ont même signe.

Pour J_1, *A. M. Legendre* déduit de son calcul, cette première conclusion qu'une seconde condition (la première était que la courbe soit une extrémale) nécessaire pour extrémer l'intégrale, est que A ne puisse changer de signe dans l'intervalle (x_1, x_2); pour le minimé, c'est

$$A \geqq 0$$

le long de l'extrémale, dans tout le domaine d'intégration[138]).

$_*$C'est la *condition de Legendre au sens large*[139]). Elle est dite avoir lieu *au sens strict*[140]) lorsque l'égalité n'est pas comprise. On peut remarquer que, quand elle est ainsi réalisée, la dérivée seconde y'' existe dans l'intervalle (x_1, x_2) où elle est continue et que $A, B, C,$ ainsi que leurs dérivées premières, sont continues dans le même intervalle.

G. Erdmann[141]) a considéré un exemple du cas d'exception où A, tout en ne pouvant devenir négatif, est susceptible de s'annuler en des points de l'intervalle (x_1, x_2). Un tel point est singulier pour l'équation différentielle des extrémales et pour l'équation aux variations; et ce point singulier ne satisfait pas en général aux conditions de Fuchs[142]). *D. Hilbert*[143]) a donné quelques indications relativement à l'étude, très difficile, de ce cas.

La seconde conclusion que *A. M. Legendre* déduit de son calcul est que, si la condition $A \geqq 0$ est satisfaite, la variation seconde $\delta^2 J_1$ est de même signe que A. Cette déduction ne se justifie pas, car la question n'est encore résolue qu'au point de vue formel. Il faut s'assurer si la transformation de Legendre est légitime.*

J. L. Lagrange[144]) montre que α doit être déterminé, dans tout l'intervalle d'intégration, comme fonction finie et continue; $_*$cela est

138) $_*$*K. Weierstrass* en a donné une démonstration rigoureuse dans un Cours professé à l'Université de Berlin, en 1879; cf. *O. Bolza,* Variationsrechnung[11]), p. 57/8; *J. W. Lindeberg* [Öfversigt Finska Vetenskaps Soc. Förhandlingar 47 (1904/5), mém. n° 2] en a établi une autre.*

139) $_*$On dit quelquefois *condition nécessaire de Legendre.**

140) $_*$On dit quelquefois *condition suffisante de Legendre.**

141) $_*$Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 369.*

142) $_*$Cf. *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 325.*

143) $_*$Cours professé à l'Université de Göttingue en 1903/4.*

144) Théorie des fonctions analytiques, (1re éd.) Paris an V, p. 208; Œuvres 9, Paris 1881, p. 303.

nécessaire et suffisant pour que l'on puisse conclure que

$$\delta^2 J_1 \geqq 0$$

dès que $A \geqq 0$ dans l'intervalle (x_1, x_2); la seconde conclusion de *A. M. Legendre* est donc inexacte si une telle intégrale n'existe pas. *C. G. J. Jacobi* a résolu cette difficulté [n° **15**].*

J. L. Lagrange[144]) a modifié d'une manière intéressante, mais qui a peu attiré l'attention, les recherches de Legendre. Il ne pose pas l'équation différentielle de Legendre, mais suppose seulement son premier membre positif. Il en résulte encore que la forme quadratique du second membre de (11), pour des valeurs réelles quelconques de δy, a un signe constant, en même temps que A; mais elle ne se réduit plus à un carré unique. On en conclut en toute rigueur que, si le domaine d'intégration est suffisamment limité [n° **17**] et si A est de signe permanent, un extrémé a lieu, car tous les termes de degrés supérieurs à 2, dans le développement de $f(x, y + \delta y, y' + \delta y')$, peuvent être négligés.

15. Transformations de $\delta^2 J_1$ d'après Jacobi. *C. G. J. Jacobi* a indiqué, dans un mémoire[145]) qui marque une époque importante dans l'histoire du calcul des variations, que l'équation de Riccati peut se ramener à une équation différentielle linéaire homogène du second ordre.* Il pose

$$\alpha = -B - A\frac{u'}{u}\cdot$$

*L'équation de Legendre devient ainsi

$$\psi(u) \equiv \left(C - \frac{dB}{dx}\right)u - \frac{d}{dx}\left(A\frac{du}{dx}\right) = 0, \tag{12}$$

dite[146]) *équation différentielle de Jacobi.* Elle revient à l'équation aux variations [n° **13**].* *C. G. J. Jacobi* démontre que l'intégrale peut être trouvée par simple différentiation dès qu'on connaît l'intégrale générale de l'équation différentielle d'Euler; *cela résulte de ce que $\psi(u)$ n'est autre que δM, ou de ce que $\psi(u)$ est identique à son adjoint[147]).* Si c_1 et c_2 sont les constantes introduites dans l'intégration de l'équation différentielle des extrémales, C_1, C_2 d'autres constantes, l'intégrale cherchée est

$$u = C_1\frac{\partial y}{\partial c_1} + C_2\frac{\partial y}{\partial c_2},$$

---

145) J. reine angew. Math. 17 (1837), p. 68/82; Werke 4, Berlin 1886, p. 41 et suiv.; **P. Stäckel* dans *W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften n° 47, Leipzig 1894, p. 87/98.*

146) *Cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 60.*

147) *Voir, par ex., l'exposé de *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 319/22. Cette propriété a été généralisée [voir plus loin le chapitre consacré aux intégrales multiples].*

les intégrales $\frac{\partial y}{\partial c_1}, \frac{\partial y}{\partial c_2}$ étant linéairement indépendantes. Si l'on sait déterminer les constantes C_1 et C_2 de manière que u ne s'annule pas dans le domaine d'intégration (x_1, x_2), α est alors, dans cet intervalle, solution continue de l'équation de Legendre, *et $\delta^2 J_1$ est positif pour toute variation δy non identiquement nulle dans cet intervalle. On peut alors écrire

$$(13) \qquad \delta^2 J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{A(u\,\delta y' - u'\,\delta y)^2}{u^2}\,dx.$$

Lorsque toute intégrale de l'équation de Jacobi s'annule en un point au moins de l'intervalle (x_1, x_2), la transformation de Legendre n'est pas applicable. La transformation suivante de Jacobi n'a pas cet inconvénient et permet, même dans ce cas, de distinguer le signe de la variation seconde. Posant

$$2\Omega = C\delta y^2 + 2B\delta y\delta y' + A\delta y'^2$$

et appliquant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, on a

$$\psi(\delta y) = \frac{\partial \Omega}{\partial \delta y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial \delta y'};$$

d'où

$$(14) \qquad \delta^2 J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \delta y\,\psi(\delta y)\,dx,$$

ce qui n'est que la première égalité (8).

C. G. J. Jacobi en conclut que, quand une intégrale particulière u s'annule en deux points de l'intervalle (x_1, x_2), on peut annuler la variation seconde, en choisissant convenablement la fonction δy. Il faut alors considérer $\delta^3 J_1$. *O. Bolza*[148]) effectue la transformation de Jacobi pour les variations δy de classe D''. *C. G. J. Jacobi* se sert de l'expression (14) pour établir, d'une seconde manière, la formule (13)[149]).*

148) *Variationsrechnung[11]), p. 63.*

149) *Voir, en ce qui concerne la réduction de la variation seconde d'après *C. G. J. Jacobi*, l'exposé de *J. Hörner*, Quart. J. pure appl. math. 14 (1877), p. 218 26. Cf. encore *G. Brun*, Rukovodstvo k variacionnomu isčisleniju[109]), Odessa 1848, p. 103/8; *A. C. Dixon*, Messenger math. (2) 26 (1896/7), p. 65 et suiv. Il convient de citer ici, bien qu'ils soient erronés, les travaux de *M. Steichen*, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8⁰ 14 (1862), mém. n° 2, en partic. p. 20/7, 58/61; critique de *L. L. Lindelöf*, Bull. Acad. Belgique (2) 17 (1864), p. 162/72; *L. Žmurko*, Verh. Ges. deutsch. Naturf. Aerzte 48 Graz (1875), Tageblatt; Denkschr. Akad. Wien (math.) 37 II (1877), p. 43/8; Pamiętnik Akad. Umiejętności (Cracovie) 2 (1876), p. 57/79, en partic. p. 58/62 [1875]; objections de *F. Mertens*, Z. Math. Phys. 21 (1876), p. 142/4; Pamiętnik Akad. Umiejętności (Cracovie) 2 (1876), p. 124/33; réponse de *L. Žmurko*, id. 3 (1877), p. 24/34, où il est question également des intégrales multiples [voir plus loin]. Voir aussi les comptes rendus de *A. Mayer*, Jahrb. Fortschr. Math. 8 (1876), éd. 1878, p. 220/4.*

16. Transformations de $\delta^2 J_p$. *C. G. J. Jacobi*[145]) a remarqué, sans le démontrer, que si y est solution de l'équation

$$(15) \qquad Ay + \frac{d(A_1 y')}{dx} + \cdots + \frac{d^p(A_p y^{(p)})}{dx^p} = 0$$

l'expression

$$y\left\{Au + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \cdots + \frac{d^p(A_p u^{(p)})}{dx^p}\right\},$$

formée avec une fonction u indéterminée, est intégrable et que son intégrale est de la forme

$$Bt' + \frac{d(B_1 t'')}{dx} + \cdots + \frac{d^{p-1}(B_{p-1} t^{(p)})}{dx^{p-1}},$$

où

$$ty = u;$$

A_ν, B_ν étant des fonctions de x, indépendantes de u.

Ce lemme fut démontré à l'aide du calcul par *V. A. Lebesgue*[150]), *Ch. E. Delaunay*[151]); *J. Bertrand*[152]) le prouve en s'appuyant sur la théorie de l'intégrabilité: il applique plusieurs fois le principe en vertu duquel une quantité mise sous une certaine forme est identiquement nulle si elle est intégrable. *H. E. Heine*[153]) l'établit en faisant usage simultané de deux variations indépendantes l'une de l'autre. *E. F. A. Minding*[154]) opère comme les deux premiers auteurs, mais exprime explicitement les quantités B.

Si δM peut être mis sous la forme du premier membre de (15), on a, comme l'indique encore *C. G. J. Jacobi* sans le démontrer, la formule

$$(16) \qquad \delta^2 J_p = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 f}{(\partial y^{(p)})^2}\, \omega^2 dx,$$

ω étant une forme linéaire des quantités δy, $\delta y'$, ..., $\delta y^{(p)}$. Cela résulte de (14) à l'aide d'intégrations par parties et en appliquant le lemme. Il découle immédiatement de cette formule que, quand

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial y^{(p)})^2}$$

a un signe permanent, il en est de même de $\delta^2 J_p$, ce qu'avait établi *A. M. Legendre* pour $p = 2$ [n° **14**].

---

150) J. math. pures appl (1) 6 (1841), p. 17/35.

151) Id. p. 209/37.

152) J. Éc. polyt. (1) cah. 28 (1841), p. 276/83; *F. Eisenlohr* [Diss. Heidelberg 1853, éd. Mannheim 1853, en partic. § 10] donne une démonstration très voisine de celle de *J. Bertrand*.

153) J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 68/71.

154) Id. 55 (1858), p. 300/9.

La transformation indiquée exige que l'on connaisse des solutions δy de l'équation différentielle linéaire (15) ou

$$\delta M = 0.$$

Comme on opère avec le symbole δ, dans l'expression M, tout comme avec le signe différentiel par rapport à un paramètre quelconque, la solution générale est

$$\delta y = \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} C_\nu \frac{\partial y}{\partial c_\nu}, \tag{17}$$

les c_ν étant les constantes d'intégration se présentant dans la solution de l'équation différentielle d'Euler

$$M = 0;$$

les C_ν sont de nouvelles constantes.

Si par exemple $p = 2$, il est nécessaire, pour effectuer la transformation de $\delta^2 J_p$ d'après la formule (16), d'utiliser deux expressions (17), contenant ensemble 8 constantes C, mais celles-ci n'entrent dans le calcul qu'en combinaisons telles que la forme ω ne comprend que 3 constantes arbitraires, comme dans la transformation de Legendre.

Ch. E. Delaunay expose les découvertes de *C. G. J. Jacobi* et montre[155]) que δM peut toujours être mis sous la forme du premier membre de l'égalité (15). Les résultats de *C. G. J. Jacobi* ont été, pour la première fois, rigoureusement établis, pour $p = 2$, par *F. Eisenlohr*[156]). *G. Mainardi*[157]), *F. Brioschi*[158]) s'occupent du même cas.

S. Spitzer[159]) prend pour point de départ la formule (16), sans tenir compte de ce qu'elle est établie à l'aide d'intégrations par parties; il en déduit que les expressions (17) sont aussi solutions de l'équation linéaire $\omega = 0$ et détermine les coefficients des quantités $\delta y, \delta y', \ldots$ dans ω; il effectue les calculs pour $p = 1, 2, 3$. Il montre que, dans ces coefficients, les constantes C sont reliées entre elles de manière que le nombre des indépendantes est égal à l'ordre du système d'équations obtenu en posant

$$\delta^2 \int_{x_1}^{x} f(x, y', \ldots, y^{(p)})\, dx = \varpi + \int_{x_1}^{x} \frac{\partial^2 f}{(\partial y^{(p)})^2}\, \omega^2\, dx, \tag{18}$$

155) J. math. pures appl. (1) 6 (1841), p. 211.

156) Diss. Heidelberg 1853, éd. Mannheim 1853, p. 13 et suiv.

157) Ann. sc. mat. fis. 3 (1852), p. 149/92; p. 379/83 (appendice).

158) Id. p. 322/6; Opere 1, Milan 1901, p. 35/8. *Pour p quelconque, voir *F. Brioschi,* Giorn. I. R. Ist. Lombardo (2) 3 (1851), p. 400/9; Opere 3, Milan 1904, p. 109/18.*

159) Sitzgsb. Akad. Wien 12 (1854), p. 1014/71, en partic., p. 1027; id. 14 (1855), p. 41/120. *Cf. *I. Todhunter,* History calculus variations[13]), p. 293/306*.

ϖ étant une forme quadratique en $\delta y, \delta y', \ldots, \delta y^{(p-1)}$, et les coefficients des formes ϖ et ω étant considérés comme des inconnues. C'est la généralisation de l'équation de Legendre.

S. Spitzer[160]) s'est occupé aussi de la forme sous laquelle on peut mettre la variation seconde, quand l'équation différentielle d'Euler dégénère en une équation différentielle d'ordre inférieur à $2p$ [cf. n° **9**].

Bien que la transformation de la variation seconde, dans le cas de plusieurs fonctions inconnues, soit considérée plus loin, on peut signaler ici que, par des considérations analogues à celles qui se rattachent à l'égalité (18), *S. Spitzer*[161]) montre, pour le cas où l'intégrale contient deux inconnues, que sa variation seconde est de signe constant dans l'intervalle d'intégration (x_1, x_2), quand

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

est de signe constant et que la quantité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1'^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y_2'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_1' \partial y_2'}\right)^2$$

est positive dans (x_1, x_2). Il démontre que les six coefficients de la forme ϖ, dans l'équation correspondant à (18), sont déterminés par autant d'équations différentielles du premier ordre, dont les intégrales sont représentées par des expressions analogues à (17).

L. O. Hesse[162]) démontre et complète ceux des résultats de *C. G. J. Jacobi* qui sont de nature formelle. Il établit la formule (16) en intégrant par parties et en se servant de certaines expressions différentielles linéaires $\Psi, \Psi_1, \ldots$ dont la première est définie par

$$\Psi(z) = \delta M, \quad \delta y = z.$$

Désignant par

$$u, v, w, s, \ldots$$

p intégrales de l'équation $\Psi(z) = 0$, et posant

$$(19) \qquad \begin{cases} z = u z_1, \quad z_1' = v_1' z_2', \quad z_2'' = w_2'' z_3'', \ldots \\ v = u v_1, \quad w = u w_1, \ldots \\ w'_1 = v_1' w_2', \quad s_1' = v' s_2', \ldots, \end{cases}$$

ainsi que les conditions

$$\Psi_1(v_1') = \Psi_2(w_1') = \Psi_2(w_2') = \cdots = 0,$$

160) Sitzgsb. Akad. Wien 12 (1854), p. 1031, 1040.

161) Id. 14 (1855), en partic. p. 57.

162) J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 227/73; Werke, Munich 1897, p. 413.

en nombre $\frac{p(p-1)}{2}$, *L. O. Hesse* obtient

$$\delta^2 J_p = \int_{x_1}^{x_2} (z_p^{(p)})^2 u^2 v_1'^2 w_2''^2 \cdots \frac{\partial^2 f}{(\partial y^{(p)})^2} dx.$$

La quantité sous le signe intégral peut, d'après (19), être représentée par le quotient des carrés de deux déterminants construits à l'aide des quantités $z, u, v, \ldots$ et de leurs dérivées. *M. A. Stern*[163]) montre, par l'analyse combinatoire, que dans la transformation précédente il intervient $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres, nombre des coefficients de la forme $\overline{\omega}$.

G. Frobenius[164]) déduit élégamment toute la théorie de Jacobi-Hesse de l'algorithme des expressions différentielles linéaires adjointes[165]).

17. La condition de Jacobi. *C. G. J. Jacobi*[166]), considérant le premier l'ensemble des extrémales, ce qui marque le début du point de vue moderne en calcul des variations, a indiqué que l'intégrale J_p cesse d'être extrémée dès que l'extrémale a, en deux points du domaine d'intégration, un contact d'ordre $p-1$ avec une extrémale infiniment voisine. Il applique sa remarque à l'intégrale

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}$$

dont la variation égalée à zéro traduit en une formule précise le principe de la moindre action, et l'étudie d'une façon détaillée dans le problème du mouvement des planètes et dans celui des lignes géodésiques [voir à la fin du présent article les applications du calcul des variations].

$_*$Pour $p=1$, une extrémale infiniment voisine de λ ne peut couper deux fois λ entre les limites d'intégration, s'il y a extrémé.*

L. O. Hesse[167]) démontre le résultat de *C. G. J. Jacobi* pour $p=1$, du moins tant qu'il s'agit du signe de la variation seconde; il donne la condition suivante pour que l'extrémale λ soit coupée aux deux points d'abscisses x_1 et x_2 par une extrémale infiniment voisine:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]_{x=x_1} \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_2} - \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_1} \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]_{x=x_2} = 0; \tag{20}$$

163) Abh. Ges. Gött. 13 (1866/7), éd. 1868, math. mém. n° 2, p. 53/68 [1867].

164) *G. Frobenius,* J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 203/6.

165) $_*$Sur la théorie de Jacobi-Hesse et les équations différentielles linéaires, cf. *L. W. Thomé,* J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 1/27; 128 (1905), p. 33/44; sur les transformations de $\delta^2 J_p$, cf. *A. Winckler*, Sitzgsb. Akad. Wien 97 IIª (1888), éd. 1889, p. 1065/82.*

166) Vorlesungen über Dynamik, (1ʳᵉ éd.) réd. par *A. Clebsch*, Berlin 1866; Werke, Suppl. publ. par *E. Lottner,* Berlin 1884, p. 46.

167) J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 258/9; Werke, Munich 1897, p. 434; *F. Eisenlohr* [Diss. Heidelberg 1853, éd. Mannheim 1853, p. 15] s'était occupé de la question, mais sans succès.

il montre, à l'aide d'un calcul simple et de l'équation différentielle du problème $\delta J_1 = 0$, que si $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ a un signe permanent le quotient

$$q = \frac{\partial y}{\partial c_1} : \frac{\partial y}{\partial c_2}$$

varie toujours dans le même sens; l'égalité précédente exige donc que le quotient q passe une fois au moins par toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ dans l'intervalle (x_1, x_2). Si cela n'a pas lieu, on peut déterminer les constantes C_1 et C_2 [n° **15**] de manière à ce que u ne s'annule pas dans tout le domaine d'intégration, ce qui rend possible la transformation de Legendre pour $\delta^2 J_1$ dans la forme de Jacobi.

*On désigne par $\Delta(x, x_1)$ l'intégrale

$$\left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]_{x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial c_2} - \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial c_1}$$

(ne pouvant s'annuler identiquement) de l'équation différentielle de Jacobi, nulle pour $x = x_1$.*

K. Weierstrass[168]) appelle *point conjugué*[169]) du point P_1 le point P_1' d'abscisse x_1' de l'extrémale λ, en désignant par x_1' le premier zéro de $\Delta(x, x_1)$ qui suit x_1. *La racine x_1' est dite *valeur conjuguée* de x_1.*

Si la famille des extrémales issues de P_1 est représentée par l'équation $y = \varphi(x, a)$, on démontre[170]) que Δ ne diffère de $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$ que par un facteur constant; d'où résulte que P_1' est le point où λ touche, pour la première fois à partir de P_1, l'enveloppe de la famille des extrémales issues de P_1. Il y a aussi un point conjugué qui précède x_1; il y a donc les (premiers) points conjugués à droite et à gauche. A côté de ceux-là, on peut considérer les 2[ièmes], 3[ièmes], . . . conjugués.

Pour $n = 1$, le premier et le deuxième conjugués d'un même point sont conjugués l'un à l'autre, de même que le deuxième et le troisième, etc. Il n'en est généralement pas ainsi quand n est différent de 1.*

---

168) *Cours professé en 1879 à l'Université de Berlin.*

169) *On dit parfois, dans le même sens, *foyer conjugué* [*J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 107]. Dans la terminologie allemande habituelle, le mot foyer (*Brennpunkt*, *focal point* en anglais), dû à *A. Kneser* [Variationsrechnung[20]), p. 89], n'est employé que quand il y a au moins un point extrême variable [voir plus loin]; le foyer conjugué devenant point conjugué quand les deux points extrêmes sont fixes.*

170) *G. Erdmann*, Z. Math. Phys. 22 (1877), p. 325.

**H. Hahn*[171]) a montré la signification des seconds points conjugués pour le problème spatial. Les autres points conjugués peuvent aussi être interprétés [voir le problème de Lagrange].

En vertu d'un théorème de *J. Ch. F. Sturm*[172]), si u_1 et u_2 sont deux intégrales linéairement indépendantes d'une équation différentielle linéaire du second ordre, il y a toujours, entre deux zéros consécutifs a_1 et b_1 de u_1, un zéro et un seul de u_2, pourvu que tous ces zéros appartiennent à l'intervalle de continuité. Si donc, dans cet intervalle, u_1 et u_2 ont chacun deux zéros a_1, b_1 et a_2, b_2, ces zéros de u_1, u_2 doivent alterner, les intervalles (a_1, b_1), (a_2, b_2) ne pouvant être intérieurs l'un à l'autre. Il en résulte que, si un point se déplace sur l'extrémale, son point conjugué, de droite ou de gauche, se déplace dans le même sens. On est ainsi amené à distinguer deux cas:

$$1^{\circ})\ x_1' \leqq x_2,$$
$$2^{\circ})\ x_1' > x_2,$$

ou bien x_1' n'existe pas.

Dans le premier cas, on peut rendre $\delta^2 J_1$ nul, en choisissant convenablement la variation δy. *C. G. J. Jacobi* en conclut qu'il ne peut y avoir extrémé dans ce cas. Cela est exact à part certains cas d'exception. *G. Erdmann*[173]) démontre ce résultat, en calculant $\delta^3 J_1$ pour la variation

$$\delta y = \begin{cases} \Delta(x, x_1) & \text{dans l'intervalle } (x_1, x_1'), \\ 0 & \text{dans l'intervalle } (x_1', x_2) \end{cases}$$

qui annule $\delta^2 J_1$.

Dans le second cas, que l'on peut formuler en disant que l'équation aux variations possède une solution différente de zéro dans tout le domaine d'intégration, on dit que la *condition de Jacobi* est vérifiée. Cela a toujours lieu évidemment pour un intervalle suffisamment petit. Elle est dite avoir lieu *au sens strict* lorsque le point conjugué de P_1 est extérieur à (x_1, x_2), *au sens large* si ce point est extérieur à l'intervalle (x_1, x_2) ou coïncide avec P_2. Lorsque la condition de Legendre est vérifiée au sens strict[174]) $(A > 0)$, et qu'il en est de

171) *Math. Ann. 70 (1911), p. 135/42.*

172) *J. math. pures appl. (1) 1 (1836), p. 131 et suiv. Cf. *G. Darboux*, Théorie des surfaces[79]) 3, p. 95/7; *M. Bôcher*, Trans. Amer. math. Soc. 1 (1900), p. 414/20, 2 (1901), p. 150, 428. Pour établir la théorie de la variation seconde, on invoque d'habitude le théorème de Sturm; *J. Hadamard* [Calcul des variations[6]), p. 330] montre que cette manière de procéder est illogique et que c'est l'inverse qu'il faut faire, ce théorème pouvant et devant se déduire de la théorie de la variation seconde.*

173) Z. Math. Phys. 22 (1877), p. 327.

174) *Il est nécessaire que la condition de Legendre soit vérifiée au sens

même pour le critère de Jacobi, la variation seconde $\delta^2 J_1$ est positive pour toute variation acceptable. *C. G. J. Jacobi* conclut à tort à l'existence d'un extrémé [cf. n° **20**].*

La condition de Jacobi au sens large est nécessaire pour l'existence de l'extrémé: lorsque $x_1' < x_2$, la variation peut, en effet, devenir non seulement nulle, mais même négative. Ceci a été établi, pour la première fois, par *G. Erdmann*[175]).

Soit
$$\Delta(x_1', x_1) = 0 \text{ pour } x_1 < x_1' < x_2.$$
De ce que le quotient q passe entre deux points conjugués par toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, il résulte qu'il y a une valeur ξ_1 pour laquelle
$$\Delta(\xi_1, x_2) = 0, \quad x_1 < \xi_1 < x_1'.$$
Soit $\xi_1 < \xi_2 < x_1'$. On peut alors déterminer une solution u de $\psi(u)$ de manière qu'elle s'annule en x_1 et prenne une valeur positive ε en ξ_2, sans être égale à zéro entre x_1 et ξ_2; ensuite, une solution v de cette même équation de manière qu'elle s'annule en x_2, vaille ε en ξ_2 et ne s'annule pas entre ξ_2 et x_2. *G. Erdmann* parvient alors au résultat en posant
$$\delta y = \varepsilon u \text{ dans l'intervalle } (x_1, \xi_2),$$
$$\delta y = \varepsilon v \text{ dans l'intervalle } (\xi_2, x_2).$$
K. Weierstrass[176]) démontre le fait en mettant la variation seconde sous une forme spéciale et en utilisant certains théorèmes généraux sur les équations différentielles qui contiennent un paramètre.

**L. Scheeffer*[177]) donne une théorie peu différente de celle de *G. Erdmann*: elle consiste à prendre dans l'intervalle $P_1 P_2$ un point C et sur son ordonnée un point voisin C', à tracer les arcs d'extrémales $P_1 C'$ et $C' P_2$, et à considérer la courbe variée formée par ces deux arcs, dont la réunion donne un point anguleux en C'. C'est ce

---

strict, sinon la condition de Jacobi cesse, en général, d'avoir un sens. Le cas d'exception où $f_{y'^2}$ s'annulerait en certains points de λ, présente de grandes difficultés et n'a pas encore été traité, à part certaines indications données par *D. Hilbert,* Cours professé à l'Université de Göttingue en 1904 5.*

175) Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 367 et suiv. *Cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung [11]), p. 83/4; *A. Kneser* [dans l'édition allemande de l'Encyclopédie] appelle „critère de Erdmann“ la condition que le domaine d'intégration ne renferme pas deux points conjugués.*

176) *Dans son cours professé à l'Université de Berlin.* Cf. *G. Kobb,* Acta math. 16 (1892/3), p. 111; **O. Bolza,* Variationsrechnung [11]), p. 82.*

177) Math. Ann. 25 (1885), p. 548.

que *J. Hadamard*[178]) appelle la *construction de Darboux-Erdmann*. Elle conduit à un intéressant critère géométrique[179]): le signe de l'accroissement de l'intégrale en passant de l'extrémale étudiée à la courbe variée se détermine en examinant si le prolongement de l'arc P_1C' est ou non entre P_2C' et P_1P_2 (ou si l'angle des deux arcs d'extrémales en C' tourne sa convexité ou sa concavité vers l'arc primitif P_1P_2). *H. Hahn* désigne la *méthode de Darboux-Erdmann* par le nom de Scheeffer, et l'utilise dans une démonstration du théorème de *W. F. Osgood* [n° 28], dans l'étude du problème spatial, etc. *H. A. Schwarz*[180]) établit la proposition d'une autre manière en mettant $\delta^2 J_1$ sous une nouvelle forme. *H. Hahn*[181]) donne une autre démonstration, mais à propos du problème spatial [voir n° **26**]. Elle dérive de celle de *L. Scheeffer*.

Toutes ces démonstrations exigent que l'inégalité $x_1' < x_2$ ait lieu au sens strict. Mais la condition de Jacobi peut n'avoir lieu qu'au sens large. *G. Erdmann* puis *A. Korn*[182]) ont étudié ce cas en considérant les variations de troisième et quatrième ordres. Se sont aussi occupés de ce cas *A. Kneser*[183]), *W. F. Osgood*[184]), *J. W. Lindeberg*[185]), *D. Hilbert*[186]), *E. J. Miles*[186a]). *H. Hahn*[187]) a, le premier, résolu complètement cette question, en appliquant la méthode de Scheeffer; indépendamment de lui, *J. Hadamard*[188]) a développé les mêmes idées (à l'aide de la *construction de Darboux-Erdmann*[189])).*

*D'autre part, les variations utilisées dans ces démonstrations étant

178) *Calcul des variations[6]) 1, p. 329.*

179) *Id. p. 402 et suiv. Au sujet de la méthode de Darboux-Erdmann, voir le cas des lignes d'intégration fermées [n° **33**].*

180) *Dans son cours professé à l'Université de Berlin en 1898/9: Cf. *A. Sommerfeld,* Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 8¹ (1899), éd. Leipzig 1900, p. 189 et suiv.; *H. Hancock*, Calculus of variations[24]), n° 133; *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 84/5.*

181) *Math. Ann. 70 (1911), p. 130/2.*

182) Sitzgsb. Akad. München 32 (1902), p. 75/90; *cf. id. 30 (1900), p. 235/46; *A. Korn* appelle *cas semi-défini* celui qu'il étudie.*

183) Math. Ann. 50 (1898), p. 50; *Variationsrechnung[11]), p. 93/7.*

184) Trans. Amer. math. Soc. 2 (1901), p. 166 et suiv.

185) *Math. Ann. 59 (1904), p. 321 et suiv.*

186) *Nachr. Ges. Gött. (math.-phys.) 1905, p. 178.*

186a) *Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 35 et suiv.*

187) *Sitzgsb. Akad. Wien 118 IIa (1909), p. 99/116.*

188) *Calcul des variations[6]) 1, p. 407.*

189) *Ces recherches sont traitées, en représentation paramétrique, par des méthodes qui n'utilisent pas la variation seconde. Elles ne sont exposées que plus loin [n° **26**].*

de classe D', ne sont pas acceptables. *O. Bolza*[190]) résout cette objection, en démontrant, à l'aide d'un procédé qu'il appelle *Abrunden der Ecken*, que si l'on sait rendre négative $\delta^2 J$ au moyen de variations de classe D', il est toujours possible de le faire à l'aide de variations de classe C'. Mais ceci rentre, comme cas particulier, dans un théorème général démontré par *J. Hadamard* [nº **8**].*

*La troisième condition nécessaire pour extrémer l'intégrale est donc la condition de Jacobi en vertu de laquelle:

$$\triangle(x, x_1) \gtrless 0 \quad \text{pour} \quad x_1 < x < x_2, \text{ ou } x'_1 \leqq x_2.$$

En remontant des propriétés de la variation seconde à la manière dont s'annulent les solutions des équations aux variations, on est amené à cette double conclusion: la condition de Legendre pour le minimé étant vérifiée,

a) si la variation seconde est positive pour toute variation acceptable δy, une solution de l'équation aux variations ne peut s'annuler plus d'une fois dans l'intervalle donné;

b) si la variation seconde peut être rendue négative, une solution de l'équation aux variations a au moins un zéro intérieur au sens strict à intervalle donné. Les théorèmes que l'on peut obtenir dans cette voie forment un important chapitre de la théorie des équations différentielles[191]).*

18. Conditions de Legendre et de Jacobi pour l'intégrale J_p. *C. E. Lundström*[192]) recherche les conditions de Legendre et de Jacobi pour J_p sans transformer la variation seconde, mais sa théorie n'est pas rigoureuse, surtout là où il cherche à étendre pour l'intégrale J_p les résultats de *L. O. Hesse* sur le critère de Jacobi [nº **17**]. Comparant les ordres de grandeur de δy et $\delta y'$, il montre que les signes de $\delta^2 J_p$ et $\frac{\partial^2 f}{(\partial y^{(p)})^2}$ sont les mêmes pour un intervalle d'intégration suffisamment petit; mais il admet comme évident, ce qui est illégitime, que, lorsqu'on intègre à partir d'un point x_1, il y a une première position x_1' telle que la variation seconde de l'intégrale, prise entre ces limites, peut s'annuler sans que δy soit identiquement nul. Il arrive à écrire correctement le déterminant de degré $2p$ qui est l'analogue du déterminant du

190) *Variationsrechnung[11]), p. 86.*

191) **J. Hadamard*, Calcul des variations[6]), p. 331/4.*

192) Diss. Upsal 1866, en partic. p. 28, 31, 98. Il y est aussi question des recherches analogues pour le problème isopérimétrique le plus simple [nº **41**]. Ces recherches sont quelque peu généralisées, Nova Acta Soc. sc. Upsal. (3) 7 (1870), mém. nº 4 [1869], voir en partic. p. 10, 20.

second degré (20) Les éléments sont ici les dérivées, prises pour $x = x_1$ et $x = x_2$, des quantités

$$y, y', \ldots, y^{(p)}$$

par rapport aux $2p$ constantes d'intégration.

Les recherches de *E. P. Culverwell*[193]) et de *B. Turksma*[194]) se basent sur le même principe que les précédentes. *Les travaux de *G. von Escherich*[195]) sur J_p sont plus rigoureux.* *V. P. Ermakov*[196]) s'appuie sur la méthode de Jacobi-Hamilton généralisée[196a]), mais il ne recherche pas le champ d'existence des solutions de l'équation aux dérivées partielles à laquelle il arrive, et par conséquent la condition de Jacobi n'en résulte pas. *L. Scheeffer* l'établit en même temps pour le cas des dérivées d'ordre supérieur ou pour celui de plusieurs fonctions inconnues.*

*La théorie de la variation seconde, dans le cas d'une seule inconnue se présentant avec des dérivées d'ordre supérieur, est très analogue à celle qui a lieu pour n inconnues avec les dérivées premières. Il suffit, pour celle-ci, de généraliser l'observation de Legendre: trouver une forme quadratique des variations telle qu'en ajoutant sa dérivée par rapport à x à la quantité

$$\sum_{i,k} (A_{i,k}\,\delta y_i'\,\delta y_k' + 2B_{i,k}\,\delta y_i\,\delta y_k' + C_{i,k}\,\delta y_i\,\delta y_k),$$

on obtienne une forme quadratique en δy, $\delta y'$ décomposable en n carrés indépendants, au lieu de $2n$, de formes linéaires en δy, $\delta y'$. On peut aussi étendre au cas de plusieurs fonctions inconnues la méthode basée sur la propriété que possède le système des équations aux variations d'être identique à son adjoint[197]). Ces théories diffèrent très peu de celle qui a lieu pour le problème de Lagrange [n° **49**].*

19. *La variation seconde en représentation paramétrique. L'expression correspondant, en représentation paramétrique, à la forme

193) Philos. Trans. London 178 A (1887), p. 95/129 [1886]; Proc. London math. Soc. (1) 23 (1891/2), p. 241/65.

194) Diss. Amsterdam 1894, p. 18, 22.

195) *Sitzgsb. Akad. Wien 97 II[a] (1888), p. 1416/41; 98 II[a] (1889), p. 1463/1501.*

196) Otčet i protokoly fiziko-matematičeskago obščestva Kievskom universetě [travaux Soc. phys.-math. Univ. Kiev] 31 (1891), mém. n° 9, p. 1/44.

196[a]) Voir plus loin le numéro consacré à cette méthode.

197) *Cf. l'exposé de *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 336/59, en particulier p. 341/3.*

(8) est la suivante:

$$\int (F_{x^2}\delta x^2 + 2F_{xy}\delta x\,\delta y + F_{y^2}\delta y^2 + 2F_{xx'}\delta x\,\delta x' + 2F_{yy'}\delta y\,\delta y'$$
$$+ 2F_{xy'}\delta x\,\delta y' + 2F_{yx'}\delta y\,\delta x' + 2F_{x'^2}\delta x'^2 + 2F_{x'y'}\delta x'\,\delta y' + F_{y'^2}\delta y'^2)\,dt.$$

K. Weierstrass[198]) a exprimé $\delta^2 J_1^{(t)}$ sous la même forme simple qu'en représentation ordinaire. Pour toute fonction w de classe D', s'annulant aux limites de l'arc d'intégration, il obtient, en particulier pour le cas des extrémités fixes, l'expression

$$\delta^2 J_1^{(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left[F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2\right] dt, \tag{21}$$

où

$$F_1 = \frac{F_{x'^2}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'^2}}{x'^2},$$

$$F_2 = \frac{F_{x^2} - y''^2 F_1 - \frac{d}{dt}(F_{xx'} - yy''F_1)}{y'^2} = \frac{-F_{xy} - x''y''F_1 + \frac{d}{dt}(F_{xy'} + x'y''F_1)}{x'y'}$$
$$= \frac{F_{y^2} - x''^2 F_1 - \frac{d}{dt}(F_{y'^2} - x'x''F_1)}{x'^2}.$$

On peut aussi exprimer[199]) F_2 à l'aide de la fonction T [n° **12**]. La quantité w est définie par

$$w = y'\xi - x'\eta,$$

$\xi(t)$, $\eta(t)$ étant des fonctions arbitraires de classe D' et s'annulant aux extrémités t_1, t_2 de l'arc d'intégration. *A. L. Underhill*[200]) obtient, pour la variation seconde, des formes où interviennent des fonctions qui sont invariantes pour une transformation ponctuelle ou pour une transformation paramétrique. Il donne notamment la *forme invariante normale*

$$\delta^2 J_1^{(t)} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - k_0 v^2\right] d\tau,$$

où

$$v = w \cdot F^{1/2} F_1^{1/2},$$

k_0 étant une fonction rationnelle de F, F', F''; F_1, F_1', F_1''; F_2, invariante pour une transformation paramétrique, comme pour une

198) *Cours professé à l'Université de Berlin en 1872.*

199) **A. L. Underhill*, Diss. Chicago 1907. *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 226 en note [cf. n° **29**].*

200) *Diss. Chicago 1907; voir aussi Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 316/38; Bull. Amer. math. Soc. 15 (1908/9), p. 379/84.*

transformation sur x, y[201]). Le nouveau paramètre τ n'est autre que

$$\int_{t_0}^{t} F(x, y, x', y')\, dt.$$

La formule (21) donne la variation seconde sous la même forme que (8) en représentation ordinaire, $A, B, C, \delta y$ étant remplacés respectivement par $F_1, 0, F_2, w$; les conclusions tirées de (8) sont donc valables ici aussi et donnent la condition de Legendre: tout le long de l'arc $t_1 t_2$ de l'extrémale λ, on doit pour un minimé avoir

$$F_1 \geqq 0.$$

Pour rechercher la condition de Jacobi, on suppose[174]) que la condition de Legendre est vérifiée au sens strict.

K. Weierstrass donne le théorème de Jacobi [n° **15**] en représentation paramétrique. L'équation de Jacobi devient

$$F_2 u - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) = 0.$$

Elle a les deux intégrales particulières, linéairement indépendantes,

$$\vartheta_1(t) = g_t f_\alpha - f_t g_\alpha,$$
$$\vartheta_2(t) = g_t f_\beta - f_t g_\beta,$$

en représentant par

$$x = f(t, \alpha, \beta), \quad y = g(t, \alpha, \beta)$$

l'intégrale générale des deux équations différentielles d'Euler; α et β sont deux constantes; les indices α, β, t désignent les paramètres par rapport auxquels se font les dérivations. En posant

$$\Theta(t, t_1) \equiv \begin{vmatrix} \vartheta_1(t) & \vartheta_2(t) \\ \vartheta_1(t_1) & \vartheta_2(t_1) \end{vmatrix},$$

la condition de Jacobi, sous la forme que lui a donnée *K. Weierstrass*, s'exprime en disant que ce déterminant doit rester différent de zéro pour toute valeur de t telle que $t_1 < t < t_2$. *Ch. M. Mason*[202]) démontre que ce déterminant est bien solution de l'équation de Jacobi, en partant de l'équation (6) [n° **12**]. La définition des points conjugués se fait comme au n° **17**; leur signification géométrique est donnée par *K. Weierstrass*[203]).

---

201) **A. L. Underhill* [Bull. Amer. math. Soc. (2) 15 (1909), p. 379] se sert de cette propriété de la fonction k_0 pour remplacer la recherche d'une solution de l'équation de Jacobi par une autre plus simple.*

202) *Bull. Amer. math. Soc. (2) 14 (1908), p. 318 21.*

203) *Cours professé à l'Université de Berlin en 1879; cf. *A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 90.*

Au lieu de partir de l'intégrale générale de l'équation différentielle d'Euler, on peut considérer, avec *A. Kneser*[204]), la famille des extrémales passant par P_1 [cf. nos **17, 26**], et représentée par deux équations en x, y contenant les paramètres t et a. Son déterminant fonctionnel $\triangle(t, a_0)$ satisfait à l'équation de Jacobi et s'annule pour $t = t_1$; c étant une constante non nulle, on a

$$\Delta(t, a_0) = c\Theta(t, t_1).$$

G. A. Bliss[204a]) établit une théorie de la variation seconde dans un système de variables tel que les fonctions se présentant dans la question sont invariantes pour une transformation paramétrique.

Récemment, *J. Radon*[205]) a repris la question de la variation seconde et de la condition de Jacobi pour l'intégrale $J_2^{(t)}$.*

La méthode de Weierstrass et les conditions suffisantes de l'extrémé libre.

20. Critique de la méthode Jacobi-Clebsch. Méthode Weierstrass-Scheeffer pour les conditions suffisantes de l'extrémé faible. La méthode de Jacobi-Clebsch[206]) tient pour évident que l'accroissement de l'intégrale, résultant de la variation des fonctions inconnues, possède le signe de la variation seconde de l'intégrale, dès que sa variation première s'annule, et, de la permanence de ce signe, *sauf l'annulation correspondant à celle des δy_ν, conclut à l'existence de l'extrémé.

L. Scheeffer lui aussi, avait cru d'abord que la seule considération de la variation seconde permet de trouver les conditions suffisantes de l'extrémé. Mais, plus tard[207]), il démontra rigoureusement que les conditions de Legendre et de Jacobi ne constituent pas un critère certain, et que la méthode de Jacobi-Clebsch est insuffisante par le fait qu'elle ne renseigne que sur le signe de la variation seconde[208]).

---

204) *Variationsrechnung[20]), § 31.*

204a) *Trans. Amer. math. Soc. 8 (1907), p. 405 et suiv.*

205) *Sitzgsb. Akad. Wien IIa 119 (1910), p. 1271/8.*

206) *La critique des conclusions de *C. G. J. Jacobi* s'applique à celles de *A. Clebsch* [no **49**]; ils suivent tous deux la même méthode, dite de Jacobi-Clebsch (le premier pour $n = 1$, le second pour n quelconque).*

207) *Math. Ann. 25 (1885), p. 594/5; et surtout 26 (1886), p. 197/208; Ber Ges. Lpz. 37 (1885), math. p. 92/105.*

208) *Il y a un cas où la variation seconde suffit à renseigner sur l'existence de l'extrémé: celui où la quantité sous le signe intégral est du second degré par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées; la somme des variations des deux premiers ordres représente alors rigoureusement la quantité dont s'accroît l'intégrale quand on passe d'une ligne d'intégration à une autre.*

Le défaut du raisonnement réside dans ce qui suit: si, procédant comme au n° 8, on considère la courbe variée comme individu d'une famille à un paramètre ε, en remplaçant y par $y + \varepsilon u$ on obtient respectivement

$$\varepsilon\left(\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \quad \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0},$$

pour les variations première et seconde, d'où l'on ne peut conclure à l'existence de l'extrémé que par rapport aux courbes de la famille, car il se peut qu'un ensemble de courbes, prises dans différentes familles, se rapprochent indéfiniment de l'extrémale considérée comme donnant l'extrémé, alors que cependant l'accroissement de J_1 est de signe contraire à celui de la variation seconde. *L. Scheeffer* illustre ce raisonnement d'un exemple[209]) montrant qu'effectivement la méthode est en défaut même si δy et $\delta y'$ sont, comme d'habitude, très petits.

L. Scheeffer, sur indication de *K. Weierstrass*, fait aussi observer que la méthode des variations suppose que les variations premières des fonctions inconnues (son objection s'applique au cas où il y en a une ou plusieurs), ainsi que leurs dérivées premières, sont très petites, ce que *L. Euler*, *J. L. Lagrange* et leurs successeurs admettaient implicitement en écrivant

$$\delta f(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y'.$$

Ce n'est, en effet, que pour de petits accroissements des quantités variées que le procédé δ se ramène aux opérations de la différentiation.

Mais déjà *A. M. Legendre* avait, pour le problème de *I. Newton*[209a]) [n° **70**], considéré une ligne en zig-zag et ainsi admis que $\delta y'$ n'est pas forcément petit. *I. Todhunter*[210]) semble être le premier à avoir signalé d'une manière générale que si les variations acceptables sont spécialisées par la condition restrictive que $\delta y'$ doit être petit, ce qu'exige la méthode des variations, la notion d'extrémé qui y correspond est aussi particularisée. Il considère, dans des exemples, des variations pour lesquelles les $\delta y'$ sont des quantités finies et montre

---

209) *Il considère l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} [(x-a)^2 y'^2 + (x-a) y'^3]\, dx,$$

où

$$x_1 < a < x_2.^*$$

209a) Voir plus loin le numéro consacré à ce problème.

210) Researches in the calculus of variations principally on the theory of discontinuous solutions, Londres et Cambridge 1871, p. 169; cf. History calculus variations[13]), p. 3, 426; *L. Euler*, Institutiones calculi integralis 3, St Pétersbourg 1770, p. 494.

que les résultats ainsi obtenus peuvent effectivement être en désaccord avec ceux du calcul des variations[211]).

