

RECUEIL

DES PIÈCES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

TOME HUITIÈME.

R E C U E I L
D E S P I E C E S

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
DEPUIS LEUR FONDATION EN M. DCC. XX.

T O M E H U I T I E M E.

Qui contient une partie des Pieces de 1753, celles
de 1756 & 1757, & le reste de celles de 1760.



A P A R I S,
Chez *PANCKOUCKE*, rue des Poitevins,
à l'Hôtel de Thou.

IRIS - LILLIAD - Université de Lille 1 *M. DCC. LXXI.*



AVERTISSEMENT

Au sujet des Pieces qui composent ce VIII^e Volume.

DANS l'Avertissement que j'ai placé à la tête du septieme Volume, publié en 1769, je rendis compte des raisons qui avoient fait intervertir l'ordre chronologique des Pieces des Prix. Ce Volume contenoit la Piece de M. BERNOULLI, qui avoit remporté le Prix de 1753, sur la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux. Celles de M. EULER & de M. MATHON *de la Cour*, qui avoient eu l'*Accessit*, sont les deux premieres de ce huitieme Volume.

En 1754 le Prix ne fut point adjugé.

La Piece de 1755 est imprimée à part chez Delatour.

En 1756, l'Académie proposa la Théorie des inégalités de la Terre; la Piece de M. Euler est la troisieme de ce Volume.

En 1757, M. Bernoulli remporta le prix sur le Roulis & le Tangage des vaisseaux; sa Piece est la quatrieme de ce Volume.

La Piece de 1758, par le P. Frisi, a été imprimée en Italie.

En 1759, sur le Roulis & le Tangage, il y eut deux Pieces, l'une de M. Grognard, qui est dans le Tome VII; l'autre, de M. Euler, qui est la cinquieme de ce VIII^e Volume.

En 1760, on proposa l'examen des altérations du moyen mouvement des planetes; la piece de M. Charles Euler est la sixieme de ce Volume; celle du P. Frisi, qui eut l'*Accessit*, est imprimée dans le second Volume du Recueil qu'il a donné en Italie. La Piece composée à l'occasion du Prix extraordinaire, sur les Verreries, est dans le VII^e Volume.

En 1761, il y eut deux Pieces sur l'Arrimage des Vaisseaux; elles sont dans le septieme Volume.

A V E R T I S S E M E N T.

En 1762, M. l'Abbé Boffut remporta le Prix, par ses *Recherches sur les altérations que la résistance de l'Ether peut produire dans le mouvement moyen des Planetes*, imprimées à part en 1766; elles sont jointes à ce Volume.

La Piece de M. Jean-Albert Euler, que l'Académie cita avec éloge, est aussi dans le Volume que nous publions aujourd'hui.

Pour 1763, l'Académie demanda la description des différentes méthodes qu'on emploie pour l'arrimage des vaisseaux, & la maniere de les perfectionner; le Prix ne fut point adjugé, il ne l'a été qu'en 1765.

En 1764, le Prix fut remporté par M. de la Grange, sur la libration de la lune. Cette Piece commencera le neuvieme Volume, que nous espérons de publier incessamment.

LA fondation du Prix de l'Académie, par M. ROUILLÉ DE MESLAY, est une époque intéressante dans l'Histoire des Sciences; elle a produit des recherches inestimables sur les plus belles parties de la Physique Céleste & de la Théorie de la Navigation. Nos connoissances sur les effets de l'attraction sont dûes en grande partie à ce bel établissement; & il n'y a gueres de Recueil aussi intéressant que celui que nous continuons de donner au Public. On fera peut-être surpris que l'exemple de M. Rouillé de Meslay n'ait déterminé personne à le suivre, & à contribuer, par quelque établissement de même genre, au progrès de nos Sciences. Ces études, aussi difficiles & aussi rares qu'elles sont curieuses & importantes, ont besoin de l'émulation & des secours que procurent de semblables institutions. A Paris, le premier Avril 1771.

DE LA LANDE.



M É M O I R E

RECHERCHES

Sur les altérations que la résistance de l'Ether peut
produire dans le mouvement moyen des
Planetes.

*Piece qui a remporté le Prix de l'Académie Royale
des Sciences , en l'année M.DCC.LXII.*

Par M. l'Abbé BOSSUT, ci-devant Correspondant
de l'Académie Royale des Sciences , & Professeur
Royal de Mathématiques aux Ecoles du Génie ,
aujourd'hui Membre de l'Académie Royale des
Sciences, & Examineur des Ingénieurs, &c.

Prix de 1762.

A

MEMMOIRE

SUR

LA MANIERE LA PLUS AVANTAGEUSE

DE SUPPLÉER

A L'ACTION DU VENT

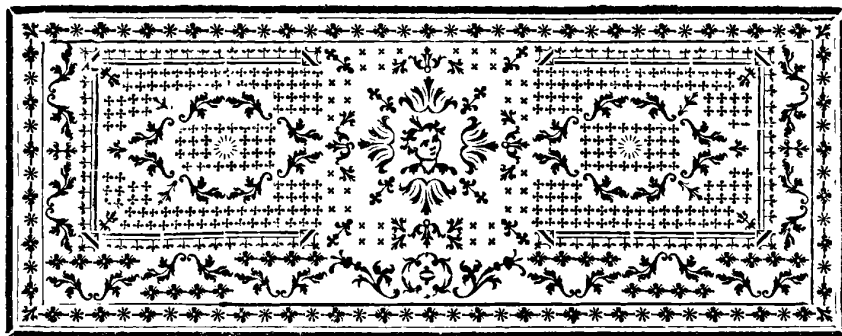
SUR LES GRANDS VAISSEAUX.

Présenté à l'Académie à l'occasion du Prix de 1753.

Tali remigio navis se tarda movebat. Virg. Æneid. Liv. 5.

Prix de 1753.

A



M É M O I R E

*SUR la maniere la plus avantageuse de
suppléer à l'action du Vent sur les grands
Vaisseaux.*

DE PROMOTIONE NAVIUM

SINE VI VENTI.

§. I. **C**UM vento uti non licet ad navem propellendam, aliæ vires non relinquuntur, præter eas, quas homines in nave versantes præstare valent. Primum igitur dispiciendum erit, qua ratione homines ad quodvis opus applicari conveniat, ut maximum effectum producant. Determinari scilicet oportet, quanta celeritas actioni hominum tribui debeat, ut ex viribus, quas tum exercent, maximus effectus oriatur. Experientia quidem constat, quo majori celeritate homo operetur, eo minorem vim eum exerere, nihilo tamen minus, cum effectus non solum ex vi sed etiam ex celeritate, qua agit, æstimandus sit,

A ij

etiamsi aucta ejus celeritate vis diminuatur, tamen fieri potest, ut inde major effectus existat, qui, quo casu omnium maximus evadat, hic primum definiendum videtur, quocumque enim modo a viribus hominum naves propelli posse deinceps deprehendemus, id semper maximo cum lucro efficietur si actio hominum ad justum celeritatis gradum temperetur.

§. II. Primum autem consideranda est vis, quam homo quietus edere valet; quæ quidem non major est capiendâ, quam ut homo eam aliquamdiù sine nimia defatigatione sustinere queat; exponatur hæc vis pondere M , ita ut homo huic ponderi suspenso tenendo par sit. Hoc pondus si ad experientiam spectemus 70 circiter librarum constitui potest, seu æquale ponderi unius pedis cubici aquæ.

§. III. Secundo loco spectari debet maxima celeritas, qua homo vel currere vel membra sua vibrare sive nimia defatigatione valet, tanta enim celeritate, si homo actu movetur, nullam omnino vim exerere valebit, cum omnes ejus conatus in proprio motu consumantur. Sit igitur ista celeritas $=\sqrt{c}$ seu debita altitudini c ; cum igitur ista maxima celeritas censei possit sex pedum uno minuto secundo, altitudo huic celeritati debita erit $\frac{576}{1000}$ pedis.

§. IV. Cum igitur homo, in quiete constitutus, vi polleat $=M$, motus autem celeritate $=\sqrt{c}$ omni vi destituatur, videndum est, quanta vis in eo sit futura, si celeritate quacunque minore progrediatur. Exprimat \sqrt{v} celeritatem minorem quam \sqrt{c} , sitque Q vis, qua homo in hoc statu erit præditus, atque manifestum est Q ejusmodi esse debere functionem ipsius v , ut, posito $v = 0$, fiat $Q = M$: factò autem $v = c$, prodeat $Q = 0$; quibus quidem conditionibus infinitis modis satis fieri potest, veluti si ponatur: $Q = M \left(1 - \frac{v^n}{c^n}\right)^m$.

§. V. Ad experientiam autem casus videtur maxime accomodatus si ponatur $n = \frac{1}{2}$ & $m = 2$; ita ut sit

$$Q = M \left(1 - \frac{v_v}{v_c} \right)^2.$$

Veritas hujus formulæ ex vi aquæ illustrari potest, si enim aqua celeritate \sqrt{c} in planum = ff directe incurram vim exeret = ffc , *fin.* autem idem Planum celeritate = \sqrt{c} cum fluvia progrediatur, nullam vim excipiet; celeritate minore \sqrt{v} latum, a fluvio propelleretur vi = $ff(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$: jam ffc respondet nostro M , unde ob $ff = \frac{M}{c}$ fit Q seu vis celeritati \sqrt{v} respondens = $M \left(1 - \frac{v_v}{v_c} \right)^2$.

§. VI. Ut hinc actionem hominis maxime lucrosam definiamus, ponamus, hominem ope axis in peritrochio datum pondus P elevare debere; adhuc enim casum omnes machinas utcunque positas reducere licet Sit ergo semidiameter cylindri = a , & longitudo Scytalæ cui homo est applicatus = r ; homo autem procedat celeritate = \sqrt{v} , erit celeritas, qua pondus P elevatur = $\frac{a}{r} \sqrt{v}$: vis autem hominis hac celeritate operantis est = $M \left(1 - \frac{v_v}{v_c} \right)^2$; cujus momentum $Mr \left(1 - \frac{v_v}{v_c} \right)^2$; æquale esse debet momento ponderis P renitentis, quod est = Pa ; ita ut habeamus hanc æquationem

$$Pa = Mr \left(1 - \frac{v_v}{v_c} \right)^2;$$

Qua determinatur status machinæ.

§. VII. Ex hac æquatione inventa elicimus; $\frac{a}{r} - \frac{M}{P} \left(1 - \frac{v_v}{v_c} \right)^2$:

Hinc ergo celeritas, qua pondus P actu elevatur erit:

$$\frac{M}{P} \left(1 - \frac{v_v}{v_c} \right) \sqrt{v}.$$

Quam perspicuum est maxime pendere a celeritate \sqrt{v} ; si enim sit $v = 0$, siue $v = c$, pondus plane non elevatur, quare necesse est, certum dari valorem pro \sqrt{v} ,

quo pondus citissime elevetur, atque hic ipse est gradus ille celeritatis, quo homo operans maximum effectum producere est censendus. Iste igitur valor ipsius v per methodum Maximorum & Minimorum déterminabitur.

§. VIII. In hunc finem ponamus $\sqrt{v} = z$ & $\sqrt{c} = e$ ita ut maximum reddi debeat $z(1 - \frac{z}{e})^2$; cujus differentiale nihilo æquatum præbet; $d z (1 - \frac{z}{e})^2 - \frac{2z dz}{e} (1 - \frac{z}{e}) = 0$; unde elicitur $z = \frac{1}{3} e$ ideoque $\sqrt{v} = \frac{1}{3} \sqrt{c}$: Celeritas ergo hominis maximo effectui conveniens præcisè est pars tertia maximæ celeritatis cujus homo est capax. Quæ cum æstimata sit 6 pedum uno minuto secundo, erit celeritas hominis efficacissima duorum pedum pro uno minuto secundo: sicque sive homo celerius sive tardius vires suas impendat, debiliorem semper effectum producat.

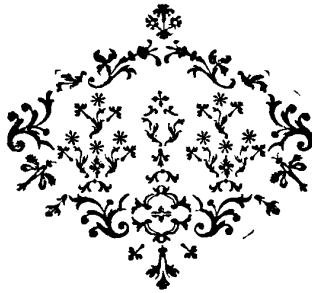
§. IX. Cum sit $\sqrt{v} = \frac{1}{3} \sqrt{c}$ erit $v = \frac{1}{9} c$: ideoque Altitudo huic celeritati maximæ lucrosæ debita erit $= \frac{64}{1000}$ seu $= \frac{8}{125}$ pedis; vis autem, quam homo, hac celeritate nitens exercebit erit $= \frac{4}{9} M$. Unde si M æstimetur 70 librarum, erit ista vis $= 33\frac{1}{3}$ libr. seu æqualis ponderi $\frac{4}{9}$ pedis cubici aquæ. Hæc igitur determinatio latissime patet atque ad omnes casus, quibus opus, quodcumque viribus humanis perficiendum proponitur, extendi debet. Omnes igitur Machinæ, cujuscunque sint generis, ita instrui debent ut celeritas hominum agitantium singulis minutis secundis bins pedes conficiat, sive ut altitudo huic celeritati debita sit $= \frac{8}{125}$ pedis.

§. X. Hanc igitur regulam observari oportet in iis operationibus quibus navis vi hominum est propellenda, quod, quibus modis effici queat, nunc diligentius sum perscrutaturus.

§. XI. Quibuscunque autem viribus homo in nave constitutus moliatur, nullam omnino vim ad navem propellendam exeret, nisi in objecta extra navem sita nitatur, dum autem navis in Alto versatur, aliud objec-

tum externum, in quo homo vires suas consumat, non occurrit præter ipsam aquam, nisi forte aërem quoque huc numerare velimus.

§. XII. Omnes autem vires, quæ in hunc finem ab aqua peti possunt, ad duo genera referri observo. In altero scilicet genere eas complector vires, quæ à percussione aquæ nascuntur, quorum pertinent vires à remis oriundæ, ad alterum autem genus refero vires, quas reactio aquæ, dum ex receptaculo quopiam effluit, supeditat. Utrumque ergo genus hic seorsim evolvam.





S E C T I O P R I M A.

De viribus ex percussione aquæ oriundis.

§. XIII. **T**AM ex Theoria quam Experientia satis constat : si superficies plana , quæ sit æqualis ff contra aquam directe impingat celeritate altitudini ν debita , fore vim aquæ æqualem ponderi massæ aqueæ , cujus volumen sit $= ff\nu$; hanc ergo vim per $ff\nu$ exprimam. Perspicuum porro est hanc vim eandem esse futuram , sive planum in aquam , sive aqua in planum pari celeritate incurrat , sive etiam utrumque moveatur , dummoda celeritas relativa fuerit $= \nu\nu$.

I.

Primus modus Navem propellendi

TABULA I.
Fig. 1.

§. XIV. Ex hoc jam principio sequentes modi navem propellendi obtinentur. Primum scilicet ponamus ; superficiem vel tabulam planam FF , cujus area $= ff$, in aqua horizontaliter agitari ope vectis inflexi ABG , qui ab hominibus super trochlea C horizontaliter promoveatur ; ubi quidem perspicuum est , hunc vectem , si in prora applicetur attrahendo ad navem , sin autem in puppi applicetur à nave repellendo , movere debere. Calculus autem perinde se habebit sive hæc machina in prora , sive in puppi adhibeatur. Notandum autem est , cum iste vectis vel satis fuerit attractus vel protrusus , Tabulam , inclinando vectem , super aquam elevari debere , donec iterum ad novam actionem producendam aquæ immergatur,

§. XV.

§. XV. Quoniam autem hic imprimis ipsius navis motus ratio haberi debet, ponamus navem jam secundum directionem AB moveri celeritate $= \sqrt{c}$: tabulam autem FF cum veſte GBA in navi promoveri celeritate $= \sqrt{v}$, quæ si æqualis eſſet celeritati navis \sqrt{c} , nulla vis inde in navem redundaret, eatenus igitur tantum hinc vis ad navem propellendam orietur, quatenus est $\sqrt{v} > \sqrt{c}$, tum enim Tabula aquam feriet celeritate $= \sqrt{v} - \sqrt{c}$.

§. XVI. Altitudo ergo huic celeritati, qua tabula in aquam impingit, debita erit $(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$; ideoque vis, quam ab aqua ſuſtinet erit $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$, qua tabula æque ac ipſa navis ſecundum directionem GH urgebitur; per hypotheſin autem hæc directio convenit cum directione navis. Unde, ſi vis iſta æqualis fuerit reſiſtentia, quam navis in aqua ſuſtinet, navis ſuam celeritatem \sqrt{c} conſervabit, ſin autem illa vis vel major fuerit vel minor quam reſiſtentia motus navis vel accelerabitur vel retardabitur.

§. XVII. Quoniam autem potiffimum ad motum uniformem attendi convenit, ponamus, navem jam eum aſſecutam eſſe motum, quò ab hac vi impulſa uniformiter progredi valet, ita ut reſiſtentia, quam navis celeritate \sqrt{c} procedens patitur, æqualis ſit vi inventæ $ff(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$. Convenientius enim effectus virium determinari non poteſt, quam ſi ipſam celeritatem navi inde impreſſam aſſignavero.

§. XVIII. Quacunque autem figura navis fuerit prædita, ſemper exhiberi poteſt ſuperficies plana, quæ pari celeritate in aquam directe incurrens eandem reſiſtentiam patiatur atque ipſa navis. Si igitur iſta ſuperficies pro navi propoſita vocetur kk , quoniam navis celeritate \sqrt{c} progreditur, erit reſiſtentia $= kkc$; unde erit $kke = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$.

§. XIX. Hinc ergo celeritas navis determinari poterit, quam vires, quæ ad machinam noſtram, celeritate
Prix. 1753. B

\sqrt{v} agitandam, requiruntur, navi inducere valent. Extracta enim radice quadrata erit $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$ unde dicitur $\sqrt{c} = \frac{f\sqrt{v}}{k+f}$; unde manifestum est, quod quidem per se est clarum, celeritatem navis \sqrt{c} semper minorem esse celeritate \sqrt{v} & quidem in ratione f ad $k+f$.

§. XX. Videamus nunc, quot hominum vires ad hunc motum requirantur; ponamus igitur n homines adhiberi, qui eum præscripta celeritate agere debeant, quæ fortasse diversa erit à celeritate vectis \sqrt{v} ; quæ diversitas cum innumeris modis obtineri queat: rem ita consideremus, ac si machina nostra ope vectis OA circa polum O mobilis agitetur, huicque vecti in puncto M vires hominum secundum directionem MN essent applicatæ. Sit igitur $OA = a$ & $OM = x$; erit celeritas vis motricis in M applicatæ $= \frac{x\sqrt{v}}{a}$.

§. XXI. Sit nunc celeritas, qua quisque homo maximo cum successu agere inventus est $= \sqrt{e}$; ita ut sit $e = \frac{8}{12}$, pedis, vis autem singulorum hominum ponatur $= A$, quæ, ut vidimus est $3 \frac{1}{3}$ librarum vel $\frac{4}{9}$ pedis cubici aquæ. Oportet igitur sit $\frac{x\sqrt{v}}{a} = \sqrt{e}$ & quia vis omnium hominum in M applicata est $= nA$, vis huic in puncto A æquivalens $= \frac{nAx}{a}$, qua vectis ABG actu retrahitur, quæ propterea æqualis esse debet vi aquæ reluctanti $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$ seu vi resistentiæ $= kkc$.

§. XXII. Tres igitur affecti sumus æquationes:

I. $kkc = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$: sive $k\sqrt{e} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$.

II. $\frac{x\sqrt{v}}{a} = \sqrt{e}$.

III. $\frac{nAx}{a} = (ff\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$.

Harum secunda dat $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{v}}$: qui valor in tertia substitutus præbet: $\frac{nA\sqrt{v}}{\sqrt{v}} = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2 = kkc$: Hinc reperitur: $\sqrt{v} = \frac{nA\sqrt{e}}{kkc}$: & cum sit $\sqrt{c} = \frac{f\sqrt{v}}{k+f}$ erit $c\sqrt{c} = \frac{nA f \sqrt{v} e}{k(k+f)}$; inventa hinc celeritate \sqrt{c} definietur locus applicationis virium M per formulam $\frac{x}{a} = \frac{kkc}{nA}$.

§. XXIII. Ex hac formula patet, si celeritas navis cum numero hominum comparetur, fore cubum celeritatis numero hominum proportionalem. Ut igitur navi celeritas duplo major imprimatur numero hominum octuplo majore erit opus. Unde patet, celeritatem navis non ultra certum terminum augeri posse, cum navis non nisi modici hominum numeri sit capax. Sin autem celeritas navis \sqrt{c} cum quantitate f conferatur, patet si fit $f = 0$, celeritatem navis quoque evanescere, crescente autem f , celeritatem quoque crescere, maxima igitur celeritas prodit sit fiat $f = \omega$, quo casu erit: $c\sqrt{c} = \frac{n^{\wedge} \vee e}{k k}$; ideoque $\sqrt{c} = \sqrt{\frac{n^{\wedge} \vee e}{k k}}$.

§. XXIV. Cum autem tabula major capi nequeat, quam ut ab hominibus regi possit: perspicuum est, quantitatem f non ultra certum limitum augeri posse, qui limes à numero hominum ideoque à quantitate navis plerumque pendeat. Videtur igitur statui posse $f = k$, ita ut sit: $c\sqrt{c} = \frac{n^{\wedge} \vee e}{2 k k}$; cubus ergo hujus celeritatis semissis est cubi celeritatis maximæ, unde ipsa celeritas tantum parte quinta circiter deficiet à celeritate maxima; quod discrimen non admodum est notabile. Sin autem accipiatur $f = 2 k$, celeritas prodibit à celeritate maxima deficiens parte circiter octava. Unde patet opere non esse pretium ut tabula tantopere amplificetur.

§. XXV. Conferamus etiam celeritatem navis \sqrt{c} cum ejus *resistentia absoluta*: (quam area kk mens uremus,) ac manifestum est fore $c\sqrt{c}$ ut $\frac{1}{k k}$, seu cubum celeritatis reciproce esse proportionalem *resistentiæ absolutæ*. Hinc si *resistentia absoluta* octies fiat minor, celeritatem tantum duplo fieri majorem: unde patet, diminuendo *resistentiam absolutam* parum notabile celeritatis incrementum inde resultare.

§. XXVI, Imprimis autem observandum est homines, quos hic sumus contemplati, non continuo vires suas ad navem propellendam impèndere: quoniam, ad-

admota tabula ad navem, coguntur eam ex aqua extrahere, ac per aërem vibrando denuo aquæ immergere, quæ operatio duplo diutius durare censenda est quam operatio in navis promotione consumpta, quocirca celeritas navis supra inventa \sqrt{c} non est effectus n hominum sed spectari debet tanquam effectus $3n$ hominum. Dato ergo numero hominum, qui huic operi applicantur, ejus numeri tantum pars tertia nobis valerem litteræ n præbebit.

§. XXVII. Videamus jam, quanta proditura sit navis celeritas in quolibet casu, si homines modo efficacissimo operi admoveantur. Vidimus autem esse $A = \frac{4}{9}$ ped. cub. & $e = \frac{8}{125}$ ped. omnibus igitur reliquis quantitatibus in pedibus expressis, erit $c\sqrt{c} = \frac{4nf\sqrt{\frac{8}{125}}}{9kk(k+f)} = \frac{nf}{9kk(k+f)}$. Unde celeritas maxima, quæ prodit si $f = \text{infin.}$ cognoscetur ex formula $c\sqrt{c} = \frac{n}{9k}$. Sufficiet autem celeritatem maximam assignavisse, cum quolibet casu, quo f finitum obtinet valorem, defectus à maxima celeritate facile æstimari possit.

§. XXVIII. Ponamus igitur pro navi non nimis magna esse resistantiam absolutam $kk = 50$ ped. quad. & numerum hominum operantium esse $= 30$ ita ut sit $n = 10$; hoc ergo casu habebitur $c\sqrt{c} = \frac{1}{45}$ unde altitudo celeritati maximæ debita erit $c = 0,079$ ped. Unde conficiet navis uno minuto secundo spatium $2\frac{1}{2}$ pedum, cui intervallo unius horæ triens feræ milliaris germanici respondet. Ut igitur eadem navis singulis horis milliare germanicum absolvat, viribus 810 hominum utendum esset: vel manente hominum numero triginta, resistantia absoluta kk ad $1\frac{2}{7}$ ped. quad. diminui deberet.

TABULA I.
Fig. 2.

§. XXIX. In hoc casu exposito, quo $n = 10$ & $kk = 50$ fiet $\frac{x}{a} = \frac{kkc}{nA} = 0,888 = \frac{8}{9}$. Vires ergo hominum in vectis OA puncto M applicari debent, ita ut sit $AM = \frac{1}{2} OM$; & quo pluribus hominibus locus

operandi procuretur vecti in puncto M trabs transversalis NN adjungi poterit, in quam urgendo homines vires suas exercent, atque hujusmodi machina tam in prora quam in puppi constitui poterit, si quidem circumstantiæ id permittant.

§. XXX. Hoc autem modo ingens se offert incommodum, quando tabula ex aqua extrahi & per aërem retrudi deberet, quoniam ad hanc operationem machina à vecte OA liberari, aliaque virium applicatio institui deberet; huic autem incommodo occurri poterit, si tabula quasi fenestris sit instructa, quæ, dum tabula attrahitur, claudantur & aquæ vim excipiant. Sic enim tabula ope ejusdem vectis OA in aqua removeri poterit, quo motu, cum fenestræ apperiantur, nulla fere resistentia sentietur; quo continuo motu operatio & agitatio machinæ satis commoda reddetur.

II.

Secundus Modus Navem propellendi.

§. XXXI. Huc pertinet quoque vulgaris remorum usus, qui autem, cum jam satis sit pertractatus, tum vero in grandioribus navibus pluribus incommodis est obnoxius, eum hic non attingam; ejus vero loco proponam machinam affinem, qua utrinque ad latera navis tabulæ FF ope axis incurvati $DBCCBD$ in aqua vibrantur, dum vires hominum parti CC applicantur, qui motus, ut sine intermissione reciprocari possit, tabula iterum fenestris instrui poterunt.

§. XXXII. Ponatur utriusque tabulæ junctim sumtæ superficies $= ff$, quarum vis in punctis G excipiat; sit hujus puncti ab axe rotationis DAB distantia $DG = a$ & axi curvati distantia $BC = x$; progrediatur navis celeritate $= \sqrt{c}$ & tabulæ vibrentur in aqua celeritate \sqrt{v} ; erit celeritas respectiva, qua tabula aquam percutit

TABULA I.
Fig. 3.

$= \sqrt{v} - \sqrt{c}$. Hoc scilicet locum habet, si tabula situm verticalem tenet, in situ enim obliquo vis aliquantum diminuetur, cujus ratio facile haberi poterit, etiamsi in calculo brevitatis gratia negligatur.

§. XXXIII. Erit ergo vis aquæ in utramque tabulam $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$, quæ ad navem propellendam impenditur, ut ergo navis celeritatem suam \sqrt{c} conferret, necesse est, hanc vim resistentiæ esse æqualem. Posita igitur resistentia absoluta $= kk$, oportet sit $kkc = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$ seu $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$. Ejusdem autem vis momentum respectu axis DB est $= ffa(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$ seu $= kka c$, quæ à viribus hominum sustineri debet.

§. XXXIV. Ponamus igitur n homines trabem CC impellere, & cujusque hominis celeritate \sqrt{e} agentis vim valere A erit vis omnium hominum $= nA$ cujus momentum $= nAx$, quod ergo æquari debet $kka c$ ita ut sit: $nAx = kka c$: unde prodit $\frac{x}{a} = \frac{kkc}{nA}$; præterea autem esse oportet: $\sqrt{v} : \sqrt{e} = a : x$ seu $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{e}}$.

§. XXXV. Habemus ergo $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{e}} = \frac{kkc}{nA}$: unde fit $\sqrt{v} = \frac{nA\sqrt{e}}{kkc}$; qui valor in æquatione $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$, seu $f\sqrt{v} = (k+f)\sqrt{c}$ substitutus præbet: $\frac{nA\sqrt{e}}{kkc} = (k+f)\sqrt{c}$ unde elicitur $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{e}}{kk(k+f)}$. Quæ formula cum à superiori non discrepet, patet sive homines hoc modo applicentur sive modo præcedente, navem utroque casu pari velocitate promoveti.

§. XXXVI. Ex reliquis ergo circumstantiis dijudicari oportebit, utrum hoc modo an præcedente uti expediat; quin etiam nihil impedit, quomius uterque modus simul adhibeatur & ex posteriori plures hujusmodi machinas in navi secundum longitudinem constitui possent. Quod si fiat, notandum est in calculo, summam omnium tabularum in ff comprehendi debere, parique modo n denotabit numerum omnium hominum, omnes machinas simul urgentium.

III.

Tertius Modus Navem propellendi.

§. XXXVII. Si in Machina præcedente Tabula *FF* circa axem *AA* omnino in gyrum agantur, fenestris non erit opus. ac ne, dum tabulæ per ærem vibrantur, vires hominum inutiliter consumantur, plures hujusmodi tabulæ circa axem *AA* disponi poterunt, ut, dum aliæ ex aqua tolluntur aliæ de novo immergantur. Hoc ergo modo vires hominum sine intermissione ad navem propellendam impenduntur neque tantum tertia pars ut in modis præcedentibus usu venit, navem actu propellere erit censenda.

§. XXXVIII. Neque tamen numerum hujusmodi radiorum *AG* nimium augeri convenit, ne machina nimis fiat complicata, aliisque navis destinationibus adversetur. Ita commodissimum videtur, axem utrinque quaternis tantum hujusmodi alis instrui, perpendiculariter inter se dispositis. Sic enim ne tormentorum quidem usus impediatur, cum enim tormenta explodere opus fuerit, dato signo, axis *AA* in eo situ poterit detineri, ut binæ alæ in situ verticali, alteræ in horizontali ferventur.

§. XXXIX. Pro hac machina calculus difficilior non evadit quam casu præcedente: cum enim axis *AA* supra aquam elevatus esse debeat, dum una tabula *FF* in situ verticali versatur, reliquæ tres utrinque supra aquam eminebunt, illaque unica vim aquæ eandem quam supra definivimus excipiet, quando verum in situm satis obliquum pervenerit, ejusque vis proinde debilitata fuerit, tum alia ala aquæ immergetur sicque jactura illa compensabitur; ex quo efficitur ut tota vis perpetuo eadem sit proditura ac si semper una ala situm verticalem teneret.

TABULA I.
Fig. 4.

§. XL. Denotabit ergo ff superficiem duarum tabularum ut ante & a distantiam centri cujusque tabulæ ab axe AA , unde si celeritas navis ponatur æqualis \sqrt{c} & celeritas gyrotoria punctorum G circa axem $AA = \sqrt{v}$ erit vis, quæ perpetuo ab aqua excipietur $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$, quæ resistentiæ navis kkc æqualis posita dabit $kkc = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$ seu $(k + f)\sqrt{c} = f\sqrt{v}$.

§. XLI. Nunc autem machina non amplius ope axis inflexi commode agitari poterit, sed potius conveniet axem AA verticillo D instrui, qui à rota dentata horizontali E convertatur. Ipsa autem rota conjuncta sit cum axe verticali O , qui ope scyptalarum OM ab hominibus in gyrum agatur. Quoniam igitur homines hoc pacto semper eandem resistentiam offendunt motu semper æquabili vires suas exercere poterunt, quo ipso non contemnendum virium incrementum impetrabitur, cum contra, quando motus est inæquabilis non exigua pars virium in ipsius machinæ motu tam accelerando quam retardando consumatur, quin etiam homines hujusmodi actione æquabile non tantopere defatigabuntur.

§. XLII. Sit igitur hominum numerus $= n$ qui celeritate \sqrt{e} progredientes scyptalis OM in distantia $OM = x$ ab axe O sint applicati; singulique vi $= A$ nitantur, deinde sit numerus dentium rotæ $E = \mu$; numerus autem bacillorum verticilli $D = v$. Dum igitur rota E semel circumagitur, verticillus D cum axe AA faciet $\frac{\mu}{v}$ revolutiones, Unde celeritas punctorum M , quibus homines sunt applicati erit ad celeritatem punctorum G , quæ aquæ vim sustinent ut x ad $\frac{\mu}{v}a$, ideoque habebitur $\sqrt{e} : \sqrt{v} = x : \frac{\mu}{v}a$ seu $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{e}} = \frac{\mu a}{vx}$.

§. XLIII. Cum autem porro vires hominum cum vi aquæ in æquilibrio esse debeant ex universali æquilibrii principio, necesse est, ut sit vis hominum, quæ est $= nA$, ad vim aquæ, quæ est $ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2 = kkc$,

ut

ut celeritas punctorum G ad celeritatem punctorum M , hoc est ut \sqrt{v} ad \sqrt{e} unde nanciscimur $kkc\sqrt{v} = nA\sqrt{e}$: atqui est $f\sqrt{v} = (k+f)\sqrt{c}$; ergo $\frac{k}{f} = \frac{n}{k+f} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$. Unde elicimus ut ante: $c\sqrt{c} = \frac{n}{k} \frac{f\sqrt{e}}{k+f}$. Quam celeritatem cum n homines navi imprimant, in præcedentibus autem machinis ad eandem celeritatem $3n$ homines requirantur, patet hoc modo cubum celeritatis navis ter fieri majorem ipsamque adeo celeritatem fere in ratione sesqui altera augeri.

§. XLIV. Perfpicitur ergo, hanc machinam iis, quas ante exposui, atque etiam solitæ remorum actioni longè esse anteferendam, cum à pari hominum numero navis celeritas fere semissi major induci queat, dum scilicet utrinque homines æquali vi operari ponuntur. Hoc autem commodum eo majoris momenti evadet, cum in hac machina homines perpetuo motu æquabili agant easdemque vires exercent. Unde non contemnendum lucrum in totum effectum redundat.

§. XLV. Quamobrem non dubito istum modum naves propellendi præ hæctenus explicatis ad usum practicum commendare. Ac si is nonnullis difficultatibus adhuc obnoxius videatur, eo magis in id erit incumbendum, ut iis difficultatibus, quantum fieri potest occurratur. Equidem non ignoro incommoda, quibus rotæ huic machinæ similes, cujusmodi jam sæpius ad naves propellendas sunt propositæ, laborant: verum hæc incommoda plerumque evanescere confido, cum non totam rotam sed tantum axem; quaternis utrinque radiis instructum, adhiberi velimus, qua ratione non solum simplicitati consulitur, sed etiam tempestates ipsiusque navis agitationes usui hujus machinæ vix quicquam nocituræ videntur.

§. XLVI. Imprimis autem in idest incumbendum, ut vires hominum maximo cum lucro applicentur, quæ circumstantia, si negligatur, fieri utique posset, ut hæc machina consuetæ remigationi postponenda

Prix. 1753.

C

videretur. Hunc in finem actionem hominum maxime efficacem sollicite investigavi, atque hic rotam dentatam in machina introduxi, ut; commodo dentium numero constituto, scytalis OM ejusmodi longitudo tribui queat, quæ quamplurimis hominibus excipiendis satis sit idonea. Quin etiam axis verticalis OOO vel in superius vel in inferius pavementum continuari potest, ut homines in duobus pontibus ad eum circumagendum adhiberi queant.

§. XLVII. Cum enim $\sqrt{v} = \frac{nAv e}{kkc}$; erit $\frac{nA}{kkc} = \frac{\mu a}{v x}$.

Unde determinatio machinæ aptissima facile deducitur. Tribuatur enim scytalis $OM = x$ tanta longitudo,

quantam capacitas navis permittit, eritque $\frac{\mu}{v} = \frac{nAx}{kka c}$.

Unde ratio rotæ E ad verticillum D cognoscitur, quæ si in praxi observetur, vel dummodo non nimium ab ea recedatur, machina erit ita perfecta ut ab iisdem viribus alio modo applicatis major effectus nullo modo produci queat.

§. XLVIII. Ut rem exemplo illustremus, ponamus navis resistantiam absolutam $kk = 100$ ped. quad. quæ jam in grandiores naves competit, sitque numerus hominum $n = 100$: sit porro summa tabularum aquam simul percutientium $ff = 100$ ped. quad. Hincque cum sit $A = \frac{4}{9}$ & $e = \frac{8}{125}$, prodibit $c\sqrt{c} = 0,056$ unde reperitur $c = 0,1464$ ped. Cui altitudini respondet celeritas, qua singulis secundis spatium 3 pedum, ideoque singulis horis fere semissis milliariis germanici conficietur. Unde facile colligitur, quanta futura sit navis celeritas si vel plures homines operi admoveantur vel resistantia navis absoluta minor majorve existat.

§. LXIX. Ponamus porro scytalarum longitudinem $x = 10$ pedum & longitudinem $AG = a = 20$ ped. ac prodibit ratio $\frac{\mu}{v} = \frac{2000}{1317}$ cujus valor proxime est $= \frac{3}{2}$. Hinc si verticillo 10 bacilli tribuantur; rota 15

dentibus instructa esse debet, sicque machina ad praxin maxime videtur accommodata.

IV.

Quartus Modus Navem propellendi.

§. L. Ad similitudinem Molarum alatarum, quæ vento impelluntur, ejusmodi rota navi vel in Prora vel in Puppi applicari poterit, quæ alis oblique positis instructa & circa axem vibrata ab aqua vim excipiat ad navem propellendam idoneam. Cujusmodi machina, cum non solum sit nova sed etiam singulari principio innixa, omnino digna videtur, ut effectum, quem præstare caeat, accuratius investigemus; fortasse enim paucioribus difficultatibus erit subjecta, ita ut, si vires sufficientes suppeditaverit non sine insigni commodo in praxi usurpari queat, quin etiam nihil impediret, quo minus simul cum machina ante descripta ad usum adhibeatur.

§. LI. Sit igitur axis AB Proræ horizontaliter incumbens, qui instructus sit quatuor radius AG , quibus oblique affixæ sunt tabulæ FF . Quod si jam axis AB circumagatur vel una vel duæ tabulæ sub aqua versabuntur, quæ aquam oblique percutientes vim quoque obliquam ab aqua excipient quæ resoluta dabit cum vim navem propellentem tum etiam vim motui alarum resistentem. Sicque à determinatione hujus duplicis vis pendebit machinæ effectus.

§. LII. Teneat unus radius AG situm verticalem, ita ut nunc solus aquæ sit immersus, ac per punctum G , quod sit quasi centrum tabulæ, existente distantia $AG = a$; & area tabulæ $= ff$, facta concipiatur sectio horizontalis, in qua sit ab recta axi AB seu navis directioni parallela & Ff representet sectionem tabulæ, cujus obliquitatis angulus aGF seu bGf ponatur $= \varphi$.

C ij

TABULA II.

Fig. 5.

Fig. 5 & 6.

Motus tabulæ circa axem AB ita fit comparatus ut punctum G secundum directionem GL ad ab normalem vibretur celeritate $= \sqrt{v}$.

§. LIII. Hinc si navis quiesceret, tabula eandem vim sustineret ac si aquæ celeritate $= \sqrt{v}$ in directione LG in tabulam oblique impingeret, verum ponamus navem jam totum acquisivisse motum, quem ab hac machina impetrare potest, esseque ejus celeritatem secundum directionem $Ga = \sqrt{c}$. Unde idem resultabit effectus, ac si aqua celeritate \sqrt{c} in directione aG in tabulam impingeret. Capiatur $G\alpha$ ad GL ut \sqrt{c} ad \sqrt{v} , & completo rectangulo αGLN diagonalis NG representabit & directionem & celeritatem, qua aqua in tabulam impingere est concipienda. Cujus directio, si esset in tabulam perpendicularis, inde oriretur vis $= ff\ NG^2$, cum autem aqua oblique in tabulam impingat sub angulo incidentiæ FGN vis illa diminui debet secundum rationem duplicatum sinus istius anguli sicque vis aquæ in tabulam erit $= ff\ NG^2 (\sin. FGN)^2$.

§. LIV. At in triangulo $NG\gamma$ est $NG : N\gamma = \sin. \alpha\gamma G : \sin. FGN$: unde fit $NG \sin. FGN = N\gamma \sin. \alpha\gamma G$; cum autem sit $G\alpha = \sqrt{c}$; $GL = \sqrt{v}$; & $FG\alpha = \phi$ erit: $\sin. \alpha\gamma G = \cos. \phi$; $\alpha\gamma = \text{tang}\phi\sqrt{c}$ & $N\gamma = \sqrt{v} - \text{tang}\phi\sqrt{c}$; unde fit:

$$NG \sin. FGN = (\sqrt{v} - \text{tang}\phi\sqrt{c}) \cos. \phi = \cos. \phi \sqrt{v} - \sin. \phi \sqrt{c} : \text{Consequenter vis aquæ in tabulam} \\ = ff (\cos. \phi \sqrt{v} - \sin. \phi \sqrt{c})^2;$$

Cujus vis directio est recta GH ad tabulam normalis.

§. LV. Hic obiter notari convenit, hanc expressionem multo facilius erui potuisse, considerando tantum ex utroque aquæ motu eam celeritatem, quæ in tabulam est perpendicularis, & quam propterea celeritatem *Impulsus* vocari liceat. Sic ex motu aquæ aG oritur celeritas impulsus $= \sin. \phi \sqrt{c}$ ac ex motu LG erit celeritas impulsus $= \cos. \phi \sqrt{v}$, cui cum præcedens sit contraria erit tota celeritas impulsus $= \cos. \phi \sqrt{v} - \sin. \phi \sqrt{c}$.

Unde manifestum est, vim aquæ in tabulam fore $= ff(\cos. \varphi \sqrt{v} - \sin. \varphi \sqrt{c})^2$: ut ante.

§. LVI. Cum nunc hujus vis directio sit recta GH in tabulam normalis, resolvatur ea in duas alias GJ & GK , quarum illa cum directione navis convenit, hæc vero ad illam fit normalis, erit igitur vis

$$GJ = ff \sin. \varphi (\cos. \varphi \sqrt{v} - \sin. \varphi \sqrt{c})^2: \text{ \& vis}$$

$$GK = ff \cos. \varphi (\cos. \varphi \sqrt{v} - \sin. \varphi \sqrt{c})^2.$$

Cum nunc illa vis ad navem propellendam impendatur, æqualis sit necesse est resistentiæ navis, quæ cum, posita resistentia absoluta $= kk$, fit $= kkc$: erit

$$ff \sin. \varphi (\cos. \varphi \sqrt{v} - \sin. \varphi \sqrt{c})^2 = kkc \text{ seu}$$

$$f \cos. \varphi \sqrt{v} \sin. \varphi = (k + f \sin. \varphi \sqrt{\sin. \varphi}) \sqrt{c}.$$

§. LVII. Altera autem vis GK , quæ est $= \frac{kkc}{\text{tang} \varphi}$; TABULA II.
Fig. 5. tota motui machinæ reluctatur, ideoque instar oneris movendi spectari debet. Quare si axi AB verticillus ut ante v bacillis instructus concipiatur annexus, qui ope rotæ μ dentibus præditæ moveatur. Rotæ autem adjunctus fit axis in peritrochio, qui ab n hominibus singulis ad distantiam $= x$ ab axe applicatis, in gyrum agatur. Unusquisque autem homo vi $= A$ & celeritate $= \sqrt{e}$ operetur, erit celeritas vis moventis ad celeritatem oneris ut x ad $\frac{\mu}{v} a$; unde fit:

$$\sqrt{e} : \sqrt{v} = x : \frac{\mu}{v} a \text{ seu } \frac{\mu a}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{e}}.$$

§. LVIII. Porro cum vis movens, quæ est $= nA$, in æquilibrio esse debeat cum vi renitente $\frac{kk}{\text{tang} \varphi}$, hæc vires suis celeritatibus \sqrt{e} & \sqrt{v} reciproce sint proportionales necesse est; unde fit $nA : \frac{kkc}{\text{tang} \varphi} = \sqrt{v} : \sqrt{e}$; ideoque $\sqrt{v} = \frac{nA \text{ tang} \varphi \sqrt{e}}{kkc}$. Qui valor in superiori æquatione (§. LVI.) substitutus dabit

$$\frac{n A f \sin. \varphi \vee e \sin. \varphi}{k k c} = (k + f \sin. \varphi \vee \sin. \varphi) \vee c.$$

Unde reperitur cubus celeritatis navis

$$c \vee c = \frac{n A f \sin. \varphi \vee e \sin. \varphi}{k k (k + f \sin. \varphi \vee \sin. \varphi)}.$$

§. LIX. Hæc formula similis est illi, quam pro præcedente machinæ elicuimus. Si enim ponamus:

$$f \sin. \varphi \vee \sin. \varphi = g, \text{ erit } c \vee c = \frac{n A g \vee e}{k k (k + g)};$$

ita ut, quod ante erat f , id nobis hic sit $g = f \sin. \varphi \vee \sin. \varphi$. Ut igitur navi hinc maxima celeritas concilietur, non solum f seu quantitas alarum tanta accipi debet, quam circumstantiæ id permittunt, sed etiam angulum φ quam fieri potest maximum constitui oportet, neque tamen hunc angulum ad rectum usque augere licebit, quia tum celeritas alarum $\vee v$ deberet esse infinita, quod quidem Theoriæ ob resistantiam $\frac{k k c}{\text{tang} \varphi} = 0$ non repugnaret sed tamen in praxi, quia ob alarum crassitiem semper notabilis resistantia adest, hic casus locum habere nequit.

§. LX. Interim tamen sunt angulum φ tantum assumere licebit ut non multum à recto deficiat, ita si statuatur $\varphi = 75^\circ$ fiet $g = 0.94932.f$. Qui valor parum ab eo deficit, qui prodiret si poneremus $\varphi = 90^\circ$. Unde dummodo alæ satis amplæ conficiantur, hac machina navis æque celeriter propelli poterit atque ope machinæ præcedentis, unde ea machina, quæ ad usum aptior videbitur sine discrimine uti licebit.

§. LXI. Videamus autem, quomodo hæc machina commodissime sit instruenda, quod à valore litterarum μ , v & x pendet. Cum igitur sit:

$$\vee v = \frac{n A \text{tang} \varphi \vee e}{k k c} \text{ erit } \frac{\mu a}{v x} = \frac{n A \text{tang} \varphi}{k k c}$$

$$\& \text{ posito } \varphi = 75^\circ \text{ erit } \frac{\mu a}{v x} = \frac{373.2 n A}{k k c}.$$

Quare si tam numerus hominum n quam distantia a & x eadem ponantur, atque in machina præcedente, ratio μ ad ν fere quadruplo major esse debet, seu rota dentata fere quadruplo plures dentes habere debet, quam ante, manente scilicet eodem bacillorum numero in verticillo.

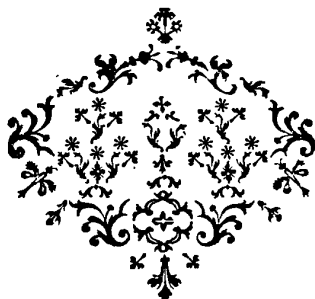
§. LXII. De hac Machina autem animadvertendum est, ab illa præter vim navem propellentem etiam nasci vim, qua navis ad latera pellitur. Vis enim $GK = \frac{k k c}{\text{tang } \varphi}$ quoque in navem agit, quæ eo minor evadit, quo angulus φ major assumitur. Necessè igitur esset, effectum hujus vis lateralis per actionem Gubernaculi destrui, quod sine detrimento motus navis fieri non potest.

§. LXIII. Hoc incommodum maximam partem tolli poterit, si axis GD , circa quem alæ gyrantur, aliquantum ad axem navis AB inclinetur, tum enim directio vis, quam ala Ff excipit scilicet recta GA parallela reddi poterit motui navis: quod eveniet, si inclinatio axis GD ad AB fuerit complementum anguli φ , ita, si angulus φ constituatur 75° oportebit angulum declinationis $AE G$ esse 15° , hæc obliquitas qua cursus navis directus obtinetur nihil fere immutabit in reliquis determinationibus, quæ ad machinam construendam requiruntur.

TABULA II.

Fig. 6.

Fig. 7.



S E C T I O S E C U N D A .

De viribus ex reactione aquæ oriundis.

§. LXIV. **Q**UAMDIU aqua in vase quocunque stagnat, vires, quibus latera vasis premuntur se mutuo in æquilibrio servant, neque enim vas inde ad motum sollicitabitur. Statim autem atque aqua in vase movetur, erumpendo per foramen quoddam, æquilibrio turbatur & vas ad motum sollicitabitur, quæ vis aquæ motæ in vas exercita vocatur *Vis Reactionis*, quæ ideo etiam apta videtur ad naves propellendas.

§. LXV. Quanta autem sit vis ista reactionis in quovis casu, difficilis ad modum est quæstio, ac plerumque per experimenta vel ratiocinia minus directa explicari solet, quam per solida Theoriæ principia. Operam igitur dabo, ut arduam hanc quæstionem ex primis Mechanicæ principiiis luculenter evolvam, & quovis casu veram reactionis quantitatem accurate determinem.

§. LXVI Ad hoc autem sequenti ratiocinio uti conveniet. Primum considerandæ sunt vires quibus aqua actu sollicitatur ad motum, quorsum pertinet gravitas & quævis vires, quibus aqua extrinsecus urgetur, has vires cunctas litera *P* indicabo, quæ vires procognitis sunt habendæ. Secundo considerandæ sunt vires, quibus vas ab aqua ad motum impellitur, quæ sunt vires quas determinare oportet, easque litera *R* indicabo. Tertio definiri debent vires, quæ ad motum aquæ producendum requiruntur, quæque ex motu aquæ tanquam jam cognito assumpto per regulas mechanicas inveniuntur, has igitur vires litera *Q* denotabo.

§. LXVII.

§. LXVII. Cum vas ab aqua urgeatur vi R necesse est, ut aqua vicissim à vase urgeatur æquali vi R sed secundum directionem contrariam; unde vis hinc oriunda, qua aqua sollicitatur æstimanda erit $= -R$; sic ergo aqua omnino ad motum impellitur à viribus binis P & $-R$ seu vi $P - R$. Hæc ergo vis æqualis esse debet viribus Q , quæ secundum principia mechanica ad motum aquæ producendum requiruntur, ita ut sit $Q = P - R$.

§. LXVIII. Hinc ergo vis reactionis R , seu ea vis; qua vas ab aqua ad motum sollicitatur, determinari poterit; erit enim $R = P - Q$. Unde cognitis cum viribus P , quibus aqua sollicitatur, tum viribus Q , quæ ad ejus motum producendum requiruntur, facillimè definitur vis reactionis aquæ, quæ alias per principia indirecta ac ratiocinia non parum perplexa determinari solet.

§. LXIX. Quoniam quovis casu vires P sponte patent, quemadmodum vires Q determinari debeunt investigabo, quæ quidem ex consideratione motus aquæ deducendæ sunt. Si enim aqua stagnaret, tunc utique esset $Q = 0$; foretque ideo $R = P$. Hoc scilicet casu vas easdem vires sustinet, quibus aqua urgetur, & ob gravitatem aquæ deorsum premetur vi ipsi aquæ ponderi æquali, ac si aqua à præterea quapiam vi premere-tur, tunc vas ipsam hanc vim quoque esset experturum, quod quidem per se est perspicuum.

§. LXX. Ut igitur in genere vires Q pro quovis casu determinem, contemplantur tubum figuræ cujuscunque $EEFF$, ex quo aqua effluat per orificium FF , cujus amplitudo $= ff$. Tubum autem in calculo quasi infinite angustum concipio, ita ut aqua per illum moveatur secundum sectiones MN & mn ad tubum perpendiculares; calculo autem expedito patebit amplitudinem tubi penitus egredi, ita ut conclusiones etiam pro tubis utcunque amplis valeant.

Prix de 1753.

D

TABULA II.

Fig. 8.

§. LXXI. Ponamus autem nunc, aquam per orificium FF erumpere celeritate $= \sqrt{v}$; elapso autem tempusculo dt , celeritatem aquæ esse $\sqrt{v + dv} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$; ita ut \sqrt{v} futura sit functio quæpiam temporis t , cujus etiam functio erit $\frac{dv}{dt}$ seu $\frac{dv}{2dt\sqrt{v}}$.

§. LXXII. Sit nunc in loco tubi quocunque M cujus amplitudo $= \gamma\gamma = MN$, eritque aquæ celeritas in sectione $MN = \frac{ff\sqrt{v}}{\gamma\gamma}$. Hac celeritate aqua in MN tempusculo dt conficiet spatium $Mm = \frac{ffdt\sqrt{v}}{\gamma\gamma}$. Tum autem ejus celeritas erit $\frac{ff\sqrt{v}}{\gamma\gamma} + d\frac{ff\sqrt{v}}{\gamma\gamma}$; seu erit $= \frac{ff\sqrt{v}}{\gamma\gamma} + \frac{2\gamma\gamma\sqrt{v}}{ffdv}$ $= \frac{2ffdv\sqrt{v}}{\gamma\gamma}$. Hæc ergo variatio celeritatis non solum pendet à variabilitate celeritatis \sqrt{v} , sed etiam à diversitate amplitudinis tubi. Quaternus ergo quælibet particula aquæ in sectione MN contenta vel motu accelerato progreditur seu retardato vel etiam à tramite recto deflectere cogitur, eatenus viribus opus erit ad has mutationes producendas.

§. LXXIII. Referamus hæc ad axem fixum verticalem AB per applicatas horizontales PM & pm , sitque à puncto fixo A , abscissa $AP = x$ & applicata $PM = y$. Concipiatur guttula quæpiam in sectione MN contenta, cujus massa sit dM : Atque ex principiis Mechanicæ constat, si elementum temporis capiatur constans, ad motum hujus guttulæ requiri duas vires $M\mu$ & $M\nu$, illam verticalem, hanc vero horizontalem; ita ut sit:

$$\text{Vis } M\mu = \frac{2dMddx}{dt^2} : \& \text{Vis } M\nu = \frac{2dMddy}{dt^2}.$$

§. LXXIV. Ponatur elementum $Mm = ds$, quod guttula tempusculo dt absolvit, quod, quia fit celeritate $\frac{ff\sqrt{v}}{\gamma\gamma}$, erit $ds = \frac{ffdt\sqrt{v}}{\gamma\gamma}$. Sit præterea angulus inclinationis $mM\mu = \phi$, erit $dx = ds \cos. \phi = \frac{ffdt\sqrt{v}}{\gamma\gamma} \cos. \phi$ & :

$$dy = ds \sin. \varphi = \frac{ff \, d\iota \sqrt{v}}{\zeta \zeta} \sin. \varphi. \text{ Unde fit}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ff \sqrt{v}}{\zeta \zeta} \cos. \varphi \ \& \ \frac{dy}{dt} = \frac{ff \sqrt{v}}{\zeta \zeta} \sin. \varphi:$$

§. LXXV. Ex his formulis, denuo differentiatis, eliciemus vires sequenti modo expressas:

$$\text{Vis } M\mu = \frac{2 \, dM \, ddx}{dt^2} = \frac{2 \, ff \, dM}{dt}$$

$$\left(\frac{dv}{2 \, \zeta \zeta \sqrt{v}} \cos. \varphi - \frac{2 \, d\zeta \sqrt{v}}{\zeta^3} \cos. \varphi - \frac{d\varphi \sqrt{v}}{\zeta \zeta} \sin. \varphi \right) \ \&$$

$$\text{Vis } M\nu = \frac{2 \, dM \, ddy}{dt^2} = \frac{2 \, ff \, dM}{dt}$$

$$\left(\frac{dv}{2 \, \zeta \zeta \sqrt{v}} \sin. \varphi - \frac{2 \, d\zeta \sqrt{v}}{\zeta^3} \sin. \varphi + \frac{d\varphi \sqrt{v}}{\zeta \zeta} \cos. \varphi \right)$$

Hic patet massulam dM utrinque multiplicandam esse per quantitatem finitam; nam $\frac{dv}{dt}$, ut vidimus, est functio ipsius t . Sed differentialia $d\zeta$, & $d\varphi$ immediate cum elemento dt comparari nequeunt; variabilitas enim amplitudinis $\zeta\zeta$ & inclinationis φ non à tempore t , sed à figura tubi pendet, quare hæc differentialia $d\zeta$ & $d\varphi$ cum differentiali ds comparari debebunt.

§. LXXVI. Cum igitur sit: $ds = \frac{ff \, d\iota \sqrt{v}}{\zeta \zeta}$ erit $dt = \frac{\zeta \zeta \, ds}{ff \sqrt{v}}$; qui valor interminis ubi $d\zeta$ & $d\varphi$ occurrunt loco dt substitui debet: Unde vires prodibunt.

$$\text{Vis } M\mu = 2 \, ff \, dM \left(\frac{dv}{2 \, \zeta \zeta \, d\iota \sqrt{v}} \cos. \varphi - \frac{2 \, ff \, v \, d\zeta}{\zeta^3 \, ds} \cos. \varphi - \frac{ff \, v \, d\varphi}{\zeta^2 \, ds} \sin. \varphi \right) \ \&$$

$$\text{Vis } M\nu = 2 \, ff \, dM \left(\frac{dv}{2 \, \zeta \zeta \, d\iota \sqrt{v}} \sin. \varphi - \frac{2 \, ff \, v \, d\zeta}{\zeta^3 \, ds} \sin. \varphi + \frac{ff \, v \, d\varphi}{\zeta^2 \, ds} \cos. \varphi \right)$$

§. LXXVII. His igitur viribus omnes particulas aquæ in spatiolo $MNnm$ contenta sollicitari oportet. Unde ad vires inveniendas quibus tota aquæ massa $MNnm$ sollicitatur, tantum opus est ut pro dM hanc ipsam massam substituamus. Cum igitur hæc massa sit prisma basea $= \zeta\zeta$ & altitudinis $= ds$, erit ejus soliditas $= \zeta\zeta \, ds$, qui ergo valor loco dM substitutus dabit vires massam elementarem $MNnm$ sollicitantes.

D ij

$$\text{Vis } M_{\mu} = \frac{ffv\nu}{dt dv} ds \cos. \varphi - 4f^4 \nu \frac{dz \cos. \varphi}{z^3} - 2f^4 \nu \frac{d\varphi \sin. \varphi}{z z} \&$$

$$\text{Vis } M_{\nu} = \frac{ff dv}{dt v \nu} ds \sin. \varphi - 4f^4 \nu \frac{dz \sin. \varphi}{z^3} + 2f^4 \nu \frac{d\varphi \cos. \varphi}{z z}$$

§. LXXVIII. In his formulis duplicis generis quantitates variables occurrunt, quarum alteræ à tempore pendent & nonnisi cum tempore mutantur, quæ sunt ν & $\frac{dv}{dt}$, alteræ pendent à figura tubi, quæ sunt s, z & φ , quas idcirco sollicitè à prioribus distingui oportet.

§. LXXIX. Si ergo velimus vires investigare, quæ præsentì momento ad conservationem motus aquæ, in tubo contentæ, requiruntur, formulas differentiales inventas ita integrari oportet, ut quantitates prioris generis ν & $\frac{dv}{dt}$ tanquam constantes considerentia & tantum variabilitas quantitaturn posterioris generis spectetur, quoniam vires pro elemento aquæ $MNnm$ per totum tubum summani debent.

§. LXXX. Cum igitur sit $ds \cos. \varphi = dx$ & $ds \sin. \varphi = dy$ erit summa omnium virium verticalium,

$$\int M_{\mu} = A + \frac{ff dv}{dt v \nu} x + 2f^4 \nu \frac{\cos. \varphi}{z z}$$

& summa omnium virium horizontalium,

$$\int M_{\nu} = B + \frac{ff dv}{dt v \nu} y + 2f^4 \nu \frac{\sin. \varphi}{z z}.$$

Ad constantes A & B determinandas consideretur suprema tubi sectio EE quæ sit $= ee$ & angulus inclinationis φ hic sit $= \epsilon$; & cum axis AB positio à lubitu nostro pendeat fiat y hic $= 0$ seu sit $AE = 0$. Hinc ab initio EE incipiendo fiet:

$$\int M_{\mu} = 0 = A + 2f^4 \nu \frac{\cos. \epsilon}{ee}; \quad \& \int M_{\nu} = 0 = B + 2f^4 \nu \frac{\sin. \epsilon}{ee}$$

§. LXXXI. Hinc ergo fit $A = -2f^4 \nu \frac{\cos. \epsilon}{ee}$

$$\& B = -f^4 \nu \frac{\sin. \epsilon}{ee}.$$

Hinc vires ad motum aquæ $EE MN$ requisitæ erunt :

$$\text{Vis verticalis } M_{\mu} = \frac{ff d v}{d t v v} x + 2 f^4 v \left(\frac{\text{cof. } \varphi}{\zeta \zeta} - \frac{\text{cof. } \epsilon}{e e} \right) \&$$

$$\text{Vis horizontalis } M_{\nu} = \frac{ff d v}{d t v v} y + 2 f^4 \left(\frac{\text{sin. } \varphi}{\zeta \zeta} - \frac{\text{sin. } \varphi}{e e} \right).$$

Extendamus has vires per totum tubum. Ponatur ergo tota altitudo $AB = a$ & horizontalis $BF = b$ & φ hic abeat in ζ & quia hic $\zeta \zeta$ abit in ff erit

$$\text{Vis verticalis tota } M_{\mu} = \frac{aff d v}{d t v v} + 2 f^4 v \left(\frac{\text{cof. } \zeta}{ff} - \frac{\text{cof. } \epsilon}{e e} \right)$$

$$\text{Vis horizontalis tota } M_{\nu} = \frac{bff d v}{d t v v} + 2 f^4 v \left(\frac{\text{sin. } \zeta}{ff} - \frac{\text{sin. } \epsilon}{e e} \right)$$

§. LXXXII. Hæ ergo sunt vires ad motum aquæ requisitæ, quas supra in genere littera Q sum complexus. Ita ut Q designet duas vires, alteram verticalem M_{μ} & alteram horizontalem M_{ν} , quarum virium quantitatem in paragrapho præcedente determinavi. Circa has vires observo, si motus aquæ per foramen FF fuerit uniformis, qui casus plerumque in hujus generis machinis locum habere solet, ita ut sit $\frac{d v}{d t} = 0$, tum has vires fore :

$$\text{Vis verticalis } M_{\mu} = 2 f^4 v \left(\frac{\text{cof. } \zeta}{ff} - \frac{\text{cof. } \epsilon}{e e} \right) \&$$

$$\text{Vis horizontalis } M_{\nu} = 2 f^4 v \left(\frac{\text{sin. } \zeta}{ff} - \frac{\text{sin. } \epsilon}{e e} \right)$$

§. LXXXIII. Præterea notari debet, has vires neque à figura tubi neque ab ejus amplitudine pendere, sed tantum per sectiones extremas EE & FF una cum earum inclinationibus ϵ & ζ determinari. Hinc patet, etiamsi in calculo amplitudinem tubi tanquam infinite parvam spectaverim, tamen has determinaciones ad tubos vel casa cujus cunque figuræ æque pertinere.

§. LXXXIV. Inventis nunc viribus Q , contemple-

mur vires P , quibus aqua actu sollicitatur; ac primo quidem occurrit gravitas aquæ cujus pondus littera M indicemus; hinc ergo P in se complectetur vim verticalem M deorsum tendentem. Præterea ponamus, æquam impelli à quadam vi V secundum directionem VT , quæ ad supremam sectionem EE fit normalis, quæ cum ad verticalem inclinatur angulo ϵ , inde oriatur vis verticalis secundum $M\mu = V \cos. \epsilon$ & vis horizontalis secundum $M\nu = V \sin. \epsilon$. Omnino ergo P continebit vim verticalem secundum $M\mu = V \cos. \epsilon$ & vim horizontalem secundum $M\nu = V \sin. \epsilon$.

§. LXXXV. Hinc ergo vis reactionis aquæ, seu vis, quam vas ab aqua sustinet, definitur; cum enim inventa sit hæc vis $R = P - Q$, hæc vis duas vires in se complectetur alteram verticalem secundum $M\mu$:

$$\text{Quæ erit} = M + V \cos. \epsilon - \frac{a ff d v}{d t v v} - 2 f^4 v \left(\frac{\cos. \xi}{ff} - \frac{\cos. \epsilon}{ee} \right)$$

Alteram horizontalem secundum $M\nu$,

$$\text{Quæ erit} = V \sin. \epsilon - \frac{b ff d v}{d t v v} - 2 f^4 v \left(\frac{\sin. \xi}{ff} - \frac{\sin. \epsilon}{ee} \right)$$

§. LXXXVI. Quod si jam hujusmodi vas cum aqua effluente navi adjungatur, ipsa quoque navis has vires sustinebit, ac prior quidem vis verticalis $M\mu$ nihil conferet ad navem movendam, unde tantum vis posterior ad motum navis imponditur, sicque navis propelleretur secundum directionem $M\nu$ vi

$$V \sin. \epsilon - \frac{b ff d v}{d t v v} - 2 f^4 v \left(\frac{\sin. \xi}{ff} - \frac{\sin. \epsilon}{ee} \right).$$

Verum cum vis V in ipsa navi exerceatur ob renitentiam ipsi æqualem iterum destruitur, unde navis secundum directionem MP propelleretur vi

$$\frac{b ff d v}{d t v v} + 2 f^4 v \left(\frac{\sin. \xi}{ff} - \frac{\sin. \epsilon}{ee} \right).$$

Ac si motus aquæ se jam ad uniformitatem composuerit erit $d v = 0$ & vis navem propellens erit $= 2 f^4 v \left(\frac{\sin. \zeta}{ff} - \frac{\sin. \epsilon}{ee} \right)$.

§. LXXXVII. Quo nunc hæc vis maxima reddatur, navisque quam fortissime propellatur, angulus ϵ ita constitui debet ut ejus sinus non solum evanescat sed etiam fiat negativus & quidem maximus quam fieri potest, fieri ergo debet angulus $\epsilon = -90^\circ$, deinde manifestum est angulum ζ commodissime statui $= 90^\circ$, ut sit $\sin. \zeta = +1$ quare vas hujus modi habebit figuram, ut tam supra quam infra desinat in tubum horizontalem utrumque in eandem plagam spectantem, eritque hoc casu vis navem propellens $= 2 f^4 v \left(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee} \right)$

TABULA II.
Fig. 9.

§. LXXXVIII. Hæc ergo vasis constitutio & aptissima ad propulsionem navis, verum si aqua super ne nulla vi adigatur, suprema superficies ee erit horizontalis ideoque angulus $\epsilon = 0$. Unde hoc casu vis navem propellens, si quidem aqua per foramen FF horizontaliter effluat, ut sit $\zeta = 90^\circ$, erit $= 2 f^4 v \frac{1}{ff} = 2 ff v$; quæ ergo vis reactionis æquatur duplo cylindro cujus basis est foramen FF & altitudo æqualis altitudini celeritati debitæ v .

Fig. 9.

LXXXIX. Verum hic opus est celeritatem nosse qua aqua quovis casu per foramen FF est eruptura, quæ etsi facile definitur, cum motus ad uniformitatem fuerit perductus & quasi per experientiam constet, tamen, quoniam hic jam præcipua Hydraulicæ fundamenta jeci; non abs re fore arbitror, si etiam modum ipsam celeritatem determinandi ex Theoria proposuero.

§. XC. Ad hoc considerari debet status compressionis aquæ in quovis tubi loco. Quamquam enim aqua in minus spatium se cogi non patitur, tamen comparari potest cum eo statu, quem aqua ad diversas profunditates obtinet; hinc statum compressionis per altitudinem

designabo, vel potius profunditatem, ad quam aqua stagnans in pari statu compressionis reperitur.

TABULA II.
Fig. 8.

§. XCI. Exponatur ergo status compressionis aquæ in sectione MN per altitudinem p , sive hic aqua in eodem sit statu, ac si columna aquea altitudinis $= p$ immineret. Hinc ergo aqua circa sectionem MN , quam supra posui $= \zeta\zeta$, propelletur vi $= p\zeta\zeta$. Simili autem modo in sectione mn status compressionis erit $p + dp$, unde oritur vis, abs qua aqua anterior mn FF propellitur, posterior vero repellitur.

§. XCII. Elementum igitur aquæ $MNmn$ ad basin MN propellitur vi $= p\zeta\zeta$ ad alteram vero basin mn repellitur vi $= (p + dp)(\zeta\zeta + 2\zeta d\zeta)$. Quæ vires essent in æquilibrio si rationem basium tenerent, hoc est si esset:

$$p\zeta\zeta : (p + dp)(\zeta\zeta + 2\zeta d\zeta) = \zeta\zeta : \zeta\zeta + 2\zeta d\zeta$$

Hoc ergo aquæ elementum esset in æquilibrio si esset $dp = 0$. Si ergo dp non est $= 0$, hoc aquæ elementum actu repellitur vi $= dp(\zeta\zeta + 2\zeta d\zeta) = \zeta\zeta dp$.

§. XCIII. Præterea autem hæc aqua, quia est gravis, deorsum nititur suo pondere $= \zeta\zeta ds$; unde ob gravitatem hæc aqua secundum directionem tubi Mm propelletur vi $= \zeta\zeta ds \cos. \phi = \zeta\zeta dx$; hinc ergo conjunctim propter gravitatem & statum compressionis elementum aquæ $MNnm$ secundum directionem tubi Mm propelletur vi $= \zeta\zeta dx - \zeta\zeta dp$, hæcque est vera vis, qua motus hujus aquæ acceleratur.

§. XCIV. Supra autem (§. LXXVII) vidimus ad motum elementi aquæ $MNnm$ requiri duas vires $M\mu$ & $M\nu$, ex quibus conficitur vis aquam secundum directionem tubi Mm propellens $=$ vis $M\mu \cos. \phi +$ vis $M\nu \sin. \phi = \frac{ffdv}{dt\gamma v} ds - \frac{4f^4 v d\zeta}{\zeta^3}$. Hæc ergo vis æqualis esse debet vi ante inventæ; unde oritur hæc æquatio

$$\zeta\zeta dx - \zeta\zeta dp = \frac{ffdv}{dt\gamma v} ds - \frac{4f^4 v d\zeta}{\zeta^3}$$

Ex

Ex qua definiri debet altitudo p statum compressionis exponens, ubi quidem ad huc celeritatem \sqrt{v} tanquam cognitam spectamus.

§. XCV. Hinc ergo nanciscimur istam equationem:

$$d p = d x - \frac{f f d v}{d t \sqrt{v}} \cdot \frac{d s}{z z} + \frac{4 F z \cdot d z}{z s}.$$

Hæc formula iterum ita integrata, ut \sqrt{v} & $\frac{d v}{d t}$ pro constantibus habeantur, quoniam tantum statum compressionis aquæ pro præsentis momento determinare est propositum, prodibit ergo:

$$p = x - \frac{f f d v}{d t \sqrt{v}} \int \frac{d s}{z z} - \frac{f^2 v}{z^2} + C.$$

Hic perspicitur, valorem integralem $\int \frac{d s}{z z}$ à figura tubi ejusque amplitudine pendere, quæ, si fuerit cognita, etiam valor illius formulæ poterit assignari.

§. XCVI. Hic jam primo observandum est in orificio FF nullam compressionem totum habere, si quidem à pressione Atmosphæræ animum abstrahamus; erit ergo hic $p = 0$: ponatur ergo integralis $\int \frac{d s}{z z}$ per totam longitudinem tubi sumti valor $= F$; erit $0 = a - \frac{f f d v}{d t \sqrt{v}} F - v + C$. Unde constans C determinatur; sicque pro loco tubi quodcumque M status compressionis erit:

$$p = x - a + v \left(1 - \frac{f^2}{z^2} \right) + \frac{f f d v}{d t \sqrt{v}} \left(F - \int \frac{d s}{z z} \right)$$

§. XCVII. Exprimat altitudo C statum compressionis in sectione suprema EE erit: $C = -a + 1 \left(-\frac{f^2}{z^2} \right) + \frac{f f d v}{d t \sqrt{v}} F$. Tota ergo vis, qua superficies aquæ EE propellitur, erit $= C e e$; quæ ergo vis æqualis esse debet vi supra in calculum inductæ V ita ut sit $C = \frac{v}{e e}$; unde obtinemus hanc æquationem:

Prix de 1753.

E

$$\frac{r}{c} + a = v \left(1 - \frac{f^2}{c^2} \right) + \frac{ff \, d \, v}{d \, i \, v^2} F.$$

Ex qua celeritas v poterit determinari seu celeritas \sqrt{v} ad quodvis tempus determinari.

§. XCVIII. Integrationi hujus æquationis, quia nihil habet difficultatis, non immoror, sed tantum observo, cum motus perductus fuerit ad uniformitatem, quod plerumque satis cito fieri solet, celeritatem, ob $d v = 0$, hac æquatione determinari: $v = \left(\frac{r}{c} + a \right) : \left(1 - \frac{f^2}{c^2} \right)$.

§. XCIX. Hinc igitur patet, si amplitudo superior EE multo major fuerit quam foramen FF celeritatem aquæ per FF effluentis debitam fore altitudini v , ut sit $v = a + \frac{r}{c}$. Ac si vas supra fuerit apertum, neque ulla vi V urgeatur fore $v = a$, scilicet aqua effluet celeritate, quæ erit debita altitudini æquali altitudini aquæ in vase supra foramen.

I.

Primus Modus Navem propellendi.

TABULA III.
Fig. 10.

§. C. Constituatur in Puppi navis vas amplissimum $A E F B$, quod aqua jugiter plenum fervetur, ex quo aqua horizontaliter effluat per foramen $FF = ff$, sitque altitudo aquæ supra hoc foramen $E F = a$, atque ut vidimus aqua effluet celeritate $\sqrt{v} = \sqrt{a}$. Vis igitur reactionis aquæ secundum directionem horizontalem erit $= 2 ff v = 2 ff a$, uti in §. LXXXVIII est ostensum.

§. CI. Tanta igitur vi navis actu propelletur, unde si navis jam celeritate $= \sqrt{c}$ progrediarur, ejusque resistentia absoluta fuerit $= k k$, ita ut resistentia ipsa sit $= k k c$, necesse est ut sit $k k c = 2 ff a$, si quidem motum navis jam ad uniformitatem pervenisse ponamus. Hinc ergo ex datis quantitatibus a , ff & $k k$ celeritas

navis ita erit comparata ut sit $c = \frac{2ff a}{k}$ seu ipsa celeritas erit $\sqrt{c} = \frac{f}{k} \sqrt{2a}$.

§. CII. Cum autem constanter tantundem aquæ supernæ in vas affundi debeat, quantum per foramen effluit, videndum est, quantum aquæ singulis minutis secundis per foramen effluat. Ponamus igitur, grave minuto secundo cadere per altitudinem l , ac si aqua efflueret celeritate \sqrt{l} uno minuto secundo prorumperet volumen aquæ $= 2ffl$. Quare cum aqua effluat celeritate $= \sqrt{a}$, quantitas aquæ singulis minutis secundis elapsæ erit $= 2ff\sqrt{al}$: hinc singulis minutis secundis perpetuo tantundem aquæ supra in vas infundi debet.

§. CIII. Quæ aquæ, cum ex mari hauriri, atque ad altitudinem tanto majorem, quam est altitudo vasis a elevari debeat, quanto magis ipsum vas supra aquam fuerit elevatum hoc sine dispendio virium fieri nequit. Sit altitudo vasis supra aquam $FO = i$, atque tantis viribus opus erit, quæ sufficiant quantitati aquæ $= 2ff\sqrt{al}$ singulis minutis secundis ad altitudinem $a + i$ elevandæ, altitudo autem $FO = i$ tanto major accipi debet, quo magis navis à fluctibus agitur, necesse enim est ut foramen FF semper supra aquam emineat.

§. CIV. Ponamus igitur ad hoc n homines adhiberi, qui singuli celeritate \sqrt{b} agant & vim $= A$ exerçant. Quilibet ergo homo singulis minutis secundis onus $= A$ promovebit per spatium $= 2\sqrt{bl}$. Unde effectus unius hominis uno minuto secundo editus æstimandus est $= 2A\sqrt{bl}$ & effectus n hominum $= 2nA\sqrt{bl}$. Qui cum æqualis esse debeat effectus eodem tempore præstano, quo massam aquæ $2ff\sqrt{al}$ ad altitudinem $(a + i)$ attolli oportet, sequentem obtinebimus æquationem.

$$2(a + i)ff\sqrt{al} = 2nA\sqrt{bl},$$

$$\text{seu } (a + i)ff\sqrt{a} = nA\sqrt{b}.$$

E ij

§. CV. Hinc non determino utrum homines immediate aquam hauriant an ope cujuscumque machinæ, semper enim idem obtinetur effectus, si quidem homines pari celeritate operentur. Machina autem, si qua uti videatur, ita comparata esse debet, ut homines ea celeritate \sqrt{b} , quæ supra commodissima est ostensa, agere queant. Quod, quomodo efficiendum sit, ex iis, quæ supra de constitutione machinarum sunt exposita, non difficulter colligere licet.

§. CVI. Ex æquatione igitur inventa nanciscimur amplitudinem foraminis $ff = \frac{n A \sqrt{b}}{(a+i)\sqrt{a}}$; unde altitudo celeritati navis debita reperitur $c = \frac{2 n A \sqrt{a b}}{k k (a+i)}$. Hic quantitates n , A , b , kk , & i sunt datæ ac sola altitudo vasis a arbitrio nostro relinquitur; quam ergo definire convenit, ut navis maximam celeritatem adipiscatur: expressio igitur $\frac{\sqrt{a}}{a+i}$ maxima est reddenda, quod evenit si statuatur $a = i$ unde fit $c = \frac{n A}{k k} \sqrt{\frac{b}{i}}$.

§. CVII. Applicemus hoc ad casum navis supra (§. XLVIII) consideratæ, sitque $kk = 100$, $n = 100$, $A = \frac{4}{9}$ & $b = \frac{8}{125}$, ac tribuamus altitudini i quantitatem 5 pedum, ut sit $i = 5$; hinc ergo eruitur $c = 0,050283$, cui respondet celeritas fere $1\frac{4}{5}$ pedis in minuto secundo. Machina autem supra adhibita navem ab eadem celeritate fere duplo majori propelli vidimus. Unde hic modus præ superioribus non admodum commendabilis videtur.

§. CVIII. Disparitas hic insignis inter hujus machinæ effectum & superiorum machinarum notanda occurrit, cum enim ibi cubus celeritatis navis numero hominum

proportionalis esset inventus, hic tantum quadratum celeritatis numero hominum proportionale est repertum. Ita hic ad duplam navi celeritatem imprimendam, numero hominum quadruplo majori erit opus, cum ante octuplo majori erit opus fuisset. Unde sequitur, si numerus hominum pro lubitu multiplicari posset, hoc modo tandem navi multo majorem celeritatem impressum iri, quam modis præcedentis sectiones, quod tamen minime probabile videtur.

§. CIX. Ratiocinium autem, quo hic usus sum, esset justum, si elevatio aquæ, tam pro casu navis quiescentis, quam motæ eandem vim requireret; verum manifestum est, si navis ipsa progrediatur, aqua antequam elevari queat motum ipsius navis motui æqualem imprimi debere. Quod cum sine vi effici nequeat, eo majori vi opus erit ad aquam elevandam, quo celerius navis progrediatur. Existimare autem licet ad hoc tantam vim requiri, quanta opus est ad aquam ad altitudinem $= c$ elevandam.

§. CX. Quod si ergo superius ratiocinium hinc emendare velimus. aqua non solum ad altitudinem $a + i$ sed potius ad altitudinem $a + i + c$ elevari debere, censenda est. Hinc ergo prodibit ista æquatio $c = \frac{2nAVab}{kk(a+i+c)}$ ita ut hæc resolvenda sit æquatio quadratica

$$cc + (a + i)c = \frac{2nAVab}{kk}$$

Ex qua elicitur $c = -\frac{1}{2}(a+i) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}(a+i)^2 + \frac{2nAVab}{kk}\right)}$ Qui valor jam proxime ad veritatem accedet.

§. CXI. Ut hæc celeritas fiat maxima, non amplius locum habet valor, $a = i$, sed per differentiationem æquationis quadraticæ, posito a variabili, reperitur $c = \frac{na\sqrt{b}}{kk\sqrt{a}}$; ideoque $\sqrt{a} = \frac{na\sqrt{b}}{kkc}$, qui valor substitutus

dabit $cc + ic = \frac{nnAAb}{k^4c}$ seu $c^3 + icc = \frac{nnAAb}{k^4}$. A cujus æquationis cubicæ resolutione pendet determinatio celeritatis.

§. CXII. Cum altitudo i tam exigua capiatur quam fieri potest, si esset $i = 0$, foret $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{kk}$. Quæ formula similis est illis, quæ pro modis præcedentibus sunt inventæ (§. XXIII). Unde patet hoc casu navi eandem celeritatem impressum iri atque supra. Sed cum c vix unquam exurgat ad unum pedem, altitudo autem i aliquot pedes superare debeat, certe erit $i > ec$, posito igitur $i = 3c$; erit $c\sqrt{c} = \frac{na\sqrt{b}}{2kk}$. Quæ expressio convenit prorsus cum ea quæ §. XXIV, tanquam ad praxin idoneam est inventa: ita ut hoc modo parem hominum vim adhibendo, navis æque celeriter propelli possit atque iis modis præcedentibus, quibus nulla inutiliter impenditur.

§. CXIII. Cum hic casus ad praxin satis accommodatus videatur, ponamus $i = 3c$ ut sit $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{2kk}$; erit $c = \sqrt[3]{\frac{nnAAb}{4k^4}}$, qui valor substitutus pro altitudine vasis a dabit $\sqrt{a} = \frac{nA\sqrt{b}}{kk\sqrt[3]{\frac{nnAAb}{4k^4}}} = \sqrt[3]{\frac{4nA\sqrt{b}}{kk}}$ Unde ipsa altitudo colligitur $a = \sqrt[3]{\frac{16nnAAb}{k^4}} = 4c$.

§. CXIV. Consideremus iterum casum ante allatum, quo erat $n = 100$; $kk = 100$; $A = \frac{4}{9}$ & $b = 125$: reperitur $c = \sqrt[3]{\frac{81 \cdot 125}{32}}$ ped. = 0, 14675 ped. Unde celeritas nascitur singulis minutis secundis spatium 3 pe-

dum absolvens, erit ergo $i = 0,44025$; porro prodit altitudo vasis $a = 0,58700$; orificii denique, per quod aqua effluit, amplitudo erit $ff = \frac{k^2 c^2}{2a} = 12\frac{1}{2}$ pedum quad.

§. CXV. Arca igitur amplissima ad puppin navis adjungi deberet, cujus altitudo, cum semissem pedis parum superare debeat, foramen per totum latus posteriorius instar rimæ excindi deberet, cujus altitudo, si caperetur $\frac{1}{4}$ pedis, latitudo vasis 50 pedum esse deberet, ut hinc amplitudo foraminis prodiret $12\frac{1}{2}$ pedum quadratorum. Quia autem hæc area vix dimidio pede supra aquam prominere deberet, minima agitatio effectum hujus machinæ penitus turbaret. Quin etiam haustus aquæ ad tam parvam altitudinem magnis difficultatibus foret obnoxia.

§. CXVI. Quod incommodum, quo evitetur, altitudini i multo major valor tribui debet; quod si ergo ponamus $i = 15c$, erit $c\sqrt{c} = \frac{n\sqrt{ab}}{4kk} a 16c$. Qui casus jam propius ad praxin esset accommodatus, verum hinc celeritas navis multo minor evaderet, ideoque hæc machina præcedentibus merito postponenda videtur, quippe quibus navi ab iisdem viribus major celeritas imprimi potest.

II.

Secundus Modus Navem propellendi.

§. CXVII. Quemadmodum aqua libere effluere est posita, ita nunc ponamus aquam præter gravitatem vi quadam expelli. Jam vero vidimus maximam hinc vim obtineri si canalis tam supra quam infra fuerit horizontaliter reclinatus.

§. CXVIII. Hic autem non sufficit propulsionem aquæ, quacunque vi perficiatur, determinasse, verum

imprimis opus est, ut modus exponatur, quo aqua continuo elevetur, atque machina ita instruat, ut, vel sine intermissione aquam expellat, vel alternatim aquam cum attrahendo tum eijciendo effectum suum præstet. Commodissima igitur ad hoc institutum videtur machina anticis ordinariis similis, qua aqua motu reciproco attollitur & expellitur.

TABULA III.
Fig. 11.

§. CXXIX. Concipiamus ergo in superiori parte vas instructum esse tubo horizontali AC , in quo embolus EE sit agitandus, infra autem desinat in duplicem rammum, alterum NB , qui aquæ sit immerfus, alterum autem MF horizontaliter reflexum, per cujus orificium FF aqua in aërem expellatur. Valvulis autem m, n efficiatur, ut, dum embolus extrahitur, valvula m clausa, altera n aperiatur & aqua ex mari attollatur, contra vero, dum embolus intruditur, occlusa valvula n , aqua per alteram m apertam expelli possit; sicque alterna emboli agitatione machina tam aquam attollat quam iterum eijciat.

§. CXX. Causa autem quæ aquam, dum embolus extrahitur, sursum pellit est pressio atmosphæræ, quæ, uti constat, æquipollet columnæ aquæ 32 pedes altæ. Unde altitudo tubi horizontalis AC supra aquæ superficiem 32 pedes excedere nequit; ergo altitudo AN aliquot pedibus minor esse debet, ita ut nunquam triginta pedes superare possit.

§. CXXI. Ponamus igitur vim embolum extrahentem esse $= U$ & emboli amplitudinem $EE = ee$: ejus vero altitudinem super aqua $= a$ atque ex hydrostaticis constat vim U æqualem esse debere ponderi voluminis aquæ $= eea$. Tanta ergo vi opus erit ad embolum extrahendum scilicet erit $U = eea$ & $a < 32$ ped.

§. CXXII. Exponat u altitudinem debitam celeritati, qua embolus extrahitur, eritque \sqrt{u} celeritas aquæ in sectione EE , amplitudo autem tubi in B sit æqualis gg ,

gg , eritque celeritas, qua aqua ad B in tubum intrat $= \frac{ee}{gg} \sqrt{u}$. Quæ, quia aqua in tubum ingreditur, comparanda est cum \sqrt{v} , quam supra adhibuimus, uti etiam gg pro ff scribi oportet. Hinc ad motum hujus aquæ requiritur vis horizontalis $= 2eeu$, per §. LXXXVI, ob $\zeta = 0$ & $\varepsilon = -90^\circ$.

§. CXXIII. Tanta ergo vi quoque navis propelletur, dum embolus extrahitur. Hinc ergo patet istum modum præcedenti esse anteferendum, quoniam vis aquam elevans quoque aliquid confert ad navem propellendam, cum superiori modo inutiliter impendatur. Quare hinc quoque præcedentem modum perficere liceret, si scilicet aquam, quæ ibi simpliciter hauriri ponebatur, hoc modo ope hujus antliæ elevaretur, verum, quia hæc perfectio jam in hoc modo continetur, eam tantum indicasse sufficiat.

§. CXXIV. Hæc vis etiam ulterius augeri potest, si ima pars tubi B etiam horizontaliter reflectatur, ut tubo MF fiat parallela; tum enim ob $\sin. \zeta = 1$ prohibet vis navem propellens $= 2e^4u \left(\frac{1}{gg} + \frac{1}{ee} \right)$. Quia autem amplitudo gg admodum magna saltem in calculo assumi debet, quoniam alioquin aqua ascendens motum emboli non sequeretur, hoc augmentum parvi erit momenti. Si enim celeritas \sqrt{u} propterea diminueretur, multo majus detrimentum inde vis propellens pateretur.

§. CXXV. Consideremus nunc etiam alteram partem, qua embolus intruditur & aquam per orificium FF expellit, posita autem amplitudine orificii $= ff$, celeritate, qua aqua expellitur $= \sqrt{v}$, & vi embolum urgente $= V$. Supra invenimus vim navem propellentem esse $= 2f^4v \left(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee} \right)$ (§. LXXXVII). Tum vero celeritas aquæ \sqrt{v} ita est definita ut sit:

Prix de 1753.

F

$v = \frac{\frac{v}{ee} + a}{1 - \frac{f^2}{e^2}}$; denotante a altitudinem emboli supra orificium FF .

§. CXXVI. Valore ergo hoc fuffituito, vis navem propellens erit :

$$\frac{2f^2 \left(\frac{v}{ee} + a \right) \left(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee} \right)}{1 - \frac{f^2}{e^2}} = \frac{2ff(V + aee)}{ee - ff}. \text{ Neminem}$$

hic offendat, quod casu $ff = ee$, hæc vis prodeat infinita, hoc enim casu celeritas nunquam ad uniformitatem, uti affumfimus, reducitur, fed continuo in infinitum ufque augetur; id quod etiam evenit fi $ee < ff$. Quare, ut mox motus obtineatur uniformis, neceffe est, ut amplitudo ee notabiliter major ftatuatur quam ff .

§. CXXVII. Cum igitur fit celeritas aquæ effluentis

$$\sqrt{v} = e \sqrt{\frac{V + aee}{e^2 - f^2}} : \text{erit celeritas, qua embolus intruducitur} = \frac{ff}{e} \sqrt{\frac{V + aee}{e^2 - f^2}}. \text{ Sic igitur elicuimus tam}$$

celeritatem quam vim, qua embolus intruducitur, quorum deinceps vires hominum accommodari oportet.

§. CXXVIII. Ponamus nunc tam extractionem emboli quam ad intrusionem eadem vires eademque celeritate adhiberi, quo commodius machina tractari queat. Debet ergo esse $V = U = eea$; ubi a aliquantum major est quam in formulis præcedentibus, quia hic totam altitudinem super aquæ superficiem denotat, qui excessus seu elevatio foraminis FF super aquam si vocetur $= a$, erit $V = ee(a + a)$. Deinde esse debet celeritas, qua embolus extrahitur

$$\sqrt{u} = \frac{ff}{e} \sqrt{\frac{V - aee}{e^2 - f^2}} = ff \sqrt{\frac{2a + a}{e^2 - f^2}}$$

§. CXXIX. Vis ergo, qua navis, dum embolus ex-

trahitur, ad motum incitatur, erit $\frac{2f^4}{g^2} (ee + gg)$
 $\left(\frac{2ae + aee}{e^4 - f^4}\right)$. Dum autem embolus intruditur, erit vis

navem propellens = $2eeff\left(\frac{2a+a}{ee-ff}\right)$. Ut igitur na-

vis perpetuo æquali vi propellatur, conveniet duas hujus-
 modi machinas in nave constitui, quæ ita agitentur,
 ut, dum in altera embolus extrahitur, in altera intru-
 datur: sic vis constanter navem propellens erit =

$$\frac{2eef^4}{g^2} (ee + gg) \left(\frac{2a+a}{e^4 - f^4}\right) + 2eeff \left(\frac{2a+a}{ee - ff}\right).$$

§. CXXX. Ab hujusmodi igitur machina geminata
 navis perpetuo æquali vi incitabitur: unde cum motus
 navis jam ad uniformitatem fuerit perductus, hæc vis
 resistentiæ debet esse æqualis. Quare, posita celeritate
 navis = \sqrt{c} & resistentia absoluta = kk erit

$$kck = \frac{2eef^4}{g^2} (ee + gg) \left(\frac{2a+a}{e^4 - f^4}\right) + 2eeff \left(\frac{2a+a}{ee - ff}\right).$$

§. CXXXI. Ponamus ad utramque machinam agitan-
 dam simul n homines applicari, ita ut numerus homi-
 num unam moventium sit = $\frac{1}{2}n$; quilibet autem homo
 operetur vi = A & celeritate = \sqrt{b} . Agitetur autem
 embolus ope vectis VC circa C mobilis, cui vires homi-
 num applicatæ sint in puncto P , ac vocetur $CV = x$
 & $CP = z$; huc enim omnis generis machinæ, quibus
 uti visum fuerit, reduci possunt.

§. CXXXII. Cum igitur celeritas hominum seu puncti
 P sit = \sqrt{b} ; erit celeritas puncti $V = \frac{x}{z}\sqrt{b}$; quæ æqua-
 lis esse debet celeritati emboli. Ex quo nascitur hæc

$$\text{æquatio } \frac{x}{z}\sqrt{b} = ffV \frac{2a+a}{e^4 - f^4}.$$

§. CXXXIII. Porro vis uni machinæ in P ap-
 plicata est = $\frac{1}{2}nA$, cujus momentum ergo $\frac{1}{2}nAz$
 æquari debet momento vis, ad motum emboli re-

F ij

quisitæ Vx . Cum autem fit $V = ee(a + \alpha)$, habetur ista æquatio, $\frac{1}{2}nA\zeta = ee(a + \alpha)x$. Ex qua elicitur $\frac{x}{\zeta} = \frac{\frac{1}{2}nA}{ee(a + \alpha)}$. Qui valor in præcedente æquatione substitutus præbet:

$$\frac{nA\sqrt{b}}{2ee(a + \alpha)} = ffV \frac{2a + \alpha}{e^4 - f^4}$$

§. CXXXIV. Cum nunc sit $ff = \frac{neeA\sqrt{b}}{\sqrt{(4e^4(2a + \alpha)^2 + nnAAb)}}$ erit, valorem hunc in prima æquatione substituendo:

$$k k c = \frac{(ee + gg) nnAAb}{2gg ee (a + \alpha)^2} + \frac{nee(2a + \alpha)nA\sqrt{b}}{\sqrt{(4e^4(2a + \alpha)(a + \alpha)^2 + nnAAb)} - nA\sqrt{b}}$$

quæ reducitur ad formam sequentem

$$k k c = \frac{(ee + gg) nnAAb}{2gg ee (a + \alpha)^2} + \frac{nA\sqrt{b}(\sqrt{(4e^4(2a + \alpha)(a + \alpha)^2 + nnAAb)} + nA\sqrt{b})}{2ee(a + \alpha)^2}$$

feu $k k c = \frac{nnAAb(2 + \frac{ee}{gg})}{2ee(a + \alpha)^2} + \frac{nA\sqrt{b}(4e^4(2a + \alpha)(a + \alpha)^2 + nnAAb)}{2ee(a + \alpha)^2}$.

§. CXXXV. Quod si brevitatis gratia ponatur $\frac{nA\sqrt{b}}{2e(a + \alpha)} = \sqrt{p}$, ut fit $nA\sqrt{b} = 2ee(a + \alpha\sqrt{p})$; prodibit facta substitutione: $k k c = 2eep(2 + \frac{ee}{gg}) + 2ee\sqrt{p}(2a + \alpha + p)$. Unde fit altitudo celeritatis navis debita $c = \frac{2ee}{\sqrt{g}} p(2 + \frac{ee}{gg} + \sqrt{(1 + \frac{2a + \alpha}{p})})$. Quæ expressio etiam in hanc transformatur $c = \frac{2nAAb}{2kkee(a + \alpha)^2} (2 + \frac{ee}{gg} + \sqrt{(1 + \frac{4(2a + \alpha)e^4(a + \alpha)^2}{nnAAb})})$.

§. CXXXVI. Quoniam autem vidimus ad id, ut motus aquæ erumpentis quavis actione statim ad uniformitatem reducatur, requiri, ut ee multis vicibus excedat foramen ff quia alioquin vis hic per calculum definita vel nunquam vel nimis fero existeret, ponamus $ee = mff$, ut sit m numerus unitate multo major;

eritque $\frac{x}{z} = \frac{nA}{2mff(a+\alpha)}$ & tertia æquatio præbet:

$$ff = \frac{nA\sqrt{b(mm-1)}}{2m(a+\alpha)\sqrt{(2a+\alpha)}}; \text{ unde conficitur}$$

$$\frac{x}{z} = \sqrt{\frac{2a+\alpha}{b(mm-1)}}.$$

§. CXXXVII. Posito autem $ee = mff$, ac pro ff substituto valore invento, æquatio prima suppeditat

$$kkc = \frac{nA\sqrt{b(2a+\alpha)}}{(a+\alpha)\sqrt{(mm-1)}} \left(2+m+\frac{mff}{zg}\right). \text{ Unde altitudo}$$

$$\text{celeritati navis debita erit } c = \frac{nA\sqrt{b(2a+\alpha)}}{kk(a+\alpha)\sqrt{(mm-1)}}$$

$(2+m+\frac{ee}{zg})$. Ubi ratio ee ad gg ita accipi debet, ut in extractione emboli aqua embolum sequatur; sicque conveniet fractioni $\frac{ee}{zg}$ valorem unitate minorem tribui.

§. CXXXVIII. Hic statim ingens se offert discrimen inter effectum hujus machinæ ac præcedentium, cum hic numerus hominum quadrato celeritatis navis, supra autem eju cubo proportionalis sit inventus, ita ut hanc machinam adhibendo si navis duplo celerius progredi debeat, numerus hominum tantum sit quadruplicandus, cum ante octuplicari debeat. In quo non exigua prærogativa præ machinis præcedentibus est sita.

§ CXXXIX. Ex hac formula quoque apparet expedire, ut altitudines a & α quam minimæ statuatur, quia tum celeritas navis prodit maxima. Si enim a & α evanescerent, celeritas navis revera infinita prodiret, qui autem casus locum habere nequit, cum ipsum fora-

men FF deberet esse infinitum & ratio x ad z infinite parva. Quam ob causam necesse est ut litteris a & α modici valores tribuantur, quo hypothesis calculi ratione motus uniformis melius obtineatur.

§. CXL. Præterea vero ipsa navis agitatio requirit, ut altitudo a unum vel aliquot pedes superet. Deinde etiam necesse est, ut altitudo a multis vicibus excedat diametrum foraminis, quia alioquin amplitudinis foraminis ratio ad altitudinem a haberi debuisset in calculo, quæ tamen est prætermiffa. Oportet ergo esse aa multo majus quam $\frac{na\sqrt{b(m m - 1)}}{2m(a + \alpha)\sqrt{(2a + \alpha)}}$; seu quia m est numerus valde magnus & α tam parvum assumitur quam circumstantiæ permittunt, debet esse $a^3 \sqrt{a}$ multo majus quam $\frac{n^A \sqrt{b}}{2 \sqrt{2}}$.

§. CXLI. Evolvamus igitur cassum supra consideratum (§. CXIV.) quo erat $n = 100$; $kk = 100$; $A = \frac{4}{9}$ & $b = \frac{8}{125}$. Atque statim reperitur $a^3 \sqrt{a}$ multo majusquam 4, seu a^7 multo majus quam 16. Ponamus ergo esse $a = 10$ ped. & $\alpha = 5$ ped. Præterea fit $m = 5$ & $\frac{ee}{2g} = \frac{1}{2}$ unde fit $c = \frac{100 \cdot \frac{4}{9} \sqrt{\frac{8}{125} \cdot 25}}{100 \cdot 15 \cdot \sqrt{24}} \cdot 7 \frac{1}{2}$ sive $c = \frac{2}{9} \sqrt{\frac{1}{15}} = 0,0574$ ped. cui altitudini respondet celeritas singulis secundis spatium $1 \frac{2}{10}$ pedum absolvens, quæ multo minor est quam ea, quæ pro eodem casu per modum tertium sectionis superioris est inventa (§. XLVIII.).

§. CXLII. Ponamus autem, quo navi majorem celeritatem conciliemus, altitudinem $a = 5$ ped. & $\alpha = 2$ ped., reliquis quantitibus iisdem relictis, prodibitque $c = \frac{4}{21} \sqrt{\frac{1}{5}} = 0,0852$ pedis, cui altitudini respondet celeritas $2 \frac{1}{3}$ pedum in minuto secundo, quæ præceden-

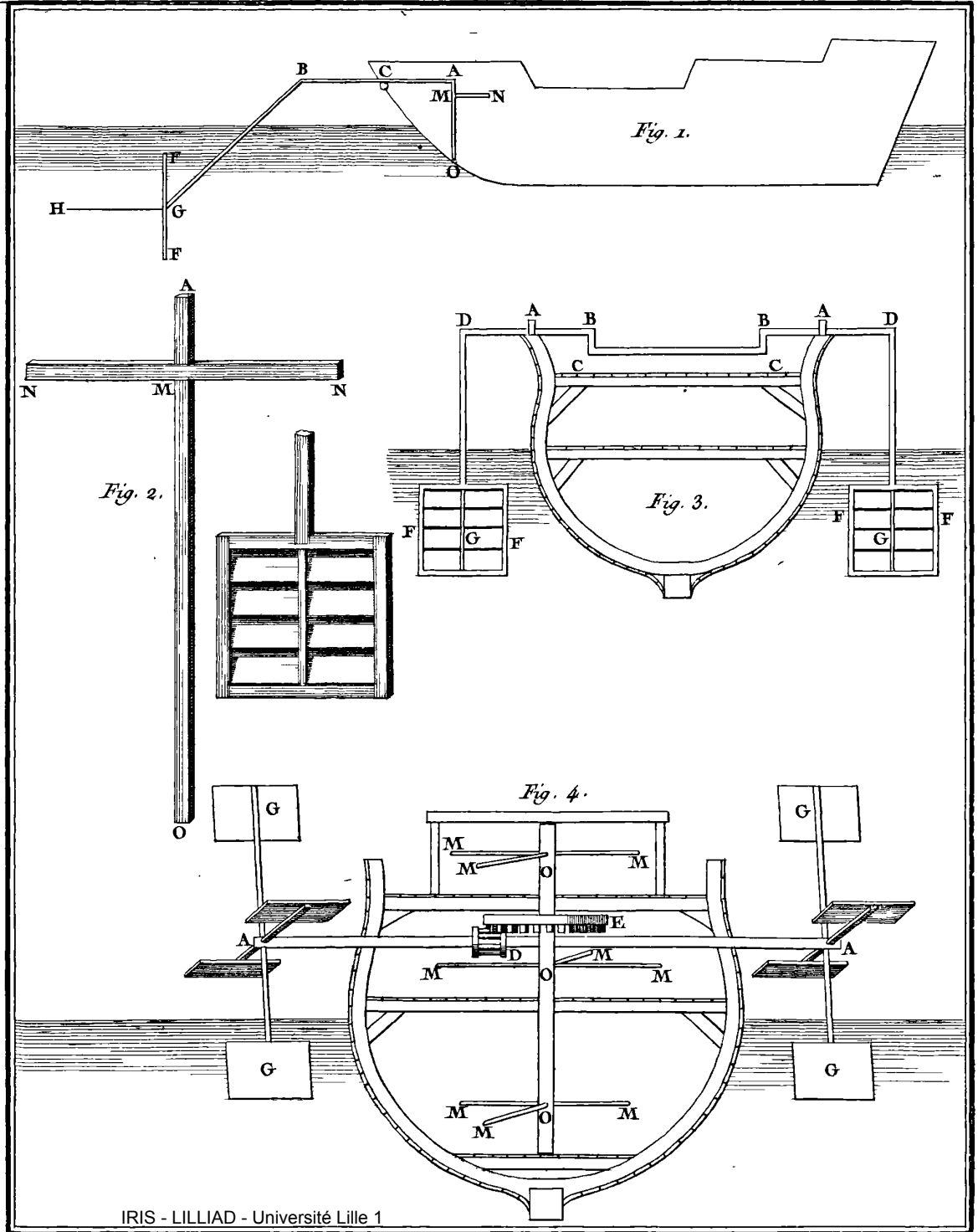
tem tantum fere dimidio pede superat & adhuc multo minor est quam per machinas præcedentis sectionis navi ab iisdem viribus imprimi potest.

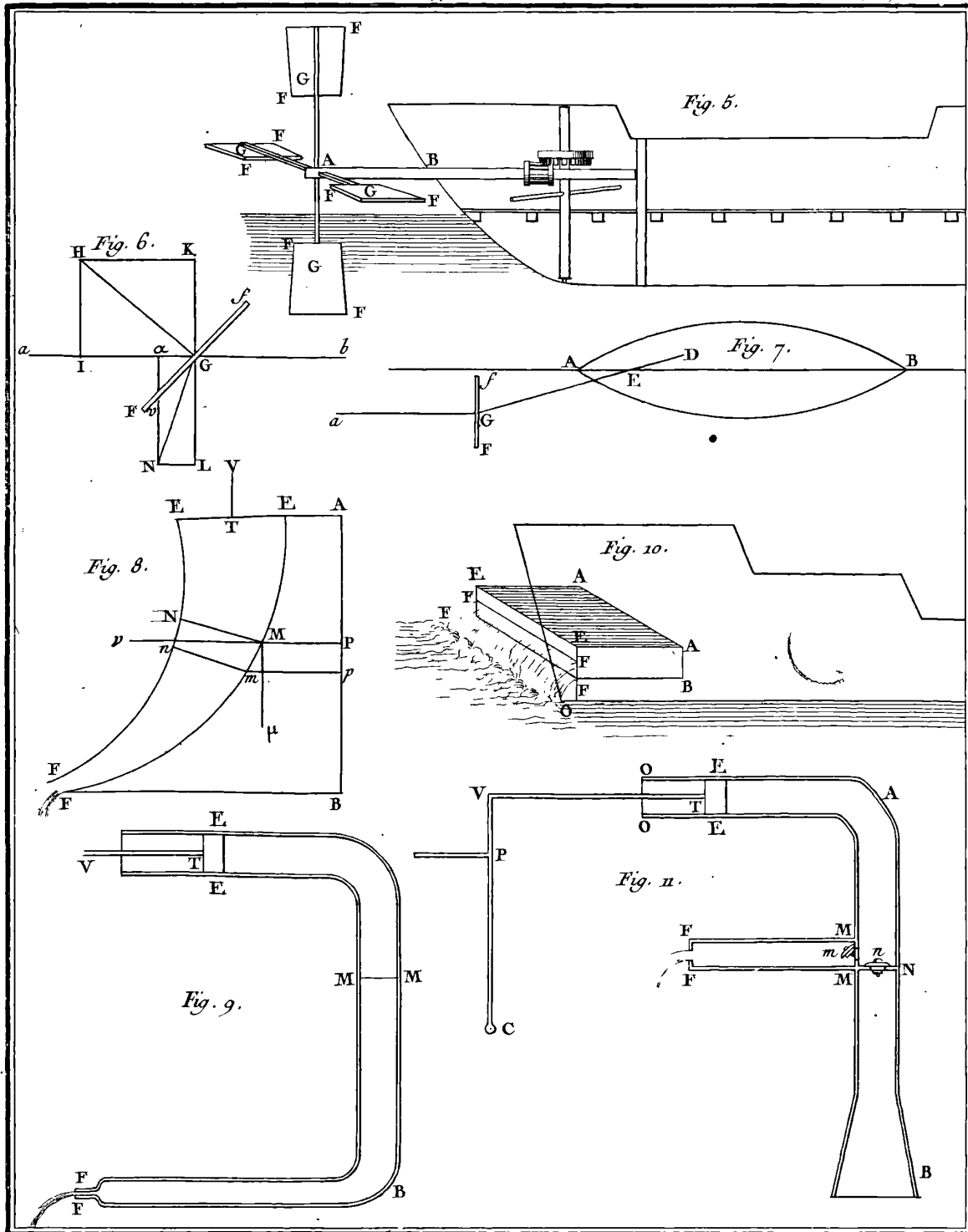
§. CXLIII. Cum igitur hoc modo à 100 hominibus navi minor celeritas imprimatur, quam modis in sectione priori descriptis, multo minorem effectum ab hoc modo expectare licebit, si pauciores homines adhibeantur, quoniam hic celeritas navis secundum rationem subduplicatam, ibi vero secundum rationem subtriplicatam numeri hominum decrescit. Unde si non nimis magno hominum numero uti licet, respectu resistentiæ absolutæ *kk*, semper præstabit machinas prioris sectionis usurpare, quam istam hic descriptam.

§. CXLIV. Contra autem si multo plures homines operi admoveri queant, quam hic assumimus, tum utique effectus hujus postremæ machinæ præcedentes superare posset. Verum, quia tunc altitudo *a* major assumi debet ob rationes ante allatas: inde ipsa quoque navis celeritas minor effet proditura, quamobrem etiam hoc casu nullum lucrum impetraretur.

§. CXLV. His perpensis merito concludi posse videtur, machinas hujus sectionis multo debiliores esse censendas quam præcedentes, ideoque à praxi removendas. Quocirca machinas prioris sectionis præcipue ad usum commendandas esse arbitror, ex iisque imprimis modos tertio & quarto loco descriptos, quippe qui navi maximam celeritatem imprimunt, si quidem paribus viribus utamur. Quin etiam isti modi ad praxin magis videntur accommodati, neque adeo difficile videtur obstacula, quæ forte occurrere queant, remove.

F I N I S.





MEMMOIRE

PRÉSENTÉ

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

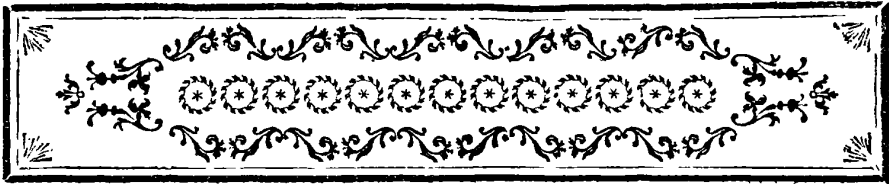
A L'OCCASION DU PRIX DE M.DCC.LIII.

