ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XIX.

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

1912.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XIX.° (SERIE III.ª)

Funzioni ipersferiche poliarmoniche ad una variabile.

(*Di* VIRGILIO GIULOTTO, *a Mantova.*)

INTRODUZIONE.

Le funzioni che formano oggetto della presente Memoria sono integrali della seguente equazione differenziale:

$$(1-x^2)\frac{d^2 f}{d x^2}-(N+1-2\,q)\,x\,\frac{d f}{d x}+n\,(N+n-2\,q)\,f=0$$

la quale per $N=3$ e $q=1$ si riduce a quella degli ordinari polinomi di LEGENDRE.

Esse, come verrà in seguito dimostrato, rappresentano la successione dei valori che una funzione di N variabili razionale, intera, omogenea, di grado n e q-armonica assume nei punti di una ipersfera, col centro nell'origine delle coordinate, quando le variabili indipendenti su detta superficie si riducano ad una soltanto. Per questo denominiamo tali integrali funzioni ipersferiche poliarmoniche ad una variabile (di LEGENDRE) di dimensione N, d'armonicità q, d'ordine n, e le rappresentiamo col simbolo $X^q_{N,n}$.

Nel caso particolare di $q=1$ le nostre funzioni si riducono a quelle di LEGENDRE del campo ad N dimensioni, studiate per la prima volta dal CAYLEY (*) fin dal 1848. Esse formarono già argomento di una mia Memoria (**) e di una pregevole e più recente del prof. MARCOLONGO (***) in cui sono aggiunti

(*) CAYLEY, *Sur les fonctions de Laplace* (Journal de Mathématiques, vol. XIII, 1848).

(**) GIULOTTO, *Sulle funzioni sferiche simmetriche del campo ad N dimensioni* (Giornale di Battaglini, vol. XXXIX e XLI).

(***) MARCOLONGO, *Sulla teoria delle funzioni sferiche* (Atti della R. Accademia Peloritana, anno XVII).

nuovi cenni bibliografici a quelli che nella mia sono dati su tale argomento.

Nel caso invece di $N = 3$ e q qualunque dette funzioni si riducono a quelle studiate per la prima volta da me (*) nella Memoria: *Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di Legendre.*

La teoria di queste nuove funzioni, delle quali nella presente Memoria ci proponiamo soltanto di iniziare lo studio, ci sembra interessante perchè, come risulta da queste nostre ricerche, mostra il legame fra dimensioni del campo e grado d'armonicità, e conduce ad alcuni teoremi che riguardano anche gli ordinari polinomi di Legendre.

Altre notevoli proprietà delle nostre funzioni non sarà difficile o almeno impossibile rintracciare, seguendo i procedimenti già noti per le ordinarie X_n o altri da noi indicati nelle due precedenti Memorie e tenendo presenti gli studi interessanti del Dini (**) sopra: *Un'applicazione della teoria dei residui,* dove fra l'altro, con modo tutto naturale e con processo uniforme, vengono estese formole e proprietà integrali dei polinomi di Legendre a funzioni molto più generali.

CAPITOLO I.

1. Una funzione $f_n(x_1 x_2 \dots x_N)$ del campo Σ_N razionale, intera, omogenea, di grado n, q-armonica, ossia soddisfacente alla $\Delta_2^q f = 0$ in cui le variabili si pensino come coordinate di un punto dell'ipersfera col centro nell'origine e raggio uno, vale a dire si considerino legate dalla relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_N^2 = r^2 = 1,$$

si dirà, per analogia con la teorica delle funzioni sferiche ordinarie, *funzione ipersferica poliarmonica d'ordine n.*

Sia $\sigma(n)$ il numero di tali funzioni linearmente indipendenti e rappre-

(*) Giulotto, *Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di Legendre* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XVII, 1903).

(**) Dini, *Un'applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa* (Reale Accademia dei Lincei, Classe scienze fisiche, matem., nat., serie 5.ª, vol. II. — Annali di Matematica. tom. I della serie III, pag. 39).

sentiamo con

$$\lambda = \frac{N(N+1)\dots(N+n-1)}{\pi(n)}$$

il numero delle derivate n^{me} di f_n.

Osservando che

$$\mu = \frac{N(N+1)\dots(N+n-2q-1)}{\pi(n-2q)}$$

almeno finchè $n \geqq 2q$ rappresenta il numero delle relazioni (di cui non è provata l'indipendenza e la compatibilità) che si ottengono uguagliando identicamente a zero il polinomio $\Delta_2^q f_n$ *di grado* $n-2q$, e rappresenta ancora il numero delle relazioni (certamente indipendenti perchè in ognuna comparisce almeno una nuova derivata) che si hanno derivando $\Delta_2^q f_n = 0$ α_1 volte rispetto ad $x_1 \dots \alpha_N$ volte rispetto ad x_N colla condizione $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = n-2q$ (relazioni che potrebbero però non essere tutte quelle che sussistono fra le derivate n^{me} di una funzione q-armonica), si deduce essere, una prima volta:

$$\sigma(n) \geqq \lambda - \mu,$$

una seconda volta:

$$\sigma(n) \leqq \lambda - \mu$$

e, premesso che in seguito troveremo l'effettiva espressione delle funzioni sferiche, il che implicitamente proverà la compatibilità delle μ relazioni, si conclude che è:

$$\sigma(n)=\lambda-\mu=\frac{N(N+1)\dots(N+n-1)}{\pi(n)}-\frac{N(N+1)\dots(N+n-2q-1)}{\pi(n-2q)}=$$

$$=\frac{N(N+1)\dots(N+n-2q-1)}{\pi(n)}\Big[(N+n-2q)(N+n-2q+1)\dots$$

$$\dots(N+n-1)-(n-2q+1)(n-2q+2)\dots n\Big].$$

In casi particolari l'espressione di $\sigma(n)$ si semplifica notevolmente. Segue che fra le derivate n^{me} di una funzione q-armonica in Σ_N sussistono $\mu \neq 0$ o $\mu = 0$ relazioni a seconda che è $n \geqq 2q$ oppure $n < 2q$.

2. Teorema. *Ogni funzione di N variabili q-armonica omogenea e di grado n, moltiplicata per* $r^{\pm(2n+N-2q)}$ *genera una nuova funzione q-armonica ed omogenea.*

Poniamo:

$$F = r^p f_n \qquad (r = \sqrt{x_1^2 \dots x_N^2}).$$

Tenendo presente il teorema di EULERO per le funzioni omogenee deduciamo:

$$\Delta'_2 F = r^p \Delta'_2 f_n + p(p + 2n + N - 2) r^{p-2} f_n$$

e col medesimo procedimento da $\Delta'_2 F$ ricaviamo:

$$\Delta_2^2 F = r^p \Delta_2^2 f_n + 2p(p + 2n + N - 4) \Delta'_2 f_n r^{p-2} +$$

$$+ p(p-2)(p + 2n + N - 4)(p + 2n + N - 2) f_n r^{p-4}.$$

Dico essere in generale:

$$\Delta_2^q F = \sum_{s=0}^{q} A_s^{(q)} \Delta_2^{q-s} f_n r^{p-2s} \tag{1}$$

con

$$A_0^{(q)} = 1$$

$$A_s^{(q)} = \binom{q}{s} p(p-2) \dots$$

$$\dots [p - 2(s-1)][p + 2n + N - 2q][p + 2n + N - 2(q-1)] \dots$$

$$\dots [p + 2n + N - 2(q + 1 - s)] \qquad (s = 1, 2 \dots).$$

Applicando infatti l'operazione Δ_2 ai due membri della (1), tenendo presente il teorema di EULERO e cambiando poi in $s - 1$ l'indice s di sommazione, si ha:

$$\Delta_2^{q+1} F = \sum_{s=0}^{q+1} B_s^{(q+1)} \Delta_2^{q+1-s} f_n r^{p-2s}$$

con

$$B_0^{(q+1)} = 1$$

$$B_s^{(q+1)} = A_s^{(q)} + A_{s-1}^{(q)} [p - 2(s-1)](2n + p + 2s - 4q + N - 4) \qquad s = (1, 2 \dots).$$

Dall'essere poi:

$$A_s^{(q)} = A_{s-1}^{(q)} \frac{q - s + 1}{s} (p - 2(s-1))(p + 2n + N - 2(q + 1 - s))$$

si deduce:

$$B_s^{(q+1)} = \frac{[p-2(s-1)](p+2n+N-2-2q)(q+1)}{s} A_{s-1}^{(q)} = A_s^{(q+1)}$$

e la (1), vera per $q=1$ e per $q=2$, è vera in generale.

Per

$$p = -(2n+N-2q)$$

annullandosi le $A_s^{(q)}$ con $s \neq 0$, la (1) diventa:

$$\Delta_2^q F = r^{-(2n+N-2q)} \Delta_2^q f_n$$

e quest'uguaglianza mostra che le due equazioni $\Delta_2^q F = 0$ e $\Delta_2^q f_n = 0$ sono una conseguenza dell'altra.

3. Sia

$$F(x_1 \dots x_N) = \frac{f_m(x_1 \dots x_N)}{r^{2n+N-2q}}$$

con f_m q-armonica ed omogenea.

Per il teorema precedente è q-armonica ed omogenea anche la F e

$$\frac{\partial F(x_1 \dots x_N)}{\partial x_s} = \frac{f_{m+1}}{r^{2(m+1)+N-2q}}$$

dove f_{m+1} rappresenta, come mostrano i calcoli, un polinomio omogeneo di grado $m+1$. Per lo stesso teorema f_{m+1} è anche q-armonica. Procedendo in modo analogo concludiamo che le funzioni

$$f_{n+m} = \frac{\partial^n F(x_1 \dots x_N)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \qquad (\alpha_1 + \dots + \alpha_N = n)$$

sono polinomi q-armonici.

Assunto $m=0$ ed $f_0 = 1$ deduciamo che le funzioni

$$f_n = \frac{\partial^n r^{2q-N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \qquad (\alpha_1 + \dots + \alpha_N = n) \tag{1}$$

quando vi si pensino le variabili legate dalla relazione $x_1^2 + x_2^2 + \dots x_N^2 = 1$ sono, salvo un fattore numerico, funzioni ipersferiche poliarmoniche d'ordine n. Siccome per la q-armonicità della r^{2q-N} fra le sue λ derivate n^{me} sussistono μ relazioni, la (1) definisce tutte le $\sigma(n)$ funzioni ipersferiche poliarmoniche d'ordine n linearmente indipendenti. Posto in particolare:

$$\alpha_p = n \quad \alpha_1 = \cdots \alpha_{p-1} = \alpha_{p+1} = \cdots \alpha_N = 0 \quad x_1^2 + \cdots x_{p-1}^2 + x_{p+1}^2 + \cdots x_N^2 = \sigma^2$$

si ottiene una speciale funzione sferica dipendente da una sola variabile che noi rappresenteremo in generale col simbolo $X_{N,n}^q$ la quale, moltiplicata per un conveniente fattore K, si riduce per $q = 1$ $N = 3$, come risulterà dalle considerazioni del seguente paragrafo, al noto polinomio di Legendre.

È dunque:

$$X_{N,n}^q = K \frac{\partial^n (x_p^2 + \sigma^2)^{\frac{2q-N}{2}}}{\partial x_p^n}. \tag{2}$$

Nella funzione $(x_p^2 + \sigma^2)^{\frac{2q-N}{2}}$ diamo ad x (l'indice della variabile è inutile) l'incremento $-\alpha$; avremo:

$$(\sigma^2 + x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}} = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}}$$

e, supposto α abbastanza piccolo, sviluppato il secondo membro in serie di potenze di α, il coefficiente di α^n sarà per la (2), indipendentemente dal modo col quale si ottiene lo sviluppo, il polinomio $X_{N,n}^q$.

Possiamo dunque affermare:

Le funzioni ipersferiche poliarmoniche ad una variabile sono i coefficienti dello sviluppo in serie, secondo le potenze di α, dell'espressione:

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}}.$$

4. Si giunge ad un tale sviluppo se si osserva che, posto $x = \cos\gamma$, si ha:

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}} = (1 - \alpha e^{i\gamma})^{\frac{2q-N}{2}} . (1 - \alpha e^{-i\gamma})^{\frac{2q-N}{2}}.$$

Nell'ipotesi poi di N dispari oppure pari ma maggiore di $2q$, di γ reale e di mod. $\alpha < 1$ le due serie:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{\frac{2q-N}{2}}{r} e^{ir\gamma} \alpha^r = (1 - \alpha e^{i\gamma})^{\frac{2q-N}{2}}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{\frac{2q-N}{2}}{s} e^{-is\gamma} \alpha^s = (1 - \alpha e^{-i\gamma})^{\frac{2q-N}{2}}$$

essendo assolutamente convergenti, è lecito moltiplicarle membro a membro e ordinare il prodotto secondo le potenze di α.

In tal guisa (accoppiando i termini in cui sono scambiati i valori di r e di s) si ottiene come coefficiente di α per $n \neq 0$:

$$X^q_{N,n}(\cos\gamma)=(-1)^n \sum_{h=0} \frac{(2q-N)(2q-N-2)\ldots(2q-N-2n+2+2h)}{2^{n-h}\,\pi\,(n-h)} \cdot \frac{(2q-N)(2q-N-2)\ldots(2q-N+2-2h)}{2^h\,\pi\,(h)} \, 2\cos(n-2h)\gamma \qquad (1)$$

essendo invece

$$X^q_{N,0}(\cos\gamma) = 1.$$

Si deve poi tener presente che nel secondo membro bisogna arrestarsi al termine in $\cos\gamma$ se n è dispari ed a quello indipendente da γ se n è pari.

Nell'ipotesi poi di N pari e minore di $2q$, l'espressione di $X^q_{N,n}$ sarebbe la stessa essendo però $n \leq 2q - N + 1$; *non vi sono dunque funzioni* $X^q_{N,n}$ *con* N *pari e minore di* $2q$ *d'ordine* $n > 2q - N + 1$.

5. È noto che $\cos m\gamma$ si può esprimere linearmente mediante $\cos^m\gamma$, $\cos^{m-2}\gamma, \ldots$ onde è certo che $X^q_{N,n}$ *è esprimibile con una funzione razionale intera di* $\cos\gamma$ *ossia di* x. Noi però giungeremo a questa nuova espressione di $X^q_{N,n}$ col procedimento già seguito dall'illustre lord Kelvin nella seconda edizione della *Natural Philosophy* per le funzioni sferiche ordinarie.

Si prova con processo d'induzione che è:

$$\frac{\partial^s r^m}{\partial x^s} = m(m-2)\ldots(m-2s+2)\left[r^{m-2s}x^s + \frac{s(s-1)}{2(m-2s+2)}r^{m-2s+2}x^{s-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2.4.(m-2s+2)(m-2s+4)}r^{m-2s+4}x^{s-4} + \cdots\right]$$

ossia:

$$\frac{\partial^s r^m}{\partial x^s} = m(m-2)\ldots(m-2s+2)\,r^{m-2s}$$
$$\sum_{p=0} \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-2p+1)}{2.4\ldots 2p.(m-2s+2)(m-2s+4)\ldots(m-2s+2p)}\left(\frac{x}{r}\right)^{s-2p}$$

e posto

$$m = 2q - N \quad s = n \quad r = 1,$$

il secondo membro diventa:

$$(2q-N)(2q-N-2)\ldots(2q-N-2n+2)$$

$$\sum_{p=0} (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{2.4\ldots 2p.(N-2q+2n-2)(N-2q+2n-4)\ldots(N-2q+2n-2p)} x^{n-2p}$$

quindi avendosi in generale:

$$f(x-\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x)\,\alpha^n$$

concludiamo che il coefficiente di α^n dello sviluppo $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}}$ secondo le potenze di α è:

$$\left.\begin{aligned} X^q_{N,n} &= \frac{(N-2q)(N-2q+2)\ldots(N-2q+2n-2)}{\pi(n)} \\ &\sum_{s=0}(-1)^s \frac{n(n-1)\ldots(n-2s+1)}{2.4\ldots 2s.(N-2q+2n-2)(N-2q+2n-4)\ldots(N-2q+2n-2s)} x^{n-2s} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

per $n \neq 0$.

Nel caso invece di $n=0$ è $X_0 = 1$.

Per n pari e minore di $2q$ dovrà ritenersi $n \leq 2q-N+1$.

Per le cose dette lo sviluppo di $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}}$ è valido per mod $\alpha < 1$ e per valori di x compresi fra $+1$ e -1.

6. Il Dini (*), applicando la teoria dei residui, ottiene per i coefficienti $Z_{\mu,n}$ dello sviluppo intorno al punto $z=0$ dell'espressione $(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)^\mu$ (dove μ è reale o complesso e a_0, a_1, a_2 sono funzioni della variabile x) l'espressione seguente:

$$Z_{\mu,n} = (-1)^n \sum \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+s+1)}{\pi(s)\,\pi(n-s)} (2x)^{n-2s} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0} \cos(\mu-n)\varphi\,(2\cos\varphi - 2x)^\mu\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0}^{\pi} \cos[(\mu-n)\varphi - \mu\pi]\,(2x-2\cos\varphi)^\mu\, d\varphi$$

(*) Dini, *Un'applicazione della teoria dei residui, ecc.* ... (Annali di Matematica, tom. I, serie III, pag. 39).

valida quando la parte reale di μ sia superiore a -1 finchè x (che è compreso fra $+1$ e -1) non sia uguale a ± 1 e superiore a $-\frac{1}{2}$ se $x = \pm 1$.

Ora la prima parte di questa formula, quando si ponga $\mu = \frac{2q-N}{2}$ $\left(\text{almeno con le dovute limitazioni per } \frac{2q-N}{2}\right)$ conduce alla formula (1) del precedente paragrafo, la seconda parte di essa per $\mu = \frac{2q-N}{2}$ conduce alla formula notevole:

$$X^q_{N,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0} (2\cos\varphi - 2x)^{\frac{2q-N}{2}} \cos\frac{2q-N-2n}{2}\varphi\, d\varphi$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0}^{\pi} (2\cos\varphi - 2x)^{\frac{2q-N}{2}} \cos\left[\frac{2q-N-2n}{2}\varphi - \frac{2q-N}{2}\pi\right] d\varphi$$

che, per x compreso fra -1 e $+1$ e $\frac{2q-N}{2} > -1$ oppure per $\frac{2q-N}{2} > -\frac{1}{2}$ quando sia $x = \pm 1$, estende alle nostre funzioni, qualunque sia n, la notissima formula di DIRICHLET (*) per le ordinarie X_n.

7. Estendiamo alle nostre funzioni anche l'espressione analitica che nella teorica degli ordinari polinomi di LEGENDRE è comunemente detta di IVORY e JACOBI.

Per questo si osservi che, integrando la (1) del precedente paragrafo p volte nell'intervallo $0 \ldots x$, si ottiene:

$$\int_0^x X^q_{N,n}\, dx^p = \frac{(N-2q)(N-2q+2)\ldots(N-2q+2n-2)}{\pi(n+p)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{s=0} (-1)^s \frac{(n+p)(n+p-1)\ldots(n+p-2s+1)}{2.4\ldots 2s.(N-2q+2n-2)(N-2q+2n-4)\ldots(N-2q+2n-2s)}\, x^{n+p-2s}$$

e che la sommatoria del secondo membro coincide con lo sviluppo

$$(x^2-1)^k = \sum_{s=0} (-1)^s \frac{k(k-1)\ldots(k-s+1)}{1.2\ldots s}\, x^{2k-2s}$$

(*) DIRICHLET, *Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, etc.* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, XVII).

quando si assuma

$$p = n + N - 2q - 1 \quad \text{e} \quad k = \frac{2n + N - 2q - 1}{2}$$

il che esige, dovendo essere p e k numeri interi e positivi, che sia N dispari e nel caso di $N - 2q < 0$, si abbia $n > 2q - N + 1$.

Si deduce:

$$\int_0^x X^q_{N,n}\, dx^{(N+n-2q-1)} = \frac{(N-2q)(N-2q+2)\ldots(N-2q+2n-2)}{\pi(N-2q+2n-1)}(x^2-1)^{\frac{N-2q+2n-1}{2}}$$

e quindi:

$$X^q_{N,n} = \frac{(N-2q)(N-2q+2)\ldots(N-2q+2n-2)}{\pi(N-2q+2n-1)} \cdot \frac{d^{N-2q+n-1}(x^2-1)^{\frac{N-2q+2n-1}{2}}}{dx^{N-2q+n-1}}.$$

Quest'espressione di $X^q_{N,n}$ è certo valida per N dispari e nel caso in cui sia anche $N - 2q < 0$, per $n > -(N - 2q) + 1$.

8. Chiudiamo questo primo capitolo con la determinazione dell'equazione differenziale alla quale soddisfa la $X^q_{N,n}$.

Posto

$$H^q_N = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}}$$

si ricava:

$$\frac{\partial H^q_N}{\partial x} = (N - 2q)\,\alpha\, H^{q-1}_N$$

$$\frac{\partial^2 H^q_N}{\partial x^2} = (N - 2q)(N + 2 - 2q)\,\alpha^2 H^{q-2}_N$$

$$\frac{\partial H^q_N}{\partial \alpha} = (N - 2q)(x - \alpha)\, H^{q-1}_N$$

$$\frac{\partial^2 H^q_N}{\partial \alpha^2} = (N - 2q)(N + 2 - 2q)(x - \alpha)^2 H^{q-2}_N - (N - 2q)\, H^{q-1}_N,$$

ed essendo per le precedenti relazioni:

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 H^q_N}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 H^q_N}{\partial \alpha^2} = (N - 2q)(N + 1 - 2q)\,\alpha^2 H^{q-1}_N$$

$$(N + 1 - 2q)\, x \frac{\partial H^q_N}{\partial x} - (N + 1 - 2q)\,\alpha \frac{\partial H^q_N}{\partial \alpha} = (N - 2q)(N + 1 - 2q)\,\alpha^2 H^{q-1}_N$$

si ottiene:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 H_N^q}{\partial x^2}-(N+1-2q)\,x\frac{\partial H_N^q}{\partial x}+\alpha^2\frac{\partial^2 H_N^q}{\partial \alpha^2}+(N+1-2q)\,\alpha\frac{\partial H_N^q}{\partial \alpha}=0$$

e poichè per mod $\alpha < 1$ è

$$H_N^q=\sum_0^\infty X_{N,n}^q\,\alpha^n$$

applicando come è lecito la derivazione per serie, si deduce che la $X_{N,n}^q$ è integrale della seguente equazione differenziale:

$$(1-x^2)\frac{d^2 X_{N,n}^q}{d x^2}-(N+1-2q)\,x\frac{d X_{N,n}^q}{d x}+n\,(N+n-2q)\,X_{N,n}^q=0$$

la quale, moltiplicata prima per $(1-x^2)^{\frac{N-2q-1}{2}}$ e posto poi $x=\cos\gamma$, assume le seguenti forme:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{N+1-2q}{2}}\frac{d X_{N,n}^q}{dx}\right]+n\,(N+n-2q)\,(1-x^2)^{\frac{N-2q-1}{2}}X_{N,n}^q=0$$

$$\frac{d}{d\gamma}\left[\operatorname{sen}^{N+1-2q}\gamma\,\frac{d X_{N,n}^q}{d\gamma}\right]+n\,(N+n-2q)\operatorname{sen}^{N-2q-1}\gamma\;X_{N,n}^q=0.$$

CAPITOLO II.

1. Inizieremo questo nuovo capitolo esponendo alcuni interessanti teoremi che discendono senz'altro dalla funzione generatrice delle nostre X.

Premesso che nel seguito con la denominazione di *funzione ipersferica poliarmonica* intenderemo accennare a quella dipendente da un'unica variabile, vale a dire alla $X_{N,n}^q(x)$, osserveremo che da un semplice esame dell'esponente della funzione generatrice delle nostre X, si deduce:

Se N è pari e minore di $2q$ il numero delle funzioni ipersferiche poliarmoniche è $n=2q-N+1$.

Se N è dispari oppure maggiore di $2q$ (è il caso delle funzioni sferiche ordinarie) vi sono funzioni ipersferiche poliarmoniche d'ordine n grande a piacere.

Se $N=2q$ delle X non c'è che la $X_0=1$.

Si deduce ancora facilmente il seguente

Teorema. *Sono uguali tutte le funzioni ipersferiche poliarmoniche di ordine n in cui la differenza fra il doppio dell'indice di armonicità e il numero delle dimensioni del campo è una quantità costante, vale a dire:*

$$X^q_{N,n} = X^{q+\alpha}_{N+2\alpha,n}. \tag{1}$$

Dalla precedente relazione si ricava:

$$X^q_{N,n} = \left\{ \begin{array}{ll} X_{3,n}^{q-\frac{N-3}{2}} & \textit{per } N \textit{ dispari} \\ X_{4,n}^{q-\frac{N-4}{2}} & \textit{per } N \textit{ pari} \end{array} \right\} \tag{2}$$

e questa formola mostra che:

Per $q > \frac{N-3}{2}$ *se* N *è dispari e per* $q > \frac{N-4}{2}$ *se* N *è pari, lo studio dello* $X^q_{N,n}$ *di un campo ad* N *dimensioni, si riduce allo studio di analoghe funzioni rispettivamente dello spazio ordinario e di quello a quattro dimensioni dotate di un conveniente grado* q' *di armonicità, essendo* $q' = q - \frac{N-3}{2}$ *nel primo caso e* $q' = q - \frac{N-4}{2}$ *nel secondo.*

In particolare, poichè per $N = 2q + 1$ è $q' = 1$, possiamo enunciare il seguente interessante

Teorema. *Ogni funzione ipersferica poliarmonica d'ordine n in cui il numero delle dimensioni del campo è uguale al doppio dell'indice d'armonicità più uno, è una funzione sferica ordinaria dello stesso ordine.*

Esso ha importanza notevole perchè mostra come si possa giungere in infiniti modi alla determinazione degli ordinari polinomi di Legendre.

Imponendo dunque a q le limitazioni per la validità delle (2), lo studio delle $X^q_{N,n}$ con N dispari si riconduce a quello di funzioni da noi già studiate in una precedente Memoria (*) e lo studio delle $X^q_{N,n}$ con N pari a quello di analoghe funzioni del campo quattro volte esteso.

Assumendo, come faremo in generale nel seguito, q ad arbitrio, la (1) potrebbe servire anche a dare il significato e a definire analiticamente le funzioni di Legendre di armonicità negativa.

(*) Giulotto, *Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di Legendre* (Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, tom. XVII).

Essa giustifica le seguenti definizioni:

Per funzione di Legendre *del campo ad N dimensioni e di armonicità negativa* $-q$ *s'intende la funzione di* Legendre *semplicemente armonica del campo ad $N+2(q+1)$ dimensioni.*

In particolare:

Per funzione di Legendre *del campo ordinario e di armonicità negativa* $-q$ *s'intende la funzione di* Legendre *semplicemente armonica del campo a $3+2(q+1)$ dimensioni.*

2. Per il primo teorema del precedente paragrafo ogni funzione ipersferica poliarmonica è individuata dalla differenza $N-2q$.

Noi porremo quindi talvolta $N-2q=(\nu)$, diremo (ν) l'indice della funzione che rappresenteremo allora col simbolo $X_n^{(\nu)}$. — È ovvio che $X_n^{(1)}$ rappresenterà l'ordinario polinomio di Legendre.

Supposto $\mathrm{mod}\,\alpha<1$, derivando i due membri dell'uguaglianza

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{\nu}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(\nu)}\alpha^n$$

rispetto ad x, applicando al secondo la derivazione per serie, si ottiene:

$$\nu\alpha\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(\nu+2)}\alpha^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d X_n^{(\nu)}}{d x}\alpha^n.$$

Sicchè, uguagliando fra loro i coefficienti di α^{n+1}, si avrà:

$$X_n^{(\nu+2)}=\frac{1}{\nu}\,\frac{d X_{n+1}^{(\nu)}}{d x}$$

o anche, cambiando ν in $\nu-2$:

$$X_n^{\nu}=\frac{1}{\nu-2}\,\frac{d X_{n+1}^{(\nu-2)}}{d x}. \tag{1}$$

Da quest'ultima disuguaglianza, derivandone i due membri successivamente $p-1$ volte rispetto ad x e cambiando poi n in $n+p-1$ e ν in $\nu-2p+2$, si deduce in generale:

$$X_n^{(\nu)}=\frac{1}{(\nu-2p)(\nu-2p+2)\dots(\nu-2)}\,\frac{d^p X_{n+p}^{(\nu-2p)}}{d x^p}. \tag{2}$$

Nel caso particolare delle funzioni semplicemente armoniche dell'ipersfera usando i primitivi simboli si ha:

$$X^{1}_{N,n} = \frac{1}{(N-2p-2)(N-2p)\dots(N-4)} \frac{d^p X^{1}_{N-2p,n+p}}{d x^p}$$

e per le funzioni di Legendre poliarmoniche dello spazio ordinario:

$$X^{q}_{3,n} = \frac{1}{(3-2q-2p)(3-2q-2p+2)\dots(3-2q-2)} \frac{d^p X^{(p+q)}_{3,n+p}}{d x^p}$$

ed è evidente che quest'ultima formula ha il suo maggior interesse per $q < 0$ e $p < |q|$.

La formula (2) ha importanza notevole e mostra come *ripartite le nostre funzioni in due classi assegnando alla prima tutte quelle d'indice pari ed alla seconda tutte quelle d'indice dispari, una funzione qualunque di determinato indice appartenente ad una classe possa dedursi con semplice derivazione, a meno di un fattore numerico, da un'altra d'indice inferiore* (*benchè d'ordine superiore*) *appartenente alla classe stessa.*

In particolare ponendo $\nu = 2p + 1$ e $\nu = 1$ si deducono rispettivamente le formule seguenti:

$$X^{(2p+1)}_{n} = \frac{1}{1.3.5\dots(2p-1)} \frac{d^p X^{(1)}_{n+p}}{d x^p}$$

$$X^{(1)}_{n} = \frac{1}{(1-2p)(3-2p)\dots(-1)} \frac{d^p X^{(1-2p)}_{n+p}}{d x^p}$$

le quali mostrano che:

Una qualunque funzione ipersferica poliarmonica d'ordine n e d'indice $2p+1$ è uguale alla derivata p^{ma}, moltiplicata per un conveniente coefficiente numerico, della funzione sferica ordinaria d'ordine $n+p$.

Una qualunque funzione ordinaria di Legendre *d'ordine n è uguale alla derivata p^{ma}, moltiplicata per un conveniente coefficiente numerico, della funzione ipersferica poliarmonica d'ordine $n+p$ e d'indice $1-2p$.*

3. Partendo ora dalla nota relazione:

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{\nu}{2}} = \sum_{0}^{\infty} X^{(\nu)}_{n} \alpha^n$$

supposto al solito $\mathrm{mod}\, \alpha < 1$, derivando i due membri rispetto ad α applicando al secondo la derivazione per serie, si ottiene:

$$\nu (x - \alpha) (1 - 2 \alpha x + \alpha^2)^{-\frac{\nu+2}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n X_n^{(\nu)} \alpha^{n-1}$$

od anche, essendo

$$(1 - 2 \alpha x + \alpha^2)^{-\frac{\nu+2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(\nu+2)} \alpha^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\nu x X_n^{(\nu+2)} - \nu X_{n-1}^{(\nu+2)}] \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) X_{n+1}^{(\nu)} \alpha^n.$$

Mutando quindi n in $n-1$ ed uguagliando fra loro i coefficienti di α^n, si giunge alla formula:

$$X_n^{(\nu)} = \frac{\nu}{n} [x X_{n-1}^{(\nu+2)} - X_{n-2}^{(\nu+2)}]$$

la quale è particolarmente interessante nel caso di $(\nu) < 0$. — Abbiamo infatti per le $X_{N,n}^1$ $((\nu) > 0)$:

$$X_{N,n}^1 = \frac{N-2}{n} [x X_{N+2,n-1}^1 - X_{N+2,n-2}^1]$$

e per le $X_{3,n}^q$ $((\nu) < 0)$:

$$X_{3,n}^q = \frac{2q-3}{n} [X_{3,n-2}^{q-1} - x X_{3,n-1}^{q-1}].$$

4. Altra formula notevole si ricava col seguente procedimento: Dall'identità:

$$(1 - 2 \alpha x + \alpha^2)^{-\frac{\nu}{2}} = (1 - 2 \alpha x + \alpha^2)^{-\frac{\nu-\mu}{2}} (1 - 2 \alpha x + \alpha^2)^{-\frac{\mu}{2}}$$

sviluppando in serie di α si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(\nu)} \alpha^n = \sum_{r=0}^{\infty} X_r^{(\nu-\mu)} \alpha^r \cdot \sum_{s=0}^{\infty} X_s^{(\mu)} \alpha^s$$

od anche:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(\nu)} \alpha^n = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} X_r^{(\nu-\mu)} X_s^{(\mu)} \alpha^{r+s}$$

e posto $r + s = n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(\nu)} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{n} X_{n-s}^{(\nu-\mu)} X_s^{(\mu)} \right] \alpha^n$$

uguagliando quindi i coefficienti delle stesse potenze di α si ha infine:

$$X_n^{(\nu)} = \sum_{s=0}^{n} X_{n-s}^{(\nu-\mu)} X_s^{\mu}. \tag{1}$$

Da questa formula si deduce in generale:

$$X_n^{(\nu)} = \sum_{n_1+\dots n_s=n} X_{n_1}^{(\nu_1)} X_{n_2}^{(\nu_2)} \dots X_{n_s}^{(\nu_s)} \tag{2}$$

dove le $(\nu_1) \dots (\nu_s)$, in numero di $s \leqq (\nu)$, variano soddisfacendo alla condizione $(\nu_1) + (\nu_2) + \dots + (\nu_s) = (\nu)$.

Dovendo le $n_1 \dots n_s$ soddisfare alla $n_1 + \dots + n_s = n$, la sommatoria del secondo membro conterrà

$$\frac{(s+n-1)(s+n-2)\dots(s+1)s}{1 \cdot 2 \dots n}$$

termini, perchè tale è il numero delle combinazioni con ripetizione di s elementi ad n ad n.

Nel caso particolare delle funzioni semplicemente armoniche dell'ipersfera si ha:

$$X_{N,n}^1 = \sum_{n_1+\dots n_s=n} X_{N_1,n_1}^1 X_{N_2,n_2}^1 \dots X_{N_s,n_s}^1$$

colla condizione $N_1 + \dots N_s = N + 2(s-1)$ avendosi poi $s \leqq N - 2$.

Non scriviamo la formula analoga per le funzioni sferiche poliarmoniche perchè, essendo valida solo nel caso di $q < 0$ (dovendo essere $s > 0$) e per valori dispari di s, è priva di speciale interesse.

Osserviamo piuttosto che, ove si supponga $\nu = s\mu$, se si assume $\nu_1 = \dots = \nu_s = \mu$, la formola (2) si muta in quest'altra:

$$X_n^{(\nu)} = \sum_{n_1+\dots n_s=n} \frac{\pi(s)}{\pi(\alpha)\,\pi(\beta)\dots\pi(\lambda)} X_{n_1}^{(\mu)} X_{n_2}^{(\mu)} \dots X_{n_s}^{(\mu)}$$

che per $\mu = 1$ diventa:

$$X_n^{(\nu)} = \sum_{n_1+\dots n_s=n} \frac{\pi(\nu)}{\pi(\alpha)\,\pi(\beta)\dots\pi(\lambda)} X_{n_1}^{(1)} X_{n_2}^{(1)} X_{n_\nu}^{(1)} \tag{3}$$

purchè in queste due formule si eviti di attribuire alle n_r quei sistemi di valori che si deducono mediante permutazioni, ed $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ stieno a rappresentare che per ogni sistema di valori attribuiti alle n_r, α di esse sono uguali fra loro, β uguali fra loro e così via.

Dalla (3) si ricava per le funzioni semplicemente armoniche dell'ipersfera:

$$X^1_{N,n} = \sum_{n_1+\dots n_{N-2}=n} \frac{\pi(N-2)}{\pi(\alpha)\,\pi(\beta)\dots\pi(\lambda)} X^1_{3,n_1} X^1_{3,n_2} \dots X^1_{3,n_{N-2}} \tag{4}$$

mentre non sussiste per le funzioni poliarmoniche del campo ordinario la formula analoga altro che per q negativo.

In tal caso si ha:

$$X^{-q}_{3,n} = \sum_{n_1+\dots+n_{2q+3}=2q+3} \frac{\pi(2q+3)}{\pi(\alpha)\dots\pi(\lambda)} X^1_{3,n_1} X^1_{3,n_2} \dots X^1_{3,n_{2q+3}}\,. \tag{5}$$

Le (3), (4), (5) mostrano rispettivamente che:

Ogni funzione ipersferica poliarmonica è esprimibile mediante somma di prodotti di funzioni sferiche ordinarie.

Ogni funzione ipersferica semplicemente armonica è esprimibile mediante somma di prodotti di funzioni sferiche ordinarie.

Quando l'indice di armonicità sia un numero negativo, una funzione sferica poliarmonica è esprimibile mediante somma di prodotti di funzioni sferiche ordinarie.

5. Termineremo queste nostre ricerche con un breve studio sull'andamento delle nostre funzioni nell'intervallo $-1+1$.

Per $x = \pm 1$ l'espressione:

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2q-N}{2}} = \sum_{n=0} X_n(x)\,\alpha^n$$

diventando:

$$(1 \mp \alpha)^{2q-N} = \sum_{n=0} X_n(\pm 1)\,\alpha^n \tag{1}$$

ed avendosi per lo sviluppo binomiale:

$$(1 \mp \alpha)^{2q-N} = \sum_{n=0} \binom{2q-N}{n} (\mp 1)^n \alpha^n \tag{2}$$

si deduce:

$$X^q_{N,n}(\pm 1) = \binom{2q-N}{n} (\mp 1)^n$$

o più distesamente:

$$X^q_{N,n}(\pm 1) = \frac{(2q-N)(2q-N-1)\dots(2q-N-n+1)}{1\,.\,2\dots n} (\mp 1)^n. \tag{3}$$

Se γ è reale $X^q_{N,n}(\cos\gamma)$ almeno nell'ipotesi di $N-2q>0$ e nel caso di $N-2q<0$ per $2n<-(N-2q)+2$ (come risulta dalla (1) Cap. I, § 4) assume il suo massimo valore assoluto per i valori zero e π dell'angolo γ ossia per i valori $+1$ e -1 di $x=\cos\gamma$, perchè in tali ipotesi i coefficienti del coseno hanno certo lo stesso segno.

Nel caso di $N-2q<0$ la (2) ha $-(N-2q)+1$ termini mentre la (1), a meno che non sia N pari nel qual caso ha un egual numero di termini, ne dovrebbe avere infiniti.

Segue che nel caso di N dispari e minore di $2q$, sono nulle ai poli della sfera tutte le $X^q_{N,n}$ con $n>-(N-2q)+1$, ma per quanto precede non si può affermare che in tal caso la funzione assuma ai poli rispettivamente il valore massimo e minimo.

In ogni modo la (3), pur non rappresentando sempre i valori massimo e minimo della funzione, annullandosi quando sia $N-2q<0$ per $n>-(N-2q)+1$, rappresenta in ogni caso i valori della funzione ai poli.

E se si osserva che per $N-2q>0$ i fattori al numeratore della (3) vanno crescendo in valore assoluto e per $N-2q<0$ vanno decrescendo, si comprende come due funzioni dello stesso ordine n assumano ai poli valori rispettivamente uguali ma di segno contrario, se fra le rispettive differenze $\nu=N-2q$, $\nu'=N'-2q'$, per ipotesi di diverso segno, sussista la relazione

$$\nu'=-\nu-n+1.$$

Una semplice ispezione all'espressione analitica (1) (Cap. I, § 5) mostra poi che la $X^q_{N,n}$ acquista all'equatore (dove è $x=0$) il valore zero se n è impari ed il valore

$$\frac{(N-2q)(N-2q+2)\ldots(N-2q+n-2)}{2.4\ldots n}(-1)^{\frac{n}{2}}$$

se n è pari.

Onde è evidente che nel caso di $N-2q>0$ ed n pari, la funzione acquisterà all'equatore valore positivo o negativo a seconda che $\frac{n}{2}$ sarà pari o dispari e che nel caso di $N-2q<0$ (se fosse anche N pari si dovrebbe al solito respingere l'ipotesi $n>2q-N+1$) acquisterà valore sempre positivo.

Dalla stessa espressione analitica si deduce facilmente la formula:

$$X^q_{N,n}(-x)=(-1)^n X^q_{N,n}(x)$$

la quale mostra che la $X^q_{N,n}$ assume valori simmetrici rispetto all'origine o valori uguali e di segno contrario a seconda che l'ordine n è pari o dispari.

6. Per veder meglio l'andamento della funzione nell'intervallo $-1+1$ converrà studiare, almeno limitatamente alle restrizioni richieste per la validità della (1), Cap. I, § 5, la distribuzione delle radici dell'equazione $X^q_{N,n} = 0$ nell'intervallo stesso.

Ricordiamo che nel caso degli ordinari polinomi di LEGENDRE, tali radici furono calcolate da $n = 1$ fino ad $n = 7$ con sedici decimali del GAUSS (*) il quale se ne servì per la sua nota formula di quadratura e che il MARKOFF (**) ha su quest'argomento un lavoro importante nel quale determina intervalli in cui le radici sono comprese ad una ad una.

Noi ci limiteremo ad osservare che, almeno sotto le limitazioni per cui è valida l'espressione di IVORY e JACOBI, l'equazione $(x^2-1)^{\frac{N-2q+2n-1}{2}} = 0$ avendo nei punti $+1$ e -1 $\frac{N-2q+2n-1}{2}$ radici reali, ed ogni equazione che si ottiene con successive derivazioni avendo sempre una radice doppia di meno ed una nuova nell'intervallo $-1+1$, la $X^q_{N,n}(x) = 0$, almeno nel caso di N impari, $N-2q<0$ e quindi $n \geqq -(N-2q)+1$, ha nello stesso intervallo (gli estremi esclusi) $N-2q+n-1$ radici reali (un numero pari se n è pari, dispari se n è dispari e simmetriche rispetto all'origine) e nel caso di $N-2q>0$ ne ha sempre n.

Mantova, Dicembre 1911.

(*) GAUSS, *Opere*, III, pag. 193.

(**) MARKOFF, *Sur les racines de certaines équations* (Mathematische Annales, XXVII, pag. 143, pag. 177).

Sopra un teorema di esistenza per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

(*Di* Eugenio Elia Levi, *a Genova.*)

Continuazione e fine, vedi Tomo XVIII, Serie III (pag. 287 e segg.)

PARTE SECONDA

§ IV.

1. *Richiamo della classificazione delle equazioni paraboliche.* In quest'ultimo paragrafo mi propongo di trattare brevemente il caso delle equazioni

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0 \tag{1}$$

le quali hanno le caratteristiche coincidenti, o come si dice, il caso delle equazioni paraboliche.

È noto (*) che le caratteristiche doppie di un'equazione di ordine n, si distinguono in due (**) grandi classi: le caratteristiche della prima classe sono curve di elementi tali che non esiste più alcuna arbitrarietà per i valori delle derivate dei varii ordini di una soluzione z nei punti della caratteristica medesima; le caratteristiche della seconda classe invece sono di na-

(*) Vedi la mia Memoria già citata: *Caratteristiche multiple e problema di Cauchy.* Annali di Matematica, Tomo XVI, Serie 3.ª, pag. 161-202.

(**) Almeno quando non si consideri il caso, che può dar luogo a nuovi tipi di caratteristiche doppie, che l'equazione delle caratteristiche abbia radici generalmente semplici, le quali per sistemi particolari di valori delle coordinate dell'elemento vengono a coincidere. Cfr. la Memoria sopra citata.

tura assai più simile a quella delle caratteristiche semplici, poichè, fissata una caratteristica arbitraria, le funzioni che danno i valori delle derivate di ordine superiore di una soluzione che la contenga nei punti della caratteristica dipendono ancora da parametri arbitrarii il cui numero cresce di due unità ogni volta che cresce di un'unità l'ordine delle derivate che si considera (*).

Nel caso delle equazioni di secondo ordine paraboliche si hanno corrispondentemente due classi di equazioni: le equazioni generali le quali posseggono caratteristiche della prima classe: tipica fra queste è l'equazione della propagazione del calore

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

e le equazioni che posseggono invece caratteristiche della seconda classe, le quali diremo equazioni di GOURSAT - VON WEBER perchè la loro speciale natura fu appunto scoperta e studiata da questi autori nelle Memorie già citate nell'introduzione.

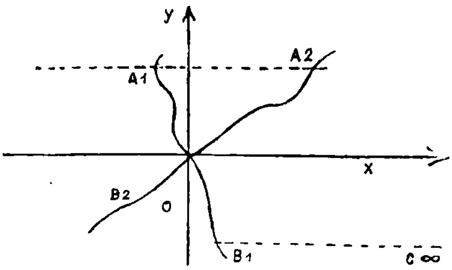
2. *Le equazioni paraboliche generali.* Riguardo alle equazioni della prima classe non posso dare che assai scarsi risultati, ed essenzialmente negativi. Riferiamoci senz'altro all'equazione (2). È noto che una soluzione di (2) se ammette in un certo campo le derivate di primo ordine finite e continue, ammette le derivate di ordine quanto si vuole elevato, ed è funzione analitica regolare di x in ogni punto appartenente al campo medesimo. E che su queste proprietà si fonda la dimostrazione che il problema di CAUCHY non ammette in generale soluzione dal punto di vista delle funzioni di variabili reali (**).

Affatto analogamente questa proprietà delle soluzioni di (2) permette di dimostrare che il problema di trovare una funzione avente le derivate prime finite e continue che soddisfaccia a (2) e che prenda assegnati valori su due curve γ_1 e γ_2 che si tagliano in un punto O *in generale non ammette soluzione dal punto di vista delle funzioni di variabili reali.* Supponiamo invero per maggior comodo che O sia l'origine e che i tratti $A_1 O$, $A_2 O$ di γ_1 e γ_2 giacciano nel semipiano delle y positive, i tratti $O B_1$ ed $O B_2$ nel semipiano

(*) Altre analogie tra le caratteristiche della seconda classe e le caratteristiche semplici ho rilevate nella Memoria citata e altre compariranno da quanto segue.

(**) Vedi HOLMGREN, *Om Cauchy's problem vid de lineära, etc.* (Archiv för Matematik, Astronomy och Physik, Stockholm, Vol. II) e la mia Nota: *Sul problema di Cauchy* (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1909, Vol. XVI, pag. 105-112).

delle y negative. Siano A_1 ed A_2 su una stessa parallela all'asse delle x; nel triangolo curvilineo limitato dalle curve $O A_1$, $O A_2$ e dalla caratteristica $A_1 A_2$ esiste (*) una ed una sola soluzione z_1 di (2) la quale su $O A_1$ ed $O A_2$ prende assegnati valori. Per vedere quindi se il problema proposto è risolubile basterà vedere se la detta soluzione z_1 si può prolungare al di là delle curve $O A_1$ ed $O A_2$ continuando ad avere le derivate prime finite e continue. Per la proprietà generale rammentata sopra delle soluzioni di (2), ciò non potrà certo accadere se i valori assegnati su $O A_1$ ed $O A_2$ non ammettono tutte le derivate; onde segue l'asserto (**).



Ma se ci mettiamo dal punto di vista delle funzioni analitiche, se cioè supponiamo γ_1 e γ_2 analitiche e che si cerchi una soluzione di (2) regolare analitica in O la quale su γ_1 e γ_2 si riduca ad assegnate funzioni analitiche, il ragionamento precedente non serve più nè ad escludere nè ad affermare

---

(*) Vedi la mia Memoria: *Sull'equazione dèl calore* (Annali di Matematica, Vol. XIV della serie 3.ª, pag. 187 e ss.).

(**) Così resta escluso che il problema possa avere senso in quanto immediata generalizzazione di quello trattato nella Parte Prima per le equazioni iperboliche. Potrebbero tuttavia essere poste domande analoghe. Ad es.: cosa avverrebbe se si chiedesse che la soluzione esista in tutto un intorno di O, ma non si chiedesse che le derivate prime di essa siano continue anche nei punti di γ_1 e γ_2? Tuttavia è facile vedere che, anche posto così, il problema perde ogni interesse. Invero se anche esso fosse risolubile e z fosse una sua soluzione, certo la soluzione non sarebbe più unica. Infatti si conduca per B_1 la caratteristica $B_1 C_\infty$ e si costruisca la funzione ζ nulla ovunque in un intorno di O tranne che nel campo limitato da $A_2 O$, $O B_1$ e $B_1 C_\infty$, e che in questo campo è definita dalle condizioni di essere soluzione di (2), di annullarsi su $A_2 O$ ed $O B_1$, e di prendere valori arbitrariamente assegnati su $B_1 C_\infty$: tale funzione esiste per i risultati della Memoria citata nella nota precedente: $z + \zeta$ è allora un'altra soluzione del problema propostoci sopra.

Similmente si potrebbe pensare di porre il problema nel modo accennato al n. 2 del § III per le equazioni iperboliche: e cioè nel cercare una soluzione di (2) che prende valori assegnati su γ_1 e γ_2 ed esista in uno solo degli angoli $A_1 O A_2$, $A_2 O B_1$, $B_1 O B_2$, $B_2 O A_1$. Sempre in virtù della Memoria citata risulta che il problema ammette una ed una sola soluzione per il caso dell'angolo $A_1 O A_2$; ne ammette infinite per gli angoli $A_2 O B_1$, $B_2 O A_1$. Non so invece se è risolubile o no per l'angolo $B_2 O A_1$; ma ritengo che in generale la soluzione non esiste se si chiede che la soluzione sia ancora continua e derivabile in O, o in altri termini che in generale una tale soluzione abbia in O qualche singolarità.

la risolubilità del problema. Esso tuttavia non è certo risolubile in generale se γ_1 e γ_2 sono tangenti tra loro in O oppure se una almeno di esse tocca in O l'asse delle x (*); ma, esclusi questi casi banali di impossibilità, non mi è riuscito di decidere se è ancora vero oppure no il teorema di esistenza: se è lecito esprimere una presunzione dirò che io credo che il problema sia da questo punto di vista sempre risolubile fuori che nei due casi accennati (**).

3. *Le equazioni della classe di* Goursat - von Weber. *Loro proprietà.* Per un'equazione della classe di Goursat - von Weber daremo risultati assai più precisi: in quanto che noi dimostreremo che, *assegnate due curve nello spazio le quali si incontrino in un punto O, esiste una ed una sola superficie soluzione di essa la quale passi per dette due curve, purchè non avvenga che una delle curve sia tangente alla direzione della caratteristica cui appartiene l'elemento di secondo ordine della superficie da costruirsi nel punto O* (e che per quanto si notò già al n. 1 del § II è da queste condizioni iniziali pienamente determinato).

Ci occorrerà anzitutto specificare quali sono le equazioni della classe di Goursat - von Weber; ma non ci conviene ricorrere alla forma esplicita speciale che detti autori hanno loro assegnata perchè troppo complessa: più opportuno ci pare descriverne le proprietà caratteristiche. Però per non tornare più tardi su alcuni cambiamenti di variabili, e sulle conseguenti variazioni nelle notazioni, diremo subito che in modo analogo a quanto si fece al n. 1 del § II supporremo che si voglia senz'altro trovare la soluzione che passa per gli assi x ed y; e che questa condizione porti che nel punto O debbono annullarsi tutte le derivate dei primi tre ordini della funzione incognita z. In particolare l'elemento di secondo ordine iniziale sarà quindi l'elemento $x=y=z=p=q=r=s=t=0$; e l'ipotesi che nè l'uno nè l'altro asse abbia la direzione della caratteristica in esso porterà che l'equazione assegnata si può pensare risoluta in s: infine nell'elemento iniziale le derivate rapporto ad x ed y del primo membro dell'equazione saranno nulle. Introducendo al solito per maggiore simmetria le notazioni $p_{00}=z$,

(*) Tali casi di impossibilità si riconoscono subito ove appena si tenti di calcolare i valori che debbono avere in O le derivate dei varii ordini di z.

(**) Se tale presunzione è vera, risulterebbe provata una piena analogia tra questo problema ed il problema di Cauchy, che appunto nel caso analitico è risolubile anche per le equazioni paraboliche del tipo della (2) purchè la curva su cui sono assegnati i dati iniziali non tocchi una caratteristica.

$p_{ik} = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$ scriveremo l'equazione nella forma

$$F(x\, y\, p_{00}\, p_{10} \ldots p_{02}) \equiv p_{11} - f(x\, y\, p_{00}\, p_{10}\, p_{01}\, p_{20}\, p_{02}) = 0 \tag{3}$$

e supporremo F ed f finite e continue insieme alle loro derivate dei primi tre ordini rapporto alle variabili da cui dipendono.

Sono queste in sostanza le stesse ipotesi già fatte nel § II per le equazioni là studiate.

La condizione che (3) sia parabolica porta che si abbia

$$4 \frac{\partial f}{\partial p_{20}} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_{02}} - 1 = 0 ; \tag{4}$$

chiameremo λ la radice (doppia) di $\dfrac{\partial F}{\partial p_{20}} \lambda^2 - \dfrac{\partial F}{\partial p_{11}} \lambda + \dfrac{\partial F}{\partial p_{02}} = 0$, che per (4) sarà

$$\lambda = - \frac{1}{2 \dfrac{\partial f}{\partial p_{20}}} = - 2 \frac{\partial f}{\partial p_{02}} . \tag{5}$$

Equazioni delle caratteristiche sono allora come al solito le

$$d\, y = \lambda\, d\, x \tag*{(6)$_a$}$$

$$d\, p_{ik} = (p_{i+1k} + \lambda\, p_{ik+1})\, d\, x \qquad (i + k = 0,\ 1) \tag*{(6)$_b$}$$

$$F(x\, y\, p_{00}\, p_{10}\, p_{01}\, p_{20}\, p_{11}\, p_{02}) \equiv p_{11} - f(x\, y\, p_{00}\, p_{10}\, p_{01}\, p_{20}\, p_{02}) = 0 \tag*{(6)$_c$}$$

cui si aggiunge l'equazione

$$M \equiv \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p_{00}} p_{01}' + \frac{\partial F}{\partial p_{10}} p_{11} + \frac{\partial F}{\partial p_{01}} p_{02} + \frac{\partial F}{\partial p_{20}} \frac{d\, p_{11}}{d\, x} + \frac{1}{2} \frac{d\, p_{02}}{d\, x} = 0 \tag*{(6)$_d$}$$

che si ottiene dalla

$$\frac{\delta F}{\delta y} \equiv \frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{0 \leq i+k \leq 2} \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} p_{ik+1} = 0 \tag{7}$$

mediante le sostituzioni

$$p_{i,3-i} = \sum_{j=1}^{j=i} (-1)^{j-1} \lambda^{j-1} \frac{d\, p_{i-j,2-i+j}}{d\, x} + (-1)^i \lambda^i A_1 , \tag{8}$$

dove A_1 è una quantità arbitraria: essa scompare nell'equazione (6)$_d$ grazie al valore (5) di λ ed all'identità (4).

Caratteristico della classe di equazioni di Goursat - von Weber *è ora il fatto che, come conseguenza delle* $(6)_a$, $(6)_b$, $(6)_c$, $(6)_d$ *fin qui scritte, si ha l'uguaglianza*

$$-\frac{\partial F}{\partial p_{10}}\lambda+\frac{\partial F}{\partial p_{01}}-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_{20}}\frac{d\lambda}{dx}=0, \tag{9}$$

per modo che, affinchè una curva di elementi di secondo ordine soddisfacente alle $(6)_a,\ldots,(6)_d$ *appartenga ad una soluzione di* (3) *e cioè sia una caratteristica per* (3), *è necessario che sia ancora soddisfatta un'equazione del tipo*

$$N\equiv\frac{d^2p_{02}}{dx^2}+H\left(x\,y\,p_{00},\,p_{10},\,p_{01},\,p_{20},\,p_{02},\,p_{11},\,\frac{dp_{20}}{dx},\,\frac{dp_{11}}{dx},\,\frac{dp_{02}}{dx}\right)=0. \qquad (6)_e$$

Tale equazione $(6)_e$ si deduce dalla

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta^2F}{\delta y^2}\equiv\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+2\sum_{0\leq i+k\leq 2}\frac{\partial F}{\partial y\,\partial p_{ik}}p_{ik+1}+\sum_{\substack{0\leq i+k\leq 2\\0\leq j+h\leq 2}}\frac{\partial^2F}{\partial p_{ik}\,\partial p_{jh}}p_{ik+1}\,p_{jh+1}+\\+\sum_{0\leq i+k\leq 2}\frac{\partial F}{\partial p_{ik}}p_{ik+2}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

mediante le sostituzioni (8) e

$$\left.\begin{aligned}p_{i\,4-i}=\sum_{j=2}^{j=i}(-1)^{j-1}(j-1)\lambda^{j-2}\frac{d^2p_{i-j\,2-i+j}}{dx^2}+\sum_{j=1}^{j=i}(-1)^{j-1}\frac{j\,(j-1)}{2}\frac{dp_{i-j\,2-i+j}}{dx}+\\+\frac{1}{2}\,i\,(i-1)\,\lambda^{i-2}\frac{d\lambda}{dx}A_1+(-1)^i\,i\,\lambda^{i-1}A_2+(-1)^i\lambda^iA_3\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

A_2, A_3 essendo nuove quantità arbitrarie, le quali scompaiono dal risultato $(6)_e$ della sostituzione di (11) in (10) in virtù dell'uguaglianza (9), delle (4) (5), e dell'uguaglianze che si deducono da (4) derivandola rapporto ad una qualunque ω delle variabili x, y, p_{ik}:

$$2\frac{\partial^2F}{\partial p_{20}\,\partial\omega}\lambda-\frac{\partial^2F}{\partial p_{02}\,\partial\omega}=0. \tag{12}$$

La funzione H che compare in $(6)_e$ dipende dunque dalle derivate seconde di F.

4. *Le loro caratteristiche.* Le equazioni (6) costituiscono un sistema di 7 equazioni nelle 7 funzioni incognite y, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02} di x che determinano le caratteristiche di (3), e poichè di tali equazioni, una, la $(6)_c$,

è un'equazione in termini finiti, un'altra, la $(6)_e$, è di secondo ordine, ed infine le altre sono tutte del primo ordine, possiamo conchiudere che le soluzioni delle (6) dipendono da 7 costanti arbitrarie, e che come tali si possono assumere i valori iniziali $y^{(0)}$, $p_{00}^{(0)}$, $p_{10}^{(0)}$, $p_{01}^{(0)}$, $p_{20}^{(0)}$, $p_{02}^{(0)}$, $p'^{(0)}_{02}$ che le funzioni y, p_{00}, $p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{02}, \dfrac{d\,p_{02}}{d\,x}$ assumono per $x = 0$. Avremo dunque che le caratteristiche si potranno rappresentare colle equazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} y = y\,(x,\ y^{(0)},\ p_{00}^{(0)},\ p_{10}^{(0)},\ p_{01}^{(0)},\ p_{20}^{(0)},\ p_{02}^{(0)},\ p'^{(0)}_{02}) \\ p_{ik} = p_{ik}\,(x,\ y^{(0)},\ p_{00}^{(0)},\ p_{10}^{(0)},\ p_{01}^{(0)},\ p_{20}^{(0)},\ p_{02}^{(0)},\ p'^{(0)}_{02}). \end{array} \quad (0 \leq i + k \leq 2) \right\} \quad (13)$$

Importa per il seguito fare alcune osservazioni su tali funzioni. Intanto, poichè i secondi membri delle (6) ammettono tutti le derivate del primo ordine rispetto alle variabili da cui dipendono, è chiaro per i teoremi generali della teoria delle equazioni alle derivate ordinarie che tutte le funzioni y, $p_{00}, \ldots, p_{02}, \dfrac{d\,p_{02}}{d\,x}$ ammettono le derivate prime e seconde che non contengono più di una derivazione rapporto ad x nè più di una rapporto alle costanti arbitrarie. Segue quindi in particolare che sarà:

$$\frac{d\,p_{02}}{d\,x} = p'^{(0)}_{02} + \mu_1\,x$$

μ_1 essendo una funzione finita e continua di x, e delle costanti iniziali.

E di qui seguirà che p_{02} avrà tutte le derivate che non contengono più di una derivazione rapporto ai valori iniziali nè più di 2 rapporto ad x

$$p_{02} = p_{02}^{(0)} + p'^{(0)}_{02}\,x + \mu_2\,x^2. \qquad (14)_1$$

Dalla $(6)_d$, e dalla equazione che si ottiene derivando rapporto a x la $(6)_c$ si deduce allora che i valori iniziali delle $\dfrac{d\,p_{20}}{d\,x}, \dfrac{d\,p_{11}}{d\,x}$ — rammentando che per $x = y = p_{ih} = 0$ è $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ — sono dati da

$$\left.\begin{array}{l} p'^{(0)}_{11} = -\,\lambda_0\,p'^{(0)}_{02} + \delta_1\,(y^{(0)} \ldots p_{02}^{(0)}) \\ p'^{(0)}_{20} = 2\,\lambda_0^2\,p'^{(0)}_{02} + \delta_2\,(y^{(0)} \ldots p_{01}^{(0)}) \end{array}\right\} \qquad (15)$$

δ_1 e δ_2 essendo funzioni che si annullano per valori tutti nulli dei loro argomenti, e $\lambda_0 = \lambda\,(0\,y^{(0)}\,p_{00}^{(0)}, \ldots, p_{02}^{(0)})$.

Ciò posto, si osservi che i coefficienti delle $(6)_a \dots (6)_d$ sono formati colle derivate prime di F; ne seguirà subito che le $y, p_{00}, \dots, p_{11}$ hanno tutte le stesse derivate che ora si vide possedere p_{02}; e precisamente si avrà

$$\left.\begin{aligned}
p_{11} &= p_{11}^{(0)} + p'^{(0)}_{11} x + \mu_3 x^2 \qquad\qquad p_{11}^{(0)} = f(0\, y^{(0)} \dots p_{02}^{(0)}) \\
p_{20} &= p_{20}^{(0)} + p'^{(0)}_{20} x + \mu_4 x^2 \\
p_{10} &= p_{10}^{(0)} + p_{20}^{(0)} x + p_{11}^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} p'^{(0)}_{20} x^2 + p'^{(0)}_{11} \int_0^x \xi \lambda(\xi)\, d\xi + \mu_5 x^3 \\
p_{01} &= p_{01}^{(0)} + p_{11}^{(0)} x + p_{02}^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} p'^{(0)}_{11} x^2 + p'^{(0)}_{02} \int_0^x \xi \lambda(\xi)\, d\xi + \mu_6 x^3 \\
p_{00} &= p_{00}^{(0)} + p_{10}^{(0)} x + p_{01}^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} p_{20}^{(0)} x^2 + p_{11}^{(0)} x \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi + \\
&\quad + p_{02}^{(0)} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi \int_0^\xi \lambda(\eta)\, d\eta + \frac{1}{3!} p'^{(0)}_{20} x^3 + p'^{(0)}_{11} \int_0^x \lambda(\xi)\, \xi \left(x - \frac{1}{2}\xi\right) d\xi + \\
&\quad + p'^{(0)}_{02} \int_0^x \lambda(\xi)\, d\xi \int_0^\xi \lambda(\eta)\, \eta\, d\eta + \mu_7 x^4 \\
y &= y^{(0)} + \lambda_0 x + \mu_8 x^2
\end{aligned}\right\} \qquad (14)_2$$

dove

$$\lambda(x) = \lambda(x\, y(x) \dots p_{02}(x)) = \lambda_0 + \mu_9 x \qquad (14)_3$$

e le $\mu_3, \mu_4, \dots, \mu_9$ sono come μ_1 e μ_2 funzioni finite e continue delle variabili $x, y^{(0)}, \dots, p_{02}^{(0)}$.

5. *Costruzione della soluzione cercata.* Il problema proposto si riduce quindi ora al problema di determinare in (13) le costanti arbitrarie $y^{(0)}$, $p_{00}^{(0)}, \dots, p'^{(0)}_{02}$ in funzione di una di esse, ad es.: di $y^{(0)}$ per modo che la semplice infinità di caratteristiche così ottenuta ricopra una superficie soluzione di (3) soddisfacente ai dati iniziali.

La caratteristica della superficie da costruirsi cui appartiene l'elemento in O è subito determinata: per ottenerla basterà porre

$$y^{(0)} = p_{00}^{(0)} = p_{10}^{(0)} = p_{01}^{(0)} = p_{20}^{(0)} = p_{02}^{(0)} = p'^{(0)}_{02} = 0 \qquad (16)$$

come immediatamente risulta dall'ipotesi, fatta al n. 3, che le condizioni ini ziali imposte alla superficie di annullarsi sugli assi portino che in O la z debba annullarsi colle sue derivate terze.

Le altre caratteristiche corrispondenti a valori di $y^{(0)} \neq 0$ dovranno evidentemente determinarsi per modo che per $x = 0$ sia $p_{00} = p_{01} = p_{02} = 0$ e che inoltre nel punto di esse in cui $y = 0$ sia pure $p_{00} = p_{10} = p_{20} = 0$. Per soddisfare la prima condizione basta fare in (13) $p_{00}^{(0)} = p_{01}^{(0)} = p_{02}^{(0)} = 0$; cosicchè per ottenere le caratteristiche cercate basterà per ogni valore di $y^{(0)} \neq 0$ determinare x, $p_{10}^{(0)}$, $p_{20}^{(0)}$, $p'^{(0)}_{02}$ per modo che si abbia

$$\left.\begin{aligned} y\,(x,\, y^{(0)},\, 0,\, p_{10}^{(0)},\, 0,\, p_{20}^{(0)},\, 0,\, p'^{(0)}_{02}) &= 0 \\ p_{00}\,(x,\, y^{(0)},\, 0,\, p_{10}^{(0)},\, 0,\, p_{20}^{(0)},\, 0,\, p'^{(0)}_{02}) &= 0 \\ p_{10}\,(x,\, y^{(0)},\, 0,\, p_{10}^{(0)},\, 0,\, p_{20}^{(0)},\, 0,\, p'^{(0)}_{02}) &= 0 \\ p_{20}\,(x,\, y^{(0)},\, 0,\, p_{10}^{(0)},\, 0,\, p_{20}^{(0)},\, 0,\, p'^{(0)}_{02}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ora poichè un sistema di valori che soddisfanno alle (17) è

$$x = y^{(0)} = p_{10}^{(0)} = p_{20}^{(0)} = 0,$$

basterebbe che per tali valori fosse $\dfrac{\partial\,(y,\, p_{00},\, p_{10},\, p_{02})}{\partial\,(x,\, p_{10}^{(0)},\, p_{20}^{(0)},\, p'^{(0)}_{02})} \neq 0$ perchè le (17) risultassero risolubili rapporto a x, $p_{10}^{(0)}$, $p_{20}^{(0)}$, $p'^{(0)}_{02}$ almeno in un intorno di $y^{(0)}$ sufficientemente piccolo: ma evidentemente invece il precedente Jacobiano è nullo.