Cela s'explique par le fait que la notion d'extrémé dépend de la manière dont on définit les courbes, ou en général les variétés acceptables, et de leur voisinage. $_*$*E. Zermelo*[32]), en précisant la signification de ce dernier mot, a distingué divers extrémés relatifs [nº **4**].*

Mais si *L. Scheeffer*[212]), probablement après *K. Weierstrass*[213]), a mis en lumière l'insuffisance de la théorie de la variation seconde, en faisant observer que la variation forte s'y dérobe, il a montré[214]) comment, en y apportant certaines modifications, cette théorie est susceptible de fournir les conditions suffisantes pour un minimé faible.

On a d'abord, à l'aide de la forme sous laquelle *C. G. J. Jacobi* [nº **15**] a mis la variation seconde quand la condition de Legendre au sens strict $A > 0$ est satisfaite,

$$|\delta^2 J_1| > c^2 \int_{x_1}^{x_2} \zeta'^2 dx,$$

si l'on pose

$$u\zeta = \delta y,$$

c^2 étant une constante positive indépendante de δy. Si R_3 désigne le terme complémentaire qui suit les termes quadratiques dans le développement taylorien de

$$f(x, y + \delta y, y' + \delta y')$$

suivant δy et $\delta y'$, et si c_1 et c_2 sont des constantes, on a

$$|R_3| < c_1(|\zeta| + \zeta'|)(\zeta^2 + \zeta'^2),$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} R_3\, dx\right| < c_1(\zeta_0 + \zeta_0')\left\{\int_{x_1}^{x_2} \zeta^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \zeta'^2 dx\right\},$$

ζ_0, ζ_0' désignant les bornes supérieures de $|\zeta|$, $|\zeta'|$. *L. Scheeffer* démontre

211) $_*$Déjà *A. L. Cauchy* [C. R. Acad. sc. Paris 37 (1853), p. 57/64; Œuvres (1) 12, Paris 1900, p. 54/63] avait considéré des variations finies, mais à un point de vue tout autre que celui du texte. Il les employait même comme clefs algébriques.*

212) Math. Ann. 25 (1885), p. 594/5.

213) Voir *H. A. Schwarz*, Acta Soc. scient. Fennicae 15 (1888), p. 327 [1885]; Math. Abh. 1, Berlin 1890, p. 235. $_*$C'est en 1870 que *K. Weierstrass* a montré, dans son cours, l'insuffisance des conditions de Legendre et de Jacobi pour l'extrémé fort.*

214) Math. Ann. 26 (1886), p. 197/208, en partic. p. 200. $_*$La démonstration a été donnée par *K. Weierstrass*, dans son cours; cf. *H. Hancock*, Calculus of variations[24]), nºˢ 137/9; voir aussi *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 465/9.*

alors que

$$\int_{x_1}^{x_2} \zeta^2 dx \leqq \left(\frac{x_2 - x_1}{\pi}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} \zeta'^2 dx,$$

pour des fonctions ζ arbitraires; d'où il résulte que

$$\left|\frac{1}{\delta^2 J_1}\int_{x_1}^{x_2} R_3\, dx\right| < c_2(\zeta_0 + \zeta_0'). \tag{23}$$

Mais les quantités ζ_0, ζ_0' deviennent infiniment petites en même temps que les bornes supérieures de δy, $\delta y'$, et comme on a exactement

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \delta y, y' + \delta y')\, dx = J_1 + \tfrac{1}{2}\delta^2 J_1 + \int_{x_1}^{x_2} R_3\, dx,$$

l'équation (23) montre ainsi que l'accroissement de l'intégrale est de même signe que la variation seconde dès que $\delta y, \delta y'$ sont suffisamment petits dans tout le domaine d'intégration. Cela démontre bien que les conditions au sens strict de Legendre et de Jacobi sont suffisantes pour le minimé faible. *Cette démonstration s'étend aisément au cas de plusieurs fonctions inconnues.*

A. Kneser[215]) montre que l'inégalité dont se sert *L. Scheeffer* devient inutile si l'on suit la marche de *J. L. Lagrange* au lieu de celle de *A. M. Legendre* [n° **14**], c'est-à-dire si l'on transforme la variation seconde de manière à faire apparaître sous le signe intégral une somme de deux carrés. Cette méthode est susceptible de généralisation[216]) en appliquant un certain procédé de *A. Clebsch* [n° **51**].

*A part le cas spécial des variations unilatérales [n° **39**], pour lequel la méthode des variations donne des résultats inexacts, cette méthode est donc applicable s'il s'agit d'extrémé faible. Toutefois il est plus simple, même dans ce cas, de rechercher une expression exacte de l'accroissement de l'intégrale, ce qu'ont fait, indépendamment l'un de l'autre, *K. Weierstrass* [n^os **21, 22**] et *G. Darboux* [n° **29**].*

21. Champ d'extrémales. *A. Kneser*[217]) définit, d'après *K. Weierstrass* et *H. A. Schwarz*[218]), un *champ* (*Feld*) d'extrémales d'une intégrale J_1 comme étant une famille

$$y = \varphi(x, \alpha)$$

---

215) *Il considère le cas général de l'intégrale simple,* Math. Ann. 51 (1899), p. 321 suiv.; *voir aussi Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 6¹ (1897), éd. Leipzig 1899, p. 95/8.*

216) *Cf. la méthode de *G. von Escherich*, Math. Ann. 55 (1902), p. 108/18.*

217) *Variationsrechnung[20]), p. 43/6.*

218) Acta Soc. scient. Fennicae 15 (1888), p. 317 [1885]; Math. Abh. 1, Berlin 1890, p. 225.

d'extrémales à un paramètre α, recouvrant sans duplicature un domaine simple du plan.

**J. Hadamard*[219]), appelant *faisceau spécial* ou simplement *faisceau* toute famille d'extrémales à un seul paramètre, remplace la dénomination de champ d'extrémales par celle de *faisceau régulier*[220]). Il dit qu'un faisceau est régulier dans une région déterminée du plan si, les *extrémales spéciales* $\varDelta$ qui le composent s'y comportant régulièrement, on peut faire passer par chaque point de ce domaine une extrémale et une seule, telle que le paramètre α varie continûment avec les coordonnées x, y du point et admette des dérivées partielles par rapport à ces coordonnées[221]).

O. Bolza[222]) appelle α, considéré comme fonction de x, y, la *fonction inverse du champ.*

L'arc $P_1 P_2$ de λ est dit *entouré d'un champ*[223]) s'il existe au moins un champ dont λ fait partie, la zône de régularité R (au sens de *J. Hadamard*) ayant la forme d'une bande traversée longitudinalement par λ et terminée par deux ordonnées dans le cas d'une variable indépendante, à extrémités arrondies dans le cas de la forme paramétrique. Une courbe L joignant les points P_1, P_2 est entièrement contenue dans R, si son voisinage avec l'extrémale λ est suffisamment étroit. Si la condition de Jacobi au sens strict

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} \gtrless 0$$

est vérifiée sur λ, c'est-à-dire si le point conjugué P_1' de P_1 est au delà de P_2, un voisinage suffisamment étroit de λ pourra toujours être recouvert (autrement dit, l'arc pourra toujours être entouré) d'un champ. Un tel champ est toujours fourni par la famille des extrémales $\varDelta$ passant par un point P' situé sur le prolongement de l'arc $P_1 P_2$ au delà de P_1 mais assez voisin de P_1.*

*Parfois, on fait partir les extrémales $\varDelta$ du point P_1. C'est ce

---

219) *Calcul des variations[6]) 1, p. 361; voir aussi la préface. Comme *J. Hadamard,* emploie la locution *champ fonctionnel* pour désigner l'ensemble des fonctions acceptables, il devait inévitablement changer la terminologie de *K. Weierstrass,* à moins qu'on trouve un synonyme pour champ fonctionnel.*

220) *L'expression de champ d'extrémales étant encore adoptée généralement, nous emploierons ce terme dans cet article.*

221) *Il s'agit ici de *champs fermés,* mais, comme l'indique *O. Bolza* [Variationsrechnung[11]), p. 97], on pourrait considérer des *champs ouverts* ou *infinis.**

222) *Variationsrechnung[11]), p. 97. Il appelle *Gefällfunktion* du champ, le coefficient angulaire de l'extrémale en un point (x, y).*

223) *On dit aussi, avec *O. Bolza,* que le „champ entoure l'extrémale".*

que fait toujours *K. Weierstrass.* Dans ce cas, α n'est plus fonction continue de la position d'un point sur une extrémale spéciale; le faisceau n'est donc plus régulier (au sens de *J. Hadamard*): on n'a plus un champ proprement dit. On ne peut d'ailleurs plus affirmer de manière générale que ce faisceau réalise un voisinage de l'arc $P_1 P_2$. *O. Bolza*[224]) dit que le *champ* est *impropre* (*uneigentliches Feld*). Mais l'intégrale prise suivant l'extrémale spéciale reste continue. Quoi qu'il en soit, le tracé de l'extrémale Λ, lorsqu'on donne le point, se nomme la *construction de Weierstrass* relative au problème.

La notion de champ se généralise aisément au cas de n fonctions inconnues; les extrémales dépendent alors de $2n$ paramètres. *J. Hadamard*[225]) appelle, dans ce cas, *faisceau spécial* une famille à n paramètres composée d'extrémales Λ coupant transversalement une multiplicité Γ définie, en général, par une seule équation entre les $n+1$ coordonnées. Au lieu de faisceau spécial, on dit aussi famille d'extrémales de *A. Mayer* [cf. le problème de Lagrange, n° **55**].

Lorsque $n > 1$, une famille quelconque à n paramètres ne donne pas nécessairement un faisceau[226]). La régularité se définit comme pour $n = 1$[227]).

Dans le cas des dérivées d'ordre supérieur jusqu'à p (J_p), les extrémales dépendent de $2p$ paramètres; on dit alors que l'arc d'extrémale $P_1 P_2$ est *entouré d'un champ,* s'il existe une famille à p paramètres d'extrémales Λ, telle que, pour une ligne quelconque L ayant avec λ un voisinage d'ordre $p-1$ défini par le nombre positif ε, et pour un point M quelconque de L ayant une abscisse comprise entre x_1 et x_2, on puisse trouver une extrémale Λ et une seule de la famille ayant un contact d'ordre $p-1$ avec L au point M, extrémale qui varie continûment avec le point M et les valeurs de $y', \ldots, y^{(p-1)}$ en ce point.

La méthode de Weierstrass, dans son état actuel, ne s'applique qu'au cas où la ligne L est assujettie à avoir, avec l'extrémale étudiée λ, un voisinage d'ordre au moins égal à $p-1$. Si les courbes variées étaient à points anguleux, l'extrémé serait en général impossible, la

224) *Calculus of variations [11]), p. 83; Variationsrechnung [11]), p. 98.*

225) *Calcul des variations [6]) 1, p. 363.*

226) *En particulier, une famille de courbes à deux paramètres n'admet de surface transversale (ou même orthogonale) que si une certaine condition, exprimée par une équation aux dérivées totales, est satisfaite. Cf. *G. Darboux,* Leçons sur la théorie des surfaces 2, Paris 1889, p. 256.*

227) *Lorsqu'une extrémale variable reste transversale à une surface fixe, elle reste transversale à une infinité d'autres surfaces.*

variation première ne pouvant être annulée. On peut supposer y exprimé en fonction de x, la représentation paramétrique n'offrant plus aucun avantage. La condition que l'extrémale soit entourée d'un champ exige encore que la condition de Jacobi soit satisfaite, c'est-à-dire qu'un certain déterminant fonctionnel soit différent de zéro [n° **18**].

Pour le cas particulier de l'intégrale $J_2^{(t)}$, *J. Radon*[228]) a, en vue de l'étude de ce qu'il appelle l'*extrémé demi-fort*[229]), considéré la famille d'extrémales de Mayer [voir le problème de Lagrange n° **55**].*

22. La formule fondamentale de Weierstrass. *K. Weierstrass,* utilisant la formule d'Euler, en particulier la formule aux limites [n° **9**], met la *variation totale*

$$\Delta J = J_L - J_\lambda$$

sous forme d'une intégrale unique prise suivant L.

Lorsque l'extrémale considérée λ peut être entourée d'un champ, on a, pour toute courbe acceptable L située tout entière dans le champ,

$$\Delta J_1 = \int_{L\,x_2}^{x_1} \mathcal{E}(x, y, Y, y')\, dx.$$

*C'est la *formule de Weierstrass,* $\mathcal{E}$ étant dite *fonction de Weierstrass.** Cette fonction est définie par[230])

$$\mathcal{E}(x, y, Y, y') = f(x, y, y') - f(x, y, Y) - (y' - Y) f_Y(x, y, Y),$$

x, y, Y, y' étant considérées comme variables indépendantes; (x, y) est un point de L, y' le coefficient angulaire de L en ce point, Y celui de l'extrémale spéciale Λ du champ, passant par le point (x, y).

**K. Weierstrass*[231]) n'a donné sa formule qu'en représentation paramétrique:

$$\Delta J_1^{(t)} = \int_{L\,x_1}^{x_2} \overline{\mathcal{E}}(x, y, \overline{X}, \overline{Y}, x', y')\, dt,$$

où la fonction de Weierstrass

$$\overline{\mathcal{E}}(x, y, \overline{X}, \overline{Y}, x', y') = F(x, y, x', y') - x' F_{\overline{X}} - y' F_{\overline{Y}},$$

en désignant[232]) par x', y' les dérivées de x et y par rapport au paramètre t; ces quantités sont relatives à la ligne L, tandis que $\overline{X}, \overline{Y}$ sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente à Λ au point M.*

228) *Sitzgsb. Akad. Wien 119 IIª (1910), p. 1259 et suiv., en partic. p. 1306/14.*

229) Voir note 36.

230) Cf. *E. Zermelo,* Diss. Berlin 1894, p. 66.

231) *Dans un cours professé à l'Université de Berlin en 1879.*

232) **J. Hadamard*[6]) les désigne par $\dot{x}$, $\dot{y}$.

$_*$La fonction $\overline{\mathcal{E}}$ est homogène (positivement) et de degré 0 par rapport à $\overline{X}, \overline{Y}$; elle est de degré 1 par rapport à x', y'.

Dans le cas du champ impropre et spécial que considère *K. Weierstrass*, la quantité Y est indéterminée en P_1.

H. A. Schwarz[233]) a, le premier, démontré le théorème fondamental de Weierstrass pour un champ proprement dit (quelconque).

Les quantités $\mathcal{E}, \overline{\mathcal{E}}$ sont nulles si les deux directions (de demi-droites) dont elles dépendent (respectivement de coefficients angulaires Y, y' ou de cosinus directeurs $\overline{X}, \overline{Y}$; x', y') coïncident. On dit alors, avec *A. Kneser*[234]), que ces fonctions s'annulent *ordinairement* (*in ordentlicher Weise*); dans le cas contraire, elles sont dites s'annuler *extraordinairement*.

E. Zermelo donne une interprétation géométrique élégante pour la fonction $\mathcal{E}$. Il construit la courbe[235]) dont l'équation en coordonnées rectangulaires u, y' est

$$u = f(y'),$$

la fonction f de x, y, y' étant ici considérée comme fonction de y' seul. Aux deux directions de coefficients angulaires y' et Y, correspondent deux points de cette courbe, l'un de coordonnées y' et $f(y')$, l'autre de coordonnées Y et $f(Y)$. *E. Zermelo* montre que pour que $\mathcal{E}$ ait un signe permanent quel que soit y' au point considéré, il faut et il suffit que la courbe soit tout entière d'un même côté de sa tangente au point $(Y, f(Y))$. Le signe de $\mathcal{E}$ est alors déterminé par celui de $\frac{d^2u}{dY^2}$.

C. Carathéodory[236]) dit qu'un problème de variations est *défini-positif* [*positiv-definit*] dans un ensemble R de points du plan quand, pour tout point de cet ensemble et pour toute valeur de γ, on a[237])

$$F(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0.$$

Se bornant au cas défini-positif, il considère, en représentation paramétrique, l'interprétation géométrique précédente et appelle la courbe

233) Math. Abh. 1, Berlin 1890, p. 225 et suiv. Cf. *E. Zermelo*, Diss. Berlin 1894, p. 87/8.* Pour divers exposés de démonstrations de la formule de Weierstrass, voir *W. F. Osgood*, Annals of math. (2) 2 (1900/1), p. 115 et suiv.; *E. R. Hedrick*, Bull. Amer. math. Soc. 9 (1902/3), p. 11/24; *V. P. Ermakov*[27]), $_*$*E. Goursat*, Cours d'analyse math. (1re éd.) 2, Paris 1905, p. 607; *O. Bolza*, Calculus of variations[11]), p. 84/91.*

234) $_*$Variationsrechnung[20]), p. 78.*

235) Diss. Berlin 1894, p. 67 et suiv. $_*$La courbe avait été considérée auparavant en optique.*

236) $_*$Diss. Göttingue 1904, p. 69 et suiv.; Math. Ann. 62 (1906), p. 456/61.*

237) $_*$*Ph. Frank* [Monatsh. Math. Phys. 20 (1909), p. 273/8] dit que le problème est *indéfini* dans un domaine D, quand en tout point de D la fonction F s'annule pour une direction (x', y') au moins.*

indicatrice[238]). Considérée pour un point de coordonnées x_0, y_0 du domaine R, elle a pour équation, en coordonnées polaires,

$$\varrho F(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta) = 1.$$

La fonction

$$\mathcal{E}(x, y, \cos\overline{\theta}, \sin\overline{\theta}, \cos\theta, \sin\theta)$$

est positive ou négative suivant que le point θ de l'indicatrice est ou non du même côté de la tangente au point $\overline{\theta}$ que le *pôle* (appelé *Grundpunkt*).

J. Hadamard[239]) appelle *figurative* du problème l'indicatrice de *C. Carathéodory*.

A. Kneser[240]) et *A. E. H. Love*[241]) donnent d'élégantes démonstrations géométriques du théorème fondamental de Weierstrass.

A. L. Underhill[242]) démontre que la fonction $\overline{\mathcal{E}}$ est invariante pour certaines transformations [cf. n° **19**].

La formule de Weierstrass est valable dans le cas des dérivées d'ordre supérieur, à condition de définir la fonction $\mathcal{E}$ par la relation

$$\mathcal{E}[x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}; Y, y^{(p)}] = f(x, y, \ldots, y^{(p)}) - f(x, y, \ldots, y^{(p-1)}, Y) - (y^{(p)} - Y) f_Y(x, y, \ldots, y^{(p-1)}, Y).^*$$

De même pour n fonctions inconnues, on a, x étant variable indépendante,

$$\mathcal{E}(x; y_1, \ldots, y_n; Y_1, \ldots, Y_n; y_1', \ldots, y_n') = f(x; y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') - f(x; y_1, \ldots, y_n; Y_1, \ldots, Y_n) - \sum_{i=1}^{i=n}(y_i' - Y_i) f_{Y_i};$$

238) *On dit aussi „Aichkurve" [cf. *G. Hamel*, Diss. Gött. 1901, p. 52; Math. Ann. 57 (1903), p. 253, 263]. Au sujet de l'indicatrice, voir encore *A. Dresden*, The Amer. math. Monthly 14 (1907), p. 119/26, 141/50.*

239) *Calcul des variations[6]), p. 75, 371. *J. Hadamard* introduit la figurative, à propos de l'objection de *P. du Bois-Reymond*, pour $n = 1$ ou 2, en représentation ordinaire ou paramétrique. Dans ce dernier cas, pour $n = 2$ [p. 90], la figurative peut être considérée comme étant une nappe d'une surface conique dont le sommet est à l'origine, ou bien comme une courbe plane en coordonnées homogènes. Il appelle *figuratrice* sa polaire réciproque par rapport à un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon vaut l'unité. Cette courbe, dont l'utilité avait été indiquée par *H. Minkowski* dans ses cours professés à l'Université de Göttingue, trouve une interprétation simple dans le problème isopérimétrique. La substitution, faite par *J. Hadamard*, d'un autre terme au mot indicatrice, a pour but d'éviter l'amphibologie qui pourrait résulter de l'emploi qu'il fait de l'indicatrice (au sens classique) de la figurative dans le cas de l'espace.*

240) *Variationsrechnung[20]), p. 78/80.*

241) *Proc. London math. Soc. (2) 6 (1908), p. 205/9. Voir aussi *T. Yoshiye*, Tōkyō Sūgaku-Butsuri gakkwai Kiji-Gaiyō (2) 2 (1903/4), p. 5/8.*

242) *Diss. Chicago 1907; Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 329 et suiv.*

et, dans le cas de la forme paramétrique,

$$\mathcal{E}(y_1, \ldots, y_{n+1}; \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_{n+1}; y_1', \ldots, y_{n+1}')$$
$$= F(y_1, \ldots, y_{n+1}; y_1', \ldots, y_{n+1}') - \sum_{i=1}^{i=n+1} y_i' F_{\overline{Y}_i}.$$

23. Méthode de Hilbert. **D. Hilbert*[243]) recherche directement, sans utiliser la formule aux limites, si la différence

$$J_L - J_\lambda$$

peut s'exprimer par une intégrale unique prise suivant la ligne variée L. Il montre qu'inversement la formule de Weierstrass permet de retrouver la formule aux limites relative à la variation de l'intégrale suivant une extrémale.* Au lieu de l'intégrale donnée J_1, il considère[244])

$$J_1^* = \int \{f(x, y, Y) + (y' - Y) f_Y(x, y, Y)\}\, dx$$

et détermine Y, comme fonction de x et de y, de manière à rendre cette intégrale indépendante du chemin d'intégration. Il obtient ainsi, pour la fonction Y, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire en Y

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + Y \frac{\partial Y}{\partial y}\right) f_{Y^2} + Y f_{Yy} + f_{Yx} - f_y = 0,$$

dont les caractéristiques sont les extrémales du problème. On obtient une solution Y quand, partant d'un faisceau régulier quelconque d'extrémales, on construit en tout point (x, y) du champ la dérivée $\frac{dy}{dx}$, prise suivant l'extrémale passant par ce point[245]).

*L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_{y'}] = \frac{\partial}{\partial y}[f - y' f_{y'}],$$

si l'on convient de remplacer, dans les fonctions de x, y, y' placées entre crochets, l'argument y' par Y. Cette égalité n'est autre chose que la condition d'intégrabilité de l'expression différentielle

$$[f - y' f_{y'}]\, dx + [f_{y'}]\, dy.\text{*}$$

---

243) C. R. du deuxième congrès intern. math. Paris 1900, publ. par *E. Duporcq*, Paris 1902, p. 106 et suiv.; Nachr. Ges. Gött. (math.-phys.) 1900, p. 291/6; Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 231 et suiv.; *trad. anglaise par *Mary W. Newson*, Bull. Amer. math. Soc. 8 (1901/2), p. 437/79.*

244) *J_1 est appelée „Grundintegral" et J^* „Feldintegral" par *E. Zermelo* et *H. Hahn* [Encyklopädie der math. Wiss. II 1, p. 628]. *O. Bolza* [Variationsrechnung[11])] adopte ces dénominations, mais il dit aussi „intégrale invariante de Hilbert" au lieu de „Feldintegral".*

245) **O. Bolza* [Variationsrechnung[11]), p. 97] appelle la dérivée „Gefällfunction" [cf. note 222].*

D'où le *théorème d'indépendance* (*Unabhängigkeitssatz*), ainsi appelé par *D. Hilbert.*

L'intégrale de Hilbert prise entre deux points quelconques d'une même *transversale*, courbe dont la direction en chaque point annule les termes aux limites, est identiquement nulle, tandis que sur toute extrémale du champ elle se réduit à J_1 prise entre les mêmes points de la même extrémale. Considérée comme fonction du point extrême supérieur, elle est identique à la fonction u de *A. Kneser* [n° **29**].

$_*$Le théorème d'indépendance, qui admet plusieurs généralisations[245a]), a été découvert par *E. Beltrami*, dans un mémoire sur les lignes géodésiques[246]). *A. Kneser*[247]) a calculé les dérivées partielles de J_1^*, sous forme paramétrique; d'où l'on déduit le théorème. *G. A. Bliss*[248]) donne, aussi en représentation paramétrique, une démonstration plus voisine de celle de *D. Hilbert.**

En vertu du théorème d'indépendance, l'intégrale J_1 sur un arc d'extrémale peut être exprimée comme l'intégrale de Hilbert sur une courbe variée L, d'où *D. Hilbert* déduit aisément la formule de Weierstrass.

$_*$Le théorème d'indépendance est appliqué par *D. C. Gillespie*[249]) à la recherche des solutions de l'équation différentielle d'Euler.*

24. Conditions de Weierstrass. A l'aide de la formule de Weierstrass, on ramène la question de l'extrémé à la détermination du signe de la fonction $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}$. Il suffit que ΔJ soit essentiellement positif ou essentiellement négatif, ce qui a lieu si $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}$ conserve un signe déterminé le long de toute ligne variée acceptable L. $_*$Cette question relève uniquement de l'algèbre et du calcul différentiel.* La direction de la tangente à L en M est très voisine de celle de λ, s'il s'agit d'un minimé faible; quelconque, s'il s'agit d'un minimé fort.

Si l'arc d'extrémale λ est entouré d'un champ, il suffit, pour un minimé faible, que la fonction $\mathcal{E}$ soit positive pour tout point voisin de λ et pour tout couple de deux directions faisant chacune un angle

---

245a) $_*$Voir les numéros consacrés au problème de Lagrange et aux intégrales doubles.*

246) $_*$Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 1 (1868), p. 708/18; Opere **1**, Milan 1902, p. 366/73. Ce théorème est resté ignoré des auteurs de calcul des variations et ce n'est que 30 ans après qu'il a été redécouvert par *D. Hilbert*, qui en a saisi l'importance. *O. Bolza* [Variationsrechnung[11]), p. 108] appelle ce théorème, le „théorème d'indépendance de Beltrami-Hilbert".*

247) $_*$Variationsrechnung[11]), p. 43 8, 74/7.*

248) $_*$Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 121.*

249) $_*$Diss. Göttingue 1906. Il considère en particulier [Bull. Amer. math. Soc. 13 (1906/7), p. 345/8] le cas où F et sa dérivée conduisent aux mêmes extrémales.*

très petit avec λ; *c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif ε tel que les inégalités

$$(24)\qquad \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ |y - \psi(x)| < \varepsilon, \\ |Y - \psi'(x)| < \varepsilon, \\ |y' - \psi'(x)| < \varepsilon, \end{cases}$$

$\psi(x) = y$ étant l'équation de l'extrémale λ, entraînent

$$\mathcal{E}(x, y, Y, y') \geqq 0.$$

C'est la *condition de Weierstrass pour le minimé faible.* S'il y a n fonctions inconnues, chacune des trois dernières inégalités (24) doit être remplacée par les n inégalités analogues où les lettres y, y', Y, ψ, ψ' sont affectées de l'indice i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dans le cas de la forme paramétrique, on doit substituer à ces mêmes inégalités, les suivantes:

$$\overline{MN} < \varepsilon, \quad \widehat{T, \tau} < \varepsilon, \quad \widehat{t, \tau} < \varepsilon,$$

t, T étant les directions de L et de $\varDelta$, dont dépend la fonction $\overline{\mathcal{E}}$; τ celle de la tangente en un point N de l'extrémale λ.*

De même, si l'arc considéré est entouré d'un champ d'extrémales, il suffit, pour le minimé fort, que la fonction de Weierstrass soit positive pour tout point d'un certain voisinage de λ et pour tout couple de deux directions dont la première fait un angle très petit avec λ; *c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif ε tel que, par exemple, les trois premières inégalités (24) entraînent

$$\mathcal{E} \geqq 0 \quad \text{ou} \quad \overline{\mathcal{E}} \geqq 0.$$

C'est la *condition de Weierstrass pour le minimé fort.**

*L'une ou l'autre des deux conditions de Weierstrass peut avoir lieu au sens *large* ou au sens *strict*, suivant que l'inégalité correspondante a elle-même lieu au sens large ou au sens strict lorsque les deux directions dont dépend $\mathcal{E}$ ou $\overline{\mathcal{E}}$ sont distinctes, c'est-à-dire suivant que cette quantité peut ou non s'annuler extraordinairement [n° 22]. La condition de Weierstrass n'a été utilisée qu'au sens large.

W. Blaschke[250]) rend intuitives les conditions de Legendre et de Weierstrass à l'aide de la figuratrice[239]). Il donne une interprétation géométrique analogue pour le problème spatial [cf. n^{os} **52, 53**].*

**E. E. Levi*[251]) donne une autre démonstration du fait que la

250) *Archiv Math. Phys. (3) 20 (1912), p. 30/4.*

251) *Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 20 II (1911), p. 425/31, 466/9 (Texte et note de *G. Loria*).*

condition de Weierstrass est suffisante; cette démonstration n'est pas fondée sur la considération du champ d'extrémales et sur la formule de Weierstrass: elle se rattache aux méthodes signalées au nº **20** pour la détermination des conditions suffisantes pour l'extrémé faible.*

E. E. Levi[252]) fait une étude analogue pour l'extrémé fort de l'intégrale $J_1^{(i)}$.

H. Poincaré[253]) exprime la condition de Weierstrass (au sens strict ou au sens large) pour le minimé, en écrivant que l'expression

$$f(y_1, \ldots, y_n, Y_1 + \varepsilon_1, \ldots, Y_n + \varepsilon_n; x) - \sum_{(i)} \varepsilon_i f_{Y_i}$$

a, comme fonction des ε, un minimé (strict ou large) pour

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots \varepsilon_n = 0,$$

minimé dans un intervalle s'il s'agit de la condition de Weierstrass pour le minimé fort, en un point pour le minimé faible.

Dans le cas des dérivées d'ordre supérieur, considéré par *E. Zermelo*[254]), pour que l'arc $P_1 P_2$ de l'extrémale λ, entouré d'un champ, réalise le minimé fort de J_p, il suffit que, ε étant pris suffisamment petit, la fonction $\mathcal{E}$ soit positive moyennant les inégalités

$$\begin{gathered} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ |y^{(\varkappa)} - \psi^{(\varkappa)}(x)| < \varepsilon \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1), \\ |Y - \psi^{(p)}(x)| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Les inégalités en $\varkappa$ expriment le voisinage d'ordre $p-1$ entre L et λ. Pour le minimé faible de J_p, la condition de Weierstrass est que, ε étant suffisamment petit, $\mathcal{E}$ soit positive moyennant les inégalités précédentes et en plus

$$|y^{(p)} - \psi^{(p)}(x)| < \varepsilon,$$

ces inégalités exprimant le minimé d'ordre p.*

25. Conditions nécessaires. Conditions suffisantes[255]). *On conclut de ce qui précède que la ligne λ fournit un minimé faible de J_1 entre les points P_1, P_2, si elle est une extrémale, si elle est entourée d'un champ (condition de Jacobi au sens strict) et si la condition de Weierstrass pour le minimé faible est vérifiée. Elle fournit un minimé fort si elle est une extrémale entourée d'un champ et si la condition de Weierstrass pour le minimé fort est vérifiée. Si la

---

252) *Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 20 II (1911), p. 541/7; (5) 21 I (1912), p. 30/5. *E. E. Levi* annonce des développements ultérieurs pour les autres problèmes.*

253) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 3, Paris 1899, p. 261.*

254) Diss. Berlin 1894.

255) *Cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung [11]), p. 127/8.*

fonction de Weierstrass ne s'annule qu'ordinairement, dans le champ, le minimé est strict[256]).

La nécessité de la condition de Weierstrass au sens large, déjà établie par *K. Weierstrass* dans un de ses cours, est démontrée par *O. Bolza*[257]), *E. Goursat*[258]), *J. W. Lindeberg*[259]).

Alors que la condition nécessaire de Weierstrass ne s'applique qu'aux points de l'extrémale λ, la condition suffisante se rapporte, elle, à tous les points du voisinage de cette extrémale.

Pour les applications, les conditions qui résultent du théorème fondamental de Weierstrass ne sont pas toujours pratiques. Souvent il est plus aisé d'utiliser, comme conditions suffisantes, celles exprimées à l'aide de $f_{y'^2}$.

Conformément à ce qu'avait fait *K. Weierstrass* dans son cours, *E. Zermelo*[260]), appliquant à

$$f(x, y, y') - f(x, y, Y)$$

l'expression du reste dans la formule de Taylor, trouve que la fonction de Weierstrass pour l'intégrale J_1 peut s'écrire

$$\mathcal{E}(x, y, Y, y') = \tfrac{1}{2}(y' - Y)^2 f_{\eta^2}, \tag{25}$$

où

$$\eta = Y + \theta(Y - y'), \qquad 0 < \theta < 1.$$

E. Zermelo[260]) donne l'interprétation géométrique de cette relation.

De même, pour n fonctions inconnues, on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\sum_{(i,k)}(y_i' - Y_i)(y_k' - Y_k)\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_i \partial \eta_k},$$

et pour J_p

$$\mathcal{E}(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, Y, y^{(p)}) = \tfrac{1}{2}(y^{(p)} - Y)^2 f_{\eta^2}(x, y, \ldots, y^{(p-1)}, \eta),$$

η étant une quantité comprise entre $y^{(p)}$ et Y.

Il résulte de la formule (25) pour J_1 qu'on peut remplacer la condition suffisante de Weierstrass par celle de Legendre vérifiée au sens strict en tout point de la bande R et pour les directions suffisamment peu inclinées sur la tangente à λ, condition pour le minimé faible, ou pour toutes les directions, condition suffisante pour le minimé fort. Une conclusion analogue a lieu dans le cas de plusieurs fonctions inconnues.

256) *A. Kneser,* Variationsrechnung[20]), p. 80/1; cf. *W. F. Osgood,* Annals of math. (2) 2 (1900 1), p. 118.

257) *Calculus of variations[11]), p. 75/6.*

258) *Cours d'analyse math., (1re éd.) 2, Paris 1905, p. 609/10.*

259) *Öfversigt Finska Vetenskaps Soc. Förhandlingar 47 (1904/5), mém. n° 2.*

260) *Diss. Berlin 1894, p. 67.*

Dans un problème régulier, où l'on a pour J_1 [nº 9]

$$f_{y'^2}(x, y, y') \neq 0$$

en tout point du domaine R et pour toute valeur finie de y', il suffit, pour qu'un minimé fort ait lieu, que l'arc λ ne renferme pas le point conjugué P_1' de P_1.

Dans le cas du minimé faible, on peut passer de la condition de Legendre sur l'extrémale elle-même à cette condition prise dans R. La condition de Legendre au sens large sur λ est nécessaire, et au sens strict est suffisante, pour qu'on ait la condition de Weierstrass pour le minimé faible. Dans l'exemple de *L. Scheeffer*, la condition au sens large n'entraîne pas la condition de Weierstrass. La condition de Legendre, vérifiée sur l'arc d'extrémale, est donc équivalente à celle de Weierstrass pour le minimé faible, aux cas limites près.

Si la condition de Legendre n'est pas vérifiée, même au sens large, il n'y a pas de minimé quel que soit l'ordre du voisinage. Mais celui-ci joue un rôle lorsque la fonction $f_{y'^2}(x, y, y')$, en général positive, s'annule en certains points de l'extrémale étudiée. Dans l'exemple de Scheeffer, un minimé a lieu si la ligne variée, à tangente continue, possède, avec l'extrémale étudiée, un voisinage du second ordre[261]). Une remarque analogue peut être faite pour la condition de Jacobi [nº 26].

Dans le cas du minimé fort, on ne peut remplacer la direction de la courbe variée par celle de la tangente à l'extrémale considérée. Si les deux directions sont opposées, la formule correspondant à (25) pour la représentation paramétrique, n'est pas applicable.

K. Weierstrass[262]), pour éviter ce cas d'exception, remplace x', y' par $\cos\theta$, $\sin\theta$, et $\overline{X}, \overline{Y}$ par $\cos\Theta$, $\sin\Theta$, ce qui lui permet d'obtenir pour $\mathcal{E}$ une nouvelle expression qui fait connaître sa valeur même quand les deux directions dont elle dépend sont opposées. *J. Hadamard*[263]) arrive au même but sous une autre forme. On déduit de l'expression obtenue par *K. Weierstrass* que la fonction

$$\overline{\mathcal{E}}_1 \equiv \frac{\overline{\mathcal{E}}(x, y, \overline{X}, \overline{Y}, x', y')}{1 - \cos(\Theta - \theta)},$$

correspondant à

$$\mathcal{E}_1 \equiv \frac{\mathcal{E}(x, y, Y, y')}{(y' - Y)^2},$$

---

261) *J. Hadamard*, Calcul des variations 1, p. 410.*

262) *Cours professé à l'Université de Berlin en 1882. Cf. *E. Zermelo*, Diss. Berlin 1894, p. 60; *O. Bolza*, Calculus of variations[11]), p. 140/1; *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 374/5.*

263) *Calcul des variations[6]) 1, p. 376.*

est continue par rapport aux quatre paramètres, même quand les deux directions coïncident.

J. Hadamard[264]) appelle *condition de Weierstrass modifiée* la condition que $\mathfrak{E}_1$ ou $\overline{\mathfrak{E}_1}$ ait un signe déterminé, et il dit qu'elle a lieu au sens strict si $\mathfrak{E}_1$ ou $\overline{\mathfrak{E}_1}$ ne s'annulent pas quelles que soient les directions dont elles dépendent. Cette condition est suffisante pour que la condition primitive ait lieu au sens strict, mais l'inverse n'est pas vrai.*

A l'aide de la formule en θ pour $\overline{\mathfrak{E}_1}$, on voit que, même dans le cas de l'extrémé fort, on peut, pour la condition de Weierstrass comme pour celle de Legendre, induire des résultats sur λ ceux qui ont lieu dans la région voisine R. Mais cela n'est vrai que pour la forme paramétrique, car, dans le cas du minimé fort, y' peut devenir infini et, dans ces conditions, un théorème de continuité, que l'on invoque dans la démonstration, n'est plus applicable. Les conditions de Legendre, Jacobi et Weierstrass ne sont donc pas suffisantes, si la dernière n'a lieu que sur l'extrémale elle-même. *O. Bolza*[265]) le montre, le premier, sur un exemple. *E. R. Hedrick*[266]) fait diverses remarques relatives à cette singularité. *O. Bolza*[267]) donne une condition nécessaire nouvelle. *A. Rosenblatt*[268]) montre, sur deux intégrales, qu'elle n'est pas suffisante, point que *O. Bolza* considérait comme douteux. L'une de ces intégrales, que *A. Rosenblatt* discute d'une manière détaillée, est imaginé d'après l'exemple de *G. Peano* dans la théorie des extrémés ordinaires de plusieurs variables. *H. Hahn*[269]) donne, indépendamment de *A. Rosenblatt* et en même temps que lui, un exemple analogue.*

*Exprimées à l'aide des conditions de Legendre, les conditions suffisantes s'énoncent ainsi: il suffit que l'arc P_1P_2 appartienne à une extrémale, soit entouré d'un champ et, s'il s'agit de l'extrémé faible,

264) *Calcul des variations[6]) 1, p. 394.*

265) Bull. Amer. math. Soc. 9 (1902/3), p. 1/10, en partic. p. 9. *L'exemple est l'intégrale

$$\int_0^1 (ay'^2 - 4byy'^3 + 2byy'^4)\,dx,$$

les constantes a et b étant positives.*

266) Bull. Amer. math. Soc. 9 (1902/3), p. 245/7; *voir aussi *J. Hadamard,* Calcul des variations[6]) 1, p. 395/7.*

267) *Trans. Amer. math. Soc. 7 (1906), p. 314/24; cf. *C. Carathéodory,* Archiv Math. Phys. (3) 10 (1906), p. 185.*

268) **O. Bolza,* Variationsrechnung[11]), p. 696/7; *A. Rosenblatt,* Archiv Math. Phys. (3) 15 (1909), p. 285; Math. Ann. 68 (1910), p. 552/7 [1909].*

269) *Monatsh. Math. Phys. 20 (1909), p. 279/84.*

vérifie, en chacun de ses points et pour la direction de la tangente en ce point, la condition de Legendre au sens strict; s'il s'agit de l'extrémé fort et de la forme paramétrique, vérifie en chacun de ses points et pour toute direction autour de ce point, la condition de Legendre au sens strict: $F_1 > 0$, sous forme paramétrique, et, dans le cas de la forme ordinaire, satisfasse en chaque point de la région voisine R, et pour toute direction autour de ce point, à la condition de Legendre au sens strict.

J. W. Lindeberg[270]) démontre, en représentation ordinaire, que si le coefficient angulaire des courbes acceptables est soumis à certaines limitations, on peut encore déduire les conditions suffisantes à l'aide du théorème de Weierstrass. Des résultats de *J. W. Lindeberg* découlent diverses conséquences, dont l'une est que les conditions de Legendre et de Jacobi, prises au sens strict, sont suffisantes pour un extrémé faible.

G. A. Bliss[271]) modifie les formules de Weierstrass, de manière à n'y faire intervenir que des quantités qui restent invariantes pour une transformation paramétrique. Il introduit ainsi certaines simplifications: la fonction F_2 [n° **19**], utilisée par *K. Weierstrass*, est remplacée par une autre plus simple.*

W. F. Osgood élargit la notion de courbes acceptables[272]). *Il démontre, en représentation paramétrique, la suffisance des conditions pour ces courbes que *O. Bolza*[273]) appelle *courbes de classe k*.*

---

270) *Math. Ann. 59 (1904), p. 334 et suiv. Cf. *J. Radon*, Sitzgsb. Akad. Wien 119 (1910) IIa, p. 1290. On notera qu'à la rigueur il ne devrait être question de conditions nécessaires et suffisantes qu'après l'étude des cas d'exception suivants: le point conjugué P_1' du point initial P_1 se confond avec le point final P_2 de l'arc d'intégration λ [n° **26**]; λ a des points anguleux [nos **36/8**]; λ a des points communs avec la limite du domaine imposé [n° **39**]. Le cas d'exception où λ aurait des points multiples peut être éliminé en introduisant, avec *K. Weierstrass* et *O. Bolza* [Variationsrechnung [11]), p. 250], des *champs à plusieurs feuillets*, suggérés par les surfaces de Riemann. Cf. *E. J. Miles*, Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 42.*

271) *Trans. Amer. math. Soc. 8 (1907), p. 405/14.*

272) La définition des intégrales généralisées a été donnée par *K. Weierstrass* dans un cours professé en 1879 à l'Université de Berlin; elle a été modifiée par *W. F. Osgood*, Trans Amer. math. Soc 2 (1901), p. 275, 293, 294; une autre extension est donnée en 1900 par *D Hilbert*, dans un de ses cours; cf. *A. Noble*, Diss. Göttingue 1901, p. 18. *Cf. *L. Tonelli*, Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 21 I (1912), p. 448/53; (5) 21 II (1912), p. 132 7.*

273) *Variationsrechnung [11]), p. 289; cf. note 119. Cette dénomination sera utilisée dans la suite de l'article. *K. Weierstrass* avait, en 1879, donné une démonstration; elle est reproduite par *O. Bolza*, Calculus of variations [11]), p. 161/3.*

$_*$Dans le cas des dérivées d'ordre supérieur[274]) (J_p), il y a extrémé fort si, l'arc d'extrémale étant entouré d'un champ, la fonction continue

$$\mathcal{E}_1(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}, Y, y^{(p)}),$$

définie par

$$\mathcal{E} = (y^{(p)} - Y)^2 \mathcal{E}_1,$$

a un signe constant [condition de Weierstrass modifiée (et prise au sens strict)], moyennant les inégalités

$$y^{(\varkappa)} - \psi^{(\varkappa)}(x) < \varepsilon \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, p-1),$$

en tout point de λ et quel que soit le nombre arbitraire $y^{(p)}$; il y a extrémé faible si $f_{(y^{(p)})^2}$, fonction égale à

$$2\mathcal{E}_1(x, y, \ldots, y^{(p-1)}, y^{(p)}, y^{(p)}),$$

a un signe constant sur λ, sans s'annuler. Ces conditions, prises au sens large sur λ, sont nécessaires.

D'après *J. Radon*[275]), les conditions que l'on donne, en représentation paramétrique, comme suffisantes, et, avec certaines restrictions, comme nécessaires pour l'extrémé fort de $J_1^{(t)}$, ne seraient plus suffisantes pour l'extrémé fort (qu'il appelle demi-fort)[36]) de l'intégrale $J_2^{(t)}$.*

26. Condition de Jacobi. Compléments. L'arc $P_1 P_2$ de λ peut toujours être entouré d'un champ d'extrémales si cet arc est suffisamment petit. Les limites pour lesquelles cette propriété cesse d'avoir lieu se déterminent par la condition de Jacobi relative aux points conjugués [n° **17**]; $_*$toutefois, il arrive fréquemment que l'existence du champ en question est géométriquement presqu'évidente, tandis que la détermination des points conjugués est peu aisée.*

A. Kneser[276]) démontre la nécessité de la condition de Jacobi, à l'aide du *théorème de l'enveloppe* (*Enveloppensatz*). Si $\mathcal{F}$ est l'enveloppe d'une famille d'extrémales[277]), Γ une transversale [n^{os} **23**, **29**] de cette famille passant par les points P_1 et P_2, λ', λ'' deux extrémales de la même famille passant par P_1 et P_2 et tangentes à $\mathcal{F}$ respectivement aux points Q' et Q'', le théorème consiste dans la relation

$$J_{\lambda''}(P_2 Q'') = J_{\lambda'}(P_1 Q') + J_{\mathcal{F}}(Q' Q'').$$

$_*$*E. Zermelo*[278]), utilisant le théorème de Weierstrass, avait démontré

274) $_*$Cf. *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 461/4.*

275) $_*$Sitzgsb. Akad. Wien 119 II^a (1910), p. 1280 et suiv.*

276) Math. Ann. 50 (1898), p. 27/50, en partic. p. 38. Cf. n° **29**.