*Par M. MATHON DE LA COUR, de l'Académie Royale des
Sciences & Belles-Lettres de Lyon.*

Parmá inglorius albá.

Prix de 1753.

A



M É M O I R E

*Sur la maniere la plus avantageuse de
suppléer à l'action du Vent sur les grands
Vaisseaux , soit en y appliquant les rames ,
soit en employant quelque'autre moyen que
ce puisse être.*

UN vaisseau environné de deux fluides, l'air & l'eau, peut recevoir son mouvement de leur action ou de leur réaction : de leur action, lorsqu'il est poussé par le vent ou entraîné par un courant : de leur réaction, si on fait mouvoir contre ces fluides une surface tellement liée au vaisseau, qu'il serve comme de point d'appui à la résistance qu'elle éprouve; elle lui procurera alors un mouvement en sens contraire au sien.

L'air a si peu de densité en comparaison de l'eau, qu'on peut du premier coup négliger les moyens fondés sur sa réaction. Celle de l'eau sera toujours infiniment plus efficace, & c'est de ce côté-là qu'il faut tourner nos premières vues.

Tâchons donc de présenter à la réaction de l'eau une surface qui la frappe le plus directement qu'il sera pos-

A ij

sible ; car la vitesse du sillage réduiroit à presque rien la vitesse respectiue des surfaces qui frapperoient l'eau obliquement. Cherchons en même tems les proportions les plus convenables pour procurer une grande vitesse sans trop fatiguer les agens que nous emploierons, & sans déranger ni incommoder les autres opérations de l'équipage. Celui qui parviendra à remplir ces différens objets, peut espérer le suffrage de la célèbre compagnie qui a proposé la question que j'entreprends de traiter, & dont la simple approbation est le prix le plus flatteur de tous pour un cœur sensible à la véritable gloire.

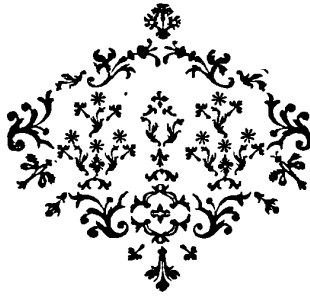
Comme les diverses manieres de procurer le mouvement de la surface qui doit éprouver la réaction de l'eau peuvent se réduire presque toutes au principe du levier du premier genre, c'est sous cette forme que je les examinerai en général. On peut appliquer si aisément les mêmes principes aux autres cas où il ne se trouve point de bras de levier, qu'il n'est pas nécessaire d'en faire un article séparé.

C'est donc sous l'idée des rames ordinaires que je considérerai le moteur du vaisseau. La résistance de l'eau ou sa réaction sur la surface des pales doit être en équilibre avec la force ou puissance de l'agent qui meut la rame. Le point d'appui est le vaisseau même, ou si l'on veut, c'est la résistance de l'eau au mouvement de la proue.

Il faut observer cependant que le vaisseau ne supporte pas ici l'action des deux forces qui sont en équilibre aux deux extrémités de la rame, comme il semble que le point d'appui d'un levier du premier genre devoit les supporter. Dans le cas présent où la puissance motrice n'est pas étrangere & extérieure au vaisseau, elle ne sauroit agir sans être buttée contre lui, & sans lui rendre par conséquent autant de mouvement en arriere que le point d'appui en a reçu en avant de cette même puissance. De-là vient qu'il ne conserve pour aller en avant

que la seule force de la réaction de l'eau sur la pale. Celle de la puissance, se détruisant elle-même par rapport à son action sur le point d'appui, ne mérite plus d'être considérée que par rapport à l'équilibre où elle doit être avec la réaction de l'eau sur la pale. C'est faute d'avoir suffisamment développé cette idée qu'on a été si longtems embarrassé à expliquer nettement l'action des rames.

Je diviserai mon ouvrage en deux parties. Dans la première j'établirai les principes de Théorie nécessaires pour choisir entre les moyens divers qu'on peut employer. Dans la seconde j'en tirerai les conséquences pratiques qui font l'objet principal de la question proposée.



PREMIERE PARTIE.

- J'**APPELLE la masse ou le poids du vaisseau exprimé en livres, *M*
- La surface de la proue, qui éprouve la résistance de l'eau, réduite à une surface plane qui seroit choquée directement & exprimée en piés quarrés, *f*
- La surface dont la réaction produit le mouvement du mouvement du vaisseau, c'est-à-dire la surface de toutes les pales prises ensemble, *s*
- La force de la puissance motrice exprimée par un poids, c'est-à-dire par un certain nombre de livres *n*
- La vitesse avec laquelle cette puissance est mue, exprimée par le nombre de piés qu'elle parcourt dans une seconde, *v*
- La vitesse du fillage, *c*
- Le bras de levier de la puissance, ou manche de la rame, *a*
- Celui de la résistance, c'est-à-dire la longueur de la rame depuis le point d'appui jusqu'au point que nous regarderons comme le centre d'impulsion des pales, *b*
- La vitesse de ce centre des pales sera donc égale à $\frac{b \cdot v}{a}$
- Et *a* étant = 1, elle sera égale à *bv*.

Pour avoir des formules moins compliquées, je commencerai par examiner en général les propriétés des rames en faisant abstraction de leur poids (il est aisé d'y avoir égard dans la pratique en ajoutant à la force motrice ce qui est nécessaire pour cela), en supposant la puissance *n* appliquée en un seul point à l'extrémité du bras de levier *a*, & la réaction de l'eau sur les différentes

bandes des pales comme agissant toute entière à la distance b du point d'appui, sur une surface égale à s . Ce que cette supposition pourroit avoir de contraire à la réalité, n'empêchera pas que nous n'en tirions des conséquences générales utiles pour tous les cas. Elles seront d'autant plus sensibles, que les formules seront plus simples. J'y ajouterai une méthode pour calculer la force & le moment des rames avec plus de précision.

Je laisse de côté les frottemens légers, la résistance de l'air au mouvement du vaisseau, l'adhésion des particules d'eau, &c. & je calcule dans l'hypothèse la plus simple, d'autant mieux qu'il s'agit bien plus ici de comparer entr'eux les différens moyens de donner du mouvement au vaisseau que de mesurer leur effet absolu, & que cette comparaison n'exige pas, avec la même rigueur, qu'on fasse entrer tous ces élémens dans le calcul.

Il y a deux cas à examiner; le premier, lorsque la force motrice agit sans interruption, comme par exemple lorsqu'au lieu de rames ordinaires on emploie une roue dont les vanes ou aubes choquent l'eau continuellement. Le second lorsque l'action n'est pas continue, comme sur les galeres, où l'on estime communément que l'intervalle entre deux coups de rame est double du tems de l'action de la rame.

PROBLEME PREMIER.

Trouver les rapports entre les forces, les surfaces, les bras de levier & les vitesses, & les changemens que produisent leurs différentes combinaisons.

L'HYDRAULIQUE enseigne que la réaction de l'eau, choquée directement par une surface, avec une certaine vitesse, se réduit au poids d'une co-

bonne d'eau qui auroit cette même surface pour base ; avec une hauteur , égale à la hauteur d'où un corps tombant acquerroit par sa chute la vitesse avec laquelle se fait le choc. C'est pour quoi , en supposant les expériences qui donnent soixante-douze livres de poids au pié cubique d'eau marine & $30\frac{1}{2}$ piés par seconde de vitesse à un corps, après l'espace d'une seconde de chute , si la vitesse respective de la surface s de la pale est $bv - c$, la force de la réaction de l'eau sur cette surface étant exprimée en livres sera $\frac{72}{60\frac{1}{2}} s (bv - c)^2$.

La résistance de l'eau à la surface réduite f de la proue sera par la même raison égale à $\frac{72}{60\frac{1}{2}} fc^2$, ou $\frac{216}{181} fc^2$.

Dans l'action continue la vitesse c du sillage ne peut plus croître, lorsque la réaction de l'eau sur les pales est égale à la résistance de l'eau au mouvement du vaisseau. Toute la force est alors en équilibre avec la résistance, & ne sert qu'à empêcher la vitesse de décroître. Alors $s (bv - c)^2 = fc^2$, d'où je tire $c = \frac{bv}{1 + \sqrt{\frac{f}{s}}}$. La vitesse c ne peut plus croître lorsqu'elle est parvenue à cette valeur.

L'équilibre nécessaire entre la puissance & la résistance nous fournit l'égalité $\frac{6c^{\frac{1}{2}}}{72} n = s (bv - c)^2 = fc^2$, le bras de levier a étant supposé égal à 1 ; la force motrice n doit donc être égale à $\frac{72}{60\frac{1}{2}} bfc^2$ & la vitesse c lorsqu'elle ne croît plus est égale à $\sqrt{\left(\frac{60\frac{1}{2}}{72}\right) \frac{n}{b f}}$.

L'égalité $c = \frac{bv}{1 + \sqrt{\frac{f}{s}}}$ nous montre que plus on augmentera la surface s des pales sans toucher aux autres proportions , plus la vitesse c du sillage sera grande , pourvu cependant qu'on augmente suffisamment la force motrice

motrice n , puisque c ne peut pas être plus grande que

$$\sqrt{\frac{60\frac{1}{2}}{72} n}.$$

Si la surface des pales pouvoit croître jusqu'à devenir infinie, la vitesse du sillage deviendroit égale à celle de la rame, mais elle ne peut pas être plus grande. On trouvera la longueur du bras de levier pour ce cas-là en combinant les deux valeurs de C . La première est

$$\text{alors } c = b v, \text{ \& la seconde } c = \frac{\sqrt{\frac{60\frac{1}{2}}{72} n}}{\sqrt{b f}}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{(60\frac{1}{2} n)}{72 v^2}}.$$

Mettant cette valeur de b dans l'égalité $c = b v$, elle se change en celle-ci $c = \sqrt[3]{\frac{(60\frac{1}{2} n v)}{72 f}}$.

ce qui est le terme de la plus grande vitesse qu'il soit possible de supposer au vaisseau lorsque $n v$ & f sont déterminées. Si l'on faisoit b plus court que

$$\sqrt[3]{\frac{(60\frac{1}{2} n)}{72 v^2}}$$

sans augmenter la vitesse v de la puissance, celle du sillage (qui est égale à $b v$ dans la supposition où nous sommes d'une surface s infinie) diminueroit; & une partie de la force motrice n resteroit inutile, puisqu'elle doit être égale à $\frac{72}{60\frac{1}{2}} b f c^2$.

Il ne faut donc jamais faire le bras extérieur b de la rame plus petit que $\sqrt[3]{\frac{(60\frac{1}{2} n)}{72 v^2}}$, & il faut toujours le

faire plus long, puisque la supposition d'une surface s infinie est impossible, & que dans la pratique elle ne peut pas même être excessivement grande; mais d'un autre côté plus on allongera ce bras pour diminuer la surface s des pales, la force n restant la même, plus la vitesse du sillage fera petite, puisqu'elle est en raison in-

Prix de 1753.

B

verse de \sqrt{b} , car $c = \frac{\sqrt{\left(\frac{60\frac{1}{3}}{72}\right) n}}{\sqrt{bf}}$. C'est ce qu'on favoit déjà en partie par la raison qu'on ne peut augmenter le bras de levier de la résistance, en conservant cependant l'équilibre, sans diminuer en même tems cette résistance qui est égale à $\frac{72}{60\frac{1}{3}} f c^2$.

Les combinaisons des deux mêmes égalités $c = \frac{bv}{1 + \sqrt{f}} \sqrt{s}$

& $c = \frac{\sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n}}{\sqrt{bf}}$ nous donneront les rapports entre

b , s , v , c & n lorsque la surface des pales n'est pas infinie. On aura donc $b = \sqrt[3]{\left(\frac{60\frac{1}{3}}{72} n \frac{1 + \sqrt{f}}{\sqrt{s}}\right)^2}$

$n = \frac{72}{60\frac{1}{3}} b^3 v^2 s \cdot \frac{f}{v + \sqrt{f}} v = \left(1 + \frac{\sqrt{f}}{v}\right) \cdot \sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n}$,

$\sqrt{s} = \frac{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n \sqrt{f} + f v \sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n b^3}}{b^3 f v^2 - \frac{60\frac{1}{3}}{72} n}$ mettant cette valeur de

b dans l'égalité $c = \frac{bv}{1 + \sqrt{f}} \sqrt{s}$ on en tire $c = \sqrt[3]{\frac{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n v \frac{1}{1 + \sqrt{f}}}{f \sqrt{s}}}$

J'en conclus que si l'on veut faire croître la vitesse du fillage en augmentant la force n & en donnant au bras

extérieur b de la rame la valeur $b = \sqrt[3]{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n \frac{1 + \sqrt{f}}{f \sqrt{s}}}$

sans toucher au reste, il faut que la force n croisse comme les cubes de c ; au lieu qu'il suffit qu'elle croisse comme les carrés de c , lorsque b restant le même on augmente la vitesse v , en donnant à la surface s la proportion requise, puisque nous avons ci-devant l'égalité

$$c = \frac{\sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n}}{\sqrt{fb}}.$$

Lorsqu'on commence à ramer & que c est encore $= 0$ la force n doit être $= \frac{72}{60^{\frac{2}{3}}} b^3 v^2 s$ pour être en équilibre contre l'effort de la rame. Multipliant cette valeur par la fraction $\frac{f}{v s + v f}$, on aura la force qui suffit pour maintenir la vitesse du fillage lorsqu'elle ne croit plus.

Il sembleroit que puisque $n v$ est comme le cube de c , il doit être indifférent d'augmenter n ou v , pourvu que leur produit soit un *plus grand*; mais nous verrons dans le problème suivant qu'une plus grande vitesse v procure plus promptement le mouvement au vaisseau.

Je conclus de tout cela qu'il faut 1°. tâcher que la vitesse v de l'agent soit la plus grande que faire se pourra, sans diminuer son produit par la force n . 2°. Augmenter plutôt la surface des pales que la longueur du bras extérieur b de la rame, à moins qu'on ne soit forcé à ce dernier parti, soit parce que la force motrice ne manque pas & que la vitesse v est trop petite; alors en augmentant le bras de levier & par conséquent la vitesse des pales, on augmentera aussi la vitesse du fillage. 3°. Il faut par la même raison prendre garde de ne pas accourcir le bras intérieur ou manche a de la rame en plaçant des rameurs trop près du point d'appui. 4°. Il est très-utile, dans tous les cas, de diminuer la surface de résistance f de la proue le plus qu'on pourra, sans nuire aux autres opérations du navire.



PROBLÈME SECOND.

Trouver la vitesse c que le vaisseau acquiert pendant un tems déterminé T , lorsque l'action de la rame est continue. Ou la vitesse c étant donnée, trouver le tems T .

DANS le Problème précédent nous avons trouvé la plus grande vitesse que l'action continue pouvoit donner au vaisseau. Il est important de savoir s'il faut longtems pour acquérir cette vitesse, ou au moins pour en approcher (car il est aisé de comprendre qu'on ne pourroit y parvenir qu'au bout d'un tems infini); & quels sont les moyens de la procurer plus promptement.

Nous savons que l'effort absolu sur les pales des rames est $\frac{72}{60^{\frac{2}{3}}}$. $s (bv - c)^2$, & la résistance de l'eau au mouvement du vaisseau $\frac{72}{60^{\frac{2}{3}}}$. fc^2 ; ainsi la force que pousse le vaisseau étant exprimée par un poids sera

$$\frac{72}{60^{\frac{2}{3}}} (s (bv - c)^2 - fc^2).$$

On peut comparer son effet & la vitesse qu'elle donne au vaisseau à l'effet de la pesanteur, & à la vitesse de la chute des corps graves.

J'appelle g l'élément de la vitesse des corps dans leur chute causée par la pesanteur; je veux dire la portion de vitesse que les graves acquièrent à chaque instant. La pesanteur leur en donne une égale lorsque les tems de leur chute sont égaux & que rien ne leur résiste, parce qu'étant proportionnelle à leur masse, c'est-à-dire étant également dans toutes les parties de leur masse, elle agit sur cette même masse; au lieu que dans le cas que

nous examinons, le poids qui pousse le vaisseau est variable, & agit sur la masse du même vaisseau qui ne lui est point proportionnelle.

L'égalité qui doit se trouver entre la cause & l'effet donnera pour la chute des graves l'équation différentielle $g M dt = dc$. (M exprimant la masse des corps pesans & c leur vitesse) d'où l'on tire l'égalité $t = \frac{c}{g}$ qui signifie que le tems t est à celui qu'on a pris pour l'unité, par exemple, à une seconde ce que c est à la vitesse élémentaire g , ou que les tems sont en même proportion que les vitesses, & que cette espece de rapport des tems aux vitesses a $\frac{1}{g}$ pour exposant.

Si l'on veut à présent exprimer les vitesses c & g par les espaces que chacune d'elles fait parcourir dans une seconde, on fait par l'expérience que g est $= 30 \frac{1}{6}$ piés par seconde; c'est-à-dire que la vitesse acquise dans la chute, fait parcourir à un corps grave autant de fois $30 \frac{1}{6}$ piés par seconde, que le tems de la chute t contient de secondes. Nous ferons donc dans la suite de nos calculs $g = 30 \frac{1}{6}$.

Dans le cas que nous examinons, où la force $\frac{72}{60 \frac{1}{3}}$ (*s.* $(bv - c)^2 - fc^2$) qui pousse le vaisseau est égale à un poids, qui n'est pas en même raison que la masse M du vaisseau qu'elle fait mouvoir, l'égalité qui doit se trouver entre la cause & l'effet nous donnera pour équation élémentaire de la vitesse c du sillage

$$\frac{72}{60 \frac{1}{3}} g (s. (bv - c)^2 - fc^2) dT = M dc,$$

d'où je tire en écrivant $30 \frac{1}{6}$ au lieu de g ,

$$T = \frac{1}{36} M \int \frac{dc}{sb^2v^2 - 2sbvc + s - f).c^2}$$

pour intégrer la fraction qui est sous le signe \int je la partage en deux autres qui lui sont égales.

$$\frac{\frac{dc}{2bv\sqrt{sf}}}{-sbv - bv\sqrt{sf} + c} \quad \& \quad \frac{\frac{dc}{2bv\sqrt{sf}}}{sbv - bv\sqrt{sf} - c}$$

On remarquera, pour rendre l'intégrale complète, que lorsque T est $= 0$, il faut que c soit aussi $= 0$. On aura donc

$$T = \frac{1}{72} \frac{M}{bv\mathcal{V}sf} \left\{ L\left(\frac{-sbv - bv\mathcal{V}sf + c}{s-f}\right) - L\left(\frac{sbv - bv\mathcal{V}sf - c}{s-f}\right) - L\left(\frac{-sbv - bv\mathcal{V}sf}{s-f}\right) + L\left(\frac{sbv - bv\mathcal{V}sf}{s-f}\right) \right\}$$

réduisant ces logarithmes à un seul & divisant par $s-f$

$$\text{on aura } \frac{72}{M} \frac{bv\mathcal{V}sf \cdot T}{c} = L \frac{-sbv + (s - \mathcal{V}sf)c}{-sbv + (s + \mathcal{V}sf)c}.$$

Pour réduire ce logarithme à ceux des tables ordinaires, il faut le multiplier par la fraction décimale 2302585 &c. (*Voyez Wolfius Element. Analyseos*, Part. II, Sect. 2, N° 259.) ce qui donne, en employant les fractions décimales,

$$31.2692. \frac{bv\mathcal{V}sf \cdot T}{M} = L \frac{-sbv + (s - \mathcal{V}sf)c}{-sbv + (s + \mathcal{V}sf)c}$$

La vitesse c étant donnée, il sera aisé de trouver le tems T par cette formule. Si c'est au contraire le tems qui est connu, voici comment on trouvera la vitesse. Appellons N la quantité qui est sous le signe L . Elle sera connue, puisque son logarithme est supposé connu.

$$\text{On aura donc l'équation } N = \frac{-sbv + (s - \mathcal{V}sf)c}{-sbv + (s + \mathcal{V}sf)c}$$

d'où l'on tire $c = \frac{bv}{1 + \frac{N+1}{N-1}} \sqrt{f}$. Plus le tems T est long,

plus la valeur de N sera grande, & plus l'expression

$$\frac{N-1}{N+1} \text{ approchera d'être } = 1, \text{ \& } c \text{ d'être } = \frac{bv}{1 + \frac{\mathcal{V}f}{s}}.$$

Nous avons vu, dans le Problème précédent, que c'étoit un terme au-delà duquel elle ne pouvoit plus croître.

Quelque grande que soit la masse M du vaisseau, on trouvera, en calculant selon cette formule, qu'un intervalle de tems assez court suffit ordinairement pour parvenir à une vitesse fort approchante de ce terme; mais il faudroit un tems infini pour y arriver tout-à-fait

& pour avoir $\frac{N+1}{N-1} = 1$.

Cette formule nous apprend aussi que plus les valeurs de bv & de \sqrt{s} feront grandes, moins il faudra de tems au vaisseau pour acquérir la vitesse c .

Si le vaisseau avoit déjà une vitesse k lorsque l'action de la rame a commencé, il est évident que le tems T qu'il lui faut pour parvenir à une certaine vitesse c , doit être égal à celui que donne la formule précédente pour acquérir c , moins celui qu'il eût fallu pour acquérir k ;

d'où l'on tirera l'égalité ^{31. 2692.} $\frac{bv\sqrt{sf} \cdot T}{M} = \text{logarith. de}$

$$\frac{sb^2v^2 - (sbv - bv\sqrt{sf})k + (s-f)kc - (sbv + bv\sqrt{sf})c}{sb^2v^2 - (sbv + bv\sqrt{sf})k + (s-f)kc - (sbv - bv\sqrt{sf})c}$$

Si nous appellons N ce qui est sous le signe L , on

$$\text{aura } c = bv \cdot \frac{sbv + (\frac{N+1}{N-1}\sqrt{sf} - s)k}{(s + \frac{N+1}{N-1}\sqrt{sf})bv + (f-s)k}$$

Cette formule devient égale à la précédente 1°. lorsque κ est $= 0$. 2°. Lorsque κ est $= 1$, de même que $\frac{N+1}{N-1}$ parce que alors le tems étant infini, la vitesse du fillage parvient dans toutes les deux à sa plus grande valeur.



PROBLEME TROISIEME.

Trouver les diminutions de la vitesse du vaisseau produites dans un certain intervalle de tems par la résistance de l'eau, lorsque l'action qui causoit son mouvement a cessé. Ou cette diminution étant connue, trouver le tems.

J'APPELLE ce tems t , la vitesse du sillage lorsque l'action a cessé c , la vitesse décroissante (exprimée par l'espace qu'elle fait parcourir dans une seconde) κ .

La force qui produit cette diminution, est la résistance de l'eau que nous savons égale à $\frac{72}{60^{\frac{1}{3}}} f \kappa^2$. L'élément de la vitesse décroissante sera donc, en suivant la méthode du Problème premier, $\frac{72}{60^{\frac{1}{3}}} g f \kappa^2 dt = M - d\kappa$; d'où nous tirerons $t = \frac{M}{36f} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{c} \right)$ & $\kappa = \frac{M}{M + \frac{72}{60^{\frac{1}{3}}} f t c}$ en observant que lorsque t est $= 0$, κ est $= c$ & que g est $= 30^{\frac{1}{6}}$.



PROBLEME

PROBLEME QUATRIEME.

Trouver la plus grande vitesse où puisse parvenir un vaisseau lorsque l'action qui lui donne son mouvement n'est pas continue, mais qu'elle est alternativement interrompue. Et les vitesses étant données, trouver les tems de l'action & de l'interruption,

ON peut connoître à-peu-près cette vitesse par un calcul prompt & facile, si l'on suppose d'un côté que l'action de la rame, & de l'autre la résistance de l'eau au mouvement du vaisseau ne varient pas sensiblement, & qu'elles font croître ou décroître la vitesse à proportion du tems qu'elles agissent. Cela arrive ainsi: lorsque les tems de l'action & de l'interruption sont tous les deux fort courts; lorsqu'ils sont plus longs, les changemens de la vitesse dont nous ne prenons ici qu'une espece de valeur moyenne, peuvent apporter quelque différence à la mesure des forces.

Si la durée de l'interruption est à celle de l'action comme p est à 1, on aura l'égalité $s(bv - c)^2 - fc^2 = pfc^2$; car il faut que l'action rétablisse ce que l'interruption a fait perdre, & par conséquent que $s(bv - c)^2 c^2 - fc^2$ qui représente la force pendant l'action, soit d'autant plus grand que le tems p de l'interruption & la force de la résistance sont plus grands:

On en conclut $c = \frac{v}{1 + \sqrt{f v (p+1)}}$. D'où l'on voit que

si par exemple s est $= f$, dans l'action continue, la vitesse auroit pu devenir égale à $\frac{100}{200} bv$; si le tems de l'interruption est égal à celui de l'action, & par consé-

Prix de 1753.

C

quent $p = 1$, elle ne croîtra pas au-delà de $\frac{100}{240} b v$; si le tems de l'interruption est double de celui de l'action & $p = 2$, elle ne passera pas $\frac{100}{271} b v$. Cette perte de vitesse, produite par l'interruption de l'action, sera d'autant plus grande, que la surface s des pales sera plus petite en comparaison de celle de la proue, comme il est aisé de le voir par la seule inspection de la formule. Ce qui prouve de nouveau combien il est utile d'avoir une grande surface des pales.

Comme cette méthode n'est pas suffisante pour satisfaire à toute la rigueur géométrique, en voici une plus exacte.

Nous avons vu dans le Problème troisième que si le vaisseau avoit une vitesse c , lorsque l'action de la rame a cessé, il n'aura plus, après un tems égal à t , qu'une vitesse $k = \frac{M c}{M + 36 f t c}$.

Le Problème second nous a montré que si le vaisseau a une vitesse k , lorsque l'action de la rame commence, il parviendra dans un tems t à une vitesse

$$c = b v \frac{s b v + \left(\frac{N+1}{N-1} \sqrt{s f} - s\right) k}{\left(s + \frac{N+1}{N-1} \sqrt{s f}\right) b v + (f - s) k}$$

Il est donc visible que si c & k du Problème troisième sont les mêmes que c & k du Problème second, nous aurons la solution que nous cherchons (T étant le tems de l'action de la rame & t celui de l'interruption), il faut donc, au lieu de k , écrire dans le Problème second la valeur $\frac{M c}{M + 36 f t c}$ tirée du Problème troisième, nous parviendrons à l'égalité

$$t^2 + \left\{ \frac{(M - 18 b v f t) 2 s b v c}{(f - s) M + 36 b v f t \left(s + \frac{N+1}{N-1} \sqrt{s f}\right)} - \frac{s b^2 v^2 M}{(f - s) M + 36 b v f t \left(s + \frac{N+1}{N-1} \sqrt{s f}\right)} \right\}$$

d'où l'on tirera les valeurs de c & de k , les tems T & t

étant donnés ; ou au contraire , les vitesses étant données , on trouvera les tems ; puisque le rapport de N au tems T est déterminé dans le Problème second.

PROBLEME CINQUIEME.

Trouver la force absolue & le moment d'une rame AB (fig. 5.) qui est mue autour d'un centre A , & les rapports entre les tems T & les vitesses c du sillage.

Nous avons supposé jusqu'à présent que tous les points de la surface s des pales étoient choqués également & à une même distance b du centre. Les conclusions que nous avons tirées de cette supposition n'en sont pas moins utiles pour nous faire connoître les propriétés du mouvement des rames & les principales proportions entre les forces, les surfaces & les vitesses, surtout quand il n'y a que l'extrémité de la rame qui soit plongée dans l'eau. Mais comme dans la réalité chaque bande de la pale a une vitesse relative différente, & fait par conséquent un effort absolu différent, & a une distance du centre différente ; il est utile de calculer ces efforts absolus & ces momens avec plus de précision.

Je suppose que le mouvement de la rame est fait dans un plan vertical ; les conclusions que j'en tirerai s'appliqueront plus naturellement au mouvement des roues à aubes que j'ai principalement en vue, & il n'en fera pas moins aisé de les appliquer aux rames inclinées, comme sont celles des galères.

J'appellerai la longueur du bras extérieur de la rame exprimée en piés

h

C ij

| | |
|---|----------------|
| Celle du bras intérieur ou manche de la rame, en supposant que tout l'effort de la puissance se fait au même point. | a |
| La distance du centre à chaque bande de la pale | x |
| La vitesse de l'extrémité de la rame qui est plongée dans l'eau | v |
| Celle de chaque bande fera donc | $\frac{xv}{b}$ |
| Le sinus total | r |
| Celui de l'angle d'inclinaison de la rame avec la ligne horizontale; c'est-à-dire avec la direction de la vitesse c du vaisseau | $\frac{v}{c}$ |
| La largeur de la pale que je suppose égale partout | L |

La vitesse relative de chaque petite bande de la pale fera donc $\frac{xv}{b} - \frac{xc}{r}$. Et par conséquent la force absolue sur chacune de ces petites bandes, dont la longueur est L & la largeur dx , étant exprimée en poids & en livres, fera $\frac{72}{60^{\frac{3}{2}}}$ $L dx (\frac{xv}{b} - \frac{xc}{r})^2$ & leur moment $\frac{72}{60^{\frac{3}{2}}}$ $L x dx (\frac{xv}{b} - \frac{xc}{r})^2$. Formules dont les intégrales donneront l'effort absolu & le moment de la rame.

Si elle est plongée dans l'eau jusqu'en A, la partie la plus proche du centre qui aura une vitesse moindre que celle du vaisseau, nuira au mouvement, bien loin de le favoriser. L'effort utile de la rame ne commence qu'au point où x est $= \frac{bxc}{rv}$.

Il faut donc, dans la supposition que la rame est plongée jusqu'au centre, après avoir intégré & mis h au lieu de x dans l'intégrale, soustraire de cette même intégrale pour la rendre complete deux fois la valeur de l'intégrale où l'on auroit écrit $\frac{bxc}{rv}$ au lieu de x . Une fois parce que cette quantité ne doit pas être comprise dans l'effort de la rame, & une seconde fois parce qu'elle agit en sens contraire & détruit une partie de cet effort.

Cette soustraction se fera d'elle-même, quand on cherchera par la méthode suivante l'effort & le moment sur la pale cB qui commence à une distance Ac du centre, telle que la vitesse du point c est plus grande ou au moins égale à celle du sillage. C'est pourquoi, dans les calculs suivans, je suppose qu'on aura eu cette attention en plaçant les rames, & je cherche simplement quel est l'effort & le moment sur une pale cB , dont le point c a une vitesse en arriere plus grande que celle du sillage.

J'appelle la ligne Ac , mh .

Il faut 1^o. prendre l'intégrale des formules qui donnent l'élément de l'effort, & celui du moment, en supposant $x = h$, & sans y faire aucun changement pour les quantités constantes qu'il faudroit soustraire, parce que cette soustraction se fera d'elle-même, comme je viens de le dire. 2^o. Prendre la même intégrale, en supposant x égal à mh . 3^o. Soustraire cette seconde valeur de la précédente. Le reste exprimera l'effort absolu sur la pale cB dans la première formule, & le moment dans la seconde. Cet effort absolu sera donc

$$\frac{72}{60\frac{2}{3}} L h \left(\frac{1-m^3}{3} v^2 - (1-m^2) v \frac{2}{7} c + (1-m) \frac{2^2}{r^2} c^2 \right).$$

Mais on observera que lorsque les rames ne font pas un angle droit avec la direction du sillage, leur effort qui est perpendiculaire à la pale, n'agit pas dans la direction du sillage. Il faut donc le décomposer en le multipliant par $\frac{2}{7}$ pour avoir la portion avec laquelle il agit utilement pour le mouvement du vaisseau, & avec laquelle il s'oppose à la résistance de la proue $\frac{72}{60\frac{2}{3}} f c$. On aura donc

$$L h \left(\frac{1-m^3}{3} \frac{2}{r} v^2 - (1-m^2) v \frac{2^2}{r^2} c + (1-m) \frac{2^3}{r^3} c^2 \right) = f c^2.$$

L'égalité qui doit se trouver entre le moment de l'effort absolu & celui de la puissance n nous donnera l'équation

$$L h^2 \left(\frac{1-m^4}{3} v^2 - \frac{2}{3}(1-m^2) \frac{2}{7} v c + \frac{1}{2}(1-m^2) \frac{2^2}{r^2} c^2 \right) = \frac{60 \frac{1}{2}}{72} an.$$

On en peut conclure qu'il est plus avantageux d'augmenter la largeur L des rames que leur longueur h , puisque leurs momens sont comme les quarrés de h & seulement comme les largeurs L , lorsque m est une quantité constante, c'est-à-dire que la longueur de la pale est proportionnelle à celle du bras extérieur h .

Si nous voulons connoître l'effort ou le moment d'une roue à aubes, il faudra prendre la somme des efforts ou des momens de chaque aube.

PROBLEME SIXIEME.

Trouver les rapports entre les tems T & les vitesses c , tant lorsque l'action des rames ou des roues à aube est continue, que lorsqu'elle est interrompue.

POUR trouver plus aisément les rapports entre les tems & les vitesses, & abrégér les calculs, on peut se contenter de prendre les efforts moyens. En donnant par exemple à $\frac{2}{7}$ une valeur moyenne entre ses différentes valeurs, on aura l'effort moyen d'une rame qui parcourt dans son mouvement un arc connu. Si c'est une roue qui fait mouvoir le vaisseau, il faut calculer ses principales situations, & prendre l'effort moyen entr'elles. Dans tous ces cas, il fera toujours exprimé par une formule qui se réduira à cette forme :

$$\frac{7^2}{60 \frac{1}{2}} (p v^2 - q v c + b c^2),$$

p, q & b exprimant des coefficients connus, composés des quantités $(1-m)$ $L, h, \frac{2}{7}$, &c.

L'élément de la vitesse sera, comme dans le Problème

second, $d T = \frac{1}{36} M \int \frac{d x}{p v^2 - q v c + (b - f) c^2}$. Pour intégrer, je partage la fraction qui est sous le signe f en deux autres qui lui sont égales, & j'écris s au lieu des quantités connues $b - f$; ce qui me donne

$$T = \frac{1}{36} M \int \frac{\frac{d c}{v \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)}}{\frac{q v - v \mathcal{V}(q^2 - 4 p s) - c}{2 s}} + \frac{\frac{d c}{v \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)}}{\frac{-q v - v \mathcal{V}(q^2 - 4 p s) + c}{2 s}}$$

Après avoir intégré, ajouté & soustrait les quantités qui rendent l'intégrale complete, comme dans le Problème second, & réduit le logarithme à ceux des tables ordinaires, j'aurai

$$15.6346. \frac{v \mathcal{V}(q^2 - 4 p s) T}{M} = L \frac{-2 p v + (q - \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)) \cdot c}{-2 p v + (q + \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)) \cdot c}$$

& $c = \frac{2 p v}{q + \frac{N+1}{N-1} \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)}$, N exprimant la quantité qui est sous le signe L .

Si le vaisseau avoit une vitesse k , lorsque l'action des rames, ou des roues a commencé, le rapport entre les tems & les vitesses, sera exprimé par cette formule :

$$15.6346. \frac{v \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)}{M} \cdot T =$$

$$L \frac{2 p v^2 - v(q + \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)) k - v(q - \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)) c + 2 s k c}{2 p v^2 - v(q - \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)) k - v(q + \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)) c + 2 s k c}$$

$$\& c = v \cdot \frac{2 p v - q k + \frac{N+1}{N-1} \mathcal{V}(q^2 - 4 p s) k}{v q - 2 s k + \frac{N+1}{N-1} v \mathcal{V}(q^2 - 4 p s)}$$

On aura la plus grande vitesse c où puisse arriver le vaisseau, lorsque alternativement l'action est interrompue pendant le tems t & agit pendant un tems T , si l'on écrit dans la formule précédente, au lieu de k , sa valeur $\frac{M c}{M + 36 F t c}$ tirée du Problème troisieme, cela donnera l'égalité

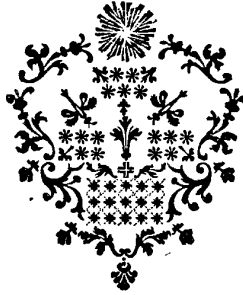
$$c^2 + 2v(qM - 36pvft)c$$

$$36ft(qv + v \frac{N+1}{N-1} \cdot \sqrt{q^2 - 4ps}) - 2sM$$

$$2pv^2M$$

$$36ft(qv + \frac{N+1}{N-1} \cdot v\sqrt{q^2 - 4ps}) - 2sM$$

d'où l'on tirera les valeurs de k & de c ; ou, au contraire, ces vitesses étant connues, on trouvera les tems T & t .





SECONDE PARTIE.

LES principes démontrés dans la première Partie de cet ouvrage, indiquent l'effet que nous devons attendre des moyens divers qu'on peut employer pour procurer le mouvement d'un vaisseau abandonné par le vent, & guident dans le choix.

Ces moyens peuvent être différens selon les circonstances particulières de la forme & de la grandeur du vaisseau, de la force de l'équipage, de la nature des mers où l'on navige, &c. C'est pourquoi nous devons naturellement laisser une grande partie du détail de l'exécution à l'habileté des constructeurs des navires & de ceux qui les commandent, & nous contenter de marquer en gros le mécanisme qui nous a paru le plus propre à donner une plus grande vitesse au vaisseau en fatiguant moins l'équipage.

On ne peut gueres penser à avoir d'autres moteurs que des hommes, les chevaux exigent pour leur subsistance une trop grande quantité d'eau, de foin & de grains; ils auroient trop de peine à supporter le travail, joint à la fatigue du voyage, & on ne peut les employer qu'avec des machines trop composées & qui tiennent trop de place. Tâchons donc de tirer le meilleur parti que nous pourrons de la force des hommes.

Rien de plus simple que les rames; mais si on les fait semblables à celles des galères, leur longueur & leur poids les rendront pénibles, embarrassantes, & d'un mouvement trop lent pour en attendre un effet qui réponde à la fatigue qu'elles causent à l'équipage.

Prix de 1753.

D

On éviteroit la plus grande partie de ces inconvéniens , en attachant aux deux côtés du vaisseau des rames verticales tournant autour d'un effieu placé à la hauteur la plus convenable. Les pales feroient des vanes à charniere qui ne résisteroient que dans un sens , & qui laisseroient un passage libre à l'eau lorsqu'elles feroient mues dans une direction contraire ; je comptois d'en proposer qui me paroïssent assez commodes ; mais , toutes réflexions faites , j'ai pensé que l'interruption inévitable entre les deux coups de rame , & la résistance qu'on éprouve nécessairement en les ramenant de la poupe vers la proue (d'autant plus que leur mouvement est alors augmenté par la vitesse du sillage), j'ai pensé , dis-je que ces inconvéniens rendoient leur produit beaucoup moindre que celui des roues. Quelque éloignement que les marins aient toujours montré pour ce dernier moyen , on ne peut s'empêcher de convenir qu'il a l'avantage de la continuité de l'action , & de ce qu'on ne porte pas le poids de la rame.

Il ne s'agit ici que de suppléer au défaut de vent , c'est-à-dire , d'avoir le moyen de naviger lorsque la mer est calme. Alors les roues peuvent être employées sans inconvénient. Rien n'empêche de les construire assez légères pour être enlevées commodément & démontées lorsqu'on ne voudra plus s'en servir. Nous les ferons d'un diamètre qui ne couvrira pas trop les flancs du vaisseau , & qui n'empêchera pas l'usage de l'artillerie. Enfin nous leur donnerons un moteur qui multiplie en quelque façon la force des hommes sans qu'il soit besoin d'en multiplier le nombre. On les placera aux deux côtés du vaisseau , leur centre élevé de trois piés au-dessus de la surface de l'eau , hauteur où l'on pratique sans danger des ouvertures & des sabords. Elles auront six piés de rayon ; mais il suffit que les vanes en occupent trois , car nous avons vu dans le cinquieme Problème que la partie la plus près du centre ne doit pas être plongée dans l'eau.

Une maniere fort simple pour les faire tourner, & qui cause peu de frottemens, c'est d'y joindre du côté le plus proche du vaisseau une autre roue *DE* (*Fig. 1 & 2*) d'un moindre diamètre, autour de laquelle on fera passer une corde ou chaîne sans fin, qui enveloppera de même une roue verticale *A* (*Fig. 1*) placée au-dessus de celle-ci; enforte qu'elle lui communiquera son mouvement par le moyen de la corde qui les environnera toutes les deux.

L'arbre de la roue *A* fera appuyé sur deux ou sur plusieurs piliers de bois *FG*, qu'on placera & qu'on affermira sur le tillac lorsqu'on voudra se servir des roues.

D'autres roues verticales *B*, *C* fixes sur le même arbre porteront une espece d'échelle tournante & sans fin, faite avec des cordes ou avec des chaînes, lesquelles seront jointes par des traverses ou échelons de bois *KL*, *OP*, & par des cordes *HI*, *MN*, &c. Le mouvement des roues *B* & *C* entraînera celui de la roue *A*, qui est fixe sur le même arbre; & celle-ci fera tourner la roue à vannes. Les Méchaniciens connoissent plusieurs manieres de communiquer ainsi le mouvement d'une roue à l'autre, soit par des chaînes fabriquées exprès pour cet usage, soit par des cordes à nœuds, à olives, &c.; & je crois pouvoir me dispenser de prescrire ici aucun de ces moyens en particulier.

Je destine le poids des hommes pour être le principe du mouvement de cette machine. En voici la raison. Un homme qui tire ou qui pousse ne peut agir quelque tems de suite qu'en faisant un effort d'environ vingt-cinq livres, avec une vitesse qui ne passe gueres un pié & demi par seconde. Au lieu que le poids des hommes ordinaires étant de cent quarante livres, si on leur donne une vitesse d'un pié par seconde, qui ne diminuera presque pas l'action de leur pesanteur, on triplera, & au-delà l'effet des machines tirées par des hommes.

D ij

On placera un échaffaut ou plateforme *RS* (*fig. 3*) capable de contenir le nombre d'hommes nécessaire au service de la machine, environ trois ou quatre piés au-dessous du diametre horizontal des roues *B C*, & à deux piés de distance au plus de l'échelle tournante qu'elles portent. Ceux qui seront rangés sur le bord de la plateforme, saisiront une des cordes telles que *HI*, ou *MN* (*fig. 1*), dans l'instant qu'elle se trouvera à la portée de leurs mains, & sans perdre de tems, appuieront leurs piés sur la traverse ou échelon de bois qui est au-dessous, & se laisseront couler avec elle jusqu'à terre.

Les distances entre ces échelons seront combinées avec la hauteur & le diametre des roues *B* & *C*, de sorte que lorsqu'une bande d'hommes arrive à terre, une autre se jette en même tems sur la machine, afin de conserver l'égalité de son mouvement. Si on trouve à propos d'élever assez les roues *B* & *C*, & toute la machine, pour que cette espece d'échelle puisse contenir plusieurs rangs d'hommes les uns sur les autres, on augmentera d'autant la force. Il est à propos que ces traverses qui portent les hommes ne puissent parvenir que jusqu'à deux ou trois pouces au-dessus du tillac, de peur qu'ils ne se frappent en arrivant à terre. Cette précaution peut être superflue, mais elle coute peu. Ils quitteront l'échelle sans perdre de tems, & remonteront sur la plateforme pour redescendre de nouveau bande par bande, lorsque leur tour sera venu.

Je crois qu'il faut un peu moins de deux piés d'intervalle entre le bord de la plateforme & l'échelle tournante, afin d'un côté que les travailleurs ne soient pas obligés de s'élaner de trop loin, au risque de manquer d'appuyer leurs piés sur les traverses. En tout cas, les plus maladroits en seront quittes pour rester suspendus sur leurs mains pendant un intervalle de tems assez court, s'ils n'ont pas eu assez d'adresse pour ap-

puyer aussi leurs piés. D'un autre côté, cette distance est nécessaire, de peur qu'ils ne se blessent en descendant & en frottant contre la plateforme. On pourra, par un excès de précaution, garnir ce bord d'une bande de natte de paille, ou le rembourrer de quelqu'autre façon.

Il sera aisé de gouverner le vaisseau avec cette machine. Il suffira pour cela d'arrêter ou de diminuer le mouvement d'une ou de plusieurs roues d'un côté du vaisseau, tandis qu'on laissera mouvoir celles de l'autre.

Ces roues, avec les plateformes & les échelles pour y monter, n'embarasseront pas plus le tillac pendant le calme que les voiles, leurs cordages & leurs agrès l'embarassent lorsqu'on cingle avec le vent. Tout cela se démontrera lorsqu'on voudra & se réduira en un assez petit espace, & il sera aisé de le remonter, même très-solidement, lorsqu'on voudra s'en servir.

Rien n'empêche d'employer un seul de ces équipages d'échelles & de plateformes, &c. pour plusieurs roues à vanes à la fois. La circonférence de la roue *A* peut avoir deux cannelures différentes (*fig. 3*) dont chacune recevra la corde d'une des roues à vanes.

L'effort que ces cordes auront à supporter, n'en exige que d'une grosseur très-médiocre, & qui ne demanderont pas que les roues *A* & *D* soient d'un fort grand rayon pour se plier autour d'elles sans résistance. On peut leur donner communément trois ou quatre piés de diametre. Quand à celles qui forment l'échelle tournante, on peut multiplier à volonté les roues qui la portent, telles que *B* & *C*. Par ce moyen, on ne donnera que peu de largeur à chaque échelle; elles ne porteront qu'un poids médiocre, & il ne faudra point de grosse corde.

Si on veut supprimer la roue *A*, une des deux autres roues *B* ou *C* portera dans une cannelure particulière destinée à cet usage une corde sans fin, laquelle

passant par une ouverture du tillac, ira envelopper & faire tourner entre les deux ponts inférieurs une autre roue. Celle-ci, par le moyen d'un engrenage, fera tourner la roue à vanes. Je n'ai placé cette roue *A* en-dehors du vaisseau que pour ne rien changer à son intérieur. On pourra encore supprimer les roues *B* ou *C*, en élevant un seul timpan assez haut pour qu'il puisse porter une échelle tournante, qui contiendra plusieurs hommes placés d'étage en étage les uns sur les autres, mais qui ne seront tout au plus que deux de front sur le même échelon. La plus grande hauteur pourra compenser ce qu'on perdra par le défaut de largeur.

Si on réduit ainsi le tout à un seul timpan, ne peut-on pas se servir d'un mât pour l'appuyer en partie, alors chaque mât pourra avoir le sien. Les plateformes seront fort petites, & le tillac en fera si peu embarrassé, qu'à peine s'en appercevra-t-on.

Si on craint que le peu de roulis qui pourroit rester au vaisseau, malgré le calme, ne cause trop d'inégalité au mouvement de cette machine, en enfonçant dans l'eau alternativement les vanes d'un côté & les retirant de l'autre, on peut y remédier en plaçant ces vanes de sorte qu'elles soient au-dessous de la superficie de l'eau dans leur situation verticale. Etant ainsi plongées plus avant, elles seront sujettes à de beaucoup moindres inégalités.

On me demandera quel effet on peut attendre d'une telle machine, & quelles doivent en être les principales dimensions? Je vais tâcher d'y répondre en peu de mots. J'ai calculé la force & le moment des roues de douze aubes, en supposant leur rayon de six piés, & leur centre élevé de trois piés au-dessus de la surface de l'eau, les vanes occupant trois piés de l'extrémité du rayon. Le Problème cinquième m'a fait connoître l'effet des deux situations principales de la roue. Dans l'une un rayon est vertical, & deux autres sont éloignés

de la verticale de trente degrés. Dans l'autre, deux rayons sont éloignés de la ligne verticale de 15° , & deux autres de 45° . Les portions de vanes qui choquent l'eau, se trouvent différentes, selon que chaque rayon est différemment incliné; ce qui donne des valeurs de m différentes pour chacune dans les formules du Problème cinquième.

J'ai supposé dans ces calculs la largeur L de dix-huit piés; c'est-à-dire que toutes les roues avoient ensemble dix-huit piés de large. Ainsi, si l'on met trois roues de chaque côté du vaisseau, il faudra leur donner à chacune trois piés de large, & les six ensemble en auront dix-huit; ce qui n'est point excessif, d'autant plus que l'extrémité extérieure de leur essieu peut être soutenue par quelque appui porté par une espece de console en faillie (*Fig. 2*, où la roue est vue de côté, portée par le flanc XY du vaisseau). Il peut, outre cela, être placé à l'ouverture d'un sabord, & affermi très-solide-ment par une charpente buttée en-haut & en-bas, entre deux ponts.

J'ai cherché la vitesse du sillage que chacune de ces deux situations de la roue pouvoit produire par sa continuité; d'un autre côté, j'ai cherché celle que donnoit la force moyenne, entre la somme des deux forces de ces deux situations. Tous ces calculs ont concouru à donner, à peu de chose près, pour la vitesse que le mouvement continu pouvoit procurer au sillage $c = 0.415 v$; d'où l'on voit que la machine aura peu de variation dans son mouvement lorsque les roues auront douze aubes.

Pour trouver le nombre d'hommes nécessaire au mouvement du vaisseau, je me suis servi de la formule du Problème cinquième, qui donne le moment; & pour tout mettre au pis, j'ai calculé sur le plus grand des deux efforts des deux situations des roues avec la vitesse moyenne $c = 0.415 v$. Mettant cette valeur

de c dans la formule , j'ai trouvé que si les hommes qui font mouvoir la machine descendent avec un pié de vitesse par seconde , & que la circonférence de la roue à aubes en parcoure six dans le même tems , il faudra soixante-quatre hommes sur les échelles pour donner une vitesse de sillage de deux piés & demi par seconde à un des plus grands vaisseaux du premier rang , dont la surface réduite f de la proue seroit de cent cinquante piés. Le tems qu'il faut pour acquérir à-peu-près cette vitesse est très-court. Je n'ai même compté que cent vingt-cinq livres au lieu de cent quarante pour le poids de chaque homme , tant à cause que la vitesse avec laquelle ils descendent , diminue un peu l'action de leur pesanteur sur la machine , que pour avoir égard aux frottemens , quelque peu considérables qu'ils soient.

Il faut deux ou trois fois plus de tems aux hommes pour remonter sur les plateformes que pour en descendre ; ainsi on aura deux ou trois autres bandes de soixante-quatre hommes pour entretenir le mouvement & tenir les plateformes garnies de gens toujours prêts à descendre. C'est pourquoi on destinera deux cent cinquante hommes ou environ pour faire faire demi-lieue par heure à ce grand vaisseau. Il en faut beaucoup moins pour les vaisseaux plus petits. Leur travail est très-moderé ; ce qu'il y a de plus pénible , c'est de monter sur les plateformes par des échelles. Ce n'est plus un travail de forçat comme sur les galeres.

La proportion qu'on mettra entre la roue A , la roue DE , & les roues B & C , donnera celle que nous souhaitons entre la vitesse de la descente des hommes & celle que doivent avoir les vannes. Si on veut que celle-ci soit de six piés , tandis que l'autre n'est que d'un pié , on pourra faire les diametres des roues A & D de quatre piés chacun , & celui des roues ou timpan B & C de deux piés.

Si

Si les plateformes sont élevées de douze piés, on pourra charger l'échelle tournante de deux étages d'hommes, les premiers auront leurs piés sur la traverse ou échelon OP , & leurs mains sur la corde MN (*Fig. 1*), tandis que les autres mettront leurs piés sur la traverse KL , qui est éloignée de six piés de OP , & leurs mains sur la corde Hi . Les cordes doivent être près de cinq piés au-dessus des traverses ou échelons de bois.

On peut, si l'on veut, garnir toute l'échelle d'échelons de bois de deux piés en deux piés, & de cordes entre deux. Un homme occupera environ deux piés de largeur sur cette échelle. Ils peuvent cependant en cas de nécessité s'y tenir un peu de côté, n'appuyant qu'un pié & une main. Il est aisé de calculer là-dessus le nombre qu'il en faut, & la largeur qui leur est nécessaire.

On peut encore multiplier l'effet de cette machine, en ne lui donnant pas un mouvement continu. Nous avons vu, dans la première partie, qu'il étoit très-avantageux d'augmenter la vitesse de la puissance, pour pouvoir augmenter en même tems son bras de levier, c'est-à-dire, son éloignement du point d'appui; ce qui revient au même que de diminuer le bras extérieur de la rame.

Or la seule raison qui nous oblige de ne donner qu'un pié par seconde de vitesse à l'échelle tournante, c'est la difficulté de la saisir lorsque son mouvement seroit rapide. On peut cependant remédier à cet inconvénient, & augmenter sa vitesse, sans ôter la facilité de s'y placer commodément. Il faut pour cela ne faire descendre qu'un seul rang d'hommes à la fois. Dans l'instant qu'ils seront à terre, le mouvement sera fort diminué, parce que la roue à vanes ne recevra plus que la seule impulsion de la vitesse du sillage. On profitera de ce moment pour saisir l'échelle & s'y placer.

Rien n'empêche alors de faire descendre les hommes

Prix de 1753.

E

avec une vitesse beaucoup plus grande, comme par exemple avec celle de cinq ou six piés par seconde, qui n'est pas exorbitante, puisqu'on les fait souvent en marchant. L'action de leur pesanteur ne sera diminuée que de peu, comme il est aisé de s'en convaincre. S'ils descendent, par exemple, d'une hauteur de quinze piés avec cinq piés de vitesse par seconde, il faudra soustraire les quinze piés qu'ils parcourront pendant les trois secondes qu'ils emploieront à descendre, des cent trente-cinq que leur pesanteur leur auroit fait parcourir pendant ces trois secondes, pour juger de la force qu'elle conservera pour agir sur la machine. Cette maniere de calculer la diminution moyenne de leur pesanteur est assez juste sans être véritablement géométrique. Il faudra dans ce cas donner des proportions différentes aux diametres des roues; les problèmes précédens serviront à les déterminer, selon les circonstances.

Si on craint que la vitesse du fillage ne conserve trop de mouvement à la roue à vannes, & trop de rapidité à l'échelle tournante pour être saisie commodément, on pourra la réduire à peu de chose, en employant des vannes qui ne résisteront que dans un sens, & cederont sans difficulté, lorsqu'elles seront pressées dans une direction contraire. Quoique ce moyen ne soit pas toujours absolument nécessaire, il peut être employé très-utilement.

Les deux rayons BD , AC de la roue à aubes (*fig. 4*) destinés à porter une vanne, auront des plaques rs & rv percées d'une ouverture ronde, dans laquelle tourneront librement les deux extrêmités m & n d'une verge de fer attachée à la vanne FG . Ainsi cette vanne sera appuyée par les rayons BD & AC , lorsqu'on voudra qu'elle augmente le mouvement du vaisseau, & cedera au contraire à la pression de l'eau lorsqu'elle sera poussée de l'autre côté.

On peut faire en fer la portion des rayons AC & BD

qui est destinée à être plongée dans l'eau ; elle en aura moins de volume, & éprouvera par conséquent moins de résistance. On aura soin de leur donner, du côté de la proue, une surface qui diminue la résistance, & de mettre leur plus grande largeur dans le sens parallèle au vaisseau.

Il est à propos que les vannes de bois FG aient plus de pesanteur spécifique que l'eau, afin qu'elles se referment plus promptement. Quelques lames de fer ou de plomb les rendront plus solides & plus pesantes. C'est par la même raison qu'il peut être utile d'en mettre plusieurs étages sur les mêmes rayons, comme en rs & tv . Ayant moins de largeur, & par conséquent moins de chemin à parcourir pour se fermer, elles appuieront plutôt sur les rayons BD & AC , lorsque l'action recommencera, & il y aura moins de tems à perdre.

Les deux extrémités m , n de la verge qui porte la vanne, étant inférées dans les plaques rs & tv , pourront, si l'on veut, porter chacune une écroue qui empêchera les rayons BD & AC , de s'écarter, & rendra tout l'assemblage plus solide. Il faudra pour cela qu'elles soient taillées en forme de vis. On peut aussi les arrêter plus simplement de la même manière que les roues de charrette sont arrêtées sur leurs essieux.

Cette construction de roue aura aussi l'avantage de diminuer la résistance nuisible des vannes pendant l'instant de l'interruption. Elle n'est pas considérable, & retarderoit peu le sillage, à cause du peu de frottemens de toute la machine, qui fait que la roue cederait aisément, quand même les vannes ne seroient pas mobiles.

J'ai calculé par le Problème sixième l'effet de cette machine pour un vaisseau de 700000 de livres, ou de 3500 tonneaux, & dont la surface de résistance seroit de 150 piés. C'est un vaisseau plus grand & plus pesant que ceux qui sont en usage. Cependant il y a lieu d'être

étonné du peu de monde qu'il faut pour lui donner près de demi-lieue de vitesse par heure. J'ai supposé, comme ci-devant, six roues à vanes de douze aubes chacune, de six piés de rayon & de trois piés de large, la plateforme élevée de dix-huit piés, pour donner à l'échelle tournante six piés de vitesse par seconde, pendant trois secondes consécutives. Je n'ai compté que cent livres de poids à chaque homme, laissant les quarante autres tant pour la vitesse de leur descente que pour les frottemens & la résistance de la roue à vanes pendant l'interruption que j'ai supposée de trois secondes; ce qui est un tems plus que suffisant pour donner aux travailleurs le loisir de se placer à leur aise sur l'échelle, & à la roue de reprendre son mouvement. Seize à dix-sept hommes suffiront pour donner deux piés par seconde de vitesse au vaisseau, lorsque celle de l'extrémité des vanes sera de six piés.

Il faudra un plus grand nombre d'hommes si les vanes ne sont pas mobiles, parce que les roues étant mues par la vitesse du sillage, lorsque l'échelle est vuide, on ne pourra allonger le bras de levier de la puissance que jusqu'au point où l'échelle vuide ne garderoit qu'un pié de vitesse, afin de pouvoir être saisie aisément. Je suis persuadé qu'on pourroit aussi, sans vanes mobiles, diminuer la vitesse de la roue à aubes pendant l'interruption, par le peu de mécanisme qu'on emploiera dans les cordes qui communiqueront le mouvement; on peut en imaginer quelqu'un qui donnera à la corde la faculté d'entraîner la roue avec elle, sans donner à la roue à aubes celle de faire mouvoir la corde & de communiquer son mouvement à l'échelle tournante.

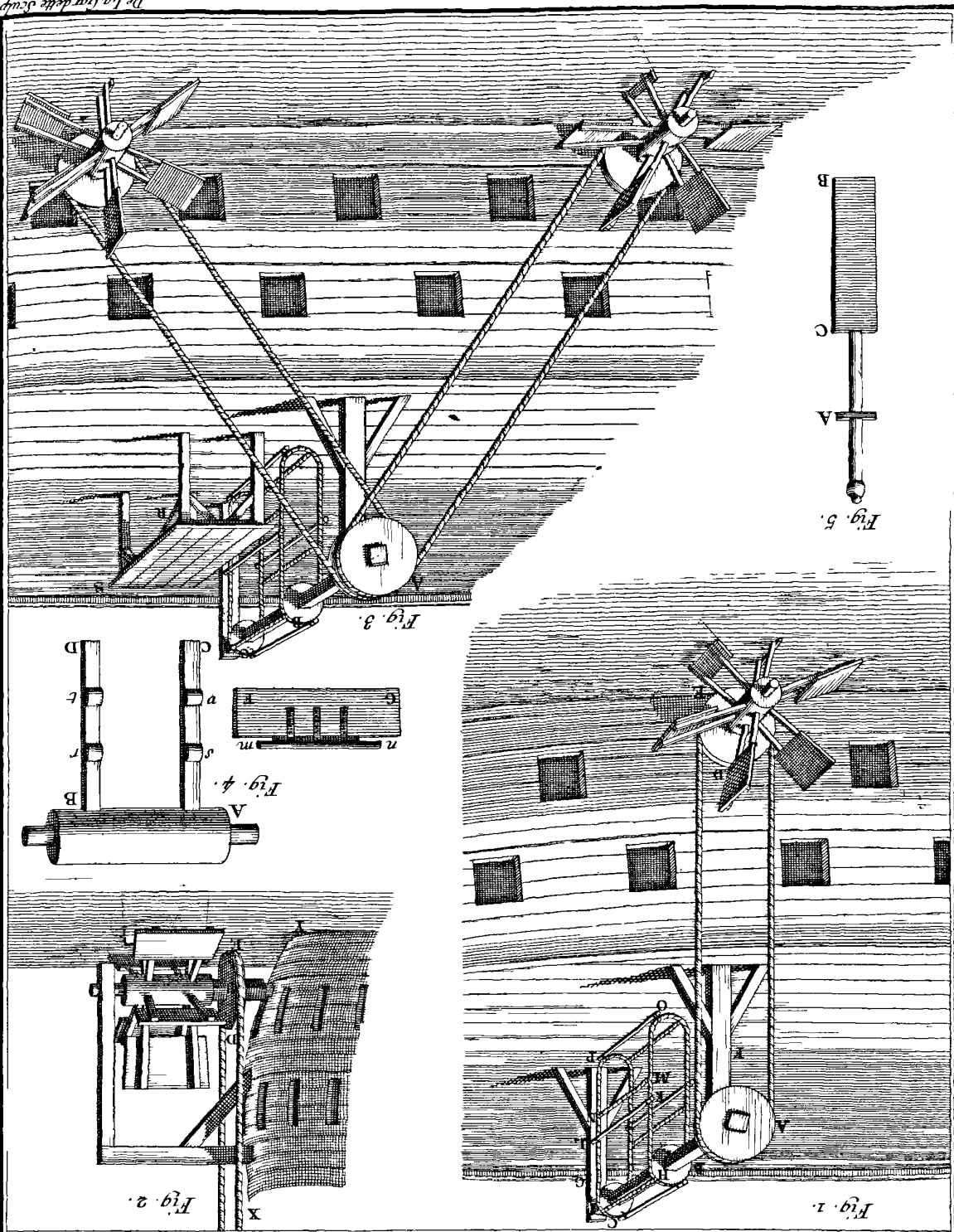
On peut conclure de tout cela que ces roues ne perdent pas leur avantage sur les autres moyens de faire mouvoir les vaisseaux, quoique leur action soit interrompue, surtout si le tems de l'interruption n'est pas plus long que celui de l'action. C'est même la maniere

la plus commode de donner une plus grande vitesse au sillage du vaisseau sur lequel j'ai fait tous ces calculs, sans augmenter le nombre des roues ni leur rayon. Par exemple, cent soixante hommes sur les échelles tournantes lui donneroient quatre piés de vitesse par seconde, s'ils en avoient une de cinq piés, & si la circonférence de la roue à vanes mobiles en parcouroit douze dans le même tems. J'ai eu égard, dans ce calcul, à la hauteur où le mouvement des vanes fait rester l'eau au-dessous de son niveau. C'est une attention qu'il ne faut pas négliger dans ces sortes de cas.

Il sera toujours utile d'élever les plateformes le plus qu'on pourra, pour que le tems de l'action soit plus long par rapport à l'autre. Je crois aussi qu'il est à propos qu'un de ceux qui sont prêts à saisir l'échelle, donne un signal avec la voix à tous les autres du même rang, afin qu'ils le fassent tous ensemble.

Quoique je croie l'avantage des roues démontré, j'avoue cependant qu'il y a des cas où la simplicité du mécanisme des rames ordinaires, lorsqu'on ne manque ni de monde, ni de place, pourra plaire par préférence à une machine qui épargne à la vérité le nombre d'ouvriers, mais qui est plus composée. Je ne blâmerai pas alors ceux qui les emploieront. J'ai tâché de donner, dans la première Partie de cet ouvrage, les principes nécessaires pour décider de ce qui convient le mieux à chaque circonstance. Je n'en dirai pas davantage, d'autant plus que j'écris pour des lecteurs si éclairés, que si le fond de mon idée peut leur plaire, leurs lumières suppléeront au défaut de la manière de l'expliquer.

F I N.



INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

*Quibus Planetarum motus ob actionem eorum
mutuam afficiuntur.*

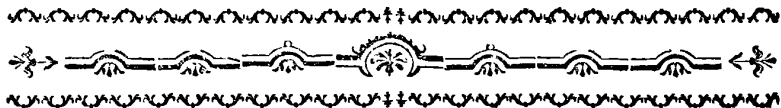
Autore LEONARDO EULERO, Matheseos Pro-
fessore, Academiæ Parisiensis, Berolinensis &
Petropolitanæ Socio.

Sidera quod tantis cieant se viribus æquis
In motu terræ plurima signa docent.

Hæc Dissertatio meruit Præmium duplicatum anno M.DCC.LVI.

Prix de 1756.

A



P R Æ F A T I O .

PLANETAS non solum ad Solem secundum inversam distantiarum rationem duplicatam impelli, sed etiam simili ratione se mutuo incitare ex perturbationibus motuum Saturni & Jovis manifesto est perspectum. Cum enim Tabulæ Astronomicæ ita construi soleant, quasi planetæ ad solum Solem sollicitati secundum regulas Keplerianas in ellipsis revolverentur, si ex iis loca Saturni vel etiam Jovis definiantur ea nonnunquam ad plura minuta prima à veritate aberrare deprehenduntur; neque jam ullum est dubium, quin isti errores ab actione mutua, qua hi duo planetæ se invicem impellunt, proficiscantur. Reliquorum quidem planetarum motus ac præcipue terræ regulis illis Keplerianis magis est conformis, ac si quando errores in eorum motu à Tabulis occurrunt, incertum plerumque est, utrum illi vel non recte constitutis Tabularum elementis, vel ipsarum observationum imperfectioni cuiuspiam potius sint tribuendi, quam ipsi Theoriæ, cui Tabulæ innituntur. Interim tamen jam ipsa

A ij

tabularum ratio, qua pro quolibet planeta tam lineæ absidum quam lineæ nodorum motus peculiaris assignatur, manifestum indicium aberrationis cujusdam à Theoria continet: si enim planetæ nullam aliâ impulsione præter eam qua secundum rationem quadrati distantiarum inversam ad solem urgentur, sustinerent, non solum circa solem tanquam focus perfectas describerent ellipses, sed etiam perpetuo in eodem plano ferrentur, axesque istarum ellipsium omnino fixi manerent; neque idcirco linea absidum neque linea nodorum ulli obnoxia foret mutationi, saltem respectu stellarum fixarum. Ad hanc quoque normam computatæ sunt à streto Tabulæ Carolinæ, in quibus tam apheliis quam nodis singulorum planetarum in cœlo sidereo loca fixa assignantur; at vero insignis harum tabularum à veritate dissensus mox luculenter monstravit, huic hypothese locum concedi non posse. Cum igitur certum sit tam aphelium quam linea nodorum cujusque planetæ motu peculiari per cœlum proferri, atque etiam respectu stellarum fixarum continuo mutari; minime amplius dubitare licet, quin præter eam vim constantem, qua singuli planetæ ad solem pelluntur, aliæ quoque vires in eos effectum quempiam exerant. Quemadmodum enim in Saturno & Jove præter alias perturbationes ab eorum ac-

tione mutua utriusque lineæ absidum & nodorum certus imprimi motus est inventus observationibus satis consentaneus, ita multo minus dubitare poterimus, quin similis variatio in apheliis & nodis reliquorum quoque planetarum ab eorum actione mutua proficiscatur, etiamsi in cæteris motus horum planetarum elementis nulla alteratio perciperetur. Sunt autem effectus talium virium in loca apheliorum & nodorum ita comparati, ut etiamsi sint minimi, tamen cum tempore continuo crescant, & post satis longum intervallum sensibiles evadant dum reliquæ perturbations inde oriundæ sunt periodicæ, & post certas revolutiones iterum penitus in nihilum redigantur, unde fit ut si sint minimæ, percipi omnino non possint. Interim tamen Theoria motus telluris, cujus elementa per observationes Solis multo accuratius definire licet quam reliquorum planetarum, haud obscura talium minimarum perturbationum signa exhibet, dum excentricitas ejus orbitæ prouti alia atque alia tempestate per observationes investigatur, modo aliquantum major modo minor apprehenditur, quæ inconstantia ad integrum minutum assurgere videtur. Quibus perpenſis palam omnino est non solum motum Saturni ac Jovis, sed etiam reliquorum planetarum ab aliis viribus præter eam qua lege constanti ad Solem

pelluntur, perturbari, earumque adeo effectum ab Astronomis manifesto esse observatum. Quamvis enim Astronomorum Princeps Halleyus Mercurii motum ab hujusmodi perturbationibus prorsus immunem sit arbitratus, propterea quod ob summam solis vicinitatem reliquorum planetarum vires præ vi Solis quasi evanescere crediderit, qua sententia fretus in tabulis suis etiam neque Aphelio Mercurii neque ejus lineæ nodorum motum ullum respectu stellarum fixarum adscripsit: tamen ex postremo potissimum transitu hujus planetæ per solem Astronomi didicerunt Halleyi Tabulas insigni emendatione ex hac parte indigere, dum aphelio Mercurii motum annum quasi 55", ejusque nodo 45" ratione æquinoxii tribui debere est compertum; ex quo manifestum est etiam Mercurium actiones reliquorum planetarum sentire ob easque certis perturbationibus esse obnoxium.

Cum igitur extra dubium sit positum planetas in se invicem attrahendo agere, dispiendum est quamnam rationem eorum vires respectu ad distantias habito sequantur. Ac præterquam quod constantia naturæ eandem legem quadratis distantiarum reciproce proportionalem, quam in Sole stabilitam cernimus, exigere videtur, Theoria Lunæ atque Satellitum Jovis & Saturni hanc suspicionem plenissime

confirmat, ita ut amplius dubitare non liceat, quin Jupiter Saturnusque suos Satellites, & Terra Lunam ad se alluciant viribus quadratis distantiarum reciproce proportionalibus; & quamquam motus Apogei Lunæ aberrationem tantillam ab hac lege innuere esset visus, tamen à celeberrimo CLAIRAUT primum pulcherrimus consensus est evictus, ita ut jam audacter asseverare queamus non solum Solem sed etiam cunctos planetas vi attractrice esse prædictos, qua omnia corpora ad maximas etiam distantias remota ad se præcise secundum illam constantem legem attrahant. Quin etiam pari fere fiducia pronunciare licet, singulorum planetarum vires, quas ad distantias æquales exerunt, ipsorum massis esse proportionales, id quod communis centri gravitatis status postulare videtur: de cætero massam seu quantitatem materiæ, quam quisque planeta continet, aliunde nobis cognoscere non datur; nihilque impedit quo minus id, cui vis absoluta cujusque planetæ revera est proportionalis, nomine massæ ejus designemus; hinc saltem nullus certe error est pertimescendus. Terra igitur perinde ac reliqui planetæ omnes non solum versus Solem, sed etiam versus singulos reliquos planetas viribus legi istî sacræ conformibus sollicitatur, à quibus sine dubio præter promotionem illam apheliorum & nodorum

aliæ vehementer exiguæ perturbationes efficiuntur, quarum inventio in Astronomia sine dubio maximi est momenti.

Hinc nascitur quæstio latissime patens ad Mechanicam referenda, qua determinatio motus plurium corporum, quæ se mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata distantiarum, requiritur; cujus solutio eo ardentius est expetenda, quod omnia incrementa Astronomiæ, quæ adhuc desiderantur, ex ea derivanda videantur. Verum enodatio hujus quæstionis tot tantisque difficultatibus est involuta, ut si in genere spectetur, vires ingenii humani longe superare videatur; etsi enim casus duorum corporum facilem habeat solutionem, tamen statim ac tria assumuntur, nulla adhuc inventa sunt artificia, quorum ope ad motus determinationem pervenire licuerit, unde multo minus pro casu plurium corporum quicquam sperare possumus. Interim tamen cum perturbationes, quas planetæ sibi mutuo inferunt, sint perquam exiguæ, neque eæ, quæ ab actione unius oriuntur, à reliquis affici sint censendæ; hinc non contemnendum subsidium, impetramus aliquid saltem in hoc arduo negotio præstandi, dum effectus singulorum planetarum seorsim investigare licebit, & quoniam sunt minimi, consuetis calculi approximationibus, quarum in hujusmodi quæstionibus uberrimus

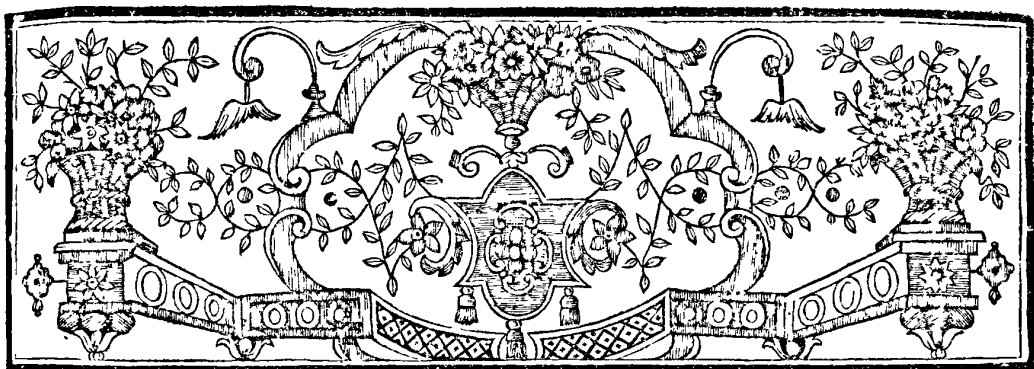
P R Æ F A T I O. 9

uberrimus solet esse usus, totum negotium confici debet. In hunc etiam modum ILLUSTRIS ACADEMIA REGIA PARISINA istam quæstionem tractandam judicavit, cujus præceptis ut pro viribus satisfaciam, operam dabo, ut primo hoc abstrussum argumentum ex primis Mechanicæ fontibus dilucide evolvam; atque ad æquationes analyticas perducam: tum vero quibusnam modis ex iis aliquid per approximationes concludi queat, accuratius investigabo. Denique præcepta quæ elicuero, ad perturbationes motus terræ accommodabo, examinaturus, quantum singula hujus motus elementa ab actione reliquorum planetarum continuo immutentur, quod institutum sequentibus sectionibus absolvere conabor.



Prix de 1756.

B



INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

*Quibus Planetarum motus ob actionem eorum
mutuam afficiuntur.*

SECTIO PRIMA.

*Generalis investigatio motus corporis à viribus quibus-
cunque impulsæ.*

§. I. **S**UMATUR pro lubitu cum planum, ad quod motus corporis referatur, quodque plano tabulæ repræsentari concipiatur, tum vero in hoc plano linea recta fixa CA , atque in hac ipsa punctum fixum C , ubi quasi motus spectator sit constitutus. Jam ad quodvis tempus, ubicunque corpus motum versetur veluti in R , de ejus loco R in illud planum demittatur perpendiculum RQ , ita ut punctum Q ejus locum ad hoc planum relatum exhibeat, deinde etiam ex puncto fixo C ad ambo loca

FIG. I.

B ij

12 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

R & Q ducantur rectæ CR & CQ . Quo facto perspicuum est, si ad quodvis tempus assignare valeamus cum angulos ACQ & QCR , tum magnitudinem sive rectæ CQ sive CR , locum corporis R perfecte fore cognitum, indeque verum corporis motum innotescere; ita ut plena motus cognitio determinatione horum trium elementorum contineatur.

§. II Hoc autem potissimum modo investigationem motus instituo, cum quod videtur maxime naturalis, tum vero præcipue quod ad consuetudinem Astronomorum, qua motus corporum cœlestium considerare solent, imprimis est accommodatus. Namque si planum fixum tanquam planum eclipticæ spectemus, rectamque CA tanquam rectam ad ejus quodpiam punctum fixum directam, corpore moto in R existente, angulus ACQ ejus longitudinem, angulus vero QCR ejus latitudinem referet; & quemadmodum recta CR ejus distantiam veram à puncto C denotat, ita recta CQ distantiam ejus curtatam designabit, quarum alteram tantum in calculum introduxisse sufficiet. Vocemus igitur pro quovis tempore proposito.

I. Longitudinem corporis seu angulum $ACQ = \phi$.

II. Latitudinem ejus seu angulum $QCR \dots = \psi$.

III. Distantiam curtatam seu rectam $CQ \dots = x$.

§. III. Cognitis vero his tribus elementis, omnia, quæ ad motus notitiam pertinent, definiri poterunt. Primo enim ex distantia curtata $CQ = x$ & latitudine $QCR = \psi$ habetur distantia vera $CR = \psi$ seu CR

$= \frac{x}{\cos. \psi}$ posito sinu toto constanter, = I. Tum vero

ipsa distantia corporis à plano erit $QR = x \text{ tang. } \phi$.

Deinde si à puncto Q ad rectam fixam CA ducatur normalis QP , ex distantia curtata $CQ = x$ & longitu-

dine $ACQ = \varphi$, elicitur $CP = x \cos. \varphi$ & $PQ = x \sin. \varphi$; atque hoc modo pro loco puncti R , uti in Geometria fieri solet, ternas obtinemus coordinatas inter se rectangulas CP , PQ & QR . A quibus cum etiam investigatio mechanica incipiat, has lineas tantisper peculiaribus signis indicemus, quoad calculum ad illa primaria elementa perducere licuerit. Sit igitur $CP = x \cos. \varphi = p$; $PQ = x \sin. \varphi = q$ & $QR = x \tanq. \varphi = r$; sicque habebimus $x = \sqrt{(pp + qq)}$; $\cos. \varphi = \frac{p}{\sqrt{(pp + qq)}}$; $\sin. \varphi = \frac{q}{\sqrt{(pp + qq)}}$ & $\tanq. \varphi = \frac{r}{\sqrt{(pp + qq)}}$.

§. IV. Hæc autem motus elementa ex sollicitatione virium quarum actioni corpus fuerit subiectum, secundum præcepta mechanica determinari oportet. A quibuscunque autem viribus corpus impellatur, eas semper per notam resolutionem ad ternas directiones determinatas revocare licet. Concipiamus igitur corpus à tribus viribus sollicitari, quarum prima urgeat secundum directionem RQ ad planum fixum normalem, binarum autem reliquorum directiones sint ipsi plano parallelæ; altera quidem habeat directionem distantiae curtatae QC parallelam, altera vero huic normalem, cui in plano fixo parallela sit recta QN ad CQ normalis. Iestas vires statuamus acceleratrices, sive jam ad corporis massam applicatas, easque denotemus:

I. Vim acceleratricem secundum $QC = V$

II. Vim acceleratricem secundum $QN = T$

III. Vim acceleratricem secundum $RQ = R$

Ita, ut, quomodo per has vires terna illa elementa φ , φ & x determinentur, sit investigandum.

§. V. Cum autem regulæ mechanicae ad ternas coordinatas normales, quarum directiones perpetuo maneant fixæ accommodatae esse soleant, harum autem virium tertia tantum RQ cum una coordinatarum conveniat, dum

14 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

diarum reliquarum directiones QC & QN maxime sunt variables, & has ad directiones fixas revocari conveniet. Dabit igitur vis V resoluta:

Secundum directionem $PC = V \cos. \phi$

& secundum QP vim $= V \sin. \phi$;

vis vero T simili modo resoluta:

Secundum directionem $PC = -T \sin. \phi$

& secundum QP vim $= T \cos. \phi$.

Hinc itaque pro directionibus nostrarum ternarum coordinatarum PC , QP , & RQ obtinebimus tres vires acceleratrices sequentes quæ sunt:

I. Vis acceleratrix secundum $PC = V \cos. \phi - T \sin. \phi$

II. Vis acceleratrix secundum $QP = V \sin. \phi + T \cos. \phi$

III. Vis acceleratrix secundum $RQ = R$.

§. VI. Quoniam actio harum ternarum virium ad diminutionem coordinatarum respondentium tendit, accelerationes quæ corpori inde secundum easdem coordinatas inducuntur negativæ sunt concipiendæ. Cum igitur posito temporis elemento $= dt$, sint corporis celeritates secundum has coordinatas $\frac{dp}{dt}$; $\frac{dq}{dt}$ & $\frac{dr}{dt}$; si elementum temporis dt pro constanti assumamus, erunt ipsæ accelerationes secundum istas directiones $\frac{d \frac{dp}{dt}}{dt}$; $\frac{d \frac{dq}{dt}}{dt}$; $\frac{d \frac{dr}{dt}}{dt}$, quæ viribus illis acceleratricibus negative sumtis debent esse proportionales. Proportionalitate ergo, uti fieri solet, stabilita obtinebimus ternas sequentes æquationes.

$$\text{I. } ddp = -\frac{1}{2} dt^2 (V \cos. \phi - T \sin. \phi)$$

$$\text{II. } ddq = -\frac{1}{2} dt^2 (V \sin. \phi + T \cos. \phi)$$

$$\text{III. } ddr = -\frac{1}{2} R dt^2$$

quarum æquationum resolutione tota motus determinatio continetur.

§. VII. Jam iterum ambas vires V & T commode à se invicem separare licet, ut pateat quid utraque seorsim præstet. Nam $I \times \text{cos. } \varphi + II \times \text{sin. } \varphi$ dat

$$d d p \text{ cos. } \varphi + d d q \text{ sin. } \varphi = -\frac{1}{2} V d t^2$$

Deinde $II \times \text{cos. } \varphi - I \times \text{sin. } \varphi$ præbet hanc æquationem

$$d d q \text{ cos. } \varphi - d d p \text{ sin. } \varphi = -\frac{1}{2} T d t^2$$

at ex tertia vi R nascitur æquatio $d d r = -\frac{1}{2} R d t^2$,

Nunc igitur recordandum est nos supra posuisse

$$p = \text{cos. } \varphi; q = x \text{ sin. } \varphi \text{ \& } r = x \text{ tang. } \downarrow$$

unde loco quantitatum subsidiariorum p, q, r , elementa nostra principalia φ, \downarrow & x in calculum introduci poterunt. Tres autem emergent æquationes, quæ propterea his tribus elementis definiendis sufficient: atque ita tota investigatio à principiis mechanicis ad Analysin puram traducetur.

§. VIII. Cum sit $p = x \text{ cos. } \varphi$ & $q = x \text{ sin. } \varphi$ erit differentiando;

$$d p = d x \text{ cos. } \varphi - x d \varphi \text{ sin. } \varphi \text{ \& } d q = d x \text{ sin. } \varphi + x d \varphi \text{ cos. } \varphi$$

denuoque differentiando

$$d d p = d d x \text{ cos. } \varphi - 2 d x d \varphi \text{ sin. } \varphi - x d \varphi^2 \text{ cos. } \varphi - x d d \varphi \text{ sin. } \varphi$$

$$d d q = d d x \text{ sin. } \varphi + 2 d x d \varphi \text{ cos. } \varphi - x d \varphi^2 \text{ sin. } \varphi + x d d \varphi \text{ cos. } \varphi$$

unde per combinationem elicitur

$$d d p \text{ cos. } \varphi + d d q \text{ sin. } \varphi = d d x - x d \varphi^2$$

$$\text{\& } d d q \text{ cos. } \varphi - d d p \text{ sin. } \varphi = 2 d x d \varphi + x d d \varphi.$$

Valorem autem ipsius $r = x \text{ tang. } \downarrow$ nulla adhibita evolutione tantisper retineamus, donec compererimus, quomodo aptissime eum tractari conveniat. Hoc itaque pacto totum negotium ad resolutionem trium sequentium æquationum erit perductum:

I: $d d x - x d \varphi^2 = -\frac{1}{2} V d t^2$

II. $2 d x d \varphi + x d d \varphi = -\frac{1}{2} T d t^2$

III. $d d x \text{ tang. } \downarrow = -\frac{1}{2} R d t^2.$

§. IX. Cum hæ æquationes sint differentiales secundi gradus, temporis differentiali dt sumto constante, primum dispiciendum est, quamnam proportionem differentialia prima $d\phi$, $d\psi$ & dx cum inter se tum ad temporis differentiale dt teneant, quod etsi sine introductione formularum integralium fieri nequit, quamdiu vires sollicitantes V , T & R in genere consideramus, tamen eæ proportionem quæsitam minus perturbare sunt censendæ. Quin etiam in negotio quod suscipimus, ipsæ vires V , T & R quantitates incognitas, ϕ , ψ & x cum tempore t implicare reperientur, quominus earum separatio perfecta expectari poterit. Pro initio igitur contenti esse debemus, formulas nostras à contemplatione differentialium secundorum liberasse, & quocumque modo relationem differentialium primorum determinasse, ut deinceps, approximationum artificio in subsidium vocato, ipsarum quantitarum finitarum relationem inde colligere valeamus.

§. X. Tertiam quidem æquationem $d d x \text{ tang. } \psi = -\frac{1}{2} R dt^2$ tantisper seponamus, postmodum investigaturi, quo modo ejus ratio convenientissime haberi queat; ambas igitur priores, quæ sunt:

$$\text{I. } d d x - x d \phi^2 = -\frac{1}{2} V dt^2 \quad \&$$

$$\text{II. } 2 dx d \phi + x d d \phi = -\frac{1}{2} T dt^2$$

accuratius perpendamus, ut inde relationem differentialium primorum dx , $d\phi$ & dt eliciamus. Ac primo quidem prius membrum secundæ æquationis si per x multiplicetur, redditur integrale, proditque

$$d (x x d \phi) = -\frac{1}{2} \int T x dt^2$$

$$\text{seu } x x d \phi = \frac{1}{2} dt (C - \int T x dt)$$

unde si vis T secundum directionem QN trahens evanescat, oritur æquabilis arearum descriptio. Hinc autem patet eandem illam æquationem integrabilem reddi si multiplicetur non solum per x , sed etiam insuper per functionem

functionem quamcunque ipsius $xxd\phi$; Multiplicetur ergo per $x d\phi$; eritque integrale:

$$\frac{1}{2} x^4 d\phi^2 = -\frac{1}{2} dt^2 \int T x^3 d\phi,$$

$$\text{feu } x^4 d\phi^2 = dt^2 (A - \int T x^3 d\phi);$$

unde invenitur

$$dt^2 = \frac{x^4 d\phi^2}{A - \int T x^3 d\phi} \quad \& \quad dt = \frac{xx d\phi}{\sqrt{A - \int T x^3 d\phi}}.$$

§. XI. Cum igitur fit $xd\phi^2 = \frac{dt^2}{x^3} (A - \int T x^3 d\phi)$; hoc valore in prima æquatione substituto habebimus:

$$ddx = dt^2 \left(\frac{A}{x^3} - \frac{1}{x^3} \int T x^3 d\phi - \frac{1}{2} V \right),$$

quæ per $2dx$ multiplicata & integrata præbet:

$$dx^2 = dt^2 (B - \frac{A}{xx} - 2 \int \frac{dx}{x^3} \int T x^3 d\phi - \int V dx). \text{ At est}$$

$$- 2 \int \frac{dx}{x^3} \int T x^3 d\phi = \frac{1}{xx} \int T x^3 d\phi - \int T x d\phi$$

quo valore introducto erit:

$$dx^2 = dt^2 (B - \frac{A}{xx} + \frac{1}{xx} \int T x^3 d\phi - \int T x d\phi - \int V dx), \text{ vel}$$

$$x^2 dx^2 = dt^2 (Bxx - A + \int T x^3 d\phi - xx \int (T x d\phi + V dx)),$$

unde nanciscimur

$$dt = \frac{\pm x dx}{\sqrt{(Bxx - A + \int T x^3 d\phi - xx \int (T x d\phi + V dx))}} \quad \&$$

$$d\phi = \frac{\pm dx \sqrt{(A - \int T x^3 d\phi)}}{x \sqrt{(Bxx - A + \int T x^3 d\phi - xx \int (T x d\phi + V dx))}}.$$

§. XII. Ambiguitas signorum, quam motus natura involvit, ita ab arbitrio nostro pendet, ut positivum valeat, si motum ab eo loco, ubi corpus puncto fuit proximum, definire velimus, negativum vero si à distantia maxima discefferit. Quoniam igitur in Astronomia usus est, motum corporum à maxima distantia computare, valeat signum negativum, ut habeamus has duas æquationes:

$$dt = \frac{-x dx}{\sqrt{(Bxx - A + \int T x^3 d\phi - xx \int (T x d\phi + V dx))}}$$

$$d\phi = \frac{-dx \sqrt{(A - \int T x^3 d\phi)}}{x \sqrt{(Bxx - A + \int T x^3 d\phi - xx \int (T x d\phi + V dx))}};$$

Prix de 1736.

C

cujus posterioris loco & hæc primum inventa $d\phi = \frac{dt}{xx} \sqrt{(A - \int T x^3 d\phi)}$ usurpari potest. Sunt autem A & B quantitates constantes, per duplicem integrationem invecæ, quæ deinceps ad quemvis casum oblatae accommodari debent.

§. XIII. Quando vis normalis T evanescit, alteraque vis V ad C tendens per solam distantiam x determinatur, utraque æquatio habebit variables separatas, ita ut non solum differentialium dt & $d\phi$ ratio ad dx absolute possit assignari, sed etiam per integrationem ipsæ quantitates finitæ t & ϕ per distantiam x definiri: hocque ergo casu problematis solutio perfecta poterit exhiberi. Neque vero in genere hæ formulæ magis ad usum accommodari posse videntur. Sed contentos nos esse oportet, hoc pacto rationem differentialium dt , $d\phi$ & dx elicuisse. Quamvis enim adsint formulæ integrales $\int T x d\phi$, $\int T x^3 d\phi$, & $\int V dx$ hanc ipsam rationem involventes, eæ tamen negotium approximationis non multum turbant, dummodo earum valores sint perquam exigui, propterea quod tunc sufficit rationes differentialium prope veras nosse. Verum ipsum approximationis negotium alias requirit considerationes, antequam cum successu suscipi queat, quas deinceps evolvemus.

§. XIV. Perductis igitur binis prioribus æquationibus differentio-differentialibus ad formulas simpliciter differentiales, quæ ad usum maxime videntur accommodatae, tertiam quoque æquationem $ddr = -\frac{1}{2} R dt^2$ instituto convenientius transformare conemur. Quæ cum latitudinis \downarrow determinationem ob $r = x \text{ tang. } \downarrow$ contineat commodissime ea instituetur, si more apud Astronomos recepto lineam nodorum cum inclinatione orbitæ ad planum assumptum in calculum introducamus. Hunc in finem consideretur quovis momento planum, quod puncto fixo C & spatiolo à corpore jam jam percurrento

determinetur. Quodque pro isto saltem momento planum orbitæ appellare liceat. Sit igitur dum corpus versatur in R recta $C\Omega$ intersectio plani orbitæ & plani assumpti, quæ linea nodorum vocari solet, atque ad latitudinem \downarrow commodius investigandam ponamus:

I. Longitudinem lineæ nodorum seu angulum $AC\Omega = \pi$,

II. Inclinationem plani orbitæ ad planum assumptum $= G$;

quæ duo nova elementa tanquam utcunque variabilia contemplor.

§. XV. Ad inclinationem autem definiendam ex punctis R & Q ad lineam nodorum $C\Omega$ ducantur normales RS & QS , quarum inclinatio seu angulus QSR inclinationem metietur, ita ut sit $QSR = G$. Deinde ob angulum $\Omega CQ = \varphi - \pi$ & $CQ = x$, erit $QS = x \sin. (\varphi - \pi)$; unde fit $QR = x \sin. (\varphi - \pi) \text{ tang. } G$. Cum igitur habeamus $QR = r = x \text{ tang. } \downarrow$, erit:

$$\text{tang. } \downarrow = \sin. (\varphi - \pi) \text{ tang. } G;$$

sicque ex elementis φ , π & G , latitudo quæsita \downarrow reperietur. Quoniam autem loco latitudinis \downarrow duo nova elementa π & G æque ad locum corporis sequentem pertineant; unde differentiale ipsius \downarrow seu $\text{tang. } \downarrow$ idem prodire debet sive elementa ambo π & G sumantur constantia, sive ambo variabilia, ex qua proprietate ratio inter π & G innotescet, quæ locum quartæ æquationis sustinebit, si quidem jam quatuor elementa x , φ , π & G in calculo habemus.

§. XVI. Cum igitur positis π & G constantibus sit

$$d. \text{tang. } \downarrow = d\varphi \cos. (\varphi - \pi) \text{ tang. } G,$$

iiisdem autem tanquam variabiles tractatis prodeat

$$d. \text{tang. } \downarrow = (d\varphi - d\pi) \cos. (\varphi - \pi) \text{ tang. } G + \sin. (\varphi - \pi) d. \text{tang. } G;$$

his valoribus inter se æquatis obtinebimus

C ij

$$d. \text{tang. } G = \frac{d \pi \text{ cof. } (\varphi - \pi)}{\text{fin. } (\varphi - \pi)} \text{tang. } G,$$

$$\text{feu } \frac{d. \text{tang. } G}{\text{tang. } G} = \frac{d \pi \text{ cof. } (\varphi - \pi)}{\text{fin. } (\varphi - \pi)}.$$

Sufficit igitur longitudinem nodi π ejusque variationem determinavisse, indeque facile inclinatio orbitæ G definitur; est enim $\frac{d. \text{tang. } G}{\text{tang. } G}$ differentiale logarithmi ipsius G , quod si ita indicemus $d. l \text{ tang. } G$, erit

$$d. l \text{ tang. } G = \frac{d \pi \text{ cof. } (\varphi - \pi)}{\text{fin. } (\varphi - \pi)} = d \pi \text{ cot. } (\varphi - \pi).$$

Patet igitur nisi linea nodorum sit fixa ideoque $d \pi = 0$, inclinationem orbitæ continuis variationibus esse obnoxiam, quarum autem alteræ ex alteris facile definiri poterunt.

§. XVII. Propositum autem est invenire ddr , cujus valor ob $r = x \text{ tang. } \psi$ est: $ddx \text{ tang. } \psi + 2dx d. \text{tang. } \psi + x dd. \text{tang. } \psi = -\frac{1}{2} R dt^2$. Verum invenimus:

$$\text{tang. } \psi = \text{fin. } (\varphi - \pi) \text{ tang. } G, \text{ atque}$$

$$d. \text{tang. } \psi = d \varphi \text{ cof. } (\varphi - \pi) \text{ tang. } G; \text{ unde ob}$$

$$d. \text{tang. } G = \frac{d \pi \text{ cof. } (\varphi - \pi)}{\text{fin. } (\varphi - \pi)} \text{tang. } G, \text{ erit porro differen-}$$

tiando

$$dd. \text{tang. } \psi = dd \varphi \text{ cof. } (\varphi - \pi) \text{ tang. } G - d \varphi (d \varphi - d \pi) \text{fin. } (\varphi - \pi) \text{ tang. } G + \frac{d \varphi d \pi \text{ cof. } (\varphi - \pi)^2}{\text{fin. } (\varphi - \pi)} \text{tang. } G,$$

$$\text{sive } dd. \text{tang. } \psi = dd \varphi (\text{cof. } (\varphi - \pi) - d \varphi^2 \text{fin. } (\varphi - \pi)) + \frac{d \varphi d \pi}{\text{fin. } (\varphi - \pi)} \text{tang. } G.$$

Quibus valoribus substitutis tertia æquatio induet hanc formam

$$\left\{ \begin{array}{l} + ddx \text{fin. } (\varphi - \pi) + 2 dx d \varphi \text{cof. } (\varphi - \pi) \\ + x dd \varphi \text{cof. } (\varphi - \pi) - x d \varphi^2 \text{fin. } (\varphi - \pi) + \frac{x d \varphi d \pi}{\text{fin. } (\varphi - \pi)} \end{array} \right\} \text{tang. } G = -\frac{1}{2} R dt^2$$

At ex binis prioribus æquationibus erat : $ddx - x d\varphi^2 = -\frac{1}{2} V dt^2$ & $2 dx d\varphi + x dd\varphi = -\frac{1}{2} T dt^2$;
 ficque fiet :

$$\left(-\frac{1}{2} V dt^2 \sin.(\varphi - \pi) - \frac{1}{2} T dt^2 \cos.(\varphi - \pi) + \frac{x d\varphi d\pi}{\sin.(\varphi - \pi)} \right) \text{tang. } G = -\frac{1}{2} R dt^2, \text{ seu}$$

$$\frac{x d\varphi d\pi}{\sin.(\varphi - \pi)} = \frac{1}{2} dt^2 \left(V \sin.(\varphi - \pi) + T \cos.(\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G} \right).$$

§. XVIII. Ex viribus igitur follicitantibus V , T & R quaterna nostra elementa x , φ , π & G ad quodvis tempus t per sequentes quaternas æquationes differentiales primi gradus determinantur.

$$\text{I. } dt = \frac{-x dx}{V(Bxx - A + fTx^3 d\varphi - xx f(Tx d\varphi + Vdx))}$$

$$\text{II. } d\varphi = \frac{dt}{xx} V(A - fTx^3 d\varphi).$$

$$\text{III. } d\pi = \frac{dt^2 \sin.(\varphi - \pi)}{2x d\varphi} \left(V \sin.(\varphi - \pi) + T \cos.(\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G} \right).$$

$$\text{IV. } d. l. \text{ tang. } G = \frac{d\pi \cos.(\varphi - \pi)}{\sin.(\varphi - \pi)}, \text{ seu } d. l. \text{ tang. } G =$$

$$\frac{dt^2 \cos.(\varphi - \pi)}{2x d\varphi} \left(V \sin.(\varphi - \pi) + T \cos.(\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G} \right).$$

quæ æquationes in genere vix tractabiliores reddi posse videntur, nisi certa quædam virium follicitantium relatio accedat.



S E C T I O II.

Reductio harum formularum ad casum quo corpus imprimis ad punctum fixum urgetur vi in quadratis distantiarum reciproce proportionali, cujus respectu reliquæ vires sunt valde parvæ.

§. XIX. QUONIAM nobis est propositum in perturbationes motus planetarum quatenus ab eorum actione mutua oriuntur inquirere, tantum jam pro certo assumelicet, eorum motum, proxime saltem, regulis Keplerianis esse conformem ac perturbationes quas definiri oportet, vehementer esse exiguas. Moderatio igitur præcipua motus eorum efficitur à vi quadam ad punctum fixum secundum rationem reciprocam duplicatam distantiarum tendente, præ qua reliquæ vires quasi evanescant. Diferte enim fateri cogor, nisi hujusmodi vis inter reliquas vires sollicitantes longe emineat, nullo plane modo me perspicere, qua ratione ad aliqualem saltem motus cognitionem pertingere nobis liceat. Minime autem casui tribuendum videtur, quod hujusmodi motus, quorum investigatio vires nostras penitus superaret, etiamsi æque facile existere potuissent, in mundo non deprehendantur.

FIG. I.

§. XX. Sit igitur C id punctum, ad quod vis illa principalis quadratis distantiarum reciproce proportionalis dirigatur, si quidem hætenus hoc punctum ab arbitrio nostro pendeat. Neque tamen hanc vim quadrato distantiaæ veræ RC reciproce proportionalem statuamus quoniam ejus reductio ad nostras formulas denuo

latitudinem involveret. Sed quoniam planum fixum semper ita assumere licet, ut corpus ab eo non nisi quam minime recedat, angulusque ψ perpetuus sit valde exiguus, casum ita stabiliamus, ut vis V secundum directionem QC sollicitans habeat partem eximiam quadrato distantiae $QC = x$ reciproce proportionalem, cujus respectu tam reliqua pars quam binæ reliquæ vires T & R pro minimis haberi queant. Statuamus igitur $V = \frac{ff}{xx} + S$ ita ut vires S , T & R præ vi $\frac{ff}{xx}$ quasi evanescant.

§. XXI. Posito autem $V = \frac{ff}{xx} + S$ erit $\int V dx = \frac{-ff}{x} + \int S dx$ & $xx \int V dx = -ffx + xx \int S dx$, quo valore in nostris formulis surrogato habebimus,

$$I. dt = \frac{-x dx}{\sqrt{(Bxx + ffx - A + fTx^3 d\varphi - xx(fTx d\varphi + fS dx))}}$$

$$II. d\varphi = \frac{dt}{xx} \sqrt{(A - fTx^3 d\varphi)}, \text{ seu } d\varphi = \frac{-dx(A - fTx^3 d\varphi)}{xx \sqrt{(Bxx + ffx - A + fTx^3 d\varphi - xx(fTx d\varphi + fS dx))}}$$

$$III. d\pi = \frac{dt^2 \sin.(\varphi - \pi)}{2 x d\varphi} \times$$

$$\left(\frac{xx}{ff} \sin.(\varphi - \pi) + S \sin.(\varphi - \pi) + T \cos.(\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G} \right).$$

$$IV. d.l. \text{ tang. } G = \frac{d\pi \cos.(\varphi - \pi)}{\sin.(\varphi - \pi)}, \text{ seu } d.l. \text{ tang. } G = \frac{dt^2 \cos.(\varphi - \pi)}{2 x d\varphi} \times$$

$$\left(\frac{ff}{xx} \sin.(\varphi - \pi) + S \sin.(\varphi - \pi) + T \cos.(\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G} \right).$$

Unde latitudo ψ ita determinatur ut sit $\text{tang. } \psi = \sin.(\varphi - \pi) \text{ tang. } G$. Hæcque æquationes, quatenus termini litteras S , T & R involventes sunt minimi, ad institutum nostrum propius accommodari oportet.

§. XXII. Quo rationem parvitatæ virium T & S facilius in calculum introducere queamus, contemplemur

24 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

primum casum, quo istæ vires penitus evanescunt ; binæque priores æquationes sequentem induent formam:

$$\text{I. } dt = \frac{-x dx}{\sqrt{(Bxx + ffx - A)}} \&$$

$$\text{II. } d\phi = \frac{dt \sqrt{A}}{xx} = \frac{-dx \sqrt{A}}{x \sqrt{(Bxx + ffx - A)}} ;$$

quarum evolutio ita est in promptu , ut introducendo quodam angulo ν , qui anomalia vera vocari solet , si ponatur $x = \frac{b}{1 - k \cos \nu}$, constantes illæ A & B per has

novas b & k ita defini queant , ut formula irrationalis $\sqrt{(Bxx + ffx - A)}$ evanescat sive angulus ν sit $= 0$ sive duobus rectis æqualis. Atque hinc oritur notissima motus elliptici ratio , pro quo littera b denotat semiparametrum ellipsis & k ejus excentricitatem, seu focorum distantiam per axem transversum divisam. Accedentibus autem viribus minimis T & S motus aliquantillum ab hac lege discrepabit.

§. XXIII. Discrimen scilicet in hoc consistet, quod jam quantitates b & k non amplius futuræ sunt constantes, sed variabilitatem à viribus T & S oriundam im-

plicent. Quamobrem ponamus $x = \frac{p}{1 - q \cos \nu}$, sitque

ut ante ν ejusmodi angulus , quo sive evanescente sive ad 180° increscente , distantia x fiat sive maxima sive minima ; seu quod eodem redit ut fiat $dx = 0$, si sit $\sin. \nu = 0$. Cum igitur sit : $dx = -\frac{dx}{x} \times \sqrt{(Bxx + ffx - A + fTx^3 d\phi - xx(fTx d\phi + fSdx))$

formula irrationalis, posito $x = \frac{p}{1 - q \cos \nu}$, factorem $\sin. \nu$

involvere seu hujusmodi formam $W \sin. \nu$ habere debet : quod ut eveniat ipsæ quantitates variables p & q debito modo defini conveniet. At posito præterquam
in

in formulis integralibus $x = \frac{P}{1 - q \cos v}$, habebimus: $dx = -\frac{dt}{P} x$

$$V(Bpp + ffp(1 - q \cos v) - A(1 - q \cos v)^2 + (1 - q \cos v)^2 fTx^3 d\phi - pp(fTx d\phi + fS dx)).$$

§. XXIV. Evolvamus hanc formulam secundum $\cos v$ hoc modo:

$$dx = -\frac{dt}{P} V \left\{ \begin{array}{l} Bpp + ffp - A + fTx^3 d\phi - pp(fTx d\phi + fS dx) \\ - ffp q \cos v + 2 A q \cos v - 2 q \cos v \cdot fTx^3 d\phi \\ - A q q \cos v^2 + q q \cos v^2 fTx^3 d\phi \end{array} \right\}$$

jam ut in signo radicali $\sin v^2$ seu $1 - \cos v^2$ involvatur, reddamus terminos ipsum $\cos v$ continentis nihilo æquales, unde divisione per $2 q \cos v$ instituta fit:

$$-\frac{1}{2} ffp + A - fTx^3 d\phi = 0, \text{ seu } A - fTx^3 d\phi = \frac{1}{2} ffp.$$

hocque valore substituto orietur:

$$dx = -\frac{dt}{P} V \left\{ \begin{array}{l} Bpp + \frac{1}{2} ffp - pp(fTx d\phi + fS dx) \\ - \frac{1}{2} ffp q q \cos v^2. \end{array} \right\}$$

Fiat porro:

$$Bpp + \frac{1}{2} ffp - pp(fTx d\phi + fS dx) = \frac{1}{2} ffp q q;$$

$$\text{seu } \frac{1}{2} ff q q = Bp + \frac{1}{2} ff - p(fTx d\phi + fS dx)$$

quo facto habebitur:

$$dx = -\frac{dt}{P} \sqrt{(\frac{1}{2} ffp q q - \frac{1}{2} ffp q q \cos v^2)} = -\frac{f q d t \sin v}{V 2 p}.$$

§. XXV. Posito ergo $x = \frac{P}{1 - q \cos v}$, ut p exprimat

semiparametrum, & q excentricitatem ellipsis, utramque ob perturbationes variabilem, atque v anomaliam veram, hæc quantitates ita per vires T & S determinari debent ut fit:

$$p = \frac{2 A - 2 \int T x^3 d\phi}{ff}, \text{ \&}$$

$$q q = \frac{ff + 2 Bp - 2 p(fTx d\phi + fS dx)}{ff}.$$

Prix de 1756.

D

26 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

Cum autem hæ ipsæ quantitates, evanescentibus viribus T & S , evadant constantes, sicque earum valores quasi medii prodire debeant, ponantur hi $p = b$ & $q q = k k$, hincque constantes A & B instituto convenienter ita definiuntur ut sit :

$$b = \frac{2c}{ff} \text{ seu } A = \frac{1}{2} b ff; \text{ \&}$$

$$k k = \frac{ff + 2 B b}{ff} \text{ seu } B = \frac{-ff(1-kk)}{2b}.$$

Hinc itaque habebimus :

$$p = b - \frac{2}{ff} \int T x^3 d\phi,$$

$$q q = 1 - \frac{(1-kk)p}{b} - \frac{2p}{ff} (\int T x d\phi + \int S dx).$$

§. XXVI. Valoribus igitur p & q ita stabilitis, ut earum variabilitas tantum à viribus T & S , quarum actio est valde parva, pendeat, obtinebimus inde :

$$\text{Ipsam distantiam curtatam } x = \frac{p}{1-q \cos v},$$

$$\text{Ejusque differentiale . . . } dx = \frac{-f q d t \sin v}{\sqrt{2p}}.$$

Tum verò erit ut ante invenimus :

$$d\phi = \frac{dt}{xx} \sqrt{(A - \int T x^3 d\phi)} = \frac{dt}{xx} \sqrt{(\frac{1}{2} b ff - \int T x^3 d\phi)},$$

$$\text{vel etiam } d\phi = \frac{f dt}{xx} \sqrt{\frac{1}{2} p} = \frac{f dt (1 - \cos v)^2}{p \sqrt{2p}}.$$

Sicque commodius differentialia dx & $d\phi$ per differentiale temporis dt habentur expressa. Hæ autem formulæ in locum binarum priorum æquationum (§. XXI) inventarum sunt substituendæ; quod vero ad binas posteriores attinet, quæ ad latitudinem spectant, eas deinceps seorsim considerabo, quia earum evolutio non tantis est subjecta difficultatibus. Hic igitur ita binis prioribus inhærebo; quasi binæ posteriores prorsus abessent.