Per superare tale difficoltà introduciamo le funzioni ausiliarie

$$u\,(x,\, y^{(0)},\, p_{10}^{(0)},\, p_{20}^{(0)},\, p'^{(0)}_{02}),\;\; v\,(x,\, y^{(0)}, \ldots,\, p'^{(0)}_{02}),\;\; w\,(x,\, y^{(0)}, \ldots,\, p'^{(0)}_{02})$$

mediante le

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{3\,p_{00} - 2\,p_{10}\,x + \frac{1}{2}\,p_{20}\,x^2}{x} \\ v &= 2\,\frac{3\,p_{10}\,x - 3\,p_{00} - p_{20}\,x^2}{x^2} \\ w &= \frac{3}{2}\,\frac{p_{00} - p_{10}\,x + \frac{1}{2}\,p_{20}\,x^2}{x^3} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

dove nei secondi membri si immagina posto per le p_{ik} i valori (13) con $p_{00}^{(0)} = p_{01}^{(0)} = p_{02}^{(0)} = 0$. È chiaro che il sistema di equazioni

$$y = u = v = w = 0 \tag{19}$$

è equivalente al sistema (17) tutte le volte che $x \neq 0$. Quindi potremo sostituire (19) a (17): ben tenendo presente che un ulteriore esame richiederà solo la ricerca delle soluzioni di (17) le quali eventualmente annullassero x.

D'altro canto per le (14) si ha

$$\left.\begin{aligned} u(x, y^{(0)}, p_{10}^{(0)}, p_{20}^{(0)}, p'^{(0)}_{02}) &= p_{10}^{(0)} + \nu_1 x \\ v(x, y^{(0)}, p_{10}^{(0)}, p_{20}^{(0)}, p'^{(0)}_{02}) &= p_{20}^{(0)} + \nu_2 x \\ w(x, y^{(0)}, p_{10}^{(0)}, p_{20}^{(0)}, p'^{(0)}_{02}) &= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{6} p'^{(0)}_{20} - \frac{1}{6} p'^{(0)}_{11}\lambda_0 + \frac{1}{6} p'^{(0)}_{02}\lambda_0^2\right] + \nu_3 x = \\ &= p'^{(0)}_{02}\lambda_0^2 + \left(\frac{1}{4}\delta_2 - \frac{1}{4}\delta_1\right) + \nu_3 x \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

dove ν_1, ν_2, ν_3 sono come le μ funzioni finite e continue delle stesse variabili che u, v, w. Ma da queste e dall'ultima delle $(14)_2$ segue che il sistema di valori

$$x = y^{(0)} = p_{10}^{(0)} = p_{20}^{(0)} = p'^{(0)}_{02} = 0 \tag{21}$$

è una soluzione di (19); ed inoltre che per tali valori (21) si ha

$$\frac{\partial(y, u, v, w)}{\partial(x\, p_{10}^{(0)}, p_{20}^{(0)}, p'^{(0)}_{02})} = \lambda_0^3; \tag{22}$$

onde segue che le equazioni (19) ammetteranno sempre una ed una sola soluzione per valori sufficientemente piccoli di $y^{(0)}$; da esse le $p_{10}^{(0)}$, $p_{20}^{(0)}$, $p_{02}^{(0)}$ si otterranno quali funzioni di $y^{(0)}$ finite e continue, che si riducono a 0 per $y^{(0)} = 0$. Chè, se si nota inoltre che dall'ultima delle $(14)_2$ segue che affinchè si abbia una soluzione di $y = 0$ per cui sia $x = 0$ occorre che $y^{(0)} = 0$, noi conchiuderemo che tale soluzione sarà anche la sola soluzione di (17) per $y^{(0)} \neq 0$, e si ridurrà quando $y^{(0)}$ tende a zero ai valori (16). Abbiamo costruito pertanto una successione semplicemente infinita e continua di caratteristiche, la quale contiene la caratteristica (16): e soddisfa alle condizioni iniziali enunciate in principio di questo numero; ed è questo anche l'unico modo di costruire tale successione di caratteristiche. Non ci rimarrà quindi da provare se non che dette caratteristiche formano una famiglia di curve di elementi realmente appartenenti ad una superficie.

6. *Verifiche.* Indichiamo con

$$y = Y(x\, y^{(0)}), \quad z = p_{00} = P_{00}(x\, y^{(0)}), \quad p_{ik} = P_{ik}(x\, y^{(0)}) \quad (i + k = 1,\ 2) \tag{23}$$

il sistema di caratteristiche da noi ottenuto nel numero precedente, le y, P saranno soluzioni del sistema (6). Grazie alle equazioni $(6)_b$ per dimostrare che queste sono curve di elementi di secondo ordine appartenenti ad una superficie basta provare che si ha

$$\frac{\partial P_{00}}{\partial y^{(0)}} = P_{01} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}, \qquad \frac{\partial P_{10}}{\partial y^{(0)}} = P_{11} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}, \qquad \frac{\partial P_{01}}{\partial y^{(0)}} = P_{02} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}. \tag{24}$$

A tale scopo poniamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P_{00}}{\partial y^{(0)}} &= P_{01} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \pi (x\, y^{(0)}) \\ \frac{\partial P_{10}}{\partial y^{(0)}} &= P_{11} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \rho (x\, y^{(0)}) \\ \frac{\partial P_{01}}{\partial y^{(0)}} &= P_{02} \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \sigma (x\, y^{(0)}). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Si tratterà di mostrare che π, ρ, σ sono nulle identicamente.

È facile trovare un sistema di equazioni lineari cui devono soddisfare le π, ρ, σ, cercando le condizioni di compatibilità di (6) e (25).

Infatti intanto dalla $(6)_a$ e dalla prima delle $(6)_b$ segue

$$\frac{\partial P_{00}}{\partial x} = P_{10} + P_{01} \lambda = P_{10} + P_{01} \frac{\partial Y}{\partial x};$$

derivandola rapporto ad $y^{(0)}$ e confrontandola con quella che si ottiene derivando la prima delle (25) rapporto ad x, si ottiene per le altre $(6)_b$ e (25)

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \rho + \lambda \sigma. \tag{26$_1$}$$

Analogamente derivando rapporto a $y^{(0)}$ le due ultime equazioni $(6)_b$, rapporto ad x le due ultime (25) e confrontando si ha

$$\frac{\partial P_{i,2-i}}{\partial y^{(0)}} = \frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} \left(\sum_1^i (-1)^{j-1} \lambda^{j-1} \frac{\partial P_{i-j\,2-i+j}}{\partial x} + (-1)^i \lambda^i B_1 \right) + l_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \tag{27}$$

dove

$$B_1 = \frac{\partial P_{02}}{\partial y^{(0)}}, \quad l_0 = 0, \quad l_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad l_2 = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Ma si ricordi che è

$$F(x\, Y,\ P_{00},\ P_{10},\ P_{01},\ P_{20},\ P_{11},\ P_{02}) = 0, \tag{28}$$

onde pure

$$\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}+\Sigma\frac{\partial F}{\partial P_{ik}}\frac{\partial P_{ik}}{\partial y^{(0)}}=0. \tag{29}$$

Osservando l'analogia tra le (29) e (7), le (27) e (8) si riconosce subito che il risultato della sostituzione di (25), (27) in (29) dà

$$M\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}+\frac{\partial F}{\partial P_{20}}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial P_{00}}\pi+\frac{\partial F}{\partial P_{10}}\rho+\frac{\partial F}{\partial P_{01}}\sigma=0.$$

Ma è $M=0$, quindi si avrà che le π, ρ, σ soddisfanno l'equazione

$$L_1\equiv\frac{\partial F}{\partial P_{20}}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial P_{00}}\pi+\frac{\partial F}{\partial P_{10}}\rho+\frac{\partial F}{\partial P_{01}}\sigma=0. \tag{26$_2$}$$

Infine si osservi che da (29) segue che si ha pure

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}\right)^2+2\sum_{0\leq i+k\leq 2}\frac{\partial^2 F}{\partial Y\,\partial P_{ik}}\frac{\partial P_{ik}}{\partial y^{(0)}}\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}+\\&\qquad+\sum_{0\leq {i+k \atop j+h}\leq 2}\frac{\partial^2 F}{\partial P_{ik}\,\partial P_{jk}}\frac{\partial P_{ik}}{\partial y^{(0)}}\frac{\partial P_{jh}}{\partial y^{(0)}}+\\&\qquad+\sum_{0\leq i+k\leq 2}\frac{\partial F}{\partial P_{ik}}\frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial y^{(0)2}}+\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^{(0)2}}=0;\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

D'altra parte dalle (25) (27) derivando rapporto ad x ed $y^{(0)}$ si ottengono facilmente le $\frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial y^{(0)2}}$ espresse mediante le $\frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial x^2}$ e le derivate di π, σ, ρ che non contengono più di una derivazione rapporto a $y^{(0)}$: eseguendo la sostituzione in (30) sempre ricordando le (4), (5), (9) si ottiene facilmente l'equazione

$$M\frac{\partial^2 Y}{\partial y^{(0)2}}+N\left(\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}\right)^2+\frac{\delta L_1}{\delta y^{(0)}}+L_2=0$$

dove il segno δ indica al solito la derivazione totale e si è posto

$$L_2\equiv\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+L'_2\left(\pi,\ \rho,\ \sigma,\ \frac{\partial\pi}{\partial x},\ \frac{\partial\rho}{\partial x},\ \frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)$$

L'_2 essendo una funzione lineare omogenea delle variabili da cui dipende.

Si conchiude dunque che si deve avere per $(6)_a$, $(6)_c$, $(26)_2$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + L'_2 \left(\pi, \rho, \sigma, \frac{\partial \pi}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) = 0. \tag{$(26)_3$}$$

Le funzioni π, ρ, σ soddisfanno dunque come funzioni di x al sistema delle 3 equazioni differenziali lineari omogenee (26): le quali sono evidentemente indipendenti. Come tali, esse saranno tutte della forma:

$$a\,(x\,y^{(0)})\,\pi^{(0)} + b\,(x\,y^{(0)})\,\rho^{(0)} + c\,(x\,y^{(0)})\,\sigma^{(0)} + d\,(x\,y^{(0)})\,\rho'^{(0)},$$

dove le a, b, c, d sono funzioni finite e continue delle variabili x ed $y^{(0)}$, e $\pi^{(0)}$, $\rho^{(0)}$, $\sigma^{(0)}$, $\rho'^{(0)}$ indicano i valori cui si riducono le π, ρ, σ, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ quando vi si ponga $x = 0$. Basterà quindi dimostrare che le π, ρ, σ soddisfanno a condizioni tali che necessariamente è $\pi^{(0)} = \rho^{(0)} = \sigma^{(0)} = \rho'^{(0)} = 0$.

Ora ricordiamo che per $x = 0$ è

$$P_{00}\,(0\,y^{(0)}) = P_{01}\,(0\,y^{(0)}) = P_{02}\,(0\,y^{(0)}) = 0$$

quindi le nostre funzioni π, ρ, σ dovranno soddisfare alle

$$\pi\,(0\,y^{(0)}) = \sigma\,(0\,y^{(0)}) = 0$$

e cioè dovrà essere intanto

$$\pi^{(0)} = \sigma^{(0)} = 0. \tag{31}$$

Inoltre se $x = x\,(y^{(0)})$ è la soluzione dell'equazione $Y\,(x\,y^{(0)}) = 0$ deve essere identicamente $P_{00}\,(x\,(y^{(0)}),\ y^{(0)}) = P_{10}\,(x\,(y^{(0)}),\ y^{(0)}) = P_{20}\,(x\,(y^{(0)}),\ y^{(0)}) = 0$; e quindi pure

$$-\frac{\partial P_{00}}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \frac{\partial P_{00}}{\partial y^{(0)}}\,\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial P_{10}}{\partial x}\,\frac{\partial Y}{\partial y^{(0)}} + \frac{\partial P_{10}}{\partial y^{(0)}}\,\frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

le quali per $(6)_a$ e $(6)_b$ e (25) ci dànno

$$\left.\begin{aligned} \pi\,(x\,(y^{(0)})\,y^{(0)}) &= 0 \\ \rho\,(x\,(y^{(0)})\,y^{(0)}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

O in altri termini le equazioni

$$y\,(x\,y^{(0)}) = \pi\,(x\,y^{(0)}) = \rho\,(x\,y^{(0)}) = 0 \tag{33}$$

sono simultanee.

A queste equazioni occorre infine aggiungere per $y^{(0)}=0$ la

$$\rho'^{(0)}=\sigma'^{(0)}=0. \tag{34}$$

Per ottenere quest'ultima si osservi che per $y^{(0)}=0$ la $x\,(y^{(0)})$ è nulla: ma d'altro canto per $P_{20}\,(x\,(y^{(0)}),\ y^{(0)})=0$ si ha $-\dfrac{\partial P_{20}}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial y^{(0)}}+\dfrac{\partial P_{20}}{\partial y^{(0)}}\dfrac{\partial Y}{\partial x}=0$ che ricordando che per $x=y^{(0)}=0$ tutte le $\dfrac{\partial P_{ik}}{\partial x}$ sono nulle dà $\dfrac{\partial P_{20}\,(0\,0)}{\partial y^{(0)}}$. Si confronti con (27) ricordando che $B_1\,(y^{(0)})=\dfrac{\partial P_{02}\,(0\,y^{(0)})}{\partial y^{(0)}}=0$, si avrà

$$\rho'^{(0)}-\lambda\,\sigma'^{(0)}=0,$$

che associata con $(26)_2$ dà appunto (34).

Ed ora siamo in grado di dimostrare che le π, ρ, σ sono identicamente nulle. Per $y^{(0)}=0$ ciò risulta subito dalle (31), (32), (34). Per $y^{(0)}\neq 0$ si osservi che da (31) e (26) segue che le π, ρ, σ hanno la forma seguente:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \left[\tau'_1\,\rho^{(0)}+\left(-\frac{1}{\lambda_0}+\tau''_1\,x\right)\rho'^{(0)}\right]x\\
\rho &= \rho^{(0)}+\rho'^{(0)}\,x+(\tau'_2\,\rho^{(0)}+\tau''_2\,\rho'^{(0)})\,x^2\\
\pi &= \rho^{(0)}\,x+(\tau'_3\,\rho^{(0)}+\tau''_3\,\rho'^{(0)}\,x)\,x^3
\end{aligned}$$

dove τ'_1, τ''_1, τ'_2, τ''_2, τ'_3, τ''_3 sono funzioni finite e continue di x, $y^{(0)}$.

Se quindi si pone

$$\varpi=\frac{\rho\,x-\pi}{x^2}$$

avremo

$$\varpi=\rho'^{(0)}+\tau'_4\,\rho^{(0)}+\tau''_4\,\rho'^{(0)}\,x,$$

e le equazioni $Y=\varpi=\rho=0$ sono equivalenti per $x\neq 0$ alle equazioni (33): $Y=\pi=\rho=0$. Ma, poichè si ha

$$\left[\frac{\partial\,(Y,\ \varpi,\ \rho)}{\partial\,(x\ \rho^{(0)}\ \rho'^{(0)})}\right]_{x=y^{(0)}=\rho^{(0)}=\rho'^{(0)}=0}=\lambda_0\neq 0\,,$$

le equazioni $Y=\varpi=\rho=0$ ammettono una sola soluzione rispetto a x, $\rho^{(0)}$, $\rho'^{(0)}$ tale che per $y^{(0)}=0$ queste quantità si annullino: ma evidentemente una soluzione di tali equazioni è

$$x=x\,(y^{(0)}),\quad \rho^{(0)}=\rho'^{(0)}=0\,;$$

quindi questa è l'unica soluzione di esse o delle equazioni (33) che sono loro equivalenti per $y^{(0)} \neq 0$.

Ne segue che è identicamente $\pi = \rho = \sigma = 0$. c. v. d.

È quindi completamente dimostrato il teorema enunciato nel n. 3.

7. A completare il risultato precedente non sarà forse inutile ricordare che l'ipotesi che le curve γ_1 e γ_2 non siano tangenti alla caratteristica è realmente essenziale. Basterà a tal fine esaminare un'equazione particolare della classe considerata: ad esempio l'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a$. La soluzione più generale di essa è $z = Y_1 + Y_2 x + \frac{1}{2} a x^2$ dove Y_1 ed Y_2 sono funzioni di y soltanto: le caratteristiche sono le parallele all'asse delle x. Ora se si richiede che per $x = 0$ e per $y = 0$ essa la z si annulli è chiaro che si cade in una impossibilità se $a \neq 0$; mentre se $a = 0$ il problema risulta indeterminato.

Sopra il cangiamento di variabili indipendenti nell'integrale triplo.

(*Di* Cesare Russyan, *a Kharkoff.*)

Nella Nota presente vien dimostrata la formola del cangiamento di variabili indipendenti nell'integrale triplo mediante la formola di Green nello spazio.

1. Anzitutto io dedurrò secondo E. Goursat (*), ma con alcune modificazioni, la dipendenza fra l'area A dell'insieme di valori di variabili x, y e quella A_1 dell'insieme di valori t, u, legate fra loro dalle formole

$$x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u), \ldots, \tag{1}$$

supponendo che x, y siano funzioni continue e ad un sol valore di t, u, e viceversa, che $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial u}$ siano anche esse continue nell'insieme A_1 e che per semplicità, i contorni dell'aree siano semplici.

In virtù della prima proprietà delle formole (1) corrisponde a ciascun contorno in A colla direzione determinata un contorno in A_1 anche colla direzione determinata.

Si ha che

$$A = \int_L y(x)\, d x$$

l'integrale essendo preso lungo il contorno L dell'area A nella direzione identica con quella della rotazione dall'asse $0y$ a quella $0x$. Se poniamo $x = f(t, u(t))$, $u = u(t)$ essendo l'equazione del contorno L_1 dell'area A_1,

(*) *Cours d'analyse*, 1910, p. 314.

avremo che

$$A = \int_{L_1} \varphi(t, u(t)) \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{d u}{d t} \right) d t$$

lungo il contorno L_1 nella direzione corrispondente.

Quindi

$$A = \int_{L_1} \varphi(t, u(t)) \frac{\partial f}{\partial t} d t + \int_{L_1} \varphi(t(u), u) \frac{\partial f}{\partial u} d u.$$

Di qui si ottiene mediante la formola di Green sul piano (*), che

$$A = \pm \iint_{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\varphi \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] d t\, d u = \pm \iint_{A_1} \frac{\partial (\varphi, f)}{\partial (t, u)} d t\, d u,$$

il segno essendo più, o meno secondo che la direzione del contorno L_1 è dall'asse $0t$ a quella $0u$, o vice-versa.

Dunque, si ha generalmente

$$A = \iint_{A_1} \frac{\partial (x, y)}{\partial (t u)} d t\, d u,$$

supponendo, che alla direzione del contorno L identica con quella della rotazione dell'asse $0x$ a quella $0y$ corrisponda la direzione del contorno L_1 dall'asse $0t$ a quella $0u$.

Ne segue che

$$A = \frac{\partial (x y)}{\partial (t_0 u_0)} A_1 \dots \tag{2}$$

$(t_0 u_0)$ essendo un punto determinato nel A_1 — cioè la formola cercata.

Siccome questa formola vale per ciascuna parte di A, A_1, in ciascuna parte di A_1 vi è almeno un punto, nel quale il Jacobiano $\frac{\partial (x, y)}{\partial (t, u)}$ è diverso

(*) Questa formola è: $\iint_{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} P(t u) - \frac{\partial}{\partial u} Q(t u) \right] d t\, d u = \int_{L_1} P(t u)\, d u + Q(t u)\, d t$, $P(t u)$, $Q(t u)$ essendo continue lungo L_1, e $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial u}$ — continue in A_1; l'integrale destro è preso lungo L_1 nella direzione identica con quella della rotazione intorno all'origine dall'asse $0t$ a quella $0u$.

dallo zero e positivo; essendo la funzione continua in A_1, questo non vi è mai negativo e non può annullarsi che in punti isolati, o lungo linee.

2. Ritorniamo al nostro problema. Cerchiamo dapprima la relazione fra i volumi V, V_1 degl'insiemi di valori di variabili indipendenti x, y, z e t, u, v, legate fra loro dalle formole

$$x = f(t, u, v), \quad y = \varphi(t, u, v), \quad z = \theta(t, u, v), \ldots, \tag{3}$$

sotto la supposizione che x, y, z siano funzioni continue e ad un sol valore di variabili t, u, v, e vice-versa; che le derivate del prim'ordine delle funzioni f, φ, θ, e le derivate seconde delle funzioni $f, \varphi : \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u}$ e ct. siano anche continue in V_1.

Supponiamo inoltre che si possa scomporre la superficie S del volume V in parte abbastanza piccole tali che essendo $z = z_i(xy)$ l'equazione di una tale parte, $z_i(xy)$ sia una funzione continua e ad un sol valore insieme alle sue derivate del prim'ordine.

Analogamente, per la superficie S_1 del V_1.

Consideriamo i contorni sulla faccia esteriore delle superficie S e S_1. Diamo a quelli della superficie S una direzione qualunque determinata. Si corrisponderanno ad essi in virtù della proprietà delle formole (3) i contorni sulla superficie S_1 in una direzione anche determinata. Le projezioni dei due contorni di S sul piano p. es. $0xy$ hanno le medesime, o contrarie direzioni, secondo che coseni $(n_e, 0z)$ hanno i medesimi, o contrarii segni.

Analogamente per S_1. Sia ora la direzione dei contorni della S scelta in modo che la direzione della projezione sul piano x o y del contorno sulla faccia superiore (cosen $(n_e, 0z) \geqq 0$) sia quella della rotazione dell'asse $0x$ a $0y$; sia allora la direzione corrispondente della projezione sul piano $t0u$ del contorno della faccia superiore di S_1 (cosen $(n_e, 0v) \geqq 0$) quella della rotazione dell'asse $0t$ a $0u$.

Scomponiamo ora le superficie S, S_1 in parti S_i, S_{1i} corrispondenti abbastanza piccoli e tali che le supposizioni suddette intorno a $z_i(xy)$, $v_i(tu)$ siano soddisfatte.

Le formole $x = f(t, u, v_i(tu))$, $y = \varphi(t, u, v_i(tu))$ definiscono x, y come funzioni continue e ad un sol valore delle variabili t, u, e vice-versa; queste formole sono le relazioni fra le coordinate x, y e t, u dei punti delle projezioni σ_i, σ_{1i} di S_i, S_{1i} sui piani $0xy$ e $0tu$ rispettivamente. Consideriamo l'aree σ_i, σ_{1i} positive, o negative secondo che $\cos(n_e, 0z)$, $\cos(n_{e_1}, 0v)$ sono rispettivamente positivi, o negativi.

Allora avremo che

$$\sigma_i = \frac{\partial\,[x\,y]}{\partial\,[t_0\,u_0]}\,\sigma_{1i}\ldots \tag{4}$$

in virtù della formola (2), $(t_0\,u_0)$ essendo un punto determinato di σ_{1i} e

$$\frac{\partial\,[x\,y]}{\partial\,[t\,u]} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_i}\,\frac{\partial v_i}{\partial t}, & \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v_i}\,\frac{\partial v_i}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_i}\,\frac{\partial v_i}{\partial t}, & \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_i}\,\frac{\partial v_i}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

Si può considerare questa formola, come la generalizzazione della formola (2).

3. È conosciuto che

$$V = \iint\limits_S z\,(x\,y)\,d\,x\,d\,y,$$

l'integrale è preso lungo la faccia esteriore di S tal che

$$V = \lim \sum z_i\,(x_i\,y_i)\,\sigma_i\,,$$

σ_i essendo positivo, o negativo secondo che $\cos\,(n_e,\ 0\,z)$ è positivo, o negativo. Trasformiamo questo integrale per le formole

$$x = f\,(t,\ u,\ v\,(t\,u)),\quad y = \varphi\,(t,\ u,\ v\,(t\,u)).$$

In virtù della formola (4) si avrà che

$$V = \lim \sum \theta\,(t_i,\ u_i,\ v_i\,(t_i\,u_i))\,\frac{\partial\,[f\,\varphi]}{\partial\,[t_i\,u_i]}\,\sigma_{1i} = \iint\limits_{S_1} \theta\,(t,\ u,\ v\,(t\,u))\,\frac{\partial\,[f\,\varphi]}{\partial\,[t\,u]}\,d\,t\,d\,u.$$

L'ultimo integrale si prende lungo la faccia esteriore di S_1, poichè σ_{1i} è positivo, o negativo secondo che $\cos\,(n_{e_1},\ 0\,v)$ è positivo, o negativo. Siccome

$$\frac{\partial\,[f,\ \varphi]}{\partial\,[t,\ u]} = \frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(t\,u)} + \frac{\partial\,v}{\partial\,t}\,\frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(v\,u)} + \frac{\partial\,v}{\partial\,u}\,\frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(t\,v)}\,,$$

noi otterremo che

$$V = \iint\limits_{S_1} \theta\,\frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(t\,u)}\,d\,t\,d\,u + \iint\limits_{S_1} \theta\,\frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(v\,u)}\,\frac{\partial\,v}{\partial\,t}\,d\,t\,d\,u + \iint\limits_{S_1} \theta\,\frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(t\,v)}\,\frac{\partial\,v}{\partial\,u}\,d\,t\,d\,u.$$

Trasformiamo i due ultimi integrali per introdurre la variabile v al luogo di t e di u rispettivamente. Basterà esaminare l'integrale

$$\iint_{S_1} \theta \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (v u)} \frac{\partial v}{\partial t} d t d u.$$

Siccome la direzione della projezione sul piano $0 t u$ del contorno sulla parte superiore di S_1 $(\cos (n_{e_1}, 0 v) \geqq 0)$ è quella della rotazione dall'asse $0 t$ a $0 u$, ne segue che la direzione della projezione sul piano $0 u v$ del contorno sulla parte destra di S_1 $(\cos (n_{e_1}, 0 t) \geqq 0)$ è quella della rotazione dall'asse $0 u$ a $0 v$.

Dunque si avrà, appunto come nel caso precedente, che

$$\iint_{S_1} \theta \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (v u)} \frac{\partial v}{\partial t} d t d u = \iint_{S_1} \theta (t (u v), u, v) \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (v u)} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial [t u]}{\partial [u v]} d u d v.$$

Ma siccome

$$\frac{\partial [t u]}{\partial [u v]} = - \frac{\partial t}{\partial v} = - \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}},$$

questo integrale è uguale a

$$\iint_{S_1} \theta (t (u v), u, v) \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (u v)} d u d v.$$

Analogamente,

$$\iint_{S_1} \theta (t, u, v (t u)) \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (t v)} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} d t d u = \iint_{S_1} \theta (t, u (t v), v) \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (v t)} d v d t.$$

Così

$$V = \iint_{S_1} \theta (t, u, v (t u)) \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (t u)} d t d u + \iint_{S_1} \theta (t, u (t v), v) \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (v t)} d v d t +$$

$$+ \iint_{S_1} \theta (t (u v), u, v) \frac{\partial (f \varphi)}{\partial (u_1 v)} d u d v,$$

tutti gl'integrali sono presi lungo la faccia esteriore di S_1.

Donde, per la formola di GREEN nello spazio (*), si ottiene che

$$V=\iiint\limits_{V_1}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\theta\,(t\,u\,v)\,\frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(t\,u)}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\theta\,\frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(v\,t)}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta\,\frac{\partial\,(f\,\varphi)}{\partial\,(u\,v)}\right)\right]d\,t\,d\,u\,d\,v,$$

ovvero differenziando

$$V=\iiint\limits_{V_1}\frac{\partial\,(f\,\varphi\,\theta)}{\partial\,(t\,u\,v)}\,d\,t\,d\,u\,d\,v.$$

Quindi, per la continuità dello Jacobiano,

$$V=\frac{\partial\,(f\,\varphi\,\theta)}{\partial\,(t_0\,u_0\,v_0)}\,V_1,$$

$(t_0\,u_0\,v_0)$ essendo un punto determinato nel V_1, è la formola cercata.

Questa formola vale per ciascuna parte di V, V_1; così in ciascuna parte di V_1 vi è sempre almeno un punto tale che lo Jacobiano $\frac{\partial\,(f\,\varphi\,\theta)}{\partial\,(t\,u\,v)}$ è diverso dallo zero e positivo; per la sua continuità nel V_1 esso non vi è mai negativo e non s'annulla che in punti isolati, o lungo linee, o superficie.

4. Sia, infine, dato a transformare l'integrale triplo

$$I=\iiint\limits_{V}F\,(x\,y\,z)\,d\,x\,d\,y\,d\,z$$

colle formole (3) la funzione $F\,(x\,y\,z)$ essendo continua in V. Si ha evidentemente che

$$I=\lim\sum F\,(x_i\,y_i\,z_i)\,v_i=$$
$$=\lim\sum F\Big(f\,(t_i\,u_i\,v_i),\;\varphi\,(t_i\,u_i\,v_i),\;\theta\,(t_i\,u_i\,v_i)\Big)\,\frac{\partial\,(f\,\varphi\,\theta)}{\partial\,(t_i\,u_i\,v_i)}\,v_{1i}\,;$$
$$I=\iiint\limits_{V_1}F\Big(f\,(t\,u\,v),\;\varphi\,(t\,u\,v),\;\theta\,(t\,u\,v)\Big)\,\frac{\partial\,(f\,\varphi\,\theta)}{\partial\,(t\,u\,v)}\,d\,t\,d\,u\,d\,v,$$

(*) Questa formola è:

$$\iiint\limits_{V_1}\left[\frac{\partial}{\partial v}P\,(t\,u\,v)+\frac{\partial}{\partial u}Q\,(t\,u\,v)+\frac{\partial}{\partial t}R\,(t\,u\,v)\right]d\,t\,d\,u\,d\,v=\iint\limits_{S_1}P\,d\,t\,d\,u+Q\,d\,v\,d\,t+R\,d\,u\,d\,v$$

P, Q, R essendo continue lungo la superficie S_1, e $\frac{\partial P}{\partial v}$, $\frac{\partial Q}{\partial u}$, $\frac{\partial R}{\partial t}$ — continue in V_1; l'integrale destro è preso lungo la faccia esteriore di S_1.

ovvero, infine, lo Jacobiano essendo positivo,

$$V = \iiint_{V_1} F(f, \varphi, \theta) \left| \frac{\partial (f \varphi \theta)}{\partial (t u v)} \right| d t\, d u\, d v,$$

e l'ordine delle funzioni f, φ, θ e delle variabili t, u, v nello Jacobiano è già tutt'affatto arbitrario.

On Fundamental Points in Cremona Space-transformations.

(*By* Hilda P. Hudson, *Cambridge.*)

Noether (*) has pointed out that the formulae for the postulation and equivalence of a fundamental multiple point A of a homaloidal family of surfaces (S) require modification when the tangent cone at A degenerates and contains a fixed part, owing to the passage through A of certain branches of fundamental curves.

Now it may be assigned as an independent condition that the tangent cone shall contain a given fixed part, irrespective of the passage through A of fundamental curves. It is the purpose of this note to determine the equivalence and postulation of such a condition upon the surface. This condition might be regarded as assigning a certain number of simple fundamental points adjacent to A and lying on the fixed part of the cone, but the number of such points would be different according as we are dealing with equivalence or postulation. Just as a fundamental point of contact may be regarded as four simple points with respect to equivalence, but as three with respect to postulation, and cannot be regarded as a combination of simple points with respect to the transformation as a whole, so a multiple point with a fixed part of the tangent cone must be regarded as a new and separate element, and not as a combination of simpler elements, of the fundamental system of the family of surfaces.

We may also go further and impose the condition that certain sheets of the surfaces shall have contact of higher order at the multiple point; this gives rise to a further set of new elements.

In the same way, when we pass from fundamental points to curves, we must consider not only simple and multiple curves, but also curves of con-

(*) *Ann. di Mat.* (2), t. V, p. 165, 1871.

tact of any order and multiple curves along which certain sheets of the surfaces have contact of any order. This however is a far more complicated problem and requires separate treatment.

I. Isolated multiple points.

(i) **Simple contact.**

If two surfaces S, S' have a common l-fold point A, the tangent cones having a common fixed part of order k, then their curve of intersection C has $l^2 + k$ branches through A, of which $(l-k)^2$ touch the variable parts of the tangent cones, and $k(2l-k+1)$ touch the fixed part.

A third surface of the same nature will meet C in

$$l(l-k)^2 + (l+1)k(2l-k+1) = l^3 + k(3l-k+1)$$

points coinciding at A, so that, with respect to equivalence, the assigned degeneration of the tangent cone may be regarded as equivalent to $k(3l-k+1)$ assigned simple points.

Let the coordinates of A be $(1, 0, 0, 0)$, and let the equation of the family of surfaces be $S \equiv x^n f_0 + x^{n-1} f_1 + \cdots + x^{n-l} f_l + \cdots + f_n = 0$, where f_l is a homogeneous function of y, z, w of order l, the coefficients of which are parameters of the family.

If A is an l-fold point, and if the tangent cone has a fixed part of order k, then $f_0 \dots f_{l-1}$ must vanish identically, and $f_l \equiv \varphi_k . f_{l-k}$, where φ is a fixed function of y, z, w. The number of conditions imposed is

$$\frac{1}{6} l(l+1)(l+2) + \frac{1}{2} k(2l-k+3),$$

so that, with respect to postulation, the assigned degeneration of the tangent cone may be regarded as equivalent to $\frac{1}{2} k(2l-k+3)$ assigned simple points.

Comparing the values just found for the additional equivalence and postulation,

$$E' = \quad k(3l - k + 1),$$

$$P' = \frac{1}{2} k(2l - k + 3),$$

whence $$E' - 2P' = \quad k(\ l - 2) \geqq 0,$$

with the known (*) values for a simple point of order $t - 1$,

$$E_t = t^2,$$

$$P_t = \frac{1}{2} t(t + 1),$$

whence $$E_t - 2P_t = -t \quad < 0,$$

we see that E', P' cannot be simultaneously regarded as arising from the coincidence of any set of simple points of contact with an ordinary multiple point.

As an example, let us make an application to those transformations of order n which have no fundamental curves, and for which, therefore, the reverse transformation is of the maximum order n^2. It is known that if the fundamental system contains only simple points, points of contact of any order and ordinary multiple points without contact, then the only transformations of order (n, n^2) that exist are monoidal, and there are four such, of orders 1, 2, 3, 4, respectively (**). But admitting fundamental multiple points of the kind here considered, we can find transformations of order (n, n^2), both monoidal and other, for all values of n (***).

Consider first the monoidal family

$$S \equiv x \varphi_k f_\lambda + f_n = 0. \qquad (k + \lambda = n - 1.)$$

The curve of intersection C of two members S, S' of this family is of order n^2 and it projects into the plane curve of order $n + \lambda$

$$f \equiv f_\lambda \cdot f'_n - f'_\lambda f_n = 0,$$

showing that C has $n^2 - (n + \lambda) = (n - 1)^2 + k$ branches through A.

(*) NOETHER, l. c., p. 175.

(**) BELOCH, *Ann. di Mat.* (3), t. XVI, p. 62, 1909.

(***) TUMMARELLO, *Rend. R. Acc. Napoli*, Fasc. 10°, 1911, who has obtained independently some of these results.

If S is fixed and S' varies within a homaloidal family, then f varies within a plane homaloidal family, always passing through the $n\lambda$ fixed points given by $f_\lambda = 0$, $f_n = 0$. These points, and in general others as well, form the base points of the plane family.

Now if (S) has no fundamental curve, (f) has no fixed part, nor does it pass again through any of the $n\lambda$ points, for if so, (S) would contain the fixed straight line joining that point to A. Therefore (f) has at least $n\lambda$ *simple* base points; it may also have other simple or multiple base points, to which there correspond on (S) equal numbers of fundamental simple points or points of contact of corresponding orders.

Now the maximum number of simple base points of a plane homaloidal family of order t is $2(t-1)$, when there is also a single $(t-1)$-fold base point (*). Therefore when n is given, λ must satisfy the inequality

$$n\lambda \leqq 2(n+\lambda-1),$$

or

$$\lambda \leqq \frac{2(n-1)}{n-2} < 3 \quad \text{if} \quad n > 4.$$

The cases $n = 1$, 2 are well known; $n - 3$ has been treated already (**).

If $n = 4$, then $\lambda = 0$, 1, 2 or 3, and $k = 3$, 2, 1 or 0;
if $n > 4$, then $\lambda = 0$, 1 or 2, and $k = n - 1$, $n - 2$ or $n - 3$,

verifying the theorem quoted above, that a monoidal transformation of order (n, n^2) with $k = 0$ does not exist if $n > 4$.

Thus the monoidal space-transformations of order (n, n^2) are in 1, 1 correspondence with the plane transformations of the following four types if $n = 4$:

(i) those of order 4,
(ii) » » » 5 with at least 4 simple base points,
(iii) » » » 6 » » » 8 » » »,
(iv) » » » 7 » » » 12 » » »;

and of the following three types if $n > 4$:

(i) those of order n,
(ii) » » » $n+1$ with at least n simple base points,
(iii) » » » $n+2$ » » » $2n$ » » ».

(*) Cayley, *Coll. Math. Papers*, vol. VII, p. 205, 1869.
(**) *American Journal of Mathematics*, Vol. XXXIV, p. 203, 1912.

The number of the first type becomes infinite with n. CAYLEY enumerates 15 plane transformations which can be written down when n is given. His results also shew that there is only one plane transformation of each of the last two types.

To find the remaining transformations of order (4, 16) we must consider the rational quartic surfaces other than monoids, of which there are three types, two having unodes, which do not present any special features for the present, and one having a point of self-contact (*).

For a common point of self-contact with a fixed tangent plane, both the equivalence and postulation have higher values than are given above. Through such a point there pass eight branches of C and each meets a third surface having the same singularity in four coincident points. The equivalence is 32 and the postulation is 13. Thus if the fundamental system of a quartic family consists of a points of self-contact, b_k double points at which the fixed part of the tangent cone is of order k and c_t simple points of contact of order $t-1$, these numbers must satisfy the relations

$$E = 32\,a + 18\,b_2 + 14\,b_1 + 8\,b_0 + \sum t^2\,c_t \qquad = 63$$

$$P = 13\,a + 9\,b_2 + 7\,b_1 + 4\,b_0 + \sum \frac{1}{2}\,t\,(t+1)\,c_t = 31$$

whence $E - 2\,P = 6\,a \qquad - \sum t\,c_t \qquad = 1.$

Here we have assumed that the conditions imposed by the separate parts of the fundamental system are all independent. This is always the case provided the order of the surfaces exceeds a certain limit. Throughout this paper, when the order is not specified, it is supposed great enough to ensure that the total postulation is the sum of the postulations of the separate parts. In each of the particular cases discussed it can be verified that this is the case.

From the above equations we find $a = 1$, with five sets of values for b, c; in four of these cases there are also fundamental curves, and the reverse transformation is of lower order; the fifth case is that which arises from compounding two transformations of order (2, 4).

There are in all six space-transformations of order (4, 16) involving multiple points with simple contact, specified as follows.

(*) NOETHER, *Math. Ann.*, XXXIII, p. 546, 1889.

I. The fundamental system consists of a triple point with a fixed part of order

(i) 3, and also (α) 3 simple points and 3 points of contact,
(β) 6 simple points and a point of osculation,

(ii) 2, and also 4 simple points and a point of contact of third order,

(iii) 1, and also 2 simple points and a point of contact of fourth order,

(iv) 0, and also a point of contact of fifth order (the transformation given by sig.na Beloch);

II. The fundamental system consists of a point of self-contact, 3 nodes, 3 simple points and a point of contact.

(ii) **Higher contact.**

Next, let it be required that the sheets of the surfaces which touch the fixed part of the tangent cone shall also osculate each other. The equation of the family being as before

$$x^{n-l}\varphi_k f_{l-k} + x^{n-l-1} f_{l+1} + \cdots + f_n = 0,$$

the second approximation to the surfaces, at points of those sheets which touch $\varphi_k = 0$, is given by

$$\varphi_k = \frac{f_{l+1}}{x f_{l-k}}.$$

Since the sheets osculate, the right hand side of this, simplified if necessary by use of the first approximation $\varphi_k = 0$, must take an assigned form, independent of the parameters contained in f_{l-k}.

$$\therefore f_{l+1} \quad \text{has the form} \quad f_{l-k}\varphi_{k+1} + f_{l-k+1}\varphi_k,$$

the coefficients of φ_{k+1} being also assigned.

The curve of intersection C has $(l-k)^2$ branches not touching the fixed part of the cone, and each meeting a third surface of the family in l points coinciding at A; and it has $k(2l-k+2)$ branches touching the fixed part, and each meeting the third surface in $l+2$ points coinciding at A. The equivalence is

$$E = l(l-k)^2 + (l+2)k(2l-k+2) = l^3 + 2k(3l-k+2).$$

The cofactor of x^{n-l-1}, which formerly contained $\binom{l+3}{2}$ arbitrary coefficients, has been reduced to depend on $\binom{l-k+3}{2}$ arbitrary coefficients. The additional postulation is therefore $\frac{1}{2}k(2l-k+5)$ and

$$P = \frac{1}{6}l(l+1)(l+2)+k(2l-k+4).$$

Note that here the multiple point is specialized with regard to each individual surface, as well as with regard to the intersection; for the nodal edges of the tangent cone, given by $\varphi_k = 0$, $f_{l-k} = 0$, osculate the surface, lying on the cone given by the cofactor of x^{n-l-1}.

For contact of order i, let the assigned α^{th} approximation be $K_\alpha = 0$, so that K_α is small of order $\alpha + k$ at points of the sheets in contact, where

$$K_\alpha \equiv x^{\alpha-1}\varphi_k + x^{\alpha-2}\varphi_{k+1} + \cdots + \varphi_{k+\alpha-1}, \qquad (\alpha \leqq i).$$

Then the equation of the family is

$$\begin{aligned} &K_i x^{n-l-i+1} f_{l-k} + x^{n-l-i} f_{l+i} + x^{n-l-i-1} f_{l+i+1} + \cdots + f_n \\ &+ \sum K_\alpha K_\beta \ldots K_\lambda f_\mu x^\nu \qquad\qquad = 0 \end{aligned}$$

where in the last sum there may be any number η of factors K the same or different, and the summation extends to all sets of values of α, $\beta, \ldots, \lambda$, η, μ, ν such that:

the degree of the term is n; i. e., $\alpha+\beta\ldots+\lambda+\eta(k-1)+\mu+\nu = n$;
the point is l-fold on the surface; i. e., $\nu \leq n-l$;
the term does not occur in the first line; i. e., $\nu > n-l-i$;
and the order of smallness of the term is at least $l+i$;

$$\text{i. e., } \alpha+\beta+\cdots+\lambda+\eta k+\mu \geqq l+i.$$

We have now l^2+ik branches of C through A, and

$$E = l(l-k)^2+(l+i)k(2l-k+i) = l^3+ik(3l-k+i).$$

The postulation of such a singularity is very complicated and depends on the relative magnitudes of n, l, k, i. In the case of a monoid, $l = n-1$, and the equation has the form

$$(x\varphi_k + \varphi_{k+1}) f_{n-k-1} + \varphi_k^{i-1} f_{n-(i-1)k} = 0,$$

assuming $n \geqq (i-1)k$; and the postulation is

$$\frac{1}{6} n(n^2-1) + \frac{1}{2} ik \left\{ 2n - (i-2)k + 3 \right\} - k(k+1).$$

Note that this family contains the fixed straight lines given by

$$\varphi_k = 0, \qquad \varphi_{k+1} = 0.$$

In the foregoing work we have assumed that φ_k has no repeated factors. Consider now the case of a unode on a quartic surface

$$S_4 \equiv x^2 y^2 + x f_3 + f_4 = 0.$$

If there is next higher contact with S'_4, this can only differ from S_4 by the terms $x y f'_2 + f'_4$.

There are seven branches of C through A, and $E = 26$, $P = 13$.

We have here not two distinct sheets, but a single cuspidal sheet, and to raise the order of contact by unity only induces one more branch of C through A.

As a further example of possible complications, consider the family

$$S_4 \equiv x^2 y z + x \varphi_3 + x y f_2 + f_4 = 0$$

which possesses a binode with two fixed tangent planes, along one of which there is osculation. There are seven branches of C through A, the tangents being

$z = 0$, $f_2 = f'_2$, the branches touching a third surface of the family,

$y = 0$, $z(f_4 - f'_4) = \varphi_3 (f_2 - f'_2)$, the branches osculating the third surface.

We thus complete the list of eight transformations of order (4, 16) by adding the two which involve multiple points with higher contact, specified as follows.

III. The fundamental system consists of a point of self-contact and also

(i) a binode with osculation along one sheet, a simple point and 2 points of contact,

(ii) a binode with osculation along one sheet and contact along the other, and 5 simple points.

II. Multiple points on fundamental curves.

(i) **Simple contact.**

Now consider the case in which j branches of fundamental curves pass through A. Unless their tangents at A all lie in a plane, A is of necessity a multiple point on (S); if their positions are general, and l' is the least integer for which

$$\frac{1}{2}(l'+1)(l'+2) > j,$$

then A is at least an l'-fold point on the surface.

Now let the fundamental curve C_m have j_1 branches through A touching the fixed part of the tangent cone and j_2 branches touching the variable part, so that $j = j_1 + j_2$. Then the variable curve C' of intersection of S, S' has similarly $j'_1 + j'_2$ branches through A, where

$$j_1 + j'_1 = k(2l - k + 1), \qquad j_2 + j'_2 = (l-k)^2.$$

Consider (*) the locus $f_{2(n-1)} = 0$ of points whose polar planes with regard to S, S' meet in a line which meets an arbitrary straight line; this locus passes through all the points of contact of S, S', and at A it has a $2(l-1)$-fold point, and the tangent cone to f has the same fixed part as (S). Now if (besides the point A,) C possesses d simple nodes, I intersections with C' and h apparent double points, then the $d+I$ points are points of contact of S, S' and lie on f; the number of intersections of C, f which coincide at A is $(2l-1)j_1 + (2l-2)j_2$ and of the $2m(n-1)$ intersections of C, f, the remainder are the r points of C at which the tangent line to C meets the arbitrary straight line which determines f, where r is the rank of C, and has the value

$$m(m-1) - 2h - 2d - j(j-1).$$

$$\therefore I = 2m(n-1) - (r+2d) - \left\{ (2l-2)j + j_1 \right\}.$$

and the number of those of the $n(n^2-m)$ intersections of C' with a third surface of the family which lie on C is $I + lj' + j'_1$.

(*) Cf. Salmon, *Geometry of three dimensions*, § 346, 5th ed., p. 358, 1912.

Hence the equivalence of the system of A and C_m is

$$E = n^3 - \left\{ n(n^2 - m) - (I + l j' + j'_1) \right\}$$

$$= \left\{ m(3n - 2) - (r + 2d) \right\} + \left\{ l^3 + k(3l - k + 1) \right\} -$$

$$- \left\{ (3l - 2) j + 2 j_1 \right\}.$$

The first term would be the equivalence of C if A were not a singular point; the second term would be that of A if C were not a fundamental curve; and the last term is the reduction in equivalence due to the passage through A of the j branches of C.

To evaluate the postulation, as before, we assume the equation of the family containing the singularity A to be

$$S \equiv x^{n-l} \varphi_k f_{l-k} + x^{n-l-1} f_{l+1} + \cdots + f_n = 0$$

having imposed on the general surface of order n

$$\frac{1}{6} l(l+1)(l+2) + \frac{1}{2} k(2l - k + 3) \quad \text{conditions.}$$

For the moment replace C by its j tangents at A. This method of substituting straight lines is due to NOETHER (*), who observes that the reduction in his case depends only on the nature of C in the neighbourhood of the point of intersection. It does not give a proof of the general formula stated below unless we assume that the reduction depends only on l, j, j_1 and not on any other characteristics of C. With this assumption, which is plausible, the reduction in postulation is the same for C as for the j straight lines, and the latter we now consider.

To make S contain one of the j_2 lines, we must impose $n - l + 1$ conditions, one on each of the cones given by $f_{l-k}, f_{l+1}, \ldots, f_n$; but for the j_1 lines the first condition falls on φ_k and not on f_{l-k}, and is already satisfied.

Therefore the postulation of the system of A and the j lines is

$$(n+1) j + \frac{1}{6} l(l+1)(l+2) + \frac{1}{2} k(2l - k + 3) - (l j + j_1),$$

(*) NOETHER, *Ann. di Mat.* (2), t. V, p. 164, 166.

as if, of the $\frac{1}{2} j (j-1)$ intersections of the j lines at A, there were $lj+j_1$ real and the rest apparent.

We infer that for the system A, C the postulation is probably

$$P = \left\{ m(n+1) - \frac{1}{2}(r+2d) \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{6} l(l+1)(l+2) + \frac{1}{2} k(2l-k+3) \right\} - (lj+j_1).$$

These expressions for E, P are valid whatever the arrangement of the j branches of C. If this is such that the passage of S through C makes f_l degenerate, then the fixed part so determined must be part of φ_k; the only assumption is that f_{l-k} has no fixed part. In both formulae, putting $k = j_2 = 0$, $j_1 = j$, we have NOETHER's expressions.

As an example, consider those monoidal transformations of order (4, 4) which are given by equations of the form

$$X : Y : Z : W = \frac{x\varphi_3 + \varphi_4}{x\psi_2 + \psi_3} : y : z : w,$$

where φ_3 is a cubic function of y, z, w, etc.

Here the homaloidal quartic family has the form

$$S_4 \equiv x\varphi_3 + \varphi_4 + f_1(x\psi_2 + \psi_3) = 0,$$

where f_1 is a variable plane through the triple point. The fundamental curve C_{12} is given by

$$x\psi_2 + \psi_3 = 0, \qquad x\varphi_3 + \varphi_4 = 0,$$

and the variable intersection is the plane quartic curve

$$f_1 = 0, \qquad x\varphi_3 + \varphi_4 = 0,$$

with three branches through A. We see that $n=4$, $l=3$, $m=12$, $P=31$, $E=63$, and the various cases can be tabulated thus, the numbers being calculated directly from the equations of C_{12}.

k	Specialization	j_1	j_2	j	j'_1	j'_2	h	$r+2d$
3	$\psi_2 \equiv 0$	9	0	9	3	0	18	24
2	$\varphi_3 \equiv \psi_2 \cdot \chi_1$	8	0	8	2	1	24	28
1	$\varphi_3 \equiv \psi_1 \cdot \chi_2$ $\psi_2 \equiv \psi_1 \cdot \chi_1$	5	2	7	1	2	28	34
0		0	6	6	0	3	30	42

In all these cases the nature of the singularity at A is fully determined by the passage of S_4 through C_{12}; in the second and third cases the position of the j tangents to C at A is specialized. The formulae of equivalence and postulation are satisfied by all four sets of numbers.

(ii) **Higher contact.**

For contact of order i of the sheets touching φ_k, the foregoing argument is modified as follows

$$j_1 + j'_1 = k(2l - k + i), \qquad j_2 + j'_2 = (l-k)^2.$$

$f_{2(n-1)}$ has a $2(l-1)$-fold point at A, and has contact of order i with the sheets of the family which touch φ_k.

$$I = 2m(n-1) - (r+2d) - (2l-2)j - ij_1,$$

$$E = n^3 - \left\{ n(n^2 - m) - (I + lj' + ij'_1) \right\},$$

$$= \left\{ m(3n-2) - (r+2d) \right\} + \left\{ l^3 + ik(3l - k + i) \right\} -$$

$$- \left\{ (3l-2)j + 2ij_1 \right\}.$$

The reduction in postulation is $l+i$ for each of the j_1 branches and l for each of the j_2 branches, giving

$$P = (\text{postulation of curve}) + (\text{postulation of point}) - (lj + ij_1).$$

Osservazioni sulla « Réclamation de priorité » del sig. Zindler.

(*Di* GUSTAVO SANNIA, *a Torino.*)

Il sig. ZINDLER nei §§ 48, 49 del vol. II della sua *Liniengeometrie mit Anwendungen* ha studiato le variazioni del *parametro di distribuzione* delle rigate passanti per un raggio di un complesso, dopo di averlo espresso come quoziente di due forme differenziali quadratiche. Ora, nella sua « *Réclamation de priorité* » (*), osserva che queste forme coincidono, almeno per il loro significato geometrico, con quelle che io ho assunto come fondamentali nel *Saggio di Geometria differenziale dei complessi di rette* (**); in ciò egli vede una ragione sufficiente per reclamare la priorità sull'uso di queste forme nello studio dei complessi, come aveva già fatto precedentemente (***) in occasione dei miei lavori sulle congruenze di rette.

In tutto ciò vi è un equivoco che conviene dissipare.

Nei miei varî lavori ho voluto dimostrare come la geometria differenziale delle congruenze e dei complessi di rette possa essere portata alla stessa perfezione di quella delle superficie, dimostrando che *anche per le congruenze e per i complessi esiste una coppia di forme differenziali quadratiche legate da equazioni* (*una per le congruenze e quattro per i complessi*) *analoghe a quelle di* GAUSS-CODAZZI, *le quali godono delle seguenti proprietà:*

1.° *individuano la congruenza o il complesso, a meno di un movimento;*

2.° *riconducono quindi lo studio delle proprietà geometriche della congruenza e del complesso allo studio di espressioni o equazioni aventi carattere invariantivo rispetto al sistema delle due forme;*

(*) Cfr. questi *Annali*, serie III, tom. XVIII, 1911.

(**) Ibid., tom. XVII, 1910.

(***) *Mathematische Annalen*, B. 69. Si legga anche l'*aggiunta* della *Redazione dei M. A.*

3.° *permettono di trattare con uniformità di metodo i problemi relativi alle congruenze ed ai complessi e conducono, per alcuni di essi, a risoluzioni aventi un grado di semplicità mai prima raggiunto.*

In tutto ciò io stimo che consista il problema di *ridurre lo studio delle congruenze e dei complessi allo studio di una coppia di forme differenziali quadratiche.* Questo problema, la cui risoluzione apporta un effettivo e notevole progresso alla Geometria differenziale dello spazio rigato, non era mai stato risoluto nè dal sig. Zindler, nè da altri.

È ben vero che dei tentativi in questo senso erano già stati fatti per le sole congruenze (mai per i complessi) da alcuni Geometri (Burgatti, Cifarelli), adoperando le due forme differenziali introdotte dal Kummer; ma questi tentativi restarono infruttuosi. Il lettore se ne potrà convincere leggendo il cap. XII della *Differential Geometry* di L. P. Eisenhart: egli vedrà che in tutta la teoria le due forme di Kummer (o almeno una di esse) fanno la figura di semplici *comparse* e che le quantità che veramente entrano in gioco sono certo sette funzioni

$$E,\ F,\ G,\ e,\ f,\ f',\ g$$

di due variabili. L'inanità dei tentativi è dovuta, non certo ai Geometri, ma alle forme stesse, in quanto che *vi sono infinite congruenze distinte che danno origine alle medesime forme di* Kummer (*).

Concludendo: le due forme da me adoperate intervengono nei lavori del sig. Zindler mediante il loro rapporto ed i loro coefficienti compaiono in alcune formole; ma io credo che ciò nulla tolga alla originalità delle mie ricerche.

Il sig. Zindler ha pure reclamato la priorità dello studio dei complessi definiti mediante equazioni parametriche. Osservo che questo modo di definire i complessi è ben antico ed affatto naturale, e quindi non è il caso di porre su di esso una quistione di priorità. Nel mio *Saggio* ho affermato di avere adoperato *per la prima volta in modo sistematico* la rappresentazione parametrica, in quanto che ne ho fatto uso *esclusivo* e *costante;* mentre che il sig. Zindler l'ha adoperata solo per alcune questioni, trat-

(*) Cfr. l'*Introduzione* alla mia Nota: *Sull'inviluppata media di una congruenza di rette* (R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLV, 1909).

tando tutte le altre con l'uso costante dell'equazione del complesso in coordinate omogenee di retta e supponendo inoltre che questa equazione sia algebrica.

Torino, 27 gennaio 1912.

Aggiunta della Redazione alle precedenti « Osservazioni » del sig. Sannia.

Dopo quanto hanno scritto il sig. Zindler (*Ann. di Mat.* (3), XVIII (1911), pag. 335) e il sig. Sannia, consideriamo per parte nostra come definitivamente chiusa questa breve polemica (Vedasi anche *Math. Annalen*, Tom. 69 (1910), pagg. 447-8).

Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni.

(*Di* PASQUALE CALAPSO, *a Palermo.*)

Lo scopo principale della presente Memoria è di stabilire la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche dal punto di vista intrinseco; cioè come trasformazioni delle soluzioni del sistema differenziale (21) della Memoria che ho pubblicata nel 1902 (*).

Occupandomi delle trasformazioni B_k, scoperte dal BIANCHI e recentemente raccolte dall'illustre geometra nel suo terzo volume delle *Lezioni*, vengo ad ottenere per le suddette trasformazioni, relative alle quadriche a centro, una rappresentazione analitica perfettamente analoga a quella stabilita dall'autore per i paraboloidi, che trovasi esposta nel Capitolo VI del volume III sopra citato.

Lo studio delle trasformazioni B_k dal nuovo punto di vista permette di scorgere un caso limite che sfugge alla rappresentazione ordinaria della B_k; inoltre la nuova rappresentazione analitica di queste trasformazioni rende agevole il confronto fra le medesime e una classe di trasformazioni di GUICHARD.

Il metodo che viene seguito per giungere allo scopo suddetto consiste nell'esaminare dapprima il problema in un caso noto, cioè nel caso delle quadriche di rotazione per osservare l'effetto che le trasformazioni di BÄKLUND producono sugl'integrali del sistema (21) della mia Memoria.

Esaminando attentamente le circostanze analitiche che permettono di generalizzare i risultati a quadriche qualunque si perviene a due tipi di trasformazioni. Uno di questi tipi si identifica colle trasformazioni B_k; le trasformazioni dell'altro tipo costituiscono il caso limite che, come ho detto, sfugge alla rappresentazione ordinaria delle B_k. Le trasformazioni relative al caso limite vengono indicate, per ragioni che saran dette, con B_∞.

Poichè non tutte le formole della trasformazione B_∞ sono deducibili da quelle della B_k col passaggio al limite, ho creduto opportuno occuparmi estesamente delle B_∞ e delle B_k dandone una trattazione parallela.

(*) P. CALAPSO, *Sulla deformazione delle quadriche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVI (1902), pagg. 297-326].

Premesse al § I le considerazioni relative alle quadriche di rotazione da cui le presenti ricerche hanno avuto origine, ho ordinato la materia in otto parti.

Nella parte prima viene stabilita con procedimento diretto l'esistenza delle trasformazioni B_∞; la dimostrazione è basata sul teorema fondamentale della mia Memoria del 1902; assumendo cioè l'equazione della quadrica sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

(a, b, c, assumendo costanti qualunque reali od immaginarie) e ponendo

$$x=a\,X_3\,,\quad y=b\,Y_3\,,\quad z=c\,Z_3\,, \tag{2}$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè le (2) *rappresentino la quadrica* (1) *riferita ad un sistema coniugato comune ad essa e ad una superficie applicabile, è che le funzioni* X_3, Y_3, Z_3 *soddisfino al sistema:*

$$\left.\begin{aligned}
&X_3^2+Y_3^2+Z_3^2=1,\\
&\Sigma\,\frac{\partial X_3}{\partial\alpha}\,\frac{\partial X_3}{\partial\beta}=0,\\
&\Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial\alpha}\right)^2-\Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial\beta}\right)^2=b^2c^2X_3^2+c^2a^2Y_3^2+a^2b^2Z_3^2.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Le formole relative a questa trasformazione consistono in un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di primo ordine, illimitatamente integrabile.

Nella parte II, seguendo un procedimento analogo a quello seguito nella parte I, si perviene alla nuova rappresentazione analitica delle B_k sotto il nuovo aspetto desiderato; lo studio di queste trasformazioni è accompagnato da un'accurata discussione sui casi singolari.

Nella parte III vengono stabilite le relazioni tra la nuova rappresentazione della B_k e la sua forma originale, secondo la quale *per qualunque superficie S applicabile sopra una quadrica esistono ∞^2 congruenze rettilinee W che avendo S per prima falda focale hanno le loro seconde falde focali S_1 applicabili sulla medesima quadrica.*

Nella parte IV viene richiamata la trasformazione di Guichard del 1905, da me studiata in una precedente Memoria (*), che ho dimostrato essere ri-

(*) P. Calapso, *Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni* [l. c., tomo XXXII (1911), pagg. 365-385].

ducibile ad una D_m (per un conveniente valore della costante m). Trovo che tale trasformazione appartiene ad un tipo più generale che si può definire nel modo seguente:

Se X'_3, Y'_3, Z'_3 è una soluzione del sistema (3) e X''_3, Y''_3, Z''_3 è la nuova soluzione (trasformata della prima), si consideri sulla sfera

$$X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 = 1$$

la corrispondenza in cui al punto X'_3, Y'_3, Z'_3 corrisponde il punto X''_3, Y''_3, Z''_3; note le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3, si determinano X''_3, Y''_3, Z''_3, colla condizione che le tangenti alle linee α e β della suddetta sfera in punti corrispondenti si tagliano rispettivamente.

Nelle formole relative a questa trasformazione si può introdurre una costante arbitraria k; sicchè indico essa con G_k.

La trasformazione del 1905 è in conseguenza indicata con G_{-c^2}.

Sussistono anche per le G_k le trasformazioni singolari G_∞.

Indi vengono stabilite le formole relative alla trasformazione H del Bianchi, riportata al Cap. V del volume III delle *Lezioni;* e ciò sempre dal nuovo aspetto da me considerato. Siffatta trasformazione involutoria (a periodo 2) fa passare da una deformata della quadrica (1) ad una deformata della quadrica

$$\frac{\mathbf{x}^2}{a'^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{b'^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{c'^2} = 1, \tag{1)'}$$

in cui

$$b'^2 c'^2 = -b^2 c^2, \quad c'^2 a'^2 = c^2 (a^2 - b^2), \quad a'^2 b'^2 = b^2 (a^2 - c^2).$$

Trovo allora l'importante teorema:

La trasformazione H cangia una coppia di superficie applicabili sulla (1) legate tra loro da una G_k in un'altra coppia di superficie applicabili sulla (1)' legate tra loro da una $G_{k'}$.

La relazione ben semplice fra k e k' è data dalla formola

$$\frac{a^2}{k} + \frac{a'^2}{k'} + 1 = 0. \tag{2)'}$$

Il teorema analogo per le trasformazioni B_k sussiste ed è stato stabilito dal Bianchi (l. c., pag. 230); la relazione fra k e k' è sempre la (2)'.

Ora da questa per $k = -a^2$, si ha $k' = \infty$; dunque la considerazione delle B_∞ permette di enunciare il teorema senza eccezioni.

Nella parte V viene effettuato il confronto tra le trasformazioni G_k e le B_k, e si dimostra che componendo due B_k colla medesima costante k ed opposte tra loro, si ottiene una G_k; viceversa una trasformazione G_k può sempre ottenersi come prodotto di due B_k; cioè si ha il teorema

$$G_k = B_k \, . \, B'_k \, .$$

Questo teorema, già noto per le ricerche di BIANCHI (*), viene nella presente Memoria esteso al caso $k = \infty$; giacchè si ha pure

$$G_\infty = B_\infty \, B'_\infty \, .$$

In particolare riferendoci alla trasformazione di GUICHARD del 1905, si ha

$$G_{-c^2} = B_{-c^2} \, B'_{-c^2} \, ,$$

cioè essa è equivalente al prodotto di due B_k singolari.

Nella parte VI viene esposta una dimostrazione diretta di un importantissimo teorema dovuto al BIANCHI e detto dall'autore *di permutabilità* (l. c., Cap. IV); ed estendo il teorema anche alle trasformazioni singolari facendo entrare in composizione le B_∞.

Nella parte VII stabilisco il modo di ottenere trasformazioni reali; discutendo separatamente le tre specie di quadriche reali.

Nelle quadriche a punti ellittici sussistono delle trasformazioni che conducono da superficie reali applicabili realmente sulla quadrica a superficie reali pure applicabili realmente sulla quadrica; esse si ottengono componendo due trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2}, immaginarie coniugate (k_1 e k_2 costanti complesse coniugate).

Si può anche ottenere una trasformazione reale con una sola B_k (k essendo una costante reale arbitrariamente presa fra convenienti limiti), per come ha stabilito il BIANCHI; essa conduce però da una superficie reale applicabile realmente (idealmente) sulla quadrica a superficie reali applicabili idealmente (realmente) sulla quadrica.

In quanto alle B_∞, isolatamente applicate non conducono mai da una superficie reale a superficie reali; occorre sempre eseguirne un numero pari.

In particolare componendone due, si ha una G_∞ e sussiste il teorema:

La trasformazione G_∞ fa passare da una superficie reale applicabile idealmente sulla quadrica ad infinite nuove superficie reali applicabili idealmente sulla quadrica.

(*) *Sulle trasformazioni di* GUICHARD *delle superficie applicabili sulle quadriche* (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 5 febbraio 1911).

Donde poi segue:

La trasformazione $B_k\, G_\infty\, B_{k'}$ (per convenienti valori di k e k') fa derivare da una superficie reale applicabile realmente sulla quadrica infinite superficie reali applicabili realmente sulla quadrica.

Nell'iperboloide ad una falda la trasformazione B_k, per k preso fra convenienti limiti, è reale; e trasforma sempre una superficie reale applicabile realmente (idealmente) sulla quadrica in superficie reali applicabili realmente (idealmente) sulla quadrica.

Anche in questo caso si ha il teorema:

La trasformazione G_∞ fa passare da una superficie reale applicabile idealmente sulla quadrica ad infinite nuove superficie reali applicabili idealmente sulla quadrica.