277) $_*$*V. P. Ermakov* [J. math. pures appl. (6) 1 (1905), p. 97; cf. note **27**] appelle *ligne critique* l'enveloppe des extrémales, lieu des points conjugués.*

278) Diss. Berlin 1894, p. 27.

cette relation pour le cas spécial où $\mathscr{F}$ dégénère en un point; on a alors

$$J_{\lambda''}(PQ'') = J_{\lambda'}(PQ') + J_{\mathfrak{F}}(Q'Q''),$$

PQ', PQ'' étant deux extrémales de la famille passant par le point P.*

A l'aide du théorème de l'enveloppe, *A. Kneser*[279]), *généralisant un raisonnement de *G. Darboux*[280])*, démontre que dans tout voisinage, aussi immédiat qu'on veut, d'un arc d'extrémale limité par deux points conjugués, il existe des courbes le long desquelles J_1 possède la même valeur que le long de l'extrémale, *d'où la nécessité de la condition au foyer [n° **19**]

$$\Delta(t, a_0) \neq 0, \quad t_1 < t < t_2.^*$$

La démonstration est en défaut dans deux cas; l'un, lorsque l'enveloppe considérée dégénère en un point P_1' (dit *foyer absolu*): *l'arc fournit alors un minimé large et fort.* Un second cas est celui où l'enveloppe possède un point de rebroussement dont le sommet est dirigé vers l'intervalle d'intégration. *H. Poincaré*[281]), qui montre la possibilité de l'existence d'un tel point, l'appelle *foyer en pointe,* réservant la dénomination de *foyer en talon* au cas où le sommet est dirigé en sens inverse, et celle de *foyer ordinaire* pour un point régulier de l'enveloppe. *W. F. Osgood*[282]) montre que, dans le cas du foyer en pointe (se présentant notamment pour les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution), l'arc d'extrémale limité par deux points conjugués fournit encore un extrémé fort. **W. F. Osgood* démontre que ce résultat peut être étendu au cas de la forme paramétrique, mais il ne le fait qu'en utilisant ces deux hypothèses restrictives que le problème est régulier aux points extrêmes

$$F_1(x_i, y_i, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0 \quad (i = 1, 2)$$

279) Math. Ann. 50 (1898), p. 44; cf. Variationsrechnung[20]), p. 93/7 (§ 24 et surtout § 25), ainsi que *E. Zermelo,* Diss. Berlin 1894, p. 96; **J. W. Lindeberg,* Math. Ann. 59 (1904), p. 321/31.* En ce qui concerne les rapports de la méthode en question avec les anciennes utilisant la variation seconde, voir *A. Kneser,* Variationsrechnung[20]), p. 105. *A l'aide d'une généralisation de son théorème de l'enveloppe, *A. Kneser* [Soobščěnija Charĭkovskago matěmatičeskago Obščěstva (Communic. Soc. math. Kharkov) (2) 7 (1902), p. 253/67] a considéré, mais d'une manière peu satisfaisante, le cas où $P_1' = P_2$, pour le problème de Lagrange [voir plus loin].*

280) *Théorie des surfaces[79]) 2, Paris 1889, p. 417/9; 3, Paris 1894, p. 86/8. Voir aussi n° **29**.*

281) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 3, Paris 1899, p. 322/3. **J. Hadamard* [Calcul des variations[6]) 1, en partic. p. 110] adopte les *dénominations du texte.**

282) Trans. Amer. math. Soc. 2 (1901), p. 166/82. *Cf. *J. W. Lindeberg,* Math. Ann. 59 (1904), p. 329/31.*

et défini-positif au point final $P_2 = P_1'$, où donc

$$F(x_2, y_2, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0,$$

pour toute valeur de γ. Dans une étude approfondie et donnant une solution décisive à la question, *H. Hahn*[283]) montre que ces conditions sont inutiles et il établit l'existence de l'extrémé fort sans faire aucune restriction[284]). Il utilise à cet effet le procédé de Scheeffer [n° **17**].*

Dans le cas où P_1' est un foyer ordinaire ou en talon, le minimé faible lui-même n'a plus lieu en ce point. *G. Darboux*[285]) a montré que le minimé dans un intervalle cesse certainement avant P_1'.

Dans le cas du foyer absolu, toutes les extrémales issues de P_1 passent par P_1' et donnent à l'intégrale prise entre $P_1 P_1'$ la même valeur, qui est un minimé large.

S'il existe autour de P_1' des points par lesquels on ne peut faire passer aucune extrémale issue de P_1, le minimé cesse certainement au point P_1' (on se trouve alors dans le cas du foyer ordinaire).

Si la condition de Jacobi n'est pas vérifiée, même au sens large, il ne peut y avoir extrémé, quel que soit l'ordre du voisinage, puisque la variation seconde peut recevoir un signe arbitraire. Mais quand l'arc d'intégration est limité par deux points conjugués, l'extrémé est assuré pour un voisinage du second ordre, comme l'a montré *J. Hadamard*[286]).

Depuis que *K. Weierstrass* et *A. Kneser* ont montré qu'on peut se passer de la variation seconde pour démontrer la nécessité des con-

---

283) *Sitzgsb. Akad. Wien 118 II^a (1909), p. 99/116. *H. Hahn* [Math. Ann. 70 (1911), p. 110/42] a aussi traité, d'une manière détaillée, l'hypothèse $P_1' = P_2$ dans le cas de l'espace. Bien que l'exposé de ce qui concerne la condition de Jacobi pour plusieurs inconnues soit fait au problème de Lagrange, voici les conclusions de *H. Hahn*: pour le problème spatial, la question de l'existence d'un minimé pour un arc $P_1 P_2$, où P_2 est conjugué à P_1, se ramène à un problème ordinaire de minimé; si P_2 se trouve au delà du premier, mais en deça du second point conjugué de P_1, l'arc $P_1 P_2$ fournit un extrémé *partiel,* c'est-à-dire relatif aux seules courbes de comparaison qui contiennent au moins un point d'un certain domaine, tandis que dans le cas spécial où les deux zéros coïncident, le minimé cesse complètement au point conjugué. La condition de Jacobi pour le problème spatial avait été étudiée moins complètement par *G. A. Bliss* et *Ch. M. Mason* [Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 440], à l'aide de la méthode de *A. Kneser*. Voir aussi *Marion Ballantyne White* [Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 175 [1910]], pour la condition de Jacobi dans le problème spatial où une limite est variable [n° **33**].*

284) *Cf. *J. Hadamard* [Calcul des variations[6]) 1, p. 404] où sont résumées les mêmes idées.*

285) Théorie des surfaces[79]) 3, p. 89/91.

286) *Calcul des variations[6]) 1, p. 410/2.*

ditions de Legendre et de Jacobi, et même pour la formation des conditions suffisantes de l'extrémé, la méthode de la variation seconde a été souvent considérée, surtout à cause de son peu d'élégance, comme n'ayant plus qu'un intérêt historique. C'est peut-être à tort, car une démonstration à la fois générale et rigoureuse de la nécessité de la condition de Jacobi, à l'aide du théorème de l'enveloppe, est plus laborieuse que celle qui repose sur la considération de la variation seconde. Toutefois, il résulte des travaux de *H. Hahn*[187]) que celle-ci n'est pas indispensable, même dans le cas le plus général de l'extrémé d'une intégrale simple [voir le problème de Lagrange].

Il y a minimé *limité*[287]) si, h étant suffisamment petit et l'intervalle d'intégration étant divisé en parties égales ou inférieures à h, le minimé a lieu lorsqu'on assujettit la ligne variée L à couper l'extrémale considérée une fois au moins dans chacun de ces intervalles partiels. Ici il n'est plus question de condition de Jacobi. Les conditions du minimé limité ont pour effet d'imposer à la ligne L un nombre arbitraire de sinuosités[288]).

27. Existence d'une extrémale passant par un point dans une direction donnée, ou joignant deux points. *Pour construire une extrémale passant par un point donné, suivant une direction donnée, *K. Weierstrass*[289]) introduit, comme paramètre, l'arc s. A cette fin, il adjoint à l'équation (6) [n° **12**] la dérivée de la suivante

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

et résout par rapport à x'', y'' le système des deux équations différentielles du second ordre obtenu; le problème est ainsi ramené à traiter un système de quatre équations différentielles du premier ordre. Il est plus simple de se servir, comme le fait *G. A. Bliss*[290]) qui choisit aussi s comme paramètre, de l'angle θ de la tangente avec l'axe des x, et d'utiliser l'équation (7) où intervient le rayon de courbure de l'extrémale. Les théorèmes d'existence des équations différentielles permettent de conclure que, si l'on a

$$F_1(x_0, y_0, \cos\theta_0, \sin\theta_0) \neq 0,$$

287) *La définition est due à *D. Hilbert*, qui l'a donnée dans un cours professé à l'Université de Göttingue en 1901, mais le terme est de *E. R. Hedrick* [Bull. Amer. math. Soc. 9 (1902/3), en partic. p. 12]; *D. Hilbert* a employé la locution „Minimum in stückweiser Variation".*

288) **J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 493/4.*

289) *Dans un Cours professé en 1879; cf. *A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 100/3, 107/9; *O. Bolza*, Calculus of variations[11]), p. 121/3.*

290) *Trans. Amer. math. Soc 7 (1906), p. 188 et suiv. Cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 212 et suiv., ainsi que p. 164 et p. 249.*

5*

on peut mener du point (x_0, y_0), dans la direction θ_0, une extrémale et une seule, de classe C'. Les valeurs initiales x_0, y_0, θ_0, pour lesquelles F_1 est nul, sont dites *singulières.*

Si $P_1(x_1, y_1)$ est un point intérieur au domaine R pour lequel

$$F_1(x_1, y_1, \cos\gamma, \sin\gamma) \neq 0$$

pour toute valeur de γ (le problème est alors régulier dans R), on peut mener une extrémale et une seule de classe C', sans point multiple, de longueur inférieure à une quantité l assignable, et allant de P_1 à tout point P_2 autre que P_1 situé dans un cercle (P_1, r) de centre P_1 et de rayon r assignable, sans sortir de ce cercle, qui forme autour du point P_1 un champ (impropre) d'extrémales. On démontre, à l'aide de la construction de Weierstrass, que si $\varrho \leqq r$ et si $F_1 > 0$ pour toute valeur de γ et pour tout point du cercle (P_1, ϱ), celui-ci étant supposé être tout entier dans le domaine R, l'extrémale λ_{12} joignant le point P_1 à un point P_2, à l'intérieur du cercle, fournit à l'intégrale une valeur moindre (ou plus grande si au lieu de supposer $F_1 > 0$ on se plaçait dans le cas où $\varrho \leqq r$ et $F_1 < 0$) que toute autre courbe ordinaire L menée de P_1 à P_2 en restant dans le cercle. Et, comme dans la proposition précédente, on peut déterminer deux quantités l' et r' telles que de tout point P_2, différent de P_1 et situé dans le cercle (P_1, r'), on puisse mener une extrémale et une seule λ_{21} allant en P_1 et dont la longueur soit inférieure à l'. En général, les extrémales λ_{12} et λ_{21} sont distinctes.

Soit R_0 un domaine borné et fermé, situé tout entier dans R; les quantités l, r, l', r' peuvent être choisies indépendamment de la position du point P_1 dans R_0. Il est à remarquer que λ_{12} ne doit pas nécessairement se trouver tout entière dans R_0.

Enfin si, outre les hypothèses faites, on suppose que le problème est, dans le domaine R_0, défini-positif (dans la terminologie de *C. Carathéodory*, nº 22) et régulier-positif, c'est-à-dire tel que

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0$$

pour toute valeur de γ et pour tout point du domaine R_0, on peut assigner un nombre positif d tel que deux points quelconques P_1, P_2 de R_0, distants entre eux de moins de d, peuvent être joints par un arc d'extrémale sans point multiple et fournissant à l'intégrale une valeur inférieure à celle que donne toute autre courbe ordinaire $L_{P_1P_2}$ située dans le même domaine R_0.

O. Bolza[291]) dit que le domaine R_0 est *extremal-convex* quand

291) *Variationsrechnung[11]), p. 276, 278.*

on peut assigner une quantité positive $\sigma \leqq \varrho$ telle que pour deux points quelconques P_1, P_2 de R_0 distants entre eux de moins de σ, l'extrémale λ_{12}, la plus courte de celles qui joignent P_1 à P_2, est tout entière dans R_0.

Si l'extrémale $P_1 P_2$ se trouve elle-même tout entière dans la région R_0, elle fournit un minimé par rapport à toutes les courbes ordinaires joignant P_1 à P_2 dans R_0. Cela a toujours lieu si ce domaine est *extremal-convex* et si d est suffisamment petit.

On peut donc toujours joindre les deux points limites de l'arc d'intégration par une extrémale fournissant un extrémé, si la fonction sous le signe $\int$ satisfait à certaines conditions et si les points sont suffisamment rapprochés. Ce théorème d'existence, que *O. Bolza*[292]) appelle „théorème de l'existence d'un extrémé *im Kleinen*", est dû à *K. Weierstrass*, qui avait donné quelques indications en 1879, dans un de ses cours professé à l'Université de Berlin. *G. A. Bliss*[293]) en a établi la première démonstration détaillée.

La difficulté résulte de ce que le champ d'extrémales passant par P_1 présente une singularité en ce point et qu'on ne peut invoquer le théorème classique sur les fonctions implicites. *O. Bolza*[294]), observant que les coordonnées polaires présentent à l'origine la même singularité que les extrémales issues d'un point fixe (noter que cela n'a lieu que pour $n = 2$), tourne la difficulté en introduisant ce système de coordonnées et en utilisant une extension[295]) du théorème sur les fonctions implicites. Il montre d'ailleurs que le minimé a encore lieu lorsque les courbes acceptables sont de classe k[296]).

C. Carathéodory[297]) démontre que, quand il y a des extrémales en général fortes, le point P_1 peut être joint à tout point suffisamment voisin par une extrémale régulière ou brisée [n° **36**] et par une seule, cette extrémale fournissant un extrémé fort.

---

292) $_*$Calculus of variations [11]), p. 146.*

293) $_*$Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 113/25; Bull. Amer. math. Soc. 13 (1906/7), p. 321/4. Voir aussi, pour le cas particulier des géodésiques, *G. Darboux*, Théorie des surfaces [280]) 2, p. 407/9. La démonstration de *G. A. Bliss* est basée sur une extension du théorème de *E. Picard* sur l'existence d'une intégrale d'une équation différentielle du second ordre prenant pour deux valeurs données de la variable indépendante deux valeurs arbitraires assignées.*

294) $_*$Variationsrechnung [11]), p. 270/5.*

295) $_*$*O. Bolza*, Math. Ann. 63 (1907), p. 247; Calculus of variations [11]), p. 175; Variationsrechnung [11]), p. 160.*

296) $_*$Voir *O. Bolza*, Variationsrechnung [11]), en partic. p. 294.*

297) $_*$Math. Ann. 62 (1906), p. 481/9. Voir n° **66**.*

J. Hadamard[298]) montre que le théorème n'a plus lieu, en général, pour le problème isopérimétrique.

L. Tonelli[298a]) apporte une importante contribution au théorème d'existence. Il utilise la propriété que possède l'intégrale d'être une fonction semi-continue de la ligne d'intégration si le problème est régulier.

Le problème de la jonction de deux points par une extrémale et de la construction d'un champ dans l'espace à trois dimensions, l'intégrale U_2 étant sous forme paramétrique, a été traité par *G. A. Bliss* et *Ch. M. Mason*[299]), mais surtout dans le cas de limites variables [n° **33**], où la difficulté en question ne se rencontre plus; ensuite par *E. G. Bill*[300]) et par *J. Hadamard*[301]).

Le raisonnement de *J. Hadamard* est général et s'applique sans modification au cas où le nombre des coordonnées est supérieur à trois, tandis que les démonstrations de *G. A. Bliss*[293]) et de *O. Bolza*[292]) ne sont pas susceptibles de généralisation pour $n > 1$. L'idée essentielle de la méthode consiste à appliquer un nouveau théorème sur les fonctions implicites[302]), différent de celui qu'utilise *O. Bolza.*

La marche de *A. Szücs*[303]), exposée en détail pour $n = 2$, est moins longue, mais applicable, elle aussi, pour n quelconque; elle repose sur un choix particulier de coordonnées non cartésiennes et sur l'extension du théorème sur les fonctions implicites due à *O. Bolza*[295]). *A. Szücs* étend ses recherches au cas du point initial mobile et applique sa méthode à une question de mécanique relative au principe de la moindre action sous la forme de Jacobi[304]).

298) *Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907), p. 204/6.*

298a) *Rend. Circ. mat. Palermo 32 (1911), p. 297 et suiv.; 35 (1913), p. 1 et suiv. [1912].*

299) *Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 444; 11 (1910), p. 325 40.*

300) *Bull. Amer. math. Soc. 15 (1908/9), p. 374 8.*

301) *Calcul des variations[6]) 1, p. 114 et suiv., en partic. n^os 110/3. Pour l'intégrale sous forme ordinaire, voir p. 115.*

302) *Id. note A, p. 497/5, où sont complétés les résultats sur l'existence des fonctions implicites. *J. Hadamard* arrive au résultat en faisant un grand nombre de changements de coordonnées et en prenant, après chaque transformation, la variable x comme paramètre, ce qui présente un inconvénient signalé par *E. G. Bill*; mais ce n'est là qu'un artifice de pure forme et qui n'est pas essentiel; le tout est d'observer que la fonction est régulière (au sens de *J. Hadamard*) autour de chaque extrémale issue du point donné, et d'en conclure, à l'aide du théorème en question, que le faisceau est régulier tout autour du point donné, ce qui résout la difficulté.*

303) *Mathematikai és Physikai lapok (Budapest) 19 (1910), p. 323 39; trad. française par l'auteur, Math. Ann. 71 (1912), p. 380/91.*

304) *Voir plus loin le chapitre consacré aux applications du calcul des variations [n° 87].*

E. G. Bill[305]) établit le théorème d'existence pour $n = 2$ (cas de l'espace) en le démontrant d'abord pour l'extrémé „im Kleinen", puis d'une manière générale (extrémé „im Grossen") en s'appuyant sur le premier cas. L'étude des conditions suffisantes pour le minimé dans un intervalle s'y rattache. *E. G. Bill* suppose pour cela que le champ est *extremal-convex*; *L. Tonelli*[305a]) ne fait pas cette restriction [n° **66**].

Pour l'intégrale $J_2^{(t)}$, la question de l'existence d'un champ d'extrémales est exposée par *J. Radon*[306]), en représentation paramétrique[307]).*

28. Le théorème d'Osgood. $_*$*W. F. Osgood*[308]) a montré qu'on peut assigner une limite inférieure à la différence entre l'intégrale minimée et l'intégrale variée. Supposons en effet que[309]) λ soit un arc $P_1 P_2$ d'extrémale, sans point multiple, pour lequel les conditions de Legendre et de Jacobi, au sens strict, ainsi que celle de Weierstrass

$$\overline{\mathcal{E}}(x, y;\, \overline{X}, \overline{Y}, x', y') > 0$$

sont remplies, et qu'en outre pour toute valeur γ on ait

$$F_1(x_i, y_i, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0 \qquad (i = 1, 2); \tag{26}$$

il existe alors une région R contenant l'arc λ et telle qu'à tout domaine S, contenant strictement à son intérieur l'arc $P_1 P_2$ et dont la frontière est intérieure au sens strict à R, correspond un nombre positif ε_S tel que

$$J_L - J_\lambda \geqq \varepsilon_S$$

pour toute ligne ordinaire L allant de P_1 à P_2 et qui, tout en étant intérieure à R, n'est pas intérieure à S.*

Le théorème est vrai pour les intégrales généralisées au cas de courbes variées de classe k, comme le montre *O. Bolza*[310]).

---

305) $_*$Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 50/8.*

305a) $_*$Rend. Circ. mat. Palermo 35 (1913), p. 22/5 [1912].*

306) $_*$Sitzgsb. Akad. Wien 119 IIa (1910), p. 1257, en partic. p. 1280.*

307) $_*$Le théorème établi par *G. A. Bliss*[298]) est utilisé par *L. Tonelli* [Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 21 I (1912), p. 251/8, 332/4] pour résoudre le problème de mécanique céleste consistant à rechercher des critères d'existence des orbites périodiques, question se rattachant notamment à l'étude des extrémales fermées [n° **35**]. Voir le chapitre du présent article consacré aux applications. Au sujet des questions d'existence, voir encore ce qui concerne l'extrémé dans un intervalle, les limites variables, les solutions discontinues, le problème isopérimétrique, celui de Lagrange, et les intégrales doubles.*

308) Trans. Amer. math. Soc. 2 (1901), p. 273 et suiv.

309) $_*$L'énoncé du texte, sous la forme donnée par *H. Hahn*, montre l'analogie avec le théorème correspondant pour les extrémés ordinaires.*

310) $_*$Variationsrechnung[11]), p. 294.*

O. Bolza[311]) et *E. Goursat*[312]) ont simplifié la démonstration de *W. F. Osgood*, $_*$mais la plus aisée et la plus élégante de toutes est due à *H. Hahn*[313]), qui s'appuie sur une méthode de *L. Scheeffer* [n° **17**]. Il montre que la condition (26) est superflue excepté pour les points extrêmes.*

$_*$La démonstration due à *E. E. Levi* de ce que la condition de Weierstrass est suffisante fournit aussi la démonstration du théorème d'Osgood[314]).

H. Hahn démontre d'ailleurs que le théorème a lieu pour le cas général de l'extrémé lié [voir n° **55**].

O. Bolza[315]) établit le théorème pour le cas d'un point variable, en utilisant les coordonnées curvilignes de *A. Kneser* [n° **29**]. Cette généralisation est presque évidente.

C. Carathéodory[316]) expose la modification du théorème d'Osgood pour l'extrémé „im Kleinen"[317]). Si le problème est régulier dans un domaine fermé et borné R_0, on peut assigner un nombre positif d tel que non seulement deux points appartenant à cette région et de distance inférieure à d puissent être joints par un arc d'extrémale minimant l'intégrale, mais aussi tel qu'à toute région S contenant cet arc et tout entière dans le cercle (P_1, d), corresponde un nombre positif ε_S pour lequel tout arc de courbe ordinaire L joignant $P_1 P_2$ et tout entier dans (P_1, d), mais pas dans S, donne

$$J_L - J_\lambda \geqq \varepsilon_S.$$

Tous les résultats de ce genre sont compris comme cas particulier dans le suivant qui a été établi par *H. Hahn*[318]): pour tout arc d'extrémale qui fournit un extrémé faible et dans les environs duquel

---

311) Trans. Amer. math. Soc. 2 (1901), p. 422/7.

312) Id. 5 (1904), p. 110/2.

313) $_*$Monatsh. Math. Phys. 17 (1906), p. 63/77. Cf. *J. Hadamard* [Calcul des variations[6]) 1, p. 477 et suiv.] qui a esquissé [Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 80] la démonstration de *H. Hahn* indépendamment de celui-ci.*

314) $_*$Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 20 II (1911), p. 469; pour la représentation paramétrique, id. (5) 21 I (1912), p. 35 (Texte et note de *G. Loria*).*

315) $_*$Trans. Amer. math. Soc. 2 (1901), p. 422/7; cf. Variationsrechnung[11]), p. 356.*

316) $_*$Math. Ann. 62 (1906), en partic. p. 490/2. Il y est aussi question (en utilisant certains résultats de *G. A. Bliss*, Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 113 et suiv.) du théorème pour le cas des extrémales brisées [n° **36**].*

317) $_*$Cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 283/4. Il oppose „im Kleinen" à „im Grossen".*

318) $_*$Festschrift Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag, Leipzig 1912, p. 95/110. La propriété est établie immédiatement pour le cas du problème de Lagrange [n° **57**]. Pour $J_1^{(t)}$, voir Monatsh. Math. Phys. 24 (1913), p. 27/32.*

la fonction $\mathcal{E}$ a un même signe, le théorème d'Osgood est applicable sans restriction.*

A. Kneser[319]), étudiant la chaînette comme figure d'équilibre d'un fil pesant homogène, montre que, si le fil sort d'un domaine limité donné, l'accroissement de l'énergie potentielle possède une limite inférieure différente de zéro. *Ce théorème rentre, comme cas particulier (problème isopérimétrique spécial), dans le théorème d'Osgood. Les méthodes de *H. Hahn* et de *J. Hadamard* peuvent être considérées comme inspirées de celle de *A. Kneser*.*

*Le théorème n'a lieu, en général, que pour les intégrales simples; toutefois, *G. Fubini* a indiqué une extension possible pour les intégrales multiples[320]).

L. Tonelli[321]) se basant sur la notion de semi-continuité, donne une importante généralisation du théorème pour les intégrales simples.

J. Hadamard[322]) applique les considérations du théorème d'Osgood à l'objection de *P. du Bois-Reymond* [n° **10**].*

29. Méthode de Darboux-Kneser[322a]). **G. Darboux*[322b]) a, indépendamment de *K. Weierstrass*, donné une méthode pour établir les conditions suffisantes pour les problèmes se rattachant aux lignes les plus courtes entre deux points sur une surface, et à certaines questions de mécanique. A l'aide des coordonnées curvilignes de Gauss (coordonnées géodésiques parallèles), il établit un système de coordonnées se rattachant à la théorie des équations aux dérivées partielles et il introduit la notion de *famille orthogonale de trajectoires*. Il obtient pour l'élément de l'intégrale une forme simple, surtout dans le cas de l'action maupertuisienne[323]).

La question se ramène à étudier le signe d'une fonction qui est étroitement liée à la fonction $\mathcal{E}$ de Weierstrass; d'ailleurs, les deux méthodes peuvent se ramener l'une à l'autre.

---

319) J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 189/206, en partic. p. 191. Cf. la méthode de *G. Lejeune Dirichlet* relative aux systèmes à nombre fini de degrés de liberté [cf. IV 1].

320) *Voir, dans cet article, le chapitre consacré aux intégrales doubles ou multiples [n° **63**].*

321) *Rend. Circ. mat. Palermo 35 (1913), p. 19/22 [1912].*

322) *Calcul des variations[6]) 1, p. 484 et suiv.*

322a) *Cette dénomination est due à *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]), p. 381.*

322b) Théorie des surfaces[280]) 2, p. 412/9, 448, 522/3; 3, p. 89/91. *G. Darboux* a commencé à exposer sa méthode dans un cours professé en 1866/7 au Collége de France.

323) *Voir ce qui est relatif à l'action [n^os **87**, **88**].*

Pour établir la condition de Jacobi dans le cas des géodésiques, *G. Darboux* utilise le théorème sur l'enveloppe d'une famille de telles lignes. *A. Kneser*[324]) a généralisé la *théorie de Darboux* au cas de $J_1^{(t)}$. Sa méthode, comme celle de Weierstrass, ne nécessite pas la recherche de la variation seconde, et elle est valable dans le cas d'un point extrême variable [n° **33**]. La méthode Darboux-Kneser a l'inconvénient d'exiger que l'élément de l'intégrale garde un signe constant sur les courbes acceptables, mais si les points extrêmes sont fixes, cette hypothèse est vérifiée grâce à une transformation simple, si la fonction $\mathfrak{E}$ de Weierstrass a un signe constant[325]).*

Si l'on compare la valeur de l'intégrale J_1 sur des extrémales voisines, la variation δJ_1 se réduit aux termes aux limites (*Grenzglieder*), indépendants du signe intégral. Ils résultent du déplacement des points extrêmes. En chaque point du champ, il y a une direction de déplacement pour laquelle les termes aux limites s'annulent. Les courbes qui, en chaque point, ont cette direction recouvrent tout le champ sans duplicature, comme les extrémales. Ce sont les *transversales* [n° **33**].

A. Kneser[326]) démontre le *théorème de transversalité*, en vertu duquel tous les arcs d'extrémales du champ, compris entre deux transversales, donnent même valeur à l'intégrale J_1. *Inversement, si, sur différentes extrémales d'une famille, à partir des points de rencontre avec une transversale, on prend d'un même côté (où t croît, par exemple) des arcs qui donnent tous même valeur à l'intégrale, les points obtenus se trouvent sur une même transversale de la famille.* Dans le cas des géodésiques, les transversales deviennent les trajectoires orthogonales[327]), et le théorème de transversalité est par conséquent une généralisation du théorème d'orthogonalité de *C. F. Gauss* sur les lignes géodésiques, lequel conduit aux coordonnées géodésiques parallèles[328]). *Si une des courbes dégénère en un point, on est ramené aux coordonnées polaires géodésiques de Gauss[329]).*

---

324) Variationsrechnung [20]), p. 49 et suiv.

325) **C. Carathéodory,* Math. Ann. 62 (1906), p. 449; *J. Hadamard,* Calcul des variations [6]), p. 384/5.*

326) Variationsrechnung [20]), p. 46/9; voir aussi, p. 175/80.

327) **C. E. Stromquist* [Trans. Amer. math. Soc. 7 (1906), p. 175 et suiv.] a recherché dans quels cas la transversalité se confond avec l'orthogonalité. Voir au „problème inverse" [n° **73**].*

328) *C. F. Gauss,* Disquisitiones generales circa superficies curvas, Commentat. Soc. Gott. recent. 6 (1823/7), éd. 1828, p. 99/146 (mém. n° 4), en partic. § 16; Werke 4, Göttingue 1880, p. 241 *Ce théorème, fondamental en géométrie des

Les extrémales et les transversales définissent ainsi, dans le champ, un système de coordonnées curvilignes, où *A. Kneser* considère comme coordonnées le paramètre $v = a$ de la famille d'extrémales et la valeur $u = W(x, y)$ de l'intégrale J_1 prise le long d'une extrémale depuis une transversale fixe jusqu'à un point final variable; elle est dite *l'intégrale de champ* (*Feldintegral*). $_*$Ses dérivées partielles sont données par les formules

$$\frac{\partial W}{\partial x} = F_{x'}(x, y, p, q),$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = F_{y'}(x, y, p, q),$$

où p et q désignent les cosinus directeurs de la tangente positive menée au point (x, y) à l'extrémale[329a]).*

$_*$La transformation définit une correspondance univoque entre un domaine du plan (x, y) et le domaine correspondant du plan (u, v): les droites $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ du plan (u, v) correspondent, dans le plan (x, y), respectivement aux extrémales et aux transversales de la famille, et inversement.

A l'aide de cette transformation, la quantité $\triangle J$, différence entre l'intégrale prise le long d'une extrémale du champ et le long d'une courbe de comparaison quelconque L tout entière dans le champ, s'exprime aisément par la fonction $\mathcal{E}$ de Weierstrass, prise sur la courbe L.

Les coordonnées curvilignes à introduire dans le cas de n quelconque sont les n paramètres dont dépend une extrémale du champ, joints à l'intégrale prise sur cette extrémale à partir de sa rencontre

---

surfaces, est à rapprocher du théorème de dynamique dû à *W. Thomson* (lord *Kelvin*) et *P. G. Tait* et d'après lequel la trajectoire correspondant à une même valeur de la force vive, normale à une surface, l'est à une infinité d'autres. Pour les rayons lumineux se propageant en milieu isotrope, le théorème homologue est celui de Malus, qui s'étend à la réfraction en milieu anisotrope, l'orthogonalité étant alors remplacée par la transversalité; les surfaces transversales représentent les positions successives d'une onde lumineuse [cf. n° **89**].*

329) *C. F. Gauss*[328]), p. 239/41 (§ 15).

329a) $_*$*O. Bolza* [Variationsrechnung[11]), p. 256] appelle ces formules les *formules de Hamilton*, réservant la dénomination de *formules générales de Hamilton* à celles qui expriment les dérivées partielles de l'*Extremalenintegral* [n° **32**]. En représentation non paramétrique, les formules s'écrivent

$$\frac{\partial W}{\partial x} = f(x, y, p) - p f_{y'}(x, y, p),$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = f_{y'}(x, y, p).$$

Elles ont été données par *E. Beltrami* [n° **23**].*

avec une transversale du champ, les surfaces $J =$ const. étant aussi transversales au champ d'extrémales.

Le système de coordonnées de *A. Kneser* a des liens avec la théorie de Jacobi-Hamilton [n° **69**].

On peut considérer comme faisant partie de la théorie de Kneser, le théorème de l'enveloppe, qui a été exposé précédemment [n° **26**].*

30. *__Généralisations de la théorie de Darboux-Kneser.__* L'idée féconde d'étendre les théories sur les géodésiques en vue d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour extrémer l'intégrale J_1 [n° **29**], a été poussée plus avant. Ainsi la théorie de Darboux-Kneser a été généralisée de différentes manières: par *G. A. Bliss*[329b]), à l'aide de son extension de la notion d'angle, et surtout par *G. Landsberg*[329c]) au moyen d'une généralisation, due à *O. Bonnet*, du théorème de Gauss sur la courbure totale, et à l'aide des notions de *courbure extrémale* d'une courbe en un point, de *courbure du champ* en un point, et de *courbure totale* d'un domaine.

G. Landsberg prend sur une surface, comme courbes paramétriques, une famille de lignes géodésiques ($q =$ const.) et leurs trajectoires orthogonales ($p =$ const.), et il choisit p comme longueur d'un arc d'une géodésique compté à partir d'une trajectoire fixe; le carré de l'élément linéaire s'exprime, dans ces conditions, de la manière suivante:

$$ds^2 = dp^2 + m^2 dq^2.$$

Si ϑ désigne l'angle que l'élément linéaire ds d'une courbe passant par le point (p, q) fait avec la ligne paramétrique $q =$ const. passant par le point (p, q) et si ϱ_g est la courbure géodésique de la courbe, on a

$$\frac{ds}{\varrho_g} = d\vartheta + m_p dq. \tag{27}$$

La courbure de la surface est

$$k \equiv -\frac{1}{m} m_{p^2}.$$

De ces formules on conclut ce qui suit: si l'on déplace tous les points d'un arc de courbe L_0, sur la surface, perpendiculairement à L_0 et d'une même quantité ε, la longueur de L_0 est une fonction $s_0(\varepsilon)$, et l'on a

$$\frac{ds_0}{d\varepsilon} = \int_{q_0}^{q_1} \frac{ds}{\varrho_g}, \quad \frac{d^2 s_0}{d\varepsilon^2} = -\int_{q_0}^{q_1} k\, ds.$$

329b) *Trans. Amer. math. Soc. 7 (1906), p. 184/96.*

329c) *Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 16 (1907), p. 36/46, 547/51; voir un exposé plus complet: Math. Ann. 65 (1908), p. 313/49.*

D'où une définition intrinsèque de la courbure géodésique et de la courbure de la surface.

S'il s'agit d'extrémer $\int F dt$, il y a, au lieu de ds, la fonction $F dt$, et, au lieu de la courbure géodésique, l'invariant

$$\frac{T}{\sqrt{F_1 F^3}}.$$

De même, à la formule (27) on peut faire correspondre une différentielle exacte

$$d\Theta(x, y, x', y')$$

telle que

$$\frac{ds}{\varrho_g} - d\Theta$$

ne contienne plus que les différentielles dx, dy; et l'on a

$$\Theta(x, y, x', y') = \int (x' dy' - y' dx') \sqrt{\frac{F_1}{F}}.$$

La différence

$$\Theta(x, y, x', y') - \Theta(x, y, x_0', y_0')$$

est, par définition, l'*angle* des directions (x', y') et (x_0', y_0') passant par le point (x, y).

Si, dans l'expression

$$\frac{ds}{\varrho_g} - d\Theta = S dt,$$

la fonction S est linéaire en x', y':

$$S = P x' + Q y',$$

et si J est un invariant tel que

$$J(dx\delta y - dy\delta x) = d\omega$$

puisse être considéré comme la mesure de l'aire de l'élément de surface correspondant au point (x, y) et aux différentielles

$$(dx, dy), \quad (\delta x, \delta y),$$

l'expression

$$\varkappa = \frac{P_y - Q_x}{J},$$

qui ne dépend pas des coordonnées, est appelée la *courbure du champ au point* (x, y).

En intégrant

$$\frac{ds}{\varrho_g} - d\Theta$$

suivant une courbe fermée et en appliquant le théorème de Green, on obtient l'égalité

$$\int_{(R)} \frac{ds}{\varrho_g} - \int_{(R)} d\Theta = \int_{(G)} \varkappa \, d\omega,$$

généralisant le théorème de Bonnet. Le second membre représente la courbure totale d'un domaine G dont R est le contour.

G. Landsberg applique ces considérations spécialement au problème de variations pour lequel la condition de transversalité [n° **33**] a la forme

$$A\delta x + B\delta y = 0,$$

A et B étant des polynomes homogènes de degré m en x', y'.

Si

$$Ax' + By' = (L_0x' + M_0y')(L_1x' + M_1y') \dots (L_mx' + M_my'),$$

on a

$$F = (L_0x' + M_0y')^{r_0}(L_1x' + M_1y')^{r_1} \dots (L_mx' + M_my')^{r_m}$$
$$(r_0 + r_1 + \cdots + r_m = 1).$$

G. Landsberg discute en détail le cas où, pour des facteurs linéaires réels de F, on a

$$m = 1, \quad r_0 = r_1 = \tfrac{1}{2}$$

(forme de *C. F. Gauss* pour l'élément linéaire).*

31. $_*$**Invariants.** *A. L. Underhill*[330]) et *G. Landsberg*[331]) ont fait des recherches relatives aux invariants de la fonction $F(x, y, x', y')$ (supposée positivement homogène par rapport à x', y') pour les transformations ponctuelles

$$(28) \qquad \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \end{cases}$$

qui forment un groupe[332]). Soit $G(u, v, u', v')$ ce que devient la fonction $F(x, y, x', y')$ par cette transformation. Un invariant absolu de F est une expression contenant en général x, y, x', y', la fonction F et ses dérivées partielles, et qui ne change pas lorsqu'on remplace F et ses dérivées par G et les dérivées correspondantes, et x, y et leurs dérivées (par rapport à t) par u, v et les dérivées correspondantes. L'invariant est d'indice ϱ si, par la transformation indiquée, il est multiplié par le déterminant fonctionnel (supposé différent de zéro)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

élevé à la puissance ϱ.

330) $_*$Diss. Chicago 1907; Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 316/38.*

331) $_*$Math. Ann. 65 (1908), p. 329 et suiv.*

332) $_*$Déjà *S. Lie* [Math. Ann. 24 (1884), p. 569 et suiv.] avait posé la question de trouver tous les invariants pour un groupe déterminé de transformations (28) et l'avait résolue pour le cas de x variable indépendante, dans sa théorie générale des groupes infinis continus. Pour le cas particulier des *géodésiques*, *K. von Žorawski* [Acta math. 16 (1892/3), p. 1/64] a exposé en détail la méthode de *S. Lie.* Voir aussi des remarques de *A. Hirsch* [Math. Ann. 50 (1898), p. 429] et de *G. Hamel,* Diss. Göttingue 1901, p. 89.*

A. L. Underhill montre que F_1 et T de *K. Weierstrass* [n° **12**] sont des invariants respectivement d'indices 2 et 1.

S'il y a une série de variables cogrédientes

$$x^{\backprime}, y^{\backprime}, x^{\backprime\backprime}, y^{\backprime\backprime},$$

on peut considérer des invariants qui renferment aussi $x^{\backprime}$, $y^{\backprime}$, etc.; il y a notamment la fonction

$$x'y^{\backprime} - y'x^{\backprime},$$

ensuite l'expression

$$x^{\backprime} F_{x'}(x, y, x', y') + y^{\backprime} F_{y'}(x, y, x', y'),$$

qui se présente dans la condition de transversalité [n° **33**], enfin la fonction de Weierstrass

$$\mathcal{E}(x, y, x', y', x^{\backprime}, y^{\backprime}).$$

De là résulte l'invariance de la condition de Weierstrass [n° **24**]. *A. L. Underhill* l'établit aussi pour celle de Jacobi.

A l'aide d'un invariant qui ne renferme, de la seconde série de variables, que $x^{\backprime}$, $y^{\backprime}$, et cela d'une manière homogène, on obtient un invariant ne contenant que les variables de la première série si l'on remplace $x^{\backprime}$ et $y^{\backprime}$ respectivement par

$$F_{y'}(x, y, x', y'), \quad -F_{x'}(x, y, x', y').$$

En dérivant par rapport à t un invariant absolu, on trouve un autre invariant absolu; de même par l'opération δ.

A. L. Underhill l'étudie comme moyen de formation d'invariants, et la considère dans ses rapports avec la théorie de la variation seconde [cf. n° **19**]. Cette opération conduit à des invariants dans lesquels les variables x, y et leurs dérivées jouent le même rôle que les variables $x^{\backprime}$, $y^{\backprime}$, $x^{\backprime\backprime}$, $y^{\backprime\backprime}$, ... En appliquant ce procédé δ à Tw, où $w = y'\delta x - x'\delta y$, on est conduit, après maintes transformations, à l'invariant absolu

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, x', y', x'', y'', x''', y''', \delta x, \delta y)& \\ \equiv \frac{1}{2}\frac{T}{H^{\frac{1}{2}}}\Big[\frac{-H_x\delta x + H_y\delta y}{H} &+ \delta x \frac{d}{dt}\Big(\frac{H_{x'}}{H}\Big) + \delta y\frac{d}{dt}\Big(\frac{H_{y'}}{H}\Big)\Big] \\ + \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}}(A\delta x + B\delta y) &- \omega\Big(\frac{H'^2}{4H^2} - \frac{H''}{2H}\Big),\end{aligned}$$

où H représente la fonction F_1 de Weierstrass, où ensuite

$$\omega = (y'\delta x - x'\delta y)\cdot H^{\frac{1}{2}}$$

et

$$A = T_x + \frac{d}{dt}(Hy''),$$

$$B = T_y - \frac{d}{dt}(Hx'').$$

Si l'on y remplace $\delta x, \delta y$ par $F_{y'}, -F_{x'}$ et si l'on divise par $-H^{\frac{1}{2}}F$, on obtient l'invariant absolu

$$k(x, y, x', y', x'', y'', x''', y''')$$
$$\equiv -\frac{1}{F\cdot H}(AF_{y'} - BF_{x'}) + \left(\frac{H'^2}{4H^2} - \frac{H''}{2H}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{T}{F\cdot H}\left[-F_{y'}\left\{\frac{H_x}{H} - \frac{d}{dt}\left(\frac{H_{x'}}{H}\right)\right\} + F_{x'}\left\{\frac{H_y}{H} - \frac{d}{dt}\left(\frac{H_{y'}}{H}\right)\right\}\right].$$

Par un procédé très simple, *Th. De Donder* obtient cet invariant absolu k pour le cas où F dépend de x, y et des dérivées x', y', x'', y'', ... d'un ordre quelconque; le même procédé s'applique encore s'il y a plusieurs variables indépendantes [cf. nº **71**].

A. L. Underhill et *G. Landsberg* considèrent aussi des fonctions qui sont invariantes simultanément pour une transformation (28) et pour une transformation paramétrique acceptable. Ce sont

$$S \equiv \frac{T}{H^{\frac{1}{2}}F^{\frac{3}{2}}},$$

fonction que *G. Landsberg* appelle *courbure extrémale* (*extremale Krümmung*) en un point (x, y) de la courbe considérée λ, et

$$V \equiv \omega F^{\frac{1}{2}},$$

invariant donné par *A. L. Underhill*; d'où aussi SV.

A l'aide de cette expression, on obtient, par application du procédé δ, un invariant Φ_0, analogue à Φ et qui reste aussi invariant pour une transformation paramétrique; on en déduit un invariant jouissant des mêmes propriétés et analogue à k:

$$k_0(x, y, x', y', x'', y'', x''', y''')$$
$$\equiv \frac{1}{F^2}\left[k(x, y, x', y', x'', y'', x''', y''') - \frac{1}{2}\left(\frac{F''}{F} - \frac{3}{2}\cdot\frac{F'^2}{F^2}\right)\right]$$
$$+\frac{T}{2HF^4}\left[\frac{H_{y'}F_{x'} - H_{x'}F_{y'}}{H}\right]\cdot F',$$

qui le long d'une extrémale se réduit à la fonction

$$\bar{k}_0 = \frac{1}{F^2}\left[\frac{1}{4}\frac{F_1'^2}{F_1^2} - \frac{1}{2}\frac{F''}{F_1} - \frac{F_2}{F_1} - \frac{1}{2}\frac{F''}{F} + \frac{3}{4}\frac{F'^2}{F^2}\right].$$

A l'aide de $\bar{k}_0$ on peut exprimer d'une manière simple la variation seconde de l'intégrale [nº **19**]. De cette expression, *A. L. Underhill*[332a]) conclut que si $\bar{k}_0 \leqq 0$ le long d'un arc d'extrémale, il n'y a pas de point conjugué sur cet arc; si

$$0 < \overset{\Delta}{k_0} \leqq a^2$$

332a) *Bull. Amer. math. Soc. 15 (1908/9), p. 379/84.*

le long d'une extrémale, il n'y a de minimé pour aucun arc le long duquel J dépasse πa; si enfin

$$0 < b^2 \leqq \frac{1}{\bar{k}_0},$$

tout arc pour lequel $J \leqq b$ fournit à l'intégrale un minimé (faible).

La fonction S n'est autre, dans le cas particulier des géodésiques, que la courbure géodésique $\frac{1}{\varrho_g}$; $\bar{k}_0$ devient la courbure gaussienne $\frac{1}{\varrho}$; de sorte que la propriété d'après laquelle $\delta^2 J > 0$ dès que $\bar{k}_0 < 0$ le long d'une extrémale, généralise le théorème consistant en ce que les géodésiques d'une surface à courbure négative n'ont pas de point conjugué [n° 78]. Quant à l'invariant k_0, il peut s'exprimer ainsi:

$$k_0 = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_g}\right)^2.*$$

Si l'on choisit pour u et v les coordonnées de Kneser pour les extrémales du faisceau $v = \text{const.}$, on a plus simplement

$$\bar{k}_0 = -\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial^2 h^{\frac{1}{2}}}{\partial u^2},$$

où

$$h(u, v) = G_1(u, v, \pm 1, 0).$$

Limites variables[333]).