§. XXVII. Verum conditio, qua esse debet $dx = \frac{-f g dt \sin v}{\sqrt{2p}}$ existente $x = \frac{p}{1 - q \cos v}$, novam determina-

tionem continet, quæ indolem anomalix veræ v & quemadmodum ejus differentiale sit comparatum definit. Cum enim sit $1 - q \cos. v. = \frac{p}{x}$ erit, differentiando

& pro dx valorem $-\frac{f q dt \sin. v}{v^2 p}$ substituendo:

$$-d q \cos. v + q d v \sin. v = \frac{d p}{x} + \frac{f q dt \sin. v}{x x} \sqrt{\frac{1}{2} p}, \text{ seu}$$

$$q d v \sin. v = \frac{d p}{x} + d q \cos. v + \frac{f q dt \sin. v}{x x} \sqrt{\frac{1}{2} p}.$$

Per valores autem pro p & q supra inventos, etiam harum quantitatum differentialia innotescunt: erit enim

$$d p = -\frac{2 T x^3 d \varphi}{f f} = -\frac{T x dt}{f} \sqrt{2 p} \text{ ob } d \varphi = \frac{f dt}{x x} \sqrt{\frac{1}{2} p}, \text{ \&}$$

$$d. \frac{q q}{p} = -\frac{d p}{p p} - \frac{2 T x d \varphi}{f f} - \frac{2 S d x}{f f} =$$

$$\frac{T x dt}{f p p} \sqrt{2 p} - \frac{T dt}{f x} \sqrt{2 p} + \frac{2 S q d' \sin. v}{f v^2 p}$$

substitutis pro $d p$, $d \varphi$ & $d x$ valoribus inventis. Quæ formula porro evoluta oritur:

$$\frac{2 q d q}{p} = -\frac{T q q x dt}{f p p} \sqrt{2 p} + \frac{T x dt}{f p p} \sqrt{2 p} - \frac{T dt}{f x} \sqrt{2 p} + \frac{2 S q dt \sin. v.}{f v^2 p}$$

quæ ob $p = x(1 - q \cos. v)$ reducitur ad hanc formam:

$$d q = \frac{T x dt}{2 f p} (2 \cos. v - q - q \cos. v^2) \sqrt{2 p} + \frac{S p dt \sin. v}{f v^2 p}.$$

§. XXVIII. Cum igitur sit:

$$\frac{d p}{x} = -\frac{T dt}{f} \sqrt{2 p} = -\frac{2 T x dt (1 - q \cos. v)}{2 f p} \sqrt{2 p} \text{ erit}$$

$$\frac{d p}{x} + d q \cos. v = \frac{T x dt}{2 f p} (2 \cos. v^2 + q \cos. v - q \cos. v^3 - 2) \sqrt{2 p} + \frac{S p dt \sin. v \cos. v}{f v^2 p}$$

hæc forma ob $1 - \cos. v^2 = \sin. v^2$ perducitur ad istam

$$\frac{d p}{x} + d q \cos. v = -\frac{T x dt \sin. v^2}{f v^2 p} (2 - q \cos. v) + \frac{S p dt \sin. v \cos. v}{f v^2 p}$$

D ij

28 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

quo valore in superiori expressione pro $q dv \sin. v$ inventa substituto, divisione facta per $q \sin. v$, habebitur:

$$dv = \frac{f dt}{x x} \sqrt{\frac{1}{2} p} - \frac{T x dt \sin. v}{f q v^2 p} (2 - q \cos. v) + \frac{S p dt \cos. v}{f q v^2 p}.$$

Hæc autem porro, ob $x(1 - q \cos. v) = p$, transit in formas sequentes:

$$dv = \frac{f dt}{x x} \sqrt{\frac{1}{2} p} - \frac{T dt \sin. v}{f q} \sqrt{2 p} - \frac{T x dt \sin. v \cos. v}{f v^2 p} + \frac{S p dt \cos. v}{f q v^2 p}, \text{ seu}$$

$$dv = \frac{f dt}{x x} \sqrt{\frac{1}{2} p} - \frac{p dt (2 T \sin. v - S \cos. v)}{f q v^2 p} - \frac{T x dt \sin. v \cos. v}{f v^2 p}, \text{ veletiam}$$

$$dv = \frac{f dt}{x x} \sqrt{\frac{1}{2} p} + \frac{x dt (S \cos. v (1 - q \cos. v) - T \sin. v (2 - q \cos. v))}{f q v^2 p}.$$

§. XXIX. Quoniam porro est:

$$d\phi = \frac{f dt}{x x} \sqrt{\frac{1}{2} p} \ \& \ dx = - \frac{f q dt \sin. v}{v^2 p} \ \text{erit:}$$

$$\int T x^3 d\phi = f \int T x dt \sqrt{\frac{1}{2} p}$$

$$\int T x d\phi = f \int \frac{T dt}{x} \sqrt{\frac{1}{2} p} \ \&$$

$$\int S dx = - f \int \frac{S q dt \sin. v}{v^2 p}, \ \text{ideoque}$$

$$\int T x d\phi + \int S dx = f \int \frac{dt}{\sqrt{2 p}} (T(1 - q \cos. v) - S q \sin. v).$$

His igitur valoribus substituendis non solum formulæ integrales, quæ etiamnunc in calculum ingrediuntur, ad differentiale temporis reducuntur, sed etiam omnium quantitarum variabilium, quibus jam erit utendum, differentialia per idem temporis differentiale dt erunt expressa. Neque vero adhuc ulla approximatione sumus usi, unde hæc determinationes etiam locum habent, tametsi forte vires T & S non fuerint adeo exiguæ. Interim tamen parum subsidii inde consequi licet, nisi istæ vires valde fuerint parvæ.

§. XXX. Hæc autem formulæ maxime videntur idoneæ, ad motus aberrationes à regulis Kepplerianis definiendas; referuntur enim ad motum in ellipsi continuo

variabili tam ratione ejus parametri & excentricitatis quam situs lineæ absidum. Quovis enim tempore minimo motus corporis ita considerari potest, quasi fieret in ellipsi secundum regulas Keppleri, ac si pro quolibet tempore constet magnitudo istius ellipsis, ejusque excentricitas una cum situ lineæ absidum, ex formulis inventis verus corporis locus, quatenus ad planum assumptum refertur, assignari poterit. Assumo igitur ad tempus propositum t orbitæ ad planum nostrum fixum relata esse

I. Semiparametrum orbitæ $= p$;

II. Excentricitatem ejus $= q$,

III. Atque anomaliam veram corporis $= \nu$.

Unde cum longitudo corporis posita sit $= \phi$, longitudo absidis summæ definietur angulo $= \phi - \nu$.

§. XXXI. Ex his igitur elementis ellipticis primo deducitur distantia curtata $CQ = x$ ope formulæ $x =$

$\frac{p}{1 - q \cos. \nu}$; unde posito angulo $\nu = 0$ colligitur distan-

tia absidis summæ $= \frac{p}{1 - q}$ & posito $\nu = 180^\circ$ distantia

absidis imæ à puncto $C = \frac{p}{1 + q}$, quarum summa $\frac{2p}{1 - q^2}$

præbet axem transversum orbitæ ellipticæ, cujus prop-

terea semissis est $= \frac{p}{1 - q^2}$, & semissis distantia focorum

$= \frac{pq}{1 - q^2}$: tum vero semi axis conjugatus erit $= \frac{p}{\sqrt{1 - q^2}}$.

Deinde vero ipsa corporis longitudo seu angulus $ACQ = \phi$ ita per hæc elementa determinatur, ut sit:

$$d\phi = \frac{f dt}{xx} \sqrt{\frac{1}{2} p}, \text{ seu } d\phi = \frac{f dt (1 - q \cos. \nu)^2}{p \nu^2 p};$$

unde ea per integrationem elici poterit, dummodo lex constet, qua quantitates variables p , q & ν cum tempore mutantur, hanc autem variabilitatis legem jam eruimus.

30 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

§. XXXII. Si nullæ adessent vires perturbantes T & S , tam parameter orbitæ $2p$ quam excentricitas q essent quantitates constantes, atque anomalia vera v cum longitudine ϕ paria caperet incrementa; sicque ob $d\phi = dv = 0$, linea absidum immota maneret. Videamus igitur quales mutationes hæc quantitates subire debeant accedentibus istis viribus perturbatricibus T & S . Ac primo quidem ob $Tx^3 d\phi = fTx dt v \frac{1}{2}p$, tempusculo dt semiparametri p incrementum inventum est:

$$dp = - \frac{Tx dt}{f} \sqrt{2p} = - \frac{Tp dt \sqrt{2p}}{f(1-q \cos v)}$$

quod ergo tantum à vi T pendet, nisi quatenus variabilitas quantitatum q & v simul alteram vim S involvit. Hinc igitur erit:

$$\frac{dp}{p\sqrt{p}} = - \frac{T dt \sqrt{2}}{f(1-q \cos v)} \& \frac{2}{\sqrt{p}} = \int \frac{T dt \sqrt{2}}{f(1-q \cos v)}$$

feu cum medius valor ipsius p sit $= b$ erit:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{f\sqrt{2}} \int \frac{T dt}{1-q \cos v}$$

§. XXXIII. Secundo incrementum excentricitatis dq ita expressum invenimus pro tempusculo dt , ut sit:

$$dq = \frac{Tx dt (2 \cos v - q - q \cos v^2) + Sp dt \sin v}{f\sqrt{2p}},$$

quo substituto pro x valore $\frac{p}{1-q \cos v}$ abit in

$$dq = \frac{p dt}{f\sqrt{2p}} \left(\frac{T}{1-q \cos v} (2 \cos v - q - q \cos v^2) + S \sin v \right), \text{ feu}$$

$$dq = \frac{dt}{f} \left(T \cos v + S \sin v + T \cdot \frac{\cos v - q}{1-q \cos v} \right) \sqrt{\frac{1}{2}p}, \text{ vel etiam}$$

$$dq = \frac{dt}{f} \left(2 T \cos v + S \sin v - \frac{T q \sin v^2}{1-q \cos v} \right) \sqrt{\frac{1}{2}p};$$

in qua formula ultimus terminus præ binis præcedenti-

bus erit valde parvus, si quidem excentricitas q non adeo fuerit notabilis. Cognitis igitur viribus T & S cum anomalia vera, hinc facile colligitur, quantum excentricitas intervallo minimi tempusculi dt immutetur, quemadmodum ex formula præcedente variatio semiparametri p inotescit.

§. XXXIV. Hinc etiam definiri potest variabilitas axis transversæ ellipsis, cum enim ejus semissis sit $= \frac{p}{1-q^2}$ erit ejus differentiale :

$$d. \frac{p}{1-q^2} = \frac{(1-qq) dp + 2pq dq}{(1-qq)^2}.$$

Quod si jam valores pro dp & dq inventi substituantur, reperitur reductione rite facta :

$$d. \frac{p}{1-q^2} = - \frac{p dt \sqrt{2p}}{f(1-qq)^2} (T - q (T \cos. v + S \sin. v)).$$

Quare si semi-axis transversus ponatur $= r$, ut sit $r = \frac{p}{1-q^2}$, ob $\frac{p \sqrt{2p}}{(1-q^2)^2} = r r \sqrt{\frac{2}{p}}$, fiet

$$dr = - \frac{r r dt}{f \sqrt{\frac{2}{p}}} (T - q (T \cos. v + S \sin. v)), \text{ feu}$$

$$\frac{-dr}{rr} = d. \frac{1}{r} = \frac{dt (T - q (T \cos. v + S \sin. v))}{f \sqrt{\frac{2}{p}}}$$

Unde, si semi-axis transversus medius ponatur $= a$, fiet

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \int \frac{dt}{f \sqrt{\frac{2}{p}}} (T - q (T \cos. v + S \sin. v)).$$

§. XXXV. Denique mutatio instantanea lineæ absidium est indaganda, cujus longitudo cum sit $= \phi - v$, erit ejus incrementum tempusculo dt ortum $= d\phi - dv$. Verum invenimus :

$$d\phi = \frac{f dt}{x^2} \sqrt{\frac{1}{2} p} = \frac{f dt (1 - q \cos. v)^2}{p \sqrt{2p}}, \text{ \&}$$

$$dv = \frac{f dt}{x^2} \sqrt{\frac{1}{2} p} + \frac{x dt (S \cos. v (1 - q \cos. v) - T \sin. v (2 - q \cos. v))}{f q \sqrt{2p}}, \text{ feu}$$

$$dv = d\varphi + \frac{dt}{f^2} \left(S \cos. v - \frac{T(2 - q \cos. v) \sin. v}{1 - q \cos. v} \right) \sqrt{\frac{1}{2} p}.$$

Unde colligimus

$$d\varphi - dv = \frac{dt}{f^2} \left(\frac{T(2 - q \cos. v) \sin. v}{1 - q \cos. v} - S \cos. v \right) \sqrt{\frac{1}{2} p} =$$

$$\frac{dt}{f^2} \left(\frac{T \sin. v}{1 - q \cos. v} + T \sin. v - S \cos. v \right) \sqrt{\frac{1}{2} p}, \text{ five}$$

$$d\varphi - dv = \frac{dt}{f^2} \left(2 T \sin. v - S \cos. v + \frac{Tq \sin. v \cos. v}{1 - q \cos. v} \right) \sqrt{\frac{1}{2} p}.$$

Hinc igitur patet motum lineæ absidum eo fieri notabiliorē, quo minor fuerit excentricitas q ; qua evanescente etiam in infinitum abire videtur. Verum notandum est, quo minor fuerit excentricitas, eo minus referre verum lineæ absidum locum nosse.

§. XXXVI. Postremo ad eadem elementa reducere poterimus æquationum principalium (§. XXI) binas posteriores; cum enim sit $d\varphi = \frac{fdt}{xx} \sqrt{\frac{1}{2} p}$ erit $\frac{d\varphi^2}{2x d\varphi} = \frac{x dt}{f \sqrt{2p}}$, mutationes momentaneæ, quas cum linea nodorum tum inclinatio orbitæ ad planum fixum subibunt, ita per tempusculum minimum dt erunt expressæ;

$$d\pi = \frac{x dt \sin. (\varphi - \pi)}{f \sqrt{2p}} \left(\frac{ff}{xx} \sin. (\varphi - \pi) + S \sin. (\varphi - \pi) + T \cos. (\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G} \right)$$

$$d \text{ tang. } G = \frac{x dt \cos. (\varphi - \pi)}{f \sqrt{2p}} \left(\frac{ff}{xx} \sin. (\varphi - \pi) + S \sin. (\varphi - \pi) + T \cos. (\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G} \right).$$

Unde latitudo \downarrow ita definitur ut sit $\text{tang. } \downarrow = \sin. (\varphi - \pi) \text{ tang. } G$.

Hic quidem partes adsunt à viribus perturbatricibus non pendentes, verum hoc inde venit, quod vim quadratis distantiarum reciproce proportionalem in plano fixo assumimus. Si enim ea, uti rei natura postulat, secundum distantiam veram RC assumatur, istæ partes à vi

$\frac{R}{\text{tang. } G}$ tollentur, id quod in applicatione fiet manifestum.

SECTIO III.

S E C T I O III.

Investigatio Virium quibus motus Planetæ principalis ab actione alius Planetæ perturbatur.

§. XXXVII. CUM perturbationes, quibus planetæ principales se mutuo afficiunt, sint vehementer parvæ, dum uniuscujusque planetæ perturbationes investigamus, motum reliquorum tanquam regulis Kepleri perfecte conformem spectare licebit: tantillus enim error, qui hac ratione in motu planetæ perturbantis admittitur, in effectu multo minorem, hoc est evanescentem producere est censendus. Quoniam igitur quæstio ad planetas principales adstringitur, punctum fixum C in centro solis assumi conveniet; & quia motus planetæ perturbantis in plano fieri potest judicari, hoc ipsum planum pro plano illo fixo, ad quod motum planetæ turbati referre constituimus, commodissime assumemus. Cum enim invenerimus, quomodo motus istius planetæ respectu hujus plani immutetur, facile erit perturbationes ad quodvis aliud planum in cœlo fixum traducere, sicque inconstantiam, cui planum orbitæ planetæ perturbantis est obnoxium, exuere.

§. XXXVIII. Conveniat igitur planum tabulæ cum plano orbitæ planetæ perturbantis, in quo C sit centrum solis, & CA recta inde ad fixum cœli punctum ducta, unde longitudines numerentur. Ad datum ergo tempus t planeta perturbans sit in hujus plani puncto V , à quo ductâ rectâ CV , ponatur:

Prix de 1756.

E

FIG. II.

I. Distantia hujus planetæ à sole . . . $CV = y$

II. Longitudo ejus seu angulus ACV . . . $= \theta$.

Quod si ergo vis, qua hic planeta in V ad solem urgetur fit $= \frac{f}{y^2}$, ejusque orbitæ semi latus rectum, seu semi-parameter $= c$, ejus excentricitas $= e$, & anomalia vera $= u$, erit per formulas supra inventas :

$$y = \frac{c}{1 - e \cos u} ; \text{ \& } d\theta = du = \frac{f dt}{y^2} \sqrt{\frac{1}{2} c} = \frac{f dt (1 - e \cos u)^2}{c \sqrt{2} c} ;$$

$$\text{unde fit } dy = - \frac{c e du \sin u}{(1 - e \cos u)^2} = - \frac{e f dt \sin u}{\sqrt{2} c} ; \text{ ficque}$$

hæc differentialia ad elementum temporis dt habemus reducta.

§. XXXIX. Alter jam planeta, cujus perturbatio- nes motus indagamus, extra hoc planum reperitur in R unde ad id ducto perpendicularo RQ , junctisque rectis RC & QC , fit ut ante :

I. Ejus distantia à sole curtata seu recta $CQ = x$

II. Longitudo ejus seu angulus ACQ . . . $= \phi$

III. Latitudo ejus seu angulus QCR . . . $= \psi$

Unde fit ejus distantia à sole vera . . . $= \frac{x}{\cos \psi}$

Verum pro latitudine considerentur linea nodorum $C\Omega$ & inclinatio orbitæ ad planum orbitæ prioris planetæ, fitque

IV. Longitudo nodi ascendentis seu angulus $AC\Omega = \pi$

V. Inclinatio orbitæ seu angulus QSR . . . $= G$

ex quibus elementis latitudo ita exprimitur, ut fit

$$\text{tang. } \psi = \sin. (\phi - \pi) \text{ tang. } G.$$

Quod si porro jungantur rectæ QV & RV , erit

$$QV = \sqrt{(x^2 + yy - 2xy \cos. (\phi - \theta))}, \text{ \&}$$

$$VR = \sqrt{\left(\frac{xx}{\cos. \psi^2} + yy - 2xy \cos. (\phi - \theta)\right)} = z$$

ponamus enim brevitatis gratia hanc distantiam $VR = z$.

§. XL. Cum jam planeta R tam ad solem quam ad alterum planetam V attrahatur in ratione reciproca duplicata distantiarum, sit utraque vis ita comparata, ut ad distantiam d habeatur

$$\text{vis acceleratrix ad solem tendens} \dots = \frac{E}{dd},$$

$$\text{vis acceleratrix ad planetam tendens} \dots = \frac{F}{dd}.$$

Hinc itaque planeta in R urgebitur

$$\text{primo ad solem secundum } RC \text{ vi} = \frac{E \cos. \psi^2}{xx},$$

$$\text{deinde ad planetam in } V \text{ secundum } RV \text{ vi} = \frac{F}{zz}.$$

Quoniam vero ipse sol quoque ad planetam V follicitatur secundum CV vi acceleratrice $= \frac{E}{yy}$, ut solem in quiete retineamus hæc vis secundum directionem contrariam QV in planetam R transferri debet, hincque iste præterea follicitabitur:

$$\text{Secundum directionem } QV \text{ vi} = \frac{F}{yy}.$$

Quin etiam ipse planeta V omnino ad solem urgeri censendus est secundum VC vi $= \frac{E + F}{yy}$, quam modo posueramus $= \frac{ff}{yy}$.

§. XLI. Nunc vero ante omnia vires planetam R follicitantes revocari debent ad directiones QC , QN & RQ , ut inde valores virium assumptarum V , T & R obtineantur. Ac primo quidem vis secundum RC $= \frac{E \cos. \psi^2}{xx}$ præbet

$$\text{Secundum directionem } QC \text{ vim} = \frac{E \cos. \psi^3}{xx} \text{ pro vi } V,$$

$$\text{Secundum directionem } RQ \text{ vim} = \frac{E \sin. \psi \cos. \psi^2}{xx} \text{ pro vi } R;$$

E ij

36 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

Secunda vis secundum $RV = \frac{F}{x^2}$, ob $QR = x \text{ tang. } \psi$,
& $VR = z$, præbet

Secundum directionem RQ vim $= \frac{F \cdot QR}{z^3} = \frac{Fx \text{ tang. } \psi}{z^3}$ pro R ,

Tum vero secundum QV vim $= \frac{F \cdot QV}{z^3}$ quæ, ob

$$QV \text{ cof. } CQV = -y \text{ cof. } (\varphi - \theta) + x \text{ \&}$$

$$QV \text{ sin. } CQV = y \text{ sin. } (\varphi - \theta),$$

reducitur ad binas sequentes

Secundum QC vim $= \frac{-F}{x^2} (y \text{ cof. } (\varphi - \theta) - x)$ pro vi V ,

Secundum QN vim $= \frac{Fy \text{ sin. } (\varphi - \theta)}{z^3}$ pro vi T ;

Denique tertia vis secundum $Qv = \frac{F}{y^2}$, ob $CQv = \varphi - \theta$, dat

Secundum QC vim $= \frac{F \text{ cof. } (\varphi - \theta)}{yy}$ pro vi V ,

Secundum QN vim $= \frac{-F \text{ sin. } (\varphi - \theta)}{yy}$ pro vi T .

§. XLII. Colligamus singulas has vires ad directiones QC , QN & RQ reductas, atque habebimus

$$\text{Vim } V = \frac{E \text{ cof. } \psi^3}{ax} + \frac{Fx}{z^2} - Fy \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \text{ cof. } (\varphi - \theta),$$

$$\text{Vim } T = Fy \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \text{ sin. } (\varphi - \theta),$$

$$\text{Vim } R = \frac{E \text{ sin. } \psi \text{ cof. } \psi^2}{xx} + \frac{Fx \text{ tang. } \psi}{z^3};$$

nihilque superest, nisi ut hæ expressiones in locum litterarum V , T & R substituuntur. Quoniam vero angulus ψ semper est valde parvus, ejus cosinus proxime ad unitatem accedet; unde cum posuerimus $V = \frac{ff}{x^2} + S$, ita ut fit

$$S = \frac{-ff}{xx} + \frac{E \text{ cof. } \psi^3}{xx} + \frac{Fx}{\zeta^3} - Fy \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) \text{ cof. } (\varphi - \theta),$$

pro ff assumi poterit E ; & quamquam ante inveneramus $ff = E + F$, tamen quantitas F præ E tam est exigua, ut nullus plane error sit metuendus, si ponamus $ff = E$; ita ut habeamus:

$$S = \frac{-E(1 - \text{cof. } \psi^3)}{xx} + \frac{Fx}{\zeta^3} - Fy \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) \text{ cof. } (\varphi - \theta).$$

§ XLIII. Antequam autem hujus reductionis rationem habeamus, substitutio virium V , T & R in æquationibus variationem lineæ nodorum & inclinationis continentibus commode fieri poterit, quæ eo magis est notatu digna, quod uti jam innuimus termini à vi perturbatrice non pendent destruantur. Cum enim

fit $\text{tang. } G = \frac{\text{tang. } \psi}{\text{sin. } (\varphi - \pi)}$ factoris $V \text{ sin. } (\varphi - \pi) + T \text{ cof. } (\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G}$, qui illas expressiones ingreditur, valor satis concinne definietur, habebitur namque:

$$\begin{aligned} V \text{ sin. } (\varphi - \pi) &= \frac{E \text{ cof. } \psi^3}{xx} \text{ sin. } (\varphi - \pi) + \frac{Fx}{\zeta^3} \text{ sin. } (\varphi - \pi) - \\ &Fy \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) \text{ cof. } (\varphi - \theta) \text{ sin. } (\varphi - \pi), \\ T \text{ cof. } (\varphi - \pi) &= Fy \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) \text{ sin. } (\varphi - \theta) \text{ cof. } (\varphi - \pi), \\ - \frac{R}{\text{tang. } G} &= \frac{-E \text{ cof. } \psi^3}{xx} \text{ sin. } (\varphi - \pi) - \frac{Fx}{\zeta^3} \text{ sin. } (\varphi - \pi); \end{aligned}$$

Quare cum sit $-\text{cof. } (\varphi - \theta) \text{ sin. } (\varphi - \pi) + \text{sin. } (\varphi - \theta) \text{ cof. } (\varphi - \pi) = -\text{sin. } (\theta - \pi)$, erit $V \text{ sin. } (\varphi - \pi) + T \text{ cof. } (\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang. } G} = -Fy \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) \text{ sin. } (\theta - \pi)$.

§ XLIV. Perspicuum ergo est totam hanc expressionem, qua variatio in lineâ nodorum & inclinatione determinatur, unice à vi perturbante F pendere, cæte-

38 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

risque paribus sinui anguli $\theta - \pi$, qui oritur longitudinem nodi π a longitudine planetæ turbantis θ subtrahendo, esse proportionalem. Quodsi ergo ut ante semiparametrum orbitæ planetæ R ponamus $= p$, ex §. XXXVI, pro variatione tam lineæ nodorum, quam inclinationis, sequentes nanciscemur æquationes :

$$d\pi = - \frac{Fxy dt \sin.(\varphi - \pi) \sin.(\theta - \pi)}{f\sqrt{2p}} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right),$$

$$d.l.tang.G = - \frac{Fxy dt \cos.(\varphi - \pi) \sin.(\theta - \pi)}{f\sqrt{2p}} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right);$$

Ubi imprimis est memorabile has expressiones tanto simpliciores prodiisse. Quamvis autem eadem facilius ex ipsa virium sollicitantium indole erui potuissent, tamen earum derivationem ex formulis generalibus petere convenientius est visum.

§. XLV. Progrediamur ergo ad reliquas perturbaciones, & cum posuerimus pro orbita planetæ R turbata :

Semiparametrum $= p$,

Excentricitatem $= q$,

Et anomiliam veram $= v$; ita ut sit

$$x = \frac{p}{1 - q \cos.v} \quad \& \quad dx = \frac{-fq dt \sin.v}{\sqrt{2p}},$$

primò variationem parametri ita invenimus expressam

$$dp = - \frac{Tx dt}{f} \sqrt{2p} = - \frac{Tp dt \sqrt{2p}}{f(1 - q \cos.v)},$$

quæ idèoque hanc induet formam :

$$dp = - \frac{Fxy dt \sin.(\varphi - \theta)}{f \sqrt{2p}} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) \sqrt{2p},$$

neque enim adhuc pro x , y & z valores supra designatos substitui conveniet, quia illi non solum jam sunt

cogniti, sed etiam eorum differentialia per dt exhiberi possunt

$$\text{ob } y = \frac{c}{1 - e \cos u}, \quad d\theta = du = \frac{f dt}{y} \sqrt{\frac{1}{2} c}, \quad \&$$

$$dy = - \frac{f e dt \sin u}{\nu^2 c}.$$

§. XLVI. Secundo excentricitatis q variatio §. XXXIII est inventa

$$dq = \frac{dt}{f} \left(T \cos v + S \sin v + T \frac{\cos v - q}{1 - q \cos v} \right) \sqrt{\frac{1}{2} p}, \text{ seu}$$

$$dq = \frac{dt}{f} \left(2 T \cos v + S \sin v - \frac{T q \sin v^2}{1 - q \cos v} \right) \sqrt{\frac{1}{2} p},$$

ubi recordari debemus esse:

$$S = \frac{-E(1 - \cos \psi)}{xx} + \frac{F x}{z^3} - F y \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3} \right) \cos(\varphi - \theta), \quad \&$$

$$T = F y \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3} \right) \sin(\varphi - \theta);$$

quorum valorum substitutionem fieri non est opus: quod cum etiam in reliquis commode fieri nequeat, eas apponamus uti invenimus §. XXXV. Tertio scilicet pro motu lineæ absidum obtinuimus

$$d\varphi - d\nu = \frac{dt}{fq} \left(2 T \sin v - S \cos v + \frac{T q \sin v \cos v}{1 - q \cos v} \right) \sqrt{\frac{1}{2} p};$$

$$\& \text{ quia } d\varphi = \frac{f dt}{xx} \sqrt{\frac{1}{2} p} = \frac{f dt (1 - q \cos v)^2}{p \cdot \nu^2 p},$$

erit incrementum momentaneum anomalix veræ

$$d\nu = \frac{f dt}{x} \sqrt{\frac{1}{2} p} - \frac{dt}{fq} \left(2 T \sin v - S \cos v + \frac{T q \sin v \cos v}{1 - q \cos v} \right) \sqrt{\frac{1}{2} p}.$$

§ XLVII. Nunc autem elementum temporis dt eliminari conveniet, cujus loco commodissime motus medius solis sive terræ introducitur. Ponamus ergo distantiam mediam terræ à sole esse $= a$, hocque motu medio absolvi tempusculo dt angulum $= d\omega$.

40 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

Quoniam hoc casu excentricitas adest nulla, visque ad solem tendens est $\equiv \frac{ff}{aa} = \frac{E}{aa}$, erit ex principiis ante stabilitis : $d\omega = \frac{fdt}{aa} \sqrt{\frac{1}{2}a} = \frac{fdt}{a\sqrt{2a}}$ ideoque $fdt = a d\omega \sqrt{2a}$, &

$$\frac{dt}{f} = \frac{a d\omega \sqrt{2a}}{ff} = \frac{a d\omega \sqrt{2a}}{E}.$$

Tempore ergo absoluto t eliminato, ejusque loco angulo ω quem sol motu medio interea absolvit, nostræ formulæ differentiales omnes ad elementum istius motus medii $d\omega$ reduci poterunt. Ac si insuper ponatur $F = nE$, ubi n semper fractionem vehementer parvam denotabit, erit $\frac{T}{E} = ny \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sin. (\varphi - \theta)$,

$$\frac{S}{E} = - \frac{(1 - \cos. \varphi^3)}{xx} + \frac{nx}{x^3} - ny \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cos. (\varphi - \theta).$$

§. XLVIII. Substituto ergo pro dt isto valore, habebimus primo pro planeta perturbante :

$$d\theta = du = \frac{ad\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{ac}; \text{ \& } dy = -ae d\omega \sin. u \sqrt{\frac{a}{c}},$$

at pro planeta perturbato :

$$d\varphi = \frac{ad\omega}{xx} \sqrt{ap}; \text{ \& } dx = -aq d\omega \sin. v \sqrt{\frac{a}{p}} \text{ porroque } dp = -\frac{T}{E} \cdot 2ax d\omega \sqrt{ap} = -2naxy d\omega \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sin. (\varphi - \theta) \cdot \sqrt{ap},$$

$$dq = a d\omega \left(\frac{2T}{E} \cos. v + \frac{S}{E} \sin. v - \frac{T}{E} \cdot \frac{q \sin. v^2}{1 - q \cos. v} \right) \cdot \sqrt{ap},$$

$$d\varphi - dv = \frac{ad\omega}{q} \left(\frac{2T}{E} \sin. v - \frac{S}{E} \cos. v + \frac{T}{E} \cdot \frac{q \sin. v \cos. v}{1 - q \cos. v} \right) \cdot \sqrt{ap}, \text{ \& }$$

$$dv = \frac{ad\omega}{xx} \cdot \sqrt{ap} - \frac{ad\omega}{q} \left(\frac{2T}{E} \sin. v - \frac{S}{E} \cos. v + \frac{T}{E} \cdot \frac{q \sin. v \cos. v}{1 - q \cos. v} \right) \cdot \sqrt{ap}.$$

Si ulterius semi-axis transversus $\frac{p}{1 - q}$ ponatur $= r$, erit

$$dr = \frac{-2ar r d\omega \sqrt{a}}{vp} \left(\frac{T}{E} - \frac{T}{E} q \cos. v - \frac{S}{E} q \sin. v \right),$$

uti ex §. XXXIV colligere licet,

§. XLIX.

§. XLIX. Simili modo & mutationes, quas linea nodorum & inclinatio orbitæ tempusculo, quo sol secundum medium motum per angulum $d\omega$ progreditur subeunt, exprimi poterunt. Posito enim $F = nE$, & solis distantia media à terrâ $= a$, quoniam invenimus:

$$\frac{d\tau}{f} = \frac{n a d\omega \sqrt{2a}}{E} \text{ erit } \frac{F d\tau}{f} = n a d\omega \sqrt{2a}, \text{ \& } \frac{F d\tau}{f \sqrt{2p}} = n a d\omega \sqrt{\frac{a}{p}};$$

formulæ supra exhibitæ abibunt in has:

$$d\pi = -n a x y d\omega \cos. (\varphi - \pi) \sin. (\theta - \pi) \cdot \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) \cdot \sqrt{\frac{a}{p}}.$$

$$d. l. \text{ tang. } G = -n a x y d\omega \cos. (\varphi - \pi) \sin. (\theta - \pi) \cdot \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right) \cdot \sqrt{\frac{a}{p}}.$$

Cum autem valor ipsius $d\pi$ jam fuerit inventus, erit succinctius

$$d. l. \text{ tang. } G = \frac{d. \text{ tang. } G}{\text{tang. } G} = d\pi \frac{\cos. (\varphi - \pi)}{\sin. (\varphi - \pi)}.$$

Per has igitur formulas omnium quantitatum, quibus determinatio perturbationum continetur, incrementa, quæ tempusculo per motum solis medium $d\omega$ expresso capiunt, definiri poterunt, neque hæctenus ulla approximatione sumus usi, nisi quatenus pro motu planetæ perturbantis loco $E + F$ simpliciter E scripsimus, unde autem nulla aberratio à vero oriri potest.

§. L. At vero in calculi subsidium jam multo gravio-rem hypothesin assumimus, dum motum planetæ perturbantis, quem in V fingimus, tanquam regulis Kepleri perfecte consentaneum spectamus; si enim iste planeta esset Saturnus, cujus motum non mediocriter ab actione Jovis turbari novimus, nullum certè est dubium, quin ejus perturbationes effectus, qui ab ejus actione in motum reliquorum planetarum redundant, aliquantillum essent affecturæ. Interim tamen pro certo statuere licet, istas variationes incomparabiliter futuras esse minores, neque effectum Saturni verum sensibilibiter esse

Prix de 1756.

F

discrepaturum ab eo, quem regulas Keppleri exacte secutus, esset producturus; imprimis cum constet, universam perturbationem esse quam minimam, atque adeo nos contenti esse debeamus eam tantum vero proxime determinasse. Æque parvi autem momenti sine ullo dubio æstimanda erit ea aberratio, quæ dum pro $E + F$ tantum E seu 1 pro $1 + n$ semper est fractio quam minima.

§. LI. Non parum paradoxon videri debet, quod etiamsi vis planetæ perturbantis, seu fractio n penitus evanesceret, tamen pro altero planeta tam excentricitas q quam linea absidum mutationibus esset obnoxia: propterea quod evanescente fractione n , quantitas $\frac{S}{E}$ non in nihilum abeat, sed valorem $= \frac{-1 + \cos. \psi}{xx}$ retineat,

quo utrumque differentiale dq & $d\phi - dv$ afficitur. Verum perpendendum est, quod dum orbitam planetæ in aliud planum projicimus, projectio quidem quoque futura sit ellipsis, sed cujus focus non amplius futurus sit in puncto C . Etiamsi ergo motus projectus fiat in ellipsi, areæque adeo circa punctum C descriptæ temporibus sint proportionales, tamen quia in C non est focus ellipsis, motus regulis Keppleri non erit conformis. Cum autem nihilominus fingi posset quovis momento ellipsis focum habens in C , cujus elementum cum illius ellipsis elemento congruat, mirum non est hujus ellipsis fictæ tam excentricitatem quam positionem lineæ absidum continuo variari: notatu autem est dignum parametrum ellipsis semper invariatum relinqui.

§. LII. Cum igitur casu $n = a$ hoc incommodum penitus evitarem, si motum planetæ non in plano alieno sed proprio contempleremur, idem quoque incommodum in genere evitabimus, si motum quovis

tempore ad planum orbitæ ipsum referamus, ita ut x distantiam veram CR & φ longitudinem planetæ in proprio plano denotaret. Hinc quidem ob orbitæ inconstantiam alia incommoda nascerentur, quæ autem, dummodo inclinatio G fit valde parva, quemadmodum id quidem semper usu venit, fere penitus removebuntur, propterea quod inde ipsis perturbationibus minima perturbatio inducetur. Quo circa totum negotium ita promptius expedietur ut primo dum variationes quantitatum p , q , & $\varphi - v$, exquirantur, à quibus locus planetæ in propria orbita pendet, latitudo ψ prorsus negligatur ponendo $\psi = 0$; deinde vero seorsim ad quodvis tempus tam positio lineæ nodorum quam inclinatio investigetur: & his denique inventis more apud Astronomos recepto ex loco planetæ in propria orbita ejusque argumento latitudinis ipsa latitudo eliciatur, cum reductione longitudinis.

§. LIII. Hanc ob causam quæstionem nostram commode bipartito pertractare licebit dum seorsim primo motus planetæ in propria orbita, quasi esset plana, deinde vero hujus orbitæ positio respectu orbitæ planetæ perturbantis investigatur. Primo igitur x denotabit distantiam veram planetæ à sole, & φ ejus longitudinem; tum posito:

$z = \sqrt{(x x + y y - 2 x y \cos. (\varphi - \theta))}$, ob $\psi = 0$,
 si brevitatis gratia statuamus

$$M = y \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \sin. (\varphi - \theta),$$

$$N = \frac{x}{r^3} - y \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \cos. (\varphi - \theta); \text{ habebimus:}$$

$$y = \frac{c}{1 - e \cos. u}; \quad dy = - a e d \omega \sin. u. \sqrt{\frac{c}{r}};$$

$$d \theta = d u = \frac{a d \omega}{y} \sqrt{a c};$$

$$x = \frac{p}{1 - q \cos. v}; \quad dx = - a q d \omega \sin. v. \sqrt{\frac{p}{r}};$$

Fij

$$d\phi = \frac{a d\omega}{xx} \sqrt{ap}; \text{ itemque:}$$

$$dp = -2nM a x d\omega. \sqrt{ap}:$$

$$dq = n a d\omega \left(2M \cos. v + N \sin. v - \frac{M q \sin. v^2}{1 - q \cos. v} \right) \sqrt{ap}, \&$$

$$d\phi - dv = \frac{n a d\omega}{q} \left(2M \sin. v - N \cos. v + \frac{M q \sin. v \cos. v}{1 - q \cos. v} \right) \sqrt{ap};$$

ubi est $n = \frac{F}{E}$, cujus valor pro singulis planetis ex observationibus, quantum quidem id fieri licet, concludi debet.

§. LIV. Cum deinceps ex his formulis locus planetæ R in propria orbita cum ejus distantia à sole fuerit inventus, porro investigetur ad quodvis tempus propositum positio hujus orbitæ respectu plani fixi assumti, in quo orbita planetæ perturbantis versatur, linea scilicet nodorum cum inclinatione mutua, ope formularum in §. XLIX exhibitarum; hincque facillime verus locus planetæ in cœlo assignabitur. In priori quidem investigatione neglectio partis $\frac{-1 + \cos. \psi^3}{xx}$ in valore N nullum

errorem creat, quippe quæ per reductionem ad propriam orbitam compensatur. Sed ob positionem $\psi = 0$, valor ipsius ζ aliquantillum immutatur, sed tam parum, nisi inclinatio sit enormis, ut error præ ipsa quantitate ζ sit vehementer exiguus. Quoniam igitur ipsa quantitas ζ aliter non intrat in calculum nisi per fractionem minimam n multiplicat errores illi denuo hinc diminuentur, ut tuto pro nihilo æstimari queant.



S E C T I O I V .

Considerationes necessariae ad resolutionem formularum inventarum expediendam.

§. LV. **E**X his formulis primo sine integrationis adjumento variationes horariae, quas singula motus elementa capiunt intervallo unius horae, satis exacte colligi possunt, cum enim tantillo tempore omnes variationes sint quam minimae, error plane erit imperceptibilis si ipsa differentialia tanquam variationes horarias spectemus. Cum igitur Sol secundum motum medium una hora angulum conficiat = $2' 28''$ seu accuratius $147\frac{5}{8}''$, si differentiali $d\omega$ hunc valorem tribuamus, ut sit $d\omega = 147\frac{5}{8}''$, seu in partibus radii, pro quo unitatem assumimus, $d\omega = 0,00071672$, reliqua differentialia dp , dq , $d\phi - dv$, $d\phi$, dx , $d\pi$, $d.tang. G$, $d\theta = du$, & dy incrementa horaria istorum elementorum exhibebunt, quae igitur sine ulla integratione definire licebit, dummodo pro tempore proposito ipsa haec elementa fuerint cognita. Neque etiam error erit sensibilis, si hoc modo variationes diurnas tribuendo ipsi $d\omega$ valorem vicies quater majorem definire vellemus, dummodo neutrius planetae motus tempore unius diei admodum sit notabilis.

§. LVI. Si quis hunc laborem suscipere vellet, totum negotium sine integratione expedire possit. Cum enim pro dato quopiam tempore t explorati fuerint valores elementorum singulorum, quibus determinatio motus continetur, inventis singulorum incrementis horariis, colligemus hinc eorundem elementorum valores ad tem-

pus $t + 1$ hora ; unde deinceps simili modo eadem elementa ad tempus $t + 2$ horis obtinebimus, sicque ad tempora quotcunque horis remota progredi licebit. Interim tamen quia in singulis gradibus error quidam, etiamsi in se spectatus sit insensibilis committitur, is per continuam repetitionem ita accumulabitur, ut tandem satis notabilis evadat. Neque etiam is minoribus hora intervallis assumendis quo pacto quidem labor omnino insuperabilis redderetur, evitari posset, etsi enim singuli errores fierent multo minores tamen ob majorem operationum numerum tandem quoque ad magnitudinem notabilem excrescere possent.

§. LVII. Nisi igitur integratio in subsidium vocetur, sperari omnino nequit, ut singulas motus perturbaciones unquam exacte definire valeamus, vel faltem ut tempore quantum vis magno interjecto error non fiat notabilis. Huc quoque accedet, quod priori methodo utentes ad nullum tempus, unde calculum inchoare vellemus, per observationes singulorum elementorum veros valores assignare valeremus, ideoque etiam hi errores sequentes operationes plurimum contaminarent. Quando autem integrationes in genere perficere licuerit, tum per observationes plurimas diversis temporibus institutas, dum eæ cum calculo generali conferentur, veri singulorum elementorum valores colligi poterunt, quibus semel definitis formulæ integratæ perpetuo usum desideratum præstabunt. Quocirca ad perfectam omnium perturbacionum cognitionem absolute necessarium est, ut formulæ differentiales inventæ per integrationem ad determinationes finitas reducantur.

§. LVIII. Ac per reductiones quidem hætenus factas jam eximum commodum sumus consecuti, quod formulas differentio-differentiales, ad quas principia Mechanica nos immediate perduxerant, ad formulas simpliciter differentiales revocaverimus, quæ nullis amplius

formulis integralibus sint involutæ, quemadmodum usu venit in iis quas primum (§. XXI) elicueramus, quæ partim ob irrationalitatem partim ob integrales, vix tractari potuissent. Præcipuum autem commodum sine dubio in hoc consistere est censendum, quod omnes formulas ad similitudinem motus regularis, seu notissimis Keppleri regulis conformis explicuerimus, quæ reductio quoque ad usum Astronomicum maxime videtur accommodata. Neque etiam amplius premimur ejusmodi formulis irrationalibus, quarum valores ita sint vagi, ut modo in nihilum abire, modo etiam negativi fieri queant, uti in formulis §. XXI usu venerat.

§. LIX. Verum antequam integrationis negotium suscipiamus, nonnulla moneri est necesse, quibus operationes instituendæ dirigantur. Cum enim integrationem absolutam ac perfectam nullo modo sperare queamus, ad approximationes confugere cogimur, in quo negotio cum multa arbitrio nostro relinquuntur, prouti alias atque alias particulas negligere velimus, præcipua cura hoc erit collocanda, ut nihil negligamus, unde error sensibilis resultare posset. Ex circumstantiis igitur judicari oportebit, quid ratione singulorum elementorum negligere liceat: ac primo quidem cum n sit fractio tantopere exigua, quippe qua ratio massæ planetæ perturbantis ad massam solis exprimitur, nullum est dubium, quin ejusmodi terminos, qui per quadratum hujus fractionis altioremvē potestatem essent multiplicati, sine hæsitatione rejicere queamus. Ex ipsa autem hujus numeri n parvitate cognoscimus, perturbationes esse quam minimas, quæ adeo omnes evanescerent si esset $n = a$.

§. LX. Deinde etiam si orbitas singulorum planetarum consideremus, earum excentricitates tam parvas deprehendimus, ut in determinatione perturbationum, si non ipsæ, tamen earum quadrata altioresque potes-

tates tuto negligi possint. De Mercurio quidem & Marte hic dubium suboriri posset, quorum planetarum excentricitas est maxima, è contrario eorum massæ tam sunt exiguæ præ massa Solis, ut totæ perturbations inde oriundæ fere contemni queant. Quamquam autem in reliquorum planetarum motu proprio determinando quadratum excentricitatis perperam negligeretur, unde plerumque effectus satis sensibilis oriri solet, tamen si perturbations quæ ab ejus actione in alios planetas redundant, investigentur, quoniam effectus quadrati insuper per fractionem n multiplicatur, is plane omnino imperceptibilis reddetur. Hinc quantitates e & q hujusque quantitatem mediam k tamquam tam parvas assumemus, ut in perturbationum investigatione earum quadrata certe ac plerumque etiam eæ ipsæ tuto rejici queant, quod dum evolutionem instituemus, clarius perspicitur.

§. LXI. Neque tamen pro planeta perturbato excentricitas q nimis parva concipi potest sed saltem tam magna, ut mutationes quas ipsi actio reliquorum planetarum inducere valet, præ tota ejus magnitudine tanquam minimæ spectari queant. Cum enim formula progressionem aphelii exprimens divisa sit per q , evidens est si valor ipsius q nimis esset exiguus, ac fortasse interdum plane evanesceret, motum aphelii maximis difficultatibus impeditum iri, ita ut si talis casus in mundo existeret, vix quicquam ex nostris formulis concludi liceret. Verum hic iterum ad insigne nostrum commodum usu venit, ut nullius planetæ excentricitas tam sit exigua, ut inde quicquam nobis sit extrimescendum. Cum enim Veneris excentricitas sit omnium minima, nullum tamen est dubium, quin mutationes, quas ea unquam ab actione reliquorum planetarum subit, præ ejus valore medio quasi evanescant, Quare si valor medius excentricitatis q ponatur $= k$, differentia inter k
&

& q præ k seu fractio $\frac{k-q}{k}$ semper tanquam minima tuto spectari poterit.

§. LXII. Maximam autem in hac investigatione molestiam nobis faceffit valor quantitatis $z = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cdot \cos. (\varphi - \theta))}$ qui eo magis est variabilis, quo propius amborum planetarum orbitæ ad se invicem accedunt. In calculo quidem hic valor, uti est irrationalis, relinqui non potest, quia integrationes instituentæ nullo modo succederent. Cum enim calculum aliter tractare non liceat, nisi ut omnes perturbationes ad sinus cosinusve certorum angulorum revocentur, omnino necesse est, ut quantitates M & N , quæ hanc quantitatem z involvunt, in ejusmodi series evolvant z , quæ hujusmodi sinus vel cosinus simpliciter contineant. Hoc enim solo modo integratio suscipi posse videtur, neque etiam ulla via patet, quemadmodum calculus ita expediri possit, ut valores integrales adhuc quantitatem z aliasve independentes in se contemplantentur.

§. LXIII. Insignem hic Analyseos, quatenus quidem etiam nunc est exculpta, defectum agnoscere cogimur, quod aliter formularum inventarum integralia exhibere non valeamus, nisi per series, quarum singuli termini simplices sinus vel cosinus angulorum $\varphi - \theta$, u , v , $\varphi - \pi$, $\theta - \pi$, ex iisque compositorum contineant. Fieri certe posset ut vera integralia vel quantitates ex his complexas neque in hujusmodi serie commode resolubiles continerent, vel etiam alios angulos veluti CVQ vel CQV qui utique si vis principalis ad planetam V tenderet, numerusque n foret prægrandis, primarias partes in calculo essent obtenturi. Atque cum ab his angulis, si n esset numerus valde magnus, totus calculus maximam partem penderet, eo minus dubitare possumus, quin iidem etiam præsentis casu, si calculum accurate expedire liceret, sint ingressuri. Interim tamen plane non patet, quomodo isti anguli per

Prix de 1756.

G

integrationem in calculum invehì queant. Quod si ergo ex hac parte fines analyseos extendere unquam contingerit, tum demum majores fructus pro Astronomia nobis polliceri poterimus.

§. LXIV. Eo igitur sumus redacti ut quantitatem surdam $z = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos. (\varphi - \theta))}$ in seriem transformemus, ubi quidem eo potissimum est incumbendum, ut ista series quantum fieri potest reddatur convergens, atque secundum sinus vel cosinus certorum angulorum progrediatur. Et quoniam usus postulat convergentiam sive x sit majus, sive minus quam y , terminus tantum $2xy \cos. (\varphi - \theta)$, qui modo affirmativus, modo in nihilum abire, modo negativus fieri potest, molestiam creat. Binomii ergo partem alteram constituo $xx + yy$, alteram vero $2xy \cos. (\varphi - \theta)$, statuoque :

$$xx + yy = rr, \text{ \& } \frac{2xy}{xx + yy} = s; \text{ ut sit}$$

$$z = \sqrt{(rr - rrs \cos. (\varphi - \theta))} = r\sqrt{(1 - s \cos. (\varphi - \theta))},$$

atque hic perspicuum est s semper esse unitate minus nisi sit $x = y$, & eo fieri minus, quo magis distantia x & y fuerint inter se inæquales : hinc ergo multo magis pars $s \cos. (\varphi - \theta)$ minor erit parte 1, prout seriei convergentia postulat.

§. LXV. Quoniam angulus $\varphi - \theta$ tum frequenter occurret, ponamus ad abbreviandum $\varphi - \theta = \eta$, & cum sit $r = \sqrt{(xx + yy)}$ & $s = \frac{2xy}{xx + yy}$, erit $z = r\sqrt{(1 - s \cos. \eta)}$, ideoque $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (1 - s \cos. \eta)^{-\frac{1}{2}}$; unde formulam irrationalem $(1 - s \cos. \eta)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem evolvi oportet. Modo ergo communi adhibito reperiemus :

$$(1 + s \cos. \eta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} s \cos. \eta + \frac{3}{2 \cdot 4} s^2 \cos. \eta^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} s^3 \cos. \eta^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} s^4 \cos. \eta^4 \text{ \&c.}$$

quæ series, dummodo $s \cos. \eta$ fuerit unitate minus, uti quidem semper usu venit, certe convergit. Interim ta-

men nisi $s \cos. \eta$ sit valde parvum nimis lente convergit, quam ut aliquot terminis colligendis ejus summa satis exacte obtineri queat. Verum hic quoque commode accidit, ut dum hæc series per sequentes integrationes tractatur, multo promptiorem convergentiam acquirat, quod nisi eveniret, non perspicerem quomodo quæstioni propositæ satisfieri posset; necessitas tunc cogeret investigationi mutationum horariarum unice adhærescere, illasque pro quantumvis magnis temporis intervallis in unam summam colligere.

§. LXVI. Verum cum potestates ipsius $\cos. \eta$ in differentiale $d\eta$ ductæ integrari nequeant, nisi prius in cosinus angulorum multiplosum $2\eta, 3\eta, \&c.$ convertantur, quoniam differentiale $d\eta$ ad nostrum commune differentiale $d\omega$ reducere licet, eadem conditio postulat, ut hujus $\cos. \eta$ potestates in cosinus angulorum multiplosum resolvantur id quod ope noti lemmatis: $\cos. \alpha. \cos. \epsilon = \frac{1}{2} \cos. (\alpha + \epsilon) + \frac{1}{2} \cos. (\alpha - \epsilon)$ facile præstatur, reperietur enim

$$\begin{aligned} \cos. \eta &= \cos. \eta, \\ \cos. \eta^2 &= \frac{1}{2} \cos. 2\eta + \frac{1}{2}, \\ \cos. \eta^3 &= \frac{1}{4} \cos. 3\eta + \frac{3}{4} \cos. \eta, \\ \cos. \eta^4 &= \frac{1}{8} \cos. 4\eta + \frac{4}{8} \cos. 2\eta + \frac{3}{8}, \\ \cos. \eta^5 &= \frac{1}{16} \cos. 5\eta + \frac{5}{16} \cos. 3\eta + \frac{10}{16} \cos. \eta, \\ \cos. \eta^6 &= \frac{1}{32} \cos. 6\eta + \frac{6}{32} \cos. 4\eta + \frac{15}{32} \cos. 2\eta + \frac{10}{32}, \\ \cos. \eta^7 &= \frac{1}{64} \cos. 7\eta + \frac{7}{64} \cos. 5\eta + \frac{21}{64} \cos. 3\eta + \frac{35}{64} \cos. \eta, \\ \cos. \eta^8 &= \frac{1}{128} \cos. 8\eta + \frac{8}{128} \cos. 6\eta + \frac{28}{128} \cos. 4\eta + \frac{56}{128} \cos. 2\eta + \frac{35}{128}, \&c. \end{aligned}$$

§. LXVII. Quodsi hi valores substituantur, obtinebitur $(1 - s \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} &1 + \frac{3}{2} s \cos. \eta + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} s^2 \cos. 2\eta + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{4} s^3 \cos. 3\eta + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{8} s^4 \cos. 4\eta, \\ &+ \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} s s + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{3}{4} s^3 \cos. \eta + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{4}{8} s^4 \cos. 2\eta, \\ &+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{3}{8} s^4, \&c. \end{aligned}$$

G ij

Unde si ponamus $(1 - s \cos. \eta)^{-\frac{2}{3}} P + Q s \cos. \eta + R s s \cos. 2 \eta + S s^3 \cos. 3 \eta + T s^4 \cos. 4 \eta + \&c.$ hi coëfficientes assumti ita definiuntur ut sit:

$$P = 1 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} s s + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{3}{8} s^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{10}{32} s^6 + \&c.$$

$$Q = \frac{3}{2} (1 + \frac{5 \cdot 7}{4} \cdot \frac{3}{4} s s + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{10}{16} s^4 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \cdot \frac{35}{64} s^6 + \&c.)$$

$$R = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} (\frac{1}{2} + \frac{7 \cdot 9}{6 \cdot 8} \cdot \frac{4}{8} s s + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{15}{32} s^4 + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} \cdot \frac{5 \cdot 6}{128} s^6 + \&c.)$$

$$S = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} (\frac{1}{4} + \frac{9 \cdot 11}{8 \cdot 10} \cdot \frac{5}{16} s s + \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \cdot \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 4} s^4 + \&c.)$$

$$T = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} (\frac{1}{8} + \frac{11 \cdot 13}{10 \cdot 12} \cdot \frac{6}{32} s s + \&c.)$$

$$V = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} (\frac{1}{16} + \&c.)$$

§. LXVIII. Hinc igitur habebimus:

$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} (P + Q s \cos. \eta + R s s \cos. 2 \eta + S s^3 \cos. 3 \eta + T s^4 \cos. 4 \eta + \&c.)$ atque series pro $P, Q, R, S, \&c.$, inventæ satis convergunt, ut hi valores per consuetas methodos approximando erui queant. Sequenti modo autem in alias formas transfundi possunt, quæ aptiores videntur

$$P = 1 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} s s + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8} s^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12} s^6 + \&c.$$

$$\frac{1}{2} Q = \frac{3}{4} (1 + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 8} s s + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12} s^4 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16} s^6 + \&c.)$$

$$\frac{1}{2} R = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} (\frac{1}{2} + \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \frac{2}{3} s s + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12} \cdot \frac{3}{4} s^4 + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17}{8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16} \cdot \frac{4}{5} s^6 + \&c.)$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 8} (\frac{1}{3} + \frac{9 \cdot 11}{8 \cdot 12} \cdot \frac{2}{4} s s + \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16} \cdot \frac{3}{5} s^4 + \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19}{8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20} \cdot \frac{4}{6} s^6 + \&c.)$$

$$\frac{1}{2} T = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8} (\frac{1}{3} + \frac{11 \cdot 13}{12 \cdot 12} \cdot \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} s s + \frac{11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17}{12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16} \cdot \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6} s^4 + \frac{11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21}{12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 20} \cdot \frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 7} s^6 + \&c.)$$

$$\frac{1}{2} V = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12} (\frac{1}{4} + \frac{13 \cdot 15}{12 \cdot 16} \cdot \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 6} s s + \frac{13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19}{12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20} \cdot \frac{3 \cdot 4}{6 \cdot 7} s^4 + \&c.)$$

$$\frac{1}{2} X = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12} (\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{15 \cdot 17}{16 \cdot 16} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7} s s + \frac{15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21}{16 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 20} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6 \cdot 7 \cdot 8} s^4 + \&c.)$$

§. LXIX. Nunc perspicuum est singulas has series in infinitum continuatas fieri geometricas, denominatore existente $s s$; quare ex si per $1 - s s$ multiplicentur, multo magis convergentes reddentur. Hoc modo consequemur:

$$\begin{aligned}
 P (I - s s) &= I - \frac{I \cdot I}{4 \cdot 4} s s - \frac{I \cdot I \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8} s^4 - \frac{I \cdot I \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12} s^6 - \&c. \\
 \frac{1}{2} Q (I - s s) &= \frac{3}{4} (I + \frac{I \cdot 3}{4 \cdot 8} s s + \frac{I \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12} s^4 + \frac{I \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16} s^6 + \&c.) \\
 \frac{1}{2} R (I - s s) &= \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} (\frac{I}{2} + \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 8} \cdot \frac{2}{3} s s + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12} \cdot \frac{3}{4} s^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16} \cdot \frac{4}{5} s^6 + \&c.) \\
 \frac{1}{2} S (I - s s) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 8} (\frac{I}{3} + \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 12} \cdot \frac{2}{4} s s + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16} \cdot \frac{3}{5} s^4 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20} \cdot \frac{4}{6} s^6 + \&c.) \\
 \frac{1}{2} T (I - s s) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8} (\frac{I \cdot 2}{3 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 12} \cdot \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} s s + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16} \cdot \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6} s^4 + \&c.) \\
 \frac{1}{2} V (I - s s) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12} (\frac{I \cdot 2}{4 \cdot 5} + \frac{9 \cdot 11}{12 \cdot 16} \cdot \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 6} s s + \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20} \cdot \frac{3 \cdot 4}{6 \cdot 7} s^4 + \&c.) \\
 \frac{1}{2} X (I - s s) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12} (\frac{I \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{11 \cdot 13}{16 \cdot 16} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7} s s + \&c.) \\
 \frac{1}{2} Y (I - s s) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16} (\frac{I \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{13 \cdot 15}{16 \cdot 20} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 7 \cdot 8} s s + \&c.) \\
 \frac{1}{2} Z (I - s s) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16} (\frac{I \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{15 \cdot 17}{20 \cdot 20} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} s s + \&c.) \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

§. LXX. At vero non opus est ut finguli isti valores evolvantur, sufficit enim duos priores collegisse, ex quibus reliqui per sequentes formulas facile formari poterunt.

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{4 Q - 3 \cdot 2 P}{s s} ; S = \frac{8 R - 5 Q}{3 s s} ; \\
 T &= \frac{12 S - 7 R}{5 s s} ; V = \frac{16 T - 9 S}{7 s s} , \&c.
 \end{aligned}$$

Quin etiam ex prima derivari potest secunda, si integrationem in subsidium vocare velimus, est enim

$$Q = 2 P - \frac{1}{ss} \int P s ds.$$

Sin autem quæratür valor primæ seriei, dico eum per integrationem inveniri posse, fumendo s constans, & introducendo variabilem ζ foreque:

$$P (I - s s) = \frac{\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \left(\frac{I - \zeta^2}{ss - \zeta^2} \right)^{\frac{1}{4}}}{\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \left(\frac{1}{ss - \zeta^2} \right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Si post integrationem ponatur $\zeta = s$; utrumque autem integrale ita capi sumo, ut evanescat posito $\zeta = 0$, quo casu

54 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

quidem fit denominator $\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{ss - zz} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, denotante hic π peripheriam, cujus diameter = 1.

§. LXXI. Si ergo effet $s = 1$, quo casu hæ series minime convergerent, foret ob numeratorem nostræ expressionis integralis $= \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{s} = 2$, prima series $P(1 - ss) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,9003162$, quæ summa per consuetas approximandi methodos non difficulter erueretur, unde patet ejus summam multo facilius obtineri si valor ipsius s uti semper evenit sit unitate minor. In genere autem erit

$$P(1 - ss) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} \left(\frac{1 - zz}{ss - zz} \right)^{\frac{1}{4}}$$

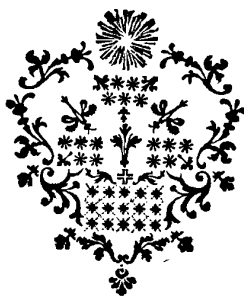
posito post integrationem $z = s$: quæ expressio eo magis est notatu digna, quod ejus veritas investiganti non tam cito occurrit. Interim tamen expediet quovis casu, quo valor ipsius s datur, aliquot terminis harum serierum actu addendis earum summas prope veras colligere, quod negotium eo promptius succedet quo minor fuerit numerus s . Hoc igitur modo inventis quantitibus $P, Q, R, S, \&c.$ erit

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi} (P + Qs \cos.\eta + Rss \cos.2\eta + Ss^3 \cos.3\eta + Ts^4 \cos.4\eta + \&c.)$
brevitatis gratia autem posuimus:

$$r = \sqrt{xx + yy}, \quad \& \quad s = \frac{2xy}{xx + yy}.$$

§. LXXII. Pro faciliori autem quantitatuum $P, Q, R, S, \&c.$ computo conveniet serierum illarum coëfficientes infractiones decimales transformari, unde obtinebitur, subscriptis logarithmis

| $P(I-ss)$ | $\frac{1}{2}Q(I-ss)$ | $\frac{1}{2}R(I-ss)$ | $\frac{1}{2}S(I-ss)$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| + 1, 000000 | + 0, 750000 | + 0, 468750 | + 0, 273437 |
| 0, 000000 | 9, 8750613 | 9, 6709413 | 9, 4368580 |
| - 0, 062500. ss | + 0, 070313. ss | + 0, 146490. ss | + 0, 149536. ss |
| 8, 7958800 | 8, 8470326 | 9, 1657913 | 9, 1747461 |
| - 0, 014648. s^4 | + 0, 025635. s^4 | + 0, 072098. s^4 | + 0, 092525. s^4 |
| 8, 1657913 | 8, 4088294 | 8, 8579220 | 8, 9662614 |
| - 0, 006409. s^6 | + 0, 013218. s^6 | + 0, 044983. s^6 | + 0, 062647. s^6 |
| 7, 8067694 | 8, 1211634 | 8, 6530468 | 8, 7969035 |
| - 0, 003580. s^8 | + 0, 008055. s^8 | + 0, 028527. s^8 | + 0, 045167. s^8 |
| 7, 5538655 | 7, 9060481 | 8, 4552557 | 8, 6548281 |
| - 0, 002282. s^{10} | + 0, 005420. s^{10} | + 0, 020325. s^{10} | + 0, 034088. s^{10} |
| 7, 3583457 | 7, 7340094 | 8, 3080408 | 8, 5325953 |
| - 0, 001581. s^{12} | + 0, 003896. s^{12} | + 0, 015217. s^{12} | + 0, 026631. s^{12} |
| 7, 1988962 | 7, 5905873 | 8, 1823473 | 8, 4253853 |
| - 0, 001159. s^{14} | + 0, 002935. s^{14} | + 0, 011821. s^{14} | |
| 7, 0642480 | 7, 4675831 | 8, 0726486 | |
| - 0, 000887. s^{16} | + 0, 002290. s^{16} | | |
| 6, 9477098 | 7, 3598899 | | |
| - 0, 000700. s^{18} | | | |
| 6, 8449800 | | | |



S E C T I O V.

Evolutio formularum differentialium in series secundum sinus cosinusve angulorum simpliciter progredientes.

§. LXXIII. QUONIAM defectus Analyseos necessitatem nobis imponit omnia integralia, quibus opus est, per series secundum sinus cosinusve angulorum simpliciter progredientes exprimendi, similem formam singulis formulis differentialibus induci oportet. Cum igitur primum pro planeta perturbante sit $y = \frac{c}{1 - e \cos u}$, erit terminos qui quadratum excentricitatis, e altiorefque potestates involvunt omittingo:

$$y = c (1 + e \cos u); \quad \& \quad \frac{1}{y^2} = \frac{1}{c^2} (1 - 2e \cos u).$$

Deinde cum sit $d\theta = du = \frac{a d\omega \sqrt{ac}}{yy}$, habebimus

$$d\theta = du = \frac{a \sqrt{ac}}{c^2} d\omega (1 - 2e \cos u).$$

Quia enim hujus motus ratio tantum in perturbationes ingreditur non opus est has formulas accuratius evolere.

§. LXXIV. Simili modo cum pro planeta perturbato sit $x = \frac{p}{1 - q \cos v}$, erit:

$$\frac{1}{xx} = \frac{1}{p^2} (1 + \frac{1}{2} q q - 2 q \cos v + \frac{1}{2} q q \cos 2v),$$

in qua nihil est neglectum. Hac igitur erit utendum, ubi non proprie quæstio circa perturbationes versatur, ex hac enim formula, etiamsi nulla contingeret perturbatio,

batio, motus planetæ regularis deduci deberet. Id quod evenit in definiendo elemento motus veri $d\phi$, quod partim sequitur leges Kepplerianas, partim vero minimis inæqualitatibus perturbatur. Illo respectu verus ejus valor capi debet, qui erit

$$d\phi = \frac{a\mathcal{V}a}{p\mathcal{V}p} d\omega \left(1 + \frac{1}{2} q q - 2 q \cos. v + \frac{1}{2} q q \cos. 2v \right).$$

Quatenus vero idem valor $d\phi$ ad solas perturbaciones investigandas adhibetur, sufficet tam pro semiparametro p quam pro excentricitate q valores medios constantes b & k usurpare, atque adeo quadratam ipsius k rejicere, ita ut pro hoc usu habeamus:

$$d\phi = \frac{a\mathcal{V}a}{b\mathcal{V}b} d\omega \left(1 - 2 k \cos. v \right).$$

§. LXXV. Quia formulæ $\frac{a\mathcal{V}a}{b\mathcal{V}b}$ & $\frac{a\mathcal{V}a}{c\mathcal{V}c}$ calculum maxime ingrediuntur ponamus brevitatis gratia:

$$\frac{a\mathcal{V}a}{b\mathcal{V}b} = i, \quad \& \quad \frac{a\mathcal{V}a}{c\mathcal{V}c} = m;$$

sicque erit pro formulis perturbaciones implicantibus:

$$d\theta = du = m d\omega \left(1 - 2 e \cos. u \right), \quad \& \\ d\phi = i d\omega \left(1 - 2 k \cos. v \right).$$

Unde cum angulus $\phi - \theta$ nonnisi in hoc negotio occurrat, quoniam posuimus $\phi - \theta = \eta$, & differentiale anguli η hinc ad differentiale $d\omega$ revocatur. Fiet enim

$$d\eta = (i - m) d\omega - 2 i k d\omega \cos. v + 2 m e d\omega \cos. u,$$

ubi notandum est esse:

i : 1 ut motus medius planetæ perturbati ad motum medium Solis vel Terræ;

m : 1 ut motus medius planetæ perturbantis ad motum medium Solis vel Terræ.

Prix de 1756.

- H

58 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

Quare si perturbationes in motu terræ investigentur erit $i = 1$. Verum pro toto motu planetæ perturbati erit:

$$d\varphi = \frac{b\sqrt{v}}{P\sqrt{v}} i d\omega \left(1 + \frac{1}{2} q q - 2 q \cos v + \frac{1}{2} q q \cos 2v \right).$$

§. LXXVI. Nunc agrediamur valorem $\frac{1}{r^3}$, qui quoniam tantum in perturbationibus inest, minores ejus particulas negligere licebit. Quia igitur pro eo posuimus $\sqrt{xx + yy} = r$, erit $\frac{1}{r^3} = (xx + yy)^{-\frac{3}{2}}$; $(bb(1 + 2k \cos v) + cc(1 + 2e \cos u))^{-\frac{3}{2}}$, ideoque

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(bb + cc)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3bbk \cos v - 3cce \cos u}{(bb + cc)^{\frac{5}{2}}}.$$

Ponamus brevitatis gratia $\sqrt{bb + cc} = f$, ut sit:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3} - \frac{3bbk \cos v}{f^3} - \frac{3cce \cos u}{f^3}.$$

Deinde cum itidem posuerimus $s = \frac{2xy}{xx + yy}$; fiet per easdem positiones:

$$s = \frac{2bc(1 + k \cos v)(1 + e \cos u)}{ff + 2bbk \cos v + 2cce \cos u},$$

quæ expressio pari modo evoluta evadet:

$$s = \frac{2bc}{ff} + \frac{2bc(ec - bb)k \cos v}{f^3} - \frac{2bc(ec - bb)e \cos u}{f^3}.$$

§. LXXVII. Quo etiam hanc formulam commodiorem reddamus, statuamus:

$$\frac{2bc}{ff} = \frac{2bc}{bb + cc} = \mu \quad \& \quad \frac{cc - bb}{ff} = \frac{cc - bb}{bb + cc} = \nu, \quad \text{ut } \mu\mu + \nu\nu = 1; \quad \text{erit}$$

$$\frac{bb}{ff} = \frac{1 - \nu}{2} \quad \& \quad \frac{cc}{ff} = \frac{1 + \nu}{2}. \quad \text{His autem valoribus intro-$$

ductis, habebimus

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3} \left(1 - \frac{3}{2} (1 - \nu) k \cos v - \frac{3}{2} (1 + \nu) e \cos u \right), \quad \& \\ s = \mu + \mu\nu k \cos v - \mu\nu e \cos u = \mu (1 + \nu k \cos v - \nu e \cos u),$$

unde pro litteris $P, Q, R, \&c.$ fit

$$\begin{aligned} s^2 &= \mu^2 (1 + 2 \nu k \operatorname{cosf.} \nu - 2 \nu e \operatorname{cosf.} u); \\ s^3 &= \mu^3 (1 + 3 \nu k \operatorname{cosf.} \nu - 3 \nu e \operatorname{cosf.} u); \\ s^4 &= \mu^4 (1 + 4 \nu k \operatorname{cosf.} \nu - 4 \nu e \operatorname{cosf.} u); \\ s^5 &= \mu^5 (1 + 5 \nu k \operatorname{cosf.} \nu - 5 \nu e \operatorname{cosf.} u); \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

tam vero porro :

$$1 - s s = \nu \nu - 2 \mu^2 \nu k \operatorname{cosf.} \nu + 2 \mu^2 \nu e \operatorname{cosf.} u, \text{ hincque}$$

$$\frac{1}{1 - s s} = \frac{1}{\nu \nu} + \frac{2 \mu^2 k \operatorname{cosf.} \nu}{\nu^3} - \frac{2 \mu^2 e \operatorname{cosf.} u}{\nu^3}.$$

§. LXXVIII. Si his valoribus adhibitis formulas §. LXXII evolutas ad calculum revocemus, & quantitates *P*, *Q*, *R*, *S*, &c. investigemus, eæ sequenti modo expressæ reperientur :

$$\begin{aligned} \frac{P}{r^3} &= \frac{1}{r^3} (g + h k \operatorname{cosf.} \nu + l e \operatorname{cosf.} u); \\ \frac{Q}{r^3} &= \frac{1}{r^3} (g' + h' k \operatorname{cosf.} \nu + l' e \operatorname{cosf.} u); \\ \frac{R}{r^3} &= \frac{1}{r^3} (g'' + h'' k \operatorname{cosf.} \nu + l'' e \operatorname{cosf.} u); \\ \frac{S}{r^3} &= \frac{1}{r^3} (g''' + h''' k \operatorname{cosf.} \nu + l''' e \operatorname{cosf.} u); \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

quovis enim casu valores idonei pro *g*, *h*, *l*, *g'*, *h'*, *l'*, &c. per merum calculum numericum reperientur, quos ergo numeros tanquam cognitos spectare licebit. Hinc itaque elicimus $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3} \times$

$$\left\{ \begin{aligned} &+ g \quad + g' \operatorname{cosf.} \eta \quad + g'' \operatorname{cosf.} 2 \eta \quad + g''' \operatorname{cosf.} 3 \eta \\ &+ h k \operatorname{cosf.} \nu + \frac{1}{2} h' k \operatorname{cosf.} (\eta - \nu) + \frac{1}{2} h'' k \operatorname{cosf.} (2 \eta - \nu) + \frac{1}{2} h''' k \operatorname{cosf.} (3 \eta - \nu), \\ &\quad + \frac{1}{2} h' k \operatorname{cosf.} (\eta + \nu) + \frac{1}{2} h'' k \operatorname{cosf.} (2 \eta + \nu) + \frac{1}{2} h''' k \operatorname{cosf.} (3 \eta + \nu), \\ &+ l e \operatorname{cosf.} u + \frac{1}{2} l' e \operatorname{cosf.} (\eta - u) + \frac{1}{2} l'' e \operatorname{cosf.} (2 \eta - u) + \frac{1}{2} l''' e \operatorname{cosf.} (3 \eta - u), \\ &\quad + \frac{1}{2} l' e \operatorname{cosf.} (\eta + u) + \frac{1}{2} l'' e \operatorname{cosf.} (2 \eta + u) + \frac{1}{2} l''' e \operatorname{cosf.} (3 \eta + u), \\ &\quad \text{\&c.} \end{aligned} \right\}$$

§. LXXIX. Nunc paulatim ad valores litterarum *M* & *N* definiendos procedere possumus. Cum enim

H ij

fit $M = \frac{y \sin. n}{z^3} - \frac{\sin. n}{y y}$, primo habebimus

$$\frac{y \sin. n}{z^3} = \frac{1}{cc} (\sin. n - e \sin. (n - u) - e \sin. (n + u)).$$

Deinde ob $y \sin. n = c (\sin. n + \frac{1}{2} e \sin. (n - u) + \frac{1}{2} e \sin. (n + u))$,

erit $\frac{y \sin. n}{z^3} = \frac{c}{f^3} \times$

$$\left\{ \begin{array}{l} + g \sin. n \quad + \frac{1}{2} g' \sin. 2n \quad + \frac{1}{2} g'' \sin. 3n \quad + \frac{1}{2} g''' \sin. 4n \\ + \frac{1}{2} g e \sin. (n - u) + \frac{1}{4} g' e \sin. (2n - u) - \frac{1}{2} g'' \sin. n \quad - \frac{1}{2} g''' \sin. 2n \\ + \frac{1}{2} g e \sin. (n + u) + \frac{1}{4} g' e \sin. (2n + u) - \frac{1}{4} g'' e \sin. (n + u) - \frac{1}{4} g''' e \sin. (2n + u) \\ + \frac{1}{2} h k \sin. (n - v) + \frac{1}{4} h' k \sin. (2n - v) + \frac{1}{4} g'' e \sin. (3n - u) + \frac{1}{4} g''' e \sin. (4n - u) \\ + \frac{1}{2} h k \sin. (n + v) + \frac{1}{4} h' k \sin. (2n + v) - \frac{1}{4} g'' e \sin. (n - u) - \frac{1}{4} g''' e \sin. (2n - u) \\ + \frac{1}{2} l e \sin. (n - u) + \frac{1}{4} l' e \sin. (2n - u) + \frac{1}{4} g'' e \sin. (3n + u) + \frac{1}{4} g''' e \sin. (4n + u) \\ + \frac{1}{2} l e \sin. (n + u) + \frac{1}{4} l' e \sin. (2n + u) - \frac{1}{4} h'' k \sin. (n - v) - \frac{1}{4} h''' k \sin. (2n - v) \\ \quad + \frac{1}{4} h'' k \sin. (3n - v) + \frac{1}{4} h''' k \sin. (4n - v) \\ \quad - \frac{1}{4} h'' k \sin. (n + v) - \frac{1}{4} h''' k \sin. (2n + v) \\ \quad + \frac{1}{4} h'' k \sin. (3n + v) + \frac{1}{4} h''' k \sin. (4n + v) \\ - \frac{1}{4} l'' e \sin. (n - u) - \frac{1}{4} l''' e \sin. (2n - u) \\ \quad + \frac{1}{4} l'' e \sin. (3n - u) + \frac{1}{4} l''' e \sin. (4n - u) \\ - \frac{1}{4} l'' e \sin. (n + u) - \frac{1}{4} l''' e \sin. (2n + u) \\ \quad + \frac{1}{4} l'' e \sin. (3n + u) + \frac{1}{4} l''' e \sin. (4n + u) \end{array} \right\}$$

&c.

§. LXXX. Omittendis jam terminis, qui plusquam triplum anguli n involvunt colligemus valorem ipsius $M = + \frac{c}{f^3} \times$

$$\left\{ \begin{array}{l} + (g - \frac{1}{2} g'') \sin. n + \frac{1}{2} e (g - \frac{1}{2} g'') \sin. (n - u) + e (g' - g'') \sin. (2n - u) + \frac{1}{4} e (g'' - g''') \sin. (3n - u) \\ \quad + \frac{1}{2} e (g - \frac{1}{2} g'') \sin. (n + u) + e (g' - g'') \sin. (2n + u) + \frac{1}{4} e (g'' - g''') \sin. (3n + u) \\ + \frac{1}{2} (g' - g''') \sin. 2n + \frac{1}{2} e (l - \frac{1}{2} l'') \sin. (n - u) + e (l' - l'') \sin. (2n - u) + \frac{1}{4} e (l'' - l''') \sin. (3n - u) \\ \quad + \frac{1}{2} e (l - \frac{1}{2} l'') \sin. (n + u) + e (l' - l'') \sin. (2n + u) + \frac{1}{4} e (l'' - l''') \sin. (3n + u) \\ + \frac{1}{2} (g'' - g''') \sin. 3n + \frac{1}{2} k (h - \frac{1}{2} h'') \sin. (n - v) + k (h' - h'') \sin. (2n - v) + \frac{1}{4} k (h'' - h''') \sin. (3n - v) \\ \quad \&c \&c \quad + \frac{1}{2} k (h - \frac{1}{2} h'') \sin. (n + v) + k (h' - h'') \sin. (2n + v) + \frac{1}{4} k (h'' - h''') \sin. (3n + v) \\ - \frac{1}{cc} (\sin. n - e \sin. (n - u) - e \sin. (n + u)). \end{array} \right\}$$

&c.

In qua expressione lex est manifesta, cujus ope plures termini, si quis laborem suscipere velit, formari pos-

sunt. Si quidem numerus $\mu = \frac{2bc}{bb+cc}$ est valde parvus, quod evenit, si quantitates b & c multum à ratione æqualitatis recedunt, vix ultra litteras g , h , l una virgula notatas progredi est opus; etsi autem eæ quantitates propius ad æqualitatem accedunt, tamen calculum vix ultra binas virgulas continuari est opus, quia per integrationem hæ series admodum redduntur convergentes. Ob eandem causam multo magis terminos per $e e$, $k k$ & $e k$ affectos rejicere licuerat, præterquam quod excentricitatem utramque e & k valde parvam assumimus.

§. LXXXI. Deinde cum fit $N = \frac{x - y \text{ cof. } n}{z^3} + \frac{\text{cof. } n}{yy}$

habebimus primo

$$\frac{\text{cof. } n}{yy} = \frac{1}{cc} (\text{cof. } n - e \text{ cof. } (n - u) - e \text{ cof. } (n + u)),$$

porro vero, ob $x = b (1 + k \text{ cof. } v)$, &

$$y \text{ cof. } n = c (\text{cof. } n + \frac{1}{2} e \text{ cof. } (n - u) + \frac{1}{2} e \text{ cof. } (n + u)),$$

erit valor ipsius $N = \frac{1}{cc} (\text{cof. } n - e \text{ cof. } (n - u) - e \text{ cof. } (n + u)).$

$$\begin{aligned}
 + \frac{b}{f^3} \left\{ \begin{array}{lll} + g & + g' \text{ cof. } n & + g'' \text{ cof. } 2n \\ + k (g + h) \text{ cof. } v & + \frac{1}{2} k (g' + h') \text{ cof. } (n - v) & + \frac{1}{2} k (g'' + h'') \text{ cof. } (2n - v) \\ + l e \text{ cof. } u & + \frac{1}{2} k (g' + h') \text{ cof. } (n + v) & + \frac{1}{2} k (g'' + h'') \text{ cof. } (2n + v) \\ & + \frac{1}{2} l' e \text{ cof. } (n - u) & + \frac{1}{2} l'' e \text{ cof. } (n - u) \\ & + \frac{1}{2} l' e \text{ cof. } (n + u) & + \frac{1}{2} l'' e \text{ cof. } (n + u) \end{array} \right\} \\
 - \frac{c}{f^3} \left\{ \begin{array}{lll} & + (g + \frac{1}{2} g'') \text{ cof. } n & + \frac{1}{2} (g' + g''') \text{ cof. } 2n \\ + \frac{1}{2} g' & + \frac{1}{2} k (h + \frac{1}{2} h'') \text{ cof. } (n - v) & + \frac{1}{4} k (h' + h''') \text{ cof. } (2n - v) \\ & + \frac{1}{2} k (h + \frac{1}{2} h'') \text{ cof. } (n + v) & + \frac{1}{4} k (h' + h''') \text{ cof. } (2n + v) \\ + \frac{1}{2} h' k \text{ cof. } v & + \frac{1}{2} e (g + \frac{1}{2} g'') \text{ cof. } (n - u) & + \frac{1}{4} e (g' + g''') \text{ cof. } (2n - u) \\ & + \frac{1}{2} e (g + \frac{1}{2} g'') \text{ cof. } (n + u) & + \frac{1}{4} e (g' + g''') \text{ cof. } (2n + u) \\ + \frac{1}{2} e (g' + l') \text{ cof. } u & + \frac{1}{2} e (l + \frac{1}{2} l'') \text{ cof. } (n - u) & + \frac{1}{4} e (l' + l''') \text{ cof. } (2n - u) \\ & + \frac{1}{2} e (l + \frac{1}{2} l'') \text{ cof. } (n + u) & + \frac{1}{4} e (l' + l''') \text{ cof. } (2n + u) \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

§. LXXXII. Excentricitas planetæ perturbantis e has formulas imprimis tantopere reddit prolixas, quæ si

62 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

evanesceret, hi valores commodius & succinctius ita exprimerentur

$$M = -\frac{1}{cc} \sin. \eta + \frac{c}{f\beta} \left\{ \begin{array}{l} + (g - \frac{1}{2} g'') \sin. \eta + \frac{1}{2} k (h - \frac{1}{2} h'') \cdot \left. \begin{array}{l} \sin. (\eta - \nu) \\ \sin. (\eta + \nu) \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{2} (g' - g''') \sin. 2\eta + \frac{1}{4} k (h' - h''') \cdot \left. \begin{array}{l} \sin. (2\eta - \nu) \\ \sin. (2\eta + \nu) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Deinde vero est:

$$N = \frac{1}{cc} \cos. \eta + \frac{b}{f\beta} \left\{ \begin{array}{l} + g \quad \quad \quad + k (g + h) \cos. \nu \\ + g' \cos. \eta \quad \quad + \frac{1}{2} k (g' + h') \cdot \left. \begin{array}{l} \cos. (\eta - \nu) \\ \cos. (\eta + \nu) \end{array} \right\} \\ + g'' \cos. 2\eta \quad \quad + \frac{1}{2} k (g'' + h'') \cdot \left. \begin{array}{l} \cos. (2\eta - \nu) \\ \cos. (2\eta + \nu) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$- \frac{c}{f\beta} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} g' \quad \quad \quad + \frac{1}{2} h' k \cos. \nu \\ + (g + \frac{1}{2} g'') \cos. \eta \quad \quad + \frac{1}{2} k (h + \frac{1}{2} h'') \cdot \left. \begin{array}{l} \cos. (\eta - \nu) \\ \cos. (\eta + \nu) \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{2} (g + g''') \cos. 2\eta \quad \quad + \frac{1}{4} k (h' + h''') \cdot \left. \begin{array}{l} \cos. (2\eta - \nu) \\ \cos. (2\eta + \nu) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Attendenti autem mox patebit hanc excentricitatem e sine errore sensibili negligi posse, unde his postremis formulis utemur.

§. LXXXIII. His jam valoribus pro M & N inventis ipsa differentialia quibus perturbationes continentur ad formam desideratam reducere poterimus. Quod igitur primum ad variabilitatem semiparametri p attinet, quoniam invenimus $dp = -2n M a x d\omega \sqrt{ap}$ in hac expressione ob n minima loco p ejus valorem medium b & loco x valorem $b(1 + k \cos. \nu)$ scribere licebit, unde fit:

$$dp = -2n a b d\omega \cdot M(1 + k \cos. \nu) \sqrt{ab}, \text{ seu}$$

$$\frac{dp}{b} = -2n a \sqrt{ab} \cdot M(1 + k \cos. \nu) d\omega.$$

Cum autem posuerimus $a\sqrt{a} = ib\sqrt{b}$, erit $\frac{dp}{b} = -2n i b b M d\omega (1 + k \cos. \nu)$; hincque pro M valorem inventum substituendo

$$\frac{dp}{b} = + \frac{2nibb}{cc} d\omega (\sin. \eta + \frac{1}{2} k \sin. (\eta - \nu) + \frac{1}{2} k \sin. (\eta + \nu));$$

$$- \frac{2nibbc}{f^3} d\omega. \left\{ \begin{array}{l} + (g - \frac{3}{2} g'') \sin. \eta + \frac{1}{2} k (g - \frac{1}{2} g'' + h - \frac{1}{2} h'') \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin. (\eta - \nu) \\ \sin. (\eta + \nu) \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{2} (g' - g''') \sin. 2\eta + \frac{1}{4} k (g' - g''' + h' - h''') \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin. (2\eta - \nu) \\ \sin. (2\eta + \nu) \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

ubi ex denominationibus factis est $\frac{bb}{cc} = \frac{m}{i} \sqrt{\frac{m}{i}} = \frac{1-\nu}{1+\nu}$,

& $\frac{2bc}{ff} = \mu$, hincque ob $\frac{b}{f} = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}$, erit $\frac{2bbc}{f^3} =$

$\mu \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}$. Quare ex cognita ratione motuum medio-
rum habebitur

$$\mu = \frac{2 \sqrt[3]{iim}}{\sqrt[3]{i^4 + \sqrt[3]{m^4}}}; \quad \nu = \frac{\sqrt[3]{i^4} - \sqrt[3]{m^4}}{\sqrt[3]{i^4 + \sqrt[3]{m^4}}}.$$

§. LXXXIV. Pro variabilitate autem excentrici-
tatis q , quia ea quoque est minima, in ejus expressione
ponamus itidem $p = b$ & $q = k$, & quoniam terminos
qui quadratum kk continerent, negligimus erit ob
 $a\sqrt{a} = ib\sqrt{b}$; $dq = nibb d\omega (M(2 \cos. \nu - \frac{1}{2} k +$
 $\frac{1}{2} k \cos. 2\nu) + N \sin. \nu)$; unde pro M & N substitutis
valoribus obtinebitur:

$$dq = \frac{-nibb}{cc} d\omega \left(\frac{3}{2} \sin. (\eta - \nu) + \frac{1}{2} \sin. (\eta + \nu) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} k \sin. \eta + \frac{1}{4} k \sin. (\eta - 2\nu) + \frac{1}{4} k \sin. (\eta + 2\nu) \right)$$

$$+ \frac{nib^3}{f^3} d\omega \left\{ \begin{array}{l} + g \sin. \nu + \frac{1}{2} g' \sin. (\eta + \nu) + \frac{1}{2} g'' \sin. (2\eta + \nu) \\ - \frac{1}{2} g' \sin. (\eta - \nu) - \frac{1}{2} g'' \sin. (2\eta - \nu) \end{array} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} k (g + h) \sin. 2\nu \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4} k (g' + h') \sin. (\eta + 2\nu) + \frac{1}{4} k (g'' + h'') \sin. (2\eta + 2\nu) \\ - \frac{1}{4} k (g' + h') \sin. (\eta - 2\nu) - \frac{1}{4} k (g'' + h'') \sin. (2\eta - 2\nu) \end{array} \right\} \right.$$

$$+\frac{nibc}{f^3}d\omega \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2}g' \sin. v & -\frac{1}{4}h'k \sin. 2v + \frac{1}{4}k(4h - 2h'' - 2g + g'') \sin. v \\ +(\frac{1}{2}g - \frac{1}{4}g'') \sin. (v - v) & +\frac{1}{8}k(6h - h'' + 2g - g'') \sin. (v - 2v) \\ +(\frac{1}{2}g - \frac{1}{4}g'') \sin. (v + v) & +\frac{1}{8}k(2h - 3h'' + 2g - g'') \sin. (v + 2v) \\ +\frac{1}{4}(3g' - g''') \sin. (2v - v) & +\frac{1}{4}k(2h' - 2h'' - g' + g''') \sin. 2v \\ +\frac{1}{4}(g' - 3g''') \sin. (2v + v) & +\frac{1}{8}k(3h' - h'' + g' - g''') \sin. (2v - 2v) \\ & +\frac{1}{8}k(h - 3h''' + g - g''') \sin. (2v + 2v) \end{array} \right\}$$

§. LXXXV. Pro motu aphelii autem habebimus negligendis simili modo minimis terminis, & pro $a \sqrt{a}$ scribendo $ib \vee b$;

$$d\varphi - dv = \frac{nibbd\omega}{f^3 k} (M(2 \sin. v + \frac{1}{2} k \sin. 2v) - N \cos. v);$$

quæ expressio, si loco M & N valores eruti substituantur, abibit in formam sequentem

$$\frac{d\varphi - dv}{d\omega} = -\frac{nibb}{cck} \left(\frac{1}{2} \cos. (v - v) - \frac{1}{2} \cos. (v + v) + \frac{1}{4} k \cos. (v - 2v) - \frac{1}{4} k \cos. (v + 2v) \right)$$

$$-\frac{nib^3}{f^3 k} \left\{ \begin{array}{ll} +g \cos. v & +\frac{1}{2}k(g' + h') \cos. v \\ +\frac{1}{2}g' \cos. (v - v) + \frac{1}{2}k(g + h) & +\frac{1}{4}k(g' + h') \cos. (v - 2v) \\ +\frac{1}{2}g' \cos. (v + v) & +\frac{1}{4}k(g' + h') \cos. (v + 2v) \\ +\frac{1}{2}g'' \cos. (2v - v) + \frac{1}{2}k(g + h) \cos. 2v + \frac{1}{2}k(g'' + h'') \cos. 2v & \\ +\frac{1}{2}g'' \cos. (2v + v) & +\frac{1}{4}k(g'' + h'') \cos. (2v - 2v) \\ & +\frac{1}{4}k(g'' + h'') \cos. (2v + 2v) \end{array} \right\}$$

$$+\frac{nibbc}{f^3 k} \left\{ \begin{array}{ll} +\frac{1}{2}g' \cos. v & +\frac{1}{4}k(2h + h'') \cos. v \\ +\frac{1}{4}(6g - g'') \cos. (v - v) + \frac{1}{4}h'k & +\frac{1}{8}k(6h - h'' - 2g - g'') \cos. (v - 2v) \\ +\frac{1}{4}(2g - 3g'') \cos. (v + v) & -\frac{1}{8}k(2h - 3h'' + 2g - g'') \cos. (v + 2v) \\ +\frac{1}{4}(3g' - g''') \cos. (2v - v) + \frac{1}{4}h'k \cos. 2v + \frac{1}{4}k(h' + h''') \cos. 2v & \\ -\frac{1}{4}(g' - 3g''') \cos. (2v + v) & +\frac{1}{8}k(3h' - h'' + g' - g''') \cos. (2v - 2v) \\ & -\frac{1}{8}k(h(h' - 3h''' + g' - g''') \cos. (2v + 2v)) \end{array} \right\}$$

§. LXXXVI. Restat ut simili modo vāriationes, quibus cum longitudo lineæ nodorum π , tum inclinatio G sunt obnoxia, exprimamus: Ac neglecta quidem excentricitate planetæ perturbantis e , ut sit $y = c$ & $x = b(1 + k \cos. v)$, erit $d\pi = -nibbc d\omega (1 + k \cos. v) (\frac{1}{a^3} - \frac{1}{c^3}) \sin. (\varphi - \pi) \sin. (\theta - \pi);$

d. l tang.

d. l tang. $\rho = -n i b b c d \omega (1 + k \cos. \nu) \left(\frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{3}} \right)$
 $\cos. (\varphi - \pi) \sin. (\theta - \pi)$; ubi valor ipsius $\frac{1}{\frac{1}{3}}$ debet sub-
 stitui qui est posito $e = 0$

$$\frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{f^3} \left\{ \begin{array}{l} + g + h k \cos. \nu \\ + g' \cos. \eta + \frac{1}{2} h' k \cos. (\eta - \nu) + \frac{1}{2} h'' k \cos. (2\eta - \nu) \\ + g'' \cos. 2\eta + \frac{1}{2} h' k \cos. (\eta + \nu) + \frac{1}{2} h'' k \cos. (2\eta + \nu) \end{array} \right\}$$

Tum vero ob $\varphi - \theta = \eta$ est

$$\begin{aligned} \sin. (\varphi - \pi) \sin. (\theta - \pi) &= \frac{1}{2} \cos. \eta - \frac{1}{2} \cos. (\varphi + \theta - 2\pi) \\ \cos. (\varphi - \pi) \sin. (\theta - \pi) &= -\frac{1}{2} \sin. \eta + \frac{1}{2} \sin. (\varphi + \theta - 2\pi). \end{aligned}$$

§. LXXXVII. Introducamus ad has formulas ali-
 quanto simpliciores reddendas, argumentum latitudinis
 $\varphi - \pi$, ponamusque $\varphi - \pi = \sigma$, eritque

$$d\pi = -n i b b c d \omega \left(\frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{3}} \right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos. \eta - \frac{1}{2} \cos. (\eta - 2\sigma) \\ + \frac{1}{4} k \cos. (\eta - \nu) - \frac{1}{4} k \cos. (\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{4} k \cos. (\eta + \nu) - \frac{1}{4} k \cos. (\eta - 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

& substituto pro $\frac{1}{\frac{1}{3}}$ valore :

$$d\pi = + \frac{n i b b c}{c^3} d\omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos. \eta - \frac{1}{2} \cos. (\eta - 2\sigma) \\ + \frac{1}{4} k \cos. (\eta - \nu) - \frac{1}{4} k \cos. (\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{4} k \cos. (\eta + \nu) - \frac{1}{4} k \cos. (\eta - 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

$$- \frac{n i b b c}{f^3} d\omega \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4} g' \quad \quad \quad + \frac{1}{8} k (2h + h'' + 2g + g'') \cos. (\eta - \nu) \\ + \frac{1}{4} (2g + g'' \cos. \eta + \frac{1}{8} k (2h + h'' + 2g + g'') \cos. (\eta + \nu) \\ + \frac{1}{4} (g' + g''') \cos. 2\eta + \frac{1}{4} k (h' + g') \cos. \nu \\ - \frac{1}{2} g \cos. (\eta - 2\sigma) + \frac{1}{8} k (h' + h''' + g' + g''') \cos. (2\eta - \nu) \\ - \frac{1}{4} g' \cos. 2\sigma + \frac{1}{8} k (h' + h''' + g' + g''') \cos. (2\eta + \nu) \\ - \frac{1}{4} g' \cos. (2\eta - 2\sigma) - \frac{1}{8} k (2h + 2g) \cos. (\eta - 2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{4} g'' \cos. (\eta + 2\sigma) - \frac{1}{8} k (2h + 2g) \cos. (\eta - 2\sigma + \nu) \\ - \frac{1}{8} k (h'' + g'') \cos. (\eta + 2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{8} k (h'' + g'') \cos. (\eta + 2\sigma + \nu) \\ - \frac{1}{8} k (h' + g') \cos. (2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{8} k (h' + g') \cos. (2\sigma + \nu) \\ - \frac{1}{8} k (h' + g') \cos. (2\eta - 2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{8} k (h' + g') \cos. (2\eta - 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

Prix de 1756.

§. LXXXVIII. Simili vero modo æquatio differentialis pro inclinationis variatione erit :

$$d.l.tang.\rho = nibbcd\omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin. \eta + \frac{1}{2} \sin. (\eta - 2\sigma) \\ + \frac{1}{4} k \sin. (\eta - \nu) + \frac{1}{4} k \sin. (\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{4} k \sin. (\eta + \nu) + \frac{1}{4} k \sin. (\eta - 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

hincque ob $d.l.tang.\rho = \frac{d.tang.\rho}{tang.\rho}$ obtinebitur

$$\frac{d.tang.\rho}{tang.\rho} = -\frac{nibbd\omega}{c} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin. \eta + \frac{1}{2} \sin. (\eta - 2\sigma) \\ + \frac{1}{4} k \sin. (\eta - \nu) + \frac{1}{4} k \sin. (\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{4} k \sin. (\eta + \nu) + \frac{1}{4} k \sin. (\eta - 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

$$+\frac{nibbc}{f^3} d\omega \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4} (2g - g'') \sin. \eta + \frac{1}{8} k (2g + 2h - g'' - h'') \sin. (\eta - \nu) \\ + \frac{1}{4} (g' - g''') \sin. 2\eta + \frac{1}{8} k (2g + 2h - g'' - h'') \sin. (\eta + \nu) \\ + \frac{1}{2} g \sin. (\eta - 2\sigma) + \frac{1}{8} k (g' + h' - g'' - h'') \sin. (2\eta - \nu) \\ - \frac{1}{4} g' \sin. 2\sigma + \frac{1}{8} k (g' + h' - g'' - h'') \sin. (2\eta + \nu) \\ + \frac{1}{4} g' \sin. (2\eta - 2\sigma) + \frac{1}{4} k (g + h) \sin. (\eta - 2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{4} g'' \sin. (\eta + 2\sigma) + \frac{1}{4} k (g + h) \sin. (\eta - 2\sigma + \nu) \\ - \frac{1}{8} k (g' + h') \sin. (2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{8} k (g' + h') \sin. (2\sigma + \nu) \\ + \frac{1}{8} k (g' + h') \sin. (2\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{8} k (g' + h') \sin. (2\eta - 2\sigma + \nu) \\ - \frac{1}{8} k (g'' + h'') \sin. (\eta + 2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{8} k (g'' + h'') \sin. (\eta + 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

Si quis vellet has formulas ad plures terminos continuare, lex est perspicua, secundum quam hoc opus, quousque libuerit perfici posset, verum pro nostro instituto, ne his quidem terminis exhibitis omnibus indigebimus.



S E C T I O VI.

*Investigatio inæqualitatum quibus ipsa orbita
cujusque Planetæ ab actione reliquorum
Planetarum perturbatur.*

§. LXXXIX. **Q**UAMVIS igitur motus cujusque Planetæ ab actione reliquorum perturbetur, is nihilo minus secundum ellipsin, in cujus alterutro foco Sol versetur, fieri concipi potest, dummodo hæc ellipsis tanquam variabilis tam ratione magnitudinis & speciei quam ratione situs lineæ absidum consideretur. Atque ista perturbationum repræsentatio Astronomorum instituto maxime conveniens videtur, qui dum calculo elliptico jam sunt assueti, huic curvæ inhærere malunt, quam alias curvas magis perplexas in calculum Astronomicum admittere. Quod propositum cum adeo in luna sequi soleant, etiamsi ejus aberrationes à motu elliptico sint enormes, id multo magis in motu planetarum principalium retinebitur, quemadmodum etiam Astronomi eorum orbitas jam mobiles assumerunt contra indolem motus proprii Keppleriani.

§. XC. Ac primo quidem vidimus parametrum orbitæ cujusque planetæ ab actione reliquorum continuo immutari. Notari scilicet debet ejus valor quidam medius, à quo verus mox in excessu mox in defectu discrepet; ita valorem medium semiparametri orbitæ planetæ, de quo quæritur, hic littera *b* designamus, dum littera *p* pro quovis tempore ejus valorem verum denotat. Quan-

I ij

tum igitur p ob actionem certi alicujus planetæ ab b discrepet, ex æquatione differentiali supra §. LXXXIII evoluta per integrationem definiri poterit, ac si isti effectus, quatenus ab unoquoque planeta in parametrum propositi redundant, seorsim computentur, atque in unam summam colligantur, cognoscetur inversa perturbatio, quæ parametro illi ab actione omnium reliquorum planetarum inducitur, cujus collectionis fundamentum in eo est situm, quod singulæ perturbationes sint quam minimæ.

§. XCI. Totum autem integrationis formulæ §. LXXXIII datæ negotium huc reducitur, ut sequentium formularum simplicium: $d\omega \sin. \eta$; $d\omega \sin. 2\eta$; $d\omega \sin. 3\eta$; $d\omega \sin. (\eta \mp \nu)$; $d\omega \sin. (2\eta \mp \nu)$ &c. integralia definiantur, quæ hac methodo investigo: Primo quia hic excentricitatem planetæ perturbantis negligimus, & motus anomalix veræ ν quam minime à motu longitudinis ϕ differt, si quidem motus aphe-
lii certe est tardissimus, habebimus ex §. LXXV.

$$d\eta = (i - m) d\omega - 2 i k d\omega \cos. \nu, \text{ \&}$$

$$d\nu = i d\omega - 2 i k d\omega \cos. \nu.$$

Jam pro prima formula $d\omega \sin. \eta$, differentiale $d\omega$ ita ad $d\eta$ revoco ut sit

$$d\omega = \frac{d\eta}{i - m} + \frac{2 i k d\omega}{i - m} \cos. \nu, \text{ unde conficitur:}$$

$$d\omega \sin. \eta = \frac{d\eta \sin. \eta}{i - m} + \frac{i k d\omega}{i - m} \sin. (\eta - \nu) + \frac{i k d\omega}{i - m} \sin. (\eta + \nu),$$

quo pacto primum membrum jam redditum est integrabile.

§. XCII. Si idem valor pro $d\omega$ etiam in formulis $d\omega \sin. 2\eta$ & $d\omega \sin. 3\eta$ substituatur, erit simili modo

$$d \omega \sin. 2 \eta = \frac{d^n \sin. 2^n}{i-m} + \frac{i k d \omega}{i-m} \sin. (2 \eta - \nu) \\ + \frac{i k d \omega}{i-m} \sin. (2 \eta + \nu);$$

$$d \omega \sin. 3 \eta = \frac{d^n \sin. 3^n}{i-m} + \frac{i k d \omega}{i-m} \sin. (3 \eta - \nu) \\ + \frac{i k d \omega}{i-m} \sin. (3 \eta + \nu).$$

Integratis ergo partibus prioribus, habebimus :

$$\int d \omega \sin. \eta = \frac{-\cos. \eta}{i-m} + \frac{i k}{i-m} \int d \omega \sin. (\eta - \nu) \\ + \frac{i k}{i-m} \int d \omega \sin. (\eta + \nu);$$

$$\int d \omega \sin. 2 \eta = \frac{-\cos. 2 \eta}{2(i-m)} + \frac{i k}{i-m} \int d \omega \sin. (2 \eta - \nu) \\ + \frac{i k}{i-m} \int d \omega \sin. (2 \eta + \nu);$$

$$\int d \omega \sin. 3 \eta = \frac{-\cos. 3 \eta}{3(i-m)} + \frac{i k}{i-m} \int d \omega \sin. (3 \eta - \nu) \\ + \frac{i k}{i-m} \int d \omega \sin. (3 \eta + \nu).$$

Sicque integrandæ restant reliquæ formulæ, quas nostrâ expressio pro $d p$ inventa combinet, hæ autem formulæ quia per excentricitatem k sunt multiplicatæ, multo minores sunt prioribus partibus jam integratis, ideoque nisi precisio ultra necessitatem urgeri debeat, satis tuto omitti possent; si quidem jam ob similem causam excentricitatem e negleximus.

§. XCIII. Interim tamen quo darius perspiciatur, integrationem ex hac parte non impediri, atque pari facilitate perfici posse etiam si nullos terminos rejecissemus, etiam horum integralia definiam: Pro $\int d \omega \sin. (\eta - \nu)$ igitur quæro primum

$$d\eta - d\nu = -m d\omega, \text{ ut sit } d\omega = \frac{-(d\eta - d\nu)}{m};$$

$$\text{sicque erit } \int d\omega \sin. (\eta - \nu) = \frac{+ \text{cof.}(\eta - \nu)}{m}.$$

Deinde pro $\int d\omega \sin. (\eta + \nu)$ colligo

$$d\eta + d\nu = (2i - m) d\omega - 4ik d\omega \text{cof. } \nu;$$

$$\text{unde erit } d\omega = \frac{d\eta + d\nu}{2i - m} + \frac{4ik d\omega \text{cof. } \nu}{2i - m}, \text{ ideoque}$$

$$\int d\omega \sin. (\eta + \nu) = \frac{-\text{cof.}(\eta + \nu)}{2i - m} + \frac{4ik}{2i - m} \int d\omega \text{cof. } \nu \sin. (\eta + \nu);$$

Sed quia in nostra formula $\int d\omega \sin. (\eta + \nu)$ jam per k est multiplicatum, posterius membrum, quod adhuc integrari deberet, omittimus, qui produceret quantitatem per kk affectam. Hac omissione pariter facta pro reliquis formulis, habebimus etiamnunc in differentialibus;

$$2d\eta - d\nu = (i - 2m) d\omega, \text{ \& } 2d\eta + d\nu = (3i - 2m) d\omega,$$

$$\text{ideoque } d\omega = \frac{2d\eta - d\nu}{i - 2m}, \text{ \& } d\omega = \frac{2d\eta + d\nu}{3i - 2m}.$$

§. XCIV. His igitur valoribus adhibitis adipifcetur facile formulas integrales sequentes:

$$\int d\omega \sin. (\eta - \nu) = \frac{+ \text{cof.}(\eta - \nu)}{m};$$

$$\int d\omega \sin. (\eta + \nu) = \frac{- \text{cof.}(\eta + \nu)}{2i - m};$$

$$\int d\omega \sin. (2\eta - \nu) = \frac{- \text{cof.}(2\eta - \nu)}{i - 2m};$$

$$\int d\omega \sin. (2\eta + \nu) = \frac{- \text{cof.}(2\eta + \nu)}{3i - 2m};$$

atque ex his jam priora integralia completa red-
dentur:

$$\begin{aligned} \int d\omega \sin. n &= -\frac{\text{cof. } n}{i-m} + \frac{ik \text{ cof. } (n-v)}{(i-m)m} - \frac{ik \text{ cof. } (n+v)}{(i-m)(2i-m)}, \\ \int d\omega \sin. 2n &= -\frac{\text{cof. } 2n}{2(i-m)} - \frac{ik \text{ cof. } (2n-v)}{(i-m)(i-2m)} - \frac{ik \text{ cof. } (2n+v)}{(i-m)(3i-2m)}, \\ \int d\omega \sin. 3n &= -\frac{\text{cof. } 3n}{3(i-m)} - \frac{ik \text{ cof. } (3n-v)}{(i-m)(2i-3m)} - \frac{ik \text{ cof. } (3n+v)}{(i-m)(4i-3m)}. \end{aligned}$$

&c.

Quæ integralia non solum ad valorem integralem ipsius p , sed etiam ipsius q inveniendum inserviunt.

§. XCV. Cum nimirum valor medius ipsius p debeat esse $= b$, in integratione circa adjectionem constantis nullum erit dubium; singulis igitur partibus integratis reperietur

$$\begin{aligned} \frac{p}{b} &= 1 - \frac{2n i h b}{c c} \left\{ \frac{\text{cof. } n}{i-m} - \frac{(3i-m) k \text{ cof. } (n-v)}{2(i-m)m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3i-m) k \text{ cof. } (n+v)}{2(i-m)(2i-m)} \right\} \\ + \frac{2n i b b c}{f^3} &\left\{ \begin{aligned} &+ \frac{(2g-g'') \text{ cof. } n}{2(i-m)} + \frac{ik(2g-g'') \text{ cof. } (n-v)}{2(i-m)m} \\ &+ \frac{(g'-g''') \text{ cof. } 2n}{4(i-m)} + \frac{k(2g-g''+2h-h'') \text{ cof. } (n-v)}{4m} \\ &+ \frac{(g''-g''') \text{ cof. } 3n}{6(i-m)} - \frac{ik(g'-g''') \text{ cof. } (2n-v)}{2(i-m)(i-2m)} \\ &\quad - \frac{k(g'-g''+h'-h''') \text{ cof. } (2n-v)}{4(i-2m)} \\ &\quad - \frac{ik(2g-g'') \text{ cof. } (n+v)}{2(i-m)(2i-m)} \\ &\quad - \frac{k(2g-g''+2h-h'') \text{ cof. } (n+v)}{4(2i-m)} \\ &\quad - \frac{ik(g'-g''') \text{ cof. } (2n+v)}{2(i-m)(3i-2m)} \\ &\quad - \frac{k(g'-g''+h'-h''') \text{ cof. } (2n+v)}{4(3i-2m)} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

72 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

Ac si terminos per excentricitatem k affectos, ut pote præ reliquis valde parvos negligamus, erit succinctius:

$$\frac{p}{b} = 1 - \frac{2 n i b b c \operatorname{cof}. n}{(i - m) c c} + \frac{n i b b c}{(i - m) f^3} \left((2 g - g'') \operatorname{cof}. n + \frac{1}{2} (g' - g''') \operatorname{cof}. 2 n + \frac{1}{3} (g'' - g''') \operatorname{cof}. 3 n + \&c. \right)$$

ubi notandum esse $\frac{b}{c} = \sqrt[3]{\frac{m m}{i i}}$, & $f f = b b + c c$.