Nella parte VIII vengono stabilite alcune importanti proprietà geometriche delle trasformazioni B_k, donde le trasformazioni che abbiamo chiamato B_∞ appariscono dal punto di vista geometrico come caso limite delle B_k.

Quest'ultima ricerca, basata sulla considerazione delle deformazioni infinitesime che corrispondono alle B_k, mi è stata suggerita dal BIANCHI per corrispondenza del che vivamente ringrazio l'illustre geometra.

Nel caso delle B_∞ la deformazione infinitesima corrispondente si riduce ad una traslazione isotropa; e sembra assai notevole che ad ogni traslazione isotropa di una superficie applicabile sulla quadrica corrisponde una B_∞ e l'integrazione del relativo sistema differenziale si compie con soli calcoli algebrici e di derivazione.

Se in particolare la quadrica è una sfera si ha la proposizione seguente:

Data una superficie a curvatura costante S, le ∞^1 superficie derivate da S con la trasformazione complementare sono costruibili in termini finiti, quando si conosca la superficie **S** *corrispondente ad S per trasformazione di* HAZZIDAKIS.

In ciò che segue introdurremo secondo il solito le funzioni ausiliarie

$$E_0 = \Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad G_0 = \Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial \beta}\right)^2, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial X_3}{\partial \alpha}, & X_2 &= \frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial X_3}{\partial \beta},\\ Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial Y_3}{\partial \alpha}, & Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial Y_3}{\partial \beta},\\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial Z_3}{\partial \alpha}, & Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial Z_3}{\partial \beta}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ed il sistema di relazioni fondamentali

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_2 - \sqrt{E_0}\, X_3, && \frac{\partial X_1}{\partial \beta} = \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} X_2, \\
&\frac{\partial X_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_1, && \frac{\partial X_2}{\partial \beta} = -\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} X_1 - \sqrt{G_0}\, X_3, \\
&\frac{\partial X_3}{\partial \alpha} = \sqrt{E_0}\, X_1, && \frac{\partial X_3}{\partial \beta} = \sqrt{G_0}\, X_2,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

colle analoghe in Y e Z; e quando occorra considereremo le trasformazioni per tutto il sistema di funzioni

$$\begin{matrix}
\sqrt{E_0}, & & \sqrt{G_0}, \\
X_1, & Y_1, & Z_1, \\
X_2, & Y_2, & Z_2, \\
X_3, & Y_3, & Z_3.
\end{matrix}$$

§ I. Le trasformazioni di Bäklund per le quadriche di rotazione.

1. Supponiamo che la quadrica (1) sia di rotazione ($a = b = 1$).

In tal caso, secondo è stato stabilito nella mia citata Memoria del 1902, per ottenere la soluzione più generale del sistema (2), basta assumere una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0, \tag{7}$$

ed integrare il sistema completo

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \alpha} = e^{\theta} . \lambda, \\ &\frac{\partial u}{\partial \beta} = e^{\theta} \mu, \end{aligned}\right. \\
&\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial \alpha} = -e^{-\theta} \lambda, \\ &\frac{\partial v}{\partial \beta} = e^{-\theta} \mu, \end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \tag{7)*$$

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}&=-(k_1 e^\theta+k_2 e^{-\theta})u+(k_2 e^\theta+k_1 e^{-\theta})v-\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\mu,\\ \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}&=\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\mu,\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}&=\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\lambda,\\ \frac{\partial\mu}{\partial\beta}&=-(k_1 e^\theta-k_2 e^{-\theta})u+(k_2 e^\theta-k_1 e^{-\theta})v-\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\lambda,\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\} \tag{7)*}$$

in cui $4k_1=a^4=1$; $4k_2=2c^2-1$; ad opportune condizioni iniziali; cioè in modo da aversi

$$k_1(u^2+v^2)-2k_2 uv+\lambda^2+\mu^2=0. \tag{8}$$

In questo modo le funzioni

$$X_3=\frac{1-uv}{u-v},\quad Y_3=i\frac{1+uv}{u-v},\quad Z_3=\frac{u+v}{u-v}, \tag{8)*}$$

soddisferanno al sistema (3).

2. Partendo da una soluzione θ dell'equazione (7) e dal sistema di funzioni corrispondenti u, v, λ, μ, ed applicando la trasformazione di BÄKLUND

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}&=i\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+i\,\mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1+i\cosh\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1,\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}&=-i\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+\mathrm{senh}\,\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1+\cosh\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

avremo una nuova soluzione θ_1 dell'equazione (7); inoltre come sistema di funzioni corrispondenti possiamo assumere

$$\left.\begin{aligned}\tau u_1&=e^{\theta_1}\lambda-i e^{\theta_1}\mu-\frac{i}{2}\,\mathrm{senh}\,\sigma(u+v)+\frac{i}{2}\cosh\sigma(u-v),\\ \tau v_1&=-e^{-\theta_1}\lambda-i e^{-\theta_1}\mu-\frac{i}{2}\,\mathrm{senh}\,\sigma(u+v)-\frac{i}{2}\cosh\sigma(u-v),\\ \tau\lambda_1&=-(k_1 e^\theta+k_2 e^{-\theta})u+(k_2 e^\theta+k_1 e^{-\theta})v+B\mu+iA\lambda,\\ \tau\mu_1&=i(k_1 e^\theta-k_2 e^{-\theta})u-i(k_2 e^\theta-k_1 e^{-\theta})v-iD\mu+C\lambda,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

in cui abbiamo posto per brevità

$$\left.\begin{aligned}
A &= \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1 ,\\
B &= \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 ,\\
C &= \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 ,\\
D &= \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1 + \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 \text{ (*)},
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e τ indica una costante qualunque di proporzionalità.

Infatti si verifica con facile calcolo che le funzioni u_1, v_1, λ_1, μ_1 soddisfano alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} &= e^{\theta_1}\lambda_1 ,\\
\frac{\partial u_1}{\partial \beta} &= e^{\theta_1}\mu_1 ,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= -e^{\theta_1}\lambda_1 ,\\
\frac{\partial v_1}{\partial \beta} &= e^{-\theta_1}\mu_1 ,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} &= -(k_1 e^{\theta_1} + k_2 e^{-\theta_1})\, u_1 + (k_2 e^{\theta_1} + k_1 e^{-\theta_1})\, v_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\mu_1 ,\\
\frac{\partial \lambda_1}{\partial \beta} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\mu_1 ,
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\lambda_1 ,\\
\frac{\partial \mu_1}{\partial \beta} &= -(k_1 e^{\theta_1} - k_2 e^{-\theta_1})\, u_1 + (k_2 e^{\theta_1} - k_1 e^{-\theta_1})\, v_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\lambda_1 ;
\end{aligned}\right.$$

d'altra parte si ha identicamente

$$\tau^2 \left[k_1 (u_1^2 + v_1^2) - 2 k_2 u_1 v_1 + \lambda_1^2 + \mu_1^2\right] =$$

$$= \left[2 k_2 - \frac{1}{2} (\cosh^2\sigma + \operatorname{senh}^2\sigma)\right] \left[k_1 (u^2 + v^2) - 2 k_2 u v + \lambda^2 + \mu^2\right],$$

(*) Vedasi la ricerca analoga del Bianchi, relativa ai paraboloidi, l. c., pag. 272 e 273.

e quindi in forza della (8) sarà pure

$$k_1 (u_1^2 + v_1^2) - 2 k_2 u_1 v_1 + \lambda_1^2 + \mu_1^2 = 0.$$

Se ora poniamo

$$X'_3 = \frac{1 - u_1 v_1}{u_1 - v_1}, \quad Y'_3 = i \frac{1 + u_1 v_1}{u_1 - v_1}, \quad Z'_3 = \frac{u_1 + v_1}{u_1 - v_1}, \tag{12}$$

avremo una nuova soluzione del sistema differenziale (3).

Il passaggio dalla soluzione X_3, Y_3, Z_3 alla soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 costituisce la trasformazione che volevamo ottenere.

La nuova soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 contiene due costanti arbitrarie, cioè la costante σ che comparisce esplicitamente nelle (9) e la costante introdotta dall'integrazione.

3. Ora se scriviamo le prime due delle relazioni (10) sotto la forma

$$e^{\theta_1} (\lambda - i \mu) = \tau u_1 + \frac{i}{2} \operatorname{senh} \sigma (u + v) - \frac{i}{2} \cosh \sigma (u - v),$$

$$e^{-\theta_1} (\lambda + i \mu) = - \tau v_1 - \frac{i}{2} \operatorname{senh} \sigma (u + v) - \frac{i}{2} \cosh \sigma (u - v),$$

e moltiplichiamo membro a membro, tenendo conto della (8), dopo semplificazione avremo

$$\left. \begin{aligned} &\left[2 k_2 - \frac{1}{2} (\cosh^2 \sigma + \operatorname{senh}^2 \sigma)\right] u v + \tau^2 u_1 v_1 + \\ &+ i \frac{\tau}{2} \operatorname{senh} \sigma (u + v) (u_1 + v_1) + i \frac{\tau}{2} \cosh \sigma (u - v) (u_1 - v_1) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

Sicchè se escludiamo il valore $\cosh \sigma = \pm \frac{c}{a}$, per il quale il coefficiente di $u v$ è nullo, e indichiamo con k la costante arbitraria $- \frac{c^2}{\cosh^2 \sigma}$, possiamo assumere

$$\tau = \frac{c}{\sqrt{k}} \sqrt{a^2 + k}, \quad \operatorname{senh} \sigma = \frac{i}{\sqrt{k}} \sqrt{c^2 + k}, \quad \cosh \sigma = - \frac{i c}{\sqrt{k}},$$

e la (13) prende la forma

$$\begin{aligned} c \sqrt{a^2 + k} (1 - u v) (1 - u_1 v_1) - c \sqrt{a^2 + k} (1 + u v) (1 + u_1 v_1) + \\ + \sqrt{c^2 + k} (u + v) (u_1 + v_1) = c (u - v) (u_1 - v_1), \end{aligned}$$

ossia per le (8)* e (12)

$$c\sqrt{a^2+k}\, X_3\, X'_3 + c\sqrt{a^2+k}\, Y_3\, Y'_3 + \sqrt{c^2+k}\, Z_3\, Z'_3 = c\,;$$

e tenendo conto della condizione $a = b = 1$ scriveremo meglio per simmetria nel seguente modo:

$$b\,c\sqrt{a^2+k}\, X_3\, X'_3 + c\,a\sqrt{b^2+k}\, Y_3\, Y'_3 + a\,b\sqrt{c^2+k}\, Z_3\, Z'_3 = a\,b\,c. \tag{14}$$

Nel caso escluso $\cosh\sigma = \pm\,\frac{c}{a}$ la (13) diventa

$$\tau\, u_1\, v_1 + \frac{i}{2}\operatorname{senh}\sigma\,(u+v)\,(u_1+v_1) + \frac{i}{2}\cosh\sigma\,(u-v)\,(u_1-v_1) = 0,$$

ossia

$$\frac{\tau}{2}\,(X'_3 + i\,Y'_3)\,(X_3 - i\,Y_3) - i\operatorname{senh}\sigma\, Z_3\, Z'_3 = i\cosh\sigma. \tag{15}$$

Infine assumendo

$$\cosh\sigma = 0, \quad \operatorname{senh}\sigma = i, \quad \tau = c,$$

la (13) prende la forma

$$c\Big[(1-u\,v)\,(1-u_1\,v_1) - (1+u\,v)\,(1+u_1\,v_1)\Big] + (u+v)\,(u_1+v_1) = 0,$$

ossia

$$c\,(X_3\,X'_3 + Y_3\,Y'_3) + Z_3\,Z'_3 = 0,$$

che scriveremo meglio per simmetria nel seguente modo:

$$b\,c\,X_3\,X'_3 + c\,a\,Y_3\,Y'_3 + a\,b\,Z_3\,Z'_3 = 0. \tag{16}$$

4. Nel caso particolare $a = b = c = 1$, in cui la quadrica si riduce alla sfera di raggio 1, la trasformazione ultimamente osservata si interpreta così:

Sia S una superficie a curvatura costante positiva, coll'elemento lineare

$$d\,s^2 = \operatorname{senh}^2\omega\, d\,\alpha^2 + \cosh^2\omega\, d\,\beta^2, \tag{17}$$

e siano ξ, η, ζ le coordinate di un punto della superficie. Applichiamo alla superficie S la trasformazione complementare

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi - \frac{\operatorname{senh}\omega_1}{\operatorname{senh}\omega}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \frac{i\cosh\omega_1}{\cosh\omega}\frac{\partial \xi}{\partial \beta},\\
\eta_1 &= \eta - \frac{\operatorname{senh}\omega_1}{\operatorname{senh}\omega}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - \frac{i\cosh\omega_1}{\cosh\omega}\frac{\partial \eta}{\partial \beta},\\
\zeta_1 &= \zeta - \frac{\operatorname{senh}\omega_1}{\operatorname{senh}\omega}\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - \frac{i\cosh\omega_1}{\cosh\omega}\frac{\partial \zeta}{\partial \beta},
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ω_1 essendo una soluzione qualunque del sistema completo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} &= -i\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \operatorname{senh}\omega\cosh\omega_1,\\
\frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} &= i\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + i\cosh\omega\operatorname{senh}\omega_1;
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

otteniamo così una nuova superficie S_1 a curvatura costante positiva coll'elemento lineare

$$d s^2 = \operatorname{senh}^2\omega_1\, d\alpha^2 + \cosh^2\omega_1\, d\beta^2. \tag{20}$$

La trasformazione di Hazzidakis cangia la coppia di superficie S, S_1 in un'altra coppia $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$; e se X_3, Y_3, Z_3 è la soluzione del sistema (3) corrispondente a $\mathbf{S}$, e X'_3, Y'_3, Z'_3 quella corrispondente ad $\mathbf{S}_1$; sarà

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial \alpha}\right)^2 = \cosh^2\omega, \quad \Sigma\frac{\partial X_3}{\partial \alpha}\frac{\partial X_3}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial \beta}\right)^2 = \operatorname{senh}^2\omega,\\
&\Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}\right)^2 = \cosh^2\omega_1, \quad \Sigma\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}\frac{\partial X'_3}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \beta}\right)^2 = \operatorname{senh}^2\omega_1.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ora si verifica, tenendo presenti le (19) e le (6), che si passa dalla soluzione X_3, Y_3, Z_3 all'altra X'_3, Y'_3, Z'_3 ponendo

$$\left.\begin{aligned}
X'_3 &= \cosh\omega_1\, X_1 + i\operatorname{senh}\omega_1\, X_2,\\
Y'_3 &= \cosh\omega_1\, Y_1 + i\operatorname{senh}\omega_1\, Y_2,\\
Z'_3 &= \cosh\omega_1\, Z_1 + i\operatorname{senh}\omega_1\, Z_2,
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

donde segue subito la relazione

$$X_3 X'_3 + Y_3 Y'_3 + Z_3 Z'_3 = 0.$$

Dunque denotando con H la trasformazione di Hazzidakis e con B la trasformazione complementare, potremo rappresentare la trasformazione osservata con

$$H^{-1}\,B\,H.$$

È dimostrato in ciò che segue che le relazioni (14) e (16) individuano per sè sole le trasformazioni osservate; di più esse sussistono per quadriche generali, ritenendo cioè per a, b, c costanti qualunque.

Passiamo quindi allo studio delle trasformazioni individuate rispettivamente dalle relazioni (14) e (16), trattando d'ora innanzi il problema per quadriche generali.

PARTE I.

Le trasformazioni individuate dalla relazione (16)

§ II. Le funzioni trasformatrici.

1. In questo paragrafo stabiliremo un sistema di formole relative alla soluzione X_3, Y_3, Z_3, del sistema (2) e alla soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3, legata alla prima dalla relazione (16).

Introduciamo secondo il solito le funzioni ausiliarie relative alla soluzione nuova X'_3, Y'_3, Z'_3; cioè:

$$E'_0 = \Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}\right)^2, \quad G'_0 = \Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \beta}\right)^2, \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} X'_1 &= \frac{1}{\sqrt{E'_0}}\,\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}, & X'_2 &= \frac{1}{\sqrt{G'_0}}\,\frac{\partial X'_3}{\partial \beta}, \\ Y'_1 &= \frac{1}{\sqrt{E'_0}}\,\frac{\partial Y'_3}{\partial \alpha}, & Y'_2 &= \frac{1}{\sqrt{G'_0}}\,\frac{\partial Y'_3}{\partial \beta}, \\ Z'_1 &= \frac{1}{\sqrt{E'_0}}\,\frac{\partial Z'_3}{\partial \alpha}, & Z'_2 &= \frac{1}{\sqrt{G'_0}}\,\frac{\partial Z'_3}{\partial \beta}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

per le quali sussistono le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X'_1}{\partial \alpha}=-\frac{1}{\sqrt{G'_0}}\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\beta}X'_2-\sqrt{E'_0}\,X'_3, && \frac{\partial X'_1}{\partial\beta}=\frac{1}{\sqrt{E'_0}}\frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\alpha}X'_2,\\
&\frac{\partial X'_2}{\partial \alpha}=\frac{1}{\sqrt{G'_0}}\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\beta}X'_1, && \frac{\partial X'_2}{\partial\beta}=-\frac{1}{\sqrt{E'_0}}\frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\alpha}X'_1-\sqrt{G'_0}\,X'_3,\\
&\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}=\sqrt{E'_0}\,X'_1, && \frac{\partial X'_3}{\partial\beta}=\sqrt{G'_0}\,X'_2,
\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

colle analoghe in Y e Z.

Indi poniamo

$$b\,c\,X_i\,X'_k+c\,a\,Y_i\,Y'_k+a\,b\,Z_i\,Z'_k=\Psi_{ik}.\tag{26}$$

Avremo subito in base alla (16)

$$\Psi_{33}=0.\tag{27}$$

Inoltre tenendo conto che le nove funzioni

$$\left.\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{matrix}\right\}\tag{28}$$

costituiscono un determinante ortogonale, e così pure le funzioni

$$\left.\begin{matrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1\\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2\\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3\end{matrix}\right\}\tag{29}$$

avremo dalle (26)

$$\left.\begin{aligned}
b\,c\,X'_1&=\Psi_{11}\,X_1+\Psi_{21}\,X_2+\Psi_{31}\,X_3,\\
c\,a\,Y'_1&=\Psi_{11}\,Y_1+\Psi_{21}\,Y_2+\Psi_{31}\,Y_3,\\
a\,b\,Z'_1&=\Psi_{11}\,Z_1+\Psi_{21}\,Z_2+\Psi_{31}\,Z_3,
\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}
b\,c\,X'_2&=\Psi_{12}\,X_1+\Psi_{22}\,X_2+\Psi_{32}\,X_3,\\
c\,a\,Y'_2&=\Psi_{12}\,Y_1+\Psi_{22}\,Y_2+\Psi_{32}\,Y_3,\\
a\,b\,Z'_2&=\Psi_{12}\,Z_1+\Psi_{22}\,Z_2+\Psi_{32}\,Z_3,
\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} b\,c\,X'_3 &= \Psi_{13}\,X_1 + \Psi_{23}\,X_2\,, \\ c\,a\,Y'_3 &= \Psi_{13}\,Y_1 + \Psi_{23}\,Y_2\,, \\ a\,b\,Z'_3 &= \Psi_{13}\,Z_1 + \Psi_{23}\,Z_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} b\,c\,X_1 &= \Psi_{11}\,X'_1 + \Psi_{12}\,X'_2 + \Psi_{13}\,X'_3\,, \\ c\,a\,Y_1 &= \Psi_{11}\,Y'_1 + \Psi_{12}\,Y'_2 + \Psi_{13}\,Y'_3\,, \\ a\,b\,Z_1 &= \Psi_{11}\,Z'_1 + \Psi_{12}\,Z'_2 + \Psi_{13}\,Z'_3\,, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} b\,c\,X_2 &= \Psi_{21}\,X'_1 + \Psi_{22}\,X'_2 + \Psi_{23}\,X'_3\,, \\ c\,a\,Y_2 &= \Psi_{21}\,Y'_1 + \Psi_{22}\,Y'_2 + \Psi_{23}\,Y'_3\,, \\ a\,b\,Z_2 &= \Psi_{21}\,Z'_1 + \Psi_{22}\,Z'_2 + \Psi_{23}\,Z'_3\,, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} b\,c\,X_3 &= \Psi_{31}\,X'_1 + \Psi_{32}\,X'_2\,, \\ c\,a\,Y_3 &= \Psi_{31}\,Y'_1 + \Psi_{32}\,Y'_2\,, \\ a\,b\,Z_3 &= \Psi_{31}\,Z'_1 + \Psi_{32}\,Z'_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

2. Per mezzo di queste formole possiamo ricavare varie espressioni delle Ψ_{ik} procedendo nel seguente modo.

Derivando la (13) e tenendo presenti le (6) e le (25) otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{E'_0}\,\Psi_{31} + \sqrt{E_0}\,\Psi_{13} &= 0, \\ \sqrt{G'_0}\,\Psi_{32} + \sqrt{G_0}\,\Psi_{23} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{35)*}$$

D'altra parte dalle (32) e (35) quadrando e sommando si ricavano le relazioni

$$\Psi^2_{13} + \Psi^2_{23} = b^2\,c^2\,X'^2_3 + c^2\,a^2\,Y'^2_3 + a^2\,b^2\,Z'^2_3\,,$$
$$\Psi^2_{31} + \Psi^2_{32} = b^2\,c^2\,X^2_3 + c^2\,a^2\,Y^2_3 + a^2\,b^2\,Z^2_3\,,$$

che per la terza del sistema (3) si possono scrivere

$$\Psi^2_{13} + \Psi^2_{23} = E'_0 - G'_0\,,$$
$$\Psi^2_{31} + \Psi^2_{32} = E_0 - G_0\,.$$

Da queste e dalle (35)* troviamo

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{13} &= \sqrt{E'_0}\,, & \Psi_{23} &= i\sqrt{G'_0}\,, \\ \Psi_{31} &= -\sqrt{E_0}\,, & \Psi_{32} &= -i\sqrt{G_0}\ (*). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

(*) Delle quantità $\sqrt{E_0}$, $\sqrt{G_0}$, $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ si intende scelta una determinazione e mantenuta in tutto ciò che segue.

Similmente dalle (33) e (34) quadrando e sommando e tenendo conto delle espressioni trovate di Ψ_{13}, Ψ_{23} otteniamo

$$\Psi_{11}^2 + \Psi_{12}^2 = - E'_0 + b^2 c^2 X_1^2 + c^2 a^2 Y_1^2 + a^2 b^2 Z_1^2, \tag{37}$$

$$\Psi_{21}^2 + \Psi_{22}^2 = G'_0 + b^2 c^2 X_2^2 + c^2 a^2 Y_2^2 + a^2 b^2 Z_2^2. \tag{38}$$

Infine dalle (33) e (35) moltiplicando ordinatamente e sommando troviamo

$$\sqrt{E_0}\, \Psi_{11} + i \sqrt{G_0}\, \Psi_{12} = -(b^2 c^2 X_1 X_3 + c^2 a^2 Y_1 Y_3 + a^2 b^2 Z_1 Z_3), \tag{39}$$

e similmente

$$\sqrt{E_0}\, \Psi_{21} + i \sqrt{G_0}\, \Psi_{22} = -(b^2 c^2 X_2 X_3 + c^2 a^2 Y_2 Y_3 + a^2 b^2 Z_2 Z_3). \tag{40}$$

Si vede allora che per mezzo delle (36), (37), (38), (39) e (40) tutte le funzioni Ψ_{ik} sono esprimibili mediante le funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, e mediante gli elementi relativi alla soluzione X_3, Y_3, Z_3; onde daremo alle funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, il nome di ***funzioni trasformatrici.***

E fin da ora osserviamo che note le funzioni X_3, Y_3, Z_3, e note le funzioni trasformatrici $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, le nuove funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3, sono espresse dalle formole

$$\left.\begin{aligned} X'_3 &= \frac{1}{bc}\left(\sqrt{E'_0}\, X_1 + i \sqrt{G'_0}\, X_2\right), \\ Y'_3 &= \frac{1}{ca}\left(\sqrt{E'_0}\, Y_1 + i \sqrt{G'_0}\, Y_2\right), \\ Z'_3 &= \frac{1}{ab}\left(\sqrt{E'_0}\, Z_1 + i \sqrt{G'_0}\, Z_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

3. Fra le funzioni trasformatrici passa una notevole relazione, che si deduce esprimendo che le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3, soddisfano la prima del sistema (2). Essa è della forma

$$A_{11} E'_0 - A_{22} G'_0 + 2 i A_{12} \sqrt{E'_0}\, \sqrt{G'_0} = 1, \tag{42}$$

in cui si è posto

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= \frac{X_1^2}{b^2 c^2} + \frac{Y_1^2}{c^2 a^2} + \frac{Z_1^2}{a^2 b^2}, \\ A_{22} &= \frac{X_2^2}{b^2 c^2} + \frac{Y_2^2}{c^2 a^2} + \frac{Z_2^2}{a^2 b^2}, \\ A_{12} &= \frac{X_1 X_2}{b^2 c^2} + \frac{Y_1 Y_2}{c^2 a^2} + \frac{Z_1 Z_2}{a^2 b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Introducendo ancora le quantità

$$\left.\begin{aligned}
A_{33} &= \frac{X_3^2}{b^2 c^2} + \frac{Y_3^2}{c^2 a^2} + \frac{Z_3^2}{a^2 b^2}, \\
A_{13} &= \frac{X_1 X_3}{b^2 c^2} + \frac{Y_1 Y_3}{c^2 a^2} + \frac{Z_1 Z_3}{a^2 b^2}, \\
A_{23} &= \frac{X_2 X_3}{b^2 c^2} + \frac{Y_2 Y_3}{c^2 a^2} + \frac{Z_2 Z_3}{a^2 b^2},
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

avremo in tutto sei funzioni A_{ik} formate esclusivamente cogli elementi relativi alle funzioni X_3, Y_3, Z_3, e per l'uso che dovremo farne in seguito stabiliremo le formole che ne esprimono le derivate parziali prime.

A tate scopo basta derivare le (43), osservando le (6) e le (43) stesse, e troviamo così per le derivate richieste le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial A_{11}}{\partial \alpha} &= -2 \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} A_{12} - 2\sqrt{E_0}\, A_{13}, \\
\frac{\partial A_{11}}{\partial \beta} &= 2 \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} A_{12}, \\
\frac{\partial A_{12}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} (A_{11} - A_{22}) - \sqrt{E_0}\, A_{23}, \\
\frac{\partial A_{12}}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} (A_{22} - A_{11}) - \sqrt{G_0}\, A_{13}, \\
\frac{\partial A_{13}}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} A_{23} + \sqrt{E_0}\,(A_{11} - A_{33}), \\
\frac{\partial A_{13}}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} A_{23} + \sqrt{G_0}\, A_{12}, \\
\frac{\partial A_{22}}{\partial \alpha} &= 2 \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} A_{12}, \\
\frac{\partial A_{22}}{\partial \beta} &= -2 \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} A_{12} - 2\sqrt{G_0}\, A_{23}, \\
\frac{\partial A_{23}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} A_{13} + \sqrt{E_0}\, A_{12},
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial A_{23}}{\partial \beta} &= -\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} A_{13} + \sqrt{G_0}\,(A_{22} - A_{33}), \\
\frac{\partial A_{33}}{\partial \alpha} &= 2\sqrt{E_0}\, A_{13}, \\
\frac{\partial A_{33}}{\partial \beta} &= 2\sqrt{G_0}\, A_{23}.
\end{aligned}\right\} \tag{44}
$$

§ III. Il sistema differenziale per le funzioni trasformatrici.

4. Da quanto abbiamo stabilito nel precedente paragrafo, facilmente si ricava un sistema di equazioni differenziali per le funzioni trasformatrici $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$.

Per formare questo sistema basta esprimere che le funzioni X'_i, Y'_i, Z'_i, date dalle (30), (31) e (32), verificano le relazioni (25).

Derivando la prima delle (33), e sostituendo per le derivate di X_1, X_2, X_3, le loro espressioni date dalle (6) otteniamo

$$
b\,c\,\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} = X_1 \frac{\partial \Psi_{13}}{\partial \alpha} + X_2 \frac{\partial \Psi_{23}}{\partial \alpha} - \Psi_{13}\left(\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_2 + \sqrt{E_0}\, X_3\right) + \\
+ \Psi_{23} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_1 .
$$

Sostituendo in questa per Ψ_{13}, Ψ_{23} le loro espressioni (36), e tenendo conto che per essa e per la prima delle (30) deve essere soddisfatta la terza delle (25), troviamo

$$
X_1 \left(\frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \alpha} + i\sqrt{G'_0}\, \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \Psi_{11} \sqrt{E'_0}\right) + \\
+ i\, X_2 \left(\frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \alpha} + i\sqrt{E'_0}\, \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + i\, \Psi_{21} \sqrt{E'_0}\right) = 0.
$$

Analogamente operando sulla seconda e terza delle (33) perveniamo a due altre relazioni che si deducono da questa scambiando X in Y e poi in Z, sicchè concludiamo che si dovrà avere separatamente

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\alpha} &= -i\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta} + \Psi_{11}\sqrt{E'_0}\,, \\ \frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\alpha} &= -i\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta} - i\,\Psi_{21}\sqrt{E'_0}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Allo stesso modo ricaviamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\beta} &= i\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha} + \Psi_{12}\sqrt{G'_0}\,, \\ \frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\beta} &= i\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha} - i\,\Psi_{22}\sqrt{G'_0}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

5. Ciò posto deriviamo la (42), e sostituiamo per le derivate prime delle funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, A_{ik}, le loro espressioni date dalle precedenti e dalle (44). Ponendo per brevità

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \sqrt{E'_0}\,A_{11} + i\sqrt{G'_0}\,A_{12}\,, \\ N_2 &= \sqrt{E'_0}\,A_{21} + i\sqrt{G'_0}\,A_{22}\,, \\ N_3 &= \sqrt{E'_0}\,A_{31} + i\sqrt{G'_0}\,A_{32}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

troviamo con calcoli facili

$$\left.\begin{aligned} N_1\,\Psi_{11} + N_2\,\Psi_{21} &= N_3\sqrt{E_0}\,. \\ N_1\,\Psi_{12} + N_2\,\Psi_{22} &= i\,N_3\sqrt{G_0}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

D'altra parte dalla (37) e dalla (39) si ricava

$$\left.\begin{aligned} (\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})^2 = (E_0 - G_0)\Big[-E'_0 + b^2c^2X_1^2 + c^2a^2Y_1^2 + a^2b^2Z_1^2\Big] \\ -\Big[b^2c^2X_1X_3 + c^2a^2Y_1Y_3 + a^2b^2Z_1Z_3\Big]^2, \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

che si può anche scrivere

$$(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})^2 = -a^4b^4c^4\Big[E'_0(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) - A_{22}\Big];$$

mentre la (42) si può anche scrivere

$$N_2^2 = -E'_0(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) + A_{22}\,.$$

Quindi deduciamo

$$\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11} = \varepsilon\, a^2 b^2 c^2 N_2; \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{50}$$

e da questa e dalle (48) otteniamo

$$\sqrt{E_0}\,\Psi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21} = -\,\varepsilon\, a^2 b^2 c^2 N_1. \tag{51}$$

Ed allora riunendo queste con le (39) e (40) e risolvendo rispetto alle Ψ_{ik}, avremo:

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{11} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left(P_1\sqrt{E_0} - i\,\varepsilon\, a^2 b^2 c^2 \sqrt{G_0}\, N_2\right),\\
\Psi_{12} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left(i\, P_1\sqrt{G_0} + \varepsilon\, a^2 b^2 c^2 \sqrt{E_0}\, N_2\right),\\
\Psi_{21} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left(Q_1\sqrt{E_0} + i\,\varepsilon\, a^2 b^2 c^2 \sqrt{G_0}\, N_1\right),\\
\Psi_{22} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left(i\, Q_1\sqrt{G_0} - \varepsilon\, a^2 b^2 c^2 \sqrt{E_0}\, N_1\right),
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

in cui abbiamo posto per brevità

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= -\left(b^2 c^2 X_1 X_3 + c^2 a^2\, Y_1 Y_3 - a^2 b^2 Z_1 Z_3\right),\\
Q_1 &= -\left(b^2 c^2 X_2 X_3 + c^2 a^2\, Y_2 Y_3 + a^2 b^2 Z_2 Z_3\right).
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Siamo così condotti al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\alpha} &= -\,i\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta} + \Psi_{11}\sqrt{E'_0},\\
\frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\alpha} &= -\,i\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta} - i\,\Psi_{21}\sqrt{E'_0},\\
\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\beta} &= i\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\sqrt{G_0}}{\partial\alpha} + \Psi_{12}\sqrt{G'_0},\\
\frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\beta} &= i\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha} - i\,\Psi_{22}\sqrt{G'_0},
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

(in cui per le Ψ_{ik} si debbono intendere poste le espressioni (52)), che deve essere soddisfatto insieme alla relazione

$$A_{11}\, E'_0 - A_{22}\, G'_0 + 2\, i\, A_{12}\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0} = 1, \tag{55}$$

delle funzioni trasformatrici.

Notiamo infine che ha luogo identicamente la relazione

$$P_1 N_1 + Q_1 N_2 = N_3 (E_0 - G_0), \tag{56}$$

e che la (55) introducendo le funzioni

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0 (a^2 X_1^2 + b^2 Y_1^2 + c^2 Z_1^2), \\ F &= \sqrt{E_0} \sqrt{G_0} (a^2 X_1 X_2 + b^2 Y_1 Y_2 + c^2 Z_1 Z_2), \\ G &= G_0 (a^2 X_2^2 + b^2 Y_2^2 + c^2 Z_2^2), \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

che danno i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale della quadrica Q, si può anche scrivere sotto la forma

$$E \cdot \frac{E'_0}{E_0} + 2 F \frac{i \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0}}{\sqrt{E_0} \sqrt{G_0}} - G \frac{G'_0}{G_0} = a^2 b^2 c^2. \tag{58}$$

§ III. Teorema fondamentale.

6. I risultati che abbiamo stabilito fin qui sono stati tutti ricavati in base all'ipotesi dell'esistenza della soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3, del sistema (3) legata alla soluzione X_3, Y_2, Z_3 dalla relazione (16).

Ora dimostreremo inversamente che qualunque sia la soluzione particolare X_3, Y_3, Z_3, del sistema (3) esistono sempre infinite soluzioni X'_3, Y'_3, Z'_3, dello stesso sistema legate alla prima dalla relazione (16).

Da quanto abbiamo esposto nel primo paragrafo, conosciamo questo teorema per le quadriche di rotazione; ma qui vogliamo dimostrarlo per quadriche generali, cioè lasciando per a, b, c valori costanti qualsiasi.

Il teorema che vogliamo dimostrare può enunciarsi nel modo seguente:

Se X_3, Y_3, Z_3, *è una soluzione particolare qualunque del sistema* (3), *il sistema di equazioni differenziali* (54) (55) *nelle funzioni incognite* $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ *è illimitatamente integrabile. Assumendo una soluzione* $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ *di questo sistema, e ponendo*

$$\left.\begin{aligned} X'_3 &= \frac{1}{b\,c} (\sqrt{E'_0}\, X_1 + i \sqrt{G'_0}\, X_2), \\ Y'_3 &= \frac{1}{c\,a} (\sqrt{E'_0}\, Y_1 + i \sqrt{G'_0}\, Y_2), \\ Z'_3 &= \frac{1}{a\,b} (\sqrt{E'_0}\, Z_1 + i \sqrt{G'_0}\, Z_2), \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

avremo una nuova soluzione del sistema (3), *contenente una costante arbitraria, e legata alla prima dalla relazione* (16).

Infatti osserviamo anzitutto che dalle (52) seguono le (48); quindi dalla prima delle (54) e dalla (55) segue la seconda; e dalla terza delle (54) e dalla (55) segue la quarta ed inversamente.

Inoltre dalle espressioni (52) delle Ψ_{ik} sono soddisfatte le (37), (38), (39) e (40); e si ha pure

$$\Psi_{11}\Psi_{21}+\Psi_{12}\Psi_{22}=-i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}+b^2c^2X_1X_2+c^2a^2Y_1Y_2+a^2b^2Z_1Z_2,$$

donde per derivazione facilmente si deducono le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi_{11}}{\partial\alpha}&=-i\Psi_{12}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-\Psi_{21}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}-\Psi_{12}^2+E_0-E'_0,\\
\frac{\partial\Psi_{11}}{\partial\beta}&=-i\Psi_{12}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\Psi_{21}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-i\Psi_{12}\Psi_{21},\\
\frac{\partial\Psi_{21}}{\partial\alpha}&=-i\Psi_{22}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}+\Psi_{11}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}-\Psi_{12}\Psi_{22}-i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0},\\
\frac{\partial\Psi_{21}}{\partial\beta}&=-i\Psi_{22}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}-\Psi_{11}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-i\Psi_{21}\Psi_{22}+\sqrt{E_0}\sqrt{G_0},\\
\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial\alpha}&=i\Psi_{11}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-\Psi_{22}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\Psi_{11}\Psi_{12}+i\sqrt{E_0}\sqrt{G_0},\\
\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial\beta}&=i\Psi_{11}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\Psi_{22}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}+i\Psi_{21}\Psi_{11}-\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0},\\
\frac{\partial\Psi_{22}}{\partial\alpha}&=i\Psi_{21}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}+\Psi_{12}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\Psi_{12}\Psi_{21},\\
\frac{\partial\Psi_{22}}{\partial\beta}&=i\Psi_{21}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}-\Psi_{12}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}+i\Psi_{21}^2+iG_0-iG'_0.
\end{aligned}\right\}\tag{60}$$

Tenendo conto di queste e dell'equazione di Gauss

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}\right)+\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}=0,$$

si verifica subito che le condizioni d'integrabilità del sistema (54), (55) sono soddisfatte, sicchè esso sistema è illimitatamente integrabile.

Rimane ancora da dimostrare che le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3, soddisfano al sistema (3).

A tale scopo insieme alle funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 consideriamo le funzioni X'_1, Y'_1, Z'_1, e X'_2, Y'_2, Z'_2, date dalle (30) e (31); in forza delle (54) e delle (60), le funzioni X'_1, X_2, X'_3, soddisfano al sistema (25) ed allo stesso sistema soddisfano Y'_1, Y'_2, Y'_3, e Z'_1, Z'_2, Z'_3; inoltre si ha per la (55)

$$X'^2_3 + Y'^2_3 + Z'^2_3 = 1,$$

donde segue subito che il determinante

$$\begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{vmatrix}$$

è ortogonale.

Ed allora avremo dalle (25)

$$\Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}\right)^2 = E'_0, \quad \Sigma \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} \frac{\partial X'_3}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \beta}\right) = G'_0;$$

ma dalle (59) si ha inoltre

$$b^2 c^2 X'^2_3 + c^2 a^2 Y'^2_3 + a^2 b^2 Z'^2_3 = E'_0 - G'_0,$$

dunque le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 soddisfano al sistema (3); di più risulta dalle (59) stesse che la relazione (16) è verificata.

Nel teorema ora stabilito consiste la trasformazione che volevamo ottenere, la quale è la naturale generalizzazione a quadriche qualunque della trasformazione $H^{-1} B H$ delle superficie applicabili sulla sfera.

FINE DELLA PARTE PRIMA.

Sopra la traslazione uniforme di un solido in un liquido indefinito.

(*Di* U. Cisotti, *a Padova.*)

Si consideri la traslazione uniforme di un solido C, immerso in un liquido indefinitamente esteso, e sul quale non agiscono forze esterne.

Il moto di C mantiene nella massa liquida circostante una perturbazione (avente carattere permanente rispetto a C stesso) che si rende evanescente a grandi distanze da C.

I consueti metodi della idrodinamica razionale consentono, com'è ben noto, di caratterizzare analiticamente la questione, riconducendola, nel caso irrotazionale, ad un problema armonico esterno. — In modo preciso si è condotti alla ricerca di una funzione (*potenziale di velocità*) armonica e regolare nello spazio esterno a C, che soddisfa alle solite condizioni all'infinito, e della quale sono assegnati, sopra il contorno di C, i valori (dipendenti dalla velocità e dalla forma del solido) della derivata normale.

Si tratta insomma del problema di Neumann; in tal modo, dal punto di vista teorico, la questione può ritenersi risoluta.

Ma è desiderabile, in via concreta, di possedere mezzi che conducano direttamente a espressioni definitive ed esaurienti degli elementi del moto, espressioni analoghe a quelle che, ad es., si hanno nel caso classico del solido sferico.

Per quanto mi consta, nessun tentativo in questo senso è stato fatto per risolvere in modo altrettanto esauriente il caso generale in cui C ha forma qualunque.

Un notevole progresso può essere raggiunto se ci si limita al problema piano (profilo rigido piano che si muove nel proprio piano).

La preventiva analisi dell'andamento qualitativo del fenomeno, giova a porre la questione in termini precisi.

Indi, l'utile impiego della teoria delle funzioni, seguendo il metodo dovuto a Levi-Civita (*) e già così fecondo di concrete applicazioni, consente di assegnare l'integrale generale dei moti in questione.

In modo preciso, si perviene alla conclusione che ad ogni funzione analitica $\omega(\zeta)$ della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$, regolare per $|\zeta| > 1$ (punto all'infinito compreso), corrisponde il moto liquido subordinato alla traslazione uniforme di un certo profilo rigido. — Il profilo viene in tal modo caratterizzato a posteriori (**).

Che se si pone il problema della determinazione della funzione ω corrispondente ad un profilo preventivamente assegnato, giova distinguere tre casi:

a) il profilo è poligonale (a segmenti rettilinei);

b) il profilo è curvilineo a punti ordinari (non angolosi);

c) il profilo è mistilineo e presenta un numero finito di punti angolosi.

Nel primo caso si riesce ad assegnare la definitiva espressione di ω; nel secondo la funzione ω rimane caratterizzata da una relazione funzionale, tra la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario, che dev'essere soddisfatta al contorno $|\zeta| = 1$ del cerchio di regolarità; il terzo caso dipende manifestamente da convenienti combinazioni dei due primi.

Come illustrazione, particolarmente semplice, di profili curvilinei, assegno l'integrale ω corrispondente al profilo di forma circolare.

Si ritrovano in tal modo risultati ben noti.

Quale esempio di profili poligonali, prendo in esame il caso più semplice in cui il profilo consta di una lamina rettilinea comunque inclinata sulla direzione del suo moto. Si valutano agevolmente tutte le caratteristiche del moto liquido, in particolare le pressioni che il liquido esercita sugli elementi

(*) *Scie e leggi di resistenza* [Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1907, Tomo XXIII, pag. 1-37].

(**) Non mi sembra superfluo far rilevare il vantaggio contenuto in questo risultato. Infatti, a prima vista si sarebbe tratti a ritenere che l'originario problema di Neumann non è che un'altra forma dell'integrale generale della questione. Ora, assegnata, nel piano del moto, una funzione armonica ψ (*funzione di corrente*, coniugata al potenziale di velocità φ) regolare all'infinito, è bensì vero che ad ogni linea $\psi =$ costante, chiusa, e tale che, nello spazio ad essa esterno, la ψ si comporti regolarmente, corrisponde un profilo rigido (e la ψ stessa caratterizza il moto subordinato del liquido), *ma il campo di regolarità della ψ risulta in tal modo una incognita funzione della ψ stessa.* — Colla introduzione d'una opportuna funzione analitica $\omega(\zeta)$ *il campo di regolarità è invece sempre, la regione esterna alla circonferenza* $|\zeta| - 1$.

della lamina. — Com'è noto (*) queste pressioni si riducono ad un'unica coppia. — Essa è nulla solamente quando la lamina forma colla direzione della traslazione un angolo nullo, oppure di 90° (com'è del resto evidente essendo questi i due soli casi possibili di *simmetria*).

Non è più nulla negli altri casi: la coppia tende allora a fare assumere alla lamina direzione normale a quella di traslazione.

Tale conclusione non è priva di interesse, specialmente se si immagina di passare (mediante il noto artifizio di imprimere a tutto il sistema solido-liquido una traslazione uniforme *opposta* a quella del solido) al problema (analiticamente equivalente) della corrente liquida che investe la lamina *fissa*.

Supposto che invece di essere *fissa*, la lamina sia semplicemente *fissata nel suo punto di mezzo*, la conclusione precedente consente di asserire che la lamina può trovarsi in equilibrio soltanto in due posizioni: quando forma colla direzione generale della corrente investitrice un angolo nullo, oppure di 90°.

In quest'ultima posizione, l'equilibrio è *stabile; instabile* nell'altra.

Posta in una posizione intermedia, la lamina va ad assumere quella di equilibrio stabile.

1. — Generalità.

Sia C una porzione di piano, dotata di traslazione uniforme (nel suo stesso piano) con velocità unitaria, in valore assoluto, e la cui direzione assumeremo come verso *negativo* di un asse x, rigidamente collegato con C.

Sia γ il contorno di C (*profilo rigido*).

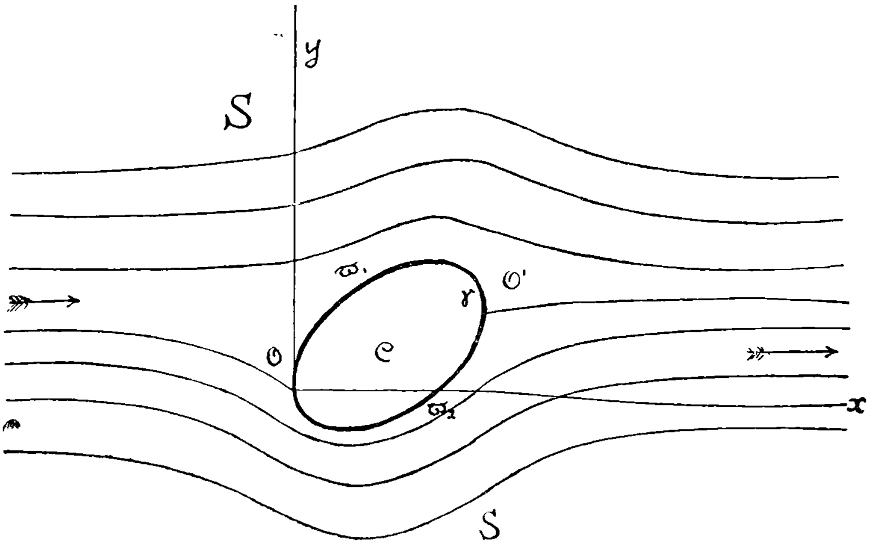
Immaginiamo C immerso in un liquido (fluido omogeneo incomprimibile, la cui densità, costante, converrà assumere eguale ad 1) che riempie tutto lo spazio S esterno a C, e libero da forze di massa.

Il moto di C provoca nel liquido che trovasi in S una perturbazione, avente carattere stazionario (rispetto a C) e che si rende tanto meno sensibile quanto più ci si discosta da C.

Supporremo che in S il moto sia *continuo* ed *irrotazionale*.

(*) Cf. Cisotti, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1909, Tomo LXIX, pag. 444].

Poichè, come si è già rilevato, l'influenza della traslazione di C sul liquido diviene evanescente in punti lontani da C, si deduce, in particolare, che la velocità comunicata da C alle molecole liquide, tende a zero in punti infinitamente lontani da C.



Se si ricorre al notissimo artifizio di imprimere a tutto il sistema (solido-liquido) una traslazione uniforme di velocità unitaria nel senso delle x positive, non viene manifestamente alterato il moto relativo delle singole parti.

Allora C è ridotto alla quiete, e le particelle che trovansi in S a grandi distanze da C scorrono con velocità limite unitaria nel senso delle x positive.

Si ha insomma una corrente modificata dalla presenza del profilo immobile γ.

La modificazione si può schematizzare nel modo seguente.

Un solo filetto, quello che colpisce il profilo γ a monte, subisce un momentaneo arresto in un punto O (*prora*), ivi si bipartisce, e i due rami proseguono: uno piega a *sinistra* e scorre lungo un tratto ϖ_1 di γ, l'altro tiene la *destra* e lambisce la rimanente parte ϖ_2 di γ. Dopo di avere in tal modo bagnato tutto il profilo γ, i due rami si riuniscono in un punto O' (*poppa*) di γ stesso, per dar luogo nuovamente ad un unico filetto che si protende indefinitamente a valle.

Tutti gli altri filetti vengono più o meno deviati; nessun' altro subisce arresti. — In sostanza ciò equivale a dire che il valore assoluto della velocità è nullo in O e in O' e maggiore di zero in ogni altro punto di S; più precisamente esclusi degli intorni (comunque piccoli) di O e O', il valore assoluto della velocità ammette un limite inferiore positivo (*).

Il problema della traslazione di C e quello della corrente investitrice sono analiticamente equivalenti.

Gioverà riferirsi a quest'ultimo, che riporta a elementi assoluti del moto.

Assumeremo la prora O come origine delle coordinate.

Sieno: 2α l'angolo delle tangenti in O a ϖ_1 e ϖ_2, considerate nel verso del flusso ($2\alpha = \pi$ quando O è un punto ordinario, non angoloso); $\delta + \alpha$ l'angolo che la tangente a ϖ_1 nel senso del flusso, forma colla direzione positiva dell'asse x; l'angolo dell'analoga tangente a ϖ_2 sarà allora $\delta - \alpha$.

Parimenti siano: $2\alpha'$ l'angolo delle tangenti in O' a ϖ_1 e ϖ_2, considerate sempre nel verso del flusso ($2\alpha' = -\pi$ quando O' è un punto ordinario, non angoloso); $\delta' + \alpha'$ l'angolo che la tangente a ϖ_1, nel verso considerato, forma colla direzione positiva dell'asse x; l'angolo dell'analoga tangente a ϖ_2 sarà allora $\delta' - \alpha'$.

δ e δ' sono nulli quando il profilo γ è simmetrico e simmetricamente orientato rispetto alla direzione dell'asse x.

Poichè, per ipotesi, in S il moto è regolare ed irrotazionale, dette u e v le componenti della velocità nel punto generico $P(x, y)$ si avranno: un *potenziale di velocità* $\varphi(x, y)$ ed una *funzione di corrente* $\psi(x, y)$, armoniche e regolari in S, definite dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= u\,dx + v\,dy, \\ d\psi &= -v\,dx + u\,dy, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

colle determinazioni $\varphi = \psi = 0$ in O.

L'ipotesi che i filetti liquidi sufficientemente lontani da C scorrano paralleli fra loro ed all'asse x con velocità unitaria, si traduce analiticamente nelle condizioni

$$\lim_{OP=\infty} u = 1, \qquad \lim_{OP=\infty} v = 0. \tag{2}$$

Le condizioni al contorno γ provengono dall'esprimere che γ è costituita da linee di flusso. — Com'è ben noto, ciò dà luogo alla condizione $\psi =$ co-

(*) Non è escluso che il valore assoluto della velocità possa annullarsi anche in un numero finito di punti (angolosi) del profilo γ; vorrà dire che esso ammette un limite inferiore positivo in S, quando si escludano, con intorni comunque piccoli, anche questi punti.

stante sopra γ, e poichè $\psi = 0$ in O, avremo

$$\psi = 0 \qquad \text{sopra } \gamma. \tag{3}$$

Ciò posto, si può intanto concludere che la ψ è funzione uniforme. Per poter asserire altrettanto per la associata φ basta notare che la circolazione $\int (u\,dx + v\,dy)$, relativa ad una circonferenza di raggio infinitamente grande, è per (2) identicamente nulla, se si ammette — come facciamo — che a grandi distanze da C, $u-1$ e v si annullino di ordine superiore al primo.

Il senso del moto è ovunque ben determinato, per essere

$$V = |\sqrt{u^2+v^2}| > 0,$$

eccettuati i punti O e O' [ed eventualmente un numero finito di punti di γ (cfr. la nota a pag. 87)] in cui $V=0$; designando perciò con ds l'elemento d'arco di una generica linea di flusso, contato positivamente nel senso del flusso, si avrà

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

e quindi

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = V > 0,$$

in ogni punto, eccettuati O ed O' (e gli eventuali altri punti, angolosi, di γ).

Anzi, siccome esclusi due intorni I e I', comunque piccoli, di O e O' [ed eventuali piccoli intorni di punti angolosi di γ] il limite inferiore dei valori di V è una costante $\varepsilon > 0$, potremo ritenere in tutti i punti di una generica linea di flusso esterni a detti intorni,

$$\frac{d\varphi}{ds} = V \geqq \varepsilon > 0.$$

Ora, detto φ' il valore di φ in O', per essere $\varphi = 0$ in O, dalla precedente diseguaglianza scende che la φ va sempre crescendo, quando si procede nel senso del flusso, sia sopra ϖ_1 che sopra ϖ_2, assumendo in entrambi i casi tutti i valori da 0 fino a $\varphi' > 0$.

2. – La funzione ω.

Posto, al solito

$$\left.\begin{aligned} x + i\,y &= z, \\ u - i\,v &= w, \\ \varphi + i\,\psi &= f, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

per le (1), w ed f risultano funzioni della variabile complessa $z = x + i\,y$, e le (1) stesse si compendiano nella relazione

$$\frac{d\,f}{d\,z} = w. \tag{5}$$

La funzione $w\,(z)$ è uniforme in S, per le (2) all'infinito $|\,w\,| = V = 1$, mentre $|\,w\,| = V > 0$ nei punti di S al finito, eccettuati i punti O e O' [ed eventualmente un numero finito di punti appartenenti a γ], in cui $|\,w\,| = 0$.

La funzione $f\,(z)$ è regolare (al finito) e per (5) è $\left|\frac{d\,f}{d\,z}\right| > 0$ entro S.

Poniamo

$$w = e^{-i\omega}, \tag{6}$$

facendo la convenzione che per $z = \infty$ $[\,|\,w\,| = 1\,]$, sia $\omega = 0$; rimane così definita una funzione $\omega\,(z)$, uniforme in S, finita e continua anche su γ, ad eccezione dei punti O, O' (ed eventualmente un numero finito di punti).

Dalle (6), posto

$$\omega = \vartheta + i\,\tau, \qquad (\vartheta \text{ e } \tau \text{ reali}), \tag{7}$$

si deducono le relazioni

$$\left.\begin{aligned} |\,w\,| = \left|\sqrt{u^2 + v^2}\right| &= V = e^{\tau}, \\ \frac{u + i\,v}{V} &= e^{i\vartheta}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

La parte reale ϑ di ω definisce, come si vede, l'angolo che in ogni punto, la linea di flusso che lo contiene, forma colla direzione positiva dell'asse x.

Per le ipotesi fatte, facilmente si riconosce che ϑ va contato fra $-\pi$ e π, positivamente nel verso $x \rightarrow y$, partendo dalla direzione positiva dell'asse x; negativamente nel verso opposto.

Per quanto si è visto al n.° 1 si ha senz'altro,

$$\left.\begin{array}{l} \lim \vartheta = \delta + \alpha, \text{ avvicinandosi a } O \text{ sopra } \varpi_1, \\ \lim \vartheta = \delta - \alpha, \text{ avvicinandosi a } O \text{ sopra } \varpi_2, \\ \lim \vartheta = \delta' + \alpha', \text{ avvicinandosi a } O' \text{ sopra } \varpi_1, \\ \lim \vartheta = \delta' - \alpha', \text{ avvicinandosi a } O' \text{ sopra } \varpi_2, \end{array}\right\} \qquad (9)$$

la ϑ dovendo naturalmente seguire anche negli altri punti di ϖ_1 e ϖ_2 l'andamento del profilo rigido.

Lasciando per ora indeterminata la forma del profilo γ, ci basterà tenere presente che *la funzione* $\omega(z) = \vartheta(x, y) + i\tau(x, y)$ *dev'essere regolare in* S, *annullarsi all'infinito, e sul contorno* γ *la sua parte reale deve soddisfare alle* (9).

3. — Cambiamenti di variabile.

Converrà eseguire dei cambiamenti di variabile che consentano di sostituire al campo S, la parte di piano esterna a una circonferenza di raggio 1.

Cominciamo col rappresentare nel piano complesso $f = \varphi + i\psi$ i valori che assume la funzione $f(z)$, col variare di z in S.

Quando z si trova sul profilo γ, f è reale, in causa di (3); in particolare al punto O corrisponde $f = 0$. Procedendo poi da O su γ, in uno qualunque dei due sensi fino a O' (percorrendo cioè ϖ_1 oppure ϖ_2), f assume tutti i valori reali compresi fra 0 e φ' [Cfr. n.° 1]; c' è quindi corrispondenza (1, 2) fra il profilo γ del piano z e il tratto $(0, \varphi')$ dell'asse reale del piano f.

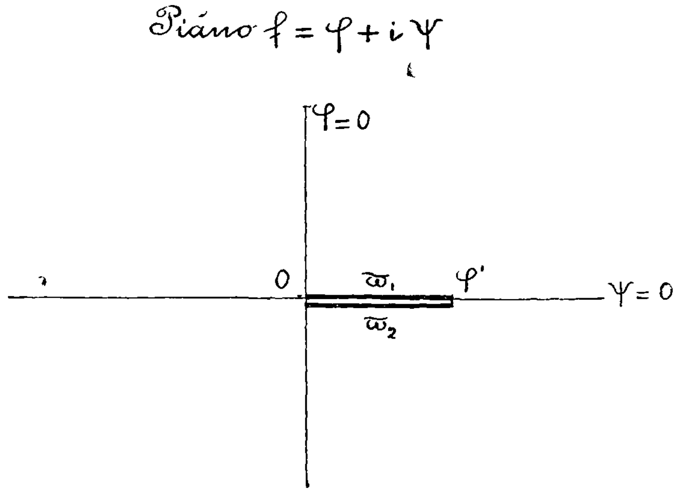
La corrispondenza si rende manifestamente biunivoca immaginando di praticare nel piano f, un taglio lungo il segmento $(0\,\varphi')$ dell'asse reale.

In tal modo il tratto $(0, \varphi')$ rimane sdoppiato, e per la biunivocità della corrispondenza, basta convenire che, p. es., il lembo superiore del taglio (quello rivolto verso il semipiano $\psi > 0$) rappresenti i valori presi, da f, sopra ϖ_1, il lembo inferiore i valori che f assume sopra ϖ_2.

Dopo ciò, se si tiene presente [Cfr. n.° 2] che $f(z)$ si mantiene, in S, regolare per valori di z il cui modulo è finito, mentre che per $z = \infty$ è $f = \infty$, abbiamo quanto basta per poter concludere che la relazione

$$f = f(z),$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca fra il campo S e il piano tagliato f.



Considerando pertanto la z come funzione di f nel piano tagliato, la z si mantiene regolare, al finito, e diviene infinita per f infinito.

Vogliamo ora eseguire un cambiamento di variabile per cui il piano tagliato f venga sostituito dalla parte di piano esterna ad una circonferenza di raggio 1.

Basta porre a tal uopo

$$f = \frac{1}{4}\varphi'\left(2 + \zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \tag{10}$$

designando $\zeta = \xi + i\eta$ una nuova variabile complessa.

Si vede tosto che, mediante questa relazione, si può sostituire al piano tagliato f il campo di punti $|\zeta| \geq 1$ del piano $\zeta = \xi + i\eta$.

Posto infatti

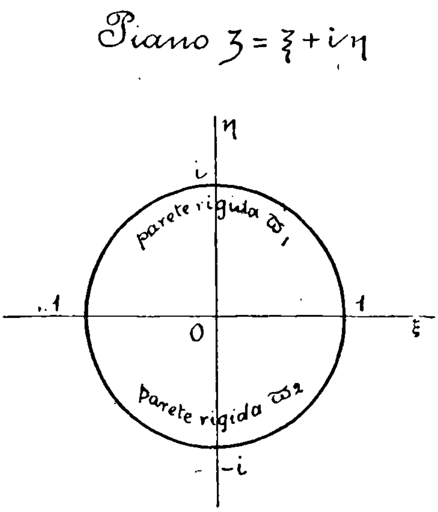
$$\zeta = \rho e^{i\sigma},$$

dalla (10), che diviene

$$f = \varphi + i\psi = \frac{1}{4}\varphi'\left\{2 + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\sigma + i\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\sigma\right\},$$

scendono le relazioni seguenti

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4}\varphi'\left\{2+\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\sigma\right\},\\ \psi &= \frac{1}{4}\varphi'\left\{\rho-\frac{1}{\rho}\right\}\operatorname{sen}\sigma.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$



Per $\rho=1$, le precedenti divengono

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2}\varphi'(1+\cos\sigma),\\ \psi &= 0.\end{aligned}\right\}\tag{11'}$$

Ciò intanto mostra che ai punti della circonferenza $|\zeta|=1$ del piano ζ fanno riscontro punti appartenenti all'asse reale del piano tagliato f.

Poichè, come risulta dalla prima delle (11'), facendo variare σ da π fino a O, oppure da $-\pi$ fino a O, φ assume in entrambi i casi tutti i valori da O fino a φ', si può concludere che alle semicirconferenze $(-1, i, 1)$ e $(-1, -i, 1)$ si possono far corrispondere i lembi, rispettivamente superiore e inferiore, del taglio del piano f. Ai punti O e φ' [rappresentativi della prora O e della poppa O'] fanno riscontro i punti -1 e $+1$.

Notiamo infine che per $\rho \geqq 1$ e $0 \leqq \sigma \leqq \pi$ è $\psi \geqq 0$; mentre per $\rho \geqq 1$ e $-\pi \leqq \sigma \leqq 0$ è $\psi \leqq 0$.

Ciò significa che ai punti del piano ζ esterni alla circonferenza $|\zeta|=1$, corrispondono punti f del piano tagliato non appartenenti ai lembi del taglio, e precisamente ai punti di ordinate di un determinato segno dell'uno, punti di ordinate dello stesso segno dell'altro, e in particolare a punti appartenenti all'asse reale dell'uno, punti dell'asse reale dell'altro.

Pertanto la (10) definisce l'annunciata corrispondenza biunivoca fra il piano tagliato $f=\varphi+i\psi$ e il campo $|\zeta| \geqq 1$ del piano $\zeta=\xi+i\eta$.

Facilmente si scorge che, a coppie di punti z simmetrici rispetto all'asse reale, fanno pure riscontro nei rispettivi piani f e ζ, coppie di punti simmetrici rispetto all'asse reale.

Ciò posto, considerando *la* $\omega = \vartheta + i\tau$, del numero precedente, come funzione dell'argomento ζ nel campo $|\zeta| \geqq 1$, essa *dev'essere regolare per* $|\zeta| > 1$, *annullarsi all'infinito, e per le* (9), *la sua parte reale* ϑ *deve comportarsi, sopra* $|\zeta| = 1$, *nel modo seguente*

$$\left.\begin{array}{llll} \lim \vartheta = \delta + \alpha & \text{quando } \zeta \text{ si avvicina a } -1 & \text{lungo l'arco} & (-1,\ i), \\ \lim \vartheta = \delta - \alpha & \text{» » » » } -1 & \text{» »} & (-1,\ -i), \\ \lim \vartheta = \delta' + \alpha' & \text{» » » » } 1 & \text{» »} & (1,\ i), \\ \lim \vartheta = \delta' - \alpha' & \text{» » » » } 1 & \text{» »} & (1,\ -i). \end{array}\right\} \quad (9')$$

4. — **Integrale generale corrispondente a profili poligonali.**

Immaginiamo decomposta la semicirconferenza $(1, i, -1)$ del piano ζ in p parti, e la semicirconferenza $(-1, -i, 1)$ in $n - p\ (n > p)$ parti, mediante $n - 1$ punti di divisione

$$\zeta_1 = e^{i\sigma_1}, \qquad \zeta_2 = e^{i\sigma_2}, \ldots, \qquad \zeta_p = e^{i\sigma_p} = e^{i\pi} = -1,$$

$$\zeta_{p+1} = e^{i\sigma_{p+1}}, \quad \zeta_{p+2} = e^{i\sigma_{p+2}}, \ldots, \quad \zeta_{n-1} = e^{i\sigma_{n-1}}; \quad \zeta_n = e^{i\sigma_n} = e^{2i\pi} = 1.$$

Poniamo

$$\left.\begin{array}{l} \delta' + \alpha' = \vartheta_1, \\ \delta + \alpha = \vartheta_p, \\ \delta - \alpha = \vartheta_{p+1}, \\ \delta' - \alpha' = \vartheta_n; \end{array}\right\} \quad (12)$$

e

$$\left.\begin{array}{l} \pi\,\omega(\zeta) = \dfrac{1}{2}\vartheta_1\sigma_1 - i\,\vartheta_1 \log \dfrac{1 - \zeta e^{-i\sigma_1}}{1 - \zeta} + \\ + \displaystyle\sum_{2}^{n}{}_r\, \vartheta_r \left[\frac{\sigma_r - \sigma_{r-1}}{2} - i \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_r}}{1 - \zeta e^{-i\sigma_{r-1}}}\right]. \end{array}\right\} \quad (13)$$

La funzione $\omega(\zeta)$, ora definita, è regolare per $|\zeta| > 1$, finita all'infinito, e sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$ la parte reale ϑ di ω prende (*)

$$\begin{array}{lllll}
\text{il valore} & \vartheta_1 & \text{per} & 0 & < \sigma < \sigma_1 , \\
\text{»} \quad \text{»} & \vartheta_2 & \text{»} & \sigma_1 & < \sigma < \sigma_2 , \\
\cdots & & & & \\
\text{»} \quad \text{»} & \vartheta_p & \text{»} & \sigma_{p-1} & < \sigma < \sigma_p = \pi , \\
\text{»} \quad \text{»} & \vartheta_{p+1} & \text{»} & \sigma_p & < \sigma < \sigma_{p+1} , \\
\cdots & & & & \\
\text{»} \quad \text{»} & \vartheta_n & \text{»} & \sigma_{n-1} & < \sigma < \sigma_n = 2\pi .
\end{array}$$

Per $\zeta = \infty$ dev'essere $\omega = 0$ [Cfr. n.° 3]; questa condizione dà luogo alla seguente relazione tra le costanti σ_r e ϑ_r:

$$\vartheta_1 \sigma_1 + \sum_2^n {}_r \vartheta_r (\sigma_r - \sigma_{r-1}) = 0. \tag{14}$$

Tenendo conto di questa identità, la (13) definisce una funzione $\omega(\zeta)$ che soddisfa a tutte le volute condizioni [Cfr. la fine del n.° 3].