32. Premières recherches. Méthode de différentiation. *Le premier problème de limite variable qui ait été considéré est celui de la brachistochrone avec point initial mobile, question dont s'est occupé *Jacques Bernoulli*[334]). Pour traiter le cas des limites variables, on peut suivre trois méthodes: celle de différentiation, celle de variation, enfin la méthode de Kneser [cf. n° 29].*

Les premières idées de la méthode de différentiation ont été émises par *S. D. Poisson* et par *C. G. J. Jacobi*[335]); mais le procédé a été exposé en détail pour la première fois par *A. Mayer*[335a]), qui considère aussi les termes du second ordre, pour le problème de Lagrange [n° 56]. *Dans cette méthode, on résout d'abord le problème pour des limites fixes mais indéterminées, et l'on calcule ensuite, en les considérant comme

333) *Il n'est question ici que d'extrémé libre. Les problèmes isopérimétriques avec limites variables sont traités au n° 45. Voir [n° 56] le cas des limites variables dans le problème de Lagrange.*

334) *Voir le n° 84, dans les applications.*

335) *Cf. *J. Dienger,* Grundriss der Variationsrechnung, Brunswick 1867, p. 27.*

335a) Ber. Ges. Lpz. 36 (1884), math. p. 99 et suiv.; 48 (1896), math. p. 436 et suiv.

fonctions des coordonnées des extrémités, les constantes d'intégration ainsi que l'intégrale

$$\mathfrak{J}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

prise de P_1 à P_2. *O. Bolza* appelle cette intégrale l'*Extremalenintegral*[335b]). On a alors à extrémer la fonction $\mathfrak{J}$ en tenant compte des conditions données.* La méthode de différentiation ramène donc le problème à une question d'extrémé ordinaire[336]). Cela tient à ce que l'on compare la courbe cherchée λ *à des extrémales.*

Il est clair que ce procédé donne des conditions nécessaires, mais rien ne prouve qu'elles soient suffisantes[337]), et les objections faites par *G. Erdmann*[338]) à la méthode de différentiation sont justifiées. *Toutefois elle peut conduire, mais dans un sens restreint seulement, à des conditions suffisantes si l'on combine les conditions suffisantes pour les extrémés ordinaires à celles pour les extrémés du problème de variation où les extrémités de l'arc d'intégration sont fixes[339]).*

---

335 b) *Ou encore *O. Bolza* [Variationsrechnung[11]), p. 309] „*extremaler Abstand* de P_1 à P_2", Pour les lignes géodésiques, c'est la distance géodésique des points P_1, P_2; voir *G. Darboux*, Théorie des surfaces[280]) 2, p. 434/7. L'*Extremalenintegral* avait déjà été considérée par *W. R. Hamilton* [Philos. Trans. London 125 (1835), p. 99] qui l'appelle *principal function* [cf. n° 69], et en donne les dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_1} = - F_{x'}(x_1, y_1, p_1, q_1), \quad \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y_1} = - F_{y'}(x_1, y_1, p_1, q_1),$$
$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_2} = F_{x'}(x_2, y_2, p_2, q_2), \quad \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y_2} = F_{y'}(x_2, y_2, p_2, q_2),$$

où p_1, q_1, p_2, q_2 désignent respectivement les cosinus directeurs des tangentes positives menées à l'extrémale en P_1 et P_2. Ces expressions, que *O. Bolza* appelle *formules générales de Hamilton*, généralisent les formules de Hamilton donnant les dérivées partielles de la „Feldintegral" [n° 29]. Les dérivées secondes de la fonction $\mathfrak{J}$ ont été calculées par *A. Dresden*, Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 476; elles sont invariantes pour une transformation paramétrique quelconque.*

336) *Avant *A. Mayer*, *A. Cayley* [Proc. London math. Soc. (1) 3 (1869/71), p. 221/2 [1871]; Papers 7, Cambridge 1894, p. 263] avait résolu un problème isopérimétrique particulier en le ramenant à une question d'extrémé ordinaire.*

337) *Il arrive que la méthode donne des conditions suffisantes. C'est le cas, par exemple, de la ligne la plus courte entre deux courbes données, problème pour lequel, l'„Extremalenintegral" étant

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

la fonction à minimer par les procédés du calcul différentiel est la fonction

$$\sqrt{[\tilde{x}(a) - x_2]^2 + [\tilde{y}(a) - y_2]^2}$$

de la variable a.*

338) Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 364.

339) **O. Bolza*, Calculus of variations[11]), p. 113.*

I. Todhunter[340]) a, le premier, exprimé explicitement la variation, qui est un infiniment petit du second ordre, dans un cas spécial de limites variables. *C. E. Lundström*[341]) s'est occupé des conditions suffisantes pour extrémés dans le cas des points limites mobiles, mais ses recherches ne sont pas rigoureuses[342]).

G. Erdmann[343]) a alors utilisé les variations d'ordre supérieur. Introduisant les quantités qui interviennent dans la transformation Jacobi-Hesse [nº **16**], il calcule $\delta^2 J_1$, dont l'expression est compliquée. $_*$*G. A. Bliss*[344]), procédant d'une manière tout à fait analogue à celle de *K. Weierstrass* pour le cas des deux points limites fixes [nº **19**], recherche $\delta^2 J_1^{(t)}$, un point extrême étant variable.*

G. Erdmann, à l'aide de son expression pour $\delta^2 J_1$, donne des conditions qu'il croit suffisantes, en général, pour extrémer, les limites de la ligne d'intégration étant variables. Il applique sa méthode aux cas de la ligne la plus courte entre un point et une courbe, et entre deux courbes; $_*$pour ces problèmes particuliers, il donne respectivement la condition[345]) du foyer et la condition de Bliss [nº **34**].* Il traite aussi la question suivante: on donne une courbe C et sur elle un point P_1; déterminer un second point P_2 sur C, et une courbe $P_1 P_2$ de longueur donnée, de manière à maximer l'aire délimitée.

33. Un seul point extrême variable. Recherches récentes. Soit Γ_1 la courbe sur laquelle doit se trouver le point P_1. La condition du premier ordre conduit à la *condition de transversalité*[346]), qui exprime la relation existant entre les coefficients angulaires de l'extrémale λ et de la courbe Γ_1 au point P_1. $_*$Lorsque x est variable indépendante, elle s'écrit

$$f(x_1, y_1, y_1') + (\bar{y}_1' - y_1')f_{y'}(x_1, y_1, y_1') = 0. \tag{29}$$

K. Weierstrass[347]) l'a donnée en représentation paramétrique. C'est

$$F_{x'}(x, y, x', y') \cdot \bar{x}' + F_{y'}(x, y, x' y') \cdot \bar{y}' = 0,$$

340) History calculus variations [13]), p. 330.

341) Nova Acta Soc. sc. Upsal. (3) 7 (1870), mém. nº 4, p. 24 et suiv. [1869].

342) $_*$Voir aussi *E. P. Culverwell* [Proc. London math. Soc. (1) 25 (1893/4), p. 361/74], qui procède géométriquement.*

343) Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 364 et suiv.

344) $_*$Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 132 et suiv.*

345) Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 374.

346) *A. Kneser* [Variationsrechnung [20]), p. 35] dit que Γ_1 est coupée transversalement par λ; *W. F. Osgood* [Annals of math. (2) 2 (1900/1), p. 112] dit que Γ_1 rencontre transversalement λ.

347) $_*$Dans un cours professé en 1882/3 à l'Université de Berlin.* Cf. *A. Kneser*, Variationsrechnung [20]), p. 32 et suiv.

x', y' s'appliquant à λ; $\bar{x}', \bar{y}'$ à Γ_1. Le premier membre est calculé pour P_1.

A. Kneser [n° **29**] a étendu au problème en discussion la méthode de Weierstrass; il a élargi la notion de champ en ne supposant plus, comme *K. Weierstrass,* que les extrémales qui le composent sont issues d'un même point. Il utilise un champ d'extrémales transversales à Γ_1. Il démontre[348]) que, si $F(x, y, x', y') \neq 0$ au point P_1, un arc d'extrémale coupant transversalement une courbe Γ_1 peut, excepté quand la transversalité dégénère en tangence, être entouré d'un tel champ; dans le voisinage de cette courbe *par chaque point P_3 de Γ_1, dans le voisinage de P_1, on peut construire une extrémale et une seule qui soit coupée transversalement par Γ_1 et telle que sa tangente en P_3 forme un angle infiniment petit avec la tangente en P_1 à λ.*

Le point P_1'' où l'extrémale λ est tangente, pour la première fois de P_1 vers P_2, à l'enveloppe des extrémales transversales à Γ_1, est appelé par *A. Kneser*[349]) le *foyer*[350]) de la courbe Γ_1 sur l'extrémale [*extremaler Brennpunkt*]. **G. A. Bliss*[351]) définit le foyer analytiquement et démontre la propriété qui sert de définition à *A. Kneser.** L'extrémale cesse d'extrémer au foyer. La démonstration de *A. Kneser*[352]) comporte la même exception que celle qui se présente pour les limites fixes. *G. A. Bliss* l'établit à l'aide de l'expression de la variation seconde.

Le foyer de toute courbe (ou surface) transversale à λ en P_1 est situé entre P_1 et le point conjugué P_1' de P_1. *Ce fait n'est pas distinct du théorème de Sturm sur les équations différentielles[172]).* *G. A. Bliss* montre de plus que la position du foyer ne dépend que de la courbure de la courbe Γ_1 en P_1, *et que si le rayon de courbure varie de 0 à $+\infty$ du côté de Γ_1 où se trouve λ et ensuite de ∞ à 0 en sens opposé, le foyer P_1'' se meut continûment de P_1

---

348) Variationsrechnung[20]), p. 109/12 (§ 30).

349) Id. p. 89.

350) *Ce nom, adopté par *O. Bolza* [Variationsrechnung[11])] et par *J. Hadamard* [Calcul des variations[6])], se justifie si l'on se représente les extrémales comme étant des rayons lumineux.* *G. A. Bliss* dit *point critique* (*critical point*), *terme adopté par *E. Zermelo* et *H. Hahn* dans l'édition allemande de l'Encyclopédie, II A, p. 630.*

351) Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 132/41, en partic. p. 136. *Cf. *O. Bolza* [Calculus of variations[11]), p. 113] pour la représentation non paramétrique.*

352) Variationsrechnung[20]), p. 93/7. *Voir aussi *A. Dresden*, Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 474.*

vers P_1' ou de P_1' vers P_1, suivant que

$$F(x_1, y_1, x_1', y_1') > 0 \quad \text{ou} \quad < 0,$$

la fonction F_1 étant supposée positive.*

Marion Ballantyne White[352a]) a fait une étude analogue pour le problème spatial à une limite variable. Ces recherches, qui sont valables même en cas de singularité de la surface enveloppe, sont appliquées à extrémer l'intégrale prise suivant une courbe joignant une surface donnée à un point fixe.

G. A. Bliss[352b]) donne, pour le cas d'une limite variable, en même temps que pour celui où les deux points extrêmes sont fixes, la théorie de la variation seconde de $J_1^{(t)}$, et démontre la nécessité des conditions de Legendre, de Jacobi et de Weierstrass, en faisant usage d'un système de coordonnées tel que les fonctions intervenant dans les calculs sont invariantes pour une transformation paramétrique.*

Grâce à son extension de la notion de champ d'extrémales, *A. Kneser*[353]) applique la méthode de Weierstrass au cas où une limite est variable sur une courbe ou sur une surface donnée. *Modifiant en conséquence la construction de Weierstrass, il établit, pour ces cas, la formule de Weierstrass et obtient ainsi la condition de Weierstrass au sens strict (pour l'extrémé fort). Il démontre alors que l'arc d'extrémale fournit un minimé fort et strict si cet arc, sans point double, est coupé transversalement par la courbe Γ_1 en P_1, satisfait à la condition de Legendre, à celle de Weierstrass, prises au sens strict sur l'extrémale, à l'inégalité

$$F(x_1, y_1, x_1', y_1') \gtrless 0,$$

et ne contient pas le foyer P_1'' (*condition du foyer* au sens strict).*

G. A. Bliss et *Ch. M. Mason*[353a]) s'occupent de l'existence d'un champ d'extrémales dans le cas de l'espace ($n = 2$) et d'une limite variable [cf. n° 27]. *J. Radon*[353b]) fait la même étude pour l'intégrale $J_2^{(t)}$.

O. Bolza[353c]) démontre le théorème d'Osgood [n° 28] pour le cas d'un point extrême variable.*

352a) *Diss. Chicago 1910; Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 175/98.*

352b) *Trans. Amer. math. Soc. 8 (1907), p. 405/14.*

353) Variationsrechnung[20]), p. 74/81.

353a) *Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 440/66, en partic. § 7, 8.*

353b) *Sitzgsb. Akad. Wien 119 IIa (1910), p. 1290 et suiv. (§ 4).*

353c) *Trans. Amer. math. Soc. 2 (1901), p. 422; Variationsrechnung[11]), p. 356/7.*

34. Deux limites variables. Recherches récentes. On a deux courbes, l'une Γ_1 sur laquelle se trouve le point P_1, l'autre Γ_2 sur laquelle doit être P_2. $_*$Elles doivent toutes deux couper transversalement les extrémales, car on a, outre la condition (29), celle obtenue en remplaçant les indices 1 par 2.*

$_*$La courbe Γ_1 a sur λ deux foyers conjugués, et si l'on appelle *sens de gauche à droite sur l'extrémale* celui qui va de P_1 en P_2, on a un *foyer à droite* (*rechtseitiger Brennpunkt*) P_1'' et un *foyer à gauche* P_1'''. De même, Γ_2 a deux foyers P_2'' et P_2'''. Outre qu'il ne peut tomber dans l'intervalle d'intégration*, le foyer P_1'' ne peut se trouver entre P_2 et P_2''. C'est la *condition de Bliss*[354]). $_*$Il en résulte que les six points, P_1, P_2 et les quatre foyers conjugués, s'ils existent tous, doivent être situés dans l'ordre P_2''', P_1''', P_1, P_2, P_2'', P_1''.* *G. A. Bliss*[355]) en démontre la nécessité. $_*$*A. Dresden*[356]) l'établit analytiquement. Il utilise ici aussi la méthode de différentiation.*

La condition de Bliss peut être exprimée autrement, en utilisant la relation entre le foyer P_2'' et la courbure de Γ_2 en P_2 [n° **33**]. Si r est le rayon de courbure de Γ_2 et r_T celui de la courbe T issue du point P_2 (où elle est tangente à Γ_2) et coupant transversalement toutes les extrémales, on a, dans le voisinage du point P_2,

$$\frac{1}{r} \geqq \quad \text{ou} \quad \leqq \frac{1}{r_T}$$

suivant que les fonctions F et F_1 ont le même signe ou des signes contraires.

La courbe T doit être tout entière du même côté (si le signe $>$ est réalisé) que Γ_2 par rapport à l'extrémale λ, ou du côté opposé (si on a le signe $<$). Cette condition[357]) est encore valable lorsque, les points P_1'' et P_2'' n'existant pas, la première forme de la condition de Bliss est illusoire. $_*$*O. Bolza*[358]) indique qu'on peut démontrer directement la seconde forme en appliquant le théorème de transversalité de Kneser.*

$_*$La condition de Bliss au sens strict (c'est-à-dire égalité non comprise: $P_1'' \gtrless P_2''$), jointe à celle de Weierstrass ou de Legendre, est

354) *G. Erdmann* [Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 369] l'a donnée, le premier, pour l'exemple de la ligne la plus courte entre deux courbes, en utilisant son expression de la variation seconde.

355) Math. Ann. 58 (1904), p. 70 et suiv.

356) $_*$Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 476/7.*

357) $_*$Math. Ann. 58 (1904), p. 80.*

358) $_*$Variationsrechnung [11]), p. 330.*

suffisante pour extrémer.* *G. A. Bliss*[359]) démontre analytiquement la suffisance, en considérant les extrémales $1'2'$ transversales à Γ_1, et en dérivant deux fois l'intégrale $J_{(12)}$ par rapport au paramètre du champ. *$_*$E. Zermelo* et *H. Hahn*[360]) l'établissent, par une élégante méthode géométrique, en prenant un point entre P_1'' et P_2''; mais cela suppose que les conditions de Legendre et de Weierstrass sont vérifiées, toutes deux au sens strict, au delà du point P_2, ce qui n'est pas nécessaire.*

$_*$La nécessité de la condition de Bliss a encore lieu, comme l'indique *J. Hadamard*[361]), dans le cas de plusieurs fonctions inconnues, les courbes Γ_1, Γ_2 devenant des surfaces ou d'autres variétés; mais on n'est pas assuré que la condition est suffisante.

A. Kneser[362]) et *A. Dresden*[363]) considèrent $J_1^{(t)}$ dans le cas où il y a entre les coordonnées des points extrêmes une relation de la forme

$$h(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0.^*$$

35. Ligne d'intégration fermée. $_*$Le cas des lignes fermées, qu'on peut rattacher à celui des limites variables, n'a été résolu que pour $n = 1$.

On considère l'extrémale λ, fermée et à tangente continue. On rapporte les points voisins de λ à un système de coordonnées tel que celui formé par leur distance normale y à λ et par l'arc x de λ qui détermine la position du pied de cette normale. On considère une figure auxiliaire dans laquelle x et y sont des coordonnées cartésiennes. On voit aisément qu'on doit avoir la condition de Weierstrass correspondant au genre de minimé que l'on a en vue, et que non seulement la condition de Jacobi doit être réalisée dans l'intervalle $(x = 0, x = 1)$, si l'on prend comme unité la longueur de λ, mais qu'il ne doit y avoir aucun foyer conjugué d'abscisse si grande qu'elle soit, c'est-à-dire que la condition de Jacobi doit être vérifiée dans un intervalle infini. *H. Poincaré*[364]) en démontre la nécessité par des considérations géométriques, puis, prenant comme point de départ les équations canoniques de Hamilton, il prouve que la condition précédente, jointe à celle de Weierstrass, est suffisante pour extrémer.

L'absence de foyer conjugué conduit aux *extrémales asymptotiques à λ*, lesquelles forment un champ[365]) autour de cette extrémale.

359) Math. Ann. 58 (1904), p. 75 et suiv.
360) $_*$Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II A, 8^a, p. 631.*
361) $_*$Calcul des variations[6]) 1, p. 429.*
362) Variationsrechnung[20]), p. 30/2.
363) $_*$Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 474.*
364) $_*$Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 3, Paris 1899, p. 283/9.*
365) $_*$„Faisceau régulier" dans la terminologie de *J. Hadamard*.*

Il suffit d'appliquer la méthode de Kneser [n° **29**], consistant à mener les transversales à la famille d'asymptotiques.

J. Hadamard[366]) donne une théorie basée sur des principes tout différents. Il démontre la nécessité de l'absence de foyer conjugué, en appliquant la méthode de Darboux-Erdmann, mais en raisonnant, comme il le fait pour le cas ordinaire, sur les extrémales voisines de λ, au lieu de considérer l'équation aux variations[366a]).*

Solutions discontinues.

36. La condition de Weierstrass-Erdmann. Famille d'extrémales brisées. *Après avoir traité le problème dans l'hypothèse où les courbes acceptables sont des courbes ordinaires, il faut rechercher les solutions dites *discontinues*[366b]), c'est-à-dire celles données par des courbes présentant des *points anguleux* (*Ecke*)[367]), où il y a discontinuité pour y', les fonctions x et y étant elles-mêmes continues. De pareilles solutions peuvent, en effet, se présenter[368]).*

B. Goldschmidt, J. Steiner et *E. F. A. Minding* [n° **39**] avaient déjà fait des recherches particulières au sujet de ces solutions (se présentant notamment dans des problèmes isopérimétriques), mais le premier qui se soit occupé systématiquement des solutions discontinues est *I. Todhunter*[369]), qui traite un grand nombre d'exemples, sans arriver toutefois à un théorème général.

366) *Calcul des variations[6]) 1, p. 433/5.*

366a) *En ce qui concerne l'existence [cf. n° **27**] des extrémales fermées, il y a les recherches de *J. Hadamard* [Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907), p. 216 et suiv.] et celles de *A. Signorini, L. Tonelli* [voir le chapitre consacré dans cet article aux applications, fin du n° **87**]. Pour les travaux de *J. Hadamard* et de *H. Poincaré* sur les géodésiques fermées de diverses espèces de surfaces, voir la fin du n° **77** consacré aux lignes géodésiques.*

366b) *E. P. Culverwell* [Proc. London math. Soc. (1) 26 (1894/5), p. 345/64] dit encore *compounded* solutions.*

367) *C. Carathéodory* emploie le terme *Knickpunkt*. En anglais *corner* (*O. Bolza*).*

368) *Un exemple est donné par le célèbre problème de Newton [voir les applications, n° **82**].*

369) *Researches[210]); cf. *M. M. U. Wilkinson* [Messenger math. (2) 3 (1874), p. 184/92] qui signale certaines erreurs. Voir aussi *M. M. U. Wilkinson*, On false discontinuity, with illustrations from Fourier's theorem and the calculus of variations, Cambridge 1871; Messenger math. (2) 1 (1872), p. 175/7. Les recherches de *E. P. Culverwell*[366b]) se rattachent à celles de *I. Todhunter* et leur sont très semblables. Voir encore *A. P. Starkov* [n° **82**]. *V. (W.) A. Zimmermann* [Zapiski novoross. universit. (Mémoires de l'université d'Odessa) math. 68 (1896), p. 1/270; 69 (1896), p. 165/462] étudiant l'intégrale J_p, considère comme extrémales discontinues celles qui correspondent à une discontinuité pour au moins une des

H. E. Heine[370]), utilisant des indications données par *K. Weierstrass* dans un cours, a montré que si δJ_p s'annule, les quantités M_ν [n° 7] doivent rester continues aux points anguleux de la ligne d'intégration, qui se compose d'arcs d'extrémales. Il montre qu'il en est de même de $\frac{\partial f}{\partial y'}$ pour $p = 1$ si l'on compare la ligne d'intégration à une courbe dont le voisinage est d'ordre 1 et dont le point anguleux a même abscisse. Mais si l'abscisse du point anguleux varie également (δx n'est plus nul), on trouve, avec *G. Erdmann*[371]), que l'évanouissement de la variation première implique la continuité de cette seconde quantité:

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} .$$

*On peut écrire ces conditions comme suit, x_0 étant l'abscisse du point anguleux,

$$[f_{y'}]_{x_0 - 0} = [f_{y'}]_{x_0 + 0},$$
$$[f - y' f_{y'}]_{x_0 - 0} = [f - y' f_{y'}]_{x_0 + 0}.$$

La première ne peut avoir lieu lorsque la fonction f est telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ a un signe invariable; il ne peut se présenter de solution discontinue que si la figurative n'est pas partout convexe, en d'autres termes si la fonction $\mathcal{E}$ de Weierstrass n'est pas de signe constant. Pour l'intégrale sous forme paramétrique, les relations, données par *K. Weierstrass*[372]), s'écrivent

$$[F_{x'}]_{t_0 - 0} = [F_{x'}]_{t_0 + 0}; \quad [F_{y'}]_{t_0 - 0} = [F_{y'}]_{t_0 + 0},$$

ou bien encore

$$F_{x'}(x_0, y_0, p_0, q_0) = F_{x'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0),$$
$$F_{y'}(x_0, y_0, p_0, q_0) = F_{y'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0),$$

où, par exemple,

$$p_0 = \cos \theta_0, \; q_0 = \sin \theta_0.$$

---

dérivées se présentant sous le signe intégral. Cf. *E. Th. Sabinin*, Mat. Sbornik [recueil Soc. math. Moscou] 20 (1898), p. 285/92. Ces travaux renferment des erreurs graves. On peut rattacher à la fois aux solutions discontinues et aux recherches de *P. L. Čebyšëv*[2]) les résultats de *A. A. Markov*, Soobščěnija Charĭkovskago matěmatičeskago Obščěstva [Communic. Soc. math. Kharkov] (2) 1 (1888/9), p. 250/76.*

370) Math. Ann. 2 (1870), p. 190/1.

371) J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 21/30 [1875]. *G. Erdmann* semble avoir donné cette condition indépendamment de *K. Weierstrass*. Cf. une démonstration de *O. Bolza*, Calculus of variations[11]), p. 36/40.*

372) Cours professé à l'Université de Berlin en 1865; cf. *H. Hancock*, Annals of math. (1) 11 (1896/7), p. 31; *C. Carathéodory* [Diss. Göttingue 1904, p. 3].*

J. K. Whittemore[373]) les démontre en utilisant le lemme de du Bois Reymond [n° **10**], méthode qui, contrairement à celles des auteurs précédents, est applicable à des discontinuités plus compliquées et notamment au cas où il y a une infinité de discontinuités. A ce point de vue, le résultat le plus général a été atteint par *H. Hahn*[373a]).

Ces relations, qu'elles soient sous forme paramétrique ou non, constituent la *condition au point anguleux* (*Eckenbedingung*, *corner-condition*) ou *de Weierstrass-Erdmann.*

C. Carathéodory[374]) l'exprime à l'aide de la fonction $\mathcal{E}$; d'où il conclut que

$$F_1(\theta) \equiv F_1(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)$$

s'annule au moins pour une valeur de θ comprise entre les directions étudiées θ_0 et $\bar{\theta}_0$ et au moins pour deux valeurs, si l'on a

$$F_1(x_0, y_0, p_0, q_0) > 0, \quad F_1(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) > 0.$$

Il donne[375]) une interprétation géométrique permettant de trouver la solution commune aux deux relations formant la condition de Weierstrass-Erdmann: pour le point anguleux P_0, les deux directions $\theta_0, \bar{\theta}_0$ correspondent aux points de contact d'une tangente multiple à la figurative [n° 22] du point P_0.

C. Carathéodory appelle *extrémale brisée*[376]) (*gebrochene Extremale*) tout ensemble de deux arcs P_1P_0, P_0P_2 possédant en P_0 un point anguleux satisfaisant à la condition de Weierstrass-Erdmann. Il démontre que si en P_0 on a

$$F_1(\theta) \gtrless 0, \quad F_1(\bar{\theta}) \gtrless 0,$$

on peut assigner un voisinage de P_0, tel qu'en tout point de ce domaine il existe une extrémale brisée et une seule, voisine de $P_1P_0P_2$, c'est-à-dire se transformant d'une manière continue en la primitive lorsque le point P se meut le long d'une courbe passant par P_0.

S'occupant de la construction d'une famille d'extrémales brisées, *C. Carathéodory* démontre[377]), en s'appuyant sur la théorie des fonc-

---

373) $_*$Annals of math. (2) 2 (1900/1), p. 135/6.*

373a) $_*$Math. Ann. 63 (1907), p. 253.*

374) $_*$Diss. Göttingue 1904, p. 8.*

375) $_*$Diss. Göttingue 1904, p. 71; Math. Ann. 62 (1906), p. 456/60.*

376) $_*$„Broken extremal", *O. Bolza,* Calculus of variations [11]). Il appelle „Eckenwinkel", l'angle formé par les directions $\bar{\theta}_0$ et $\theta_0 + \pi$. Les allemands opposent aux extrémales brisées les *extrémales régulières.**

377) $_*$Diss. Göttingue 1904, § 6; Math. Ann. 62 (1906), p. 474/8. Cf. *O. Bolza,* Amer. J. math. 30 (1908), p. 209/13.*

tions implicites, que lorsque l'expression

$$\Omega_0 \equiv p_0 F_x(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) - \bar{p}_0 F_x(x_0, y_0, p_0, q_0)$$

n'est pas nulle [cf. fin n° 38], on peut sans ambiguïté déterminer sur une extrémale λ_a voisine de l'extrémale $\lambda_{a_0} = P_1 P_0$ de la famille

$$(30) \qquad x = \varphi(t, a), \quad y = \psi(t, a)$$

un point P et une direction $\bar{\theta}$ qui, associée à la direction θ de la tangente positive à l'extrémale λ_a en P, satisfait à la condition de Weierstrass-Erdmann. La solution est de classe C' dans le voisinage des paramètres t_0, a_0, θ_0, correspondants à l'arc $P_0 P_1$. Si les équations

$$x = \bar{\varphi}(t, a), \quad y = \bar{\psi}(t, a)$$

représentent l'extrémale ayant la direction $\bar{\theta}$ au point P, les deux systèmes d'équations définissent, lorsque le paramètre a varie, une famille d'extrémales brisées fournissant la ligne $\lambda_0 + \bar{\lambda}_0$ ou $P_1 P_0 P_2$ pour $a = a_0$. *O. Bolza*[378]) dit que le second des systèmes d'équations représente la *famille complémentaire* (*set of extremals complementary, komplementäre Extremalenschar*) de l'autre. Le point P décrit la *courbe du point anguleux* (*corner-curve, Eckenkurve*)[379]).*

37. *Points conjugués sur les extrémales brisées. Condition de Jacobi. Soit Q, de la famille (30) le premier foyer précédant le point P_0. La direction $\tilde{\theta}_0$ de la courbe du point anguleux en P_0 est la même pour toutes les familles d'extrémales contenant λ_0 et possédant le même foyer Q. Lorsque ce point Q se meut sur λ_0, d'un point P_0', conjugué de P_0, jusqu'à P_0, la direction $\tilde{\theta}_0$ tourne à partir de θ_0 d'un angle π, de manière continue. Et pour une position bien déterminée E_0 du point Q, la direction $\tilde{\theta}_0$ coïncide avec $\bar{\theta}_0$.

La famille complémentaire possède un foyer Q'' entre P_0 et $\bar{P}_0'$. Toutes les familles d'extrémales brisées qui ont en commun le foyer Q ont aussi en commun le foyer Q'', qui est appelé le *point conjugué de Q sur l'extrémale brisée* $\lambda_0 + \bar{\lambda}_0$. C'est aussi le foyer sur $\bar{\lambda}_0$ de la famille complémentaire à celle passant par Q. On peut distinguer quatre cas suivant les signes des quantités Ω_0 et $\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0)$. Par exemple, dans le cas des deux signes $+$, le point Q'' se meut de $\bar{E}_0$ vers $\bar{P}_0'$ tandis que Q va de P_0' vers E_0, et si Q continue de E_0 jusqu'en P_0, le point Q'' se meut de P_0 vers $\bar{E}_0$. Ce point $\bar{E}_0$ a la même signification pour l'extrémale $\bar{\lambda}_0$ que E_0 pour λ_0. Les points E_0 et $\bar{E}_0$ ont été introduits par *C. Carathéodory*[380]).

378) *Calculus of variations [11]), p. 213.*

379) **C. Carathéodory* [Diss. Göttingue 1904] dit „Knickpunktkurve".*

380) *La théorie des points conjugués sur les extrémales brisées lui est due,

O. Bolza[381]) et *A. Dresden*[382]) donnent sous forme explicite les relations entre les paramètres des points conjugués Q et Q''.

C. Carathéodory a, le premier, donné la condition de Jacobi pour les solutions discontinues. *A. Dresden*, qui étudie le cas des points extrêmes variables, la démontre par la méthode de différentiation [n° **32**] et l'énonce sous cette forme simple: il faut, pour minimer, qu'on ait[382a])

$$P_2 \leqq P_1'',$$
$$E_0 < P_1,$$

P_1'' étant le point conjugué de P_1 sur l'extrémale brisée $\lambda_0 + \bar{\lambda}_0$. La première inégalité résulte de l'extension, au cas des extrémales brisées, du *théorème de l'enveloppe*[383]), qui consiste alors dans l'égalité

$$J_{\lambda_a}(P_1 P_5) + J_{\bar{\lambda}_a}(P_5 P_4) + J_{\mathfrak{F}}(P_4 P_1'') = J_{\lambda_0}(P_1 P_0) + J_{\bar{\lambda}_0}(P_0 P_1''),$$

$\mathfrak{F}$ étant l'enveloppe de la famille complémentaire $\bar{\lambda}_a$, P_4 le point de contact de $\mathfrak{F}$ avec $\bar{\lambda}_a$, P_5 le point anguleux de l'extrémale brisée $\lambda_a + \bar{\lambda}_a$. La seconde inégalité s'obtient, mais au sens large seulement[384]), par un raisonnement très simple, en supposant $P_1 < E_0$.

De $E_0 \leqq P_1$ on conclut que

$$P_2 < \bar{E}_0,$$

à cause de $P_1'' < \bar{E}_0$. On a donc une condition pour chacun des points P_1 et P_2, entre lesquels on a le critère de Jacobi $P_2 \leqq P_1''$.*

38. *Champ d'extrémales brisées. Conditions suffisantes.** S'il s'agit d'un extrémé fort, on appelle *direction forte*[385]) (*stark*) celle qui,

---

mais elle a été exposée par une méthode directe et complétée par *O. Bolza* et ensuite par *A. Dresden*, Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 480/6.*

381) *Amer. J. math. 30 (1908), p. 221/2.*

382) *Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 483 et suiv.*

382a) *Les symboles

$$A < B, \quad A \leqq B$$

signifient, le premier, que le point A précède le point B; le second, que A ne suit pas B. Le signe $<$ est utilisé par *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]).*

383) **C. Carathéodory*, Diss. Göttingue 1904, p. 21; cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 379/80.*

384) *Au sens strict, elle résulte de la méthode de *A. Dresden*.*

385) **J. Hadamard*, Calcul des variations[6]), p. 439. *C. Carathéodory* dit „solution forte". La terminologie utilisée n'est pas uniforme. *C. Carathéodory* appelle *réguliers* les points du plan qui peuvent être entourés d'un faisceau *d'extrémales fortes* (c'est-à-dire donnant un extrémé fort). *O. Bolza* [Calculus of variations[11])] dit que les points sont réguliers quand le faisceau est composé d'extrémales continues.*

lorsqu'on y remplace Y par le coefficient angulaire d'une telle direction, vérifie la condition de Weierstrass $\mathcal{E} \geqq 0$, quelle que soit la seconde direction y'; *direction faible*, celle qui ne possède pas cette propriété. Une direction forte correspond à un point de la figurative tel que la tangente y est *droite extrême*[386]), c'est-à-dire qu'elle laisse la courbe tout entière d'un même côté. Ayant une série d'arcs d'extrémales fortes dépendant de deux paramètres, on en extrait un faisceau dépendant d'un paramètre unique et obtenu en faisant décrire un arc de courbe au point anguleux, de manière à obtenir un champ de solutions discontinues.

C. Carathéodory montre qu'en certains cas de solutions discontinues, la condition de Weierstrass $\mathcal{E} \geqq 0$ est vérifiée pour toutes les directions. Il établit qu'on peut recouvrir le voisinage d'un point P_0 par un faisceau d'extrémales fortes (qui sont en partie brisées) pourvu que Ω soit différent de zéro et que la figurative ne possède nulle part de droite extrême de quadruple osculation[386a]).

La considération de la *Feldintegral,* qui se définit comme pour les solutions continues, montre que les formules de Hamilton [n° **29**] sont encore applicables dans le cas d'un champ d'extrémales brisées; mais le théorème fondamental de Weierstrass qui en résulte présente, dans son application, une difficulté spéciale aux solutions discontinues, par le fait que la fonction $\mathcal{E}$ s'annule extraordinairement en chaque point de la courbe du point anguleux.

Si, le long de l'extrémale brisée $P_1 P_0 P_2$, la condition de Legendre est réalisée au sens strict:

$$F_1 > 0, \quad \overline{F}_1 > 0,$$

et si

$$\Omega_0 \gtrless 0, \quad \sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) \gtrless 0,$$
$$E_0 \prec P_1 \prec P_0, \quad P_0 \prec P_2 \prec P_1'',$$

la courbe $P_1 P_0 P_2$ peut être entourée d'un champ d'extrémales brisées[387]). *C. Carathéodory*[388]) démontre que si, en outre, la condition de Weier-

386) $_*$*J. Hadamard*[385]). *C. Carathéodory* dit, avec *H. Minkowski*, „droite d'appui" (*Stützgerade*).*

386a) $_*$Le seul exemple connu où la figurative possède une tangente de quadruple osculation se présente dans un problème posé par *J. Clerk Maxwell* [Proc. Cambr. philos. Soc. 2 (1864/76), éd. 1876, p. 294/5 [1873]; Papers 2, Cambridge 1890, p. 310] et résolu par *C. Carathéodory* [Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), p. 47] à l'aide d'une méthode directe qui est exposée plus loin [n° **69**]. Ce cas est particulièrement intéressant, car la ligne cherchée se compose de deux arcs de courbes analytiquement différentes, tangents l'un à l'autre en leur point de raccordement.*

387) $_*$*C. Carathéodory,* Diss. Göttingue 1904, § 6; Math. Ann. 62 (1906), p. 474/8.*

388) $_*$Id. p. 480.*

strass pour l'extrémé fort a lieu le long de toutes les extrémales du champ, l'extrémale brisée $P_1 P_0 P_2$ fournit un minimé fort et strict.

A. Dresden[389]) démontre que

$$\Omega_0 = \left[\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{E}(x(s), y(s);\ x'(s), y'(s);\ \cos\bar{\theta}_0,\ \sin\bar{\theta}_0)\right]_{s=s_0},$$

s étant la longueur de l'arc λ_0. De cette relation entre les fonctions Ω et $\mathcal{E}$, il résulte qu'on a

$$\Omega \leqq 0$$

quand la condition de Weierstrass a lieu au sens large le long de l'arc $P_1 P_2$.

A. Dresden en déduit aussi une démonstration simple de ce théorème de *C. Carathéodory*: si une extrémale continue λ_0 cesse d'être forte en un point P_0, il y a une direction forte $\bar{\theta}_0$, passant par P_0, qui, avec la direction θ_0 de la tangente à l'extrémale λ_0, satisfait à la condition de Weierstrass-Erdmann.

Ce qui précède suppose que $\Omega_0 \gtrless 0$. Si $\Omega_0 = 0$, on ne pourrait plus construire sans ambiguïté une famille d'extrémales complémentaire à une famille donnée. Mais en utilisant certains points de la théorie des équations différentielles *C. Carathéodory*[390]) a établi ce qui suit. Si, en tout point d'un domaine, il y a deux directions satisfaisant à la condition de Weierstrass-Erdmann, on peut considérer les deux familles de courbes telles qu'en chacun de leurs points les directions positives de la tangente soient respectivement θ et $\bar{\theta}$. Si une extrémale coïncide avec une de ces courbes, ce qui n'a lieu que quand $\Omega_0 = 0$, chacun de ses points est un point anguleux possible. *C. Carathéodory* a considéré aussi le cas, particulièrement intéressant, où la condition est identiquement satisfaite.

Tout récemment, *C. Carathéodory*[391]) a traité d'une manière complète et définitive le cas où $\Omega = 0$. La figurative est supposée n'avoir qu'une seule tangente double, les directions correspondantes aux points de contact étant $\theta(x, y)$ et $\bar{\theta}(x, y)$; le cas où il y aurait plusieurs points doubles ou même multiples ne présente pas de difficulté spéciale. Si $\bar{\vartheta}$ est une direction quelconque, la condition de Weierstrass pour la direction fixe ϑ est

$$\mathcal{E}(x, y;\ \vartheta, \bar{\vartheta}) \geqq 0$$

pour toutes les valeurs de $\bar{\vartheta}$ comprises entre 0 et 2π; cet intervalle

389) *Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 485/6.*

390) *Diss. Göttingue 1904, § 6, § 8.*

391) *Texte et notes 391 à 391[b] d'après une lettre de *C. Carathéodory*.*

peut être remplacé par les deux points $\vartheta = \theta$ et $\vartheta = \overline{\theta}$, car ϑ est une direction forte lorsque l'inégalité écrite a lieu pour ces deux valeurs. Pour savoir si l'extrémale

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad \vartheta = \vartheta(s)$$

est forte ou faible, l'arc s étant choisi tel que $\vartheta = \theta$ pour $s = 0$, on n'a donc, pour $\mathcal{E}(s) \geqq 0$ aux environs du point $s = 0$, qu'à considérer la fonction $\overline{\mathcal{E}}(s)$, dont le signe n'est autre que celui de $\theta(s) - \vartheta(s)$. En développant cette dernière fonction, ainsi que $\Omega(s)$, par rapport à s, et en utilisant un calcul antérieur[391a]), *C. Carathéodory* montre qu'il suffit, pour discuter le problème, de considérer le premier terme du développement de $\Omega(s)$, ou encore de connaître $\Omega(x, y)$ sur la courbe C d'équations[391b])

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\theta$$

et sur la courbe correspondante $\overline{C}$. *C. Carathéodory* généralise la formule de *A. Dresden* en établissant que

$$\frac{d\mathcal{E}(s)}{ds} = \Omega(s) + (\theta - \vartheta)B(s),$$

$B(s)$ étant une fonction continue, et il démontre (mais sans s'appuyer sur cette égalité, inutilisable pour $\Omega = 0$) que le premier terme des séries

$$\frac{d\mathcal{E}(s)}{ds}, \; \Omega(s)$$

sont identiques.

Ces résultats permettent d'étudier sans restriction aucune toutes les circonstances où $\Omega = 0$ et d'établir la théorie des points conjugués pour tous ces cas d'exception.

C. Carathéodory démontre enfin que si, le long d'une extrémale, la condition nécessaire de Weierstrass

$$\mathcal{E}(\vartheta, \overline{\vartheta}) \geqq 0$$

est vérifiée, cette condition est suffisante pour qu'un arc $P_1 P_2$ réalise un extrémé fort, pourvu que le point P_2 se trouve entre P_1 et un point $P_1{}^*$ appelé, par extension, conjugué de P_1. La détermination du point $P_1{}^*$, qui se trouve toujours entre P_1 et son conjugué P_1' au sens de Jacobi-Weierstrass, dépend de la façon dont le problème se comporte aux environs des points où la fonction $\mathcal{E}$ s'annule extraordinairement.*

391a) *Voir le calcul qui y conduit [Math. Ann. 62 (1906), p. 472].*

391b) *Math. Ann. 62 (1906), p. 471.*

39. Problèmes de variations unilatérales. Il peut se présenter des solutions qui ont des points communs avec la limite du domaine des courbes acceptables. *Leur recherche constitue le problème des *variations unilatérales*[392]).* Ces solutions conduisent à un genre nouveau de discontinuités.

Tous les problèmes de variations unilatérales les plus simples dérivent du suivant: trouver une courbe joignant deux points fixes P_1 et P_2 du plan et qui extrême l'intégrale J_1 par rapport aux courbes qui sont situées par rapport à elle du côté des y positifs. Une variation δy est acceptable[392a]) si elle est positive ou nulle de P_1 à P_2 et nulle en P_1 et P_2.

B. Goldschmidt[393]), en étudiant le problème de la surface de révolution d'aire minimée [voir plus loin le n° **80** consacré à cette question], a trouvé, le premier, de telles solutions.

*Bien qu'ils concernent des problèmes isopérimétriques [cf. n° **46**], il y a lieu de signaler ici certains résultats obtenus par *J. Steiner* et *E. F. A. Minding*.*

J. Steiner[394]) donne sans démonstration cet énoncé: quand, sur une surface quelconque, un contour fermé C de périmètre donné et délimitant une aire maximée ne franchit pas les côtés d'un polygone curviligne P, les parties libres de C (c'est-à-dire intérieures au sens strict à P) sont des courbes de contour minimé ayant toutes même courbure géodésique constante. Il y a contact entre C et P lorsque le contour C se confond en un segment fini avec P. Là où il n'y a qu'un point commun, le côté du polygone forme avec C deux angles égaux. *J. Steiner* démontre ce théorème, dans le cas du plan[395]), par une méthode synthétique n'utilisant pas le calcul des variations[396]).

---

392) **J. Hadamard*, Calcul des variations[6]); en allemand: einseitige Variation; en anglais: one-sided variation (*G. A. Bliss*). On dit aussi „problèmes avec restrictions de domaine" (*Gebietseinschränkungen*).*

392a) **J. Hadamard* dit que l'ensemble des fonctions acceptables constitue un *champ fonctionnel unilatéral,* par opposition au *champ bilatéral.**

393) Determinatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortae, Göttingue 1834 [1831].

394) Ber. Akad. Berlin 1839, p. 80; Werke 2, Berlin 1882, p. 165.

395) C. R. Acad. sc. Paris 12 (1841), p. 479; J. math. pures appl. (1) 6 (1841), p. 105/70; J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 93/162, 188/250 (trad. en français par *G. Wertheim* et *J. H. Foelsing*); Werke 2, Berlin 1882, p. 177/240, 243/308. **A. M. Legendre* [*W. Ostwald*, Klassiker der exakten Wissenschaften n° 47, Berlin 1894, p. 76 et suiv.] avait traité un cas particulier par le calcul des variations. Voir aussi, pour des recherches analytiques sur les figures planes de *J. Steiner*,

Il considère des exemples dans le plan et sur la sphère.

E. F. A. Minding[397]), faisant des recherches analogues pour les surfaces de révolution, arrive à des résultats confirmant les précédents. Il les démontre[398]), mais pour le seul cas du contact, en considérant les courbes de périmètre minimé comme figures d'équilibre d'un fil inextensible sollicité par une force constamment normale au fil et tangente à la surface. Il étend aussi ses recherches à toutes les surfaces pour lesquelles on connaît une famille de lignes fermées de moindre périmètre.

I. Todhunter, cherchant à obtenir un extrémé par combinaison de différentes extrémales, obtient, mais d'une manière inductive et incomplète, des théorèmes analogues à ceux de *J. Steiner*. Il observe que, dans ces problèmes avec frontières, les variations des inconnues sont soumises à des inégalités au sens strict[399]) et que les raisonnements faits pour trouver la condition nécessaire pour annuler δJ_p [n° **9**] ne sont plus valables.

I. Todhunter considère aussi[400]) des problèmes où la notion d'extrémé est restreinte par le fait que les courbes acceptables ont la concavité dirigée dans un même sens.

G. Erdmann[401]) cherche à minimer J_1 dans le cas où la courbe extrémale doit rester dans un domaine R tel que, dans R, l'égalité

$$y = \varphi(x, z)$$

donne des valeurs réelles pour z, de sorte que $\varphi'(z) = 0$ est l'équation de la frontière; il montre que ce problème revient à extrémer l'intégrale

$$\bar{J}_1 = \int f\{x, \varphi(x, z), \varphi'(x)\} dx,$$

dont les extrémales sont définies par l'équation

$$\varphi'(z)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

R. Höhne, Diss. Leipzig 1890, éd. Freiberg 1889?; *V.* (*W.*) *A. Zimmermann*[369]), § 4; *Eugen Meyer*, J. reine angew. Math. 128 (1905), p. 69/77.*

396) *Il prétend que le calcul des variations est impuissant à établir ces théorèmes. *K. Weierstrass* le réfute par son théorème plus général [voir plus bas].*

397) Bull. Acad. St.-Pétersb. (math.-phys.) 21 (1876), col. 252/61 [1875]; 24 (1878), col. 328, 399/409 [1877]; 25 (1879), col. 190/3 [1878]; Mélanges math. astron. St.-Pétersb. 5 (1874/81), p. 297/309, 443/58, 575/9.

398) J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 279/89 [1878].

399) *I. Todhunter*, Researches[210]), p. 14.

400) Id., p. 76.

401) J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 21/30 [1875]. *Ce mémoire met en évidence certaines erreurs de *I. Todhunter*.*

si l'on y remplace y par $\varphi(x, z)$. En appliquant à cette égalité son théorème de continuité [n° **36**], il conclut que la solution est composée d'arcs de la frontière et d'arcs d'extrémales de l'intégrale J_1, et il démontre qu'il y a contact entre deux arcs finis de ces deux espèces. Mais il ne traite pas complètement le cas où deux segments d'extrémales se rencontrent en un point de la frontière et il ne fait d'ailleurs pas d'hypothèse précise en ce qui concerne les caractères analytiques de $\varphi(x, z)$.

G. Darboux[402]), étudiant la ligne la plus courte sur une région de surface limitée arbitrairement, démontre une série de théorèmes, notamment qu'une partie de la frontière appartenant à la ligne la plus courte est tangente à l'arc géodésique correspondant.