§. XCVI. Ope earundem formularum simplicium integralium etiam vera excentricitas orbitæ q per integrationem differentialis (§. LXXXIV) evoluti assignari poterit; modo adjiciatur $\int d \omega \operatorname{fin}. v = \int \frac{d v}{i} \operatorname{fin}. v = \frac{-\operatorname{cof}. v}{i}$, si quidem porro ex his expressionibus minimis terminos excentricitatem k involventes negligere pergamus. Hinc igitur posita excentricitate media $= k$, erit excentricitas vera;

$$\begin{aligned} q = k - \frac{n i b b b}{c c} & \left(\frac{3 \operatorname{cof}. (n - v)}{2 m} - \frac{\operatorname{cof}. (n + v)}{2 (2 i - m)} \right); \\ - \frac{n i b^3}{f^3} & \left\{ \frac{g \operatorname{cof}. v}{i} + \frac{g' \operatorname{cof}. (n - v)}{2 m} - \frac{g' \operatorname{cof}. (n + v)}{2 (2 i - m)} \right. \\ & \left. - \frac{g'' \operatorname{cof}. (2 n - v)}{2 (i - 2 m)} + \frac{g'' \operatorname{cof}. (2 n + v)}{2 (3 i - 2 m)} \right\} \&c. \\ + \frac{n i b b c}{f^3} & \left\{ + \frac{g' \operatorname{cof}. v}{2 i} + \frac{(6 g - g'') \operatorname{cof}. (n - v)}{4 m} - \frac{(2 g - 3 g'') \operatorname{cof}. (n + v)}{4 (2 i - m)} \right. \\ & \left. - \frac{(3 g' - g''') \operatorname{cof}. (2 n - v)}{4 (i - 2 m)} - \frac{(g' - 2 g''') \operatorname{cof}. (2 n + v)}{4 (3 i - 2 m)} \right\} \\ & \&c. \end{aligned}$$

Ubi quidem assumimus excentricitatem mediam k tantam esse, ut ejus respectu istæ inæqualitates longe sint minimæ; patet autem has inæqualitates non ab ipsa magnitudine media excentricitatis k pendere, sed eisdem prodire sive k sit major sive minor. Quod secus accidit in variationibus lateris recti, quæ sunt proportionales ipsi magnitudini mediæ parametri.

§. XCVII.

§. XCVII. Cognito jam semiparametro p & excentricitate q , semiaxis transversus orbitæ facile definietur, cum sit $= \frac{p}{1-qq}$. Erit igitur variabilis tam ob variabilitatem ipsius p , quam ipsius q , sed hæc posterior tantum terminos producit per k affectos, unde his neglectis variatio axis transversæ potissimum pendebit à variatione parametri, hincque ergo erit

$$\begin{aligned} \text{Semiaxis transversus} &= \frac{b}{1-kk} - \frac{2nibb}{(i-m)c^2} \cdot b \cos. n; \\ &+ \frac{nibbc}{(i-m)f^3} \cdot b \left((2g - g'') \cos. n + \frac{1}{2} (g' - g''') \right. \\ &\left. \cos. 2n + \frac{1}{3} (g'' - g''') \cos. 3n + \&c. \right) \end{aligned}$$

Quare tam parameter & axis transversus quam excentricitas, variationes tantum subeunt periodicas, quæ post certa temporis intervalla ad statum pristinum revertantur, neque perpetua sive incrementa sive decrementa capiunt; sed quantum certis temporibus fuerint aucta, tandundem aliis temporibus diminuentur. Ceterum ex hac applicatione ad axem transversum patet, valorem inventum pro q , etsi terminos tantum primi ordinis continet, tamen æque longe productum esse æstimandum atque valorem ipsius p in quo terminos primi & secundi ordinis evolvimus.

§. XCVIII. Denique definiendus occurrit motus aphelii, in quo præcipuus effectus actionis mutuæ planetarum, quem quidem observationes evidenter manifestarint, cernitur; is autem per integrationem formulæ (§. LXXXV) datæ determinabitur. Aliæ autem hic adsunt formulæ simplices integrandæ, quarum integrationem quoque ad secundum ordinem continuari oportet, uti circa parametrum fecimus, non quo termini secundi ordinis præ primo minus negligi queant, sed

Prix de 1756.

K

quia secundus ordo continet partes omnino constantes; unde per integrationem hujusmodi termini $a\omega$ nascuntur, qui quantumvis coëfficiens a fuerit parvus, tamen cum tempore continuo crescunt. Quia enim angulus ω est tempori proportionalis, hi termini motum medium aphelii declarabunt; in quorum idcirco investigatione vel minima particula perperam negligitur. At terminis hujus formæ exceptis, reliqui ad secundum ordinem pertinentes, quia periodicas inæqualitates continent, & præ primo ordine valde sunt parvi sine errore omitti poterunt; cum etiam levis error in loco aphelii commissus nullius sit momenti.

§. XCIX. Simili igitur modo integrationem instituendo, ante omnia sequentes formulas expendere oportet

$$\begin{aligned}d\nu &= i d\omega - 2 i k d\omega \cos. \nu ; \\d\eta - d\nu &= -m d\omega - 0 ; \\d\eta + d\nu &= (2i - m) d\omega - 4 i k d\omega \cos. \nu ; \\2 d\eta - d\nu &= (i - 2m) d\omega - 2 i k d\omega \cos. \nu ; \\2 d\eta + d\nu &= (3i - 2m) d\omega - 6 i k d\omega \cos. \nu ; \\d\omega &= \frac{d\nu}{i} + 2 k d\omega \cos. \nu ; \\d\omega &= \frac{-(d\eta - d\nu)}{m} ; \\d\omega &= \frac{d\eta + d\nu}{2i - m} + \frac{4 i k d\omega \cos. \nu}{2i - m} ; \\d\omega &= \frac{2 d\eta - d\nu}{i - 2m} + \frac{2 i k d\omega \cos. \nu}{i - 2m} ; \\d\omega &= \frac{2 d\eta + d\nu}{3i - 2m} + \frac{6 i k d\omega \cos. \nu}{3i - 2m} ;\end{aligned}$$

tum pro terminis secundi ordinis :

$$\begin{aligned}d\omega &= \frac{d\nu}{i} = \frac{d\eta}{i - m} = \frac{-(d\eta - 2 d\nu)}{i + m} = \frac{d\eta + 2 d\nu}{3i - m} \\&= \frac{-(2 d\eta - 2 d\nu)}{2m} = \frac{2 d\eta + 2 d\nu}{2(2i - m)}\end{aligned}$$

Hinc omittendis terminis secundi ordinis, qui non sunt

$$\text{formæ } \alpha \omega \text{ fiet } \int d\omega \cos. \nu = \frac{\sin. \nu.}{i} + k \int d\omega$$

$$(1 + \cos. 2 \nu) = \frac{\sin. \nu.}{i} + k \omega;$$

$$\int d\omega \cos. (\eta - \nu) = -\frac{\sin. (\eta - \nu)}{m},$$

$$\int d\omega \cos. (2\eta - \nu) = +\frac{\sin. (2\eta - \nu)}{i - 2m},$$

$$\int d\omega \cos. (\eta + \nu) = \frac{+\sin. (\eta + \nu)}{2i - m},$$

$$\int d\omega \cos. (2\eta + \nu) = \frac{+\sin. (2\eta + \nu)}{3i - 2m}.$$

quæ formulæ ad motum aphëlii definiendum sufficiunt.

§. C. Ex his igitur differentiale (§. LXXXV) integratum præbebit motum aphelii sequenti modo expressum:

$$\varphi - \nu = \text{Const.} + \frac{ni b b}{c c k} \left(\frac{3 \sin (\eta - \nu)}{2 m} + \frac{\sin. (\eta + \nu)}{2 (2 i - m)} \right)$$

$$- \frac{ni b^3}{f^3} \left\{ + \frac{g \sin. \nu}{i} - \frac{g' \sin. (\eta - \nu)}{2 m} + \frac{g' \sin (\eta + \nu)}{2 (2 i - m)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k (3 g + h) \omega + \frac{g'' \sin. (2 \eta - \nu)}{2 (i - 2 m)} + \frac{g'' \sin. (2 \eta + \nu)}{2 (3 i - 2 m)} \right\}$$

$$+ \frac{ni b b c}{f^3 k} \left\{ + \frac{g' \sin. \nu}{2 i} - \frac{(6 g - g'') \sin. (\eta - \nu)}{4 m} + \frac{(3 g' - g''') \sin (2 \eta - \nu)}{4 (i - 2 m)} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} k (2 g' + h') \omega - \frac{(2 g - 3 g'') \sin. (\eta + \nu)}{4 (2 i - m)} - \frac{(g' - 3 g''') \sin. (2 \eta + \nu)}{4 (3 i - 2 m)} \right\}$$

Hujus expressionis pars præcipua formæ $\alpha \omega$ motum medium aphelii præbet, qui ergo uti perspicuum est non à quantitate excentricitatis pendet. Tempore scilicet

K ij

quo sol secundum motum medium percurrit angulum
 $= \omega$ aphelium planetæ proferetur per angulum $\frac{n i b b c}{4 f^3}$

$(2 g' + h') \omega - \frac{n i b^3}{2 f^3} (3 g + h) \omega$ reliqui vero termini
 inæqualitates periodicas aphelii complectuntur, quæ eo
 evadunt majores quo minor fuerit excentricitas orbitæ.

§. CI. Præter hunc autem motum uniformem, quo
 aphelium profertur, ejus locus ad quodvis tempus cor-
 rigi debet per inæqualitates periodicas, quæ sinibus an-
 gulorum $\nu, n + \nu, 2n + \nu, \&c.$ sunt proportiona-
 les: atque in hunc finem longitudo aphelii ita expri-
 metur:

$$\begin{aligned} \varphi - \nu = & \text{Const.} + \frac{n i b b c}{4 f^3} (2 g' + h') \omega - \frac{n i b^3}{2 f^3} (3 g + h) \omega ; \\ & + \frac{n i b b}{2 c c k} \left(\frac{(3 \sin. (n - \nu))}{m} + \frac{\sin. (n + \nu)}{2 i - m} \right) ; \\ - \frac{n i b^3}{4 f^3 k} & \left\{ \frac{2 g \sin. \nu}{i} - \frac{g' \sin. (n - \nu)}{m} + \frac{g' \sin. (n + \nu)}{2 i - m} \right\} \\ & + \frac{g'' \sin. (2n - \nu)}{i - 2m} + \frac{g'' \sin. (2n + \nu)}{3 i - 2m} \left. \right\} \\ + \frac{n i b b c}{4 f^3 k} & \left\{ \frac{2 g' \sin. \nu}{i} - \frac{(6g - g'') \sin. (n - \nu)}{m} - \frac{(2g - 3g'') \sin. (n + \nu)}{2 i - m} \right\} \\ & + \frac{(3g' - g''') \sin. (2n - \nu)}{i - 2m} - \frac{(g' - 3g''') \sin. (2n + \nu)}{3 i - 2m} \left. \right\} \end{aligned}$$

Cujus expressio pars prima exhibet longitudinem me-
 diam aphelii ad quodvis tempus, cui porro si applicen-
 tur inæqualitates reliqua parte contentæ, impetrabitur
 locus aphelii verus. Quodsi ponatur $\omega = 360$, ex prima
 parte innotescet motus aphelii annuus respectu stellarum
 fixarum.

§. CII. Quia in motu Lunæ investigatio motus ejus
 apogei tantam diligentiam ac sagacitatem, totque cal-
 culos intricatos exigebat, dubium hic oriri potest, an

hoc modo verus motus apheliorum eliciatur? Quodsi enim idem calculus ad Lunam transferretur, formula inventa semissem tantum veri motus apogei prope modum esset ostensura. Verum in hac applicatione ad Lunam numerus n seu potius termini hunc numerum continententes incomparabiliter prodeunt majores, quam nostro casu, atque termini quadratum numeri n involventes demum veram motus apogei quantitatem complent. Hic autem ob valores terminorum numero n affectorum minimos, nullum est dubium, quin terminos, qui ejus quadratum complecterentur, sine ullius erroris sensibilis metu prætermittere queamus. Deinde etiam ex formulis generalioribus evidens est, excentricitatem planetæ perturbantis e nihil ad motum aphelii conferre.



S E C T I O VII.

Investigatio Anomalix veræ quatenus ea ad quodvis tempus ab actione Planetarum mutua perturbatur.

§. CIII. **I**N superiori sectione formulas eruimus; quibus ad quodvis tempus veri valores cum parametri & excentricitatis orbitæ, tum etiam vera longitudo aphelii definiuntur; in has autem formulas præter angulum η potissimum ingreditur angulus ν qui planetæ anomaliam veram designat. Præcipuum opus igitur ad huc perficiendum in hoc consistit, ut methodum tradamus ad quodvis tempus anomaliam veram inveniendi; quæ cum, si nullæ adsint perturbaciones ex anomalia media colligi soleat; hic quoque anomaliam planetæ mediam in computum introduci conveniet, quæ quoniam uniformiter cum tempore crescit, ad quodvis tempus tempore crescit, ad quodvis tempus expedite assignatur; sive quod eodem redit anomalia media reperitur, si à planetæ longitudo media, aphelii locus medius subtrahatur. Quæstio ergo hac sectione enodanda determinationem anomalix veræ ν ex data anomalia media postulat.

§. CIV. Si nullæ adessent vires turbantes, foret $d\varphi = d\nu$, atque anomaliam veram ν ex hac æquatione

$$d\varphi = d\nu = \frac{a d\omega \mathcal{V} a p}{x x}, \text{ seu } d\omega = \frac{p \mathcal{V} p}{a \mathcal{V} a} \cdot \frac{d\nu}{(1 - q \cos. \nu)^2}$$

definiri deberet; essent enim p & q quantitates constantes, & $d\omega$ incremento anomalix mediæ proportionale. In nostro autem casu neque quantitates p & q sunt con-

stantes, neque $d\phi = d\nu$, unde manifestum est relationem inter anomalias mediam & veram quoque ab actione planetarum mutua perturbari. Interim tamen

hæc relatio erit petenda ex æquatione $d\phi = \frac{a d\omega \mathcal{V} a p}{x x}$,

seu hæc $d\omega = \frac{p \mathcal{V} p}{a \mathcal{V} a} \cdot \frac{d\phi}{(1 - q \cos. \nu)^2}$ substituendo pro $d\phi$

valorem, qui ipsi ex æquatione differentiali motus aphelii convenit; hæcque æquatio in §. LXXXV habetur evoluta vi cujus cum non sit $d\phi - d\nu = 0$; ponamus brevitatis gratia loco hujus æquationis differentialis $d\phi - d\nu = n \mathcal{V} d\omega$, eritque

$$d\omega = \frac{p \mathcal{V} p}{a \mathcal{V} a} \cdot \frac{d\nu}{(1 - q \cos. \nu)^2} + \frac{p \mathcal{V} p}{a \mathcal{V} a} \cdot \frac{n \mathcal{V} d\omega}{(1 - q \cos. \nu)^2}.$$

§. CV. Cum jam p & q non sint quantitates constantes, eorumque valores in superiori sectione sint definiti, ponamus quoque brevitatis gratia

$$p = b(1 + nP), \text{ \& } q = k + nQ;$$

ita ut nP , nQ , & $n\mathcal{V}$ sint effectus perturbationis, eritque ob numerum n minimum $p\mathcal{V}p = b^{\frac{3}{2}}(1 + \frac{1}{2}nP)$, & quia posuimus $\frac{a\mathcal{V}a}{b} = i$ habebimus

$$\frac{p\mathcal{V}p}{a\mathcal{V}a} = \frac{i}{2} (1 + \frac{1}{2}nP).$$

Deinde fractio $\frac{1}{(1 - q \cos. \nu)^2}$ in seriem conversa dat proxime

$$(1 - qq)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2q \cos. \nu + \frac{1}{2}qq \cos. 2\nu + q^3 \cos. 3\nu \text{ \&c.})$$

quæ ponendo $k + nQ$ loco q , & negligendo terminos per nn & nk affectos abit in hanc:

$$(1 - kk)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2k \cos. \nu + \frac{1}{2}kk \cos. 2\nu + k^3 \cos. 3\nu) + 2nQ \cos. \nu + 3nkQ \cos. 2\nu + 3nkQ.$$

Hinc erit

$$\frac{p\mathcal{V}p}{a\mathcal{V}a} \cdot \frac{d\nu}{(1 - q \cos. \nu)^2} = \frac{d\nu(1 + 2k \cos. \nu + \frac{1}{2}kk \cos. 2\nu + k^3 \cos. 3\nu)}{i(1 - kk)\mathcal{V}(1 - kk)}$$

$$+ \frac{n d v}{i} (2 Q \cos. v + \frac{1}{2} P + 3 k P \cos. v + 3 k Q + 3 k Q \cos. 2 v);$$

§. CVI. In parte altera autem formulæ integrandæ tam p quam q pro constantibus haberi possunt, eritque ergo ea pari

$$\frac{n}{i} d \omega (V + 2 k V \cos. v),$$

& quia in his particulis minimis est $d v = i d \omega (1 - 2 k \cos. v)$ obtinebimus æquationem sequentem :

$$d \omega = \frac{d v (1 + 2 k \cos. v + \frac{1}{2} k k \cos. 2 v + k^3 \cos. 3 v)}{i (1 - k k) \sqrt{(1 - k k)}};$$

$$+ n d \omega (2 Q \cos. v + k Q + k Q \cos. 2 v + \frac{1}{2} P) + \frac{n d \omega}{i} (V + 2 k V \cos. v);$$

cujus pars principalis integrata deducet ad hanc æquationem integram :

$$\omega = \frac{v + 2 k \sin. v + \frac{1}{4} k k \sin. 2 v + \frac{1}{7} k^3 \sin. 3 v}{i (1 - k k) \sqrt{(1 - k k)}};$$

$$+ n \int d \omega (\frac{1}{2} P + 2 Q \cos. v + k Q + k Q \cos. 2 v + \frac{1}{i} V + \frac{2}{i} k V \cos. v);$$

cujus postremæ partis non amplius erit difficile integrale eruere.

§. CVII. Pro integratione hujus postremæ formulæ notandum est partem $n \int V d \omega$ exprimere motum aphe-
lii, cujus ergo integrale jam supra §. CI est inventum. Reliquas partes tantisper indicemus signo summatorio, ac pro anomalia vera quæsitâ sequentem nanciscemur æquationem :

$$v = i(1 - k k)^{\frac{1}{2}} \omega - 2 k \sin. v - \frac{1}{4} k k \sin. 2 v - \frac{1}{7} k^3 \sin. 3 v - n \int V d \omega; \\ - i n \int d \omega (\frac{1}{2} P + 2 Q \cos. v + \frac{2}{i} k V \cos. v);$$

in hac enim ultima parte perspicuum est terminos $k Q$ & $k Q \cos. v$ præ P & Q posse rejici, at vero $k V \cos. v$
iisdem

iisdem esse quasi homogœneum unde tantum opus est valores supra pro P , Q , & V inventos substituere. Hic autem primo observo terminum $i(1 - kk)^{\frac{1}{2}}\omega$ cum partibus formæ $\alpha d\omega$, quas posteriora membra integralia forte continent, designare anomaliam mediam, quæ ad quodvis tempus facile colligitur. Si ergo anomaliam mediam ponamus $= \varphi$, habemus hic æquationem inter φ & ν , per cujus resolutionem non difficulter pro quavis anomalia media ejus respondens anomalia vera elicietur.

§. CVIII. Statuamus ad abbreviandum :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}P + 2Q \cos. \nu &= A + B \cos. 2\nu + C \cos. \eta \\ &+ \frac{2}{i}kV \cos. \nu + D \cos. 2\eta + E \cos. (\eta - 2\nu) \\ &+ F \cos. (\eta + 2\nu) + G \cos. (2\eta - 2\nu) \\ &+ H \cos. (2\eta + 2\nu) \end{aligned}$$

atque horum cœfficientium valores ex superioribus formulis colliguntur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{bb'c}{f^3} \cdot g' - \frac{2b^3}{f^3} g; & B &= \frac{bb'c}{f^3} \cdot g' - \frac{2b^3}{f^3} g; \\ C &= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{ibb'}{cc} \left(\frac{3}{i-m} + \frac{3}{2m} - \frac{1}{2(2i-m)} + \frac{1}{i} \right) - \frac{ib^3}{2f^3} \\ &\quad \left(\frac{2g'}{i} + \frac{g'}{m} + \frac{g'}{2i-m} \right) \\ &+ \frac{ibbc}{4f^3} \left(\frac{6(2g-g'')}{i-m} + \frac{6g-g''}{m} + \frac{6g-g''}{i} \right) \\ &\quad - \frac{(2g-3g'')}{2i-m} - \frac{(2g-3g'')}{i} \end{aligned} \right\} \\ D &= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{ib^3}{2f^3} \left(\frac{-g''}{i-2m} + \frac{2g''}{i} + \frac{g''}{3i-2m} \right) \\ &+ \frac{ibbc}{4f^3} \left(\frac{3(g'-g''')}{i-m} - \frac{3g'-g'''}{i-2m} + \frac{3g'-g'''}{i} \right) \\ &\quad - \frac{(g'-3g''')}{3i-2m} - \frac{(g'-3g''')}{i} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Prix de 1756.

L

§ 2 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

$$E = \frac{-i b b}{2 c c} \left(\frac{2}{m} + \frac{3}{i} \right) - \frac{i b^3}{2 f^3} \left(\frac{g'}{m} + \frac{g'}{i} \right) + \frac{i b b c}{4 f^3} \left(\frac{6 g - g''}{m} + \frac{6 g - g''}{i} \right)$$

$$F = \frac{-i b b}{2 c c} \left(-\frac{1}{2 i - m} - \frac{1}{i} \right) - \frac{i b^3}{2 f^3} \left(\frac{g'}{2 i - m} + \frac{g'}{i} \right) + \frac{i b b c}{4 f^3} \left(-\frac{(2 g - 3 g'')}{2 i - m} - \frac{(2 g - 3 g'')}{i} \right)$$

$$G = \frac{-i b^3}{2 f^3} \left(-\frac{g''}{i - 2 m} + \frac{g''}{i} \right) + \frac{i b b c}{4 f^3} \left(-\frac{(3 g' - g''')}{i - 2 m} + \frac{(3 g' - g''')}{i} \right)$$

$$H = \frac{-i b^3}{2 f^3} \left(\frac{+g''}{3 i - 2 m} + \frac{g''}{i} \right) + \frac{i b b c}{4 f^3} \left(-\frac{(g' - 3 g''')}{3 i - 2 m} - \frac{(g' - 3 g''')}{i} \right)$$

§. CIX. Valoribus autem horum coefficientum definitis facile erit singulorum terminorum integralia exhibere, quia ultra ordinem primum ea deducere non est opus: Erit itaque

$$\begin{aligned} \int d\omega \left(\frac{3}{2} P + 2 Q \cos. \nu + \frac{2}{i} k V \cos. \nu \right) &= A \omega \\ &+ \frac{B}{2 i} \sin. 2 \nu + \frac{C}{i - m} \sin. \eta + \frac{D}{2 (i - m)} \sin. 2 \eta \\ &- \frac{E}{i + m} \sin. (\eta - 2 \nu) + \frac{F}{3 i - m} \sin. (\eta + 2 \nu) \\ &- \frac{G}{2 m} \sin. (2 \eta - 2 \nu) + \frac{H}{2 (2 i - m)} \sin. (2 \eta + 2 \nu). \end{aligned}$$

Deinde si ponamus simili modo ad abbreviandum

$$\begin{aligned} \int V d\omega &= \Delta \omega + \frac{\alpha}{k} \sin. \nu + \frac{\epsilon}{k} \sin. (\eta - \nu) \\ &+ \frac{\gamma}{k} \sin. (\eta + \nu) + \frac{\delta}{k} \sin. (2 \eta - \nu) + \frac{\epsilon}{k} \sin. (2 \eta + \nu); \end{aligned}$$

erunt hi coefficientes ex §. CI.

$$\Delta = \frac{i b b c}{4 f^3} (2 g' + h') - \frac{i b^3}{2 f^3} (3 g + h);$$

$$a = \frac{b b c}{2 f^3} g' - \frac{b^3}{f^3} g;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{b b}{c c} \cdot \frac{3 i}{2 m} + \frac{b^3}{2 f^3} \cdot \frac{i g'}{m} - \frac{b b c}{4 f^3} \cdot \frac{(6 g - g'') i}{m}; \\ &= \frac{b b}{2 c c} \cdot \frac{i}{2 i - m} - \frac{b^3}{2 f^3} \cdot \frac{i g'}{2 i - m} - \frac{b b c}{4 f^3} \cdot \frac{(2 g - 3 g'') i}{2 i - m}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = - \frac{b^3}{2 f^3} \cdot \frac{i g''}{i - 2 m} + \frac{b b c}{4 f^3} \cdot \frac{(3 g' - g''') i}{i - 2 m};$$

$$\varepsilon = - \frac{b^3}{2 f^3} \cdot \frac{i g'''}{3 i - 2 m} - \frac{b b c}{4 f^3} \cdot \frac{(g - 3 g''') i}{3 i - 2 m}.$$

§. CX. Si jam hos valores determinaverimus, habebimus primo anomaliam mediam :

$$\vartheta = i (1 - k k)^{\frac{1}{2}} \omega - n \Delta \omega - i n A \omega;$$

qua cognita anomalia vera ν ita debet definiri ut sit :

$$\nu = \vartheta - 2 k \sin. \nu - \frac{1}{4} k k \sin. 2 \nu - \frac{1}{3} k^3 \sin. 3 \nu;$$

$$\begin{aligned} &- \frac{n}{k} \left(a \sin. \nu + \mathcal{C} \sin. (n - \nu) + \gamma \sin. (n + \nu) \right. \\ &\left. + \mathcal{D} \sin. (2 n - \nu) + \varepsilon \sin. (2 n + \nu) \right); \end{aligned}$$

$$- n \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} B \sin. 2 \nu + \frac{C i}{i - m} \sin. n + \frac{D i}{2(i - m)} \sin. 2 n \\ &- \frac{E i}{i + m} \sin. (n - 2 \nu) + \frac{F i}{3 i - m} \sin. (n + 2 \nu) \\ &- \frac{G i}{2 m} \sin. (2 n - 2 \nu) + \frac{H i}{2(2 i - m)} \sin. (2 n + 2 \nu) \end{aligned} \right\}$$

Si esset $n = 0$, nota est operatio, qua ex data anomalia media ϑ elicitur vera ν ; cum igitur sit n fractio valde parva, per eandem operationem, omittendis primum terminis per n affectis quæratu anomaliam vera ν mediæ

L ij

ν conveniens, eaque deinceps per terminos fractione n affectos corrigatur. Tum si eam accuratius definire velimus, valorem pro ν modo inventum in expressione illa pro ν reperta substituamus, ex eoque denuo ν determinemus.

§. CXI. Facilius autem per consuetas tabulas anomaliarum totum hoc negotium expediri potest. Cum enim perturbaciones sunt minimæ; sufficiet pro iis anomaliam veram ν proxime saltem nosse, ejusque ergo loco anomalia media ipsa ϑ uti licebit, namque errores, qui hoc modo committentur, ad sequentem terminorum, quos negligimus, ordinem pertinerent. Tum valor horum terminorum minimorum ad anomaliam mediam ϑ referatur, seu ex data anomalia media ϑ quaeratur anomalia media correctæ ϑ' ut sit

$$\vartheta' = \vartheta - \frac{\alpha}{k} (\alpha \sin. \vartheta + \beta \sin. (n - \vartheta) + \gamma \sin. (n + \vartheta) + \delta \sin. (2n - \vartheta) + \epsilon \sin. (2n + \vartheta));$$

ubi quidem partem posteriorem, utpote præ hac valde parvam omitto, atque jam pro data excentricitate k ex tabulis consuetis quaeratur anomalia vera quæ huic anomaliam mediam correctam respondeat; hocque modo obtinebitur ipsa illa anomalia vera ν , qua pro evolutione omnium formularum hæctenus inventarum indigemus, erit scilicet

$$\nu = \vartheta' - \frac{1}{2} k \sin. \nu - \frac{3}{4} k^2 \sin. 2\nu - \frac{5}{8} k^3 \sin. 3\nu.$$

§. CXII. In Tabulis autem Astronomicis pro data quavis anomalia media non tam ei respondens anomalia vera, quam differentia, quæ prosthaphæresis seu æquatio centri vocatur, exhiberi solet, neque etiam pro nostro scopo quicquam in hoc instituto immutari est opus. Ad manus igitur sit tabula more solito adornata; quæ pro excentricitate k cuique anomaliam mediam respondentem æquationem centri exhibeat. Ante-

quam autem hac tabula utamur, anomalia media planetæ & ad datum tempus collecta, per inæqualitates supra expositas & tam ab ea ipsa quam ab angulo ν , cujus valorem quoque ex motu medio utriusque planetæ collegisse sufficit, pendentes corrigatur, ut obtineatur anomalia media correcta ϑ' . Tum in dicta Tabula quæratæ æquatio isti anomalix mediæ ϑ' conveniens, quæ sit $= \pm \mathcal{A}$, qua inventa statim habebitur anomalia vera quæsitæ $\nu = \vartheta' \pm \mathcal{A}$, qua in determinatione & evolutione omnium formularum supra inventarum uti oportebit. Simul vero hæc æquatio $\pm \mathcal{A}$ ex tabula desumpta verum valorem formulæ $- 2 k \sin. \nu - \frac{1}{4} k k \sin. 2 \nu - \frac{1}{3} k^3 \sin. 3 \nu$ exhibebit, id quod pro sequenti calculo probe notasse conducet.

§. CXIII. Ad Anomaliã mediam autem pro dato tempore colligendam motum aphelii medium duntaxat nosse oportet, qui membro primò formulæ §. CI erutæ continetur, ex quo habemus:

$$\text{Long. aphelii mediam} = \text{Const.} + \frac{n i b b c}{4 f^3}$$

$$(2 g' + h') \omega - \frac{n i b^3}{2 f^3} (3 g + h) \omega,$$

seu abbreviationem ante introductum adhibendo erit:

$$\text{Long. aphelii media} = \text{Const.} + n \Delta \omega.$$

Quoniam autem omnes planetæ ad motum medium aphelii aliquid conferunt, singulorum effectus exquiri debet, ut inde ad quodvis tempus propositum longitudo aphelii media rite obtineatur. Vel cum ex collatione recentiorum observationum cum antiquis motus medius aphelii cujusque planetæ satis accurate jam sit exploratus, eo potius uti conveniet. Quare cum hinc ad tempus propositum longitudo media aphelii sit definita, ea à longitudine media ipsius planetæ subtracta præbebit ejus anomaliã mediam & pro eodem tempore proposito, quæ etiam in nonnullis tabulis immediate exprimi solet.

§. CXIV. Deinde si perturbaciones, quæ ab actione certi cujusdam planetæ proficiscuntur, indagare velimus, primum ex collatione semi parametri ejus orbitæ c , cum semi parametro b planetæ examinandi ope formularum §. LXXII & LXXVIII datarum computentur valores litterarum $g, g', g'',$ &c. ex hisque porro per rationem mediorum motuum i & m valores litterarum $\alpha, \ell, \gamma, \delta, \epsilon$, itemque A, B, C, D, E, F, G, H , qui omnes in meris numeris expressi prodibunt. Tum etiam massa Planetæ per massam Solis divisa dabit fractionem n . Quibus inventis ad tempus propositum colligatur longitudo media planetæ perturbati & perturbantis, quia posteriori à priori ablata remanebit angulus, quo loco η uti licebit in indagatione correctionum anomalix mediæ (§. CXI). Vel quod expediet, utriusque planetæ longitudo per tabulas ordinarias definiatur, ac differentia pro angulo η assumatur, quandoquidem hic valor à vero nonnisi in minutis discrepabit.



S E C T I O V I I I .

Expositio Universi Calculi quo verus Planetæ locus in orbita ob actionem reliquorum planetarum perturbatus assignatur.

§. CXV. **P** R I M A operatio in hoc consistet, ut pro quolibet planeta, a cujus actione motus planetæ propositi perturbatur, ope formularum §. LXXII & LXXVIII expositarum primo valores litterarum g , g' , g'' , &c. (litteris enim reliquis h , h' , l , l' , &c. ibidem adhibitis carere possumus), tum vero ex his porro valores litterarum A , B , C , D , &c. ex §. CVIII, & litterarum quoque Δ , α , ϵ , γ , δ , &c. ex § CIX per calculum evolvantur: pro quo calculo recordari debemus, fractionem n obrineri, si massa planetæ perturbantis per massam solis dividatur: deinde si motus diurnus medius solis unitate exponatur, exprimet littera i motum diurnum medium planetæ perturbati, & m planetæ perturbantis. Calculus quidem pro valoribus illarum litterarum instituendus admodum est molestus, verumtamen per subsidia indicata satis exacte absolvi poterit.

§. CXVI. Statim autem ex valore Δ cognoscetur, quantum aphelium ab actione cujusdam planetæ promoveatur; si enim pro angulo ω ponamus 360° terminus $n \Delta \omega$ dabit motum aphelii annum, ac si hunc valorem ab actione cujuslibet planetæ deducamus, omnes conjunctim ostendent verum motum annum planetæ respectu stellarum fixarum, qui vix quicquam ab eo,

quem per observationes cognovimus, discrepare deprehendetur. Cognito autem tam aphelii quam ipsius, planetæ motu medio ad quodvis tempus propositum tam hujus planetæ longitudo media quam anomalia media facile assignabitur. Statuamus ergo ejus longitudinem mediam $\equiv \zeta$ & anomaliâ mediam $\equiv \vartheta$; tum vero excentricitas media fit $\equiv k$.

§. CXVII. Deinde hæc anomalia media ϑ ex tabulis mediorum motuum desumpta corrigi debet per formulam §. CXI allatam, ut obtineatur anomalia media correctâ ϑ' . Vel si tabulæ mediorum motuum loco anomaliæ mediæ exhibeant locum aphelii medium, eadem correctiones signis versis ad aphelium applicari debent: hoc autem modo reperietur ipsa longitudo aphelii vera, unde hæc correctio magis est naturalis priori anomaliæ illata. Quare ex longitudo aphelii mediæ quærat longitudo ejus vera per hanc formulam

$$\begin{aligned} \text{Longitudo Aphelii vera} &= \text{Longitudini Aphelii mediæ} \\ &+ \frac{n}{k} (\alpha \sin. \vartheta + \mathcal{C} \sin. (n - \vartheta) + \gamma \sin. n + \vartheta) \\ &+ \delta \sin. (2n - \vartheta) + \varepsilon \sin. (2n + \vartheta); \end{aligned}$$

quæ correctio, quia per excentricitatem k est divisâ satis notabilis esse potest. Tum ista Longitudo aphelii vera subtrahatur à longitudo planetæ mediæ ζ , ut obtineatur anomalia media ejus correctâ ϑ' .

§. CVXIII. Tertio in promptu esto tabula æquationum centri more solito ad excentricitatem k computata, ex qua pro anomalia media ϑ' excerpatur æquatio centri respondens quæ sit $\pm \mathcal{A}$, atque hinc reperietur Anomalia vera $\equiv \vartheta' \pm \mathcal{A}$ quæ ob duplicem causam ab anomalia vera, quæ more solito ex tabulis æquationum colligitur nullo respectu ad perturbationes habito; discrepat, primo enim etsi ex eadem tabula desumpta est, tamen alii anomaliæ mediæ ac vulgo respondet, ideoque

que tantumdem discrepat; deinde quia alij anomalix mediæ respondet, etiam æquatio $\pm \mathcal{A}E$ erit diversa. Manifestum autem est hoc posterius discrimen multo fore minus priore; cum hoc ad.º eo majus evadat, quo minor fuerit excentricitas k , tum vero æquatio $\pm \mathcal{A}E$ diminuatur. Etsi ergo in calculo perturbationum non adeo accurate nosse opus est anomaliam veram ν , tamen correctio anomalix mediæ seu loci aphelii neutiquam negligi potest.

§. CXIX. Definita hoc modo anomalia vera ν statim locum planetæ in orbita assignare poterimus, ita ut non opus habeamus ante variationem parametri & excentricitatis exquirere: quantum enim hæ variationes ad locum planetæ in orbita perturbandum conferunt, id jam sumus complexi in expressione pro loco aphelii vero supra §. CI inventa. Nam quia jam valorem ipsius ν exacte expressum habemus, erit longitudo vera

$$\varphi = \nu + n \int V d\omega + \text{Const.}$$

Si ergo pro $\int V d\omega$ valorem §. CIX positum & pro ν valorem §. CX assignatum substituamus, consequemur

$$\begin{aligned} \varphi = & \text{Const.} + i(1 - k k)^{\frac{1}{2}} \omega - i n A \omega - 2 k \sin. \nu \\ & - \frac{3}{4} k k \sin. 2 \nu - \frac{1}{3} k^3 \sin. 3 \nu - \frac{n B}{2} \sin. 2 \nu \\ & - \frac{n C i}{i - m} \sin. \eta - \frac{n D i}{2(i - m)} \sin. 2 \eta + \frac{n E i}{i + m} \sin. (\eta - 2 \nu) \\ & - \frac{n F i}{3 i - m} \sin. (\eta + 2 \nu) + \frac{n G i}{2 m} \sin. (2 \eta - 2 \nu) - \frac{n H i}{2(2 i - m)} \sin. (2 \eta + 2 \nu) \end{aligned}$$

neque igitur hic amplius inæqualitates illæ majores in forma $n \int V d\omega$ contenta aliter ingrediuntur, nisi quatenus illis ipsa anomalia vera ν jam est immutata.

§. CXX. Prima portio hujus expressiois $i \omega$ ($(1 - k k)^{\frac{1}{2}} - n A$) motum medium hujus planetæ ex-

Prix de 1756.

M

ponit, quem ergo etiam ab actione planetarum aliquantillum perturbari manifestum est; hinc si longitudo planetæ media ponatur = ζ , erit $\zeta = \text{Const.} + i(1 - k k)^{\frac{1}{2}} \omega - i n A \omega$. Deinde vidimus portionem $- 2 k \sin. \nu - \frac{1}{4} k k \sin. 2 \nu - \frac{1}{3} k^3 \sin. 3 \nu$ designare æquationem centri $\pm \mathcal{A}$ quæ in tabulis ordinariis anomaliam mediæ correctæ ν' respondet, dummodo hæ tabulæ excentricitati k sint iusto calculo superstructæ. Cum igitur tam longitudo media ζ quam ista æquatio $\pm \mathcal{A}$ constet, habebitur longitudo vera planetæ in sua orbita:

$$\begin{aligned} \varphi = & \zeta \pm \mathcal{A} - \frac{n B}{2} \sin. 2 \nu - \frac{n C i}{i - m} \sin. \eta - \frac{n D i}{2(i - m)} \sin. 2 \eta \\ & + \frac{n E i}{i + m} \sin. (\eta - 2 \nu) - \frac{n F i}{3 i - m} \sin. (\eta + 2 \nu) \\ & + \frac{n G i}{2 m} \sin. (2 \eta - 2 \nu) - \frac{n H i}{2(2 i - m)} \sin. (2 \eta + 2 \nu) \end{aligned}$$

ubi portio $\zeta \pm \mathcal{A}$ exhibet longitudinem modo ordinario inventam, nisi quatenus anomalia media hic est correctæ, tum vero reliqui termini continent ceteras inæqualitates ab actione planetæ perturbantis profectas, quarum quidem portio quædam jam in ipsa æquatione centri $\pm \mathcal{A}$ ob anomaliam mediæ correctæ comprehenditur.

§. CXXI. Actionum ergo planetæ perturbantis ad duplicem effectum perduximus, dum altero longitudo aphelii seu anomaliam mediæ, altero vero ipsa longitudo perturbatur. Quia vero & priori effectus valde est parvus, uterque commode ad unum revocari poterit. Cum enim anomalia vera tantumdem immutetur quantum anomaliam mediæ, si ν denotet eam ipsam anomaliam veram, quæ anomaliam mediæ non correctæ seu naturali ν respondet, in expressione pro vero planetæ loco inventa, loco ν scribi oportet $\nu - \frac{n}{k} (\alpha \sin. \nu + \mathcal{C} \sin.$

$(\eta - \nu) + \gamma \sin. (\eta + \nu) + \delta \sin. (2\eta - \nu) + \epsilon \sin. (2\eta + \nu)$) quæ mutatio quidem in terminis minimis nullam variationem sensibilem gignit. At si jam $\pm \mathcal{A}$ denotet æquationem centri ipsi anomalix mediæ & convenientem, quia est $\pm \mathcal{A} = -2k \sin. \nu - \frac{1}{4}kk \sin. 2\nu - \frac{1}{8}k^3 \sin. 3\nu$, in primo termino mutatio sensibilis orietur, ideoque loco $\pm \mathcal{A}$ scribi debet

$$\pm \mathcal{A} + n \left(a \sin. 2\nu + (\mathcal{C} + \gamma) \sin. \eta + (\delta + \epsilon) \sin. 2\eta + \mathcal{C} \sin. (\eta - 2\nu) + \gamma \sin. (\eta + 2\nu) + \delta \sin. (2\eta - 2\nu) + \epsilon \sin. (2\eta + 2\nu) \right);$$

ficque jam $\pm \mathcal{A}$ denotabit æquationem centri anomalix mediæ naturali & respondentem, & anomalia vera $\nu = \vartheta \pm \mathcal{A}$.

§. CXXII. Hinc igitur faciliorem modum adipiscimur effectum perturbationis in loco planetæ determinandi. More scilicet solito ad datum tempus colligatur anomalia media ϑ , eique ex tabula ordinaria capiaturs respondens æquatio centri $\pm \mathcal{A}$, indeque formetur anomalia vera $\nu = \vartheta \pm \mathcal{A}$. Qua stabilita, si longitudo planetæ media fuerit $= \zeta$ & η delignet angulum, qui relinquitur si à longitudo planetæ perturbati longitudo planetæ perturbantis subtrahatur, habebitur longitudo planetæ perturbati vera.

$$\begin{aligned} \varphi = \zeta \pm \mathcal{A} + n \left\{ \left(\alpha - \frac{B}{2} \right) \sin. 2\nu + \left(\mathcal{C} + \gamma - \frac{Ci}{i-m} \right) \sin. \eta \right. \\ \left. + \left(\delta + \epsilon - \frac{Di}{2(i-m)} \right) \sin. 2\eta \right. \\ \left. + \left(\mathcal{C} + \frac{Ei}{i+m} \right) \sin. (\eta - 2\nu) + \left(\gamma - \frac{Fi}{3i-m} \right) \sin. (\eta + 2\nu) \right. \\ \left. + \left(\delta + \frac{Gi}{2m} \right) \sin. (2\eta - 2\nu) + \left(\epsilon - \frac{Hi}{2(2i-m)} \right) \sin. (2\eta + 2\nu) \right\} \end{aligned}$$

Mij

92 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

ubi $\zeta + \mathcal{A}$ exprimit longitudinem planetæ, quam tabulæ ordinariæ præbent, totaque perturbatio jam in terminis annexis continetur.

§. CXXIII. Hic statim observo fieri $\alpha - \frac{B}{2} = 0$, unde si ad reliquos terminos contrahendos ponatur:

$$\begin{aligned} \varphi = & \zeta \pm \mathcal{A} + n B' \sin. n + n C' \sin. 2n + n D' \sin. (n - 2\nu) \\ & + n E' \sin. (n + 2\nu) + n F' \sin. (2n - 2\nu) \\ & + n G' \sin. (2n + 2\nu) + \&c. \end{aligned}$$

per valores supra exhibitos reperiemus

$$\begin{aligned} B' = & \left\{ \begin{aligned} & \frac{bb}{cc} \left(\frac{3i^3}{m(i-m)^2} - \frac{ii}{(i-m)(2i-m)} \right) + \frac{b^3}{f^3} \frac{2i^3 g'}{m(i-m)(2i-m)} \\ & - \frac{bbc}{2f^3} \left(\frac{3(2g-g'')ii}{(i-m)^2} + \frac{(6g-g'')ii}{m(i-m)} - \frac{(2g-3g'')ii}{(i-m)(2i-m)} \right) \end{aligned} \right\} \\ C' = & \left\{ \begin{aligned} & - \frac{b^3}{f^3} \frac{i^3 g''}{(i-m)(i-2m)(3i-2m)} \\ & - \frac{bbc}{4f^3} \left(\frac{3(g'-g''')ii}{2(i-m)^2} - \frac{(3g'-g''')ii}{(i-m)(i-2m)} - \frac{(g'-3g''')ii}{(i-m)(3i-2m)} \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$D' = 0; E' = 0; F' = 0; \& G' = 0.$$

Hanc ob rem tota correctio ita contrahitur, ut tantum duobus terminis constet; sitque $\varphi = \zeta \pm \mathcal{A} + n B' \sin. n + n C' \sin. 2n$; siquidem in perturbationibus excentricitatem k rejicimus.

§. CXXIV. Distantia vera planetæ à sole x nunc quoque facile definiri poterit; cum enim sit $x = \frac{P}{1 - q \cos. \nu}$ si ponamus ut supra $p = b(1 + nP)$ & $q = k + nQ$, erit ob nP & nQ minima:

$$x = \frac{b}{1 - k \cos. \nu} + nb(P + Q \cos. \nu).$$

Supra autem jam valores quantitatum P & Q assignavimus, hic vero pro ν capi debet ea anomalia vera, quæ

anomalix mediæ correctæ ϑ' respondet: sin autem anomalia vera tabulari uti velimus, eamque littera ν indicemus, pro ν in ista formula scribere debemus

$$\nu - \frac{n}{k} \left(\alpha \sin. \nu + \mathcal{C} \sin. (n - \nu) + \gamma \sin. (n + \nu) \right. \\ \left. + \delta \sin. (2n - \nu) + \varepsilon \sin. (2n + \nu) \right);$$

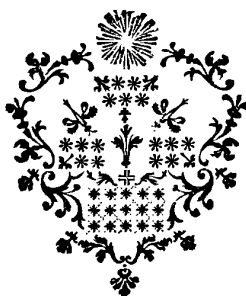
ideoque pro $k \cos. \nu$ scribi oportebit:

$$k \cos. \nu + \frac{n}{2} \left(\alpha - \alpha \cos. 2\nu - (\mathcal{C} - \gamma) \cos. n + \mathcal{C} \cos. \right. \\ \left. (n - 2\nu) + \gamma \cos. (n + 2\nu) - (\delta - \varepsilon) \cos. 2n + \delta \cos. \right. \\ \left. (2n - 2\nu) - \varepsilon \cos. (2n + 2\nu) \right).$$

Hinc si ponamus $k \cos. \nu = k \cos. \nu + n R$, erit

$$x = \frac{b}{1 - k \cos. \nu} + n b (P + Q \cos. \nu + R), \text{ ubi } \frac{b}{1 - k \cos. \nu}$$

distantiam ex tabulis more solito erutam exprimit; neque vero plerumque operæ est pretium pro distantia hanc correctionem adhibere.



S E C T I O IX.

Evolutio Inæqualitatum quibus cum linea nodorum tum inclinatio ab actione Planetarum afficitur.

§. CXXV. **S**UPRA in §. LXXXVII & LXXXVIII formulas exhibuimus differentiales, quibus mutatio momentanea tam in situ lineæ nodorum quam in inclinatione orbitæ planetæ perturbati ad orbitam perturbantis, quam tanquam fixam considero exprimitur. Productæ autem sunt istæ formulæ usque ad terminos excentricitate simplici k affectos, omissis iis, qui vel per quadratum altioremve potestatem ejusdem excentricitatis k , vel per excentricitatem orbitæ planetæ perturbantis e sunt multiplicati, quos autem si quis laborem suscipere velit eidem methodo insistendo non esset difficile insuper adjicere: neque etiam tum istarum formularum integratio majori premeretur difficultate. Verum quia actio planetarum est minima, hic adeo terminos excentricitatem k involventes rejicere licebit, sicque expressiones integrales & facilius invenientur, & multo fient simpliciores.

§. CXXVI. Quod igitur primum ad longitudinem nodi attinet, quam respectu stellarum fixarum littera π indicavimus, in ejus differentiale ingreditur angulus σ , qui denotat argumentum latitudinis $\varphi - \pi$. Cum ergo hoc calculo negligamus, & differentiale ipsius $d\pi$ præ $d\varphi$ sit minimum, tuto assumere licet $d\sigma = d\varphi = i d\omega$, & quia porro est $d\eta = (i - m) d\omega$,

integrando obtinebimus pro longitudine lineæ nodorum :

$$\pi = \text{Const.} - \frac{nbb c}{4f^3} \cdot g' i \omega + \frac{nibb}{c c} \left(\frac{\text{fin. } n}{2(i-m)} + \frac{\text{fin. } (n-2\sigma)}{2(i+m)} \right) - \frac{nibbc}{4f^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2g+g'') \text{fin. } n}{i-m} + \frac{(g'+g''') \text{fin. } 2n}{2(i-m)} + \frac{2g \text{fin. } (n-2\sigma)}{i+m} \\ - \frac{g' \text{fin. } 2\sigma}{2i} + \frac{g' \text{fin. } (2n-2\sigma)}{2m} - \frac{g'' \text{fin. } (n+2\sigma)}{3i-m} \end{array} \right\}$$

Hinc ergo erit longitudo media nodi = *Const.* - $\frac{nbb c}{4f^3} \cdot g' i \omega$, & quia *g'* semper est quantitas positiva, patet lineam nodorum semper regredi, & quidem singulis annis per angulum = $\frac{90^\circ nbb c}{f^3} \cdot i g'$ graduum, ponendo = 360°.

§. CXXVII. Formulam pro differentiali $\frac{d.tang. G}{tang. G}$ inventam, quia etiam est valde parva, loco *tang. G* poterimus per tangentem inclinationis mediæ multiplicare, fit igitur inclinatio media = λ , denotante *G* inclinationem veram, atque integrando obtinebimus

$$\frac{tang. G}{tang. \lambda} = 1 + \frac{nibb}{2cc} \left(\frac{\text{cof. } n}{i-m} - \frac{\text{cof. } (n-2\sigma)}{i+m} \right) - \frac{nibbc}{4f^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(2g-g'') \text{cof. } n}{i-m} + \frac{(g'-g''') \text{cof. } 2n}{2(i-m)} - \frac{2g \text{cof. } (n-2\sigma)}{i+m} \\ + \frac{g' \text{cof. } 2\sigma}{2i} - \frac{g' \text{cof. } (2n-2\sigma)}{2m} - \frac{g'' \text{cof. } (n+2\sigma)}{3i-m} \end{array} \right\}$$

Cum igitur inclinatio vera *G* minime discrepet à media λ , ponamus $G = \lambda + d\lambda$, eritque $tang. G = tang. \lambda + \frac{d\lambda}{\text{cof. } \lambda^2}$, & $\frac{tang. G}{tang. \lambda} = 1 + \frac{d\lambda}{\text{fin. } \lambda \text{cof. } \lambda} = 1 + \frac{2d\lambda}{\text{fin } 2\lambda}$; qua formula cum illa expressione collata eliciemus valorem ipsius $d\lambda$, quo substituto reperietur

$$G = \lambda + \frac{n i b b \sin. 2 \lambda}{4 c c} \left(\frac{\cos. n}{i - m} - \frac{\cos. (n - 2 \sigma)}{i + m} \right) - \frac{n i b b c \sin. 2 \lambda}{8 f^3} \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{(2 \sigma - g'') \cos. n}{i - m} - \frac{2 g' \cos. (n - 2 \sigma)}{i + m} - \frac{g' \cos. (2 n - 2 \sigma)}{2 m} \\ &+ \frac{(g' - g''') \cos. 2 n}{2 (i - m)} - \frac{g' \cos. 2 \sigma}{2 i} - \frac{g'' \cos. (n + 2 \sigma)}{3 i - m} \end{aligned} \right\}$$

§. CXXVIII. Inæqualitates igitur istæ non solum ob fractionem minimam n sed etiam ob $\sin. 2 \lambda$ erunt tam exiguæ, ut nullo modo observari queant: atque etiam inæqualitates periodicæ in linea nodorum vix unquam in sensus occurrant, unde in usu astronomico tuto negligi poterunt. Tantum ergo notasse sufficiet motum lineæ nodorum medium, qui continetur hac formula:

$$\pi = Const. - \frac{n b b c}{4 f^3} g' i \omega;$$

unde constat lineam nodorum motu uniformi contra signorum feriem recedere. Etsi enim hic motus singulis annis sit tardissimus ut percipi nequeat, tamen successione plurium annorum, quia continuo accumulatur, maxime sensibilis evadere potest. Effectus autem qui inde in phænomena Astronomica redundat, in hoc potissimum cernetur, quod si pro planeta perturbato terra accipiatur, latitudo stellarum fixarum aliquantillum immutetur, qui effectus propterea imprimis meretur, ut accuratius evolvatur.

§. CXXIX. Ista autem latitudinis mutatio pendebit à longitudine cujusque stellæ fixæ ratione nodorum; Posita enim longitudine nodi ascendentis terræ super orbita planetæ perturbantis = π , quæ convenit cum longitudine nodi descendentis ejusdem planetæ super ecliptica, si longitudo cujuscumque stellæ fixæ fuerit = π , ejus latitudo si fuerit borealis post tempus, quo sol arcum ω absolvit, diminuetur particula

$$= \frac{n b b c}{4 f^3}$$

$$= \frac{n b b c}{4 f^3} g' i \omega \sin. \lambda,$$
 sin autem latitudo fuerit australis tantumdem augebitur. Contrarium eveniet si longitudo stellæ fuerit $180^\circ + \pi$, tum enim eodem tempore, cui solis motus ω respondet, ejus latitudo si fuerit borealis augebitur particula $\frac{n b b c}{4 f^3} g' i \omega \sin. \lambda$, sin autem sit australis tantumdem diminuetur. At si longitudo stellæ 90° distet à nodis tum ejus latitudo nullam patietur mutationem. In genere autem si longitudo stellæ fixæ fuerit $= \xi$, eodem tempore ejus latitudo si fuerit borealis diminuetur particula $= \frac{n b b c}{4 f^3} g' i \omega \sin. \lambda \cos. (\xi - \pi)$ sin autem latitudo sit australis tantumdem augebitur.

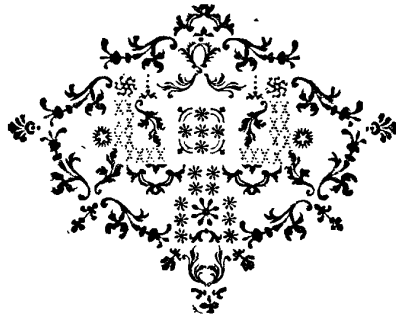
§. CXXX. Maxime igitur notabiles effectus, qui ab actione planetarum in terram exercentur, sunt primo ista exigua mutatio in latitudine stellarum fixarum, quæ autem cum observationibus vetustis circa latitudinem stellarum fixarum institutis minus fidere liceat, utrum veritati sit conformis? non tam facile explorari potest. Interim tamen studiosa collatio veterum observationum cum recentioribus vix dubitare sinit, quin in quibus stellis fixis latitudo parumper sit immutata, quod phænomenum sine dubio actioni planetarum est tribuendum. Deinde maxime conspicuus effectus cernitur in motu aphelii, cujus consensus cum veritate facillime explorari potest, quandoquidem ex observationibus certum est, aphelium terræ quotannis per spatium $11''$ circiter promoveri; similique modo motus apheliorum in reliquis planetis ab eorum actione mutua oriundus cum observationibus comparari poterit. Reliqui effectus in plerisque planetis minus perceptibiles consistunt

Prix de 1756.

N

98 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

in mutatione excentricitatis, in inæqualitatibus periodicis loci apheliorum, unde anomalia media afficitur ac denique in variatione parametri orbitarum; quibus cognitis, loca planetarum per præcepta vulgaria Astronomica facile assignari poterunt.





PARS ALTERA

*Continens Applicationem Theoriæ ad motum
Terræ ejusque perturbationes ab actione
reliquorum Planetarum oriundas.*

I. IN parte superiori Theoriam actionis planetarum mutæ ita in genere constitui, ut ex ea inæqualitates cujusque planetæ, quæ ejus motui ab actione reliquorum planetarum inducuntur, definiri atque assignari queant. Quas inæqualitates ita ad commodum calculi astronomici traduxi, ut pateat, quantum primo latus rectum seu parameter orbitæ, tum vero excentricitas, tertio locus aphelii, & quarto positio plani, quod orbita in cælo occupat, quovis tempore immutetur. Cognitis enim his variationibus, manifesto apparebit, quantum motus planetæ quovis tempore à regulis Keplerianis recedere, & quales correctiones Tabulis consuetis adhiberi debeant, ut ad quodvis tempus verus planetæ locus in cælo assignari queat.

2. Labor autem foret nimis operosus, limitesque huic dissertationi præfixos longe excederet, si hanc Theoriam ad singulos planetas accommodare vellem. Ipsa quoque Illustrissima Academia Regia tam prolixum opus non requirit, dum postquam Theoria perturbationum solide fuerit stabilita ejus applicationem tantum ad motum Terræ exigit: cujus præcepto morem gesturus

N ij

cunctas perturbaciones, quibus terra in motu suo ob actionem reliquorum planetarum est obnoxia, data opera determinabo. Ex hac autem applicatione facile perspicietur, quomodo per eandem Theoriam & reliquorum planetarum omnium perturbaciones, quas sibi mutuo induunt, definiri oporteat.

3. Ad motum autem terræ perturbandum reliqui planetæ omnes concurrunt, singulorumque effectus secundum præcepta superiora seorsim investigari conveniet, quod opus pro singulis simili calculo absolvetur. Quoniam igitur terram in locum planetæ perturbati constituimus, littera i perpetuo unitatem denotabit: atque ex tabulis solaribus pro ejus excentricitate media assumemus $k = 0,0168$. Quanquam enim cunctis inæqualitatibus rite determinatis demum verum valorem excentricitatis mediæ k definire licet, tamen in ipsa harum inæqualitatum investigatione valore ipsius k proxime vero tuto uti poterimus, quandoquidem hic minimas aberraciones merito negligimus. Interim valor $k = 0,0168$ tam prope ad veritatem accedere videtur, ut error nullius certe sit momenti. Habebimus igitur constanter $i = 1$ & $k = 0,0168$, neque quicquam præterea ex terræ theoria repeti est necesse, propterea quod non tam quantitas absoluta ejus parametri quam ejus ratio ad parametrum cujusque alterius planetæ in computum ingreditur.

4. Quicumque planetarum pro perturbante assumitur, ejus primum vim absolutam, seu rationem ejus massæ ad massam Solis nosse oportet, quam rationem littera n indicavimus. Ex phænomenis quidem Satellitum Newtonus conclusit, si Saturnus sit planeta perturbans fore $n = \frac{1}{3021}$, sin autem sit Jupiter esse $n = \frac{1}{1067}$; pro reliquis autem planetis, quoniam Satellitibus destituuntur, valor fractionis n ex phænomenis determinari ne-

quit. Etsi autem Mars & Venus ratione voluminis terræ sunt minores, fortasse ob majorem densitatem ratione massæ non multum discrepant, foretque ergo pro illis $n = \frac{1}{1700000}$, pro Marte tamen hanc fractionem ob celeb. Monnierii observationes notabiliter imminuere vellem, ut esset quasi $n = \frac{1}{20000000}$, nullumque est dubium, quin pro Mercurio hæc fractio multo minor sit accipienda forsitan $n = \frac{1}{100000000}$. Verum ex ipsa quantitate effectuum forte hæc accuratius definire licebit.

5. Porro pro quovis planeta nosse oportet motum medium seu rationem anguli, dato tempore circa solem descripti ad motum medium solis pro eodem tempore. Hanc rationem littera m indicavimus, unde tabulas astronomicas consulentes reperiemus

| | |
|--------------|-------------------------------|
| pro Saturno | $m = \frac{2}{59} = 0,0339$ |
| pro Jove | $m = \frac{7}{83} = 0,0843$ |
| pro Marte | $m = \frac{42}{79} = 0,5316$ |
| pro Venere | $m = \frac{13}{8} = 1,6250$ |
| pro Mercurio | $m = \frac{137}{33} = 4,1515$ |

Excentricitate horum planetarum littera e indicata non erit opus, siquidem vidimus perturbaciones inde pendentes tam prodire exiguas, ut præ reliquis facile rejici queant. Saltem in hac applicatione ejus rationem non habebimus, etiamsi in Theoria non sit neglecta; propterea quod ad motum apogei medium nihil plane confert.

6. Cum igitur sit $m \frac{a \sqrt{a}}{c \sqrt{c}} = \frac{b \sqrt{b}}{c \sqrt{c}}$ ob $a = b$, hinc re-

liquas expressiones, quæ in calculum ingrediuntur, determinare poterimus.

Sic erit $\frac{b b}{c c} = \sqrt[3]{m^4}$; $\frac{b b}{f f} = \frac{\sqrt[3]{m^4}}{1 + \sqrt[3]{m^4}}$; $\frac{c c}{f f} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{m^4}}$;

$$\text{hincque } \frac{b^3}{f^3} = \frac{m m}{(1 + \sqrt[3]{m^4})^{\frac{1}{2}}}; \quad \frac{b b c}{f^3} = \frac{\sqrt[3]{m^4}}{(1 + \sqrt[3]{m^4})^{\frac{1}{2}}}.$$

Tum etiam hinc elicientur valores numerorum μ & ν , supra (§. LXXVII) introductorum, eritque:

$$\mu = \frac{2 b c}{f f} = \frac{2 \sqrt[3]{m m}}{1 + \sqrt[3]{m^4}}; \quad \&$$

$$\nu = \frac{c c - b b}{f f} = \frac{1 - \sqrt[3]{m^4}}{1 + \sqrt[3]{m^4}}.$$

Ex his autem neglecta excentricitate e habemus:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{f^3} (1 - \frac{1}{2} (1 - \nu) k \cos. \nu) = \frac{1}{f^3} \left(1 - \frac{3 \sqrt[3]{m^4}}{1 + \sqrt[3]{m^4}} k \cos. \nu \right)$$

$$s = \mu (1 + \nu k \cos. \nu); \quad s s = \mu^2 (1 + 2 \nu k \cos. \nu);$$

$$s^3 = \mu^3 (1 + 3 \nu k \cos. \nu) \quad \&c.$$

atque $1 - s s = \nu \nu - 2 \mu \mu \nu k \cos. \nu$, &

$$\frac{1}{1 - s s} = \frac{1}{\nu^2} + \frac{2 \mu \mu k \cos. \nu}{\nu^3}.$$

7. Jam præcipuus labor in computo litterarum g , h , g' , h' , &c. consistit, pro quibus primum ex §. LXXII valores expressionum

$$P (1 - s s); \quad \frac{1}{2} Q (1 - s s); \quad \frac{1}{2} R (1 - s s); \quad \frac{1}{2} S (1 - s s) \quad \&c.$$

hincque ipsæ hæ litteræ P , Q , R , S , &c. colligi debent. Quæ singulæ cum habituræ sint formam $A + B k \cos. \nu$, erit porro

$$g + h k \cos. \nu = P (1 - \frac{1}{2} (1 - \nu) k \cos. \nu)$$

$$g' + h' k \cos. \nu = Q s (1 - \frac{1}{2} (1 - \nu) k \cos. \nu)$$

$$g'' + h'' k \cos. \nu = R s^2 (1 - \frac{1}{2} (1 - \nu) k \cos. \nu)$$

$$g''' + h''' k \cos. \nu = S s^3 (1 - \frac{1}{2} (1 - \nu) k \cos. \nu)$$

&c.

quoniam excentricitatem e , ac proinde numeros inde pendentés l , l' , l'' , &c. negligimus. Negligimus vero etiam terminos quadratum k^2 ejusque altiores potestates involventes, unde calculus in numeris fatis expedite absolvi poterit. Atque hoc modo omnia elementa, quæ ad perturbationes motus in orbita inveniendas spectant, erunt cognita.

8. Denique vero quod ad variationem plani orbitæ attinet id pro quovis planeta perturbante ad planum ejus orbitæ, quæ saltem ad tempus ut fixa spectatur, est relatum. Ex tabulis autem Astronomicis colligimus pro An. 1750.

| Si orbita terræ referatur ad | Esse longitudinem nodi ascendentis | Inclinationem orbitæ |
|------------------------------|---|----------------------------|
| Orbitam Saturni | 9 ^s , 21 ^o , 20', 6'' | 2 ^o , 30', 10'' |
| Orbitam Jovis | 9, 8, 15, 50, | 1, 19, 10 |
| Orbitam Martis | 7, 17, 56, 22, | 1, 51, 0 |
| Orbitam Veneris | 8, 14, 23, 43, | 3, 23, 20 |
| Orbitam Mercurii | 7, 18, 29, 0, | 6, 59, 20 |

His igitur notatis perturbationes, quas quilibet planeta in motu terra producit, per calculum numericum investigemus, unde quantum Theoria cum veritate consentiat, facile erit judicare.



I.

Investigatio inæqualitatum motus Terræ ab actione Saturni oriundarum.

9. PRIMUM igitur Saturnus locum teneat planetæ perturbantis, atque ut vidimus pro eo habemus

$$n = \frac{1}{3021} \text{ \& } m = 0,0339,$$

\& quantitates hinc derivatas cum suis logarithmis:

$$\frac{b}{c} = 0,01097 \quad l \frac{b}{c} = 8,040266$$

$$\frac{b^3}{f^3} = 0,00114 \quad l \frac{b^3}{f^3} = 7,055293$$

$$\frac{bb^c}{f^3} = 0,01079 \quad l \frac{bb^c}{f^3} = 8,033159$$

$$\mu = 0,2072; \quad l\mu = 9,316425; \quad \mu v = 0,2027$$

$$\mu^2 = 0,0429; \quad l\mu^2 = 8,632850; \quad \mu^2 v = 0,0420$$

$$\mu^3 = 0,0089; \quad l\mu^3 = 7,949275; \quad \mu^3 v = 0,0087$$

$$\mu^4 = 0,0018; \quad l\mu^4 = 7,265700; \quad \mu^4 v = 0,0018$$

$$v = 0,9783; \quad l v = 9,990465; \quad 1-v = 0,0217$$

$$\frac{1}{v} = 1,0449; \quad l \frac{1}{v} = 0,019070; \quad \frac{\mu\mu}{v^3} = 0,0459$$

10. Ex his valoribus formabimus sequentes

$$\frac{f^3}{r^3} = 1 - \frac{3}{2}(1-v)k \cos. v = 1 - 0,0326 k \cos. v$$

$$s = 0,2072 + 0,2027 k \cos. v$$

$$s^2 = 0,0429 + 0,0840 k \cos. v$$

$$s^3 = 0,0089 + 0,0261 k \cos. v$$

$$s^4 = 0,0018 + 0,0071 k \cos. v$$

$$s^5 = 0,0003 + 0,0017 k \cos. v$$

$$s^6 = 0,0001 + 0,0003 k \cos. v$$

Tum

Tum vero $\frac{1}{1-s}$ = 1, 0449 + 0, 0918 *k cos. v*, unde valores $P (1-s)$; $\frac{1}{2} Q (1-s)$; $\frac{1}{2} R (1-s)$, &c. colliguntur

$$P (1-s) = 0, 99729 - 0, 00535 \text{ k cos. } v$$

$$\frac{1}{2} Q (1-s) = 0, 75307 + 0, 00609 \text{ k cos. } v$$

$$\frac{1}{2} R (1-s) = 0, 47518 + 0, 01283 \text{ k cos. } v$$

$$\frac{1}{2} S (1-s) = 0, 28004 + 0, 01326 \text{ k cos. } v$$

11. Ex his deducitur :

$$P = 1, 0421 + 0, 0859 \text{ k cos. } v; \quad \text{hinc}$$

$$Q = 1, 5746 + 0, 1512 \text{ k cos. } v; \quad Qs = 0, 3257 + 0, 3500 \text{ k cos. } v$$

$$R = 0, 9930 + 0, 1140 \text{ k cos. } v; \quad Rs^2 = 0, 0425 + 0, 0877 \text{ k cos. } v$$

$$S = 0, 5852 + 0, 0790 \text{ k cos. } v; \quad Ss^3 = 0, 0052 + 0, 0161 \text{ k cos. } v$$

multiplicentur jam hæ formulæ per $1-0, 0326 \text{ k cos. } v$, indeque pro litteris g , h , g' , h' , g'' , h'' , &c. sequentes obtinebuntur valores :

$$g = 1, 0421; \quad h = 0, 0519$$

$$g' = 0, 3257; \quad h' = 0, 3394$$

$$g'' = 0, 0425; \quad h'' = 0, 0863$$

$$g''' = 0, 0052; \quad h''' = 0, 0159$$

&c.

qui per se tantopere decrefcunt, ut circa convergentiam seriei in quam supra terminum $\frac{1}{2}$ transformavimus nullum dubium superesse possit.

12. His valoribus inventis inquiramus primo in motum aphelii terræ, quatenus ab actione Saturni afficitur, & quoniam per (101) tempore quo Sol motu medio conficit angulum ω , aphelium terræ respectu stellarum fixarum promovetur per spatium

$$\frac{n b b c}{4 f^3} (2 g' + h') \omega - \frac{n b^3}{2 f^3} (3 g + h) \omega, \text{ ob}$$

Prix de 1756.

O

$$\frac{b b c}{4 f^2} = 0,002698; \quad 2 g' + h' = 0,9908, \text{ erit}$$

$$\frac{b b c}{4 f^3} (2 g' + h') = 0,002673;$$

$$\frac{b^3}{2 f^3} = 0,000570; \quad 3 g + h = 3,1782, \text{ erit}$$

$$\frac{b^3}{2 f^3} (3 g + h) = 0,001811.$$

Hinc isto tempore aphelium proferetur per spatium

$$0,000862 n \omega = \frac{0,000862 \omega}{3021}, \text{ ob } n = \frac{1}{3021}.$$

Tempore ergo unius anni, quo $\omega = 360^\circ = 1296000''$, aphelium terræ à Saturno propellitur per spatium $= 0,370'' = 22'''$, ideoque tempore 100 annorum per spatium $= 37''$, si ergo terra tantum à Saturno perturbaretur, aphelium respectu stellarum fixarum promoveretur:

Tempore unius anni per spatium $22'''$,

Tempore 100 annorum per spatium $37''$.

13. Hinc ad quodvis tempus longitudo media aphelii terræ innotescit, quæ autem porro per inæqualitates periodicas corrigi debet. Pendent autem eæ à duobus angulis η & ν , quorum ille η habetur si longitudo Saturni θ à longitudine terræ ϕ subtrahatur, hic vero ν denotat anomaliam terræ veram. Cum igitur sit $\frac{h b}{2 c c} = 0,005485$; & $m = 0,0339$, hinc $2i - m = 1,9661$; $i - 2m = 0,9322$, & $3i - 2m = 2,9322$, ob $n_1 = \frac{1}{3821}$ & $k = 0,0168$, formula pro motu aphelii (§. CI) inventa ad angulos reducta dabit:

$$\begin{aligned} \text{Longitudo Aphelii vera} &= \text{Longitudini aphelii mediæ} \\ &+ 1973'' \sin. (\eta - \nu) + 11'' \sin. (\eta + \nu) \\ &- 5'' \sin. \nu + 22 \sin. (\eta - \nu) - \frac{1}{2} \sin. (\eta + \nu) \end{aligned}$$

$$+ 7 \sin. \nu - 2010 \sin. (\eta - \nu) - 11 \sin. (\eta + \nu) \\ + 12'' \sin. (2\eta - \nu) - 1'' \sin. (2\eta + \nu);$$

unde patet has inæqualitates tantum non se mutuo destruere dum eæ reducuntur ad

$$+ 2'' \sin. \nu - 15'' \sin. (\eta - \nu) + 32'' \sin. (2\eta - \nu)$$

quare dum nunquam ad dimidium minutum affurgunt, tuto negligi possunt; ita ut sufficiat effectum in motu aphelii medio notasse.

14. Variationes, quæ ab actione Saturni excentricitati & parametro inducuntur, tam sunt exiguæ ut omnino sentiri nequeant. Neque vero etiam has inæqualitates evoluisse est opus, cum quoniam sunt minimæ, supra (§. CXXIII) effectum inde in locum terræ redundantem exprefferimus, sumpta scilicet æquatione, quæ secundum tabulas ordinarias anomalix mediæ convenit, quæ sit = $\pm \mathcal{A}$, & posita longitudine terræ mediæ = ζ , vidimus fore longitudinem ejus veram

$$\varphi = \zeta \pm \mathcal{A} + n B' \sin. \eta + n C' \sin. 2 \eta.$$

Ibidem autem valores litterarum B' & C' dedimus, ex quibus hæc coëfficientes in minutis secundis colligimus:

$$n B' = -\frac{1}{2}'' , \text{ \& } n C' = 0 ;$$

unde patet longitudinem terræ regulis ordinariis computatam nullam sensibilem alterationem ab actione Saturni pati, cum ea vix dimidio minuto secundo mutari possit. Pro orbita igitur terræ nil aliud relinquitur, nisi exigua illa aphelii terræ promotio, cujus effectus post integrum seculum demum ad $37''$ exfurgit.

15. Tantum ergo supereft, ut in mutationem plani, in quo orbita terræ versatur, inquiramus; à Saturno autem linea nodorum, seu intersectio orbitarum terræ & Saturni contra signorum ordinem removebitur tem-

O ij

pore quo sol motu medio angulum ω absolvit per spatium $= \frac{nbbc}{4f^3} \cdot g' \omega = \frac{\omega}{3438000}$. Hinc ergo singulis annis linea nodorum super orbita Saturni regredietur per $0, 377''$, seu $22'''$, sæculo autem elapso hic motus erit quasi $38''$. Inæqualitates periodicas, quibus locus nodi afficitur, quia nullius plane sunt momenti, hic non evolvo, multoque minus eas, quibus in genere inclinatio turbari est inventa: illæ enim nunquam ad minutum secundum, hæ vero ne ad tertium quidem assurgere reperientur. Si ergo terra à solo Saturno perturbatur, linea nodorum terræ super orbita Saturni retro-moveretur

Tempore unius anni per spatium $22'''$,

Tempore unius seculi per spatium $38''$,

qui ergo motus motui aphelii proxime est æqualis.

16. Phænomena, quæ hinc in latitudinem stellarum fixarum fluunt, ita se habebunt. Cum sit inclinatio orbitæ terræ ad orbitam Saturni $\lambda = 2^\circ, 30', 10''$, erit pro tempore unius anni $\frac{nbbc}{4f^3} g' \omega \sin. \lambda = 0, 0164''$: Hinc stellarum fixarum, quarum longitudo est $9^\circ, 21'$, vel $3^\circ, 21'$, latitudo tempore unius anni mutabitur fere uno minuto tertio. Seculo autem elapso, mutatio latitudinis ita se habebit:

Si longitudo stellæ sit $9^\circ, 21'$ circiter

ejus latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{decrefcit} \\ \text{crefcit} \end{array} \right\} 1'', 38'''$ si latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

At si longitudo stellæ sit $3^\circ, 21'$ circiter

ejus latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{crefcit} \\ \text{decrefcit} \end{array} \right\} 1'', 38'''$ si latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

Hujusmodi ergo stellarum fixarum latitudo intervallo decem seculorum mutari potuit $16'$, $24'''$, idque ob solam actionem Saturni.

II.

*Investigatio inæqualitatum Terræ ab actione
Jovis oriundarum.*

17. COLLOCATO jam Jove in locum planetæ perturbantis habebimus

$$n = \frac{1}{1067}, \text{ \& } m = 0,0843;$$

indeque quantitates derivatas cum logarithmis subscriptis

$$\frac{bb}{cc} = 0,036964; \quad \frac{b^3}{f^3} = 0,006730; \quad \frac{bbc}{f^3} = 0,035004 \\ 8,567770; \quad 7,828010; \quad 8,544124$$

Porro erit $\mu = 0,37081$ & $\nu = 0,97871$, hincque

$$s = 0,37081 + 0,34437 k \cos. \nu; \\ 9,569151 \quad 9,537029$$

$$s^2 = 0,13750 + 0,25539 k \cos. \nu; \\ 6,138302 \quad 9,407210$$

$$s^3 = 0,05099 + 0,14206 k \cos. \nu; \\ 8,707453 \quad 9,152452$$

$$s^4 = 0,01891 + 0,07023 k \cos. \nu; \\ 8,276604 \quad 8,846542$$

$$s^5 = 0,00701 + 0,03255 k \cos. \nu; \\ 7,845755 \quad 8,512603$$

$$s^6 = 0,00260 + 0,01449 k \cos. \nu; \\ 7,414906 \quad 8,160935$$

$$s^7 = 0,00096 + 0,00627 k \cos. \nu; \\ 6,985057 \quad 7,797033$$

110 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

$$s^8 = 0,00036 + 0,00266 k \cos. v ; \\ 6,553208 \quad 7,424176$$

$$s^9 = 0,00013 + 0,00111 k \cos. v ; \\ 6,122359 \quad 7,044479$$

$$s^{10} = 0,00005 + 0,00046 k \cos. v ; \\ 5,691510 \quad 6,659388$$

$$\frac{1}{1-s} = 1,15943 + 0,34332 k \cos. v ; \\ 0,064244 \quad 9,535698$$

$$\frac{f^3}{r^3} = 1 - 0,10694 k \cos. v ; \\ 9,029140$$

18. Ex his jam calculo secundum (§. LXXII) subducto invenitur

$$P(1-s) = 0,991111 - 0,017094 k \cos. v ; \\ 9,996122 \quad 8,232844$$

$$Qs(1-s) = 0,563774 + 0,538324 k \cos. v ; \\ 9,751105 \quad 9,731100$$

$$Rs^2(1-s) = 0,134856 + 0,262368 k \cos. v ; \\ 9,129870 \quad 9,418910$$

$$Ss^3(1-s) = 0,030176 + 0,088736 k \cos. v ; \\ 8,479518 \quad 8,948190$$

hasque formulas primum per $\frac{v}{1-s}$, deinde per $\frac{f^3}{r^3}$ multiplicari oportet, hoc est conjunctim per

$$1,15943 + 0,21933 k \cos. v ; \\ 0,064244 \quad 9,341098$$

unde prodeant formæ $g + h k \cos. v$. Facta igitur multiplicatione reperietur :

$$g = 1,14912 ; \quad h = 0,19756 ; \\ g' = 0,65366 ; \quad h' = 0,74788 ; \\ g'' = 0,15636 ; \quad h'' = 0,33378 ; \\ g''' = 0,03498 ; \quad h''' = 0,10950 ;$$

19. Hinc pro motu aphelii terræ medio erit

$$2g' + h' = 2,05520; \quad 3g + h = 3,64492$$

$$\frac{66c}{4f^3} (2g' + h') = 0,017985; \quad \frac{h^2}{2f^3} (3g + h) = 0,012265;$$

unde tempore, quo sol motu medio angulum ω conficit, aphelium terræ promovetur per spatium

$$0,005720 n \omega = \frac{n}{186538}, \quad \text{ob } n = \frac{1}{1067}.$$

Ponamus jam $\omega = 360^\circ = 1296000''$, ut obtineamus aphelii motum annum, qui prodibit $= 6'', 95 = 6'', 57'''$; & motus secularis $= 695'' = 11', 35''$. Quare si terra tantum à Jove perturbaretur, aphelium ejus respectu stellarum fixarum promoveretur

Tempore unius anni per spatium $6'', 57'''$,

Tempore centum annorum per spatium $11', 35''$,

Saturnus igitur & Jupiter conjunctim imprimunt aphelio terræ motum annum $7'', 19'''$. Reverta autem quotannis promoveri observatur per spatium $11''$ circiter.

20. Omissis mutationibus, quæ excentricitatem & parametrum afficiunt, quæramus statim correctionem, quam locus terræ in orbita exigit, ac pro coefficientibus B' & C' (§. CXXIII) obtinemus valores sequentes:

$$B' = -0,03650; \quad C' = +0,01381.$$

Quare si η jam denotet angulum, qui oritur, si longitudo Jovis à longitudine terræ subtrahatur, longitudo terræ per tabulas solito more computatas sequentem correctionem recipere debet:

$$-7'', 06 \sin. \eta + 2'', 67 \sin. 2\eta;$$

quæ ergo nunquam ad decem minuta secunda exurgere potest. Verumtamen hæ correctiones maximi sunt momenti, quandoquidem Theoria motus solis jam ad tantam perfectionem est perducta, ut in calculo vix unum minutum secundum negligere fas sit. Deinde cum Luna

112 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

fore tantumdem motum terræ perturbare sit inventa, neuter effectus per observationes rite comprobari potest, nisi utriusque vera quantitas per Theoriam sit explorata.

21. Motus lineæ nodorum motui aphelii tam exacte æqualis deprehenditur, ut differentia vix ad partes millionesimas ascendat, discrimen autem in hoc versatur, quod aphelium secundum signorum ordinem progreditur, dum nodi motum retrogradum tenent. Motus igitur hujus lineæ nodorum ita est comparatus ut retrogrediatur

Tempore unius anni per spatium $6''$, $57''$,
 Tempore 100 annorum per spatium $11'$, $35''$.

Vicissim ergo linea nodorum orbitæ Jovis ad eclipticam relata tanto motu retrogredietur, quatenus ipsa terra actioni Jovis est subjecta: qui effectus probe distingui debet ab eo, quem reliqui planetæ actione sua immediate in Jovem exerunt, unde peculiaris lineæ nodorum Jovis motus oritur non pendens à mobilitate plani eclipticæ. Ex quo intelligitur motum observatum nodorum cujusque planetæ esse effectum mixtum partim ex mobilitate ejus propriæ orbitæ partim vero ex mobilitate ipsius eclipticæ oriundum, qui propterea modo magis rationalis definitur, si orbitæ planetarum non cum plano eclipticæ, utpote mobili, verum cum plano respectu stellarum fixo, veluti forsitan cum plano æquatoris solis comparentur.

22. Seorsim autem hæc mobilitas orbitæ terræ ab actione Jovis profecta sentiri debet in latitudine stellarum fixarum, quæ inde variabilis reddetur. Maximam vero mutationem subibunt eæ stellæ fixæ, quarum longitudo in nodos orbitæ Jovis incidit, & quæ est vel 9° , 8° , vel 3° , 8° ; hæcque maxima mutatio ob inclinationem orbitæ Jovis $\approx 1^{\circ}$, $19'$, $10''$ singulis annis valebit $0''$,

0", 16 = 9", singulisque seculis 16"; quæ propterea elapso quovis seculo ita se habebit:

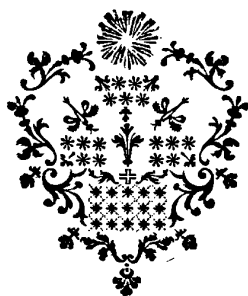
Si longitudo stellæ sit 9', 8°

ejus latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{decrefcit} \\ \text{crefcit} \end{array} \right\}$ 16" si latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

At si longitudo stellæ sit 3', 8°

ejus latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{crefcit} \\ \text{decrefcit} \end{array} \right\}$ 16" si latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

pro reliquis stellis fixis hæc mutatio secularis in latitudine diminui debet in ratione sinus totius ad cosinum differentię longitudinis stellæ ab his duobus limitibus.



III.

Investigatio inæqualitatum Terræ ab actione Martis oriundarum.

23. **S**I massa Martis æqualis esset massæ terræ haberemus $n = \frac{1}{170000}$ cum autem secundum celeb. Monnierii observationes volumen Martis sit quasi quadragies minus volumine terræ, si massa in eadem ratione esset minuenda haberemus $n = \frac{1}{6800000}$: Nihil autem impedit quominus statuamus $n = \frac{1}{20000000}$, si enim aliunde constiterit hanc fractionem n esse five majorem five minorem, inæqualitates, quas reperiemus in eadem ratione erunt five augendæ five diminuendæ. Ob hunc autem tantillum valorem ipsius n facile intelligitur inæqualitates, ab actione Martis oriundas multo fore minores, quam quæ ab actione Jovis oriri sunt inventæ, neque hanc parvitatem ab vicinitate compensari posse statuamus ergo pro his inæqualitatibus inveniendis:

$$n = \frac{1}{20000000} ; \& m = 0, 0, 5316.$$

24. Ex valore ipsius m deducuntur sequentes valores:

$$\begin{array}{l} \frac{b^2}{c^2} = 0, 43064 ; \frac{f^2}{b^2} = 0, 16515 ; \frac{bb^2}{f^2} = 0, 25166 \\ 9, 634114 \qquad \qquad 9, 217875 \qquad \qquad 9, 400819. \end{array}$$

Deinde est:

$$\begin{array}{l} \mu = 0, 91740 ; \nu = 0, 39797 \\ 9, 962557 \qquad \qquad 9, 599857 \end{array}$$

unde porro colligitur fore:

$$\begin{aligned}
 s &= 0,91740 + 0,36510 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,962557 \quad 9,562414 \\
 s^2 &= 0,84162 + 0,66989 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,925114 \quad 9,826001 \\
 s^3 &= 0,77210 + 0,92183 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,887671 \quad 9,964649 \\
 s^4 &= 0,70832 + 1,12757 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,850228 \quad 0,052145 \\
 s^5 &= 0,64981 + 1,29304 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,812785 \quad 0,111612 \\
 s^6 &= 0,59613 + 1,42348 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,775342 \quad 0,153350 \\
 s^7 &= 0,54689 + 1,52354 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,737899 \quad 0,182854 \\
 s^8 &= 0,50171 + 1,59736 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,700456 \quad 0,203403 \\
 s^9 &= 0,46027 + 1,64859 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,663013 \quad 0,217113 \\
 s^{10} &= 0,42225 + 1,68045 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,625570 \quad 0,225427 \\
 s^{11} &= 0,38737 + 1,69581 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,588127 \quad 0,229377 \\
 s^{12} &= 0,35537 + 1,69716 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,550684 \quad 0,229722 \\
 s^{13} &= 0,32601 + 1,68671 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,513241 \quad 0,227041 \\
 s^{14} &= 0,29909 + 1,66642 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,475798 \quad 0,221783 \\
 s^{15} &= 0,27438 + 1,63796 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,438355 \quad 0,214303 \\
 s^{16} &= 0,25172 + 1,60284 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &\quad 9,400912 \quad 0,204889
 \end{aligned}$$

P ij

25. Potestates has ipsius s ulterius continuare opus erat, quam pro Saturno seu Jove, quoniam series pro litteris P , Q , R , &c. multo minus convergunt: cujus rei ratio est quod orbitæ Martis & terræ longe minus à se invicem magnitudine discrepant. Quam ob rem illarum serierum pro P , Q , R , &c. inventarum plures terminos actu colligi oportet, antequam de illarum veris valoribus certi esse queamus. Præterea vero ex valoribus μ & ν habebimus:

$$\frac{1}{1-s} = 6,31373 + 26,70380 \ k \ \text{cof.} \ \nu$$

$$0,800286 \quad 1,426573$$

$$\& \frac{f^3}{r^3} = 1 - 0,90305 \ k \ \text{cof.} \ \nu$$

$$9,955712$$

Quoniam igitur deinceps per harum duarum quantitatum productum est multiplicandum, istud productum reperitur.

$$\frac{f^3}{r^3} \cdot \frac{1}{1-s} = 6,31373 + 21,00219 \ k \ \text{cof.} \ \nu$$

$$0,800286 \quad 1,322265$$

26. Seriebus igitur illis summatis, quæ (§. LXXII) sunt exhibitæ, primum valores $P(1-s)$, $Qs(1-s)$, $R s^2(1-s)$, &c. reperientur, tum vero ex iis, dum per $\frac{f^3}{r^3} \cdot \frac{1}{1-s}$ multiplicantur, litteræ g , h , g' , h' , &c. eliciuntur, ut sequuntur:

$$P(1-s) = 0,92886 - 0,08705 \ k \ \text{cof.} \ \nu; \quad g = 9,86464$$

$$\gamma \quad 9,967955 \quad 8,939784 \quad h = 18,95868$$

$$Qs(1-s) = 1,55082 + 0,87719 \ k \ \text{cof.} \ \nu; \quad g' = 9,79134$$

$$0,190556 \quad 9,943094 \quad h' = 38,10857$$

$$R s^2(1-s) = 1,19171 + 1,67272 \ k \ \text{cof.} \ \nu; \quad g'' = 7,52407$$

$$0,076167 \quad 0,223418 \quad h'' = 35,58930$$

$$S s^3(1-s) = 0,87773 + 2,04009 \ k \ \text{cof.} \ \nu; \quad g''' = 5,54175$$

$$9,243361 \quad 0,309651 \quad h''' = 31,31489$$

Ex his valoribus statim elicitur

$$\frac{b b c}{4 f^3} (2 g' + h') - \frac{b^3}{2 f^3} (3 g + h) = 0, 61137,$$

unde si $n = \frac{1^{\text{a}}}{2000000}$, tempore unius anni, quo, $\omega = 1296000''$, erit $n \omega = \frac{1296000''}{2000000} = 0''$, 648. Hinc ergo aphelium terræ à Marte quotannis promovebitur per spatium $0''$, 396 = 23^{a} . At si massam Martis massæ terræ æqualem posuissim, iste motus annuus proditurus fuisset = $\frac{100}{17}$. $23''' = 4''$, $40'''$.

27. Quæramus simili modo correctiones longitudinis terræ ab actione Martis oriundas, atque ex valoribus numericis inventis obtinebimus coëfficientes B' & C' ita expressos:

$$B' = -3, 90293, \text{ \& } C' = -31, 33048.$$

Hinc si statuamus $n = \frac{1}{2000000}$, correctio loci terræ ex tabulis ordinariis computati erit in minutis secundis

$$-0'', 403 \text{ sin. } \eta - 3'', 231 \text{ sin. } 2 \eta$$

sin autem statueremus $n = \frac{1}{1700000}$, foret ista correctio

$$-4'', 735 \text{ sin. } \eta - 37'', 964 \text{ sin. } 2 \eta.$$

Ubi η prodit si longitudo Martis à longitudine terræ subtrahatur. Hinc statim apparet, massam Martis certe esse minorem massâ terræ, propterea quod tantæ inæqualitates in motu terræ non deprehenduntur; atque etiam motus aphelii à tribus planetis superioribus genitus jam veritatem excederet.

28. Motus nodorum super orbita Martis iterum præcise æqualis deprehenditur motui aphelii, quod quidem quoties n est fractio minima semper evenire debet. Nodi ergo hi posita $n = \frac{1}{2000000}$ quotannis regredientur per spatium $23'''$ at vero per spatium $4''$, $40'''$, si ponemus $n = \frac{1}{1700000}$. In hac ultima hypothefi, qua massa

Martis massæ telluris æqualis sumitur erit motus secularis = $466''$, hincque ob inclinationem $1^{\circ}, 51'$, maxima mutatio secularis in stellarum fixarum latitudine prodit $15''$, quam eæ stellæ fixæ patiuntur, quarum longitudo est vel $7'$, 17° , vel $15'$, 17° , illæ scilicet tantum à polo eclipticæ boreali removebuntur, hæ vero tantumdem eo admovebuntur quovis seculo elapso. At hic effectus toties est minor, quoties massa Martis minor fuerit massa telluris. Antequam autem effectum à Venere oriundum definiverimus, nihil certi hic statuere licebit, actionem autem Mercurii cum ob parvitatem, tum ob solis vicinitatem tuto negligere poterimus.



IV

*Investigatio inæqualitatum Terræ ab actione
Veneris oriundarum.*

29. ANTE celeb. Monnierium Venus tellure major est credita, nunc autem ejus volumen quasi triplo esse minus certum est, ejus tamen massa pro ratione fortasse est major, quoniam Newtonus observavit, quo quisque planeta soli fuerit propior ejus densitatem esse majorem. Haud multum ergo falleremur si massam Veneris massæ terrestri æqualem assumamus, quoniam deinceps conferendis phænomenis cum calculo certius judicium circa massam tam Veneris quam Martis ferre licebit. Habemus itaque pro calculo nostro ad actionem Veneris traducendo

$$n = \frac{1}{170000}, \text{ \& } m = 1,6250;$$

Unde cum m sit unitate majus, calculus multo aliter se habebit ac pro planetis superioribus, interim tamen ex iisdem formulis erit petendus.

30. Ex hoc valore ipsius m primo deducuntur sequentes valores.

$$\frac{bb}{cc} = 1,91046; \quad \frac{b^3}{f^3} = 0,53182; \quad \frac{bhc}{f^3} = 0,38477;$$

$$0,281138 \quad 9,725765 \quad 9,585197$$

$$\mu = 0,94981; \quad \nu = -0,30571;$$

$$9,977638 \quad 9,485300$$

unde colligitur fore

120 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

$$\begin{aligned}
 s &= 0,94981 \text{ --- } 0,29036 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,977638 \quad 9,462938 \\
 s^2 &= 0,90215 \text{ --- } 0,55158 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,955276 \quad 9,741606 \\
 s^3 &= 0,85687 \text{ --- } 0,78947 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,932914 \quad 9,897335 \\
 s^4 &= 0,81386 \text{ --- } 0,99520 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,910552 \quad 9,997912 \\
 s^5 &= 0,77302 \text{ --- } 1,18157 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,888190 \quad 0,072460 \\
 s^6 &= 0,73422 \text{ --- } 1,34673 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,865828 \quad 0,129279 \\
 s^7 &= 0,69737 \text{ --- } 1,49233 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,843466 \quad 0,173864 \\
 s^8 &= 0,66237 \text{ --- } 1,61992 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,821104 \quad 0,209494 \\
 s^9 &= 0,62913 \text{ --- } 1,73095 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,798742 \quad 0,238285 \\
 s^{10} &= 0,59750 \text{ --- } 1,82676 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,776380 \quad 0,261680 \\
 s^{11} &= 0,56757 \text{ --- } 1,90858 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,754018 \quad 0,280711 \\
 s^{12} &= 0,53908 \text{ --- } 1,97759 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,731656 \quad 0,296137 \\
 s^{13} &= 0,51203 \text{ --- } 2,03487 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,709294 \quad 0,308537 \\
 s^{14} &= 0,48633 \text{ --- } 2,08142 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,686932 \quad 0,318360 \\
 s^{15} &= 0,46192 \text{ --- } 2,11827 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\
 &9,664570 \quad 0,325961
 \end{aligned}$$

$$s^{16} = 0,$$

$$s^{16} = 0,43874 - 2,14599 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\ 9,642208 \quad 0,331628$$

$$s^{17} = 0,41672 - 2,16568 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\ 9,619846 \quad 0,335595$$

$$s^{18} = 0,39581 - 2,17800 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v; \\ 9,597484 \quad 0,338057$$

31. Quoniam hic valor ipsius μ propius ad unitatem accedit quam pro Marte, series pro inveniendis litteris P , Q , R , &c. minus convergunt, unde plures terminos actu addere est opus, insuperque necesse est regulas passim expositas pro summandis seriebus minus convergentibus in subsidium vocare. Hæ scilicet series comparantur cum progressionibus geometricis, & cum exponentes continuo varientur, medius quidam, cum jam plures termini actu fuerint summati, eligatur, quo pacto istæ summæ facile proxime saltem obtinebuntur. Tum vero ex valoribus pro μ & v inventis eliciemus.

$$\frac{1}{1-s} = 10,70040 - 63,15470 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v, \\ 1,029400 \quad 1,800406$$

$$\& \frac{f^2}{r^2} = 1 - 1,95857 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v;$$

quarum duarum formularum productum est

$$\frac{f^2}{r^2} \cdot \frac{1}{1-s} = 10,70040 - 84,11220 \text{ } k \text{ } \textit{cos. } v. \\ 1,019400 \quad 1,924859$$

32. Colligamus igitur summas serierum, quæ supra (§. LXXII) sunt propositæ, & cum invenerimus valores pro $P(1-s)$; $Qs(1-s)$; $Rs^2(1-s)$; $Ss^3(1-s)$; eos statim per $\frac{f^2}{r^2} \cdot \frac{1}{1-s}$ multiplicemus, ut eadem opera valores g , h , g' , h' , &c. nanciscamur,

Prix de 1756.

Q

122 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

$$\begin{aligned}
 P(1-ss) &= 0,92034 + 0,08475 \text{ k cof. } v; & g &= 9,84800 \\
 & 9,963948 & 8,928140 & h = -76,50484 \\
 Qs(1-ss) &= 1,63454 - 0,78298 \text{ k cof. } v; & g' &= 17,49020 \\
 & 0,213394 & 9,893751 & h' = -138,31232 \\
 R s^2(1-ss) &= 1,35681 - 1,70112 \text{ k cof. } v; & g'' &= 14,51830 \\
 & 0,132516 & 0,230730 & h'' = -132,32640 \\
 S s^3(1-ss) &= 1,09228 - 2,35350 \text{ k cof. } v; & g''' &= 11,68800 \\
 & 0,038340 & 0,371714 & h''' = -117,05800
 \end{aligned}$$

Ex his valoribus statim pro motu aphelii invenitur

$$\frac{b^b c}{4f^3} (2g' + h') - \frac{b^3}{2f^3} (3g + h) = 2,5466,$$

Cum autem in prægrandibus illis numeris error facile irreperit qui etiam ipsos parum afficit, tamen in differentiis notabilis evadit, & aliunde constat hunc valorem convenire cum $\frac{h^b c}{4f^3} g'$. hujus valor est 1,6746, quo si utamur posito $n = \frac{1}{170000}$ tempore unius anni aphelium promovebitur per spatium 12, 7'', seu 12'', 42''''.

33. Si ergo massa Veneris æqualis esset massæ terræ, ab ejus actione Aphelium Terræ singulis annis promoveretur per spatium 12'', 42''', & quidem respectu stellarum fixarum, cum tamen constat totum ejus motum annum vix 12'' superare. Quare cum certum sit, actionem Saturni & Jovis jam ipsi imprimere motum 7'', 19''' quotannis, qui à Marte aliquantillum augetur, evidens est pro Venere vix 5'' relinqui. Multo igitur minor sit Veneris massa quam massa telluris necesse est, & quia ejus volumen jam triplo minus est, massa quoque in eadem ratione diminui debet; unde si pro Venere ponamus $n = \frac{1}{510000}$; ejus effectus in aphelio terræ promovendo erit quotannis 4'', 14'''. Verumtamen si ordinem, quo planetæ Soli propiores simul densiores observantur, secuti densitatem Veneris aliquan-

tum augeamus, effectus aliquantillum major prodibit. Pro Marte autem, cujus volumen fere quadragies minus est terra, ob densitatem minorem ejus massa plusquam quadragies minor massa terræ statui deberet. Unde cum Marti parem cum terra massam tribuentes, ejus effectum annum in motu aphelii invenerimus $4''$, $40'''$, hic effectus revera minor erit quam $5'''$, ideoque penitus rejici poterit.

34. Si conjecturis aliquid tribuere licet; quia Newtonus statuit densitates Saturni, Jovis & Terræ ut 67, 95 & 400, videntur eæ proportionales esse radici quadratæ motuum mediorum, quos littera *m* indicavimus. Hanc igitur regulam si simul ad reliquos planetas transferamus, eorumque volumina secundum celeb. Monnierium conjungamus, poterimus eorum massas colligere ut sequitur

| | Volumen | Densitas | Massa |
|-----------|----------------|----------|--------|
| Saturnus | 132 | 0,184 | 24,288 |
| Jupiter | 270 | 0,292 | 78,840 |
| Mars | $\frac{1}{42}$ | 0,730 | 0,018 |
| Terra | 1 | 1, | 1, |
| Venus | $\frac{1}{3}$ | 1,27 | 0,420 |
| Mercurius | $\frac{1}{50}$ | 2,04 | 0,040 |

Massam vero Terræ ad Massam Solis statuit Newtonus ut 1 ad 170000 circiter, quæ ratio paralaxi Solis $10''$ nititur, quæ, si esset major minorve, fractio $\frac{1}{170000}$ in ratione duplicata parallaxeos deberet augeri minui.

35. Quia ergo Martis effectus in motu aphelii est nullus & Veneris effectus ex hypothesi $n = \frac{1}{170000}$ inventus est $= 12''$, $42'''$, hic per 0,42 multiplicari debet, ut prodeat verus effectus annuus qui ergo erit

Q ij

$= 5''$, 20. Cum ergo ab actione Saturni & Jovis conjunctim sit $7''$, $19''$, ob actionem omnium planetarum aphelium terræ respectu stellarum fixarum quotannis promovebitur per spatium $12''$, $39'''$ & si ob Martem addamus circiter $4'''$, habebimus $12''$, $43'''$, id quod satis convenit cum observationibus; cum enim præcessio media æquinoctiorum sit singulis annis $50''$, $18'''$, erit respectu æquinoctii motus aphelii annuus $63''$ & unum $'''$ quæ determinatio tantum tertio major est quam motus $63''$, qui aphelio in novissimis tabulis assignatur. Videtur ergo determinatio massæ Veneris veritati maxime conformis, ac proinde pro Venere erit valor $n = \frac{1,42}{170000} = \frac{1}{404762}$, qui cum rationi maxime sit conformis, nescio an gravius argumentum proferri possit, pro evincenda planetarum actione mutua, quandoquidem motus aphelii terræ exactissime inde deducitur.

36. Cognito itaque vero valore ipsius $n = \frac{1}{404762}$ qualitates in loco terræ inde oriundæ certius definirî poterunt: colliguntur autem valores:

$$B' = -11, 2886; \quad C' = +11, 7993.$$

Quodsi jam longitudo Veneris à longitudine terræ subtrahatur & angulus residuus vocetur $= \eta$, tum longitudinis terræ more consueto computatæ correctio ab actione Veneris profecta erit

$$-5'', 75 \sin. \eta + 6'', 02 \sin. 2 \eta,$$

quæ correctio, quando fit maxima, usque ad $10\frac{1}{2}$ minuta secunda crescere potest, id quod evenit, quando angulus η est

$$\text{vel } \eta = 4^{\circ}, 7^{\circ}, \text{ vel } \eta = 10^{\circ}, 7^{\circ},$$

illo casu $10\frac{1}{2}''$ à longitudine terræ subtrahi hoc vero addi debent. A Marte autem talis correctio vix sensibilis

oritur, quoniam enim ea, quæ ex hypothefi $n = \frac{1}{170000}$ est inventa, plusquam quadragies minor accipi debet, ea femper infra minutum fecundum fubfifitet, ideoque nifi fumma præcifio defideretur, fine errore negligi poterit.

37. Motui aphelii æqualis eft motus nodi retrogradus, unde linea nodorum orbitæ terræ fuper orbita Veneris quotannis per fpacium $5''$, $20'''$ regredietur; quæ præceffio integro fæculo valebit 533 minuta fecunda. Cum igitur inclinatio orbitarum harum fit 3° , $23'$, $20''$, maxima mutatio fecularis, quæ hinc in latitudinem ftellarum fixarum redundat erit $31\frac{1}{2}''$, qui effectus certè notabilis poft plura fecula effe debet. Quoniam longitudo linæ nodorum terræ fuper orbita Veneris cadit in 8° , $14'$, erit latitudinis variatio fecularis ut fequitur

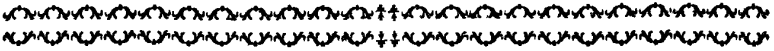
Pro ftellis quarum longitudo eft 8° , $14'$

Latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{diminuitur} \\ \text{augetur} \end{array} \right\} 31\frac{1}{2}''$ fi latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

At pro ftellis quarum longitudo eft 2° , $14'$

Latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{augetur} \\ \text{diminuitur} \end{array} \right\} 31\frac{1}{2}''$ fi latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$





CONCLUSIO,

Continens distinctam expositionem omnium inæqualitatum quibus motus telluris ab actione omnium Planetarum conjunctim perturbatur.

EX iis quæ hætenus singulatim circa effectum cujuslibet Planetæ in motum terræ per calculum sunt eruta, perspicuum est, omnes perturbationes, quibus motus terræ afficitur, ad tria genera reduci posse. Primum scilicet genus spectat ad promotionem aphelii terræ, sive apogei orbitæ Solis, prouti in Tabulis exhiberi solet. Ad secundum genus refero correctiones, quibus locus terræ sive solis secundum consueta Tabularum Astronomicarum præcepta computatus ad veritatem perducitur. Tertium vero genus respicit latitudinem stellarum fixarum, quæ, quia ab actione planetarum planum eclipticæ paulatim immutatur, variabilis est deprehensa. Hos igitur ternos actionis planetarum effectus in motum Telluris exertos hic breviter complexurus distincte proponam: quo tam eximius Theoriæ cum veritate consensus clarius perspiciatur, quam ipsa Theoria motus solis ad majorem perfectionis gradum evehatur.

I.

De effectu Planetarum in Aphelio Terræ seu Apogeo Solis promovendo.

Quilibet Planeta aliquid ad aphelium terræ respectu stellarum fixarum promovendum confert. Ac Saturni quidem & Jovis effectus nulli dubio est subjectus, quoniam horum duorum planetarum massa seu vis absoluta ex motu satellitum satis exacte concludi potest. Si enim massam solis unitate designemus; ex temporibus periodicis Satellitum novimus esse massam Saturni $= \frac{1}{3021}$ & Jovis $= \frac{1}{1067}$. Hinc igitur inveni ab actione Saturni aphelium Terræ singulis annis promoveri debere per spatium $0'', 22'''$, ab actione Jovis autem per spatium $6'', 57'''$, ideoque ab ambobus conjunctim per spatium $7'', 19'''$. Pro Marte secutus sum recentissimas conclusiones celeb. Monnierii, qui ejus volumen 42 vicibus minus statuit quam volumen terræ, unde cum ejus massa ob minorem densitatem ad minimum quinquages minor sit putanda, ejus effectus in motu aphelii terræ promovendo per annum $5'''$ superare nequit. Eidem auctoritati innixus volumen Veneris triplo minus assumi volumine terræ & quia ejus densitas probabiliter aliquanto est major, ejus massam sumsi $\frac{42}{100}$ massæ terræ, unde pro Venere prodierat valor ipsius $n = \frac{1}{404762}$, hinc vero pro aphelio telluris adeptus sum motum annum $5'', 20'''$. Mercurii plane nullam habui rationem, cum ob summam ejus parvitatem, tum quod ingens discrimen inter ejus orbitam & orbitam Terræ effectum diminuit; unde calculo subducto aphelium Terræ vix per $1'''$ quotannis promoveri reperitur.

Ex his igitur effectibus particularibus colligendis adipiscemur universum aphelii terræ motum annum, ut sequitur:

| | Promotio annua Aphelii Terræ |
|--------------------------------|---------------------------------|
| à vi Saturni | 0", 22" |
| à vi Jovis | 6, 57 |
| à vi Martis | 0, 5 |
| à vi Veneris | 5, 20 |
| à vi Mercurii | 0, 1 |
| | ----- |
| Motus totalis annuus | 12", 44" |

Per tantum ergo spatium aphelium terræ seu apogæum Solis quotannis respectu stellarum fixarum promoveri debet, respectu æquinoctiorum autem, quorum præcessio media annua statuitur ab Astronomis 50", 18", hæc aphelii terræ promotio erit 63", 2".

Convenit autem hæc determinatio tam accurate cum veritate, ut certe ne uno quidem minuto secundo discrepet. Atque hic quidem primo pulcherrimus consensus Theoriæ, qua cuncta corpora cœlestia se mutuo in ratione reciproca duplicata distantiarum attrahere affumuntur, cum veritate luculentissime agnoscitur, ita ut nefas esset istam Theoriam amplius in dubium vocare. Deinde vero imprimis notari velim, me in constituendis massis Martis & Veneris exquisitissimas celeb. Monnierii determinationes esse secutum, quæ propterea & Theoriam confirmant & ab ea vicissim confirmantur. Quodsi enim vulgarem Astronomorum opinionem essem secutus, qui Martem tantillum minorem terra, Venerem vero adeo majorem sunt arbitrati, ab his solis duobus planetis aphelium Terræ quotannis per spatium fere 17" promotum fuisset, sicque ab omnibus planetis conjunctim tota progressio annua ad 24" ascendisset, qui enormis error hanc opinionem sufficienter refutat. Cum igitur jam satis audacter affirmare possimus, posita massa Solis = 1, esse massas Saturni = $\frac{1}{3021}$ Jovis

Jovis = $\frac{1}{1067}$; Martis = $\frac{1}{8500000}$; Veneris = $\frac{1}{404762}$
 quandoquidem his valoribus verus motus aphelii terræ
 obtinetur; ipsius terræ massa hic plane non concurrit,
 etsi eam cum Newtono assumferam = $\frac{1}{1700000}$; hæc
 enim à parallaxi horizontali Solis, quam 10" posuit,
 pendet, atque ea mutata in ratione cuborum immu-
 tari debet, manentibus illis reliquorum planetarum
 massis. Si ergo Solis parallaxis horizontalis esset $12\frac{1}{2}''$,
 ista massa assumpta per $(\frac{12.5}{10})^3 = 1,95$ multiplicari de-
 beret, sicque prodiret = $\frac{1}{870000}$. Hinc igitur massa
 Veneris foret $4\frac{2}{3}$ vicibus minor massa terræ; & quia
 volumen tantum triplo est minus, densitas multo mi-
 nor esset statuenda; quod etsi nullo jure inficiari possi-
 mus, tamen prior hypothesis Newtoni 10" elegantius
 cum ordine, quo densitas planetarum ad solem acce-
 dendo crescere videtur, consisteret. Verum cum hæc
 conjectura nimis debili nitatur fundamento, hinc mi-
 nime argumentum contra parallaxin $12\frac{1}{2}''$ petendum
 esse cenleo.