Essa è pertanto integrale del problema che stiamo trattando.

Vediamo a quale tipo di profili rigidi corrisponde.

Tenendo presente il significato di ϑ [Cfr. n.° 2], ed il comportamento della parte reale della $\omega(\zeta)$ definita da (13), scende tosto che il profilo γ è costituito di segmenti rettilinei, corrispondenti agli archi $(1, \zeta_1)$, (ζ_1, ζ_2),..., ed inclinati sull'asse x rispettivamente degli angoli ϑ_1, ϑ_2,... (naturalmente considerato ciascun segmento nel verso del flusso).

Possiamo adunque concludere che la (13), tenuto conto di (14), costituisce l'integrale generale corrispondente a profili poligonali comunque assegnati.

Nel caso particolare e notevole di profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto all'asse x, alla condizione (14) sono da aggiungersi le ovvie

(*) Per la costruzione della $\omega(\zeta)$ definita da (13) si può seguire del tutto il metodo che ho già avuto occasione di esporre [Cfr. Cisotti, *Vene fluenti.* Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1908, Tomo XXV, pag. 166 e seguenti]. Il calcolo è stato fatto recentemente dal sig. Villat, *Sur le problème de Dirichlet relatif au cercle* [Bulletin de la Société math. de France, t. XXXIX, 1911, pag. 443 e seguenti].

condizioni (*condizioni di simmetria*) [Cfr. n.° 3]

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma_h + \sigma_{n-h} = 0, & (h = 1, 2, \ldots, n-1); \\ \vartheta_j + \vartheta_{n-j+1} = 0, & (j = 1, 2, \ldots, n).\end{array}\right\} \qquad (15)$$

5. — **Profili curvilinei a punti ordinari (non angolosi).**

Poniamo

$$\omega_0(\zeta) = i \log\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right). \qquad (16)$$

La funzione $\omega_0(\zeta)$ è regolare per $|\zeta| > 1$, si annulla per $\zeta = \infty$; di più sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$, soddisfa alle condizioni (9') in cui si faccia $\alpha = -\alpha' = \frac{\pi}{2}$, $\delta = \delta' = 0$.

Posto infatti nella precedente $\zeta = e^{i\sigma}$, e $\omega_0 = \vartheta_0 + i\,\tau_0$, si ricava

$$\left.\begin{array}{llll}\vartheta_0 = \sigma - \frac{\pi}{2}, & \tau_0 = \log 2 + \log \operatorname{sen} \sigma & \text{per} & 0 \leq \sigma \leq \pi, \\ \vartheta_0 = \sigma_0 + \frac{\pi}{2}, & \tau_0 = \log 2 + \log |\operatorname{sen} \sigma| & \text{per} & -\pi \leq \sigma \leq 0.\end{array}\right\} \quad (16')$$

Risulta appunto da queste che la parte reale ϑ_0 di ω_0 ha sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$, il comportamento accennato, c. d. d.

La ω_0, soddisfacendo a tutte le volute condizioni [Cfr. n.° 3] è un integrale particolare della questione.

Vedremo tra poco a quale tipo di profili essa corrisponde; cerchiamo ora di assegnare l'integrale generale cui danno luogo i profili curvilinei senza punti angolosi.

Designi $\Omega(\zeta)$ una funzione di ζ, regolare per $\zeta| \geq 1$, nulla per $\zeta = \infty$ e tale che

$$\left.\begin{array}{l}\Omega(-1) = \delta, \\ \Omega(+1) = \delta'.\end{array}\right\} \qquad (17)$$

Si può concludere che la funzione

$$\omega = \omega_0 + \Omega, \qquad (18)$$

soddisfa nel modo più generale alle condizioni specificate alla fine del n.° 3, nell'ipotesi che *il profilo γ sia a punti ordinari (non angolosi). Essa ne costituisce pertanto l'integrale generale.*

Poichè $\Omega(\zeta)$ è funzione regolare per $|\zeta| \geq 1$, e si annulla per $\zeta = \infty$, essa si può rappresentare mediante una serie di Taylor

$$\Omega(\zeta) = \sum_1^\infty {}_n \frac{c_n}{\zeta^n}, \tag{19}$$

i cui coefficienti (complessi) c_n rendono la serie stessa convergente fuori e sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$.

Le condizioni (17), portano tra le costanti c_n, i vincoli espressi dalle due relazioni seguenti

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^\infty {}_n (-1)^n c_n = \delta, \\ &\sum_1^\infty {}_n c_n = \delta'. \end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

Vediamo quali semplificazioni consente di introdurre l'ipotesi che si tratti di profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto all'asse x.

In tale ipotesi, in punti simmetrici rispetto all'asse x le velocità pure devono essere simmetriche, si hanno cioè per $w = u - i v$ valori coniugati; in particolare sull'asse reale dev'essere w reale.

A norma della (6)

$$w = e^{-i\omega},$$

anche $i\omega$ deve assumere valori coniugati in punti coniugati e, in particolare, reali sull'asse reale. Ma a coppie di punti coniugati del piano z fanno riscontro coppie di punti coniugati nel piano ζ [Cfr. n.° 3], in particolare si corrispondono i rispettivi assi reali. Pertanto $i\omega$ dev'essere reale sull'asse reale.

Se si nota che $i\omega_0$ è reale per ζ reale e > 1, e che quando c'è simmetria, $\delta = \delta' = 0$ [Cfr. n.° 1], si può concludere che *per profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto all'asse x, $\delta = \delta' = 0$, e Ω è funzione di ζ puramente immaginaria sull'asse reale.*

Lo sviluppo di $\Omega(\zeta)$ risulta quindi del tipo

$$\Omega(\zeta) = i \sum_1^\infty {}_n \frac{b_n}{\zeta^n}, \tag{19'}$$

dove b_n sono costanti reali.

Le condizioni (17′) vanno naturalmente sostituite colle seguenti

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty {}_n (-1)^n b_n = 0,\\ &\sum_1^\infty {}_n b_n = 0,\end{aligned}\right\} \tag{17''}$$

o, ciò che è lo stesso, colle seguenti

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty {}_n b_{2n} = 0,\\ &\sum_1^\infty {}_n b_{2n-1} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{17'''}$$

le quali si possono enunciare brevemente dicendo che *la somma dei coefficienti d'indici pari e la somma dei coefficienti di indici dispari sono entrambe nulle.*

Ad ogni ω che rientra nella (18) corrisponde adunque il moto subordinato alla traslazione uniforme di un determinato profilo, che in tal modo viene determinato a posteriori.

Ma può chiedersi, come si debba determinare la ω che deve corrispondere ad un profilo preventivamente assegnato.

Come ora vedremo, la ω rimane allora caratterizzata da una relazione funzionale tra la sua parte reale ϑ ed il coefficiente τ di i, che dev'essere soddisfatta sulla circonferenza $|\zeta| = 1$.

L'espressione dell'elemento lineare del piano z, cioè di $|dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}|$, è, a norma di (5), (6) e (7),

$$|dz| = |e^\omega|\,|df| = e^{-\tau}\,|df|. \tag{20}$$

L'angolo di contingenza lungo una generica linea di flusso (in particolare, lungo γ) è $d\vartheta$; designando con c la curvatura, si ha, per la precedente

$$c = \frac{d\vartheta}{|dz|} = e^\tau \frac{d\vartheta}{|df|}. \tag{21}$$

Ora da (10), differenziando si ottiene,

$$df = \frac{1}{4}\varphi'\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}; \tag{22}$$

in particolare, essendo per i punti della circonferenza $|\zeta| = 1$,

$$\zeta = e^{i\sigma} \, (0 \leq \sigma \leq 2\pi)$$

si ha

$$d f = -\frac{1}{2} \varphi' \operatorname{sen} \sigma \, d\sigma. \tag{22'}$$

Ricordiamo che alla circonferenza $|\zeta| = 1$ fa riscontro il profilo γ nel piano del moto [Cfr. n.° 3]; avremo quindi per l'arco elementare $d\gamma$, a norma delle (20) e (22'), la espressione

$$d\gamma = \frac{1}{2} \varphi' \,|\operatorname{sen} \sigma| \cdot |d\sigma|;$$

e per la curvatura c, a norma di (21),

$$c = \frac{d\vartheta}{d\gamma} = \frac{2 e^{\tau}}{\varphi' \,|\operatorname{sen} \sigma|} \cdot \frac{d\vartheta}{|d\sigma|}. \tag{23}$$

Applichiamo questa relazione alla soluzione particolare ω_0, definita da (16).

Poichè da (16') scendono le

$$\frac{d\vartheta_0}{d\sigma} = 1, \qquad e^{\tau_0} = 2 \,|\operatorname{sen} \sigma|, \tag{24}$$

la (23) diviene

$$c = \frac{4}{\varphi'}.$$

Dunque *la soluzione* ω_0 *corrisponde ad un profilo circolare.* Ritroveremo questo risultato al numero seguente.

Ora notiamo che fra le parti reali ed i coefficienti di i in ω, ω_0, $\Omega = \Theta + i\,T$, sussistono, per (18), le relazioni

$$\tau = \tau_0 + T, \qquad \vartheta = \vartheta_0 + \Theta;$$

tenendo presenti (24), la (23) dà luogo alla seguente relazione fra Θ e T,

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = \frac{1}{4} \varphi' c(\Theta) \, e^{-T} \tag{25}$$

con σ crescente da 0 a 2π.

Scrivendo $c(\Theta)$ si è voluto mettere in evidenza che c è a ritenersi funzione di Θ conosciuta, quando si risguardi nota la forma geometrica del profilo γ.

Infatti, dato γ, la curvatura c è nota come funzione del punto corrispondente, e quindi anche come funzione di un qualunque parametro atto a definire γ stesso; in particolare come tale parametro può assumersi il ϑ e quindi, per la (18), Θ.

In definitiva, *per un contorno assegnato, la funzione* Ω (*e quindi* ω) *risulta caratterizzata: dalla relazione funzionale* (25) *tra* Θ *e* T *sul contorno* $|\zeta| = 1$, *oltre che dalla condizione di annullarsi per* $\zeta = \infty$, *e dalle condizioni* (17).

6. — **Profilo circolare.**

Abbiamo già veduto al numero precedente, che alla soluzione particolare $\omega = \omega_0$ $(\Omega = 0)$ corrisponde un profilo γ di forma circolare.

Ci proponiamo di ritrovare questa conclusione per via diretta, e ricavare le espressioni ben note pel potenziale di velocità e per la funzione di corrente.

Da (5), (6), (16), (22) scende la seguente relazione differenziale

$$d z = e^{i\omega} d f = \frac{1}{4} \varphi' d \zeta,$$

da cui, integrando, si ottiene

$$z - z_0 = \frac{1}{4} \varphi' \zeta \qquad (z_0, \text{ costante di integrazione}). \tag{26}$$

Da questa relazione lineare che lega le affisse dei punti dei due piani complessi $z = x + i y$, $\zeta = \xi + i \eta$, nel caso particolare che si considera, scende immediatamente che, quando ζ descrive la circonferenza $|\zeta| = 1$, il punto z descrive la circonferenza

$$|z - z_0| = \frac{1}{4} \varphi',$$

cioè la circonferenza di centro z_0 e raggio $\frac{1}{4} \varphi'$.

Immaginiamo di riferirci al centro, e di chiamare r il raggio, si ha allora $z_0 = 0$ e $\frac{1}{4}\varphi' = r$, e la (26) assume l'aspetto ancor più semplice

$$z = r\zeta. \tag{26'}$$

Per questa la (16), tenuto conto di (6) e (5), permette di definire la velocità w e la funzione f nel modo seguente

$$\left.\begin{aligned} w &= 1 - \frac{r^2}{z^2}, \\ f &= z + \frac{r^2}{z^2} + \text{costante}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Ponendo in quest'ultima $f = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$, e separando la parte reale dal coefficiente di i, si ricavano pel potenziale di velocità φ, e per la funzione di corrente ψ, le ben note espressioni (*)

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= x\left[1 + \frac{r^2}{x^2 + y^2}\right] + \text{costante}, \\ \psi &= y\left[1 - \frac{r^2}{x^2 + y^2}\right] + \text{costante}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

7. — **Lamina rettilinea.**

La (14) è identicamente soddisfatta se, ponendo in essa $n = 4$, si assume

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= \alpha - \pi, & \sigma_1 &= \alpha, \\ \vartheta_2 &= \alpha, & \sigma_2 &= \pi, \\ \vartheta_3 &= \alpha - \pi, & \sigma_3 &= \pi + \alpha, \\ \vartheta_4 &= \alpha; & \sigma_4 &= 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

La (13) diviene in tal caso

$$\omega(\zeta) = i \log \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - e^{2i\alpha}}. \tag{30}$$

(*) Cfr. ad es. LAMB, *Hydrodynamics* [Cambridge, University Press, third edition, 1906, pag. 74].

Dalle (29) scende che il profilo γ è costituito da una lamina rettilinea, inclinata di un angolo α sopra l'asse x.

Ciò del resto lo si può dedurre direttamente.

Infatti da (5), (6) e (22) si ricava

$$dz = \frac{1}{4}\varphi'\left(1 - \frac{e^{2i\alpha}}{\zeta^2}\right) d\zeta,$$

da cui, integrando,

$$z - z_0 = \frac{1}{4}\varphi'\left(\zeta + \frac{e^{2i\alpha}}{\zeta}\right),$$

z_0 designando la costante (complessa) di integrazione. Poichè a $\zeta = -1$ corrisponde $z = 0$, avremo

$$z_0 = \frac{\varphi'}{4}(1 + e^{2i\alpha}),$$

e quindi in definitiva

$$z = \frac{1}{4}\varphi'(1 + \zeta)(e^{2i\alpha} + \zeta)\frac{1}{\zeta}\cdot \tag{31}$$

Per avere le equazioni parametriche del profilo γ, basta porre in questa $\zeta = e^{i\sigma}$, $z = x + iy$ e separare la parte reale dalla parte puramente immaginaria. Si ottiene così

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\varphi'\cos\alpha\left[\cos\alpha + \cos(\sigma - \alpha)\right], \\ y &= \frac{1}{2}\varphi'\operatorname{sen}\alpha\left[\cos\alpha + \cos(\sigma - \alpha)\right], \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$(0 \leq \sigma \leq 2\pi).$$

Di qua eliminando il parametro σ si ottiene l'equazione del profilo γ

$$y = x \operatorname{tg}\alpha.$$

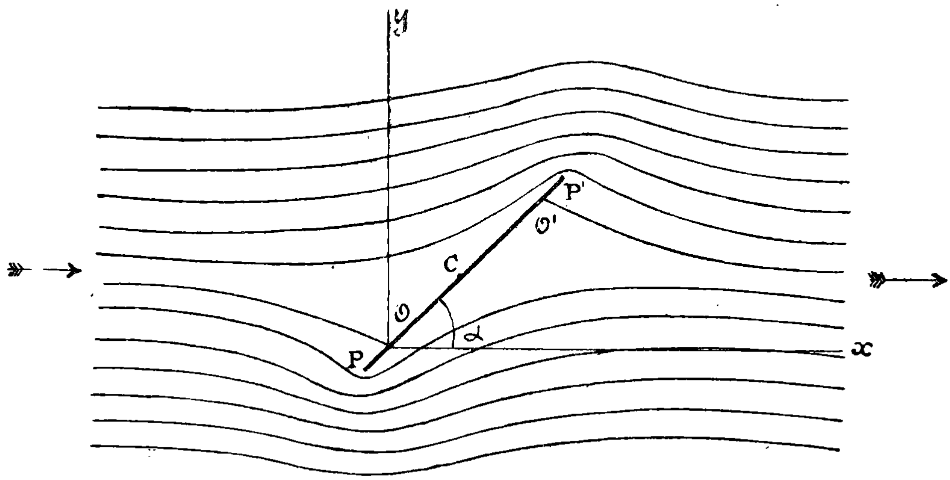
Si ritrova che il profilo è rettilineo ed inclinato di un angolo α sull'asse x.

Lunghezza della lamina. — Ai punti P e P' (estremi della lamina) fanno riscontro i punti $\zeta = -e^{i\alpha}$ e $\zeta = e^{i\alpha}$ del piano ζ; si avranno quindi le coordinate dei punti P e P' ponendo nelle (32) rispettivamente $\sigma = \pi + \alpha$ e

$\sigma = \alpha$:

$$\left.\begin{aligned} x_P &= -\varphi' \cos\alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}, \\ y_P &= -\varphi' \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}; \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{P'} &= \varphi' \cos\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \\ y_{P'} &= \varphi' \operatorname{sen}\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$



Da queste si ricava

$$\left.\begin{aligned} \overline{OP} &= \left| \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \right| = \varphi' \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}, \\ \overline{OP'} &= \left| \sqrt{x_{P'}^2 + y_{P'}^2} \right| = \varphi' \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

sommando membro a membro e chiamando $2\,l$ la lunghezza $\overline{PP'}$ della lamina, si deduce il seguente notevole significato della costante positiva φ'

$$2\,l = \varphi'. \tag{36}$$

Portando questa espressione di φ' in (32) si deducono le definitive espressioni parametriche delle coordinate dei punti della lamina:

$$\left.\begin{aligned} x &= l \cos\alpha \left[\cos\alpha + \cos(\sigma - \alpha)\right], \\ y &= l \operatorname{sen}\alpha \left[\cos\alpha + \cos(\sigma - \alpha)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{32'}$$

Posizioni della prua O e della poppa O' rispetto al centro della lamina. — Le coordinate del centro C della lamina si possono ricavare immediatamente, tenendo presenti, p. es., le (33).

Si ottiene in tal modo

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x_P + l \cos\alpha = l \cos^2\alpha, \\ y_C &= y_P + l \operatorname{sen}\alpha = l \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

La distanza $\overline{OC}$ della prora O dal centro della lamina sarà conseguentemente

$$\overline{OC} = \left|\sqrt{x_C^2 + y_C^2}\right| = l\,|\cos\alpha|. \tag{38}$$

Dalle (37) scende che se l'angolo formato da PP' colla direzione positiva dell'asse x è acuto ($\alpha < 0$) x_C e y_C sono entrambe positive e quindi *O si trova spostato dal centro della lamina verso quella banda che si protende nella direzione del moto* (*).

Se si immagina di riferire il moto al centro C della lamina (rimanendo beninteso immutata la orientazione degli assi) alle (32') vanno sostituite le espressioni più semplici

$$\left.\begin{aligned} x &= l \cos\alpha \cos(\sigma - \alpha), \\ y &= l \operatorname{sen}\alpha \cos(\sigma - \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{32''}$$

Vediamo ora di caratterizzare la posizione della *poppa O'*.

A tal uopo si noti che la *prua* e la *poppa* corrispondono rispettivamente ai valori π e 0 del parametro σ; d'altra parte le precedenti espressioni di x e y mutano soltanto di segno quando si fa una prima volta $\sigma = \pi$ ed una seconda $\sigma = 0$. Si può concludere che *la poppa O' e la prora O sono situate da parti opposte e ad egual distanza dal centro C della lamina.*

(*) Alla medesima conclusione qualitativa si perviene quando si tenga conto della *scia*. [Cfr. Levi-Civita, loc. cit., pag. 27].

Velocità. — Per le (6) e (30) la velocità w rimane definita, in funzione dell'ausiliaria ζ, dalla relazione seguente

$$w = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - e^{2i\alpha}} . \tag{39}$$

In particolare, per i punti appartenenti alla lamina essendo $\zeta = e^{i\sigma}$, si ottiene

$$w = \frac{e^{2i\sigma} - 1}{e^{2i\sigma} - e^{2i\alpha}} . \tag{39'}$$

Se $\overline{w}$ designa il coniugato di w, si ha per il quadrato della velocità,

$$V^2 = w \, . \, \overline{w} = \frac{e^{2i\sigma} - 1}{e^{2i\sigma} - e^{2i\alpha}} \cdot \frac{e^{-2i\sigma} - 1}{e^{-2i\sigma} - e^{-2i\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 (\sigma - \alpha)} , \tag{40}$$

e quindi

$$V = \left| \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} (\sigma - \alpha)} \right| . \tag{40'}$$

Come si vede V non cambia quando a σ si sostituisce $\sigma + \pi$; inoltre risulta da (32″) che alla coppia σ, $\sigma + \pi$ di valori del parametro σ, corrisponde una coppia di punti della lamina opposti rispetto al centro C, di cui uno va considerato appartenente alla banda rivolta a monte e l'altro alla banda affacciata a valle.

Dopo ciò si può concludere: *in punti della lamina, egualmente distanti dal suo centro e rivolti uno a monte e l'altro a valle, i valori assoluti delle velocità sono eguali.*

Pressione. — Trattandosi di moto irrotazionale e permanente in assenza di forze di massa, le equazioni idrodinamiche si compendiano in una relazione tra la pressione p ed il valore assoluto V della velocità (ricordiamo di avere assunto eguale a 1 la densità di liquido). Tale relazione è

$$p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{costante}.$$

Se indichiamo con p_0 la pressione idrostatica, quella cioè che il liquido possiede a grandi distanze dal profilo γ, e si ricorda che a tali distanze è $V = 1$, si deve avere

$$p_0 = -\frac{1}{2} + \text{costante}.$$

Eliminando la costante fra questa e la precedente si ottiene la seguente relazione

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2). \qquad (41)$$

Questa, tenendo conto di (39), definisce la pressione in ogni punto.

In particolare, sopra la lamina, avuto riguardo alla (40), o più precisamente alla conclusione relativa ai valori che la velocità assume in punti opposti rispetto al centro della lamina, si può asserire: *in punti della lamina, egualmente distanti dal suo centro, e rivolti uno a monte e l'altro a valle, le pressioni hanno eguali intensità.*

In particolare è nulla la loro risultante (*). Non è però nullo il loro momento, poniamo rispetto al centro della lamina, come ora vedremo.

Azione deviatrice della corrente. — Immaginiamo di percorrere la lamina sempre nello stesso senso partendo da P fino a P' nel seguire il lembo della lamina rivolto a monte, e ritornare da P' al punto di partenza P sopra l'orlo rivolto a valle.

Ciò posto, designi $d\gamma$ un elemento della lamina, n la normale a $d\gamma$ volta verso la destra di chi percorre la lamina nel senso indicato; diciamo $p_1\, d\gamma$ la pressione che si esercita sopra un generico elemento $d\gamma$, dalla banda rivolta a monte, e $p_2\, d\gamma$ la pressione che viene esercitata sullo stesso elemento, dalla banda che guarda a valle.

Il momento risultante delle pressioni subíte dagli elementi della lamina, ha manifestamente per espressione

$$M = \int_{PP'} \Big[p_1 - p_2\Big] \Big[x \cos(n\,y) - y \cos(n\,x)\Big]\, d\gamma,$$

l'integrazione andando estesa a tutto il cammino rettilineo PP'; esso tende a provocare rotazione attorno alla normale al piano [nel verso $x \to y$, o nell'opposto, secondochè M è positivo o negativo].

Dette V_1 e V_2 le velocità (valori assoluti) di due punti affacciati (e geometricamente coincidenti) della lamina, di cui il primo a monte, e a valle l'altro, si ha da (41),

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2).$$

(*) Cfr. Cisotti, loc. cit., *Sul moto permanente*, ecc., pag. 444.

D'altra parte, essendo dx e dy le componenti dell'arco elementare $d\gamma$, si ha

$$\cos(nx)\,d\gamma = dy,$$
$$\cos(xy)\,d\gamma = -\,dx.$$

Avremo quindi, sostituendo,

$$M = \frac{1}{2}\int_{PP'}(V_1^2 - V_2^2)\,(x\,dx + y\,dy).$$

Ora, poichè da (32') scende che a coppie di valori del parametro σ la cui somma è 2α, corrispondono, sulla lamina, coppie di punti affacciati (e geometricamente coincidenti), si ha per (40),

$$V_1^2 - V_2^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\sigma - \alpha)}\left\{\operatorname{sen}^2\sigma - \operatorname{sen}^2(2\alpha - \sigma)\right\} = 2\operatorname{sen}2\alpha\cot(\sigma - \alpha).$$

Dalle (32'') stesse si ricava inoltre

$$x\,dx + y\,dy = -\frac{1}{2}\,l^2\operatorname{sen}2(\sigma - \alpha).$$

Sarà quindi

$$M = l^2\operatorname{sen}2\alpha\int_{\alpha}^{\alpha+\pi}\cos^2(\sigma - \alpha)\,d\sigma.$$

Il valore di questo integrale è $\frac{\pi}{2}$, avremo dunque in definitiva

$$M = \frac{1}{2}\,\pi\,l^2\operatorname{sen}2\alpha. \tag{42}$$

Da questa risulta che M è nullo: o quando la lamina è ortogonale all'asse x $\left(\alpha = \pm\frac{\pi}{2}\right)$, oppure quando è parallela ($\alpha = 0$, oppure $\alpha = \pm\pi$).

In tutti gli altri casi M esprime la tendenza del liquido a fare assumere alla lamina direzione ortogonale al corso generale della corrente (*).

Padova, aprile 1912.

(*) Per $\alpha = 45^\circ$ si ha $M = \frac{1}{2}\pi l^2$ [Cfr. LAMB, loc. cit., pag. 81].

Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni.

(*Di* Pasquale Calapso, *a Palermo.*)

Continuazione, vedi Tomo XIX, Serie III, Fascicolo 1.° (pag. 61 e segg.)

PARTE II.

Le trasformazioni individuate dalla relazione (14)

§ V. Le funzioni trasformatrici.

1. Veniamo ora allo studio delle trasformazioni individuate dalla relazione (14), per le quali stabiliremo un sistema di formole analoghe a quelle del secondo paragrafo.

Poniamo per brevità

$$a' = \sqrt{a^2 + k}, \qquad b' = \sqrt{b^2 + k}, \qquad c' = \sqrt{c^2 + k}, \tag{61}$$

e introduciamo nove funzioni Φ_{ik} colle formole

$$a' \, b \, c \, X_i X'_k + a \, b' \, c \, Y_i Y'_k + a \, b \, c' \, Z_i Z'_k = \Phi_{ik} \, . \tag{62}$$

Avremo subito per la (14)

$$\Phi_{33} = a \, b \, c. \tag{63}$$

Inoltre dalle (62) otteniamo

$$\left. \begin{aligned} a' \, b \, c \, X'_1 &= \Phi_{11} X_1 + \Phi_{21} X_2 + \Phi_{31} X_3 \, , \\ a \, b' \, c \, Y'_1 &= \Phi_{11} Y_1 + \Phi_{21} Y_2 + \Phi_{31} Y_3 \, , \\ a \, b \, c' \, Z'_1 &= \Phi_{11} Z_1 + \Phi_{21} Z_2 + \Phi_{31} Z_3 \, , \end{aligned} \right\} \tag{64}$$

$$\left.\begin{aligned} a' b c X'_2 &= \Phi_{12} X_1 + \Phi_{22} X_2 + \Phi_{32} X_3, \\ a b' c Y'_2 &= \Phi_{12} Y_1 + \Phi_{22} Y_2 + \Phi_{32} Y_3, \\ a b c' Z'_2 &= \Phi_{12} Z_1 + \Phi_{22} Z_2 + \Phi_{32} Z_3, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

$$\left.\begin{aligned} a' b c X'_3 &= \Phi_{13} X_1 + \Phi_{23} X_2 + \Phi_{33} X_3, \\ a b' c Y'_3 &= \Phi_{13} Y_1 + \Phi_{23} Y_2 + \Phi_{33} Y_3, \\ a b c' Z'_3 &= \Phi_{13} Z_1 + \Phi_{23} Z_2 + \Phi_{33} Z_3, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

ed inversamente

$$\left.\begin{aligned} a' b c X_1 &= \Phi_{11} X'_1 + \Phi_{12} X'_2 + \Phi_{13} X'_3, \\ a b' c Y_1 &= \Phi_{11} Y'_1 + \Phi_{12} Y'_2 + \Phi_{13} Y'_3, \\ a b c' Z_1 &= \Phi_{11} Z'_1 + \Phi_{12} Z'_2 + \Phi_{13} Z'_3, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$\left.\begin{aligned} a' b c X_2 &= \Phi_{21} X'_1 + \Phi_{22} X'_2 + \Phi_{23} X'_3, \\ a b' c Y_2 &= \Phi_{21} Y'_1 + \Phi_{22} Y'_2 + \Phi_{23} Y'_3, \\ a b c' Z_2 &= \Phi_{21} Z'_1 + \Phi_{22} Z'_2 + \Phi_{23} Z'_3, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

$$\left.\begin{aligned} a' b c X_3 &= \Phi_{31} X'_1 + \Phi_{32} X'_2 + \Phi_{33} X'_3, \\ a b' c Y_3 &= \Phi_{31} Y'_1 + \Phi_{32} Y'_2 + \Phi_{33} Y'_3. \\ a b c' Z_3 &= \Phi_{31} Z'_1 + \Phi_{52} Z'_2 + \Phi_{33} Z'_3, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

2. Per mezzo di queste formole possiamo ricavare varie espressioni delle Φ_{ik}, procedendo nel seguente modo.

Derivando la (14) e tenendo presente le (6) e le (25) otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{E'_0}\, \Phi_{31} + \sqrt{E_0}\, \Phi_{13} &= 0, \\ \sqrt{G'_0}\, \Phi_{32} + \sqrt{G_0}\, \Phi_{23} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

D'altra parte dalle (66) e (69), quadrando e sommando si ricavano le relazioni

$$\Phi_{13}^2 + \Phi_{23}^2 + \Phi_{33}^2 = a^2 b^2 c^2 + k\,(b^2 c^2 X'^2_3 + c^2 a^2 Y'^2_3 + a^2 b^2 Z'^2_3),$$

$$\Phi_{31}^2 + \Phi_{32}^2 + \Phi_{33}^2 = a^2 b^2 c^2 + k\,(b^2 c^2 X_3^2 + c^2 a^2 Y_3^2 + a^2 b^2 Z_3^2),$$

che per la (63) e per la terza del sistema (3) si possono scrivere

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{13}^2 + \Phi_{23}^2 &= k\,(E'_0 - G'_0), \\ \Phi_{31}^2 + \Phi_{32}^2 &= k\,(E_0 - G_0). \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Da queste e dalle (70) troviamo

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{13} &= \sqrt{k}\ \sqrt{E'_0}\,, & \Phi_{23} &= i\sqrt{k}\ \sqrt{G'_0}\,,\\ \Phi_{31} &= -\sqrt{k}\ \sqrt{E_0}\,, & \Phi_{32} &= -i\sqrt{k}\ \sqrt{G_0}\,(*).\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Similmente dalle (67) e (68) quadrando e sommando e tenendo conto delle espressioni trovate di Φ_{13}, Φ_{23}, otteniamo

$$\Phi_{11}^2 + \Phi_{12}^2 = a^2 b^2 c^2 - k\,E'_0 + k\,(b^2 c^2 X_1^2 + c^2 a^2 Y_1^2 + a^2 b^2 Z_1^2), \quad (73)$$

$$\Phi_{21}^2 + \Phi_{22}^2 = a^2 b^2 c^2 + k\,G'_0 + k\,(b^2 c^2 X_2^2 + c^2 a^2 Y_2^2 + a^2 b^2 Z_2^2). \quad (74)$$

Infine dalle (67) e (69) moltiplicando ordinatamente e sommando, troviamo

$$\sqrt{E_0}\,\Phi_{11} + i\sqrt{G_0}\,\Phi_{12} = a\,b\,c\sqrt{E'_0} - \sqrt{k}\ (b^2 c^2 X_1 X_3 + c^2 a^2 Y_1 Y_3 + a^2 b^2 Z_1 Z_3), \quad (75)$$

e similmente

$$\sqrt{E_0}\,\Phi_{21} + i\sqrt{G_0}\,\Phi_{22} = i\,a\,b\,c\sqrt{G'_0} - \sqrt{k}\ (b^2 c^2 X_2 X_3 + c^2 a^2 Y_2 Y_3 + a^2 b^2 Z_2 Z_3). \quad (76)$$

Si vede allora che anche in questo caso per mezzo delle (72), (73), (74), (75) e (76), tutte le funzioni Φ_{ik} sono esprimibili mediante le funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, e mediante gli elementi relativi alla soluzione X_3, Y_3, Z_3; onde daremo alle funzioni $\sqrt{E'_0}$ e $\sqrt{G'_0}$ il nome di *funzioni trasformatrici.*

E conviene osservare che note le funzioni X_3, Y_3, Z_3, e note le funzioni trasformatrici $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, le nuove funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3, sono espresse dalle formole

$$\left.\begin{aligned}X'_3 &= \frac{1}{b\,c\sqrt{a^2+k}}\left(\sqrt{k}\ \sqrt{E'_0}\,X_1 + i\sqrt{k}\ \sqrt{G'_0}\,X_2 + a\,b\,c\,X_3\right),\\ Y'_3 &= \frac{1}{c\,a\sqrt{b^2+k}}\left(\sqrt{k}\ \sqrt{E'_0}\,Y_1 + i\sqrt{k}\ \sqrt{G'_0}\,Y_2 + a\,b\,c\,Y_3\right),\\ Z'_3 &= \frac{1}{a\,b\sqrt{c^2+k}}\left(\sqrt{k}\ \sqrt{G'_0}\,Z_1 + i\sqrt{k}\ \sqrt{G'_0}\,Z_2 + a\,b\,c\,Z_3\right).\end{aligned}\right\} \quad (77)$$

(*) Delle quantità $\sqrt{E_0}$, $\sqrt{G_0}$, $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, $\sqrt{k}$, s'intende scelta una determinazione e mantenuta in tutto ciò che segue.

3. Fra le funzioni trasformatrici passa una notevole relazione che si deduce esprimendo che le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 soddisfano la prima del sistema (3). Essa è della forma

$$\left.\begin{aligned} k E'_0 H_{11} - k G'_0 H_{22} + 2 i k \sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0} H_{12} + 2 a b c \sqrt{k}\sqrt{E'_0} H_{13} + \\ + 2 i a b c \sqrt{k}\sqrt{G'_0} H_{23} + a^2 b^2 c^2 H_{33} = 1, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

in cui si è posto

$$H_{ik} = \frac{X_i X_k}{b^2 c^2 (a^2 + k)} + \frac{Y_i Y_k}{c^2 a^2 (b^2 + k)} + \frac{Z_i Z_k}{a^2 b^2 (c^2 + k)}, \tag{79}$$

ed importa notare che le derivate prime di queste funzioni hanno le espressioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H_{11}}{\partial \alpha} &= -2 \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} H_{12} - 2\sqrt{E_0} H_{13}, \\
\frac{\partial H_{11}}{\partial \beta} &= 2 \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} H_{12}, \\
\frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} (H_{11} - H_{22}) - \sqrt{E_0} H_{23}, \\
\frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} (H_{22} - H_{11}) - \sqrt{G_0} H_{13}, \\
\frac{\partial H_{13}}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} H_{23} + \sqrt{E_0}(H_{11} - H_{33}), \\
\frac{\partial H_{13}}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} H_{23} + \sqrt{G_0} H_{12}, \\
\frac{\partial H_{22}}{\partial \alpha} &= 2 \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} H_{12}, \\
\frac{\partial H_{22}}{\partial \beta} &= -2 \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} H_{12} - 2\sqrt{G_0} H_{23}, \\
\frac{\partial H_{23}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} H_{13} + \sqrt{E_0} H_{12},
\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H_{23}}{\partial \beta} &= -\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} H_{13} + \sqrt{G_0}\,(H_{22} - H_{33}), \\
\frac{\partial H_{33}}{\partial \alpha} &= 2\sqrt{E_0}\, H_{13}, \\
\frac{\partial H_{33}}{\partial \beta} &= 2\sqrt{G_0}\, H_{23},
\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

perfettamente analoghe alle (44) della Parte Prima.

§ VI. Il sistema differenziale per le funzioni trasformatrici.

4. Come al paragrafo terzo vogliamo ricavare un sistema di equazioni differenziali per le funzioni trasformatrici $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$.

Per formare questo sistema esprimeremo al solito che le funzioni X'_i, Y'_i, Z'_i date dalle (64), (65) e (66), verificano le relazioni (25).

Derivando la prima delle (66), e sostituendo per le derivate di X_1, X_2, X_3, le loro espressioni date dalle (6), otteniamo

$$a' b c \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} = X_1 \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \alpha} + X_2 \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \alpha} + X_3 \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial \alpha} -$$

$$- \Phi_{13} \left(\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_2 + \sqrt{E_0}\, X_3 \right) + \Phi_{23} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_1 + \Phi_{33} \sqrt{E_0}\, X_1 .$$

Sostituendo in questa per Φ_{13}, Φ_{23}, Φ_{33} le loro espressioni (63) e (72), e tenendo conto che per essa e per la prima delle (64) deve essere soddisfatta la terza delle (25), troviamo:

$$X_1 \left(\frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \alpha} + i \sqrt{G'_0} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \frac{\Phi_{11}}{\sqrt{k}} \sqrt{E'_0} + \frac{a b c}{\sqrt{k}} \sqrt{E_0} \right)$$

$$+ i X_2 \left(\frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \alpha} + i \sqrt{E'_0} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + i \frac{\Phi_{21}}{\sqrt{k}} \sqrt{E'_0} \right) = 0.$$

Analogamente operando sulla seconda e terza delle (66) perveniamo a due altre relazioni che si deducono da questa scambiando X in Y e poi in Z, sicchè concludiamo che si dovrà avere separatamente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\alpha}&=-i\sqrt{G'_0}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\frac{\Phi_{11}}{\sqrt{k}}\sqrt{E'_0}-\frac{a\,b\,c}{\sqrt{k}}\sqrt{E_0},\\ \frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\alpha}&=-i\sqrt{E'_0}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}-i\frac{\Phi_{21}}{\sqrt{k}}\sqrt{E'_0}\,.\end{aligned}\right\}\tag{81}$$

Allo stesso modo ricaviamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\beta}&=i\sqrt{G'_0}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}+\frac{\Phi_{12}}{\sqrt{k}}\sqrt{G'_0}\,,\\ \frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\beta}&=i\sqrt{E'_0}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-i\frac{\Phi_{22}}{\sqrt{k}}\sqrt{G'_0}+i\frac{a\,b\,c}{\sqrt{k}}\sqrt{G_0}\,.\end{aligned}\right\}\tag{82}$$

5. Ciò posto deriviamo la (78) e sostituiamo per le derivate prime delle funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, H_{ik} le loro espressioni date dalle precedenti e dalle (80). Ponendo per brevità

$$\left.\begin{aligned}M_1&=\sqrt{k}\ \sqrt{E'_0}\,.H_{11}+i\sqrt{k}\ \sqrt{G'_0}\,H_{12}+a\,b\,c\,H_{13}\,,\\ M_2&=\sqrt{k}\ \sqrt{E'_0}\,H_{21}+i\sqrt{k}\ \sqrt{G'_0}\,H_{22}+a\,b\,c\,H_{23}\,,\\ M_3&=\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,H_{31}+i\sqrt{k}\ \sqrt{G'_0}\,H_{32}+a\,b\,c\,H_{33}\,,\end{aligned}\right\}\tag{83}$$

troviamo con calcoli facili

$$\left.\begin{aligned}M_1\,\Phi_{11}+M_2\,\Phi_{21}&=M_3\sqrt{k}\ \sqrt{E_0}\,,\\ M_1\,\Phi_{12}+M_2\,\Phi_{22}&=i\,M_3\sqrt{k}\ \sqrt{G_0}\,.\end{aligned}\right\}\tag{84}$$

D'altra parte dalla (73) e dalla (75) si ricava

$$\begin{aligned}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11})^2&=\\ &=(E_0-G_0)\left[a^2b^2c^2-k\,E'_0+k\,(b^2c^2X_1^2+c^2a^2Y_1^2+a^2b^2Z_1^2)\right]\\ &-\left[a\,b\,c\sqrt{E_0}-\sqrt{k}\,(b^2c^2X_1X_3+c^2a^2\,Y_1\,Y_3+a^2b^2Z_1\,Z_3)\right]^2,\end{aligned}$$

che ponendo

$$h=a^4b^4c^4\,(a^2+k)\,(b^2+k)\,(c^2+k),\tag{85}$$

ed osservando le (79) possiamo anche scrivere sotto la forma

$$(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11})^2=-h\,E'_0\,(H_{11}\,H_{22}-H_{12}^2)-$$

$$-2\frac{h}{\sqrt{k}}\,a\,b\,c\sqrt{E'_0}\,(H_{22}\,H_{13}-H_{12}\,H_{23})-\frac{h}{k}\left[H_{22}\,(a^2\,b^2\,c^2\,H_{33}-1)-a^2\,b^2\,c^2\,H_{23}^2\right],$$

mentre la (78) si può anche scrivere

$$M_2^2=-k\,E'_0\,(H_{11}\,H_{22}-H_{12}^2)-2\,a\,b\,c\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,(H_{22}\,H_{13}-H_{12}\,H_{23})$$

$$-\left[H_{22}\,(a^2\,b^2\,c^2\,H_{33}-1)-a^2\,b^2\,c^2\,H_{23}^2\right].$$

Quindi deduciamo

$$\sqrt{E^0}\,\Phi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11}=\varepsilon\sqrt{\frac{h}{k}}\cdot M_2,\qquad(\varepsilon=\pm 1)\tag{86}$$

e da questa e dalle (84) otteniamo

$$\sqrt{E_0}\,\Phi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21}=-\varepsilon\sqrt{\frac{h}{k}}\,M_1.\tag{87}$$

Ed allora riunendo queste con le (75) e (76) e risolvendo rispetto alle Φ_{ik} avremo:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{11}&=\frac{1}{E_0-G_0}\left(P\sqrt{E_0}-i\,\varepsilon\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{G_0}\,M_2\right),\\
\Phi_{12}&=\frac{1}{E_0-G_0}\left(i\,P\sqrt{G_0}+\varepsilon\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{E_0}\,M_2\right),\\
\Phi_{21}&=\frac{1}{E_0-G_0}\left(Q\sqrt{E_0}+i\,\varepsilon\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{G_0}\,M_1\right),\\
\Phi_{22}&=\frac{1}{E_0-G_0}\left(i\,Q\sqrt{G_0}-\varepsilon\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{E_0}\,M_1\right),
\end{aligned}\right\}\tag{88}$$

in cui abbiamo posto per brevità

$$\left.\begin{aligned}
P&=\ a\,b\,c\sqrt{E'_0}-\sqrt{k}\,(b^2\,c^2\,X_1\,X_3+c^2\,a^2\,Y_1\,Y_3+a^2\,b^2\,Z_1\,Z_3),\\
Q&=i\,a\,b\,c\sqrt{G'_0}-\sqrt{k}\,(b^2\,c^2\,X_2\,X_3+c^2\,a^2\,Y_2\,Y_3+a^2\,b^2\,Z_2\,Z_3).
\end{aligned}\right\}\tag{89}$$

Siamo così condotti al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \alpha} &= -i\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \frac{\Phi_{11}}{\sqrt{k}}\sqrt{E'_0} - \frac{a\,b\,c}{\sqrt{k}}\sqrt{E_0}\,,\\
\frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \beta} &= i\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + \frac{\Phi_{12}}{\sqrt{k}}\sqrt{G'_0}\,,\\
\frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \alpha} &= -i\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - i\,\frac{\Phi_{21}}{\sqrt{k}}\sqrt{E'_0}\,,\\
\frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \beta} &= i\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - i\,\frac{\Phi_{22}}{\sqrt{k}}\sqrt{G'_0} + i\,\frac{a\,b\,c}{\sqrt{G_0}}\sqrt{k}\,,
\end{aligned}
\right\} \quad (90)
$$

(in cui per le Φ_{ik} si debbono intendere poste le espressioni (88)), che deve essere soddisfatto insieme alla relazione

$$
\left.
\begin{aligned}
K E'_0 H_{11} - K G'_0 H_{22} + 2\,i\,k\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,H_{12} + 2\,a\,b\,c\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,H_{13} + {}\\
+ 2\,i\,a\,b\,c\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}\,H_{23} + a^2 b^2 c^2 H_{33} = 1.
\end{aligned}
\right\} \quad (91)
$$

delle funzioni trasformatrici.

Notiamo infine che la relazione (91) si può anche scrivere sotto la forma

$$
P M_1 + Q M_2 = \sqrt{k}\; M_3 (E_0 - G_0), \tag{92}
$$

ovvero introducendo le funzioni

$$
\left.
\begin{aligned}
E &= E_0 (a^2 X_1^2 + b^2 Y_1^2 + c^2 Z_1^2),\\
F &= \sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\,(a^2 X_1 X_2 + b^2 Y_1 Y_2 + c^2 Z_1 Z_2),\\
G &= G_0 (a^2 X_2^2 + b^2 Y_2^2 + c^2 Z_2^2),
\end{aligned}
\right\} \quad (93)
$$

che danno i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale della quadrica Q potremo anche scrivere:

$$
\left.
\begin{aligned}
E\,.\,\frac{k\,E'_0}{E_0} - G\,.\,\frac{k\,G'_0}{G_0} + 2\,F\,\frac{k\,i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}}{\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}} + {}\\
+ (E_0 - G_0)\,(E'_0 - G'_0) = \frac{h}{k^2 a^2 b^2 c^2}\,(1 - a\,b\,c\,M_3)^2.
\end{aligned}
\right\} \quad (94)
$$

§ VII. Dimostrazione del teorema fondamentale.

6. Dimostriamo ora il teorema analogo a quello del paragrafo quarto, cioè:

Se X_3, Y_3, Z_3 è una soluzione particolare qualunque del sistema (2), *il sistema di equazioni differenziali* (90) (91) *nelle funzioni incognite* $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ *è illimitatamente integrabile. Assumendo una soluzione* $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ *di questo sistema, e ponendo*

$$\left.\begin{aligned}
X'_3 &= \frac{1}{b\,c\sqrt{a^2+k}}\left(\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,X_1 + i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}\,X_2 + a\,b\,c\,X_3\right),\\
Y'_3 &= \frac{1}{c\,a\sqrt{b^2+k}}\left(\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,Y_1 + i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}\,Y_2 + a\,b\,c\,Y_3\right),\\
Z'_3 &= \frac{1}{a\,b\sqrt{c^2+k}}\left(\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,Z_1 + i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}\,Z_2 + a\,b\,c\,Z_3\right),
\end{aligned}\right\} \quad (95)$$

avremo una soluzione nuova del sistema (2) *contenente due costanti arbitrarie e legata alla prima dalla relazione* (14).

Per la dimostrazione osserviamo anzitutto che dalle (88) e dalla (92) seguono le (84); quindi dalla prima delle (90) e dalla (91) segue la terza; dalla seconda delle (90) e dalla (91) segue la quarta, ed inversamente.

Inoltre dalle espressioni (88) delle Φ_{ik} sono soddisfatte le (73), (74), (75) e (76); e si ha pure

$$\Phi_{11}\,\Phi_{21} + \Phi_{12}\,\Phi_{22} = -k\,i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0} + k\,(b^2c^2X_1X_2 + c^2a^2Y_1Y_2 + a^2b^2Z_1Z_2), \quad (95)^*$$

donde per derivazione facilmente si deducono le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\alpha} &= -i\,\Phi_{12}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha} - \Phi_{21}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta} - \frac{\Phi_{12}^2}{\sqrt{k}} + E_0\sqrt{k} - E'_0\sqrt{k},\\
\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\beta} &= -i\,\Phi_{12}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta} + \Phi_{21}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha} - i\frac{\Phi_{12}\,\Phi_{21}}{\sqrt{k}},\\
\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial\alpha} &= -i\,\Phi_{22}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha} + \Phi_{11}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta} - \frac{\Phi_{12}\,\Phi_{22}}{\sqrt{k}} - i\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0},\\
\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial\beta} &= -i\,\Phi_{22}\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta} - \Phi_{11}\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha} - i\frac{\Phi_{21}\,\Phi_{22}}{\sqrt{k}} + \sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\sqrt{G_0},
\end{aligned}\right\} \quad (96)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \alpha} &= i \quad {}_{11} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - \Phi_{22} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \frac{\Phi_{11}\,\Phi_{12}}{\sqrt{k}} + i \sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,\sqrt{G_0}, \\
\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \beta} &= i\,\Phi_{11} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \Phi_{22} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + i\,\frac{\Phi_{21}\,\Phi_{11}}{\sqrt{k}} - \sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,\sqrt{G'_0}, \\
\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial \alpha} &= i\,\Phi_{21} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + \Phi_{12} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \frac{\Phi_{12}\,\Phi_{21}}{\sqrt{k}}, \\
\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial \beta} &= i\,\Phi_{21} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \Phi_{12} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + i\,\frac{\Phi_{21}^2}{\sqrt{k}} + i\,G_0\sqrt{k} - i\,G'_0\sqrt{k}.
\end{aligned}\right\} \quad (96)$$

Tenendo conto di queste si verifica subito che le condizioni d'integrabilità del sistema (90) (91) sono soddisfatte, sicchè esso sistema è illimitatamente integrabile.

Rimane ancora da dimostrare che le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 soddisfano al sistema (3).

A tale scopo insieme alle funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 consideriamo le funzioni X'_1, Y'_1, Z'_1, X'_2, Y'_2, Z'_2, date dalle (64) e (65); in forza delle (90) e delle (96) le funzioni X'_1, X_2, X'_3 soddisfano al sistema (25), ed allo stesso sistema soddisfano Y'_1, Y'_2, Y'_3, e Z'_1, Z'_2, Z'_3; inoltre si ha per la (91)

$$X'^2_3 + Y'^2_3 + Z'^2_3 = 1, \tag{97}$$

donde segue subito che il determinante

$$\begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{vmatrix}$$

è ortogonale.

Ed allora avremo dalle (25)

$$\Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}\right)^2 = E'_0, \quad \Sigma \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}\,\frac{\partial X'_3}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \beta}\right)^2 = G'_0; \tag{98}$$

ma dalle (95) si ha inoltre

$$b^2 c^2 (a^2 + k) X'^2_3 + c^2 a^2 (b^2 + k) Y'^2_3 + a^2 b^2 (c^2 + k) Z'^2_3 = a^2 b^2 c^2 + k(E'_0 - G'_0),$$

quindi per la (97) e per le (98) otteniamo infine

$$\Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}\right)^2 - \Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial \beta}\right)^2 = b^2 c^2 X'^2_3 + c^2 a^2 Y'^2_3 + a^2 b^2 Z'^2_3.$$

Dunque le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 soddisfano al sistema (3); di più dalle (95) stesse risulta che è verificata la relazione (14).

§ VIII. Esame dei casi singolari.

7. Esaminiamo ora il caso fin qui implicitamente escluso in cui si annulla una delle costanti a^2+k, b^2+k, c^2+k.

Allo scopo consideriamo le equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\alpha} &= -i\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\frac{\Phi_{11}}{\sqrt{k}}\sqrt{E'_0}-\frac{abc}{\sqrt{k}}\sqrt{E_0}\,,\\
\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\beta} &= i\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}+\frac{\Phi_{12}}{\sqrt{k}}\sqrt{G'_0}\,,\\
\frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\alpha} &= -i\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}-i\frac{\Phi_{21}}{\sqrt{k}}\sqrt{E'_0}\,,\\
\frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\beta} &= i\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-i\frac{\Phi_{22}}{\sqrt{k}}\sqrt{G'_0}+i\frac{abc}{\sqrt{k}}\sqrt{G_0}\,,
\end{aligned}\right\}\tag{99}$$

in cui si suppone $\sqrt{k}=\pm ic$, e le Φ_{ik} sono date dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{11}^2+\Phi_{12}^2=a^2b^2c^2-kE'_0+k(b^2c^2X_1^2+c^2a^2Y_1^2+a^2b^2Z_1^2),\\
&\sqrt{E_0}\,\Phi_{11}+i\sqrt{G_0}\,\Phi_{12}=abc\sqrt{E'_0}-\\
&\qquad -\sqrt{k}\,(b^2c^2X_1X_3+c^2a^2Y_1Y_3+a^2b^2Z_1Z_3),
\end{aligned}\right\}\tag{100}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{11}Z_1+\Phi_{21}Z_2 &= \sqrt{k}\sqrt{E_0}\,Z_3\,,\\
\Phi_{12}Z_1+\Phi_{22}Z_2 &= i\sqrt{k}\sqrt{G_0}\,Z_3\,,
\end{aligned}\right\}\tag{101}$$

ed aggiungiamo a queste la relazione

$$\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,Z_1+i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,Z_2+abc\,Z_3=0.\tag{102}$$

In forza delle (101), dalla prima delle equazioni (99) e dalla (102) segue la terza; dalla seconda delle (99) e dalla (102) segue la quarta ed inversamente.

Inoltre dalle (100) e (101) tenendo conto della (102) e dell'attuale valore di k, si deducono facilmente la (74) e (76); e si ha pure

$$\Phi_{11}\Phi_{21}+\Phi_{12}\Phi_{22}=-k\,i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}+k(b^2c^2X_1X_2+c^2a^2Y_1Y_2+a^2b^2Z_1Z_2),$$

onde come al § VII hanno luogo le (96), e il sistema (99) è illimitatamente integrabile.

Sia $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ una soluzione di questo sistema, e poniamo:

$$\left.\begin{aligned} X'_1 &= \frac{1}{b\,c\sqrt{a^2+k}}(\Phi_{11}\,X_1+\Phi_{21}\,X_2-\sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,X_3), \\ X'_2 &= \frac{1}{b\,c\sqrt{a^2+k}}(\Phi_{12}\,X_1+\Phi_{22}\,X_2-i\sqrt{k}\,\sqrt{G_0}\,X_3), \\ X'_3 &= \frac{1}{b\,c\sqrt{a^2+k}}(\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,X_1+i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}\,X_2+a\,b\,c\,X_3), \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

$$\left.\begin{aligned} Y'_1 &= \frac{1}{c\,a\sqrt{b^2+k}}(\Phi_{11}\,Y_1+\Phi_{21}\,Y_2-\sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,Y_3), \\ Y'_2 &= \frac{1}{c\,a\sqrt{b^2+k}}(\Phi_{12}\,Y_1+\Phi_{22}\,Y_2-i\sqrt{k}\,\sqrt{G_0}\,Y_3), \\ Y'_3 &= \frac{1}{c\,a\sqrt{b^2+k}}(\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,Y_1+i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}\,Y_2+a\,b\,c\,Y_3). \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Le funzioni $X'_1\,X'_2\,X'_3$ soddisfano alle (25) e così pure le funzioni $Y'_1\,Y'_2\,Y'_3$; inoltre le medesime equazioni (25) sono soddisfatte dalle funzioni

$$Z'_1=X'_2\,Y'_3-X'_3\,Y'_2,\quad Z'_2=X'_3\,Y'_1-X'_1\,Y'_3,\quad Z'_3=X'_1\,Y'_2-X'_2\,Y'_1 \tag{105}$$

e si ha:

$$X'^2_1+X'^2_2+X'^2_3=1,$$

$$Y'^2_1+Y'^2_2+Y'^2_3=1,$$

$$X'_1\,Y'_1+X'_2\,Y'_2+X'_3\,Y'_3=0.$$

Il determinante

$$\begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{vmatrix}$$

è quindi ortogonale, e allora avremo dalle (25)

$$\Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial\alpha}\right)^2=E'_0,\quad \Sigma\frac{\partial X'_3}{\partial\alpha}\frac{\partial X'_3}{\partial\beta}=0,\quad \Sigma\left(\frac{\partial X'_3}{\partial\beta}\right)^2=G'_0.$$

Ma dalle (103) e (104) si ha inoltre

$$b^2 c^2 (a^2 + k) X'^2_3 + c^2 a^2 (b^2 + k) Y'^2_3 = k E'_0 - k G'_0 + a^2 b^2 c^2,$$

quindi

$$k (b^2 c^2 X'^2_3 + c^2 a^2 Y'^2_3 + a^2 b^2 Z'_3) = k E'_0 - k G'_0.$$

Epperò si conclude che anche in questo caso singolare le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 date dalle (103), (104) e (105) sono una nuova soluzione del sistema differenziale (3).

§ IX. Osservazioni complementari relative alle quadriche di rotazione.

8. Tutto quanto abbiamo detto nei primi sette paragrafi sussiste qualunque siano le costanti a, b, c che entrano nell'equazione della quadrica, quindi i risultati sono valevoli per quadriche generali ed in particolare per le quadriche di rotazione e per la sfera.

Non così la trasformazione del § VIII ($\sqrt{k} = \pm i c$), che mentre è ancor valida per una quadrica di rotazione attorno all'asse z, cade in difetto per le altre quadriche di rotazione e per la sfera.

Per completare dunque la ricerca consideriamo a parte una quadrica di rotazione attorno all'asse x ($b = c$); poniamo al solito le equazioni (99) in cui si suppone $\sqrt{k} = \pm i c$, e le Φ_{ik} sono ora date dalle formole (100) e dalle formole

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{11} (Y_1 + i Z_1) + \Phi_{21} (Y_2 + i Z_2) &= \sqrt{k} \sqrt{E_0} (Y_3 + i Z_3), \\ \Phi_{12} (Y_1 + i Z_1) + \Phi_{22} (Y_2 + i Z_2) &= i \sqrt{k} \sqrt{G_0} (Y_3 + i Z_3), \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

ed aggiungiamo alle (99), (100) e (106), la relazione

$$\sqrt{k} \sqrt{E'_0} (Y_1 + i Z_1) + i \sqrt{k} \sqrt{G'_0} (Y_2 + i Z_2) + a b c (Y_3 + i Z_3) = 0. \quad (107)$$

Si vede al solito modo che il sistema così formato è illimitatamente integrabile; di più assumendo una soluzione $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, di questo sistema, le (103) soddisferanno le (25), e sarà

$$X'^2_1 + X'^2_2 + X'^2_3 = 1;$$

onde le (25) per siffatte funzioni $\sqrt{E'_0}$ $\sqrt{G'_0}$ formeranno del pari un sistema illimitatamente integrabile.

Ed allora se $X'^{(0)}_1$, $X'^{(0)}_2$, $X'^{(0)}_3$ sono i valori che assumono le funzioni X'_1, X'_2, X'_3, per $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, e

$$\begin{matrix} Y'^{(0)}_1, & Y'^{(0)}_2, & Y'^{(0)}_3, \\ Z'^{(0)}_1, & Z'^{(0)}_2, & Z'^{(0)}_3, \end{matrix}$$

sono delle costanti che con $X'^{(0)}_1$, $X'^{(0)}_2$, $X'^{(0)}_3$ formino i coefficienti di una sostituzione ortogonale, assumeremo i tre sistemi integrali delle (25)

$$\begin{matrix} X'_1 & X'_2 & X'_3 \\ Y'_1 & Y'_2 & Y'_3 \\ Z'_1 & Z'_2 & Z'_3 \end{matrix}$$

che per $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ assumono i valori prefissati e di cui le X'_i coincidono evidentemente con le (103).

Sarà allora

$$\Sigma \left(\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}\right)^2 = E'_0, \qquad \Sigma \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} \frac{\partial X'_3}{\partial \beta}, \qquad \Sigma \left(\frac{\partial X'_3}{\partial \beta}\right)^2;$$

inoltre dalla terza delle (103), e dalla (17), segue facilmente

$$E'_0 - G'_0 = a^2 b^2 - b^2 (a^2 - b^2) X'^2_3,$$

cioè

$$E'_0 - G'_0 = b^2 c^2 X'^2_3 + c^2 a^2 Y'^2_3 + a^2 b^2 Z'^2_3,$$

donde si vede che la funzione X'_3 data dalla terza delle (103) e le funzioni Y'_3, Z'_3 sopra determinate, formano ancora una nuova soluzione del sistema differenziale (3).

9. Infine se la quadrica si riduce alla sfera di raggio uguale ad 1, poniamo le equazioni (99) in cui si suppone $\sqrt{k} = \pm i$, e le Φ_{ik} sono date dalle formole

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{11} &= \sqrt{E_0}\sqrt{E'_0}, & \Phi_{12} &= i\sqrt{G_0}\sqrt{E'_0}, \\ \Phi_{21} &= i\sqrt{E_0}\sqrt{G'_0}, & \Phi_{22} &= -\sqrt{G_0}\sqrt{G'_0}, \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

ed aggiungiamo la condizione

$$E'_0 - G'_0 = 1.$$

Il sistema così formato è anche in questo caso illimitatamente integrabile, e per una soluzione $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ di esso anche le (25) formano un sistema illimitatamente integrabile.

Ed allora assumendo tre sistemi integrali

$$\begin{matrix} X'_1 & X'_2 & X'_3 \\ Y'_1 & Y'_2 & Y'_3 \\ Z'_1 & Z'_2 & Z'_3 \end{matrix}$$

che formino i coefficienti di una sostituzione ortogonale, le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 soddisfano ancora al sistema (3).

Intorno ai risultati del precedente paragrafo occorre fare un'ultima osservazione.

Se invece di pensare le trasformazioni degli integrali del sistema (3), pensiamo le trasformazioni che subiscono i coefficienti E_0, G_0 dell'elemento lineare sferico, possiamo affermare che le formole (90), (73), (74), (75), (76), (95)* sono valide in tutti i casi ordinari o singolari, per quadriche generali oppure speciali di rotazione e per la sfera.

A queste va sempre aggiunta una condizione complementare, la quale esprime che le (73), (74), (75), (76), (95)* algebricamente considerate nelle Φ_{ik} sono coesistenti.

Da questo punto di vista il comportamento delle trasformazioni singolari non differisce da quello delle trasformazioni ordinarie.

È interessante osservare che dalle (73), (74), (75), (76), (95)* segue facilmente la relazione

$$\left.\begin{aligned} E\frac{k\,E'_0}{a^2\,b^2\,c^2\,E_0} - G\,\frac{k\,G'_0}{a^2\,b^2\,c^2\,G_0} + 2\,F\,\frac{k\,i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}}{a^2\,b^2\,c^2\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}} + \\ + \frac{1}{a^2\,b^2\,c^2}(E_0 - G_0)(E'_0 - G'_0) = \\ = \frac{1}{a^4\,b^4\,c^4}\left[i\sqrt{G'_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11}) - \sqrt{E'_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Phi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21})\right]^2, \end{aligned}\right\} \quad (109)$$

valida come le precedenti per tutti i casi.

FINE DELLA PARTE SECONDA.

PARTE III.

§ X. Identificazione delle trasformazioni stabilite nella parte II, colle trasformazioni B_k.

1. Le trasformazioni che abbiamo stabilito nella parte precedente conducono da una soluzione particolare qualunque X_3, Y_3, Z_3 del sistema differenziale (3) ad una soluzione nuova X'_3, Y'_3, Z'_3, contenente due costanti arbitrarie.

Alla soluzione X_3, Y_3, Z_3 corrisponde una superficie S applicabile sulla quadrica ed alla soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 corrisponde una nuova superficie S_1 pure applicabile sulla quadrica.

Ci proponiamo di vedere come si passa direttamente dalla superficie S alla superficie S_1.

Denotiamo con x, y, z le coordinate di un punto F della quadrica Q, che si esprimono con le funzioni X_3, Y_3, Z_3 mediante le (2), e poniamo

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial x}{\partial \beta}, \\ y_1 &= y + \frac{\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial y}{\partial \beta}, \\ z_1 &= z + \frac{\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial z}{\partial \beta}. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

La congiungente il punto F di coordinate x, y, z col punto F_1 di coordinate $x_1\,y_1\,z_1$ è tangente in F alla quadrica Q.

Deformiamo ora la quadrica in guisa da assumere la configurazione S, seco trascinando invariabilmente connessi i segmenti tangenti FF_1; e dimostriamo che la superficie Σ luogo dei punti F_1 nella nuova configurazione coincide con la superficie S_1.

A tale scopo osserviamo anzitutto che denotando con ξ, η, ζ, e con ξ_1,

η_1, ζ_1 le coordinate dei punti F ed F_1 nella nuova posizione avremo

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi + \frac{\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\sqrt{E_0}}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\sqrt{G_0}}\frac{\partial \xi}{\partial \beta},\\
\eta_1 &= \eta + \frac{\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\sqrt{E_0}}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\sqrt{G_0}}\frac{\partial \eta}{\partial \beta},\\
\zeta_1 &= \zeta + \frac{\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\sqrt{E_0}}\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + \frac{i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\sqrt{G_0}}\frac{\partial \zeta}{\partial \beta},
\end{aligned}\right\} \tag{111}$$

donde derivando, osservando le (90), (75), (76), (95)*, ed eliminando le derivate seconde delle funzioni ξ, η, ζ, colle formole fondamentali della teoria della superficie, otteniamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} &= \frac{\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\,(E_0 - G_0)}\left[a\,b\,c\sqrt{E'_0} - i\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11})\right]\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\\
&+ \frac{\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\,(E_0 - G_0)}\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}\left[i\,a\,b\,c\sqrt{G'_0} - i\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21})\right]\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\\
&+ \frac{\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\sqrt{E_0}}\Delta X,\\
\frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} &= \frac{i\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\,(E_0 - G_0)}\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}\left[a\,b\,c\sqrt{E'_0} - i\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11})\right]\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\\
&+ \frac{i\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\,(E_0 - G_0)}\left[i\,a\,b\,c\sqrt{G'_0} - i\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21})\right]\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\\
&+ \frac{i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\sqrt{G_0}}\Delta'' X,
\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

colle analoghe in η e ζ; nelle quali X, Y, Z indicano i coseni direttori della normale alla superficie S, e le quantità Δ e Δ'' hanno le espressioni

$$\Delta = \Delta'' = \frac{a\,b\,c\,E_0\,G_0}{\sqrt{E\,G - F^2}}. \tag{113}$$

Da queste formole discendono ancora pei coseni direttori della normale alla superficie Σ le espressioni

$$\left.\begin{aligned}\rho X' = & \frac{\sqrt{k}}{abc\sqrt{EG-F^2}}\left[\left(iG\frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}}+F\frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}}\right)\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}-\left(iF\frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}}+E\frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}}\right)\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right] \\ & +\frac{i}{a^2b^2c^2}\left[i\sqrt{G'_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11})-\sqrt{E'_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Phi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21})\right]X,\end{aligned}\right\} \quad (114)$$

colle analoghe in Y e Z, in cui ρ indica un fattore di proporzionalità.