*En se servant du lemme fondamental du calcul des variations, *K. Weierstrass* a démontré[403]) pour $J_1^{(t)}$ que si la courbe minimant l'intégrale a un segment P_3P_4 en commun avec la limite L du domaine, il faut que, le long de P_3P_4, la quantité

$$F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y'),$$

calculée pour L, soit $\leqq 0$ ou $\geqq 0$ suivant que le domaine R est à gauche ou à droite de l'arc P_3P_4. Mais cela exige que $x' > 0$ le long de l'arc P_3P_4. C'est la *condition à la frontière*[404]). Dans le cas de la forme non paramétrique, l'expression précédente doit être remplacée par

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}$$

et les termes „à gauche" et „à droite" par „au-dessous" et „au-dessus".

Lorsque le problème est régulier-positif le long de la frontière, suivant laquelle on a alors $F_1 > 0$, la condition peut s'écrire

$$\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{r_L} \geqq \text{ ou } \leqq 0,$$

$\frac{1}{r_\lambda}$ et $\frac{1}{r_L}$ étant les courbures en un point P sur P_3P_4, respectivement de l'extrémale λ touchant L en P de manière que les tangentes positives coïncident, et de la frontière L. Si la condition à la frontière est vérifiée au sens strict, la variation première ne peut s'annuler qu'avec la variation de la fonction inconnue elle-même.

---

402) Théorie des surfaces [79]) 3, p. 106/12; *voir aussi *E. B. Christoffel*, Abh. Akad. Berlin 1868, éd. 1869, math. Abh. p. 119/76; Math. Abh. 1, Leipzig 1910, p. 297/346.*

403) *Dans un Cours professé à l'Université de Berlin en 1879. Cf. *A. Kneser*, Variationsrechnung [20]), p. 177; *O. Bolza*, Calculus of variations [11]), p. 148.*

404) *En allemand on dit *Randbedingung*, en anglais *boundary conditions*.*

Dans le cas des variations unilatérales, les conditions du premier ordre permettent de distinguer le maximé du minimé.

S'il s'agissait, plus généralement, de trouver une courbe telle que la variation première de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, dx, dy, dz)$$

fût positive ou nulle lorsque les courbes variées ont pour extrémités deux points fixes et vérifient la relation

$$A(x, y, z)\,\delta x + B(x, y, z)\,\delta y + C(x, y, z)\,\delta z \geqq 0,$$

la condition s'écrirait[405])

$$\frac{F_x - \frac{d}{dt}F_{x'}}{A} = \frac{F_y - \frac{d}{dt}F_{y'}}{B} = \frac{F_z - \frac{d}{dt}F_{z'}}{C} \geqq 0.$$

Si la ligne d'intégration doit se trouver sur une surface donnée, la question peut être ramenée à la précédente. On peut, par un changement de variables, passer aux coordonnées curvilignes. Un problème analogue[406]) est de minimer l'intégrale précédente pour les chemins qui ne traversent pas une portion de l'espace représentée par une inégalité de la forme

$$\varphi(x, y, z) < 0.$$

K. Weierstrass démontre qu'au *point de passage* (*Übergangspunkt*) P_3 on doit avoir

$$\mathfrak{E}(x_3, y_3; p_3, q_3, p_3', q_3') = 0,$$

p_3, q_3 et p_3', q_3' étant les cosinus directeurs des tangentes positives au point P_3, respectivement à l'extrémale P_1P_3 et à la courbe L. Une relation analogue a lieu au point de passage P_4. Dans le cas spécial où le problème est régulier le long de la frontière L (ce qui exclut l'annulation extraordinaire de la fonction $\mathfrak{E}$), il résulte des conditions aux points P_3 et P_4 qu'on a

$$p_3' = p_3, \; q_3' = q_3; \; p_4' = p_4, \; q_4' = q_4,$$

ce qui signifie que les arcs d'extrémales P_1P_3 et P_4P_2 doivent toucher la frontière respectivement aux points P_3, P_4 de manière à ce que les tangentes positives coïncident [voir plus haut le théorème de *J. Steiner*].* Pour le cas où la ligne cherchée doit avoir en commun avec la frontière un seul point quelconque, *K. Weierstrass* démontre que si la courbe $P_1P_0P_2$ extrême, il est nécessaire que le rapport

405) **J. Hadamard*, Calcul des variations[6]), p. 179.*

406) *Id. p. 456/7.*

des sinus des angles que forme la frontière en P_0 avec les arcs P_1P_0, P_0P_2 soit le même que celui des fonctions $\mathcal{E}$ correspondant au point P_0, d'une part pour P_1P_0 quand on définit y' par la direction P_0P_2, et d'autre part pour P_0P_2 quand on définit y' par la direction P_1P_0[407]); *ce qui, en représentation paramétrique[408]), peut s'écrire simplement comme suit:

$$\mathcal{E}(x_0, y_0;\, p_0, q_0;\, p_0', q_0') = \mathcal{E}(x_0, y_0;\, \bar{p}_0, \bar{q}_0;\, p_0', q_0').$$

G. A. Bliss[409]) établit les conditions suffisantes. Il suppose d'abord x variable indépendante et en déduit le cas de la représentation paramétrique par une transformation ponctuelle. Il démontre que les formules de Hamilton, ainsi que la construction de Weierstrass et le théorème fondamental qui en découle, sont valables pour un certain champ *composé*, formé de deux champs partiels. L'un d'eux est obtenu en considérant la famille des extrémales passant par un point situé sur le prolongement de l'arc P_1P_3 au delà de P_1; l'autre étant celui des extrémales tangentes à la frontière donnée, champ dont *G. A. Bliss* établit l'existence. Il en conclut que si les arcs d'extrémales P_1P_3, P_4P_2 satisfont à la condition de Jacobi au sens strict, et si, le problème étant régulier (les conditions de Legendre et de Weierstrass au sens large étant donc satisfaites) et le domaine R se trouvant par exemple à gauche de P_3P_4, on a, au sens strict, pour P_3P_4 la condition relative à la frontière

$$\frac{1}{r_\lambda} - \frac{1}{r_L} > 0,$$

et la condition aux points de passages P_3, P_4, la ligne brisée $P_1P_3P_4P_2$, sans point multiple, minime l'intégrale. *O. Bolza*[410]) démontre directement en représentation paramétrique l'existence d'un champ d'extrémales tangentes à une courbe donnée, question qui joue un rôle important dans d'autres problèmes de variations, et il expose en détail les conditions suffisantes pour extrémer[411]).

Cette théorie s'étend d'elle-même à une ligne d'intégration se divisant en un nombre quelconque d'arcs d'extrémales et d'arcs de frontière.

Les questions de variations unilatérales donnent un exemple général

---

407) **G. Kobb* [Acta math. 17 (1893), p. 343/4] démontre le théorème homologue pour les intégrales doubles [voir n° 64].*

408) *Cf. *A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 173; *O. Bolza*, Calculus of variations[11]), p. 151, 267; *H. Hancock*, Calculus of variations[24]), p. 241/3.*

409) *Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 477/92. Voir aussi *J. W. Lindeberg*, Öfversigt Finska Vetensk. Soc. Förhandl. Aldelning A, 51 (1908/9), mém. n° 21.*

410) *Trans. Amer. math. Soc. 8 (1907), p. 399/404.*

411) *Variationsrechnung[11]), p. 401/7.*

de l'insuffisance de la considération des variations en ce qui concerne l'établissement de l'existence de l'extrémé. Il faut qu'à côté de la condition du premier ordre, le signe de la variation seconde concorde avec celui de la variation première.

J. Hadamard rattache à l'influence des sinuosités[412]) le fait que la méthode des variations donne un résultat inexact dans le cas des variations unilatérales[413]). Il montre que le minimé unilatéral a lieu moyennant la seule condition du premier ordre au sens strict, si les chemins variés sont assujettis à avoir, avec le chemin primitif, un voisinage du second ordre suffisamment étroit[414]).

Aux problèmes avec restriction de domaine se rattachent les questions de variations avec *limitation de coefficient angulaire ou de pente* (*Gefällbeschränkungen*)[415]), qui, eux aussi, conduisent à des solutions discontinues, comme cela paraît devoir être le cas général lorsqu'il y a des inégalités introduites par des restrictions quelconques. Le problème de Newton en offre un exemple. Dans ces questions, les inégalités qui définissent les courbes acceptables ne sont plus en termes finis: les fonctions inconnues sont assujetties à des inégalités différentielles.

Les problèmes de variations unilatérales avec inégalités différentielles doivent être considérés comme étant des modifications du problème de Lagrange [n° 49].*

40. Problèmes de variations discontinus. *A côté des solutions discontinues de problèmes de variations continus, il y a lieu d'examiner les *problèmes de variations discontinus,* où la fonction sous le signe intégral possède des discontinuités dans le domaine considéré. Ce cas se présente dans certaines questions de physique mathématique, notamment dans l'étude de la propagation de la lumière lorsque l'indice de réfraction est soumis à des discontinuités correspondant à des surfaces de réfraction séparant deux ou plusieurs milieux. Le problème général peut se ramener à l'énoncé suivant: parmi toutes les courbes qui joignent deux points P_1, P_2, pris de part et d'autre d'une ligne k, et qui ne coupent qu'une seule fois cette ligne, déterminer celles qui miniment la somme des intégrales

$$J = \int F(x, y, x', y')\,dt,$$
$$\bar{J} = \int \bar{F}(x, y, x', y')\,dt,$$

412) *Calcul des variations[6]) 1, p. 495.*

413) *Id. p. 470/1.*

414) *Id. p. 472.*

415) *Cf. *J. W. Lindeberg*, Math. Ann. 59 (1904), p. 334.*

où la première est prise de P_1 à un point P_3 de la courbe k, la seconde de P_3 à P_2.

La théorie de ces problèmes discontinus a été établie par *G. A. Bliss* et *Ch. M. Mason*[416]). Ils montrent qu'il est nécessaire que les arcs P_1P_3 et P_3P_2 soient respectivement des arcs d'extrémales de J et $\bar{J}$; que les fonctions F_1 et $\bar{F}_1$ soient positives respectivement le long de P_1P_3 et P_3P_2, et que les coefficients directeurs Γ, $\bar{\Gamma}$ et θ des tangentes aux arcs P_1P_3, P_3P_2 et à la courbe k au point $P_3(x_3, y_3)$ satisfassent à la relation

$$(31)\quad \begin{aligned} &F_{x'}(x_3, y_3, \cos\Gamma, \sin\Gamma)\cos\theta + F_{y'}(x_3, y_3, \cos\Gamma, \sin\Gamma)\sin\theta = \\ &\bar{F}_{x'}(x_3, y_3, \cos\bar{\Gamma}, \sin\bar{\Gamma})\cos\theta + \bar{F}_{y'}(x_3, y_3, \cos\bar{\Gamma}, \sin\bar{\Gamma})\sin\theta. \end{aligned}$$

Ces trois conditions sont aisément obtenues en partant de la théorie des extrémés sans discontinuités.

Quant à la condition de Jacobi, elle est établie géométriquement. Les arcs P_1P_3 et P_3P_2 ne peuvent contenir les points conjugués à P_1 et P_3; de plus, l'enveloppe des extrémales $P_{3'}P_{4'}$ ne peut couper P_3P_2 entre P_3 et P_2; $P_{3'}$ désigne le point où une ligne de comparaison L issue du point P_1 coupe la ligne k; $P_{3'}P_{4'}$ est l'extrémale de $\bar{J}$ qui, avec l'extrémale $P_{1'}P_{3'}$, satisfait en $P_{3'}$ à la condition de passage (31).

Si l'on considère cette quatrième condition au sens strict, en éliminant le cas où l'enveloppe des extrémales $P_{3'}P_{4'}$ touche P_3P_2 au point P_2, on a les conditions suffisantes pour que la ligne brisée $P_1P_3P_2$, dont les tangentes en P_3 ne coïncident pas avec la tangente en ce point à la ligne k, minime la somme des intégrales données. *G. A. Bliss* et *Ch. M. Mason* démontrent, en considérant des familles d'extrémales brisées, que le théorème de l'enveloppe, ainsi que le théorème fondamental de Weierstrass et ses applications à la recherche des conditions suffisantes, sont encore valables.*

Le problème isopérimétrique[417]).

41. Condition du premier ordre. Règle d'Euler. Le problème isopérimétrique général[16]) est le problème d'extrémé lié consistant à

---

416) *Trans. Amer. math. Soc. 7 (1906), p. 325/36. *D. Hilbert*, dans un cours professé en 1904/5 à l'Université de Göttingue, avait donné quelques indications relatives à ces questions, et établi notamment la condition de Weierstrass-Erdmann pour ce problème.*

417) Ce problème n'étant, *à part une restriction relative au voisinage,* qu'un cas particulier du problème de Lagrange [voir le chapitre suivant], tous les théorèmes qui sont donnés pour ce dernier ont également lieu ici.

trouver les conditions pour extrémer une intégrale J[418]), la ligne d'intégration étant assujettie à une *condition isopérimétrique*[419]), en vertu de laquelle une *intégrale isopérimétrique*[418])

$$K = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y', \ldots)\, dx,$$

prise entre les mêmes limites que J, a une valeur donnée, et doit, en outre, satisfaire à des conditions aux limites imposées. Si J est une intégrale d'arc, K une intégrale d'aire, on a le *problème isopérimétrique special* ou *proprement dit.* C'est le cas, par exemple, de la question consistant à trouver parmi toutes les courbes de longueur donnée et joignant deux points donnés, celle qui avec une courbe donnée délimite la plus grande aire.

$_*$On peut supposer qu'on a un nombre quelconque d'intégrales isopérimétriques[420]). Dans ce cas, le problème se complique légèrement, mais il ne se présente rien de neuf.

On a d'abord à exprimer que la variation première de l'intégrale J est nulle pour les variations compatibles avec les conditions imposées.* Par une ingénieuse conception infinitésimale [cf. n° 5], *L. Euler*[421]), considérant la courbe cherchée comme un polygone d'un nombre infini de côtés et variant les ordonnées de deux sommets consécutifs de manière à satisfaire à la condition isopérimétrique, démontre qu'une première circonstance nécessaire pour extrémer est donnée par la relation

$$\delta J + l \delta K = 0, \tag{32}$$

l étant une constante convenable, appelée *constante isopérimétrique.* C'est la *règle d'Euler.* Il en résulte que toute solution du problème doit, pour une certaine valeur de la constante l, satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial y'} = 0,$$

où

$$h(x, y, y'; l) = f(x, y, y') + l g(x, y, y'). \tag{33}$$

$_*$On a donc la même condition du premier ordre que celle qu'on obtiendrait s'il s'agissait de l'extrémé libre de l'intégrale

$$\int h(x, y, y'; l)\, dx\text{[422])}.$$

---

418) $_*$Le nombre des inconnues et l'ordre des dérivées peuvent être quelconques.*

419) $_*$*J. L. Lagrange* dit „condition d'*isopérimétrisme*".*

420) $_*$*J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 193 et suiv.*

421) $_*$Comm. Acad. Petrop. 6 (1732/3), éd. 1738, p. 142 [1732]; Methodus[40]), p. 184/6 (chap. 5, § 27); $_*$cf. *A. Kneser,* Abh. Gesch. math. Wiss. 25 (1907), p. 50 et suiv.*

La même chose a lieu en représentation paramétrique, où l'on écrira

$$H = F + lG.$$

Toute courbe satisfaisant à cette condition est encore appelée, avec *A. Kneser, extrémale* (du problème isopérimétrique).

Bien que la démonstration de *L. Euler* ne satisfasse pas aux exigences de la rigueur moderne, elle doit être préférée à toutes celles qui ont été données avant *K. Weierstrass.**

L. Euler en a indiqué une autre[423]) reposant sur le caractère linéaire des conditions imposées aux variations; il part du fait que des formes linéaires ne diffèrent que par un facteur constant quand l'annulation de l'une entraîne toujours celle de l'autre; des expressions

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} M \delta y \, dx, \quad \delta K = \int_{x_1}^{x_2} M_1 \delta y \, dx,$$

obtenues en intégrant par parties, il conclut que le rapport $M : M_1$ doit être constant, d'où l'équation (32) pour des variations arbitraires, grâce à un choix convenable de la quantité l. *Il faut ajouter que M et M_1 sont fonctions continues de x dans tout l'intervalle d'intégration (x_1, x_2), et que δy, variation de classe C', s'annule aux extrémités x_1, x_2. C'est le *lemme fondamental* du problème isopérimétrique.*

J. Bertrand[424]) a donné une démonstration, plus rigoureuse, qui ne diffère surtout de la première de *L. Euler* que par le fait que les deux ordonnées variées ne sont pas supposées voisines.

J. Ch. F. Sturm[425]) pose

$$M_1 \delta y = \varphi'(x),$$

en désignant par φ une fonction quelconque s'annulant aux limites

---

422) **R. G. D. Richardson* [Bull. Amer. math. Soc. 17 (1910/1), p. 177/84] considérant que le minimé de l'intégrale

$$\int_0^1 (f + lg)\, dx,$$

où

$$y(0) = y(1) = 0,$$

est fonction de l, se pose la question (qu'il appelle „problème de *saddlepoint*") de déterminer la valeur de l maximant le minimé de l'intégrale. Il démontre qu'une première condition nécessaire n'est autre que la condition du premier ordre pour le problème isopérimétrique. Il traite une question analogue.*

423) Novi Comm. Acad. Petrop. 10 (1764), éd. 1766, p. 89 [1760].

424) J. math. pures. appl. (1) 7 (1842), p. 55/8.

425) Cours d'analyse, (5ᵉ éd.) publ. par *E. Prouhet* 2, Paris 1877, p. 330; cf. *J. A. Serret,* Calcul diff. et intégral, trad. par *A. Harnack,* Differential-Integral Rechnung 2², Leipzig 1899, p. 359.

d'intégration. Il observe que δK_p s'annule et, après intégration par parties, conclut que

$$\delta J_p = -\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{M_1}\right) dx,$$

d'où l'équation (32).

P. du Bois-Reymond[426]) donne, sur les indications de *R. Reiff*[427]), une démonstration voisine de celle de *J. Bertrand*; il en imagine lui-même une qui s'appuie sur ceci: si $\delta_1 y$ et $\delta_2 y$ sont deux variations quelconques, assujetties seulement à s'annuler, ainsi qu'un nombre convenable de leurs dérivées, aux limites d'intégration et si $\delta_\nu J_p$, $\delta_\nu K_p$ sont les variations des intégrales correspondant à la variation $\delta_\nu y$, on voit que δK_p s'annule quand

$$\delta y = \delta_1 y\, \delta_2 K_p - \delta_2 y\, \delta_1 K_p;$$

en formant la valeur de δJ_p, qui s'annule également, on obtient le résultat cherché. Une démonstration tout analogue est donnée par *L. Scheeffer*[428]), qui, sur indications de *K. Weierstrass*[429]), pose

$$\delta y = \delta_1 y + c\,\delta_2 y,$$

c étant une constante; si δK_p est nul, on a

$$c = c_0\, \delta_1 K_p,$$

où c_0 est indépendant de $\delta_1 y$. Si l'on suppose qu'on a, pour cette valeur de c, l'équation $\delta J_p = 0$, on obtient l'égalité (32) pour $\delta y = \delta_1 y$.

$_*$D'autres démonstrations générales de la règle d'Euler sont données par *A. Mayer*[430]) et *A. C. Dixon*[431]).

V. (W.) A. Zimmermann[432]) s'est également occupé de cette règle et de ses applications.*

---

426) Math. Ann. 15 (1879), p. 310/2.

427) $_*$Über den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit [Diss. Tübingue 1879, p. 8].*

428) Math. Ann. 25 (1885), p. 584.

429) $_*$Cours professé à l'Université de Berlin en 1877. Voir *A. Kneser*, Variationsrechnung [20]), p. 117/20. La démonstration de *K. Weierstrass* est la première démonstration rigoureuse de la règle d'Euler; cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung [11]), p. 461 et suiv. Dans un cours professé à l'Université de Göttingue en 1900, *D. Hilbert* a, élégamment simplifié la démonstration de *K. Weierstrass*; il ramène le problème à un extrémé lié ordinaire; c'est la meilleure méthode.*

430) Math. Ann. 26 (1886), p. 78.

431) $_*$Messenger math. (2) 26 (1896/7), p. 54/6. Cette démonstration est assez simple.*

432) $_*$Zapiski novorossijskago Universiteta (Odessa) [Mém. Univ. nouvelle Russie (Odessa)] math. 77 (1899), (1re pagination) p. 1/203 [Thèse]. Afin d'éviter les valeurs infinies, *V. (W.) A. Zimmermann* utilise deux multiplicateurs. Voir aussi *J. V. (W.) Sleszinski*, id. 77 (1899), (2e pagination) p. 13/8.*

Les démonstrations de la règle d'Euler sont en défaut si l'extrémale cherchée est en même temps extrémale de l'intégrale isopérimétrique [n° **46**]. *En introduisant la notion de *champ singulier*, *J. Hadamard*[433]) montre qu'il y a là, comme en général dans le problème de Lagrange ou de Mayer, un fait tout analogue à ce qui se passe dans la théorie des extrémés liés ordinaires, et que cette exception devait être prévue.*

A. Rosenblatt*[434]) complète l'étude de ce cas et considère le cas analogue (dit *anormal*) pour le problème de Lagrange [voir n° **49]. Il démontre que si l'extrémale λ_0 de l'intégrale isopérimétrique ne donne pas un extrémé faible, la règle d'Euler est applicable, sauf dans certaines circonstances spéciales; et qu'au contraire si λ_0 réalise un extrémé faible (mais pas un extrémé fort), la règle peut être en défaut. *A. Rosenblatt* considère aussi le cas de plusieurs conditions isopérimétriques[435]).

Non seulement la démonstration de la règle d'Euler a lieu quels que soient les ordres des dérivées qui entrent dans les diverses intégrales, le nombre des inconnues, celui des dérivées dont les valeurs sont données aux limites (celles-ci pouvant d'ailleurs ne pas être les mêmes pour les différentes intégrales), mais on peut l'appliquer aux limites variables [n° **45**], aux solutions discontinues [n° **46**] etc., le raisonnement suivi ne reposant que sur le caractère linéaire des conditions imposées aux variations. On n'a qu'à remplacer f par $f + lg + \cdots$ *J. Hadamard* démontre que dans le cas des variations unilatérales[436]) le problème isopérimétrique peut encore être ramené à celui de l'extrémé libre [n° **46**].

O. Bolza[437]) étend le lemme fondamental du problème isopérimétrique, à l'aide d'une méthode toute différente des précédentes.

E. W. Hobson[438]) donne une généralisation qui correspond à celle qu'il établit pour le lemme fondamental du calcul des variations [n° **9**]. Il n'exige des fonctions M et M_1 que la seule condition d'être sommables (au sens de *H. Lebesgue*); δy est supposé un polynome fini s'annulant, ainsi que des dérivées, en x_1 et x_2. Il y a alors une constante isopérimétrique l telle qu'on ait (33) en tous les points,

433) *Calcul des variations[6]) 1, p. 196/8, 209/11.*

434) *Math. Ann. 68 (1910), p. 557/64; Prace matematyczno-fizyczne (Varsovie) 21 (1910), p. 58/60 (n^{os} 4/5).*

435) *En ce qui concerne la singularité qui se présente quand la constante isopérimétrique est nulle, voir encore le problème de Lagrange [n° **49**].*

436) **J. Hadamard*, Calcul des variations[6]), p. 211/5; voir déjà Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 78.*

437) *Bull. Amer. math. Soc. 16 (1909/10), p. 402/7.*

438) *Proc. London math. Soc. (2) **11** (1912/3), p. 17/28, en partic. p. 22/4 § 2) [1911].*

sauf peut-être en ceux d'un ensemble de mesure nulle, et en tous cas là où les fonctions M et M_1 sont continues.

La règle d'Euler a été appliquée[439]) à l'objection de du Bois-Reymond [n° **10**] et, plus généralement, à démontrer que, pour que l'on ait

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^p \eta}{d x^p} E(x) dx = 0$$

dès que la fonction η vérifie les conditions

$$\eta = \eta' = \cdots = \eta^{(p-1)} = 0 \qquad \text{pour } x = x_1 = x_2,$$

la fonction E n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuités dans l'intervalle (x_1, x_2), il faut que E soit un polynome de degré $p-1$ en x. *E. W. Hobson*[440]) généralise ce résultat au cas où la fonction $E(x)$ ne satisfait qu'à la condition d'être sommable; il établit que cette fonction est un polynome de degré $p-1$ en x en tous les points, sauf peut-être en ceux d'un ensemble de mesure nulle et en tous cas aux points où $E(x)$ est continue. D'une manière encore plus générale, *E. W. Hobson* considère l'expression

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(q_0 y + q_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + q_p \frac{d^p y}{dx^p}\right) E(x) dx,$$

les q étant des fonctions de x satisfaisant à certaines conditions[441]).

De la règle d'Euler et du théorème énoncé au début du n° 27 il résulte que, par un point (a_0, b_0), on peut mener, dans une direction donnée γ_0, une extrémale de classe C' et une seule pour laquelle la constante isopérimétrique a une valeur indiquée l_0, pourvu que

$$H_1(a_0, b_0, \cos\gamma_0, \sin\gamma_0; l_0) \neq 0,$$

la fonction H_1 étant formée avec H comme F_1 l'est avec F[442]).

L. Euler[443]) a remarqué que le problème ayant pour objet d'extrémer l'intégrale J, l'intégrale K devant avoir une valeur donnée, et le *problème réciproque*, consistant à extrémer K lorsque J a une valeur imposée, conduisent aux mêmes familles d'extrémales. *A. Mayer*[444]) dé-

439) *P. du Bois-Reymond*, Math. Ann. 25 (1885), p. 584; cf. *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]), p. 200/1.*

440) Proc. London math. Soc. (2) 11 (1912/3), p. 24/8.*

441) La fonction $E(x)$ étant sommable dans (x_1, x_2) et telle que l'intégrale s'annule pour toute valeur de y qui est un polynome tel que ci-dessus, si $E(x)$ est continue dans (ξ_1, ξ_2), elle doit satisfaire dans (ξ_1, ξ_2) à l'adjointe de l'équation obtenue en annulant l'expression en q.*

442) *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 468/70.*

443) Comm. Acad. Petrop. 6 (1732/3), éd. 1738, p. 125 [1732].*

444) Math. Ann. 13 (1878), p. 60 et suiv. (§ 2); cf. *A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 131, 136.

montre que toutes les conditions [n^os **42, 43**] pour extrémer sont équivalentes dans les deux cas: c'est le *théorème de réciprocité de Mayer*[445]). Il permet d'obtenir de nouvelles propriétés, qu'il serait parfois peu aisé de trouver directement.*

42. Conditions de Legendre et de Weierstrass. Pour le cas où intervient une fonction inconnue avec les dérivées des deux premiers ordres (J_2), *A. M. Legendre*[133]) avait donné une condition erronée. *V. Brunacci*[446]) l'a rectifiée, en montrant, d'après une méthode analogue à celle de *A. M. Legendre* pour $p = 1$, que les quantités

$$\delta^2 J_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} + l\,\frac{\partial^2 g}{\partial y''^2}$$

doivent avoir le même signe.

Les résultats obtenus par *K. Weierstrass* pour le problème isopérimétrique ont été exposés, pour la première fois et d'une manière à peu près complète, par *A. Kneser*[447]). ${}_*$*K. Weierstrass*[448]) a démontré, en représentation paramétrique, que si w est une fonction de classe D', s'annulant en t_1 et t_2 et satisfaisant à l'égalité

$$\int_{t_1}^{t_2} [G_{xy'} - G_{yx'} + G_1(x'y'' - y'x'')]\, w\,dt = 0,$$

où G_1 est formée à l'aide de G (fonction figurant dans l'intégrale isopérimétrique) comme F_1 l'est avec F [n° **12**], on peut toujours envisager une famille de variations pour lesquelles on ait[449])

$$y'\delta x - x'\delta y = w.$$

Utilisant ce lemme, il démontre la nécessité de la condition[450])

$$\delta^2 J^{(t)} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[H_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + H_2 w^2\right] dt \geqq 0,$$

les fonctions H_1 et H_2 étant déduites de H comme F_1 et F_2 le sont de

445) ${}_*$Ce théorème a été généralisé au cas du problème de Lagrange.*

446) Memorie Ist. nazionale italiano (fis.-mat.) [Bologne] 1 II (1806), p. 191/202 [1805].

447) Variationsrechnung[20]), p. 117/70 (§ 32/42).

448) ${}_*$Dans un Cours professé à l'Université de Berlin en 1879; voir *A. Kneser*, Math. Ann. 55 (1902), p. 86/107, en partic. p. 100.

449) ${}_*$Ce lemme peut être présenté autrement.* A ce sujet, voir *O. Bolza*, Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 305 et suiv.; Univ. Chicago decennial publ. 9 (1904), p. 13/21; ${}_*$Variationsrechnung[11]), p. 457/60.*

450) ${}_*$*E. Swift* [Bull. Amer. math. Soc. 14 (1907/8), p. 373/5] obtient, d'une manière très simple, l'expression de la variation seconde, en représentation paramétrique. *W. Cairns* [Diss. Göttingue 1907] applique les équations intégrales à l'étude de la variation seconde [cf. n° **46**].*

F [n° **19**]. *O. Bolza*[451]), appliquant une indication de *D. Hilbert*, établit ce résultat sans utiliser le lemme établi par *K. Weierstrass*. La condition suivante en découle immédiatement; on doit avoir

$$H_1 \geqq 0$$

le long de l'arc d'extrémale λ. C'est la *condition de Legendre* (au sens large) *pour le problème isopérimétrique.**

$_*$*K. Weierstrass*[452]) donne la relation suivante le long de l'arc λ:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}'; l) \equiv H(x, y; \bar{x}', \bar{y}'; l) - \bar{x}' H_{x'}(x, y, x', y', l) \\ - \bar{y}' H_{y'}(x, y, x', y', l) \geqq 0.\end{aligned}$$

Cette inégalité, nécessaire pour le minimé fort, est dite *condition de Weierstrass pour le problème isopérimétrique.*

Tant qu'il s'agit des conditions d'Euler, de Legendre et de Weierstrass, le problème isopérimétrique peut donc être ramené [cf. fin n° **51**] au problème de l'extrémé libre de l'intégrale

$$\int (F + lG)\, dx. \tag{34}$$

*

43. Points conjugués. Condition de Jacobi. $_*$On a longtemps cru que l'équivalence était complète entre ces deux problèmes. *C. E. Lundström*[453]) a, le premier, établi que c'est inexact. Il considère l'intégrale J_p. *A. Mayer*[454]) montre que si l'on admettait l'identité complète, on serait amené à cette conclusion, physiquement absurde, que le centre de gravité d'un fil homogène, suspendu par ses deux extrémités, ne prendrait la position la plus basse possible que si la distance des extrémités ne surpassait pas une certaine limite.

K. Weierstrass a établi pour le problème isopérimétrique une théorie des points conjugués. Il démontre[455]) que, si $\delta^2 J^{(l)}$ doit être positif pour toute fonction w ne s'annulant pas dans l'intervalle d'in-

---

451) $_*$Bull. Amer. math. Soc. 15 (1908/9), p. 213/7.*

452) $_*$Dans son cours professé à l'Université de Berlin en 1879; voir *A. Kneser*, Variationsrechnung [20]), p. 130/6.*

453) Nova Acta Soc. sc. Upsal. (3) 7 (1870), en partic. p. 25 [1869]. *C. E. Lundström* [Diss. Upsal 1866] avait démontré, mais sans base satisfaisante, que, dans le problème isopérimétrique où entrent les dérivées jusqu'à l'ordre p, l'extrémé cesse quand l'arc d'extrémale a un contact d'ordre $(p - 1)$ en deux points avec une extrémale infiniment voisine, qui pour l'intégrale isopérimétrique K_p fournit, entre ces deux points, la même valeur, à des infiniment petits d'ordre supérieur près. D'où il déduit une équation analogue à (20) [n° **17**].

454) Math. Ann. 13 (1878), p. 54 et suiv.; $_*$Ber. Ges. Lpz. 29 (1877), math. p. 115 et suiv.*

455) $_*$Cours professé à l'Université de Berlin en 1872.*

tégration, une fonction $D(t, t_1)$, définie par un déterminant de la forme

$$\begin{vmatrix} \vartheta_1(t_1) & \vartheta_2(t_1) & \vartheta_3(t_1) \\ \vartheta_1(t) & \vartheta_2(t) & \vartheta_3(t) \\ \int_{t_1}^{t} V\vartheta_1 dt & \int_{t_1}^{t} V\vartheta_2 dt & \int_{t_1}^{t} V\vartheta_3 dt \end{vmatrix},$$

doit être différente de zéro pour

$$t_1 < t \leqq t_2.$$

Le point P_1', correspondant à la première racine t_1' qui suit t_1, est dit le (*point*) *conjugué* de P_1. Le point P'_1 ne coïncide pas avec le point conjugué $\overline{P}_1'$ de P_1 pour l'extrémé libre de l'intégrale (34). En général[456]), $P_1' \succ \overline{P}_1'$.

K. Weierstrass[457]) indique ensuite que la fonction $D(t, t_1)$ change de signe en t_1', excepté quand t_1' est le paramètre du point appelé, par extension, *point conjugué* pour l'intégrale (34) considérée isolément, sans condition isopérimétrique. *A. Kneser*[458]) en donne, le premier, une démonstration (d'après *K. Weierstrass*).*

Il montre qu'on peut rendre la variation seconde (et $\Delta J^{(t)}$) négative pour $P_1' \prec P_2$. Cette démonstration échoue dans un cas d'exception. *O. Bolza*[459]) a éclairci ce point à l'aide d'une méthode indiquée par *H. A. Schwarz*[280]), dans un cours, pour le problème le plus simple. *H. Hahn*[460]) s'occupe de ce cas indépendamment de *O. Bolza* et montre que des recherches de *G. von Escherich* sur le problème de Lagrange [voir plus loin] résulte une démonstration tout à fait générale.*

*La condition suivante de Jacobi au sens large est nécessaire, sans exception,

$$P_2 \preceq P_1';$$

et prise au sens strict, $P_2 \prec P_1'$ est suffisante, avec la condition de Legendre au sens strict [$H_1 > 0$ dans l'intervalle (t_1, t_2)] pour la permanence du signe de $\delta^2 J^{(t)}$, les fonctions w étant quelconques mais non identiquement nulles. *O. Bolza*[461]) le démontre en s'aidant d'une extension d'un théorème de *C. G. J. Jacobi* sur les équations différentielles[462]).

456) *Cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 475.*

457) Voir *G. Hormann*, Diss. Göttingue 1887; *W. Howe*, Diss. Berlin 1887.

458) Math. Ann. 55 (1902), p. 86/107, en partic. p. 95; cf. **O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 478/80.*

459) Math. Ann. 57 (1903), p. 44/7 [1902].

460) *Math. Ann. 58 (1904), p. 165/8.*

461) *O. Bolza*, Trans. Amer. math. Soc. 3 (1902), p. 309; Univ. Chicago decennial publ. 9 (1904), p. 13/21.

462) Voir déjà *A. Mayer*, Math. Ann. 13 (1878), p. 53.

A. Kneser a établi, pour le problème isopérimétrique, une théorie des points conjugués $_*$analogue à celle qu'il avait donnée pour l'extrémé libre, en considérant la famille des extrémales passant par le point P_1.* Il part du fait que les extrémales issues d'un même point forment une famille à deux paramètres et que si l'on introduit la valeur de l'intégrale isopérimétrique, considérée comme troisième coordonnée, on est amené à utiliser un *champ spatial* (*räumliches Feld*)[463]), $_*$ainsi que la *congruence formée par les extrémales gauches* (*Kongruenz von räumlichen Extremalen*) issues du point P_1. Entre les extrémales planes et les extrémales gauches, il existe une correspondance univoque et réciproque; en particulier, à l'extrémale cherchée λ correspond l'extrémale λ' du champ spatial.*

$_*$*A. Kneser*[464]) démontre que le déterminant fonctionnel de la congruence en question, calculé pour λ', ne se distingue de la fonction $D(t, t_1)$ de Weierstrass que par un facteur constant.

Le point Q_1' (de λ'), dont la projection est P_1', est le *point conjugué spatial* (*räumlich konjugierter Punkt*). C'est aussi le premier foyer de la congruence sur λ' après P_1, ou encore le point où cette extrémale touche, pour la première fois depuis P_1, la surface focale de la congruence.*

De la famille d'extrémales à deux paramètres, constituant le champ issu du point P_1, *A. Kneser*[465]) extrait une famille à un paramètre, comprenant l'extrémale λ et possédant une enveloppe $\mathfrak{F}$ $_*$qui touche chaque extrémale de cette famille au point conjugué de P_1. Il démontre que cela est possible, et d'une seule manière, quand on satisfait à une certaine condition, exprimée à l'aide du déterminant fonctionnel de la congruence. La famille ainsi obtenue est le *faisceau spécial d'extrémales* (*ausgezeichnete Extremalenbüschel*). On peut arriver aux mêmes résultats en se plaçant davantage au point de vue de la théorie des congruences et en résolvant certains problèmes qui s'y rattachent[466]).* A l'aide du faisceau spécial, le raisonnement suivi pour l'extrémé libre devient applicable ici, sauf dans certains cas d'exception.

$_*$Le théorème de l'enveloppe [cf. n° **26**] s'exprime, si l'enveloppe $\mathfrak{F}$

---

463) Variationsrechnung[20]), p. 155/66 (§ 40/1); $_*$*K. Weierstrass* a indiqué certains points, dans son Cours en 1879.*

464) $_*$Variationsrechnung[20]), p. 166/70 (§ 42).*

465) $_*$Variationsrechnung[20]), p. 155/61 (§ 40).*

466) $_*$Cf. *G. Darboux,* Théorie des surfaces[79]) 2, p. 6; voir aussi les recherches sur le problème d'extrémé libre dans l'espace par *G. A. Bliss* et *Ch. M. Mason,* Trans. Amer. math. Soc. 9 (1908), p. 450 et suiv.*

ne dégénère pas en un point, par l'égalité

$$J_L(P_1P_3) + J_{\mathfrak{F}}(P_3P_1') = J_\lambda(P_1P_1')$$

jointe à celle obtenue en remplaçant J par K. P_3 désigne le point de contact des courbes L et $\mathfrak{F}$.*

A l'aide de ce théorème, *A. Kneser* démontre la nécessité[467]) de la condition de Jacobi au sens large: $P_3 \leqq P_1'$. *Si l'enveloppe dégénère en un point, les intégrales J et K, prises de P_1 à P_1', le long des différentes extrémales du faisceau spécial, ont chacune une valeur constante. On en déduit encore la même condition.*

*A. *Kneser*[468]) s'est occupé aussi du second point conjugué.*

44. Le théorème fondamental de Weierstrass et les conditions suffisantes dans le problème isopérimétrique. *Ayant défini un *champ d'extrémales spatiales*, on considère une extrémale gauche λ_3' de P_0 à un point Q_3 (x_3, y_3, z_3), ainsi que la projection $\lambda_3 = P_0P_3$ sur le plan (x, y). L'intégrale prise le long de l'arc λ_3 et considérée comme fonction des coordonnées du point P_3 est l'intégrale de champ (*Feldintegral*) correspondant au champ spatial. Ses dérivées partielles sont données par les *formules de Hamilton*[469]), qui peuvent s'écrire [cf. n^os **29, 69**] comme suit:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = H_{x'}(x, y, p, q, l_3),$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = H_{y'}(x, y, p, q, l_3),$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -l_3,$$

p et q étant les cosinus directeurs de la tangente positive au point P_3 de l'extrémale λ_3, dont $l_3(x, y, z)$ est la constante isopérimétrique. On en déduit, à l'aide de la construction de Weierstrass ou du théorème d'indépendance de Hilbert, convenablement modifiés, la formule fondamentale de Weierstrass[470]):

$$\Delta J^{(\tau)} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}; p, q; \bar{x}', \bar{y}', l_3)\, d\tau.$$

Le théorème d'indépendance consiste en ce que si Q_3Q_4 est une courbe, quelconque mais située tout entière dans le champ spatial,

---

467) *Elle résulte encore des recherches de *G. von Escherich* [voir plus loin, au problème de Lagrange]. Cf. *H. Hahn*, Math. Ann. 58 (1904), p. 166/8.*

468) *Jahresb. Schles. Ges. Vaterl. Kultur 84 (1906), éd. 1907, p. 16/21.*

469) *Ainsi appelées par *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 503/7.*

470) *Donnée par *K. Weierstrass* dans son Cours professé à l'Université de Berlin en 1879.*

l'intégrale de Hilbert

$$\int_{Q}^{Q_4} \{ H_{x'}(x, y, p, q, l_3)\, dx + H_{y'}(x, y, p, q, l_3)\, dy - l_3\, dz \} = \int d\, W(x, y, z)$$

ne dépend que des extrémités Q_3, Q_4. En particulier, prise entre deux points de la même *surface transversale*[471])

$$W = \text{const.}$$

du champ spatial, sa valeur est toujours nulle.

Le théorème de Weierstrass ne permet de démontrer la suffisance de l'ensemble des conditions vues pour le minimé fort, que dans certains cas particuliers, parmi lesquels il convient de citer les deux suivants, dûs à *K. Weierstrass*[472]): de toutes les courbes fermées de longueur donnée, la circonférence est celle qui délimite la plus grande aire; la chaînette est, parmi toutes les courbes de longueur donnée entre deux points fixes, celle dont le centre de gravité est le plus bas[473]).* Tout ce que l'on peut conclure, en général, du fait que l'arc d'extrémale λ satisfait aux conditions en question, c'est que cet arc minime l'intégrale par rapport aux courbes L prises telles que les courbes gauches correspondantes L' soient tout entières situées dans un voisinage de l'arc λ' correspondant à λ, voisinage choisi de manière à ce que la construction de Weierstrass soit possible[474]). *Or, cette restriction relative aux courbes de comparaison acceptables L n'est pas dans la position du problème isopérimétrique. Le résultat obtenu revient à dire que les conditions sont suffisantes pour le minimé d'un certain problème de variation spatial, qui n'est pas, comme on le considère souvent, tout à fait équivalent au problème isopérimétrique dans le plan[475]).*

**J. W. Lindeberg*[476]) a résolu la difficulté à l'aide d'un théorème sur l'extrémé libre, qui présente quelque analogie avec le théorème d'Osgood [n° 28]. Utilisant certain lemme, il applique son théorème

---

471) *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 508/9.*

472) *Dans son cours en 1879; Cf. *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 510/1. Voir, dans le présent article, le chapitre consacré aux applications [n^os 81, 85].*

473) *Cf. *A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 142 4.*

474) *Cf. *J. Hadamard*, Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 80. *H. Hahn* [Monatsh. Math. Phys. 17 (1906), p. 63/77] a indiqué que les courbes L' restent dans le voisinage de λ' si G_1 est différent de zéro.*

475) *O. Bolza* [Calculus of variations[11]), p. 244] dit, quand ce minimé est réalisé, qu'on a un minimé *demi-fort*. Cf. note 36.*

476) *Math. Ann. 67 (1909), p. 340/54. Cf. *G. A. Bliss*, Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 487 et suiv.*

à démontrer que les conditions sont suffisantes pour l'extrémé fort et strict de l'intégrale $J^{(t)}$ avec la condition isopérimétrique $K^{(t)}$. Ce fait avait déjà été établi par *J. W. Lindeberg*[477]) pour les intégrales sous forme non paramétrique (problème-x), mais la démonstration n'a pas été étendue au cas de la représentation paramétrique, question qui ne paraît d'ailleurs pas aisée.*

45. Problème isopérimétrique avec une limite variable. *A. Kneser*[478]) a montré que la condition de transversalité n'est autre que celle que l'on obtient pour l'extrémé libre de l'intégrale (34) avec les mêmes conditions aux limites.

Du théorème de l'enveloppe, qui, pour le faisceau spécial, s'exprime par les égalités

$$J_{\lambda_1''}(P''Q'') = J_{\lambda_1'}(P'Q') + J_{\mathfrak{F}}(Q'Q''),$$
$$K_{\lambda_1''}(P''Q'') = K_{\lambda_1'}(P'Q') + K_{\mathfrak{F}}(Q'Q'')$$

quand une limite est variable, *A. Kneser*[479]) conclut la nécessité de la condition $P_2 \leqq P_1''$, en désignant par P_1'' le foyer de la courbe donnée Γ_1, sur l'extrémale considérée.

Mais pour le cas d'une limite d'intégration variable, le problème isopérimétrique présente des difficultés[480]) qui n'ont pas encore été surmontées[481]), car si les formules de Hamilton et leurs conséquences sont valables pour le champ spatial, formé par la congruence considérée au nº **43**, on ne peut, des conditions de Legendre et de Jacobi, toutes deux prises au sens strict, conclure que l'arc λ' peut être entouré d'un champ spatial. En effet, la courbe Γ_1 n'appartenant pas nécessairement à un tel champ, le déterminant fonctionnel de *A. Kneser* s'annule identiquement pour $t = t_1$. Les théorèmes d'existence conduisent à un champ impropre et inutilisable pour la démonstration de la suffisance des conditions.

Il peut toutefois arriver, comme cas spécial, qu'un segment de la courbe Γ_1, fini et contenant le point P_1, appartienne à la limite du champ spatial entourant l'arc λ' (à l'exception de son point initial P_1). Dans ce cas, la construction de Weierstrass peut être effectuée, et ses conséquences appliquées, pour toutes les courbes variées L telles que les

477) *Math. Ann. 59 (1904), p. 322/51, en partic. p. 334.*

478) *Variationsrechnung[20]), p. 121/36 (§ 33).*

479) *Id. p. 144/55 (§ 39).*

480) **O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 523.*

481) *Voir toutefois *J. Radon*, Sitzgsb. Akad. Wien 119 II^a (1910), p. 1294/5 (en note).*

courbes gauches L' correspondantes soient, à l'exception de leur point initial, tout entières dans ce champ[482]).

Récemment, *H. Hahn*[483]) a résolu la question, d'une manière fort générale, en traitant le problème de Lagrange avec limites variables [n° **56**]. Si l'arc d'extrémale, dont les points extrêmes satisfont à des conditions quelconques, donne un extrémé faible, il fournit de plus un extrémé fort, pourvu que le signe de la fonction de Weierstrass soit défini dans un certain voisinage. Cela a lieu, en particulier, pour le problème isopérimétrique.*

46. Solutions discontinues[484]) **et autres recherches sur le problème isopérimétrique.** *En tout point anguleux, on doit avoir la condition de Weierstrass-Erdmann [n° **36**], vue pour l'extrémé libre de l'intégrale (34).*

C. Carathéodory[485]), dans ses recherches sur les solutions discontinues, étudie le cas d'exception [cf. n° **41**] où toute extrémale de l'intégrale $J^{(t)}$ est en même temps extrémale pour l'intégrale $K^{(t)}$. Il montre que ces problèmes sont encore accessibles par la méthode de Weierstrass, convenablement modifiée.