II.

*De Effectu Planetarum in longitudine terræ vel Solis
 alteranda.*

Supra vidimus effectum Saturni nimis esse parvum
 quam ut in loco terræ solisve perceptibilem mutatio-
 nem generare valeat, quod idem de Marte & Mer-
 curio est tenendum, omnis ergo perturbatio, quæ qui-
 dem ab actione planetarum in locum terræ redundare
 potest, tantum à Jove & Venere oritur, qua fit, ut
 etsi locus solis secundum tabulas ordinarias veris ele-
 mentis rite instructas fuerit computatus, is tamen ad

Prix de 1756.

R

plura minuta secunda à veritate discrepare possit. Requirit itaque accurata loci terræ solisque determinatio duplicem correctionem, alteram à loco Jovis alteram à loco Veneris oriundam, quæ utraque adhiberi debet ad locum ex tabulis ordinariis supputatum, quas quidem tam ratione motuum mediõrum quam excentricitatis recte constitutas esse postulo.

Primum igitur ad tempus propositum quærat^{ur} longitudo Jovis heliocentrica, eaque à longitudine terræ, (quæ à longitudine solis 6 signis distat) subtrahatur, ac residuo per η indicato, erit correctio à Jove orta:

$$- 7'' \sin. \eta + 2\frac{2}{3}'' \sin. 2 \eta.$$

Deinde simili modo ad tempus propositum colligatur Longitudo Veneris heliocentrica, quæ à longitudine terræ subtracta; relinquat angulum littera η indicandum, ex quo habebitur correctio à Venere

$$- 5\frac{3}{4}'' \sin. \eta + 6'' \sin. 2 \eta.$$

Atque hac duplici correctione adhibita verus locus terræ vel Solis obtinebitur, quatenus is quidem ab actione planetarum principalium turbatur. Nam satis certum videtur locum terræ etiam ab actione lunæ aliquantillum alterari, qui effectus ad 10'' usque exurgere posse videtur; & si adhuc non satis distincte est animadversus, ignoratis illarum duarum inæqualitatum Jovialis & Veneris in causa fuisse est credenda.

Nullum autem est dubium, quin adhibendis his correctionibus locus solis exactissime definiri possit, dum eæ ex iisdem fontibus promanant, unde illa egregia motus aphelii determinatio est deducta. Astronomi quidem eisdem ratione consequi solent loca solis ex optimis tabulis deducta quandoque ultra semiminutum primum ab observationibus dissentire, etiam si eadem tabulæ pluribus aliis observationibus exacte respondeant: nunc autem facile percipimus inæqualitates à Jove & Venere

perfectas, si lunarem adjiciamus interdum fere ad $30''$ affurgere posse. Verum tabularum summa cura instructarum error etiam major evadere potest, propterea quod his correctionibus ignoratis neque excentricitas neque aphelium neque loca media exactissime constitui potuerint. Quando autem plures accuratissimæ solis observationes præsto fuerint, ex quibus ejus longitudo ad aliquot minuta secunda vere definiri possit, non solum consensus harum correctionum cum veritate facile explorabitur, sed etiam vulgaria elementa quibus tabulæ sunt superstructæ, exactissime emendari poterunt.

III.

De effectu Planetarum in Latitudine stellarum fixarum mutanda.

Quatenus planetæ vi sua planum ecclipticæ de situ pellunt, eatenus nobis stellæ fixæ latitudinem mutare videntur. Hic quidem effectus à Marte & Mercurio oriundus rejici potest, cum à priori integro seculo variatio nodi $\frac{1}{4}''$ affurgat; qui autem à Saturno oritur; quia linæ nodorum Saturni & Jovis tantum 13° differunt, ejus effectus utpote valde parvus sine errore cum effectu Jovis conjungi atque ad lineam nodorum Jovis referri poterit quorsum est exiguum effectum Martis conjicere licebit. Variatio igitur secularis maxima, quæ à Saturno, Jove & Marte simul in latitudine stellarum fixarum generatur ita se habebit:

Pro stellis fixis, quarum longitudo est $9^\circ, 8^\circ$ (A. 1750)

Latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{decrefcit} \\ \text{crefcit} \end{array} \right\} 17''\frac{5}{6}$ si latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

R ij

Pro stellis fixis, quarum longitudo est $3^s, 8^o$

Latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{crefcit} \\ \text{decrefcit} \end{array} \right\} 17'' \frac{5}{6}$ si latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

Major autem effectus à Venere editur, quia ejus orbita magis ad eclipticam est inclinata : atque variatio secularis ita se habere inventa est :

Pro stellis quarum longitudo est $8^s, 14^o$ (A. 1750)

Latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{decrefcit} \\ \text{crefcit} \end{array} \right\} 31'' \frac{1}{2}$ si latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

Pro stellis quarum longitudo est $2^s, 14^o$

Latitudo $\left\{ \begin{array}{l} \text{crefcit} \\ \text{decrefcit} \end{array} \right\} 31 \frac{1}{2}''$, si latitudo fuerit $\left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auftralis} \end{array} \right\}$

Hæc scilicet valent pro stellis quarum longitudo nunc est vel $8^s, 14^o$, vel $2^s, 14^o$. Etsi enim labentibus seculis longitudo stellarum fixarum notabiliter mutetur, tamen earum distantia à nodis planetarum multo minorem mutationem patitur, unde quarum stellarum longitudo nunc est $8^s, 14^o$, vel $2^s, 14^o$, eæ etiam ante plura secula nodis Veneris tam fuerunt propinquæ, ut in variatione seculari nulla sensibilis mutatio oriri queat. Atque ob hanc causam istæ expositæ variationes ad plura secula retro & in posterum sine sensibili errore extendi poterunt.

Quantum autem hæc cum experientia conveniant tam facile non patet, dum plures Astronomi omnino negant latitudinem stellarum fixarum ulli variationi esse obnoxiam; quæ sententia si veritati esset consentanea, certe ingens detrimentum pateretur. Verum ejus falsitas argumento maxime obvio luculenter ostendi potest. Qui enim statuere velit latitudinem stellarum fixarum esse invariabilem, quia orbitæ planetarum situm suum respectu eclipticæ continuo mutant, is concedere cogi-

tur, distantias stellarum fixarum ab orbitis planetarum esse variabiles, eorumque incolas mutationem quandam in stellarum latitudine ipsis visa percipere debere. Cum igitur omnium planetarum incolæ variationem in latitudine stellarum fixarum observent, ridiculum foret hoc de incolis Terræ negare velle.

Verum non dico, omnes stellas in latitudine parem variationem pati, quin potius dantur stellæ, quippe quarum longitudo vel intra hos limites 0° , 8° , & 11° , 14° , vel intra hos 6° , 8° , & 5° , 14° continetur, quæ nullam fere mutationem in latitudine subeunt. Ac fortasse tales stellæ fixæ Astronomos seduxerunt; ut crederent latitudinem nulli mutationi esse obnoxiam. Ad hoc accedit, quod veteres observationes plerumque nimis sunt crassæ, quam ut ulla mutatio ex earum cum hodiernis comparatione tuto concludi queat, præcipue si ejusmodi stellæ fixæ examini subjiciantur, in quibus non satis notabilis variatio latitudinis evenire debuit. Verum si examinaretur stella cujus longitudo hodie est circiter vel 3° vel 9° , ejus latitudo tempore Ptolemei ad $13'$ diversas esse debuit ab ea quæ hodie observatur.

Interim tamen in catalogo Ptolemei plerumque multo majus discrimen latitudinis deprehenditur, quam Theoria postulat, & quam hic errori observationum haud parum est tribuendum, tamen inde istam variationem satis manifestam reddi posse mihi quidem videtur, præcipue si ad stellas principales respiciamus. Ita à Landsbergio ad initium Æræ Christianæ assignatur

Oculi Tauri latitudo $5^{\circ}, 44'$ A quæ hodie est $5^{\circ}, 30'$ A;
 Cordis Scorpii latitudo $4, 12$ A quæ hodie est $4^{\circ}, 31\frac{1}{2}'$ A.
 At hodie oculi Tauri longitudo est $2^{\circ}, 5^{\circ}, 52'$
 & Cordis Scorpii $8, 5, 19,$

Secundum nostram ergo Theoriam latitudo oculi Tauri à A. 0 ad A. 1750 decrefcere debent $17\frac{1}{2} \times 48'' = 14'$, id quod exactiffime cum decremento à $5^{\circ}, 44'$ ad $5^{\circ}, 30'$ convenit. Deinde latitudo Cordis Scorpii ab A. 0 ad A. 1750, quia est australis & longitudo fere $8^{\circ}, 14'$, crefcere debuit incremento $17\frac{1}{2} \cdot 48'' = 14'$; cum ergo nunc latitudo fit $4^{\circ}, 31\frac{1}{2}''$, tempore A. 0 erat $4^{\circ}, 17'$ quæ à Landsbergio assignatur $4^{\circ}, 12'$, ubi error $5'$ incuriæ observationum adfcribi debet. Quæ duo exempla mihi quidem ad variationem per Theoriam ftabilitam confirmandam fufficere videntur, neque dubito quin indidem plura hujufmodi argumenta peti queant.

Quo autem clarius appareat quomodo cujufque ftellæ fixæ variatio latitudinis fecularis definiri queat, ponamus ftellæ fixæ longitudinem A. 1750 effe $= l$, atque ejus latitudo fi fuerit borealis labente quoque feculo crefcet particula

$$17\frac{2}{5}'' \cos. (l - 3^{\circ}, 8^{\circ}) + 31\frac{1}{2}'' \cos. (l - 2^{\circ}, 14^{\circ})$$

fin autem latitudo fuerit australis, ea fingulis feculis tantumdem decrefcet.

Hæc autem formula fimplicius ita exhiberi potefl, ut fit

$$47\frac{4}{5}'' \sin. l + 6\frac{1}{5}'' \cos. l;$$

unde fequens tabula pro variatione feculari ftellarum fixarum eft fupputata.



TABULA INDICANS

Quantum latitudo cujusque stellæ fixæ si fuerit borealis elapso quoque seculo varietur.

ARGUMENTUM.

Longitudo stellæ ad An. 1750 sumta.

| Grad. | ♈ | | ♉ | | ♊ | | ♋ | | ♌ | | ♍ | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|---|----|---|---|---|
| | o | S | I | S | II | S | III | S | IV | S | V | S |
| 0 | + 6",2 | +29",5 | +44",5 | +47",8 | +38",3 | + 8",5 | | | | | | |
| 5 | +10,3 | +32,5 | +45,9 | +47,1 | +35,6 | +14,6 | | | | | | |
| 10 | +14,4 | +35,5 | +47,0 | +46,0 | +32,6 | +10,5 | | | | | | |
| 15 | +18,4 | +38,2 | +47,8 | +44,6 | +29,4 | + 6,3 | | | | | | |
| 20 | +22,2 | +40,6 | +48,2 | +42,8 | +26,0 | + 2,2 | | | | | | |
| 25 | +25,8 | +42,7 | +48,2 | +40,7 | +22,3 | - 2,0 | | | | | | |
| 30 | +29,3 | +44,5 | +47,8 | +38,3 | +18,5 | - 6,2 | | | | | | |

| Grad. | ♎ | | ♏ | | ♐ | | ♑ | | ♒ | | ♓ | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|---|---|---|----|---|
| | VI | S | VII | S | VIII | S | IX | S | X | S | XI | S |
| 0 | - 6",2 | -29",3 | -44",5 | -47",8 | -38",3 | -18",5 | | | | | | |
| 5 | -10,3 | -32,5 | -45,9 | -47,1 | -35,6 | -14,6 | | | | | | |
| 10 | -14,4 | -35,5 | -47,0 | -46,0 | -32,6 | -10,5 | | | | | | |
| 15 | -18,4 | -38,2 | -47,8 | -44,6 | -29,4 | - 6,3 | | | | | | |
| 20 | -22,2 | -40,6 | -48,2 | -42,8 | -26,0 | - 2,2 | | | | | | |
| 25 | -25,8 | -42,7 | -48,2 | -40,7 | -22,3 | + 2,0 | | | | | | |
| 30 | -29,3 | -44,5 | -47,8 | -38,3 | -18,5 | + 6,2 | | | | | | |

Si stellæ latitudo fuerit australis, tum signa hæc verfa sunt intelligenda.

Ve'uti si quæratnr latitudo Sirii tempore Ptolemei seu A. 150 quæ nunc est 39°, 32', 8" A. quia ejus lon-

gitudō nunc est $3^s, 10^o, 14'$, ejus latitudo singulis feculis labentibus minuitur $46''$, ergo A. 150 major fuerit quam nunc $16 \times 46''$, hoc est $12', 16''$, erat ergo

Latitudo Sirii A. 150. . . . $39^o, 19', 52''$ A.

Similique modo ope hujus tabulæ latitudo omnium stellarum fixarum ad quodvis tempus definiri poterit.

Quodsi Catalogos Fixarum Ptolemæi & Tychois, quos Flamstedius cum suo proprio edidit consulamus, manifesto inde sequentes quatuor observationis colligemus.

- I. Quod fixarum borealium, quarum longitudo est H vel \ominus , latitudo olim fuerit minor, quam nunc.
- II. Quod fixarum australium, quarum longitudo est H vel \ominus , latitudo olim fuerit major, quam nunc.
- III. Quod fixarum borealium, quarum longitudo est \rightarrow vel \bowtie , latitudo olim fuerit major, quam nunc.
- IV. Quod fixarum australium, quarum longitudo est \rightarrow vel \bowtie , latitudo olim fuerit minor, quam nunc.

Et si enim ex comparatione horum catalogorum ob notabiles errores in antiquis observationibus commissos, de vera differentia nihil certe statuere valeamus, tamen insignis consensus nullum dubium circa veritatem harum 4 regularum relinquit. Hac igitur ratione nostra Theoria, quæ jam ex motu aphelii orbitæ terræ egregie est confirmata, novum firmamentum acquirit, simulque quæstionem maximi momenti de variabilitate latitudinis stellarum fixarum, circa quam omnes Astronomi adhuc ancipiter hæfere, ita dilucide decidit, ut etiam cujusque stellæ fixæ ad quodvis tempus veram latitudinem assignare valeamus.

IV.

De effectu Planetarum in obliquitate Ecclipticæ immutanda.

Tametsi jam satis constat, ab actione planetarum nullum effectum in axem terræ redundare posse, unde ejus situs immutetur, tamen quoniam positio plani ecclipticæ variatur, dum planum æquatoris neuticam afficitur, manifestum est hinc mutationem in horum duorum planorum mutua inclinatione oriri debere. Ad quam dilucide definiendum, ne effectus à mutatione axis terræ oriundos, qui in præcessionè æquinoctiorum & mutatione quadam periodica obliquitatis ecclipticæ consumuntur, cum hoc effectu actioni planetarum debito confundamus, quia uterque est valde parvus, alterum sine altero in hoc negotio considerare licebit: Animum ergo prorsus à nutatione axis terræ abstrahamus; ita ut neque æquinoctiorum præcessio, neque mutabilitas illa in obliquitate ecclipticæ locum habeat, & quoniam planum æquatoris respectu spatii absoluti nulli mutationi esset obnoxium, omnium stellarum fixarum declinatio esset immutabilis.

Consideremus ergo stellam fixam, cujus ascensio recta sit 90° , ejusque propterea longitudo in initio caniri, cujus declinatio sit $= d$ constantis magnitudinis; latitudo vero præsentis tempore sit $= l$, eaque borealis; atque nunc quidem erit obliquitas ecclipticæ $= d - l$. Verum postquam seculum fuerit elapsum, declinatio etiam nunc erit eadem $= d$, latitudo vero tum ex nostra tabula erit $= l + 47''$, 8, ideoque post seculum obliquitas ecclipticæ erit $d - l - 47''$, 8, hincque fero $48''$ minor quam nunc. Quod ratiocinium cum ad plurima secula elapsa accommodari queat, evidens est obli-

Prix de 1756.

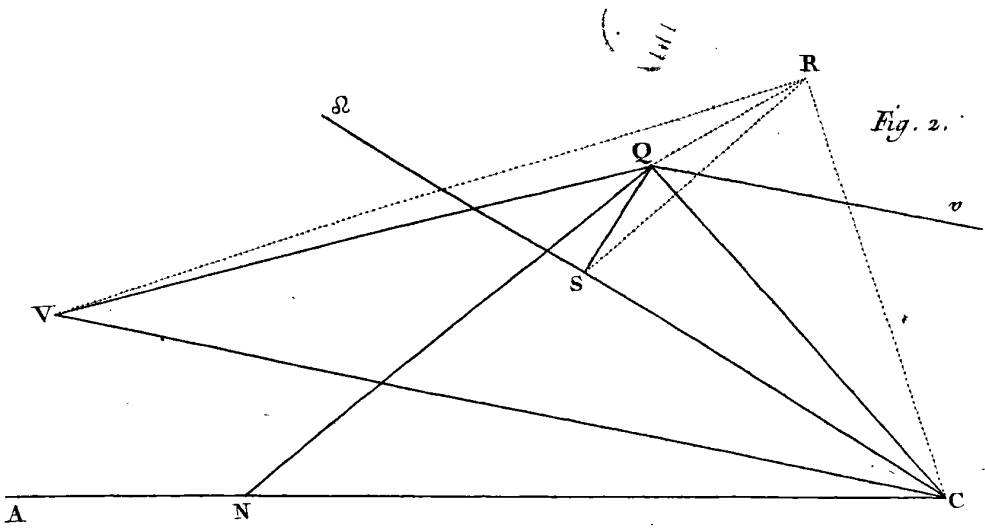
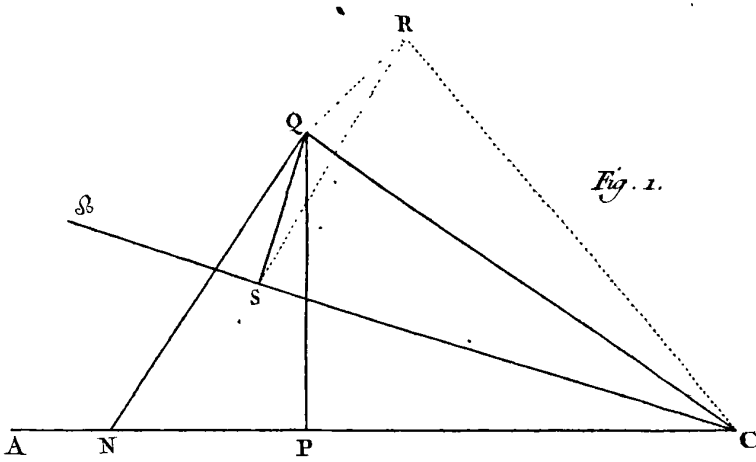
S

138 INVESTIGATIO PERTURBATIONUM, &c.

quitatem eclipticæ singulis seculis $48''$ diminui. Cum igitur hic idem effectus ad phænomena ab axis terræ nutatione oriunda accedat, per Theoriam certum est, mediam obliquitatem eclipticæ singulis seculis $48''$ minorem fieri; quare cum nunc ea observetur $23^{\circ}, 28', 30''$ ea ante seculum seu A. 1650 fuerit $23^{\circ}, 29', 18''$ necesse est, at A. 1550, $23^{\circ}, 30', 6''$; tempore autem Ptolemæi seu A. 150, obliquitas eclipticæ fuit $23^{\circ}, 41, 18''$.

Verum si veteres observationes examinemus, nullum plane dubium relinquitur, quin quo magis regrediamur, obliquitas eclipticæ major fuerit, quam hodie unde de novo quæstio maximi momenti in Astronomia deciditur, & quod adhuc in summa dubitatione erat constitutum, ad insignem lucem revocatur; quo ipso veritas Theoriæ hic expositæ ad summum certitudinis gradum evenitur.

F I N I S.



de la Vierge sculp.

PRINCIPES HYDROSTATIQUES ET MÉCANIQUES,

Sur la question proposée pour la seconde fois
par l'Académie Royale des Sciences :

*Quelle est la meilleure maniere de diminuer le Roulis
& le Tangage d'un Navire, sans qu'il perde sensi-
blement par cette diminuiion aucune des bonnes
qualités que sa construction doit lui donner.*

Piece qui a remporté le prix de l'Académie Royale
des Sciences en 1757.

*Par M. DANIEL BERNOULLI, Associé Etranger de
l'Académie Royale des Sciences, Membre des Académies
de Berlin, de Petersbourg, de Bologne, &c.*

Qui dubiis ausus committere flatibus alnum
Quas natura negat, præbuit arte vias.



M É M O I R E

Sur la maniere de diminuer le Roulis & le Tangage d'un navire, sans qu'il perde sensiblement, par cette diminution, aucune des bonnes qualités que sa construction doit lui donner.

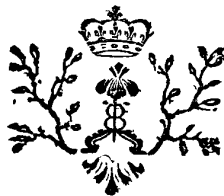
§. I. **Q**UOIQUE l'Académie Royale des Sciences ait adjugé le prix de l'année 1755 à M. Chauchot, très-savant & très-habile Constructeur de Vaisseaux, elle n'a pas laissé de proposer une seconde fois la même question pour le Prix de 1757. Ce sujet étoit, *La maniere de diminuer le plus qu'il est possible le Roulis & le Tangage d'un navire, sans qu'il perde sensiblement, par cette diminution, aucune des bonnes qualités que sa construction doit lui donner.*

L'Académie donne en même tems à connoître la raison qui l'a engagée à ce nouveau procédé: Elle a voulu

A ij

couronner l'excellence & la beauté de la piece de M. Chauchot ; mais en même tems, elle a eu égard à l'importance d'un sujet qu'elle juge *susceptible de recherches plus profondes*. Ces recherches plus profondes ne peuvent consister sans doute que dans un examen exact & précis de tout ce qu'une bonne Méchanique & Hydrostatique peuvent nous dicter sur ce sujet.

§. II. De toutes les recherches qu'on peut faire sur notre question, la plus essentielle est celle qui concerne la stabilité des navires. C'est aussi ce qui a engagé M. Bouguer, cet illustre Géometre, & l'homme du monde le plus entendu dans tout ce qui regarde la navigation & la construction des vaisseaux, à traiter cette question avec une scrupuleuse attention & toute la sagacité possible, dans son *Traité du Navire, de sa construction & de ses mouvemens*. M. Chauchot, à son exemple, n'a pas manqué de citer là-dessus quelques formules, & d'y ajoûter quelques réflexions, mais sans cette précision & ce détail que l'importance de la question exige. Je ne saurois donc me dispenser de reprendre tout de nouveau cette matiere, mais toujours dans la vue d'appliquer mes recherches à notre sujet principal ; & comme depuis très-long-tems j'ai tâché de me la rendre familiere, j'ose me flatter de n'en rien dire dans ce Mémoire de superflu ou d'étranger à la question de l'Académie.



CHAPITRE PREMIER.

Sur la stabilité des corps flottans.

§. III. **T**OUT corps flottant dans des eaux calmes, affectera une certaine position déterminée ; il n'y a que les corps sphériques, dont le centre de gravité se trouve placé au centre même des corps, qui soient absolument indifférens à toute position. La moindre force peut faire quitter à ces corps leur première position, & ils ne la reprendront point, quoique la force cesse d'agir. Dans les corps cylindriques ou sphéroïdiques, qui auroient leur centre de gravité placé dans l'axe, il n'y auroit que l'axe même qui prendroit toujours une certaine position déterminée ; mais rien ne détermineroit leur position autour de leur axe. Tous les autres corps flottans prennent une certaine position déterminée en tous sens. Il est vrai que la moindre force leur fait encore quitter cette position ; mais la force cessant d'agir, les corps reprennent toujours leur position d'équilibre. C'est cet effort de se rapprocher de sa position d'équilibre qui forme la stabilité des corps flottans, comparable en tout à celle d'un corps arrondi posé sur un plan horizontal, qui auroit le centre de gravité au-dessous du centre de la courbure pour le point d'attouchement & pour le plan vertical, dans lequel on rouleroit le corps. Ordinairement la force requise pour éloigner les corps plongés, de leur position naturelle, est d'autant plus grande que les corps s'en éloignent davantage ; cependant cette augmentation de force ne va que jusqu'à un certain degré. Cette force dépend encore de plusieurs autres cir-

constances, ce qui fait que les corps plongés ont plus ou moins de stabilité, quoique rapportée au même plan & à une inclinaison égale. Je me propose donc, avant toutes choses, d'examiner les circonstances qui déterminent la stabilité des corps plongés; & comme les navires sont fort sujets à s'éloigner extrêmement de leur position droite, je pousserai à cet égard mes recherches plus loin qu'on ne fait ordinairement; je considérerai des inclinaisons finies quelconques. Il faut considérer d'abord deux points dans les corps plongés; l'un est le centre de gravité du corps, & l'autre, le centre de gravité de sa partie submergée, considérée comme homogène; on regardera ensuite la pesanteur de tout le corps comme concentrée dans le premier de ces deux points; de-là il résulte une force égale au poids du corps appliquée à son centre de gravité, agissant verticalement de haut en bas. Dans l'autre point on supposera une force égale qui agit verticalement de bas en haut; cette seconde force provient de la poussée de l'eau qui soutient le corps. Lorsque le corps plongé se trouve dans sa position naturelle, les deux dits centres de gravité se trouveront nécessairement dans une même ligne verticale; mais supposons le corps, par des forces purement horizontales, arrêté dans une autre position, il faudra alors, par les deux dits centres de gravité, tirer des verticales, & la distance entre ces verticales marquera le levier, sur l'extrémité duquel le poids du corps agit & fait effort pour remettre le corps dans sa position naturelle. Je passe légèrement sur ce principe comme clair par lui-même. Si on nomme donc P le poids du corps & r la distance entre les deux dites verticales, le produit $P r$ marquera le *momentum* de la force, qui tend à rapprocher le corps plongé de sa position naturelle, & qui fera son effet aussitôt que les forces horizontales étrangères cesseront d'agir. Ainsi notre question se trouve réduite à celle de déterminer la quantité r pour chaque posi-

tion du corps, dont le volume submergé est supposé constamment égal. Je remarquerai cependant ici, que cette supposition ne trouve plus lieu aussitôt que le corps est abandonné à lui-même & qu'il commence à balancer, & que ce corps tirera alternativement plus & moins d'eau.

§. IV. Commençons par une simple tranche uniformément épaisse, plongée verticalement dans l'eau, & perpendiculaire à l'axe de rotation. Supposons la tranche d'une figure quelconque, telle que ace , qui peut représenter la plus grande section verticale d'un navire perpendiculaire à sa longueur. Supposons aussi que dans la position naturelle de la tranche la ligne ae soit horizontale, & que de cette position naturelle la tranche soit parvenue dans la position oblique ace : soit alors bd la ligne d'eau, & bcd la partie submergée. De cette manière l'angle entre les prolongées ea & db sera l'angle de rotation, que j'appellerai σ , & que je mesurerai par un arc de cercle qui a l'unité pour rayon. Il est question de trouver une équation entre la différentielle $d\sigma$ & l'incrément de force correspondant. Soit donc pour la position infiniment proche de la précédente la ligne d'eau mn , & comme la partie submergée est supposée constamment égale, il faut que le triangle élémentaire bxm soit égal au triangle opposé dxn , ce qui fait $bx = dx$; le petit angle bxm ou dxn sera exprimé par $d\sigma$. Soit le centre de gravité de la tranche ace au point s , les centres de gravité de la partie submergée homogène pour les lignes d'eau bd & mn aux points f & g . Si après cela on tire des points s & f , les lignes sr & fo perpendiculaires à la ligne d'eau bd , l'interceptée ro sera, en vertu du §. III, la longueur du levier sur lequel le poids de la tranche fait effort pour rapprocher cette tranche de sa position naturelle relativement à la ligne d'eau bd ; & si pareillement on tire des points s & g , les lignes st & gy perpendi-

FIG. I.

culaires à la ligne d'eau mn , l'interceptée ty fera dans le même sens le levier relativement à la ligne d'eau mn ; ainsi la différence entre ty & ro , marquera l'incrément du levier pendant que le poids appliqué à ces leviers reste constamment le même. Il s'agit donc de déterminer la différentielle $ty - ro$: or tirant encore la ligne fo perpendiculaire à bd , on aura $ty - ro = yq - op + ut$; & comme la petite ligne gf est nécessairement parallèle au niveau d'eau mn , on aura $yq = gf$, & par conséquent $ty - ro = gf - op + ut$: nous allons maintenant déterminer analytiquement ces trois éléments. Soit $bd = q$, la surface $bcd = M$, on trouvera

par les premiers principes de la Statique $gf = \frac{q^3 d\sigma}{12 M}$.

Considérant ensuite l'égalité des angles bxm , ofp & ust , & dénotant la verticale fo par y , la verticale sr par γ , on aura $op = y d\sigma$ & $ut = \gamma d\sigma$, & enfin la quantité cherchée $gf - op + ut = \left(\frac{q^3}{12 M} - y + \gamma \right) d\sigma$.

Si on indique par s la hauteur verticale du centre de gravité de la tranche par-dessus le centre de gravité de la partie submergée homogène, ladite quantité devient $\left(\frac{q^3}{12 M} - s \right) d\sigma$. Voilà pour chaque rota-

tion élémentaire $d\sigma$ l'accroissement du levier; & si on multiplie cette quantité par le poids de la tranche, on aura l'accroissement du *momentum* de la force. Soit donc l'épaisseur de la tranche $= \alpha$ & la quantité $M\alpha$ exprimera la quantité d'eau déplacée, au poids de laquelle le poids de la tranche est égal. Ainsi nous exprimerons ce poids par $M\alpha$, & de cette manière nous aurons le dit accroissement du *momentum* de la force $= \left(\frac{1}{12} q^3 - Ms \right) \alpha d\sigma$, & le *momentum* total sera exprimé par l'intégrale de ladite quantité ou par $\int \left(\frac{1}{12} q^3 - Ms \right) \alpha d\sigma$.

§. V. La

§. V. La solution que nous venons de donner de notre problème ; s'étend à tous les corps prismatiques, l'épaisseur de la tranche indiquée par α pouvant être quelconque ; mais s'il étoit question d'autres corps, il faudroit prendre des abscisses x dans une ligne perpendiculaire au plan ace , ensuite substituer dx pour α , & faire une seconde intégration, puisqu'il est clair que le *momentum* total sera exprimé par $\int dx \int (\frac{1}{12} q^3 - Ms) d\sigma$. Cette dernière expression est à la vérité générale & comprend absolument tout ce qu'on peut désirer sur cette matière ; mais comme il n'y a aucune loi de continuité, qui puisse exprimer la valeur de s pour chaque tranche d'un navire, verticale & parallèle à la tranche principale, la formule devient tout-à-fait inutile pour cet usage, & il faudra avoir recours à d'autres expédiens ; mais avant que d'entrer dans ces discussions, nous examinerons d'abord les corps prismatiques, & il est indifférent que toutes les tranches de ces corps soient uniformément chargées de matière ou non, pourvu que ces tranches demeurent dans des plans verticaux.

§. VI Pour trouver la valeur de $\int (\frac{1}{12} q^3 - Ms) \alpha d\sigma$, il faut connoître pour chaque angle σ les quantités q & s , & il seroit extrêmement difficile de déterminer une relation entre ces quantités, si on ne vouloit demeurer dans des suppositions bien simples touchant les configurations des sections ace .

Je supposerai premièrement la figure ace former un grand segment de cercle : c'est la supposition la plus simple, & en même tems celle qui approche le plus de la section principale d'un navire. Dans ce cas la quantité q devient constante ; mais pour trouver la quantité s , considérons la tranche dans sa position naturelle, & supposons alors la hauteur du centre de la figure par dessus le centre de gravité $= f$, & puis la hauteur de ce dernier centre par dessus le centre de gravité la partie submergée $= g$: si après cela la tranche a pris

Prix de 1757.

B

une autre situation quelconque, on voit facilement qu'on aura toujours la hauteur verticale du centre par-dessus le centre de gravité $= f \cos. \sigma$, pendant que la hauteur du centre par-dessus le centre de gravité de la partie submergée est constamment $f + g$; d'où l'on tire $s = f + g - f \cos. \sigma$; ainsi nous aurons $f(\frac{1}{12} q^3 - Ms)$
 $\alpha d\sigma = f(\frac{1}{12} q^3 - Mf - Mg + Mf \cos. \sigma) \alpha d\sigma =$
 $(\frac{1}{12} q^3 - Mf - Mg) \alpha \sigma + Mf \alpha \sin. \sigma$; mais la nature du cercle est telle, que la quantité $\frac{1}{12} q^3 - Mf - Mg$ est toujours $= 0$; donc toute la quantité qui exprime le *momentum* de la force devient simplement $= Mf \alpha \sin. \sigma$. Cette formule nous montre que ladite force est proportionnelle au sinus de l'angle d'inclinaison. Elle augmente donc continuellement jusqu'à une inclinaison de 90 degrés; mais les augmentations deviennent continuellement plus petites. Cette remarque mérite quelque attention, parce que les roulis d'un navire ne sauroient manquer d'être à-peu-près pareils à ceux qu'auroient les corps que nous considérons ici. Or les vaisseaux sont souvent fort inclinés par un vent de côté permanent, & alors c'est cette position, quoi qu'oblique, qui doit être regardée comme naturelle; en ce sens on peut dire que la stabilité devient d'autant plus petite, que la position naturelle est plus oblique. Il me semble cependant qu'il faudroit tâcher de donner d'autant plus de stabilité aux navires, qu'ils sont plus inclinés par quelque cause uniforme, parce qu'alors un nouveau degré d'inclinaison peut être dangereux. Il suit aussi de-là que les balancemens d'un navire considérablement incliné dans sa position moyenne, seront plus lents que ceux d'un navire dont la position moyenne est droite: ces derniers balancemens différeront encore entre eux en ce qu'ils seront d'autant plus lents qu'ils seront plus grands. Notre expression marque aussi que la stabilité de ces corps est proportionnelle à la quantité f , c'est-à-dire, à la plus grande hauteur du centre par-dessus le centre de gravité, sans que la hauteur du centre de

gravité de la partie submergée y entre pour rien pour ces corps figurés en segmens de cylindres. Enfin, la stabilité est encore proportionnelle à la quantité d'eau déplacée par le corps : le corps aura donc d'autant plus de stabilité, qu'il tirera plus d'eau, pourvu que son centre de gravité ne change pas. En considérant donc la figure *ace* comme un grand segment de cercle creux, s'il est question de quelle maniere il faut le charger de matiere pour lui donner la plus grande stabilité, je répons qu'il faut tâcher de faire la quantité *Mf* la plus grande qu'il est possible. Si donc par exemple la hauteur du centre par dessus le centre de gravité étoit de cinq piés, toute la charge qu'on ajoûtera au-dessus de ces cinq piés diminuera la stabilité, & l'augmentera si c'est au-dessous. De-là on peut conclurre qu'en pompant les eaux d'un navire, on diminuera le plus souvent sa stabilité. Mais d'un autre côté le mouvement des eaux qui coulent du même côté que le navire s'incline, diminue pareillement la stabilité.

§. VII. La matiere qui nous occupe est si essentielle à notre sujet principal, qu'elle mérite toute notre attention ; examinons donc encore l'effet de quelques autres figures. Voici une observation fort importante : Soit *abcd ef* (Fig. 2) la section du corps prismatique plongée dans l'eau jusqu'en *be* ; supposons que les bords *ac* & *fd* soient des arcs d'un même cercle, & que jamais les inclinaisons ne soient assez grandes pour que l'une des extrêmités *c* ou *d* sorte hors de l'eau : je dis que l'on pourra facilement déterminer la stabilité, quelle que soit la figure de la base *cd*, en joignant les deux bords circulaires par l'arc intermédiaire *cgd*, de maniere que tout l'arc *acgdf* soit un arc circulaire. Comme l'eau n'exerce aucun effort dans l'eau, il est clair que pourvu que le plan *cgdc* soit d'eau, le plan proposé *acdf* aura la même stabilité qu'auroit tout le plan *acgdf*, si la partie supérieure *acdf* restant chargée comme elle

B ij

l'est, la partie inférieure cgd étoit toute d'eau. Soit donc le centre commun des arcs abc , cgd & daf au point o , le centre de gravité de tout le plan $acgdf$, chargé comme nous l'avons dit, au point m ; ces deux points o & m sont dans une même ligne verticale pour la position naturelle; qu'on suppose $om = \varphi$ & l'espace $b c g d e = \mu$; on aura, en vertu du §. VI, la stabilité pour la figure plongée $a c d f$ égale à la quantité $\mu \varphi \alpha \sin. \sigma$.

Cette formule nous fait voir que pour une même quantité submergée, la stabilité est ici beaucoup plus grande qu'elle n'est dans les hypothèses du précédent article, le rapport des deux stabilités étant celui de $\mu \varphi$ à Mf ; or puisque M n'est qu'une partie de μ , de même que f de φ , la quantité Mf doit être beaucoup plus petite que la quantité $\mu \varphi$, lorsque les arcs bc ou cd sont petits, & par conséquent la largeur bc assez grande pour que l'espace $b c d e$ soit $= M$. La quantité $\mu \varphi$ croit en raison des cubes de be , ou en raison réciproque des cubes de bc , ou du tirant d'eau. Ainsi de deux navires qui ont la solidité de la carene égale, celui qui aura le moindre creux aura la plus grande stabilité. Je ne m'arrêterai pas à tirer de notre formule tous les corollaires qu'elle offre; remarquons seulement que la force requise pour incliner ces corps prismatiques, dont la section est représentée par $a c d f$, en supposant cd droite ou courbe: que dis-je, cette force est encore proportionnelle au sinus d'inclinaison ou à $\sin. \sigma$.

De tout ce que nous venons de dire, il s'en suit que le creux d'un navire ne sauroit augmenter ou diminuer fort sensiblement sa stabilité. Il me paroît important d'examiner l'effet que le plus ou moins de creux doit faire dans un navire; voici cet effet:

Supposons la base cd s'éloigner de la ligne d'eau be , ce qui augmente le creux: Pour savoir si cette augmentation du creux augmente ou diminue la stabilité, il

n'y a qu'à examiner si le surcroît du creux survenu est rempli d'une matiere plus ou moins pesante que l'eau : dans le premier cas, la stabilité est augmentée ; & dans l'autre, diminuée. Mais un autre effet plus sensible consistera dans la retardation ou l'accélération des balancemens : plus le tirant d'eau est grand, plus les balancemens sont retardés ; & dans les balancemens, il ne faut pas seulement avoir égard aux excursions, on doit encore considérer la durée de chaque balancement. Il faut également tâcher de diminuer & de retarder les balancemens des navires lorsque la chose est possible.

§. VIII. La maniere singuliere dont je me suis servi dans le précédent article pour déterminer la stabilité dans le cas que les deux bords ac & fd sont des arcs d'un même cercle, quelle que soit au reste la figure du fonds cd , & l'expression $\mu \varphi \alpha \sin. \sigma$. m'engagent à faire ici encore une remarque qui marquera en même tems la justesse de nos méthodes & répandra quelque nouveau jour sur nos formules. Voici cette remarque.

Soit la hauteur bc ou ed de la partie submergée $bcdeb$ très-petite ; alors le centre de gravité de tout le systême que nous avons supposé au point m , sera le même que le centre de gravité du segment homogene $bcgde$; en prenant donc le point m en ce sens, la Géométrie & la Méchanique nous apprennent que la quantité $\mu \varphi$ (c'est-à-dire l'espace $bcgde$ multiplié par la distance du point m au centre o) est toujours égale à $\frac{1}{12} cub. be$. Cette propriété convient admirablement bien avec la formule générale marquée à la fin du §. IV $\int (\frac{1}{12} q^3 - Ms) \alpha d\sigma$, puisque dans ce présent cas q est constant & $s = 0$, & que cette intégrale devient $= \frac{1}{12} q^3 \alpha \sigma$; mais à cause de la petitesse de bc , les inclinaisons doivent toujours être très-petites ; on peut donc enfermer $\sigma = \sin. \sigma$. Ainsi $\frac{1}{12} q^3 \alpha \sigma = \mu \varphi \alpha \sin. \sigma$.

§. IX. Après avoir déterminé généralement la stabilité, pourvu que les bords ac & fd soient circulaires,

14 · RECHERCHES SUR LE ROULIS

je mettrai encore ici le calcul en supposant les bords ac & fd droits & verticaux. La différence des résultats ne fauroit manquer de répandre quelques nouvelles lumieres sur cette matiere ; mais quoique nous ayons donné à la fin du §. IV la formule générale pour déterminer la stabilité , il faut pourtant avouer que chaque nouvelle figure demande un nouveau calcul ; la méthode cependant est toujours la même ; je ne ferai que mettre ici le résultat pour le nouvel exemple.

Soit donc $ABCD$ (Fig. 3) la section verticale du prisme flottant ; que dans la position naturelle du parallelepipedé, AB & DC soient verticales, BC horizontales & GH la ligne d'eau ; soit ensuite $GH = 2a$, GB ou $HC = c$, la hauteur du centre de gravité du navire par-dessus le centre de gravité de la partie submergée $= d$. Qu'on suppose à présent la section $ABCD$ inclinée de maniere que que gh soit la ligne d'eau ; l'angle GLg fera l'angle d'inclinaison σ ; mais dans ce cas il vaut mieux de déterminer l'obliquité de la position par Gg , & nous supposérons $Gg = x$. Sur ces dénominations, on trouvera le *momentum* =

$$\left(\frac{aa}{3c} - d + \frac{xx}{2c} \right) \times \frac{x}{\sqrt{aa+xx}} \times M \alpha.$$

Afin d'approcher la formule de celles des §§. VI & VII,

nous remarquerons que $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}$ est $= \sin. \sigma$. En substituant cette valeur, on pourra donner à la force de stabilité, cette expression $M \times \left(\frac{aa}{3c} - d + \frac{xx}{2c} \right) \alpha \sin. \sigma$.

§. X. Comme cette formule n'a plus rien qui puisse demander quelque explication, je ne m'arrêterai pas à marquer ce qu'il convient de faire pour rendre ces parallelepipedes flottans plus stables. Je ne m'attacherai qu'à une seule circonstance, de laquelle j'ai fait mention au milieu du §. VI ; c'est qu'ici la stabilité n'est

plus proportionnelle au sinus de l'inclinaison, comme lorsque les bords sont des arcs circulaires d'un même cercle; elle augmente en plus grande raison que ledit sinus. Plus le corps est incliné ici, plus il résiste pour être incliné davantage; les augmentations de force pour produire toujours un nouveau degré d'inclinaison, croissent ici en beaucoup plus grande raison que dans la précédente hypothèse. On obtiendra facilement ici que le corps ne s'incline jamais au-delà d'un certain degré, bien loin de courir risque de renverser; & cette seule qualité rend l'hypothèse du parallélepède infiniment recommandable. Si on faisoit $d = \frac{a}{3c}$, on auroit le point que M. Bouguer, mon illustre guide, appelle *métacentre*; si $a = 25$ & $c = 10$, la hauteur du métacentre devient $= 20\frac{1}{2}$ comme M. Bouguer le détermine pour l'arche de Noë. Mais qu'arriveroit-il alors à l'arche renverseroit-elle? Voilà ce que l'on pourroit croire quand on ne calcule la stabilité que pour des inclinaisons infiniment petites; mais nous voyons tout le contraire par notre méthode. La stabilité seroit exprimée par $M^{\frac{x}{2c}} a \sin. \sigma$. Elle seroit nulle en faisant $x = 0$ & $\sigma = 0$; mais elle commence à devenir réelle avec la moindre inclinaison.

Je mettrai ici pour les deux hypothèses, sçavoir, pour celle des bords circulaires & des bords droits & verticaux, les stabilités pour des inclinaisons égales, en supposant de part & d'autre la même quantité M , comme aussi la même stabilité initiale; c'est-à-dire, en faisant $\mu = M$ & $\varphi = \frac{a}{3c} - d$. De cette manière, les stabilités pour les deux hypothèses seront en raison de $(\frac{a}{3c} - d) \sin. \sigma$, & $(\frac{a}{3c} - d + \frac{x}{2c}) \sin. \sigma$. Pour ne pas nous éloigner de la nature, nous ferons $c = a$, & $d = \frac{1}{4} a$; & comme nous voulons prendre a pour le sinus total, nous

ferons $a = 1000$ & $d = 200$; un tel exemple donnera les stabilités ou les forces requises pour produire de certaines inclinaisons en raison de $\frac{250}{3} \sin. \sigma$ à $(\frac{250}{3} + \frac{xv}{1000}) \sin. \sigma$, en entendant par x la tangente de l'inclinaison pour le sinus total 1000. Voici à présent une petite table de 5 en 5 degrés jusqu'à l'inclinaison de 45 degrés. La première colonne marque les inclinaisons, la seconde les forces pour les bords circulaires, & la troisième pour les bords droits & verticaux.

| INCLINAISONS. | Forces pour les bords circulaires. | Forces pour les bords droits & verticaux. |
|---------------|------------------------------------|---|
| 0 degrés. | 0, 00 | 0, 00 |
| 1 | 1, 45 | 1, 45 |
| 2 | 2, 90 | 2, 92 |
| 3 | 4, 35 | 4, 42 |
| 4 | 5, 81 | 5, 98 |
| 5 | 7, 26 | 7, 59 |
| 10 | 14, 47 | 17, 17 |
| 15 | 21, 57 | 30, 86 |
| 20 | 28, 50 | 51, 15 |
| 25 | 35, 22 | 81, 17 |
| 30 | 41, 33 | 124, 66 |
| 35 | 47, 80 | 188, 40 |
| 40 | 53, 56 | 274, 70 |
| 45 | 58, 93 | 412, 48 |

Nous voyons par cette Table combien il y a à gagner pour la stabilité en approchant la coupe principale verticale & perpendiculaire à la longueur, de la figure rectangulaire; mais surtout près de la surface d'eau: car les parties qui restent toujours submergées, ne sauroient changer la stabilité qu'en tant qu'elles changent la hauteur

teur du centre de gravité, par-dessus le centre de gravité de la partie submergée, ce qui le plus souvent n'est pas de grande importance.

§. XI. Venons à présent aux corps plongés, & ne nous arrêtons plus à une seule section de ces corps. Lorsque toutes les sections parallèles de ces corps sont les mêmes & égales en tous sens, la solution pour ces corps prismatiques, ou cylindriques, ne demande rien de nouveau; il n'y a qu'à entendre par α la longueur de ces corps, & nos formules serviront encore pour ces corps; il n'est pas même nécessaire que le centre de gravité de chaque coupe soit pareillement placé, ni que le poids soit égal pour toutes les tranches également épaisses; car le poids entier du corps pourra toujours être considéré comme concentré dans une seule & même coupe, & le centre de gravité du corps comme placé dans la même coupe à une pareille hauteur. Il est vrai que les navires diffèrent considérablement de ces corps; cependant on voit déjà que la principale coupe en largeur d'un navire reglera presque entièrement la stabilité d'un bord à l'autre. Cette stabilité pourra faire comme les deux tiers ou les trois quarts de la stabilité qu'auroit le corps cylindrique de la même longueur: la section principale en longueur du navire reglera pareillement sa stabilité dans le sens de la proue à la poupe. Je ne laisserai pas d'examiner cette matière avec plus de précision dans le dessein de chercher toutes les circonstances qui peuvent contribuer à la stabilité d'un navire, tant à l'égard des roulis que des tangages. Mais pour ne nous point engager dans des difficultés inutiles, je ne considérerai que des corps semblables en quelque façon aux navires; & dans ces corps je ne ferai attention qu'aux inclinaisons qui se font faites, soit en largeur, soit en longueur, sans entrer dans les recherches sur les inclinaisons intermédiaires, qui ne font qu'un mouvement composé des deux autres mouvemens.

Prix de 1757.

C

§. XII. Ceux qui auront lu avec quelque attention nos remarques sur cette matière, verront d'abord que la stabilité de tous les corps flottans dépend uniquement de deux choses : la première est la section horizontale du corps faite au niveau des eaux, & la seconde est la hauteur du centre de gravité du corps par-dessus le centre de gravité de la partie submergée, considérée comme homogène, laquelle hauteur doit être multipliée par tout le poids du corps plongé, ou par tout le poids de l'eau déplacée. Examinons chacun de ces deux points à part.

Nous avons vu, au §. V, que la stabilité des corps est $\neq \int dx \int (\frac{1}{12} q^3 - Ms) d\sigma = \int dx \int \frac{1}{12} q^3 d\sigma - \int dx \int Ms d\sigma$. Quant au premier membre, on remarquera qu'il peut arriver que les mêmes coupes pourront tirer dans les différentes inclinaisons tantôt plus, tantôt moins d'eau, & en ce cas la quantité $\int dx \int \frac{1}{12} q^3 d\sigma$ ne seroit plus exactement vraie, puisqu'elle est fondée sur ce que chaque tranche déplace continuellement la même quantité d'eau. Il peut cependant arriver qu'un navire différemment incliné tire plus ou moins d'eau par le milieu, & qu'il arrive le contraire vers les extrémités. En ce cas, il faudroit une autre solution de notre problème; il faudroit considérer la figure de la section du corps au niveau de l'eau. Dans cette figure on tireroit une ligne parallèle à l'axe de la rotation élémentaire. Cette ligne doit partager ladite section de manière que les deux coins solides formés par la rotation soient égaux. Voici, après cela, comme il faudroit procéder. Soit la surface plane du coin d'un côté = S , & de l'autre = S' , la distance du centre de gravité de cette surface jusqu'à la ligne qui partage la section du corps faite au niveau de l'eau, d'un côté = q , & de l'autre = q' ; l'angle élémentaire de rotation = $d\sigma$. On fait que le solide du coin sera d'un côté = $S q d\sigma$ & de l'autre = $S' q' d\sigma$, & ces deux quantités doivent être égales. Soit après

cela la distance du centre de gravité du coin à ladite ligne qui partage la section entiere $= p$, d'un côté, & de l'autre $= p'$; je dis qu'on aura la stabilité du corps, entant qu'elle est formée par la section du corps avec le niveau de l'eau $= \int S p q d\sigma + \int S' p' q' d\sigma = \int (p + p') S q d\sigma$. Dans cette expression, on suppose toutes les quantités p, p', S & q déterminées par l'inclinaison σ , & elle a cet avantage qu'elle ne demande qu'une seule intégration. On voit assez que la quantité $\int S p q d\sigma$ marque le *momentum* du coin d'eau élémentaire qui survient d'un côté, & $\int S' p' q' d\sigma$ celui du coin opposé & retranché du contrepoids. Quant à l'autre membre de la formule, qui exprime la stabilité d'un corps plongé quelconque, on peut, au lieu de considérer le double centre de gravité de chaque coupe, examiner tout d'un coup la place du centre de gravité de tout le corps, comme aussi celle du centre de gravité de la partie submergée homogène. Si on nomme ensuite encore s la hauteur verticale du premier par-dessus le second, & P tout le poids du corps plongé, ou de l'eau déplacée, on aura $\int P s d\sigma$ pour l'expression de l'autre membre qu'il faut retrancher du premier membre, ou l'y ajouter, suivant que le centre de gravité du corps est plus haut ou plus bas que le centre de gravité de la partie submergée.

La relation entre les deux membres de la formule qui exprime la stabilité des corps est telle, que dans les corps qui tirent peu d'eau & qui forment une grande section au niveau de l'eau, le premier membre l'emporte ordinairement beaucoup sur l'autre; & que c'est tout le contraire lorsque cette section est très-petite.

§. XIII. Toutes les réflexions que je viens de faire seroient trop abstraites, si elles n'étoient éclaircies par quelques exemples applicables à notre sujet: il convient donc de descendre à quelques exemples. Celui qui répand le plus de jour sur cette matière, est de supposer

C ij

l'inclinaison assez petite pour que les quantités finies n'en reçoivent aucun changement considérable.

Dans cette restriction nous pourrons nous servir de la formule du §. V, $\int dx \int (\frac{1}{12} q^3 - Ms) d\sigma$, qui devient $= \int \frac{1}{12} q^3 \sigma dx - \int Ms \sigma dx$. Ici l'élément dx marque l'épaisseur de chaque tranche, q la largeur variable, M la surface plane de chaque tranche variable, & s la hauteur verticale du centre de gravité de la tranche par dessus le centre de gravité de sa partie submergée, & enfin σ la petite inclinaison commune à toutes les tranches. Quant au dernier membre, on fait par la théorie sur le centre de gravité, qu'il est égal à $P dx$, en entendant par P , le poids de tout le corps, que nous mesurons par la quantité d'eau déplacée, & par d la hauteur du centre de gravité de tout le corps par-dessus le centre de gravité de la partie submergée; mais le premier membre $\int \frac{1}{12} q^3 \sigma dx$ ou bien $\frac{\sigma}{12} \int q^3 dx$ dépend uniquement de la figure de la section horizontale du corps au niveau de l'eau. Si donc cette section étoit un parallélogramme rectangle, dont la longueur fût égale à b , on auroit simplement $\int \frac{1}{12} q^3 \sigma dx = \frac{1}{12} q^3 b \sigma$. Mais comme dans les vaisseaux ladite section approche beaucoup d'une ellipse, il est bon de faire le calcul de cette intégrale, en supposant la section une ellipse dont le petit axe soit $= a$, & le grand axe $= b$. Si on prend les abscisses x depuis le centre de l'ellipse sur le grand axe, on aura $q = \frac{2a}{b} \sqrt{(\frac{1}{4} bb - xx)}$, & $q^3 = \frac{8a^3}{b^3} (\frac{1}{4} bb - xx)^{\frac{3}{2}}$, & par conséquent $\frac{\sigma}{12} \int q^3 dx = \frac{\sigma}{12} \times \frac{8a^3}{b^3} \int (\frac{1}{4} bb - xx)^{\frac{3}{2}} dx$. Les règles connues du calcul intégral donnent cette quantité :

$$= \frac{a^3 \sigma}{6 b^3} [x (\frac{1}{4} bb - xx)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} bb \int dx (\frac{1}{4} bb - xx)^{\frac{1}{2}}]$$

En faisant $x = \frac{1}{2} b$, ladite quantité devient

$$= \frac{a^3 \sigma}{8 b^3} \int dx \sqrt{(\frac{1}{4} bb - xx)}$$

dont le facteur sommatoire exprime le quart de cercle qui a la ligne $\frac{1}{2}b$ pour rayon. Nous substituerons donc à ce facteur $\frac{11}{14} \cdot \frac{1}{4}bb$, ou bien $\frac{11}{56}bb$, & par-là nous aurons $\frac{11}{4 \cdot 8} a^3 b \sigma$, qui fait la quantité cherchée pour la demi-section elliptique; prenant donc le double, nous aurons la quantité entière $= \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 4} a^3 b \sigma$.

Comparons à présent cette quantité avec celle qui convient à la figure rectangulaire, savoir avec $\frac{1}{12} q^3 b \sigma$, ou (en donnant la même largeur aux deux figures) avec $\frac{1}{12} a^3 b \sigma$; le rapport sera comme $\frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 4}$ à $\frac{1}{12}$ ou comme 132 à 224, ou environ comme 3 à 5. Nous voyons par cet exemple, que la simple figure de la section du vaisseau faite par la surface de l'eau, peut contribuer considérablement à la stabilité, sans qu'on ait changé la longueur, la largeur ni la profondeur, ni même la solidité, ou le volume de la partie submergée.

Pour avoir une idée plus exacte de la stabilité entière d'un navire, dont la section à fleur d'eau est supposée elliptique, nous évaluerons aussi le second membre $P d \sigma$; P marque la solidité de la carene, elle est à-peu-près égale à la moitié (ou plus exactement à $\frac{11}{21}$, lorsque la carene est formée par la demi-révolution d'une ellipse sur son axe) du parallépipède circonscrit; si nous nommons donc c la profondeur de la carene, nous aurons sa solidité P à-peu-près $= \frac{1}{2} a b c$. Quant à la hauteur du centre de gravité du vaisseau par-dessus celui de la carene, que nous avons nommée d , il est difficile de la déterminer avec beaucoup de précision; le centre de gravité de la carene sera environ $\frac{1}{7} c$ au-dessous de la surface d'eau, ou un peu davantage; le centre de gravité de tout le navire sera peut-être de $\frac{1}{5}$ ou de $\frac{1}{6}$ de la profondeur c au-dessous de l'eau, suivant le lest, la charge, leur pesanteur spécifique, & leur arrangement, enfin je supposerai $d = \frac{1}{6} c$. Dans cette supposition nous aurons $P d \sigma = \frac{1}{12} a b c c \sigma$, & la stabilité entière du navire, en supposant sa section à fleur

d'eau elliptique, sera $= (\frac{11}{224} a^3 b - \frac{1}{12} a b c c) \sigma$.

Si la plus grande longueur de la carene est supposée de 140 piés, la plus grande largeur à fleur d'eau de 40 piés, & la profondeur de 18 piés, la stabilité du vaisseau pour les petites inclinaisons d'un bord à l'autre sera environ $= (440000 - 151200) \sigma$. Ainsi le premier membre est presque trois fois plus grand que le second, & de-là on voit que la stabilité dépend beaucoup plus de la section du vaisseau à fleur d'eau que de tout le reste. La stabilité entière sera donc en ce cas $= 288800 \sigma$. Dans les grandes inclinaisons moyennes les navires s'inclinent de côté d'environ 15 degrés; ce qui donne σ environ $= \frac{1}{4}$. Si on considère cette inclinaison assez petite pour induire peu d'erreur dans nos formules, la stabilité sera $= 72200$; c'est-à-dire que le *momentum* de la force pour tenir le vaisseau incliné de 15 degrés, sera égal au poids de 72200 piés cubes d'eau, agissant sur un levier d'un pié de longueur. Mais si nous supposons un levier égal à la demi-largeur du vaisseau, le poids agissant sur ce levier, sera celui de 3610 piés cubes d'eau, ou de 129 tonneaux, en prenant 28 piés cubes d'eau pour le poids d'un tonneau; ce qui fait environ la quatorzième partie de tout le poids du vaisseau. Si la section à fleur d'eau étoit supposée faire un rectangle, la stabilité absolue en deviendroit double; car nous avons vu que le premier membre de la formule, qui exprime la stabilité, en seroit augmenté en raison de 3 à 5, pendant que le second membre n'en est presque point changé; & ce second membre, faisant environ le tiers du premier, les stabilités pour la section elliptique & pour la section rectangulaire, seroient comme 3 — 1 à 5 — 1, ou comme 2 à 4.

§. XIV. Nous venons de donner, dans le précédent article, des mesures absolues pour les stabilités relatives aux roulis; considérons en deux mots celles qui regardent les tangages. Il n'y a, pour cet effet, qu'à conver-

tir les quantités a & b pour le premier membre des formules ; car le second membre restera le même pour le roulis & pour le tangage. Cette seule considération nous marque que le premier membre augmente en raison quarrée de la largeur du vaisseau à sa longueur, qui est ordinairement comme 2 à 7 ; de sorte que le premier membre augmente en raison de 4 à 49 : & comme le second membre, pour la section du vaisseau à fleur d'eau elliptique, n'est qu'environ le tiers du premier membre à l'égard du roulis, il n'en sera plus qu'environ la trente-septieme partie à l'égard des tangages. De-là nous voyons qu'on peut, pour les tangages, négliger absolument le second membre ; & que la stabilité du vaisseau pour les inclinaisons de la proue à la poupe, dépend presque uniquement de la section du vaisseau à fleur d'eau. Si donc cette section est une ellipse, la stabilité de la proue à la poupe sera simplement exprimée, pour les petites inclinaisons, par $\frac{1}{2} a b^3 \sigma$; & si la section étoit un rectangle, elle seroit exprimée par $\frac{1}{6} a b^3 \sigma$. La formule pour la section elliptique donne pour l'exemple du vaisseau rapporté dans le précédent article, en faisant $P = \frac{1}{2} a b c$, la stabilité telle que s'il y avoit attaché à la proue ou à la poupe un poids qui fût égal à $\frac{1}{36} P$. Il faudroit donc appliquer à la proue un poids qui fût environ la huitieme partie du poids de tout le vaisseau, pour ne l'incliner que de 5 degrés. Je trouve que le vent le plus impétueux ne pourra jamais faire la dixieme partie de cet effet, ni par conséquent incliner le vaisseau de la poupe à la proue au-delà d'un $\frac{1}{2}$ degré.

§. X V. J'ajoutérai encore quelques théorèmes sur les corps plongés qui seroient formés par la rotation d'une figure quelconque autour d'un axe horizontal. Toutes les sections perpendiculaires à l'axe de rotation, sont alors des arcs de cercle ; & si l'inclinaison d'un tel corps plongé se fait autour d'un axe parallele audit axe de

rotation, chaque arc de cercle demeurera constamment le même, quelle que soit l'inclinaison du corps. Voici maintenant une propriété remarquable sur notre sujet.

Si on multiplie un segment de cercle quelconque par la distance du centre de gravité du segment au centre du cercle, le produit sera toujours égal à la douzième partie du cube de la corde du segment. Si nous nommons donc q la corde du segment submergé, nous voyons que l'expression $\int \frac{1}{12} q^3 dx$ (voyez §. V), n'est autre chose pour ces corps que le volume constant de la partie submergée de tout le corps multiplié par la distance du centre de gravité du même volume à l'axe de rotation de la figure génératrice. Soit donc le poids de tout le corps, ou celui du volume d'eau déplacée $= P$, la distance du centre de gravité de la partie submergée homogène à l'axe de rotation de la figure génératrice $= f$, nous aurons $\int \frac{1}{12} q^3 dx = Pf$. Ces facteurs P & f demeurent constamment les mêmes pour toutes les inclinaisons du corps plongé; & le premier membre de la formule générale pour la stabilité des corps plongés, deviendra ici $Pf\sigma$, quelle que soit la figure génératrice.

Examinons maintenant le second membre de cette formule. Nous avons vu que ce second membre est toujours égal à $\int P s d\sigma$, en entendant par s la hauteur du centre de gravité de tout le corps par-dessus le centre de gravité de la partie submergée homogène; & il est clair que dans les corps formés par la rotation d'une figure autour d'un axe horizontal, la hauteur verticale s est $= f - g \cos. \sigma$, en entendant par g la distance du centre de gravité du corps à l'axe de rotation de la figure génératrice. Nous avons donc $\int P s d\sigma = \int P f d\sigma - \int P g d\sigma \cos. \sigma = Pf\sigma - P g \sin. \sigma$; & cette dernière expression fait le second membre de la formule générale sur la stabilité des corps plongés, qu'il faut retrancher du premier membre, qui est pour les corps en question toujours $= Pf\sigma$. Ainsi la formule générale

générale pour la stabilité des corps en question devient simplement $P g \sin. \sigma$.

§. XVI. Voilà une propriété bien remarquable sur la stabilité des corps formés par la rotation d'une figure quelconque autour d'un axe horizontal. Cette stabilité est la même que si le corps étoit suspendu en l'air par ledit axe horizontal, & qu'il fût incliné d'un angle σ ; car le poids P seroit le même; son action seroit concentrée au centre de gravité, & il agiroit sur un levier $g \sin. \sigma$; & enfin son *momentum* seroit aussi $P g \sin. \sigma$: Ici le centre de gravité de la partie submergée homogène n'entre plus en considération; toutes les inclinaisons, grandes ou petites, font les *momenta* des forces requises; pour tenir les corps inclinés, proportionnels aux sinus des inclinaisons. Si la partie submergée fait la moitié du corps formé par la révolution entière de la figure génératrice, l'axe de rotation sera à fleur d'eau. Ce cas ne s'éloigne pas beaucoup de l'exemple des navires; & comme le métacentre ne peut être que fort proche de la surface d'eau, étant pour ces corps dans l'axe de rotation, le centre de gravité du vaisseau tout chargé doit être placé plus bas que la surface d'eau, pour que le navire obtienne une stabilité tant soit peu considérable. Mais comme la hauteur des mâts, des voiles, l'accastillage, & tout ce qui est au-dessus de l'eau, ne permet pas de donner une profondeur considérable audit centre de gravité, on pourra augmenter la stabilité du navire en haussant l'axe de rotation; c'est-à-dire, en faisant ensorte que la carene fasse une plus petite portion que la moitié du solide formé par la révolution entière. La stabilité dans le sens de la longueur du navire n'est si grande, que parce que la carene ne forme que comme une très-petite portion du solide entier, en considérant la carene comme formée par la révolution d'un demi-cercle autour d'un axe fort éloigné horizontal & perpendiculaire à la quille. Une carene ainsi formée,

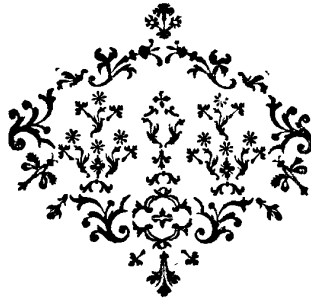
Prix de 1757.

D

auroit l'axe de rotation élevé par-dessus la surface de l'eau de 127 piés, en donnant 18 piés de profondeur à la carene, & 140 piés de longueur.

§. XVII. Voilà ce que j'avois de plus essentiel à dire sur la stabilité des corps plongés. La matiere est très-riche, & j'ai supprimé bien des choses pour n'être pas trop long; je n'ai fait que choisir ce que j'ai cru avoir le plus de rapport à notre sujet principal.

Pour mettre à profit la théorie que je viens d'établir, je vais examiner la relation qu'il y a entre les deux especes de stabilités, & les roulis & les tangages; après quoi j'exposerai tout ce qu'on peut faire pour augmenter l'une & l'autre stabilité.



C H A P I T R E II.

*Examen de ce que la stabilité des vaisseaux
peut contribuer pour diminuer leur roulis &
leur tangage.*

§. XVIII. **U**NE force quelconque, qui agit sur un vaisseau, si elle est entièrement uniforme & permanente, ne sauroit faire d'autre effet, que celui de plier le vaisseau jusqu'à un certain degré, & ce degré dépend uniquement de la stabilité du vaisseau : plus la stabilité est grande, moins le vaisseau sera incliné par la force qui agit sur lui. Pour la construction ordinaire des vaisseaux, les sinus d'inclinaison seront à-peu-près en raison réciproque des forces qui les produisent. A cet égard la stabilité renforcée est déjà d'une grande utilité; car il est bon de conserver la position droite du vaisseau, tant qu'il est possible. Un vaisseau qui, dans les routes obliques, plie sous ses voiles, pourra, par la force du vent, être quelquefois incliné jusqu'à quinze, & même, si on ne diminueoit alors l'étendue des voiles, jusqu'à 20 degrés. Un vaisseau, ainsi incliné, sera encore sujet aux mêmes balancemens, que dans sa position droite; & il est évident que la mâture sera beaucoup plus fatiguée, par ces balancemens, lorsque la position moyenne est fort oblique, qu'elle n'est lorsque cette position moyenne est droite. Car si ces balancemens étoient par exemple de vingt degrés de chaque côté, & si l'inclinaison moyenne étoit pareillement de vingt degrés, le vaisseau dans l'une des extrémités seroit incliné jusqu'à quarante degrés, & la mâture souffriroit beaucoup par le

D ij

pois des mâts & des voiles. D'ailleurs, le vaisseau feroit déjà dans un péril d'être renversé ; le moindre accident pourroit être funeste, d'autant plus que les forces qui tendent à relever le vaisseau, ne croissent à-peu-près qu'en raison des sinus des inclinaisons ; de sorte qu'un nouveau degré de force qui fait balancer le vaisseau, fait d'autant plus d'effet, que le vaisseau est déjà incliné. Tellé force qui feroit incliner le navire depuis sa position droite jusqu'au vingtième degré, pourra le faire incliner depuis vingt degrés jusqu'à quarante-trois degrés dix minutes ; & une petite force, qui dans le premier cas le feroit incliner d'un degré, ajoutera à un vaisseau déjà incliné de quarante degrés, une inclinaison d'un degré dix-neuf minutes.

Ces réflexions prouvent déjà qu'il ne sauroit y avoir que de l'avantage à augmenter la stabilité des vaisseaux, tant qu'il est possible de le faire sans nuire à ses autres qualités requises, puisque l'inclinaison moyenne, d'autant plus nuisible qu'elle est plus grande, en sera sûrement diminuée.

§. XIX. Examinons à présent les balancemens par eux-mêmes. Ils ne sauroient être produits que par des causes variables ; ces causes, quelles qu'elles soient, sont nécessairement périodiques ; elles augmenteront & diminueront alternativement. Un seul accès de ces forces motrices ne sauroit ébranler considérablement la masse énorme d'un vaisseau ; pour le faire rouler ; ce n'est qu'après un certain nombre de nouveaux accès répliqués coup sur coup, que le vaisseau roulera avec force. Je trouve que les roulis dépendent en partie de la force de chaque accès, & en partie de l'intervalle de tems entre deux accès consécutifs. Quant à la force, chacun voit, que plus elle est grande, plus elle doit faire d'effet ; mais il n'est pas également facile à déterminer comment les intervalles d'un accès à l'autre concourent pour former les roulis. C'est ici une question

qu'on n'a pas encore traitée, & que je vais tâcher de réduire aux loix de la mécanique.

§. XX. Les accès de force motrice sont, ou tout-à-fait irréguliers, ou uniformément périodiques. Cette dernière espece peut encore être sous-divisée par les durées de chaque accès : cette durée est ou plus petite, ou égale, ou plus grande que la durée d'un balancement naturel du vaisseau ; car tout vaisseau incliné, & puis entierement abandonné à lui-même, fait des allées & venues à-peu-près isochrones, que je nomme *balancements naturels*.

Lorsque les accès de force motrice sont irréguliers, ils agiteront le navire : mais ces agitations seront assez petites ; car ces forces accéléreront tantôt un balancement déjà imprimé au vaisseau, & tantôt le retarderont, en agissant dans un sens contraire à son balancement ; & quand même le hazard feroit que trois, quatre, ou cinq coups de suite conspirassent à augmenter les balancements du vaisseau, ceux-ci ne pourront pas encore devenir excessifs, à moins que la force de chaque accès ne soit excessivement grande. Dans tous les cas, la stabilité du vaisseau sera un vrai remede qu'on peut opposer à ces efforts : plus la stabilité sera grande, plus les balancements provenans de ces efforts seront petits. Cette réflexion nous conduit donc encore pour ces cas à la conclusion d'augmenter la stabilité des navires, tant que les autres circonstances le permettent.

§. XXI. Considérons à présent les accès de force motrice, lorsqu'ils sont réguliers & uniformément périodiques ; je ne doute pas qu'ils ne soient à-peu-près tels assez souvent ; car lorsque le vent n'est pas variable, qu'il est parvenu à agiter les eaux de la mer avec toute la force qu'il peut leur imprimer, & que la mer est libre & bien profonde jusqu'à une grande étendue, il est certain que les agitations des eaux ne sauroient manquer d'être régulières. Alors ces agitations consisteront à faire

des allées & venues conformes aux balancemens d'un pendule simple ; & il est question d'examiner l'effet que ces agitations des eaux , devenues régulières , pourront faire sur le navire.

Je prens ici d'abord pour principe , que dans tout systême de corps qui agissent les uns sur les autres , si ces corps font des mouvemens réciproques , réguliers & permanens , ils feront toujours des balancemens harmonieux & synchrones , qui commenceront & finiront tous dans les mêmes instans. C'est-là une vérité que j'ai reconnue avec une évidence entière , toutes les fois qu'il m'est arrivé d'examiner de pareils mouvemens réciproques composés ; & cela m'est arrivé très-souvent. Le systême que nous avons ici devant nous , sont le navire & les eaux qui l'environnent , car je suppose un vent fait & uniforme à tous égards. Or le navire , quelques balancemens qu'il fasse , ne sauroit changer les mouvemens réciproques des eaux agitées. Ceux-ci maîtriseront donc entièrement le navire , qui par conséquent fera dans ces cas ses balancemens harmonieusement avec ceux des eaux agitées ; de sorte que la durée de chaque balancement soit égale à celle de chaque accès moteur.

§. XXII. La propriété que nous venons d'indiquer sur la durée de chaque balancement nous fournit une manière de déterminer en quelque façon l'étendue de chaque balancement , & d'indiquer les circonstances dont cette étendue dépend , & dont elle dépendroit , quand même un navire balanceroit sans trouver aucune résistance. Nous comparerons les balancemens d'un navire avec ceux d'un pendule simple , & nous les supposerons isochrones les grands avec les petits : nous supposerons aussi que les accès de force motrice résultante de l'action des eaux , agissent sur le vaisseau indépendamment de ses inclinaisons ; ce qui sera d'autant plus vrai , que les balancemens sont petits.

Pour expliquer à présent mes idées sur cette matiere avec plus de clarté, je considererai un pendule simple, long d'un peu plus de douze piés, & qui batte à chaque coup deux secondes. Supposons une force qui oblige ce pendule à battre à chaque seconde, il faudra que la force accélératrice entiere devienne dans chaque point quatre fois plus grande; & comme la force de la pesanteur qui agit sur le corps du pendule reste la même, il faut que la force étrangere qui est survenue, & qui oblige le pendule de doubler ses battemens, soit trois fois plus grande que celle qui anime le pendule par sa pesanteur: il n'y a donc plus qu'à considérer l'intensité de ladite force étrangere. Supposons-la, par exemple, telle qu'elle soit, égale à la force de la pesanteur qui anime le pendule, lorsque celui-ci se trouve à douze degrés de distance avec la verticale qui passe par le point de suspension. Je dis que dans ce cas le pendule fera des excursions de quatre degrés de chaque côté, puisqu'alors la force étrangere est trois fois plus grande que la force de la pesanteur qui anime le pendule, & qu'elle demeure telle durant tout le balancement; car nous supposons la force étrangere être de la nature de celles qui produisent des mouvemens isochrones, & agir également sur le pendule incliné de 12 d. & de 4 d. Si le pendule faisoit toute autre excursion, ses balancemens ne pourroient jamais se faire harmoniquement avec les accès de la force qui l'agite. Dans ce cas les accès de la force qui agite le pendule, conspirent avec la force de la pesanteur qui anime le pendule; mais lorsque lesdits accès se suivent avec moins de rapidité que ne feroient les balancemens naturels du pendule, il arrive nécessairement le contraire, c'est-à-dire que la force qui agite le pendule, doit toujours agir d'une maniere opposée à la pesanteur du corps du pendule; c'est ce que je vais expliquer par un autre exemple.

Supposons que la force étrangere oblige notre pendule à faire chaque vibration en quatre secondes de tems. En ce cas, la force entiere qui anime le pendule, ne doit plus faire que le quart de la simple force de la pesanteur. Il faut donc que la force étrangere ôte les trois quarts à la force naturelle de la pesanteur du corps. De-là nous connoissons que le pendule doit faire des excursions de 16 d. de chaque côté ; car puisqu'à 12 d. d'inclinaison la force de la pesanteur est supposée égale à la force qui l'agite, il s'ensuit qu'à 16 d. d'inclinaison, la force de la pesanteur sera à la force étrangere, comme 4 à 3 ; & que par conséquent celle-ci fasse les trois quarts de la premiere. Ce n'est qu'avec ces excursions de 16 d. de chaque côté, que les balancemens du pendule peuvent devenir réguliers & prendre un état de permanence. Mais ici la force étrangere seroit toujours opposée à la force de la pesanteur ; c'est-à-dire, que le corps du pendule sera secondé par la force étrangere pendant tout le tems qu'il emploie à monter ; & qu'au contraire, cette force étrangere s'opposera au mouvement du corps pendant tout le tems qu'il emploie à descendre.

§. XXIII. Par les deux exemples que j'ai examinés dans le précédent article, on comprend aisément la solution générale sur la question de l'excursion du pendule animé en même tems par la pesanteur & par une force étrangere qui soit de la nature des forces qui produisent des balancemens isochrones. Soit donc à présent l'intensité de la force étrangere telle, que dans le moment qu'elle est la plus grande, elle soit égale à la force de la pesanteur du corps du pendule sous un angle s . Soit le tems d'un balancement naturel du pendule t , & que ce pendule soit obligé par la force étrangere à faire chaque vibration dans un tems $\frac{1}{n}t$, je dis que le pendule fera de chaque côté des excursions, dont l'angle avec la verticale sera $= \frac{s}{nn-1}$.

Il suit de cette formule, que plus les accès de la force

force étrangere se succedent rapidement, plus les excursions du pendule seront petites; mais lorsque les intervalles entre deux accès sont à-peu-près égaux à la durée d'un balancement naturel du pendule, ce pendule fera des excursions excessives. C'est ici une propriété à laquelle je souhaite qu'on fasse attention. Enfin, lorsque lesdits intervalles surpassent la durée d'un balancement naturel du pendule, il arrive que la force étrangere & la force qui résulte de la pesanteur des corps agissent d'un sens contraire, parce que l'angle de l'excursion réelle devient négatif; & alors l'excursion elle-même devient d'autant plus petite, que les accès de la force étrangere se succedent plus lentement.

Tout cela sera éclairci par l'expérience physique qui suit. Qu'on prenne par exemple un pendule simple à secondes, & qu'on le tienne suspendu entre deux doigts; qu'on fasse avec la main des mouvemens réciproques horizontaux, en imitant le plus qu'il est possible ceux d'un pendule d'une longueur quelconque; on verra que suivant la rapidité de la main, qu'on pourra supposer faire toujours les mêmes excursions, le pendule s'accommodera aux mêmes durées de vibrations de la main, & que les excursions du pendule pourront ou se faire du même côté que celles de la main, ou du côté opposé; mais on remarquera surtout, que lorsque chaque allée & venue de la main se fait précisément dans une seconde de tems, alors les plus petits mouvemens de la main feront faire au pendule des excursions excessives, qui même ne sont limitées que par la résistance de l'air & par l'imparfaite flexibilité du fil.

§. XXIV. Les propriétés remarquables que nous venons d'indiquer sur l'étendue des balancemens d'un pendule, peuvent toutes être appliquées aux roulis d'un navire, puisqu'il est clair qu'on peut substituer au corps du pendule tout autre corps soutenu d'une façon à pouvoir faire des balancemens. Les hypotheses que

Prix de 1757.

E

nous avons faites ne répondent pas à la nature de la chose avec une précision entière ; ce que je ne dissimulerai pas. Les roulis *naturels* d'un vaisseau ne sauroient être parfaitement isochrones entre eux : les accès de la force qui agite le navire auront aussi rarement des intervalles de tems parfaitement égaux ; cette force n'agira pas précisément avec cette loi que demande l'isochronisme , & elle n'agira pas tout-à-fait également sur le navire plus ou moins incliné dans les momens où ces inclinaisons sont grandes ; mais tout cela ne doit pas nous empêcher d'avoir de l'indulgence pour nos principes, puisqu'il est certain que les roulis auront toujours quelque penchant marqué pour cet état que notre théorie exige , pendant tout le tems que les agitations des eaux sont fort régulières & permanentes ; ce qui fait le cas dont nous parlons. J'appliquerai donc les balancemens du pendule , que j'ai expliqués & que j'ai pris pour exemple uniquement pour être intelligible , aux balancemens d'un navire.

§. XXV. Nous avons vu au §. XXIII , que l'étendue des balancemens de chaque côté est exprimée par $\frac{s}{n-1}$. Voyons d'abord quel sens il faut attacher à cette formule lorsqu'il est question des roulis d'un navire. Pour cet effet, il faut premièrement considérer la force qui agite le vaisseau dans le moment qu'elle est la plus grande ; j'appellerai cette force ϕ . Ensuite il faut examiner quelle inclinaison le navire prendroit si ladite force ϕ demeurait constamment la même , sans augmenter ni diminuer. L'angle de cette inclinaison est exprimé dans notre formule par s . On voit bien que cet angle s sera d'autant plus petit que la stabilité du navire est plus grande ; & que , pour les petits angles , l'un est réciproquement proportionnel à l'autre. Nous avons vu que dans les petites inclinaisons la formule qui exprime la stabilité des corps plongés , peut toujours être réduite

à $\pi \sigma$; ainsi la stabilité pour l'angle s fera πs , & de-là nous aurons $\varphi = \pi s$ ou $s = \frac{\varphi}{\pi}$. Substituons cette valeur dans la formule $\frac{s}{nn-1}$, & nous aurons $\frac{\varphi}{(nn-1)\pi}$. Soit après cela, comme au §. XXIII, le tems d'un *balancement naturel* du vaisseau = t , & le tems entre deux accès de force qui agitent le vaisseau = θ , nous aurons $\theta = \frac{1}{n}t$, & par conséquent $n = \frac{t}{\theta}$, ou $nn-1 = \frac{t^2-\theta^2}{\theta^2}$; & si nous substituons encore cette valeur dans notre formule $\frac{\varphi}{(nn-1)\pi}$, nous aurons enfin $\frac{\theta^2 \varphi}{(t^2-\theta^2)\pi}$.

§. XXVI. Voilà la formule qui exprimera toujours à-peu-près l'étendue des balancemens du navire permanens & causés par des efforts réguliers. Elle nous apprend donc que la quantité des roulis dépend de la force qui agite le navire, de la stabilité du navire, & du rapport qu'il y a entre les tems t & θ , c'est-à-dire, entre la durée d'un *balancement naturel* du navire, & la durée de chaque accès de la force qui agite le navire. Nous voyons aussi que les cas les plus à craindre sont ceux où les balancemens des eaux qui causent les roulis sont à-peu-près de la même durée avec les *balancemens naturels* du navire. Je n'examinerai pas encore toutes les conséquences qu'on peut tirer de cette formule. On voit généralement que plus la quantité π , qui est proportionnelle à l'intensité de la stabilité, est grande, plus l'étendue des roulis sera petite. Il est vrai que le tems t dépend le plus souvent de la stabilité, puisque si la stabilité est plus grande, les balancemens naturels du navire en doivent être accélérés. On peut dire que tout le reste étant égal, le tems t est à-peu-près réciproquement proportionnel à la racine quarrée de la stabilité ; mais on remarquera qu'on peut changer

le tems t , fans rien changer du côté de la stabilité, en éloignant ou en approchant la matiere, qui fait toute la charge du vaisseau, de l'axe de rotation. La relation qu'il y a entre les quantités π , t & θ , pourroit faire, dans de certains cas, qu'en augmentant la stabilité, on rendît les agitations du navire plus grandes. C'est donc une question bien importante, s'il convient d'augmenter la stabilité du navire. Là-dessus on peut faire les réflexions suivantes. Comme le tems θ est incertain, puisqu'il dépend de la nature des agitations des eaux de la mer, & par conséquent des mers même où l'on se trouve, & de plusieurs circonstances accidentelles; il arrivera toujours, quel que soit le tems t , ou que θ soit plus grand que t , ou qu'il soit plus petit, ou qu'il lui soit égal. Si θ est plus grand que t , il est clair que la quantité $\frac{\theta^6 \varphi}{(t t - \theta \theta) \pi}$, devient d'autant plus petite, que l'intensité de la stabilité π est plus grande, puisqu'on peut supposer la quantité $t t \pi$ à-peu-près constante; & on remarquera qu'il est indifférent que la valeur du dénominateur soit affirmative ou négative pour la quantité de l'excurSION, & que cette différence marque simplement si les forces φ & π agissent du même côté ou du côté opposé; mais si θ est plus petit que t , on augmentera au contraire les roulis en augmentant la stabilité, parce que le dénominateur devient plus petit, en supposant toujours la quantité $t t \pi$ constante. On sera peut-être surpris d'entendre qu'il peut y avoir des cas où une augmentation de stabilité cause une augmentation de roulis. Je réponds à cela, que la stabilité diminue à la vérité toujours l'inclinaison causée par une force uniforme & permanente; mais que l'excurSION des roulis causée par des accès de force, ne se règle pas toujours sur ladite inclinaison. Si θ étoit infiniment plus grand que t , l'étendue des roulis seroit exprimée par $\frac{\varphi}{\pi}$, & on diminueroit les roulis à mesure qu'on augmente-

roit la stabilité. Si au contraire θ étoit infiniment plus petit que t , la même étendue de roulis seroit exprimée par $\frac{\theta\theta}{t^2}$, & la stabilité ne changeroit presque pas l'étendue des roulis; d'ailleurs les balancemens seroient en ce cas très-petits par eux-mêmes, à cause de la petitesse supposée de $\frac{\theta\theta}{t^2}$. Le premier cas mérite donc plus d'attention que le second; outre cela, il semble que le premier cas fera beaucoup plus fréquent que l'autre; car lorsque les accès, qui font rouler le vaisseau, sont réguliers, je ne doute pas que ces accès ne soient isochrones avec les mouvemens réciproques des lames, & ceux-ci sont le plus souvent beaucoup plus tardifs que ne sont les balancemens naturels d'un navire. Après tout, il n'y a que le seul cas à craindre où les tems t & θ sont à-peu-près égaux; & comme on ne fait pas lequel prévaudra sur l'autre, c'est sans doute prendre le parti le plus sûr que d'augmenter la stabilité tant qu'il est possible, puisque pour la même quantité $tt - \theta\theta$, les roulis en sont certainement diminués. Je ferai voir ci-dessous de quelle façon particulière on pourra se précautionner contre ce cas, qui est le plus fâcheux. Au reste, on voit assez que nos principes sont toujours les mêmes, quelle que soit la source des forces qui agitent le navire. Après avoir examiné tous les cas qui peuvent arriver, & après avoir fait voir, que le meilleur parti & le plus sûr pour diminuer les balancemens d'un navire, est toujours d'augmenter sa stabilité, il est tems de considérer ce dernier article avec tout le détail requis.



CHAPITRE . III.

Exposition des moyens qu'on peut employer pour dimiuuer le roulis & le tangage des navires fondés sur leur stabilité.

§. XXVII. **I**L s'agit , dans ce Chapitre, d'examiner quels sont les moyens convenables d'augmenter la stabilité du navire , & de diminuer par-là les balancemens. Je ne parle pas de cette augmentation de stabilité qu'on obtiendrait en augmentant les dimensions principales du navire. Tout le monde fait qu'un grand vaisseau a plus de stabilité qu'un petit. Nos formules montrent à cet égard que la stabilité croit en raison biquarrée des dimensions homologues pour les vaisseaux semblables, suivant toutes les circonstances. Mais l'inertie de toute la matière relative aux balancemens du vaisseau , croit comme la cinquieme puissance des dimensions homologues. D'où il suit que la longueur du pendule simple isochrone avec les *balancemens naturels* du navire , suit la raison des dimensions homologues ; & la durée de chaque balancement , la raison sous-doublée des dimensions homologues. Ainsi un grand vaisseau pliera moins sous les voiles , dans les routes obliques , qu'un petit , en raison réciproque des dimensions homologues ; parce que le *momentum* de l'effort du vent pour faire plier le vaisseau , en supposant la mâture & les voiles garder la même proportion en tout sens , ne suit que la raison de la troisieme puissance des dimensions homologues , pendant que la stabilité croit en raison de la quatrieme puis-

fance. On pourroit donc employer plus de voiles à proportion sur un grand vaisseau que sur un petit. Mais aussi, d'un autre côté, le centre de gravité du navire est à proportion plus haut dans les grands navires que dans les petits, tant à cause de la charge & de l'artillerie, que parce que la structure n'est pas entièrement semblable; & cette circonstance diminue la stabilité des grands vaisseaux, surtout celle qui est relative aux roulis, car la stabilité dans le sens de la longueur ne sera pas sensiblement diminuée par cette circonstance. Quant à la proportion des forces, qui agissent sur des navires de différente grandeur pour les faire balancer, & dont nous avons supposé, au §. XXV, l'intensité = ϕ , on voit, pour peu qu'on y fasse attention, que c'est un problème absolument indéterminé que d'indiquer cette proportion. Ces forces pourront consister quelquefois dans l'action d'une petite masse d'eau, qui exercera tout son pouvoir tant sur le petit que sur le grand navire, de manière que ces forces seroient égales; d'autres fois ce seront de grandes masses d'eau, qui agissent sur toute la carene, ou sur une grande partie de la carene; outre cela la direction moyenne des efforts passera tantôt plus loin, tantôt plus près de l'axe de rotation du navire, &c. C'est donc là une question sur laquelle on ne peut rien affirmer de positif.

Mais voyons aussi quelle sera la proportion entre les balancemens des deux navires, lorsqu'ils se trouvent en même tems, dans les mêmes circonstances proches l'un de l'autre. Car quoique la théorie sur l'étendue des balancemens devenus tout-à-fait réguliers, que j'ai exposé depuis le §. XXI jusqu'à la fin du chapitre, ne sauroit jamais convenir aux balancemens des navires avec une précision entière, parce qu'il y aura toujours un reste d'irrégularité dans les circonstances, il n'est pourtant pas douteux que ces balancemens ne suivent plus ou moins les loix de cette théorie, suivant le plus ou le moins de régularité dans leurs causes.

Supposons donc deux navires de grandeur différente, mais entièrement semblables en toutes choses. Soit la longueur de l'un à la longueur de l'autre, comme 1 à n , & que l'étendue des balancemens soit exprimée, pour le petit navire, par $\frac{\theta\theta\phi}{(tt-\theta\theta)\pi}$, qui est la formule que nous avons trouvée à la fin du §. XXV. Il s'agit d'examiner comment cette formule sera changée pour le grand vaisseau. Pour cet effet, on remarquera que le tems θ est le même pour l'un & l'autre navire; que le tems t doit être, en vertu de ce que nous avons marqué au commencement de ce §, changé en $t\sqrt{n}$, & π en $n\pi$; & enfin qu'on ne peut rien affirmer de positif sur le changement de la force ϕ . J'appellerai donc ϕ' cette force pour le grand vaisseau, quelle qu'elle puisse être. De cette façon, l'étendue des balancemens du grand navire sera exprimée par $\frac{\theta\theta\phi'}{(n\pi t-\theta\theta)n\pi}$. Ainsi les balancemens pour le petit & pour le grand navire seront comme $\frac{\theta\theta\phi}{(tt-\theta\theta)\pi}$ à $\frac{\theta\theta\phi'}{(n\pi t-\theta\theta)n\pi}$, ou comme $\frac{\phi}{tt-\theta\theta}$ à $\frac{\phi'}{n\pi t-n\theta\theta}$. On voit assez, par ce rapport, que les balancemens du grand vaisseau doivent naturellement être plus petits que ceux du petit navire, parce que le plus souvent le dénominateur $tt-\theta\theta$ sera beaucoup plus petit que l'autre dénominateur $n\pi t-n\theta\theta$. Si on veut supposer t beaucoup plus petit que θ , & je crois qu'on se trouve souvent dans le cas à le pouvoir faire, ces balancemens seront en raison de $n^4\phi$ à ϕ' . Je crois aussi que pour l'action des grandes lames régulières on peut supposer à-peu-près $\phi' = n^3\phi$, parce que les forces agissent sur la surface de la carene proportionnelle à nn , & sur des leviers qui sont naturellement proportionnels à n . Dans cette seconde supposition, les balancemens seront en raison de n à 1, c'est-à-dire, en raison réciproque des dimensions homologues. Mais je vois aussi qu'on pourroit se trouver, par un

un

un concours de hazards, dans des circonstances que le grand navire fit de plus grands balancemens que l'autre; cela pourroit arriver lorsque la quantité ntt seroit à-peu-près égale à la quantité $\theta\theta$. C'est aux Marins entendus & accoutumés aux observations, à juger d'un tel paradoxe; du moins suis-je bien assuré que souvent les grands navires feront d'aussi grands balancemens que d'autres navires considérablement plus petits, & que particulièrement les grandes lames régulières & uniformes doivent faire cet effet.

§. XXVIII. Voyons maintenant ce qu'on peut faire pour augmenter la stabilité du navire, & pour diminuer par-là ses balancemens, sans changer aucune de ses dimensions principales. Nous avons démontré dans le chapitre sur la stabilité des corps flottans, que cette stabilité dépend uniquement de deux choses; savoir, de la section horizontale du corps à fleur d'eau, & de la hauteur verticale du centre de gravité du corps par-dessus le centre de gravité de la partie homogène submergée. Considérons donc ces deux choses l'une après l'autre; car en les confondant, on obtient souvent des quantités qui se détruisent, & les deux sources de la stabilité ne sont plus reconnoissables par la formule qui exprime la stabilité absolue. La section horizontale du navire à fleur d'eau fait à-peu-près une ellipse. La stabilité qui en résulte dans le sens de la largeur du navire, est en raison composée du cube du petit axe de l'ellipse & du grand axe; & la stabilité dans le sens de la longueur, est au contraire en raison composée du cube du grand axe & du petit axe (§. XIII). De-là on voit combien il y auroit à gagner à augmenter la largeur du navire pour diminuer les roulis, & la longueur pour diminuer les tangages. Si cependant on veut conserver la plus grande largeur, de même que la plus grande longueur dans la section du navire à fleur d'eau, il y aura encore un autre moyen d'augmenter la stabilité;

Prix de 1757.

F

c'est de diminuer moins la largeur de ladite section vers la proue & vers la poupe : plus la section approchera du rectangle circonscrit, plus la stabilité du navire augmentera, & cela nonseulement par rapport aux roulis, mais encore par rapport au tangage. J'ai démontré au milieu du dit §. XIII, qu'en changeant l'ellipse en son rectangle circonscrit, chacune des deux stabilités, entant qu'elles résultent de la coupe du vaisseau à fleur d'eau, est augmentée en raison de 3 à 5. Voilà tout d'un coup une grande augmentation de stabilité, mais qui devient encore plus grande du côté des roulis, en considérant la stabilité absolue; c'est-à-dire, en considérant les deux termes qui l'expriment ensemble, puisque j'ai fait voir, à la fin du §. XIII, que la stabilité entière & absolue seroit doublée, par ce changement, pour les roulis, quoiqu'elle ne soit pas sensiblement augmentée au-delà de la proportion de 3 à 5 pour les tangages.

On devoit, au lieu de considérer la coupe horizontale du vaisseau à fleur d'eau comme une ellipse, la regarder plutôt comme composée de deux demi-ellipses sur un petit axe commun, & dont les demi-grands axes seroient comme 5 à 7, parce qu'on ne fait pas le fort du vaisseau précisément au milieu, mais environ à $\frac{1}{12}$ de toute la longueur, depuis la proue, & $\frac{7}{12}$ depuis la poupe. J'avoue cependant que je ne vois pas ce qui a pu engager les constructeurs de vaisseau à suivre cette maxime, qui ne fait qu'augmenter la résistance des eaux contre la proue : c'est peut-être pour donner aux vaisseaux plus de soutien vers la proue que vers la poupe, & pour occasionner par-là cette pente de la quille dans le sens de la proue vers la poupe, que l'expérience a montré être utile, & que plusieurs raisons me font envisager comme telle. Mais on peut obtenir une telle pente par la simple disposition de la charge. M. Bouguer fait voir pourtant que le navire en gouverne mieux.

Quoiqu'il en soit, & quelque parti qu'on prenne là-dessus, l'augmentation de la stabilité que nous conseillons, est la même pour les deux demi-ellipses & pour la simple ellipse entière.

§. XXIX. Il me semble que dans la construction des vaisseaux, on ne dirige pas assez directement ses vues du côté de la figure que prendra la coupe du vaisseau à fleur d'eau, qui fait cependant un des points les plus essentiels, puisque la charge qu'on peut mettre sur le vaisseau, aussi-bien que la stabilité de celui-ci, dépendent presque uniquement de cette section. Par-là il arrive qu'une différence assez légère dans la conformation de la carene, jette une diversité assez considérable sur la figure de ladite coupe. Ayant examiné quelques exemples sur ces figures, j'ai remarqué qu'elles n'étoient assujetties à aucune loi fixe. J'ai vu seulement que la figure étoit toujours plus large vers la proue que vers la poupe, quoique tantôt plus tantôt moins. Je ne saurois approuver cette maxime; car quand même l'expérience auroit entièrement démontré qu'il faut rendre la proue plus grosse que la poupe, & renfler la carene vers l'avant, rien n'empêche de se relâcher sur cette maxime, peut-être mal fondée, aux environs de la flottaison. Je ne veux pas qu'on retrécisse l'avant de la figure, mais qu'on en élargisse l'arrière. En un mot, il me semble que cette figure devrait approcher de la figure d'un rectangle arrondi par les quatre coins.

Si on considère la dite coupe comme composée de deux demi-ellipses, faites sur un petit axe commun, quelle que soit la proportion entre les deux demi-grands axes, l'aire de la figure sera toujours égale à $\frac{1}{14}$ du produit de la longueur par la largeur. Si donc la coupe a 120 piés de longueur sur 29 piés de largeur, (c'est un exemple que M. Bouguer donne dans son *Traité du Navire*, p. 142), l'aire de la coupe devrait être de 2734 piés quarrés. Cependant M. Bouguer, par une

regle qu'il cite, ne la trouve que de 2655 piés quarrés. La section étoit donc encore plus petite que n'est l'aire des deux demi ellipses. Il est vrai que la regle alléguée par M. Bouguer, pêche toujours en défaut à cause du grand nombre de petits segmens curvilignes qu'on néglige; & je suis sûr que pour la construction ordinaire des vaisseaux, on trouvera l'aire de la section pour le moins avec une précision égale, en multipliant simplement la plus grande largeur par la plus grande longueur, & en prenant les $\frac{1}{14}$ du produit.

§. XXX. J'ai déjà indiqué, que par le moyen que nous venons d'exposer, on augmentera également la stabilité dans le sens d'un bord à l'autre, & dans celui de la proue à la poupe; & qu'ainsi on diminuera également le roulis & le tangage. Celui que je vais ajouter est à-peu-près de la même nature, quoiqu'il paroisse ne regarder que la diminution des roulis. Cet autre moyen consiste à faire les flancs du vaisseau, aux environs de la flottaison, plus droits & verticaux, qu'on n'a coutume de faire. Entrons, sur cet article, dans le détail qu'il mérite. Dans les routes obliques, le vaisseau incline considérablement, par la force du vent sur les voiles. Il faut alors considérer le vaisseau, ainsi incliné, comme dans sa position naturelle, que j'appellerai oblique. Le vaisseau ne fera pas moins sujet aux balancemens, dans cette position forcée, qu'il l'étoit dans sa position droite. Les balancemens fatigueront davantage la mâture, & seront plus à craindre par le péril de renverser. La stabilité est donc plus nécessaire pour les positions naturelles obliques que pour les droites. Mais lorsque la position naturelle est droite, si le vaisseau est balancé, il faut absolument que la force qui le repousse vers sa position naturelle, augmente à chaque nouvel incrément élémentaire d'inclinaison, sans quoi le navire seroit bientôt renversé. On conviendra sans doute, qu'il est bon de donner aux dites augmentations de force

élémentaire le plus d'étendue qu'il est possible. Plus un vaisseau incliné trouve d'obstacle à s'incliner davantage, plus ses balancemens seront diminués. On peut entendre par le mot de *stabilité momentanée* le surcroit de la force requise pour ajouter au vaisseau déjà incliné un nouveau petit degré d'inclinaison constant, que nous avons exprimé ci dessus par $d\sigma$. Dans ce sens on peut dire, qu'il résulte de la construction ordinaire du navire, que sa *stabilité momentanée* diminue à mesure que l'inclinaison du navire augmente; car, suivant cette construction, on se trouve assez dans le cas du §. XV, pour lequel le calcul nous a conduit au beau théorème marqué à la fin dudit §. XV, qui donne la stabilité (ce mot y est pris dans un autre sens, & il y exprime le *momentum* de la force qui repousse le corps vers sa position naturelle, lorsque l'angle de son inclinaison est $= \sigma$) égale à $Pg \sin. \sigma$, en entendant par P le poids du corps, & par g la hauteur de l'axe de la figure génératrice par-dessus le centre de gravité. Comme donc les quantités P & g sont constantes, la différentielle de ladite quantité devient $= Pgd\sigma \cos. \sigma$; & cette formule nous apprend que la *stabilité momentanée* du navire diminue à mesure que l'inclinaison augmente, puisqu'elle est proportionnelle au cosinus de l'inclinaison actuelle. Cette diminution de stabilité peut sans doute occasionner de grands roulis. Il faut donc faire tout son possible pour que cette nouvelle espèce de stabilité devienne, au lieu de diminuer, d'autant plus grande que le navire sera plus incliné. Les roulis vont souvent jusqu'à 35 degrés; un léger accident pourroit alors achever de renverser le vaisseau; s'il n'est retenu par une grande stabilité; d'ailleurs, le navire ne fera ces roulis énormes & les inclinaisons moyennes excessives, qu'à cause même de ladite diminution de stabilité, qu'on ne sauroit prendre trop de soin de prévenir.

§. XXXI. Examinons la cause qui fait que la stabi-

lité en question diminue; c'est que la section du navire à fleur d'eau demeure à-peu-près toujours la même, pendant que la hauteur verticale du centre de gravité du navire par-dessus le centre de gravité de la carene homogène augmente. Cette dernière circonstance, qu'on ne sauroit prévenir, à moins qu'on ne vienne à bout de placer le premier centre de gravité plus bas que le second, fait que la quantité à retrancher pour avoir la stabilité absolue, devient d'autant plus grande, que le vaisseau est incliné davantage, & par conséquent que la stabilité absolue devient plus petite. Le moyen pour prévenir cette diminution de stabilité, sera de faire en sorte que la section horizontale du vaisseau à fleur d'eau augmente à mesure que le vaisseau incline. C'est dans cette vue que je conseille d'élever verticalement les flancs du vaisseau, tant au-dessus qu'au-dessous de la flottaison, puisque de cette façon la coupe en question augmente comme les secantes des inclinaisons, & que la stabilité provenant de cette section augmente comme les cubes de ces secantes (§. IV). Si les constructeurs de vaisseau trouvent un tel changement excessif, ils pourront du moins diminuer la rentrée des vaisseaux, & conserver un peu au-dessous de la flottaison toute la largeur des coupes verticales perpendiculaires à la longueur. C'est pour faire voir le grand succès qu'on peut se promettre d'un tel changement, que j'ai donné, au §. X, la petite table qui montre assez la grande différence entre les stabilités, lorsque les inclinaisons commencent à devenir sensibles. On voit, par cette table, que la première espèce de stabilité est pour une inclinaison de 20 degrés, augmentée par ce changement, en raison de 28, 50 à 51, 15; & que la seconde espèce de stabilité, depuis 20 d. jusqu'à 25 d., est augmentée en raison de 35, 22 — 28, 50 à 81, 17 — 51, 15 ou en raison de 7, 72 à 30, 02. On remarquera, dans cette table, que les différences des nombres de la seconde & de la

troisième colonne marquent les *stabilités momentanées*. Ces différences diminuent dans la seconde colonne, comme les cosinus des inclinaisons; mais elles augmentent considérablement, au lieu de diminuer, dans la troisième colonne. Je ne doute donc nullement qu'un tel changement, assez léger, ne diminue très-considérablement le roulis. La stabilité latérale étant augmentée, la longitudinale le fera aussi, puisque celle-ci est proportionnelle à la largeur du vaisseau (§. IV). De-là il suit que plus les roulis sont grands, plus les tangages seront petits (car ces deux sortes de balancemens peuvent fort bien coexister en même tems), parce que les roulis augmenteront la stabilité longitudinale.

§. XXXII. Tant qu'on considère à part les deux membres de la formule qui exprime la stabilité, on voit facilement que nous avons indiqué actuellement tout ce qu'il est possible de faire pour augmenter la stabilité, relativement au premier membre; car toutes les parties du navire qui ne plongent jamais dans l'eau, de même que celles qui n'en sortent jamais, n'ont aucune relation avec la stabilité qui résulte de la valeur du premier membre. Ce n'est qu'en tant qu'elles font varier les deux centres de gravité, qu'elles pourront augmenter ou diminuer la stabilité, comme le second membre de la formule l'indique. La stabilité relative à ce second membre, est exprimée par $\int P s d\sigma$, en entendant par P le poids du navire, ou le volume de la carene, & par s la hauteur du centre de gravité du navire par-dessus le centre de gravité de la carene homogène; & la *stabilité momentanée* est simplement exprimée par Ps . Ce second membre doit toujours être retranché du premier, tant que le premier centre de gravité est plus haut que le second; & il faudroit trop s'écarter des principes usités, pour qu'il fût plus bas. Ainsi, pour rendre la stabilité absolue plus grande, il faut diminuer la quantité Ps . C'est ce précepte général qu'il ne faut

jamais perdre de vue en construisant le vaisseau. Il faut donc baisser le centre de gravité du navire tout chargé qu'il est, & hauffer le centre de gravité de la carene tant qu'il est possible. Le centre de gravité du navire est ordinairement autour d'un cinquieme du tirant d'eau plus bas que la surface d'eau. Sur ces préliminaires, voici les maximes qu'on pourra suivre.

(a) Il faut ménager également la hauteur & la matiere dans toutes les parties qui sont au-dessus de la surface d'eau, autant que les circonstances peuvent le permettre. J'entens ici les mâts, les vergues, les voiles, les cordages, les châteaux, &c. Il semble que la hauteur des mâts n'est dictée que par la hardiesse de l'homme, trop souvent funeste au genre humain.

(b) Le lest doit servir en quelque façon de contre-poids à toutes ces parties indiquées dans la remarque précédente : il faut le proportionner en partie à la hauteur des mâts. S'il y avoit donc quelque chose à gagner au sujet de la remarque (a), on gagneroit en même tems sur le lest requis ; le navire enfonceroit moins ; la résistance des eaux contre le sillage en deviendroit plus petite : on seroit dédommagé, en partie, de ce qu'on se relâcheroit sur la hauteur des mâts.

(c) En se mettant dans les circonstances qui demandent moins de lest, le poids P diminue, & la quantité $P s$ en devient d'autant plus petite, comme nous le souhaitions.

(d) Il faut prendre du bon lest, pour pouvoir placer plus bas son centre de gravité pour le même poids. Enfin on se conformera aux principes connus de la Statique, dans l'arrimage & dans l'arrangement de la charge.

§. XXXIII. Il ne nous reste qu'à examiner la figure la plus convenable de la carene, en supposant sa surface horizontale donnée, comme ayant déjà été déterminée. Plus on l'élargira vers la flottaison, & plus on la rétrécira

vers

vers la quille , plus on élèvera le centre de gravité de la carene homogène. Plus aussi le navire tirera d'eau sans changer le volume de la carene , plus on augmentera le *momentum* du lest. Voilà les deux considérations principales à faire sur la carene , ou du moins sur cette partie de la carene qui , pendant les plus grands roulis , reste constamment submergée , puisque cette partie ne peut avoir aucun rapport avec le premier membre de la formule qui exprime la stabilité. Il résulte de ces considérations , que depuis la flottaison on doit conserver aux navires toutes leurs largeurs jusqu'à une certaine profondeur. Cette première réflexion s'accorde heureusement avec le conseil que j'ai donné au commencement du §. XXX , de faire les flancs du vaisseau , tant au-dessous qu'au-dessus de la flottaison , droits & verticaux. A une certaine profondeur , on commencera à retrécir sensiblement les coupes verticales & perpendiculaires à la longueur du navire. Vers les deux tiers de la profondeur , on les retrécira brusquement. On pourra enfin donner à la courbure un point d'inflexion contraire , & faire diminuer très peu jusqu'à la quille ces petites largeurs destinées à recevoir un bon lest. Je dirai ci-dessous un autre avantage essentiel qu'on donnera à la carene par une telle construction , les loix de la Théorie ne laissant pas douter du bon succès d'une telle construction à l'égard de notre sujet ; mais je ne prétens pas qu'on les suive aux dépens des Loix de l'Architecture Navale absolument constatées , me contentant d'indiquer tous les principes qui méritent l'attention du constructeur. Voici quelques réflexions générales sur la figure de la carene. Si on partage la carene toute chargée , en tranches horizontales , les tranches inférieures seront plus pesantes qu'un volume égal d'eau , & les supérieures seront plus légères , parce qu'on doit arranger , suivant l'ordre de la pesanteur , tout ce qui doit être mis sur le vaisseau , en tant qu'on est libre sur ce

Prix de 1757.