Si determina ρ dalle precedenti quadrando, sommando ed osservando la (109), e si trova

$$\rho^2 = -\frac{1}{a^2\,b^2\,c^2}\,(E_0 - G_0)\,(E'_0 - G'_0). \quad (115)$$

2. Ciò premesso proviamo che l'elemento lineare della superficie Σ coincide con quello della superficie S.

Caso 1.° Nessuna delle costanti a^2+k, b^2+k, c^2+k è nulla.

Confrontando le (110) con le (77), troviamo

$$x_1 = \sqrt{a^2+k}\,X'_3, \quad y_1 = \sqrt{b^2+k}\,Y'_3, \quad z_1 = \sqrt{c^2+k}\,Z'_3, \quad (116)$$

donde si vede che il punto F_1 giace attualmente sulla quadrica Q_k di equazione

$$\frac{x_1^2}{a^2+k}+\frac{y_1^2}{b^2+k}+\frac{z_1^2}{c^2+k}=1, \quad (117)$$

confocale a Q.

Applicando alle (110) il procedimento tenuto per le (111), otteniamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} = & \frac{\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\,(E_0-G_0)}\left[a\,b\,c\sqrt{E'_0}-i\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11})\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha} \\ & +\frac{\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\,(E_0-G_0)}\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}\left[i\,a\,b\,c\sqrt{G'_0}-i\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21})\right]\frac{\partial x}{\partial\beta} \\ & +\frac{\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}}{a\,b\,c\sqrt{E_0}}\,D\,X_0, \\ \frac{\partial x_1}{\partial\beta} = & \frac{i\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\,(E_0-G_0)}\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}\left[a\,b\,c\sqrt{E'_0}-i\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11})\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha} \\ & +\frac{i\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\,(E_0-G_0)}\left[i\,a\,b\,c\sqrt{G'_0}-i\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}(\sqrt{E_0}\,\Phi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21})\right]\frac{\partial x}{\partial\beta} \\ & +\frac{i\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}}{a\,b\,c\sqrt{G_0}}\,D''\,X_0,\end{aligned}\right\} \quad (118)$$

dove X_0, Y_0, Z_0 indicano i coseni direttori della normale alla quadrica Q; ed allora dalle (112) e (118), tenendo conto che per l'applicabilità delle S sulla quadrica si hanno le relazioni

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2,$$

$$\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \Sigma\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,\frac{\partial x}{\partial \beta},$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2,$$

facilmente deduciamo

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right)^2 - \Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 = \frac{k\,E'_0}{a^2\,b^2\,c^2\,E_0}\,(\Delta^2 - D^2),\\
&\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\,\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = 0,\\
&\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)^2 - \Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 = -\,\frac{k\,G'_0}{a^2\,b^2\,c^2\,G_0}\,(\Delta''^2 - D''^2).
\end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

Inoltre dalle (116) si ha

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = \sqrt{a^2+k}\,\sqrt{E'_0}\,X'_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} = \sqrt{b^2+k}\,\sqrt{E'_0}\,Y'_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = \sqrt{c^2+k}\,\sqrt{E'_0}\,Z'_1,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = \sqrt{a^2+k}\,\sqrt{G'_0}\,X'_2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \beta} = \sqrt{b^2+k}\,\sqrt{G'_0}\,Y'_2, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \beta} = \sqrt{c^2+k}\,\sqrt{G'_0}\,Z'_2,$$

ed essendo per formole note

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^2 &= D^2 - a^2\,b^2\,c^2\,E_0,\\
\Delta''^2 &= D''^2 + a^2\,b^2\,c^2\,G_0,
\end{aligned}\right\} \qquad (119)^*$$

avremo dalle (119) le espressioni

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}\right)^2 = E'_0\,(a^2\,X'^2_1 + b^2\,Y'^2_1 + c^2\,Z'^2_1),\\
&\Sigma\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} = \sqrt{E'_0}\,\sqrt{G'_0}\,(a^2\,X'_1\,X'_2 + b^2\,Y'_1\,Y'_2 + c^2\,Z'_1\,Z'_2),\\
&\Sigma\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \beta}\right)^2 = G'_0\,(a^2\,X^2_2 + b^2\,Y^2_2 + c^2\,Z^2_2),
\end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

che dimostrano il teorema.

Caso 2.° La costante k ha il valore $\sqrt{k} = \pm i\, c$; la quadrica sia generale oppure di rotazione attorno all'asse z.

Confrontando le (110) con le (102), (103), (104), troviamo

$$x_1 = \sqrt{a^2 - c^2}\, X'_3, \quad y_1 = \sqrt{b^2 - c^2}\, Y'_3, \quad z_1 = 0, \tag{121}$$

sicchè il punto F_1 sta attualmente sul piano $z_1 = 0$.

Sussistono anche in questo caso le (119); inoltre dalle precedenti si ha

$$\Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 = E'_0 \,(a^2 X'^2_1 + b^2 Y'^2_1 + c^2 Z'^2_1) - c^2 E'_0,$$

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \frac{\partial x_1}{\partial \beta} = \sqrt{E'_0}\, \sqrt{G'_0}\, (a^2 X'_1 X'_2 + b^2 Y'_1 Y'_2 + c^2 Z'_1 Z'_2),$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 = G'_0 \,(a^2 X'^2_2 + b^2 Y'^2_2 + c^2 Z'^2_2) - c^2 G'_0,$$

sostituendo le quali nelle (119) ed osservando le (119)* si ricavano nuovamente le (120).

Caso 3.° La costante k abbia il valore $\sqrt{k} = \pm c$ e la quadrica sia di rotazione attorno all'asse x.

Confrontando le (110) con le (103) e (107), troviamo

$$x_1 = \sqrt{a^2 - c^2}\, X'_3, \qquad y_1^2 + z_1^2 = 0, \tag{122}$$

sicchè il punto F_1 sta attualmente sulla coppia di piani $y_1^2 + z_1^2 = 0$.

Sussistono sempre le formole (19); che però in questo caso assumono la forma più semplice

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 - \frac{c^2 E'_0}{a^2 b^2 c^2 E_0} (\Delta^2 - D^2),$$

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \frac{\partial x_1}{\partial \beta},$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{c^2 G'_0}{a^2 b^2 c^2 G_0} (\Delta''^2 - D''^2).$$

Tenendo conto della prima delle (122) e delle (119)*, troviamo

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right)^2 = E'_0 \Big[(a^2 - c^2)\, X'^2_1 + c^2\Big],$$

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \sqrt{E'_0}\, \sqrt{G'_0}\, (a^2 - c^2)\, X'_1\, X'_2\,,$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)^2 = G'_0 \left[(a^2 - c^2) X'^2_2 + c^2\right],$$

che nell'ipotesi attuale $b = c$ coincidono con le (120).

Caso 4.° La costante k abbia il valore $\sqrt{k} = \pm i$ e la quadrica sia la sfera di raggio uguale ad 1.

In tal caso le (110) mostrano direttamente che il punto F_1 sta sul cono

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0\,;$$

e le (102) in forza delle (108) diventano

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} = E'_0 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + i \sqrt{E'_0}\, \sqrt{G'_0}\, \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \pm i \frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}}\, \Delta X,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} = i \sqrt{E'_0}\, \sqrt{G'_0}\, \frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - G'_0 \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \mp \frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}}\, \Delta'' X,$$

colle analoghe in η e ζ, donde quadrando e sommando facilmente si ricavano le espressioni

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}\right)^2 = E'_0\,, \qquad \Sigma \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} = 0, \qquad \Sigma \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \beta}\right)^2 = G'_0\,,$$

che nel caso attuale $a = b = c = 1$ coincidono con le (120).

Dall'analisi fatta resta dunque provato che in ogni caso la superficie Σ definita dalle (111) ha lo stesso elemento lineare della superficie S_1.

3. Per potere concludere che le superficie S_1 e Σ coincidono, basterà allora far vedere che sulla superficie Σ le linee α e β sono isotermo-coniugate.

Per dimostrarlo osserviamo che dalle espressioni (114) dei coseni direttori della normale alla superficie Σ e dalle (111) si ha

$$(\xi_1 - \xi)\, X' + (\eta_1 - \eta)\, Y' + (\zeta_1 - \zeta)\, Z' = 0,$$

la quale esprime che il segmento FF_1 tocca in F_1 la superficie Σ; cioè le superficie S e Σ sono le due falde focali della congruenza FF_1.

Questa congruenza è inoltre una congruenza W.

Infatti denotando con Ω l'angolo delle normali alle superficie S e Σ, si ha dalle (114)

$$\rho \cos \Omega = \frac{i}{a^2 b^2 c^2} \left[i \sqrt{G'_0} \, (\sqrt{E_0} \, \Phi_{12} - i \sqrt{G_0} \, \Phi_{11}) - \sqrt{E'_0} \, (\sqrt{E_0} \, \Phi_{22} - i \sqrt{G_0} \, \Phi_{21}) \right],$$

donde

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \Omega = \rho^2 + \frac{1}{a^4 b^4 c^4} \left[i \sqrt{G'_0} \, (\sqrt{E_0} \, \Phi_{12} \quad i \sqrt{G_0} \, \Phi_{11}) - \sqrt{E'_0} \, (\sqrt{E_0} \, \Phi_{22} - i \sqrt{G_0} \, \Phi_{21}) \right]^2,$$

e per la (109) e (115)

$$- \frac{1}{a^2 b^2 c^2} (E_0 - G_0) (E'_0 - G'_0) \operatorname{sen}^2 \Omega = E \frac{k E'_0}{a^2 b^2 c^2 E_0} -$$

$$- G \frac{k G_0}{a^2 b^2 c^2 G_0} + 2 F \frac{k i \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0}}{a^2 b^2 c^2 \sqrt{E_0} \sqrt{G_0}} \cdot$$

Ma il secondo membro di questa eguaglianza rappresenta il quadrato della distanza dei punti F ed F_1; cioè la precedente si può scrivere

$$(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 = - \frac{1}{a^2 b^2 c^2} (E_0 - G_0) (E'_0 - G'_0) \operatorname{sen}^2 \Omega. \quad (123)$$

Ed allora, tenendo conto che le curvature totali delle superficie S e Σ hanno le espressioni

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(E_0 - G_0)^2}, \quad \frac{a^2 b^2 c^2}{(E'_0 - G'_0)^2},$$

per un noto teorema di Ribaucour potremo affermare che la congruenza $F F_1$ è una congruenza W; di più le linee α e β essendo isotermo-coniugate su S lo saranno anche su Σ, onde risulta infine che la superficie Σ coincide con S_1.

Rimane quindi provato che le formole (111) dànno in ogni caso l'effettivo passaggio dalla superficie S alla superficie S_1 corrispondenti rispettivamente alla soluzione X_3, Y_3, Z_3 ed alla soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 del sistema fondamentale (3); e nel tempo stesso le trasformazioni stabilite nella Parte II rimangono identificate con le trasformazioni B_k.

Denoteremo d'ora innanzi con B_∞ le trasformazioni stabilite nella Parte I, potendosi dedurre la (16) dalla (14) ponendo $k = \infty$.

Risulta intanto che le B_∞ sfuggono all'ordinaria rappresentazione analitica della B_k, giacchè le (111) non hanno senso per $k = \infty$.

FINE DELLA PARTE TERZA.

PARTE IV

§ 10. Le trasformazioni di Guichard.

1. È noto da una mia precedente Memoria (*) che la trasformazione di Guichard delle superficie applicabili sulle quadriche fatta conoscere dall'autore nel 1905, è riducibile ad una D_m.

Siffatta trasformazione può definirsi mediante le formole (50), (51) e (56) della citata Memoria.

Se indichiamo con X'_3, Y'_3, Z'_3 ed X''_3, Y''_3, Z''_3 due soluzioni del sistema (3) legate fra loro dalla suddetta trasformazione di Guichard e consideriamo sulla sfera

$$X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 = 1$$

la corrispondenza in cui al punto X'_3, Y'_3, Z'_3 corrisponde il punto X''_3, Y''_3, Z''_3, le relazioni (50) e (51) esprimono che le tangenti alle linee α e β della suddetta sfera in punti corrispondenti rispettivamente si tagliano.

Le condizioni (50) e (51) non bastano per sè sole a definire la trasformazione, occorrendo ancora la condizione complementare (56).

Trascurando quest'ultima condizione e considerando la trasformazione che le (50) e (51) per sè sole definiscono, otterremo una trasformazione più generale che evidentemente comprende quella di Guichard sopra ricordatà e che, come ha fatto conoscere Servant (**), comprende quella data da Guichard nel 1897.

Per stabilire le formole relative a questa trasformazione proponiamoci direttamente il problema sotto la seguente forma:

Nota una soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 del sistema (3) determiniamo nel modo

---

(*) P. Calapso, *Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXII (1911), pp. 365-385].

(**) M. Servant, *Sur les transformations des surfaces applicables sur les surfaces du second degré* [Comptes rendus, tom. CLI (2.° semestre 1910), pp. 1107-1109].

più generale una soluzione nuova X''_3, Y''_3, Z''_3 per la quale i determinanti

$$\begin{vmatrix} X'_3 - X''_3 & Y'_3 - Y''_3 & Z'_3 - Z''_3 \\ \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y'_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z'_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial X''_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y''_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z''_3}{\partial \alpha} \end{vmatrix}, \tag{124}$$

$$\begin{vmatrix} X'_3 - X''_3 & Y'_3 - Y''_3 & Z'_3 - Z''_3 \\ \frac{\partial X'_3}{\partial \beta} & \frac{\partial Y'_3}{\partial \beta} & \frac{\partial Z'_3}{\partial \beta} \\ \frac{\partial X''}{\partial \beta} & \frac{\partial Y''_3}{\partial \beta} & \frac{\partial Z''_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}, \tag{125}$$

sono nulli.

Le derivate delle funzioni incognite X''_3, Y''_3, Z''_3 si esprimeranno mediante relazioni della forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X''_3}{\partial \alpha} &= m_1 \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} + n_1 (X'_3 - X''_3), \\ \frac{\partial X''_3}{\partial \beta} &= m_2 \frac{\partial X'_3}{\partial \beta} + n_2 (X'_3 - X''_3), \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

colle analoghe in Y_3 e Z_3, in cui m_1, n_1, m_2, n_2 sono funzioni di X''_3, Y''_3, Z''_3, X'_3, Y'_3, Z'_3 e delle derivate di X'_3, Y'_3, Z'_3 che vogliamo determinare.

Per la prima equazione del sistema (3) sappiamo che sussistono le relazioni

$$\left.\begin{aligned} X''_3 \frac{\partial X''_3}{\partial \alpha} + Y''_3 \frac{\partial Y''_3}{\partial \alpha} + Z''_3 \frac{\partial Z''_3}{\partial \alpha} &= 0, \\ X''_{33} \frac{\partial X''_3}{\partial \beta} + Y''_3 \frac{\partial Y''_3}{\partial \beta} + Z''_3 \frac{\partial Z''_3}{\partial \beta} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

ed esprimendo che esse sono verificate dalle espressioni precedenti otteniamo

$$\left.\begin{aligned} m_1 \Sigma X''_3 \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} &= n_1 (1 - \Sigma X'_3 X''_3), \\ m_2 \Sigma X''_3 \frac{\partial X'_3}{\partial \beta} &= n_2 (1 - \Sigma X'_3 X''_3). \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Esprimendo inoltre che per le (126) è soddisfatta la terza equazione del sistema (3), e tenendo conto delle precedenti troviamo

$$m_1^2 E'_0 - m_2^2 G'_0 = b^2 c^2 X''^2_3 + c^2 a^2 Y''^2_3 + a^2 b^2 Z''^2_3. \tag{129}$$

2. Questa e la precedente non bastano ancora per determinare m_1, m_2, n_1, n_2; bisogna ancora esprimere che le (126) soddisfano alle condizioni

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial X''_3}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial X''_3}{\partial \beta}\right)$$

e le analoghe in Y_3 e Z_3.

Sostituendo in queste per le derivate di $X''_3\, Y''_3\, Z''_3$ le espressioni (126) ed opportunamente semplificando perveniamo alle relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial m_1}{\partial \beta} + (m_1 - m_2)\frac{1}{2 E'_0}\frac{\partial E'_0}{\partial \beta} = n_2 (1 - m_1),\\ &\frac{\partial m_2}{\partial \alpha} + (m_2 - m_1)\frac{1}{2 G'_0}\frac{\partial G'_0}{\partial \alpha} = n_1 (1 - m_2),\\ &\frac{\partial n_1}{\partial \beta} = \frac{\partial n_2}{\partial \alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Ciò posto introduciamo una funzione ausiliaria χ colla posizione

$$\left.\begin{aligned} m_1 E'_0 - m_2 G'_0 = b^2 c^2 X'_3 X''_3 + c^2 a^2 Y'_3 Y''_3 + a^2 b^2 Z'_3 Z''_3 \\ - a^2 b^2 c^2 . \chi (1 - \Sigma X'_3 X''_3). \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

Esprimendo che le funzioni m_1, m_2, n_1, n_2, dedotte dalle (128), (129) e (131). verificano le (130) vediamo con facile calcolo che si dovrà avere

$$\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \beta} = 0,$$

quindi $\chi = \text{cost.}$

3. L'analisi precedente, adoperata per la ricerca della soluzione X''_3, Y''_3, Z''_3, per la quale i determinanti (124) e (125) sono nulli, ci ha condotto al sistema (126) in cui $m_1\, m_2\, n_1\, n_2$ sono date dalle (128), (129), (131) con $\chi = \text{cost.}$

Inversamente partiamo da una soluzione particolare qualunque X'_3, Y'_3, Z'_3 del sistema (3); e consideriamo il sistema di equazioni differenziali (126) nelle funzioni incognite X''_3, Y''_3, Z''_3 in cui m_1, m_2, n_1, n_2 sono dati dalle (128), (129), (131) con $\chi = \text{cost.}$; indi aggiungiamo la condizione

$$X''^2_3 + Y''^2_3 + Z''^2_3 = 1. \tag{132}$$

Facilmente si vede che le m_1, m_2, n_1, n_2 soddisfano le (130), e quindi il sistema (126), (132) è illimitatamente integrabile.

Si hanno così dall'integrazione le funzioni X''_3, Y''_3, Z''_3 con due costanti arbitrarie che, tenendo conto delle (128) e (129), vediamo subito che soddisfano al sistema (3).

Adunque la più generale trasformazione per la quale i determinanti (124) e (125) sono nulli si ottiene aggiungendo la condizione (131) con $\chi = \text{cost.}$; ossia ponendo

$$\chi = \frac{1}{k}$$

avremo

$$\begin{aligned} k(m_1 E'_0 - m_2 G'_0) = k(b^2 c^2 X'_3 X''_3 + c^2 a^2 Y'_3 Y''_3 + a^2 b^2 Z'_3 Z''_3) \\ - a^2 b^2 c^2 (1 - \sum X'_3 X''_3). \end{aligned}$$

D'altra parte le (126) stesse mostrano che si può assumere

$$\sqrt{E''_0} = m_1 \sqrt{E'_0}, \quad \sqrt{G''_0} = m_2 \sqrt{G'_0},$$

sicchè la precedente si può scrivere

$$\left.\begin{aligned} k(\sqrt{E'_0}\sqrt{E''_0} - \sqrt{G'_0}\sqrt{G''_0}) = k(b^2 c^2 X'_3 X''_3 + c^2 a^2 Y'_3 Y''_3 + a^2 b^2 Z'_3 Z''_3) \\ - a^2 b^2 c^2 (1 - \sum X''_3 X''_3). \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Indicheremo con G_k la trasformazione così definita, sicchè quella del 1905 indicheremo in conseguenza con G_{-c^2} (*).

Vedremo in seguito in che modo questa trasformazione sia legata con le B_k e ciò per tutti i valori di k, in particolare pei valori $-c^2$ ed ∞.

4. Prima però crediamo opportuno fare un breve cenno intorno ad una trasformazione d'altra natura (*trasformazione H*), dovuta al Bianchi, la cui considerazione estende notevolmente i risultati relativi alle trasformazioni B_k.

Per esprimerla nelle nostre formole procediamo nel seguente modo.

Sia X_3, Y_3, Z_3 una soluzione del sistema (3) e poniamo

$$\mathbf{X}_3 = \frac{1}{X_3}, \quad \mathbf{Y}_3 = \frac{i Y_3}{X_3}, \quad \mathbf{Z}_3 = \frac{i Z_3}{X_3}. \tag{134}$$

(*) Vedasi la (56) della mia citata Memoria.

Derivando e tenendo presenti le (6), avremo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{X}_3}{\partial \alpha} &= -\frac{\sqrt{E_0}}{X_3^2} X_1, \quad \frac{\partial \mathbf{Y}_3}{\partial \alpha} = \frac{i\sqrt{E_0}}{X_3^2} Z_2, \quad \frac{\partial \mathbf{Z}_3}{\partial \alpha} = -\frac{i\sqrt{E_0}}{X_3^2} Y_2, \\
\frac{\partial \mathbf{X}_3}{\partial \beta} &= -\frac{\sqrt{G_0}}{X_3^2} X_2, \quad \frac{\partial \mathbf{Y}_3}{\partial \beta} = -\frac{i\sqrt{G_0}}{X_3^2} Z_1, \quad \frac{\partial \mathbf{Z}_3}{\partial \alpha} = \frac{i\sqrt{G_0}}{X_3^2} Y_1,
\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

donde segue facilmente che le funzioni $\mathbf{X}_3$, $\mathbf{Y}_3$, $\mathbf{Z}_3$ soddisfano al sistema

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{X}_3^2 + \mathbf{Y}_3^2 + \mathbf{Z}_3^2 = 1, \\
&\Sigma \frac{\partial \mathbf{X}_3}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{X}_3}{\partial \beta} = 0, \\
&\Sigma \left(\frac{\partial \mathbf{X}_3}{\partial \alpha}\right)^2 - \Sigma \left(\frac{\partial \mathbf{X}_3}{\partial \beta}\right)^2 = -b^2 c^2 \mathbf{X}_3^2 + c^2 (a^2 - b^2) \mathbf{Y}_3^2 + b^2 (a^2 - c^2) \mathbf{Z}_3^2.
\end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Si vede allora che le (104) fanno passare da una soluzione del sistema (3) ad una soluzione del sistema (136); le medesime conducono per altro da una soluzione del sistema (136) ad una soluzione del sistema (3).

Ora le (136) quando $a^2 - b^2$ e $a^2 - c^2$ sono diversi da zero determinano una superficie applicabile sulla quadrica

$$\frac{\mathbf{x}^2}{a'^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{b'^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{c'^2} = 1, \tag{137}$$

in cui

$$\left.\begin{aligned}
b'^2 c'^2 &= -b^2 c^2 \\
c'^2 a'^2 &= c^2 (a^2 - b^2) \\
a'^2 b'^2 &= b^2 (a^2 - c^2).
\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

La trasformazione H fa dunque passare da una deformata della quadrica (1) ad una deformata della (137), e viceversa.

5. Qui faremo conoscere un teorema che sembra molto importante per la teoria della superficie applicabili sulle quadriche.

Esso può enunciarsi così:

La trasformazione H cangia coppia di superficie applicabili sulla (1) *legate tra loro da una G_k, in un'altra coppia di superficie applicabili sulla* (137) *legate tra loro da una $G_{k'}$.*

Il teorema risulta subito osservando che la collineazione (134) che trasforma il sistema (3) nel sistema (136) e trasforma, come abbiamo visto, in sè stessa la sfera

$$X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 = 1,$$

conserva evidentemente la proprietà che le tangenti alle linee α e β in punti corrispondenti rispettivamente si tagliano.

Però occorre il valore di k' quando è dato k.

Per determinare k' osserviamo che si ha dalle (135)

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{E}'_0} = \frac{i\sqrt{E'_0}}{X'_3}, \quad \sqrt{\mathbf{G}'_0} = \frac{i\sqrt{G'_0}}{X'_3}, \\ \sqrt{\mathbf{E}''_0} = \frac{i\sqrt{E''_0}}{X''_3}, \quad \sqrt{\mathbf{G}''_0} = \frac{i\sqrt{G''_0}}{X''_3}, \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

donde

$$\sqrt{\mathbf{E}'_0}\,\sqrt{\mathbf{E}''_0} - \sqrt{\mathbf{G}'_0}\,\sqrt{\mathbf{G}''_0} = -\frac{1}{X'_3 X''_3}\left(\sqrt{E'_0}\,\sqrt{E''_0} - \sqrt{G'_0}\,\sqrt{G''_0}\right),$$

e quindi tenendo presente la (133) e le (138) troviamo

$$\sqrt{\mathbf{E}'_0}\,\sqrt{\mathbf{E}''_0} - \sqrt{\mathbf{G}'_0}\,\sqrt{\mathbf{G}''_0} = b'^2 c'^2\, \mathbf{X}'_3\, \mathbf{X}''_3 + c'^2 a'^2\, \mathbf{Y}'_3\, \mathbf{Y}''_3 + a'^2 b'^2\, \mathbf{Z}'_3\, \mathbf{Z}''_3$$
$$-\left(\frac{a^2 b^2 c^2}{k} + b^2 c^2\right)\left(1 - \Sigma\, \mathbf{X}'_3\, \mathbf{X}''_3\right).$$

Segue

$$\frac{a'^2 b'^2 c'^2}{k'} = b^2 c^2 + \frac{a^2 b^2 c^2}{k},$$

donde

$$\frac{1}{k'} = -\frac{1}{a'^2}\left(1 + \frac{a^2}{k}\right), \tag{140}$$

oppure

$$\frac{a^2}{k} + \frac{a'^2}{k'} + 1 = 0. \tag{141}$$

Ricordiamo infine che, come è noto dalle ricerche del Bianchi (*), sussiste un teorema analogo per le trasformazioni B_k, cioè:

(*) *Lezioni*, vol. III, pag. 230.

La trasformazione H cangia una coppia di superficie applicabili sulla (1) *legate tra loro da una B_k, in un'altra coppia di superficie applicabili sulla* (137) *legate tra loro da una $B_{k'}$.*

Daremo di questo teorema una dimostrazione nuova, che presenterà il vantaggio oltre ad essere brevissima di fare conoscere il valore di k' quando è dato k.

Consideriamo allo scopo due soluzioni X_3, Y_3, Z_3 ed X'_3, Y'_3, Z'_3 del sistema (3) legate da una trasformazione B_k, cioè legate dalla relazione

$$b\,c\sqrt{a^2+k}\,X_3\,X'_3+c\,a\sqrt{b^2+k}\,Y_3\,Y'_3+a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z_3\,Z'_3=a\,b\,c. \quad (142)$$

Applicando la trasformazione H, questa diventa

$$a\,b\,c\,X_3\,X'_3+a\,c\sqrt{b^2+k}\,Y_3\,Y'_3+a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z_3\,Z'_3=b\,c\sqrt{a^2+k}. \quad (143)$$

Esprimendo che i coefficienti e il termine noto sono proporzionali alle quantità

$$b'\,c'\sqrt{a'^2+k'}\,, \qquad c'\,a'\sqrt{b'^2+k'}\,, \qquad a'\,b'\sqrt{c'^2+k'}\,, \qquad a'\,b'\,c' \quad (144)$$

si ottengono tre relazioni in k e k' che si riducono tutte alla (141).

Ciò dimostra chiaramente il teorema, di più la (141) dà il modo di calcolare k' quando è dato k.

In particolare per $k=-a^2$ la (141) dà $k'=\infty$; dunque la considerazione delle trasformazioni B_∞ permette di estendere quest'ultimo teorema al caso eccezionale $k=-a^2$.

Nel tempo stesso rimane dimostrato che si ha

$$B_\infty=H^{-1}\,B_{-a^2}\,H. \quad (145)$$

FINE DELLA PARTE QUARTA.

PARTE V.

§ XI. Composizione di due trasformazioni B_k ordinarie.

1. In questo paragrafo vogliamo studiare la trasformazione che si ottiene componendo due trasformazioni B_k con la medesima costante k e di classe opposta, corrispondenti cioè ai due valori opposti di ε nelle (88).

Applichiamo dunque ad una stessa soluzione X_3, Y_3, Z_3 del sistema (3) due trasformazioni B_k di classe opposta; le funzioni X'_i, Y'_i, Z'_i, $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, Φ_{ik}, che si ottengono con la prima trasformazione e le funzioni X''_i, Y''_i, Z''_i, $\sqrt{E''_0}$, $\sqrt{G''_0}$, Φ'_{ik}, che si ottengono con la seconda trasformazione, sono espresse dalle formole

$$\left.\begin{aligned} X'_3 &= \frac{1}{bc\sqrt{a^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,X_1+i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,X_2+abc\,X_3),\\ Y'_3 &= \frac{1}{ca\sqrt{b^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,Y_1+i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,Y_2+abc\,Y_3),\\ Z'_3 &= \frac{1}{ab\sqrt{c^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,Z_1+i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,Z_2+abc\,Z_3), \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

$$\left.\begin{aligned} X''_3 &= \frac{1}{bc\sqrt{a^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\,X_1+i\sqrt{k}\sqrt{G''_0}\,X_2+abc\,X_3),\\ Y''_3 &= \frac{1}{ca\sqrt{b^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\,Y_1+i\sqrt{k}\sqrt{G''_0}\,Y_2+abc\,Y_3),\\ Z''_3 &= \frac{1}{ab\sqrt{c^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\,Z_1+i\sqrt{k}\sqrt{G''_0}\,Z_2+abc\,Z_3), \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{1}{E_0-G_0}\Big[abc\sqrt{E_0}\sqrt{E'_0}-\sqrt{k}\sqrt{E_0}\,(b^2c^2X_1X_3+c^2a^2Y_1Y_3+a^2b^2Z_1Z_3)\\ &\qquad -i\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{G_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,H_{21}+i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,H_{22}+abcH_{23})\Big],\\ \Phi'_{11} &= \frac{1}{E_0-G_0}\Big[abc\sqrt{E_0}\sqrt{E''_0}-\sqrt{k}\sqrt{E_0}\,(b^2c^2X_1X_3+c^2a^2Y_1Y_3+a^2b^2Z_1Z_3)\\ &\qquad +i\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{G_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\,H_{21}+i\sqrt{k}\sqrt{G''_0}\,H_{22}+abcH_{23})\Big], \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{12} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\Big[iabc\sqrt{G_0}\sqrt{E'_0} - i\sqrt{k}\sqrt{G_0}\,(b^2c^2X_1X_3 + c^2a^2Y_1Y_3 + a^2b^2Z_1Z_3) \\
&\quad + \sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{E_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,H_{21} + i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,H_{22} + abcH_{23})\Big], \\
\Phi'_{12} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\Big[iabc\sqrt{G_0}\sqrt{E''_0} - i\sqrt{k}\sqrt{G_0}\,(b^2c^2X_1X_3 + c^2a^2Y_1Y_3 + a^2b^2Z_1Z_3) \\
&\quad - \sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{E_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\,H_{21} + i\sqrt{k}\sqrt{G''_0}\,H_{22} + abcH_{23})\Big],
\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{21} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\Big[iabc\sqrt{E_0}\sqrt{G'_0} - \sqrt{k}\sqrt{E_0}\,(b^2c^2X_2X_3 + c^2a^2Y_2Y_3 + a^2b^2Z_2Z_3) \\
&\quad + i\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{G_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,H_{11} + i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,H_{12} + abcH_{13})\Big], \\
\Phi'_{21} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\Big[iabc\sqrt{E_0}\sqrt{G''_0} - \sqrt{k}\sqrt{E_0}\,(b^2c^2X_2X_3 + c^2a^2Y_2Y_3 + a^2b^2Z_2Z_3) \\
&\quad - i\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{G_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\,H_{11} + i\sqrt{k}\sqrt{G''_0}\,H_{12} + abcH_{13})\Big],
\end{aligned}\right\} \tag{150}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{22} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\Big[-abc\sqrt{G_0}\sqrt{G'_0} - i\sqrt{k}\sqrt{G_0}\,(b^2c^2X_2X_3 + c^2a^2Y_2Y_3 + a^2b^2Z_2Z_3) \\
&\quad - \sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{E_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,H_{11} + i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,H_{12} + abcH_{13})\Big], \\
\Phi'_{22} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\Big[-abc\sqrt{G_0}\sqrt{G''_0} - i\sqrt{k}\sqrt{G_0}\,(b^2c^2X_2X_3 + c^2a^2Y_2Y_3 + a^2b^2Z_2Z_3) \\
&\quad + \sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{E_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\,H_{11} + i\sqrt{k}\sqrt{G''_0}\,H_{12} + abcH_{13})\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{151}$$

Ciò posto consideriamo il determinante

$$\begin{vmatrix}
X'_3 - X''_3 & Y'_3 - Y''_3 & Z'_3 - Z''_3 \\
\dfrac{\partial X'_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Y'_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Z'_3}{\partial \alpha} \\
\dfrac{\partial X''_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Y''_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Z''_3}{\partial \alpha}
\end{vmatrix},$$

ossia

$$\begin{vmatrix}
X'_3 - X''_3 & Y'_3 - Y''_3 & Z'_3 - Z''_3 \\
\sqrt{E'_0}\,X'_1 & \sqrt{E'_0}\,Y'_1 & \sqrt{E'_0}\,Z'_1 \\
\sqrt{E''_0}\,X''_1 & \sqrt{E''_0}\,Y''_1 & \sqrt{E''_0}\,Z''_1
\end{vmatrix},$$

e in esso sostituiamo per X'_i, Y'_i, Z'_i le loro effettive espressioni date dalle (146), (147), ecc.; dopo semplificazione esso prende la forma

$$\frac{k\sqrt{E_0}\sqrt{E'_0}\,E''_0}{a^2 b^2 c^2 \sqrt{a^2+k}\sqrt{b^2+k}\sqrt{c^2+k}}\begin{vmatrix} \sqrt{E'_0}-\sqrt{E''_0} & i(\sqrt{G'_0}-\sqrt{G''_0}) & 0 \\ \Phi_{11} & \Phi_{21} & 1 \\ \Phi'_{11} & \Phi'_{21} & 1 \end{vmatrix},$$

donde ponendo per le Φ_{ik} Φ'_{ik} le espressioni (148), (150) e tenendo conto della (78) facilmente vediamo che il determinante è nullo.

Similmente vediamo che è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} X'_3-X''_3 & Y'_3-Y''_3 & Z'_3-Z''_3 \\ \dfrac{\partial X'_3}{\partial\beta} & \dfrac{\partial Y'_3}{\partial\beta} & \dfrac{\partial Z'_3}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial X''_3}{\partial\beta} & \dfrac{\partial Y''_3}{\partial\beta} & \dfrac{\partial Z''_3}{\partial\beta} \end{vmatrix}.$$

Di più dalle (146) e (147) otteniamo

$$k(\sqrt{E'_0}\sqrt{E''_0}-\sqrt{G'_0}\sqrt{G''_0}) = k(b^2c^2X'_3X''_3+c^2a^2Y'_3Y''_3+a^2b^2Z'_3Z''_3) \\ -a^2b^2c^2(1-\Sigma X'_3X''_3),$$

che si identifica colla (133); quindi la composizione di due B_k ordinarie di classe opposta dà luogo ad una trasformazione G_k.

2. Sussiste anche il teorema inverso.

Infatti consideriamo al solito una soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 del sistema (3) ed una soluzione $X''_3\,Y''_3\,Z''_3$ dedotta dalla prima con una G_k, per la quale nessuna delle quantità a^2+k, b^2+k, c^2+k è nulla, e introduciamo nove funzioni X_i, Y_i, Z_i mediante le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{k}\sqrt{E'_0}X_1+i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}X_2+abcX_3 &= bc\sqrt{a^2+k}\,.\,X'_3, \\ \sqrt{k}\sqrt{E'_0}Y_1+i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}Y_2+abcY_3 &= ca\sqrt{b^2+k}\,.\,Y'_3, \\ \sqrt{k}\sqrt{E'_0}Z_1+i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}Z_2+abcZ_3 &= ab\sqrt{c^2+k}\,.\,Z'_3, \\ m_1\sqrt{k}\sqrt{E'_0}X_1+im_2\sqrt{k}\sqrt{G'_0}X_2+abcX_3 &= bc\sqrt{a^2+k}\,X''_3, \\ m_1\sqrt{k}\sqrt{E'_0}Y_1+im_2\sqrt{k}\sqrt{G'_0}Y_2+abcY_3 &= ca\sqrt{b^2+k}\,Y''_3, \\ m_1\sqrt{k}\sqrt{E'_0}Z_1+im_2\sqrt{k}\sqrt{G'_0}Z_2+abcZ_3 &= ab\sqrt{c^2+k}\,Z''_3, \end{aligned}\right\} \quad (152)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0, \\ X_1 X_3 + Y_1 Y_3 + Z_1 Z_3 = 0, \\ X_2 X_3 + Y_2 X_3 + Z_2 Z_3 = 0. \end{array}\right\} \tag{153}$$

Queste si possono risolvere algebricamente rispetto alle X_i, Y_i, Z_i nel seguente modo.

Dalla prima e dalla quarta possiamo ricavare X_1 ed X_2 mediante la X_3; e similmente per Y_1 ed Y_2, per Z_1 e Z_2. Indi esprimendo che le (153) sono soddisfatte e tenendo presenti la (129), la (133) e la terza del sistema (3), troviamo come condizioni necessarie e sufficienti le relazioni

$$\left.\begin{array}{c} X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 = 1, \\ b\,c\sqrt{a^2+k}\,X_3 X'_3 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,Y_3 Y'_3 + a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z_3 Z'_3 = a\,b\,c, \\ b\,c\sqrt{a^2+k}\,X_3 X''_3 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,Y_3 Y''_3 + a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z_3 Z''_3 = a\,b\,c. \end{array}\right\} \tag{154}$$

Da queste si ricavano X_3, Y_3, Z_3, donde restano determinate le altre.

Le relazioni (129), (133) e la terza del sistema (3) esprimono altresì che per le funzioni X_i, Y_i, Z_i ricavati nel modo suddetto, il determinante

$$\left.\begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{array}\right\} \tag{155}$$

è ortogonale.

Ed importa osservare che le espressioni

$$b\,c\sqrt{a^2+k}\,(X'_1 - X''_1)\,X_3 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,(Y'_1 - Y''_1)\,Y_3 + \\ + a\,b\sqrt{c^2+k}\,(Z'_1 - Z''_1)\,Z_3\,,$$

$$b\,c\sqrt{a^2+k}\,(X'_2 - X''_2)\,X_3 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,(Y'_2 - Y''_2)\,Y_3 + \\ + a\,b\sqrt{c^2+k}\,(Z'_2 - Z''_2)\,Z_3\,,$$

in forza delle (126) e della seconda e terza delle (154) sono nulle.

Poniamo ora

$$\left.\begin{array}{l} -\sqrt{k}\,\sqrt{E_0} = b\,c\sqrt{a^2+k}\,X_3 X'_1 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,Y_3 Y'_1 + \\ \qquad\qquad + a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z_3 Z'_1\,, \\ -i\sqrt{k}\,\sqrt{G_0} = b\,c\sqrt{a^2+k}\,X_3 X'_2 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,Y_3 Y'_2 + \\ \qquad\qquad + a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z_3 Z'_2\,, \end{array}\right\} \tag{156}$$

o ciò che è lo stesso per l'osservazione or fatta

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{k}\,\sqrt{E_0} &= b\,c\sqrt{a^2+k}\,X_3\,X''_1 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,Y_3\,Y''_1 + \\ &\qquad + a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z_3\,Z''_1\,, \\ -i\sqrt{k}\,\sqrt{G_0} &= b\,c\sqrt{a^2+k}\,X_3\,X''_2 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,Y_3\,Y''_2 + \\ &\qquad + a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z_3\,Z''_2\,; \end{aligned}\right\} \tag{157}$$

dalle (154) tenendo conto delle (152) e della ortogonalità del determinante (155), avremo

$$\frac{\partial X_3}{\partial \alpha} = \sqrt{E_0}\,X_1\,, \qquad \frac{\partial Y_3}{\partial \alpha} = \sqrt{E_0}\,Y_1\,, \qquad \frac{\partial Z_3}{\partial \alpha} = \sqrt{E_0}\,Z_1\,,$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial \beta} = \sqrt{G_0}\,X_2\,, \qquad \frac{\partial Y_3}{\partial \beta} = \sqrt{G_0}\,Y_2\,, \qquad \frac{\partial Z_3}{\partial \beta} = \sqrt{G_0}\,Z_2\,,$$

donde

$$\Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial \alpha}\right)^2 = E_0\,, \qquad \Sigma\,\frac{\partial X_3}{\partial \alpha}\,\frac{\partial X_3}{\partial \beta} = 0\,, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial \beta}\right)^2 = G_0\,.$$

Inoltre associando alle (156) la seconda delle (154), e risolvendo rispetto ad X_3, Y_3, Z_3 otteniamo

$$b\,c\sqrt{a^2+k}\,.\,X_3 = -\sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,X'_1 - i\sqrt{k}\,\sqrt{G_0}\,X'_2 + a\,b\,c\,X'_3\,,$$

$$c\,a\sqrt{b^2+k}\,.\,Y_3 = -\sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,Y'_1 - i\sqrt{k}\,\sqrt{G_0}\,Y'_2 + a\,b\,c\,Y'_3\,,$$

$$a\,b\sqrt{c^2+k}\,.\,Z_3 = -\sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,Z'_1 - i\sqrt{k}\,\sqrt{G_0}\,Z'_2 + a\,b\,c\,Z'_3\,,$$

donde quadrando e sommando ricaviamo infine

$$b^2\,c^2\,X_3^2 + c^2\,a^2\,Y_3^2 + a^2\,b^2\,Z_3^2 = E_0 - G_0\,.$$

E così rimane dimostrato che se X'_3, Y'_3, Z'_3 e X''_3, Y''_3, Z''_3 sono due soluzioni del sistema (3) legate fra loro da una trasformazione G_k le (154) fanno conoscere in termini finiti una nuova soluzione del sistema (3); di più le (154) medesime esprimono che la soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 è deducibile dalla soluzione X_3, Y_3, Z_3 mediante una B_k ordinaria, e così pure la soluzione X''_3, Y''_3, Z''_3.

Risulta dunque il teorema espresso dalla formola

$$G_k = B_k\,B'_k\,.$$

§ XII. Composizione di due B_k singolari.

3. Facciamo ora una ricerca analoga per le trasformazioni B_k singolari occupandoci in primo luogo delle B_∞.

Applichiamo dunque ad una stessa soluzione X_3, Y_3, Z_3 del sistema (3) due trasformazioni B_∞ di classe opposta; le funzioni X'_i, Y'_i, Z'_i, $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, Ψ_{ik}, che si ottengono con la prima trasformazione, e le funzioni X''_i, Y''_i, Z''_i, $\sqrt{E''_0}$, $\sqrt{G''_0}$, Ψ'_{ik}, che si ottengono con la seconda trasformazione, sono espresse dalle formole

$$\left.\begin{aligned} X'_3 &= \frac{1}{b\,c}(\sqrt{E'_0}\,X_1 + i\sqrt{G'_0}\,X_2), \\ Y'_3 &= \frac{1}{c\,a}(\sqrt{E'_0}\,Y_1 + i\sqrt{G'_0}\,Y_2), \\ Z'_3 &= \frac{1}{a\,b}(\sqrt{E'_0}\,Z_1 + i\sqrt{G'_0}\,Z_2), \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

$$\left.\begin{aligned} X''_3 &= \frac{1}{b\,a}(\sqrt{E''_0}\,X_1 + i\sqrt{G''_0}\,X_2), \\ Y''_3 &= \frac{1}{c\,a}(\sqrt{E''_0}\,Y_1 + i\sqrt{G''_0}\,Y_2), \\ Z''_3 &= \frac{1}{a\,b}(\sqrt{E''_0}\,Z_1 + i\sqrt{G''_0}\,Z_2), \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{11} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left[P_1\sqrt{E_0} - i\,a^2 b^2 c^2 \sqrt{G_0}\,(\sqrt{E'_0}\,A_{21} + i\sqrt{G'_0}\,A_{22})\right], \\ \Psi'_{11} &= \frac{1}{E_0 = G_0}\left[P_1\sqrt{E_0} + i\,a^2 b^2 c^2 \sqrt{G_0}\,(\sqrt{E''_0}\,A_{21} + i\sqrt{G''_0}\,A_{22})\right], \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{12} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left[i\,P_1\sqrt{G_0} + a^2 b^2 c^2 \sqrt{E_0}\,(\sqrt{E'_0}\,A_{21} + i\sqrt{G'_0}\,A_{22})\right], \\ \Psi'_{12} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left[i\,P_1\sqrt{G_0} - a^2 b^2 c^2 \sqrt{E_0}\,(\sqrt{E''_0}\,A_{21} + i\sqrt{G''_0}\,A_{22})\right], \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{21} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left[Q_1\sqrt{E_0} + i\,a^2 b^2 c^2 \sqrt{G_0}\,(\sqrt{E'_0}\,A_{11} + i\sqrt{G'_0}\,A_{12})\right], \\ \Psi'_{21} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left[i\,Q_1\sqrt{E_0} - i\,a^2 b^2 c^2 \sqrt{G_0}\,(\sqrt{E''_0}\,A_{11} + i\sqrt{G''_0}\,A_{12})\right], \end{aligned}\right\} \tag{162}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{22} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left[i\,Q\sqrt{G_0} - a^2\,b^2\,c^2\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E'_0}\,A_{11} + i\sqrt{G'_0}\,A_{12})\right],\\ \Psi'_{22} &= \frac{1}{E_0 - G_0}\left[i\,Q\sqrt{G_0} + a^2\,b^2\,c^2\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E''_0}\,A_{11} + i\sqrt{G''_0}\,A_{12})\right].\end{aligned}\right\} \quad (163)$$

Se ora consideriamo il determinante

$$\begin{vmatrix} X'_3 - X''_3 & Y'_3 - Y''_3 & Z'_3 - Z''_3 \\ \dfrac{\partial X'_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Y'_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Z'_3}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial X''_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Y''_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial Z''_3}{\partial \alpha} \end{vmatrix}, \quad (164)$$

ossia

$$\begin{vmatrix} X'_3 - X''_3 & Y'_3 - Y''_3 & Z'_3 - Z''_3 \\ \sqrt{E'_0}\,X'_1 & \sqrt{E'_0}\,Y'_1 & \sqrt{E'_0}\,Z'_1 \\ \sqrt{E''_0}\,X''_1 & \sqrt{E''_0}\,Y''_1 & \sqrt{E''_0}\,Z''_1 \end{vmatrix},$$

e in esso sostituiamo per X'_i, Y'_i, Z'_i le loro espressioni date dalle (158), (159), ecc.; dopo semplificazione avremo

$$-\frac{\sqrt{E_0}\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}}{a^2\,b^2\,c^2}\begin{vmatrix} \sqrt{E'_0} - \sqrt{E''_0} & i\,(\sqrt{G'_0} - \sqrt{G''_0}) & 0 \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & 1 \\ \Psi'_{11} & \Psi'_{21} & 1 \end{vmatrix},$$

donde ponendo per le Ψ_{ik}, Ψ'_{ik} le espressioni (160), (162), ed osservando la (42), troviamo subito che il determinante è nullo.

Allo stesso modo troviamo altresì che è nullo il determinante (125); di più dalle (158) e (159) otteniamo

$$b^2\,c^2\,X'_3\,X''_3 + c^2\,a^2\,Y'_3\,Y''_3 + a^2\,b^2\,Z'_3\,Z''_3 = \sqrt{E'_0}\sqrt{E''_0} - \sqrt{G'_0}\sqrt{G''_0},$$

che facilmente si identifica colla (133) per $k = \infty$.

Ne risulta che la composizione di due trasformazioni B_∞ di classe opposta dà luogo ad una trasformazione G_∞.

4. Inversamente ogni trasformazione G_∞ è sempre ottenibile mediante la composizione di due B_∞.

Infatti consideriamo una soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 del sistema (3), ed una soluzione X''_3, Y''_3, Z''_3 dedotta dalla prima con una G_∞; e poniamo

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= b\,c\,\frac{X''_3 - m_2 X'_3}{\sqrt{E'_0}\,(m_1 - m_2)}\,, \\ Y_1 &= c\,a\,\frac{Y''_3 - m_2 Y'_3}{\sqrt{E'_0}\,(m_1 - m_2)}\,, \\ Z_1 &= a\,b\,\frac{Z''_3 - m_2 Z'_3}{\sqrt{E'_0}\,(m_1 - m_2)}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (165)$$

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= b\,c\,\frac{X''_3 - m_1 X'_3}{i\sqrt{G'_0}\,(m_2 - m_1)}\,, \\ Y_2 &= c\,a\,\frac{Y''_3 - m_1 Y'_3}{i\sqrt{G'_0}\,(m_2 - m_1)}\,, \\ Z_2 &= a\,b\,\frac{Z''_3 - m_1 Z'_3}{i\sqrt{G'_0}\,(m_2 - m_1)}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 = -\frac{a^2 b\,c\,(Y'_3 Z''_3 - Y''_3 Z'_3)}{i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1 - m_2)}\,, \\ Y_3 &= Z_1 X_2 - Z_2 X_1 = -\frac{a\,b^2 c\,(Z'_3 X''_3 - Z''_3 X'_3)}{i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1 - m_2)}\,, \\ Z_3 &= X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = -\frac{a\,b\,c^2\,(X'_3 Y''_3 - X''_3 Y'_3)}{i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1 - m_2)}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (167)$$

Tenendo conto che X'_3, Y'_3, Z'_3 soddisfano al sistema (3) ed osservando altresì la (129) e la (133) con $k = \infty$, deduciamo le relazioni:

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1,$$

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = 1,$$

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0,$$

e quindi il determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (168)$$

è ortogonale.

Poniamo inoltre

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{E_0} &= \frac{i\,a^2\,b^2\,c^2}{\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1-m_2)}\,\frac{1}{\sqrt{G'_0}}\,\Sigma X''_3\,\frac{\partial X'_3}{\partial \beta}, \\ \sqrt{G_0} &= -\frac{a^2\,b^2\,c^2}{\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1-m_2)}\,\frac{1}{\sqrt{E'_0}}\,\Sigma X''_3\,\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}; \end{aligned}\right\} \tag{169}$$

indi scriviamo le (167) sotto la forma

$$i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1-m_2)\,X_3 = -a^2\,b\,c\,(Y'_3\,Z''_3 - Y''_3\,Z'_3),$$

e derivando rispetto ad α otteniamo

$$\begin{aligned} i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1-m_2)\,\frac{\partial X_3}{\partial \alpha} + \Big\{ \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big[i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1-m_2) \Big] - \\ - i\,n_1\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,(m_1-m_2) \Big\} X_3 \\ = -a^2\,b\,c\left(Z''_3\,\frac{\partial Y'_3}{\partial \alpha} - Y''_3\,\frac{\partial Z'_3}{\partial \alpha} + m_1\,\frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{G'_0}}\,\frac{\partial X'_3}{\partial \beta} \right), \end{aligned}$$

colle analoghe in Y e Z; donde moltiplicando membro a membro con le (165), sommando e tenendo conto della ortogonalità del determinante (168), otteniamo

$$\Sigma X_1\,\frac{\partial X_3}{\partial \alpha} = \sqrt{E_0}\,.$$

Similmente otteniamo altresì

$$\Sigma X_2\,\frac{\partial X_3}{\partial \alpha} = 0,$$

e quindi

$$\frac{\partial X_3}{\partial \alpha} = \sqrt{E_0}\,X_1, \quad \frac{\partial Y_3}{\partial \alpha} = \sqrt{E_0}\,Y_1, \quad \frac{\partial Z_3}{\partial \alpha} = \sqrt{E_0}\,Z_1.$$

In modo analogo si ha

$$\frac{\partial X_3}{\partial \beta} = \sqrt{G_0}\,X_2, \quad \frac{\partial Y_3}{\partial \beta} = \sqrt{G_0}\,Y_2, \quad \frac{\partial Z_3}{\partial \beta} = \sqrt{G_0}\,Z_2,$$

ed in conseguenza

$$\Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial \alpha}\right)^2 = E_0, \quad \Sigma\,\frac{\partial X_3}{\partial \alpha}\,\frac{\partial X_3}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial \beta}\right)^2 = G_0.$$

Di più dalle (167) e (169) segue facilmente

$$E_0 - G_0 = b^2 c^2 X_3^2 + c^2 a^2 Y_3^2 + a^2 b^2 Z_3^2;$$

ed allora rimane dimostrato che se X'_3, Y'_3, Z'_3 e X''_3, Y''_3, Z''_3 sono due soluzioni del sistema (3) legate fra loro da una trasformazione G_∞, le (167) fanno conoscere in termini finiti una nuova soluzione del sistema (3).

Inoltre dalle (167) si ha subito

$$b\,c\,X_3 X'_3 + c\,a\,Y_3\,Y'_3 + a\,b\,Z_3\,Z'_3 = 0,$$
$$b\,c\,X_3 X''_3 + c\,a\,Y_3\,Y''_3 + a\,b\,Z_3\,Z''_3 = 0,$$

cioè la soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 è deducibile dalla soluzione X_3, Y_3, Z_3 mediante una trasformazione B_∞ e così pure la soluzione X''_3, Y''_3, Z''_3.

Risulta dunque anche in questo caso il teorema

$$G_\infty = B_\infty B'_\infty. \tag{170}$$

5. Il risultato si estende facilmente al caso $k = -a^2$.

Consideriamo infatti una trasformazione G_{-a^2} e la corrispondente G_∞ data dalla relazione

$$G_\infty = H^{-1}\,G_{-a^2}\,H.$$

Segue per il teorema dimostrato

$$H^{-1}\,G_{-a^2}\,H = B_\infty B'_\infty,$$

donde

$$G_{-a^2} = H\,B_\infty H^{-1}\,H\,B'_\infty H^{-1},$$

ossia per la (145)

$$G_{-a^2} = B_{-a^2}\,B'_{-a^2}. \tag{171}$$

In questo modo la trasformazione di Guichard del 1905 viene ad ottenersi componendo due B_k singolari.

§ XIII. Osservazioni complementari sulle quadriche di rotazione.

6. Vogliamo qui trattare il caso di una quadrica di rotazione attorno all'asse z ($a = b = 1$) e si voglia attribuire a k il valore -1. In tal caso assumendo l'equazione della quadrica sotto la forma

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\cosh^2 \sigma} = 1, \tag{172}$$

sussiste una trasformazione per la quale si ha

$$\frac{\tau}{2}(X'_3+i\,Y'_3)(X_3-i\,Y_3)-i\,\mathrm{senh}\,\sigma\,Z_3\,Z'_3=i\cosh\sigma, \tag{173}$$

con τ costante arbitraria.

Questo ci è noto dalla (15) del § I.

Volendo fare la composizione di due trasformazioni di questa natura converrà attenerci alle formole del detto paragrafo.

Ad una medesima soluzione dell'equazione (7) applichiamo due trasformazioni di Bäklund di classe opposta (*), cioè

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}&=\ \ i\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+i\,\mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1+i\cosh\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1,\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}&=-i\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+\mathrm{senh}\,\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1+\cosh\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1,\end{aligned}\right\} \tag{174}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}&=-i\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+i\,\mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_2+i\cosh\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_2,\\ \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}&=\ \ i\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-\mathrm{senh}\,\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_2-\cosh\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_2,\end{aligned}\right\} \tag{175}$$

e consideriamo il sistema di funzioni rispettivamente corrispondenti date dalle formole

$$\left.\begin{aligned}\tau\,u_1&=e^{\theta_1}\lambda-i\,e^{\theta_1}\mu-\frac{i}{2}\,\mathrm{senh}\,\sigma\,(u+v)+\frac{i}{2}\cosh\sigma\,(u-v),\\ \tau\,v_1&=-e^{-\theta_1}\lambda-i\,e^{-\theta_1}\mu-\frac{i}{2}\,\mathrm{senh}\,\sigma\,(u+v)-\frac{i}{2}\cosh\sigma\,(u-v),\\ \tau\,\lambda_1&=-(k_1\,e^{\theta}+k_2\,e^{-\theta})\,u+(k_2\,e^{\theta}+k_1\,e^{-\theta})\,v+B\,\mu+i\,A\,\lambda,\\ \tau\,\mu_1&=i\,(k_1\,e^{\theta}-k_2\,e^{-\theta})\,u-i\,(k_2\,e^{\theta}-k_1\,e^{-\theta})\,v-i\,D\,\mu+C\,\lambda,\\ A&=\mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1+\cosh\sigma\cosh\theta\cosh\theta_1,\\ B&=\mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1+\cosh\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1,\\ C&=\mathrm{senh}\,\sigma\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1+\cosh\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\cosh\theta_1,\\ D&=\mathrm{senh}\,\sigma\cosh\theta\cosh\theta_1+\cosh\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta\,\mathrm{senh}\,\theta_1,\end{aligned}\right\} \tag{176}$$

(*) Si deducono l'una dall'altra cambiando il segno delle quantità i, $\mathrm{senh}\,\sigma$, $\cosh\sigma$.

$$\left.\begin{aligned}
\tau\, u_2 &= e^{\theta_2}\lambda + i\, e^{\theta_2}\mu - \frac{i}{2}\operatorname{senh}\sigma\,(u+v) + \frac{i}{2}\cosh\sigma\,(u-v),\\
\tau\, v_2 &= -\,e^{-\theta_2}\lambda + i\, e^{-\theta_2}\mu - \frac{i}{2}\operatorname{senh}\sigma\,(u+v) - \frac{i}{2}\cosh\sigma\,(u-v),\\
\tau\,\lambda_2 &= -\,(k_1 e^{\theta} + k_2 e^{-\theta})\, u + (k_2 e^{\theta} + k_1 e^{-\theta})\, v + B'\mu + i\, A'\lambda,\\
\tau\,\mu_2 &= -\, i\,(k_1 e^{\theta} - k_2 e^{-\theta})\, u + i\,(k_2 e^{\theta} - k_1 e^{-\theta})\, v + i\, D'\mu - C'\lambda,\\
A' &= \quad \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma\cosh\theta\cosh\theta_2\,,\\
B' &= -\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_2 - \cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2\,,\\
C' &= \quad \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2\,,\\
D' &= -\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\theta_2 - \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{senh}\theta_2\,,
\end{aligned}\right\} \tag{177}$$

in cui

$$4\, k_1 = 1, \quad 4\, k_2 = \cosh^2\sigma + \operatorname{senh}^2\sigma.$$

Le funzioni u_1, v_1, λ_1, μ_1, Θ_1 soddisfano le (7)*, e così pure le funzioni u_2, v_2, λ_2, μ_2, Θ_2.

Ora dalle (176) e (177) si ricava

$$\tau\,(u_1 - u_2) = (e^{\theta_1} - e^{\theta_2})\,\lambda - i\,(e^{\theta_1} + e^{\theta_2})\,\mu,$$
$$\tau\,(v_1 - v_2) = (e^{-\theta_2} - e^{\theta_1})\,\lambda - i\,(e^{-\theta_2} + e^{-\theta_1})\,\mu,$$

donde

$$(u_1 - u_2) = e^{\theta_1} e^{\theta_2}\,(v_1 - v_2), \tag{178}$$

e per conseguenza

$$(u_1 - u_2)^2\, e^{-\theta_1} e^{-\theta_2} = (v_1 - v_2)^2\, e^{\theta_1} e^{\theta_2}.$$

Moltiplicando ora per $\lambda_1\lambda_2$ ed osservando le (7)* otteniamo

$$(u_1 - u_2)^2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}\frac{\partial v_2}{\partial \alpha} = (v - v_1)^2 \frac{\partial u_1}{\partial \alpha}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}\,; \tag{179}$$

moltiplicando invece per $\mu_1\,\mu_2$ otteniamo

$$(u_1 - u_2)^2 \frac{\partial v_1}{\partial \beta}\frac{\partial v_2}{\partial \beta} = (v_1 - v_2)^2 \frac{\partial u_1}{\partial \beta}\frac{\partial u_2}{\partial \beta}\,. \tag{180}$$

Sono dunque soddisfatte le relazioni (50) e (51) della mia precedente Memoria.

Calcoliamo ora

$$\sqrt{E'_0}\sqrt{E''_0} - \sqrt{G'_0}\sqrt{G''_0}\,.$$

Dalle (54) della suddetta mia Memoria sappiamo che questa espressione si riduce alla forma

$$-\frac{4}{(u_1-v_1)(u_2-v_2)}\,\frac{v_1-v_2}{u_1-u_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha}\,\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}-\frac{\partial u_1}{\partial \beta}\,\frac{\partial v_1}{\partial \beta}\right),$$

ossia

$$\frac{4(\lambda_1\lambda_2-\mu_1\mu_2)}{(u_1-v_1)(u_2-v_2)};$$

donde sostituendo per u_i, v_i, λ_i, μ_i le loro espressioni date dalle (176), (177) e ponendo per brevità

$$M=\Big[2\lambda\cosh\Theta_1-2i\mu\,\mathrm{senh}\,\Theta_1+i\cosh\sigma(u-v)\Big]\times$$
$$\times\Big[2\lambda\cosh\Theta_2+2i\mu\,\mathrm{senh}\,\Theta_2+i\cosh\sigma(u-v)\Big],$$

avremo a calcoli fatti:

$$\sqrt{E'_0}\,\sqrt{E''_0}-\sqrt{G'_0}\,\sqrt{G''_0}=-\frac{1}{M}\Big[(\cosh^2\sigma+\mathrm{senh}^2\sigma)(u^2+v^2)-$$
$$-2(\cosh^4\sigma+\mathrm{senh}^4\sigma)\,u\,v\Big]$$
$$-2i\lambda u\cosh^3\sigma(\cosh\theta_1+\cosh\theta_2)-2i\lambda u\,\mathrm{senh}^3\sigma(\mathrm{senh}\,\theta_1+\mathrm{senh}\,\theta_2)$$
$$-2i\lambda v\,\mathrm{senh}^3\sigma(\mathrm{senh}\,\theta_1+\mathrm{senh}\,\theta_2)+2i\lambda v\cosh^3\sigma(\cosh\theta_1+\cosh\theta_2)$$
$$+2\mu u\,\mathrm{senh}^3\sigma(\cosh\theta_2-\cosh\theta_1)+2\mu u\cosh^3\sigma(\mathrm{senh}\,\theta_2-\mathrm{senh}\,\theta_1)$$
$$+2\mu v\,\mathrm{senh}^3\sigma(\cosh\theta_2-\cosh\theta_1)-2\mu v\cosh^3\sigma(\mathrm{senh}\,\theta_2-\mathrm{senh}\,\theta_1)$$
$$+4\mu^2(\mathrm{senh}^2\sigma\cosh\theta_1\cosh\theta_2-\cosh^2\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta_1\,\mathrm{senh}\,\theta_2)$$
$$+4i\lambda\mu(\cosh^2\sigma+\mathrm{senh}^2\sigma)(\cosh\theta_2\,\mathrm{senh}\,\theta_1-\cosh\theta_1\,\mathrm{senh}\,\theta_2)$$
$$+4\lambda^2(\mathrm{senh}^2\sigma\,\mathrm{senh}\,\theta_1\,\mathrm{senh}\,\theta_2-\cosh^2\sigma\cosh\theta_1\cosh\theta_2).$$

Allo stesso risultato si perviene calcolando l'espressione

$$\cosh^2\sigma-Z'_3Z''_3\,\mathrm{senh}^2\sigma.$$

Dunque concludiamo la relazione

$$\sqrt{E'_0}\,\sqrt{E''_0}-\sqrt{G'_0}\,\sqrt{G''_0}=\cosh^2\sigma-Z'_3Z''_3\,\mathrm{senh}^2\sigma, \tag{181}$$

la quale coincide con la (133) per

$$a=1,\qquad b=1,\qquad c=\cosh^2\sigma,\qquad k=-1.$$

7. Inversamente partendo dagli elementi relativi a due superficie legate fra loro da una trasformazione di GUICHARD, avremo dalla (181)

$$4(\lambda_1 \lambda_2 - \mu_1 \mu_2) = \operatorname{senh}^2 \sigma (u_1 + v_1)(u_2 + v_2) - \cosh^2 \sigma (u_1 - v_1)(u_2 - v_2). \quad (182)$$

Inoltre derivando la (178) otteniamo

$$(e^{\theta_1} + e^{\theta_2})(\lambda_1 - \lambda_2) = \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right)(u_1 - u_2),$$

$$(e^{\theta_1} - e^{\theta_2})(\mu_1 + \mu_2) = \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right)(u_1 - u_2).$$

Da queste tenendo presente la (182) e la relazione (8) a cui soddisfano $\lambda_1, \mu_1, u_1, v_1$ e $\lambda_2, \mu_2, u_2, v_2$ ricaviamo

$$4\,\frac{\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right)^2}{(e^{\theta_1} + e^{\theta_2})^2} + 4\,\frac{\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right)^2}{(e^{\theta_1} - e^{\theta_2})^2} + e^{-2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$- 2(\cosh^2 \sigma + \operatorname{senh}^2 \sigma)\, e^{-(\theta_1+\theta_2)} + 1 = 0.$$

Questa relazione esprime che le due equazioni

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} = i \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta (\cosh \theta_1 + \cosh \theta_2)$$

$$+ i \cosh \sigma \cosh \theta (\operatorname{senh} \theta_1 + \operatorname{senh} \theta_2),$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} = \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta (\operatorname{senh} \theta_1 - \operatorname{senh} \theta_2)$$

$$+ \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta (\cosh \theta_1 - \cosh \theta_2),$$

nella funzione incognita θ sono coesistenti.

Si vede allora con facile calcolo che le funzioni θ_1, θ_2 e la funzione θ così determinata verificano le (174) e (175); dunque esiste una soluzione θ della (7) dalla quale sono deducibili θ_1 e θ_2 con trasformazioni di BÄKLUND di classe opposta.

Rimane perciò dimostrato anche in questo caso il teorema

$$G_{-a^2} = B_{-a^2} B'_{-a^2}.$$

Non si può parlare *in senso stretto* di trasformazione G_{-a^2} per le superficie applicabili sopra una sfera di raggio a, non potendo in tal caso soddisfare le (A') (B') (C') della mia precedente Memoria con valori non tutti nulli di ξ_0, η_0, ζ_0, ξ'_0, η'_0, ζ'_0, λ_0 e μ_0.

FINE DELLA PARTE QUINTA.

PARTE VI.

§ XIV. Il teorema di permutabilità.