*Quant aux problèmes isopérimétriques de variations unilatérales [n° **39**], la condition du premier ordre se ramène encore à celle de l'extrémé libre.* Les résultats obtenus par *J. Steiner*, *E. F. A. Minding*, *I. Todhunter* ont été exposés ailleurs [n° **39**]. *A. Mayer*[486]) a signalé le *théorème* dit *de la conservation de la constante isopérimétrique*: à toutes les parties libres des extrémales, correspond la même constante isopérimétrique; *K. Weierstrass* l'a démontré[487]). Il a, de plus, établi[488]) qu'aux points de passage [cf. n° **39**] on a les deux relations

$$\mathfrak{E}(x_s, y_s; p_s, q_s; \bar{p}_s, \bar{q}_s, l) = 0 \qquad (s = 3, 4).$$

**J. Hadamard*[489]) donne quelques indications relatives à la condition le long de la frontière.*

---

482) *Voir un exemple, *A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 159 et suiv.; *O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 523/6.*

483) *Monatsh. Math. Phys. 22 (1911), p. 127 suiv.*

484) Voir l'exposé de *A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 180/92 (§ 45/7).

485) *Diss. Göttingue 1904; Math. Ann. 62 (1906), p. 449.* Les solutions correspondantes sont appelées „starre Lösungen". *Un exemple, traité en détail, termine ce mémoire.*

486) *Math. Ann. 13 (1878), p. 65 note.*

487) *Cours professé à l'Université de Berlin en 1879.*

488) *Voir *H. Hancock*, Calculus of variations[24]), § 205; *A. Kneser*, Variationsrechnung[20]), p. 188/92 (§ 47).*

489) *Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907), p. 222.*

A. Noble a cherché à étendre le théorème d'existence de Hilbert au cas du problème isopérimétrique; mais son travail étant insuffisant, $_*$*J. Hadamard* approfondit l'étude de cette question, ce qui l'amène à rechercher la forme des extrémales quand la constante l est très grande [n° **66**]*.

$_*$Le théorème d'Osgood [n° **28**] est encore valable pour le problème isopérimétrique, comme l'a montré, le premier, *A. Kneser* dans le cas de l'équilibre d'un fil, et ensuite *H. Hahn*[490]).

L'extension, au problème isopérimétrique, d'une méthode de *J. Hadamard* [n° **67**] pour résoudre les questions d'extrémés libres, présente des difficultés inhérentes à la nature du problème.

A. R. Crathorne[491]) traite en détail le problème isopérimétrique spatial[492]) où l'intégrale à minimer, ainsi que l'intégrale isopérimétrique, contiennent chacune deux variables indépendantes avec leurs dérivées premières. Il établit le théorème d'indépendance [cf. n° **23**] et considère le cas d'un point extrême variable. *A. R. Crathorne* étudie aussi le cas où les limites d'intégration sont des points conjugués[493]); il utilise à cet effet un critère général établi par *D. Hilbert* [n° **53**].

La théorie des équations intégrales a été appliquée au problème isopérimétrique, surtout à la variation seconde, par *W. Cairns*, qui donne des conditions précises où un minimé a lieu. *W. Cairns*[494]) ramène le problème à la détermination d'une fonction u de x, qui vérifie l'équation différentielle de Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(H_{11}\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dH_{12}}{dx}-H_{22}\right)u+\lambda u+\lambda' g(x)=0,$$

où

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x)g(x)dx=0, \qquad \int_{x_1}^{x_2}[u(x)]^2dx=1.$$

Il montre comment, à l'aide de la fonction de Green, ce problème dépend de la solution de l'équation intégrale

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_{x_1}^{x_2}K(s,t)\varphi(t)dt+x'g(s),$$

avec la condition

$$\int_{x_1}^{x_2}\varphi(t)g(t)dt=c.$$

Le noyau $K(s,t)$ est une fonction continue et symétrique par rapport

490) $_*$Monatsh. Math. Phys. 17 (1906), p. 63/77 (en partic. le pénultième §).*

491) $_*$Diss. Göttingue 1907.*

492) $_*$Cf. *P. Duhem* [Ann. Fac. sc. Toulouse (2) 2 (1900), p. 115/36] pour la condition du premier ordre.*

493) $_*$Diss. Göttingue 1907, p. 50/8.*

494) $_*$Diss. Göttingue 1907, en partic. p. 63/8.*

aux variables s et t; $f(s)$ et $g(s)$ sont des fonctions continues données de s; c est une constante donnée; λ un paramètre; $\varphi(s)$ et x' sont à déterminer de manière à satisfaire identiquement aux deux égalités, pour une certaine valeur de λ.

La théorie de *W. Cairns* peut, comme il l'indique, être étendue au cas d'un nombre fini de variables dépendantes[495]).

S. M. Sanielevici montre que les intégrales singulières de certaine équation différentielle peuvent être considérées comme étant les solutions d'un problème isopérimétrique [n° **72**][496]).*

Le problème de Lagrange.

47. Position du problème. *Le problème de Lagrange[497]) est la question d'extrémé lié la plus générale. L'intégrale contient un nombre quelconque n de fonctions inconnues assujetties à vérifier des équations dites *auxiliaires* ou accessoires (Nebenbedingungen) en nombre $m < n$; il y a en outre des conditions aux limites, auxquelles peuvent être astreintes les extrémités $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ de la ligne d'intégration dans l'espace à $(n+1)$ dimensions $(x, y_1, \ldots, y_n)$.

On peut distinguer trois cas suivant que les équations accessoires sont: ou toutes en termes finis (ce qui se présente pour la ligne la plus courte sur une surface entre deux points donnés et pour le principe de Hamilton en mécanique), ou toutes différentielles, ou bien encore mixtes (ce qui se présente dans l'étude de l'équilibre d'un fil sur une surface et dans celle du principe de la moindre action sous la forme de Lagrange[498])). Dans le second cas, le plus important, le système d'équations différentielles, étant indéterminé, constitue un système de Monge. Il renferme $n - m$ fonctions inconnues arbitraires.*

---

495) **W. Cairns* résout la question en s'inspirant de la méthode fondée sur la transformation orthogonale d'une forme quadratique à une infinité de variables, et suivie par *D. Hilbert* [Nachr. Ges. Gött. (math.-phys.) 1906, p. 157/227, 439/80] pour résoudre l'équation de Fredholm dans le cas [*D. Hilbert,* id. 1904, p. 49/91, 213/59] d'un noyau symétrique. *W. Cairns* obtient et applique plusieurs importants résultats de la théorie d'une forme quadratique avec un nombre fini de formes auxiliaires linéaires d'une infinité de variables; il applique aussi la théorie des équations intégrales orthogonales aux équations différentielles ordinaires.*

496) *Voir encore, sur le problème isopérimétrique, *A. Cayley,* Proc. London math. Soc. (1) 3 (1869/71), p. 221/2 [1871]; Papers 7, Cambridge 1894, p. 263; *L. W. Thomé*, J. reine angew. Math. 132 (1907), p. 154/8; *L. Tonelli*, Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (5) 21 I (1912), p. 559.*

497) *Ce problème a été posé pour la première fois par *J. L. Lagrange* [voir par ex. Leçons sur le calcul des fonctions, (nouv. éd.) Paris 1806, p. 467 (leçon 22); Œuvres 10, Paris 1884, p. 399].*

498) *Voir le chapitre consacré aux applications.*

Comme l'a montré *A. Clebsch*[499]), il est aisé de faire rentrer dans le type indiqué le cas où l'intégrale contient des dérivées d'ordre supérieur. $_*$On les considère comme des inconnues satisfaisant aux équations accessoires

$$y_i' = \frac{dy_i}{dx}, \ldots, y_i^{(p-1)} = \frac{dy_i^{(p-2)}}{dx}.$$

Le problème isopérimétrique, lui-même, rentre dans celui de Lagrange, car s'il y a m conditions isopérimétriques

$$\int_{x_1}^{x_2} g_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n;\ y_1', \ldots, y_n')\,dx = G_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, m),$$

on introduit les fonctions inconnues auxiliaires

$$z_\varrho = \int_{x_1}^{x} g_\varrho\, dx,$$

satisfaisant encore à des équations différentielles de la même forme et aux conditions aux limites

$$z_\varrho(x_1) = 0, \quad z_\varrho(x_2) = G_\varrho.$$

On procède d'une manière analogue lorsque le problème comporte des relations entre intégrales définies, ou si l'on cherche à extrémer une fonction quelconque de plusieurs intégrales.*

$_*$Le cas où il y a des conditions en termes finis peut être ramené à celui où toutes les équations sont différentielles, soit en différentiant et en adjoignant les conditions aux limites, soit en résolvant par rapport à certaines inconnues; cette dernière méthode est préférable, du moins théoriquement, à la précédente, qui introduit des singularités[500]).

Mais l'équivalence entre la nouvelle forme donnée à ces différents cas spéciaux et le problème primitif n'est complète que pour l'extrémé dans un intervalle, car on doit supposer, entre la valeur primitive des fonctions auxiliaires et les valeurs variées, le même voisinage que celui admis pour les y.*

48. La méthode des multiplicateurs. Cas particuliers. $_*$Si $n = 2$, $m = 1$, la question peut être ramenée à un problème d'extrémé libre, puisqu'on sait exprimer sans quadrature la solution d'un système de Monge à l'aide de fonctions arbitraires[501]). Mais ce procédé ne peut être généralisé.*

---

499) J. reine angew. Math. 55 (1858), p. 267.

500) $_*$C'est le cas du *champ singulier*, dans la terminologie et au point de vue de *J. Hadamard,* Calcul des variations[6]), p. 234.*

501) $_*$*G. Monge,* Hist. Acad. sc. Paris 1784, éd. 1787, M. p. 118, 502.*

Déjà *L. Euler*[502]) s'était occupé d'extrémer l'intégrale ($n = 2, m = 1$)

$$w = \int_{x_1}^{x_2} f(x; y, y', \ldots, y^{(p)}, z)\,dx,$$

la fonction z satisfaisant à l'équation différentielle du premier ordre

$$z' - g(x, y, y', \ldots, y^{(p)}, z) = 0.$$

Par une considération infinitésimale ingénieuse mais compliquée, analogue à celle du n° 5, il arrive à la *méthode du multiplicateur*. *L. Euler* montre, en effet, que si l'on représente par λ la solution de l'équation

$$\frac{d\lambda}{dx} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{35}$$

s'annulant pour $x = x_2$, et si la quantité y est augmentée au voisinage d'un point, l'accroissement étant ε en ce point, l'intégrale w reçoit l'accroissement

$$\varepsilon \sum_{\pi=0}^{\pi=p} (-1)^{\pi} \frac{d^{\pi}}{dx^{\pi}} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(\pi)}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y^{(\pi)}} \right);$$

d'où la condition du premier ordre:

$$P \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y'} \right) + \cdots = 0.$$

J. L. Lagrange[503]) l'a établie simplement, à l'aide de la méthode des variations, pour deux cas particuliers. *L. Euler*[504]) lui-même a donné une nouvelle démonstration. Il met la variation première de l'intégrale sous la forme

$$\delta w = \int_{x_1}^{x_2} \delta[f + \lambda(g - z')]\,dx = \int_{x_1}^{x_2} P\,\delta y\,dx + [R - \lambda\,\delta z]_{x_1}^{x_2}, \tag{36}$$

R ne dépendant que de δy et de ses dérivées. Lorsque ces quantités s'annulent aux limites, ainsi que δz pour $x = x_1$, la condition $\lambda(x_2) = 0$ entraîne l'annulation de la partie tout intégrée, d'où $P = 0$. Mais δz est, en général, différent de zéro pour $x = x_2$. La démonstration d'Euler ne peut être considérée comme rigoureuse que si cela est compatible avec les données du problème, ce qui est le cas, par exemple, pour la brachistochrone [n° **84**] en milieu résistant[505]).

502) Methodus[40]), p. 88/129 (chap. 3), en partic. p. 119 et §§ 6, 19, 31, 38; p. 133 (chap. 4) § 7, n^os^ 4, 5. *Cf. *A. Kneser*, Abh. Gesch. math. Wiss. 25 (1907), p. 28.*

503) Misc. Taurinensia [Mélanges de philos. et de math. Soc. Turin] 2 (1760/1), éd. 1762, seconde pagination, p. 183; Œuvres 1, Paris 1867, p. 347.

504) Novi Comm. Acad. Petrop. 10 (1764), éd. 1766, p. 79 [1760].

505) Methodus[40]), p. 126/8 (chap. 3, § 46).

L'égalité $\lambda(x_2) = 0$ semble avoir été le point de départ d'un théorème, en général inexact, de *Ch. E. Delaunay*[506]).

A. Mayer[507]) montre que le problème exige une méthode nouvelle lorsqu'on donne la valeur de z en x_2, comme c'est le cas, par exemple, pour le problème, résolu par *L. Euler*, de la brachistochrone en milieu résistant, quand la vitesse finale est donnée[508]). Si l'on pose $f = g$ et si μ est une solution quelconque de l'équation (35) rendue homogène, on obtient

$$\delta z = \int_{x_1}^{x} Q\delta y dx + [S - \mu dz]_{x_1}^{x},$$

S étant une expression analogue à R. Doù, δz s'annulant pour $x = x_2$, une expression qui, dans le cas actuel, limite le champ de la variation δy, contrairement à ce qui avait lieu plus haut. Si l'on admet que δy et un nombre convenable de ses dérivées s'annulent aux limites du domaine d'intégration, on a

$$\delta w = \int_{x_1}^{x_2} P\delta y dx = 0, \quad \int_{x_1}^{x_2} Q\delta y dx = 0;$$

c'est-à-dire que la seconde relation doit entraîner la première. Les méthodes suivies pour le problème isopérimétrique [n° **41**] sont applicables à ce système d'équations. *A. Mayer*, suivant le raisonnement fait par *L. Scheeffer* pour traiter ce problème, arrive aux équations

$$P + cQ = 0,$$
$$\frac{\partial(f + \lambda_1 g)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(f + \lambda_1 g)}{\partial y'} + \cdots = 0,$$

c étant une constante et

$$\lambda_1 \equiv \lambda + \mu c$$

une solution déterminée de l'équation (35). *L. Euler* obtient aussi ce multiplicateur, dans l'exemple mentionné.

Pour $f = g$, la méthode d'Euler permet de résoudre le problème consistant à déterminer y de telle façon qu'une solution de l'équation différentielle (35), donnée pour $x = x_1$, s'extrême en $x = x_2$. *L. Euler*[509]) et *J. L. Lagrange*[510]) s'occupent de ce cas spécial, qui rentre dans

506) J. Éc. polyt. (1) cah. 29 (1843), p. 85.

507) Math. Ann. 26 (1886), p. 74; Ber. Ges. Lpz. 37 (1885), math. p. 7.

508) Methodus[40]), p. 204/5 (chap. 5, § 52). *Voir, dans le présent article, le chapitre consacré aux applications [n° **84**].*

509) Methodus[40]), p. 16 (chap. 1, § 37); p. 133 (chap. 4, § 7).

510) Misc. Taurinensia (Mélanges de philos. et de math. Soc. Turin) 2 (1760/1), éd. 1762, seconde pagination, p. 185 [1760]; Œuvres 1, Paris 1867, p. 350.

le *problème général de Mayer*[511] [n° **50**]. *L. Euler* donne, comme exemple, la détermination de la courbe telle qu'un point pesant y descendant avec frottement, maxime sa vitesse au point final[512].

J. L. Lagrange[513], qui utilise souvent la méthode du multiplicateur en mécanique, termine ses recherches y relatives par une généralisation au cas où se présentent des dérivées supérieures de z dans les fonctions f et g[514].

$_*$Comme le fait observer *A. Kneser*[515],* il ne paraît pas légitime de ne désigner la règle du multiplicateur que par le seul nom de Lagrange, comme on le fait ordinairement.

49. La méthode des multiplicateurs et les conditions du premier ordre. Cas général. La *règle des multiplicateurs*, dans le cas général, est la suivante: pour que la variation première de l'intégrale s'annule, il doit exister m fonctions continues $\lambda_\varrho(x)$, telles qu'on ait

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial F}{\partial y_\nu} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'_\nu} = 0 & (\nu = 1, 2 \ldots, n), \\ F = f + \sum\limits_\varrho \lambda_\varrho \varphi_\varrho & (\varrho = 1, 2 \ldots, m), \end{array}\right. \tag{37}$$

f représentant la fonction sous le signe $\int$, φ_ϱ les premiers membres des m équations auxiliaires. Les fonctions λ, appelées *les multiplicateurs*, et les n fonctions inconnues y_ν se déterminent à l'aide de ces équations, jointes aux équations auxiliaires, en tenant compte des conditions aux limites. $_*$On est donc ramené, sous réserve d'un certain cas d'exception (dont il est question plus bas), à un problème d'extrémé libre, en remplaçant f par F. Cette règle est vraie, que les conditions auxiliaires soient sous forme finie, différentielle ou mixte.*

$_*$*J. L. Lagrange* l'avait démontrée pour les extrémés ordinaires [II 3, n° **32**]; il l'établit ensuite pour les extrémés du calcul des variations, d'abord pour des équations auxiliaires finies[516], puis pour la forme différentielle[517].

---

511) Ber. Ges. Lpz. 30 (1878), math. p. 16/32. Cf. *V. P. Ermakov*, Universitetskija Izvěstija Kiev [Bull. Univ. Kiev] 29 (1889), p. 105/12.

512) Methodus[40], p. 122/6.

513) Misc. Taurinensia (Mélanges de philos. et de math. Soc. Turin) 4 (1766/9), seconde pagination, p. 166; Œuvres 2, Paris 1868, p. 40.

514) $_*$Voir encore un cas spécial se rattachant à la théorie du multiplicateur, *P. Duhem*, Ann. Fac. sc. Toulouse (2) 2 (1900), p. 115/36.*

515) $_*$Voir l'édition allemande de l' Encyclopédie II A, p. 580.*

516) $_*$Théorie des fonctions analytiques, (2^e éd.) Paris 1813; (3^e éd.) Paris 1847, p. 292; Œuvres 9, Paris 1881, p. 312.*

Dans ce cas-ci, on suppose qu'au moins un déterminant fonctionnel des φ par rapport à m des quantités y', c'est-à-dire un déterminant de degré m de la matrice

$$\left\|\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu}\right\| \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

reste constamment différent de zéro le long de l'extrémale considérée λ. *H. Hahn*[518]) montre que cette hypothèse peut être remplacée par la suivante, moins restrictive: chacun des déterminants fonctionnels peut s'annuler sur λ, mais, en tout point de l'extrémale, il y a au moins un déterminant non nul. Dans le cas contraire, il y aurait singularité des équations différentielles auxiliaires.

Les fonctions φ et f sont supposées de classe C''' dans un même domaine.

Toute courbe qui satisfait aux équations et aux conditions vues est dite une *extrémale* du problème de Lagrange.*

*Trois objections sont à faire à la démonstration de *J. L. Lagrange.** La première résulte de ce qu'on y admet que $n - m$ des variations $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_n$, par ex. $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \ldots, \delta y_n$ sont arbitraires (à part leur annulation en x_1 et x_2) si le déterminant $\left|\frac{\partial \psi_\varrho}{\partial y'_k}\right|$, $(\varrho, k = 1, 2, \ldots, m)$ n'est pas nul. *Cela n'est exact que si toutes les conditions sont finies ou si les valeurs des m fonctions y dont les variations ne sont pas quelconques, peuvent être choisies arbitrairement au point x_2.* Dans le cas dont il est question, les variations sont assujetties à la condition que non seulement $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \ldots, \delta y_n$, mais encore $\delta y_1, \ldots, \delta y_m$ doivent s'annuler en x_2, ce qui n'a pas lieu en général. *Il faut donc savoir quelles conditions doivent être imposées aux $n - m$ dernières variations si l'on veut que, non seulement $y_{m+1}, \ldots, y_n$, mais encore $y_1, \ldots, y_m$ aient des valeurs données aux limites; ensuite, il faut s'assurer si ces conditions sont compatibles. C'est ce qu'a fait *A. Mayer*[507]), en ramenant la question au problème isopérimétrique (ce qui le conduit à appliquer le lemme fondamental de ce problème) et en utilisant ensuite d'autres multiplicateurs que ceux de *J. L. Lagrange* [n° 48]; il a ainsi donné la première démonstration satisfaisante de la règle de Lagrange.

B. Turksma[519]) a résolu la même difficulté d'une manière indirecte.

---

517) *Leçons sur le calcul des fonctions, (nouv. éd.) Paris 1806, p. 460 et suiv.; Œuvres 10, Paris 1884, p. 414/21.*

518) *Math. Ann. 58 (1904), en partic. p. 152, 161. Cf. *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]), p. 220, 251/4.*

519) Math. Ann. 47 (1896), p. 33/46 [c'est un chapitre de sa dissertation inédite]. Voir aussi note 144.

Il considère, ce qui est permis tant qu'il ne s'agit pas de la recherche des conditions suffisantes, un système spécial de variations:

$$\delta y_\nu = \alpha_{\nu,0} z + \sum_{s=1}^{s=\sigma} \frac{d^s(\alpha_{\nu\,s} z)}{d x^s},$$

z représentant une fonction arbitraire. Introduisant ces valeurs dans les équations

$$\sum_{(\nu)} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \sum_{(\nu)} \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu'} \delta y_\nu' = 0, \qquad \delta \int f dx = 0,$$

et intégrant par parties, il obtient, pour les fonctions α, des équations de condition linéaires, dont le nombre, pour une valeur convenable de l'exposant σ, est le même que le nombre des α. Si l'on exprime que les premiers membres de ces équations sont linéairement dépendants et qu'il y a des multiplicateurs indépendants des α, dont la somme des produits dans les coefficients d'une quantité α fixée arbitrairement est nulle pour chaque premier membre, on conclut, par un simple calcul, que ces multiplicateurs s'expriment par m quantités λ et leurs dérivées premières; d'où résultent les équations à établir; et les solutions trouvées sont identiques à celles obtenues par la méthode de *J. L. Lagrange.*

*La démonstration de *J. L. Lagrange* contient une seconde lacune, correspondant à celle qui a été indiquée au problème isopérimétrique. Elle a été comblée par *A. Kneser*[520]), et par *D. Hilbert*[521]), à l'aide d'un lemme complémentaire[522]), nécessaire aussi pour l'étude de la variation seconde.*

Une troisième objection généralise celle de du Bois-Reymond pour le problème le plus simple [n° **10**]; et elle est applicable, non seulement à la démonstration de *J. L. Lagrange,* mais encore à celles de *A. Mayer, B. Turksma* et *A. Kneser.* Ces démonstrations reposent, en effet, sur l'hypothèse prématurée de l'existence et de la continuité des dérivées secondes des fonctions y. *H. Hahn*[523]) y répond *en modifiant la démonstration de *A. Kneser* et en procédant comme il est indiqué au n° **10**.* Il établit donc les équations d'Euler-Lagrange en n'exigeant l'existence et la continuité que pour les dérivées premières des y; l'existence des dérivées secondes en résulte. *S'appuyant sur de nouvelles données concernant la théorie des équations différentielles,

520) Variationsrechnung[20]), p. 227 (§ 56, 59).

521) *Nachr. Ges. Gött. (math.-phys.) 1905, p. 158 et suiv.; Math. Ann. 62 (1906), p. 351/5. Voir déjà *Nadechda Nikolajevna Gernet*, Diss. Göttingue 1902.*

522) *Voir aussi *H. Hahn,* Math. Ann. 58 (1904), p. 158/64.*

523) Monatsh. Math. Phys. 14 (1903), p. 325/42.

H. Hahn ne suppose plus, comme l'avait fait *A. Kneser,* que les fonctions sont analytiques.*

*Dans le cas où les équations de condition sont mixtes, tous les déterminants fonctionnels s'annulent. Mais *O. Bolza*[524]) a démontré que la règle d'Euler-Lagrange est encore valable. Il a considéré le cas général des points variables. D'autre part, il simplifie encore, en différents points, la démonstration de *D. Hilbert*[521]).*

J. Vieille[525]) a attiré l'attention sur une singularité qui a lieu pour un problème qu'ont traité aussi *L. L. Lindelöf* et *F. N. M. Moigno*[526]). Il consiste à mener, entre deux plans parallèles, une ligne de longueur donnée qui maxime l'aire de la surface cylindrique limitée à ces plans et ayant la ligne cherchée pour directrice, les génératrices étant perpendiculaires aux plans. Dans ce cas, les équations des extrémales ne sont pas toutes distinctes.

*Si, considérant le problème de Lagrange comme cas particulier du problème de Mayer [n° **50**], on admet que dans la relation

$$F = lf + \sum_{(\varrho)} \lambda_\varrho \varphi_\varrho$$

l est différent de zéro, on peut prendre $l = 1$, ce qui donne l'équation telle qu'on l'a écrite en (37). Mais si $l = 0$, les relations (37) s'écrivent

$$(38) \qquad \sum_{(\varrho)} \left[\lambda_\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\left(\lambda_\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y'_\nu} \right) \right] = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

On se trouve alors dans le *cas d'exception,* qui se dérobe aux démonstrations de la règle des multiplicateurs.*

A. Mayer[527]) et *B. Turksma*[519]) l'ont indiqué, mais sans le formuler d'une manière bien précise[528]). On peut encore dire, avec *H. Hahn*[529]), que *l'extrémale se comporte normalement* ou d'une manière *anormale* (*normales, anormales Verhalten*) dans l'intervalle d'intégration (x_1, x_2), suivant qu'il n'existe pas ou qu'il existe (au moins) un système de m fonctions $\lambda_\varrho(x)$ de classe C', ne s'annulant pas identiquement dans (x_1, x_2) et satisfaisant simultanément au système surabondant des $n > m$ équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre (38).

524) *Math. Ann. 64 (1907), p. 370/87; cf. Variationsrechnung[11]), p. 580 4, pour le cas des limites fixes.*

525) Cours complémentaire d'analyse et de mécanique rationnelle, Paris 1851, p. 118. *Cf. *J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 271/4.*

526) *Calcul des variations[65]), p. 299/301.*

527) Math. Ann. 26 (1886), p. 79.

528) *G. von Escherich* [Sitzgsb. Akad. Wien 108 IIa (1899), p. 1287/93] l'appelle *Ausnahmefall*, par opposition au *cas principal* (*Hauptfall*). *Cette distinction joue un rôle important dans ses recherches sur la variation seconde [n° **51**].*

529) *Math. Ann. 58 (1904), p. 152 et suiv.*

J. Hadamard[530]) interprète le cas anormal à l'aide du *champ singulier*; il montre ainsi que, dans le problème de Lagrange (ou de Mayer [nº **50**]) comme dans le problème isopérimétrique [nº **41**], il y a analogie avec ce qui se passe pour les extrémés ordinaires. La singularité, qui devait être prévue, n'est autre que celle, par exemple, qui se présente dans la question de l'extrémé d'une fonction $f(x, y, z)$ sur une surface $g(x, y, z) = 0$ présentant un point conique.*

Dans le problème isopérimétrique [cf. nº **41**], l'extrémale se comporte de manière anormale lorsqu'elle est identique à l'extrémale de l'intégrale isopérimétrique.

*Dans le problème de Lagrange, l'extrémale est alors en même temps extrémale pour les n problèmes de Mayer [nº **50**] correspondant aux m équations auxiliaires.

On n'a pas encore trouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre possède une solution non identiquement nulle[531]).

H. Hahn[529]) démontre différentes propriétés caractérisant le cas normal; il établit notamment qu'il n'y a qu'un seul système de multiplicateurs λ_ϱ[532]).

A. Rosenblatt[533]), généralisant les résultats qu'il avait obtenus au sujet de la règle d'Euler dans le problème isopérimétrique, étudie le cas d'exception où tous les déterminants fonctionnels sont nuls.

Si, les limites x_1 et x_2 étant données, les valeurs de $y_{i_1}, \ldots, y_{i_q}$ sont arbitraires au point x_2, la règle d'Euler-Lagrange est encore valable, mais il faut adjoindre aux équations différentielles qui constituent la condition du premier ordre, les équations aux limites

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'_{i_\sigma}}\right]_{x = x_2} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, q).$$

Mais si la limite x_2 est arbitraire, tandis que les autres coordonnées des points extrêmes sont données, on a[534])

$$\left[F - \sum_{(\nu)} \frac{\partial F}{\partial y'_\nu} y'_\nu\right]_{x_2} = 0.$$

O. Bolza[524]) a considéré aussi le cas, plus général, où les coordonnées

530) *Calcul des variations[6]) 1, p. 234.*

531) **Ludwig Schlesinger* [J. reine angew. Math. 131 (1906), p. 202/15; Vorles. über lineare Differentialgleichungen, Leipzig 1908, p. 4 et suiv.] a établi des conditions suffisantes pour qu'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre possède une „matrice intégrale", mais la nécessité n'a probablement pas lieu.*

532) *Cf. *O. Bolza,* Variationsrechnung[11]), p. 565.*

533) *Prace matematyczno-fizyczne 21 (1910), p. 55 suiv.*

534) **O. Bolza,* Variationsrechnung[11]), p. 569/71.*

de points extrêmes variables satisfont à un nombre quelconque de relations de la forme

$$X(y_{11}, \ldots, y_{n1};\ y_{12}, \ldots, y_{n2}) = 0.$$

Si les variations δy ne sont pas supposées nulles aux extrémités de l'arc d'intégration, la formule aux limites s'écrit

$$\delta U_n = \Big[\sum_{(\nu)} \delta y_\nu f_{y'_\nu} + (f - \sum_{(\nu)} y_\nu' f_{y'_\nu})\delta x\Big]_{x_1}^{x_2}.$$

Elle permet d'étudier, comme pour l'extrémé libre, le cas des limites variables[535]), celui des variations unilatérales[536]) [nº 39] et celui des solutions discontinues.

Les multiplicateurs sont, en général, discontinus en même temps que les y'; mais, en un point où la tangente est continue, ils sont continus du moment qu'un déterminant fonctionnel n'est pas nul[537]). La condition au point anguleux et ses conséquences sont données par *O. Bolza*[538]).

Le problème de Lagrange a été étudié sous la forme paramétrique d'abord par *A. Mayer*[539]), *A. Kneser*[540]) et par *G. von Escherich*[541]). L'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} f(y_0, y_1, \ldots, y_n;\ y_0', y_1', \ldots, y_n')\,dt$$

et les fonctions φ doivent être invariantes pour une transformation paramétrique, ce qui a lieu si f et φ ne renferment pas explicitement le paramètre t et sont *positivement homogènes*[542]) et de dimension 1 par rapport aux variables $y_0', y_1', \ldots, y_n'$, c'est-à-dire si

$$f(y_0, y_1, \ldots, y_n;\ ky_0', ky_1', \ldots, ky_n') = kf(y_0, y_1, \ldots, y_n;\ y_0', y_1', \ldots, y_n'),$$
$$\varphi_\varrho(y_0, y_1, \ldots, y_n;\ ky_0', ky_1', \ldots, ky_n') = k\varphi_\varrho(y_0, y_1, \ldots, y_n;\ y_0', y_1', \ldots, y_n')$$

pour toute valeur positive de k.

Si l'on pose

$$F = lf + \sum_\varrho \lambda_\varrho \varphi_\varrho,$$

---

535) **J. Hadamard*, Calcul des variations[6]) 1, p. 247/8.*

536) *Id. p. 248/50.*

537) *Id. p. 251.*

538) *Variationsrechnung[11]), p. 571/2.*

539) *Ber. Ges. Lpz. 47 (1895), math. p. 140 et suiv.*

540) *Variationsrechnung[20]), p. 228 et suiv.*

541) *Sitzgsb. Akad. Wien 110 IIa (1901), p. 1355/1421.*

542) **O. Bolza*, Variationsrechnung[11]), p. 575.*

les équations différentielles du problème sont

$$\frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y_s'} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n).$$

Elles ne sont pas distinctes entre elles, à cause des relations d'homogénéité[543]). Quand $l = 0$, on a le cas d'exception [voir plus haut].

La théorie des équations différentielles permet de démontrer le théorème suivant: si l'on donne pour x, y_ν, y_ν', λ_ϱ, un système de valeurs initiales pour lesquelles le déterminant, de degré $n + m$,

$$K(x, y, y', \lambda) \equiv \begin{vmatrix} A_{11} \cdots A_{1n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{n1} \cdots A_{nn} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} & 0 \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} & 0 \cdots 0 \end{vmatrix}, \text{ où } A_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'},$$

vaut

$$K(x_0, y_0, y_0', \lambda_0) \neq 0,$$

et pour lesquelles on a

$$\varphi_\beta(x_0, y_0, y_0', \lambda_0) = 0,$$

il y a alors un système, et un seul, de fonctions y_ν et λ_ϱ, de classe C', satisfaisant aux équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_\nu} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_\nu'} = 0, \\ \varphi_\varrho = 0 \end{cases}$$

et aux conditions initiales imposées[544]). La solution générale dépend de $2n$ constantes arbitraires. L'étude de la dépendance entre les solutions et les valeurs initiales se fait à l'aide du système canonique. La théorie de Jacobi-Hamilton s'y rattache [n° **69**].

O. Bolza[545]) recherche les conditions d'intégrabilité [cf. n° **11**] pour le problème de Lagrange. Il démontre, pour $n \geqq 2m$, que

---

543) **A. Kneser,* Variationsrechnung[20]), p. 241/2.*

544) *Cf. *C. Jordan,* Cours d'Analyse[55]), (2e éd.) 3, Paris 1896, p. 500; *O. Bolza,* Trans. Amer. math. Soc. 7 (1906), p. 459 suiv.; Math. Ann. 63 (1907), p. 246/52; Variationsrechnung[11]), p. 588/90. *G. von Escherich* [Sitzgsb. Akad. Wien 107 IIa (1898), p. 1209/17] considère le cas des conditions mixtes. *J. Hadamard* [Calcul des variations[6]) 1, p. 239] traite la question pour le problème de Mayer, et dit que le problème est *ordinaire* quand le déterminant correspondant à celui du texte est différent de zéro.*

545) *Math. Ann. 71 (1912), p. 533/47.*

l'intégrale

$$\int \{ P(x, y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{i=n} Q_i(x, y_1, \ldots, y_n)\, y_i' \}\, dx$$

a même valeur pour toutes les courbes de classe C' joignant deux mêmes points dans un certain domaine D et qui satisfont aux équations différentielles

$$\varphi_\beta(x, y_1, \ldots, y_n;\ \ y_1', \ldots, y_n') = 0,$$

si les quantités P et Q_i sont telles qu'on ait, dans D, les relations

$$\frac{\partial P}{\partial y_k} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial y_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire les conditions mêmes d'intégrabilité pour le cas de l'extrémé libre. On sait d'ailleurs que les relations précédentes ne sont autres que les conditions d'intégrabilité de l'expression différentielle

$$P(x, y_1, \ldots, y_n)dx + \sum_{i=1}^{i=n} Q_i(x, y_1, \ldots, y_n) dy_i.$$

Si une des fonctions φ_β ne renferme pas les variables y_i ou si les équations de condition entraînent une égalité finie ou du premier degré par rapport aux y', ou si $n < 2m$, la méthode de démonstration suivie par *O. Bolza* n'est plus valable, ce qui ne prouve pas que le théorème ne soit plus vrai. La propriété démontrée a de l'importance pour le théorème d'indépendance [n° **55**].

Il convient de rattacher au problème de Lagrange les questions où, au lieu d'avoir comme conditions auxiliaires différentielles des équations, on a des inégalités (auxquelles sont assujetties les fonctions inconnues). Dans ces questions de *variations unilatérales* [cf. n° **39**], il n'y a rien de changé en ce qui concerne le minimé faible, et *a fortiori* pour les variations première et seconde, si la ligne d'intégration vérifie les *inégalités au sens strict. Au point de vue de l'établissement des conditions du premier ordre, notamment, il n'y a de question nouvelle que si, sur certaines parties de la ligne d'intégration cherchée, les inégalités sont remplacées par des égalités*[546]). La même remarque s'appliquait en particulier pour le problème isopérimétrique: dans le cas des variations unilatérales, ce problème peut encore, en ce qui regarde les conditions du premier ordre, être ramené à un problème d'extrémé libre[547]).*

E. Zermelo[548]) recherche, comme exemple de problème avec

546) **J. Hadamard,* Calcul des variations[6]), p. 248/50.*

547) *Id. p. 211/4.*

548) Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 11 (1902), p. 184/7. **A. Haar* et *Th. von Kármán* ont considéré le cas de variations unilatérales où il faut minimer une

Le TOME II contient : Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable. — Sur la méthode des variations. — Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes. — Sur la figure des colonnes. — Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le Calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière. — Sur la percussion des fluides. — Sur une nouvelle méthode de Calcul intégral par les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas par le quatrième degré. — Sur les courbes tautochrones. — Memoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769. — Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré. — Sur la résolution des équations numériques. — Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques. — Nouvelle méthode pour résoudre les Problèmes indéterminés en nombres entiers.

Le TOME III contient : Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. — Sur la force des ressorts pliés. — Sur le Problème de Kepler. — Sur l'élimination des inconnues dans les équations. — Nouvelles réflexions sur les tautochrones. — Démonstration d'un Théorème d'Arithmétique. — Réflexions sur la résolution algébrique des équations. — Démonstration d'un Théorème nouveau concernant les nombres premiers. — Sur une nouvelle espèce de Calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables. — Sur la forme des racines imaginaires des équations. — Sur les réfractions astronomiques. — Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre. — Nouvelle solution du Problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice. — Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques. — Solutions analytiques de quelques Problèmes sur les pyramides triangulaires. — Recherches d'Arithmétique.

Le TOME IV, *en tête duquel se trouve le portrait de Lagrange gravé sur acier,* contient : Sur les intégrales particulières des équations différentielles. — Sur le mouvement des nœuds des orbites planétaires. — Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles : et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards. — Sur l'altération des moyens mouvements des planètes. — Solutions de quelques problèmes d'Astronomie sphérique par le moyen des séries. — Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul intégral. — Solution algébrique d'un Problème de Géométrie. — Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les équations littérales. — Sur quelques Problèmes de l'Analyse de Diophante. — Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances. — Réflexions sur l'échappement. — Sur le Problème de la détermination des orbites des Comètes d'après trois observations. — Sur la théorie des lunettes. — Sur une manière particulière d'exprimer le temps dans les sections coniques, décrites par des forces tendantes au foyer et réciproquement proportionnelles au carré des distances. — Sur différentes questions d'Analyse relatives à la théorie des intégrales particulières. — Sur la construction des Cartes géographiques. — Sur la théorie du mouvement des fluides.

Le TOME V contient : Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète. — Théorie des variations séculaires des planètes (Ire Partie). — Théorie des variations séculaires des éléments des planètes (IIe Partie). — Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes (Ire Partie). — Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes. — Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes (IIe Partie). — Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes. — Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation. — Sur une nouvelle propriété du centre de gravité. — Méthode générale pour integrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires. — Théorie géométrique du mouvement des aphélies des planètes, pour servir d'addition aux Principes de Newton, relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes. — Mémoire sur une question concernant les annuités. — Mémoire sur l'expression du terme général des séries récurrentes, lorsque l'équation génératrice a des racines égales. — Memoire sur les sphéroïdes elliptiques. — Mémoire sur la méthode d'interpolation. — Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune. — Mémoire sur une loi générale d'Optique. — Rapports.

Le Tome VI contient : Recherches sur la libration de la Lune. — Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter. — Essai sur le problème des trois Corps. — Sur l'équation séculaire de la Lune. — Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes. — Recherches sur la manière de former des Tables des planètes, d'après les seules observations. — Lettres à Laplace sur la théorie des inégalités séculaires des planètes. — Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes. — Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites. — Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de Mécanique. — Second Mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique.

Le Tome VII contient : Additions aux éléments d'Algèbre d'Euler. Analyse indéterminée. — Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'Ecole Normale en 1795. — Essai d'Analyse numérique sur la transformation des fractions. — Sur le principe des vitesses virtuelles. — Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques. — Solutions de quelques Problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles. — Eclaircissement d'une difficulté singulière qui se rencontre dans le calcul de l'attraction des sphéroïdes très peu différents de la sphère. — Compas de réduction pour la distance de la Lune aux étoiles. — Sur l'origine des comètes. — Remarques sur la méthode des projections pour le calcul des éclipses de Soleil ou d'étoiles. — Sur le calcul des éclipses sujettes aux parallaxes. — Nouvelle méthode pour déterminer l'orbite des comètes d'après les observations. — Nouveau moyen de déterminer la longitude de Jupiter et de Saturne au moyen d'une Table à simple entrée. — Addition au Mémoire sur le calcul des éclipses sujettes aux parallaxes. — Sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique. — Sur les interpolations. — Valeurs des variations annuelles des éléments des orbites des planètes. — Equation pour la détermination des éléments de l'orbite d'une planète ou d'une comète au moyen de trois observations peu éloignées. — Essai d'Arithmétique politique sur les premiers besoins de l'intérieur de la République. — Lettera di Luigi di La Grange Tournier, Torinese, all'illustrissimo signor conte Giulio Carlo da Fagnano, contenente una nuova serie per i differenziali ed integrali di qualsivoglia grado, corrispondente alla Newtoniana per le potestà e le radici. — Note sur un paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point sur une surface sphérique quelconque. — Note sur la métaphysique du Calcul infinitésimal. — Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscrits de Lagrange, par Poisson.

Le Tome VIII (**Résolution des équations numériques**) contient : Méthode pour trouver, dans une équation numérique quelconque, la valeur entière la plus approchée de chacune de ses racines réelles. — De la manière d'avoir les racines égales et les racines imaginaires des équations. — Nouvelle méthode pour approcher des racines des équations numériques. — Application des méthodes précédentes à quelques exemples. — Sur les racines imaginaires. (1. Sur la manière de reconnaître si une équation a des racines imaginaires. — 2. Où l'on donne des règles pour déterminer dans certains cas le nombre des racines imaginaires des équations. — 3. Où l'on applique la théorie précédente aux équations des second, troisième et quatrième degrés. — 4. Sur la manière de trouver les racines imaginaires d'une équation.) — Sur la manière d'approcher de la valeur numérique des racines des équations par les fractions continues. (1. Sur les fractions continues périodiques. — 2. Où l'on donne une manière très simple de réduire en fractions continues les racines des équations du second degré. — 3. Généralisation de la théorie des fractions continues. —

4. Où l'on propose différents moyens pour simplifier le calcul des racines par les fractions continues.) — *Notes sur la theorie des équations algebriques.*

Le TOME IX Theorie des fonctions analytiques) contient : INTRODUCTION. Des fonctions en general; des fonctions primitives et dérivées. — Des différentes manières dont on a envisagé le Calcul différentiel. — Objet de cet Ouvrage. — I^{re} PARTIE : Exposition de la théorie avec ses principaux usages dans l'Analyse. — II^e PARTIE : Application de la théorie des fonctions à la Géométrie. — III^e PARTIE : Application de la théorie des fonctions à la Mécanique. — NOTE de Serret.

Le TOME X Leçons sur le Calcul des fonctions) contient : Avertissement. — Sur l'objet du Calcul des Fonctions et sur les Fonctions en général. — Sur le developpement d'une Fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Loi générale de ce developpement. Origine des Fonctions dérivée Differents ordres de ces Fonctions. Leur notation — Fonctions dérivées des puissances. Développement d'une puissance quelconque d'un binome. — Fonctions dérivees des quantités exponentielles et logarithmiques. Développement de ces quantités en séries. — Fonctions derivees des sinus et cosinus d'angles exprimes par les sinus et cosinus. Développement de ces quantités en series. — Fonctions dérivées des quantités composées de différentes fonctions d une même variable ou dépendantes de ces fonctions par des équations données. — Sur la manière de rapporter les Fonctions dérivées à différentes variables. — Du développement des Fonctions lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Analyse de ces cas. Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'evanouissent à la fois. — De la manière d'avoir les limites du developpement d'une fonction, lorsqu'on n'a égard qu'à un nombre déterminé de termes. Cas dans lesquels les principes du Calcul différentiel sont en défaut. Théoreme fondamental. Limites de plusieurs séries. Manière rigoureuse d'introduire les Fonctions dérivées dans la théorie des courbes et dans celle des mouvements varies. — Des équations dérivées et de leur usage pour la transformation des Fonctions. Analyse des sections angulaires. — Suite de l'analyse des sections angulaires, où l'on démontre les formules générales données dans la Leçon Precedente. — Théorie generale des équations dérivées et des constantes arbitraires. Théorie des multiplicateurs des équations dérivées. — Des valeurs singulières qui satisfont aux équations dérivées, et qui ne sont pas comprises dans les équations primitives. Théorie des équations primitives singulieres. — Comment l'équation primitive singulière résulte de l'équation dérivée. — Equations dérivées qui ont des équations primitives singulières données. Analyse d'une classe d'équations de tous les ordres qui ont toujours nécessairement des équations primitives singulières. — Sur différents Problèmes relatifs à la theorie des équations primitives et singulières. — Digression sur les equations aux differences finies, sur le passage de ces différences aux différentielles et sur l'invention du Calcul différentiel. — Des fonctions de deux ou plusieurs variables; de leurs fonctions dérivées. Notation et formation de ces fonctions. — Equations dérivées à plusieurs variables. Théorie de ces équations. Méthodes générales pour trouver les équations primitives des équations du premier ordre à plusieurs variables. Des équations de condition par lesquelles on peut reconnaître si une fonction d'un ordre quelconque de plusieurs variables est une fonction dérivée exacte. Analogie de ces équations avec celles du problème des isopérimètres. Histoire de ce problème. Méthode des variations. — Méthode des variations, déduite de la considération des fonctions.

Les TOMES XI et XII comprennent la Mécanique Analytique (voir prospectus spécial)

Le TOME XIII (Correspondance) contient 72 Lettres inédites qui sont publiées d'après les manuscrits autographes de d'Alembert et de Lagrange conservés à la Bibliothèque de l'Institut de France. Ces Lettres, d'un grand intérêt scientifique et historique, sont mises en ordre et annotées par Ludovic Lalanne.

Le TOME XIV et dernier renferme, entre autres, la Correspondance inédite de Lagrange avec Condorcet, Euler, Laplace, etc.; il est précedé d'une Notice destinée à completer celle que l'on doit à Delambre. et qui a été reproduite en tête du premier Volume de la Collection.

Le sixième Volume est consacré aux équations aux dérivées partielles, au principe de Dirichlet et au calcul des variations des intégrales multiples; on y trouve un chapitre sur les équations aux differences et sur les équations fonctionnelles. L'Auteur a simplifié un certain nombre de théories au moyen de cette remarque, que les conditions réputées nécessaires et suffisantes d'intégrabilité des expressions différentielles ne sont pas toutes absolument nécessaires, en ce sens qu'elles rentrent plus ou moins les unes dans les autres.