G

point. Il y aura donc une tranche moyenne qui fera égale en poids au volume d'eau égal. Cependant il faut considérer le volume de la carene comme donné, parce qu'il n'est question que de la figure de la carene. Il me semble qu'il convient d'estimer ladite place de la tranche moyenne, de conserver aux vaisseaux presque toute leur largeur, jusqu'aux environs de ladite tranche; mais après cela on diminuera subitement les largeurs, pour ne plus employer le reste du volume de la carene qu'en profondeur. Plus on voudra accorder de profondeur à la carene, plus on pourra donner de stabilité au navire, tout le reste demeurant égal. C'est pourquoi il faut plus de lest aux navires qui sont plats de varangues, qu'aux autres, qui sont bien taillés, & dont les fonds sont fins. On ne doit applatir les navires par leur fond, que lorsqu'on est dans la nécessité de donner au navire peu de tirant d'eau. Je voudrois même, lorsqu'on se trouve dans cette nécessité, qu'on augmentât un peu au-delà des règles ordinaires la largeur du navire, pour pouvoir lui donner plus de façon, sans changer la solidité de la carene, d'autant plus que le navire en recevra plusieurs autres avantages. En un mot, on prendra pour maxime de jeter beaucoup de volume vers le haut, & beaucoup de poids vers le bas; mais comme on s'écarteroit infiniment des loix de l'Architecture Navale, si on ne vouloit suivre que ce seul principe pour déterminer la figure de la carene, & que cependant on a la liberté de l'observer jusqu'à un certain point, je me contenterai de l'avoir indiqué, en recommandant la profondeur de la carene, pour augmenter par-là l'effet du lest, comme aussi de ne commencer les rétrécissemens que vers la région destinée à contenir les choses pesantes. J'ai déjà remarqué que le dernier conseil s'accorde heureusement avec ce que j'ai dit, de faire les flancs du vaisseau, tant au-dessous qu'au-dessus de la flottaison, droits & verticaux; & comme la coupe horizon-

rale du navire à fleur d'eau doit aussi , en vertu du §. XXVIII, approcher de la figure rectangulaire, il en résulte que près de la flottaison le corps du navire doit former à-peu-près un parallépipede convenablement arrondi par les coins. J'excepte cependant de cette règle la proue & la poupe , sur lesquelles je me réserve quelques petites réflexions particulières , que j'exposerai vers la fin de ce Mémoire.



C H A P I T R E I V .

Remarques sur l'axe de rotation autour duquel se font les balancemens du navire , avec quelques autres moyens de diminuer ces balancemens.

§. XXXIV. **U**N navire incliné se rapproche de sa position droite par un mouvement de rotation, & nous devons tâcher de connoître l'axe de cette rotation, c'est-à-dire la ligne qui, durant les balancemens, n'a aucun mouvement horizontal. Les Auteurs ne conviennent pas sur la position de cet axe, & il me semble que c'est pour n'avoir pas distingué les cas qui peuvent arriver. Quelques-uns le font passer par le centre de gravité du navire, & d'autres le placent autrement. Qu'on me permette de traiter en peu de mots cette question.

On peut considérer, dans cette question, toute la matiere du corps comme concentrée dans un seul & même plan vertical, que je suppose être le plan de rotation. Pour les roulis, on pourra choisir la premiere coupe verticale du vaisseau perpendiculaire à la longueur. Pour connoître sur quel point ce plan, venant à faire des balancemens, tournera; je dis qu'il faut distinguer les balancemens & leurs causes. Supposons d'abord ledit plan détourné de sa position droite & naturelle dans des eaux parfaitement calmes, & que tout d'un coup les causes qui ont détourné le plan viennent à cesser; en ce cas le plan fera des balancemens que je

considère se faire avec une liberté entière, & que j'appellerai par conséquent balancemens *libres*. Je dis que dans ces balancemens le centre de rotation sera nécessairement le centre de gravité, & voici comme je le prouve.

Durant les balancemens *libres*, il n'y a absolument que la force de la pesanteur qui agisse sur les parties. Une telle force agissant verticalement, ne sauroit produire aucun mouvement horizontal absolu; il faut donc que la quantité de mouvement horizontal de droite à gauche soit précisément égale à celle qui se fait de gauche à droite: il faut, en un mot, que le centre de gravité n'ait aucun mouvement horizontal; donc le centre de gravité sera le centre de rotation.

On pourroit objecter ici que quand même le centre de gravité du plan auroit un mouvement horizontal, il ne s'en suivroit pas qu'il y eût dans le système une quantité de mouvement horizontal absolu, parce que le centre de gravité commun au plan & à l'eau qui l'environne, ne laisse pas de demeurer entièrement en repos par rapport au mouvement horizontal. Mais on voit assez qu'il ne s'agit pas ici dudit centre de gravité commun, puisque pour donner un mouvement horizontal à un corps flottant, il faudra toujours employer une force horizontale; & que rien ne peut occasionner ici une telle force, tant qu'on fait abstraction de la résistance des eaux.

Voici un autre principe, qui mène à la même conclusion. Le *momentum* de la force qui agit sur le plan durant ses balancemens, est le même, sur quel point que ce plan se tourne, puisque l'expression de ce *momentum* est indépendante du centre de rotation. Il est donc clair que le centre de rotation se placera de lui-même là où le plan aura la moindre inertie pour recevoir le même degré de vitesse angulaire (je considère la vitesse angulaire, parce que l'amplitude angulaire des

balancemens doit être la même, quel que soit le centre de rotation); & il n'est pas difficile de démontrer que c'est le centre de gravité qui a cette propriété requise. Tout corps qui doit être tourné sur un certain axe par une force donnée, agissant sur un levier donné, ou bien appliquée à une même distance, depuis l'axe de rotation, aura la moindre inertie angulaire, & recevra dans un tems donné la plus grande vitesse angulaire, lorsqu'on fait passer l'axe de rotation par le centre de gravité du corps. Je n'ajoute pas la démonstration de cette proposition mécanique, parce que, quoiqu'assez facile, elle ne laisse pas de demander plusieurs éclaircissemens, qui pourroient nous écarter trop de notre sujet principal.

§. XXXV. Mais il n'arrivera pas toujours, ou pour mieux dire, il arrivera rarement que le vaisseau fasse des balancemens *libres*. Les eaux ne sont point calmes; elles sont agitées, & n'agissent pas simplement par le principe de la pesanteur sur le navire; elles pourront agir d'une infinité d'autres manières. En ces cas, il faut considérer la direction moyenne de toutes les impressions de l'eau contre le navire. Si cette direction moyenne prolongée passe au-dessous du centre de gravité du navire, le centre de rotation momentanée sera au-dessus, & réciproquement. On peut appliquer ici toute la théorie de la percussion excentrique, exposée dans le IX^e Tome des Mémoires de l'Académie de Petersbourg, servant pour l'année 1737, p. 189. Le théorème principal de cette théorie est, que si un corps, dont on ne considère que l'inertie, est animé par une puissance dont la direction ne passe pas par le centre de gravité du corps, il faut tirer une ligne par le centre de gravité du corps perpendiculaire à la ligne qui marque la direction de la puissance; que par le point d'intersection de ces deux lignes, il faut tirer une ligne perpendiculaire au plan de rotation; considérer ensuite le corps comme suspendu par cette dernière ligne hori-

zontale, comme par un axe ; du corps ainsi suspendu, il faut prendre le centre d'oscillation ; & c'est ce point autour duquel le corps tournera, ou plutôt autour de la ligne parallèle à l'axe de suspension, & qui passe par ledit centre d'oscillation. Quelques Auteurs ont ensuite nommé le centre sur lequel le corps animé par la puissance excentrique tourne, le centre de rotation spontanée.

C'est donc ce point sur lequel le navire tournera, entant qu'il est agité par l'impulsion des eaux. Or on fait, par les théorèmes du grand Huguens, que la distance du centre de gravité à l'axe horizontal de suspension, & la distance du même centre au centre d'oscillation, sont réciproquement proportionnelles. Plus donc la direction de l'impulsion moyenne passe près du centre de gravité, plus l'axe de rotation *spontanée* sera éloignée du centre de gravité, & réciproquement ; & si la première distance est nulle, l'autre sera infinie. La vérité de cette conclusion est bien palpable ; car lorsque l'impulsion moyenne des eaux passe par le centre de gravité du navire, son effet ne peut être que celui d'emporter horizontalement le navire, sans lui faire faire aucune rotation ; ce qui marque que la distance du centre de rotation est infinie. Lorsque la direction de l'impulsion moyenne est à une grande distance du centre de gravité, le centre de rotation sera très-près du centre de gravité ; l'impulsion ne causera presque aucun mouvement progressif, & son effet sera tout employé à faire tourner le navire. Tel est l'effet d'un coup de vent sur les voiles, parce que l'impulsion moyenne est extrêmement éloignée du centre de gravité du navire ; c'est pourquoi ces coups de vent sont fort dangereux ; aussi ne manque-t-on pas de caler vite les voiles quand on les appréhende. Dans l'instant que les impulsions contre les navires cessent, celui-ci ne tournera plus que sur son centre de gravité ; mais cepen-

tant le mouvement horizontal, que le centre de gravité aura acquis, continuera jusqu'à ce que des impulsions contraires commencent à agir contre le navire (car ces impulsions ne sauroient manquer d'être réciproques); à arrêter son mouvement horizontal; & enfin à lui imprimer un mouvement contraire. On voit par-là que le navire, outre les balancemens de rotation, fera toujours des allées & venues horizontales. Ce sont sans doute ces mouvemens horizontaux & réciproques, qui, mêlés avec le sillage moyen, occasionnent ces élans qu'on remarque; les allées & venues horizontales seront d'autant plus grandes, que la direction de l'impulsion moyenne passera plus près du centre de gravité, & les balancemens de rotation en seront d'autant plus petits.

§. XXXVI. Il résulte de ces principes, qu'outre les balancemens *libres* qui se font autour du centre de gravité, il y a une autre espèce de balancemens, que j'appellerai *forcés*, qui se font autour du centre de rotation *spontanée*. Ce dernier centre sera extrêmement variable, à cause de la variabilité des forces momentanées, qui causent les balancemens *forcés*.

Une remarque essentielle à faire sur les balancemens *forcés*, est qu'ils ne font à chaque instant qu'un mouvement composé d'un mouvement de rotation autour du centre de gravité, & d'un mouvement parallèle. Soit pd (Fig. IV) la direction de la force moyenne qui agit sur la carene; soit le centre de gravité du vaisseau en c , & que par ce point c on tire une ligne ae perpendiculaire à pd . Si on fait abstraction de l'action de la pesanteur, & si on considère simplement l'inertie de la matière, la force pd fera prendre à la ligne ae , après un petit tems donné, la position fh ; le point d'intersection b fera le centre de rotation spontanée. On voit d'abord que le mouvement, par lequel la ligne ae prend la situation fh ,
peut

peut être résolu en deux mouvemens, par le premier desquels la ligne ae garde le parallélisme, & prend la situation ln , en jettant le centre de gravité de c en g ; pendant que par le second, la ligne ae tourne autour du centre de gravité c , de manière que ln , par cette rotation, prenne la situation fh . Ainsi cg mesurera la vitesse du mouvement parallèle, & l'angle fgl mesurera la vitesse angulaire de la rotation. La proportion de ces vitesses sera la même pour la même direction pd ; mais plus la force moyenne est grande ou petite, plus l'une & l'autre vitesse seront grandes ou petites. Pour déterminer le point b , je dis que ce point b est le centre d'oscillation, si le navire étoit suspendu par le point d . Soit m une ligne constante, & $cd = x$; on aura, par la nature du centre d'oscillation, $bc = \frac{m \cdot m}{x}$. Soit aussi cg , qui exprime la vitesse du centre de gravité, $= c$; on voit que la même cg , rapportée au rayon bc , ou bien bm rapportée au rayon gm , exprime la vitesse angulaire. Mais comme la ligne bc se règle sur la ligne cd , que je regarde comme variable, il sera bon de rapporter les vitesses angulaires à un rayon constant a , par cette analogie, $bc : cg :: a : \frac{c \cdot x}{b \cdot c} \times a = \frac{a \cdot x}{m} c$. Ainsi la vitesse du centre de gravité étant $= c$, la vitesse angulaire ou rotatoire autour du centre de gravité, sera toujours exprimée par $\frac{a \cdot x}{m} c$.

§. XXXVII. Nous voyons par-là que les balancemens du navire autour du centre de gravité, produits par les impressions des eaux agitées, sont proportionnels à la distance x , ou à la distance du centre de gravité depuis la direction de la force moyenne; & que si depuis le centre de gravité on prend une distance a , la vitesse de la rotation sera pour cette distance $= \frac{a \cdot x}{m} c$. Ici il convient d'expliquer encore ce que c'est

Prix de 1757.

H

que la constante m que nous avons introduite ; c'est la moyenne proportionnelle ente bc & cd . Soit donc oc égale à cette moyenne proportionnelle , ce point o aura pour tous les corps deux propriétés remarquables ; la premiere est que si on suspend le corps par un axe perpendiculaire au plan de la figure passant par le point o (ou par un point quelconque pris dans la circonférence du cercle décrit autour du centre c par le rayon co), il fera ses balancemens brachystochrones , c'est-à-dire , de moindre durée que s'il étoit suspendu par tout axe parallele. La seconde propriété du point o est , qu'il est en même tems le centre des forces vives , lorsque le corps tourne autour d'un axe passant par le centre de gravité c ; c'est-à-dire , que si toute la matiere étoit concentrée au point o , la force vive seroit la même que celle du corps. De cette derniere propriété on voit , que plus les extrémités du corps , tournant autour du centre de gravité , sont chargées de matiere , plus le point o sera éloigné du point c , & plus par conséquent la ligne m devient grande. Tâchons à présent de mettre à profit la théorie que nous venons d'exposer.

§. XXXVIII. Nous avons dit que l'effet des impulsions réciproques des eaux contre la carene , est en partie de lui faire faire des allées & venues par un mouvement parallele , & en partie à faire tourner le navire autour du centre de gravité ; le premier effet n'a absolument aucun inconvénient , & le second est le seul qu'on prétend de diminuer. Mais nous avons vu , dans le précédent article , que le mouvement de rotation résultant de l'impulsion des eaux , est exprimé par $\frac{x}{m} c$; pour faire que ce mouvement ait le moins de rapport à l'effet total , il faut que la quantité $\frac{x}{m}$ soit la plus petite qu'il est possible ; & de-là nous tirerons ces deux maximes , premierement d'augmenter la ligne m , & en second lieu de diminuer la ligne x , si l'on voit quel-

que moyen à cela. La premiere maxime demande d'éloigner la matiere du centre de gravité le plus qu'on peut ; c'est ce que j'ai démontré dans le précédent article. Effectivement , si toute la matiere du navire étoit concentrée au centre de gravité , tout l'effet de l'impulsion tant soit peu excentrique consisteroit à faire tourner le navire sur son centre de gravité. En suivant cette maxime , on augmente en même tems l'inertie de la matiere ; l'effet de chaque impulsion sera diminué , outre que les balancemens libres en seront rallentis. Mais y auroit-il aussi quelque moyen de diminuer la quantité x , c'est-à-dire , de faire passer la direction de l'impulsion moyenne près du centre de gravité du navire ? On peut remarquer sur cela que si la carene étoit une portion de sphere dont le centre fût en même tems le centre de gravité du navire , non-seulement la direction de l'impulsion moyenne passeroit par le centre de gravité , mais même la direction de chaque petite impulsion ; parce que toute impulsion se fait perpendiculairement à la surface. Mais on voit aussi qu'un tel corps n'auroit plus aucune force de stabilité. Un autre principe seroit de faire enforte que le *momentum* de toutes les impulsions dont les directions passeroient au dessus du centre de gravité , devint plus égal au *momentum* de toutes les impulsions dont les directions passeroient au-dessous. S'il y a quelque profit à espérer de ce principe , ce ne sera que sur un grand nombre d'observations & d'expériences faites , par des gens entendus , sur la nature des agitations de l'eau : la place du centre de gravité , la profondeur ou le creux de la carene , & sa figure , ne sont pas assez déterminés par les autres considérations , qu'on n'y puisse avoir égard au principe de rapprocher les deux *momentum* que je viens d'indiquer. Si les impulsions de l'eau sont tout-à-fait irrégulieres , elles ne pourront jamais causer de grands balancemens ; & si elles sont régulières & assujetties à de certaines loix , il faudroit

H ij

râcher d'en connoître la nature, savoir à quelle profondeur elles ont le plus de force, & comment elles diminuent vers la quille & vers la surface de l'eau; comment elles peuvent différer entre elles d'un tems à l'autre & d'une mer à l'autre, suivant que les agitations des eaux sont plus ou moins fortes, & les lames plus ou moins grandes. Si on étoit un peu instruit sur ces points, & sur quelques autres d'une même nature, je ne doute pas qu'on n'en pût profiter, relativement à notre dernière remarque. Je reprendrai cette matière dans le chapitre suivant.

Un autre moyen pour diminuer les balancemens des navires, est celui de la résistance des eaux. M. Chauchoy l'a exposé dans son Mémoire couronné. Ce nouveau principe me paroît fort convenable, à cause de la nature de la résistance des fluides, qui agit à fort peu près en raison quarrée des vitesses; elle ne sauroit donc mettre aucun obstacle au navire à se relever, après avoir achevé son excursion, parce qu'alors la vitesse est nulle; au contraire, lorsque le vaisseau est près de sa position naturelle, les eaux s'opposent avec le plus de force pour l'empêcher d'outrepasser cette position, & s'efforcent à l'y retenir. La résistance des eaux n'agit jamais qu'avec avantage, & il faut surtout en profiter à l'égard des roulis. Ceux-ci se font presque avec une liberté entière, à cause de la figure arrondie de la carene & du peu d'éloignement qu'il y a depuis l'axe de la carene, considérée comme sphéroïdique, à l'axe de rotation qui passe par le centre de gravité du navire parallèle à l'axe de la figure. Aussi voit-on que les roulis se font avec tant de liberté, qu'ils se continuent d'eux-mêmes pendant assez longtems, pendant que la seule résistance des eaux arrête tout d'un coup le tangage, qui ne sauroit se renouveler sans une nouvelle attaque.

§. XXXIX. Pour mettre ce moyen, fondé sur la résistance des eaux, à profit contre les roulis, il faut

faire attention à la configuration de la carene & à la position de l'axe de rotation, qui doit passer par le centre de gravité du vaisseau; & alors on verra facilement sur quelle partie les eaux portent le plus de résistance. Je trouve en général, que c'est la hauteur de la quille, & les acculemens qu'on donne aux varangues, qui produisent la plus grande résistance des eaux dans les roulis. La maitresse varangue n'a que très-peu d'acculement, mais ces acculemens augmentent à mesure que les varangues avancent vers la proue & vers la poupe. Par cette construction, il provient comme une bande des façons, soutenue verticalement par la quille, dont les deux côtés sont comme deux plans verticaux. Cette bande des façons échancrée, choque directement les eaux pendant les roulis, conjointement avec les côtés verticaux de la quille.

On augmentera donc la résistance des eaux contre les roulis, en augmentant les acculemens, les hauteurs des façons, & la hauteur de la quille; par-là on diminuera en même tems la dérive dans les routes obliques. Le reste de la carene est trop arrondi, & l'axe de rotation trop près de l'axe de l'arrondissement, pour en attendre une grande résistance. En examinant la dite bande des façons, il paroît que les deux parties, depuis la maitresse varangue jusqu'aux deux extrémités, sont assez inégales; celle de l'arrière étant plus longue & plus haute que celle d'avant, ne sauroit manquer de trouver plus de résistance. Il me semble que cette inégalité doit causer un mouvement de nutation horizontale dans les navires, lorsqu'ils roulent considérablement, & que cette nutation doit être nuisible au sillage. Je voudrois que les constructeurs examinassent scrupuleusement, si les raisons qu'ils alléguent pour donner une pente à la quille de la proue vers la poupe, pour mettre la maitresse varangue plus près de la proue que de la poupe, & pour donner plus d'acculement aux

varangues de l'arrière qu'à celle de l'avant, sont bien réelles & suffisantes pour l'emporter sur les raisons contraires. Si la quille étoit horizontale, & que les deux parties fussent égales & semblables, la bal de des taçons d'avant en seroit augmentée, les deux demi-bandes deviendroient égales, & on éviteroit ladite nutation. Je dirai encore, à l'occasion de cette résistance, que celle de l'air contre les voiles peut faire le même effet. Les Marins assurent que le navire roule plus avec un vent arrière, & qu'il tangué plus au plus près. C'est apparemment parce que l'air, dans le premier cas, s'oppose moins aux voiles pendant que le vaisseau roule, que pendant qu'il tangué; & que dans le second cas, c'est le contraire. Si cela est vrai, on peut encore se servir souvent des voiles pour modérer les balancemens du navire, surtout dans les calmes, pendant lesquels le navire roule quelquefois excessivement.

§. XL. Un remède bien sûr pour diminuer le roulis, est d'appliquer aux flancs du vaisseau deux ou trois bandes saillantes & horizontales un peu au-dessus de la flottaison. De telles bandes agiront par deux principes à la fois; car lorsque, pendant le roulis, elles atteignent les eaux, elles les frappent d'abord par leur saillant, & puis forment cette résistance dont je viens de parler; & aussitôt qu'elles sont submergées, il survient un nouvel accroissement de poussée d'eau de bas en-haut, qui n'agissant que d'un côté, emploie tout son effet à relever le navire. Je suis persuadé qu'avec une telle bande de chaque côté, dont la saillie & la hauteur fût un peu considérable, on pourra parvenir à borner les roulis dans de certaines limites. Un navire, dans ses roulis excessifs, fait quelquefois jusqu'à 35 d. d'excursion de chaque côté, & alors ces roulis sont certainement dangereux. Je crois qu'avec tous les moyens que j'ai exposés, on diminuera aisément jusqu'à 25 d. les plus grands roulis, & ainsi la plus haute bande (si on en veut

employer plus d'une) sera placée au-dessus de la flottaison, tout au plus de la hauteur de la cinquième partie de la largeur, sans quoi elle pourroit devenir inutile à l'égard des roulis; c'est aussi jusqu'à cette hauteur, du moins, que je conseille de ne donner aucune rentrée aux coupes verticales du vaisseau faites perpendiculairement à la longueur.

§. XLI. Les bandes faillantes, dont je viens de parler, ne sauroient manquer d'être en même tems d'un grand secours contre le tangage, si on les prolonge jusqu'aux extrémités des flancs, surtout si on vouloit augmenter leur largeur ou leur faillie à mesure qu'elles approcheroient de la proue & de la poupe; ce qu'on obtiendrait si on faisoit leurs côtés opposés aux flancs entièrement droits, puisque les côtés appliqués aux flancs auront toujours quelque concavité, malgré le conseil que j'ai donné ci-dessus d'approcher la section horizontale du vaisseau à fleur d'eau de la figure rectangulaire. Ces bandes ou ces aîles seroient naturellement hors de l'eau, & ne seroient par conséquent en aucune façon nuisibles aux autres qualités du navire, pendant que par leurs extrémités élargies, elles s'opposeroient efficacement au tangage, aussitôt qu'elles atteindroient aux eaux, & cela par le double principe que j'ai exposé dans le précédent article. Je prie donc les Constructeurs de faire quelque attention à ce moyen, & de juger par eux-mêmes jusqu'à quel degré on peut l'embrasser, sans tomber dans des inconvéniens. C'est toujours avec cette réserve que je propose mes moyens.

§. XLII. Considérons enfin ces cas fâcheux dont j'ai parlé au § XXIII & les suivans, jusqu'à la fin du chapitre, où j'ai fait voir que les roulis ne sauroient manquer d'être extraordinairement forts, lorsque le tems θ est à peu-près égal au tems t ; c'est-à-dire lorsque les *roulis forcés* sont à-peu-près de même durée avec les *roulis libres*. J'espère qu'on ne voudra pas traiter mes

théorèmes sur cette matière de spéculations purement hypothétiques, ou du moins mal appliqués à notre sujet. L'expérience physique, alléguée à la fin du § XXI I, en prouve assez la réalité. D'ailleurs, personne n'ignore qu'un son fort met en vibrations très-sensibles une corde tendue à l'unisson, pendant que toute autre corde ne fait aucune vibration sensible. C'est ici absolument notre cas. Le son forme des ondulations de l'air, comparables aux ondes de la mer. Ces ondulations de l'air mettent la corde dans des vibrations, parce que les allées & venues de la corde sont isochrones avec les mêmes ondulations, & que la force motrice conspire toujours avec le mouvement de la corde. Les ondes de la mer feront le même effet sur un navire mis à l'isochronisme avec le mouvement réciproque des ondes, comme il l'est lorsque ses balancemens *libres* sont de même durée que les balancemens des eaux, ou bien que les balancemens *forcés* du navire. Aussi a-t-on remarqué souvent, qu'un navire rouloit extraordinairement lorsqu'on ne voyoit rien d'extraordinaire ni dans la force du vent, ni dans les agitations des eaux. N'auroit-on jamais remarqué que de deux vaisseaux inégaux l'un rouloit quelquefois plus extraordinairement que l'autre, quoiqu'ils fussent l'un & l'autre dans les mêmes circonstances? Je vois bien que ces roulis extraordinaires & excessifs doivent être rares, parce qu'il faut que non-seulement les balancemens des eaux soient synchrones avec les balancemens *libres* du navire, mais encore que les forces motrices soient pendant quelque tems uniformes & permanentes. Cependant tout cela peut arriver; & comme notre sujet demande de remédier aux roulis excessifs, nous devons examiner s'il n'y a absolument aucun moyen particulier pour cela.

§. XLIII. Remarquons d'abord que les moyens que nous avons déjà donnés, ne manqueront pas de modérer aussi ces roulis extraordinaires; mais je suis persuadé
que

que si on pouvoit mettre quelque achronisme entre les deux especes de balancemens, ou du moins troubler cette harmonie qu'il y a entre les accès des forces motrices & les balancemens du vaisseau, ceux-ci en seroient aussitôt considérablement diminués. Je crois qu'on y arrivera en remuant habilement & à propos le gouvernail, tantôt à droite, tantôt à gauche; c'est une manœuvre qu'on devoit étudier, si elle peut être utile; sur quoi je m'en rapporte aux experts. Je crois aussi qu'il sera toujours bon de connoître exactement pour chaque vaisseau la durée d'un balancement entierement libre; il en faudroit faire l'essai dans le port même. deux bandes d'hommes opposées pourront, moyennant deux longues cordes attachées au mât, ébranler assez sensiblement le navire, par des efforts duement appliqués, pour distinguer les roulis; alors je voudrois qu'on en comptât le nombre pour trois ou quatre minutes de tems. Si on pouvoit parvenir à exciter de grands roulis, on pourroit alors reconnoître l'achronisme qu'il y auroit entre les grands roulis & les petits. Ensuite de quoi on pourra toujours, dans l'occasion, comparer les balancemens actuels ou *forcés* avec les balancemens *libres*, en comptant les premiers pour une ou deux minutes de tems.

Si le navire est irrégulièrement balotté, ces agitations, à mon avis, ne pourront pas être fort grandes, & elles ne sont pas dans le cas dont nous parlons, mais lorsque les roulis sont réguliers & uniformes en durée & en grandeur, on saura s'ils avancent ou retardent sur les roulis libres; & je présume que l'un & l'autre peut arriver. S'ils avancent, il faudra tâcher de retarder davantage les roulis *libres*; & s'ils retardent, il conviendra d'accélérer ces roulis: une très-petite accélération ou retardation des roulis libres, pourra faire ici quelque effet. On remarquera à ce sujet, qu'on retardera les roulis *libres*, tant en diminuant la stabilité, qu'en au-

gmentant l'inertie du navire roulant. Quant à la stabilité, on ne pourra pas la faire changer autrement qu'en changeant la hauteur du centre de gravité par-dessus le centre de la carene homogène ; si on augmente cette hauteur, on diminue la stabilité, & réciproquement. On peut hausser le centre de gravité par-dessus le centre de la carene, en plaçant plus haut tout ce qui est mobile, & qu'on pourra remuer commodément ; & comme dans ces cas la grandeur des roulis n'est pas causée par aucun défaut de stabilité, un tel changement pourra se faire ici sans tomber dans de nouveaux inconvéniens. S'il s'agissoit d'accélérer les roulis libres, il faudroit faire tout le contraire.

Quant à l'inertie du navire roulant, on l'augmentera en éloignant tout ce qui est mobile de l'axe de rotation, qui passe par le centre de gravité ; & comme l'inertie des parties augmente en raison quarrée de leurs distances à l'axe de rotation, un tel éloignement en fera d'autant plus d'effet. On hausse encore le centre de gravité en haussant les vergues & les voiles, aussi-bien qu'en mouillant ou *empesant* les voiles. La stabilité diminue & l'inertie augmente.

§. XLIV. Voyons enfin ce qui doit arriver, quand on augmente ou diminue la charge du vaisseau. Soit la coupe horizontale du navire à fleur d'eau $= S$, & considérons-la comme demeurant la même, pendant qu'on augmente ou diminue la charge, conformément au conseil que j'ai donné de faire les flancs droits & verticaux. Soit la solidité de la carene $= a S$, & que dans cet état la distance du centre de gravité à la surface de l'eau soit $= b$ (je suppose ce point plus bas que la surface de l'eau), & la distance du centre de gravité de la carene homogène depuis la surface de l'eau $= c$. Qu'on augmente ensuite la charge jusqu'à rendre la solidité de la carene $= a S + \alpha S$. Pour connoître l'effet que fera la nouvelle charge sur le navire, il faut savoir l'endroit où

On placera cette nouvelle charge, ou plutôt son centre de gravité; supposons cet endroit plus bas que n'étoit auparavant le centre de gravité du navire, de la hauteur \mathcal{C} . Sur cela les règles de la Statique donnent la hauteur de la surface d'eau par-dessus le centre de gravité,

après l'augmentation de la charge, $= b + a + \frac{a}{a + a} \mathcal{C}$,

& la hauteur de la surface de l'eau par-dessus le centre de gravité de la carene homogène, $= c + a - \frac{c a + \frac{1}{2} a a}{a + a}$.

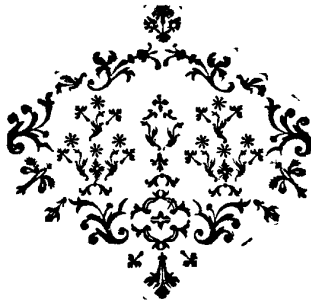
Ainsi la hauteur du centre de gravité du navire par-dessus le centre de gravité de la carene, est avant l'augmentation de la charge $= c - b$, & après l'augmentation, $= c - b - \frac{c a + \frac{1}{2} a a + \mathcal{C} a}{a + a}$. Ainsi

cette hauteur devient plus petite par l'augmentation de la charge tant que \mathcal{C} est affirmatif. En considérant la quantité a comme fort petite, il faudroit que \mathcal{C} fût $= -c$ pour que la distance entre les deux centres de gravité fût la même avant & après l'augmentation de la charge; c'est à-dire, qu'en plaçant la nouvelle charge autant au-dessus du centre de gravité du navire, que la surface de l'eau étoit élevée par-dessus le centre de gravité de la carene. On voit ici le grand effet du lest pour approcher le centre de gravité du navire du centre de gravité de la carene. Car supposons un navire avec toute la charge & non lesté, & qu'on ait dans cet état $a = 10$ piés, $c = 6$ piés: qu'on leste ensuite le navire, & que la quantité du lest fasse la cinquième partie du poids de tout le reste du navire chargé; on aura $a = 2$ p.; & comme ce lest est placé au fond de cale, on pourra supposer $\mathcal{C} = 14$ p. Ces suppositions, qui ne sont pas incongrues, font la quantité $\frac{c a + \frac{1}{2} a a + \mathcal{C} a}{a + a} = 3 \frac{1}{2}$ p.

De sorte que le centre de gravité du navire s'approche de celui de la carene de trois piés & demi par le lest. Voilà le changement qui arrive à l'égard de la distance mutuelle des deux centres de gravité en question ; mais comme le second membre de la formule qui exprime la stabilité est proportionnel à la solidité de la carene multipliée par la hauteur entre les deux dits centres, il faut, pour voir si la stabilité croît ou décroît par l'augmentation de la charge, multiplier $c - b$ par aS , & $c - b - \frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha + \zeta\alpha}{a + \alpha}$ par $aS + \alpha S$; le premier produit est $caS - baS$, & le second produit est $caS - baS - \frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha + \zeta\alpha}{a + \alpha} aS + caS - baS - \frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha + \zeta\alpha}{a + \alpha} \alpha S$. Le premier produit est plus grand que le second, de la quantité $\frac{\frac{1}{2}\alpha\alpha\alpha + a\zeta\alpha + ba\alpha + ba\alpha + \frac{1}{2}\alpha^3 + \zeta\alpha\alpha}{a + \alpha} S$.

Et comme ces produits doivent être retranchés de la valeur du premier membre de la formule, il s'en suit que l'augmentation de la charge augmente toujours la stabilité absolue, tant que ζ n'est pas négatif. Ainsi les eaux qui sont à fond de cale augmentent la stabilité ; mais elles font plonger davantage le navire, & le fillage en est retardé. Si la quantité α est très petite, on peut censurer le gain qu'on fait sur la stabilité, par l'augmentation de la charge, $= (b + \zeta) \alpha S$. Lorsqu'on diminue la charge, il faut prendre négativement la valeur de α ; & si l'endroit d'où l'on ôte la charge est plus haut que le centre de gravité, il faut aussi prendre négativement la valeur de ζ . Par cette double négation, on gagne considérablement sur la stabilité, en coupant les mâts, à cause de leurs hauteurs. Si on donne beaucoup de profondeur à la carene, si on emploie du bon lest & en quantité, & si la charge est bien arrangée & pesante

par elle-même, on pourra faire descendre le centre de gravité du navire jusqu'à celui de la carene, & peut-être plus bas ; on pourra alors se relâcher sur le premier membre de la formule qui exprime la stabilité, & diminuer la largeur du vaisseau, lorsque d'autres raisons, étrangères à notre sujet, le demandent.



C H A P I T R E V.

*Explication de la cause principale des roulis
& des tangages, & de la meilleure maniere
de les diminuer, relative à cette cause, avec
quelques réflexions sur la nature des lames.*

§. XLV. **N**ous avons considéré jusqu'ici la surface des eaux comme horizontale; ou plutôt, nous n'avons pas encore fait attention à la figure ondoyante des lames. C'est cependant dans cette figure ondoyante & variable que consiste la principale cause des agitations du navire. L'équilibre des corps qui nagent au milieu de ces ondes, est tout différent de celui qui convient aux eaux dont la surface est unie & horizontale; quand le navire ne feroit que suivre constamment sa position d'équilibre, il feroit obligé de faire des balancemens très-considérables, que j'appellerai *balancemens d'équilibre*; & les balancemens absolus seront toujours plus grands que les simples balancemens d'équilibre. C'est ici un nouveau sujet de réflexion fort essentiel & très-important; mais ce sujet nous meneroit extrêmement loin, si nous voulions le traiter avec toute l'exactitude dont il est susceptible. Les loix hydrodynamiques connues l'éclairciroient suffisamment, moyennant des hypothèses physiques bien choisies & telles qui ne peuvent nous écarter sensiblement de la vérité. Mais il nous faudroit examiner la figure des lames, le mouvement des eaux, tant près la surface qu'à des profondeurs données, quelle est à chaque instant & à chaque profondeur la compression des

eaux, qui n'est plus exactement proportionnelle à la colonne verticale terminée par la surface des eaux. C'est cette compression qui marque la poussée de l'eau contre chaque élément de la carene, & elle ne sauroit être déterminée sans connoître les accélérations & retardations du mouvement des eaux, ni par conséquent la vraie position d'équilibre du navire. Toutes ces recherches demandent un Traité à part, & je dois me contenir dans les bornes d'un Mémoire, que j'ai peut-être déjà passée. Je n'exposerai donc que le plus précis de mes idées sur cette matière, & je simplifierai les hypothèses autant qu'on peut le faire, sans tomber dans des erreurs sensibles.

§. XLVI. Si nous supposons que le vent souffle constamment avec la même force, & sous la même direction; que la mer est à une très-grande étendue fort profonde & libre, & que le fond de la mer est uni & horizontal, il n'y a aucun doute que les lames excitées par un tel vent, & sous de telles circonstances, ne soient extrêmement uniformes & régulières. C'est sous cette forme que nous allons le considérer.

Soit donc AB (Fig. V.) la surface horizontale de la mer, ou plutôt une ligne de cette surface prise parallèlement à la direction du vent; & supposons que pendant les agitations des eaux, cette ligne se change en $acdefgb$. Toute cette ligne continuée de part & d'autre, formera une courbe continue qui pourra être exprimée par une seule & même équation; & pour peu qu'on fasse attention à toutes les propriétés que cette courbe doit avoir manifestement, on voit assez qu'elle ne sauroit s'éloigner beaucoup de la nature de celle que prend une longue corde tendue, lorsqu'elle fait des vibrations, en formant plusieurs nœuds, tels que sont ici les points c , e , g , &c. Ainsi, pour exprimer la nature de notre courbe ondoyante; je me servirai de l'équation $y = a \sin. Arc. \frac{x}{\lambda} \pi$, en entendant par x une

abscisse quelconque cl , par y l'appliquée lm , par a la plus grande appliquée hd prise au milieu de la lame, par a toute la largeur de la lame ce , & enfin par π le demi-cercle, dont le rayon est égal à l'unité. Suivant cette idée, toute la ligne $acdefgcb$ prend au même instant la position du niveau AB ; les nœuds, tels que c, e, g , restant immobiles; chaque onde, telle que cde , fait des balancemens alternativement au-dessus & au-dessous la droite che ; à mesure qu'elle s'élève ou se baisse, celle qui lui est voisine se baisse ou s'élève. En différentiant notre équation, on trouve $dy =$

$$\frac{\pi a}{a} dx \cos. Arc. \frac{x}{a} \pi. \text{ Cette équation différentielle mar-}$$

que qu'aux points de la plus grande élévation & de la plus grande dépression, tels que d, f , la surface est constamment horizontale, & que c'est dans les nœuds que la surface des eaux prend la plus grande pente. La

tangente de chaque angle deh fera $\frac{\pi a}{a}$. Si donc on suppose, par exemple, la plus grande hauteur d'une lame par-dessus la surface horizontale de la mer faire la sixième partie de la largeur de la lame; c'est-à-dire, si $dh = \frac{1}{6} ce$, on aura l'angle $deh = 27^\circ 40'$.

Je n'ai rien trouvé dans aucun Auteur qui détermine ni la largeur ni la plus grande hauteur d'une lame; il y a cependant apparence qu'en général les lames sont d'autant plus grandes, que le vent est plus fort, & que la mer est plus profonde. Je remarquerai seulement qu'on fait dans la Physique que la moindre circonstance ou la plus petite cause imaginable suffit pour fixer les nœuds dans ces sortes de systèmes, & que la nature recherche avec un soin sans bornes le synchronisme dans les variations périodiques combinées. Ces raisons me font soupçonner, que dans la mer profonde la lame fera précisément un balancement entier dans le tems que le vent emploie pour parcourir la largeur de la lame; &

qu'à

qu'à mesure que la profondeur de la mer diminue, le nombre des balancemens augmentera, pour le même vent en raison des nombres ou naturels impairs; & j'ai plus de penchant pour la dernière opinion. Il en est comme des tons qu'on tire en variant l'embouchure d'un seul & même tuyau simple, & qui dans les tuyaux ouverts vont comme les nombres 1, 2, 3, &c.; & dans les tuyaux bouchés, comme les nombres 1, 3, 5, &c. Si donc un vent produit dans l'Océan des lames de 300 piés de largeur, ce même vent pourra produire dans d'autres mers moins libres & moins profondes des lames de 100 piés de largeur. Voici une expérience qui éclaircit ce sujet: une corde tendue sera ébranlée en pinçant une autre corde mise à l'unisson; partagez la première en trois parties égales, dont chacune donne la douzième, & chaque partie sera encore ébranlée. Les grandes lames de l'Océan répondent aux sons fondamentaux; & les petites, excitées par le même vent, aux sons accessoires, qu'on remarque dans chaque corde pincée. Quant à la durée de chaque lame, on ne sauroit la déterminer précisément; mais il est assez avéré que ces durées sont pour les lames semblables en raison sous-doublée des largeurs des lames.

§. XLVII. M. Newton, pour expliquer la nature des lames, suppose, en prenant par-tout $eo = cl$, un tuyau uniformément large, qui descende verticalement de chaque point l jusqu'à une certaine profondeur, qui se replie ensuite horizontalement, & qui enfin remonte verticalement jusqu'au point o ; après quoi il considère le mouvement des lames comme formé par des balancemens de l'eau dans toute cette suite infinie de tuyaux communicans, & il démontre qu'en supposant la longueur de chacun de ces tuyaux $= L$, les balancemens deviennent isochrones avec ceux d'un pendule simple de la longueur $\frac{1}{2} L$. De cette manière, les balancemens des lames dépendent, quant à leur durée, de la profondeur

Prix de 1757.

K

des eaux agitées ; & cette profondeur peut être supposée proportionnelle à la largeur de chaque lame. Supposons donc la largeur d'une lame $= x$, & la profondeur à laquelle les eaux sont agitées $= mx$; supposons aussi que le vent parcoure 12 piés dans une seconde, & donnons simplement 3 piés à la longueur du pendule simple à secondes. Dans ces suppositions, le tems que le vent emploie pour parcourir la largeur de la lame, fera $= \frac{x}{n}$ secondes, & le tems d'un balancement entier de la lame sera $= \sqrt{\frac{2mx+x}{6}}$ secondes, & si on fait $\frac{x}{n} = \sqrt{\frac{2mx+x}{6}}$, on obtient $x = \frac{2mn^2+n^2}{6}$ piés.

Soit, par exemple, $n = 30$, & $m = 6$, la largeur de la lame sera $= 1950$ piés ; mais dans les mers peu profondes, cette largeur peut, à mon avis, se réduire au tiers, ou à la cinquieme, ou à la septieme partie, &c.

Il est vrai cependant que cette maniere d'envisager les balancemens des lames, souffre beaucoup de difficultés ; car tous ces tuyaux devoient se croiser ; ce qui blesse absolument l'imagination. Outre cela, on voit que rien ne sauroit empêcher les eaux dans la partie *def* de rouler vers l'endroit le plus bas ; de sorte que le mouvement alternatif des eaux doit être manifestement en partie horizontal & en partie vertical ; les balancemens horizontaux seront les plus rapides vers les nœuds, parce que la pente y est la plus grande ; & ils seront nuls au milieu, entre deux nœuds, parce que les eaux n'y ont point de pente. Les balancemens horizontaux doivent retarder les balancemens verticaux, parce que l'action de la pesanteur est partagée ; & comme cependant tous les balancemens doivent être absolument isochrones & synchrones, il s'ensuit que les tuyaux communiquans ne sauroient être partout d'une longueur égale. Je considere donc plutôt chaque deux demi-lames *de* & *fe*

comme composées de canaux ou tuyaux emboîtés les uns dans les autres, & que toutes ces paires de demi-lames alternatives forment chacune un système à part, sans se troubler les unes les autres & sans jamais mêler leurs eaux. Les extrémités de chacun de ces tuyaux sont également éloignées du point e ; près des points d & f , le mouvement des eaux sera presque purement vertical, pendant que près du point e , ce mouvement est pour la plus grande partie horizontal. On voit donc que les extrémités de chaque tuyau sont d'autant plus inclinées, qu'elles sont plus proches du point e , & que ces tuyaux sont plus courts; & c'est-là précisément la source de l'isochronisme commun à tous les tuyaux. Car si d'un côté les balancemens sont accélérés par la diminution de la longueur du tuyau, ils sont d'un autre côté retardés par l'inclinaison des extrémités du même tuyau. Soit la longueur du tuyau uniformément large $= \lambda$ & le sinus de l'angle que le tuyau fait avec l'horison vers ses extrémités $= s$; on aura la longueur du pendule simple isochrone avec les balancemens des eaux dans ce tuyau $= \frac{\lambda}{2s}$. Il arrivera donc, suivant ces idées, que s soit partout proportionnel à λ , pourvu qu'on suppose les tuyaux d'une même largeur dans toute leur longueur.

§. XLVIII. Il nous reste à examiner les loix hydrostatiques, suivant lesquelles se fait la poussée de l'eau, dont la surface n'est pas horizontale, pour soutenir les corps flottans. C'est ici la question la plus essentielle. Voici un problème dont la solution pourra éclaircir en quelque maniere notre question.

Soit $acde$ (Fig. VI) un canal uniformément large & recourbé, dont la partie bgd soit remplie d'eau qui se meut dans le sens bcd ; il est question de déterminer la compression dans chaque point g .

Qu'on tire les horizontales fd & bq , & les verticales

$K\ ij$

bf & ghl . Soit $bf = x$, $gh = y$; la longueur $bcd = l$; la longueur $gd = z$, & qu'on nomme π la hauteur verticale de la colonne qui indique la compression cherchée pour le point g : on aura la force accélératrice

qui anime la partie $bcg = \frac{x+y-\pi}{l-z}$, & celle qui anime

la partie $gd = \frac{\pi-y}{z}$; & il est clair que ces deux

forces accélératrices doivent être égales entre elles, puisque les vitesses de l'une & de l'autre partie sont, durant tout le mouvement, égales entre elles. Nous avons

donc $\frac{x+y-\pi}{l-z} = \frac{\pi-y}{z}$, ce qui donne $\pi = y + \frac{z}{l} x$.

Cette valeur nous fournit beaucoup de corollaires.

(a) Pour un tuyau simple & droit, la compression est partout nulle, de quelque façon qu'on l'incline; parce que $x = nl$, & $y = -nz$.

(b) La formule indique, comme il doit arriver, que la compression est nulle tant au point b qu'au point d , puisque pour le point b , il faut faire $y = -x$ & $z = l$; & que pour le point d , il faut supposer $y = 0$ & $z = 0$.

(c) Au moment que les points b & d sont de niveau, la compression est la même que dans les eaux calmes.

(d) La formule satisfait aussi à la convertibilité des extrémités b & d ; car si on veut rapporter à l'extrémité d , ce que j'ai dit par rapport à l'extrémité b , on voit bien qu'il faut substituer $-x$ à la place de x , $l-z$ à la place de z , & $y+x$ à la place de y . Si l'on substitue donc ces valeurs, on trouve, à la place de $y + \frac{z}{l} x$, la quantité $y+x - \frac{l-z}{l} x$; ce qui fait, comme auparavant, $y + \frac{z}{l} x$.

(e) Lorsque le point g est fort près du point b , &

qu'on nomme cette petite distance a , on aura $l - z = a$ & $y = -x + \mathcal{C}$, en entendant par \mathcal{C} la petite hauteur verticale du point b par-dessus le point g , pris fort près de l'autre ; substituant donc ces valeurs, on trouve la compression $= \mathcal{C} - \frac{x}{7} a$. Cette compression est donc plus petite que suivant les loix de l'Hydrostatique ordinaires.

(f) Si au contraire, le point g est fort près de l'autre extrémité, savoir du point d ; & si on suppose la petite distance $gd = a$: on aura $z = a$ & $y = \mathcal{C}$, en entendant par \mathcal{C} la petite hauteur verticale du point d par-dessus le point g ; sur cela la compression de l'eau devient $= \mathcal{C} + \frac{x}{7} a$, qui est par conséquent plus grande que suivant les loix hydrostatiques ordinaires.

§. XLIX. Pour appliquer, ce que nous venons de trouver, aux lames, il faut examiner quel peut être le tuyau qui passe par le point, pour lequel on cherche la compression ; & quoiqu'on ne puisse rien déterminer de précis là-dessus, on voit cependant que toutes les eaux élevées par-dessus le niveau de la mer calme, sont moins comprimées que suivant les règles communes. La différence peut être sensible près la surface des eaux, comme on voit par les corollaires (e) & (f) ; car en supposant les deux branches verticales près la surface de l'eau, ce qui fait $a = \mathcal{C}$, la compression pourra différer en raison de 1 à $1 \pm \frac{x}{7}$; & comme $\frac{x}{7}$ pourroit fort bien faire $\frac{1}{2}$, il s'en suit que ladite différence pourroit bien s'étendre jusqu'à un sixième de la compression ordinaire. Cependant il n'en faut pas conclure que le navire plonge plus ou moins qu'à l'ordinaire, lorsqu'il se trouve au-dessus ou au-dessous du niveau moyen de la mer, parce que le navire aura lui-même à-peu-près le même mouvement qu'auroit l'eau qu'il déplace. Les résultats de notre problème sont à la vérité fort utiles

pour connoître à-peu-près ce qui doit arriver dans différens cas ; mais ils n'admettent pas un calcul exact. Il faut surtout faire attention à la largeur des lames, & la comparer avec les dimensions du navire, puisqu'il est tout simple que les lames fort courtes doivent faire sur le navire un tout autre effet, que les grandes lames de l'Océan, sur lesquelles le navire ne représentera qu'un assez petit corps. C'est surtout ce dernier cas que nous devons examiner avec plus d'attention.

§. L. On voit bien que chaque point de la carene peut être considéré comme étant fort près de l'extrémité du tuyau, qui passe par ce point ; on voit aussi que lorsque le navire est censé occuper une petite étendue, chaque point de la carene est soutenu par une colonne d'eau, dont la hauteur verticale est, en vertu des corollaires (e) & (f) du précédent §., $= \mathcal{C} \pm \frac{x}{l} \mathcal{C}$, en entendant par \mathcal{C} la hauteur verticale depuis le point en question jusqu'à la surface de la lame, par x la position du tuyau intercepté entre la surface de la lame & le même point en question, par l la longueur entière du tuyau, & par x la hauteur verticale entre les deux extrémités du tuyau. Remarquons ici que x doit être à-peu-près proportionnelle à \mathcal{C} , parce que la petite portion de tuyau peut être considérée comme une ligne droite inclinée, & tous les points de la carene répondront à-peu-près à des tuyaux dont les extrémités seront également inclinées. La quantité ou le rapport de $\frac{x}{l}$ peut aussi être censé le même pour tous les tuyaux qui répondent aux différens points de la carene, tant à cause de la petite étendue de la carene par rapport à la grande largeur de la lame, que parce que la quantité x ne sauroit manquer d'être à-peu-près proportionnelle à l pour des tuyaux peu éloignés entre eux. Toutes ces considérations nous mènent à la conclusion, qu'on peut sup-

poser pour chaque point de la carene la quantité $\frac{x}{7} a$ proportionnelle à C ; de sorte que la quantité $C \pm \frac{x}{7} a$ peut être censée $= n C$, en entendant par n un nombre un peu plus grand ou un peu plus petit que l'unité, suivant que le vaisseau se trouve au-dessous ou au-dessus du niveau de la mer calme. Nous voyons de-là que chaque point de la carene est soutenu à-peu-près par une force proportionnelle à la hauteur verticale prise depuis le point en question & terminée par la surface des eaux ondoyantes; & c'est ici la propriété principale que je prétendois établir.

§. LI. Il suit de la dite propriété, que quelque courbée & inclinée que soit la surface de l'eau, la poussée de l'eau qui soutient un corps flottant, peut toujours être considérée comme concentrée dans le centre de gravité de la partie submergée censée homogène, tout comme dans les eaux calmes, sans tomber dans aucune erreur sensible, pendant que la pesanteur du corps doit être considérée comme concentrée dans son centre de gravité. L'équilibre pour chaque moment demande encore que les deux dits centres de gravité se trouvent dans une seule & même verticale; mais nous allons voir qu'un tel équilibre doit nécessairement faire incliner le corps lorsque la surface de l'eau est inclinée, & nous ne pouvons nous dispenser de rechercher quelle sera la relation entre l'inclinaison de la surface d'eau, & celle du corps supposé en équilibre. Pour faciliter cette nouvelle recherche, nous supposerons l'inclinaison de la surface d'eau très-petite, & la surface d'eau, pour la petite étendue que le corps occupe, être plane. Ces suppositions ne pourront nous écarter sensiblement de la vérité, & les théorèmes qui résulteront seront également utiles. Outre ces suppositions, nous considérerons simplement un plan verticalement plongé dans les eaux, & parallèlement au plan de la cinquième

figure. Nous simplifions ainfi la question, afin de pouvoir exprimer, par des formules analytiques, la stabilité ordinaire, fans employer aucun figne fommaire.

§. LII. Soit donc à préfent AD (Fig. VII) la furface horizontale des eaux calmes, & que BC marque l'interfection du plan vertical flottant avec ladite furface d'eau ; foit le centre de gravité du plan flottant en F , & le centre de gravité de fa partie fubmergée cenfée homogène en G ; qu'on tire par les deux points F & G la ligne FG , qui, pour l'équilibre que nous fupposons, fera verticale. Il eft queftion de déterminer la pofition d'équilibre du même plan, lorsqu'on fuppose la furface d'eau inclinée comme ad , ou de déterminer l'angle BEb , en fupposant la ligne BC prendre la pofition bc .

Confidérons d'abord le plan flottant comme ayant pris la même inclinaifon que la furface des eaux, deforte que BC foit parvenu dans la pofition mn , & que la ligne EFg ait pris la pofition Efg perpendiculaire à la ligne mn ; l'angle GEg fera égal à l'angle $A Ea$, le point g fera encore le centre de gravité de la partie fubmergée confidérée comme homogène, puifque cette partie eft la même qu'elle étoit avant l'inclinaifon de la furface d'eau, & le point f fera le centre de gravité du plan. Mais cette pofition du plan ne fauroit être celle de l'équilibre, puifque la ligne fg n'eft plus verticale ; il faut donc que la ligne BC , après avoir pris la pofition mn , fubiffe un fecond changement, & qu'elle prenne la pofition bc , qui remette les points f & g dans la même verticale ; & on remarquera à cet égard, que dans tous les corps qui ont naturellement un certain degré de stabilité, la ligne fg fe rapproche de la verticale en augmentant l'angle $BE m$. Supposons maintenant l'angle cherché $mEb = \sigma$; l'angle donné $BE m = S$; $BC = q$; FG ou $fg = s$; la partie fubmergée

submergée du plan $= M$; qu'on tire du centre E les petits arcs de cercle fF & Gg , avec la verticale fh , il y aura entre l'angle mEb & l'angle gfh la même relation que nous avons trouvée dans le premier chapitre, puisque, par la petite inclinaison de la ligne ad , cette relation ne sauroit être changée; or en appliquant nos formules générales aux angles extrêmement petits,

on trouve $gh = \left(\frac{q^3}{12M} - s \right) \sigma$, ce qui donne le petit

angle $gfh = \left(\frac{q^3}{12Ms} - 1 \right) \sigma$, & ce même angle étant

aussi égal à l'angle $BE m$, ou $= S$, nous aurons

$\left(\frac{q^3}{12Ms} - 1 \right) \sigma = S$, & par conséquent l'angle mEb ,

ou $\sigma = \frac{12Ms}{q^3 - 12Ms} S$. Si on ajoute à l'angle mEb , l'an-

gle $BE m$, on aura l'angle $BE b = \frac{q^3}{q^3 - 12Ms} S$.

§. LIII. Les résultats que nous venons de trouver, méritent toute notre attention. Nous voyons que l'angle $BE b$ est toujours plus grand que l'angle $BE m$, tant que le centre de gravité du corps plongé est plus haut que le centre de gravité de la partie submergée homogène. Il est vrai que nous n'avons considéré qu'un plan plongé verticalement; mais on n'a qu'à supposer le navire être un prisme construit sur un tel plan, pour pouvoir appliquer nos formules aux navires; remarquons d'ailleurs, que le dénominateur sera pour tous les vaisseaux, quelque figure qu'ils aient, proportionnel à la stabilité naturelle du vaisseau, & que cette stabilité est toujours composée de deux parties, dont l'une dépend uniquement de la section du vaisseau à fleur d'eau, & l'autre de la hauteur verticale du centre de gravité du vaisseau par-dessus le centre de gravité de la carene. Si nous dénotons donc généralement la première partie

Prix de 1757.

L

par P , & l'autre par Q , nous aurons généralement l'angle $m E b = \frac{Q}{P-Q} S$, & l'angle $B e b = \frac{P}{P-Q} S$.

Suivant la construction des navires, leur charge & le lest qu'on emploie, le rapport de P à Q est tantôt plus grand, tantôt plus petit; mais il est certain que souvent la quantité Q va jusqu'à la moitié, & peut-être même jusqu'aux deux tiers de la quantité P . Supposons, par exemple, $Q = \frac{1}{2} P$: dans cet exemple l'angle $B E b$ fera le double de l'angle $B E m$; c'est-à-dire, que l'inclinaison du navire sera deux fois aussi grande que l'inclinaison de la surface des eaux. Si donc les eaux étoient inclinées de 15 ou 20 degrés, le navire pourroit s'incliner de 30 ou 40 degrés, en faisant abstraction de l'erreur que la grandeur de tels angles peut jeter sur nos formules, & il est à remarquer que les vaisseaux seront quelquefois obligés de prendre de telles inclinaisons uniquement pour se mettre à l'équilibre; & si l'on fait attention qu'ils pourront s'élancer par l'impulsion reçue au-delà de l'équilibre, on doit être effrayé de ces énormes agitations qui peuvent arriver, surtout aux roulis; car par rapport au tangage, la quantité P est toujours beaucoup plus grande que Q . Il pourroit même y avoir des corps qui auroient un certain degré de stabilité dans les eaux calmes, & qui seroient renversés par une petite inclinaison des eaux.

§. LIV. Ce sont les angles $B E b$ qui forment les *balancemens d'équilibres* dont j'ai fait mention au commencement de ce chapitre, & qui pourroient devenir excessifs, si on n'y apportoit aucun remède. Ces balancemens seront isochrones & synchrones avec les balancemens des eaux, qui par bonheur se font beaucoup plus lentement dans les grandes lames que les *balance-*

mens naturels du navire, sans quoi l'inclinaison BEb seroit encore extrêmement augmentée par les élancements qui surviendroient, à cause de la vitesse des *balancemens d'équilibre*, & cela en raison de $\theta\theta$ à $\theta\theta - tt$, en entendant par θ le tems d'un balancement entier des lames, & par t le tems d'un *balancement naturel* du navire (§§. XXV & XXVI). Comme cependant ces *balancemens d'équilibre* dépendent de la proportion qu'on met entre les quantités P & Q , & qu'on est le maître de donner de grands changemens à cette proportion, il ne sera pas difficile d'y remédier après en avoir découvert la nature. On voit qu'une planche qui nageroit sur les eaux, formeroit ses balancemens d'équilibre parfaitement égaux aux balancemens des eaux, & que l'angle mEb deviendroit nul; on voit aussi qu'une très-longue poutre, chargée de plomb par une de ses extrémités, conserveroit sa position verticale malgré les balancemens des eaux (car je fais abstraction des impulsions de l'eau, ne considérant ici que l'effet du principe de la pesanteur); de sorte que les angles BEb seroient entièrement anéantis. Aussi l'un & l'autre cas sont-ils parfaitement bien indiqués par notre théorie; car dans le premier cas on peut supposer $Q = 0$, comme étant proportionnel à la hauteur verticale entre le centre de gravité de la planche & celui de sa partie submergée, laquelle hauteur peut être censée nulle; desorte que l'angle mEb ($= \frac{Q}{P-Q} S$) devient nul; & dans le second cas, c'est P qui peut être censé nul, à cause de la petitesse de la section de la poutre par la surface des eaux, ce qui donne l'angle BEb ($= \frac{P}{P-Q} S$) $= 0$.

§. LV. Mais quel est le but qu'on doit se proposer à l'égard de ces balancemens? Doit-on tâcher d'imiter l'exemple de la planche, ou celui de la poutre, ou

L ij

quelqu'autre état moyen ? Il me semble que c'est absolument celui de la planche. Car si on vouloit anéantir les balancemens d'équilibre, ou les diminuer trop, il arriveroit toujours qu'une moitié du navire seroit comme noyée, & que l'autre fortiroit trop des eaux; & comme le navire est toujours sujet à d'autres balancemens, ceux-ci pourroient devenir dangereux aux navires déjà fortement noyés par un côté ou par une moitié. Je suis donc d'avis qu'on doit se proposer d'anéantir simplement l'angle mEB , & de rendre les *balancemens d'équilibre* égaux aux balancemens des eaux; c'est ce que les Marins appellent *obéir à la lame*. M. Chauchoy dit, à la fin de la page 38, *qu'il ne faut pas que le navire obéisse trop à la lame*; mais je ne doute pas qu'il ne soit de mon avis, quant aux lames que j'appelle régulières; car quant aux lames irrégulières, qui agissent brusquement & sans ordre ni régularité, l'inertie de la matiere du navire l'empêchera bien d'obéir entierement à cette espece de lames. Il est de conséquence de distinguer les lames & d'en examiner les différens effets, aussi bien que de distinguer les balancemens du navire, tels que les *balancemens naturels*, les *balancemens forcés* & les *balancemens d'équilibre*.

§. LVI. Après avoir bien établi la maxime qu'on doit se proposer à l'égard des *balancemens d'équilibre*, il est question d'examiner ce qu'on peut faire pour y satisfaire. J'ai déjà dit qu'il faut faire $Q = 0$, & par conséquent $S = 0$, c'est-à-dire, qu'il faut, pour la position droite du navire, faire descendre le centre de gravité du navire jusqu'au centre de gravité de la carene censée homogène, & faire tomber précisément l'un sur l'autre. Je crois cet article si essentiel à tous égards, que je voudrois qu'on y mît toute l'attention requise. Ordinairement le centre de gravité du navire est plus haut que celui de la carene, & il sera difficile de faire tomber ces deux points l'un sur l'autre, si on ne veut don-

ner beaucoup de creux au navire, employer du bon lest & en quantité suffisante, arranger avec soin tout ce qui doit être mis sur le vaisseau, élargir le navire vers la flottaison afin de hauffer le second centre, ménager la matiere en tout ce qui est hors de l'eau, & prodiguer en quelque façon le fer vers le fond du navire. Il est sûr qu'avec toutes ces attentions on pourra déprimer le centre de gravité du navire chargé jusqu'au centre de gravité de la carene, & encore plus bas si on le vouloit.

Après qu'on sera parvenu à mettre les deux centres de gravité dans un seul & même point, la stabilité du navire pour les petites inclinaisons ne dépendra plus que de la section du navire par la surface horizontale de l'eau, & si on appelle q la largeur de cette section, pour une abscisse x , prise dans la longueur, la stabilité sera simplement $= \sigma \int \frac{1}{12} q^3 dx$, en entendant par σ le petit angle d'inclinaison (§. XIII). Cette simple formule servira à reconnoître par une expérience facile à faire, si l'on aura bien réüssi à mettre les deux centres de gravité à la même hauteur. Si ladite section étoit irrégulière, on pourroit trouver la quantité $\int \frac{1}{12} q^3 dx$ par parties, comme M. Bouguer le fait en plusieurs occasions. Si cette section étoit un rectangle, qui eût pour largeur a , & pour longueur b , la stabilité en largeur deviendroit $= \frac{1}{12} a^3 b \sigma$; & j'ai conseillé de la rendre à-peu-près telle, & de ne s'en écarter qu'autant que l'arrondissement des angles le demande; mais pour la construction ordinaire des navires, on peut supposer la section formée par deux demi-ellipses, sans tomber dans aucune erreur sensible; & j'ai démontré, au milieu du §. XIII, qu'alors la stabilité en largeur devient $= \frac{11}{224} a^3 b \sigma$, en entendant par a & par b la plus grande largeur & la plus grande longueur de la section. Si l'on exprime en piés les quantités a & b , la formule donnera un certain nombre de piés cubes d'eau agissant sur un

levier pris à volonté ; & si on divise la formule par 28, on aura, au lieu de piés cubes d'eau, des tonneaux à raison de 2000 liv. chacun ; le *momentum* de la stabilité fera donc, en tonneaux pour le poids, & en piés

pour le levier, $\frac{a^3 b \sigma}{570}$. Après avoir calculé cette quan-

tité, on pourra appliquer horizontalement & perpendiculairement à la longueur du navire un certain nombre de leviers qui débordent le navire, & suspendre par les extrêmités de ces leviers des poids assez forts pour faire pancher le navire de côté d'un angle d'environ deux degrés ; on mesurera cet angle avec beaucoup de précision, par le moyen d'un bon instrument, & on prendra la somme de tous les *momentum* des forces appliquées pour faire pancher le na-

vire. Si on trouve cette somme égale à $\frac{a^3 b \sigma}{570}$, ce fera

une marque que les deux centres de gravité sont réunis dans un même point ; si elle est plus petite ou plus grande, le centre de gravité du navire sera plus haut ou plus bas que le centre de gravité de la carene ; & si on connoît la solidité de la carene, on pourra exactement déterminer de combien le premier centre est plus haut ou plus bas que l'autre ; car si la somme des *mo-*

mentum en question est à la quantité $\frac{a^3 b \sigma}{570}$ comme

n à m , on aura $P : P - Q = m : n$, & par consé-

quent $Q = \frac{m-n}{m} P$, & comme $Q = m s \sigma$, en en-

tendant par M la solidité de la carene, on aura $M s \sigma$

$= \frac{m-n}{m} P = \frac{m-n}{m} \times \frac{a^3 b \sigma}{570}$, & par conséquent $s =$

$\frac{m-n}{m} \times \frac{a^3 b}{570 \times M}$; & dans cette formule, il faudra ex-

primer la solidité de la carene pareillement en tonneaux de 2000 livres. Une telle expérience demande que les eaux soient entièrement calmes. Voici un exemple qui éclaircira ces règles.

Soit $a = 30$ piés ; $b = 100$ piés ; la solidité de la carene $= 750$ tonneaux ; $\sigma = 0,03$ qui répond à une

inclinaison de $1^d. 43^m.$, on aura $\frac{a^3 b \sigma}{570} = 142 \frac{2}{19}$;

qu'on applique cinq leviers, chacun de 30 piés de longueur, depuis le milieu du tillac ; si l'on avoit chargé l'extrémité de chaque levier de $\frac{18}{19}$ de tonneau, on en conclurra, que le centre de gravité du navire est précisément au centre de gravité de la carene ; mais si dans l'expérience on n'y avoit suspendu que $\frac{15}{19}$ de tonneau, on auroit $m = 6$ & $n = 5$, ce qui donneroit $s = \frac{20}{19}$ p. & d'où il faudroit inférer que le centre de gravité du navire est élevé par-dessus le centre de gravité de la carene d'un pié $7 \frac{11}{19}$ lignes. En ce cas, je conseillerois de lester davantage le navire, quand même ce seroit au préjudice de la charge, à moins qu'on ne puisse faire descendre un peu le centre de gravité par un arrangement plus convenable de la charge ; mais quand même on ne voudroit rien changer, il seroit toujours bon de faire cette sorte d'expérience pour chaque navire, car un Pilote entendu doit être exactement informé de l'état de son vaisseau. Si on ne trouvoit pas nécessaire de déprimer le centre de gravité du navire tout-à-fait jusqu'au centre de gravité de la carene, il faudroit du moins fixer à quelle hauteur on doit mettre le premier par-dessus l'autre, & cette hauteur doit toujours faire une partie aliquote de la plus grande largeur de la section du navire par la surface de la mer, comme la vingtième, la vingt-cinquième, ou la trentième partie, & par-là on se mettra en même tems en état de fixer le lest, qu'on ne détermine que d'une manière fort vague ;

il ne faut donner au hazard que le moins qu'il est possible.

§. LVII. Nous avons considéré jusqu'ici le vaisseau comme beaucoup plus petit, tant en longueur qu'en largeur, que n'est toute la largeur d'une lame. Je ne m'arrêterai pas à détailler tous les autres cas qui peuvent arriver ; ils sont en trop grand nombre. Il faudroit avoir égard à la largeur des lames , à la longueur & à la largeur du navire , à l'angle que le navire forme avec le plan de la cinquieme figure , à la vitesse du navire , à la durée de chaque balancement des lames , &c. & si on vouloit combiner toutes ces variations, il en résulteroit des questions infinies, que j'aime mieux abandonner à l'intelligence de mon lecteur ; je me contenterai de remarquer qu'aux points *d* & *f* l'inclinaison des eaux est nulle ; que cette inclinaison est la plus grande dans les nœuds ; que les eaux sont d'autant moins comprimées qu'elles sont plus élevées , & d'autant plus comprimées qu'elles sont plus basses ; que lorsque le vaisseau se trouve sur la convexité des eaux, il doit être soutenu plus par le milieu que par les extrêmités ; & que sur la concavité il arrive le contraire ; que les inclinaisons des eaux sont tantôt affirmatives, tantôt négatives, à la même distance des nœuds ; & qu'au milieu de chaque balancement la surface des eaux devient tout-à-fait plane. Je ne fais pas ces réflexions comme devant nous servir à trouver quelques nouvelles corrections, quant à la construction du navire ; mais plutôt comme tendantes à expliquer la nature du roulis & du tangage, & leur variations suivant les différentes circonstances où le navire se trouve à chaque moment, & même à diminuer ces balancemens par quelques autres attentions ; comme, par exemple, de tâcher de tenir le milieu entre deux nœuds, lorsque les lames prennent par le travers ; de franchir les nœuds, lorsque la lame est prête à se mettre de niveau ; de couper la lame sous

un

un angle plus ou moins grand , suivant qu'on craint davantage le tangage ou le roulis ; de faire force de voiles , lorsqu'on n'appréhende pas le vent , d'autant qu'un vaisseau cinglant fera toujours moins agité qu'un vaisseau flottant ; de faire à plusieurs reprises de fausses routes , mais bien entendues , &c. L'art de bien gouverner ne sera pas sans succès dans ces occasions ; & quoique les lames ne soient jamais aussi régulières que je les ai supposées dans ce chapitre , nos réflexions n'en seront pas moins utiles. La maxime principale que j'ai prétendu établir , est celle de réunir , s'il est possible , les deux centres de gravité dans un seul & même point.

CHAPITRE VI.

Quelques réflexions particulières sur le Tangage.

§. LVIII. **D**ANS tout le cours de ce Mémoire , j'ai traité également du Roulis & du Tangage ; & je n'ai pas manqué , toutes les fois que l'occasion le demandoit , de considérer en particulier l'une ou l'autre espece de balancemens.

J'ajouterais cependant encore quelques réflexions particulières sur le Tangage. La stabilité est beaucoup plus grande pour le tangage que pour le roulis ; si on prend des inclinaisons égales de part & d'autre. En supposant les centres de gravité du navire & de la carene à la même hauteur , en considérant la section horizontale du navire à fleur d'eau comme elliptique ou formée par deux demi-ellipses , & en ne considérant que de petites inclinaisons , les deux stabilités seront entre elles comme

Prix de 1757.

M

le carré de la longueur au carré de la largeur. Cette raison, jointe à la grande résistance de l'eau, fait que le mouvement angulaire du tangage est beaucoup plus petit que celui du roulis; mais la grande distance de la proue & de la poupe, depuis l'axe de rotation, fait aussi que leur mouvement absolu ne laisse pas de surpasser souvent celui des flancs dans les roulis; aussi exhauße-t-on les bords vers la proue & la poupe pour prévenir les suites funestes de ce mouvement absolu. Le mouvement du tangage est ordinairement arrêté brusquement par la grande résistance de l'eau, qui ne sauroit être déplacée assez vite, & qui est frappée dans une très-grande surface. Il est sûr que la matiere & le corps du navire sont fort fatigués par ces rudes coups; mais comme ils arrivent dans un tems où l'une des deux extrémités peut-être déjà extrêmement baissée, pendant qu'il lui reste encore beaucoup de mouvement, on peut dire que ce sont précisément ces violens & subits efforts qui sauvent le navire. Le tangage ne sauroit répondre à la nature des *balancemens libres*, parce que la grande résistance des eaux arrêteroît aussitôt ces balancemens. Le *tangage d'équilibre* sera aussi tel qu'il doit être sur les grandes lames régulières, parce que la partie de la stabilité qui dépend de la section du navire à fleur d'eau, est ici comme infiniment plus grande que celle qui dépend de la hauteur verticale entre les deux centres de gravité; je veux dire que le navire obéira assez bien à la lame par sa longueur, lorsque la lame est grande & régulière. Il n'y a donc que le tangage *forcé* & formé par des causes irrégulières, qui puisse mériter notre attention. L'inégalité du vent ne sauroit faire ici aucun effort sensible à cause de la grande stabilité; le mouvement horizontal des eaux contre le navire ne sauroit faire non-plus un grand effet pour le faire tanguer. En un mot, le tangage excessif ne sauroit être produit que par un mouvement subit & violent des eaux du

bas en-haut , ou parce que l'eau cessera subitement de soutenir le navire dans toutes les parties de la carene. Les brisants d'eau peuvent occasionner ces deux causes ; car lorsque deux lames viennent à se choquer , les eaux du milieu sont extrêmement comprimées , & cette compression lance les eaux en-haut avec beaucoup de force , après quoi les eaux des deux lames brisées se retirent avec un mouvement contraire & laissent un vuide au milieu. La partie du navire qui se trouve au milieu de ces eaux comprimées , sera lancée pareillement en-haut ; & puis le poids de cette partie , faute d'être soutenu , causera un mouvement contraire également violent , jusqu'à ce que le navire retrouve les pleines eaux & en soit soutenu dans toute la carene ; après quoi ce mouvement sera arrêté assez promptement.

§. LIX. Ces agitations irrégulières du navire seront toujours composées de deux mouvemens ; savoir , d'un mouvement de rotation autour de l'axe qui passe par le centre de gravité , & d'un autre par lequel tout le corps du navire montera ou descendra un peu avec précipitation ; le mouvement absolu se fait sur l'axe de rotation spontanée ; mais comme le second mouvement allégué n'entre pas ici en compte , il faut , dans le tangage , toujours considérer la ligne qui passe par le centre de gravité comme l'axe de rotation.

Si donc cette ligne est plus proche de la proue que de la poupe , le mouvement sera plus grand vers la poupe que vers la proue , & cela arrive en plaçant le fort du navire plus près de la proue que de la poupe ; car le centre de gravité de la carene étant par-là approché de la proue , le centre de gravité du navire doit l'être pareillement. Je conseillerois donc de placer le fort du navire au milieu de la carene , à moins qu'on ne prétende exprès de jeter dans le tangage plus de mouvement sur la poupe que sur la proue ; il est sûr que le navire n'en sillerait que mieux , quoique quel-

ques-uns prétendent le contraire. L'autorité de M. Bouguer devrait suffire à ceux-ci pour se défabuser de ce faux préjugé. Il est vrai, & ce même illustre Auteur l'a fort bien démontré, qu'en bien des cas le navire gouverne mieux, tant par les voiles que par le gouvernail, lorsqu'il est renflé vers la proue; mais je doute que cela soit généralement vrai. Je crois aussi que lorsqu'on ne réussit pas à bien gouverner le navire, c'est le plus souvent plutôt par la faute d'une manœuvre bien entendue, que par aucune mauvaise construction du navire; une manœuvre réussira quelquefois, & manquera une autrefois, simplement parce que la vitesse du navire est un peu plus grande. Je suis d'avis qu'il faudroit plutôt s'appliquer à perfectionner la manœuvre pour toutes les circonstances où l'on peut se trouver, qu'à gagner un peu plus de facilité à gouverner par une construction nuisible aux qualités les plus essentielles du navire; peut-être aussi qu'on ne feroit pas mal d'ajouter à l'usage du gouvernail celui de longues rames, simplement mobiles dans le plan vertical, qui doit être aussi celui des pales, & perpendiculaires à la longueur du navire. Il est sûr qu'en plongeant ces pales dans l'eau, elles feroient plus d'effet que le gouvernail, pour peu qu'on leur donnât de surface, & qu'on en multipliât le nombre; un gouvernail de moyenne grandeur n'a qu'environ 50 piés quarrés de surface, & il faut, à cause de l'obliquité, lors même qu'elle est la plus avantageuse, en retrancher presque les deux tiers, & enfin le corps de la carene empêche encore l'eau d'agir de toute sa force sur le gouvernail; d'où l'on voit assez que l'effet des pales ne sauroit manquer d'être considérable, surtout si on fait duement incliner leurs plans verticaux à l'égard de celles qui ne seroient pas appliquées au milieu du navire. De pareilles rames pourront encore être employées utilement dans plusieurs autres occasions & avec un maniement convenable & bien

exécuté ; elles pourront même servir à modérer un peu les agitations du navire.

§. LX. C'est à-peu-près sur le même principe qu'on doit déterminer la *quête de l'estambot*, de laquelle les constructeurs ne conviennent pas. Je voudrois que l'inclinaison de l'estambot, qui est une piece droite, fût égale à l'inclinaison de la tangente de l'estrave à l'endroit qui est à fleur d'eau ; on sait que cette estrave est une piece courbe faisant un arc de cercle de 70 degrés, & par conséquent inégalement inclinée dans toute sa longueur. L'élançement de l'estrave est sans doute très-nécessaire ; & si on pouvoit l'augmenter sans nuire à la force de l'assemblage des pieces qui forment l'éperon, ou sans tomber dans d'autres inconvéniens, on devoit le faire à mon avis ; on diminueroit la résistance de l'eau dans le sillage, & on augmenteroit la stabilité du navire contre le tangage, parce qu'on augmenteroit la section du navire à fleur d'eau ; on élèveroit un peu le centre de gravité de la carene, & il seroit d'autant plus facile de le réunir avec celui du navire. Ces mêmes raisons, excepté la première, concourent pour faire augmenter la quête de l'estambot ; d'ailleurs, il sera utile de rendre égales & semblables les deux moitiés de l'avant & de l'arrière de la section horizontale du navire à fleur d'eau, afin de distribuer également sur la proue & sur la poupe le mouvement du tangage. En suivant ma regle sur la quête de l'estambot, cette égalité subsistera même dans le navire lorsqu'il sera un peu incliné, au lieu que si on vouloit élèver l'estambot tout droit, & que la proue s'élevât par-dessus la surface de la mer, il arriveroit que ladite section seroit considérablement raccourcie, & que les deux moitiés en deviendroient d'autant plus dissimilaires. M. Chauchot n'a pas manqué de conseiller pareillement de rendre la proue semblable à la poupe un peu au-dessus & au-dessous de la ligne de flottaison.

§. LXI. Il est naturel de dire, qu'on diminuera encore le tangage en augmentant la longueur du navire. Ce qu'il y a de sûr, est que la stabilité en seroit considérablement augmentée. Cependant comme la quille n'est déjà que trop sujette à s'arquer, il est à craindre qu'on n'augmente ce mal en augmentant trop la longueur de la quille ; car quand même on pourroit distribuer la charge d'une manière que le poids de chaque tranche verticale du navire perpendiculaire à sa longueur fût égale au poids de l'eau déplacée par cette tranche, ce qui seroit apparemment le meilleur moyen pour empêcher la quille de s'arquer, on voit assez que cet équilibre ne subsisteroit plus pendant les agitations de la mer & du navire, qui sont presque continuelles. Il se peut d'ailleurs qu'il y ait une certaine proportion entre les dimensions du navire & celles de la masse d'eau qui tend à agiter le navire, qu'on doit craindre davantage ; & est-il bien sûr qu'on s'éloigne le plus communément de cette proportion en augmentant la longueur du navire ? Je crois bien qu'on diminuera presque toujours par-là le mouvement angulaire du tangage, & que par conséquent la mâture en sera moins fatiguée ; mais il n'est pas sûr qu'on diminue généralement parlant le mouvement absolu de la proue & de la poupe. Il ne faut pas non plus que le navire se refuse trop à l'impression des lames, ce qu'il pourroit faire à cause de sa grande masse, surtout à l'égard des lames irrégulières, qui agissent avec promptitude, & qui ne répliquent pas leurs efforts. Un navire qui conserveroit sa position droite à l'égard de l'horizon, & qui par conséquent n'auroit ni roulis ni tangage, seroit continuellement noyé soit par la proue soit par la poupe, & courroit risque de se remplir d'eau & de couler à fond. Il y a tels articles sur lesquels il faut consulter l'expérience plutôt que la simple théorie.

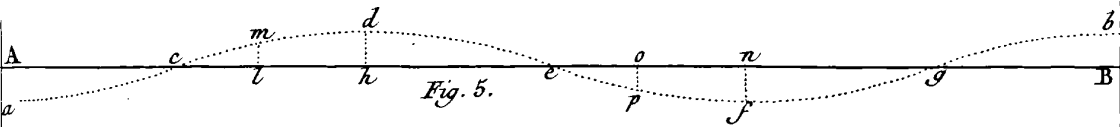
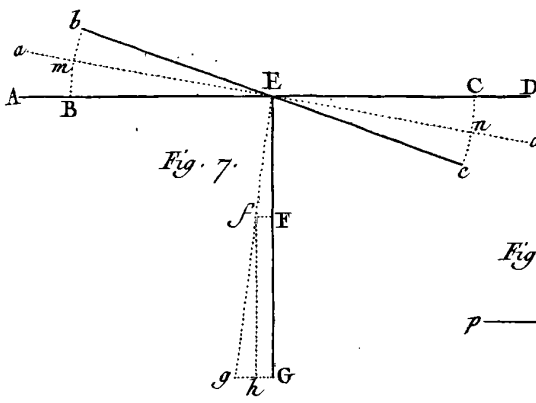
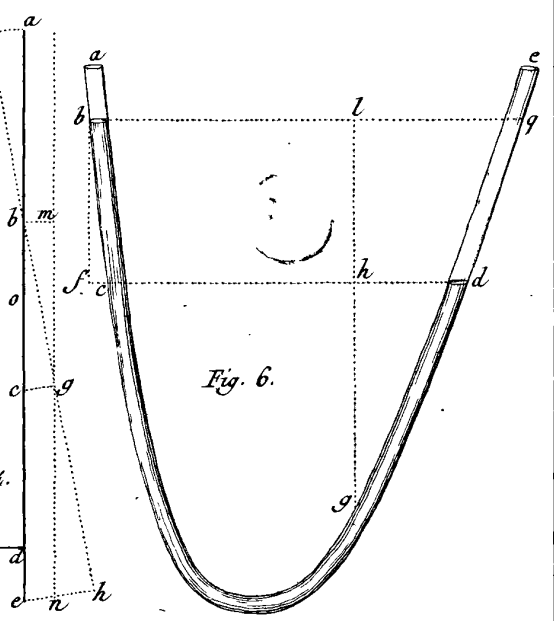
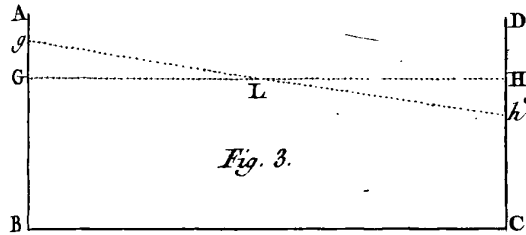
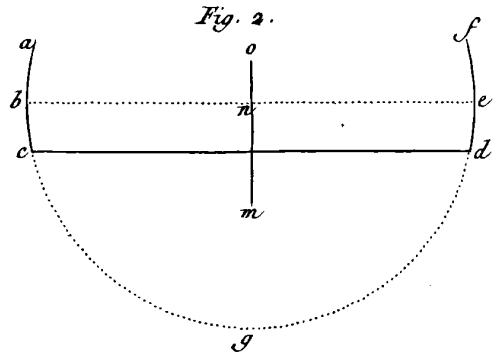
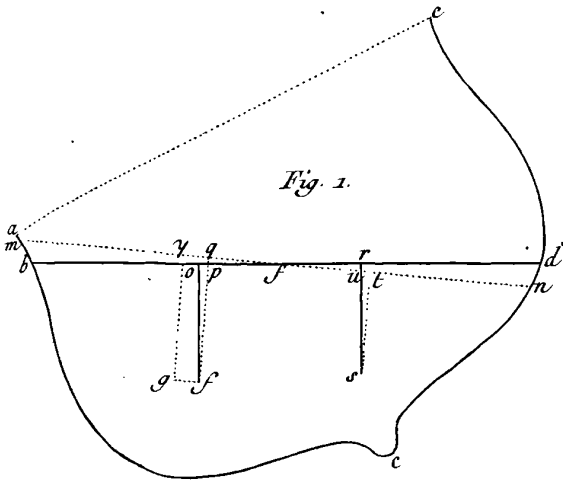
§. LXII. On aidera le navire à obéir à la lame en

le chargeant & le lestant beaucoup plus vers le milieu que vers les extrêmités ; car de cette maniere la matiere du navire oppose moins d'inertie aux efforts de la lame. Si au contraire on remarquoit au navire trop de promptitude à obéir aux efforts des eaux agitées, il faudroit jeter plus de charge vers les extrêmités, & soulager le milieu. Les *balancemens libres*, s'ils trouvoient lieu dans le tangage, se feroient plus rapidement dans le premier cas que dans le second. Cette réflexion ne doit pas nous prévenir contre la maxime de surcharger le milieu du navire, parce que les balancemens du tangage appartiennent presque uniquement à la classe des *balancemens forcés*, dont les durées dépendent simplement des agitations de l'eau. Je dirai à cette occasion que les *balancemens libres* du tangage ne fauroient manquer de s'achever beaucoup plus rapidement que ceux du roulis. Je trouve même qu'ils ne dépendent presque point de la longueur du navire, & que leur durée est pour la plus grande partie déterminée par la simple hauteur du tirant d'eau ; le pendule isochrone sera tout au plus égal à cette hauteur ; mais je ne l'estime pas si long, parce qu'il y a plus de matiere vers le milieu du navire, que vers les extrêmités, qui ont le plus de mouvement. Un parallépipede, dont la longueur seroit beaucoup plus grande que sa largeur & sa hauteur, s'il étoit uniformément pesant dans toute sa longueur, seroit ses balancemens, dans le sens de longueur, isochrones avec un pendule simple, dont la longueur seroit égale à la hauteur de son tirant d'eau ; & cette remarque suffit pour voir la vérité de ce que je viens de dire. Ainsi un navire qui a 18 piés de tirant d'eau, fera ses *balancemens libres* du tangage en moins de $2\frac{1}{3}$ secondes. Ceux du roulis sont plus lents par plusieurs raisons, dont la principale est à mon avis la hauteur qu'on donne ordinairement au centre de gravité du navire par-dessus le centre de gravité de la carene, laquelle hauteur dimi-

nue trop sensiblement la stabilité du navire dans le sens de sa largeur, & par conséquent la force qui tend à redresser le navire. En réunissant les deux centres de gravité, comme j'ai conseillé de faire, autant qu'il est possible, les *roulis libres* se feront plus rapidement. Ce seroit là un inconvénient, si les roulis actuels n'étoient presque toujours des *roulis forcés* & non des *roulis libres*. Les roulis forcés, je le répète, sont isochrones avec le balancemens des lames, qui le plus souvent sont beaucoup plus lents que les *roulis libres* du navire. On gagnera donc par l'accélération des *roulis libres*, parce qu'on évitera presque toujours ce cas fâcheux duquel j'ai parlé aux §§. XXIII, XXVI & XLII, qui arrive lorsque les accès de forces qui agitent le navire sont isochrones avec les *balancemens libres* du navire.

§. LXIII. Voilà les principes que j'ai cru pouvoir servir à la solution de notre question; j'espère qu'ils seront de quelque utilité, tant aux Pilotes qu'aux Constructeurs de Vaisseaux. C'est à eux que je laisse le soin d'en faire usage avec les précautions nécessaires, suivant leurs connoissances acquises, les priant seulement de les écouter sans ce préjugé qui retarde si souvent la perfection des arts & des sciences. Ils suppléeront facilement à ce que j'ai pu omettre, & sauront employer ces principes avec beaucoup plus de succès que je n'ai pu faire dans les circonstances où je me trouve,

F I N.



EXAMEN

Des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties d'un
Vaisseau dans le Roulis & dans le Tangage.

O U

RECHERCHES

SUR LA DIMINUTION DE CES MOUVEMENS.

Piece qui a partagé le Prix de l'Académie en 1759.

*Par M. L. EULER, Directeur de l'Académie Royale des Sciences
& Belles-Lettres de Prusse.*

Insequitur clamorque virum stridorque rudentum.

Prix de 1759;

A



AVANT-PROPOS.

QUAND on se propose de diminuer les mouvemens de Roulis & de Tangage des navires , il ne s'agit pas tant de rendre ces mouvemens réguliers & conformes à ceux d'une pendule , que d'empêcher les funestes effets que leur impétuosité pourroit causer.

M. Chauchot , qui a remporté le premier prix sur cette question , a très-judicieusement remarqué , que l'intention de l'Académie Royale des Sciences de Paris étoit de prévenir les risques auxquels sont exposés la mâtüre & l'assemblage des parties d'un navire , & les incommodités que les Marins éprouvent lorsque les agitations , d'où résultent les mouvemens de roulis & de tangage , deviennent trop violentes.

Cependant ce même Auteur ne semble pas s'être exprimé assez exactement , quand il dit que la trop grande vitesse de ces mouvemens cause les inconvéniens qu'il faut tâcher d'éviter : car quelque rapide que soit un mouvement , dès que toutes les parties d'un vaisseau en sont également portées , leur assemblage n'en sauroit plus souffrir , que si elles se trouvoient dans un repos parfait. Tant qu'un corps

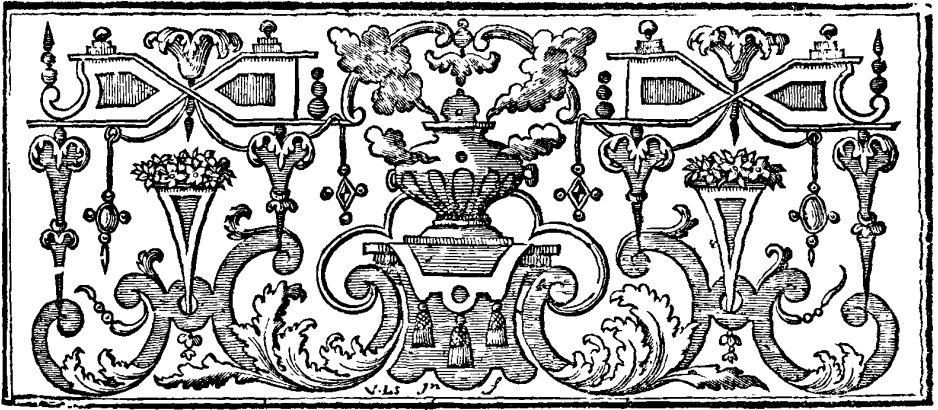
A ij

se meut d'un mouvement uniforme, qui soit le même dans toutes les parties, leur liaison mutuelle n'en éprouve aucun effort, quelque rapide que soit le mouvement.

Ce n'est donc pas la vitesse même, quelque grande qu'elle soit, d'où résultent les inconvéniens dont il est question; mais leur véritable source doit être cherchée dans l'accélération ou retardation du mouvement: & c'est de-là que naissent les efforts que les diverses parties d'un vaisseau éprouvent, pour changer le mouvement qu'elles ont actuellement, & pour suivre celui dont le vaisseau tout entier est porté.

Un corps ne s'oppose au mouvement, qu'entant qu'il est différent de celui qu'il a déjà, & par cette raison aussi les parties d'un vaisseau n'éprouvent des efforts qu'entant qu'elles sont obligées de changer leur état soit de repos ou de mouvement.

C'est donc de ce principe que je me propose de rechercher les efforts auxquels les parties d'un vaisseau sont assujetties, pendant qu'il est agité d'une manière quelconque; & cette même recherche découvrira ensuite les moyens de déterminer & de diminuer ces efforts, autant que les autres circonstances le permettent.



EXAMEN

*Des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties
d'un vaisseau dans le Roulis & dans le
Tangage.*

PREMIERE PARTIE.

Des efforts que l'assemblage des membres
éprouve des forces quelconques dont le
navire est sollicité.

I.

TANT qu'un corps n'est sollicité par aucune force, s'il n'est pas en repos, il se mouvra uniformément selon la même direction, ou il tournera sur soi-même autour d'un axe, qui passe par son centre de gravité.

6] RECHERCHES SUR LE ROULIS

Dans le premier cas, la liaison des parties du corps ne souffre rien du tout, & chacune fuit d'elle-même le mouvement du corps entier.

Mais si le corps tourne autour d'un axe, les parties en acquièrent une force centrifuge, par laquelle elles s'éloigneroient actuellement de l'axe de rotation, si elles n'étoient pas assez fortement liées ensemble.

Dans ce cas donc, quoique le mouvement soit uniforme, & qu'aucune force n'agisse sur le corps, la liaison des parties éprouve des efforts auxquels elle doit résister, & qui sont égaux aux forces centrifuges de chaque partie.

Or on connoît tant la quantité de ces forces que leur direction, qui est toujours perpendiculaire à l'axe de rotation.

I I.

Un tel mouvement de rotation se trouve dans le roulis & le tangage, & quoiqu'il ne soit pas uniforme, on peut néanmoins déterminer par la même règle la force centrifuge de chaque partie du vaisseau, en sachant, pour chaque instant la vitesse de rotation.

FIG. 1.

Soit G le centre de gravité d'un vaisseau par lequel passe l'axe, autour duquel se fait le roulis ou le tangage, & qu'on conçoive cet axe perpendiculaire au plan de la figure.

Qu'à l'instant présent le mouvement de rotation soit tel, qu'à la distance $= d$ de l'axe la vitesse soit due à la hauteur $= u$.

Qu'on considère maintenant une partie quelconque du vaisseau M , dont la masse soit $= m$, & la distance à l'axe de rotation $MG = r$.

La vitesse de rotation de cette masse sera donc due à la hauteur $\frac{ru}{d}$, & partant sa force centrifuge $\frac{2mru}{d}$,

dont la masse sera sollicitée selon la direction MP opposée à MG .

Il faut donc que la connexion de cette partie avec le corps du vaisseau soit assez forte pour soutenir cet effort.

III.

Cet effort est le résultat du seul mouvement de rotation, & ne dépend point des forces à l'action desquelles le vaisseau est assujetti.

Je m'en vais donc aussi déterminer les efforts que les diverses parties d'un vaisseau éprouvent de la part des forces actuelles dont le vaisseau est sollicité, afin que connoissant toutes les forces qui y agissent, on soit en état de déterminer les efforts que chaque partie en soutient.

Alors on n'aura qu'à ajouter ensemble tous ces efforts, pour connoître la force totale dont l'assemblage de chaque partie est sollicité ; & de-là on jugera aisément si l'assemblage est suffisant pour soutenir ces forces.

Ensuite, quand on verra comment ces efforts qu'éprouvent toutes les parties d'un vaisseau dépendent des forces auxquelles le vaisseau entier est assujetti, & quelles circonstances contribuent à les augmenter ou diminuer, il ne sera plus difficile de découvrir tous les moyens possibles pour adoucir les fâcheux effets qu'on a à craindre.

IV.

Pour déterminer les efforts que l'assemblage des membres d'un vaisseau éprouve de la part des forces quelconques qui le sollicitent, je commencerai par le cas où toutes les parties sont sollicitées par des forces particulières, qui soient proportionnelles aux masses de chaque partie, & qui agissent selon la même direction.

Dans ce cas, il est évident que toutes les parties re-

§ RECHERCHES SUR LE ROULIS!

cevront le même mouvement, soit qu'elles soient liées ensemble, ou non; & partant leur assemblage n'éprouvera aucun effort.

Puisque la gravité agit selon cette loi également sur toutes les parties, l'assemblage des parties d'un vaisseau n'en souffre rien: d'où l'on voit, qu'à l'égard des autres forces, la liaison des parties n'est mise en action qu'en tant que les forces qui sollicitent séparément chaque partie, ne sont pas proportionnelles à leurs masses, ou qu'elles n'agissent pas selon la même direction.

V.

FIG. 2.

Considérons deux corps A & B , liés ensemble par la corde ab ; & dont l'un A soit sollicité selon la direction fg par une force $= P$, qui ne sauroit être mis en mouvement sans que l'autre B fût aussi entraîné par l'action de la corde ab , dont il s'agit de déterminer la force ou la tension.

Soit cette tension $= T$, laquelle tirant le corps A en arriere, celui-ci ne sera sollicité que par la force $P - T$, pendant que l'autre B est entraîné par la force T .

Donc, puisque ces deux corps doivent recevoir le même mouvement, il faut que les forces $P - T$ soient proportionnelles aux masses A & B ; ou qu'il soit $P : A + B = T : B$; d'où l'on trouve la tension cherchée $T = \frac{B}{A+B} \cdot P$, qui est égale à la force, que la liaison de ces deux corps A & B , ou la corde ab doit soutenir.

S'il y avoit plusieurs corps liés ensemble, on détermineroit de la même maniere les efforts que chaque liaison éprouve.

VI.

De la même maniere, si l'on considère plusieurs parties dans les corps, on pourra déterminer les forces dont

dont chacune sera sollicitée. Mais cela se trouve plus aisément par la théorie de l'accélération qu'une force sollicitante produit dans chaque partie du corps ; dans cette recherche, il faut distinguer deux cas, selon que la direction de la force passe par le centre de gravité du corps, ou non.

Pour le premier cas, soit $ABCD$ un vaisseau ou un autre corps quelconque, dont la masse entière soit $= M$; & que ce corps soit sollicité par la force $FP = P$, dont la direction passe par le centre de gravité G du corps. FIG. 3.

Cela posé, on fait, par les principes de la Mécanique, qu'une telle force tend à imprimer à toutes les parties du corps une égale vitesse, selon la direction de la force FP , & que l'accélération est exprimée par $\frac{P}{M}$, en supposant le corps roide, de sorte que les intervalles entre toutes ses parties soient inaltérables.

VII.

Concevons maintenant une partie quelconque M de ce corps, dont la masse soit $= m$; & puisqu'elle reçoit une accélération $\frac{P}{M}$, selon la direction Mp parallèle à FP , elle sera mise également en mouvement, que si elle étoit détachée du corps entier, & qu'elle fût sollicitée à part par une force $Mp = p$; en sorte que $\frac{p}{m} = \frac{P}{M}$, & partant $p = \frac{mP}{M}$.

Il faut donc que l'assemblage qui affermit cette partie au corps entier, fasse cette fonction, & qu'elle en soit entraînée par la force trouvée $Mp = \frac{mP}{M}$.

Par conséquent, dès qu'on fait la manière dont cette partie est liée avec le corps entier, soit par des cordes

Prix de 1759. B

ges ou autrement, il fera aisé de déterminer les efforts que la liaison doit soutenir, pour en juger si elle est assez forte pour cet effet.

Il en est de même de toutes les parties dont le corps $ABDC$ est composé, & par conséquent on est en état d'assigner tous les efforts que l'assemblage tout entier soutient à cause de l'action de la force $FP = P$.

VIII.

Pour se former une idée plus juste de ces efforts, on peut transporter l'accélération selon un sens contraire sur tout le vaisseau, pour pouvoir se représenter le vaisseau comme étant & demeurant en repos. D'où l'on conclut que la force FP produit le même effet sur la partie M que si le vaisseau demeurant en repos, cette partie étoit sollicitée selon la direction contraire

$M\pi$ par une force $\frac{mP}{M}$.

En effet, si cette partie n'étoit pas attachée, elle seroit *quasi* poussée en arrière selon la direction $M\pi$, relativement au vaisseau.

Cette manière de se représenter la chose est aussi la plus propre pour nous faire connoître l'effort que l'assemblage éprouve: car cet effort, par rapport à la partie $M = m$, est le même que s'il y avoit effectivement

une force $M\pi = \frac{mP}{M}$, qui tendroit à arracher cette partie du corps du vaisseau; & dès qu'une telle force FP commence à agir sur le vaisseau, toutes les parties s'en ressentent de la manière que je viens d'indiquer.

IX.

Tel est l'effet d'une force dont la direction passe par le centre de la gravité du vaisseau; mais si la direc-

tion de la force $FP = P$ ne passe pas par le centre de gravité G , l'effet que chaque membre en ressent est composé de deux parties.

La première partie est la même que si la direction de la force passoit par le centre de la gravité. Donc, si nous considérons un membre quelconque M , dont la masse soit $= m$, celle du vaisseau entier étant $= M$, ce membre sera sollicité par une force $Mp = \frac{mP}{M}$, dont la direction Mp est parallèle à FP .

Ou bien l'assemblage qui tient ce membre uni au vaisseau, éprouvera le même effort que s'il y avoit appliqué au membre M une force contraire & égale $M\pi = \frac{mP}{M}$, qui tendit à l'arracher du vaisseau.

Mais ce n'est qu'une partie de l'effort que ce membre M soutient à cause de la force $FP = P$.

FIG. 4.

X.

L'autre partie doit être déduite du mouvement de rotation que cette force tend à imprimer au corps.

Pour cet effet, il faut tirer du centre de gravité G une perpendiculaire GN , sur la direction FP , & le produit $P \cdot GN$ donne le moment de cette force, qui tend à faire tourner le corps autour d'un axe, qui passe par G , & qui est perpendiculaire au plan GFP .

Maintenant, par rapport à cette axe, il faut chercher le moment d'inertie du corps, lequel se trouve en multipliant tous les éléments de matière par le carré de leurs distance à l'axe de rotation, & en assemblant tous ces produits dans une somme.

Ce moment d'inertie sera donc exprimé par une telle formule, Mkk , par laquelle, si l'on divise le moment de force $P \cdot GN$, on aura l'accélération absolue

$$\frac{P \cdot GN}{Mkk}$$

B ij

Qu'on tire du membre M , que nous considérons comme une masse très-petite à l'axe de rotation, la perpendiculaire GM , & l'accélération rotatoire sur ce membre M fera $\frac{P. GM. GN}{Mkk}$.

Ce membre sera donc emporté par une force $m. \frac{P. GM. GN}{Mkk}$, dans le sens Mr ; ayant tiré la droite Mr perpendiculaire à MG , selon la direction du mouvement de rotation que l'action de la force FP doit produire.

XI.

Donc, puisque le membre M , dont nous supposons la masse $= m$, éprouve, à cause du mouvement de rotation, une force $m. \frac{P. GM. GN}{Mkk}$, selon la direction Mr , c'est en vertu de sa connexion avec le corps du vaisseau qu'il est emporté par cette force égale & contraire.

L'effet donc qui en résulte sur l'assemblage, sera le même que s'il y avoit une égale force $m. \frac{P. GM. GN}{Mkk}$, actuellement appliquée au membre M , selon la direction MG , opposée à Mr , qui tâcheroit de l'arracher du corps du vaisseau; de sorte que si l'assemblage étoit anéanti, ce membre seroit effectivement emporté par cette force.

Or cela doit s'entendre de son état respectif par rapport au vaisseau; car puisque le vaisseau obéit à l'action de la force FP , le membre M n'en étant point entraîné, il en fera de même que si le vaisseau demeurant en repos, le membre M étoit sollicité par ladite force.

XII.

Donc le vaisseau étant sollicité par une force quel-

conque $FP = P$, tous les membres en ressentent des efforts pour rompre leur union mutuelle qu'on connoîtra, en prenant ensemble les deux forces $M\pi$ & MG , que nous venons de trouver.

Ainsi un membre quelconque M dont la masse soit $= m$ exerce sur l'assemblage une force composée de ces deux forces ; l'une selon $M\pi = m \cdot \frac{P}{M}$, & l'autre

selon $MG = m \cdot \frac{P \cdot G M \cdot G N}{M k k}$, où la direction $M\pi$ est parallèle à FP & MG perpendiculaire à MG .

Ensuite GN est tirée du centre de gravité G perpendiculairement sur FP , ayant mené par G l'axe de rotation, qui est perpendiculaire au plan GFP . Aussi est-il bon de remarquer que la droite MG est tirée de M , non au point G , mais perpendiculairement à l'axe de rotation.

Il faut encore remarquer que la direction MG perpendiculaire à MG doit être tirée dans un plan parallèle au plan GFP . Enfin je considère ici la grandeur du membre M , comme extrêmement petite, ou presque comme un point.

XIII.

Si le membre M étoit d'une grandeur considérable, la première des deux forces trouvées $M\pi = m \cdot \frac{P}{M}$, demeureroit bien la même, mais l'autre doit être trouvée par la voie d'intégration.

On concevra le membre entier M partagé dans ses élémens infiniment petits, & on cherchera pour chacun la force MG , qui lui convient tant par rapport à la quantité qu'à la direction, & on déterminera par le calcul intégral la force équivalente à toutes ces forces élémentaires, qui sera celle qu'on doit joindre à la première MG .

Mais si le membre M est assez petit par rapport au vaisseau entier, on pourra bien l'envisager comme réuni dans son centre de gravité, & cela avec d'autant plus de raison, puisque les recherches dont il s'agit ici ne sont pas susceptibles, par leur nature, d'un plus haut degré de précision.

XIV.

Si le vaisseau est en même tems sollicité par plusieurs forces, ou on cherchera l'effet de chacune sur les divers membres, pour en conclure l'effet total que chaque membre en doit ressentir, ou on réduira toutes les forces sollicitantes à une seule.

Et c'est par ce moyen qu'on connoîtra les efforts que l'assemblage de toutes les parties a à soutenir, le vaisseau étant sollicité par des forces quelconques.

Mais cela doit s'entendre seulement des parties qui ne sont pas elles-mêmes sollicitées par aucune force, étant uniquement emportées par leur union avec le corps du vaisseau.

Si la question regarde la partie qui soutient immédiatement l'action de la force externe, il faut encore ajouter cette même force à celles que nous venons de trouver ci dessus.

Ainsi l'assemblage, dont chaque partie tient au corps du vaisseau, soutient premièrement les forces qui sont appliquées immédiatement à cette partie, & ensuite encore les forces $M\pi$ & MG qui résultent, selon les regles données de l'action, de toutes les forces qui agissent sur le vaisseau.

XV.

D'abord, toutes les parties d'un vaisseau étant animées par la gravité, j'ai déjà remarqué que puisque la gravité fuit la raison des masses, l'assemblage ne souffre rien de ce côté.

En effet, si le vaisseau n'étoit pas soutenu par la pression de l'eau, & qu'il pût librement tomber en-bas, il n'en résulteroit aucune force pour altérer la liaison des membres.

Mais le vaisseau étant soutenu par la force de l'eau, l'assemblage sent bien la force de la pesanteur; or c'est à cause de la force même dont le vaisseau est soutenu; & cet effet est très-conforme aux formules trouvées.

Car soit FP la force de l'eau, & elle sera égale au poids du vaisseau, ou $P = M$, & la direction FP sera verticale, passant par le centre de gravité G ; d'où $GN = 0$, & la force $MG = 0$. Donc le membre M agira de même sur l'assemblage que s'il étoit sollicité verticalement en bas par la force $M\pi = m$, qui est égale à son propre poids.

XVI.

Ainsi tant que le vaisseau est en repos, l'assemblage des parties ne soutient d'autres efforts que ceux de leur gravité, à l'exception de la surface de la carene, qui est poussée par la pression de l'eau.

De-là on pourra déterminer quelle doit être la force de l'assemblage des membres du vaisseau, afin qu'il soit suffisant pour résister à ces efforts, & que la figure du vaisseau n'en soit point altérée.

C'est au défaut d'une suffisante force de l'assemblage, que les vaisseaux changent souvent de figure, & que la quille s'arque. Comme c'est un grand inconvénient, quoiqu'il ne regarde pas directement la question proposée, il ne fera pas hors de propos de chercher la force que la quille d'un vaisseau a à soutenir; puisque nos principes y conduisent naturellement, & que quelques Auteurs qui ont traité cette matière, n'ont pas fait réflexion à toutes les circonstances auxquelles il faut avoir égard dans cette recherche.

XVII.

FIG. 5.

Concevons un vaisseau $ABCD$, coupé en EF par une section verticale ou perpendiculaire à la quille CD , & examinons toutes les forces qui agissent sur la partie $BEFD$ pour la séparer, ou rompre son union du reste $A E F C$, que je considère comme immobile.

Cette partie $BEFD$ est d'abord sollicitée en-bas par sa gravité, dont la direction passe par le centre de gravité g de cette partie : donc si nous posons le poids de cette partie $= p$, la verticale gxp fera la direction de cette force.

Ensuite, pour avoir la force qui résulte des pressions de l'eau sur cette partie, concevons cette partie comme séparée & fermée dans la section EF par un plan ; & alors la force de l'eau la poussera verticalement en-haut, étant égale au poids d'un volume d'eau, qui est égal à la partie submergée.

Soit donc cette force $= q$, & sa direction passera par le centre de gravité o , du volume submergé de cette partie. Donc si cette partie $BEFD$ étoit séparée du vaisseau, elle seroit sollicitée par les deux forces $gp = p$ & $oq = q$, dont celle-là tireroit en-bas & celle-ci en-haut.

XVIII.

Mais puisque cette partie n'est pas séparée du reste du vaisseau, & qu'elle ne soutient aucune pression par la section EF , il en faut retrancher ou appliquer sous une direction contraire la force que la section EF éprouveroit de la pression de l'eau.

Soit donc e le centre des pressions de l'eau sur la section EF de la carene ; si elle étoit fermée par un plan, & que la pression totale sur ce plan fût $= r$, dont la direction seroit horizontale, l'assemblage en EF soutiendrait

tiendrait le même effort que si la partie $BEFD$ étoit tirée par ces trois forces :

$$1^{\circ}. gp = p; \quad 2^{\circ}. oq = q; \quad \& \quad 3^{\circ}. er = r.$$

Par conséquent la quille soutient en F ces mêmes forces qui tendront à la courber ou rompre en F , en tant que l'assemblage des parties supérieures n'en soutient pas une partie.

Donc le moment de ces trois forces sur le point F est $p. Fx - q. Fy - r. Fe$; & partant, si cette expression évanouissoit, la quille n'éprouveroit aucun effort, & il n'y auroit point à craindre qu'elle s'arquât.

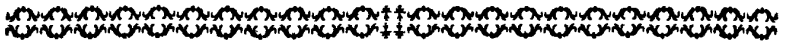
XIX.