1. La teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche viene notevolmente perfezionata in base ad un importantissimo teorema, dovuto al Bianchi e detto *teorema di permutabilità.*

Esso si enuncia nel modo seguente:

Se di una superficie S applicabile sulla quadrica, si considerano due superficie trasformate contigue S_1, S_2 per mezzo di due trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2} a costanti k_1, k_2 differenti, esiste una quarta deformata S' della medesima quadrica, che si trova rispettivamente legata a S_1, S_2 da trasformazioni B_{k_2}, B_{k_1} colle costanti invertite. Note le tre deformate S, S_1, S_2, la quarta S' è perfettamente determinata e costruibile in termini finiti.

Qui dimostreremo direttamente questo teorema deducendolo dalle formole superiori; nel tempo stesso crediamo di apportare un notevole complemento facendo entrare in composizione anche le trasformazioni singolari B_∞.

Partendo da una soluzione X_3, Y_3, Z_3 del sistema (3) denotiamo con X'_i, Y'_i, Z'_i, $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, Φ'_{ij}, e con X''_i, Y''_i, Z''_i, $\sqrt{E''_0}$, $\sqrt{G''_0}$, Φ''_{ij} le funzioni che rispettivamente si ottengono per mezzo delle trasformazioni B_{k_1}, B_{k_2}, che supponiamo ordinarie. Indi introduciamo le funzioni ausiliarie λ, μ, ν_{ij}, mediante le equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{11}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{11})+i\,\mu\,(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{12}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{12})+\\
&\qquad\qquad+a\,b\,c\,(\sqrt{k_1}\,\sqrt{E'_0}-\sqrt{k_2}\,\sqrt{E'_0})=0,\\
&\lambda(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{21}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{21})+i\,\mu\,(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{22}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{22})+\\
&\qquad\qquad+i\,a\,b\,c\,(\sqrt{k_1}\,\sqrt{G'_0}-\sqrt{k_2}\,\sqrt{G''_0})=0,
\end{aligned}\right\}\quad(183)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_{11}(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{11}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{11})+\nu_{21}(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{12}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{12})+\\
&\quad+\sqrt{k_1}\,(\Phi''^2_{11}+\Phi''^2_{12}+k_2\,E''_0)-\\
&\quad-\sqrt{k_2}\,(\Phi'_{11}\,\Phi''_{11}+\Phi'_{12}\,\Phi''_{12}+\sqrt{k_1}\,\sqrt{k_2}\,E'_0)=0,\\
&\nu_{11}(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{21}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{21})+\nu_{21}(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{22}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{22})+\\
&\quad+\sqrt{k_1}\,(\Phi''_{11}\,\Phi''_{21}+\Phi''_{12}\,\Phi''_{22}+i\,k_2\sqrt{E''_0}\sqrt{G''_0})-\\
&\quad-\sqrt{k_2}\,(\Phi'_{11}\,\Phi''_{21}+\Phi'_{12}\,\Phi''_{22}+i\sqrt{k_1}\,\sqrt{k_2}\,\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0})=0,
\end{aligned}\right\}\quad(184)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_{12}(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{11}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{11})+\nu_{22}(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{12}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{12})+\\
&\quad+\sqrt{k_1}\,(\Phi''_{11}\,\Phi''_{21}+\Phi''_{12}\,\Phi''_{22}+i\,k_2\sqrt{E''_0}\sqrt{G''_0})-\\
&\quad-\sqrt{k_2}\,(\Phi''_{11}\,\Phi'_{21}+\Phi''_{12}\,\Phi'_{22}+i\sqrt{k_1}\,\sqrt{k_2}\,\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0})=0,\\
&\nu_{12}(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{21}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{21})+\nu_{22}(\sqrt{k_2}\,\Phi'_{22}-\sqrt{k_1}\,\Phi''_{22})+\\
&\quad+\sqrt{k_1}\,(\Phi''^2_{21}+\Phi''^2_{22}-k_2\,G''_0)-\\
&\quad-\sqrt{k_2}\,(\Phi'_{21}\,\Phi''_{21}+\Phi'_{22}\,\Phi''_{22}-\sqrt{k_1}\,\sqrt{k_2}\,G'_0)=0,
\end{aligned}\right\}\quad(185)$$

che per l'ipotesi $k_1 \neq k_2$ si possono risolvere rispetto a λ, μ, ν_{ij}.

Si vede con calcoli algebrici che le funzioni così definite verificano le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_{11}^2+\nu_{12}^2=a^2\,b^2\,c^2-k_2\,\lambda^2+\frac{k_2}{k_1}(\Phi'^2_{11}+\Phi'^2_{21}-a^2\,b^2\,c^2+k_1\,E_0),\\
&\nu_{21}^2+\nu_{22}^2=a^2\,b^2\,c^2-k_2\,\mu^2+\frac{k_2}{k_1}(\Phi'^2_{12}+\Phi'^2_{22}-a^2\,b^2\,c^2-k_1\,G_0),\\
&\nu_{11}\,\nu_{21}+\nu_{12}\,\nu_{22}=-i\,k_2\,\lambda\,\mu+\frac{k_2}{k_1}(\Phi'_{11}\,\Phi'_{12}+\Phi'_{21}\,\Phi'_{22}+i\,k_1\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}),\\
&\sqrt{E'_0}\,\nu_{11}+i\sqrt{G'_0}\,\nu_{12}=a\,b\,c\,\lambda-\frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}}(\sqrt{E'_0}\,\Phi'_{11}+i\sqrt{G'_0}\,\Phi'_{21}-a\,b\,c\sqrt{E_0}),\\
&\sqrt{E'_0}\,\nu_{21}+i\sqrt{G'_0}\,\nu_{22}=i\,a\,b\,c\,\mu-\frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}}(\sqrt{E'_0}\,\Phi'_{12}+i\sqrt{G'_0}\,\Phi'_{22}-i\,a\,b\,c\sqrt{G_0}),
\end{aligned}\right\}\quad(186)$$

che potremo anche scrivere

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_{11}^2+\nu_{12}^2=a^2 b^2 c^2-k_2\lambda+k_2(b^2 c^2 X_1'^2+c^2 a^2 Y_1'^2+a^2 b^2 Z_1'^2),\\
&\nu_{21}^2+\nu_{22}^2=a^2 b^2 c^2+k_2\mu+k_2(b^2 c^2 X_2'^2+c^2 a^2 Y_2'^2+a^2 b^2 Z_2'^2),\\
&\nu_{11}\nu_{21}+\nu_{12}\nu_{22}=-k_2 i\lambda\mu+\\
&\qquad\qquad+k_2(b^2 c^2 X'_1 X'_2+c^2 a^2 Y'_1 Y'_2+a^2 b^2 Z'_1 Z'_2),\\
&\sqrt{E'_0}\,\nu_{11}+i\sqrt{G'_0}\,\nu_{12}=a b c\lambda-\\
&\qquad\qquad-\sqrt{k_2}(b^2 c^2 X'_1 X'_3+c^2 a^2 Y'_1 Y'_3+a^2 b^2 Z'_1 Z'_3),\\
&\sqrt{E'_0}\,\nu_{21}+i\sqrt{G'_0}\,\nu_{22}=i a b c\mu-\\
&\qquad\qquad-\sqrt{k_2}(b^2 c^2 X'_2 X'_3+c^2 a^2 Y'_2 Y'_3+a^2 b^2 Z'_2 Z'_3),
\end{aligned}\right\}\tag{187}$$

D'altra parte le derivate delle funzioni λ e μ date dalle (183), tenendo presenti le (183), (184), (185) si possono mettere sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}=\mu\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-i\mu\frac{\Phi'_{12}}{\sqrt{k_1}}+\lambda\frac{\nu_{11}}{\sqrt{k_2}}-\frac{a b c}{\sqrt{k_2}}\sqrt{E'_0},\\
&\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}=\mu\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\mu\frac{\Phi'_{21}}{\sqrt{k_1}}+\mu\frac{\nu_{12}}{\sqrt{k_2}},\\
&\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}=\lambda\frac{1}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-i\lambda\frac{\Phi'_{12}}{\sqrt{k_1}}-i\lambda\frac{\nu_{21}}{\sqrt{k_2}},\\
&\frac{\partial\mu}{\partial\beta}=\lambda\frac{1}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\lambda\frac{\Phi'_{21}}{\sqrt{k_1}}-i\mu\frac{\nu_{22}}{\sqrt{k_2}}+i\frac{a b c}{\sqrt{k_2}}\sqrt{G'_0}.
\end{aligned}\right\}\tag{188}$$

Dunque dopo quanto abbiamo dimostrato al § VII, possiamo affermare che ponendo

$$\left.\begin{aligned}
&X'''_3=\frac{1}{b c\sqrt{a^2+k_2}}(\lambda\sqrt{k_2}\,X'_1+i\mu\sqrt{k_2}\,X'_2+a b c X'_3),\\
&Y'''_3=\frac{1}{c a\sqrt{b^2+k_2}}(\lambda\sqrt{k_2}\,Y'_1+i\mu\sqrt{k_2}\,Y'_2+a b c Y'_3),\\
&Z'''_3=\frac{1}{a b\sqrt{c^2+k_2}}(\lambda\sqrt{k_2}\,Z'_1+i\mu\sqrt{k_2}\,Z'_2+a b c Z'_3),
\end{aligned}\right\}\tag{189}$$

avremo una nuova soluzione del sistema (3).

Le relazioni (183) mostrano che le (189) si possono anche scrivere

$$\left.\begin{aligned}
X'''_3 &= \frac{1}{b\,c\sqrt{a^2+k_1}}\,(\lambda\sqrt{k_1}\,X''_1 + i\,\mu\sqrt{k_1}\,X''_2 + a\,b\,c\,X''_3),\\
Y'''_3 &= \frac{1}{c\,a\sqrt{b^2+k_1}}\,(\lambda\sqrt{k_1}\,Y''_1 + i\,\mu\sqrt{k_1}\,Y''_2 + a\,b\,c\,Y''_3),\\
Z'''_3 &= \frac{1}{a\,b\sqrt{c^2+k_1}}\,(\lambda\sqrt{k_1}\,Z''_1 + i\,\mu\sqrt{k_1}\,Z''_2 + a\,b\,c\,Z''_3).
\end{aligned}\right\} \tag{190}$$

Ora dalle (189) e (190) si ha subito

$$\left.\begin{aligned}
&b\,c\sqrt{a^2+k_2}\,X'''_3 X'_3 + c\,a\sqrt{b^2+k_2}\,Y'''_3 Y'_3 +\\
&\qquad + a\,b\sqrt{c^2+k_2}\,Z'''_3 Z'_3 = a\,b\,c,\\
&b\,c\sqrt{a^2+k_1}\,X'''_3 X''_3 + c\,a\sqrt{b^2+k_1}\,Y'''_3 Y''_3 +\\
&\qquad + a\,b\sqrt{c^2+k_1}\,Z'''_3 Z''_3 = a\,b\,c;
\end{aligned}\right\} \tag{191}$$

cioè la nuova soluzione X'''_3, Y'''_3, Z'''_3 si trova rispettivamente legata alla soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 ed alla soluzione X''_3, Y''_3, Z''_3 da trasformazioni B_{k_2}, B_{k_1}.

Poichè la nuova soluzione del sistema (3) è data dalle (190) in termini finiti, rimane completamente dimostrato il teorema. Ed importa osservare che se ξ', η', ζ' sono le coordinate del punto che descrive la superficie S_1, la superficie S' è, per le (111), data dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
\xi''' &= \xi' + \frac{\sqrt{k_2}\,\lambda}{a\,b\,c\sqrt{E'_0}}\,\frac{\partial\xi'}{\partial\alpha} + \frac{i\sqrt{k_2}\,\mu}{a\,b\,c\sqrt{G'_0}}\,\frac{\partial\xi'}{\partial\beta},\\
\eta''' &= \eta' + \frac{\sqrt{k_2}\,\lambda}{a\,b\,c\sqrt{E'_0}}\,\frac{\partial\eta'}{\partial\alpha} + \frac{i\sqrt{k_2}\,\mu}{a\,b\,c\sqrt{G'_0}}\,\frac{\partial\eta'}{\partial\beta},\\
\zeta''' &= \zeta' + \frac{\sqrt{k_2}\,\lambda}{a\,b\,c\sqrt{E'_0}}\,\frac{\partial\zeta'}{\partial\alpha} + \frac{i\sqrt{k_2}\,\mu}{a\,b\,c\sqrt{G'_0}}\,\frac{\partial\zeta'}{\partial\beta},
\end{aligned}\right\} \tag{192}$$

in cui λ e μ sono date dalle (183).

2. Mostriamo ora che il teorema continua a sussistere anche se si fanno entrare in composizione le trasformazioni singolari B_∞.

Partendo sempre da una soluzione X_3, Y_3, Z_3 del sistema (3) denotiamo con X'_i, Y'_i, Z'_i, $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, Ψ_{ij} e con X''_i, Y''_i, Z''_i, $\sqrt{E''_0}$, $\sqrt{G''_0}$ Φ_{ij} le funzioni che rispettivamente si ottengono per mezzo della trasformazione B_∞ e di una B_k ordinaria; ed imitando il procedimento superiore introduciamo le funzioni ausiliarie λ, μ, ν_{ij} colle formole

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(\sqrt{k}\,\Psi_{11}-\Phi_{11})+i\mu(\sqrt{k}\,\Psi_{12}-\Phi_{12})+abc\sqrt{E'_0}=0,\\&\lambda(\sqrt{k}\,\Psi_{21}-\Phi_{21})+i\mu(\sqrt{k}\,\Psi_{22}-\Phi_{22})+iabc\sqrt{G'_0}=0,\end{aligned}\right\}\quad(193)$$

$$\left.\begin{aligned}&\nu_{11}(\sqrt{k}\,\Psi_{11}-\Phi_{11})+\nu_{21}(\sqrt{k}\,\Psi_{12}-\Phi_{12})-\sqrt{k}\,(\Psi_{11}^2+\Psi_{12}^2+E'_0)\\&\qquad+\Phi_{11}\Psi_{11}+\Phi_{12}\Psi_{12}+\sqrt{k}\,E''_0=0,\\&\nu_{11}(\sqrt{k}\,\Psi_{21}-\Phi_{21})+\nu_{21}(\sqrt{k}\,\Psi_{22}-\Phi_{22})-\sqrt{k}\,(\Psi_{11}\Psi_{21}+\Psi_{12}\Psi_{22})+i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0})\\&\qquad+\Phi_{11}\Psi_{21}+\Phi_{12}\Psi_{22}+i\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\sqrt{G''_0}=0,\end{aligned}\right\}\quad(194)$$

$$\left.\begin{aligned}&\nu_{12}(\sqrt{k}\,\Psi_{11}-\Phi_{11})+\nu_{22}(\sqrt{k}\,\Psi_{12}-\Phi_{12})-\sqrt{k}\,(\Psi_{11}\Psi_{21}+\Psi_{12}\Psi_{22}+i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0})\\&\qquad+\Phi_{21}\Psi_{11}+\Phi_{22}\Psi_{12}+i\sqrt{k}\sqrt{E''_0}\sqrt{G''_0}=0,\\&\nu_{12}(\sqrt{k}\,\Psi_{21}-\Phi_{21})+\nu_{22}(\sqrt{k}\,\Psi_{22}-\Phi_{22})-\sqrt{k}\,(\Psi_{21}^2+\Psi_{22}^2-G'_0)\\&\qquad+\Phi_{21}\Psi_{21}+\Phi_{22}\Psi_{22}-\sqrt{k}\,G''_0=0.\end{aligned}\right\}\quad(195)$$

Si vede anche in questo caso che le funzioni introdotte verificano le relazioni

$$\nu_{11}^2+\nu_{12}^2=-\lambda^2+\frac{1}{k}(\Phi_{11}^2+\Phi_{21}^2+k\,E_0-a^2b^2c^2),$$

$$\nu_{21}^2+\nu_{22}^2=\mu^2+\frac{1}{k}(\Phi_{12}^2+\Phi_{22}^2-k\,G_0-a^2b^2c^2),$$

$$\nu_{11}\nu_{21}+\nu_{12}\nu_{22}=-i\lambda\mu+\frac{1}{k}(\Phi_{11}\Phi_{12}+\Phi_{21}\Phi_{22}+ik\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}),$$

$$\sqrt{E''_0}\,\nu_{11}+i\sqrt{G''_0}\,\nu_{12}=-\frac{1}{\sqrt{k}}(\sqrt{E''_0}\,\Phi_{11}+i\sqrt{G''_0}\,\Phi_{21}-abc\sqrt{E_0}),$$

$$\sqrt{E''_0}\,\nu_{21}+i\sqrt{G''_0}\,\nu_{22}=-\frac{1}{\sqrt{k}}(\sqrt{E''_0}\,\Phi_{12}+i\sqrt{G''_0}\,\Phi_{22}-iabc\sqrt{G_0});$$

ossia

$$\nu_{11}^2+\nu_{12}^2=-\lambda^2+b^2c^2X''^2_1+c^2a^2Y''^2_1+a^2b^2Z''^2_1,$$

$$\nu_{21}^2+\nu_{22}^2=\mu^2+b^2c^2X''^2_2+c^2a^2Y''^2_2+a^2b^2Z''^2_2,$$

$$\nu_{11}\,\nu_{21}+\nu_{12}\,\nu_{22}=-i\,\lambda\,\mu+b^2\,c^2\,X''_1\,X''_2+c^2\,a^2\,Y''_1\,Y''_2+a^2\,b^2\,Z''_1\,Z''_2\,,$$

$$\sqrt{E''_0}\,\nu_{11}+i\sqrt{G''_0}\,\nu_{12}=-\left(b^2\,c^2\,X''_1\,X''_3+c^2\,a^2\,Y''_1\,Y''_3+a^2\,b^2\,Z''_1\,Z''_3\right),$$

$$\sqrt{E''_0}\,\nu_{21}+i\sqrt{G''_0}\,\nu_{22}=-\left(b^2\,c^2\,X''_2\,X''_3+c^2\,a^2\,Y''_2\,Y''_3+a^2\,b^2\,Z''_2\,Z''_3\right);$$

mentre le derivate di λ e μ sono espresse dalle formole

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}=\mu\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-i\,\mu\,\frac{\Phi_{12}}{\sqrt{k}}+\lambda\,\nu_{11}\,,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}=\mu\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\mu\,\frac{\Phi_{21}}{\sqrt{k}}+\mu\,\nu_{12}\,,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}=\lambda\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}-i\,\lambda\,\frac{\Phi_{12}}{\sqrt{k}}-i\,\lambda\,\nu_{21}\,,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\beta}=\lambda\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\lambda\,\frac{\Phi_{21}}{\sqrt{k}}-i\,\mu\,\nu_{22}\,.$$

Sicchè in base al risultato del § IV possiamo anche ora affermare che ponendo

$$\left.\begin{aligned}X'''_3&=\frac{1}{b\,c}\,(\lambda\,X''_1+i\,\mu\,X''_2),\\ Y'''_3&=\frac{1}{c\,a}\,(\lambda\,Y''_1+i\,\mu\,Y''_2),\\ Z'''_3&=\frac{1}{a\,b}\,(\lambda\,Z''_1+i\,\mu\,Z''_2),\end{aligned}\right\}\tag{196}$$

avremo una nuova soluzione del sistema (3).

Le (193) mostrano altresì che le precedenti si possono scrivere

$$\left.\begin{aligned}X'''_3&=\frac{1}{b\,c\sqrt{a^2+k}}\,(\lambda\sqrt{k}\,X'_1+i\,\mu\sqrt{k}\,X'_2+a\,b\,c\,X'_3),\\ Y'''_3&=\frac{1}{c\,a\sqrt{b^2+k}}\,(\lambda\sqrt{k}\,Y'_1+i\,\mu\sqrt{k}\,Y'_2+a\,b\,c\,Y'_3),\\ Z'''_3&=\frac{1}{a\,b\sqrt{c^2+k}}\,(\lambda\sqrt{k}\,Z'_1+i\,\mu\sqrt{k}\,Z'_2+a\,b\,c\,Z'_3),\end{aligned}\right\}\tag{197}$$

sicchè dalle (196) e (197) ricaviamo

$$b\,c\,X'''_3 X''_3 + c\,a\,Y'''_3 Y''_3 + a\,b\,Z'''_3 Z''_3 = 0,$$

$$b\,c\sqrt{a^2+k}\,X'''_3 X'_3 + c\,a\sqrt{b^2+k}\,Y'''_3 Y'_3 + a\,b\sqrt{c^2+k}\,Z'''_3 Z'_3 = a\,b\,c;$$

cioè la soluzione X'''_3, Y'''_3, Z'''_3 è legata alla X'_3, Y'_3, Z'_3 dalla trasformazione B_k ed è legata alla X''_3, Y''_3, Z''_3 dalla trasformazione B_∞ e il teorema è dimostrato.

Tutto quanto abbiamo detto per il caso delle trasformazioni B_∞ e B_k è anche valido nel caso particolare $\sqrt{k} = \pm i\,c$; soltanto la terza delle (197) cade in difetto (*).

Non pertanto sussiste anche in questo caso il teorema; infatti le prime due delle (197) dànno

$$b\,c\sqrt{a^2-c^2}\,X'''_3 X'_3 + c\,a\sqrt{b^2-c^2}\,Y'''_3 Y'_3 =$$
$$= -\lambda\sqrt{k}\,Z'_1 Z'_3 - i\,\mu\sqrt{k}\,Z'_2 Z'_3 - a\,b\,c\,Z_3^2 + a\,b\,c;$$

ma tenendo conto delle espressioni di λ e μ date dalle (193) ed osservando che nel caso in esame han luogo le (101) si trova con facile calcolo che l'espressione

$$\lambda\sqrt{k}\,Z'_1 + i\,\mu\sqrt{k}\,Z'_2 + a\,b\,c\,Z'_3$$

è nulla; quindi rimane

$$b\,c\sqrt{a^2-c^2}\,X'''_3 X'_3 + c\,a\sqrt{b^2-c^2}\,Y'''_3 Y'_3 = a\,b\,c,$$

come avevamo asserito.

3. Siano infine S_1, S_2 due superficie applicabili sulla quadrica (1) dedotte da una medesima superficie S, la prima mediante la trasformazione singolare B_{-a^2}, l'altra mediante una trasformazione B_k ordinaria o singolare $(\sqrt{k} = \pm i\,c)$.

La trasformazione H cangia le superficie S, S_1, S_2 in certe altre S', S'_1, S'_2 applicabili sulla (137); di più S'_1 sarà legata alla S' mediante la trasformazione B_∞ e la S'_2 sarà legata alla S' mediante una $B_{k'}$ ordinaria o singolare $(\sqrt{k'} = \pm i\,c')$.

(*) Qui escludiamo dal nostro ragionamento il caso noto delle quadriche di rotazione e della sfera.

Per ciò che abbiamo dimostrato esiste una quarta superficie S'_3 applicabile sulla (137) legata alla S'_1 mediante la $B_{k'}$ e legata alla S'_2 mediante la B_∞.

La trasformazione H cangerà allora la S'_3 in una superficie S_3 applicabile sulla (1) che sarà legata alla S_1 mediante la B_k e sarà legata alla S_2 mediante la trasformazione B_{-a^2}.

Il teorema è così dimostrato in tutti i casi.

FINE DELLA PARTE SESTA.

Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni.

(*Di* Pasquale Calapso, *a Palermo.*)

Continuazione e fine, vedi Tomo XIX, Serie III, Fascicolo 2.° (pag. 107 e segg.)

PARTE VII.

§ XV. Sul modo di ottenere trasformazioni reali.

1. Vogliamo stabilire il modo di ottenere trasformazioni reali mediante opportune combinazioni di trasformazioni B_k; osservando particolarmente il modo di comportarsi delle B_∞ allo scopo di rilevare il contributo che esse apportano alla teoria anche dal punto di vista reale.

E qui avvertiamo anzitutto che intendiamo occuparci esclusivamente di deformazioni reali di quadriche reali.

La discussione dovrà essere fatta separatamente per le tre specie di quadriche.

1.° *Ellissoide; a, b, c* costanti reali.

Sia X_3, Y_3, Z_3 una soluzione reale del sistema (3); X'_3, Y'_3, Z'_3 una nuova soluzione dedotta dalla precedente mediante la trasformazione B_{k_1} (k_1 essendo una costante complessa qualunque).

Le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 sono complesse, e le funzioni coniugate X''_3, Y''_3, Z''_3 costituiranno evidentemente una nuova soluzione del sistema (3) che sarà legata alla X_3, Y_3, Z_3 mediante la trasformazione B_{k_2}, k_2 essendo la quantità coniugata di k_1.

La quarta soluzione del teorema di permutabilità si esprime mediante le funzioni X_i, Y_i, Z_i, colle formole

$$\left.\begin{aligned} X'''_3 = \frac{1}{b^2 c^2 \sqrt{a^2+k_1}\sqrt{a^2+k_2}} \Big[& (\lambda \sqrt{k_2}\,\Phi'_{11} + i\,\mu \sqrt{k_2}\,\Phi'_{12} + a\,b\,c \sqrt{k_1}\sqrt{E'_0})\,X_1 + \\ & + (\lambda \sqrt{k_2}\,\Phi'_{21} + i\,\mu \sqrt{k_2}\,\Phi'_{22} + i\,a\,b\,c \sqrt{k_1}\sqrt{G'_0})\,X_2 + \\ & + (a^2 b^2 c^2 - \lambda \sqrt{k_1}\sqrt{k_2}\sqrt{E_0} + \mu \sqrt{k_1}\sqrt{k_2}\sqrt{G_0})\,X_3 \Big], \end{aligned}\right\} \quad (198)$$

e le analoghe in Y_i e Z_i. Ora è facile vedere che le funzioni X'''_3, Y'''_3, Z'''_3 così ottenute sono reali.

Infatti E'_0 ed E''_0 sono complesse coniugate; similmente G'_0 e G''_0.

Sicchè dovendo essere soddisfatta la (91) tanto da E'_0, G'_0, k_1, che da E''_0, G''_0, k_2, concludiamo che $\sqrt{k_1}\,\sqrt{E'_0}$ e $\sqrt{k_2}\,\sqrt{E''_0}$ sono complesse coniugate; mentre $\sqrt{k_1}\,\sqrt{G'_0}$ e $\sqrt{k_2}\,\sqrt{G''_0}$ differiscono per il segno della parte reale.

Segue da ciò che $\sqrt{k_2}\,\Phi'_{11}$ e $\sqrt{k_1}\,\Phi''_{11}$ ed anche $\sqrt{k_2}\,\Phi'_{21}$ e $\sqrt{k_1}\,\Phi''_{21}$ sono complesse coniugate; mentre $\sqrt{k_2}\,\Phi'_{12}$ e $\sqrt{k_1}\,\Phi''_{12}$ e così pure $\sqrt{k_2}\,\Phi'_{22}$ e $\sqrt{k_1}\,\Phi''_{22}$ differiscono per il segno della parte reale.

Dunque le (183) risolute per λ e μ dànno funzioni reali, donde risulta facilmente che le funzioni X'''_3, Y'''_3, Z'''_3 date dalle (198) sono reali, come volevamo.

2. Possiamo pure ottenere una trasformazione reale componendo due B_k colla medesima costante reale k.

Infatti supponiamo come di solito

$$a \geq b \geq c$$

ed assumiamo per k un valore negativo $-\sigma^2$ soddisfacente alla condizione

$$\sigma^2 \leq b^2. \tag{199}$$

Indi ad una medesima soluzione X_3, Y_3, Z_3 del sistema (3) applichiamo le due B_k di classe opposta corrispondenti al valore di k scelto nel suddetto modo. Per quanto abbiamo visto al § XI e al § XII le funzioni ottenute X'_3, Y'_3, Z'_3 ed X''_3, Y''_3, Z''_3 sono legate tra loro dalla trasformazione G_k.

Questa è reale, perchè le (126), (128), (129), (131), (132) hanno forma reale; di più la (129) e la (131) sono per tal valore di k compatibili con valori reali di m_1, m_2, X''_3, Y''_3, Z''_3.

3. Daremo infine un ultimo procedimento che conduce pure a trasformazioni reali, in cui faremo entrare in composizione le B_∞.

A tale scopo cominceremo con effettuare la trasformazione B_k tutta in forma reale secondo ha stabilito il BIANCHI.

Poniamo

$$\sqrt{E'_0} = i\,\lambda, \qquad \sqrt{k} = i\,\sigma, \qquad \sqrt{G'_0} = \mu, \qquad \Phi'_{11} = i\,\Phi_{11}\,, \qquad \Phi'_{21} = i\,\Phi_{21}\,,$$

ed allora le equazioni differenziali (90) prendono la forma

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} &= -\mu \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \frac{\Phi'_{11}}{\sigma} \lambda + \frac{a\,b\,c}{\sigma} \sqrt{E_0}\,, \\
\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} &= \quad \mu \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - \frac{\Phi_{12}}{\sigma} \mu\,, \\
\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} &= \quad \lambda \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \frac{\Phi'_{21}}{\sigma} \lambda\,, \\
\frac{\partial \mu}{\partial \beta} &= -\lambda \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - \frac{\Phi_{22}}{\sigma} \mu + \frac{a\,b\,c}{\sigma} \sqrt{E_0}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{200}$$

in cui si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi'_{11} &= \frac{-1}{E_0 - G_0}\Big[a\,b\,c\,\lambda\sqrt{E_0} - \sigma\sqrt{E_0}\,(b^2 c^2 X_1 X_3 + c^2 a^2 Y_1 Y_3 + a^2 b^2 Z_1 Z_3) \\
&\qquad + \varepsilon\sqrt{G_0}\sqrt{\frac{h}{k}}\,(\sigma H_{21}\,\lambda + \sigma H_{22}\,\mu - a\,b\,c\,H_{23})\Big]\,, \\
\Phi_{12} &= \frac{-1}{E_0 - G_0}\Big[a\,b\,c\,\lambda\sqrt{G_0} - \sigma\sqrt{G_0}\,(b^2 c^2 X_1 X_3 + c^2 a^2 Y_1 Y_3 + a^2 b^2 Z_1 Z_3) \\
&\qquad + \varepsilon\sqrt{E_0}\sqrt{\frac{h}{k}}\,(\sigma H_{21}\,\lambda + \sigma H_{22}\,\mu - a\,b\,c\,H_{23})\Big]\,, \\
\Phi'_{21} &= \frac{-1}{E_0 - G_0}\Big[a\,b\,c\,\mu\sqrt{E_0} - \sigma\sqrt{E_0}\,(b^2 c^2 X_2 X_3 + c^2 a^2 Y_2 Y_3 + a^2 b^2 Z_2 Z_3) \\
&\qquad - \varepsilon\sqrt{G_0}\sqrt{\frac{h}{k}}\,(\sigma H_{11}\,\lambda + \sigma H_{12}\,\mu - a\,b\,c\,H_{13})\Big]\,, \\
\Phi_{22} &= \frac{-1}{E_0 - G_0}\Big[a\,b\,c\,\mu\sqrt{G_0} - \sigma\sqrt{G_0}\,(b^2 c^2 X_2 X_3 + c^2 a^2 Y_2 Y_3 + a^2 b^2 Z_2 Z_3) \\
&\qquad - \varepsilon\sqrt{E_0}\sqrt{\frac{h}{k}}\,(\sigma H_{11}\,\lambda + \sigma H_{12}\,\mu - a\,b\,c\,H_{13})\Big]\,,
\end{aligned}\right\} \tag{201}$$

e la (91) diventa

$$\sigma^2 (H_{11} \lambda^2 + 2 H_{12} \lambda \mu + H_{22} \mu^2) - 2 a b c \sigma (H_{13} \lambda + H_{23} \mu) + a^2 b^2 c^2 H_{33} = 1. \quad (202)$$

Le (200), (201), (202) hanno in questo modo forma reale; purchè la costante

$$h = a^4 b^4 c^4 (a^2 - \sigma^2)(b^2 - \sigma^2)(c^2 - \sigma^2)$$

sia negativa e la (202) sia compatibile con valori reali di λ e μ. Or si vede facilmente che supponendo

$$a \geqq b > c \quad \text{(ellissoide generale, oppure di rotazione schiacciato)}$$

queste condizioni sono soddisfatte prendendo

$$b^2 > \sigma^2 > c^2. \quad (203)$$

Le formole (111) che dànno l'effettivo passaggio dalla superficie S alla superficie S_1 diventano

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi - \frac{\sigma\lambda}{a b c \sqrt{E_0}} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \frac{\sigma\mu}{a b c \sqrt{G_0}} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}, \\ \eta_1 &= \eta - \frac{\sigma\lambda}{a b c \sqrt{E_0}} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - \frac{\sigma\mu}{a b c \sqrt{G_0}} \frac{\partial \eta}{\partial \beta}, \\ \zeta_1 &= \zeta - \frac{\sigma\lambda}{a b c \sqrt{E_0}} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - \frac{\sigma\mu}{a b c \sqrt{G_0}} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}, \end{aligned}\right\} \quad (204)$$

ed esprimono che la superficie S_1 è reale.

Supponendo invece

$$a > b = c \quad \text{(ellissoide di rotazione allungato)}$$

ed assumendo $\sqrt{k} = i c$, potremo soddisfare le (99), (100), (106) e (107), ponendo

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{k}\,\sqrt{E'_0} &= a b c \frac{X_1}{X_3}, & i \sqrt{k}\,\sqrt{G'_0} &= a b c \frac{X_2}{X_3}, \\ \Phi_{11} &= -\sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,\frac{X_1}{X_3}, & \Phi_{12} &= -i \sqrt{k}\,\sqrt{G_0}\,\frac{X_1}{X_3}, \\ \Phi_{21} &= -\sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,\frac{X_2}{X_3}, & \Phi_{22} &= -i \sqrt{k}\,\sqrt{G_0}\,\frac{X_2}{X_3}, \end{aligned}\right\} \quad (205)$$

e le formole che dànno la superficie S_1 saranno in tal caso

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi + \frac{X_1}{X_3\sqrt{E_0}}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{X_2}{X_3\sqrt{G_0}}\frac{\partial \xi}{\partial \beta}, \\ \eta_1 &= \eta + \frac{X_1}{X_3\sqrt{E_0}}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{X_2}{X_3\sqrt{G_0}}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}, \\ \zeta_1 &= \zeta + \frac{X_1}{X_3\sqrt{E_0}}\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + \frac{X_2}{X_3\sqrt{G_0}}\frac{\partial \zeta}{\partial \beta}, \end{aligned}\right\} \tag{206}$$

e provano che anche in questo caso la superfice S_1 è reale.

Le funzioni trasformate X'_3, Y'_3, Z'_3 sono date nel caso generale dalle (77), ove per $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, $\sqrt{k}$ si pongano rispettivamente $i\lambda$, μ, $i\sigma$. Avremo in tal modo

$$X'_3 = \frac{-1}{b\,c\sqrt{a^2-\sigma^2}}(\sigma\lambda X_1 + \sigma\mu X_2 - a\,b\,c\,X_3),$$

$$Y'_3 = \frac{-1}{b\,c\sqrt{b^2-\sigma^2}}(\sigma\lambda Y_1 + \sigma\mu Y_2 - a\,b\,c\,Y_3),$$

$$Z'_3 = \frac{-1}{b\,c\sqrt{c^2-\sigma^2}}(\sigma\lambda Z_1 + \sigma\mu Z_2 - a\,b\,c\,Z_3),$$

donde vediamo subito che X'_3, Y'_3 sono reali; Z'_3 puramente immaginaria.

Nel caso dell'ellissoide allungato, la terza delle (103) tenendo conto delle (205) diventa

$$X'_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}\cdot\frac{1}{X_3},$$

ed è reale maggiore di 1. Le funzioni Y'_3, Z'_3 sono quindi complessse e, con una conveniente rotazione attorno all'asse x, potranno ridursi ad essere Y'_3 reale e Z'_3 puramente immaginaria.

Al punto ξ_1, η_1, ζ_1 della superficie reale S_1 sopra ottenuta corrisponde nell'applicabilità il punto immaginario

$$a\,X'_3,\quad b\,Y'_3,\quad c\,Z'_3,$$

della quadrica; in altri termini la superficie reale luogo del punto ξ_1, η_1, ζ_1 è applicabile idealmente sulla quadrica.

Partendo dunque da una superficie reale S applicabile realmente sulla quadrica, si deducono per trasformazione B_k infinite superficie reali applicabili idealmente sulla quadrica (una sola nel caso dell'ellissoide di rotazione allungato).

Inversamente si dimostra con analogo procedimento che partendo da una superficie reale S_1 applicabile idealmente sulla quadrica si deducono per trasformazione B_k infinite superficie reali applicabili realmente sulla quadrica (una sola nel caso dell'ellissoide di rotazione allungato).

4. Ciò posto possiamo subito vedere in che modo si possa ottenere una trasformazione reale facendo entrare in composizione le B_∞.

Allo scopo ricordiamo di avere dimostrato al § VII che componendo due B_∞ di classe opposta si ottiene una G_∞; ed osserviamo altresì che le (126), (128), (129), (131), (132) conservano forma reale scambiando Z'_3 e Z''_3 in iZ'_3 e iZ''_3. Di più la (129) e la (131), per $\chi = 0$, sono compatibili per valori reali di m_1, m_2, X'_3, Y'_3, iZ'_3, X''_3, Y''_3, iZ''_3.

Ne viene che la trasformazione G_∞ permette di dedurre da una soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 con X'_3, Y'_3 reali e Z'_3 puramente immaginaria infinite soluzioni nuove della medesima forma; ora se X'_3, Y'_3, Z'_3 determinano una superficie reale S_1 applicabile idealmente sulla quadrica, nei punti reali di S_1 sarà E'_0 negativa e G'_0 positiva, ed a causa delle relazioni

$$E''_0 = m_1^2 E'_0 , \quad G''_0 = m_2^2 G'_0 ,$$

lo stesso avverrà di E''_0 e G''_0; quindi:

La trasformazione G_∞ fa derivare da una superficie reale applicabile idealmente sulla quadrica infinite nuove superficie reali tutte applicabili idealmente sulla quadrica.

La trasformazione $B_k G_\infty B_{k'}$ (per convenienti valori di k e k') fa derivare da una superficie reale applicabile realmente sulla quadrica infinite nuove superficie reali tutte applicabili realmente sulla quadrica.

5. 2.° Iperboloide a due falde; a costante reale, b e c puramente immaginarie.

Sappiamo che le superficie reali applicabili realmente su questa superficie si ottengono in corrispondenza alle soluzioni del sistema (3) con X_3 reale e con Y_3 e Z_3 puramente immaginarie.

Ad una soluzione di questa forma applichiamo la trasformazione B_{k_1} (k_1 essendo una costante complessa qualunque) e sia X'_3, Y'_3, Z'_3 una delle soluzioni nuove così ottenute.

Se indichiamo con X''_3 la funzione coniugata di X'_3 e con Y''_3, Z''_3 le funzioni che differiscono da Y'_3, Z'_3, per il segno della parte reale, le funzioni X''_3, Y''_3, Z''_3 costituiranno una nuova soluzione del sistema (3) che sarà legata alla prima mediante la trasformazione B_{k_2}, k_2 essendo la quantità coniugata di k_1.

La quarta soluzione del teorema di permutabilità sarà della stessa forma della primitiva; sarà cioè X'''_3 reale, Y'''_3 e Z'''_3 puramente immaginarie.

Sussiste quindi un primo metodo per ottenere una trasformazione reale perfettamente analogo a quello sopra stabilito per l'ellissoide.

6. Un altro metodo che conduce parimenti ad una trasformazione reale si ottiene componendo due B_k con la medesima costante reale k e di classe opposta; giacchè supponendo ad esempio

$$-b^2 \geqq -c^2$$

ed assumendo $k \leqq -b^2$ otterremo una G_k reale.

7. Anche per questa superficie si può stabilire un procedimento per ottenere trasformazioni reali, in cui entrino in composizione le B_∞.

Basta allo scopo imitare il procedimento tenuto per l'ellissoide, e si trova che le superficie reali applicabili idealmente sull'iperboloide si hanno in corrispondenza alle soluzioni X_3, Y_3, Z_3 del sistema (3) con X_3 e Z_3 reali e con Y_3 puramente immaginaria, in una regione in cui E'_0 è negativa e G'_0 positiva.

Si dimostrano facilmente le seguenti proposizioni:

I. *La trasformazione* B_k

$$-b^2 > k > -c^2$$

(*oppure* $k = -c^2$ *se l'iperboloide è di rotazione*) *fa derivare da una superficie reale applicabile realmente sulla quadrica infinite superficie reali applicabili idealmente sulla quadrica* (*una sola se l'iperboloide è di rotazione*); *ed inversamente fa derivare da una superficie reale applicabile idealmente sulla quadrica infinite superficie reali applicabili realmente sulla quadrica* (*una sola se l'iperboloide è di rotazione*).

II. *La trasformazione* G_∞ *fa derivare da una superficie reale applicabile idealmente sulla quadrica infinite nuove superficie reali tutte applicabili idealmente sulla quadrica.*

III. *La trasformazione* $B_k G_\infty B_{k'}$ (*per convenienti valori di* k *e* k') *fa derivare da una superficie reale applicabile realmente sulla quadrica infinite nuove superficie reali applicabili realmente sulla quadrica.*

8. Caso 3.° *Iperboloide ad una falda; a, b* costanti reali, *c* puramente immaginaria.

Qui abbiamo tre classi di deformazioni: quelle per le quali il sistema coniugato comune all'iperboloide e alla superficie applicabile è reale, quelle per le quali il detto sistema è immaginario, e infine le deformazioni improprie.

Occupiamoci anzitutto delle prime.

Volendo adoperare parametri reali, per quanto è noto dalla mia Memoria del 1902, occorre cambiare β in $i\beta$ in tutte le formole stabilite nella presente Memoria; in siffatto modo il sistema differenziale (3) si presenta sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} &X_3^2+Y_3^2+Z_3^2=1,\\ &\Sigma\frac{\partial X_3}{\partial\alpha}\frac{\partial X_3}{\partial\beta}=0,\\ &\Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial\alpha}\right)^2+\Sigma\left(\frac{\partial X_3}{\partial\beta}\right)^2=b^2c^2X_3^2+c^2a^2Y_3^2+a^2b^2Z_3^2,\end{aligned}\right\}\qquad(207)$$

e le formole della trasformazione diventano

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\alpha}=\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\frac{\Phi_{11}}{\sqrt{k}}\sqrt{E'_0}-\frac{a\,b\,c}{\sqrt{k}}\sqrt{E_0},\\ &\frac{\partial\sqrt{E'_0}}{\partial\beta}=-\sqrt{G'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}+\frac{\Phi_{12}}{\sqrt{k}}\sqrt{G'_0},\\ &\frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\alpha}=\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{G_0}}\,\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}+\frac{\Phi_{21}}{\sqrt{k}}\sqrt{E'_0},\\ &\frac{\partial\sqrt{G'_0}}{\partial\beta}=-\sqrt{E'_0}\,\frac{1}{\sqrt{E_0}}\,\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}+\frac{\Phi_{22}}{\sqrt{k}}\sqrt{G'_0}-\frac{a\,b\,c}{\sqrt{k}}\sqrt{G_0};\end{aligned}\right\}\qquad(208)$$

in cui

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{11}=\frac{1}{E_0+G_0}\Big[&a\,b\,c\sqrt{E_0}\sqrt{E'_0}-\sqrt{k}\sqrt{E_0}\,(b^2c^2X_1X_3+c^2a^2Y_1Y_3+a^2b^2Z_1Z_3)\\ &-\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{G_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,H_{21}+\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,H_{22}+a\,b\,c\,H_{23})\Big],\\ \Phi_{12}=\frac{1}{E_0+G_0}\Big[&a\,b\,c\sqrt{G_0}\sqrt{E'_0}-\sqrt{k}\sqrt{G_0}\,(b^2c^2X_1X_3+c^2a^2Y_1Y_3+a^2b^2Z_1Z_3)\\ &+\sqrt{\frac{h}{k}}\sqrt{E_0}\,(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,H_{21}+\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,H_{22}+a\,b\,c\,H_{23})\Big],\end{aligned}\right\}\qquad(209)$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{21} &= \frac{1}{E_0+G_0}\Big[a\,b\,c\sqrt{E_0}\sqrt{G'_0}-\sqrt{k}\,\sqrt{E_0}\,(b^2c^2X_2X_3+c^2a^2\,Y_2\,Y_3+a^2b^2Z_2Z_3)\\ &\quad +\sqrt{\frac{h}{k}}\,\sqrt{G_0}\,(\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,H_{11}+\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}\,H_{12}+a\,b\,c\,H_{13})\Big],\\ \Phi_{22} &= \frac{1}{E_0+G_0}\Big[abc\sqrt{G_0}\sqrt{G'_0}-\sqrt{k}\,\sqrt{G_0}\,(b^2c^2X_2X_3+c^2a^2\,Y_2\,Y_3+a^2b^2Z_2Z_3)\\ &\quad -\sqrt{\frac{h}{k}}\,\sqrt{E_0}\,(\sqrt{k}\,\sqrt{E'_0}\,H_{11}+\sqrt{k}\,\sqrt{G'_0}\,H_{12}+a\,b\,c\,H_{13})\Big],\end{aligned}\right\}\quad(209)$$

La (91) diventa altresì

$$\left.\begin{aligned}&k\,E'_0\,H_{11}+k\,G'_0\,H_{22}+2\,k\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}\,H_{12}+\\ &\quad+2\,a\,b\,c\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,H_{13}+2\,a\,b\,c\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,H_{23}+a^2\,b^2\,c^2\,H_{33}=1,\end{aligned}\right\}\quad(210)$$

e le funzioni trasformate X'_3, Y'_3, Z'_3 sono date dalle formole

$$\left.\begin{aligned}X'_3 &= \frac{1}{b\,c\sqrt{a^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\;X_1+\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\;X_2+a\,b\,c\,X_3),\\ Y'_3 &= \frac{1}{c\,a\sqrt{b^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\;Y_1+\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\;Y_2+a\,b\,c\;Y_3),\\ Z'_3 &= \frac{1}{a\,b\sqrt{c^2+k}}(\sqrt{k}\sqrt{E'_0}\,Z_1+\sqrt{k}\sqrt{G'_0}\,Z_2+a\,b\,c\;Z_3).\end{aligned}\right\}\quad(211)$$

Ora ricordiamo che le deformazioni reali e proprie dell'iperboloide ad una falda si ottengono in corrispondenza alle soluzioni del sistema (207) con X_3, Y_3 reali e Z_3 puramente immaginaria in una regione in cui E_0 e G_0 hanno segno contrario.

Noi dimostreremo che partendo da una soluzione X_3, Y_3, Z_3 soddisfacente alle condizioni ora dette si deducono per trasformazioni B_k infinite altre soluzioni della medesima forma.

Infatti supponiamo per fissare le idee che sia E_0 negativa e G_0 positiva; indi supponendo $a \geq b$ assumiamo k nell'intervallo

$$-b^2 < k < -c^2.$$

Le (208), (209) e (210) assumeranno forma reale nelle funzioni incognite $\sqrt{k}\sqrt{E'_0}$, $i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}$ e la (210) sarà compatibile con valori reali di queste quantità.

Integrato allora il sistema (208) (209) (210) in guisa che $\sqrt{k}\sqrt{E'_0}$, $i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}$ risultino reali si avranno in conseguenza dalle (211) le funzioni X'_3, Y'_3 reali e Z'_3 puramente immaginaria e di più E'_0 e G'_0 saranno di segno contrario.

Ritroviamo così il teorema del BIANCHI:

La trasformazione B_k (k preso nell'intervallo considerato) fa derivare da una superficie reale applicabile realmente sull'iperboloide infinite superficie reali applicabili realmente sull'iperboloide.

Il risultato è anche valido per la seconda classe di deformazioni.

9. Veniamo ora alle deformazioni della terza classe che anzitutto vogliamo definire con precisione.

Sia X_3, Y_3, Z_3 una soluzione reale del sistema (207) e consideriamo i coefficienti dell'elemento lineare della superficie applicabile sulla quadrica dati dalle formole

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0\,(a^2 X_1^2 + b^2 Y_1^2 + c^2 Z_1^2), \\ F &= \sqrt{E_0\,G_0}\,(a^2 X_1 X_2 + b^2 Y_1 Y_2 + c^2 Z_1 Z_2), \\ G &= G_0\,(a^2 X_2^2 + b^2 Y_2^2 + c^2 Z_2^2), \end{aligned}\right\} \tag{212}$$

da cui

$$E\,G - F^2 = E_0\,G_0\,(E_0 + G_0). \tag{213}$$

Abbiamo dunque

$$E\,G - F^2 > 0. \tag{214}$$

D'altra parte dalle (212) si ricava

$$E\left(\frac{Z_2}{\sqrt{E_0}}\right)^2 - 2\,F\frac{Z_2}{\sqrt{E_0}}\,\frac{Z_1}{\sqrt{G_0}} + G\left(\frac{Z_1}{\sqrt{G_0}}\right)^2 = a^2\,Y_3^2 + b^2\,Z_3^2.$$

A causa della (214) il primo membro di quest'ultima ha il segno di E, ma il secondo membro è essenzialmente positivo, quindi

$$E > 0.$$

Ne viene che la forma quadratica

$$E\,d\alpha^2 + 2\,F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2$$

è definita positiva; inoltre i coefficienti della seconda forma quadratica sono dati dalle formole

$$\Delta^2 = \Delta''^2 = \frac{-a^2 b^2 c^2 E_0\,G_0}{E_0 + G_0},$$

e sono reali. Dunque la superficie applicabile sulla quadrica che si ottiene in corrispondenza delle soluzioni reali del sistema (207) è reale.

Al punto reale (α, β) della superficie corrisponde nell'applicabilità il punto immaginario dell'iperboloide

$$a X_3, \quad b Y_3, \quad c Z_3;$$

la superficie è dunque applicabile idealmente sulla quadrica.

Intorno a questa classe di superficie applicabili sull'iperboloide si ha il teorema:

10. *La trasformazione B_k fa derivare da una superficie reale applicabile idealmente sull'iperboloide infinite superficie reali applicabili idealmente sull'iperboloide.*

Infatti supponendo come di solito $a \geqq b$ ed assumendo k negativa soddisfacente alla condizione

$$0 < -k < b^2,$$

le (208), (209) e (210) daranno per le incognite $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ funzioni reali; ed inoltre le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 date dalle (211) sono reali.

11. Infine mostriamo che, analogamente a quanto abbiamo visto per le quadriche a punti ellittici, si ha il teorema:

La trasformazione G_∞ fa derivare da una superficie reale applicabile idealmente sulla quadrica infinite nuove superficie reali applicabili idealmente sulla quadrica.

Infatti scambiamo dapprima nelle (126), (128), (129), (131) β in $i\beta$ ed n_2 in $-i\,n_2$; in siffatto modo la trasformazione G_∞ sarà rappresentata dalle formole

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X''_3}{\partial \alpha} &= m_1 \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} + n_1 (X'_3 - X''_3), \\ \frac{\partial X''_3}{\partial \beta} &= m_2 \frac{\partial X'_3}{\partial \beta} + n_2 (X'_3 - X''_3), \end{aligned}\right\} \tag{214}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1^2 E'_0 + m_2^2 G'_0 &= b^2 c^2 X''^2_3 + c^2 a^2 Y''^2_3 + a^2 b^2 Z''^2_3, \\ m_1 E'_0 + m_2 G'_0 &= b^2 c^2 X'_3 X''_3 + c^2 a^2 Y'_3 Y''_3 + a^2 b^2 Z'_3 Z''_3, \end{aligned}\right\} \tag{215}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 \Sigma X''_3 \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} &= n_1 (1 - \Sigma X'_3 X''_3), \\ m_2 \Sigma X''_3 \frac{\partial X'_3}{\partial \beta} &= n_2 (1 - \Sigma X'_3 X''_3). \end{aligned}\right\} \tag{216}$$

Ora partendo da funzioni reali X'_3, Y'_3, Z'_3, questo sistema di equazioni ha forma reale rispetto alle funzioni incognite X''_3, Y''_3, Z''_3; di più le (215) sono compatibili con valori reali di m_1, m_2, X''_3, Y''_3, Z''_3.

FINE DELLA PARTE SETTIMA.

PARTE VIII.

§ XVI. Le deformazioni infinitesime delle superficie applicabili sulle quadriche.

1. Consideriamo una superficie S applicabile sulla quadrica (1) ed una superficie S' derivata da S mediante una trasformazione B_k. Se escludiamo per un momento il caso $k = \infty$, avremo che le due superficie S ed S' sono le due falde focali di una congruenza W; quindi la superficie S è suscettibile di una deformazione infinitesima nella quale ciascun suo punto si sposta parallelamente alla normale nel punto corrispondente alla S'.

Noi ci proponiamo anzitutto il calcolo di questa deformazione infinitesima.

Denotando come precedentemente con ξ, η, ζ le coordinate di un punto della superficie S e con ξ_1, η_1, ζ_1 le coordinate del punto corrispondente della superficie S', abbiamo visto che si hanno le formole

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} &= \frac{\sqrt{E'_0}}{abc\,(E_0 - G_0)}\left[abc\sqrt{E'_0} - i\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}\left(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11}\right)\right]\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{E'_0}}{abc\,(E_0 - G_0)}\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}\left[i\,abc\sqrt{G'_0} - \right.\\
&\quad \left. - i\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}\left(\sqrt{E_0}\,\Phi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21}\right)\right]\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\sqrt{k}\sqrt{E'_0}}{abc\sqrt{E_0}}\,\Delta X,\\
\frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} &= \frac{i\sqrt{G'_0}}{abc(E_0 - G_0)}\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}}\left[abc\sqrt{E'_0} - i\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}\left(\sqrt{E_0}\,\Phi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{11}\right)\right]\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \\
&\quad + \frac{i\sqrt{G'_0}}{abc\,(E_0 - G_0)}\left[i\,abc\sqrt{G'_0} - \right.\\
&\quad \left. - i\frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}}\left(\sqrt{E_0}\,\Phi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Phi_{21}\right)\right]\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{i\sqrt{k}\sqrt{G'_0}}{abc\sqrt{G_0}}\,\Delta'' X.
\end{aligned}\right\} \quad (217)$$

Volendo stabilire dapprima la deformazione infinitesima della S' basterà osservare che le formole relative sono del tipo

$$\xi_2 = \xi_1 + \tau \rho X, \quad \eta_2 = \eta_1 + \tau \rho Y, \quad \zeta_2 = \zeta_1 + \tau \rho Z \tag{218}$$

in cui τ è una costante infinitesima di cui si trascurano le potenze di grado superiore alla prima; X, Y, Z sono i coseni direttori della normale alla superficie S, e ρ è una conveniente funzione da determinarsi in guisa da aversi

$$d\xi_1\, d(\rho X) + d\eta_1\, d(\rho Y) + d\zeta_1\, d(\rho Z) = 0.$$

Or esprimendo che ρ soddisfa a questa condizione, si perviene alle equazioni

$$\Sigma \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} \frac{\partial (\rho X)}{\partial \alpha} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} \frac{\partial (\rho X)}{\partial \beta},$$

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial (\rho X)}{\partial \beta} + \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \frac{\partial (\rho X)}{\partial \alpha} = 0$$

che per le (217) diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log \rho}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{k}\,(E_0 - G_0)} \left[a\, b\, c \sqrt{E_0} \sqrt{E'_0} - i \sqrt{G_0} \left(\sqrt{E_0}\, \Phi_{12} - i \sqrt{G_0}\, \Phi_{11} \right) \right] \\ \frac{\partial \log \rho}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{k}\,(E_0 - G_0)} \left[i\, a\, b\, c \sqrt{G_0} \sqrt{G'_0} - i \sqrt{E_0} \left(\sqrt{E_0}\, \Phi_{22} - i \sqrt{G_0}\, \Phi_{21} \right) \right]. \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

Da queste formole avremo la funzione ρ per quadrature, donde rimane determinata dalle (218) la deformazione infinitesima della S'.

2. Analogamente si determina la deformazione infinitesima della S, ricordando le formole (114) che dànno i coseni direttori della normale alla S'; avremo così:

$$\left.\begin{aligned} \xi'_2 = \xi + \tau \rho \Bigg\{ & \left(i\, G \frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}} + F \frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \left(i\, F \frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}} + E \frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \\ & + \frac{i \sqrt{E G - F^2}}{a\, b\, c} \left[i \sqrt{G'_0} \left(\sqrt{E_0} \frac{\Phi_{12}}{\sqrt{k}} - i \sqrt{G_0} \frac{\Phi_{11}}{\sqrt{k}} \right) - \right. \\ & \left. - \sqrt{E'_0} \left(\sqrt{E_0} \frac{\Phi_{22}}{\sqrt{k}} - i \sqrt{G_0} \frac{\Phi_{21}}{\sqrt{k}} \right) \right] X \Bigg\} \end{aligned}\right\} \tag{220}$$

colle analoghe in η e ζ. Per avere ρ basta determinare per quadrature una funzione ρ' dalle formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \log \rho'}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{k}\,(E'_0 - G'_0)}\left[a\,b\,c\sqrt{E_0}\sqrt{E'_0} - i\sqrt{G'_0}\,(\sqrt{E'_0}\,\Phi_{21} - i\sqrt{G'_0}\,\Phi_{11})\right]\\ \frac{\partial \log \rho'}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{k}\,(E'_0 - G'_0)}\left[i\,a\,b\,c\sqrt{G_0}\sqrt{G'_0} - i\sqrt{E'_0}\,(\sqrt{E'_0}\,\Phi_{22} - i\sqrt{G'_0}\,\Phi_{12})\right];\end{aligned}\right\} \quad (221)$$

indi si ha per la ρ l'espressione

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\,(E_0 - G_0)\sqrt{E'_0 - G'_0}}. \quad (222)$$

3. Veniamo ora alle trasformazioni B_∞; la relativa deformazione infinitesima della S si deduce dalle (220) per $k = \infty$ osservando che le funzioni $\frac{\Phi_{rs}}{\sqrt{k}}$ si riducono alle Ψ_{rs}; *siffatta deformazione infinitesima è in questo caso una traslazione isotropa.*

Questo importante teorema mi è stato comunicato dal Bianchi per corrispondenza, come è detto nella prefazione.

Noi qui dimostreremo direttamente il teorema, ed avremo occasione di dedurne conseguenze assai notevoli per la teoria delle superficie applicabili sulle quadriche.

Allo scopo ricordiamo anzitutto le relazioni

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11} &= a^2\,b^2\,c^2\,(H_{21}\sqrt{E'_0} + i\,H_{22}\sqrt{G'_0})\\ \sqrt{E_0}\,\Psi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21} &= -\,a^2\,b^2\,c^2\,(H_{11}\sqrt{E'_0} + i\,H_{12}\sqrt{G'_0})\end{aligned}\right\} \quad (223)$$

da cui

$$i\sqrt{G'_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11}) - \sqrt{E'_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21}) = a^2\,b^2\,c^2; \quad (224)$$

ne viene che le (220) si possono ora scrivere nel seguente modo

$$\left.\begin{aligned}\xi'_2 = \xi + \tau\,\rho\Bigg[&\left(i\,G\frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}} + F\frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}}\right)\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} -\\ &-\left(i\,F\frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}} + E\frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}}\right)\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + i\,a\,b\,c\sqrt{E\,G - F^2}\;X\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad (225)$$

donde segue facilmente

$$(\xi'_2 - \xi)^2 + (\eta'_2 - \eta)^2 + (\zeta'_2 - \zeta)^2 = 0. \quad (226)$$

È utile osservare altresì che le (225) si possono anche mettere sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}\xi'_2 = \xi + \tau\rho\Big[&\sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \\ &+ \sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\frac{\partial\xi}{\partial\beta} + i\,a\,b\,c\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\sqrt{E_0 - G_0}\,X\Big].\end{aligned}\right\} \quad (227)$$

Noi introdurremo per comodità di notazione le frazioni ausiliarie λ, μ, ν ponendo

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} + \\ &\quad + \sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\frac{\partial\xi}{\partial\beta} + i\,a\,b\,c\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\sqrt{E_0 - G_0}\,X \\ \mu &= \sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} + \\ &\quad + \sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\frac{\partial\eta}{\partial\beta} + i\,a\,b\,c\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\sqrt{E_0 - G_0}\,Y \\ \nu &= \sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} + \\ &\quad + \sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22} - i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} + i\,a\,b\,c\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\sqrt{E_0 - G_0}\,Z\end{aligned}\right\} \quad (228)$$

sicchè rappresenteremo la deformazione infinitesima colle formole

$$\xi'_2 = \xi + \tau\rho\lambda, \quad \eta'_2 = \eta + \tau\rho\mu, \quad \zeta'_2 = \zeta + \tau\rho\nu. \quad (229)$$

Ciò posto deriviamo le (228) ed eliminiamo le derivate delle funzioni Ψ_{rs} colle (60); eliminiamo altresì le derivate prime di X, Y, Z e le derivate seconde di ξ, η, ζ osservando le formole fondamentali della teoria delle superficie; ponendo

$$\left.\begin{aligned}A &= \frac{1}{E_0 - G_0}\Big[-2E_0\Psi_{11} + \Big(i\frac{G_0\sqrt{G_0}}{\sqrt{E_0}} - 3i\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\Big)\Psi_{12} + \\ &\qquad + \Big(\frac{E_0}{\sqrt{G_0}} - \frac{G_0\sqrt{G_0}}{E_0}\Big)\frac{\partial\sqrt{G_0}}{\partial\alpha}\Big], \\ B &= \frac{1}{E_0 - G_0}\Big[-2iG_0\Psi_{22} + \Big(\frac{E_0\sqrt{E_0}}{\sqrt{G_0}} - 3\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\Big)\Psi_{21} - \\ &\qquad - \Big(\frac{G_0}{\sqrt{E_0}} - \frac{E_0\sqrt{E_0}}{G_0}\Big)\frac{\partial\sqrt{E_0}}{\partial\beta}\Big],\end{aligned}\right\} \quad (230)$$

avremo a calcoli fatti

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha}=A\lambda, & \dfrac{\partial \mu}{\partial \alpha}=A\mu, & \dfrac{\partial \nu}{\partial \alpha}=A\nu, \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial \beta}=B\lambda, & \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta}=B\mu, & \dfrac{\partial \nu}{\partial \beta}=B\nu.\end{array}\right\} \tag{231}$$

Se ora esprimiamo che è soddisfatta la condizione

$$d\xi\, d(\rho\lambda)+d\eta\, d(\rho\mu)+d\zeta\, d(\rho\nu)=0$$

troviamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha}=-A\rho;\quad \frac{\partial \rho}{\partial \beta}=-B\rho. \tag{232}$$

Si vede dunque che le quantità $\rho\lambda$, $\rho\mu$, $\rho\nu$ sono costanti, e in base a ciò ed alla (226) possiamo affermare che le (229) dànno una traslazione isotropa della superficie S.

Rimane così stabilita la proposizione comunicatami dal Bianchi.

4. Inversamente dimostreremo che partendo da una superficie S applicabile sulla quadrica, ad ogni traslazione isotropa della superficie corrisponde una ben determinata trasformazione B_∞, e ciò che sembra assai notevole è che, *nota la superficie* S, si determinano le funzioni trasformatrici $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ con soli calcoli algebrici e di derivazione.

Per dimostrare questo teorema assumiamo tre costanti qualunque c_1, c_2, c_3, soggette però alla condizione

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=0 \tag{233}$$

e poniamo il seguente sistema di equazioni algebriche e lineari

$$\left.\begin{array}{l}\rho\sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\dfrac{\partial \xi}{\partial \alpha}+\rho\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta}+ \\ \qquad\qquad +\rho\, i\, a\, b\, c\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\sqrt{E_0-G_0}\; X=c_1, \\ \rho\sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\dfrac{\partial \eta}{\partial \alpha}+\rho\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\dfrac{\partial \eta}{\partial \beta}+ \\ \qquad\qquad +\rho\, i\, a\, b\, c\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\sqrt{E_0-G_0}\; Y=c_2, \\ \rho\sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\dfrac{\partial \zeta}{\partial \alpha}+\rho\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\dfrac{\partial \zeta}{\partial \beta}+ \\ \qquad\qquad +\rho\, i\, a\, b\, c\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}\sqrt{E_0-G_0}\; Z=c_3,\end{array}\right\} \tag{234}$$

nelle incognite

$$\left.\begin{array}{c}\rho\sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\,,\quad \rho\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\,,\\ \rho\, i\, a\, b\, c\sqrt{E_0}\,\sqrt{G_0}\,\sqrt{E_0-G_0}\,.\end{array}\right\} \tag{235}$$

Esse si possono risolvere rispetto a queste incognite, perchè il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \xi}{\partial \beta} & X \\ \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \eta}{\partial \beta} & Y \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} & Z \end{vmatrix} = \sqrt{E G - F^2},$$

è diverso da zero; ed osserviamo fin da ora che le (235) ottenute dalle (234) per risoluzione algebrica soddisfano alla relazione

$$\left.\begin{array}{l} E\left[\sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\right]^2+\\ \quad+2F\left[\sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})\right]\left[\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\right]+\\ \quad+G\left[E_0\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})\right]^2=a^2\,b^2\,c^2\,E_0\,G_0\,(E_0-G_0)\,; \end{array}\right\} \tag{236}$$

come risulta subito quadrando e sommando le (234) e tenendo conto della (233).