Enfin le septième Volume est consacré aux applications de la théorie des équations différentielles à la Géométrie. On y trouve la théorie des lignes tracées sur les surfaces, les coordonnées curvilignes et la géométrie des lignes droites.

Titres des Chapitres.

Tome I. — Introduction. Théorie générale des séries. Théorie des dérivées. Différences des fonctions d'une variable. Théorie des différentielles des fonctions d'une seule variable. Dérivées, différences et différentielles des fonctions de plusieurs variables. Des déterminants fonctionnels et des fonctions implicites. Fonctions de variables imaginaires. Changement de variable dans les fonctions d'une seule variable indépendante. Théorie des substitutions linéaires. Sur l'élimination. Résolution des questions de maximum et de minimum. Sur les valeurs des fonctions qui se présentent sous une forme singulière.

Tome II. — Des questions de Géométrie plane qui dépendent des infiniment petits du premier ordre. Étude des questions qui dépendent d'infiniment petits d'ordre supérieur au premier. Étude des points singuliers. Des questions de Géométrie dans l'espace qui dépendent d'infiniment petits du premier ordre. Des questions qui dépendent d'infiniment petits d'ordre supérieur. Des questions qui dépendent d'infiniment petits d'ordre supérieur au premier dans les surfaces.

Tome III. — Introduction. Calcul des intégrales. Théorie des intégrales définies. Sur les intégrales multiples. Intégrales des différentielles totales. Intégrales définies prises entre des limites imaginaires et résidus de Cauchy. Intégration par les séries. Propriétés des fonctions monogènes et monodromes. Des fonctions périodiques. Sur l'interpolation des fonctions numériques. Formules de quadrature.

Tome IV. — Théorie des fonctions synectiques de plusieurs variables. Théorie des fonctions algébriques. Sur la transformation des figures planes. Applications géométriques des doctrines exposées au Chapitre précédent. Des transcendantes engendrées par l'intégration indéfinie. Théorie des intégrales elliptiques. Théorie des fonctions elliptiques. Théorie générale des fonctions doublement périodiques et des fonctions auxiliaires. Fonctions modulaires. Applications géométriques de la théorie des fonctions elliptiques. Étude des fonctions abéliennes.

Tome V. — Généralités sur les équations différentielles. Équations du premier ordre. Des équations linéaires. Étude de quelques équations linéaires. Intégration des équations d'ordre supérieur non linéaires. Équations différentielles simultanées. Théorie des fractions continues. Calcul des variations des intégrales simples.

Tome VI. — Equations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue. Théorie des équations quelconques aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue. Équations aux différentielles totales et équations simultanées aux dérivées partielles. Équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur et équations simultanées. Des équations aux différences finies. Équations fonctionnelles. Des fonctions harmoniques. Variations des intégrales multiples.

Tome VII. —Etude des courbes que l'on peut tracer sur une surface donnee. Géometrie spherique. Des coordonnées curvilignes sur une surface. Des coordonnées curvilignes dans l'espace. Théorie des surfaces gauches. La géométrie des lignes droites.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

fonctions qui tendent l'une et l'autre vers zéro ou vers l'infini. — Représentation des *fonctions* e^x *et* $\log x$ *par des limites de fonctions algébriques*. — Extension des formules de Taylor et de Maclaurin aux fonctions de plusieurs variables. — Théorème relatif aux fonctions homogènes.

CHAPITRE VI. — Théorie des maxima et des minima. — Des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable. — Application à quelques exemples. — Remarque sur les maxima et les minima relatifs. — Cas des fonctions implicites d'une seule variable indépendante. — Des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes. — Application à quelques exemples. — Cas où les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables cessent d'être déterminées quand on donne aux variables les valeurs qui répondent au maximum ou au minimum. — Cas des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes. — Remarque sur le cas d'une fonction explicite de plusieurs variables liées par des équations données.

CHAPITRE VII. — Théorie des courbes planes. — De la tangente et de la normale aux courbes planes. — Limite des tangentes. — Ordre du contact d'une courbe avec sa tangente. — Points d'inflexion. — Concavité et convexité. — Emploi des coordonnées homogènes. — Recherche des points d'inflexion des courbes. — Des points singuliers des courbes planes. — Caractère analytique des points singuliers. — Recherche de la nature des points singuliers. — Différentielle de *l'aire d'une courbe plane*. — *Différentielle de la longueur d'un arc de courbe plane*. — Du rayon de courbure et du centre de courbure en un point d'une courbe plane. — Des développées et des développantes des courbes planes. — Formules relatives au système des coordonnées polaires. — Des courbes enveloppes. — Contacts des divers ordres des courbes planes. — Des courbes osculatrices. — Du cercle osculateur.

CHAPITRE VIII. — Applications de la théorie des courbes planes. — Aire des sections coniques. — De la différentielle d'un arc de section conique. — Rayon de courbure des sections coniques. — Développées des sections coniques. — De la cycloïde. — Des épicycloïdes. — De la développante du cercle. — De la spirale d'Archimède et de la spirale hyperbolique. — De la spirale logarithmique. — Applications de la théorie des enveloppes.

CHAPITRE IX. — Théorie des courbes gauches et des surfaces courbes. — De la tangente et du plan normal d'une courbe quelconque. — Du plan tangent et de la normale à une surface courbe. — Emploi des coordonnées homogènes. — Différentielle de la longueur d'un arc de courbe quelconque. — Expressions des cosinus des angles que fait la tangente d'une courbe avec les directions de trois axes rectangulaires. — Du rayon de courbure en un point d'une courbe quelconque. — De la normale principale en un point d'une courbe gauche. — Du centre de courbure en un point d'une courbe gauche. — Expressions des cosinus des angles qui déterminent la direction de l'axe du cercle de courbure. — *Expression de la différence* entre un arc de courbe et sa corde. — De l'ordre du contact d'une courbe et d'une surface. — Des surfaces osculatrices en un point d'une courbe donnée. — Du plan osculateur en un point d'une courbe donnée. — De la torsion ou seconde courbure des courbes gauches. — Résumé et complément des formules principales relatives à la théorie des courbes gauches. — De la sphère osculatrice en un point d'une courbe donnée. — Expressions des coordonnées du centre et du rayon de la sphère osculatrice en un point d'une courbe. — Des surfaces enveloppes. — Des surfaces développables. — De la surface polaire. — Lieu des centres des sphères osculatrices aux divers points d'une courbe donnée. — Théorie générale des développées et des développantes. — Application des théories précédentes à l'helice. — De l'ordre du contact de deux courbes quelconques. — Des courbes osculatrices. — Du cercle osculateur en un point d'une courbe gauche. — Son identité avec le cercle de courbure. — *Du contact des surfaces courbes.*

CHAPITRE X. — Des lignes tracées sur les surfaces courbes. — Étude de diverses classes de surfaces. — Expression du rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface donnée. —Théorème de Meunier. — Comparaison des rayons de courbure des sections normales en un point d'une surface. — Des sections principales. — Autre manière de présenter les résultats qui précèdent. — De l'indicatrice. — Cas où la théorie précédente est en défaut. — De l'enveloppe des plans tangents à une surface aux divers points d'une courbe donnée. — Des tangentes conjuguées. — Expressions générales des rayons de courbure principaux, en un point quelconque d'une surface. — Détermination des ombilics. — Détermination des ombilics de l'ellipsoïde. — Des lignes de courbure d'une surface. — Propriétés relatives aux lignes de courbure. — De la surface dont tous les points sont des ombilics. — Des systèmes triples de surfaces orthogonales. — Théorème de M. Dupin sur les surfaces orthogonales. — Des systèmes triples de surfaces orthogonales du deuxième degré. — Des lignes de courbure de l'ellipsoïde. Des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente — Des surfaces reglees; leur distinction en surfaces développables et en surfaces gauches. — Des surfaces cylindriques. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces. — Des surfaces coniques. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces. — Des surfaces conoïdes — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces. — Des surfaces de révolution. — Équation aux dérivées partielles de ces surfaces. — De l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables. — Des surfaces des canaux. — De l'équation aux dérivées partielles des surfaces reglées.

CHAPITRE XI. — Des fonctions de variables imaginaires. — Manière de représenter les variables imaginaires. — Des fonctions algébriques. — Des séries dont les termes sont imaginaires. — Définition de la fonction exponentielle, dans le cas d'une variable imaginaire. — Definition des fonctions circulaires directes, dans le cas d'une variable imaginaire. — Relations entre les fonctions exponentielles et les fonctions circulaires. — De la fonction logarithmique et des fonctions circulaires inverses, dans le cas d'une variable imaginaire. — De la continuite. — Dérivée et differentielle d'une fonction d'une variable imaginaire. — Démonstration d'un théorème de Cauchy. — Formule de Maclaurin. — Formule de Lagrange. — Applications de la formule de Lagrange.

CHAPITRE XII. — Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. — Théorèmes relatifs à la décomposition des fractions rationnelles. — Cas d'une fraction rationnelle dont le dénominateur n'a que des facteurs simples. — Méthodes pour effectuer la décomposition d'une fraction rationnelle, dans le cas général. — Forme nouvelle de l'expression d'une fonction rationnelle décomposée en fractions simples. — Mode particulier de décomposition pour les fractions rationnelles et réelles dont le dénominateur a des facteurs linéaires imaginaires. — Détermination d'une fonction entière par le moyen des valeurs qui répondent à des valeurs données de la variable.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

CALCUL INTÉGRAL.

à DEUX VARIABLES. — De la séparation des variables. — Intégration des équations de la forme $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. — Intégration de l'équation linéaire du premier ordre. — D'une classe d'équations réductibles à la forme linéaire. — D'une classe d'équations dont on peut determiner l'intégrale générale quand on connaît une intégrale particulière. — De l'équation de Riccati. — De l'équation $L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$, dans laquelle L, M, N désignent des fonctions linéaires. — Cas des équations différentielles $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, qui ne sont pas résolues par rapport à $\frac{dy}{dx}$. — Des équations différentielles linéaires par rapport aux variables. — Application à quelques exemples. — Du problème des trajectoires. — Des facteurs propres à rendre différentielle exacte une expression de la forme $P\,dx + Q\,dy$. — Recherche du facteur propre à rendre $P\,dx + Q\,dy$ une différentielle exacte. — Application du Calcul intégral à la démonstration des propriétés fondamentales des transcendantes simples à différentielles algébriques. — Propriété fondamentale des fonctions elliptiques.

CHAPITRE VIII. — DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS. — De l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = X$, où X désigne une fonction donnée de x. — Des équations où ne figurent que deux dérivées consécutives de la fonction inconnue. — Des équations où ne figurent que deux dérivées dont les ordres diffèrent de deux unités. — Cas où l'on peut abaisser l'ordre des équations différentielles. — Application des résultats qui précèdent à quelques exemples. — Usage d'un facteur pour l'intégration des équations différentielles d'ordre quelconque. — Usage de la différentiation pour l'intégration des équations différentielles. — Solution d'un problème qui exige l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées.

CHAPITRE IX. — THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. — Des équations linéaires. — Propriétés des équations linéaires dépourvues de second membre. — Intégration d'une équation linéaire pourvue d'un second membre, dans le cas où l'on connaît l'intégrale générale de l'équation privée de second membre. — Réduction d'une équation linéaire à une autre d'ordre inférieur, dans le cas où l'on connaît une ou plusieurs intégrales particulières de l'équation privée de second membre. — Autre manière d'effectuer la réduction d'une équation linéaire à une équation linéaire d'ordre inférieur. — Des équations linéaires du deuxième ordre. — Des équations linéaires sans second membre, à coefficients constants. Des équations linéaires pourvues d'un second membre et à coefficients constants. — Sur un cas des équations linéaires réductible à celui des coefficients constants. — Des systèmes d'équations linéaires simultanées. — Methode de d'Alembert pour ramener aux équations à deux variables les systèmes d'equations lineaires du premier ordre. — Intégration d'un système d'équations pourvues de seconds membres, dans le cas où l'on connaît les intégrales des mêmes équations privées de seconds membres. — Autre méthode pour la recherche des intégrales dans le cas des coefficients constants. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires.

CHAPITRE X. — DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES SÉRIES OU PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES. — Emploi des formules de Taylor et de Maclaurin — Changement de variable combiné avec l'emploi de la formule de Maclaurin. — Emploi de la méthode des coefficients indéterminés. — De l'équation de Riccati. — De l'intégration des équations différentielles par le moyen des intégrales définies. — Sur la détermination des intégrales définies par le moyen des équations différentielles. — Exemple de la détermination de la somme d'une série donnée, par le moyen d'une équation différentielle.

CHAPITRE XI. — Des équations aux dérivées partielles ou aux différentielles totales. — Des équations aux dérivées partielles auxquelles on peut appliquer les procédés d'intégration relatifs aux équations différentielles ordinaires. — Des équations aux dérivées partielles linéaires par rapport aux dérivées. — Application de la théorie précédente à quelques exemples. — Des équations aux différentielles totales. — Définition de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. — Des intégrales complètes. — Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas de deux variables indépendantes. — Extension de la méthode précédente au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes. — Remarque sur les solutions particulières que peuvent admettre les équations aux dérivées partielles du premier ordre. — Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, à deux variables indépendantes. — Application de la théorie précédente à quelques exemples. — Application de la transformation de Legendre. — Des équations linéaires aux dérivées partielles. — De l'intégration des équations aux dérivées partielles, par les séries ou par les intégrales définies.

CHAPITRE XII. — De la méthode des variations. — Définition des variations d'un système de variables qui dépendent de l'une d'entre elles. — Théorèmes relatifs à la permutation des caractéristiques. — Expressions des variations d'une fonction et de ses dérivées, en fonction de la variation de la variable indépendante et d'une variable nouvelle. — Calcul de la variation d'une intégrale définie. — Autre manière de calculer la variation d'une intégrale définie. — Objet de la méthode des variations. — Recherche des valeurs maxima et minima d'une intégrale définie. — D'une classe particulière de maxima et de minima relatifs. — Remarques sur quelques cas particuliers. — Application de la méthode des variations à la solution de quelques problèmes.

NOTE SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. CH. HERMITE.

Propriétés communes aux fonctions circulaires et elliptiques. — De la périodicité dans les fonctions circulaires et elliptiques. — Définition des fonctions $\Theta(x)$, $H(x)$, $\Theta_1(x)$, $H_1(x)$; leurs expressions en produits et en séries. — Relations algébriques entre les fonctions de Jacobi. Définition de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Equations différentielles et inversion de l'intégrale elliptique de première espèce. — Addition des arguments. Théorème d'Abel. — Multiplication de l'argument par un nombre entier. — Sur les intégrales de seconde et de troisième espèce. — Remarques auxquelles conduit l'expression des intégrales de troisième espèce. — Des fonctions de M. Weierstrass. — Réduction aux fonctions elliptiques des fonctions doublement périodiques ayant pour périodes $2k$ et $2ik'$. Théorème de Liouville. — Réduction aux fonctions elliptiques des fonctions doublement périodiques ayant pour période $4k$ et $4ik'$.

Les anciens souscripteurs qui désirent continuer leur souscription sans avoir à se preoccuper des dates d'apparition des divers Tomes de la Collection n'auront qu à envoyer, lorsqu'ils recevront un Volume, la somme de 20 fr. pour leur souscription au Volume suivant, et celui-ci leur sera expédié *franco* des son apparition.

Table des Matières du Tome I (Ire Série).

Table des Matières du Tome II (Ire Série).

Mémoires extraits des « Mémoires de l'Académie des Sciences ».

et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire. — Mémoire sur la théorie de la lumière, première et deuxième partie. — Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction. — Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes. — Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps, et en particnlier sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. — Mémoire sur les rayons lumineux simples, et sur les rayons évanescents. — Mémoire sur le calcul intégral. — *Mémoire sur les systèmes d'équations linéaires différentielles ou aux dérivées* partielles à coefficients périodiques, et sur les intégrales élémentaires de ces mêmes équations. — Mémoire sur les vibrations d'un double systeme de molécules, et de l'éther contenu dans un corps cristallisé. — Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels.

Table des Matières du Tome III (Ire Série).

Mémoire extrait des « Mémoires de l'Académie des Sciences ».

Mémoire sur la théorie des nombres (14 Notes).

Table des Matières du Tome IV (Ire Série).

Sur l'intégration des équations différentielles. Lettre à M. le Président de l'Académie des Sciences. Lettre à M. Ampère sur la théorie de la lumière. Notes sur l'Optique adressées à M. Libri. Lettre à M. Ampère sur l'explication de divers phénomènes de la lumière dans le système des ondes. Deuxième, troisième, quatrième et cinquième Lettre à M. Libri sur la théorie de la lumière. Extrait d'une Lettre à M. *Coriolis*. Sur la résolution des équations Extrait d'une Lettre sur un Mémoire publié à Turin, le 16 juin 1833, et relatif aux racines des équations simultanées. Première Lettre sur la détermination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque. Deuxième Lettre sur la résolution des équations de degré quelconque. Note sur un théorème relatif aux équations simultanées. Note sur la résolution des équations de degré quelconque. Méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendantes. Détermination des racines réelles des équations : méthode linéaire. Détermination des racines réelles des équations. Mémoire sur les vibrations de l'éther dans un milieu ou dans le système de deux milieux, lorsque la propagation de la lumière s'effectue de la même manière en tous sens autour de tout axe parallèle à une droite donnée. Mémoire sur la propagation du mouvement par ondes planes dans un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent à de très petites distances Analogie de ces ondes avec celles dont la propagation donne naissance aux phénomènes de la polarisation de la lumière et de la double réfraction. Formules extraites des deux Memoires présentés dans la séance du 19 novembre. Mémoires sur la réflexion et la réfraction de la lumière produites par la surface de séparation de deux milieux doués de la réfraction simple. Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière. Note sur les propositions établies dans le *Compte rendu* de la séance du 11 février 1839. Note sur l'égalité des réfractions de deux rayons lumineux qui émanent de deux étoiles situées dans deux portions opposées de l'écliptique. Méthode générale propre à fournir les équations de condition relatives aux limites des corps dans les problèmes de Physique mathématique. Note sur un théorème d'Analyse et sur son application aux questions de Physique mathématique. Mémoire sur les mouvements infiniment petits des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Note sur la quantité de lumière réfléchie sous les diverses incidences par les surfaces des corps opaques et spécialement des métaux. Note sur la nature des ondes lumineuses et généralement de celles qui se propagent dans les systèmes de molécule. Sur l'intensité de la lumière polarisée et refléchie par des surfaces métalliques. Observations de M. G. Cauchy, sur la Lettre de Mac-Cullagh. Sur les mouvements de deux systèmes de molécules qui se penètrent mutuellement. Mémoire sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires. Mémoire sur les mouvements infiniment petits donles équations présentent une forme indépendante de la direction des trois axes coordonnés, supposés rectangulaires, ou seulement de deux de ces axes. Mémoire sur la réflexion et la refraction d'un mouvement simple transmis d'un système de molécule à un autre, chacun de ces deux systèmes étant supposé homogène et tellement constitué que la propagation des mouvements infiniment petits s'y effectue en tous sens suivant les mêmes lois. Memoire sur l'intégration des équations differentielles des mouvements planétaires. Mémoire ou l'on montre comment une seule et même théorie peut fournir les lois de propagation de la lumiere et de la chaleur. Mémoire sur la reduction des intégrales générales d'un système d'équations lineaires aux differences partielles. Présentation à l'Academie des quatre premieres livraisons des *Exercices d'Analyse et de Physique mathematique.* Rapport sur un Memoire de M. Lamé, relatif au dernier théoreme de Fermat. Sur la théorie des nombres, et, en particulier, sur les formes quadratiques des nombres premiers. Sur la théorie des nombres, et, en particulier, sur les formes quadratiques des puissances d'un nombre premier ou du quadruple de ces puissances. Présentation à l'Académie de divers Mémoires et Notes manuscrites. Mémoire sur la constitution des molécules intégrantes et sur les mouvements atomiques des corps cristallisés. Mémoire sur la convergence des séries. Application du théorème fondamental aux développements des fonctions implicites. Memoire sur les pressions et tensions dans un double systeme de molecules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles.

Table des Matières du Tome V (I^{re} Série).

différentielles. Application à la Mécanique céleste. — *Analyse mathématique.* Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles. — *Analyse mathématique.* Sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles. — *Mécanique céleste.* Méthodes générales pour la détermination des mouvements des planètes et de leurs satellites. — *Mécanique céleste.* Sur les fonctions alternées qui se présentent dans la théorie des mouvements planétaires. — *Mécanique céleste.* Méthode simple et générale pour la détermination numérique des coefficients que renferme le développement de la fonction perturbatrice. — *Mécanique céleste.* Note sur le développement de la fonction perturbatrice. — *Mécanique céleste.* Sur le mouvement de notre système planétaire. — *Mécanique céleste.* Mémoire sur la variation des éléments elliptiques dans le mouvement des planètes. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur la convergence et la transformation des séries. — *Analyse mathématique.* Applications diverses des théorèmes relatifs à la convergence et à la transformation des séries. — *Analyse mathématique.* Sur la convergence des séries qui représentent les intégrales générales d'un système d'équations différentielles. — *Analyse mathématique.* Sur les fonctions interpolaires. — *Mécanique appliquée.* Rapport sur le nouveau système de navigation à vapeur de M. le marquis Achille de Jouffroy. — *Calcul numérique.* Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques. — *Calcul numérique.* Sur les moyens de vérifier ou de simplifier diverses opérations de l'Arithmétique décimale. — *Analyse mathématique.* Sur la résolution numérique des équations algébriques et transcendantes. — *Analyse mathématique.* Mémoires sur divers points d'Analyse. — *Mathématiques.* Rapport sur les procédés de calcul imaginés et mis en pratique par un jeune pâtre de la Touraine. — *Physique mathématique.* Rapports sur deux Mémoires présentés à l'Académie des Sciences par M. *Duhamel*, et relatifs aux vibrations des cordes que l'on a chargées de curseurs. — *Mécanique appliquée.* Rapport sur une machine destinée à la résolution numérique des équations, et présentée à l'Académie par M. *Léon Lalanne*, ingénieur des Ponts et Chaussées. — **Table des matières du Tome cinquième de la première Série.**

Table des Matières du Tome VI (I^re Série).

Calcul intégral. Sur les intégrales multiples. — *Mécanique céleste.* Méthodes propres à simplifier le calcul des inégalités périodiques et séculaires des mouvements des planètes. — *Mécanique céleste.* Sur les variations séculaires des éléments elliptiques, dans le mouvement des planètes. Rapport sur une Note de M. *Paulet* (de Genève), relative à un théorème dont le théorème de Fermat ne serait qu'un cas particulier. — *Arithmétique.* Rapport sur une méthode abrégée de multiplication, présentée à l'Académie par M. *Thoyer.* — *Arithmétique.* Addition au Rapport sur une méthode de calcul, présentée à l'Académie par M. *Thoyer*, employé à la Banque de France. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur diverses formules d'Analyse. — *Analyse algébrique.* Sur le développement d'une fonction entière du sinus et du cosinus d'un arc en série ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples de cet arc. Sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques. — *Analyse mathématique.* Note sur la formation des fonctions alternées qui servent à résoudre le problème de l'élimination. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur diverses formules relatives à l'Algèbre et à la théorie des nombres. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur diverses formules relatives à l'Algèbre et à la théorie des nombres. — *Analyse mathématique.* Rapport sur un Mémoire de M. *Broch*, relatif à une certaine classe d'intégrales. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur des formules générales qui se déduisent du calcul des résidus et qui paraissent devoir concourir notablement aux progrès de l'Analyse infinitésimale. — *Analyse mathématique.* Sur la détermination et la réduction des intégrales dont les dérivées renferment une ou plusieurs fonctions implicites d'une même variable. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable. — *Analyse mathématique.* Sur la détermination et la transformation d'un grand nombre d'intégrales définies nouvelles. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur l'intégration des systèmes d'équation aux différentielles partielles, et sur les phénomènes dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique. — *Calcul intégral.* — Mémoire sur l'emploi de la transformation des coordonnees pour la détermination et la réduction des intégrales définies multiples. — *Calcul intégral.* Mémoire sur diverses transformations remarquables de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogene aux différences partielles. — *Calcul intégral.* Mémoire sur l'intégration des systèmes d'équations linéaires aux différences partielles. — *Calcul intégral.* Mémoire sur la réduction de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène. — *Calcul integral.* Méthode abrégee pour l'intégration des systèmes d'équations lineaires à coefficients constants. — *Calcul integral.* Note sur la transformation des sommes d'intégrales. — *Physique mathematique* Mémoire sur la surface caracteristique correspondante à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, et sur la surface des ondes. — *Physique mathematique.* Mémoire sur l'emploi des fonctions principales, représentées par des intégrales définies doubles, dans la recherche de la forme des ondes sonores, lumineuses, etc. — *Calcul des résidus.* Rapport sur un Mémoire de M. *Oltramare,* relatif au calcul des résidus. — *Mécanique céleste.* Methode nouvelle pour le calcul des inégalités des mouvements planetaires, et en particulier des inégalités à longues périodes. — *Physique mathematique.* Note sur la surface des ondes lumineuses dans les cristaux à deux axes optiques. — *Calcul integral.* Note sur l'intégrale définie double qui sert à l'intégration d'une équation caractéristique homogène. — *Calcul intégral.* Sur la reduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène, et sur les conséquences qu'entraîne cette réduction. — *Calcul integral.* Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une fonction caractéristique homogène, et sur les conséquences qu'entraîne cette réduction. — *Calcul integral.* Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène. — *Calcul integral.* Mémoire sur l'intégration des équations homogènes en termes finis. — *Mecanique céleste.* Note sur une transcendante que renferme le développement de la fonction perturbatrice relative au système planétaire. — *Analyse mathematique.* Sur le développement du reste qui complète la série de *Taylor,* en une serie nouvelle. — *Mécanique céleste.* Note sur la substitution des anomalies excentriques aux anomalies moyennes, dans le développement de la fonction perturbatrice. — *Analyse mathematique.* Note sur le développement des fonctions en séries. — *Calcul intégral.* Note sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées. Observations relatives à une Note présentée par M. *Blanchet.* — *Analyse mathématique.* Note sur divers théoremes relatifs à la rectification des courbes et à la quadrature des surfaces. — *Calcul intégral.* Note sur quelques théorèmes de Calcul intégral. — *Calcul integral.* Note sur la réduction de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogene. — *Calcul intégral.* Addition à la Note insérée dans le compte rendu de la précédente séance. — *Calcul integral.* Note sur diverses transformations de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène. — *Calcul integral.* Addition aux Notes insérées dans les *Comptes rendus* des séances précédentes. — *Physique mathematique.* Rapport sur deux Mémoires de M. *Blanchet,* relatifs à la propagation du mouvement dans les milieux élastiques cristallisés et en particulier de la délimitation des ondes. Notes ajoutées au Rapport qui précède. — *Analyse mathematique.* Rapport sur une Note de M. *Passot* relative à la détermination de la variable indépendante dans l'analyse des courbes. — *Calcul integral.* Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. — *Calcul integral.* Sur une intégrale remarquable d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. — *Calcul integral.* Addition aux deux Notes sur l'integration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. — *Calcul integral.* Mémoire sur l'intégration des equations simultanées aux dérivées partielles. — *Calcul intégral.* Remarques diverses sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. — *Calcul intégral.* Mémoire sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. — *Calcul integral.* Mémoire sur un théorème fondamental, dans le Calcul intégral. — *Analyse mathématique.* Note sur certaines solutions complètes d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Table des Matières du Tome VII (I^re Série).

Calcul intégral. Mémoire sur l'emploi du nouveau calcul, appelé *calcul des limites,* dans l'intégration d'un système d'équations différentielles. — *Calcul integral.* Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles. — *Calcul intégral.* Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux derivées partielles. — *Calcul intégral.* Mémoire sur les intégrales des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, et sur les développements de ces intégrales en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'un paran être que renferment les équations proposées. — *Calcul integral.* Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d ordre quelconque et sur leur réduction à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre. — *Calcul des limites.* Note sur divers théorèmes relatifs au calcul des limites — *Calcul integral.* Mémoire sur les intégrales des systèmes d'équations différentielles et aux dérivées partielles, et sur le développement de ces intégrales en séries ordonnees suivant les puissances ascendantes d'un paramètre que renferment les équations proposées. — *Astronomie.* Mémoire sur les variations des éléments du mouvement elliptique des planètes. — *Calcul des limites.* Mémoire sur le calcul des limites appliqué de diverses manières à l'intégration des systèmes d'équations différentielles. — *Calcul intégral.* Note sur une loi de réciprocité qui existe entre deux systèmes de valeurs de variables assujetties à vérifier des équations différentielles du premier ordre, et sur un théorème relatif à ces mêmes équations. — *Mecanique céleste.* Théorie nouvelle des mouvements planétaires, ou application du calcul des résidus à l'Astronomie. — *Astronomie.* Sur le nouveau développement de la fonction perturbatrice et sur diverses formules qui rendent plus facile l'application du calcul des résidus à l'Astronomie. — *Astronomie.* Détermination rigoureuse des termes séculaires dans le nouveau développement de la fonction perturbatrice. — *Analyse.* Note sur une formule qui sert à développer, suivant les puissances entières d'un accroissement attribué au cosinus d'un arc, les accroissements correspondants que prennent les cosinus des multiples de cet arc. — *Astronomie.* Décomposition de la fonction perturbatrice en produits de facteurs dont chacun se rapporte à une seule planète. — *Théorie de la lumière.* Note sur le calcul des phénomènes que présente la lumière réfléchie ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque. — *Physique mathematique.* Méthode abrégée pour la recherche des lois suivant lesquelles la lumière se trouve refléchie ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque. — *Physique mathématique.* Note sur la diffraction de la lumière — *Physique mathématique.* Addition à la Note sur la diffraction de la lumière. — *Théorie de la lumière* Mémoire sur les phénomènes des ombres et de la diffraction. — *Théorie de la lumière.* Second Mémoire sur les phenomènes des ombres et de la diffraction. — *Theorie de la lumière.* Memoires sur les rayons diffractés qui peuvent être transmis ou réfléchis par la surface de séparation de deux milieux isophanes. — *Physique mathematique.* Mémoire sur de nouveaux phénomènes, indiqués par le calcul, qui paraissent devoir intéresser les physiciens, et, en particulier, sur la diffraction du son. — *Physique mathematique.* Note sur les principales différences qui existent entre les ondes lumineuses et les ondes sonores. — *Physique mathématique.* Mémoires sur l'application de l'Analyse mathématique à la recherche des lois générales des phénomènes observés par les physiciens, et, en particulier, sur les lois de la polarisation circulaire. — *Analyse mathématique.* Rapport sur une Note de M. *Passot* relative aux forces centrales. — *Physique mathématique.* Théorie de la lumiere. Note relative à un article extrait du *Journal des Savants* (novembre 1842), et présenté par M. *Biot* à l'Académie dans la dernière séance. — *Théorie de la lumière.* Mémoire sur les lois de la dispersion plane et de la dispersion circulaire dans les milieux isophanes. — *Géométrie analytique.* Mémoire sur les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels. *Physique mathématique.* Note sur les pressions supportées, dans un corps solide ou fluide, par deux portions de surface très voisines, l'une extérieure, l'autre intérieure à ce même corps. — *Physique mathématique.* Mémoire sur les pressions ou tensions intérieures, mesurees dans un ou plusieurs systèmes de points matériels que sollicitent des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. — *Analyse mathématique.* Sur l'emploi des coordonnées curvilignes dans l'évaluation des surfaces, des volumes, des masses, etc. — *Calcul integral.* Mémoire sur la théorie des intégrales définies singulières appliquée généralement à la détermination des intégrales définies, et, en particulier, à l'évaluation des intégrales eulériennes. — *Calcul integral.* Recherches sur les integrales des équations linéaires aux dérivées partielles. — *Physique mathématique.* Note relative à l'équilibre des températures dans un cylindre de forme quelconque. — *Calcul integral.* Remarques sur les intégrales des équations aux dérivées partielles, et sur l'emploi de ces intégrales dans les questions de Physique mathématique. — *Géometrie analytique.* Rapport sur un Memoire de M. *Amyot* relatif aux surfaces du second ordre. — *Géometrie analytique.* Notes annexées au Rapport sur le Mémoire de M. *Amyot.* — *Géométrie analytique.* Suite des Notes annexées au Rapport sur le Mémoire de M. *Amyot.* — *Analyse mathématique.* Mémoire sur la synthèse algebrique. — *Analyse mathematique.* Mémoire sur la synthèse algébrique (*suite*). — *Analyse mathematique.* Mémoire sur la synthèse algébrique (*suite*). — *Physique mathématique.* Mémoire sur les pressions ou tensions interieures mesurées dans un double système de points matériels que sollicitent des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. — *Physique mathematique.* Addition au Memoire sur les pressions ou tensions intérieures, mesurées dans un double système de points matériels. — *Analyse mathematique.* Remarques à l'occasion d'un Mémoire de M. *Binet.*

Table des Matières du Tome VIII (Ire Série).

Analyse mathématique. Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives des variables. Rapport sur le concours de 1842, relatif au grand prix de Mathématiques. — *Calcul différentiel.* Mémoire sur l'Analyse infinitésimale. — *Analyse mathematique.* Note. — *Analyse mathematique.* Sur un emploi légitime des séries divergentes. — *Calcul intégral.* Recherches sur les intégrales eulériennes. — *Analyse transcendante.* Note sur des théorèmes nouveaux et de nouvelles formules qui se déduisent de quelques équations symboliques. — *Calcul intégral.* Mémoire sur l'emploi des équations symboliques dans le Calcul infinitésimal et dans le calcul aux différences finies. — *Géométrie.* Rapport sur un Mémoire de M. *Léon Lalanne,* qui a pour objet la substitution de plans topographiques à des Tables numériques à double entrée. — *Analyse mathematique.* Memoire sur les fonctions dont plusieurs valeurs sont liées entre elles par une équation linéaire, et sur diverses transformations de produits composés d'un nombre indéfini de facteurs. — *Analyse mathématique.* Second Mémoire sur les fonctions dont plusieurs valeurs sont liées entre elles par une équation linéaire. — *Calcul des résidus.* Mémoire sur l'application du calcul des résidus au développement des produits composés d'un nombre infini de facteurs. — *Analyse mathematique.* Mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes liées entre elles par un système de formules qui fournissent, comme cas particuliers, les développements des fonctions elliptiques en séries. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les factorielles géométriques. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les rapports entre les factorielles réciproques dont les bases varient proportionnellement, et sur la transformation des logarithmes de ces rapports en intégrales définies. — *Calcul intégral.* Sur la réduction des rapports de factorielles réciproques aux fonctions elliptiques. — *Analyse mathematique.* Mémoire sur les fractions rationnelles que l'on peut extraire d'une fonction transcendante, et spécialement du rapport entre deux produits de factorielles réciproques. — *Analyse mathématique.* Rapport sur un Mémoire de M. *Laurent,* qui a pour titre : « Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable x ». — *Analyse mathématique.* Note sur le developpement des fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières des variables. — *Astronomie.* Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'Astronomie. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les formules qui servent à decomposer en fractions rationnelles le rapport entre deux produits de factorielles réciproques. — *Calcul* *intégral.* Mémoire sur la théorie analytique des *maxima maximorum* et des *minima minimorum.* Application de cette théorie au calcul des limites et à l'Astronomie. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les modules des séries. — *Mécanique.* Rapport sur divers Mémoires de M. *de Saint-Venant* relatifs à la Mécanique rationnelle et à la Mécanique appliquée. — *Sciences physiques et mathématiques.* Rapport sur les méthodes qui ont servi au développement des facultés intellectuelles d'un jeune sourd-muet, et sur les moyens par lesquels il est parvenu, non seulement à un degré d'instruction élevé, mais encore à une connaissance très étendue des Sciences physiques et mathématiques. — *Analyse mathématique.* Sur la convergence d'une série. — *Théorie des nombres.* Rapport sur divers Mémoires de M. *Houry,* géomètre en chef du cadastre, etc. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les fonctions continues. — *Analyse mathématique.* Rapport sur une Note de M. *Cellerier,* relative à la théorie des imaginaires. — *Calcul intégral.* Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions. — *Astronomie.* Nouveau Mémoire sur le calcul des inégalités des mouvements planétaires. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur l'équilibre et le mouvement d'un système de molécules dont les dimensions ne sont pas supposées nulles. — *Analyse mathématique.* Addition au Mémoire sur la synthèse algébrique. — *Statistique.* — *Physique mathématique.* Rapport sur un Mémoire de M. *Laurent,* relatif au calcul des variations. — *Physique mathématique.* Observations à l'occasion d'une Note de M. *Laurent.* — *Physique mathématique.* Mémoire sur la théorie de la polarisation chromatique. — *Calcul intégral.* Mémoire sur la substitution des fonctions non périodiques aux fonctions périodiques dans les intégrales définies. — *Analyse mathématique.* Sur la méthode logarithmique appliquée au développement des fonctions en séries. — *Calcul intégral.* Note sur les intégrales eulériennes. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur divers théorèmes relatifs à la convergence des séries. — *Analyse mathématique.* Note sur l'application de la méthode logarithmique à la détermination des inégalités périodiques des mouvements planétaires. — *Analyse mathématique.* Note sur diverses propriétés remarquables du développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances entières d'une même variable. — *Astronomie.* Mémoire sur l'application de la méthode logarithmique à la détermination des inégalités périodiques que présentent les mouvements des corps célestes. — *Analyse mathématique.* Note sur l'application de la méthode logarithmique au développement des fonctions en séries, et sur les avantages que présente, dans cette application, la détermination numérique des coefficients effectuée à l'aide d'approximations successives. — *Analyse mathématique.* Note sur les propriétés de certaines factorielles et sur la décomposition des fonctions en facteurs. — *Analyse mathématique.* Sur un nouveau genre de développement des fonctions, qui permettra d'abréger notablement les calculs astronomiques. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur quelques formules relatives aux différences finies. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur plusieurs nouvelles formules qui sont relatives au développement des fonctions en séries. — *Analyse mathématique.* Note sur l'application des nouvelles formules à l'Astronomie. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur une extension remarquable que l'on peut donner aux nouvelles formules établies dans les séances précédentes. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus et sur la théorie des intégrales singulières. — *Analyse mathématique.* Sur les séries multiples et sur les séries modulaires. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les fonctions complémentaires. — *Analyse mathématique.* Sur la convergence des séries multiples. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les fonctions qui se reproduisent par substitution. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les progressions des divers ordres. — *Arithmétique.* Rapport sur un Mémoire de M. *Guy,* capitaine d'artillerie et ancien élève de l'École Polytechnique. — *Analyse mathématique.* Note sur diverses conséquences du théorème relatif aux valeurs moyennes des fonctions. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur la convergence de la série partielle qui a pour termes les divers coefficients d'une même puissance d'une seule variable dans une série multiple. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur diverses conséquences remarquables des principes établis dans les séances précédentes.

Table des Matières du Tome IX (Ire Série).

Analyse mathématique. Mémoire sur l'emploi des variables complémentaires dans le développement des fonctions en séries. — *Analyse mathematique.* Mémoire sur des formules rigoureuses et dignes de remarque, auxquelles on se trouve conduit par la considération de séries multiples et divergentes. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur diverses propriétés remarquables et très générales des fonctions continues. — *Analyse mathematique.* Memoire sur les séries syntagmatiques et sur celles qu on obtient quand on développe des fonctions d'une seule variable suivant les puissances entières de son argument. — *Analyse mathématique.* Memoire sur les approximations des fonctions de très grands nombres. *Analyse mathematique.* Note sur les modules principaux des fonctions. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les approximations des fonctions de très grands nombres. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les approximations des fonctions de très grands nombres. — *Astronomie.* Rapport sur un Mémoire de M. *Le Verrier*, qui a pour objet la détermination d'une grande inégalité du moyen mouvement de la planète Pallas. — *Astronomie.* Notes jointes au Rapport qui précede, et rédigées par le Rapporteur. — *Astronomie.* Suite des Notes annexées au Rapport sur le Mémoire de M. *Le Verrier*, et relatives à la détermination des inégalités périodiques des mouvements planétaires. — *Calcul integral.* Mémoire sur la determination approximative des fonctions representées par des intégrales. — *Astronomie.* Note sur l'application des nouvelles formules à l'Astronomie. — *Astronomie.* Mémoire sur les séries nouvelles que l'on obtient, quand on applique les méthodes exposées dans les précédentes séances au développement de la fonction perturbatrice et à la détermination des inegalités périodiques des mouvements planétaires. — *Astronomie.* Memoire sur des formules et des théorèmes remarquables, qui permettent de calculer très facilement les perturbations planétaires dont l'ordre est très élevé. — Rapport sur la singulière aptitude d'un enfant de six ans et demi pour le calcul. — *Mecanique.* Notes relatives à la mécanique rationnelle. — *Mecanique.* Observations sur la pression que supporte un élément de surface plane dans un corps solide ou fluide. — Mémoire sur les secours que les sciences de calcul peuvent fournir aux sciences physiques ou même aux sciences morales, et sur l'accord des théories mathématiques et physiques avec la véritable philosophie. — *Géométrie.* Mémoire sur de nouveaux théorèmes de Géométrie et, en particulier, sur le module de rotation d'un système de lignes droites menées par les divers points d'une directrice donnée. — *Géometrie analytique.* Sur divers théorèmes de Géométrie analytique. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur divers théoremes d'Analyse et de Calcul intégral. — *Geometrie.* Rapport sur un Mémoire de M. *Ossian Bonnet*, concernant quelques propriétés génerales des surfaces et des lignes tracées sur les surfaces. — *Analyse mathematique.* Sur le nombre des valeurs égales ou inégales que peut acquérir une fonction de *n* variables indépendantes, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque. — *Analyse mathematique.* Sur le nombre des valeurs égales ou distinctes que peut acquérir une fonction de *n* variables, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque (*suite*). — *Analyse mathématique.* Sur le nombre des valeurs égales ou distinctes que peut acquérir une fonction de *n* variables, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque. — *Analyse mathématique.* Sur le nombre des valeurs égales ou inégales que peut acquérir une fonction de *n* variables independantes, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur diverses propriétés remarquables des substitutions régulières ou irrégulières, et des systèmes de substitutions conjuguées. — *Analyse mathématique.* Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M. *Bertrand*, et relatif au nombre des valeurs que peut prendre une fonction, quand on y permute les lettres qu'elle renferme. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les premiers termes de la serie des quantités qui sont propres à représenter le nombre des valeurs distinctes d'une fonction de *n* variables indépendantes. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur la résolution des équations linéaires symboliques, et sur les consequences remarquables que cette résolution entraîne après elle dans la théorie des permutations. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les substitutions permutables entre elles. — *Analyse mathématique.* Note sur la réduction des fonctions transitives aux fonctions intransitives, et sur quelques propriétés remarquables des substitutions qui n'altèrent pas la valeur d'une fonction transitive. — *Analyse mathématique.* Note sur les substitutions qui n'altèrent pas la valeur d'une fonction, et sur la forme regulière que prennent toujours celles d'entre elles qui renferment un moindre nombre de variables. — *Analyse mathematique.* Mémoire sur diverses propriétés des systemes de substitutions, et particulièrement de ceux qui sont permutables entre eux. — *Analyse mathématique.* Note sur les fonctions caractéristiques des substitutions. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur le nombre et la forme des substitutions qui n'altèrent pas la valeur d'une fonction de plusieurs variables indépendantes. *Analyse mathématique.* — Applications diverses des propriétés établies dans les précédents Mémoires. — *Analyse mathématique.* Memoire sur les fonctions de cinq ou six variables, et spécialement sur celles qui sont doublement transitives.

Table des Matières du Tomé X (I^e Série).