Concevons la section EF faite par le milieu du vaisseau, puisque c'est ordinairement là que la quille risque le plus d'être courbée; & dans ce cas on pourra supposer $q = p$. de sorte que le moment en question est alors $p. xy - r. Fe$.

Or les extrémités du vaisseau étant ordinairement les plus pesantes, tandis que la carene est vers ces endroits très-mince, la force gp est beaucoup plus éloignée du milieu que la force oq : par conséquent le terme $p. xy$ fournit un grand moment pour arquer la quille par le milieu F en-haut.

Quelque inévitable que paroisse cet inconvénient, on le pourra pourtant éviter ou diminuer.

Pour cet effet on n'a qu'à faire la section du milieu fort spatieuse, & beaucoup plus large par en-haut qu'en-bas; le premier servant à aggrandir la force r , & l'autre à augmenter l'intervalle Fe . Cependant les autres circonstances ne permettent pas de changer beaucoup à cet égard.



SECONDE PARTIE.

Des efforts que l'assemblage des membres éprouve pendant que le vaisseau marche, sans être assujetti aux mouvemens de roulis & de tangage.

XX.

AVANT que de chercher les efforts dont l'assemblage des membres d'un vaisseau est agité pendant les oscillations comprises sous les noms de roulis & de tangage, il sera bon de déterminer ceux qu'il éprouve pendant que le vaisseau marche uniformément, & que la force dont il est poussé demeure toujours la même, comme aussi la force de la résistance de l'eau ; de sorte que le vaisseau ne soit porté que d'un mouvement progressif.

On distingue ici deux cas, selon que le vaisseau marche directement ou obliquement : or dans l'un & l'autre il n'y a que deux forces à considérer, savoir la force mouvante & celle qui résiste. Ces deux forces se tiennent en équilibre, tandis que le vaisseau marche uniformément ; mais si l'une surpasse l'autre, le mouvement sera ou accéléré ou retardé.

XXI.

Tant que le vaisseau marche uniformément, puisque

les forces d'impulsion & de résistance se détruisent, les membres du vaisseau auxquels ces forces ne sont pas immédiatement appliquées, n'en sentent aucun effet; & par conséquent ils n'agissent sur l'assemblage que par leur propre poids.

Mais pour les membres qui reçoivent immédiatement le choc ou de l'impulsion ou de la résistance, leur assemblage soutient encore ce choc outre leur poids; d'où il est aisé de déterminer les efforts auxquels l'assemblage de tous les membres du vaisseau est assujetti.

Pour les efforts qui tendent à arquer la quille, le mouvement, quoiqu'il soit uniforme, y cause quelque changement, d'où leur effet est pour la plupart diminué; car puisque la résistance augmente la pression de l'eau sur la proue, si nous considérons la partie *BEFD* (fig. 5.) comme la proue, la force *oq* devenant plus grande, il en résultera un moindre moment pour courber la quille; & de-là vient sans doute que les vaisseaux étant en mer sont moins assujettis à se courber que quand ils sont en repos.

XXII.

Quand le mouvement du vaisseau n'est pas uniforme, ce qui arrive lorsque les forces d'impulsion & de résistance ne sont pas en équilibre, il suffira d'examiner deux cas principaux; l'un, où le vaisseau, étant encore en repos, reçoit subitement une impulsion; & l'autre, où le vaisseau ayant jusqu'ici marché uniformément, l'impulsion vient subitement à manquer.

Dans le premier cas, la force d'impulsion n'étant pas encore contrebalancée par la résistance, tous les membres du vaisseau s'en ressentiront, conformément aux principes que j'ai établis ci-dessus; & la même chose doit arriver dans l'autre cas, où la résistance, puisque le vaisseau continue encore son mouvement, n'étant

C ij

plus balancée par la force d'impulsion, produit un semblable effet sur toutes les parties du vaisseau.

Il est vrai que cet effet sera de peu de durée, & qu'il diminuera assez promptement, parce que le vaisseau approche fort vite de l'état d'équilibre; mais un effort bien court peut souvent produire des effets fâcheux; & il sera bon de connoître aussi ces effets, puisqu'ils se mêlent souvent à ceux du roulis & du tangage, & les rendent plus redoutables.

XXIII.

Supposons donc que la force d'impulsion vienne subitement à manquer; & puisque, du moins au premier instant, le vaisseau continue encore son mouvement, il éprouvera encore la même résistance, qui sera d'autant plus grande, que sa vitesse aura été plus rapide.

FIG. 4:

Que la ligne FP (*fig. 4*) exprime donc la force de la résistance, qui soit $= R$, dont la direction tend en arrière & est élevée au-dessus de l'horizon.

Soit G le centre de gravité du vaisseau, d'où l'on tire sur FP la perpendiculaire GN , & qu'on conçoive mené par G un axe perpendiculaire au plan GFP , par rapport auquel le moment d'inertie du vaisseau soit $= Mk^2$, sa masse étant $= M$.

Maintenant si l'on considère une partie quelconque du vaisseau en M , dont la masse soit $= m$, on n'a qu'à tirer d'abord la droite $M\pi$ parallèle à FP , & en sens contraire; & ayant mené à l'axe de rotation de M la perpendiculaire MG , qu'on tire ensuite la droite Mg perpendiculaire à MG & parallèle au plan GFP , de sorte qu'une force selon Mg produiroit un mouvement de rotation contraire à la force FP .

Cela posé, l'assemblage qui affermit la partie M au corps du vaisseau, éprouvera les deux forces suivantes :

1°. Une force felon $M \pi = m. \frac{R}{M}$,

2°. Une force felon $M g = m. \frac{R. GN. GM.}{M k k}$;

auxquelles il faut encore ajoûter la pesanteur de la partie M , qui est $= m$.

XXIV.

Pofons que la proue éprouve la même réfiftance horizontale qu'un plan $= ff$, qui fe mouvroit directement dans l'eau avec la même vitesse, & que la vitesse du vaiffeau foit dûe à la hauteur $= v$; alors la réfiftance horizontale feroit ffv .

Donc fi l'élevation de la droite FP au-deffus de l'horizon est θ , la force entiere de l'eau fur la proue fera $\frac{ffv}{\cos. \theta} = R$; pofons auffi le poids du vaiffeau entier égal à celui d'un volume d'eau $= ffh$, pour avoir $M = ffh$; & dans les vaiffeaux semblables la quantité h fera proportionnelle à f .

De-là nous aurons, pour la partie M , la force $M \pi = m. \frac{v}{h \cos. \theta}$; d'où il est clair, que la vitesse étant la même, cette force est plus petite dans les grands vaiffeaux.

Il en est de même de l'autre force $M g = m. \frac{R. GN. GM.}{M k k}$;

car quoiqu'en fupposant toutes les chofes semblables, les lignes GN & GM foient en raifon des côtés homologues, la quantité k fuit auffi la même raifon.

D'où il est clair, que fupposant la vitesse la même; les fecouffes que les membrés d'un vaiffeau éprouvent dans le cas préfent, font moindres dans les grands vaiffeaux que dans les petits, par conféquent dans ceux-là l'équipage en est moins fatigué.

XXV.

Il est aussi clair que plus la direction de la résistance FP s'éleve au-dessus de l'horizon, plus la force R devient grande, & conséquemment aussi les secousses qu'en ressent la partie M ; mais surtout l'effort selon $M\pi$ doit devenir beaucoup plus violent.

Car si la direction FP étoit horizontale, & qu'elle passât par le centre de gravité, la force Mg évanouiroit tout-à-fait; mais étant inclinée à l'horizon, tirons à elle l'horizontale GR qui soit $= \alpha$, & à cause de l'angle $GRN = \theta$, nous aurons $GN = a \sin. \theta$, donc $R.GN = a \text{ ff } v \text{ tang. } \theta$; d'où l'on voit que le reste étant égal, l'effort Mg (Fig. 4) croît en raison de la tangente de l'angle d'élevation $GRN = \theta$.

Cependant cette raison n'est pas suffisante, pour qu'on doive tâcher de diminuer l'angle GRN ; car il y a d'autres raisons beaucoup plus importantes, qui demandent le contraire; & d'ailleurs l'inconvénient rapporté n'est d'aucune conséquence, puisque le vaisseau doit être capable d'essuyer des secousses beaucoup plus violentes.

XXVI.

Si, au lieu de la résistance de l'eau, nous supposons que le vaisseau heurte contre un écueil, les formules trouvées marqueront les secousses que tous les membres en doivent ressentir.

Alors on n'a qu'à substituer pour R la force que le vaisseau éprouve par le choc, qui dépend premièrement de la masse du vaisseau, ensuite de sa vitesse, & en troisième lieu de la dureté tant du vaisseau que du rocher à l'endroit où se fait le choc.

Si les deux corps, qui se choquent, étoient parfaitement, ou ce qui revient au même, infiniment durs,

de sorte qu'ils ne soient point du tout susceptibles du moindre enfoncement, leur mouvement devoit subir dans un instant un changement fini, dont la production demande une force infiniment grande.

Dans ce cas donc la force R seroit infinie, & tous les assemblages dont les membres du vaisseau sont affermis ensemble, quelques forts qu'ils puissent être, se devoient briser subitement. Mais le vaisseau étant réduit en repos par ce choc dans un instant, ces secousses infiniment violentes ne sauroient durer qu'un moment.

XXVII.

Il est aussi évident que le choc fera d'autant plus doux, que les deux corps qui se choquent seront plus mous & plus susceptibles d'enfoncement; d'où l'on voit, que pour connoître la violence d'un choc, il ne suffit pas qu'on sache les masses & les vitesses des corps choquans, comme on pourroit le croire en consultant les idées communes des forces des corps, mais qu'il faut aussi faire attention à leur dureté.

Mais le degré de dureté se détermine par l'enfoncement que deux corps pressés l'un contre l'autre par une force donnée reçoivent; & l'enfoncement se mesure par l'espace dont les deux corps se pénètrent, ou dont leurs centres de gravité se rapprochent au-delà de leur distance dans le contact simple.

Pour tenir compte de cet effet dans le calcul, nous pourrons considérer un ressort comme tu entre les corps choquans, dont l'un soit le vaisseau $ACDB$, & l'autre l'écueil V . Soit donc i la longueur naturelle de ce ressort, qu'il a au premier instant du choc, & supposons qu'elle se réduiroit à $i - \alpha$, si le vaisseau étoit simplement pressé contre l'écueil par une force donnée A , de sorte que α mesure l'enfoncement produit par la force A .

XXVIII.

De-là on comprend que plus les corps sont durs; & plus petit sera l'enfoncement α produit par la force donnée A ; & si les corps étoient infiniment durs, l'enfoncement α évanouiroit tout-à-fait.

Mais sachant l'enfoncement α qui répond à la force A , une force plus grande en produira aussi un plus grand; ce qui dépend de la nature des corps; cependant quand les enfoncemens sont très-petits, il sera permis de les supposer proportionnels aux forces comprimantes; de sorte que pour produire un enfoncement ζ , la force doit être $\frac{A \zeta}{\alpha}$.

Or ζ exprime en même tems l'espace dont le vaisseau fera avancé à l'écueil depuis le premier contact: posant donc la vitesse du vaisseau, avant que de rencontrer l'écueil, dûe à la hauteur c (Fig. 5), & celle qu'il aura après s'être enfoncé par l'espace ζ , dûe à la hauteur ν ; on aura $d\nu = \frac{-A \zeta d\zeta}{M \alpha}$, par conséquent $\nu = c - \frac{A \zeta \zeta}{2 M \alpha}$,
ou $c - \nu = \frac{A \zeta \zeta}{2 M \alpha}$.

De-là on connoitra pour chaque degré de vitesse que le vaisseau aura pendant le choc, l'enfoncement $\zeta = \sqrt{\frac{2 M \alpha (c - \nu)}{A}}$; & de-là aussi la force dont le vaisseau sera alors repoussé $\frac{A \zeta}{\alpha} = \sqrt{\frac{2 A M (c - \nu)}{\alpha}}$.

XXIX.

Cette force sera donc la plus grande, lorsque le mouvement du vaisseau sera tout-à-fait détruit, ou
 $\nu = 0$,

$v = 0$, & c'est de ce point d'où il faut estimer la force du choc.

Pofons donc $v = 0$, & la force que le vaisseau effuiera par ce choc fera $\sqrt{\frac{2 A M c}{\alpha}}$, d'où l'on voit qu'elle seroit infinie, si la dureté étoit infinie ou $\alpha = 0$, & qu'en général elle dépend principalement du degré de dureté, & qu'elle est réciproquement comme la racine quarrée de l'enfoncement α causé par une pression donnée A .

Mais la dureté demeurant la même, cette force est comme $\sqrt{M c}$, c'est-à-dire comme la racine quarrée de la force vive $M c$ (Fig. 6) du corps chocquant, le corps chocqué ou l'écueil étant immobile.

FIG. 6.

On n'a donc qu'à substituer cette expression $\sqrt{\frac{2 A M c}{\alpha}}$ au lieu de R , pour connoître les efforts que tous les membres du navire ressentent d'un tel choc.

XXX.

Passons maintenant à l'autre cas, & supposons que le vaisseau étant encore en repos, soit frappé subitement par la force $FP = P$, dont la direction soit horizontale; pour toute autre direction quelconque, la recherche n'en deviendroit pas plus difficile.

Qu'on y tire du centre de gravité G la perpendiculaire GN , & l'axe de rotation sera perpendiculaire au plan GNP , ensuite considérant une partie quelconque M , dont la masse soit m , on tirera d'abord la droite $M\pi$ parallèle à FP , mais en sens contraire; & après avoir mené de M à l'axe de rotation la perpendiculaire Mg , on y fera Mg perpendiculaire dans un plan parallèle au plan GFP ; enforte qu'une force Mg auroit un moment contraire au moment de la force FP .

Prix de 1759.

D

Maintenant la masse du vaisseau entier étant M , & son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation $Mk k$, l'assemblage qui tient la partie M soutiendra ces deux forces :

$$1^{\circ}. \text{ Une force selon } M\pi = m. \frac{P}{M}.$$

$$2^{\circ}. \text{ Une force selon } Mg = m. \frac{P. GN. GM}{Mk k};$$

& cela à cause de l'action de la force FP : car outre ces deux forces la partie M agit encore par son propre poids sur l'assemblage, comme je l'ai remarqué ci-dessus.

XXXI.

Donc aussitôt qu'un vaisseau, qui a été jusqu'ici en repos, est poussé par la force FP en avant, tous les membres s'en ressentent, étant d'abord poussés en arrière selon $M\pi$ par des forces proportionnelles à leurs masses.

Mais outre cela, entant que la force FP ne passe pas par le centre de gravité G , chaque membre se trouve encore sollicité par une force selon Mg , qui

est $m. \frac{P. GN. GM}{Mk k}$, par laquelle il s'oppose à l'inclinaison du vaisseau en avant, que la force FP tend à produire; & cet effort Mg fera d'autant plus grand, que les deux distances GM & GN feront plus grandes; mais réciproquement un grand moment d'inertie du vaisseau diminue cet effort.

Comme ces efforts sont assez ordinaires, il ne suffit pas que l'assemblage soit assez fort pour les soutenir; c'est à des secousses plus rudes qui se trouvent dans les mouvemens de roulis & de tangage, qu'il faut tâcher de remédier.



TROISIEME PARTIE.

Des efforts que les membres d'un navire éprouvent des mouvemens de Roulis.

XXXII.

QUAND il s'agit de déterminer les efforts que l'assemblage des membres d'un vaisseau éprouve par les mouvemens de roulis; il faut distinguer deux especes de forces; l'une qui imprime au vaisseau un tel mouvement, & l'autre dont ce mouvement, tant qu'il dure, est accompagné.

Toute force qui fait incliner le vaisseau de côté autour de l'axe longitudinal, quand elle cesse d'agir, lui imprime un mouvement réciproque, ou un balancement, qu'on nomme roulis. Ce mouvement est ordinairement produit ou par un choc contre les flancs du vaisseau, ou parce que la surface de la mer se trouve plus élevée d'un côté que de l'autre.

Dans l'un & l'autre cas le vaisseau doit s'incliner vers un côté; & connoissant la force qui produit cet effet, il sera aisé, par les principes que je viens d'établir, de déterminer les efforts que l'assemblage soutient.

XXXIII.

Si ce n'est que le choc d'une lame par le côté que le vaisseau reçoit, la surface de l'eau demeurant hori-

D ij

zontale, l'effet n'en sauroit être fort considérable par rapport à l'inclinaison. Car si le contour des gabaris EDF étoit circulaire, & que l'axe longitudinal passât par le centre G , la direction d'un choc quelconque en P passeroit par le centre G , & n'auroit, par conséquent, aucun moment pour incliner le vaisseau.

La même chose arriveroit, si la figure du gabaris étoit un polygone inscrit dans ce cercle. Mais quoique la figure des gabaris n'ait point cette propriété, elle n'en diffère pas assez énormément pour qu'il en puisse naître une grande inclinaison ; & il ne vaut pas la peine de tirer de là une règle pour la construction des gabaris, qui doit être réglée sur des maximes beaucoup plus importantes.

XXXIV.

FIG. 7.

Mais si la surface de la mer n'est pas horizontale, & que d'un côté la partie Ee (Fig 7) au-dessus de l'horizon EF soit enveloppée dans les flots, pendant que de l'autre côté une partie Ff en est dégagée, de sorte que la ligne $eefz$ représente la surface de la mer ; le vaisseau ne sauroit plus être en équilibre, & doit subir quelque inclinaison, son poids n'étant plus balancé par la pression de l'eau.

Pour ce qui regarde la détermination mathématique de la pression que le vaisseau éprouve dans cet état, il faut avouer que les principes de l'Hydrostatique ne sont pas encore développés pour en pouvoir déterminer les pressions d'un fluide agité, ou dont la surface n'est pas horizontale.

Cependant, quelle que soit cette force, ce n'est pas ici le lieu de s'en embarrasser beaucoup, puisque cette force ne sauroit jamais devenir si grande, qu'il y faille faire attention, quand il s'agit de délivrer les

vaisseaux des effets fâcheux que peuvent causer les mouvemens de roulis & de tangage.

XXXV.

De ce que j'ai expliqué dans l'article précédent, il est assez clair que ce ne sont pas tant les forces mêmes qui sont les plus dangereuses, que leurs momens par rapport à un axe de rotation. Car quelque grande que soit une force (je ne parle ici que des forces qui se trouvent dans les agitations ordinaires), si sa direction passoit par le centre de gravité du vaisseau, les efforts des membres sur l'assemblage ne seroient gueres à craindre; mais si sa direction passe fort loin au-delà du centre de gravité, la force en acquiert un grand moment, & pourra bien causer un mauvais effet, quand même la force ne seroit pas fort grande.

On comprend aisément que quoique nous ne puissions pas déterminer la pression d'une eau agitée, ou dont la surface n'est pas horizontale, sa direction ne sauroit être fort éloignée de l'axe de rotation, ni son moment très-grand. Par conséquent, puisque l'assemblage doit résister à des momens beaucoup plus grands, comme nous verrons bientôt, il n'y a rien à craindre des forces dont je parle ici.

XXXVI.

Le vaisseau ayant été incliné par quelque force que ce soit, dès que la force cesse d'agir, il se remettra en équilibre, & passant encore au delà, recevra un mouvement d'oscillation qui durera jusqu'à ce qu'il soit éteint par la résistance de l'eau, ou quelque autre cause.

S'il n'y a que la résistance de l'eau qui s'oppose au mouvement de roulis, il se perpétue assez longtems,

parce que la résistance, dans ce cas, n'est pas considérable. Car si tous les gabaris étoient des cercles, dont les centres se trouvaient dans l'axe de rotation, le mouvement de roulis se pourroit continuer sans aucun déplacement d'eau, & conséquemment la résistance évanouiroit : donc puisque la véritable figure des gabaris ne diffère pas tant de la dite figure circulaire, qu'il en puisse naître une résistance assez considérable, le mouvement de roulis ne sera pas sitôt éteint, à moins qu'une autre force étrangère ne survienne.

Mais il n'en est pas de même du mouvement de tangage, qui doit être bientôt éteint par la résistance de l'eau.

XXXVII.

Supposons que le vaisseau ait acquis une inclinaison autour de l'axe longitudinal, & qu'il soit relâché présentement, n'étant plus assujéti à l'action d'aucune force étrangère, & que la mer soit aussi parfaitement calme.

Le vaisseau fera donc des oscillations semblables à celles d'un pendule, pourvu que l'inclinaison ne soit pas trop grande, & qu'on fasse abstraction du mouvement du centre de gravité, entant qu'il monte & descend alternativement ; car ce mouvement étant fort petit, n'est d'aucune conséquence dans la recherche présente.

Ces oscillations seront par conséquent isochrones à celles d'un pendule simple, dont la longueur se détermine par cette règle bien simple :

Soit Sr la stabilité du vaisseau par rapport à l'axe longitudinal, & Mkk le moment d'inertie par rapport au même axe ; cela posé cette expression $\frac{Mkk}{Sr}$ donne la longueur du pendule simple, isochrone au mouvement oscillatoire du vaisseau, tant qu'il dure.

XXXVIII.

Ces oscillations seront donc d'autant plus vives, que la quantité $\frac{Mkk}{S\iota}$ sera plus petite, & si l'on veut ralentir leur mouvement, on n'a qu'à procurer une grande valeur à l'expression $\frac{Mkk}{S\iota}$ pour rendre ces oscillations isochrones à celles d'un pendule fort long.

Pour cet effet il faut tâcher d'augmenter d'un côté le moment d'inertie Mkk autant qu'il est possible, & de diminuer de l'autre côté la stabilité $S\iota$; mais ce dernier remède est directement opposé aux autres bonnes qualités qu'un vaisseau doit avoir.

Aussi à l'égard des oscillations il faut remarquer que la diminution de la stabilité ne fauroit produire un bon effet; car alors le vaisseau souffriroit par l'action de la même force une plus grande inclinaison, & puisque les oscillations deviendroient par-là plus grandes, elles seroient aussi incommodes que si elles étoient plus promptes, mais plus petites en même tems.

Par cette raison, il sera toujours bon de laisser à la stabilité la juste valeur, mais d'augmenter le moment d'inertie Mkk autant qu'il est possible; ce qu'on obtiendra en éloignant les fardeaux le plus qu'on peut de l'axe longitudinal du vaisseau.

XXXIX.

Pour s'éclaircir tout-à-fait sur cette matiere, il faut considérer les efforts que l'assemblage des membres a à soutenir dans le mouvement de roulis. Que le vaisseau se trouve incliné de son état naturel par l'angle ϕ , le moment de force pour se remettre en équilibre sera

$S t \varphi$; le vaisseau entier est donc sollicité à un mouvement de rotation autour de l'axe longitudinal par le dit moment de force, sans qu'il y ait une force qui agisse sur le centre de gravité même.

De-là naîtra dans chaque membre du vaisseau un effort sur l'assemblage, que nous connoîtrons par la formule expliquée ci-dessus, $m. \frac{P. G N G M}{M k k}$; si nous y substituons, au lieu de $P. G N$, le moment $S t \varphi$, qui a lieu dans cet état d'inclinaison.

Par conséquent, l'effort dont chaque membre agit sur l'assemblage, sera exprimé par cette formule

$$m. \frac{S t \varphi. G M}{M k k}.$$

XL.

Pour rendre cela plus clair, considérons un membre quelconque M du vaisseau, par lequel on fasse passer une section verticale $E D F$, perpendiculaire à l'axe longitudinal qui passe par le point G de la section.

Soit ef la ligne horizontale, & l'angle d'inclinaison $E C e = \varphi$; supposant que la droite $E F$ soit horizontale dans l'état naturel du vaisseau. La stabilité $S t$ fera donc tourner le vaisseau autour du point G dans le sens $E D F$, & par conséquent l'assemblage du membre M , dont la masse soit m , soutiendra un effort selon la direction $M \rho$, perpendiculaire à la droite $M G$;

& cet effort sera $m. \frac{S t \varphi. G M}{M k k}$, qui auroit un mouvement contraire à celui de la stabilité.

FIG. 8. Dans cet état donc, l'assemblage qui tient le membre M (Fig. 8) attaché au corps du vaisseau, sera sollicité, suivant la direction $M \rho$, par la force

$m. \frac{S t \varphi. G M}{M k k}$, d'où l'on voit, que plus le membre M est

est éloigné du point G , plus aussi fera grand l'effort qu'il exerce sur l'assemblage.

XLI.

De-là on pourra, à chaque instant du roulis, déterminer l'effort que soutient l'assemblage de tous les membres du vaisseau; & par conséquent juger si l'assemblage est assez fort pour résister. Mais il est évident que ces efforts sont en raison de l'angle φ , de sorte qu'ils évanouissent tout-à-fait quand le vaisseau passe à son état naturel, ou cet angle $E C e = \varphi$ est $= 0$; quoiqu'alors la vitesse du mouvement de roulis soit la plus grande.

Au contraire, les efforts sur l'assemblage seront les plus grands dans les plus grandes inclinaisons où le mouvement de roulis évanouit; & puisqu'alors $S t \varphi$ est égal au moment de forces qui a d'abord imprimé au vaisseau la première inclinaison, si nous posons ce moment, $P p$, le plus grand effort dont le mouvement de roulis sera accompagné se trouve $m. \frac{P p. G M}{M k k}$.

Donc, pour diminuer cet effort par la construction du vaisseau, il ne reste d'autre moyen que d'augmenter le moment d'inertie $M k k$ autant qu'il est possible.

XLII.

On voit donc que la stabilité elle-même n'entre point ici en compte, puisque les secousses qui produisent le mouvement de roulis étant données, l'expression $S t \varphi$ obtient la même valeur, soit que la stabilité $S t$ soit plus grande ou plus petite; par conséquent cette condition ne s'oppose pas à la maxime générale, qui exige une aussi grande stabilité qu'il est possible.

Prix de 1759.

E

Comme il n'est pas dans notre pouvoir de modérer les secouffes, il s'agit de diminuer l'expression $\frac{m. G M.}{M k k}$; donc outre l'augmentation du mouvement d'inertie, on en peut tirer encore ces regles : 1°. *Qu'on n'éloigne pas trop les parties d'un vaisseau de l'axe longitudinal.* 2°. *Qu'on rende les parties les plus éloignées aussi légères qu'il est possible.*

Il est bien vrai que par un tel arrangement on diminueroit aussi le moment d'inertie. Mais si l'on considère une des parties les plus éloignées, on voit bien que la diminution de sa masse diminue la valeur $\frac{m. G M}{M k k}$ nonobstant que le dénominateur $M k k$ en souffre aussi quelque diminution.

XLIII.

Ce que je viens de dire suppose qu'après avoir reçu la secousse, la mer soit calme, & que le vaisseau ne soit plus assujetti à aucune force étrangère. Cependant on comprend aisément que quoique le vaisseau marche directement selon sa longueur, ce mouvement ne feroit troubler le roulis; donc puisque le roulis se continue aisément, à cause du peu de résistance qu'il rencontre, lorsque le vaisseau va vent arrière, il roulera à-peu-près autant que s'il demeureroit en repos, la force d'impulsion n'influant point sur le mouvement de roulis.

Mais il n'en est pas de même lorsque le vaisseau va obliquement, ou qu'il court au plus près, car alors la force du vent inclinant le vaisseau à côté, concourt tout entière avec les forces dont dépend le roulis; & on observe effectivement que dans ce cas le mouvement de roulis est d'abord éteint.

XLIV.

Ce phénomène paroît d'abord aisé à expliquer ; car puisque le vaisseau , lorsqu'il court au plus près, se trouve incliné à un côté par la force du vent , cette force , dit-on , doit modérer le roulis & empêcher qu'il ne se perpétue.

Mais quelque satisfaisante que semble cette explication au premier coup d'œil , elle perd toute sa force dès qu'on l'examine plus exactement. Car considérons d'abord le vaisseau incliné à un côté par la force du vent VH , que j'envisage comme venant du côté opposé, en faisant abstraction du mouvement progressif, & le vaisseau sera incliné jusques-là , ou la stabilité tiendra en équilibre la force inclinante.

Dans cet état , il y aura donc un vrai équilibre, lequel étant troublé par quelque cause que ce soit , il semble qu'il en devroit résulter un moment oscillatoire autour de l'état d'équilibre , en faisant des excursions de part & d'autre , tout comme dans le mouvement d'un pendule ; & jusqu'ici il ne paroît rien qui puisse arrêter la continuation d'un tel mouvement réciproque.

XLV.

Soit GH (Fig. 9) un mât dont les voiles reçoivent l'impulsion du vent VH , la droite GJ étant verticale, & par conséquent l'angle JGH la mesure de l'inclinaison où le vaisseau se trouve en équilibre.

FIG. 9.

Concevons que le vaisseau ait acquis quelque mouvement dans le sens HS , par lequel l'inclinaison soit d'abord augmentée ; & puisque le moment de la stabilité croît avec l'inclinaison , le mouvement sera retardé jusqu'à ce qu'il soit éteint ; & ensuite le vaisseau retournera vers l'état d'équilibre GH par un mouve-

E ij

ment accéléré, & fera porté au-delà; & ainsi il en résulteroit un mouvement oscillatoire assez régulier, puisque la résistance n'y met pas d'obstacle sensible. Et il n'y a aucun doute que ce mouvement se continueroit presque aussi facilement que dans le cas précédent, pourvu que la force du vent sur le mât demeurât toujours la même pendant le mouvement de roulis. •

XLVI.

Mais dès que le mât GH acquiert un mouvement vers GS , l'impulsion du vent devient plus petite que s'il demeurait en repos, & par conséquent le moment qui tend à rétablir le vaisseau fera plus grand. Donc le mouvement qui aura été imprimé au mât vers HS souffrira une plus forte retardation, & fera par cette raison une moindre excursion que si le mât demeurait en repos, & que l'impulsion du vent fût la même.

Ensuite, quand le mât retournera de la situation plus inclinée GS vers GH , puisque son mouvement est dirigé contre le vent, il en recevra une plus forte impulsion, qui s'oppose au moment de la stabilité, d'où la force restituanté deviendra plus petite que si l'impulsion du vent demeurait la même que dans l'état de repos. Le mouvement de retour du mât sera donc moins accéléré, & quand il parviendra en H , il aura une beaucoup plus petite vitesse que celle dont il s'est éloigné, puisque les deux raisons alléguées concourent à produire cet effet.

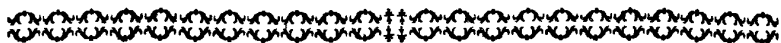
XLVII.

Dans les oscillations ordinaires, le corps retourne à l'état naturel, avec la même vitesse avec laquelle il en est parti; mais ici le mât étant sorti de la position GH avec une vitesse quelconque, il y reviendra avec une vitesse beaucoup plus petite; sa digression suivante

vers *J* sera encore moindre : & puisqu'aussi dans cette digression la retardation est plus grande , & ensuite l'accélération plus petite , au second retour en *H* sa vitesse se trouvera encore davantage diminuée ; d'où il est évident que dans ce cas le mouvement de roulis ne fauroit se conserver longtems.

Il peut même arriver que la seconde digression vers *J* n'ait point lieu , & qu'au retour de la première , le mouvement soit déjà éteint. Car puisque dans le mouvement par *SH* (Fig. 9) l'accélération est moindre que dans les oscillations ordinaires , & que dans celles-ci l'accélération à l'arrivée en *H* évanouit , elle deviendra même négative dans le mouvement du mât par *SH* ; de sorte que le mouvement en soit enfin retardé , & , selon la force de l'impulsion du vent , tout-à-fait éteint ; ce qui est la véritable raison pourquoi dans ces cas le roulis n'est pas continué.





QUATRIEME PARTIE.

Des efforts que les membres d'un navire éprouvent des mouvemens de Tangage.

XLVIII.

CE que je viens de dire du mouvement de roulis, s'applique aisément à celui de tangage ; & la dernière remarque nous découvre aussi la raison pourquoi les vaisseaux qui courent vent arrière, ne sont presque point susceptibles de tangage, parce que la force qui pousse le vaisseau en avant, détruit bientôt ce mouvement.

Un vaisseau n'est donc assujéti au tangage, que quand il est en repos, ou quand il court au plus près. Or toutes les forces qui sont capables d'incliner le vaisseau, ou par la proue, ou par la poupe, le font aussi tanguer. Ce sont donc les chocs que le vaisseau reçoit par avant ou par derrière, qui lui impriment un tel mouvement, entant qu'il en résulte un moment par rapport à l'axe latitudinal du vaisseau ; & outre cela l'agitation de la surface de la mer peut produire un semblable effet.

XLIX.

Concevons le vaisseau dans une situation inclinée autour de l'axe qui traverse le vaisseau selon sa largeur par le centre de gravité G (Fig. 10), & soit l'angle de l'inclinaison $CDc = \varphi$.

FIG. 10.

Que St marque ici la stabilité du vaisseau par rapport à l'axe latitudinal, & le moment de force par lequel le vaisseau tend à se rétablir en vertu de sa stabilité sera $St\phi$, auquel est égal le moment d'une force externe qui seroit capable de produire cette inclinaison.

Soit ensuite Mkk le moment d'inertie du vaisseau par rapport au même axe latitudinal.

Cela posé, si nous voulons définir les efforts qu'une partie quelconque M exerce sur l'assemblage dans cet état incliné, soit la masse de cette partie m , & qu'on en tire à l'axe d'inclinaison la perpendiculaire Mg , alors la force, que l'assemblage soutient, sera $m \cdot \frac{St\phi \cdot GM}{Mkk}$

& agira selon la direction Mg perpendiculaire à MG , & opposée à celle de la stabilité.

Cet effort fera donc d'autant plus grand, que le membre M sera plus éloigné de l'axe latitudinal, & qu'il sera plus pesant lui-même. •

L.

Le moment d'inertie Mkk étant beaucoup plus grand dans le cas du tangage que dans celui du roulis, on pourroit conclure de notre formule, que le tangage ne seroit pas si dangereux que le roulis. Mais quoique les chocs qui causent le tangage soient souvent plus rudes que ceux qui produisent le roulis, d'où le numérateur est aussi augmenté, cette seule force ne seroit jamais fort à craindre, & il faut chercher ailleurs la cause des funestes effets auxquels les vaisseaux sont quelques fois exposés par le tangage.

M. Chauchot croit avoir trouvé cette cause dans l'inégalité des deux extrémités d'un vaisseau, & lorsque les fonds sont trop taillés par rapport à la ligne d'eau en charge, parce qu'en ce cas tout le soutien du navire se trouvant à la flottaison, pour peu que la lame s'échappe

soit à l'avant, soit à l'arrière, le navire doit tanguer d'une force prodigieuse.

Il n'y a aucun doute que cette raison ne soit très-bien fondée, mais il faut la ramener aux premiers principes, qui contiennent la cause immédiate des effets en question.

L I.

M. Chauchot a ici principalement en vue les carenes qui se rétrécissent subitement sous la ligne d'eau, tant avant que derrière; car alors dès que le vaisseau s'incline, sa section faite à fleur d'eau devient subitement fort mince vers ce côté, d'où son aire étant plus petite dans l'inclinaison, la stabilité en sera diminuée; par conséquent la même force pourra produire une plus grande inclinaison; ce qui contribuera beaucoup à l'augmentation du tangage.

Pour remédier à ce défaut, on n'a qu'à donner à la carene une telle figure, que lorsque le vaisseau s'incline ou vers la proue ou vers la poupe, sa section faite alors à fleur d'eau ne soit pas plus petite que celle qui convient à l'état d'équilibre; car on sait que la stabilité dépend beaucoup de l'aire de la section faite à fleur d'eau.

Il faut donc éviter une telle structure, qui rendroit cette section plus petite dans l'état incliné que dans celui d'équilibre; & il ne paroît pas qu'un égal rétrécissement vers la proue & vers la poupe puisse remédier à ce défaut, l'un & l'autre étant également dangereux.

L II.

Cette circonstance mérite bien d'être examinée plus soigneusement.

Soit *AB* (Fig. 11) la ligne d'eau pour l'état d'équilibre; & que pour les plus grandes inclinaisons, tant en
arrière

arriere qu'en avant, les lignes aJb & aJc qui se trouvent à fleur d'eau, représentent en même tems les sections du navire faites à la surface de la mer.

Il faut donc que les sections aJb & aJc ne soient pas moindres que la section AJB ; par conséquent, en considérant deux gabaris, πPpR & $qQ\xi S$, l'un vers la proue & l'autre vers la poupe, si le vaisseau est plus large en P qu'en p , il faut qu'il soit plus large en q qu'en Q ; & pareillement, si la largeur est plus grande en Q qu'en ξ , il faut qu'elle soit aussi plus grande en π qu'en P . Les gabaris πR & qS doivent donc être les plus larges en π & en q , pendant que celui du milieu, ou le maître gabaris JK , peut avoir la plus grande largeur en J . Les plus grandes largeurs de tous les gabaris se doivent par conséquent trouver dans une ligne courbe $a\pi Jqb$ qui s'éleve vers la proue & vers la poupe.

LIII.

Il faudroit même que les sections aJb & aJc fussent plus grandes que la section AJB , puisque ce n'est pas tant leur aire qui entre dans la détermination de la stabilité, que le moment d'inertie, qui leur conviendrait, si on leur concevoit une épaisseur infiniment mince; ce moment d'inertie devant être pris par rapport à l'axe latitudinal tiré par leur centre de gravité.

Donc puisque la section aJb est plus large vers b que vers a , son centre de gravité sera plus proche de b que de a ; par conséquent, quoique la largeur vers b fût plus grande que vers a , le moment d'inertie pourroit être plus petit: de-là il s'ensuit que les aires des sections aJb & aJc doivent être non-seulement égales, mais aussi plus grandes que l'aire de la section AJB , afin que leurs momens d'inertie ne soient pas plus petits.

Prix de 1759.

F

Il seroit bon si l'on pouvoit rendre ces momens encore plus grands que celui de la section AJB .

LIV.

Par ce moyen on obtient l'avantage, que la stabilité du vaisseau croît avec l'inclinaison, ce qui doit diminuer les inclinaisons produites par la même force.

Mais la divergence des gabaris de la proue & de la poupe au-dessus de la surface de la mer procure encore aux vaisseaux un autre avantage, qui est que les vaisseaux courrans au plus près s'inclinent moins à côté, ce qui les rend propres à porter plus de voiles. Car si dans ce mouvement oblique la seule stabilité s'opposoit à l'inclinaison, la force ne seroit que très-médiocre: il est donc fort important de donner aux navires une telle figure, que la résistance que les côtés éprouvent dans les routes obliques, produise aussi un moment qui tende à diminuer l'inclinaison.

Cet effet ne sauroit presque manquer, si les gabaris πR & $q S$ sont plus larges en π & q qu'en P & Q , puisqu'alors la direction de la résistance s'éleve davantage au-dessus de l'horizon, & quand on forme les gabaris en sorte que leurs élargissemens au-dessus de la section horizontale AB (Fig. 11) surpassent leurs rétrécissemens au-dessous, cet effet deviendra encore plus considérable.

L V.

Mais les plus funestes effets du tangage ne sont pas causés uniquement par la force de la stabilité qui s'oppose à l'inclinaison, la résistance que le vaisseau éprouve dans ce mouvement, y a ordinairement la plus grande part.

C'est aussi à l'égard de la résistance, que le tangage

diffère principalement du roulis ; car au lieu que dans le roulis on peut presque entièrement négliger la résistance de l'eau , ce qui est la raison que ces mouvemens se conservent longtems ; il n'en est pas de même du tangage , où le vaisseau , en s'inclinant ou par la proue ou par la poupe , déplace une si grande quantité d'eau , qu'il en doit naître une très-grande résistance , qui sera d'autant plus grande que le mouvement est plus rapide ; & c'est aussi la raison pourquoi le tangage est bientôt détruit , à moins que les forces externes qui le produisent , ne soient répétées.

LVI.

Pour tenir compte de l'effet de la résistance dans le tangage , il faut distinguer deux tems , l'un où le navire s'éloigne de l'état d'équilibre *AB* (Fig. 10) , en allant à la plus grande inclinaison , & l'autre où le vaisseau revient à son état d'équilibre ; dans le premier tems la stabilité s'oppose au mouvement , & dans l'autre elle le favorise : dans l'un & l'autre la résistance s'oppose au mouvement.

Soit donc la résistance *R* , & son moment par rapport à l'axe de rotation *Rr* , la stabilité étant comme ci-dessus *Sz*.

Dans le premier tems , où le vaisseau s'éloigne de l'état d'équilibre , son inclinaison étant ϕ , la force qu'un membre quelconque *M* exerce sur l'assemblage sera

$$m. \frac{(S \iota \phi + Rr). G M}{M k k}$$

Or dans l'autre tems où le vaisseau retourne à l'état d'équilibre à la même inclinaison ϕ , cette force sera

$$m. \frac{(S \iota \phi - Rr). G M}{M k k}$$

LVII.

De-là il est clair que c'est le premier tems du tan-
F ij

gage où le vaisseau s'éloigne de l'état d'équilibre, qui est le plus dangereux à l'assemblage, puisqu'alors les deux forces de la stabilité & de la résistance se joignent ensemble. Or la force totale étant composée de deux parties, la première $S r \varphi$, qui vient de la stabilité, est nulle au commencement du premier tems, ou $\varphi = 0$, & croît ensuite avec l'inclinaison; mais l'autre partie $R r$ qui vient de la résistance, est au commencement de ce tems la plus grande, puisque la vitesse du mouvement est alors la plus grande, & ensuite elle va en diminuant, à cause de la diminution de la vitesse; à moins qu'une nouvelle partie très-considérable ne vienne subitement se plonger dans l'eau, d'où pourroit bien résulter une plus grande résistance, quoique la vitesse soit moindre.

LVIII.

Il y a apparence que tous les effets fâcheux du tangage tirent leur origine d'une telle cause: car concevons un vaisseau dont la proue CA (Fig. 12) soit étendue au-dessus de l'eau dans un grand volume AX , qui pendant que la proue se baisse, vienne se plonger subitement dans l'eau, en la frappant d'une grande vitesse; il est clair que le moment $R r$ pourroit acquérir une très-grande valeur.

Quand cela n'arrive que lorsque le vaisseau a déjà acquis une médiocre inclinaison φ , l'effet est d'autant plus violent; effet qui sera encore augmenté, si ce corps AX se précipite avec une grande vitesse dans l'eau, & qu'il la frappe perpendiculairement.

Ensuite ce corps se trouvant à l'extrémité du vaisseau, il doit résulter de ce choc un très-grand moment par rapport au centre de gravité G , d'où le moment de toute la résistance $R r$ pourra devenir très-considérable.

LIX.

Ce cas a principalement lieu dans la poupe qui porte l'accastillage, car lorsque la poupe entre dans l'eau jusqu'à son fort, & cela avec une grande vitesse, tout le mouvement est presque subitement arrêté, & de-là doit naître une prodigieuse résistance, qui augmentera d'autant plus les efforts sur l'assemblage, que la vitesse sera plus grande.

Si la vitesse, avant que d'entrer jusqu'à son fort, a été petite, la vitesse de ce choc sera plus grande, d'où

il peut arriver que l'effort $m. \frac{(S \iota \varphi + Rr). GM}{Mkk}$ devienne

plus foible, si le moment d'inertie Mkk est plus petit. Car alors l'effet de la seule stabilité, ou la partie

$m. \frac{S \iota \varphi. GM}{Mkk}$ étant plus grande, le vaisseau, avant que

de se plonger jusqu'à son fort, perdra plus de son mouvement, & sa vitesse à l'entrée du fort sera moindre; d'où le moment de la résistance, Rr étant plus petit,

l'expression entière $m. \frac{(S \iota \varphi + Rr). GM}{Mkk}$ pourra avoir une

moindre valeur, quoique le dénominateur Mkk soit plus petit.

C'est aussi l'expédient que M. Chauchot propose pour diminuer dans ce cas le danger du tangage.

LX.

Je ne fais pas si l'on peut toujours recourir sûrement à cet expédient, en diminuant le moment d'inertie Mkk ; car il faudroit être bien assuré que le numé-

rateur de cette fraction $\frac{S \iota \varphi + Rr}{Mkk}$ fût par ce moyen dimi-

nué dans une plus grande raison que le dénominateur ; ce qui dépend de quantité d'autres circonstances ; & si cela n'arrivoit pas on courroit encore de plus grands risques.

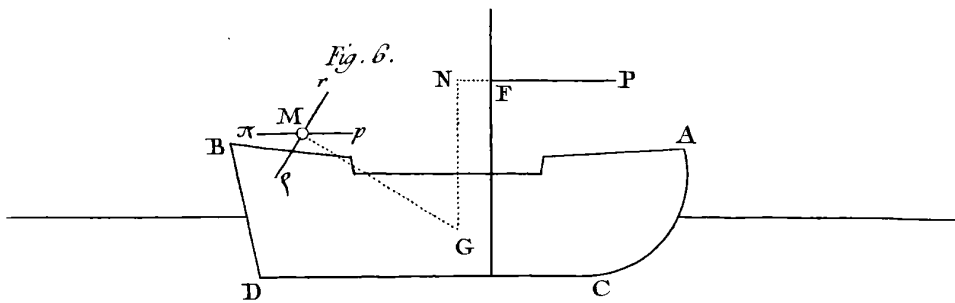
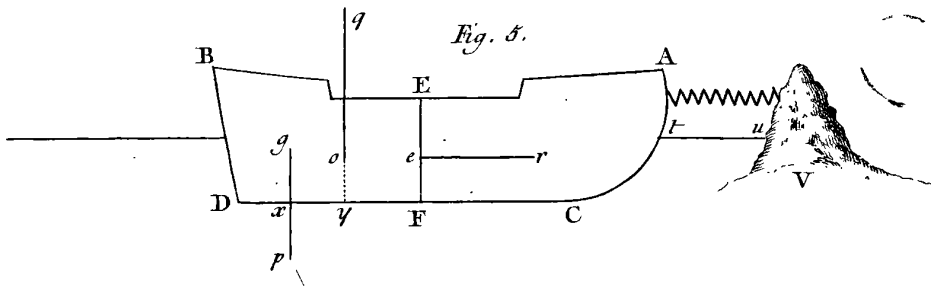
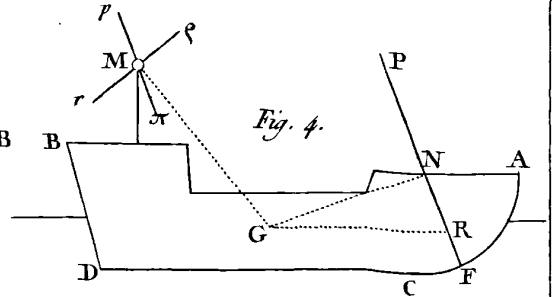
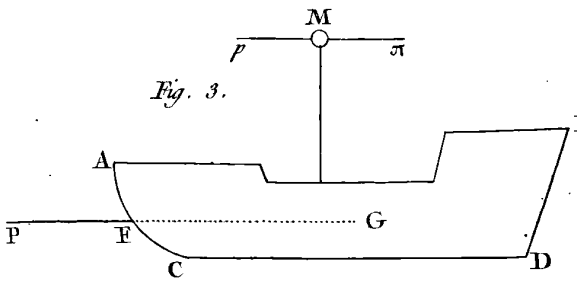
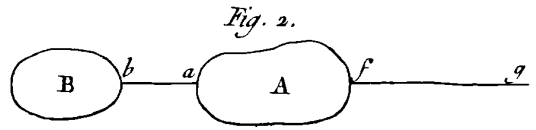
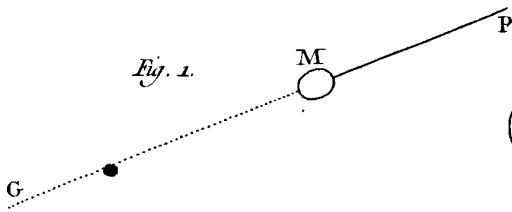
C O N C L U S I O N .

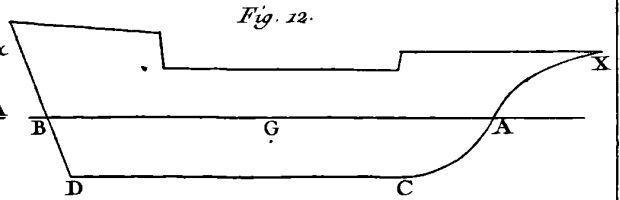
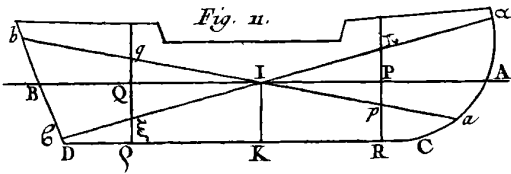
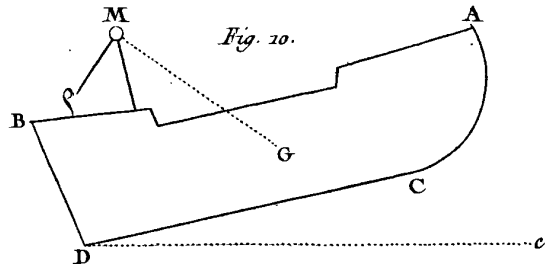
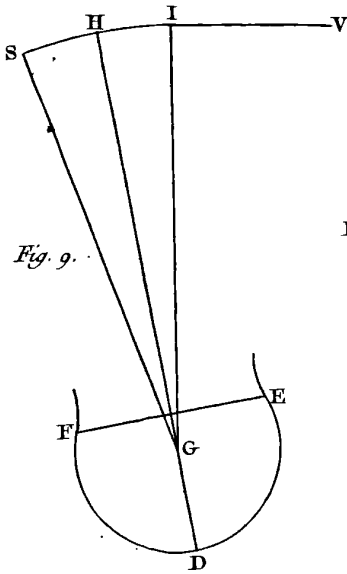
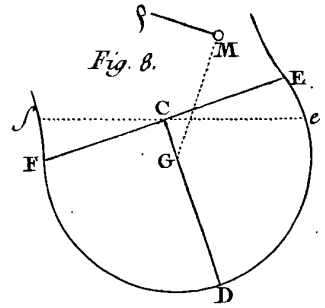
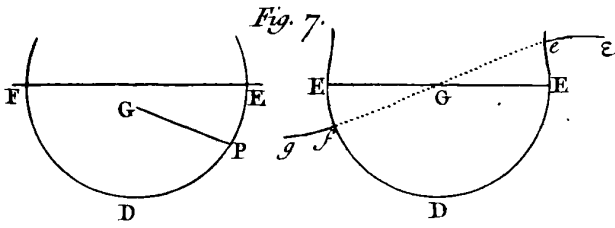
IL semble donc plus convenable qu'en procurant au moment d'inertie la plus grande valeur, on tâche de diminuer par d'autres moyens le moment de résistance Rr ; ce qui se pourroit faire en donnant au navire une telle figure, qu'avant de s'enfoncer jusqu'à son fort, il éprouve déjà une grande résistance, qui soit capable de diminuer assez sa vitesse.

Mais ensuite le fond de l'accastillage ne devrait pas être plan, mais terminé obliquement, afin que l'enfoncement se fasse peu-à-peu, & que la direction du choc ne soit pas verticale, mais inclinée à l'horizon autant qu'il se peut.

Comme le tangage est le plus dangereux, lorsque la force qui s'oppose à son mouvement est extrêmement grande, la même chose doit avoir lieu dans le mouvement de roulis, où la résistance de l'eau, que j'ai négligée ci-dessus, doit aussi augmenter les efforts des membres sur l'assemblage.

Mais le plus grand danger doit se trouver dans le roulis, lorsque le vaisseau court au plus près, & cela par la même raison qui éteint sitôt le mouvement. Car puisque la force du vent sur les voiles concourt avec la stabilité, pour s'opposer à une inclinaison ultérieure, les efforts des membres sur l'assemblage en sont aussi augmentés, & ils seront d'autant plus violens,





que la continuation du mouvement trouvera plus d'obstacles. Et c'est précisément le cas où le mouvement de roulis est capable de démâter les vaisseaux: or connoissant la véritable cause de ces effets, il ne sera plus difficile de découvrir des moyens propres à les éviter.

F I N.

MEDITATIONES IN QUÆSTIONEM

*Utrum motus medius Planetarum semper maneat
æque velox, an successu temporis quampiam mu-
tationem patiatur? & quænam sit ejus causa?*

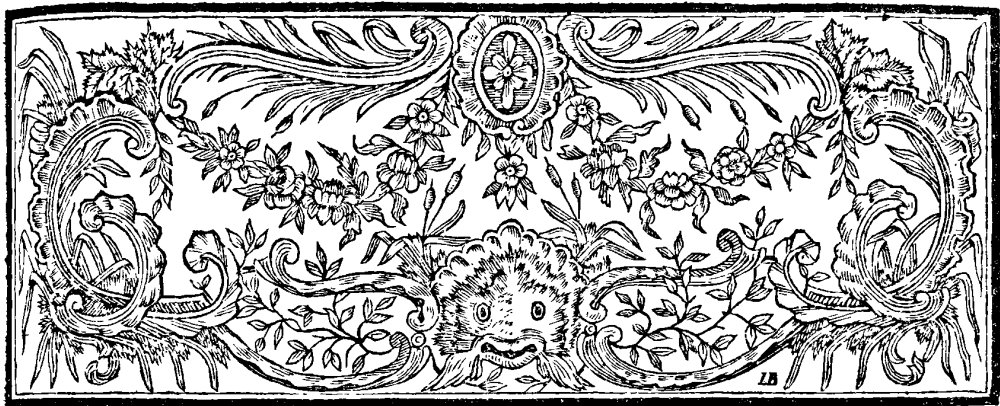
Ipse Pater statuit, quævis cæli astra moveret.

A CAROLO EULER, LEONARDI Filio.

Præmio donatæ anno M. DCC. LX.

Prix de 1760.

A



MEDITATIONES

IN QUÆSTIONEM

Utrum motus medius planetarum semper maneat æque velox, an successu temporis quampiam mutationem patiatur? & quæsit ejus causa?

I.

PLANETARUM motus medius, utrum perpetuo eandem celeritatem conservet, an cuiquam variationi labente tempore sit obnoxius? quæstio est eo magis ardua, quod ei in Astronomia ne locus quidem relinqui videtur. Cum enim ab Astronomis cujusque planetæ motus medius ex collatione antiquissimarum observationum cum novissimis definiri soleat, dum spa-

A ij

tium interea confectum in partes temporis proportionales dispartitur, hoc modo omnis inæqualitas à motu medio excluditur : neque motus medius cujusquam planetarum. Recte assignatus putatur, nisi cum vetustissimis observationibus æque conveniat atque cum iis, qua hodie instituuntur. Hoc quoque modo anni quantitas recte determinari existimatur, si ad tempora Hipparchi remota æquinocitiis ab eo observatis satisfaciatur : similisque est ratio reliquorum planetarum, quorum motus medius per cujusque tempus periodicum determinatur.

II.

Ob errores autem observationum Astronomi coacti fuere ad tempora maxime remota confugere, ut errores inde in motum medium redundantes quam minimi redderentur, quod remedium potissimum circa instaurationem Astronomiæ aliquot abhinc seculis necessarium erat. Postquam autem observationes majori cura institui sunt captae, pari atque meliori successu motus planetarum medios ex comparatione recentissimarum observationum cum aliis non ita pridem institutis definire licuit. Quo in negotio aliquod discrimen à conclusionibus superioribus est animadversum, quod utrum ab erroribus observationum profiscatur, an revera cuiuspiam perturbationi in motu planetarum factæ sit tribuendum incertum videri debebat antequam Theoria adjuti pleniorum motuum cælestium cognitionem effemus adepti.

III.

Notabile imprimis est discrimen quod in quantitate anni solaris diversomodo determinata cernitur. Comparatio enim observationum Hipparchi cum Ptolemæi aliquot minutis annum majorem præbet quam si Pto-

lemæi observationes cum recentioribus comparentur. Quæ differentia five in observationum errores sit rejicienda, five inde oriatur quod reductio temporum à Ptolomæo notatorum ad calendarium Julianum minus sit certa, nulla causa satis firma reperitur, cur anni quantitatem perpetuo eandem fuisse statuamus. De Luna quidem vix jam dubitare licet, quin ejus motus medius nunc aliquanto sit incitator quam olim: tum vero etiam in Saturni & Jovis motu medio quædam mutatio agnosci debet quemadmodum sollertissimus motuum cœlestium scrutator Le Monnier evicit. Ex quo opinio de perpetua horum motuum constantia nunc quidem penitus profligata est censenda.

IV.

Quodsi hæ inæqualitates ob parvitatem à pertinacibus veteris opinionis propugnatoribus adhuc in dubium vocentur iis profecto Cometa initio hujus anni visus omnem defensionem adimere debet. Cum enim hic Cometa idem sit qui A. 1682 apparuit, ejus tempus periodicum, in quo jam insigne discrimen ex præcedentibus apparitionibus erat animadversum, non solum fere ad biennium est protractum, sed etiam hæc retardatio à sagacissimo Viro Clairaut jam ante est prædicta & exacte definita ita ut nullum amplius dubium superesse queat quin hic Cometa idem plane sit, qui jam aliquoties est conspectus etiamsi in temporibus periodicis haud exiguum discrimen esset deprehensum. Cum igitur hic Cometa tantam variationem in motu suo medio sit perpeffus, eo minus similem variationem in planetis negare poterimus, quod causæ utrinque similes existunt, quæ hujusmodi effectum producere valcant.

V.

Ac causæ quidem istæ non amplius sunt ignotæ postquam principium gravitationis universalis tot tam feliciter explicatis phænomenis abunde est confirmatum ita ut nunc quidem vix ullum scientiæ naturalis principium ad tantum certitudinis gradum evectum videatur quam omnia corpora cœlestia perinde moveri, ac si se mutuo attraherent in ratione directâ massarum & reciproca duplicata distantiarum. Neque adeo ad summam Astronomiæ perfectionem quicquam desideratur, nisi ut motus huic principio consentanei per calculum determinentur, quod opus à sola analysi est expectandum. Quo in genere plurima præclarissima specimina edita sunt ab iis, qui cum in determinatione motuum lunarium, tum perturbationum Jovis ac Saturni, tum vacillationis axis ipsius terræ tum vero nuperrime in retardatione Cometæ operam suam collocarunt.

VI.

Quæ cum ita sint, fontes, unde resolutio quæstionis propositæ est haurienda sunt detecti, totumque negotium huc revocatur, ut ostendatur; utrum ex gravitatione mutua corporum cœlestium ulla mutatio in motu eorum medio nascatur nec ne? Cum autem idea motus medii per se non satis sit fixa, neque etiam tempus periodicum commode ejus loco introduci possit. Quippe quod per inæqualitates periodicas sæpe haud mediocriter turbatur veluti in luna est perspicuum, quæstio nostra optime ad axem transversum cujusque orbitæ adstringi videtur. Quomodo cunque enim motus cujuscumque planeta vel cometa perturbatur, is semper ita concipi potest, quasi in sectione conica fieret, cujus tam positio quam species & quantitas conti-

quo varietur ; motu cæteroquin manente regulis Keplerianis conformi.

VII.

Quare si hoc modo motus cœlestes per sectiones conicas variabiles represententur, hoc negotium nobis erit impositum, ut investigemus utrum axis transversus cujuscumque orbitæ planetariæ vel cometariæ aliquam mutationem patiatur nec ne? ubi quidem notari convenit, si axis transversus post singulas revolutiones ad eandem magnitudinem revertatur quantumvis interea fuerit variatus hinc tamen nullam inæqualitatem in motum medium transferri. At si per plures revolutiones continuo vel crescat vel decreseat, etiamsi forsitan deinceps aliquando in magnitudinem pristinam restituatur: talis variatio in motum medium commode conjicitur. Imprimis autem si axis transversus ab actione cujuscumque cometæ, cujus adventus quasi ex improvviso accidit, neque prævideri potest, incrementum vel decrementum patitur, hunc effectum aliter nisi per motus medii retardationem vel accelerationem representare non licet.

VIII.

Quandoquidem perturbationes motus sunt ingentes; quemadmodum fit in luna, præter axem transversum etiam reliquorum elementorum mutationes ad tempus periodicum hincque ad motum medium constituendum concurrunt. Quando autem motus proxime regulas Keplerianas sequitur, uti fit in planetis primariis & cometis mutatio axis transversæ, cujus quippe cubo quadratum temporis periodici est proportionale, sola motum medium afficere est censenda. Ita si axis transversus orbita telluris hodie major minorve esset, quam tempore Ptolemæi, motus ejus medius hodie lentior vel incita-

8 DE SUCCESSIVA MUTATIONE

tior esset statuendus quam illo tempore. Ac si cometa hujus anni, dum haud adeo procul à terra prætervolavit, actione sua axem orbis magni, uti videtur aliquantillum, auxit, in posterum annus solaris major, motusque medius solis tardior esset futurus: cujus effectus quantitatem autem ob massam cometæ incognitam non nisi ex observationibus deinceps instituendis definire licebit,

IX.

Quo igitur quæstioni ab Illustrissima Academia propositæ satisfaciam, quantum motus sive planetæ sive cometæ ab actione alius planetæ sive cometæ, cujus quidem motus ut cognitus spectatur, perturbatur, primum quidem in genere investigabo, tum vero quia omnes inæqualitates neque ad hoc institutum sunt necessariæ, neque quæruntur, ad axis transversæ variationes omnem curam intendam; facile autem intelligitur antequam universa mutatio dato tempore in axe transverso producta definiri queat, mutationem ejus momentaneam determinari oportere. Unde hoc commode consequemur, ut si forte non licuerit per integrationes ad scopum pervenire, ex formula differentiali pro partibus temporis satis exiguis mutationes axis seorsim definiantur, tumque in unam summam colligantur. Hæc methodus usum habebit, quando actio notabilis corporis attrahentis non diu durat uti in transitu cometæ fere fit, ac deinceps ob insignem distantiam quasi prorsus in nihilum abit.

X.

Vid. Fig.

Sit igitur sol in A , & planeta vel cometa cujus attractione motus alterius perturbatur moveatur in plano tabula representato in quo EQ sit ejus orbita AE vero lineâ rectâ fixâ à qua longitudines computemus.

Alter

Alter vero planeta, cujus perturbationes motus investigamus, moveatur in alio plano, quod nunc quidem illud planum secet secundum rectam $A\Omega$, quæ est linea nodorum, sitque FZ ejus orbita ab F in sublimè ascendens. Nunc autem ille planeta seu cometa versetur in Q hic vero in Z ductisque rectis QA , ZA & QZ , ex Z in planum tabulæ demittatur perpendicularum ZY tum vero ex Q & Y ad AE normales QP & YX . Porro ex Y quoque ad lineam nodorum $A\Omega$ normaliter ducatur YR ut juncta ZR angulus YZR exhibeat inclinationem binarum orbitarum. Denique ex R tam ad AE quam XY ducantur perpendiculares RT & RV . Hæcque fere sunt, quibus Geometrica quæstionis continetur.

XI.

Jam faciamus sequentes denominationes sitque

- 1°. Longitudo lineæ nodorum $E A \Omega = \psi$;
- 2°. Inclinatio orbitarum mutua seu $Y R Z = \omega$;
- 3°. Longitudo planetæ Q seu angulus $EAQ = \theta$;
- 4°. Ejus distantia à sole seu recta $AQ = u$;
- 5°. Planetæ Z distantia à sole $AZ = v$;
- 6°. Ejus argumentum latitudinis seu $\Omega AZ = \xi$.

Hinc reliquæ lineæ ita definientur.

$$AP = u \cos. \theta; \quad AR = v \cos. \xi; \quad YR = v \sin. \xi \cos. \omega;$$

$$PQ = u \sin. \theta; \quad ZR = v \sin. \xi; \quad YZ = v \sin. \xi \sin. \omega;$$

Porro cum angulus RYV æquetur angulo $E A \Omega = \psi$ erit

$$AT = v \cos. \xi \cos. \psi; \quad VY \sin. \xi \cos. \omega \cos. \psi;$$

$$TR = v \cos. \xi \cos. \psi; \quad RV \sin. \xi \cos. \omega \sin. \psi.$$

Prix de 1760.

B

Quare si pro puncto sublimi Z ternas coordinatas vocemus

$$AX = X; \quad XY = Y; \quad \& \quad YZ = Z$$

habebimus

$$X = AT - RV = v \operatorname{cof.} \xi \operatorname{cof.} \psi - v \operatorname{fin.} \xi \operatorname{cof.} \omega \operatorname{fin.} \psi;$$

$$Y = TR + VY = v \operatorname{cof.} \xi \operatorname{fin.} \psi + v \operatorname{fin.} \xi \operatorname{cof.} \omega \operatorname{cof.} \psi;$$

$$\& \quad Z = v \operatorname{fin.} \xi \operatorname{fin.} \omega.$$

XII.

Ex his denique etiam definitur distantia planetarum QZ quæ brevitatis gratia statuatur

$$QZ = \tau.$$

Cum enim fit

$$PX = AP - AX = u \operatorname{cof.} \theta - X, \quad \&$$

$$PQ - XY = u \operatorname{fin.} \theta - Y, \quad \text{erit}$$

$$QY^2 = uu - 2u(X \operatorname{cof.} \theta + Y \operatorname{fin.} \theta) + XX + YY;$$

cui quadratum $YZ^2 = Z^2$ additum dabit

$$QZ^2 = \tau^2 = uu - 2u(X \operatorname{cof.} \theta + Y \operatorname{fin.} \theta) + XX + YY + ZZ.$$

At est $XX + YY + ZZ = vv$, ideoque

$$\tau^2 = uu - 2u(X \operatorname{cof.} \theta + Y \operatorname{fin.} \theta) + vv.$$

Verum ob $\operatorname{cof.} \theta \operatorname{cof.} \psi + \operatorname{fin.} \theta \operatorname{fin.} \psi = \operatorname{cof.} (\theta - \psi)$, &

$$\operatorname{fin.} \theta \operatorname{cof.} \psi - \operatorname{cof.} \theta \operatorname{fin.} \psi = \operatorname{fin.} (\theta - \psi);$$

ubi notetur $\theta - \psi = EAQ - EA\Omega$ exprimere angulum ΩAQ , seu longitudinem planetæ Q à linea nodorum sumtam.

$$\text{erit } X \cos. \theta + Y \sin. \theta = v \cos. \xi \cos. (\theta - \psi) + v \sin. \xi \cos. \omega \sin. (\theta - \psi);$$

ita ut sit

$$\tau = \sqrt{(u u - 2 u v (\cos \xi \cos. (\theta - \psi) + \sin. \xi \cos. \omega \sin. (\theta - \psi)) + v v)};$$

unde perspicuum est formulam $\cos. \xi \cos. (\theta - \psi) + \sin. \xi \cos. \omega \sin. (\theta - \psi)$ exprimere cosinum anguli QAZ , qui est distantia planetarum e sole visa.

XIII.

Quomodo cunque ab actione planetæ Q planum orbitæ alterius planetæ Z immutatur, ita ut momento temporis tam positio lineæ nodorum $A \Omega$ quam inclinatio mutua utriusque orbitæ variationem patiat, certa quædam relatio inter has variationes intercedat. Si enim puncto temporis planeta ex Z in z succedat, ut angulus elementaris ZAz sit $= d\phi$ punctum z æque ad positionem orbitæ præcedentem angulis ψ & ω determinatam atque ad positionem sequentem angulis $\psi + d\psi$, & $\omega + d\omega$ contentam referri oportet. Ex quo differentialia dX , dY & dZ eadem prodire debent, sive anguli ψ & ω constantes sumantur, & pro anguli $\Omega AZ = \xi$ differentiali scribatur $d\phi$ quippe qui hoc elemento augetur; sive iidem anguli ψ & ω etiam pro variabilibus habeantur, angulusque ξ vero suo differentiali $d\xi$ augeri statuatur, quod ob mutationem in linea nodorum & inclinatione factam non amplius angulo elementari $d\phi$ æquale est æstimandum. Ex hac autem duplici differentiatione gemina relatio inter angulos elementares $d\phi$, $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ concludetur.

B ij

XIV.

Prima differentiatio, qua anguli ψ & ω constantes & $d\xi = d\varphi$ sumuntur præbet:

$$dX = \frac{X dv}{v} - v d\varphi (\sin. \xi \cos. \psi + \cos. \xi \cos. \omega \sin. \psi);$$

$$dY = \frac{Y dv}{v} - v d\varphi (\sin. \xi \sin. \psi - \cos. \xi \cos. \omega \cos. \psi);$$

$$dZ = \frac{Z dv}{v} + v d\varphi \cos. \xi \sin. \omega.$$

Altera autem differentiatio hos suppeditat valores

$$dX = \frac{X dv}{v} - v d\xi (\sin. \xi \cos. \psi + \cos. \xi \cos. \omega \sin. \psi) - v d\psi (\cos. \xi \sin. \psi + \sin. \xi \cos. \omega \cos. \psi) + v d\omega \sin. \xi \sin. \omega \sin. \psi;$$

$$dY = \frac{Y dv}{v} - v d\xi (\sin. \xi \sin. \psi - \cos. \xi \cos. \omega \cos. \psi) - v d\psi (\cos. \xi \cos. \psi - \sin. \xi \cos. \omega \sin. \psi) - v d\omega \sin. \xi \sin. \omega \cos. \psi;$$

$$dZ = \frac{Z dv}{v} + v d\xi \cos. \xi \sin. \omega + v d\omega \sin. \xi \cos. \omega.$$

Hinc æquatis postremis formulis pro dZ inventis colligitur.

$$d\varphi = d\xi + \frac{d\omega \sin. \xi \cos. \omega}{\cos. \xi \sin. \omega}.$$

XV.

Quo facilius ratio ex prioribus oriunda eliciatur, consideremus has formulas inde derivatas

Ex priori differentiatione

$$d X \operatorname{cof} . \psi + d Y \operatorname{fin} . \psi = \frac{dv}{v} (X \operatorname{cof} . \psi + Y \operatorname{fin} . \psi) \\ - v d \varphi \operatorname{fin} . \xi ;$$

$$d X \operatorname{fin} . \psi - d Y \operatorname{cof} . \psi = \frac{dv}{v} (X \operatorname{fin} . \psi - Y \operatorname{cof} . \psi) \\ - v d \varphi \operatorname{cof} . \xi \operatorname{cof} . \omega ;$$

Ex posteriori differentiatione

$$d X \operatorname{cof} . \psi + d Y \operatorname{fin} . \psi = \frac{dv}{v} (X \operatorname{cof} . \psi + Y \operatorname{fin} . \psi) \\ - v d \xi \operatorname{fin} . \xi - v d \psi \operatorname{fin} . \xi \operatorname{cof} . \omega ;$$

$$d X \operatorname{fin} . \psi - d Y \operatorname{cof} . \psi = \frac{dv}{v} (X \operatorname{fin} . \psi - Y \operatorname{cof} . \psi) \\ - v d \xi \operatorname{cof} . \xi \operatorname{cof} . \omega - v d \psi \operatorname{cof} . \xi + v d \omega \operatorname{fin} . \xi \operatorname{fin} . \omega ;$$

quarum æqualitas dat

$$d \varphi = d \xi + d \psi \operatorname{cof} . \omega , \&$$

$$d \varphi = d \xi + \frac{d \psi}{\operatorname{cof} . \omega} - \frac{d \omega \operatorname{fin} . \xi \operatorname{fin} . \omega}{\operatorname{cof} . \xi \operatorname{cof} . \omega} ;$$

ex quibus conjunctis fequitur

$$d \psi \frac{(1 - \operatorname{cof} . \omega^2)}{\operatorname{cof} . \omega} = \frac{d \omega \operatorname{fin} . \xi \operatorname{fin} . \omega}{\operatorname{cof} . \xi \operatorname{cof} . \omega} , \text{ seu } d \psi = \frac{d \omega \operatorname{fin} . \xi}{\operatorname{cof} . \xi \operatorname{fin} . \omega} .$$

XVI.

Semper ergo variationes in linea nodorum & inclinatione à se invicem pendent, ut fit

$$d \psi = \frac{d \omega \operatorname{fin} . \xi}{\operatorname{cof} . \xi \operatorname{fin} . \omega} , \text{ seu } d \omega = \frac{d \psi \operatorname{cof} . \xi \operatorname{fin} . \omega}{\operatorname{fin} . \xi} , \text{ seu } \frac{d \varphi}{\operatorname{tang} \xi} = \frac{d \omega}{\operatorname{fin} . \omega} .$$

Tum vero angulus elementaris $Z A z = d \varphi$ per quem

corpus Z revera progreditur tempusculo infinite parvum variationes $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ gignuntur, ita definitur ut fit

$$\text{vel } d\varphi = d\xi + \frac{d\omega \sin.\xi \cos.\omega}{\cos.\xi \sin.\omega}$$

$$\text{vel } d\varphi = d\xi + d\psi \cos.\omega;$$

quarum æqualitas jam in superiori continetur, ita ut hinc duæ tantum relationes inter quaterna elementa $d\varphi$, $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ constituantur, quas in sequentibus, ubi effectus virium sollicitantium sumus investigaturi, probe meminisse juvabit.

XVII.

Antequam ad partem mechanicam hujus quæstionis progrediar haud abs re erit quasdam relationes observare, quæ in sequentibus insignem usum sunt habituræ. Scilicet cum differentialibus dX , dY & dZ ex priori differentiatione natis uti liceat. Ad quæ quippe altera jam sunt perducta, inde deducimus

$$YdX - XdY = -v d\varphi (Y(\sin.\xi \cos.\psi + \cos.\omega \cos.\xi \sin.\psi) - X(\sin.\xi \sin.\psi - \cos.\xi \cos.\omega \cos.\psi));$$

$$\text{seu } YdX - XdY = -v d\varphi ((Y \cos.\psi - X \sin.\psi) \sin.\xi + (Y \sin.\psi + X \cos.\psi) \cos.\xi \cos.\omega).$$

At est

$$Y \cos.\psi - X \sin.\psi = v \sin.\xi \cos.\omega, \text{ \&}$$

$$Y \sin.\psi + X \cos.\psi = v \cos.\xi;$$

quibus valoribus substitutis fit

$$YdX - XdY = -v v d\varphi (\sin.\xi^2 \cos.\omega + \cos.\xi^2 \cos.\omega);$$

ita ut fit

$$Y d'X - X d Y = -v v d \phi \cos. \omega, \text{ seu}$$

$$X d Y - Y d X = v v d \phi \cos. \omega.$$

XVIII.

Simili modo habebimus

$$X d Z - Z d X = v d \phi (X \cos. \xi \sin. \omega + Z (\sin. \xi \cos. \psi + \cos. \xi \cos. \omega \sin. \psi)),$$

& pro X & Z in membro posteriori substitutis valoribus

$$XdZ - ZdX = v v d \phi \sin. \omega (\cos. \xi (\cos. \xi \cos. \psi - \sin. \xi \cos. \omega \sin. \psi) + \sin. \xi (\sin. \xi \cos. \psi + \cos. \xi \cos. \omega \sin. \psi));$$

quæ manifesto in hanc simplicem contrahitur,

$$X d Z - Z d X = v v d \phi \sin. \omega \cos. \psi.$$

Denique eodem vestigio insistentes colligimus:

$$Y d Z - Z d Y = v d \phi (Y \cos. \xi \sin. \omega + Z (\sin. \xi \sin. \psi - \cos. \xi \cos. \omega \cos. \psi));$$

& pro Y & Z & valoribus substitutis

$$YdZ - ZdY = v v d \phi \sin. \omega (\cos. \xi (\cos. \xi \sin. \psi + \sin. \xi \cos. \omega \cos. \psi) + \sin. \xi (\sin. \xi \sin. \psi - \cos. \xi \cos. \omega \cos. \psi));$$

quæ sponte in hanc simplicem formulam abit:

$$Y d Z - Z d Y = v v d \phi \sin. \omega \sin. \psi.$$

XIX.

Denique cum ex elementis dX , dY & dZ sit elementum revera descriptum $Z\zeta = \sqrt{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}$ ob $AZ = v$ & $AZ = v + dv$ si centro A arcus Zv describatur erit $\zeta v = dv$ & cum positus sit an-

gulus elementaris $Z A \zeta = d\phi$, erit $Z v = v d\phi$, hincque $Z \zeta^2 = d v^2 + v v d\phi^2$. Ex quibus evidens est fore

$$d X^2 + d Y^2 + d Z^2 = d v^2 + v v d\phi^2;$$

quam æqualitatem etiam ex formulis pro differentialibus $d X$, $d Y$ & $d Z$ ante inventis, sed per plures ambages deducere licuisset. Atque hæc fere sunt, quæ Geometria & Analysis pro solutione quæstionis propofita subministrant, quibus instructi facilius partem mechanicam, qua totum negotium continetur, agredi poterimus. Hæc autem seorsim exponere visum est, ne relationes circa lineæ nodorum & inclinationis mutationes momentanea principiis mechanicis inniti videantur.

XX.

Sit igitur massa Solis = A , Planetæ in $Z = B$, & Planetæ Cometæve perturbantis in $Q = C$: ac primo planeta in Z primo ad solem urgetur secundum $Z A$ vi acceleratrice = $\frac{A}{v^2}$, unde pro directionibus fixis coordinatarum nascuntur vires

$$\text{feu } X A = \frac{(A + B) X}{v^3};$$

$$\text{feu } Y X = \frac{(A + B) Y}{v^3};$$

$$\text{feu } Z Y = \frac{(A + B) Z}{v^3}.$$

Deinde versus Q urgetur secundum directionem $Z Q$ vi acceleratrice = $\frac{C}{\tau^2}$, unde per similem resolutionem nascuntur vires hæ

feu

$$\text{fecundum } AX = \frac{C' u \cos. \theta - X}{\tau^2};$$

$$\text{fec. } AY = \frac{C (u \sin. \theta - Y)}{\tau^2};$$

$$\text{fec. } ZY = \frac{CZ}{\tau^2}.$$

Denique cum etiam sol ad Q sollicitetur vi accelera-
trice $\frac{C}{uu}$ hæc contrarie secundum directionem ZS ipsi
QA parallelam in planetam Z applicata est concipi-
enda, unde oriuntur hæ duæ vires :

$$\text{fec. } XA = \frac{C \cos. \theta}{uu}, \text{ \& fec. } YX = \frac{C \sin. \theta}{uu}.$$

XXI.

His jam viribus novimus accelerationes corporis in
Z secundum easdem directiones esse proportionales:
unde si elementum temporis statuamus = dt idque
constans sumamus, habebimus tres sequentes æqua-
tiones :

$$ddX = -\alpha dt^2 \left(\frac{(A+B)X}{v^3} - \frac{C(u \cos. \theta - X)}{\tau^2} + \frac{C \cos. \theta}{uu} \right)$$

$$ddY = -\alpha dt^2 \left(\frac{(A+B)Y}{v^3} - \frac{C(u \sin. \theta - Y)}{\tau^2} + \frac{C \sin. \theta}{uu} \right)$$

$$ddZ = -\alpha dt^2 \left(\frac{(A+B)Z}{v^3} + \frac{CZ}{\tau^2} \right)$$

ubi α certam constantem qua proportionaliter deter-
minatur, designat, quam deinceps ex motu quodam
cognito veluti motu terræ medio, qui nunc quidem
locum habet, definiri conveniet. Quo pacto simul loco
elementi temporis vagi in se dt spatium motu terræ
medio interea descriptum in calculum introducetur.

Prix de 1760.

C

Ceterum hic notetur, massam solis A tantopere massas planetarum & cometarum excedere, ut pro $A+B$ tuto scribere liceat A . quantitasque $\frac{C}{A+B}$ pro fractione minima haberi possit.

XXII.

Omnes nunc vires Analyseos in hoc intendi oportet, ut istas tres æquationes differentio-differentiales resolvamus, hoc est vel integremus, vel ad commodam approximationem perducamus. Ac primo quidem binis conjugendis simpliciores formas adipiscemur

$$X d d Y - Y d d X = a d t^2 \left(-\frac{C u (Y \operatorname{cof.} \theta - X \operatorname{sin.} \theta)}{\tau^3} + \frac{C (Y \operatorname{cof.} \theta - X \operatorname{sin.} \theta)}{u u} \right);$$

$$\text{feu } X d d Y - Y d d X = a C d t^2 (X \operatorname{sin.} \theta - Y \operatorname{cof.} \theta) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right).$$

Deinde simili modo colligimus

$$X d d Z - Z d d X = a d t^2 \left(\frac{-C Z u \operatorname{cof.} \theta}{\tau^3} + \frac{C Z \operatorname{cof.} \theta}{u u} \right) \\ = -a C Z d t^2 \operatorname{cof.} \theta \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right)$$

$$Y d d Z - Z d d Y = a d t^2 \left(\frac{C Z u \operatorname{sin.} \theta}{\tau^3} + \frac{C Z \operatorname{sin.} \theta}{u u} \right) \\ = -a C Z d t^2 \operatorname{sin.} \theta \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right)$$

ubi autem manifestum est harum trium æquationum binas jam tertiam in se complecti.

XXIII.

Hic primo observetur formulas $XddY - YddX$, $XddZ - ZddX$, $YddZ - ZddY$ esse differentialiæ formularum $XdY - YdX$, $XdZ - ZdX$, $YdZ - ZdY$, quarum valores supra (§. XVII, XVIII) assignavimus. Deinde cum sit $Z = v \sin. \xi \sin. \omega$, &

$$X \sin. \theta - Y \cos. \theta = v \cos. \xi \sin. (\theta - \psi) - v \sin. \xi \cos. \omega \cos. (\theta - \psi);$$

superiores tres æquationes has induent formas:

$$d. (v v d \phi \cos. \omega) = a C v d t^2 (\cos. \xi \sin. (\theta - \psi) - \sin. \xi \cos. \omega \cos. (\theta - \psi)) \left(\frac{u}{\tau} - \frac{1}{uu} \right);$$

$$d. (v v d \phi \sin. \omega \sin. \psi) = - a C v d t^2 \cos. \theta \sin. \xi \sin. \omega \left(\frac{u}{\tau} - \frac{1}{uu} \right);$$

$$d. (v v d \phi \sin. \omega \sin. \psi) = - a C v d t^2 \sin. \theta \sin. \xi \sin. \omega \left(\frac{u}{\tau} - \frac{1}{uu} \right);$$

quarum binæ etsi jam continent tertiam, tamen quia nulla est ratio, cur unam præ reliquis omittamus, conveniet omnes tres retineri, quo inde facilius formulas deinceps usum habituras, eliciamus.

XXIV.

Cum igitur binæ posteriores, si ex parte evolvantur, præbeant:

C ij

$$\begin{aligned} \text{cof. } \downarrow d. (v v d \varphi \sin. \omega) - v v d \varphi \sin. \omega. d \downarrow \sin. \downarrow = \\ - \alpha C v d t^2 \text{cof. } \theta \sin. \xi \sin. \omega \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin. \downarrow d. (v v d \varphi \sin. \omega) + v v d \varphi \sin. \omega. d \downarrow \text{cof. } \downarrow = \\ - \alpha C v d t^2 \sin. \theta \sin. \xi \sin. \omega \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right); \end{aligned}$$

illa per $\sin. \downarrow$ hæc vero per $-\text{cof. } \downarrow$ multiplicata conjuncte producent

$$\begin{aligned} - v v d \varphi d \downarrow \sin. \omega = \alpha C v d t^2 \sin. \xi \sin. \omega \sin. \\ (\theta - \downarrow) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right); \end{aligned}$$

quæ per $-v \sin. \omega$ dat

$$v d \varphi d \downarrow = \frac{\alpha C d t^2 \sin. \xi \sin. \omega (\theta - \downarrow)}{v} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right);$$

ita ut hinc elementum $d \downarrow$ pro temporis elemento $d t$ determinetur

$$d \downarrow = - \frac{\alpha C d t^2 \sin. \xi \sin. \omega (\theta - \downarrow)}{v d \varphi} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right)$$

unde simul colligitur $d \xi = d \varphi - d \downarrow \text{cof. } \omega$, atque

$$d \omega = \frac{d \downarrow \text{cof. } \xi \sin. \omega}{\sin. \xi} = - \frac{\alpha C d t^2 \text{cof. } \xi \sin. \omega \sin. \omega (\theta - \downarrow)}{v d \varphi} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right).$$

XXV.

Sin autem earundem binarum æquationum prior per $\text{cof. } \downarrow$ & posterier per $\sin. \downarrow$ multiplicetur junctim prodit :

$$\begin{aligned} d(v v d \varphi \sin. \omega) = - \alpha C v d t^2 \sin. \xi \sin. \omega \text{cof. } (\theta - \downarrow) \\ \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right), \end{aligned}$$

quæ ex parte evoluta fit

$$\begin{aligned} \sin. \omega d(v v d \phi) + v v d \phi d \omega \cos. \omega = - \alpha C v d t^2 \sin. \xi \\ \sin. \omega \cos. (\theta - \psi) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right). \end{aligned}$$

Prima autem simili modo ex parte evoluta dat

$$\begin{aligned} \cos. \omega d. (v v d \phi) - v v d \phi d \omega \sin. \omega = - \alpha C v d t^2 \\ (\sin. \xi \cos. \omega \cos. (\theta - \psi) - \cos. \xi \sin. (\theta - \psi)) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right). \end{aligned}$$

Nunc igitur illa per $\cos. \omega$ hæc vero per $-\sin. \omega$ multiplicata conjunctim producent:

$$\begin{aligned} v v d \phi d \omega = - \alpha C v d t^2 \cos. \xi \sin. \omega \sin. (\theta - \psi) \\ \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right), \end{aligned}$$

quæ cum modo ante inventa congruit. Quod eo minus est mirandum, quod uti jam observavimus, nostræ ternæ æquationes nonnisi pro duabus sunt habendæ, neque propterea plures duabus conclusiones suppetant.

XXVI.

Multiplicemus autem binarum postremarum æquationum illam per $\sin. \omega$ hanc vero per $\cos. \omega$, atque earum aggregatum præbebit:

$$\begin{aligned} d(v v d \phi) = - \alpha C v d t^2 (\sin. \xi \cos. (\theta - \psi) - \cos. \xi \cos. \omega \\ \sin. (\theta - \psi)) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right) \end{aligned}$$

quæ ad sequentem usum maxime accomodabitur si per $2 v v d \phi$ multiplicetur, & integretur. Quia enim elementum $d t$ constans assumitur, integrale hoc modo representabitur:

$$\begin{aligned} v^4 d \phi^2 = - 2 \alpha C d t^2 \int v^3 d \phi (\sin. \xi \cos. (\theta - \psi) \\ - \cos. \xi \cos. \omega \sin. (\theta - \psi)) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right), \end{aligned}$$

ac videbimus totum negotium potissimum ad inventionem hujus integralis revocari. Hæ ergo sunt illæ duæ conclusiones, quas externis nostris æquationibus derivatis deducere licet, quarum altera valorem ipsius $v + d\varphi^2$ altera vero ipsius $d\psi$ vel $d\omega$ ostendit.

XXVII.

Cum igitur vis nostrarum trium æquationum principalium (§. XXI) nondum sit exhausta sequenti combinatione novam inde æquationem formemus. Multiplicentur scilicet prima per $2 dX$, secunda per $2 dY$, ac tertia per $2 dZ$, ut hoc modo summæ prius membrum fiat integrabile, & cum sit $X dX + Y dY + Z dZ = v dv$ obtinebimus

$$2 dX ddX + 2 dY ddY + 2 dZ ddZ = -2 a dt^2 \\ \left(\frac{(A+B)dv}{vv} + \frac{Cv dv}{\tau^3} - C(dX \cos.\theta + dY \sin.\theta) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right) \right)$$

ex formulis autem differentialibus (§. XIV) colligimus

$$dX \cos.\theta + dY \sin.\theta = \frac{dv}{v} (X \cos.\theta + Y \sin.\theta) - v d\varphi \\ (\sin.\xi \cos.(\theta - \psi) - \cos.\xi \cos.\omega \sin.(\theta - \psi)),$$

quæ ob

$$X \cos.\theta + Y \sin.\theta = v (\cos.\xi \cos.(\theta - \psi) + \sin.\xi \\ \cos.\omega \sin.(\theta - \psi)),$$

tandem præbet

$$2 dX ddX + 2 dY ddY + 2 dZ ddZ = -2 a dt^2 \\ \left(\frac{(A+B)dv}{vv} + \frac{Cv dv}{\tau^3} \right) \\ + 2 a C dt^2 (dv (\cos.\xi \cos.(\theta - \psi) + \sin.\xi \cos.\omega \sin.(\theta - \psi)) \\ - v d\varphi (\sin.\xi \cos.(\theta - \psi) - \cos.\xi \cos.\omega \sin.(\theta - \psi)) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right))$$

XXVIII.

Jam partis prioris integrale est

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dv^2 + vv d\phi^2$$

pro parte autem posteriori ponamus brevitatis gratia
cos. $\xi \cos. (\theta - \psi) + \sin. \xi \cos. \omega \sin. (\theta - \psi) = \cos. \rho$, &
sin. $\xi \cos. (\theta - \psi) - \cos. \xi \cos. \omega \sin. (\theta - \psi) = \sin. \sigma$,
 ut fit $\rho =$ angulo QAZ & propterea

$$\tau = \sqrt{(uu - 2uv \cos. \rho + vv)}.$$

Hincque æquatio nostra integralis ita se habebit

$$dv^2 + vv d\phi^2 = 2\alpha (A + B) dt^2 \left(\frac{1}{\tau^3} - \frac{1}{f} \right) - 2\alpha$$

$$C dt^2 \int \frac{v dv}{\tau^3}$$

$$+ 2\alpha C dt^2 \int (dv \cos. \rho - v d\phi \sin. \sigma) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right).$$

Tum vero ex supra inventis habemus:

$$v + d\phi^2 = -2\alpha C dt^2 \int v^3 d\phi \sin. \sigma \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right)$$

quibus duabus æquationibus solutio problematis potissimum continetur.

XXIX.

Ponamus præterea ad has formulas contrahendas:

$$\int v^3 d\phi \sin. \sigma \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right) = P;$$

$$\int \frac{v dv}{\tau^3} = Q;$$

$$\int (dv \cos. \rho - v d\phi \sin. \sigma) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right) = R;$$

quas quantitates, quia in terminis valde parvis tantum insunt, tantisper tanquam cognitæ spectemus: & nostræ æquationes erunt

24. DE SUCCESSIVA MUTATIONE

$$v^4 d\phi^2 = 2\alpha dt^2 ((A+B)G - CP);$$

$$dv^2 + vv d\phi^2 = 2\alpha dt^2 ((A+B)(\frac{1}{v} - \frac{1}{f}) - CQ + CR);$$

ubi ut parvitas massæ C præ $A+B$ clarius in oculos incurrat ponamus $\frac{C}{A+B} = n$, ita ut n sit fractio quam minima: induentque nostræ æquationes has formas:

$$v^4 d\phi^2 = 2\alpha (A+B) dt^2 (G - nP);$$

$$dv^2 + vv d\phi = 2\alpha (A+B) dt^2 (\frac{1}{v} - \frac{1}{f} - nQ + nR).$$

XXX.

Hinc jam commode exui potest consideratio tempusculi dt , fietque

$$(G - nP) (dv^2 + vv d\phi^2) = v^4 d\phi^2 (\frac{1}{v} - \frac{1}{f} + n(R - Q));$$

unde colligitur

$$dv^2 (G - nP) = v^4 d\phi^2 (\frac{1}{v} - \frac{1}{f} + n(R - Q) - \frac{(G - nP)}{vv});$$

hincque porro

$$\frac{dv}{v} \sqrt{G - nP} = d\phi \sqrt{(\frac{1}{v} - \frac{1}{f} + n(R - Q) - \frac{(G - nP)}{vv})};$$

qua æquatione ratio inter differentialia dv & $d\phi$ exprimitur, reliqua autem jam supra ad $d\phi$ sunt reducta: tum vero nunc etiam tempusculum dt eodem revocatur ope æquationis

$$vv d\phi = dt \sqrt{2\alpha (A+B) (G - nP)};$$

si fractio n plane evanesceret, hinc cognitæ regulæ Keplerianæ deduci solent.

XXXI.

Quo nunc motus determinationem ad similitudinem regularum Keplerianarum perducamus, distantiam $AZ = v$

$AZ = v$ formam similem ei, quæ in sectionibus conicis occurrit, tribuamus, fitque $v = \frac{p}{1 + q \cos. x}$, ubi p denotat semiparametrum sectionis conicæ, q excentricitatem, ex x eum angulum qui anomalia vera appellatur. Cum autem vulgo anomalia vera ab aphelio computari soleat, liceat hic mihi ab hoc more recedere, eamque à perihelio computare, quo simul in cometarum orbitis locum inveniri queat. In motu regulari quantitates p & q essent constantes, nunc autem eas ut variables tractemus, ut quemadmodum initio observavi, motus perturbatio in variatione elementorum sectionis conicæ comprehendatur. Dum autem semiparameter est $= p$, & excentricitas $= q$ erit semiaxis transversus $= \frac{p}{1 - qq}$, quem vocemus $= r$, in cujus variatione definienda tota quæstio versatur.

XXXII.

Cum igitur hoc modo loco unius variabilis v tres novæ variables p , q , & x in computum ingerantur, binas pro lubitu definire licet, in quo quidem ratio absidum est habenda, qua hæc duæ conditiones præscribuntur, ut casibus quibus fit vel $\cos. x = 1$, vel $\cos. x = -1$ differentiale dv ideoque & formula irrationalis $\sqrt{(\frac{1}{v} - \frac{1}{r} + n(R - Q) - \frac{G - nP}{v})}$ evanescat: fit brevitatis ergo $\frac{1}{r} - n(R - Q) = M$ & $G - nP = N$, ut habetur

$$\frac{d}{dv} \sqrt{N} = d\phi \sqrt{(-M + \frac{1}{v} - \frac{N}{v})};$$

& binæ conditiones præscriptæ præbent:

$$-M + \frac{1+q}{q} - \frac{N(1+q)^2}{pp} = 0 \quad \& \quad -M + \frac{1-q}{p} - \frac{N(1-q)^2}{pp} = 0;$$

Prix de 1760.

D

quarum differentia dat $\frac{2q}{p} = \frac{4Nq}{p^2}$, seu $p = 2N$;
 unde fit $M = \frac{1+q}{p} - \frac{(1+q)^2}{2p^2} = \frac{1-q}{2p}$;
 ideoque $2M = \frac{1}{r}$, ob $r = \frac{p}{1-q}$;
 erit ergo $p = 2(g - nP)$, & $\frac{1}{r} = \frac{2}{r} - 2n(R - Q)$.

XXXIII,

His jam determinationibus pro M & N inventis formula nostra irrationalis fit :

$$V\left(-M + \frac{1}{v} - \frac{N}{vv}\right) = V\left(-\frac{(1-qq)}{2p} + \frac{1+q \operatorname{cof}. x}{p} - \frac{(1+q \operatorname{cof}. x)^2}{2p}\right) = \frac{q \operatorname{fin}. x}{V 2p};$$

unde ob $N = \frac{p}{2}$ colligitur

$$\frac{dv}{vv} V \frac{p}{2} = \frac{q d \varphi \operatorname{fin}. x}{V 2p}, \text{ seu } \frac{dv}{vv} = \frac{q d \varphi \operatorname{fin}. x}{p}.$$

Cum autem fit $\frac{1}{v} = \frac{1+q \operatorname{cof}. x}{p}$ erit

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp} (1+q \operatorname{cof}. x) - \frac{dq \operatorname{cof}. x}{p} + \frac{q dx \operatorname{fin}. x}{p} = \frac{q d \varphi \operatorname{fin}. x}{p},$$

unde sequitur fore pro anomalia vera

$$dx = d\varphi - \frac{dp(1+q \operatorname{cof}. x)}{p q \operatorname{fin}. x} + \frac{dq \operatorname{cof}. x}{q \operatorname{fin}. x}.$$

At ob $1 - qq = \frac{p}{r}$ est $q dq = \frac{p dr - r dp}{2rr}$, sicque fit

$$dx = d\varphi - \frac{dp(1+q \operatorname{cof}. x)}{p q \operatorname{fin}. x} - \frac{dp \operatorname{cof}. x}{2 q q r \operatorname{fin}. x} + \frac{p dr \operatorname{cof}. x}{2 q q r r \operatorname{fin}. x}$$

$$\text{seu } dx = d\varphi - \frac{dp(2q + (1+qq) \operatorname{cof}. x)}{2 p q q \operatorname{fin}. x} + \frac{dr}{rr} \frac{p \operatorname{cof}. x}{2 q q \operatorname{fin}. x}$$

ubi cum fit $dp = -2n dP$, & $\frac{dr}{rr} = -2n(dQ - dR)$, erit

$$dx = d\phi + \frac{ndP(2q + (1+qq)\cos x)}{pqq\sin x} - \frac{np(dQ - dR)\cos x}{qq\sin x}.$$

XXXIV.

Jam vero cum sit $dP = v^3 d\phi \sin \sigma \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right)$,
erit primo variatio in semi-parametro p producta:

$$dp = -2n v^3 d\phi \sin \sigma \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right).$$

Deinde ob $dv = \frac{qv v d\phi \sin x}{p}$,

erit $dQ = \frac{qv^3 d\phi \sin x}{p\tau^3}$, &c

$$dR = \left(\frac{quv d\phi \sin x \cos \rho}{p} - v d\phi \sin \sigma \right) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right);$$

unde pro variatione semi-axis transversi r peperitur:

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3 d\phi \sin x}{p\tau^3} + 2nvd\phi \left(\frac{qv \sin x \cos \rho}{p} - \sin \sigma \right) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right).$$

Tum vero ratio inter $d\phi$ & dx prodit:

$$dx = d\phi + \frac{nv^3 d\phi(2q + (1+qq)\cos x)\sin \sigma}{pqq\sin x} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right) - \frac{nv^3 d\phi}{q\tau^3} - \frac{npv d\phi \cos x \sin \sigma}{qq\sin x} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right) + \frac{nvvd\phi \cos x \cos \rho}{q} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right);$$

ubi meminisse oportet esse $v = \frac{p}{1+q\cos x}$.

Dij

XXXV.

In hac postrema formula termini per $\sin. \sigma$ affecti commode in unum colligi possunt: si enim posterior per $\frac{v v (1 + q \cos. x)^2}{p p} = 1$ multiplicetur ambo conjunctim erunt

$$+ \frac{n v^3 d \varphi \sin. \sigma}{p q q \sin. x} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right) \left(\cos. x + 2 q + q q \cos. x \right) \left(-\cos. x - 2 q \cos. x^2 - q q \cos. x^3 \right),$$

qui ergo in hunc evalescunt

$$\frac{n v^3 d \varphi \sin. x \sin. \sigma}{p q} (2 + q \cos. x) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right);$$

hincque ergo habebimus . . .

$$dx = d\varphi - \frac{n v^3 d \varphi}{q \tau^3} + \frac{n v v d \varphi \cos. x \cos. \rho}{q} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right), \\ + \frac{n v^3 d \varphi \sin. x \sin. \sigma}{p q} (2 + q \cos. x) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right);$$

quæ forma etiam hoc modo exprimi potest:

$$dx = d\varphi - \frac{n v^3 d \varphi}{q \tau^3} + \frac{n v v d \varphi}{q} \left(\cos. x \cos. \rho + \frac{2 + q \cos. x}{1 + q \cos. x} \sin. x \sin. \sigma \right) \\ \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right);$$

ubi notandum est $d\varphi - dx$ definire progressionem momentaneam lineæ absidum.

XXXVI.

Consideremus nunc etiam relationem, quæ inter angulum elementarem $d\varphi$ & tempusculum dt intercedit, & cum sit $G - nP = \frac{1}{2} p$, erit $v v d\varphi = dt \sqrt{a (A + B) p}$. Quod si jam loco tempusculi dt angulum à terra motu medio interea confectum introducere ve-

limus, ut constans vaga α eliminetur, ponamus à terra secundum motum medium, quoquidem nunc gaudet, tempusculo $d t$ absolvi angulum elementarem $d T$: & formula ista ad motum terræ accommodata, quæ pro motu medio tanquam circulus spectari debet, cujus radius seu distantia media à sole fit $\Rightarrow a$ fiet $v = p = a$ & $d \varphi = d T$, ita ut sit

$$a u d T = d t \sqrt{\alpha (A + B) a}, \text{ seu}$$

$$\alpha (A + B) d t^2 = a^3 d T^2;$$

ubi quidem B massam terræ denotat; sed ob insignem massæ solis magnitudinem pro omnibus planetis quantitas $A + B$ pro eadem haberi potest. Tempusculo ergo, quo terra motu medio angulum $d T$ absolvit erit pro nostro planeta

$$v v d \varphi = a d T \sqrt{a p}. \text{ ideoque } d T = \frac{v v d \varphi}{a v a p}.$$

XXXVII.

Cum nunc sit $\alpha d t^2 = \frac{v^4 d \varphi^2}{(A + B) p}$, erit hoc valore in superioribus formulis (§. XXIV) substituto ob $\frac{C}{A + B} = n$

$$d \psi = - \frac{n v^3 d \varphi \sin. \xi \sin. (\theta - \psi)}{p} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right);$$

hincque porro pro variatione inclinationis

$$d \omega = - \frac{n v^3 d \varphi \cos. \xi \sin. \omega \sin. (\theta - \psi)}{p} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right);$$

ac pro variatione argumenti latitudinis seu anguli $\Omega A Z = \xi$

$$d \xi = d \varphi + \frac{n v^3 d \varphi \sin. \xi \cos. \omega \sin. (\theta - \psi)}{p} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right);$$

ubi $d \varphi - d \xi$ exprimit promotionem lineæ nodorum

in orbita planetæ, quem in Z consideramus. Atque hoc modo omnes mutationes momentaneas ab actione planetæ cometæve in Q versantis profectas per angulum elementarem $d\phi$ ideoque etiam per angulum motu medio terræ vel solis confectum $d\tau$ expressas dedimus.

XXXVIII.

Si hæ formulæ integrari possent, non solum quæstioni ab Illustrissima Academia Regia Scient. perfecte satisfaceret, sed etiam omnes perturbationes, quas planetæ vel cometæ mutua actione in motu suo patiuntur, ita exacte definiri possent, ut vix quicquam amplius in Theoria Astronomiæ esset desiderandum, quod autem antequam Analysis insignibus incrementis locupletetur, nec sperare quidem licet. Quamdiu autem his subsidiis caremus, tutissima via videtur his ipsis formulis differentialibus ita utendi ut mutationes intervallo singulorum dierum productæ tanquam differentialia spectentur sicque valor ipsius dT statuatur = $59', 8''$. Tum enim pro singulis temporis intervallis ex ipsis formulis differentialibus valores variationum dp , dr , $d\psi$ & $d\omega$ colligi, indeque pro tempore quantumvis magno eadem mutationes satis exacte æstimari poterunt. Hæc methodus præcipue usum habebit si perturbationes à cometa oriantur cujus effectus cum per modicum tempus duret, non nimis prolixos calculos postulabit. Periculum igitur feci in perturbatione motus terræ à numero cometa orta æstimanda.



*De effectu nuperi Cometæ in motu Telluris
perturbando.*

XXXIX.

CUM hujus Cometæ nondum ejusmodi observationes ad me pervenerint, ex quibus elementa motus, quem nunc tenuit, definire potuissem, iis usus sum elementis, quæ pro ejus apparatione A. 1682 sunt stabilita; atque quantum ex observationibus crassioribus colligere licuit assumpsi hanc cometam ad diem 14 Martii hujus anni per Perihelium transisse. Quamvis autem verisimile sit elementa motus perinde ac tempus periodicum à precedente apparatione mutationem esse passa, tamen loca cometæ visa satis cum superioribus elementis convenire, sunt deprehensa, ut hinc nullus enormis error sit metuendus. Erat ergo hic cometa terræ proximus circa diem 27 Aprilis, ejusque distantia ad distantiam solis fere se habebat ut 2 ad 17. De massa autem ejus nihil suspicari licet, quam ad massam Solis rationem tenere pono ut n ad 1, ita ut si cometæ massa æquaretur massæ terræ foret prope modum $n = \frac{1}{200000}$. At verum valorem fractionis n nonnisi ex effectu in posterum observando definire licebit.

XL.

Quoniam igitur actio cometæ in terram circa 27 Aprilis erat maxima, pro pluribus diebus ante & post hoc tempus variationes in orbita terræ productas ex formulis; ante datis computavi.

| Intervallum temporis Aprilis. | Variatio semi- parametri. $d p$ | Variatio semi - axis. $d r$ | Variatio lineæ abscidum. $d \varphi - d x$ | Variatio lineæ nodorum. $d \psi$ | Variatio incli- nationis. $d \omega$ |
|-------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|--|--|--|
| 20—21 | + 45310 n | + 44570 n | - 4937560 n'' | + 8903 n'' | + 6717 n'' |
| 25—26 | +155650 n | +154346 n | -19059570 n | +112880 n | +111364 n |
| 26—27 | +135314 n | +135466 n | -18445310 n | +152436 n | +159996 n |
| 27—28 | + 66010 n | + 67438 n | -11593600 n | +155398 n | +173911 n |
| 28—29 | - 3262 n | - 1014 n | - 3778470 n | +119840 n | +143550 n |
| 29—30 | - 37860 n | - 35616 n | + 878107 n | + 78234 n | +100724 n |
| 30—1 Maji | - 46088 n | - 44210 n | + 1799210 n | + 48305 n | + 67183 n |
| 1 — 2 | - 43260 n | - 41772 n | + 2959610 n | + 29734 n | + 44933 n |
| 6 -- 7 | + 19031 n | - 17736 n | + 1554230 n | + 3608 n | + 9506 n |

posito semi-axe ab actione cometæ immuni $r = 100000$.

XLI.

Hinc patet 1°. semi-parametrum p ad 28 Aprilis augeri, tum vero iterum minui, ita tamen ut incrementum multum superet decrementum. Totum quidem augmentum exfurgere videtur ad 700000 n ; ex quo cum ante adventum cometæ semi-parameter effet = 97144, is posthac erit = 97144 + 700000 n . Quare si massa cometæ ad massam terræ statuatutur ut m ad 1, erit nunc semi-parameter orbitæ terræ = 97144 + $\frac{7}{2} m$. 2°. Pares fere mutationes patitur semi-axis transversus r , qui ab actione cometæ augmentum accepisse videtur = 690000 n . unde isquidem nunc erit = 100000 + $\frac{69}{20} m$. denotante perpetuo $m : 1$ rationem massæ cometæ ad terræ. 3°. Hinc sequitur, cum excentricitas orbitæ terræ ante adventum cometæ effectus = 0,0169, eam nunc aliquanto fore minorem = 0,0169 - 0,00044 m . Quando vera elementa motus cometæ fuerint erecta, operæ pretium erit hunc calculum repetere & ad plures dies tam ante quam post perigæum extendere.

XLII.

XLII.

Cum ab actione cometæ axis orbitæ terræ certe sit auctus in posterum quantitatem anni solaris majorem fieri necesse est, idque in ratione 1 ad $(1 + \frac{69m}{2000000})^{\frac{1}{2}}$, seu 1 ad $1 + \frac{207m}{4000000}$. Quare cum ante adventum cometæ annus solaris fuisset 365 d, 5 h, 49' = 525949' incrementum anni in posterum hinc prodit = 27 m' quod sane admodum est notabile si enim massa cometæ æqualis esset massæ terræ, quantitas anni solaris posthac futura esset 365, d, 6 h, 16' unde non exigua mutatio in calendarium inferretur. Imprimis autem tabulæ astronomicæ omnes mediorum motuum, quatenus ad annos referentur; insigni correctione indigerent. Quin etiam si cometa tantum parti $\frac{1}{27}$ terræ æquaretur, incrementum unius minuti primi in annos mox sentiri deberet atque hinc massa cometæ accuratissime cognosci posse videtur.

XLIII.

Quia motus cometæ erat retrogradus, motusque lineæ absidum terræ ad ejus orbitam relatur, signum — quod in columna $d\phi - dx$ prævalet ostendit lineam absidum terræ promotam esse. Idque per spatium, quod haud minus quam 100000000 n æstimari potest. Foret ergo nunc aphelium terræ magis promotum per spatium 500 m'' unde si cometa esset terræ æqualis nunc quidem locus aphelii, quem tabulæ ostendunt, augeri deberet 8', 20'' quod incrementum mox ex accuratissimis observationibus solis post actionem cometæ instituendis percipi deberet. Denique ex binis ultimis columnis patet ambos angulos \downarrow & ω insigne augmentum capere debere. Quod utrinque haud minus quam 950000 n'' vel 47 $\frac{1}{2}$ m'' æstimari potest, sunt

Prix de 1760.

E

enim ambo fere æqualia. Cujusmodi autem phænomena hinc oriantur, opera pretium erit accuratissime definire.

XLIV.

FIG. 2.