Or eseguendo la effettiva risoluzione delle (234), troviamo

$$\left.\begin{array}{l} \rho\, i\, a\, b\, c\sqrt{E_0}\,\sqrt{G_0}\,\sqrt{E_0-G_0}=c_1\,X+c_2\,Y+c_3\,Z\,,\\ \rho\sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11})=\frac{G}{E\,G-F^2}\left(c_1\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+c_2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}+c_3\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right)-\\ \qquad\qquad -\frac{F}{E\,G-F^2}\left(c_1\frac{\partial\xi}{\partial\beta}+c_2\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+c_3\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right),\\ \rho\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21})=-\frac{F}{E\,G-F^2}\left(c_1\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+c_2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}+c_3\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right),\\ \qquad\qquad +\frac{E}{E\,G-F^2}\left(c_1\frac{\partial\xi}{\partial\beta}+c_2\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+c_3\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right). \end{array}\right\} \tag{237}$$

Introduciamo altresì le funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ ponendo

$$
\left.\begin{aligned}
E\frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}}+i\,F\frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}} &= -\sqrt{E_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{22}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{21}),\\
F\frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}}+i\,G\frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}} &= \sqrt{G_0}\,(\sqrt{E_0}\,\Psi_{12}-i\sqrt{G_0}\,\Psi_{11});
\end{aligned}\right\}\qquad(238)
$$

queste in forza delle precedenti saranno espresse dalle formole

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\sqrt{E'_0}}{\sqrt{E_0}} &= -\frac{i\,a\,b\,c\left(c_1\dfrac{\partial\xi}{\partial\beta}+c_2\dfrac{\partial\eta}{\partial\beta}+c_3\dfrac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)}{\sqrt{E\,G-F^2}\,(c_1\,X+c_2\,Y+c_3\,Z)}\\
\frac{\sqrt{G'_0}}{\sqrt{G_0}} &= \frac{a\,b\,c\left(c_1\dfrac{\partial\xi}{\partial\alpha}+c_2\dfrac{\partial\eta}{\partial\alpha}+c_3\dfrac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right)}{\sqrt{E\,G-F^2}\,(c_1\,X+c_2\,Y+c_3\,Z)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(239)
$$

Veniamo così a conoscere in termini finiti due funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, che sono le funzioni trasformatrici relative alla B_∞.

Infatti esse a causa della (236) e delle (238) soddisfano alla relazione

$$
E\frac{E'_0}{E_0}+2\,i\,F\frac{\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}}{\sqrt{E_0}\sqrt{G_0}}-G\frac{G'_0}{G_0}=a^2\,b^2\,c^2;\qquad(240)
$$

inoltre associando alle (238) le equazioni

$$
\left.\begin{aligned}
\sqrt{E_0}\,\Psi_{11}+i\sqrt{G_0}\,\Psi_{12} &= -(b^2\,c^2\,X_1\,X_3+c^2\,a^2\,Y_1\,Y_3+a^2\,b^2\,Z_1\,Z_3)\\
\sqrt{E_0}\,\Psi_{21}+i\sqrt{G_0}\,\Psi_{22} &= -(b^2\,c^2\,X_2\,X_3+c^2\,a^2\,Y_2\,Y_3+a^2\,b^2\,Z_2\,Z_3)
\end{aligned}\right\}\qquad(241)
$$

rimangono definite quattro funzioni Ψ_{rs}, per le quali sussistono le relazioni

$$
\left.\begin{aligned}
\Psi_{11}^2+\Psi_{12}^2 &= -E'_0+b^2\,c^2\,X_1^2+c^2\,a^2\,Y_1^2+a^2\,b^2\,Z_1^2\\
\Psi_{21}^2+\Psi_{22}^2 &= G'_0+b^2\,c^2\,X_2^2+c^2\,a^2\,Y_2^2+a^2\,b^2\,Z_2^2\\
\Psi_{11}\,\Psi_{21}+\Psi_{12}\,\Psi_{22} &= -i\sqrt{E'_0}\sqrt{G'_0}+b^2\,c^2\,X_1\,X_2+c^2\,a^2\,Y_1\,Y_2+a^2\,b^2\,Z_1\,Z_2.
\end{aligned}\right\}\qquad(242)
$$

D'altra parte si verifica in modo facile che le funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, Ψ_{rs} così determinate soddisfano al sistema differenziale (54) della trasformazione B_∞, quindi rimane dimostrato che le funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ date dalle (239) sono appunto le funzioni trasformatrici relative alla B_∞.

Nelle (239) figurano esplicitamente tre costanti arbitrarie c_1, c_2, c_3 però omogeneamente e al grado zero, sicchè per la relazione (233) in esse si ha una sola costante arbitraria essenziale. Le (239) dànno pertanto l'integrale generale del sistema differenziale (54).

5. È interessante osservare come può interpretarsi il risultato or conseguito nel caso particolare delle superficie a curvatura costante.

Siano ξ, η, ζ le coordinate di un punto di una superficie a curvatura costante S, riferita alle linee di curvatura e consideriamo le infinite superficie S' che si deducono dalla S con la trasformazione complementare.

Ponendo

$$\Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right)^2 = \operatorname{senh}^2 \theta\,, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)^2 = \cosh^2 \theta \tag{243}$$

per ottenere una superficie S' occorre determinare una soluzione del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} &= -i\,\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \operatorname{senh}\theta \cosh \theta_1 \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} &= i\,\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + i \cosh \theta \operatorname{senh} \theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{244}$$

dopo di che le coordinate di un punto della superficie S' saranno espresse dalle formole

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi - \frac{\operatorname{senh}\theta_1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - i\,\frac{\cosh\theta_1}{\cosh\theta}\frac{\partial \xi}{\partial \beta} \\ \eta' &= \eta - \frac{\operatorname{senh}\theta_1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - i\,\frac{\cosh\theta_1}{\cosh\theta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta} \\ \zeta' &= \zeta - \frac{\operatorname{senh}\theta_1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - i\,\frac{\cosh\theta_1}{\cosh\theta}\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \end{aligned}\right\} \tag{245}$$

Ora da quanto sopra abbiamo visto risulta che indicando con $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ le coordinate della superficie **S**, derivata da S per trasformazione di Hazzidakis e con **X**, **Y**, **Z** i coseni direttori della normale ad **S**, l'integrale generale delle (244) è dato in termini finiti dalle equazioni coesistenti

$$\cosh \theta_1 = -\frac{i\left(c_1 \dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \beta} + c_2 \dfrac{\partial \overline{\eta}}{\partial \beta} + c_3 \dfrac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \beta}\right)}{\operatorname{senh}\theta\,(c_1 \mathbf{X} + c_2 \mathbf{Y} + c_3 \mathbf{Z})}\,,$$

$$\operatorname{senh} \theta_1 = \frac{i\, c_1 \dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \alpha} + c_2 \dfrac{\partial \overline{\eta}}{\partial \alpha} + c_3 \dfrac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \alpha}}{\cosh\theta\,(c_1 \mathbf{X} + c_2 \mathbf{Y} + c_3 \mathbf{Z})}\,,$$

dunque: *Data una superficie a curvatura costante S, le superficie S' derivate da S con la trasformazione complementare sono costruibili in termini finiti, quando sia nota la superficie* **S**, *derivata da S per trasformazione di* HAZZIDAKIS.

Palermo, 24 Marzo 1912.

FINE DELLA PARTE OTTAVA ED ULTIMA.

Sur les transcendantes élémentaires et les nombres de Bernoulli et d'Euler.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

PREMIÈRE PARTIE.

Applications des fonctions trigonométriques

I. Sur une classe de séries de puissances.

M. Worpitzky (*) a donné, à l'aide de deux développements des fonctions de Bernoulli, une suite de représentations indépendantes des nombres de Bernoulli et d'Euler.

Or, comme je le démontrerais dans une autre occasion (**), les deux formules fondamentales susdites de M. Worpitzky ne sont que des représentants isolés d'une infinité de formules contenant un paramètre quelconque et donnant, pour une valeur spéciale de ce paramètre, les formules en question.

Du reste, la méthode de M. Worpitzky est assez partielle; car les polynomes entiers de x, définis comme coefficients des séries de puissances de α, obtenues pour les fonctions

$$(\cos \alpha)^{-x}, \quad \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^{-x}, \quad \left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right)^{-x}, \quad \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x} \tag{1}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 94, p. 203-232; 1883.

(**) Dans un Mémoire qui paraîtra dans les *Annales de l'École Normale.*

nous donnent aussi, pour des valeurs spéciales de x, les nombres de BERNOULLI et d'EULER.

Dans nos recherches suivantes nous avons à donner un nombre de représentations indépendantes des polynomes susdites et par conséquent des nombres de BERNOULLI et d'EULER.

Quant aux séries de puissances obtenues pour les fonctions (1), soit $\varphi(\alpha)$ une fonction analytique, régulière aux environs du point $\alpha = 0$, et telle que $\varphi(0) = 1$, il existe un nombre positif ρ, de sorte que $\varphi(\alpha)$ est, pour $|\alpha| < \rho$, régulière et différente de zéro.

Soit ensuite x un nombre complexe quelconque, la série de puissances

$$\left(\varphi(\alpha)\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f_n(x)\,\alpha^n}{n!} \tag{2}$$

a son rayon de convergence plus grand que zéro; de plus, il existe un nombre positif r, de sorte que la série (2) est uniformément convergente et par rapport à x et par rapport à α, pourvu que $|\alpha| \leqq r$ et $|x| \leqq K < \infty$.

En se rappelant les identités

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(x) = D_\alpha^n \Big[(\varphi(\alpha))^{-x}\Big]_{\alpha=0},$$

on conclut que $f_n(x)$ est un polynome entier de x, dont le degré ne peut jamais être plus grand que n.

Posons maintenant, dans (2), y au lieu de x, puis multiplions d'après la règle de CAUCHY les deux séries de puissances ainsi obtenues, nous aurons, pour les polynomes $f_n(x)$, la formule d'addition suivante

$$f_n(x+y) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} f_{n-s}(x)\, f_s(y). \tag{3}$$

Quant aux coefficients des polynomes $f_n(x)$, différentions p fois par rapport à x la formule (2), puis posons $x = 0$, nous aurons

$$(-1)^p \left(\log \varphi(\alpha)\right)^p = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{f_n^{(p)}(0)}{n!}\,\alpha^n, \tag{4}$$

formule qui montrera clairement que les polynomes $f_n(x)$ sont généralement d'une nature très compliquée.

Posons dans (4) $p = 1$, puis différentions par rapport à α, il résulte

$$-\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f'_n(0)}{(n-1)!}\,\alpha^{n-1}; \tag{5}$$

différentions ensuite par rapport à x la formule (2), ce qui donnera

$$-x\left(\varphi(\alpha)\right)^{-x}\cdot\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{f_n(x)}{(n-1)!}\alpha^{n-1},$$

puis multiplions, d'après la règle de CAUCHY, les deux séries de puissances (2) et (5), nous aurons pour les polynomes $f_n(x)$ les formules récursives

$$f_n(x)=x\,.\sum_{s=0}^{s=n-1}\binom{n-1}{s}f'_{n-s}(0)\,f_s(x). \tag{6}$$

Prenons maintenant pour point de départ l'identité évidente

$$\varphi(\alpha)=1-\left(1-\varphi(\alpha)\right),$$

puis remarquons qu'il existe un nombre positif σ, de sorte que nous aurons, pour $|\alpha|<\sigma$, constamment $|1-\varphi(\alpha)|<1$, la formule binomiale donnera

$$\left(\varphi(\alpha)\right)^{-x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{x+n-1}{n}\left(1-\varphi(\alpha)\right)^n, \tag{7}$$

où la série qui figure au second membre est uniformément convergente et par rapport à x et par rapport à α, pourvu que nous ayons à la fois $|x|\leqq K<\infty$, $|\alpha|\leqq\sigma-\delta$, où δ désigne une quantité positive arbitrairement petite.

Cela posé, nous aurons, pour les polynomes $f_n(x)$, les représentations indépendantes

$$f_n(x)=\sum_{p=1}^{p=n}\binom{x+p-1}{p}D_\alpha^n\left((1-\varphi(\alpha))^p\right)_{\alpha=0}. \tag{8}$$

Or, il faut bien remarquer que des représentations indépendantes de la forme (8) ne sont pas particulières pour les polynomes définis à l'aide d'une série de puissances de la forme (2).

En effet, soit n un positif entier et p un nombre entier, tel que $0\leqq p\leqq n$, nous aurons par décomposition (en posant $s^0=1$, pour $s=0$):

$$\frac{n!\,x^p}{x(x+1)\ldots(x+n)}=\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s(-s)^p}{x+s}\binom{n}{s}; \tag{9}$$

soit ensuite

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

un polynome entier quelconque du degré n par rapport à x, puis multiplions par a_{n-p} les deux membres de (9), nous aurons

$$f(x) = x\binom{x+n}{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s f(-s)}{x+s} \binom{n}{s}, \tag{10}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x+s-1}{s} \binom{x+n}{n-s} f(-s). \tag{11}$$

Désignons maintenant par α, β et x trois nombres complexes quelconques, par $F(x)$ un polynome entier de x du degré n au plus, nous aurons immédiatement, en vertu de (11), cette autre formule plus générale

$$F(\alpha x + \beta) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x+s-1}{s} \binom{x+n}{n-s} F(\beta - s\alpha). \tag{12}$$

Nous ne nous arrêtons pas par la généralisation, à l'aide de (12), de la formule (8), ce qui ne joue aucun rôle pour nos recherches suivantes.

II. Dérivées supérieures de la fonction $(\cos\varphi)^{-\alpha}$.

Pour étudier la première des fonctions (1) du paragraphe I, nous aurons par la conclusion ordinaire de n à $n+1$ une expression de la forme

$$D_\varphi^n\left((\cos\varphi)^{-\alpha}\right) = (\cos\varphi)^{\alpha} \overset{\alpha,n}{\Phi}(\operatorname{tg}\varphi), \tag{1}$$

où $\overset{\alpha,n}{\Phi}(x)$ est, pour tous les n, un polynome entier précisément du degré n et par rapport à x et par rapport à α.

Supposons ensuite que φ ne soit pas de la forme $\left(q+\frac{1}{2}\right)\pi$, où q est un nombre entier, la série de puissances

$$\left(\frac{\cos(y+\varphi)}{\cos\varphi}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\overset{\alpha,n}{\Phi}(\operatorname{tg}\varphi)}{n!} y^n \tag{2}$$

a son rayon de convergence égal au plus petit des nombres

$$\left| -\varphi + \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi \right|,$$

où p désigne un entier quelconque.

Posons $\operatorname{tg} \varphi = x$, nous aurons en vertu de (2)

$$(\cos y - x \sin y)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\overset{\alpha,n}{\Phi}(x)}{n!} y^n. \tag{3}$$

Quant aux polynomes $\overset{\alpha,n}{\Phi}(x)$, nous aurons sans peine, en vertu de (2) et (3), ces deux équations fonctionnelles

$$\overset{\alpha,n+1}{\Phi}(x) = (1 + x^2) D_x \overset{\alpha,n}{\Phi}(x) + \alpha x \overset{\alpha,n}{\Phi}(x) \tag{4}$$

$$\overset{\alpha,n+2}{\Phi}(x) = \alpha(\alpha+1)(1+x^2) \overset{\alpha+2,n}{\Phi}(x) - \alpha^2 \overset{\alpha,n}{\Phi}(x), \tag{5}$$

d'où, en posant $x = 0$,

$$\overset{\alpha,n}{\Phi}(0) = \left(D_x \overset{\alpha,n-1}{\Phi}(x)\right)_{x=0} \tag{6}$$

Posons pour abréger

$$\omega_n(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1), \quad n \geqq 1,$$

nous aurons pour les six premiers des polynomes en question les expressions suivantes

$$\overset{\alpha,0}{\Phi}(x) = 1$$

$$\overset{\alpha,1}{\Phi}(x) = \alpha x$$

$$\overset{\alpha,2}{\Phi}(x) = \omega_2(\alpha) x^2 + \alpha$$

$$\overset{\alpha,3}{\Phi}(x) = \omega_3(\alpha) x^3 + (3\alpha^2 + 2\alpha) x$$

$$\overset{\alpha,4}{\Phi}(x) = \omega_4(\alpha) x^4 + 2\omega_2(\alpha)(3\alpha + 4) x^2 + (3\alpha^2 + 2\alpha)$$

$$\overset{\alpha,5}{\Phi}(x) = \omega_5(\alpha) x^5 + 10\omega_3(\alpha)(\alpha + 2) x^3 + (15\alpha^3 + 30\alpha^2 + 16\alpha) x.$$

Remarquons que la formule (3) donnera pour $\alpha = -1$

$$\overset{-1,2n}{\Phi}(x) = (-1)^n, \quad \overset{-1,2n+1}{\Phi}(x) = \overset{n-1}{(-1)} . x, \tag{7}$$

nous aurons, en vertu de la formule d'addition (3) du paragraphe I, cette équation aux différences finies par rapport à α

$$\overset{\alpha,n}{\Phi}(x) - \overset{\alpha-1,n}{\Phi}(x) = x \, . \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} \overset{\alpha,n-2s-1}{\Phi}(x) + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^{s-1} \binom{n}{2s} \overset{\alpha,n-2s}{\Phi}(x). \tag{8}$$

On voit que la formule générale (12) du paragraphe I ne donne aucun résultat simple pour notre fonction Φ. Or, il est très facile de donner d'autres représentations indépendantes qui sont plus simples.

A cet effet, appliquons l'identité évidente

$$\frac{\cos(y+\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{e^{iy+2\varphi i} + e^{-iy}}{e^{2\varphi i}+1} = e^{iy}\left(1 + \frac{e^{-2yi}-1}{e^{2\varphi i}+1}\right),$$

nous aurons

$$\left(\frac{\cos(\varphi+y)}{\cos\varphi}\right)^{-\alpha} = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \binom{\alpha+p-1}{p} \left(\frac{e^{-2yi}-1}{e^{2\varphi i}+1}\right)^p e^{-\alpha y i}, \tag{9}$$

où la série ainsi obtenue est du même caractère que celle qui figure dans la formule (7) du paragraphe I.

Posons pour abréger

$$L_p^n(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} (\alpha + 2p - 2s)^n, \quad L_0^n(\alpha) = \alpha^n, \tag{10}$$

nous aurons en vertu de (2) et en cherchant, dans la série qui figure au second membre de (9), le coefficient de la puissance y^n

$$\overset{\alpha,n}{\Phi}(\operatorname{tg}\varphi) = (-i)^n \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{\alpha+p-1}{p} L_p^n(\alpha) \, . \frac{e^{-ip\varphi}}{(2\cos\varphi)^p}, \tag{11}$$

représentation indépendante qui est très curieuse.

En effet, remarquons que le premier membre de (11) est toujours réel pour des valeurs réelles de α et φ, nous aurons, outre les représentations indépendantes cherchées, savoir

$$\overset{\alpha,2n}{\Phi}(\operatorname{tg}\varphi) = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^{n+p} \binom{\alpha+p-1}{p} \overset{2n}{L_p}(\alpha) \frac{\cos p\varphi}{(2\cos\varphi)^p} \tag{12}$$

$$\overset{\alpha,2n+1}{\Phi}(\operatorname{tg}\varphi) = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1} \binom{\alpha+p-1}{p} \overset{2n+1}{L_p}(\alpha) \frac{\sin p\varphi}{(2\cos\varphi)^p}, \tag{13}$$

ces deux identités

$$\sum_{p=0}^{p=2n+1} (-1)^p \binom{\alpha+p-1}{p} \overset{2n+1}{L_p}(\alpha) \frac{\cos p\varphi}{(2\cos\varphi)^p} = 0 \tag{14}$$

$$\sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^p \binom{\alpha+p-1}{p} \overset{2n}{L_p}(\alpha) \frac{\sin p\varphi}{(2\cos\varphi)^p} = 0. \tag{15}$$

Cela posé, les formules de MOIVRE

$$\frac{\cos p\,\varphi}{(\cos\varphi)^p} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s} (\operatorname{tg}\varphi)^{2s}$$

$$\frac{\sin p\,\varphi}{(\cos\varphi)^p} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{2s+1} (\operatorname{tg}\varphi)^{2s+1}$$

donnent finalement, pour le polynome $\overset{\alpha,n}{\Phi}(x)$, les représentations indépendantes

$$\overset{\alpha,2n}{\Phi}(x) = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^{n+p} \binom{\alpha+p-1}{p} \overset{2n}{L_p}(\alpha) \frac{(1+ix)^p + (1-ix)^p}{2^{p+1}} \tag{16}$$

$$\overset{\alpha,2n+1}{\Phi}(x) = i \,.\sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p} \binom{\alpha+p-1}{p} \overset{2n+1}{L_p}(\alpha) \frac{(1+ix)^p - (1-ix)^p}{2^{p+1}}. \tag{17}$$

Remarquons que la formule (1) donnera pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ respectivement

$$D_\varphi^n\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{1}{\cos\varphi} \overset{1,n}{\Phi}(\operatorname{tg}\varphi) \tag{18}$$

$$D_\varphi^{n+1} \operatorname{tg}\varphi = (1+\operatorname{tg}^2\varphi) \overset{2,n}{\Phi}(\operatorname{tg}\varphi), \tag{19}$$

nous venons de donner des représentations indépendantes de ces deux dérivées d'ordre supérieur.

M. JENSEN a trouvé, il y a trente ans à peu près, de telles représentations indépendantes, et un grand nombre d'autres formules, à l'aide du calcul symbolique; mais malheureusement il n'a pas publié les très beaux et très importants résultats qu'il a trouvés par ce procédé (*).

(*) Dans une conférence, faite à la Société Mathématique de Copenhague dans la séance du 25 janvier 1912, M. JENSEN a développé les plus importants de ses résultats susdits.

III. Étude des fonctions particulières.

Posons dans la formule (3) du paragraphe II $x = 0$, $\alpha = x$, nous avons à étudier les polynomes

$$a_n(x) = \overset{x,2n}{\Phi}(0) = \left(D_\alpha \overset{x,2n-1}{\Phi}(\alpha) \right)_{\alpha=0}, \quad n \geqq 1, \tag{1}$$

ce qui nous conduira à la série de puissances

$$(\cos \alpha)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n(x)}{(2n)!} \alpha^{2n}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

L'équation fonctionnelle (5) du paragraphe II donnera dans ce cas

$$a_{n+1}(x) = x(x+1) a_n(x+2) - x^2 a_n(x), \tag{3}$$

d'où particulièrement

$$a'_{n+1}(0) = a_n(2), \quad a_n(-1) = (-1)^n, \tag{4}$$

de sorte que les séries de puissances

$$\frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{E_n \alpha^{2n}}{(2n)!}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{T_{n+1} \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2},$$

où les E_n sont les nombres d'Euler, les T_n les coefficients des tangentes, donnent ces valeurs spéciales

$$a'_n(0) = T_n, \quad a_n(1) = E_n, \quad a_n(2) = T_{n+1}. \tag{5}$$

Appliquons ensuite les formules (3) et (6) du paragraphe I, nous aurons ici

$$a_n(x+y) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{2n}{2s} a_{n-s}(x) a_s(y) \tag{6}$$

$$a_{n+1}(x) = x \cdot \sum_{s=1}^{s=n+1} \binom{2n+1}{2s-1} T_s a_{n-s+1}(x), \tag{7}$$

ce qui donnera pour les six premiers des polynomes $a_n(x)$ les expressions suivantes

$$a_0(x) = 1$$
$$a_1(x) = x$$
$$a_2(x) = 3x^2 + 2x$$
$$a_3(x) = 15x^3 + 30x^2 + 16x$$
$$a_4(x) = 105x^4 + 420x^3 + 588x^2 + 272x$$
$$a_5(x) = 945x^5 + 6300x^4 + 16380x^3 + 18960x^2 + 7936x.$$

Nous avons encore à déterminer le nombre entier $a_n(-p)$, où $p > 1$ est un entier.

A cet effet, nous appliquons la formule élémentaire

$$(\cos\alpha)^p = \frac{1}{2^p} \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{p}{2}} \binom{p}{s} \varepsilon_{p-2s} \cos(p-2s)\,\alpha,$$

où il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$, mais $\varepsilon_m = 2$ pour $m \geqq 1$. Posons pour abréger

$$\mathfrak{A}_p^n = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{p-1}{2}} \binom{p}{s} (p-2s)^n, \tag{8}$$

nous aurons

$$D_\alpha^{2n}(\cos^p\alpha)_{\alpha=0} = \frac{(-1)^n}{2^{p-1}}\,\mathfrak{A}_p^{2n},$$

d'où la valeur cherchée

$$a_n(-p) = \frac{(-1)^n}{2^{p-1}}\,\mathfrak{A}_p^{2n}, \quad n \geqq 1. \tag{9}$$

Cela posé appliquons, pour $\beta = 0$, $\alpha = q$, où q désigne un positif entier, la formule générale (12) du paragraphe I, nous aurons pour $a_n(x)$ la représentation indépendante

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{qp-1}} \binom{\frac{x}{q} + p - 1}{p} \binom{\frac{x}{q} + n}{n-p} \mathfrak{A}_{pq}^{2n}, \tag{10}$$

d'où particulièrement pour $q = 1$

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{p-1}} \binom{x+p-1}{p} \binom{x+n}{n-p} \mathfrak{A}_p^{2n}. \tag{11}$$

Combinons maintenant les formules (1) et (12), (13) du paragraphe II, nous aurons, pour $a_n(x)$, ces deux autres representations indépendantes

$$a_n(x) = \sum_{p=0}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^p} \binom{x+p-1}{p} L_p^{2n}(x) \tag{12}$$

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{p=2n-1} \frac{(-1)^{n+p}\, p}{2^p} \binom{x+p-1}{p} L_p^{2n-1}(x). \tag{13}$$

D'autres représentations indépendantes peuvent être déduites à l'aide des identités

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = (1-\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui donnera

$$(\cos\alpha)^{-x} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \binom{x+p-1}{p} \left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^p = \sum_{p=0}^{p=\infty} \binom{\frac{x}{2}+p-1}{p} (\sin\alpha)^{2p}, \tag{14}$$

de sorte que nous avons à calculer les dérivées

$$D_\alpha^n \Big((\sin\alpha)^p\Big)_{\alpha=0},$$

où n et p sont des positifs entiers.

A cet effet, appliquons les formules élémentaires

$$(\sin\alpha)^{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{2p}{s} \varepsilon_{2p-2s} \cos(2p-2s)\alpha$$

$$(\sin\alpha)^{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{2p+1}{s} \sin(2p-2s+1)\alpha,$$

puis posons pour abréger

$$A_p^n = \sum_{s=0}^{\leq\frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{s} (p-2s)^n, \tag{15}$$

nous aurons

$$D_\alpha^n (\sin^p\alpha)_{\alpha=0} = \frac{(-1)^q}{2^{p-1}} A_p^n, \quad n-p = 2q \geqq 0. \tag{16}$$

Cela posé, nous aurons, en vertu de (14), ces deux autres représentations indépendantes

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2n+p-1}} \binom{x+p-1}{p} A_{2p}^{2n} \tag{17}$$

$$a_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2p-1}} \binom{\frac{x}{2}+p-1}{p} A_{2p}^{2n}. \tag{18}$$

Étudions encore la série de puissances

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n(x)}{(2n)!} \alpha^{2n}, \quad |\alpha| < \pi, \tag{19}$$

les formules d'Euler

$$\frac{1}{\alpha} - \cot\alpha = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} \alpha^{2n-1}, \quad |\alpha| < \pi,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{2n}(2n-1) B_n}{(2n)!} \alpha^{2n}, \quad |\alpha| < \pi,$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli, donneront

$$b'_n(0) = \frac{2^{2n} B_n}{2n}, \quad b_n(1) = (2^{2n} - 2) B_n, \quad b_n(2) = (2n-1) 2^{2n} B_n. \tag{20}$$

De plus, nous trouvons en vertu de (16)

$$b_n(-p) = \frac{(-1)^n (2n)!}{(p+2n)!\, 2^{p-1}} A_p^{p+2n}, \quad p \geqq 1,$$

ce qui donnera, en vertu de la formule générale (12) du paragraphe I, cette représentation indépendante

$$b_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n+p} \binom{\frac{x}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{x}{q}+n}{n-p} \frac{(2n)!}{(pq+2n)!\, 2^{pq-1}} A_{pq}^{pq+2n}, \tag{21}$$

où q désigne un positif entier quelconque.

DEUXIÈME PARTIE.

Applications de la fonction exponentielle

IV. Généralisation d'une série d'Euler.

Soient x et α deux nombres donnés quelconques, il existe un nombre positif ρ, tel que la série de puissances de y

$$\left(\frac{x - e^{-y(x-1)}}{x-1}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \overset{\alpha,n}{\Psi}(x)}{n!} y^n \tag{1}$$

a son rayon de convergence égal à ρ; pour les coefficients $\overset{\alpha,n}{\Psi}(x)$ nous trouvons sans peine les équations fonctionnelles

$$\overset{\alpha,n+1}{\Psi}(x) = \alpha x \overset{\alpha+1,n}{\Psi}(x) - \alpha (x-1) \overset{\alpha,n}{\Psi}(x) \tag{2}$$

$$\overset{\alpha,n+1}{\Psi}(x) = (\alpha + n x) \overset{\alpha,n}{\Psi}(x) - x(x-1) D_x \overset{\alpha,n}{\Psi}(x), \tag{3}$$

d'où nous obtenons pour les six premières fonctions $\overset{\alpha,n}{\Psi}(x)$ les expressions suivantes

$$\overset{\alpha,0}{\Psi}(x) = 1$$

$$\overset{\alpha,1}{\Psi}(x) = \alpha$$

$$\overset{\alpha,2}{\Psi}(x) = \alpha x + \alpha^2$$

$$\overset{\alpha,3}{\Psi}(x) = \alpha x^2 + (3\alpha^2 + \alpha) x + \alpha^3$$

$$\overset{\alpha,4}{\Psi}(x) = \alpha x^3 + (7\alpha^2 + 4\alpha) x^2 + (6\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha) x + \alpha^4$$

$$\begin{aligned}\overset{\alpha,5}{\Psi}(x) = \alpha x^4 + (15\alpha^2 + 11\alpha) x^3 + (25\alpha^3 + 30\alpha^2 + 11\alpha) x^2 + \\ + (10\alpha^4 + 10\alpha^3 + 5\alpha^2 + \alpha) x + \alpha^5.\end{aligned}$$

Combinons ces valeurs spéciales et les équations fonctionnelles susdites, nous verrons que $\overset{\alpha,n}{\Psi}(x)$ est un polynome entier et par rapport à α et par rapport à x, et ce polynome est du degré n par rapport à α mais du degré $n-1$ par rapport à x; dans le dernier cas il faut supposer $n \geqq 1$.

Posons $\alpha = -1$, nous aurons

$$\overset{-1,n}{\Psi}(x) = -(x-1)^{n-1}, \quad n \geqq 1,$$

ce qui donnera, en vertu de la formule d'addition (3) du paragraphe I, l'équation aux différences finies

$$\overset{\alpha,n}{\Psi}(x) = \overset{\alpha-1,n}{\Psi}(x) + \sum_{s=1}^{s=n} \binom{n}{s} (x-1)^{s-1} \overset{\alpha,n-s}{\Psi}(x). \tag{4}$$

La même formule d'addition donnera, en vertu de (2), cette autre formule spéciale

$$\overset{\alpha,n+1}{\Psi}(x) = \alpha \overset{\alpha,n}{\Psi}(x) + \alpha x \,.\sum_{s=1}^{s=n} \binom{n}{s} \overset{\alpha,n-s}{\Psi}(x) \overset{1,s}{\Psi}(x) \tag{5}$$

qui nous sera très utile dans ce qui suit.

Il est très facile de trouver, pour les $\overset{\alpha,n}{\Psi}(x)$, des représentations indépendantes; car l'identité évidente

$$\frac{x - e^{-y(x-1)}}{x-1} = 1 - \frac{e^{-y(x-1)} - 1}{x-1}$$

donnera la formule

$$\left(\frac{x - e^{-y(x-1)}}{x-1}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{\alpha+n-1}{n} \left(\frac{e^{-y(x-1)} - 1}{x-1}\right)^n \tag{6}$$

qui est du même caractère que la formule (7) du paragraphe I.

Appliquons ensuite la formule, où p est un positif entier,

$$(e^{-y(x-1)} - 1)^p = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} e^{-(p-s)y(x-1)},$$

puis posons pour abréger

$$L_p^n = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{p}{r} (p-r)^n = \frac{1}{2^n} L_p^n(0), \tag{7}$$

où $L_p^n(\alpha)$ est la fonction définie par la formule (10) du paragraphe II, nous aurons

$$(e^{-y(x-1)}-1)^p=\sum_{n=p}^{n=\infty}\frac{(-1)^n L_p^n}{n!}\,y^n\,(x-1)^n,$$

d'où, en vertu de (1) et (6), la représentation suivante

$$\overset{\alpha,n}{\Psi}(x)=\sum_{p=1}^{p=n}\binom{\alpha+p-1}{p}L_p^n\,.\,(x-1)^{n-p}. \tag{8}$$

Ordonnons maintenant, selon des puissances ascendantes de x, le second membre de (8), puis posons

$$\overset{\alpha,n}{\Psi}(x)=\sum_{p=1}^{p=n}\mathfrak{L}_p^n(\alpha)\,x^{n-p}, \tag{9}$$

nous aurons

$$\mathfrak{L}_p^n(\alpha)=\sum_{r=0}^{r=p-1}(-1)^r\binom{n-p+r}{p-r}\binom{\alpha+p-r-1}{p-r}L_{p-r}^n. \tag{10}$$

Cherchons ensuite, au second membre de (10), le coefficient de la puissance $(p-r)^n$, ce coefficient deviendra

$$\sum_{s=0}^{s=r}\binom{\alpha+p-s-1}{p-s}\binom{n-p+s}{s}\binom{p-s}{r-s}=$$
$$=\binom{\alpha+p-r-1}{p-r}\sum_{s=0}^{s=r}\binom{\alpha+p-s-1}{r-s}\binom{n+p-s}{s};$$

nous aurons pour $\mathfrak{L}_p^n(\alpha)$ cette autre expression

$$\mathfrak{L}_p^n(\alpha)=\sum_{r=0}^{r=p-1}(-1)^r\binom{\alpha+p-r-1}{p-r}\binom{\alpha+n}{r}(p-r)^n. \tag{11}$$

Inversement nous aurons en vertu de (9) et (10)

$$\binom{\alpha+p-1}{p}L_p^n=\sum_{s=0}^{s=p-1}\binom{n-p+s}{s}\mathfrak{L}_{p-s}^n(\alpha). \tag{12}$$

Introduisons maintenant dans (2) et (3) les expressions (9) et (10), nous aurons les formules récursives

$$L_p^{n+1}=p\,(L_p^n+L_{p-1}^n) \tag{13}$$

$$\mathfrak{L}_p^{n+1}(\alpha)=p\,\mathfrak{L}_p^n(\alpha)+(n-p+2)\,\mathfrak{L}_{p-1}^n(\alpha), \tag{14}$$

dont la première est due à Grunert (*).

(*) *Mathematische Abhandlungen*, Altona, 1822. Citation de M. Worpitzky, dans le *Journal de Crelle*, t. 94, p. 210; 1883.

Posons dans (1) $x=0$, $x=1$, la fonction qui figure au premier membre deviendra respectivement

$$e^{-\alpha y}, \quad (1+y)^{-\alpha},$$

ce qui donnera

$$\overset{\alpha,n}{\Psi}(0)=\alpha^n, \quad \overset{\alpha,n}{\Psi}(1)=\binom{\alpha+n-1}{n}, \tag{15}$$

d'où en vertu de (8) et (9) ces deux développements

$$x^n=\sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{n-p}\binom{x+p-1}{p}L_p^n \tag{16}$$

$$\binom{x+n-1}{n}=\sum_{p=1}^{p=n}\mathfrak{L}_p^n(x). \tag{17}$$

La première de ces deux formules est due à Cauchy (*) et joue un rôle fondamental dans les recherches de M. Worpitzky.

V. Formules d'Euler, de Laplace et de Scherk.

Le cas particulier de nos recherches précédentes qui correspond à $\alpha=1$ est classique.

Posons pour abréger

$$\psi_n(x)=\overset{1,n}{\Psi}(x), \tag{1}$$

l'équation fonctionelle (2) du paragraphe IV donnera

$$\left(D_\alpha \overset{\alpha,n+1}{\Psi}(x)\right)_{\alpha=0}=x\,\psi_n(x), \quad n\geqq 1;$$

c'est-à-dire que nous aurons ces deux séries de puissances

$$\frac{x-1}{x-e^{-y(x-1)}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\psi_n(x)}{n!}y^n \tag{2}$$

$$\log\left(\frac{x-1}{x-e^{-y(x-1)}}\right)=-y+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}x\,\psi_n(x)}{(n+1)!}y^{n+1}, \tag{3}$$

(*) *Résumés Analytiques*, p. 35; Turin, 1833.

tandis que les formules (4) et (5) du paragraphe IV donnent ici

$$\psi_n(x) = \sum_{s=1}^{s=n} \binom{n}{s} (x-1)^{s-1} \psi_{n-s}(x), \quad n \geq 1 \tag{4}$$

$$\psi_{n+1}(x) = (x+1)\psi_n(x) + x \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{n}{s} \psi_s(x)\psi_{n-s}(x). \tag{5}$$

Posons pour abréger

$$\mathfrak{L}_p^n = \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r \binom{n+1}{r} (p-r)^n = \mathfrak{L}_p^n(1), \tag{6}$$

nous aurons ces deux représentations indépendantes

$$\psi_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} L_p^n (x-1)^{n-p} \tag{7}$$

$$\psi_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \mathfrak{L}_p^n x^{n-p}, \tag{8}$$

dont la seconde est indiquée par Euler (*) et démontrée par Laplace (**).

Euler (***) a calculé les huit premiers des fonctions $\psi_n(x)$, savoir

$$\psi_0(x) = 1$$
$$\psi_1(x) = 1$$
$$\psi_2(x) = x + 1$$
$$\psi_3(x) = x^2 + 4x + 1$$
$$\psi_4(x) = x^3 + 11x^2 + 11x + 1$$
$$\psi_5(x) = x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1$$
$$\psi_6(x) = x^5 + 57x^4 + 302x^3 + 302x^2 + 57x + 1$$
$$\psi_7(x) = x^6 + 120x^5 + 1191x^4 + 2416x^3 + 1191x^2 + 120x + 1.$$

Il saute aux yeux que ces polynomes spéciaux sont réciproques; appliquons la formule récursive (5), nous aurons la proposition suivante due à Scherk (****) :

(*) *Institutiones calculi differentialis*, p. 486; Saint-Pétersbourg, 1755.

(**) Voir Lacroix: *Traité du calcul différentiel et intégral*, t. 3, p. 110; Paris, 1819.

(***) *Institutiones calculi differentialis*, p. 485-486.

(****) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 302; 1829.

Le polynome $\psi_n(x)$ est, pour $n \geqq 1$, un polynome réciproque du degré $n-1$, savoir

$$x^{n-1}\psi_n\left(\frac{1}{x}\right) = \psi_n(x), \tag{9}$$

de sorte que nous aurons, pour $1 \leqq p < n$:

$$\mathfrak{L}_p^n = \mathfrak{L}_{n-p+1}^n. \tag{10}$$

Remplaçons maintenant dans (2) y par $y:(x-1)$, il en résulte

$$\frac{x-1}{x-e^{-y}} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \psi_n(x)}{n!(x-1)^n} y^n,$$

d'où en posant $-e^{2xi}$ au lieu de x et $2hi$ au lieu de y

$$\frac{1}{e^{2xi}+e^{-2hi}} = \frac{1}{e^{2xi}+1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi_n(-e^{2xi})(2hi)^n}{n!(e^{2xi}+1)^{n+1}},$$

ce qui donnera, en vertu des identités

$$e^{2xi}+1 = 2e^{xi}\cos x, \quad \operatorname{tg}(x+h) = \frac{1}{i}\left(\frac{2e^{2xi}}{e^{2xi}+e^{-2hi}} - 1\right),$$

la série de TAYLOR

$$\operatorname{tg}(x+h) = \operatorname{tg} x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{i^{n-1}\psi_n(-e^{2xi})e^{-(n-1)xi}h^n}{n!(\cos x)^{n+1}},$$

de sorte que nous aurons en différentiant n fois par rapport à h, puis posant $h=0$

$$D_x^n \operatorname{tg} x = \frac{i^{n-1}\psi_n(-e^{2xi})e^{-(n-1)xi}}{(\cos x)^{n+1}}. \tag{11}$$

Cela posé, introduisons dans (11) le développement (7), nous aurons

$$D_x^n \operatorname{tg} x = (-i)^{n-1} \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p 2^{n-p-1} L_{p+1}^n \cdot \frac{e^{-pxi}}{(\cos x)^{p+2}}, \tag{12}$$

ce qui donnera les deux représentations indépendantes

$$D_x^{2n} \operatorname{tg} x = \frac{2^{2n-1}}{(\cos x)^2} \cdot \sum_{p=1}^{p=2n-1} (-1)^{n+p} L_{p+1}^{2n} \cdot \frac{\sin px}{(2\cos x)^p} \tag{13}$$

$$D_x^{2n+1} \operatorname{tg} x = \frac{2^{2n}}{(\cos x)^2} \cdot \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^{n+p} L_{p+1}^{2n+1} \cdot \frac{\cos px}{(2\cos x)^p} \tag{14}$$

et les identités

$$\sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{p-1} L_{p+1}^{2n+1} \cdot \frac{\sin p x}{(2 \cos x)^p} = 0 \tag{15}$$

$$\sum_{p=0}^{p=2n-1} (-1)^p L_{p+1}^{2n} \cdot \frac{\cos p x}{(2 \cos x)^p} = 0. \tag{16}$$

On voit que ces formules sont du même genre que les formules plus générales (12), (13) et (14), (15) développées dans le paragraphe II, mais que les coefficients ne sont pas formellement les mêmes. Nous ne nous arrêtons pas à l'étude des relations numériques ainsi obtenues.

Introduisons ensuite dans (11) le développement (8), nous trouvons les formules de Scherk (*)

$$D_x^{2n} \operatorname{tg} x = 2 \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \mathfrak{R}_{n-p}^{2n} \cdot \frac{\sin (2p+1) x}{(\cos x)^{2n+1}} \tag{17}$$

$$D_x^{2n+1} \operatorname{tg} x = \frac{\mathfrak{R}_{n+1}^{2n+1}}{(\cos x)^{2n+2}} - 2 \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \mathfrak{R}_{n-p}^{2n+1} \cdot \frac{\cos (2p+2) x}{(\cos x)^{2n+2}} \cdot \tag{18}$$

VI. Étude d'autres fonctions particulières.

Posons dans les formules du paragraphe IV $x = -1$ et x au lieu de α, nous avons à étudier les fonctions

$$c_n(x) = \overset{x,n}{\Psi}(-1), \tag{1}$$

ce qui nous conduira à la série de puissances

$$\left(\frac{1+e^{2\alpha}}{2}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n c_n(x)}{n!} \alpha^n, \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2} \cdot \tag{2}$$

Dans ce cas nous aurons l'équation fonctionnelle

$$c_{n+1}(x) = 2x\, c_n(x) - x\, c_n(x+1) \tag{3}$$

et les représentations indépendantes

$$c_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} (-2)^{n-p} \binom{x+p-1}{p} L_p^n \tag{4}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 4, p. 303; 1829.

$$c_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n-p} \mathfrak{C}_p^n(x), \tag{5}$$

ce qui donnera les valeurs spéciales

$$c_0(x) = 1$$
$$c_1(x) = x$$
$$c_2(x) = x^2 - x$$
$$c_3(x) = x^3 - 3x^2$$
$$c_4(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$c_5(x) = x^5 - 10x^4 + 15x^3 + 10x^2.$$

Remarquons que l'équation fonctionelle (3) donnera

$$c'_{n+1}(0) = -c_n(1), \quad c_n(2) = 2c_n(1) - c_{n+1}(1),$$

nous aurons, en vertu de la série de puissances

$$\frac{2}{1+e^{2\alpha}} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n T_n}{(2n-1)!} \alpha^{2n-1}, \quad (\alpha) < \frac{\pi}{2},$$

ces valeurs numériques

$$c'_{2n}(0) = (-1)^n T_n, \quad c'_{2n+1}(0) = 0 \tag{6}$$
$$c_{2n}(1) = 0, \quad c_{2n+1}(1) = (-1)^n T_{n+1} \tag{7}$$
$$c_{2n}(2) = (-1)^{n+1} T_{n+1}, \quad c_{2n+1}(2) = (-1)^n 2 T_{n+1}. \tag{8}$$

Pour déterminer les valeurs numériques $c_n(-p)$, où p est un positif entier, nous posons

$$B_p^n = \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{p}{s} (p-s)^n, \tag{9}$$

et nous aurons, en vertu de l'identité

$$\left(\frac{1+e^{2\alpha}}{2}\right)^p = \frac{1}{2^p} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \binom{p}{s} e^{2(p-s)\alpha},$$

l'expression suivante

$$c_n(-p) = (-1)^n 2^{n-p} B_p^n, \tag{10}$$

de sorte que la formule générale (12) du paragraphe I donnera cette autre représentation indépendante

$$c_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n+p} \binom{\frac{x}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{x}{q}+n}{n-p} 2^{n-pq} B_{pq}^n, \tag{11}$$

où q est un positif entier quelconque.

Nous avons encore à considérer le développement suivant

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d_n(x)}{n!} \alpha^n, \quad |\alpha| < 2\pi; \tag{12}$$

multiplions par α^{-x} les deux membres de (12), puis différentions par rapport à α, il en résulte l'équation fonctionelle

$$x\, d_{n-1}(x) - x\, d_n(x+1) = (n-x)\, d_n(x); \tag{13}$$

c'est-à-dire que nous aurons pour $n \geqq 1$

$$d'_n(0) = -\frac{d_n(1)}{n}, \quad d_{n-1}(1) = d_n(2) + (n-1)\, d_n(1).$$

Cela posè, la série de puissances

$$\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} = 1 + \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} \alpha^{2n}, \quad |\alpha| < 2\pi,$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli, donnera les valeurs numériques suivantes

$$d'_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2n} B_n, \quad d'_{2n+1}(0) = 0 \tag{14}$$

$$d_{2n}(1) = (-1)^{n-1} B_n, \quad d_{2n+1}(1) = 0 \tag{15}$$

$$d_{2n}(2) = (-1)^n (2n-1) B_n, \quad d_{2n+1}(2) = (-1)^{n-1} B_n. \tag{16}$$

Dans ces formules il faut admettre généralement $n \geqq 1$; mais l'expression de $d_{2n}(2)$ n'est pas appliquable pour $n = 1$; dans cette expression il faut supposer $n \geqq 2$.

Appliquons ensuite l'identité

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^p = \frac{(-1)^p}{\alpha^p} \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} e^{-(p-s)\alpha},$$

où p est un positif entier, nous aurons en vertu de la définition (7) du paragraphe IV la série de puissances toujours convergente

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^p = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{(n+p)!} L_p^{n+p} \alpha^n,$$

ce qui donnera

$$d_n(-p) = \frac{(-1)^n n!}{(n+p)!} L_p^{n+p}, \tag{17}$$

d'où la représentation indépendante

$$d_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p} n!}{(n+pq)!} \binom{\frac{x}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{x}{q}+n}{n-p} L_{pq}^{n+pq}, \tag{18}$$

où q est un positif entier quelconque.

Remarquons en passant que les polynomes $d_n(x)$ sont intimément liés avec les fonctions de STIRLING (*).

TROISIEME PARTIE.

Table des formules numériques

VII. FORMULES CONTENANT DES NOMBRES QUELCONQUES.

Désignons par q un positif entier quelconque, tandis que m est un entier qui doit satisfaire aux conditions indiquées, nous aurons les représentations indépendantes qui contiennent les deux nombres m et q:

$$T_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p}}{pq \cdot 2^{pq-1}} \binom{m}{p} \mathfrak{A}_{pq}^{n}, \quad m \geqq n. \tag{1}$$

(*) Voir mon *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, p. 71-77; Leipsic, 1906.

$$E_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{pq-1}} \binom{\frac{1}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{1}{q}+m}{m-p} \mathfrak{A}_{pq}^{2n}, \quad m \geqq n. \tag{2}$$

$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{pq-1}} \binom{\frac{2}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{2}{q}+m}{m-p} \mathfrak{A}_{pq}^{2n}, \quad m \geqq n. \tag{3}$$

$$\frac{2^{2n} B_n}{2n} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{pq \cdot (2n+pq)!\, 2^{pq-1}} \binom{m}{p} A_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geqq n. \tag{4}$$

$$(2^{2n}-2) B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n+pq)!\, 2^{pq-1}} \binom{\frac{1}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{1}{q}+m}{m-p} A_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geqq n \tag{5}$$

$$(2n-1)\, 2^{2n} B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n+pq)!\, 2^{pq-1}} \binom{\frac{2}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{2}{q}+m}{m-p} A_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geqq n. \tag{6}$$

$$T_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p}\, 2^{2n-pq}}{pq} \binom{m}{p} B_{pq}^{2n}, \quad m \geqq 2n. \tag{7}$$

$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{n+p+1}\, 2^{2n-pq+1} \binom{\frac{1}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{1}{q}+m}{m-p} B_{pq}^{2n+1}, \quad m \geqq 2n+1. \tag{8}$$

$$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{n+p+1}\, 2^{2n-pq} \binom{\frac{2}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{2}{q}+m}{m-p} B_{pq}^{2n}, \quad m \geqq 2n. \tag{9}$$

$$2\, T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=m} (-1)^{n+p+1}\, 2^{2n-pq+1} \binom{\frac{2}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{2}{q}+m}{m-p} B_{pq}^{2n+1}, \quad m \geqq 2n+1. \tag{10}$$

$$\frac{B_n}{2n} = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n+pq)!\, pq} \binom{m}{p} L_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geqq 2n. \tag{11}$$

$$B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p+1} (2n)!}{(2n+pq)!} \binom{\frac{1}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{1}{q}+m}{m-p} L_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geqq 2n. \tag{12}$$

$$(2n-1) B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p} (2n)!}{(2n+pq)!} \binom{\frac{2}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{2}{q}+m}{m-p} L_{pq}^{2n+pq}, \quad m \geqq 2n. \tag{13}$$

$$B_n = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{(-1)^{n+p+1} (2n+1)!}{(2n+pq+1)!} \binom{\frac{2}{q}+p-1}{p} \binom{\frac{2}{q}+m}{m-p} L_{pq}^{2n+pq+1}, \quad m \geqq 2n+1. \tag{14}$$

Remplaçons maintenant toujours m par sa plus petite valeur, puis posons $q = 1$, et posons encore dans (3), (6), (9) et (10), (13) et (14) $q = 2$, nous aurons les formules plus particulières et plus simples

I. $$T_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{p \cdot 2^{p-1}} \binom{n}{p} \mathfrak{A}_p^{2n}.$$

II. $$E_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{p-1}} \binom{n+1}{n-p} \mathfrak{A}_p^{2n}.$$

III. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}(p+1)}{2^{p-1}} \binom{n+2}{n-p} \mathfrak{A}_p^{2n}.$$

IV. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2p-1}} \binom{n+1}{n-p} \mathfrak{A}_{2p}^{2n}.$$

V. $$\frac{2^{2n} B_n}{2n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}(2n)!}{(p+2n)!\, p \cdot 2^{p-1}} \binom{n}{p} A_p^{2n+p}.$$

VI. $$(2^{2n} - 2) B_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}(2n)!}{(p+2n)!\, 2^{p-1}} \binom{n+1}{n-p} A_p^{2n+p}.$$

VII. $$(2n-1)\, 2^{2n} B_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}(2n)!\,(p+1)}{(p+2n)!\, 2^{p-1}} \binom{n+2}{n-p} A_p^{2n+p}.$$

VIII. $$(2n-1)\, 2^{2n} B_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}(2n)!}{(2p+2n)!\, 2^{2p-1}} \binom{n+1}{n-p} A_{2p}^{2n+2p}.$$

IX. $$T_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}\, 2^{2n-p}}{p} \binom{2n}{p} B_p^{2n}.$$

X. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1}\, 2^{2n-p+1} \binom{2n+1}{2n-p} B_p^{2n+1}.$$

XI. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p+1}\, 2^{2n-p} \binom{2n+2}{2n-p} (p+1)\, B_p^{2n}.$$

XII. $$2\, T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1}\, 2^{2n-p+1} \binom{2n+3}{2n-p+1} (p+1)\, B_p^{2n+1}.$$

XIII. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p+1}\, 2^{2n-2p} \binom{2n+1}{2n-p} B_{2p}^{2n}.$$

XIV. $$2\, T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1}\, 2^{2n-2p+1} \binom{2n+2}{2n-p+1} B_{2p}^{2n+1}.$$

XV. $$\frac{B_n}{2n} = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}(2n)!}{(2n+p)!\,p} \binom{2n}{p} L_p^{2n+p}.$$

XVI. $$B_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p+1}(2n)!}{(2n+p)!} \binom{2n+1}{2n-p} L_p^{2n+p}.$$

XVII. $$(2n-1)B_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}(2n)!\,(p+1)}{(2n+p)!} \binom{2n+2}{2n-p} L_p^{2n+p}.$$

XVIII. $$B_n = \sum_{p=1}^{p=2n+1} \frac{(-1)^{n+p+1}(2n+1)!\,(p+1)}{(2n+p+1)!} \binom{2n+3}{2n-p+1} L_p^{2n+p+1}.$$

XIX. $$(2n-1)B_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}(2n)!}{(2n+2p)!} \binom{2n+1}{2n-p} L_{2p}^{2n+2p}.$$

XX. $$B_n = \sum_{p=1}^{1=2n+1} \frac{(-1)^{n+p+1}(2n+1)!}{(2n+2p+1)!} \binom{2n+2}{2n-p+1} L_{2p}^{2n+2p+1}.$$

Dans ces formules nous avons posé pour abréger

$$\mathfrak{A}_p^n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p\ 1}{2}} \binom{p}{s} (p-2s)^n, \qquad A_p^n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{s} (p-2s)^n,$$

$$L_p^n = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{p}{s} (p-s)^n, \qquad B_p^n = \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{p}{s} (p-s)^n.$$

De plus, nous avons entres les T_n et les B_n la relation suivante

$$T_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_n.$$

VIII. Représentations sans des paramètres.

Les représentations indépendantes d'une forme plus simple que nous venons d'indiquer pour les fonctions $a_n(x)$ et $c_n(x)$ donnent une suite d'autres formules numériques, savoir:

XXI. $$T_n = \sum_{p=1}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}\,2^{2n-p}}{p} L_p^{2n}.$$

XXII. $$T_n = \sum_{p=1}^{p=2n-1} (-1)^{n+p}\,2^{2n-p-1} L_p^{2n-1}.$$

XXIII. $$E_n = \sum_{p=0}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^p} L_p^{2n}(1).$$

XXIV. $$E_n = \sum_{p=1}^{p=2n-1} \frac{(-1)^{n+p}\, p}{2^p} L_p^{2n-1}(1).$$

XXV. $$T_{n+1} = \sum_{p=0}^{p=2n} \frac{(-1)^{n+p}(p+1)}{2^p} L_p^{2n}(2).$$

XXVI. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n-1} \frac{(-1)^{n+p}\, p\,(p+1)}{2^p} L_p^{2n-1}(2).$$

XXVII. $$2^{2n}\, T_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{p-1}\,.\,p} A_{2p}^{2n}.$$

XXVIII. $$2^{2n}\, E_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{p-1}} A_{2p}^{2n}.$$

XXIX. $$2^{2n}\, T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}(p+1)}{2^{p-1}} A_{2p}^{2n}.$$

XXX. $$T_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{p\,.\,2^{2p}} A_{2p}^{2n}.$$

XXXI. $$E_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2p-1}} \binom{p-\frac{1}{2}}{p} A_{2p}^{2n}.$$

XXXII. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n+p}}{2^{2p-1}} A_{2p}^{2n},$$

XXXIII. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p+1}(p+1)\, 2^{2n-p} L_p^{2n}.$$

XXXIV. $$2\, T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1}(p+1)\, 2^{2n-p+1} L_p^{n+1}.$$

XXXV. $$T_n = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p}\, \mathfrak{L}_p^{2n-1}.$$

XXXVI. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p+1}\, \mathfrak{L}_p^{2n+1}.$$

XXXVII. $$T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n} (-1)^{n+p+1}\, \mathfrak{L}_p^{2n}(2).$$

XXXVIII. $$2\, T_{n+1} = \sum_{p=1}^{p=2n+1} (-1)^{n+p-1}\, \mathfrak{L}_p^{2n+1}(2).$$

XXXIX. $$T_{n+1} = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^{n+p}\, 2^{2n-p}\, L_{p+1}^{2n+1}.$$

XL. $$T_{n+1} = \mathfrak{P}_{n+1}^{2n+1} - 2 \,.\, \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p\, \mathfrak{P}_{n-p}^{2n+1}.$$

Les deux derniers développements sont tirés des formules (14) et (18) du paragraphe V.

Dans les formules de XXIII à XXVI il faut poser

$$L_p^n(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} (\alpha + 2p - 2s)^n, \quad L_0^n(\alpha) = \alpha^n,$$

ce qui donnera

$$L_p^n(0) = 2^n \,.\, L_p^n.$$

Quant à la fonction $\mathfrak{P}_p^n(x)$ qui figure dans les formules XXXVII et XXXVIII, nous avons

$$\mathfrak{P}_p^n(x) = \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{x+p-s-1}{p-s} \binom{x+n}{s} (p-s)^n,$$

ce qui donnera

$$\Big(D_x\, \mathfrak{P}_p^n(x)\Big)_{x=0} = \mathfrak{P}_p^{n-1}(1) = \mathfrak{P}_p^{n-1}.$$

On voit que plusieurs des quarante représentations indépendantes particulières que nous venons d'indiquer sont bien connues.

On the Projective Differential Geometry of N-dimensional Spreads Generated by ∞^1 Flats.

(*By* Arthur Ranum, *Ithaca, N. Y.*)

INTRODUCTION.

A ruled surface may be regarded as a two-dimensional spread generated by ∞^1 one-dimensional flats (straight lines). Among the most fundamental projective differential properties of ruled surfaces in three-dimensional space are (1) the distinction between skew and developable surfaces, (2) the relation which exists between a developable surface and its edge of regression, and (3) the incidence relations between a developable and its tangent planes. A space curve S_1, its tangent developable S_2, and the locus S_3 of its osculating planes form what I call an ascending series of spreads.

In this paper I have studied the analogous projective differential properties, in n-dimensional space, of m-dimensional spreads generated by ∞^1 $(m-1)$-dimensional flats, or linear spaces, and of the ascending and descending series of spreads which they determine. The three-dimensional facts, however, are too simple to afford even a hint of the n-dimensional state of affairs. It is only when we reach four-dimensional space that some of the most characteristic features, for example branch series of spreads, begin to appear; and the interesting case in which a secondary series connecting two branch series exists does not occur in space of less than nine dimensions.

Only three writers, so far as I am aware, have ever touched upon this subject. In 1910 Segre published a paper in the *Rendiconti di Palermo*, volume 30, page 87, entitled *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, in which he devoted four pages to *Varietà ∞^1 di spazi.* He there gave the first brief introduction to the general problem of this paper. A special case in which the given spread determines what I call a regular series of spreads had, however, been considered in 1901 by Moreno in a paper *On* *ruled loci in n-fold space,* in the *Proceedings of the American Academy*, volume 37, page 121. In 1905 Wilczynski, in his book on *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces*, Leipzig, Teubner, while not considering this very problem except in the three-dimensional case (pages 130-131), set up the corresponding analytical apparatus for the n-dimensional case (pages 6 and 51-54). The system of linear homogeneous differential equations with which he starts is essentially the same as what I call the fundamental linear relations (*).

Homogeneous coordinates and parametric equations have been chosen as the most appropriate tools to use; and the results apply to a large class of non-analytic, as well as analytic, spreads.

PART I.

Elementary Theory, Including a Study of Ascending Branch Series.

The directrices of a spread.

1. Let the fundamental space within which we are operating be a linear space or flat, F_{n-1}, of $n-1$ dimensions, which may be Euclidean or non-Euclidean, but is governed by the laws of projective geometry. Let F_{m-1} $(m < n)$ be a linear space, or $m-1$ *flat*, contained in F_{n-1}. Since F_{m-1} is determined by m independent points, we shall call m its *point-value* (**).

A simply infinite continuous system of $m-1$ flats will generate an m-dimensional spread (space, variety) S_m, in general non-linear, which we shall call an *m-spread.* These m-spreads are the object of our investigation. For the sake of duality we include the case where $m = n-1$, although S_m is then not a spread in the ordinary sense of the term.

(*) See also Segre, l. c., page 88, equations (4).

(**) Cf. Schoute, *Mehr-dimensionale Geometrie*, volume 1 (1902), page 12.

2. Let A_{ij} $(i=1,\ldots, m;\ j=1,\ldots, n)$ be the homogeneous coordinates of m independent points P_i lying in the generator F_{m-1}. If we regard A_{ij} as functions of a parameter ω and introduce the ratios $a_1 : \ldots : a_m$ as additional parameters, we can write the parametric equations of S_m in the form

$$X_j = \sum_{i=1}^{m} a_i\, A_{ij}(\omega), \quad \text{where } j=1,\ldots, n. \tag{1}$$

If in (1) we let ω be fixed, we obtain the equations of a generator F_{m-1}. If, on the other hand, we let $a_1,\ldots, a_m$ be functions of ω, we obtain the equations of a curve enclosed in S_m and meeting each generator in at least one point. Every such curve we call a *directrix* of S_m. In particular, the loci A_i $(i=1,\ldots, m)$ of the points P_i form a set of *m independent directrices*, whose equations are

$$X_j = A_{ij}(\omega), \quad j=1,\ldots, n.$$

If these m directrices are given and with them the point-correspondence established on them by the m sets of functions $A_{ij}(\omega)$, then S_m is determined; it is generated by the flats which connect corresponding points of the m curves. In this sense S_m is determined by the m directrices, and we can use the notation

$$S_m = [A_1,\ldots, A_m]. \tag{2}$$

The most general transformation to a new parameter $\bar{\omega}$ and to a new set of independent directrices $A_1,\ldots, \bar{A}_m$ is evidently given by the equations

$$\bar{\omega} = f(\omega) \tag{a}$$

$$\bar{A}_{kj}(\omega) = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}(\omega)\,.\,A_{ij}(\omega) \qquad (k=1,\ldots, m;\ j=1,\ldots, n), \tag{b}$$

where $f(\omega)$ and $a_{ki}(\omega)$ are arbitrary functions of ω, such that the determinant $|\, a_{ki}(\omega)\,|$ does not vanish. In particular, if the directrix A_i is left unchanged by the transformation, that is, if $\bar{A}_i = A_i$, then

$$A_{ij}(\omega) = a_{ii}(\omega)\,.\,A_{ij}(\omega) \qquad (j=1,\ldots, n). \tag{c}$$

3. In all that follows we shall assume that the functions $A_{ij}(\omega)$ are continuous and possess a certain finite number of successive derivatives depending on circumstances (See § 44). We denote derivatives by primes.

If on a directrix A_i a point P_i corresponds to a given value of ω, we define the *derivative* (*) *of* P_i as a point P'_i whose coordinates are the values of the derivatives of the coordinates of P_i for the same value of ω. The tangent to A_i at the point P_i evidently passes thru P'_i. The position of P'_i on the tangent is obviously changed if A_i is transformed into itself by (c), but not by (a).

Tangent flats.

4. Let us now consider the flat F determined by the m points P_i and their derivatives P'_i. F is the connecting flat of the tangents to the directrices A_i at their corresponding points P_i, and may also be regarded as the connecting flat of the generator F_{m-1} and its consecutive generator. Hence we shall call F the *tangent flat* to S_m along the generator F_{m-1}. It is determined by S_m and F_{m-1}, and is therefore not changed when S_m is transformed into itself by (a) or (b).

5. The point-value of F, being not less than m, shall be denoted by $m+r$. It is evident that $m+r$ is equal to the rank of the matrix

$$M' = \begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{m1} & A'_{11} & \dots & A'_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{mn} & A'_{1n} & \dots & A'_{mn} \end{Vmatrix},$$

of which the first m columns constitute a partial matrix M of rank m. The rank of M' is easily seen to be invariant under the transformations (a) and (b).

The positive integer r is the difference between the rank of M' and the rank of M. We shall call it the *range* of the spread S_m along the generator F_{m-1}, because it increases with the dimensionality $m+r-1$ of the connecting flat F of F_{m-1} and its consecutive generator.

It satisfies the inequalities

$$0 \leqq r \leqq m, \qquad r \leqq n-m.$$

(*) See Segre, l. c., page 88. Wilczynski also uses the same concept, l. c., page 54; but applies the term *derivative* to a somewhat different, though related, concept, page 147.

One extreme case, $r = m$, arises when the $2m$ points P_i, P'_i are independent and the tangent flat F is of point-value $2m$; the opposite extreme, $r = 0$, occurs when the points P'_i all lie in F_{m-1}, and the latter may be called a stationary generator, coinciding with its consecutive generator.

THE TANGENT SPREAD.

6. We define the *derivative of a directrix* A as a curve A' generated by the derivatives of the points of A. Let us consider the spread

$$S = [A_1, \dots, A_m, A'_1, \dots, A'_m], \tag{3}$$

determined by *the directrices of* S_m *and their derivatives.* S is obviously the locus of the tangent flats to S_m along its generators, and so shall be called the *tangent spread of* S_m. Its dimensionality is equal to the maximum point-value $m + r$ of its generators and therefore also equal to the maximum value of the rank of the matrix $M'(\omega)$, which is obtained from M' by regarding its elements as functions of the parameter ω. So we write $S = S_{m+r}$. We call the $2m$ curves A_i, A'_i a *system of fundamental directrices* of S_{m+r} (altho only $m + r$ of them are independent), because every directrix of S_{m+r} is linearly dependent on them.

THE RANGE OF A SPREAD.

7. The quantity r is then the maximum, or general (*), value of the range of S_m along its different generators, and we shall call it simply the *range of* S_m. To denote this, we write $S_m = S_m^r$. So *the range of a spread generated by* ∞^1 *flats is the difference between its dimensionality and that of its tangent spread.* It depends only on the spread itself and not on the form of its equations.

(*) The term *general* is used, because for the simpler classes of spreads the value of the range is less than its maximum value only along a finite number of generators.

8. If the range of a spread along any particular generator falls below the general value, that generator is *singular*. Hence a singular generator is one along which the tangent flat is of lower point-value than usual. A singular generator along which the range is zero is *stationary*.

9. If an m-spread is of range zero along all its generators, they are all stationary, that is, the spread consists of a single (fixed) $m-1$ flat; and being $(m-1)$-dimensional instead of m-dimensional, it is not, strictly speaking, an m-spread at all. Nevertheless, in order to establish a more complete agreement between the analysis and the nomenclature, we extend the definition of m-spreads to cover this case. Hence *we define an m-spread of range zero to be an $m-1$ flat;* in symbols, $S_m^0 = F_{m-1}$.

Focal flats.