Analyse mathématique. Mémoire sur les fonctions de cinq ou six variables et spécialement sur celles qui sont doublement transitives. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur un nouveau calcul qui permet de simplifier et d'étendre la théorie des permutations. — *Analyse mathématique.* Applications diverses du nouveau calcul dont les principes ont été établis dans la séance précédente. — *Analyse mathématique.* Recherches sur un système d'équations simultanées, dont les unes se déduisent des autres à l'aide d'une ou de plusieurs substitutions. — *Analyse mathématique.* Note sur diverses propriétés de certaines fonctions algébriques. — *Analyse mathématique.* Sur la résolution directe d'un système d'équations simultanées, dont les unes se déduisent des autres à l'aide d'une ou de plusieurs substitutions. — *Analyse mathématique.* Sur la résolution des équations symboliques non linéaires. — *Analyse mathématique.* Note sur un théorème fondamental relatif à deux systèmes de substitutions conjuguées. — Notes. — *Géométrie analytique.* Mémoire sur les avantages que présente, dans la Géométrie analytique, l'emploi de facteurs propres à indiquer le sens dans lequel s'effectuent certains mouvements de rotation, et sur les résultantes construites avec les cosinus des angles que deux systèmes d'axes forment entre eux. — *Calcul intégral.* Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les fonctions de variables imaginaires. — *Calcul intégral.* Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la recherche des propriétés générales des intégrales dont les dérivées renferment des racines d'équations algébriques. — *Calcul intégral.* Mémoire sur le changement de variables dans les transcendantes représentées par des intégrales définies, et sur l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles. — *Calcul intégral.* Memoire sur la détermination complète des variables propres à vérifier un système d'équations différentielles. — *Analyse mathématique.* Rapport sur un Mémoire qui a été présenté à l'Académie par M. Felix Chio, et qui a pour titre : *Recherches sur la série de Lagrange.* — Note de M. Cauchy, Rapporteur : Sur les caractères à l'aide desquels on peut distinguer, entre les diverses racines d'une équation algébrique ou transcendante, celle qui se développe en série convergente par le théorème de Lagrange. — *Théorie des nombres.* Rapport sur une Note de M. *d'Adhémar.* — *Calcul intégral.* Mémoire sur la détermination complète des variables propres à vérifier un système d'équations différentielles. — *Calcul intégral.* Mémoire sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur. — Note. — *Calcul intégral.* Mémoire sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur. — *Calcul intégral.* Mémoire sur les intégrales imaginaires des équations différentielles, et sur les grands avantages que l'on peut retirer de la considération de ces intégrales, soit pour établir des formules nouvelles, soit pour éclaircir des difficultés qui n'avaient pas été jusqu'ici complètement résolues. — *Calcul intégral.* Note sur l'intégration d'un système d'équations différentielles et sur l'inversion de leurs intégrales. — *Calcul intégral.* Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires. — *Calcul intégral.* Mémoire sur la continuité des fonctions qui représentent les intégrales réelles ou imaginaires d'un système d'équations différentielles. — *Calcul intégral.* Mémoire sur les diverses espèces d'intégrales d'un système d'équations différentielles. — *Analyse mathématique.* — Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions. — *Calcul intégral.* Sur les rapports et les différences qui existent entre les intégrales rectilignes d'un système d'équations différentielles et les intégrales complètes de ces mêmes équations. — *Astronomie.* Méthodes nouvelles pour a détermination des orbites des corps célestes, et, en particulier, des comètes. — *Mécanique appliquée.* Rapport sur le système proposé par M. *de Jouffroy,* pour les chemins de fer. — *Astronomie.* Mémoire sur l'application de la nouvelle formule d'interpolation à la détermination des orbites que décrivent les corps célestes, et sur l'introduction directe des longitudes et des latitudes observées dans les formules astronomiques. — *Astronomie.* Note sur les formules relatives à la détermination des orbites que décrivent les corps célestes. — *Analyse mathématique.* Note sur quelques propriétés des facteurs complexes. — *Physique mathématique.* Mémoire sur les mouvements des systèmes de molécules. — *Theorie des nombres.* Mémoire sur les racines des équations algébriques à coefficients entiers, et sur les polynômes radicaux. — *Physique mathématique.* Mémoire sur le mouvement d'un système de molécules dont chacune est considérée comme formée par la réunion de plusieurs atomes ou points matériels. — *Théorie des nombres.* Mémoire sur de nouvelles formules relatives à la théorie des polynômes radicaux, et sur le dernier théorème de Fermat. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les maxima et minima conditionnels. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur les lieux analytiques. — *Théorie des nombres.* Sur la décomposition d'un polynôme radical à coefficients réels en deux parties, dont la première est un polynôme radical à coefficients entiers, et dont la seconde offre un module plus petit que l'unité. — *Théorie des nombres.* Mémoire sur diverses propositions relatives à la théorie des nombres. — *Théorie des nombres.* Sur la décomposition d'un nombre entier en facteurs radicaux. — *Théorie des nombres.* Mémoire sur les facteurs modulaires des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables. — *Analyse algébrique.* Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences. — *Théorie des nombres.* Mémoire sur les racines primitives des équivalences binômes correspondantes à des modules quelconques, premiers ou non premiers, et sur les grands avantages que présente la considération de ces racines, dans les questions de nombres, surtout en fournissant le moyen d'établir la théorie nouvelle des *indices modulaires* des polynômes radicaux. — *Theories des nombres.* Mémoire sur les racines des équivalences correspondantes à des modules quelconques premiers ou non premiers, et sur les avantages que présente l'emploi de ces racines dans la théorie des nombres. — *Théorie des nombres.* Memoire sur la décomposition des nombres entiers en facteurs radicaux. — *Théorie des nombres.* Mémoire sur les indices modulaires des polynômes radicaux que fournissent les puissances et produits des racines de la résolvante d'une équation binôme. — *Analyse mathématique.* Mémoire sur l'application de la nouvelle théorie des imaginaires aux diverses branches des Sciences mathématiques. — *Théorie des nombres.* Mémoire sur diverses propositions relatives à la théorie des nombres. — *Théorie des nombres.* Mémoire sur l'emploi des racines de l'unité pour la résolution des divers systèmes d'équations linéaires. — *Physique mathématique.* Note sur la polarisation chromatique. — *Astronomie.* Mémoire sur la détermination des orbites des planètes et des comètes. — *Astronomie.* Second Mémoire sur la determination des orbites des planètes et des comètes. — *Astronomie.* Note sur l'application des formules établies dans les précédentes séances, à la détermination des orbites des petites planètes. — *Analyse mathematique.* Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. — *Astro-*

nomie. Mémoire sur le degré d'exactitude avec lequel on peut déterminer les orbites des planètes et des comètes. — *Analyse mathématique*. Application des formules que fournit la nouvelle méthode d'interpolation à la résolution d'un système d'équations linéaires approximatives, et, en particulier, à la correction des éléments de l'orbite d'un astre. — *Astronomie*. Mémoire sur la détermination et la correction des éléments de l'orbite d'un astre. — *Astronomie*. Memoire sur la détermination de l'orbite d'une planète, à l'aide de formules qui ne renferment que les dérivées du premier ordre des longitude et latitude géocentriques. — *Astronomie*. Addition au Mémoire sur la détermination de l'orbite d'une planète, à l'aide de formules qui ne renferment que les dérivées du premier ordre des longitude et latitude géocentriques. — *Astronomie*. Mémoire sur deux formules générales, dont chacune permet de calculer rapidement des valeurs très approchées des éléments de l'orbite d'une planète ou d'une comète. — *Astronomie*. Rapport sur un Mémoire de M. *de Gasparis*, relatif à deux équations qui donnent la longitude du nœud de l'inclinaison de l'orbite d'un astre, à l'aide d'observations géocentriques convenablement combinées. — *Astronomie*. Note sur l'abaissement que l'on peut faire subir au degré de l'équation donnée par Lagrange dans la *Connaissance des Temps* pour l'année 1821. — *Astronomie*. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des fonctions interpolaires, et sur le parti qu'on peut en tirer pour une détermination sûre et facile des éléments de l'orbite d'une planète ou d'une comète. — *Astronomie*. Formules pour la détermination des orbites des planètes et des comètes. — *Optique*. Note sur la lumière réfléchie par la surface d'un corps opaque, et spécialement d'un métal. — *Astronomie*. Rapport sur divers Mémoires de M. *Michal*, relatifs à la détermination des orbites des planètes et des comètes.

Table des Matières du Tome XI (Ire Série).

Sur quelques théorèmes de Géométrie analytique relatifs aux polygones et aux polyèdres réguliers. — Rapport sur une Note de M. *Breton de Champ*, relatif à quelques propriétés des rayons de courbure des surfaces. — Note sur quelques propriétés remarquables des polyèdres réguliers. — Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions d'une ou de plusieurs variables, et sur les fonctions isotropes. — Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions et sur les fonctions isotropes. — Mémoire sur les douze équations qui déterminent les mouvements de translation, de rotation et de dilatation d'un système de molécules. — Rapport sur les moyens proposés par les auteurs de divers Mémoires pour la solution des difficultés que présentent le dépouillement et le recensement des votes dans les élections nouvelles. — Note sur un moyen de rendre plus rapide le dépouillement du scrutin dans les élections nouvelles. — Rapport sur les moyens que divers auteurs proposent pour faciliter les opérations relatives aux élections nouvelles. — Rapport sur un Mémoire de M. *Gorini*, relatif aux résidus des puissances d'un même nombre. — Note sur le recensement des votes dans les élections générales. — Mémoire sur les valeurs moyennes des fonctions et sur les fonctions isotropes (*suite*). — Nouveau Mémoire sur les douze équations qui déterminent les mouvements de translation, de rotation et de dilatation de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. — Théorèmes divers sur les fonctions différentielles et sur les valeurs moyennes des fonctions. — Mémoire sur le mouvement d'un système de molécules. — Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps, et, en particulier, sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. — Mémoire sur de nouveaux théorèmes relatifs aux valeurs moyennes des fonctions, et sur l'application de ces théorèmes à l'intégration des équations aux dérivées partielles que presente la Mécanique moléculaire. — Rapport sur un Mémoire de M. *Laurent*, relatif aux équations d'équilibre et de mouvement d'un système de sphéroïdes sollicités par des forces d'attraction et de répulsion mutuelles. — Démonstration et application d'une formule qui permet de résoudre d'importantes questions d'Analyse et de Physique mathématique. — Sur la surface caracteristique et la surface des ondes — Sur la surface mobile dont l'équation est de la forme $h + x(x - a) + y(y - b) + z(z - c) = \frac{1}{2}t^2$. — Intégration générale des équations homogènes, linéaires et à coefficients constants, d'un ordre quelconque, et intégration spéciale de l'équation $F(D_t, D_x, D_y, D_z)\varpi = 0$. — Démonstration d'un théorème fondamental relatif à la surface des ondes. — Intégration générale de l'équation homogène du second ordre $D_t^2\varpi = F(D_x, D_y, D_z, \ldots)\varpi$. — Sur la fonction appelée *principale* dans les recherches présentées à la dernière séance. — Détermination d'une intégrale singulière. — Intégration générale de l'équation $F(D_t, D_x, D_y, D_z, \ldots)\varpi = 0$. — Explication des contradictions qui se manifestent entre les intégrales par séries des équations différentielles, ou aux dérivées partielles, et leurs intégrales en termes finis. — Sur la fonction principale assujettie à vérifier l'équation $F(D_t, D_x, D_y, D_z, \ldots)\varpi = 0$. — Sur une intégrale particulière. — Sur la transformation d'une fonction $\varpi(x, y, z, \ldots)$ en une intégrale. — Démonstration d'un théorème de Calcul intégral. — Application du théorème établi dans la Note précédente. — Sur une fonction $\Pi(r)$ de la variable r liée aux m variables $x, y, z, \ldots$ par l'équation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots$. — Sur l'équation linéaire et de l'ordre n : $F(D_t, D_x, D_y, D_z, \ldots)\varpi = 0$. — Sur une transformation de l'intégrale obtenue dans le Mémoire précédent. — Application de cette intégrale au cas où l'équation donnée devient isotrope. — Application de la formule donnée dans la séance du 30 octobre à un cas particulier. — Démonstration d'une formule relative à la Note précédente. — Sur une intégrale particulière. — Application des formules données dans la Note précédente à la délimitation des intégrales des équations homogènes. — Mémoire sur les fonctions discontinues. — Application des principes établis dans le Mémoire précédent à l'intégration de l'équation homogène $F(D_t, D_x, D_y, D_z, \ldots)\varpi = 0$. — Détermination générale de la fonction principale qui vérifie l'équation homogène. — La dérivée de l'ordre $n - 2$ de la fonction principale sera généralement nulle, en dedans de la plus petite nappe. — Démonstration de plusieurs théorèmes généraux d'Analyse et de Calcul intégral. — Sur les coefficients limitateurs considérés comme valeurs particulières de fonctions continues d'une ou de plusieurs variables. — Sur les équations auxquelles on est conduit en cherchant à résoudre les problèmes les plus généraux d'Analyse ou de Calcul intégral. — Sur les phénomènes représentés par les intégrales des équations discontinues, et en particulier sur les *ondes planes que représentent les intégrales en termes finis des équations* discontinues aux dérivées partielles. — Sur le développement en série des intégrales des équations discontinues. — Sur les diverses formes qu'on peut assigner au *limitateur* l_x. — Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles $D_t^2 8 = (a^2 \mathrm{l}_{-x} + b^2 \mathrm{l}_x) D_x^2 8$. — Sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement, et en particulier sur les vibrations de l'éther dans un corps solide ou fluide dont chaque molécule est considérée comme un système d'atomes. — Sur les fonctions *isotropes* de plusieurs systèmes coordonnées rectangulaires, et spécialement sur celles de ces fonctions qui sont en même temps *hémitropes*, et qui changent de signe avec les coordonnées parallèles à un seul axe. — Sur les actions ternaires, ou, en d'autres termes, sur les modifications que l'action mutuelle de deux atomes peut subir en présence d'un troisième atome. — Sur les lois de la polarisation des rayons lumineux dans les cristaux à un ou à deux axes optiques. — Sur les trois espèces de rayons lumineux qui correspondent aux mouvements *simples* du fluide éthéré. — Mécanique moléculaire. — Note sur les rayons lumineux simples et sur les rayons évanescents. — Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière, et sur de nouveaux rayons réfléchis et réfractés. — Rapport concernant un Mémoire de M. *Jamin* sur la réflexion de la lumière à la surface des corps transparents. — Détermination simultanée de l'indice de réfraction d'une lame ou plaque transparente, et de l'angle compris entre deux surfaces planes qui terminent cette plaque. — Mémoire sur les fonctions discontinues. — Mémoire sur les rayons réfléchis et réfractés par des lames minces et sur les anneaux colorés. — Recherches nouvelles sur les séries et sur les approximations des fonctions de très grands nombres. — Mémoire sur l'intégration d'un système quelconque d'équations différentielles, et, en particulier, de celles qui représentent les mouvements planétaires. — Suite des recherches sur l'intégration d'un système d'équations différentielles, et transformation remarquable de l'intégrale générale de l'équation caractéristique. — Rapport sur un Mémoire de M. *Bravais* relatif à certains systèmes ou assemblages de points matériels. — Sur les quantités géométriques, et sur une méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques de degré quelconque. — Mémoire sur quelques théorèmes dignes de remarque, concernant les valeurs moyennes des fonctions de trois variables indépendantes. — Rapport sur un Mémoire de M. *Roche*, relatif aux figures ellipsoïdales qui conviennent à l'équilibre d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné. — Mémoire sur les intégrales continues et les intégrales discontinues des équations différentielles ou aux dérivées partielles. — Application des principes établis dans la séance précédente à la recherche les intégrales qui représentent les mouvements infiniment petits des corps homogènes, et spécialement les mouvements par ondes planes. — Mémoire sur les systèmes d'équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles, à coefficients périodiques, et sur les intégrales élémentaires de ces mêmes équations. — Mémoire sur les vibrations infiniment petites des systèmes de points matériels. — Démonstration simple de cette proposition que, dans un rayon de lumière polarisé rectilignement, les vibrations des molécules sont perpendiculaires au plan de polarisation. — Suite des recherches sur l'intégration des équations linéaires à coefficients périodiques. — Mémoire sur les vibrations d'un double système de molécules et de l'éther contenu dans un corps cristallisé. — Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels. — Recherches sur les mouvements vibratoires des systèmes de molécules, et sur la théorie de la lumière. — Mémoire sur les perturbations produites dans les mouvements vibratoires d'un système de molécules par l'influence d'un système. — Mémoire sur la propagation de la lumière dans les milieux isophanes. — M. *Augustin Cauchy* dépose sur le Bureau un exemplaire du Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels, qui doit paraître prochainement dans le Recueil des *Mémoires de l'Académie*. — Mémoire sur les vibrations de l'éther dans les milieux qui sont isophanes par rapport à une direction donnée. — Note sur la différence de marche entre les deux rayons lumineux qui émergent d'une plaque doublement réfringente à faces parallèles. — Sur les fonctions dont les développements en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable satisfont à certaines conditions dignes de remarque. — Rapport sur un Mémoire relatif au développement de l'exponentielle e^x en produit continu; par M. *Fedor Thoman*. — Mémoire sur la décomposition des fonctions en facteurs. — Rapport sur un Mémoire intitulé : Méthode pour calculer les éléments des planètes, ou, plus généralement, des astres dont les orbites sont peu inclinées à l'écliptique, fondée sur l'emploi des dérivées, relatives au temps, des trois premiers ordres de la longitude géocentrique et du premier ordre de la latitude; par M. *Yvon Villarceau*. — Note sur l'intensité de la lumière dans les rayons réfléchis par la surface d'un corps transparent ou opaque. — Rapport sur une Note relative aux anneaux colorés de Newton; par MM. *F. de la Provostaye* et *Paul Desains*. — Mémoire sur un système d'atomes isotrope autour d'un axe, et sur les deux rayons lumineux que propagent les cristaux à un axe optique. — Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière à la surface extérieure d'un corps transparent qui décompose un rayon simple doué de la polarisation rectiligne, en deux rayons polarisés circulairement en sens contraires. — Rapport sur un Mémoire de M. *Jamin*, relatif à la double réfraction elliptique du quartz. — Sur les rayons de lumière réfléchis et refractés par la surface d'un corps transparent. — Sur les rayons de lumière réfléchis et réfractés par la surface d'un corps transparent et isophane. — Mémoire sur la réflexion et la réfraction des rayons lumineux à la surface extérieure ou intérieure d'un cristal. — Détermination des trois coefficients qui, dans la réflexion et la réfraction opérées par la surface extérieure d'un cristal, dépendent des rayons évanescents. — Mémoire sur les équations différentielles du mouvement de l'éther dans les cristaux à un et à deux axes optiques. — Mémoire sur la réflexion et la réfraction opérées par la surface extérieure d'un cristal à un ou deux axes optiques. — M. *Augu tin Cauchy* depose sur le Bureau un exemplaire de son Mémoire sur les lois de la réflexion et de la réfraction opérées par la surface extérieure d'un cristal à un ou à deux axes optiques. — Mémoire sur un nouveau phénomène de réflexion. — Note relative aux rayons réfléchis sous l'incidence principale, par la surface extérieure d'un cristal à un axe optique (communication verbale). — Note sur la réflexion d'un rayon de lumière polarisée à la surface extérieure d'un corps transparent. — Note sur les vibrations transversales de l'éther et sur la dispersion des couleurs. — Mémoire sur les fonctions irrationnelles. — Suite des recherches sur les fonctions rationnelles et sur leurs intégrales définies. — Sur les fonctions de variables imaginaires. — Addition au Mémoire sur les fonctions irrationnelles, et sur leurs intégrales définies. — Mémoire sur l'application du Calcul des résidus à plusieurs questions importantes d'Analyse. — Mémoire sur l'application du Calcul des résidus à la décomposition des fonctions transcendantes en facteurs simples. — Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M. *Puiseux* et intitulé : *Recherches sur les fonctions algébriques*. — Rapport sur un Mémoire présenté par M. *Bravais,* et intitulé : *Études sur la Cristallographie*. — Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides. — Rapport sur divers Mémoires de M. *Wertheim*. — Application du Calcul des résidus à la décomposition des fonctions transcendantes en facteurs simples (*suite*). — Mémoire sur la sommation des termes de rang très élevé dans une série simple ou multiple. — Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M. *Hermite,* et relatif aux fonctions à double période. — Note relative aux observations présentées à l'Académie par M. *Liouville*. — Sur les fonctions monotypiques et monogènes. — Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M. *Puiseux,* et intitulé : *Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques*. — Rapport sur un travail présenté à l'Académie par M. *Koralek,* et relatif aux logarithmes des nombres. — Conditions sous lesquelles subsistent les principales formules du Calcul des résidus. — Sur les valeurs principales et générales des intégrales curvilignes, dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ devient infinie en un point de la portion de courbe donnée. — Sur le module principal du rapport $\frac{\Pi(t+z)}{z}$. — Méthode nouvelle pour la détermination des mouvements des corps célestes. — Développement des fonctions en séries limitées. — Mémoire sur le développement des quantités en séries limitées. — Mémoire sur le développement des quantités en série limitées (*suite*). — Sur les restes qui complètent les séries limitées. — Sur le changement de variable indépendante dans les moyennes isotropiques. — Mémoire sur l'application du Calcul infinitésimal à la détermination des fonctions implicites. — Rapport sur de nouvelles recherches relatives à la série de Lagrange, et présentées à l'Académie par M. *Félix Chio,* de Turin. — Sur la série de Lagrange, et sur la règle de convergence que Lagrange a énoncé dans les *Mémoires de Berlin* de 1768 — Sur le module principal du rapport $\frac{f(k+z)}{z}$, k étant une constante positive, et $f(z)$ une somme de termes proportionnels à diverses puissances de z. — Sur les équations trinômes. — Nouvelle méthode pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, sous des conditions données relatives aux limites des corps. — Nouvelles recherches relatives à l'intégration des équations aux dérivées partielles, sous des conditions données. — Nouvelles recherches où les principes établis dans les Mémoires précédents sont particulièrement appliqués à la théorie des calorifères cylindriques. — Sur plusieurs nouveaux théorèmes d'Analyse algébrique. — Sur le mouvement de rotation d'un corps solide et, en particulier, d'un corps pesant autour d'un point fixe. — Suite des recherches sur la rotation d'un corps solide et en particulier d'un corps pesant autour d'un point fixe. — Sur les clefs algébriques.

Table des matières du Tome XII (Ire Série).

Sur la théorie des moments linéaires et sur les moments linéaires des divers ordres. — Sur les clefs algébriques (*suite*). — Sur les avantages que présente, dans un grand nombre de questions, l'emploi des clefs algébriques. — Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. — Mémoire sur l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations approximatives du premier degré. — Mémoire sur les différentielles et les variations employées comme clefs algébriques. — Suite du Mémoire sur les différentielles et les variations employées comme clefs algébriques. — Mémoire sur l'interpolation, ou remarques sur les remarques de M. *Jules Bienaymé*. — Sur la nouvelle méthode d'interpolation comparée à la méthode des moindres carrés. — M. *Augustin Cauchy* présente encore à l'Académie : 1° Un Mémoire sur les variations constantes arbitraires que comprennent les intégrales des équations différentielles considérées dans un article précédent, et sur les avantages qu'offre l'emploi des clefs algébriques pour déterminer complètement ces variations, lorsque la fonction dont les équations différentielles renferment les dérivées se réduit à une fonction des deux sommes $x^2+y^2+z^2+\ldots$, $u^2+v^2+w^2+\ldots$; 2° Un Mémoire sur le Calcul des probabilités. — Mémoire sur les coefficients limitateurs ou restricteurs. — Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables. — Sur la probabilité des erreurs qui affectent des résultats moyens d'observations de même nature. — M. *Augustin Cauchy* lit un Mémoire ayant pour titre : Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le système de facteurs qui rend cette grande erreur un minimum. — Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le système de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimum (Mémoire présenté dans la précédente séance). — Mémoire sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations. — M. *Augustin Cauchy* présente à l'Académie des considérations nouvelles sur les mouvements infiniment petits des corps considérés comme des systèmes d'atomes, et sur la réflexion et la réfraction des mouvements simples. — Sur les rayons vecteurs associés et sur les avantages que présente l'emploi de ces rayons vecteurs dans la Physique mathématique. — M. *Augustin Cauchy* présente à l'Académie des recherches nouvelles sur la torsion des prismes. — Sur la torsion des prismes. — Rapport sur un Mémoire de M. *Marie*, relatif aux périodes des intégrales. — Sur la transformation des fonctions implicites en moyennes isotropiques, et sur leurs développements en séries trigonométriques. — Formules générales pour la transformation des fonctions implicites en fonctions explicites. — Application des formules établies dans le précédent Mémoire à la solution des problèmes astronomiques. — Sur la transformation des variables qui déterminent les mouvements d'une planète ou même d'une comète en fonction explicite du temps, et sur le développement de ces fonctions en séries convergentes. — Sur les services que la spirale logarithmique peut rendre à l'Astronomie. — Sur la résolution des équations et sur le développement de leurs racines en séries convergentes. — Sur une formule de M. *Anger* et sur d'autres formules analogues. — Sur l'induction en Analyse et sur l'emploi des formules symboliques. — Sur les intégrales aux différences finies. — Sur un théorème général qui fournit immédiatement, dans un grand nombre de cas, des limites entre lesquelles une série simple ou multiple demeure convergente. — M. *Augustin Cauchy* présente à l'Académie une Note sur l'application du Calcul des variations à l'intégration d'un système d'équations différentielles. — Sur les avantages que présente l'introduction d'un paramètre variable et des notations propres au Calcul des variations dans quelques-unes des principales formules de l'Analyse infinitésimale. — Note sur les conditions de convergence des séries qui représentent les intégrales générales d'un système d'équations différentielles. — Addition à la Note insérée dans le dernier *Compte rendu*. — Sur la nature des intégrales d'un système d'équations différentielles de premier ordre. — Sur la distinction et sur la représentation des fonctions continues et discontinues. — Sur les rapports différentiels des quantités géométriques, et sur les intégrales synectiques des équations différentielles. — Sur la recherche des intégrales monodromes et monogènes d'un système d'équations différentielles. — Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par MM. *Briot* et *Bouquet*, et intitulé : Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles. — Rapport su[r] [d]eux Mém[o]ires de M. *Pierre-Alphonse Laurent*, chef de bataillon du Génie [—] Mémoir[e] sur les variations intégrales des fonctions. — Sur les variations intégrales des fonctions (*suite*). — Sur les variations intégrales des fonctions (*suite*). — Sur la transformation des fonctions implicites en fonctions monodromes et monogènes, et sur les développements de ces fonctions en séries convergentes. — Sur les compteurs logarithmiques. — Sur le dénombrement des racines qui, dans une équation algébrique ou transcendante, satisfont à des conditions données. — Considérations nouvelles sur les résidus. — Sur une formule très simple et très générale qui résout immédiatement un grand nombre de problèmes d'Analyse déterminée et d'Analyse indéterminée. — Note sur un théorème de M. Puiseux — Sur les fonctions monodromes et monogènes. — Rapport sur un Mémoire de MM. *Briot* et *Bouquet*. — Sur la théorie des fonctions. — Méthode nouvelle pour l'intégration d'un système d'équations différentielles. — Sur les produits symboliques et les fonctions symboliques. — Sur la transformation des fonctions symboliques en moyennes isotropiques. — Sur l'intégration définie d'un système d'équations différentielles. — Observations de M. *Augustin Cauchy* sur une Note publiée dans le *Compte rendu* de la dernière séance de M. *Catalan*. — Remarques faites à propos des observations présentées par M. *Joseph Bertrand* sur un Mémoire de M. *Ostrogradski*. — Note sur les variations brusques de vitesses dans un système de points matériels. — Observations sur la Note insérée par M. *Cauchy* dans le *Compte rendu* de la dernière séance, par M. *Duhamel*. — Recherches nouvelles sur la théorie des nombres. — Mémoire sur le choc des corps élastiques, présenté à l'Académie le 19 février 1827. — Sur les compteurs logarithmiques appliqués au dénombrement et à la séparation des racines des équations transcendantes. — Sur la résolution des équations algébriques. — Sur les fonctions quadratiques et homogènes de plusieurs variables. — Note sur les résultantes anastrophiques. — Théorie nouvelle des résidus. — Addition au Mémoire sur les fonctions quadratiques et homogènes. — Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles. — M. *Augustin Cauchy* présente à l'Académie la suite de ses recherches sur l'intégration d'un système d'équations différentielles. — Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles, et spécialement de ceux qui expriment les mouvements des astres. — Sur les avantages que présente l'emploi des régulateurs dans l'Analyse mathématique. — Méthode nouvelle pour la détermination des mouvements des astres. — Sur l'emploi des régulateurs en Astronomie.

IIe SÉRIE.

Table des Matières du Tome I (IIe Série).

Mémoires extraits du « Journal de l'École Polytechnique ».

Recherches sur les polyèdres (Premier Mémoire). — Sur les polygones et les polyèdres (Second Mémoire). — Recherches sur les nombres. — Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme. — Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. — Mémoire sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques. — Sur les racines imaginaires des équations. — Mémoire sur une espèce particulière du mouvement des fluides. — Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles et à coefficients constants. — Mémoire sur le système de valeurs qu'il faut attribuer à divers éléments déterminés par un grand nombre d'observations, pour que la plus grande de toutes les erreurs, abstraction faite du signe, devienne un maximum. — Mémoire sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux différences partielles et sur les phénomènes dont cette intégration fait connaître les lois dans les questions de Physique mathématique. — Calcul des indices des fonctio s. — Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies et sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espèce.

Table des Matières du Tome III (IIe Série).

Analyse algébrique.

NOTES SUR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

Table des matières du Tome IV (IIe Série).

tielles totales pour les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Valeurs symboliques de ces différentielles. — Relations qui existent entre les fonctions d'une seule variable et leurs dérivées ou différentielles des divers ordres. Usage de ces différentielles dans la recherche des maxima et minima. — Usage des différentielles des divers ordres dans la recherche des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables. — Des conditions qui doivent être remplies pour qu'une différentielle totale ne change pas de signe, tandis que l'on change les valeurs attribuées aux différentielles des variables indépendantes. — Différentielles d'une fonction quelconque de plusieurs variables dont chacune est à son tour une fonction linéaire d'autres variables supposées indépendantes. Décomposition des fonctions entières en facteurs réels du premier ou du second degré. — Usage des dérivées et des différentielles des divers ordres dans le développement des fonctions entières. — Décomposition des fractions rationnelles. — *Calcul intégral.* — Intégrales définies. — Formules pour la détermination des valeurs exactes ou approchées des intégrales définies. Décomposition d'une intégrale définie en plusieurs autres. Intégrales définies imaginaires. Représentation géométrique des intégrales définies réelles, de la fonction sous le signe $\int$ en deux facteurs, dont l'un conserve toujours le même signe. — Des intégrales définies dont les valeurs sont infinies ou indéterminées. Valeurs principales des intégrales indéterminées. — Intégrales définies singulières. — Intégrales indéfinies. — Propriétés diverses des intégrales indéfinies. Méthodes pour déterminer les valeurs de ces mêmes intégrales. — Sur les intégrales indéfinies qui renferment des fonctions algébriques. — Sur l'intégration et la réduction des différentielles binomes, et de quelques autres formules différentielles du même genre. — Sur les intégrales indéfinies qui renferment des fonctions exponentielles, logarithmiques ou circulaires. — Sur la détermination et la réduction des intégrales indéfinies, dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ est le produit de deux facteurs égaux à certaines puissances du sinus et du cosinus de la variable. — Sur le passage des intégrales indéfinies aux intégrales définies. — Différentation et intégration sous le signe $\int$. Intégration des formules différentielles qui renferment plusieurs variables indépendantes. — Comparaison des deux espèces d'intégrales simples qui résultent dans certains cas d'une intégration double. — Différentielle d'une intégrale définie par rapport à une variable comprise dans la fonction sous le signe $\int$, et dans les limites de l'intégration. Intégrales des divers ordres pour les fonctions d'une seule variable. — Transformation de fonctions quelconques de x ou de $x+h$ en fonctions entières de x ou de h auxquelles s'ajoutent des intégrales définies. Expressions équivalentes à ces mêmes intégrales. — Théorèmes de Taylor et de Maclaurin. Extension de ces théorèmes aux fonctions de plusieurs variables. — Règles sur la convergence des séries. Application de ces règles à la série de Maclaurin. — Des exponentielles et des logarithmes imaginaires. Usage de ces exponentielles et de ces logarithmes dans la détermination des intégrales, soit définies, soit indéfinies. — Intégration par séries. — Sur les formules de Taylor et de Maclaurin.

Leçons sur le Calcul différentiel. — Avertissement. — Des variables, de leurs limites et des quantités infiniment petites. Des fonctions continues et discontinues, explicites ou implicites, simples ou composées, etc. Des séries convergentes ou divergentes. — Objet du Calcul différentiel. Dérivées et différentielles des fonctions d'une seule variable. — La différentielle de la somme de plusieurs fonctions est la somme de leurs différentielles. Conséquences de ce principe. Différentielles des fonctions imaginaires. — Différentielles et dérivées des divers ordres pour les fonctions d'une seule variable. Changement de la variable indépendante. — Relations qui existent entre les fonctions réelles d'une seule variable et leurs dérivées ou différentielles des divers ordres. — Détermination des valeurs que prennent les fonctions réelles d'une seule variable quand elles se présentent sous les formes indéterminées $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\times\pm\infty$, 0^0, $1^{\pm\infty}$, etc. — Sur les dérivées des fonctions qui représentent des quantités infiniment petites. — Sur les maxima et minima des fonctions réelles d'une seule variable. — Développement d'une fonction réelle de x suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x, ou de la différence $x-a$, dans laquelle a désigne une valeur particulière de cette variable. — Théorèmes de Maclaurin et de Taylor. — Règles sur la convergence des séries. Application de ces règles aux séries de Maclaurin et de Taylor. — Des valeurs que prennent les fonctions d'une seule variable x, quand cette variable devient imaginaire. — Différentielles et dérivées des divers ordres pour les fonctions d'une variable imaginaire. — Relations qui existent entre les fonctions d'une variable imaginaire x et leurs dérivées ou différentielles des divers ordres. Développements de ces fonctions suivant les puissances ascendantes de x, ou de la différence $x-a$, dans laquelle a désigne une valeur particulière de x. — Sur la résolution des équations algébriques et transcendantes. Décomposition des fonctions entières en facteurs réels du premier ou du second degré. — Développement d'une fonction de x, qui devient infinie pour $x=a$, suivant les puissances ascendantes de $x-a$. Décomposition des fractions rationnelles. — Différentielles des fonctions de plusieurs variables Dérivées partielles et différentielles partielles. — Usage des dérivées partielles dans la différentiation des fonctions composées. Différentielles des fonctions implicites. Théorème des fonctions homogènes. — Différentielles des divers ordres pour les fonctions de plusieurs variables. — Méthodes propres à simplifier la recherche des différentielles totales pour les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Valeurs symboliques de ces différentielles. — Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables. — Des conditions qui doivent être remplies pour qu'une différentielle totale ne change pas de signe tandis que l'on change les valeurs attribuées aux différentielles des variables indépendantes. — Usage des facteurs indéterminés dans la recherche des maxima et minima. — Développements des fonctions de plusieurs variables. Extension du théorème de Taylor à ces mêmes fonctions. — Note sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou transcendante.

Table des Matières du Tome V (II^e Série).

Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal a la Géométrie. — Avertissement. — Préliminaires. Revue de quelques formules de Géométrie analytique. — *Calcul différentiel.* — Inclinaison d'une courbe plane en un point donné. Équations de la tangente et de la normale à cette courbe. — Des longueurs appelées sous-tangentes, sous-normales, tangentes et normales des courbes planes. — Centres, diamètres, axes et asymptotes des courbes planes. — Propriétés diverses des courbes planes déduites des équations de ces mêmes courbes. Points singuliers. — Différentielle de l'arc d'une courbe plane. Angles formés par la tangente à cette courbe avec les demi-axes des coordonnées positives. Sur les courbes planes qui se coupent ou se touchent en un point donné. — De la courbure d'une courbe plane en un point donné. Rayon de courbure, centre de courbure et cercle osculateur. — Détermination analytique du centre de courbure d'une courbe plane. Théorie des développées et des développantes. — Sur les courbes planes qui sont osculatrices l'une de l'autre en un point donné. — Sur les divers ordres de contact des courbes planes. — Sur les diverses espèces de contact que peuvent offrir deux courbes planes représentées par deux équations dont l'une renferme des constantes arbitraires. Point de contact dans lesquels deux courbes se traversent en se touchant. — Sur l'usage que l'on peut faire des coordonnées polaires pour exprimer ou pour découvrir diverses propriétés des courbes planes. — Usage des coordonnées polaires pour la détermination de l'inclinaison, de l'arc, du rayon de courbure, etc. d'une courbe plane. — De la tangente et des plans tangents, des normales et du plan normal à une courbe quelconque en un point donné. Asymptotes et points singuliers des courbes tracées dans l'espace. — Des plans tangents et des normales aux surfaces courbes. — Centres et diamètres des surfaces courbes et des courbes tracées dans l'espace. Axes des surfaces courbes. — Différentielle de l'arc d'une courbe quelconque. Sur les courbes et les surfaces courbes qui se coupent ou se touchent en un point donné. — Du plan osculateur d'une courbe quelconque et de ses deux courbures. Rayon de courbure, centre de courbure et cercle osculateur. — Détermination analytique du centre de courbure d'une courbe quelconque Sur les développees d'une courbe quelconque, et sur la surface qui est le lieu géométrique de ces développées. Sur les courbes qui sont osculatrices l'une de l'autre en un point donné. — Rayons de courbure des sections faites dans une surface par des plans normaux. Rayons de courbure principaux Des sections dont les courbes sont nulles, dans le cas où les rayons de courbure principaux sont dirigés en sens contraires. — Rayons de courbure des différentes courbes que l'on peut tracer sur une surface donnée. Des surfaces qui sont osculatrices l'une de l'autre en un point qui leur est commun. — Sur les divers ordres de contact des courbes tracées dans l'espace. — Sur les divers ordres de contact des surfaces courbes. — *Calcul intégral.* — Rectification des courbes planes ou à double courbure. — Quadrature des surfaces planes. — Quadrature des surfaces courbes. — Cubature des solides.

Table des Matières du Tome VI (IIe Série).

Table des Matières du Tome VII (IIe Série).

tiples. Sur l'analogie des puissances et des différences. Addition à l'article précedent. Sur la transformation des fonctions qui représentent les intégrales générales des équations différentielles linéaires. Sur la convergence des séries. Sur la valeur de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx$, a, b, c désignant des constantes réelles ou imaginaires. Sur quelques propositions fondamentales du *calcul des résidus. Sur le développement des fonctions* d'une seule variable en fractions rationnelles. Usage du calcul des résidus pour la sommation ou la transformation des séries dont le terme général est une fonction paire du nombre qui représente le rang de ce terme. Sur un Mémoire d'Euler, qui a pour titre *Nova methodus fractiones quascumque rationales in fractiones simplices resolvendi.* Méthode pour développer des fonctions d'une ou de plusieurs variables en séries composées de fonctions de même espèce. Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies.

Table des Matières du Tome VIII (IIe Série)

Sur les centres, les plans principaux et les axes principaux des surfaces du second degré. Des surfaces que peuvent engendrer, en se mouvant dans l'espace, des *lignes* droites ou courbes de forme constante ou variable. Discussion des lignes et des surfaces du second degré. Sur la division d'une masse solide ou fluide en couches homogènes. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement des fluides. Sur les différences finies des puissances entières d'une seule variable. Sur les intégrales aux différences finies des puissances entières d'une seule variable. Sur les différences finies et les intégrales aux différences des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique. Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de *répulsion mutuelle*. De la pression ou tension dans un système de points matériels. Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation ou à la dilatation des corps. Sur l'équilibre et le mouvement d'une *lame solide*. Addition à l'article précédent. Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide. Sur l'équilibre et le mouvement d'une verge rectangulaire.

Table des Matières du Tome IX (IIe Série).

Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque élastique dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens. Sur l'équilibre et le mouvement d'une verge rectangulaire extraite d'un corps solide dont l'élasticité n'est pas la même en tous sens. Sur les pressions ou tensions supportées en un point donné d'un corps solide par *trois plans perpendiculaires* entre eux. Sur la relation qui existe entre les pressions ou tensions supportées par deux plans quelconques en un point donné d'un corps solide. Sur les vibrations longitudinales d'une verge cylindrique ou prismatique à base quelconque. Sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire. Sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination. Sur les équations différentielles d'équilibre ou de mouvement pour un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes. Sur la détermination du résidu intégral de quelques fonctions. Usages du calcul des résidus pour *l'évaluation ou la transformation* des produits composés d'un nombre fini ou infini de facteurs. Sur les corps solides ou fluides dans lesquels la condensation ou dilatation linéaire est la même en tous sens autour de chaque point. Sur diverses propositions relatives à l'Algèbre et à la théorie des nombres. Sur la résolution des équivalences dont les modules se réduisent à des nombres premiers. Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues. Sur la transformation et la réduction d'une certaine classe d'intégrales. Applications des formules qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle à la théorie de la lumière.

Table des Matières du Tome X (IIᵉ Série).

Résumés analytiques de Turin.

Avertissement. Sur les nombres figurés. Développement du produit de plusieurs binomes, ou d'une puissance entière et positive de l'un d'entre eux; théorème de Fermat sur les nombres premiers. Des variables et des fonctions en général, et, en particulier, des fonctions entieres d'une seule variable. Relations qui existent entre les coefficients des puissances entières et positives d'un binome. Résolutions de plusieurs équations simultanées du premier degré. Formules d'interpolation. Des séries convergentes et divergentes, et, en particulier, de celles qui représentent les développements des puissances entières et négatives d'un binome. Développements des exponentielles e^x, A^x. Des séries doubles ou multiples. Nombres de Bernoulli. Sommation des puissances entières des nombres naturels. Volume d'une pyramide à base quelconque. Formules pour l'évaluation des logarithmes. Développement du logarithme d'un binome. Développement d'une puissance quelconque d'un binome. Trigonométrie. Des expressions imaginaires et de leurs modules. Des séries imaginaires. Des exponentielles imaginaires. Développements des fonctions $\cos x$, $\sin x$. Relations qui existent entre les sinus ou cosinus des multiples d'un arc et les puissances entières des sinus et cosinus du même arc. Sommation des sinus ou cosinus d'une suite d'arcs représentée par les différents termes d'une progression arithmétique. Relations qui existent entre le périmètre d'un polygone plan et les sommes des projections des éléments de ce périmètre sur diverses droites. Rectifications des courbes planes. Sur les puissances fractionnaires, ou irrationnelles, ou négatives d'une expression imaginaire. Résolution des équations binomes et de quelques équations trinomes. Logarithmes des expressions imaginaires, et logarithmes imaginaires des quantités réelles. Des séries imaginaires doubles ou multiples. Développements des fonctions $l(1+x)$, $L(1+x)$, $(1+x)^{\mu}$ dans le cas où la variable x devient imaginaire.

Nouveaux Exercices de Mathématiques (Exercices de Prague).

Préface et avis au lecteur. Considérations générales. Équations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Intégration des équations établies dans le paragraphe précédent. Application des formules précédentes à la théorie de la lumière. Propagation des ondes lumineuses dans un milieu où l'élasticité reste la même en tous sens. Sur la réfraction de la lumière. Applications numériques. Suite des applications numériques. Remarques sur les résultats obtenus dans les paragraphes précédents. Sur la propagation de la lumière dans les milieux où sa vitesse reste la même pour toutes les couleurs. Considérations nouvelles sur la réfraction de la lumière. Sur la relation qui existe entre la vitesse de propagation de la lumière et l'épaisseur des ondes lumineuses. Sur les résultats que fournit l'approximation du premier ordre.

Table des Matières du Tome XI (IIᵉ Série)

Mémoires sur les mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Notes sur les sommes formées par l'addition de fonctions semblables des coordonnées de différents points. Note sur la transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires. Note sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires. Mémoire sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires. Mémoire sur les mouvements infiniment petits dont les équations présentent une forme indépendante de la direction des trois axes coordonnés, supposés rectangulaires, ou seulement de deux de ces axes. Mémoires sur la réflexion et la réfraction d'un mouvement simple transmis d'un système de molécules à un autre, chacun de ces deux systèmes étant supposé homogène et tellement constitué que la propagation des mouvements infiniment petits s'y effectue en tous sens suivant les mêmes lois. Mémoire sur la transformation et la réduction des intégrales générales d'un système d'équations linéaires aux différences partielles. Mémoire sur les rayons simples qui se propagent dans un système isotrope de molécules et sur ceux qui se trouvent réfléchis ou réfractés par la surface de séparation de deux semblables systèmes. Sur les relations qui existent entre l'azimut et l'anomalie d'un rayon simple doué de la polarisation elliptique. Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence. *Mémoire sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système isotrope de points matériels.* Mémoire sur l'intégration des équations différentielles. Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques.

Abréviations.

Dans les publications de l'académie des sciences de Paris, H signifie Histoire M. signifie mémoires.

I_3 = renvoi au tome premier; troisième volume.

(I 2, 19) = renvoi au tome premier, article 2, numéro 19.

Dans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du même article.

(2) 8 (1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième *série*, tome ou volume 8, *année* 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

La transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

En particulier *č* se prononce *tch*, *c* se prononce *tz*, *š* se prononce *comme ch* dans *chat*, *ž* se prononce comme notre *j* dans *je*, *j* se prononce comme notre *y* dans *essayer*.

Abh. = Abhandlungen.
Acad. = Academie.
Accad. = Accademia.
Akad. = Akademie.
Alg. = Algèbre, Algebra.
Allg. = Allgemeine.
Amer. = American.
Ann. = Annalen, Annales, Annali.
Anw. = Anwendung.
appl. = appliqué.
arit. = aritmetica.
arith. = Arithmetik, arithmétique.
assoc. = association.
Aufs. = Aufsätze.
Avanc. = Avancement.
Ber. = Berichte.
Bibl. Congrès = bibliothèque du Congrès.
Bibl. math. = Bibliotheca mathematica.
Brit. = British.
Bull. = Bulletin.
Bull. bibl. = Bulletino bibliografico.
cah. = cahier.
Cambr. = Cambridge.
car. = carton.
cf. = comparez.
chap. = chapitre.
chim. = chimie, chimique.
circ. = circolo.
circul. = circular.
col. = colonne.
Comm. = Commentarii.
Commentat. = Commentationes.
Corresp. = Correspondance.
C. R. = Comptes rendus.
déf. = définition.
Denkschr. = Denkschriften.
Diss. = Dissertation.
Ec. = Ecole.
éd. = édité à, édité par, édition.
Edinb. = Edinburgh.
Educ. = Educational.
elem. = elementare.
élém. = élémentaire.
ex. = exemple.
extr. = extrait.
fasc. = fascicule.
fig. = figure.
fis. = fisica.
fol. = folio.
Géom. = Géométrie.
Ges. = Gesellschaft.
Gesch. = Geschichte.
Giorn. = Giornale.
Gött. = Göttingen, Göttingue.
Gymn. = Gymnasium.
Hist. = Histoire.
id. = idem, ibidem.
imp. = imprimé.
inscr. = inscription.
inst. = institution.
interméd. = intermédiaire.
intern. = international.
introd. = introduction.
Ist. = Istituto.
J. = Journal.
Jahresb. = Jahresbericht.
Lehrb. = Lehrbuch.
Leop. = Leopoldina.
Lpz., Lps. = Leipzig.
Mag. = Magazine.
Méc. = Mécanique.
med. = medicinisch.
Mém. = Mémoire.
métaph. = métaphysique.
Mitt. = Mitteilung.
Monatsh. = Monatshefte.
Monatsb. = Monatsberichte.
ms., mss. = manuscrit, manuscrits.
Nachr. = Nachrichten.
nat. = naturelle.
naturf. = naturforschende.
naturw. = naturwissenschaftlich.
norm. = normale.
nouv. = nouveau, nouvelle.
num. = numérique.
numism. = numismatique.
Op. = Opera.
Opusc. = Opuscule.
Overs. = Oversight.
p. = page.
p. ex., par ex. = par exemple.
partic. = particulier.
Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
philol. = philologie.
philom. = philomathique.
philos. = philosophique.
phys. = physique.
pl. = planche.
polyt. = polytechnique.
pontif. = pontificia.
posth. = posthume.
Proc. = Proceeding.
progr. = programme.
prop. = proposition.
publ. = publié.
Quart. = Quarterly.
R. = reale, royal.
Recent. = Recentiores.
Rendic. = Rendiconto.
réimp. = réimprimé.
sc. = sciences.
Schr. = Schriften.
scient. = scientifique.
s. d. = sans date.
sect. = section.
Selsk. = Selskabs.
sign. = signature.
Sitzgsb. = Sitzungsberichte.
s. l. = sans lieu.
spéc. = spéciale.
suiv. = suivante.
sup. = supérieure.
suppl. = supplément.
soc. = société.
theor. = theoretische.
trad. = traduction.
Trans. = Transactions.
Unterh. = Unterhaltung.
Ver. = Vereinigung.
Verh. = Verhandlung.
Vetensk. = Vetenskabs.
Viertelj. = Vierteljahresschrift.
vol. = volume.
Vorles. = Vorlesung.
Wiss. = Wissenschaft, wissenschaftlich.
Z. = Zeitschrift.