Sit igitur in cœlo ΩC via cometæ ex sole visa & $\Omega \simeq \odot$ eclipticæ situs ante cometæ adventum, erit ex elementis orbitæ cometæ angulus $\Omega \simeq C = 17^\circ 56' = \omega$ & arcus $\Omega \simeq = 57^\circ, 16'$. Jam per punctum \simeq transeat æquator $\mathcal{A} \simeq Q$ ut sit angulus $\mathcal{A} \simeq \odot = 23^\circ, 28\frac{1}{2}'$. At postquam cometæ effectum suum produxit, sit $\varepsilon o \lambda \omega$ ecliptica fecans priori in o , erit $\Omega \omega = d \downarrow$, & $C \omega o = \omega + d \omega$. Ducatur arculus ωu ad Ωo normalis, erit $\Omega u = d \downarrow \cos. \omega$ & $\omega u = d \downarrow \sin. \omega$. Hinc ob $d \omega = d \downarrow$ reperitur arcus $\Omega o = 17^\circ 7'$, & angulus minimus ad $o = 50 m''$, ob $d \downarrow = d \omega = 47\frac{1}{2} m''$. Cum ergo sit $\simeq o = -34^\circ, 9'$ ecliptica motu aggregatorio circa punctum o , quod cadit in $m 4^\circ, 9'$ conversa est angulo $50 m''$ sicque punctum solstitiale \odot magis ab æquatore removetur & obliquitas eclipticæ augetur. Ac si obliquitas eclipticæ augetur. Ac si obliquitas eclipticæ pristina ponatur $= \varepsilon$. Presens $= \varepsilon + d\varepsilon$, invenitur $d\varepsilon = 41 m''$ & cum sit $\mu \lambda = -63 m''$. Puncta æquinoctialia super ecliptica promota erunt spatio $63 m''$ super æquatore autem spatio $70 m''$. In latitudine igitur stellarum fixarum hic effectus potissimum spectabitur, & maxime quidem in iis quarum longitudo est vel $\approx 4^\circ, 9'$, vel $\approx 4^\circ, 9'$, quarum illæ ad polum eclipticæ borealem accessisse, hæ vero ab eo recessisse videbuntur intervallo $50 m''$.



Responſio ad Quæſtionem.

XLV.

CUM ergo dubitari nequeat, quin axis orbitæ Telluris ab actione nuperi Cometæ augmentum acceperit, niſi forte quis vel ſiſtema gravitationis univerſalis evertere, vel corpora cometarum omnes materia expertia ſtatueret velit. Quorum alterum graviffimis argumentis, alterum natura corporum adverſaretur, omnino agnoſcere debemus, quantitatem anni ſolaris in poſterum aliquantum majorem eſſe futuram, quam adhuc fuerat. etiamſi verum augmentum ob maſſam cometæ incognitam definire haud liceat. Ex quo neceſſario ſequitur, motum medium ſolis aliquanto tardioſer fieri oportere. Cujusmodi mutatio cum nunc quidem in terra contigerit, omnino probabile eſt ſimilem perturbationem jam antehac non ſolum in terra ſed etiam in reliquis planetis eſſe factam, ita ut ſine ulla dubitatione aſſeverare poſſimus, motus medias planetarum quandoque alterationibus eſſe obnoxios.

XLVI.

Hujusmodi alteratio toties evenire debet, quoties cometa cuiſpiam planetæ ſit admodum vicinus, quod quin ſæpius jam contigerit vix dubitare licet. Utinam Hiſtoria Cometarum majori cura ab Aſtronomiæ peritis omni tempore fuiſſet conſignata! inde enim quoniam cometæ ad quempiam planetam ſatis prope acceſſerint, cognoſci eorumque effectus per ſimilem calculum, quo hic ſum uſus, determinari poſſet; ſed ve-

E ij

rustiores relationes ita plerumque fabulis sunt refertæ. Ut parum fidei mereantur; quantus enim effectus oriri debuisset ab illis cometis quorum magnitudo apparens Lunam superasse perhibetur? Qui quin terræ multo viciniore fuissent quum hic postremus, dubitare non posset, cum tamen observationes astronomicæ, vix ullam alterationem indicare videantur. Merito igitur hujusmodi cometarum, qui adeo in regiones sublunares descendisse ferantur relationes fabulis vulgi annumerantur.

XLVII.

Neque tamen omnino negare possumus, ante hoc tempus ullas hujusmodi perturbationes in motu terræ esse productas, etiamsi fortasse aliquot abhinc seculis, quibus Astronomica majori studio tractare est capta, nihil tale evenerit. Fieri enim posset, ut ob defectum idonearum observationum hujusmodi alteratio non esset animadversa, vel ut motus medius jam ita fuerit constitutus ut etiam cum illis satis prope conveniret. Suspicio hinc saltem nasci posset, quoniam Ptolemæi observationes, cum nostris collocatæ, anni quantitatem aliquanto minorem ostendunt, nisi error reductionis Calendarii Ægyptiaci ad Romanum in causa sit, intervallo temporis ab Hipparcho ad Ptolemæum elapsi cometam quendam annum contraxisse, deinde vero ab alio quopiam cometa annum iterum nonnihil fuisse protractum. Verum de his nihil præter conjecturas proferre licet, sufficiat igitur exemplo nuperi cometæ, ostendisse ab ejus actione utique alterationem in motu medio terræ oriri debuisse.

XLVIII.

At si ab ista cometa non solum terræ motus medius sed etiam positio & species ejus orbitæ quandam varia-

tionem est passa, fieri omnino nequit, quin Luna in motu suo multo majores perturbationes sit passa, quas cum per Theoriam definire vix liceat, observationes posthac instituenda declarabant. Ubi quidem non parum esset dolendum, cum jam post tot tantosque labores Theoria Lunæ ad id perfectionis sit perducta ut lunæ loca fere æque exacte ac solis definire valuerimus, si ingens hoc opus posthac nulli usui amplius esset futurum, plures enim anni novæ Theoriæ condendæ vix sufficerent. Hoc autem eo magis est verendum, cum revera mutatio quædam in motu lunæ medio post tempora vetustissimarum observationum facta deprehendatur. Quæ quin effectui cujuscumque cometæ sit tribuenda, nunc quidem extra dubium positum videtur.

XLIX.

Atque hæ causæ perturbationum ab actione cometarum profectæ ita sunt incertæ ut neque quæ antehac evenerunt ob defectum observationum assignari, neque futuræ prædici queant, nisi forte pro iis cometis, quorum reversiones jam satis sunt exploratæ, etiamsi perturbationes, quas ipsi in suo cursu à planetis patiuntur, haud levi sint impedimento. Certiores autem eæ sunt perturbationes, quæ ab actione mutua planetarum oriuntur, & ad quas definiendas supra expositæ formulæ simili modo adhiberi possunt, ita ut pro singulis diebus vel etiam minoribus majoribusve temporis intervallis variationes singulorum elementorum per ipsas formulas differentiales definiantur, ac deinceps in unam summam colligantur. Qui calculus fortasse minori opera expedietur quam si integratio completa harum formularum in nostra esset potestate: integralia enim, siquidem unquam ea eruere licebit, tantopere implicata fore videntur, ut nonnisi prolixissimis ac tædiosissimis calculis evolvi queant.

L.

Cum igitur quæstio proposita non omnes perturbaciones requirat, sed ad variationem axis transversi sit adstricta eam sequenti formula exprimi supra vidimus:

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{-2nqv^3 d\varphi \sin. x}{p\tau^3} + 2nvd\varphi \left(\frac{qv \sin. x \cos. \rho}{p} - \sin. \sigma \right) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu} \right);$$

quam aliquanto attentius considerari conveniet. Est autem n fractio tam parva ut nisi distantia τ admodum sit exigua, hæc expressio nullius sit momenti: tum vero patet eam proxime cubo distantiae $QZ = \tau$ reciproce esse proportionalem ita ut dimidia distantia effectum octies majorem afferat. Deinde etiam distantia $AQ = u$ quando fit minima, hanc expressionem multum augere potest, tamen quia tantum ratio inversa duplicata distantiae adest, hic effectus illo longe minor est censendus, nisi forte ingens cometa in perihelio suo solem fere attingat, uti A. 1681 evenisse constat: sed hæc vicinitas nimis cito transit, quam ut effectus inde notabilis oriri posse videatur.

L I.

Qui formulam non tam integrare quam ad commodam approximationem perducere voluerit, vehementer vereor ne oleum operamque perdiderit. Primo enim ipsa quantitas τ tali irrationalitate est implicata, ut ad hunc usum vix in seriem satis convergentem evolvi posse videatur: namque si casu quo τ est quantitas parva, fuerit convergens, id quod imprimis est opus, pro reliquis casibus plane erit inepta. Deinde tam in ea quam in reliquis formulæ partibus inest angulus ρ cum an-

gulo σ , qui ipsi formulis nimis perplexis definiuntur, quam ut successum sperare valeamus. Cujus difficultatis ratio potissimum in inclinatione binarum orbitarum seu angulo τ est sita, qui cum in cometis quantumvis magnus esse possit, ne tentare quidem hujusmodi reductionem volui, præsertim cum omnino minus sit molestum, calculum ex ipsa formula differentiali repetere, quemadmodum pro cometa hujus anni feci, eademque methodo pro omnibus reliquis cometis uti mallet, à quorum actione motus cujuspiam planetæ turbari videatur.

LII.

Verum pro actione mutua planetarum, quoniam eorum orbitæ parum inter se inclinatur, nostra formula aliquanto simplicior reddi potest. Si enim inclinatio ω evanescat, uti pro planetis assumere licet, consideratio lineæ nodorum penitus exiit ob $\text{cos. } \omega = 1$, erit $d\xi = d\varphi - d\psi$ & $\xi = \varphi - \psi$ hincque $\text{cos. } \rho = \text{cos. } (\varphi - \theta)$ & $\text{sin. } \sigma = \text{sin. } (\varphi - \theta)$ ita ut litteræ ρ & σ eundem angulum $\varphi - \theta$ qui est distantia amborum planetarum ex sole visa, denotent. Quare hoc casu erit

$$\tau = \sqrt{(u u - 2 u v \text{cos. } (\varphi - \theta) + v v)}, \text{ \&}$$

$$\frac{dr}{r r} = \frac{-2 n q v^3 d\varphi \text{sin. } x}{p \tau^3} + 2 n v d\varphi \left(\frac{q v \text{cos. } (\varphi - \theta) \text{sin. } x}{p} - \text{sin. } (\varphi - \theta) \right)$$

$$\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right);$$

quæ ob $\frac{p}{q} = 1 + q \text{cos. } x$ transformatur in hanc

$$\frac{dr}{r r} = \frac{-2 n q v^3 d\varphi \text{sin. } x}{p \tau^3} - \frac{2 n v v d\varphi}{p} \left(\text{sin. } (\varphi - \theta) + q \text{sin. } (\varphi - \theta - x) \right) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{u u} \right).$$

LIII.

In hac formula, quia per fractionem minimam n est multiplicata atque omnes perturbationes valde sunt exiguæ, primo quantitates p & q pro constantibus haberi possunt. Tum vero ponere licet $dx = d\phi$ neglecta motu lineæ absidum. Deinde quo tempore terra motu medio conficit angulum dT eodem erit $d\phi = \frac{a dTVap}{vv}$, existente $v = \frac{p}{1 + q \cos. x}$. Ac si pro altero planeta perturbante in Q fit semiparameter $= b$, excentricitas $= e$ & anomalia vera à perihelio computata $= y$ erit simili modo $u = \frac{b}{1 + e \cos. y}$ & $d\theta = \frac{a dTVab}{uu} = dy$, unde omnia differentialia ad idem dT reducuntur. Sed maxima difficultas etiamnum in formula irrationali τ residet. Quæ quomodo superari queat, ita quidem ut nostrum institutum postulat, nondum perspicio: immanes enim calculos evitare vellem quia inde parum subsidii suppetiturum prævideo.

LIV.

Simplicissimus est casus, quo ambæ orbitæ statuuntur circulares & excentricitas negligitur. Unde fit $v = p = r$: $u = b$. $d\phi = \frac{a dTVap}{rr} = \frac{aVa}{rVr} dT$, & $d\theta = \frac{aVa}{bVb} d\tau$, tum vero $\tau = \sqrt{(bb + rr - 2br \cos. (\phi - \theta))}$, & variatio quæsitæ $dr = - 2nr^3 d\phi \sin. (\phi - \theta) \left(\frac{b}{\tau^3} - \frac{1}{bb} \right)$; ubi quidem ipsa quantitas r ob mutabilitatem

litteram

litem minimam ut constans spectari potest. Hic igitur observo quomodocunque formula $\frac{b}{r}$ in seriem convertatur, in eo tantum anguli $\varphi - \theta$ cosinum cum suis potestatibus occurrere quæ cum ad cosinus multiplo- rum ejusdem anguli reducantur, si ponamus brevitatis gratia $\varphi - \theta = n$ factor $\frac{b}{r^3} - \frac{1}{b b}$ hujusmodi formam induet $A + B \text{ cos. } n + C \text{ cos. } 2 n + D \text{ cos. } 3 n$, &c. unde integrale ipsius $d r$, quia $d \varphi$ ad $d y$ constantem habet rationem, simili quoque forma exprimetur, ita ut durante qualibet revolutione quantitas r variationes quidem patiatur, sed potest quamlibet iterum eundem quantitatem recuperet: ex quo motus medius nullam alterationem pati censebitur.

L V.

Quamdiu ergo ambæ orbitæ excentricitate carent, à planetarum actione mutua nulla alteratio in eorum motu medio efficitur: quas enim mutationes axis trans- versus per singulas revolutiones subit, eæ inter inæqua- lites motus referri solent. Fieri autem potest ut ab eadem actione post longum demum tempus utrique orbitæ excentricitas quædam inducatur, quod cum eve- nerit, hæc ratio cessat atque in nostro calculo excen- tricitatis ratio erit habenda. Tum autem perpenden- dum est, tam formulam $\frac{v^3}{r^3}$ quam $v v \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{u u} \right)$ in hujusmodi seriem evolvi.

$$A + B \text{ cos. } n + C \text{ cos. } x + D \text{ cos. } y + \&c.$$

in qua occurrent cosinus omnium angulorum, qui ex combinatione horum trium oriri n , x & y possunt, unde $d r$ æquabitur producto ex elemento $d \varphi$ in seriem sinuum hujusmodi angulorum

$$A \text{ sin. } n + B \text{ sin. } x + C \text{ sin. } (n-x) + D \text{ sin. } (n+x) + E \text{ sin. } (n+y) + F \text{ sin. } (n-y) \&c.$$

Prix de 1760.

F

qui scilicet oriuntur, si illa forma vel per $\sin. x$ vel per $\sin. \eta$ vel per $\sin. (\eta - x)$ multiplicetur.

LVI.

Tum vero ad integrationem absolvendam notetur esse, $d\phi = dx = dT(\alpha + \mathcal{C} \cos. x + \gamma \cos. 2x \&c.)$, & $d\theta = dy = dT(\alpha' + \mathcal{C}' \cos. y + \gamma' \cos. 2y \&c.)$. Unde cum hujusmodi formulæ integrandæ occurrant $d\phi \sin. (\lambda y + \mu x + \nu y)$ tum $d\phi$ ita representari potest, ut sit $d\phi = \frac{\alpha(\lambda d\eta + \mu dx + \nu dy)}{\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha'} + M dt \cos. x + N dt \cos. y + \&c.$ cujus seriei primum membrum in integratione dat: $\frac{-\alpha \cos. (\lambda \eta + \mu x + \nu y)}{\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha'}$; reliqua autem membra, quæ sunt multo minora, in formula differentiali novos præbent terminos similes integrandos, qui pari modo sunt tractandi. Sicque cum continuo ad terminos minores perveniatur, tandem hoc modo cujusque termini integrale fatis exacte obtinebitur.

LVII.

Cum autem hic non de omnibus inæqualitatibus axis transversi sit quæstio, sed iis tantum quæ per plures revolutiones continuo vel augmentur vel diminuuntur: hic imprimis spectandi sunt ii differentialis termini in quibus sit $\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha' = 0$, qui continent sinum anguli $\eta - x + y$ vel ejus multiplorum. Cum enim ob $\eta = \phi - \theta$ hic angulus sit $(\phi - x) - (\theta - y)$, ubi $\phi - x$ longitudinem perihelii planetæ Z & $\theta - y$ longitudinem perihelii planetæ Q designet, angulus $\eta - x + y$ exprimit distantiam utriusque perihelii, quæ cum constans haberi possit. Erit partis $d\phi \sin. (\eta - x + y)$ integrale $= \phi \sin. (\eta - x + y)$, hinc-

que axis transversus continuo vel crescet vel decreset uniformiter, nisi quatenus post plurima secula distantia periheliorum mutatur. Quæ si tandem ad eundem valorem redierit iterum axem ad pristinum quidem statum reducit. Verum cum hoc quasi nunquam eventurum sit censendum quamdiu quidem Astronomia viguit & vigebit, axes transversus orbium planetarum continuo vel augebuntur vel diminuentur.

LVIII.

Evidens quoque est coëfficientem termini $\sin. (n-x+y)$ utramque excentricitatem q & e in se compecti; unde ceteris paribus ista axis transversus mutatio eo major erit, quo majus fuerit productum excentricitatum $e q$; ac si alterutra saltem fuerit minima nisi altera sit maxima, hæc axis transversus ideoque & motus medii variatio vix erit sensibilis. Tum vero hæc variatio potissimum à distantia periheliorum pendet, qua si fuerit vel nulla vel sex signorum, nullam etiam variationem in motu medio gignit. Maxima autem evadet hæc variatio, si ambo perihelia tribus signis à se invicem distent. Præterea vero hic effectus potissimum à magnitudine planeta perturbantis ejusque vicinitate pendeat.

LIX.

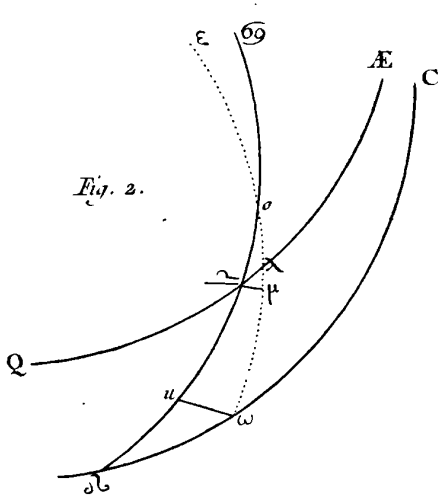
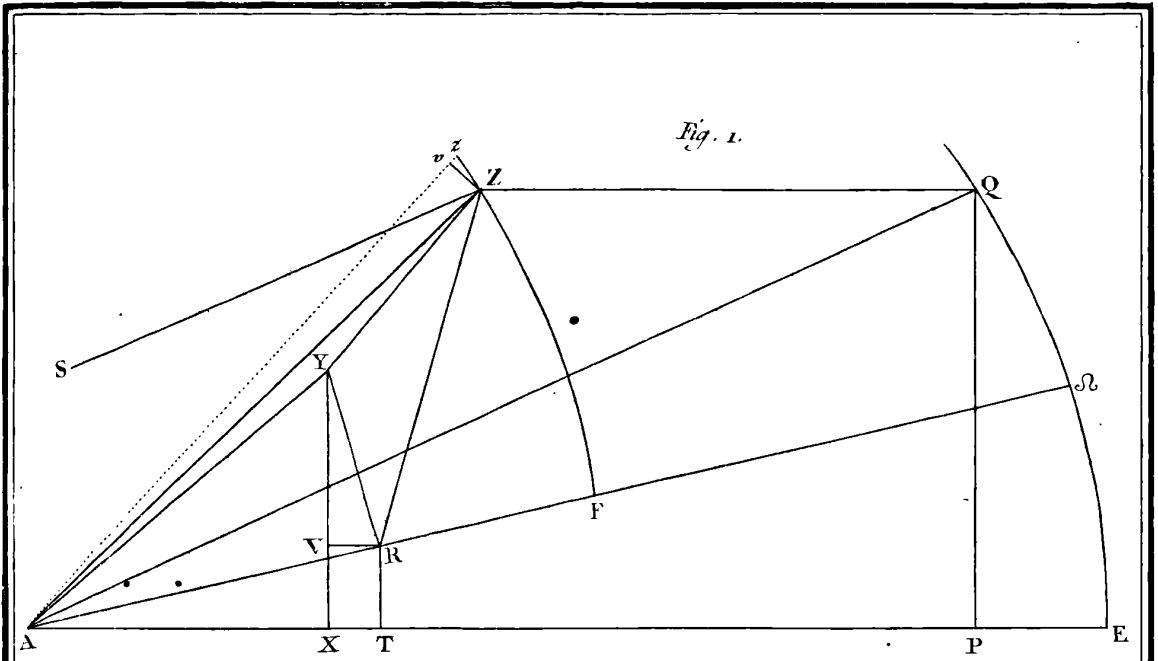
Cum igitur hujusmodi terminus $d\phi \sin. (n-x+y)$ certo in variationem axis transversus ingrediatur, jam re perpenfa ad quæstionem, Illustr. Academiæ Regiæ ita respondeo, ut dicam, motus medios planetarum non solum ab actione cometarum satis prope prætereuntium mutationibus esse obnoxios, sed etiam ab actione mutua eorum pro ratione excentricitatis positionisque periheliorum seu apheliorum ejusmodi mutationes pati, ut continuo fere æquabiliter vel accelerentur vel retarden-

tur. Atque ex formulis inventis, si analysis sufficeret; & quispiam laborem suscipere vellet vera adeo quantitas hujus alterationis assignari posset, quæ cum ab Ill. Academia non expressè requiratur quæstioni equidem satisfecisse videor, interim quid de singulis planetis sit censendum, hic subjungam.

L X.

Primo igitur Mercurius, etsi excentricitatem habet maximam ab insignem reliquorum planetarum distantiam præ distantia solis vix ullam mutationem in motu medio patietur nisi forte à Jove, cujus aphelium ab aphelio Mercurii distat 64° effectus quidam exiguus oriatur. In Venere autem ob ejus excentricitatem ferè evanescentem nulla mutatio produceretur. Terræ autem motus medius à Jove imprimis affici debet, cum distantia apheliorum sit 88 quam autem parum sensibilem esse Observationes testantur. Mars tam à Jove qua Saturno pati debet, idque multo magis quam terra quia his planetis est propior simulque majori excentricitate præditus. Saturnus autem & Jupiter uti sunt à Sole remotissimi, & maximas massas continent, eo magis in se invicem agere debent, quod cum excentricitas in utroque satis est magna, tum vero eorum aphelia 79° à se invicem distant; unde in utroque motus medius hæud exiguam variationem patitur, quæ adeo jam per observationes satis videtur confirmata.

F I N I S.



M É M O I R E

DANS LEQUEL ON EXAMINE

Si les Planetes se meuvent dans un milieu dont la
résistance produise quelque effet sensible sur leur
mouvement ?

Composé à l'occasion du Prix de M. DCC. LXII.

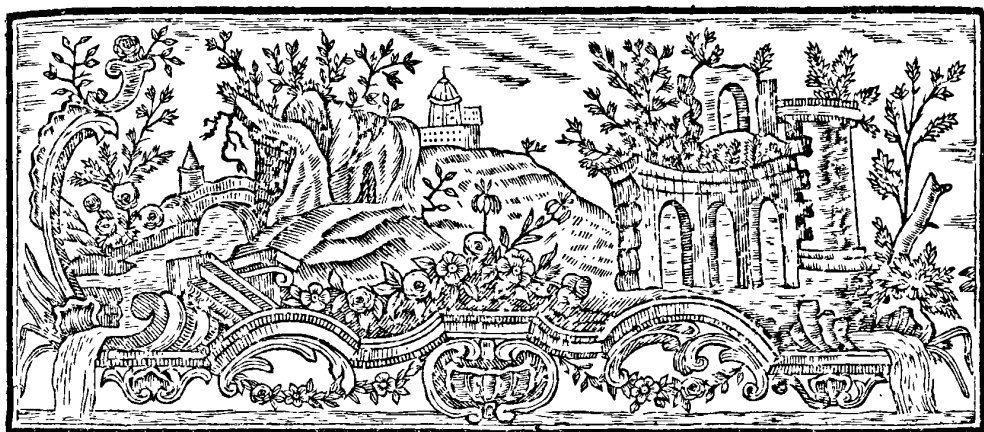
Par M. JEAN ALBERT EULER, de l'Académie Royale
des Sciences & Belles-Lettres de Prusse.

*Hæc super imposuit liquidum & gravitate carentem
Æthera nec quicquam terrenæ facis habentem.*

OVID.

Prix de 1762.

A



M É M O I R E

DANS LEQUEL ON EXAMINE

*Si les Planetes se meuvent dans un milieu
dont la résistance produise quelque effet
sensible sur leur mouvement ?*

POUR répondre à cette question, il y a trois choses à examiner.

Premierement : Quelle est la nature du milieu dans lequel les Planetes se meuvent ?

En second lieu : Il faut rechercher si ce milieu est capable de causer quelque altération dans le mouvement des Planetes ?

Et enfin : Il faut déterminer, par le calcul, tous les dérangemens qui sont en effet causés par cette résistance dans le mouvement des Planetes ?

A ij



PREMIERE PARTIE.

*Sur la nature du milieu dans lequel les
Planetes se meuvent.*

I.

D'ABORD, on ne sauroit soutenir que l'espace dans lequel les planetes se meuvent soit un vuide parfait. Outre tant d'autres raisons, la seule lumiere prouve suffisamment, que tout l'espace du ciel est rempli de cette matiere subtile dont les rayons de lumiere sont formés. Si les rayons de lumiere étoient des émanations actuelles des corps luisans, lancées avec cette prodigieuse vitesse qui leur fait parcourir l'espace immense du soleil jusqu'à nous en moins de huit minutes de tems, tout l'espace du ciel seroit rempli de ces émanations lumineuses qui le traverseroient presque en tout sens avec la même rapidité. Mais quoique le grand Newton ait soutenu ce sentiment, il est assujetti à tant d'inconvéniens, qu'il me sera permis de l'abandonner & d'embrasser l'autre sentiment, qui explique la propagation de la lumiere d'une maniere semblable à celle du son.

II.

Sans parler de l'épuisement que les corps luisans devroient souffrir, suivant le sentiment de Newton, le

seul phénomène, que plusieurs rayons de lumière passent sans se troubler par le même point, le détruit tout-à-fait. Il est contre les principes les mieux établis de la Mécanique, que plusieurs particules, quelques subtiles qu'on les conçoive, passent à la fois par le même point & en tout sens avec une vitesse aussi prodigieuse que celle de la lumière, sans se choquer & troubler le mouvement les unes les autres. Or dans l'autre système, nous savons non-seulement par l'expérience, que plusieurs sons traversent le même point sans se troubler; mais M. de la Grange a fait voir très-clairement, dans les Mémoires de la Société de Turin, que ce phénomène est parfaitement d'accord avec les principes de Mécanique, & qu'il en est même une suite nécessaire.

III.

Il est donc certain, que la lumière est produite par les corps luisans de la même manière que le son est produit par les corps sonores, & que la propagation dans l'un & l'autre cas suit les mêmes loix. Il faut donc que tout l'espace des cieux soit rempli d'une matière propre à transmettre les petites impulsions ou ébranlemens qui constituent la nature de la lumière, tout comme nous savons à présent, par les heureuses recherches de M. de la Grange, que le son est transmis par l'air. De-là il s'ensuit que cette matière céleste doit être fluide & semblable à l'air, en joignant à un certain degré de densité un certain degré d'élasticité, pour produire à la propagation de la lumière la même vitesse que l'expérience nous donne à connoître.

IV.

Or puisque la vitesse de la lumière est connue, étant environ six cent mille fois plus grande que celle du

fon, nous en pouvons conclure un beau rapport entre ce milieu du ciel & notre air. Sachant que la vitesse des ébranlemens transmis par un milieu élastique est comme la racine quarrée de l'élasticité divisée par la densité, si nous posons l'élasticité du milieu des cieux m fois plus grande que celle de l'air, & sa densité n fois plus petite que celle de l'air, nous aurons $\sqrt{mn} = 600000$, ou bien $mn = 360\ 000\ 000\ 000$. Et partant, si nous savions l'élasticité de ce milieu, nous en pourrions conclure sa densité, & réciproquement; par exemple, si son élasticité étoit 600 000 fois plus grande que celle de l'air, sa densité seroit précisément d'autant de fois plus petite.

V.

Qu'il me soit permis de donner à ce milieu le nom d'*Ether*, qui est donc une matiere fluide & élastique semblable à l'air, mais qui en differe tant par sa densité que par son élasticité; & quoique nous ne sachions ni l'une ni l'autre séparément, nous connoissons que, posant l'élasticité de l'éther m fois plus grande & sa densité n fois plus petite que celle de l'air, le produit de ces deux nombres mn doit être 360 000 000 000. Il n'y a donc aucun doute que l'un & l'autre de ces deux nombres ne soit très-grand. Puisque l'air, en montant, devient de plus en plus rare, & qu'il se perd enfin dans l'éther, il faut bien que l'éther soit incomparablement plus rare que l'air, & si l'élasticité de l'éther est la cause de la cohésion, dureté & du ressort des corps terrestres, comme il paroît très-vraisemblable, il faut bien que son élasticité soit pour le moins 1000 fois plus grande que celle de l'air. Or, supposant $m = 1000$, la densité de l'éther seroit 360 000 000 fois plus petite que celle de l'air; & si l'on ne suppose l'élasticité que 100 fois plus grande que celle de

l'air, la densité de l'éther deviendroit encore dix fois plus petite.

V I.

Puisque nous sommes assurés que les planetes & cometes ne souffrent presque aucune résistance dans leur mouvement par l'éther, il faut absolument que cette matiere ou l'éther soit plusieurs mille fois plus rare que l'air, ce qui s'accorde parfaitement bien avec ce que la vitesse de la lumiere nous vient de fournir. Donc un pied cubique d'éther renfermeroit plusieurs mille fois moins de matiere qu'un pied cubique d'air; & puisque l'air est 800 fois plus léger que l'eau, & celle-ci 19 fois plus légère que l'or, si nous supposons l'éther 360 000 000 fois plus rare que l'air, un pied cubique d'éther contiendra $19 \times 800 \times 360\ 000\ 000$ moins de matiere qu'un pied cubique d'or; ou bien, un pied cubique d'or contiendrait autant de matiere que 5 472 000 000 000 pieds cubiques d'éther; ou encore, qu'un cube d'éther dont le côté seroit de 17500 pieds, c'est-à-dire à-peu-près d'une lieue de France.

V I I.

Ici il se présente d'abord une question très-importante: S'il seroit possible de diviser & subtiliser la matiere d'un pied cubique d'or, enforte qu'elle remplisse tout l'espace d'une lieue cubique? Je fais bien que Keil a prétendu en avoir démontré la possibilité, ayant prouvé que les intervalles entre les particules pourroient devenir moindres qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle fût; mais l'élasticité semble absolument exiger que les moindres particules se touchent tout-à-fait, & qu'elles se trouvent dans une continuité dont il s'en faut beaucoup que Keil ait démontré la possibilité, à

moins qu'on ne veuille donner aux particules une figure linéaire presque géométrique, qui ne se touchent que par les pointes; mais une telle structure seroit trop révoltante pour en parler sérieusement dans la Physique. Je crois plutôt qu'on peut hardiment nier qu'il soit possible de former une lieue cubique d'éther d'un pied cubique d'or, par la subtilisation, quoique la quantité de matiere soit de part & d'autre la même. Il y a ici un équivoque qui semble avoir trompé tous ceux qui ont écrit sur cette matiere,

VIII.

Pour mettre cette matiere dans tout son jour, je commence par une remarque générale, que dans tous les corps il faut bien distinguer *leur véritable étendue* de la *masse* ou *quantité de matiere* dont ils sont composés. Or je nomme *la véritable étendue* d'un corps le volume ou la solidité géométrique, qui resteroit, si l'on retranchoit de son volume apparent tous les pores dont il est rempli. On fait que l'or même est tout rempli de pores: donc la véritable étendue d'une masse d'or fera toujours beaucoup plus petite que son volume apparent. Cette véritable étendue de chaque corps est une quantité géométrique, & partant bien différente de la quantité de matiere ou de la masse, qui est une quantité mécanique, en vertu de laquelle les corps s'opposent au changement de leur état; c'est donc *l'inertie*, & ces termes, *quantité de matiere*, *masse* & *inertie* signifient la même chose.

IX.

Les expériences sur la gravité prouvent suffisamment, que le poids de chaque corps est proportionnel à

à sa masse ou à son inertie. Donc puisque un pied cubique d'or est 19 fois plus pesant qu'un pied cubique d'eau, il est certain que celui-là contient 19 fois plus de matière que celui-ci ; mais il ne s'ensuit pas que la véritable étendue de l'or soit 19 fois plus grande que la véritable étendue de l'eau ; ou bien qu'il seroit possible de réduire une masse d'eau en en ôtant tous les pores à un volume plus que 19 fois plus petit. Il n'est pas encore prouvé que deux corps, dont les masses sont égales, aient aussi la même véritable étendue ; & je ne vois nulle nécessité pourquoi deux étendues égales de matière devroient toujours avoir la même inertie ; ou bien, pourquoi la quantité mécanique devroit toujours suivre la quantité géométrique.

X.

Cependant, quand nous réfléchissons sur la cause de la gravité, quoiqu'elle nous soit inconnue, il semble qu'on ne la sauroit chercher que dans la pression d'un fluide extrêmement subtil, qui passe librement, même à travers les moindres pores des corps. Or une telle pression agit toujours en raison des volumes ; & cela posé, le poids de chaque corps seroit toujours proportionnel à sa véritable étendue. Donc puisque le poids est aussi proportionnel à l'inertie ou à la masse de chaque corps, il en suivroit que la véritable étendue fût toujours proportionnelle à l'inertie, comme presque tous les Philosophes ont cru jusqu'ici. Mais quelque fort que puisse paroître cet argument, il ne regarde que les corps terrestres sur lesquels la gravité agit, & par la même raison aussi sur tous les corps grossiers dont les planetes sont formées, parce qu'elles sont soumises à la même loi de gravitation, mais on n'en sauroit encore rien conclure de certain à l'égard des matières subtiles étendues partout le monde, qui ap-

Prix de 1762.

B

paremment ne sont pas affujetties à la gravitation, & qui en contiennent plutôt la cause.

XI.

Il est pourtant fort remarquable, que quoique nous ne voyons aucune liaison entre l'inertie & la vraie étendue d'un corps, tous les corps grossiers non seulement de la terre mais aussi de tous les corps célestes aient cette propriété, que dans tous l'inertie soit proportionnelle à la vraie étendue, en vertu de laquelle une certaine étendue de matiere ne fauroit exister, sans qu'elle ait une certaine inertie ou masse. De là on peut soutenir que tous les corps grossiers, quelques différens qu'ils soient en eux-mêmes, sont composés d'une matiere homogene; en prenant, par exemple, des morceaux de toutes sortes de matieres différentes, chacun d'une livre, si nous les concevons réduits à n'avoir plus de pores, tous auront la même étendue & aussi la même inertie. Donc, n'ayant plus de pores, il seroit difficile de dire en quoi tous ces morceaux de matieres seroient différens entr'eux.

XII.

Mais quelque essentielle que puisse être cette liaison dans les corps grossiers, rien n'empêche que les matieres subtiles ne soient d'une espece différente, & qu'une certaine étendue vraie de ces matieres subtiles ait beaucoup moins d'inertie qu'une égale étendue vraie des matieres grossieres: ce seroit alors une autre espece de matiere; & peut-être y a-t-il encore plusieurs especes dont chacune joint à la même étendue vraie une inertie plus petite que les précédentes. De sorte que le dernier degré, où à une étendue ne con-

viendroit aucune inertie , seroit une étendue purement géométrique & un vuide véritable. Mais sans admettre un tel vuide, pourvu qu'on accorde deux especes de matieres, dont l'une contienne sous la même étendue moins de masse ou d'inertie que l'autre, on est en état de lever toutes les difficultés qu'on fait ordinairement contre le *Système du plein*.

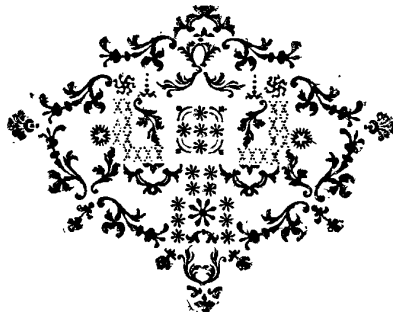
XIII.

Puisque dans les corps grossiers l'étendue vraie est le plus étroitement liée avec l'inertie, & que l'inertie d'un corps ne sauroit être changée par quelque cause que ce fût ; il s'ensuit que la vraie étendue d'un corps grossier ne souffre aucun changement dans sa quantité. Mais pour les matieres subtiles, peut-être que leur nature est tout-à fait différente à cet égard. Il semble être bien nécessaire que la même quantité conserve toujours la même inertie ; mais ne seroit-il pas possible que la vraie étendue qui exclut tous les pores, devînt tantôt plus grande tantôt plus petite ? Ne seroit il pas encore possible qu'une telle matiere soit douée d'une force de s'étendre continuellement davantage dans sa propre substance, sans y recevoir des pores ou des espaces vuides ? Cela ne seroit pas un agrandissement réel ; il est bien vrai, l'inertie qui semble constituer l'essence des matieres y demeurant la même, un tel agrandissement ne sauroit être admis sans un miracle, mais dans ce cas, ne seroit-on pas moins embarrassé de la cause de l'élasticité de l'éther ? Je n'ose entrer dans ces sublimes recherches ; la pénétration m'y manque, & le sujet présent ne l'exige pas.

XIV.

Je me contente d'avoir prouvé la possibilité que les
B ij

espaces du ciel , par lesquels les planetes semblent se mouvoir librement , peuvent être remplis d'une matiere extrêmement subtile & très-élastique , sans les supposer presque vuides , comme on est obligé de faire quand on joint partout à la même inertie la même étendue vraie de matiere. Nonseulement un tel vuide choque notre esprit , mais il paroît encore très-incompatible avec cette grande élasticité qu'on est obligé d'attribuer à l'éther. Donc quand on dit que *l'éther est tant de mille fois plus rare que l'air* , il ne faut pas entendre que *l'étendue propre d'un certain volume d'éther soit autant de fois plus petite que l'étendue propre d'un égal volume d'air* , mais que *cette proportion regarde uniquement l'inertie renfermée en des volumes égaux.*



 SECONDE PARTIE.

 SUR LA RÉSISTANCE DE L'ÉTHER.

X V.

ICI il se présente d'abord la question : S'il ne seroit pas possible que les planetes se meussent par l'éther sans souffrir la moindre résistance ? Quoiqu'elles en soient poussées en arriere, ne seroit-il pas possible qu'elles en fussent poussées aussi en avant avec une force égale ? car lorsqu'un corps se meut dans l'éther, il en déplace continuellement une partie ; & en lui imprimant un mouvement, il en perd bien autant ; & puisque l'éther derriere le corps est poussé par son élasticité dans les lieux que le corps quitte, il semble qu'il le pourroit accélérer autant qu'il aura été retardé en avant. Ce sentiment a été soutenu par de grands Géometres, qui l'ont cru conforme à la conservation des forces vives ; ils tombent bien d'accord que dès le premier instant le corps communique à l'éther une partie de sa force vive, pour y produire le mouvement dont l'éther, chassé en avant, va suivre le corps par un détour ; mais dès que ce mouvement est une fois engendré, ils prétendent qu'il suffit pour accompagner le corps par tout son mouvement, sans qu'il ait besoin de souffrir une nouvelle perte. Ils regardent cette conservation comme l'effet de la parfaite élasticité de l'éther. Si les planetes, disent-ils, perdoient continuellement de leur mouvement, cette force vive ou périroit tout-à-fait, ou

s'accumuleroit dans l'éther. Or l'un & l'autre leur paroît également absurde.

XVI.

Mais quelque fondé que puisse paroître ce raisonnement, il est détruit par l'expérience. L'air étant un fluide assez parfaitement élastique, il devoit au moins participer de la même qualité, & causer une moindre résistance aux corps qui s'y meuvent, que s'il étoit dépourvu de toute élasticité. Or nous savons que tous les corps qui se meuvent dans l'air y souffrent une résistance très-considérable, & M. Luloffs prétend même avoir prouvé, par la force que le vent exerce sur les aîles de moulins à vent, que la résistance de l'air est encore plus grande que celle qu'on trouve par les règles ordinaires de Mécanique. Il est aussi incontestable, qu'un boulet de canon éprouve une plus grande résistance que selon ces règles, parce qu'il laisse derrière lui un espace vuide, que l'air ne sauroit remplir assez rapidement. D'où l'on peut conclure que quoique l'éther soit beaucoup plus élastique que l'air, cela n'empêche point qu'il n'oppose une résistance très-réelle au mouvement des planetes.

XVII.

Puisque les planetes se meuvent incomparablement plus vite qu'un boulet de canon, on en pourroit conclure de même, qu'en arriere l'éther dût être plus rare qu'ailleurs, & en avant plus dense & plus accumulé, tout comme cela arrive dans l'air. En appliquant cela à la terre, on verra que la plus grande rareté de l'éther répond aux lieux qui voient le soleil dans le couchant, & la plus grande densité aux lieux

auxquels le soleil se lève. Donc partout au soir l'atmosphère sera le moins chargée d'éther, & au matin le plus; & cette variation ne sauroit manquer de produire des phénomènes bien singuliers. Si l'électricité est causée par un dérangement dans l'état d'équilibre de l'éther, & que l'électricité positive ait lieu où l'éther se trouve en trop grande abondance, & la négative où l'éther est trop rare, il s'ensuivroit que partout vers le soir il regne dans l'atmosphère une électricité négative, & vers le matin une positive. Il s'agit donc de consulter l'expérience, si une telle variation a lieu ou non? mon but ne me permet pas d'entrer dans cette discussion.

XVIII.

Cependant lorsqu'un corps se meut dans l'éther, on n'en peut pas déterminer la résistance sur le même pied que dans l'air ou dans l'eau, où toute la surface antérieure du corps reçoit l'impulsion du fluide. Comme l'éther est une matière extrêmement subtile, il pénètre presque librement tous les pores des corps; il en est presque de même que si par exemple un crible se mouvoit dans l'eau ou dans l'air, qui sans doute souffriroit une résistance beaucoup plus petite qu'une surface solide. Les planètes ne rencontrent donc de résistance dans l'éther qu'entant que leurs parties solides empêchent que l'éther ne passe tout à fait librement à travers de leur masse. D'où l'on voit que la résistance déterminée par la règle ordinaire doit être diminuée de la partie qui répond au libre passage de l'éther; ou bien il ne faut considérer qu'une certaine partie de la surface de la planète qui est exposée à la résistance, & qui, selon toutes les apparences, sera très-petite à l'égard de toute la surface. D'ailleurs, l'obliquité dont les particules solides sont choquées par l'éther, peut encore considérablement diminuer la résistance.

XIX.

Concevons donc un corps sphérique, dont la masse soit A , le rayon $= a$, & qui se meut avec une vitesse égale à celle qu'un corps pesant sur la terre acquerroit en tombant de la hauteur $= v$. Soit la densité du corps n fois plus grande que celle de l'éther, & selon la règle commune la résistance qu'éprouve le grand cercle est exprimé par le poids d'un cylindre d'éther, dont le rayon de la base $= a$ & la hauteur $= v$, & partant la solidité $= \pi a a v$. Or la solidité du globe étant $\frac{4}{3} \pi a^3$ & la masse $= A$, la masse de ce cylindre, s'il étoit de la même matière, seroit $= \frac{3 A v}{4 a}$, donc la masse de ce cylindre d'éther $= \frac{3 A v}{4 n a}$, qui exprimeroit la résistance d'un grand cercle du globe, réduisant la masse au poids que ce même corps auroit sur la terre. Mais la résistance qu'éprouve le globe même est d'abord deux fois plus petite, ou $\frac{3 A v}{8 n a}$, & il la faudra encore diminuer, à cause de la pénétration de l'éther, & peut-être aussi à cause d'une plus grande obliquité d'impulsion,

XX.

Comme nous devons nous contenter de savoir cette diminution en gros, & qu'il est impossible de la déterminer *à priori*, posons la véritable résistance $= \frac{3 A v}{8 \lambda n a}$ où, selon toutes les apparences, le nombre λ doit être assez considérable; or le nombre n est prodigieusement grand; car si nous supposons la densité de l'éther 360 000 000 fois plus petite que celle de l'air, & que
la

la densité du corps soit égale à celle de l'eau, le nombre n fera $= 800 \times 360\,000\,000 = 288\,000\,000\,000$. Ensuite la vraie étendue du corps étant pour le moins 19 fois plus petite que l'apparente, à cause de sa nature criblée à l'égard de l'éther, le nombre λ pourroit bien surpasser 10; donc posant pour abrégé $\frac{3}{8\lambda n} = \mu$, la valeur de cette fraction seroit environ

$$\mu = 1 : 10\,000\,000\,000\,000,$$

laquelle demeureroit à-peu-près la même, si le corps étoit plus ou moins dense. Or si nous supposons l'éther encore dix fois moins dense, nous aurions pour μ une fraction encore dix fois plus petite; & comme il est possible que la valeur de λ soit considérablement plus grande que dix, la fraction μ pourroit être encore plus petite que $1 : 100\,000\,000\,000\,000$; & on verra par la suite que la résistance qui en résulte, pourra très-bien subsister avec les observations.

XXI.

Appliquons cela au mouvement d'une planète qui se meuve autour du soleil dans un cercle parfait, puisque nous savons que l'effet de cette résistance est extrêmement petit, & que le mouvement continuera de se faire dans un cercle pendant très-longtems, cherchons la diminution du mouvement pendant un tems quelconque. Soit la distance de la planète au soleil $= c$, sa vitesse dûe à la hauteur $= v$, & l'attraction du soleil à cette distance $c = \frac{f}{c^2}$; prenant pour l'unité la gravité sur la terre, & parce que le mouvement se fait dans un cercle, il faut que la force centrifuge soit $= \frac{v^2}{c} = \frac{ff}{cc}$, & partant $v = \frac{ff}{2c}$; donc la résistance de

Prix de 1762.

C

l'éther $\frac{\mu v}{a} = \frac{\mu ff}{2ac}$, que nous pouvons regarder comme constante pour un très-long tems. De-là, pendant que la planete parcourt l'espace ds , nous aurons

$$dv = \frac{-\mu ff}{2ac} ds, \text{ \& par conséquent}$$

$$v = \frac{ff}{2c} - \frac{\mu ffs}{2ac} \left(1 - \frac{\mu s}{a} \right).$$

XXII.

Pour mieux connoître les élémens de cette expression, soit le tems périodique de la planète = Θ secondes, pendant lequel elle parcourt toute la circonférence du cercle = $2\pi c$; de sorte que dans une seconde elle parcourt l'espace = $\frac{2\pi c}{\Theta}$, sa vitesse étant due à la hauteur = v . Or posant g pour la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, cet espace parcouru par la planete dans une seconde, est aussi = $2\sqrt{gv}$; donc $\sqrt{gv} = \frac{\pi c}{\Theta} = \sqrt{\frac{gff}{2c}}$; par conséquent $ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\Theta\Theta}$; d'où l'on connoitra le rapport de la force accélératrice du soleil à chaque distance à la force accélératrice de la gravité naturelle sur la terre.

XXIII.

Quoique le retardement du mouvement dérange d'abord le mouvement circulaire; avant que d'entreprendre les recherches requises pour développer cette question, je considererai ici la chose comme si la planete se mouvoit dans un canal circulaire, qui l'em-

pêchât d'en sortir. Ce cas, quoique imaginaire, nous fera connoître en gros après combien de tems l'effet de la résistance peut devenir sensible; parce que pendant une révolution la planete parcourt l'espace $= 2 \pi c$, & pendant ν révolutions ou dans le tems de $\nu \odot$ secondes l'espace $= 2 \nu \pi c$; posant cette valeur pour s , nous aurons pour la vitesse de la planete après ce tems

$$v = \frac{ff}{2c} \left(1 - \frac{2 \mu \nu \pi c}{a} \right),$$

& la vitesse même

$$V v = \left(1 - \frac{\mu \nu \pi c}{a} \right) V \frac{ff}{2c};$$

d'où nous voyons que la diminution de la vitesse vaut la partie $\frac{\mu \nu \pi c}{a}$ de la vitesse initiale.

XXIV.

Faisons l'application de cette formule au mouvement de la terre, où l'on a environ $c = 18\ 000\ a$ & $\odot = 31\ 556\ 930''$, & cherchons après combien de tems la diminution de la vitesse pourroit devenir

$$\frac{\mu \nu \pi c}{a} = 18\ 000\ \mu \nu \pi = \frac{1}{31\ 556\ 930},$$

puisque'un changement d'une seconde dans le tems périodique de la terre seroit déjà remarquable. Supposons que cela arrive après ν ans, & nous aurons

$$\nu = \frac{1}{18\ 000 \times 31\ 556\ 930 \cdot \mu \pi}.$$

Donnons à μ la valeur marquée ci-dessus (XX), & nous obtiendrons

$$\nu = \frac{10\ 000\ 000\ 000\ 000}{18\ 000 \times 31\ 556\ 930 \cdot \pi},$$

ou bien $\nu = \frac{100}{18}$ à-peu-près.

C ij

De-là il s'ensuivroit qu'un tel effet pourroit être produit en six ans. Or quand même la valeur de μ seroit encore plus petite, l'effet de la résistance de l'éther sur le mouvement des planetes, pourroit toutefois devenir très-sensible après un assez grand nombre d'années.

XXV.

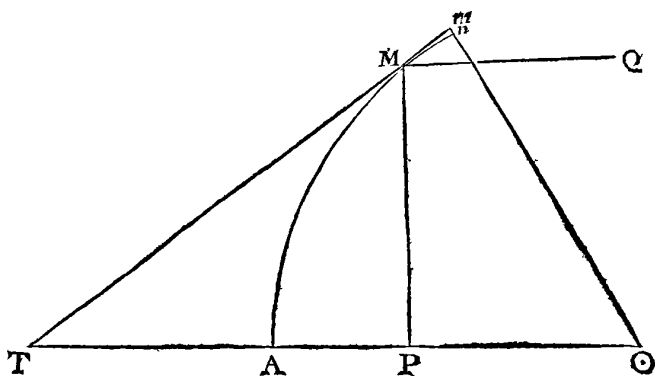
Mais il ne s'agit pas de la diminution de la vitesse; que le tems périodique doive devenir plus long; il en doit même résulter un effet entierement contraire. La planete étant rallentie dans son mouvement, s'approchera plus du soleil, & décrira une orbite plus petite, à laquelle répond nécessairement un tems périodique plus court. Par cette raison, il s'en faut beaucoup que la détermination précédente soit juste, quand même le nombre μ seroit assez exact. Le véritable dérangement, que la résistance de l'éther peut causer dans le mouvement des planetes, demande des recherches beaucoup plus profondes, & qui feront le sujet de ma Troisième Partie.





TROISIEME PARTIE.

Sur le dérangement du mouvement des Planètes causé par la résistance de l'Éther.



XXVI.

Considérons donc une planète quelconque, dont la masse soit A , son rayon $= a$, & laquelle étant attirée vers le soleil en \odot & assujettie à la résistance de l'éther, décrive la ligne courbe AM ; que cette planète ait parcouru après un tems de t secondes l'arc AM , & soit l'angle au soleil $A\odot M = \varphi$. Soit ensuite la distance de la planète au soleil $\odot M = z$, & la force accélératrice du soleil étant posée $= \frac{ff}{z^2}$, nous avons vu que si nous exprimons le tems périodique de la terre par \odot secondes, la distance moyenne au soleil

par c & la hauteur par laquelle un corps grave tombe sur la terre dans une seconde par g , il sera $ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\odot^2}$ où π marque la circonférence d'un cercle dont le diamètre est $= 1$. Or la force accélératrice du soleil $\frac{ff}{\pi^2}$ agit sur la planète selon la direction $M\odot$, & en la décomposant selon les directions fixes des coordonnées $\odot P = x$; $PM = y$; à cause de $x = r \cos. \phi$ & $y = r \sin. \phi$, nous aurons les forces selon $MP = \frac{ff}{\pi^2} \sin. \phi$ & selon $MQ = \frac{ff}{\pi^2} \cos. \phi$.

XXVII.

Maintenant pour connoître la vitesse de la planète de laquelle dépend la résistance, soit Mm l'élément d'espace parcouru dans le tems dt & à cause de $Mn = r d\phi$ & $mn = dz$, nous aurons $Mm = \sqrt{(dz^2 + r^2 d\phi^2)}$ que je nommerai pour abréger $= ds$ & faisant la proportion $dt : ds = 1 : \frac{ds}{dt}$. Or prenant v pour la hauteur dûe à la vitesse de la planète, ce même espace parcouru par la planète dans une seconde est aussi $= 2\sqrt{gv}$, d'où nous tirons $v = \frac{ds^2}{4gdt^2}$, & partant la force accélératrice de la résistance, contraire au mouvement & agissant selon la tangente MT , fera suivant les principes établis ci-dessus $= \frac{\mu v}{a} = \frac{\mu ds^2}{4ga dt^2}$ où μ est une fraction extrêmement petite, que j'ai estimée ci-dessus (XX). Ensuite pour la décomposition de cette force qui est selon MT , ayant $MT : PT : MP = ds : -dx : dy$, nous trouvons la force selon $PT = \frac{-\mu dx ds}{4ga dt^2}$ & selon $MP = \frac{\mu dy ds}{4ga dt^2}$.

XXVIII.

Donc conjointement la planète en M est sollicitée par ces deux forces accélératrices :

$$\text{L'une selon } MQ = \frac{ff \cos \varphi}{\zeta \zeta} + \frac{\mu dx ds}{4ga dt^2},$$

$$\text{Et l'autre selon } MP = \frac{ff \sin \varphi}{\zeta \zeta} + \frac{\mu dy ds}{4ga dt^2}.$$

De-là les principes de la Mécanique nous fournissent ces deux équations :

$$ddx = \frac{-2gff dt^2 \cos \varphi}{\zeta \zeta} - \frac{\mu dx ds}{2a},$$

$$\& ddy = \frac{-2gff dt^2 \sin \varphi}{\zeta \zeta} - \frac{\mu dy ds}{2a};$$

où il faut remarquer que l'on a $x = \zeta \cos \varphi$; $y = \zeta \sin \varphi$;

$$\text{donc } dx = d\zeta \cos \varphi - \zeta d\varphi \sin \varphi;$$

$$dy = d\zeta \sin \varphi + \zeta d\varphi \cos \varphi;$$

$$\& ddx = dd\zeta \cos \varphi - 2d\zeta d\varphi \sin \varphi - \zeta d\varphi^2 \cos \varphi - \zeta dd\varphi \sin \varphi;$$

$$ddy = dd\zeta \sin \varphi + 2d\zeta d\varphi \cos \varphi - \zeta \sin \varphi + d\varphi^2 + \zeta dd\varphi \cos \varphi;$$

$$\text{ensuite } ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(d\zeta^2 + \zeta \zeta d\varphi^2)};$$

d'où nous tirons aisément ces deux équations :

$$\text{I. } ddx \sin \varphi - ddy \cos \varphi = -2d\zeta d\varphi - \zeta dd\varphi \\ = + \frac{\mu \zeta d\varphi ds}{2a};$$

$$\text{II. } ddx \cos \varphi + ddy \sin \varphi = dd\zeta - \zeta d\varphi^2 = \\ \frac{-2gff dt^2}{\zeta \zeta} - \frac{\mu d\zeta ds}{2a};$$

où l'élément du tems $d t$ est supposé constant, &
 $2 g f f = \frac{4 \pi \pi c^3}{\ominus \ominus}$, de sorte que la quantité g sort du
 calcul.

XXIX.

La première de ces deux équations étant divisée par
 $\zeta d \varphi$, donne

$$\frac{2 d \zeta}{\zeta} + \frac{d d \varphi}{d \varphi} + \frac{\mu d s}{2 a} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\zeta \zeta d \varphi. e^{\frac{\mu s}{2 a}} = G d t,$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est
 l'unité, & G une quantité constante. Ensuite puisque

$$d s d d s = d \zeta d d \zeta + e d \zeta d \varphi^2 + \zeta \zeta d \varphi d d \varphi,$$

si nous multiplions la première par $-\zeta d \varphi$, & la
 seconde par $d \zeta$, la somme en fera

$$1.) d s d d s = \frac{-2 g f f d t^2 d \zeta}{\zeta \zeta} - \frac{\mu d s^3}{2 a};$$

or l'équation $\zeta \zeta d \varphi. e^{\frac{\mu s}{2 a}} = G d t$,

à cause de $\zeta \zeta d \varphi^2 = d s^2 - d \zeta^2$,

en éliminant $d \varphi$, donne

$$2.) e^{\frac{\mu s}{a}} \zeta \zeta (d s^2 - d \zeta^2) = G G d t^2.$$

De sorte que nous avons deux équations entre les trois
 variables ζ , s , t ; si nous multiplions celle-là 1.) par
 $\frac{2}{4 t^2}$, l'intégration fournira

$$\frac{d s^2}{d t^2} = 4 g f f \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{\mu}{a} \int \frac{d s^3}{d t^2},$$

qui

qui à cause de μ presque évanouissant se réduit à

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{4\mu gff}{a} \int ds\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

XXX.

Puisque nous savons que l'effet de la résistance est extrêmement petit, négligeons d'abord les termes affectés par μ ; & ayant ces deux équations

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ \& } GGdt^2 = \zeta\zeta(ds^2 - d\zeta^2),$$

en éliminant dt^2 , nous trouvons

$$ds^2 = \frac{4gff}{GG} \zeta\zeta(ds^2 - d\zeta^2)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right);$$

donc posant, pour abrégér,

$$\frac{4gff}{GG} = \frac{8\pi\pi c^2}{CC\Theta\Theta} = \frac{1}{b},$$

déforte que

$$G = \frac{2\pi c}{\Theta} \sqrt{2ch} \text{ (XXVI.)}$$

nous obtiendrons

$$ds = \frac{\zeta d\zeta \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}}{\sqrt{\left(\zeta\zeta\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - h\right)}} \text{ ou } ds = \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1 - \frac{bb}{\zeta(\zeta+b)}\right)}}.$$

XXXI.

Cette valeur de ds suffit pour être introduite dans les petits termes de nos équations affectés par μ . Soit donc

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1 - \frac{bb}{\zeta(\zeta+b)}\right)}} = d\sigma, \text{ ou bien qu'on écrive}$$

dans tous les termes affectés par μ , au lieu de s , la

lettre σ , & nous aurons les équations suivantes :

$$\text{I. } e^{\frac{\mu\sigma}{a}} \zeta \zeta (ds^2 - d\zeta^2) = C dt^2 = \frac{8\pi\pi c^3 h}{\ominus \ominus} dt^2;$$

$$\text{II. } \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{8\pi\pi c^3}{\ominus \ominus} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a} f d\sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} \right) \right);$$

$$\text{III. } e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta \zeta d\phi = \frac{2\pi c \nu_2 c h}{\ominus} dt;$$

où σ est une fonction de ζ . Donc éliminant dt^2 des deux premières équations, nous obtiendrons :

$$e^{\frac{\mu\sigma}{a}} \zeta \zeta (ds^2 - d\zeta^2) \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a} \int d\sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} \right) \right) = h ds^2;$$

& de-là

$$1) ds = \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta d\zeta \sqrt{\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a} \int d\sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} \right) \right)}}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta \zeta \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a} \int d\sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} \right) \right) - h \right)}}.$$

D'où l'on trouve plus exactement s par ζ . Ensuite on aura,

$$2) dt = \frac{\ominus}{2\pi c \nu_2 c} \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta d\zeta}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta \zeta \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a} \int d\sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} \right) \right) - h \right)}}$$

$$\& 3) d\phi = \frac{d\zeta \sqrt{h}}{\zeta \sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta \zeta \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a} \int d\sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} \right) \right) - h \right)}}.$$

XXXII.

Pour profiter de ces équations, il faut tâcher d'en appliquer la solution à l'usage de l'Astronomie. Pour cet effet, prenant $h = \frac{k}{2}$ & $b = \frac{-2k}{1-n}$, on a pour le

cas où la résistance évanouit $\zeta = \frac{k}{1 + n \cos. \omega}$ & $d\phi = d\omega$; desorte que k exprime le demi-parametre, n l'excentricité, & ω l'anomalie vraie de l'orbite comptée depuis le périhélie. Cette expression de ζ , comme très-approchante, étant introduite pour avoir la valeur de σ , on trouve,

$$d\sigma = \frac{k d\omega \mathcal{V} (1 + 2 n \cos. \omega + n^2)}{(1 + n \cos. \omega)^2};$$

laquelle expression est assez exacte, pourvu qu'on ne suppose pas un tems assez long, pour que l'effet de la résistance devienne trop considérable. Or en n'étendant le calcul qu'à quelques siècles, pendant lesquels l'effet de la résistance demeure encore presque insensible, on peut ensuite répéter le même calcul pour les siècles suivans de la même manière.

XXXIII.

Puisque dans le cas de nulle résistance on a

$$\zeta = \frac{k}{1 + n \cos. \omega},$$

supposons, en tenant compte de la résistance

$$\zeta = \frac{k}{1 + n \cos. \omega + \mu u},$$

& tâchons de déterminer u en sorte qu'il demeure $d\phi = d\omega$. Pour cet effet, ayant

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1 + n \cos. \omega + \mu u}{k},$$

la différentiation nous fournit

$$\frac{d\zeta}{\zeta^2} = \frac{n d\omega \sin. \omega - \mu du}{k}.$$

laquelle valeur doit être introduite dans la troisième

D ij

équation (XXXI), qui à cause de $d\varphi = d\omega$ &
 $e^{\frac{\mu\sigma}{a}} = 1 + \frac{\mu\sigma}{a}$ se réduit à cette forme :

$$d\omega = \frac{d\zeta \sqrt{h}}{\zeta \zeta \sqrt{\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a} \int d\sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right) + \frac{\mu\sigma}{a} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right) - \frac{h}{\zeta\zeta}\right)^2}}$$

ou bien à cause de

$$-\int d\sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right) + \sigma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right) = \int \sigma d\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right) = -\int \frac{\sigma d\zeta}{\zeta^2} = -\frac{\sigma}{\zeta} \\ \frac{n}{k} \int d\omega \sin.\omega = -n \int d\omega \sin.\omega \int \frac{d\omega \sqrt{(1 + 2n \cos.\omega + nn)}}{(1 + n \cos.\omega)^2}$$

à celle-ci :

$$d\omega = \frac{d\zeta \sqrt{h}}{\zeta \zeta \sqrt{\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{h}{\zeta\zeta} - \frac{\mu n}{a} \int d\omega \sin.\omega \int \frac{d\omega \sqrt{(1 + 2n \cos.\omega + nn)}}{(1 + n \cos.\omega)^2}\right)^2}}$$

XXXIV.

Or $\frac{1}{b}$ étant $= \frac{-1+nn}{2k}$, nous aurons

$$\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} = \frac{1 + 2n \cos.\omega + nn + 2\mu u}{2k}$$

& puisque $h = \frac{k}{2}$ nous obtiendrons

$$\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{h}{\zeta\zeta} = \frac{nn \sin.\omega^2 - 2\mu u \cdot n \cos.\omega}{2k}$$

Par conséquent

$$d\omega = \frac{n d\omega \sin.\omega - \mu du}{\sqrt{(nn \sin.\omega^2 - 2\mu n u \cos.\omega - \frac{2\mu n}{a} \int \sigma d\omega \sin.\omega)}}$$

d'où prenant les quarrés, on trouve, en négligeant les termes qui renfermeroient $\mu\mu$,

$$nn d\omega \sin.\omega^2 - 2\mu n u d\omega \cos.\omega - \frac{2\mu n}{a} d\omega \int \sigma d\omega \sin.\omega \\ = nn d\omega \sin.\omega^2 - 2n\mu du \sin.\omega$$

& partant, $du \sin.\omega - u d\omega \cos.\omega = \frac{d\omega}{a} \int \sigma d\omega \sin.\omega$,

qui étant divisée par $\sin. \omega^2$ & intégrée, donne

$$\frac{u}{\sin. \omega} = \frac{1}{a} \int \frac{d\omega}{\sin. \omega^2} \int \sigma d\omega \sin. \omega = \frac{-\text{cof. } \omega}{a \sin. \omega} \int \sigma d\omega \sin. \omega + \frac{1}{2} \int \sigma d\omega \text{cof. } \omega;$$

ou bien $u = \frac{1}{2} (\sin. \omega \int \sigma d\omega \text{cof. } \omega - \text{cof. } \omega \int \sigma d\omega \sin. \omega)$;

ayant
$$\sigma = k \int \frac{d\omega \mathcal{V} (1 + \omega^2 n \text{cof. } \omega + nn)}{(1 + n \text{cof. } \omega)^2}.$$

XXXV.

Pourvu que l'excentricité soit moindre que l'unité ou $n < 1$, comme il arrive toujours dans les ellipfes, l'arc σ se réduit à une telle expression :

$$\sigma = k (A \omega + B n \sin. \omega + C n^2 \sin. 2 \omega + D n^3 \sin. 3 \omega + E n^3 \sin. 4 \omega + \&c.)$$

Or pour en trouver d'autant plus facilement la valeur de u , prenons la différentielle de l'équation trouvée ci-dessus, $d u \sin. \omega - u d \omega \text{cof. } \omega = \frac{d\omega}{a} \int \sigma d\omega \sin. \omega$, qui est : $d d u \sin. \omega + u d \omega^2 \sin. \omega = \frac{d\omega^2}{a} \sigma \sin. \omega$,

ou bien
$$\frac{d d u}{d \omega^2} + u = \frac{\sigma}{a} = \frac{k}{a} (A \omega + B n \sin. \omega + C n^2 \sin. 2 \omega + D n^3 \sin. 3 \omega + E n^4 \sin. 4 \omega + \&c.).$$

Pofons maintenant $u = \alpha \omega + \mathcal{C} \sin. \omega + \gamma \sin. 2 \omega + \delta \sin. 3 \omega + \epsilon \sin. 4 \omega + \&c.$

& puisque
$$\frac{d u}{d \omega} = \alpha + \mathcal{C} \text{cof. } \omega + \Delta \text{cof. } \omega - \Delta \omega \sin. \omega + 2 \gamma \text{cof. } 2 \omega + 3 \delta \text{cof. } 3 \omega + 4 \epsilon \text{cof. } 4 \omega + \&c.$$

en suite
$$\frac{d d u}{d \omega^2} = - \mathcal{C} \sin. \omega - 2 \Delta \sin. \omega - \Delta \omega \text{cof. } \omega - 4 \gamma \sin. 2 \omega - 9 \delta \sin. 3 \omega - 16 \epsilon \sin. 4 \omega - \&c.$$

donc $\frac{d^2 u}{d\omega^2} + u = \alpha\omega - 2\Delta \sin.\omega - 3\gamma \sin.2\omega - 8\delta \sin.3\omega - 15\varepsilon \sin.4\omega - \&c.$

d'où nous tirons $\alpha = \frac{Ak}{a}$; $\Delta = \frac{-Bnk}{2a}$; $\gamma = \frac{-Cn^2k}{3a}$;
 $\delta = \frac{-Dn^3k}{8a}$; $\varepsilon = \frac{-En^4k}{15a}$ &c.

& par conséquent $u = \frac{k}{a} \left(A\omega + C \sin.\omega - \frac{Bn}{2}\omega \cos.\omega - \frac{1}{3}Cn^2 \sin.2\omega - \frac{1}{8}Dn^3 \sin.3\omega - \frac{1}{15}En^4 \sin.4\omega - \&c. \right)$

où le coefficient C demeure indéterminé; on le pourra donc prendre $= 0$, car quelque valeur qu'on donneroit à C , on ne feroit que changer l'excentricité & le lieu de l'aphélie.

XXXVI.

Donc posant $\int \frac{d\omega \mathcal{V}(1 + 2n \cos.\omega + nn)}{(1 + n \cos.\omega)^2} = A\omega + Bn \sin.\omega + Cn^2 \sin.2\omega + Dn^3 \sin.3\omega + En^4 \sin.4\omega + \&c.$
 nous aurons, après que la planete aura achevé l'angle $\varphi = \omega$ pour sa distance au soleil :

$$r = \frac{k}{1 + n \cos.\omega + \frac{\mu k}{a} \left(A\omega - \frac{1}{2}Bn \omega \cos.\omega - \frac{1}{3}Cn^2 \sin.2\omega - \frac{1}{8}Dn^3 \sin.3\omega - \&c. \right)}$$

Ensuite le tems t se trouvera déterminé par cette équation :

$$\frac{2\pi c \mathcal{V} k}{\Theta} t = \int \left(1 + \frac{\mu \sigma}{2a} \right) r^2 d\omega.$$

Or $r^2 = \frac{k^2}{(1 + n \cos.\omega)^2} - \frac{2\mu k^3}{a(1 + n \cos.\omega)^3} \left(A\omega - \frac{1}{2}Bn \omega \cos.\omega - \frac{1}{3}Cn^2 \sin.2\omega - \frac{1}{8}Dn^3 \sin.3\omega - \&c. \right)$

& $1 + \frac{\mu \sigma}{2a} = 1 + \frac{\mu k}{2a} \left(A\omega + Bn \sin.\omega + Cn^2 \sin.2\omega + Dn^3 \sin.3\omega + \&c. \right)$

$$\text{donc } \frac{2\pi c V c}{\ominus k \gamma k} t = \int \frac{d\omega}{(1+n \cos. \omega)^2} - \frac{2\mu k}{a}$$

$$\int \frac{d\omega (A\omega - \frac{1}{2} B n \omega \cos. \omega - \frac{1}{3} C n^2 \sin. 2\omega - \frac{1}{4} D n^3 \sin. 3\omega - \&c.)}{(1+n \cos. \omega)^3}$$

$$+ \frac{\mu k}{2a} \int \frac{d\omega (A\omega + B n \sin. \omega + C n^2 \sin. 2\omega + D n^3 \sin. 3\omega + \&c.)}{(1+n \cos. \omega)^2}$$

XXXVII.

Ces formules suffisent pour déterminer tous les dérangemens que la résistance de l'éther peut causer dans le mouvement de toutes les planetes ; ce qui étant la question proposée par l'illustre Académie Royale des Sciences, je m'en vais en developper tous les phénomènes qui doivent se trouver dans le mouvement des Planetes. On ne fera pas surpris que je fasse ici abstraction des dérangemens que les planetes se causent par leur action mutuelle, il est évident qu'elle n'influe point sur l'effet de la résistance. Je considererai donc trois cas, le premier où l'orbite de la planète n'a aucune excentricité, le second où l'excentricité est très-petite, & le troisieme où l'excentricité est médiocre.

I. L'Orbite de la Planete n'ayant aucune excentricité.

XXXVIII.

Dans ce cas $n = 0$ on aura $\sigma = k\omega$ (§. XXXII) $A = 1$; $B = 0$; $C = 0$, &c. (XXXV) & partant nos formules seront :

$$\zeta = \frac{k}{1 + \frac{\mu k \omega}{a}} \quad \& \quad \frac{2\pi c V c}{\ominus k \gamma k} t = \omega - \frac{3\mu k}{4a} \omega \omega \quad (\text{XXXVI})$$

où k est le rayon de l'orbite au tems $t = 0$, a le rayon du corps de la planete, & ω l'angle décrit autour du soleil dans un tems quelconque t . Là-dessus je fais les réflexions suivantes :

1°. Après une révolution où $\omega = 2\pi$, la distance de la planete au soleil sera $\zeta = \frac{k}{1 + \frac{2\mu k}{a}\pi}$, & partant tant soit peu plus petite qu'au commencement.

2°. Après m révolutions où $\omega = 2\pi m$, la distance de la planete au soleil sera $\zeta = \frac{k}{1 + \frac{2\mu\pi m k}{a}}$. La planete s'approchera donc de plus en plus du soleil, mais si insensiblement, que pendant chaque révolution l'orbite ne differe point d'un cercle.

3°. Le tems pendant lequel la planete acheve m révolutions est $t = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \odot m (1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi m)$; or le tems pendant lequel elle acheve $m + 1$ révolutions, est $t' = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \odot (m + 1) (1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi (m + 1))$.

4°. Donc après m périodes, le tems d'une révolution fera $t' - t = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \odot (1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi (2m + 1))$, d'où l'on voit que le tems périodique va en diminuant, le premier étant $= \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \odot$.

5°. La résistance se réduira donc à ces deux effets; le *premier*, que la distance au soleil diminue; & le *second*, que le tems périodique devient plus court. Or le mouvement demeure circulaire, fans qu'il en résulte une excentricité.

XXXIX.

Pour le mouvement de la terre, si nous en négligeons l'excentricité, nous avons $k = c$ & $\odot = 3651, 6^h, 9', 36'' = 31558176''$, qui est le tems périodique par rapport aux étoiles fixes. Ensuite posant la parallèle horizontale du soleil = $12''$, nous avons $\frac{k}{z} = 17000$ & $\frac{37k}{2a} = 77000$. Donc après m révolutions, la diminution du tems périodique sera de $77000 \times 31558176 \times \mu (2m + 1)$ secondes, ce qui fait, en mettant pour μ le nombre donné ci-dessus par estime $\mu = \frac{1}{1000000000000}$ environ $0, 2429979552 (2m + 1)''$, ou bien $\frac{243}{1000} (2m + 1)$ secondes. Après un siècle, la diminution de l'année solaire seroit donc = $\frac{201 \times 243''}{1000} = 49''$, laquelle étant très-sûrement trop grande, puisque la diminution séculaire est moindre que $5''$, il est clair que la fraction μ est au moins 10 fois plus petite que je ne l'ai supposée ici. Il semble donc que le nombre λ employé ci-dessus (XX) doit surpasser 100, à moins qu'on ne veuille diminuer la densité de l'éther aux dépens de son élasticité; l'un & l'autre paroît également probable.

II. *L'Orbite de la planete ayant une très-petite excentricité.*

XL.

Soit donc la fraction n , qui exprime l'excentricité si petite, qu'on puisse négliger dans le calcul son quarré nn , & nous aurons, pour l'arc σ , cette expression :

$$\sigma = ksd\omega(1 + n\cos.\omega)(1 - 2n\cos.\omega) = ksd\omega(1 - n\cos.\omega) = k(u - n\sin.\omega)$$

Prix de 1762.

E

(XXXII), & partant $A = 1$ & $B = -1$; de-là nous concluons la distance

$$r = \frac{k}{1 + n \cos \omega + \frac{\mu k}{a} (\omega + \frac{1}{2} n \omega \cos \omega)}$$

Lorsque la planete aura parcouru dans son orbite l'angle ω , posant le tems qu'elle y a employé $= t$,

$$\begin{aligned} \text{nous aurons } \frac{2\pi c \mathcal{V} c}{\odot k \mathcal{V} k} t &= \int d\omega (1 - 2n \cos \omega) - \frac{2\mu k}{a} \\ &\int d\omega (1 - 3n \cos \omega) (\omega + \frac{1}{2} n \omega \cos \omega) + \frac{\mu k}{2a} \int d\omega \\ &(1 - 2n \cos \omega) (\omega - n \sin \omega); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou bien } \frac{2\pi c \mathcal{V} c}{\odot k \mathcal{V} k} t &= \omega - 2n \sin \omega - \frac{\mu k}{2a} \int d\omega \\ &(3\omega - 8n \omega \cos \omega + n \sin \omega); \end{aligned}$$

& prenant toutes les intégrales: $\frac{2\pi c \mathcal{V} c}{\odot k \mathcal{V} k} t = \omega - 2n \sin \omega - \frac{\mu k}{2a} (\frac{1}{2} \omega^2 - 8n \omega \sin \omega - 9n \cos \omega)$, où k marque le demi-parametre, ou plutôt la distance moyenne de la planete au soleil.

X L I.

Examinons d'abord l'orbite de la planete après qu'elle aura achevé m révolutions; posons pour cette fin $\omega = 2\pi m + \varphi$, de sorte que φ marque l'angle parcouru dans la révolution suivante, & la distance de la planete au soleil sera exprimée de cette façon:

$$r = \frac{k}{1 + n \cos \varphi + \frac{\mu k}{a} (2\pi m + \varphi) (1 + \frac{1}{2} n \cos \varphi)}$$

Ici je remarque que la plus petite distance n'est pas celle où $\varphi = 0$, comme il arriveroit s'il n'y avoit

point de résistance, mais celle où $\varphi = \frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n(a + \mu \pi m k)}$, de sorte que pendant ce tems la ligne des abscides est avancée de l'angle $\varphi = \frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n(a + \mu \pi m k)}$. Mais posant $m = 0$, dès le premier mouvement la résistance fait que le périhélie réponde à l'angle $\frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n a}$, donc pendant m révolutions, il recule par $\frac{\mu \mu \pi m k k (1 + \frac{1}{2} n)}{n a (a + \mu \pi m k)} = \frac{\mu \mu \pi m k k}{n a a}$, ce qui est absolument insensible; car si n est extrêmement petit, on ne peut plus distinguer le périhélie.

XLII.

Posons donc $\varphi = \frac{\mu k}{n a}$ pour trouver la plus petite distance de la planete au soleil, qui sera

$$r = \frac{k}{1 + n + \frac{\mu k}{a} \cdot 2 \pi m (1 + \frac{1}{2} n)}$$

Or posant $\varphi = \pi + \frac{\mu k}{n a}$, la plus grande résulte

$$r = \frac{k}{1 - n + \frac{\mu k}{a} \cdot \pi (2 m + 1) (1 - \frac{1}{2} n)}$$

Mais puisque l'excentricité est extrêmement petite, & que l'effet ne devient sensible que lorsque le nombre m est assez grand, nous aurons la plus petite distance

$$r = \frac{k}{1 + \frac{2 \pi \mu m k}{a} + n (1 + \frac{\pi \mu m k}{a})}$$

& la plus grande distance

$$r = \frac{k}{1 + \frac{2 \pi \mu m k}{a} - n (1 + \frac{\pi \mu m k}{a})}$$

E ij

Donc après m révolutions de la planète, nous trouvons le demi-parametre de son orbite

$$= \frac{a k}{a + 2 \pi \mu m k} = k \left(1 - \frac{2 \pi \mu m k}{a} \right)$$

& l'excentricité

$$= n \cdot \frac{a + \pi \mu m k}{a + 2 \pi \mu m k} = n \left(1 - \frac{\pi \mu m k}{a} \right),$$

d'où nous voyons que la résistance de l'éther diminue tant le parametre que l'excentricité.

XLIII.

Pour trouver le tems pendant lequel la planète acheve m révolutions autour du soleil, posons $\omega = 2 \pi m$, ce tems sera

$$t = \frac{\odot k \mathcal{V} k}{c \mathcal{V} c} \left(m - \frac{3 \pi \mu m^2 k}{2 a} + \frac{9 \mu n k}{4 \pi a} \right);$$

Donc le tems de $m + 1$ révolutions étant

$$t = \frac{\odot k \mathcal{V} k}{c \mathcal{V} c} \left(m + 1 - \frac{3 \pi \mu (m + 1)^2 k}{2 a} + \frac{9 \mu n k}{4 \pi a} \right)$$

après que la planète aura achevé m révolutions, son

tems périodique sera $= \frac{k \mathcal{V} k}{c \mathcal{V} c} \odot \left(1 - \frac{3 \pi \mu k}{2 a} (2 m + 1) \right)$

tout comme nous l'avons trouvé dans le cas précédent. Ainsi une excentricité fort petite ne change rien dans la diminution du tems périodique, & le changement de l'excentricité même est si petit, qu'il sera presque impossible de s'en appercevoir, même après le plus grand nombre de révolutions. Car si pour la terre la valeur de $\frac{3 \pi \mu k}{2 a} \odot$ est $\frac{243}{10000}$ prenant μ dix fois plus petit que je l'avois d'abord estimé (XXXIX), nous

aurons à-peu-près $\frac{3^{\pi \mu k}}{2 a} = \frac{1}{41 \times 31\,558\,176}$, & partant $\frac{\pi \mu k}{a} = \frac{1}{2\,000\,000\,000}$, donc l'excentricité après m révolutions $= (1 - \frac{m}{2\,000\,000\,000})$ d'où l'on voit que même après 100 000 révolutions, cette diminution ne deviendrait pas encore sensible. Or le demi-parametre de l'orbite de la terre, après m révolutions, sera encore $= c (1 - \frac{m}{1\,000\,000\,000})$.

III. L'Orbite de la Planete étant considérablement excentrique.

XLIV.

Je supposerai ici l'excentricité n plus grande qu'au-paravant, mais pourtant plus petite que l'unité, puisque $n = 1$ donneroit déjà une parabole pour l'orbite de la planete. Les puissances de n deviendront donc de plus en plus petites, desorte qu'on pourra négliger les puissances plus hautes que le cube n^3 ou le quarré-quarré n^4 . Développons en premier lieu l'intégrale

$$\int \frac{d\omega \sqrt{1 + 2n \operatorname{cosec} \omega + nn}}{(1 + n \operatorname{cosec} \omega)^2} \text{ (§. XXXIV), \& puisque}$$

$$\begin{aligned} & \text{la résolution en séries nous donne } \sqrt{1 + 2n \operatorname{cosec} \omega + nn} \\ & = 1 + \frac{1}{2} n n - \frac{1}{8} n^4 + n (1 - \frac{1}{2} n n) \operatorname{cosec} \omega - n n \\ & \quad (\frac{1}{2} - \frac{3}{4} n n) \operatorname{cosec} \omega^2 + \frac{1}{2} n^3 \operatorname{cosec} \omega^3 - \frac{5}{8} n^4 \operatorname{cosec} \omega^4, \\ & \& (1 + n \operatorname{cosec} \omega)^{-2} = 1 - 2 n \operatorname{cosec} \omega + 3 n^2 \operatorname{cosec} \omega^2 \\ & \quad - 4 n^3 \operatorname{cosec} \omega + 5 n^4 \operatorname{cosec} \omega^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{nous en obtiendrons } \frac{\sqrt{1 + 2n \operatorname{cosec} \omega + nn}}{(1 + n \operatorname{cosec} \omega)^2} = 1 + \frac{1}{2} n n \\ & \quad - \frac{1}{8} n^4 - n (1 + \frac{3}{2} n n) \operatorname{cosec} \omega + n n (\frac{1}{2} + \frac{13}{4} n n) \\ & \quad \operatorname{cosec} \omega^2 + \frac{1}{2} n^3 \operatorname{cosec} \omega^3 - \frac{17}{8} n^4 \operatorname{cosec} \omega^4; \end{aligned}$$

& à cause de $\text{cof. } \omega^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{cof. } 2 \omega$;

$$\text{cof. } \omega^3 = \frac{3}{4} \text{cof. } \omega + \frac{1}{4} \text{cof. } 3 \omega;$$

$$\text{cof. } \omega^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \text{cof. } 2 \omega + \frac{1}{8} \text{cof. } 4 \omega;$$

cette expression se réduit à $1 + \frac{3}{4} n n + \frac{45}{64} n^4 - n$
 $(1 + \frac{2}{8} n n) \text{cof. } \omega + n n (\frac{1}{4} + \frac{2}{16} n n) \text{cof. } 2 \omega + \frac{1}{8}$
 $n^3 \text{cof. } 3 \omega - \frac{17}{64} n^4 \text{cof. } 4 \omega$;

d'où nous tirons l'intégrale $\int \frac{d \omega \sqrt{(1 + 2 n \text{cof. } \omega + n n)}}{(1 + n \text{cof. } \omega)^2}$
 $= (1 + \frac{3}{4} n n + \frac{49}{64} n^4) \omega - n (1 + \frac{2}{8} n n) \text{sin. } \omega$
 $+ \frac{1}{2} n n (\frac{1}{4} + \frac{2}{16} n n) \text{sin } 2 \omega + \frac{1}{24} n^3 \text{sin } 3 \omega - \frac{17}{256} n^4 \text{sin } 4 \omega$;

& partant, nous aurons $A = 1 + \frac{3}{4} n n + \frac{45}{64} n^4$;
 $B = -1 - \frac{2}{8} n n$; $C = \frac{1}{8} + \frac{2}{32} n n$; $D = \frac{1}{24} E = \frac{-17}{256}$.

XLV.

De-là nous trouvons la distance de la planète au soleil, comme elle est représentée au §. XXXVI; c'est-à-dire, γ égal à k divisé par

$$1 + n \text{cof. } \omega + \frac{n^2}{4} (A \omega - \frac{1}{2} B n \omega \text{cof. } \omega - \frac{1}{3} C n^2 \text{sin. } 2 \omega - \frac{1}{8} D n^3 \text{sin. } 3 \omega - \frac{1}{15} E n^4 \text{sin. } 4 \omega).$$

Ensuite, pour l'expression du tems, nous avons d'abord

$$\int \frac{d \omega}{(1 + n \text{cof. } \omega)^2} = (1 + \frac{3}{2} n n + \frac{15}{8} n^4) \omega - n (2 + 3 n n) \text{sin. } \omega + n n (\frac{3}{4} + \frac{5}{4} n n) \text{sin. } 2 \omega - \frac{1}{3} n^3 \text{sin. } 3 \omega + \frac{5}{32} n^4 \text{sin. } 4 \omega$$
;

& les deux autres formules se réunissent dans celle-ci :

$$\frac{\mu k}{2a} \int d\omega \left\{ \begin{aligned} & -3 \left(1 + \frac{13}{4} n n + \frac{421}{64} n^4 \right) \omega + (8n + \frac{93}{4} n^3) \omega \operatorname{cof.} \omega - \\ & \left(\frac{15}{2} n^2 + 22 n^4 \right) \omega \operatorname{cof.} 2 \omega + 6 n^3 \omega \operatorname{cof.} 3 \omega - \frac{35}{8} n^4 \operatorname{cof.} 4 \omega \\ & - \left(n + \frac{9}{4} n^3 \right) \operatorname{fin.} \omega + \left(\frac{31}{24} n n + \frac{163}{48} n^4 \right) \operatorname{fin.} 2 \omega - \frac{5}{16} \\ & n^3 \operatorname{fin.} 3 \omega + \frac{279}{1280} n^4 \operatorname{fin.} 4 \omega \end{aligned} \right.$$

d'où, pour le tems t , on trouve :

$$\frac{2\pi c \mathcal{V}c}{\omega k \mathcal{V}k} t = \left\{ \begin{aligned} & \left(1 - \frac{3}{2} n^2 + \frac{15}{8} n^4 \right) \omega - n \left(2 + 3 n^2 \right) \operatorname{fin.} \omega + n n \\ & \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4} n^2 \right) \operatorname{fin.} 2 \omega - \frac{1}{3} n^3 \operatorname{fin.} 3 \omega + \frac{5}{12} n^4 \operatorname{fin.} 4 \omega \\ & + \frac{\mu k}{2a} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{13}{4} n^2 + \frac{421}{64} n^4 \right) \omega + (8n + \frac{93}{4} n^3) \omega \operatorname{fin.} \omega \\ & - \left(\frac{15}{4} n^2 + 11 n^4 \right) \omega \operatorname{fin.} 2 \omega + 2 n^3 \omega \operatorname{fin.} 3 \omega + \frac{35}{32} n^4 \omega \operatorname{fin.} 4 \omega \\ & + (9n + \frac{51}{2} n^3) \operatorname{cof.} \omega - \left(\frac{121}{48} n^2 + \frac{691}{96} n^4 \right) \\ & \operatorname{cof.} 2 \omega + \frac{27}{48} n^3 \operatorname{cof.} 3 \omega - \frac{2279}{5120} n^4 \operatorname{cof.} 4 \omega \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

Et si nous nommons le demi-grand-axe $= h$, à cause de $h = \frac{k}{1-n^2}$, nous aurons :

$$\frac{2\pi c \mathcal{V}c}{\omega h \mathcal{V}h} t = \left\{ \begin{aligned} & \omega - 2 n \operatorname{fin.} \omega + n n \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2} n^2 \right) \operatorname{fin.} 2 \omega - \frac{1}{3} n^3 \\ & \operatorname{fin.} 3 \omega + \frac{5}{12} n^4 \operatorname{fin.} 4 \omega \\ & - \frac{\mu k}{a} \left\{ \begin{aligned} & + \frac{3}{4} \left(1 + \frac{7}{4} n^2 + \frac{333}{64} n^4 \right) \omega^2 - n \left(4 + \frac{45}{8} n^2 \right) \\ & \omega \operatorname{fin.} \omega + n^2 \left(\frac{15}{8} + \frac{43}{16} n^2 \right) \omega \operatorname{fin.} 2 \omega \\ & - n^3 \operatorname{fin.} 3 \omega + \frac{35}{64} n^4 \omega \operatorname{fin.} 4 \omega \\ & - n \left(\frac{9}{2} + 6 n^2 \right) \operatorname{cof.} \omega + n^2 \left(\frac{121}{96} + \frac{41}{24} n^2 \right) \\ & \operatorname{cof.} 2 \omega - \frac{27}{96} n^3 \operatorname{cof.} 3 \omega + \frac{2279}{10240} n^4 \operatorname{cof.} 4 \omega \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

XLVI.

Supposons que la planete ait déjà achevé m révolutions, & pour celle qui suit posons $\omega = 2 \pi m + \varphi$, alors sa distance au soleil sera ζ égal à k divisé par

$$1 + n \operatorname{cof.} \varphi + \frac{\mu k}{a} \left(2 \pi A m + A \varphi - \frac{1}{2} B n (2 \pi m + \varphi) \right. \\ \left. \operatorname{cof.} \varphi - \frac{1}{3} C n^2 \operatorname{fin.} 2 \varphi - \frac{1}{8} D n^3 \operatorname{fin.} 3 \varphi - \frac{1}{15} E n^4 \operatorname{fin.} 4 \varphi \right)$$

& il est clair que l'orbite aura souffert le même chan-

gement que dans le cas précédent, parce que les termes qui ne renferment point le nombre m sont évanouissans. L'orbite même se rétrécira un tant soit peu, & l'excentricité deviendra plus petite, mais si peu, qu'il est impossible de s'en appercevoir; de même le lieu de l'aphélie ou du périhélie n'en souffrira aussi aucun changement sensible. L'unique effet sensible que la résistance de l'éther est capable de produire, consiste dans la diminution du tems périodique, ce qu'il convient d'examiner plus soigneusement.

XLVII.

Pendant que la planete acheve m révolutions, il s'écoule un tems t , & en posant dans l'expression ci-dessus (XLV) $\omega = 2 \pi m$, ce tems est

$$t = \frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}} \odot \left(m - \frac{\mu k}{a} \left(\frac{1}{2} (1 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{133}{64} n^4) \pi m m \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{9n}{4\pi} + \frac{121n^2}{192\pi} - \frac{613n^3}{192\pi} + \frac{59317n^4}{61440\pi} \right) \right)$$

Le tems de $m + 1$ révolutions se trouvant de la même maniere, après que la planete aura achevé m révolutions, le tems de la révolution suivante est

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}} \odot \left(1 - \frac{3\pi\mu k}{2a} \left(1 + \frac{3}{4} n n + \frac{133}{64} n^4 \right) (2m + 1) \right);$$

ou bien

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}} \odot \left(1 - \frac{3\pi\mu k}{2a} \left(1 - \frac{1}{4} n n + \frac{81}{64} n^4 \right) (2m + 1) \right).$$

Et alors le demi-paramètre qui fut au commencement

$$k, \text{ fera } = k \left(1 - \frac{2\pi\mu m k}{a} \right), \text{ l'excentricité } = n \left(1 - \frac{\pi\mu m k}{a} \right)$$

$$\& \text{ le demi-grand-axe } = \frac{k \left(1 - \frac{2\pi\mu m k}{a} \right)}{1 - n n \left(1 - \frac{2\pi\mu m k}{a} \right)} = h \left(1 - \frac{2\pi\mu m h}{a} \right)$$

Que

Que le tems périodique de la planete ait été $= T$, s'il n'y avoit point de résistance ; & à cause de $T' = \frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}} \odot$, si l'on néglige l'excentricité, le tems périodique après m révolutions fera encore

$$= T \left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a} (2m + 1) \right).$$

Or en tenant compte de la résistance, le premier tems périodique étoit $= T \left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a} \right)$, donc après m révolutions la diminution du tems périodique fera $= \frac{3\pi\mu h}{a} m T$.

XLVIII.

Quelque petite que paroisse cette diminution, l'effet devient néanmoins très-sensible pendant plusieurs siècles. Supposons que le tems périodique d'une planete soit à-présent $= T$, le tems périodique de la Terre autour du Soleil étant aussi à présent $= \odot$, & que pendant m révolutions le tems périodique de la planete diminue de la particule de tems $= m\theta$, nous aurons $\theta = \frac{3\pi\mu h}{a} T$, & partant $\frac{2\pi\mu h}{a} = \frac{\theta}{T}$. Maintenant qu'on calcule des tables du moyen mouvement de cette planete selon la maniere ordinaire, comme si le tems périodique T demeurait toujours le même ; & parce qu'au tems T répond le moyen mouvement 2π , on aura pour un an ou pour le tems \odot le moyen mouvement $\frac{2\pi\odot}{T}$, & pour le tems de N années le moyen mouvement fera $= \frac{2\pi N\odot}{T}$. Mais à cause de la résistance, le mouvement moyen de la planete pour le même tems de N années sera différent. Pour le trou-

Prix de 1762.

F

ver, nous n'avons qu'à poser $t = N \odot$, & l'angle ω , en omettant les termes qui renferment le sinus ou cosinus, donnera son mouvement moyen actuel. Or puisque $\frac{c \mathcal{V} c}{h \mathcal{V} h} = \frac{\odot}{T}$, nous avons cette équation :

$$\frac{2 \pi N \odot}{T} = \omega - \frac{3 \mu k}{4 a} \omega \omega = \omega - \frac{\theta \omega \omega}{4 \pi T},$$

d'où nous trouvons le moyen mouvement actuel :

$$\omega = \frac{2 \pi N \odot}{T} + \frac{\theta \omega \omega}{4 \pi T} = \frac{2 \pi N \odot}{T} + \frac{\pi N N \odot \odot \theta}{T^3}.$$

Il faut donc ajouter au lieu moyen trouvé par les tables ordinaires du moyen mouvement la particule

$$\frac{\odot \odot \theta}{T^3} \pi N N = 180^\circ N N \cdot \frac{\odot \odot \theta}{T^3}.$$

XLIX.

Cette même correction a lieu, soit que N marque un nombre positif ou négatif. Donc si les tables des moyens mouvemens ont été dressées sur le tems périodique T d'une certaine époque, qui après m révolutions diminue de la particule $m \theta$, alors pour N ans tant avant qu'après cette époque, il faudra ajouter la particule $180^\circ \cdot N^2 \cdot \frac{\odot^2}{T^2} \cdot \frac{\theta}{T}$ à la longitude moyenne qu'on aura tiré de ces moyens mouvemens. Si l'on fait $T : \theta = 360^\circ : \delta$, ce petit arc δ exprime le moyen mouvement de la planete qui répond au tems θ , & maintenant notre correction de la longitude moyenne fera $= \frac{1}{2} \delta N^2 \cdot \frac{\odot^2}{T^2}$ où \odot marque le tems d'une année. Donc si nous posons la distance moyenne du soleil à la terre $= c$ & à la planete $= h$, à cause de $\frac{\odot^2}{T^2} = \frac{c^3}{h^3}$

notre correction fera $= \frac{1}{2} \delta . N^2 \frac{c^3}{b^3}$; or cette fraction $\frac{c^3}{b^3}$ se tire aisément des tables. Je remarque encore que cette correction est proportionnelle au quarré de l'intervalle du tems, & partant dans un intervalle de quelques milliers d'années elle doit devenir très-considérable, quelque petite que soit la diminution d'une révolution à la suivante, que je suppose ici $= \delta$.

L.

Donc tout l'effet de la résistance de l'éther sur le mouvement des planetes se réduit à la diminution de leurs tems périodiques, puisque nous avons vu que ni l'excentricité, ni leurs aphélies n'en souffrent aucun changement sensible. Or pour l'usage de l'Astronomie cet effet ne sauroit être représenté plus commodément que par une correction du mouvement moyen qui doit se faire ainsi. Ayant établi le mouvement moyen pour une certaine époque & en ayant déduit une table des longitudes moyennes pour tous les ans tant avant qu'après cette époque, la longitude moyenne ne fera juste que pour cette époque même; pour tout autre tems qui en differe de N' ans tant avant qu'après cette époque, il faudra ajouter à la longitude moyenne tabulaire la particule $\frac{1}{2} \delta . N^2 . \frac{c^3}{b^3} = \frac{1}{2} \delta . N^2 . \frac{\Theta^2}{T^2}$. La correction

d'un an fera donc $= \frac{1}{2} \delta . \frac{\Theta^2}{T^2}$, soit cette correction $= \alpha$,

& puisque $\delta = 2 \alpha \frac{T^2}{\Theta^2}$, nous aurons $\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T^3}{\Theta^2}$, &

partant, $\frac{3 \pi \mu h}{a} = \frac{a}{r} \cdot \frac{T^2}{\Theta^2}$, ou bien $\alpha = \frac{3 \pi^2 \mu h}{a} \cdot \frac{\Theta^2}{T^2}$

$= 3 \pi^2 \mu \cdot \frac{c^3}{b^3}$; de sorte que la correction pour un an soit réciproquement proportionnelle au quarré de la distance moyenne de la planete au soleil multi-

F ij

plié par le demi-diamètre du corps de la planète.

L I.

Il suffit donc d'avoir déterminé cette correction pour une planète, & il sera aisé d'en déduire celles de toutes les autres planètes. Il n'y a aucun doute que les observations du soleil ne soient les plus propres pour nous fournir les éclaircissements nécessaires sur cet important article, & si l'on peut parvenir à déterminer la correction d'un an α pour le soleil, on en déduira aisément la valeur de la fraction μ résultante de la résistance de l'éther, car à cause de $h = c$, on aura $\mu = \frac{\alpha \alpha}{3 \pi \pi c}$. Mais quoique la correction d'un an α soit si petite, qu'elle échapperait aux plus grands soins des Astronomes, elle devient très-sensible pour un grand nombre d'années, parce que pour un intervalle d' N années elle sera $= N N \alpha$, & partant pour un siècle $= 10\ 000. \alpha$, & pour dix siècles $= 1\ 000\ 000. \alpha$. En consultant donc les plus anciennes observations, il ne sera plus difficile d'en conclure la véritable valeur de la correction annuelle α .

L I I.

Pour cet effet, il faudrait conclure la quantité d'une année solaire moyenne par les plus modernes observations faites tout au plus dans l'espace d'un demi-siècle; de-là on devrait dresser des tables du moyen mouvement & de la longitude moyenne du soleil pour des époques les plus reculées, où l'on trouve de bonnes observations. Alors pour une telle époque, qui précède la présente de N ans, on comparerait la longitude moyennes tirée de ces tables avec celle qui conviendrait aux observations anciennes, & si l'on trou-

voit que celle-ci surpasse celle-là de la quantité Q , on auroit $NN\alpha = Q$, & partant $\alpha = \frac{NN}{Q}$. Mais il faudroit être bien assuré que la terre n'eût pendant ce tems souffert aucune altération dans son mouvement par l'action de quelque comete. A l'égard de l'action des autres planetes, on en connoît assez l'effet, pour en tenir compte dans cette recherche; mais il est fort à craindre que les cometes ne la rendent tout-à-fait inutiles.

L III.

La méthode dont les Astronomes se servent pour déterminer la quantité de l'année solaire, nous fournit encore un autre moyen de nous assurer de la correction annuelle α . Supposons qu'en comparant les observations présentes avec des observations faites avant L ans, on conclue la quantité de l'année $= A$, & qu'en les comparant avec des observations faites avant M ans, on la trouve $= B$. Maintenant soit la quantité de l'année solaire $= \odot$, & la diminution annuelle $= \theta$; & le tems écoulé depuis L ans jusqu'à présent sera $= L\odot + LL\theta$, & le tems écoulé depuis M ans jusqu'à présent $= M\odot + MM\theta$. De-là on aura $A = \odot + L\theta$, & $B = \odot + M\theta$, & partant $\theta = \frac{B-A}{M-L}$ & $\odot = A - L\theta$; d'où l'on connoîtra la véritable année solaire \odot , qui convient à l'époque d'à-présent, & la diminution annuelle θ , & de-là on tirera $\alpha = \frac{\theta}{\odot}$.

L IV.

Mais outre les cometes qui peuvent troubler cette détermination, on rencontre encore d'autres obstacles presque insurmontables du côté des observations mê-

mes, qui ne sont pas si exactes, au moins dans les siècles passés, que l'erreur dans la quantité de l'année ne puisse être de plusieurs secondes. Or puisque $B - A$ est un nombre de secondes fort peu considérable, l'erreur commise dans les quantités de l'année A & B le rend tout-à-fait incertain. Ensuite les plus anciennes observations ont non seulement le défaut qu'elles sont peu exactes, mais il semble aussi qu'on n'est pas trop sûr du tems dans lequel elles ont été faites. Surtout la réduction de l'Almanac Egyptien au Romain, dont Ptolomée s'est servi, ne paroît pas assez constatée, à cause des désordres auxquels l'Almanac Romain fut assujetti dans ce tems; & les corrections que Riccioli & d'autres Chronologues ont tâché d'y apporter, sont ouvertement fondées sur la quantité de l'année qu'ils ont supposée; ce qui est précisément la question. Il se pourroit donc bien faire que les momens des observations marqués par Ptolomée dussent être reculés d'un ou de deux jours de plus qu'on les suppose dans le calcul; & alors les anciennes observations comparées aux modernes, donneroient incontestablement l'année plus longue que les Astronomes ne la supposent dans leurs tables.

LV.

En effet, feu M. Cassini, après les plus scrupuleuses recherches sur la quantité de l'année solaire moyenne, en prenant un milieu entre tous ses résultats, conclut l'année solaire moyenne de 365 j, 5^h, 48', 47'', qui convient avec celle qu'il a déduite de ses propres observations. Cependant, dans ses tables astronomiques, il la suppose de 365 j, 5^h, 48', 53'', 24''', & partant de 6'', 24'''' plus grande; sans doute qu'il n'a fait ce changement que pour satisfaire aux anciennes observations; d'où il faut conclure

que les anciennes observations demandent une année plus longue ; ce qui prouve l'effet de la résistance de l'éther. Aussi ne sauroit-on douter que les observations de Hipparque, comparées avec celles de Ptolomée, ne donnaissent l'année au moins de quelques minutes plus longue ; d'où il suit encore, que l'année solaire moyenne est à-présent plus courte qu'autrefois.

LVI.

Si M. Cassini, dans ses Tables, avoit supposé l'année de $365\text{ j}, 5^{\text{h}}, 48', 47''$, le mouvement moyen pour cent années Juliennes seroit devenu $05, 0^{\circ}, 46', 3''$, qui est dans ses Tables de $05, 0^{\circ}, 45' 42''$, la différence étant de $21''$. Donc pour 200 ans la différence seroit $42''$, & partant, si nous supposons que les Tables de Cassini représentent bien la longitude du soleil jusqu'à 200 ans en arriere, des tables construites sur la quantité de l'année de $365\text{ j}, 5^{\text{h}}, 48', 47''$ demanderont, pour l'intervalle de deux siècles, la correction de $42''$, & pour l'intervalle d'un siècle $10\frac{1}{2}''$. Si nous supposons la véritable quantité de l'année de $365\text{ j}, 5^{\text{h}}, 48', 46''$, on trouveroit, pour l'intervalle d'un siècle, la correction = $12''$, & partant $10000\alpha = 12''$, & $\alpha = \frac{1}{833}'' = \frac{\theta}{\ominus}$. $180^{\circ} = \frac{660 \times 60 \times 180}{31558176}$; d'où $\theta = \frac{31558 \times 176}{833 \times 60 \times 60 \times 180}'' = 0, 058''$, ce qui est la diminution annuelle de l'année, & partant la diminution séculaire = $5'', 48'''$.

LVII.

M. l'Abbé de la Caille ayant supposé l'année, dans ses Tables, de $365\text{ j}, 5^{\text{h}}, 48', 49''$, qu'il a uniquement conclu des observations modernes, de maniere que ce doit être la juste quantité de l'année pour le milieu de

ce siècle, le mouvement moyen pour 100 années Juliennes est $0^s, 0^o, 45', 55'' \frac{6}{10}$; donc si, pour satisfaire aux observations faites avant deux siècles, il falloit supposer le mouvement moyen séculaire de $0^s, 0^o, 45', 42''$, il faudroit ajouter à la longitude trouvée par les Tables de M. de la Caille $27 \frac{2}{10}'' = 40\ 000 \alpha$, & partant α seroit $= \frac{1}{1470}''$, d'où l'on trouveroit $\theta = 0,033$, & la diminution séculaire de l'année $= 3'', 18'''$, d'où il semble qu'on devroit supposer la fraction $\mu = \frac{1}{1500000000000000}$; ce qu'on pourroit encore assez bien accorder avec les principes établis ci-dessus sur la densité de l'éther, & sur la maniere dont il résiste au mouvement des corps.

LVIII.

Comme on ne fauroit encore rien décider de précis là-dessus, posons la diminution séculaire de l'année $= \nu''$ & à cause de $\theta = \frac{\nu}{100}$, nous aurons :

$$\alpha = 1800 \cdot \frac{\nu}{100 \times 31\ 558\ 176} = 0,000\ 205 \nu'',$$

donc l'augmentation de la longitude moyenne pour l'intervalle d'un siècle sera $= 2 \frac{1}{20} \nu$ secondes, & pour l'intervalle de 10 siècles ou de 1000 ans, elle sera $= 205 \nu$ secondes, & de-là $\mu = \frac{\nu}{5.6\ 000\ 000\ 000\ 000}$.

De-là, en tenant compte du demi-diametre des autres planetes, on aura l'augmentation de leur longitude moyenne pour l'intervalle de 1000 ans,

Pour Saturne $= 135 \nu''$; Pour la Terre $= 205 \nu''$;

Pour Jupiter $= 62 \nu''$; Pour Vénus $= 103 \nu''$;

Pour Mars $= 254 \nu''$; Pour Mercure $= 135 \nu''$;

après

après avoir établi des tables du moyen mouvement sur le tems périodique qui convient à chaque planète pour l'époque proposée.

L I X.

Ce que je viens d'exposer, prouve suffisamment, que les planètes éprouvent dans leur mouvement quelque résistance de l'Ether, quoiqu'il soit impossible d'en déterminer la vraie quantité par la seule Théorie, moyennant laquelle nous venons cependant d'apprendre que cette résistance est très-petite, & rien n'empêche qu'elle ne soit encore considérablement plus petite que je ne l'ai estimée. Nonseulement la densité de l'Ether pourroit être diminuée au-delà, en diminuant en même raison son élasticité; mais l'obliquité sous laquelle les particules vraiment solides des planètes reçoivent l'impulsion de l'Ether, pourroit causer encore une plus grande diminution. Cependant je doute fort qu'on puisse par ce moyen réduire la diminution de l'année solaire pendant un siècle au-dessous d'une seconde; il me semble plutôt qu'on la pourroit bien admettre de quelques secondes, sans porter la moindre atteinte aux observations anciennes. Il n'est pas encore suffisamment prouvé, que les observations rapportées par Ptolomée, ne doivent être reculées d'un jour au-delà de ce qu'on les suppose communément; Riccioli lui-même en marque le jour différemment dans son *Almageste* & dans son *Astronomie réformée*, à cause de l'incertitude de l'*Almanac Romain*, & ceux qui ont voulu mieux régler ces tems, se sont ouvertement fondés sur l'hypothèse de la quantité inaltérable de l'année.

L X.

Mais ici je rencontre un Antagoniste bien redoutable, le savant M. Meyer, Professeur de Gottingue, qui soutient positivement que l'année solaire n'a souffert aucune altération, quoiqu'il admette une petite altération dans le mouvement moyen de la lune, ce qui paroît déjà fort paradoxé. Pour maintenir ce sentiment, il rejette les observations des équinoxes de Ptolomée, qui le renverferoient tout-à-fait; & ensuite il regarde le soupçon, qu'on auroit pu commettre une erreur d'un jour dans le calcul chronologique, comme très-absurde. Il dit que la différence d'un jour produiroit dans le mouvement moyen de la lune une différence de 13 degrés, qu'on ne sauroit admettre en aucune façon. Mais cette différence suppose déjà un mouvement moyen bien établi & constant; ce qui est précisément de quoi on a raison de douter. Ensuite, si en reculant d'un jour les époques de Ptolomée, on en change conformément le moyen mouvement du soleil & de la lune. On conservera précisément les mêmes éclipses & toujours le même rapport entre le soleil & la lune. Outre cela, il n'est pas à craindre que cette augmentation du moyen mouvement ne soit plus d'accord avec les observations plus modernes; le mouvement moyen de ces derniers siècles n'en est point altéré; mais en remontant aux siècles passés, il y faut apporter une correction proportionnelle au carré du tems écoulé; d'où l'on voit, que quand même cette correction pour les tems de Ptolomée & Hipparque seroit très-considérable, elle pourroit bien subsister avec les observations faites depuis quelques siècles, même en remontant jusqu'aux tems d'Albategnius.

F I N.