10. Let us now consider those particular directrices of S_m^r, if any, whose derivatives are also directrices of S_m^r. On any such directrix let P be a point corresponding to a particular value of ω and therefore lying in the corresponding generator F_{m-1}. The derivative P' of P will also lie in F_{m-1} and P will lie in the flat of intersection F of F_{m-1} and its consecutive generator G_{m-1}. Conversely, the derivative of every point of F lies in F_{m-1}.

11. We call F the *focal flat* (*) *of S_m^r in the generator F_{m-1}*. It is invariant under the transformations (a) and (b), § 2. If F_{m-1} is a non-singular generator, the connecting flat of F_{m-1} and G_{m-1}, as we have seen (§§ 4, 5), is of point-value $m+r$, and their flat of intersection is therefore (**) of point-value $m-r$; that is, $F = F_{m-r-1}$. On the other hand, if F_{m-1} is a singular generator, the point-value of the corresponding focal flat F is greater than $m-r$.

The focal spread.

12. The number of independent *directrices of S_m^r whose derivatives are also directrices of S_m^r* we now see to be $m-r$. They determine a spread S_{m-r}, which we call the *focal spread of S_m^r*, because among its generators are the

(*) This is the *spazio singolare* of Segre, l. c., page 89.

(**) See Schoute, l. c., page 14; and Bertini, *Geometria Proiettiva degli Iperspazi* (1907), page 9, § 11.

focal flats of S_m^r in the non-singular generators of the latter. The focal spread of a developable surface S_2^1 is evidently its edge of regression.

13. As a parallel theorem to that of § 7 we see that *the range of a spread is the difference between its dimensionality and that of its focal spread.* It is clear that the operation of descending from a spread S_m to its focal spread is dual to the operation of ascending from S_m to its tangent spread, while the concept of range is self-dual. Thus if S_m^r and S_{n-m}^r are correlative spreads, the focal spread, S_{m-r} of the first and the tangent spread S_{n-m+r} of the second are correlative spreads of the same range.

14. A spread of range zero obviously coincides with its tangent spread and with its focal spread. An m-spread of range m has no focal spread; its consecutive generators do not meet, in general. For the sake of duality, however, we shall indicate this fact by saying that the focal spread of an S_m^m is $S_0^0 = F_{-1}$, just as the tangent spread of an S_{n-m}^m is $S_n^0 = F_{n-1}$. A simple self-dual example in three-dimensional space is a skew ruled surface S_2^2, whose tangent spread is S_4^0 and whose focal spread is S_0^0.

The equations of the focal spread.

15. We now proceed to find the equations of the directrices of the focal spread S_{m-r}. Since among the $2m$ columns of the matrix $M'(\omega)$ just $m+r$ are linearly independent, there must exist $m-r$ linearly independent relations, identities in ω, of the form

$$\sum_{i=1}^{m} l_{ki}(\omega)\, A'_{ij}(\omega) + \sum_{i=1}^{m} h_{ki}(\omega)\, A_{ij}(\omega) = 0 \quad \left(\begin{matrix} j = 1, \ldots, n; \\ k = 1, \ldots, m-r \end{matrix}\right), \tag{4}$$

which may be written more briefly in the form (*)

$$\sum_{i=1}^{m} l_{ki} A'_i + \sum_{i=1}^{m} h_{ki} A_i = 0 \quad (k = 1, \ldots, m-r), \tag{5}$$

(*) The equations (5) may be regarded as a system of linear differential equations in which ω is the independent variable and $A_1, \ldots, A_m$ are the dependent variables. The equations (4) then express the fact that the system (5) possesses the n solutions

$$A_{1j}, \ldots, A_{mj} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

and also in the form

$$\frac{d}{d\omega}\sum_{i=1}^{m} l_{ki} A_i = \sum_{i=1}^{m} (l'_{ki} - h_{ki}) A_i \quad (k = 1, \ldots, m - r). \tag{6}$$

This shows that the directrices of S_m^r represented by the $m - r$ symbols

$$L_k = \sum_{i=1}^{m} l_{ki} A_i \tag{7}$$

are such that their derivatives are also directrices of S_m^r. Moreover, they are independent, that is, the matrix (l_{ki}), which has m columns and $m - r$ rows, is of rank $m - r$ for general values of ω; for if not, it would be possible to eliminate $A'_1, \ldots, A'_m$ from the equations (5) and obtain an identical relation among the directrices $A_1, \ldots, A_m$, which would contradict the hypothesis that these are independent.

16. Hence the required directrices of the focal spread S_{m-r} are given by (7); in other words,

$$S_{m-r} = [L_1, \ldots, L_{m-r}]. \tag{8}$$

Comparing (5) and (7), we see that *if the independent directrices A_i of an m-spread and their derivatives are connected by exactly $m - r$ independent linear relations of the form*

$$f_k(A'_1, \ldots, A'_m, A_1, \ldots, A_m) = 0,$$

its focal spread is determined by the $m - r$ independent directrices

$$f_k(A_1, \ldots, A_m, 0, \ldots, 0).$$

One spread enclosing another.

17. A spread S_m shall be said to be *enclosed* in a spread $S_{m'}$, if every generator of S_m lies in, or coincides with, the corresponding generator of $S_{m'}$; every directrix of S_m is then included among the directrices of $S_{m'}$. Any spread S_m^r is obviously enclosed in its tangent spread S_{m+r} and encloses its focal spread S_{m-r}. Moreover, it follows from the definitions (§§ 6, 12) that S_m^r

is enclosed in the focal spread S_{m+r-s} of its tangent spread S^s_{m+r}, and dually that S^r_m encloses the tangent spread S_{m-r+t} of its focal spread S^t_{m-r} (*).

18. Hence the range r of a spread S^r_m is equal to, or greater than, the range s of its tangent spread S^s_{m+r} and is also equal to, or greater than, the range t of its focal spread S^t_{m-r}. If $r > s$, S_{m+r-s} is of higher dimensionality than S^r_m, while if $r = s$, the two spreads coincide. Dually, if $r > t$, S_{m-r+t} is of lower dimensionality than S^r_m, while if $r = t$, these two spreads coincide. Consequently, if the first *of two spreads of the same range is the tangent spread of the second, the second is the focal spread of the first, and conversely.* In this case the two spreads form a regular descending series (See § 24).

The conditions of tangency.

19. We now consider certain relations that may exist between the four spreads

$$\left.\begin{matrix} T_1, & T, \\ S, & S^1, \end{matrix}\right\} \tag{9}$$

where T_1 is the focal spread of T and S^1 is the tangent spread of S. In the first place, if S is enclosed in T_1, S^1 is enclosed in T, and conversely. For it is evident that either of these conditions is equivalent to saying:

(a) that the directrices of S and their derivatives are directrices of T.

Hence we have the two correlative theorems:

If the tangent spread of a spread S is enclosed in a spread T, then S is enclosed in the focal spread of T.

If the focal spread of a spread T encloses a spread S, then T encloses the tangent spread of S.

20. Next, suppose that S^1 encloses T. This is equivalent to saying:

(b) that every directrix of T is linearly dependent on the directrices of S and their derivatives.

Finally, suppose that S encloses T_1. This is equivalent to saying:

(b') that every directrix of T, whose derivative is also a directrix of T, is a directrix of S.

(*) See Segre, l. c., Art. 4, page 90.

The conditions (b) and (b') are geometrically, although not analytically, correlative. They are obviously independent of one another. If conditions (a) and (b) are both satisfied, T coincides with S^1, and conversely. If (a) and (b') are both satisfied, S coincides with T_1, and conversely. Hence:

Conditions (a) and (b) together constitute a necessary and sufficient condition that T is the tangent spread of S.

Conditions (a) and (b') together constitute a necessary and sufficient condition that S is the focal spread of T.

Combining these two theorems, we see that T and S form a regular descending series, if and only if the three conditions (a), (b) and (b') are all satisfied.

21. If the range of S is equal to the difference between the dimensionalities of T and S, then either (a) or (b) is alone sufficient to make T the tangent spread of S.

Dually, if the range of T is equal to the difference between the dimensionalities of T and S, either (a) or (b') is sufficient to make S the focal spread of T.

If the ranges of T and S are both equal to the difference between their dimensionalities, and if any one of the three conditions (a), (b), (b') is satisfied, then T and S form a regular descending series.

Ascending and descending series.

22. We define the *2nd tangent spread* of a spread S as the tangent spread of the tangent spread of S, and set up corresponding definitions for the *λth tangent spread* and the *λth focal spread*. The 2nd tangent spread of S^r_m is evidently an S_{m+r+s} $(s \leqq r)$ and the 2nd focal spread is an S_{m-r-t} $(t \leqq r)$.

23. A spread and its first, second, etc., tangent spreads form an *ascending series G* of spreads, whose ranges form a non-increasing series of integers. If the series G is continued far enough, a spread of range zero will be reached, namely a fixed flat $S^0_{m_1} = F_{m_1-1}$ $(m_1 \leqq n)$, within which all the other spreads of the series are enclosed.

Dually, a spread and its first, second, etc., focal spreads form a *descending series H* of spreads, whose ranges again form a non-increasing series of integers (*). If continued far enough, H will include a spread of range zero, say $S^0_{m_2} = F_{m_2-1}$, where $m_2 \geqq 0$. If $m_2 > 0$, every other spread in the series is a conical spread, whose generators all enclose the fixed flat F_{m_2-1}; if $m_2 = 0$, the generators have no fixed flat in common.

Regular series.

24. If an ascending series determined by a spread S and ending with a spread T is also a descending series determined by T, that is, if every term of the series is the tangent spread of the preceding term and the focal spread of the succeeding term, the series is said to be *regular* (**). All the spreads of a regular series are of the same range, and their dimensionalities form an arithmetical progression. The whole series is determined by any one of its terms. A simple example of a regular series in three-dimensional space is one that consists of a twisted curve S^1_1, its tangent surface S^1_2, and the locus S^1_3 of its osculating planes. An ascending (or descending) series of spreads of the same range is obviously regular; and if the dimensionalities of the i spreads of an ascending (or descending) series form an arithmetical progression, the first $i-1$ spreads of the series are certainly regular.

The conditions for an ith tangent or focal spread.

25. The theorems of §§ 19-21 can easily be generalized to apply to ith tangent spreads and ith focal spreads. Consider the two series of spreads, one descending and the other ascending:

$$\left.\begin{array}{lllll} T_i, & T_{i-1}, \ldots, & T_1, & T, \\ S, & S^1, \ldots, & S^{i-1}, & S^i, \end{array}\right\} \qquad (10)$$

(*) The equivalent of this theorem was proved by Segre, l. c., p. 91.

(**) Regular series were studied by Moreno in the paper referred to above.

where T_λ is the λth focal spread of T and S^λ is the λth tangent spread of S. If S is enclosed in T_i, S^i is enclosed in T, and conversely. For either of these conditions is equivalent to saying:

(a) that the directrices of S and their 1st,..., ith derivatives are all directrices of T.

Hence:

If the ith tangent spread of S is enclosed in T, S is enclosed in the ith focal spread of T.

If the ith focal spread of T encloses S, T encloses the ith tangent spread of S.

26. To say that S^i encloses T is equivalent to imposing the condition:

(b) that every directrix of T is linearly dependent on the directrices of S and their 1st,..., ith derivatives.

Dually, to say that S encloses T_i is equivalent to the condition:

(b') that every directrix of T, whose 1st,..., ith derivatives are all directrices of T, is a directrix of S.

Conditions (a) *and* (b) *together constitute a necessary and sufficient condition that T is the ith tangent spread of S.*

Conditions (a) *and* (b') *together constitute a necessary and sufficient condition that S is the ith focal spread of T.*

Conditions (a), (b) and (b') together constitute a necessary and sufficient condition that S and T are the first and last terms of a regular ascending series of $i+1$ terms.

27. If S^i and T have equal dimensionalities, either (a) or (b) is alone sufficient to make T the ith tangent spread of S.

If S and T_i have equal dimensionalities, either (a) or (b') is alone sufficient to make S the ith focal spread of T.

If S and S^i have the same dimensionalities as T_i and T, respectively, then any one of the three conditions (a), (b), (b') is alone sufficient to make S and T the first and last terms of a regular ascending series of $i+1$ terms.

The tree determined by a spread.

28. If we take the ith tangent spread of the jth focal spread of the kth tangent spread, etc., of a given spread S, and let i, j, k, etc., vary in all possible ways, we shall obtain a finite number of distinct spreads derived from S.

This system of spreads, together with S itself, we call the *tree* determined by S. It includes the ascending series G and the descending series H determined by S, the various *descending branch series* determined by the spreads of G, the *ascending branch series* determined by the spreads of H, the secondary branch series determined by the spreads of the latter, and so on.

In the study of the projective differential properties of spreads generated by a single infinity of flats, it is clear that the structure of the trees determined by them is of fundamental importance. Hence we shall try to investigate the morphology of these trees.

29. Let S^λ denote the λth tangent spread of S, $S^{\lambda\mu}$ the μth focal spread of S^λ, $S^{\lambda\mu\nu}$ the νth tangent spread of $S^{\lambda\mu}$, etc.; similarly, let S_α denote the αth focal spread of S, $S_{\alpha\beta}$ the βth tangent spread of S_α, etc.; further, let $S^{0\mu} = S_\mu$, $S_{0\beta} = S^\beta$, $S_{\alpha 0} = S_\alpha$(*), etc. It is clear that if a spread S encloses a spread T, $S^{\lambda\mu\nu}$ will enclose $T^{\lambda\mu\nu}$, $S_{\alpha\beta\gamma}$ will enclose $T_{\alpha\beta\gamma}$, and indeed, *every spread of the tree determined by S will enclose the corresponding spread of the tree determined by T.*

30. It has been shown in § 17 that S $(= S_{00})$ encloses $S_{1,0}$ and $S_{1,1}$ and that $S_{1,0}$ encloses $S_{2,0}$ and $S_{2,1}$. By the remark just made $S_{1,1}$, the tangent spread of $S_{1,0}$, encloses $S_{2,2}$, the tangent spread of $S_{2,1}$. Hence S_{00} encloses all the spreads $S_{1,0}$, $S_{1,1}$, $S_{2,0}$, $S_{2,1}$, and $S_{2,2}$. Similarly S_{01} encloses $S_{1,2}$ and $S_{2,3}$, besides all the others just mentioned.

By an easy generalization and the use of duality it follows that

$S_{\lambda\mu}$ encloses every spread S_{ij} for which the conditions $\lambda \leqq i$ and $\lambda - \mu \leqq i - j$ are satisfied, and that S encloses every spread S_{ij} for which $j \leqq i$. In particular, S_{ij} encloses every spread $S_{i+k,j+k}$ $(k > 0)$, S_{ii} encloses every spread $S_{i+k,i+k}$, and S *encloses every spread* S_{ii}.

$S^{\lambda\mu}$ is enclosed in every spread S^{ij} for which the conditions $\lambda \leqq i$ and $\lambda - \mu \leqq i - j$ are satisfied, and that S is enclosed in every spread S^{ij} for which $j \leqq i$. In particular, S^{ij} is enclosed in every spread $S^{i+k,j+k}$ $(k > 0)$, S^{ii} is enclosed in every spread $S^{i+k,i+k}$, and S *is enclosed in every spread* S^{ii}.

(*) Where there is any danger of confusion, we shall use the symbol $S_{\alpha 0}$ for the αth focal spread of S and reserve S_α for a spread of dimensionality α.

The ith special enclosed (enclosing) spread.

31. In view of the last clause we define

the *ith special enclosed spread* of a given spread S as the ith tangent spread S_{ii} of the ith focal spread of S. | the *ith special enclosing spread* of a given spread S as the ith focal spread S^{ii} of the ith tangent spread of S.

If S coincides with its ith special enclosed (enclosing) spread, it evidently coincides with every intermediate special enclosed (enclosing) spread.

32. It is also easy to see that if the conditions $\lambda \leqq i$, $\lambda - \mu \leqq i - j$, $\lambda - \mu + \nu \leqq i - j + k$ are satisfied, then

$S_{\lambda\mu\nu}$ will enclose S_{ijk}, | $S^{\lambda\mu\nu}$ will be enclosed in S^{ijk}.

Putting $\lambda = k = 0$ in the left-hand theorem, we find that if $\nu - \mu \leqq i - j$, $S^{\mu\nu}$ will enclose S_{ij}. Again, if $\mu \geqq j - i$ and $\mu - \nu \geqq j - i - k$, then

$S^{\mu\nu}$ will enclose S_{ijk}, | $S_{\mu\nu}$ will be enclosed in S^{ijk}.

33. As a special case of the last theorem we see that $S^{i,i+j}$, which is the same as $(S^{ii})_j$, always encloses $S_{j,j+i,j+i}$, and that $S_{j,j+i}$, which is the same as $(S_{jj})^i$, is always enclosed in $S^{i,i+j,i+j}$. Hence:

The jth focal spread of the ith special enclosing spread of S encloses the $(i+j)$th special enclosing spread of the jth focal spread of S. | The ith tangent spread of the jth special enclosed spread of S is enclosed in the $(i+j)$th special enclosed spread of the ith tangent spread of S.

In other words $S^{i,i+j}$ and $S_{j,j+i}$ are so related that the $(i+j)$th tangent spread of the first encloses the second, and dually the first encloses the $(i+j)$th focal spread of the second.

The equations of the second tangent spread.

34. Returning to the spread $S = S^r_m$, as defined in §§ 1-18, we easily see that its second tangent spread is given by the symbolic equation

$$S^2 = S_{m+r+s} = [A_i,\ A'_i,\ A''_i\ (i = 1, \ldots, m)], \tag{11}$$

where all of the directrices A_i, r of the directrices A'_i, and s of the directrices A''_i are independent; the $3m$ fundamental directrices are connected by the $m-r$ relations (5), by $m-r$ relations obtained from (5) by differentiation as to ω, and by $r-s$ additional relations due to the fact (if $r>s$) that $S^1=S^s_{m+r}$ is of lower range than S^r_m. In a similar manner we can write the equations of the third and higher tangent spreads of S^r_m. If the jth tangent spread is of range zero, the $(j+1)$st derivatives of all the directrices A_i are linearly dependent on the derivatives of lower order and on the directrices A_i themselves.

The equations of the second focal spread.

35. To find the equations of the second and higher *focal* spreads of S^r_m is more difficult. The duality between tangent spreads and focal spreads applies only to the geometrical results and not to the analytical methods we are employing. We could, to be sure, give a dualistic interpretation to our coordinates, letting A_{ij} $(j=1,\ldots,n)$ be the coordinates of an $n-2$ flat instead of a point, and so express all our pairs of correlative theorems in the same analytic form. The equations of the second focal spread $S_{2,0}=S_{m-r-t}$ would then appear in a form similar to (11). But we shall need its equations in point coordinates, and we can find them by treating the equation (8) and the directrices L_k somewhat as the equation (2) and the directrices A_i were treated in §§ 15, 16.

36. To do this we consider the matrix

$$L=\left\|\begin{array}{ccc|c}
l_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots & l_{1m} & 0\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \cdot\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \cdot\\
l_{m-r,1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & l_{m-r,m} & 0\\
\hline
l'_{11}-h_{11} & \ldots\ldots\ldots & l'_{1m}-h_{1m} & L_1\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \cdot\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \cdot\\
l'_{m-r,1}-h_{m-r,1} & \ldots\ldots & l'_{m-r,m}-h_{m-r,m} & L_{m-r}
\end{array}\right\|$$

and let L be the matrix obtained from $\bar{L}$ by omitting the last column. The first $m-r$ rows of L form a matrix of rank $m-r$, as we saw in § 15, and

L itself is of rank $m-r+t$. Hence the range t of any spread S^t_{m-r}, whose fundamental directrices L_k are independent linear functions, satisfying (7) and (6), of a set of independent directrices A_i is equal to the rank of the matrix L minus the dimensionality of the spread.

37. The $2(m-r)$ rows of L are therefore connected by $m-r-t$ linearly independent relations of the form

$$\sum_{k=1}^{m-r} f_{jk}\,(l'_{ki}-h_{ki})+\sum_{k=1}^{m-r} g_{jk}\,l_{ki}=0\begin{pmatrix} i=1,\ldots,\ m; \\ j=1,\ldots,\ m-r-t\end{pmatrix}, \tag{12}$$

identities in ω, in which all the quantities involved are functions of ω. If we multiply (12) by A_i and take the summation for $i=1,\ldots,m$, we can then by means of (7) and (6) throw the result into the simple form

$$\sum_{k=1}^{m-r} f_{jk}\,L'_k+\sum_{k=1}^{m-r} g_{jk}\,L_k=0 \quad (j=1,\ldots,\ m-r-t), \tag{13}$$

which gives a set of independent linear relations between the fundamental directrices of S^t_{m-r} and their derivatives. Accordingly, by the principle of § 16, we see that the required independent directrices of the second focal spread S_{m-r-t} are

$$\sum_{k=1}^{m-r} f_{jk}\,L_k \quad (j=1,\ldots,\ m-r-t). \tag{14}$$

38. A somewhat different set of fundamental directrices, expressed as determinants, can be found as follows. The matrix $\bar{L}$ is of rank $m-r+t+1$, and all its non-vanishing determinants of order $m-r+t+1$ involve elements taken from the last column and are therefore linear homogeneous functions of $L_1,\ldots,L_{m-r}$. It is easy to see that these determinants represent directrices of S_{m-r-t} and that they are precisely sufficient to determine it, $m-r-t$ of them being independent.

A normal system of fundamental directrices.

39. In order to penetrate more deeply into the theory of the successive focal spreads of $S^r_m\ (=S)$ and of the ascending branch series determined by them, it will be necessary to throw the equations of S^r_m into a simple form by finding a *normal system of fundamental directrices.*

Let $t+1$ be the number of spreads in the complete descending series determined by S^r_m, the lowest term of which is of range zero (See § 23). We denote the spreads of the series by

$$S^r_m \, (= S^{r_t}_{m_t}), \quad S^{r_{t-1}}_{m_{t-1}}, \ldots, \; S^{r_1}_{m_1}, \; S^{r_0}_{m_0} \, (= S^0_{m_0} = F_{\nu_0 - 1}), \tag{15}$$

where

$$r_0 \, (=0) < r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_t \, (= r) \tag{16}$$

and

$$m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_t \, (= m). \tag{17}$$

$S^{r_i}_{m_i}$ is then the $(t-i)$th focal spread of S^r_m.

40. If $m_0 > 0$, $S^0_{m_0}$ is a fixed $m_0 - 1$ flat and is therefore determined by m_0 independent fixed points $C_1, \ldots, C_{m_0}$, which may be regarded as its fundamental directrices. Symbolically,

$$S^0_{m_0} = [C_1, \ldots, \; C_{m_0}]. \tag{18}$$

Since $S^0_{m_0}$ is the focal spread of $S^{r_1}_{m_1}$, the theorem of § 13 shows that $m_1 = m_0 + r_1$; and we can choose as independent directrices of $S^{r_1}_{m_1}$ the m_0 fixed points determining $S^0_{m_0}$ and r_1 curves, which we denote by $A_1, \ldots, A_{r_1}$, Thus we have

$$S^{r_1}_{m_1} = [C_1, \ldots, \; C_{m_0}; \quad A_1, \ldots, \; A_{r_1}]. \tag{19}$$

If $m_0 = 0$, the fixed points C_λ are absent and $S^{r_1}_{m_1}$ is determined by the directrices A_λ alone.

41. Since the tangent spread $S_{m_1+r_1}$ of $S^{r_1}_{m_1}$ is determined by the directrices of $S^{r_1}_{m_1}$ and their derivatives and since the derivative of C_λ coincides with C_λ, we have (denoting derivatives by upper indices)

$$S_{m_1+r_1} = [C_\lambda \, (\lambda = 1, \ldots, \; m_0); \; A_\mu, \; A^1_\mu \, (\mu = 1, \ldots, \; r_1)]. \tag{20}$$

But the number of directrices indicated in this equation, namely $m_0 + 2r_1 = m_1 + r_1$, is exactly equal to the dimensionality of the spread; hence they are all independent. Assuming $t > 1$, we have the equations $m_2 = m_1 + r_2 = m_0 + r_1 + r_2$, $r_2 \geqq r_1$; and $S_{m_1+r_1}$ is the first special enclosed spread of $S^{r_2}_{m_2}$. Therefore $S^{r_2}_{m_2}$ is determined by the directrices of $S_{m_1+r_1}$ together with $r_2 - r_1$ additional independent directrices (if $r_2 > r_1$), which we denote by $A^1_{r_1+1}, \ldots, \; A^1_{r_2}$. We write these with upper indices, not because they are the derivatives of other curves with which we are concerned, but merely for the sake of simplicity in the statement of later theorems (See §§ 68-93). Symbolically, we have

$$S_{m_2}^{r_2} = [C_\lambda\,(\lambda = 1,\ldots,\, m_0);\; A_{\mu_1}\,(\mu_1 = 1,\ldots,\, r_1);\; A_{\mu_2}^1\,(\mu_2 = 1,\ldots,\, r_2)]. \qquad (21)$$

If $r_2 = r_1$, $S_{m_2}^{r_2}$ coincides with its first special enclosed spread $S_{m_1+r_1}$ and forms with its first focal spread $S_{m_1}^{r_1}$ a regular series.

42. Ascending further to the tangent spread $S_{m_2+r_2}$ of $S_{m_2}^{r_2}$, which is determined by the directrices indicated in (21) and their derivatives, we find that these derivatives include exactly r_2 additional directrices, namely

$$A_{\mu_2}^2(\mu_2 = 1,\ldots,\, r_2), \qquad (22)$$

which are therefore independent of each other and of the rest. But the tangent spread of $S_{m_1+r_1}$ is similarly determined by adjoining to $S_{m_1+r_1}$ the r_1 additional directrices A_μ^2 $(\mu_1 = 1,\ldots,\, r_1)$; and the latter are independent, being included among the directrices (22). Hence $S_{m_1+r_1}$ is of range r_1 and its tangent spread is an $S_{m_1+2r_1}$; that is, $S_{m_1}^{r_1}$ and $S_{m_1+r_1}^{r_1}$ form a regular series, whether $r_2 = r_1$ or $r_2 > r_1$. Assuming $t > 2$, $S_{m_2+r_2}$ and $S_{m_1+2r_1}$ are the first and second special enclosed spreads, respectively, of $S_{m_3}^{r_3}$. As independent directrices of the latter spread we choose those already found for $S_{m_2+r_2}$ together with $r_3 - r_2$ additional curves (if $r_3 > r_2$), which we denote by

$$A_\mu^2\,(\mu = r_2 + 1,\ldots,\, r_3),$$

and so obtain the symbolic equation

$$S_{m_3}^{r_3} = [C_\lambda\,(\lambda = 1,\ldots,\, m_0);\; A_{\mu_1},\; A_{\mu_2}^1,\; A_{\mu_3}^2\,(\mu_\nu = 1,\ldots,\, r_\nu;\; \nu = 1,\, 2,\, 3)]. \qquad (23)$$

Hence $m_3 = m_0 + r_1 + r_2 + r_3$.

43. Continuing as before, we easily see that $S_{m_2+r_2}$ is of range r_2 and $S_{m_1+2r_1}$ of range r_1. It follows that $S_{m_2}^{r_2}$ and its tangent spread $S_{m_2+r_2}^{r_2}$ form a regular series of two terms, and that $S_{m_1}^{r_1}$ and its first and second tangent spreads $S_{m_1+r_1}^{r_1}$ and $S_{m_1+2r_1}^{r_1}$ form a regular series of three terms. If $r_3 = r_2 = r_1$, $S_{m_3}^{r_3}$ coincides with its first and second special enclosed spreads, and forms a regular series with its first and second focal spreads.

44. By means of a simple induction proof, which is here omitted, the preceding line of argument can evidently be continued until the original spread S_m^r is reached. Thus we find that any spread S_m^r $(= S)$, whose descending series of focal spreads is given by (15), is determined by a normal

system of independent directrices of the form

$$\left.\begin{array}{l} A_1^{t-1} \ldots A_{r_1}^{t-1} \ldots A_{r_2}^{t-1} \ldots\ldots\ldots A_{r_{t-1}}^{t-1} \ldots A_{r_t}^{t-1} \\ A_1^{t-2} \ldots A_{r_1}^{t-2} \ldots A_{r_2}^{t-2} \ldots\ldots\ldots A_{r_{t-1}}^{t-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1^1 \ldots A_{r_1}^1 \ldots A_{r_2}^1 \\ A_1 \ldots A_{r_1} \\ C_1 \ldots\ldots\ldots C_{m_0}, \end{array}\right\} \tag{24}$$

The $(t-i)$th focal spread $S_{m_i}^{r_i}$ of S is determined by the directrices whose symbols are written in the $i+1$ bottom rows of this array, and is therefore given by the symbolic equation

$$S_{t-i} = S_{m_i}^{r_i} = [C_\lambda (\lambda = 1, \ldots, m_0);\ A_{\mu_\nu}^{\nu-1} (\mu_\nu = 1, \ldots, r_\nu;\ \nu = 1, \ldots, i)] \quad (0 \leqq i \leqq t), \tag{25}$$

where $A_{\mu_1}^0 = A_{\mu_1}$, and where

$$m_i = m_{i-1} + r_i = m_0 + r_1 + \cdots + r_i \qquad (i = 1, \ldots, t), \tag{26}$$

$$m = m_{t-1} + r = m_0 + r_1 + \cdots + r_t, \tag{27}$$

and

$$m + r \leqq n. \tag{28}$$

The equations (18), (19), (21), and (23) are special cases of (25), and the equation of S_m^r itself is another special case, in which $i = t$.

45. When we ascend from $S_{m_i}^{r_i}$ to its first $t-i$ successive tangent spreads, we merely adjoin to its fundamental directrices their successive derivatives, which are confined to the r_i left-hand columns of the array (24). Thus we find that the jth tangent spread of $S_{m_i}^{r_i}$ $(j \leqq t-i)$ is of range r_i and is given by the equation

$$\left.\begin{array}{r} S_{t-i,j} = S_{m_i+jr_i}^{r_i} = [C_\lambda (\lambda = 1, \ldots, m_0);\ A_{\mu_\nu}^{\nu-1} (\mu_\nu = 1, \ldots, r_\nu;\ \nu = 1, \ldots, i); \\ A_\mu^{\nu-1} (\mu = 1, \ldots, r_i;\ \nu = i+1, \ldots, i+j)]. \end{array}\right\} \tag{29}$$

That is, its fundamental directrices are those contained in a rectangle situated in the lower left-hand corner of the array (24) and having r_i columns and $i+j+1$ rows, including, however, the entire bottom row.

In particular, putting $j = t - i$, we obtain the $(t-i)$-th special enclosed spread $S_{t-i,t-i}$ of S, and we see that its determining directrices are simply all those contained in the r_i left-hand columns of the array, again including the entire bottom row.

46. The tangent spread S_{m+r} of S_m^r is obtained by adjoining to the array (24) an additional row at the top, consisting of the directrices of the tth order $A_1^t, \ldots, A_r^t$. The $m+r$ directrices of the augmented array so formed are all independent.

Similarly, the tangent spread $S_{t-i,t-i+1}$ of the $(t-i)$-th special enclosed spread of S_m^r is determined by the r_i left-hand columns of the augmented array, and is therefore not itself enclosed in S_m^r, unless $r_i = 0$ (Cf. § 30).

Dually, the focal spread $S^{i,i+1}$ of the ith special enclosing spread S^{ii} of a given spread S does not itself enclose S, unless the range of S^{ii} is zero.

General theorems.

47. By the use of the normal system of directrices just explained (§§ 39-46) we can immediately derive the following theorems (§§ 47-49).

The focal spread S_{10} of a given spread S is also the focal spread of its own tangent spread S_{11}. That is, *a focal spread and its tangent spread are of the same range*. Hence *a given spread and its first special enclosed spread have the same focal spread.*

The tangent spread S^{10} of a given spread S is also the tangent spread of its own focal spread S^{11}. That is, *a tangent spread and its focal spread are of the same range*. Hence *a given spread and its first special enclosing spread have the same tangent spread.*

48. The ith focal spread S_{i0} of a given spread S is also the jth focal spread of its own jth tangent spread, provided $j \leqq i$.

The ith tangent spread S^{i0} of a given spread S is also the jth tangent spread of its own jth focal spread, provided $j \leqq i$.

An ith focal (tangent) spread and its 1st, 2nd, ..., ith tangent (focal) spreads are all of the same range. A given spread and its ith special enclosed (enclosing) spread have the same ith focal (tangent) spread.

49. *The last spread of a descending (ascending) series G of $i+1$ terms determines an ascending (descending) series whose first $i+1$ terms form a regular series H.* If G is itself regular, it coincides with H. If the last j terms

of G are all of the same range, they are common to G and H. If any term of G is of lower range than the preceding term, it is the starting-point of a regular ascending (descending) *branch series.*

Hence a descending (ascending) series has as many distinct ascending (descending) branch series, all regular, as there are reductions in range in its pairs of successive terms.

If a regular descending (ascending) series of i spreads is continued downward (upward) by a spread S of lower range than the rest, S determines a regular ascending (descending) branch series of $i+1$ spreads.

Spreads whose successive focal spreads are of given range.

50. Given a set of positive integers r_i, m_i, n and t, satisfying the conditions (16), (26), (27) and (28), it is always possible to find in $(n-1)$ dimensional space an infinite number of spreads S_m^r each having a descending series of $t+1$ focal spreads of the form (15) (*). For we have only to choose the directrices $A_1, \ldots, A_{r_1}$ arbitrarily, except that they and their 1st,..., tth derivatives are independent, then to choose the next set of directrices $A^1_{r_1+1}, \ldots, A^1_{r_2}$ arbitrarily, except that they and their 1st,..., $(t-1)$-st derivatives are independent of each other and of the preceding directrices and their 1st,..., tth derivatives, and so on. But the total number $m+r$ of directrices and derivatives so obtained is not greater than n; so their independence is always obtainable. Hence S_m^r can always be found and its determination depends on the choice of r arbitrary directrices.

Dually, it is always possible to find an infinite number of spreads each having an *ascending* series of tangent spreads of given range.

Spreads having a given ith focal spread.

51. On the other hand, the question whether it is always possible to find a spread having a given spread as its focal (or tangent) spread is to be answered in the negative. For if a given spread S_m^r is a focal spread, its

(*) Cf. Segre, l. c., page 91.

normal directrices together with the first and also the second derivatives of those of highest order must form an independent system, and this condition is not always satisfied. If it is satisfied, S_m^r is the focal spread of its own tangent spread S_{m+r}^r and also, if $m+2r' \leqq n$, of an infinite number of spreads $S_{m+r'}^{r'}$ of range $r' > r$. The determination of the latter depends on the choice of $r'-r$ directrices, which are arbitrary except that they and their first derivatives are independent of one another and of the directrices of the 2nd tangent spread S_{m+2r} of S_m^r.

Similar results hold for the more general case in which S_m^r is an ith focal spread.

52. Hence *a necessary and sufficient condition that a given spread S_m, of range r, is an ith focal spread is that its ith tangent spread be also of range r*, that is, be an S_{m+ir}^r. When this condition is satisfied, S_m^r is the ith focal spread of only one spread of the minimum dimensionality $m+ir$, namely S_{m+ir}^r itself, and of an infinite number of spreads of higher dimensionality m', and therefore of higher range r' (provided $m'+r' \leqq n$), the determination of which depends on the choice of $r'-r$ arbitrary directrices.

Dually, *a necessary and sufficient condition that a given spread S_m of range r is an ith tangent spread is that its ith focal spread be also of range r*, that is, be an S_{m-ir}^r. When this condition is satisfied, S_m^r is the ith tangent spread of only one spread of the maximum dimensionality $m-ir$, namely S_{m-ir}^r itself, and of an infinite number of spreads of lower dimensionality m', and therefore of higher range r', provided $m'-r' \geqq 0$.

PART II.

Advanced Theory, Including a Study of the Relations between Ascending and Descending Branch Series.

53. We now proceed to derive the parametric equations of the spreads $S^{\lambda\mu}$ belonging to the various descending branch series determined by the tangent spreads of S. They will help us to discover some of the relations which exist between the spreads $S^{\lambda\mu}$ on the one hand and the spreads $S_{\alpha\beta}$ on the other,

and also to gain additional information about the spreads $S^{\lambda\mu\nu}$ and $S_{\alpha\beta\gamma}$. We shall assume throughout that the equations of S are expressed in terms of the normal system of independent directrices (24).

54. It is obvious that a system of fundamental directrices of S^i is obtained by adjoining to the array (24) i additional rows at the top, containing the 1st, 2nd,..., and ith derivatives of the directrices in the upper row. The directrices of the augmented array so obtained are not necessarily independent, unless $i = 1$ (See § 46). They are independent, if S^{i-1} is of the same range as S; while if S^{i-1} is of lower range than S, the fundamental directrices of S^i are connected by certain identical linear relations. In terms of the coefficients involved in these relations we can write, as we shall see, the equations of the successive focal spreads of S^{i-1}.

Since the treatment of the general case is somewhat complicated by reason of the numerous suffixes that seem to be required, it will tend to clarify the general line of argument, if we give a preliminary discussion of a special case.

Illustrative example, §§ 55-67.

55. Let S be a six-dimensional spread (generated by ∞^1 5-flats) of range 3, whose first and second focal spreads are of ranges 2 and 1, respectively, and whose first and second tangent spreads are of ranges 3 and 2, respectively. In the notation of §§ 39-45, $t = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = r = 3$, $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = m = 6$. Hence

$$S = S_6^3 = [A_1;\ A_1^1,\ A_2^1;\ A_1^2,\ A_2^2,\ A_3^2], \tag{30}$$

and its normal directrices are those indicated in the three bottom rows of the array

$$\left.\begin{array}{ccc} A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^1 & A_2^1 & \\ A_1\,. & & \end{array}\right\} \tag{31}$$

Then

$$S_{1,0} = S_3^2 = [A_1;\ A_1^1,\ A_2^1] \quad \text{and} \quad S_{2,0} = S_1^1 = [A_1]. \tag{32}$$

Moreover

$$\left.\begin{aligned} S^{1,0} &= S_9^3 = [A_1\,;\ A_1^1,\ A_2^1;\ A_\lambda^2,\ A_\lambda^3\,(\lambda = 1,\ 2,\ 3)],\\ S^{2,0} &= S_{12}^2 = [A_1\,;\ A_1^1,\ A_2^1;\ A_\lambda^2,\ A_\lambda^3,\ A_\lambda^4\,(\lambda = 1,\ 2,\ 3)],\\ S^{3,0} &= S_{14} = [A_1;\ A_1^1,\ A_2^1;\ A_\lambda^2,\ A_\lambda^3,\ A_\lambda^4,\ A_\lambda^5\,(\lambda = 1,\ 2,\ 3)]. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

The twelve fundamental directrices of S_{12}^2 are those written in the five bottom rows of the array (31) and are independent, while the fifteen fundamental directrices of S_{14} are those of the entire array and are connected by one linear relation.

The dimensionality $n-1$ of the fundamental flat F_{n-1} within which S is enclosed must be at least equal to 13; if it equals 13, S_{14} is of range zero and coincides with F_{n-1}.

Transformation of the linear relation.

56. The linear relation just mentioned we write in the form

$$\Sigma\, h_{0\lambda}\, A_\lambda^5 + \Sigma\, h_{1\lambda}\, A_\lambda^4 + \Sigma\, h_{2\lambda}\, A_\lambda^3 + \Sigma\, h_{3\lambda}\, A_\lambda^2 + (h_{41}\, A_1^1 + h_{42}\, A_2^1) + h_{51}\, A_1 = 0, \tag{34}$$

where the summations hold for $\lambda = 1,\ 2,\ 3$. The coefficients $h_{\beta\lambda}$ as well as the quantities A_λ^δ are all functions of ω, and the equation is an identity in ω. Upper indices, as before, denote differentiation as to ω. Obviously the three leading coefficients h_{01}, h_{02}, h_{03} cannot all be identically zero.

It will be convenient for our purpose to transform that part of (34) which involves the second and higher derivatives, and write the equation in the form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^3}{d\omega^3}\Sigma\, l_{0\lambda}\, A_\lambda^2 + \frac{d^2}{d\omega^2}\Sigma\, l_{1\lambda}\, A_\lambda^2 + \frac{d}{d\omega}\,\Sigma\, l_{2\lambda}\, A_\lambda^2 + \Sigma\, l_{3\lambda}\, A_\lambda^2\\ &\qquad + (h_{41}\, A_1^1 + h_{42}\, A_2^1) + h_{51}\, A_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

57. We wish to show that this is always possible and to find the equations of transformation. That is, we wish to show that twelve quantities $l_{\rho\lambda}$, functions of ω, can always be found to satisfy the equation

$$\sum_{\rho=0}^{3}\left(\sum_{\lambda=1}^{3} l_{\rho\lambda}\, A_\lambda^2\right)^{3-\rho} \equiv \sum_{\beta=0}^{3}\ \sum_{\lambda=1}^{3} h_{\beta\lambda}\, A_\lambda^{5-\beta}, \tag{36}$$

which is an identity in the twelve quantities A^{δ}_{λ} $(\lambda = 1, 2, 3;\ \delta = 2, 3, 4, 5)$ as well as in ω.

The left-hand member, by means of LEIBNITZ's theorem on the derivatives of a product, becomes

$$\begin{aligned}\sum l_{0\lambda} A^{5}_{\lambda} + \binom{3}{1} \sum l^{1}_{0\lambda} A^{4}_{\lambda} + \binom{3}{2} \sum l^{2}_{0\lambda} A^{3}_{\lambda} + \sum l^{3}_{0\lambda} A^{2}_{\lambda} & \\ + \sum l_{1\lambda} A^{4}_{\lambda} + \binom{2}{1} \sum l^{1}_{1\lambda} A^{3}_{\lambda} + \sum l^{2}_{1\lambda} A^{2}_{\lambda} & \\ + \sum l_{2\lambda} A^{3}_{\lambda} + \sum l^{1}_{2\lambda} A^{2}_{\lambda} & \\ + \sum l_{3\lambda} A^{2}_{\lambda} . &\end{aligned}$$

Hence, by equating the coefficients of the quantities A^{δ}_{λ}, we derive the equations

$$\left.\begin{aligned} l_{0\lambda} \qquad\qquad\qquad\qquad & = h_{0\lambda} , \\ \binom{3}{1} l^{1}_{0\lambda} + l_{1\lambda} \qquad\qquad\quad & = h_{1\lambda} , \\ \binom{3}{2} l^{2}_{0\lambda} + \binom{2}{1} l^{1}_{1\lambda} + l_{2\lambda} \quad & = h_{2\lambda} , \\ l^{3}_{0\lambda} + l^{2}{}_{\lambda} + l^{1}_{2\lambda} + l_{3\lambda} & = h_{3\lambda} , \end{aligned} \quad (\lambda = 1, 2, 3) \right\} \tag{37}$$

which may be written compactly in the form

$$\sum_{\rho=0}^{\beta} \binom{3-\rho}{\beta-\rho} l^{\beta-\rho}_{\rho\lambda} = h_{\beta\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, 3;\ \beta = 0, 1, 2, 3). \tag{37'}$$

Regarding the quantities $l_{\rho\lambda}$ as unknown, we easily show that these equations, which are differential equations in form, but algebraic in essence, have one and only one solution, namely

$$\left.\begin{aligned} l_{0\lambda} & = h_{0\lambda} , \\ l_{1\lambda} & = -\binom{3}{1} h^{1}_{0\lambda} + h_{1\lambda} , \\ l_{2\lambda} & = \binom{3}{2} h^{2}_{0\lambda} - \binom{2}{1} h^{1}_{1\lambda} + h_{2\lambda} , \\ l_{3\lambda} & = - h^{3}_{0\lambda} + h^{2}_{1\lambda} - h^{1}_{2\lambda} + h_{3\lambda} , \end{aligned} \quad (\lambda = 1, 2, 3) \right\} \tag{38}$$

which can be written

$$l_{\rho\lambda} = \sum_{\gamma=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\gamma} \binom{3-\gamma}{\rho-\gamma} h_{\gamma\lambda}^{\rho-\gamma} \qquad (\lambda = 1, 2, 3;\ \rho = 0, 1, 2, 3). \tag{38'}$$

58. We wish to verify this fact by a method which is sufficiently general to apply without essential change to the general case to be considered later (§ 75), and which will make a restatement of the argument unnecessary at that point.

Taking the $(\beta-\rho)$-th derivative of both sides of (38') and substituting the value of $l_{\rho\lambda}^{\beta-\rho}$ so found in (37'), we obtain

$$h_{\beta\lambda} = \sum_{\rho=0}^{\beta} \sum_{\gamma=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\gamma} \binom{3-\gamma}{\rho-\gamma} \binom{3-\rho}{\beta-\rho} h_{\gamma\lambda}^{\beta-\gamma} \qquad (\lambda = 1, 2, 3;\ \beta = 0, 1, 2, 3). \tag{39}$$

Here $\rho \geqq \gamma$, and when $\rho = \gamma$, γ varies from zero to β; hence we can rearrange the terms and write (39) in the form

$$h_{\beta\lambda} = \sum_{\gamma=0}^{\beta} \left[\sum_{\rho=\gamma}^{\beta} (-1)^{\rho-\gamma} \binom{3-\gamma}{\rho-\gamma} \binom{3-\rho}{\beta-\rho} \right] h_{\gamma\lambda}^{\beta-\gamma}. \tag{40}$$

But (40) is identically true, because by a well-known combinatory formula (*) the coefficient of $h_{\gamma\lambda}^{\beta-\gamma}$ in the right-hand member vanishes, except when $\gamma = \beta$.

Consequently the equations (38') constitute a solution (and evidently the only one) of the equations (37'), and therefore also of the equation (36); and by their means every linear relation (34) can be written in the form (35).

The successive focal spreads of $S^{2,0}$.

59. We now introduce three auxiliary quantities

$$\left.\begin{aligned} L_{22} &= (\Sigma\, l_{0\lambda} A_\lambda^2)^2 + (\Sigma\, l_{1\lambda} A_\lambda^2)^1 + \Sigma\, l_{2\lambda} A_\lambda^2, \\ L_{12} &= (\Sigma\, l_{0\lambda} A_\lambda^2)^1 + \Sigma\, l_{1\lambda} A_\lambda^2, \\ L_{02} &= \Sigma\, l_{0\lambda} A_\lambda^2, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

where the summations are again for $\lambda = 1, 2, 3$.

(*) See Netto, *Combinatorik* (1901), page 16, second formula, putting $n = 3 - \gamma$ and $m = \beta - \gamma$.

These will enable us to write the equations of the 1st, 2nd and 3rd focal spreads of $S^{2,0}$, whose dimensionalities and ranges, as determined by the theorems of §§ 48 and 49, are indicated by the notation $S^{2,1}=S^2_{10}$, $S^{2,2}=S^2_8$, $S^{2,3}=S_6$; the range of S_6 is undetermined, but must be $\leqq 2$.

We wish, namely, to prove that their equations are as follows ($S^{2,0}$ is included for the sake of completeness):

$$\left.\begin{aligned}
S^{2,0} &= S^2_{12} = [A_1\,,\ A^1_1\,,\ A^1_2;\ A^2_\lambda\,,\ A^3_\lambda\,,\ A^4_\lambda\ (\lambda=1,\ 2,\ 3)]\,,\\
S^{2,1} &= S^2_{10} = [A_1\,,\ A^1_1\,,\ A^1_2;\ A^2_\lambda\,,\ A^3_\lambda\ (\lambda=1,\ 2,\ 3);\ L^2_{02}]\,,\\
S^{2,2} &= S^2_8 = [A_1\,,\ A^1_1\,,\ A^1_2;\ A^2_\lambda\ (\lambda=1,\ 2,\ 3);\ L^1_{02}\,,\ L^1_{12}]\,,\\
S^{2,3} &= S_6 = [A_1\,,\ A^1_1\,,\ A^1_2;\ L_{02}\,,\ L_{12}\,,\ L_{22}].
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

60. *Proof.* Provisionally, let us denote the spreads defined by the 2nd, 3rd and 4th systems of curves of (42) by the symbols (42_2), (42_3) and (42_4). Their fundamental directrices, as so given, are independent, because the fundamental directrices of $S^{2,0}$ are independent, and the coefficients l_{01}, l_{02}, l_{03} cannot all vanish. Accordingly, the dimensionalities of (42_2), (42_3) and (42_4) are equal to 10, 8, and 6, respectively.

It will be sufficient, therefore, in view of the first theorem (right-hand) of § 27, to prove that the condition (a) of § 25 is satisfied in all three cases. Indeed, if it is satisfied in the case of the spread (42_4), it obviously will be in the other two cases. Hence we merely have to show that the fundamental directrices of (42_4) and their 1st, 2nd and 3rd derivatives are directrices of $S^{2,0}$. Part of this statement is immediately evident and the rest becomes so by means of the relation (35). For instance, L_{12} and L^1_{12} are directrices of $S^{2,0}$, because they involve no derivatives of the quantities A_λ higher than the 4th; while L^2_{12} is expressible, by means of (35), in terms of derivatives not higher than the 3rd; and L^3_{12}, therefore, is expressible in terms of derivatives not higher than the 4th. A similar argument holds for the other fundamental directrices of (42_4), and the proof is complete.

THE SUCCESSIVE TANGENT SPREADS OF $S_{1,0}$ AND OF $S_{2,0}$.

61. Since the entire tree determined by S is also determined by $S^{1,0}$ (although the corresponding spreads are not the same), therefore the ascending branch series determined by $S_{1,0}$, which is in this case the 2nd focal spread

of $S^{1,0}$, is regular for at least three terms. The first four terms of this series are given by the equations

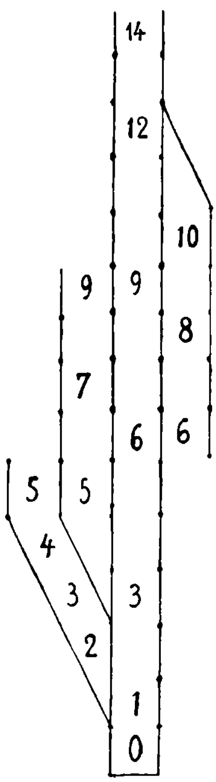
$$\left.\begin{aligned}
S_{1,0} &= S_3^2 = [A_1 ;\ A_\lambda^1\ (\lambda = 1,\ 2)]\,,\\
S_{1,1} &= S_5^2 = [A_1 ;\ A_\lambda^1,\ A_\lambda^2\ (\lambda = 1,\ 2)]\,,\\
S_{1,2} &= S_7^2 = [A_1 ;\ A_\lambda^1,\ A_\lambda^2,\ A_\lambda^3\ (\lambda = 1,\ 2)]\,,\\
S_{1,3} &= S_9 = [A_1 ;\ A_\lambda^1,\ A_\lambda^2,\ A_\lambda^3,\ A_\lambda^4\ (\lambda = 1,\ 2)]\,;
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

their fundamental directrices all lie in the first two columns of the array (31).

The range of $S_{1,3}$ may be 2 or 1, but not 0. For if it were 0, the directrices of the first two columns of (31) would be connected by two independent linear relations; whereas the directrices of the entire array are connected by only one relation, namely (35). Hence $S_{1,3}$ is of range 2, unless the condition

$$l_{03} = l_{13} = l_{23} = l_{33} = 0 \tag{44}$$

is satisfied, in which case it is of range 1.



62. Similarly, the ascending branch series determined by $S_{2,0}$ is regular for at least four terms, and its first five terms are given by the equations

$$\left.\begin{aligned}
S_{2,0} &= S_1^1 = [A_1]\,,\\
S_{2,1} &= S_2^1 = [A_1\,,\ A_1^1]\,,\\
S_{2,2} &= S_3^1 = [A_1\,,\ A_1^1\,,\ A_1^2]\,,\\
S_{2,3} &= S_4^1 = [A_1\,,\ A_1^1\,,\ A_1^2\,,\ A_1^3]\,,\\
S_{2,4} &= S_5 = [A_1\,,\ A_1^1\,,\ A_1^2\,,\ A_1^3\,,\ A_1^4]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

S_5 is of range 1, unless the identical relation (34) or (35) involves only the elements of the first column of (31), in which case it is of range 0.

63. We have now found all the spreads, seventeen in number, of the tree determined by S, so far as they can be found merely by the given definition (§ 55). Their dimensionalities are indicated schematically in the adjoining table. The remaining spreads of the tree depend for their number and distribution on the further specialization of S; but the amount of variation in the different distributions is narrowly restricted, as we shall see.

Connecting series.

64. Taking up the case in which (44) is satisfied and $S_{1,3}$ is of range 1 $(= S_9^1)$, we see that $S_{1,3}$ will then determine a secondary descending branch series of which the first four terms are regular. Their equations can obviously be obtained by the method just explained (§ 59) for the descending series determined by $S^{2,0}$, and are as follows:

$$\left.\begin{aligned} S_{1,3} &= S_9^1 = [A_1\,;\ A_\lambda^1,\ A_\lambda^2,\ A_\lambda^3,\ A_\lambda^4\ (\lambda = 1,\ 2)],\\ S_{1,3,1} &= S_8^1 = [A_1\,;\ A_\lambda^1,\ A_\lambda^2,\ A_\lambda^3\ (\lambda = 1,\ 2)\,;\ L_{02}^2],\\ S_{1,3,2} &= S_7^1 = [A_1\,;\ A_\lambda^1,\ A_\lambda^2\ (\lambda = 1,\ 2)\,;\ L_{02}^1,\ L_{12}^1],\\ S_{1,3,3} &= S_6^1 = [A_1\,;\ A_\lambda^1\ (\lambda = 1,\ 2)\,;\ L_{02},\ L_{12},\ L_{22}]. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

In the definition (41) of the quantities L_{02}, L_{12} and L_{22} involved in (42) and (46) it is to be observed that in view of (44) the summations can now be limited to $\lambda = 1,\ 2$.

Comparing (42) and (46) we discover the remarkable fact that $S^{2,3}$ coincides with $S_{1,3,3}$ and is therefore of range 1 $(= S_6^1)$. Hence $S^{2,3}$ and $S_{1,3}$ $(= S_9^1)$, which belong to the two distinct branch series (42) and (43), respectively, are in this case connected by still another series (46), which is regular and determined by both spreads, and which we may call their *connecting series*. Consequently $S^{2,3}$ is the the 3rd special enclosing spread of $S_{1,0}$ $(= S_3^2)$, and their common 3rd tangent spread is $S_{1,3}$; dually, $S_{1,3}$ is the 3rd special enclosed spread of $S^{2,0}$ $(= S_{12}^2)$, and their common 3rd focal spread is $S^{2,3}$.

65. If, however, $S_{1,3}$ is of range 2, the principle of duality shows that $S^{2,3}$ is also of range 2. Hence $S^{2,3}$, like $S_{1,3}$, may be of range 2 or 1, but not 0; and the two spreads are either both of range 2, or both of range 1.

To find additional terms of the three ascending series (33), (43) and (45), when the ranges of their respective spreads $S^{3,0}$, $S_{1,3}$ and $S_{2,4}$ are known, is a simple matter, requiring no further mention.

To find additional terms of the descending series (42) is more difficult and requires, in general, the use of the principle of § 16, somewhat as was done in §§ 36-38.

66. Thus, to find the equations of $S^{2,4}$, we are led to consider the

matrix

$$\bar{L} = \begin{array}{cccccc|c} A_1 & A_1^1 & A_2^1 & A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & \\ \end{array}$$

$$\bar{L} = \left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & A_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & A_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & l_{01} & l_{02} & l_{03} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{11} & l_{12} & l_{13} & -L_{02} \\ 0 & 0 & 0 & l_{21} & l_{22} & l_{23} & -L_{12} \\ h_{51} & h_{41} & h_{42} & l_{31} & l_{32} & l_{33} & -L_{22} \end{array} \right\|$$

and the partial matrix L formed by the first six columns of $\bar{L}$. Letting ρ be the range of $S^{2,3}$, we see that $4+\rho$ and $5+\rho$ are the ranks of the matrices L and $\bar{L}$, respectively. The non-vanishing determinants of order $5+\rho$ of $\bar{L}$ are directrices of $S^{2,4}$ and $5-\rho$ of them are independent; together with A_1 they form a system of fundamental directrices of $S^{2,4}$.

For instance, if $\rho = 2$, we easily find that

$$S^{2,4} = S_4 = [A_1\,,\; M_0\,,\; M_1\,,\; M_2]\,, \tag{47}$$

where

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= l_{03}\,L_{02} + (l_{03}\,l_{11} - l_{13}\,l_{01})\,A_1^1 + (l_{03}\,l_{12} - l_{13}\,l_{02})\,A_2^1\,, \\ M_1 &= l_{03}\,L_{12} + (l_{03}\,l_{21} - l_{23}\,l_{01})\,A_1^1 + (l_{03}\,l_{22} - l_{23}\,l_{02})\,A_2^1\,, \\ M_2 &= l_{03}\,L_{22} + (l_{03}\,l_{31} - l_{33}\,l_{01})\,A_1^1 + (l_{03}\,l_{32} - l_{33}\,l_{02})\,A_2^1\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Another transformation of the linear relation.

67. On the other hand, if $S^{2,3}$ is of range 1, we have also at our disposal an entirely different and more advantageous method of finding $S^{2,4}$ (in this case an S_5), in which the identical relation (34) is treated in a new way. We now write (34) in the form

$$\sum_{\rho=0}^{4} \left(\sum_{\lambda=1}^{2} b_{\rho\lambda}\, A_\lambda^1 \right)^{4-\rho} + h_{51}\, A_1 = 0 \tag{49}$$

instead of the form (35). That is, we employ the derivatives of linear homogeneous functions of A_1^1 and A_2^1 instead of the derivatives of linear homogeneous functions of A_1^2, A_2^2 and A_3^2. This is now possible, because the condition $h_{03} = h_{13} = h_{23} = h_{33} = 0$, which is equivalent to (44), is satisfied. The equations of transformation, analogous to (38), could easily be written. Introducing the quantities

$$B_{\nu 1} = \sum_{\varrho=0}^{\nu} \left(\sum_{\lambda=1}^{2} b_{\rho\lambda} A_\lambda^1 \right)^{\nu-\varrho} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{50}$$

we can now rewrite the equations of the spreads of the two descending series (42) and (46) by substituting for the quantities L_{02}, L_{12}, L_{22} and their derivatives the corresponding quantities B_{01}^1, B_{11}^1, B_{21}^1 and their derivatives. In particular, for their common spread we write

$$S^{2,3} = S_6^1 = [A_1,\ A_1^1,\ A_2^1;\ B_{01}^1,\ B_{11}^1,\ B_{21}^1]\,. \tag{51}$$

This method of choosing the fundamental directrices of $S^{2,3}$ immediately enables us to descend to the required spread

$$S^{2,4} = S_5 = [A_1;\ B_{01},\ B_{11},\ B_{21},\ B_{31}]\,. \tag{52}$$

By another application of the method of § 66 we could easily descend one step further to the spread $S^{2,5}$.

In the general discussion, to which we now return, we shall use a method which can be applied, according to circumstances, in any one of a number of ways, analogous to the two ways just described of writing the relation (34).

Ascending series and successive reductions in range.

68. As in §§ 53, 54 let S be the general spread S_m^r given by the directrices (24), § 44. Let the ascending series determined by S consist of the $u+1$ distinct spreads

$$S^{i,0} = S_{m_{t+i}}^{r_{t+i}} \qquad (i = 0,\ 1, \ldots,\ u),$$

the highest of which, $S^{u,0}$ $(= S_{m_{t+u}}^{r_{t+u}} = S_{m_{t+u}}^{0} = F_{m_{t+u}-1})$, is a fixed flat within which all the spreads of the tree determined by S are enclosed. We can obviously write

$$S^{i,0} = [S;\ A_\lambda^j\,(\lambda = 1, \ldots,\ r;\ j = t, \ldots,\ t+i-1)] \qquad (i = 1, \ldots,\ u), \tag{53}$$

where S denotes the system of curves (24). The conditions

$$r_{t+u} = 0, \quad r_{t+i} \leqq r_{t+i-1} \qquad (i = 1, \ldots, u), \tag{54}$$

$$m_{t+u} \leqq n, \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{t+i} &= m_{t+i-1} + r_{t+i-1} \\ &= m + r_t + r_{t+1} + \cdots + r_{t+i-1} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, u), \tag{56}$$

are evidently satisfied.

Let s_i denote the *reduction in range* that takes place in ascending from $S^{i-1,0}$ to $S^{i,0}$. Then the conditions

$$r_{t+i} = r_{t+i-1} - s_i \qquad (i = 1, \ldots, u), \tag{57}$$

$$r = s_1 + \cdots + s_u, \tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned} r_{t+i} &= r - (s_1 + \cdots + s_i) \\ &= s_{i+1} + \cdots + s_u \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, u-1), \tag{59}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{t+i} &= m + i\,r - \sum_{\delta=1}^{i-1} (i - \delta)\, s_\delta \\ &= m + i\,r_{t+i} + \sum_{\delta=1}^{i} \delta\, s_\delta \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, u), \tag{60}$$

$$m_{t+u} = m + \sum_{\delta=1}^{u} \delta\, s_\delta \tag{61}$$

are also satisfied.

The fundamental linear relations.

69. Since the range r_{t+1} of $S^{1,0}$ is s_1 units less than the range of S, the fundamental directrices of $S^{2,0}$ must be connected, if $s_1 > 0$, by s_1 independent linear relations, or differential equations, of the form

$$\sum_{\beta=0}^{t+1} \sum_{\lambda=1}^{r} h_{\beta\lambda\mu 1}\, A_\lambda^{t+1-\beta} + \sum_{\lambda=1}^{m_0} h_{\lambda\mu 1}\, C_\lambda = 0 \; (\mu = 1, \ldots, s_1). \tag{62}$$

In these and all similar equations every quantity A_λ^j not already defined in § 44 is assumed to have the value zero. That is, $A_\lambda^j = 0$, when $j < t-1$ and $\lambda > r_{j+1}$.

Since the left-hand members of the equations (62) are independent linear functions of $A_1^{t+1},\ldots,\ A_r^{t+1}$, the matrix of the coefficients of these quantities, namely

$$\| h_{0\lambda\mu 1} \| = \begin{Vmatrix} h_{0111} & . & . & . & h_{0r11} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ h_{01s_1 1} & . & . & . & h_{0rs_1 1} \end{Vmatrix},$$

must be of rank s_1 for general values of ω.

Ascending one step further, we find the fundamental directrices of $S^{3,0}$ connected by $2s_1+s_2$ independent linear relations, namely (a) the s_1 equations (62), (b) s_1 equations of the form

$$\sum_{\lambda=1}^{r} h_{0\lambda\mu 1} A_\lambda^{t+2} + \cdots = 0, \tag{63}$$

obtained from (62) by differentiation as to ω, and (c) s_2 additional equations (if $s_2>0$) of the form

$$\sum_{\beta=0}^{t+2} \sum_{\lambda=1}^{r} h_{\beta\lambda\mu 2} A_\lambda^{t+2-\beta} + \sum_{\lambda=1}^{m_0} h_{\lambda\mu 2}\, C_\lambda = 0 \;(\mu=1,\ldots,\ s_2). \tag{64}$$

Since the left-hand members of the s_1+s_2 equations (63), (64) are independent linear functions of $A_1^{t+2},\ldots,\ A_r^{t+2}$, the matrix

$$\begin{Vmatrix} h_{0\lambda\mu 1} \\ h_{0\lambda\mu 2} \end{Vmatrix},$$

whose elements are the coefficients of $A_1^{t+2},\ldots,\ A_r^{t+2}$ in these equations, must be of rank s_1+s_2.

70. Continuing in this way, we see that the fundamental directrices of $S^{i+1,0}$, $m+(i+1)r$ in number, are connected by $\sum_{\delta=1}^{i}(i-\delta+1)s_\delta$ independent linear relations, of which the following:

$$\sum_{\beta=0}^{t+\varepsilon} \sum_{\lambda=1}^{r} h_{\beta\lambda\mu\varepsilon} A_\lambda^{t+\varepsilon-\beta} + \sum_{\lambda=1}^{m_0} h_{\lambda\mu\varepsilon}\, C_\lambda = 0 \;(\mu=1,\ldots,\ s_\varepsilon;\ \varepsilon=1,\ldots,\ i), \tag{65}$$

$s_1+\ldots+s_i$ in number, may be regarded as *fundamental*, and the rest are obtained from them by differentiation as to ω. The matrix

$$\begin{Vmatrix} h_{0\lambda\mu 1} \\ . \\ . \\ . \\ h_{0\lambda\mu i} \end{Vmatrix},$$

whose elements are the coefficients of the highest derivatives of the quantities A_λ in the equations (65), and which has r columns and $s_1 + \cdots + s_i$ rows, is evidently of rank $s_1 + \cdots + s_i$.

The relations (62) and (64) are included among the relations (65), and correspond to the values $\varepsilon = 1$ and $\varepsilon = 2$. Putting $i = u$ in (65), we obtain the complete set of fundamental relations, $s_1 + \cdots + s_u$ $(= r)$ in number, in virtue of which $S^{u+1,0}$ coincides with $S^{u,0}$ and is of range zero.

Ascending branch series and successive reductions in range.

71. We next consider the ascending series determined by S_{jj}, whose range is r_{t-j} and whose equation was found in § 45. For its ith tangent spread we have the equation

$$S_{j,j+i} = [S_{jj};\ A^j_\lambda\,(\lambda = 1,\ldots,\ r_{t-j};\ j = t,\ldots,\ t+i-1)]. \tag{66}$$

Let the successive reductions in range at the different steps of the ascent from S_{jj} to $S_{j,j+i}$ be $s_{1j},\ldots,\ s_{ij}$; then the range of $S_{j,j+i}$ will be

$$r_{t-j} - (s_{1j} + \cdots + s_{ij}), \tag{67}$$

and the inequality

$$s_{1j} + \cdots + s_{ij} \leqq r_{t-j} \tag{68}$$

must hold.

72. Every reduction in range indicates the existence of one or more identical relations among the fundamental directrices of $S_{j,j+i+1}$; every such relation is a relation among the fundamental directrices of S^{i+1}, and so must be linearly dependent on the relations (65) and their derivative relations. Among those which involve $A_1^{t+i},\ldots,\ A_{r_{t-j}}^{t+i}$ the number of independent relations is $s_{1j} + \cdots + s_{ij}$; hence

$$s_{1j} + \cdots + s_{ij} \leqq s_1 + \cdots + s_i \qquad (i = 1,\ldots,\ u). \tag{69}$$

This theorem and its correlative may be stated as follows.

In ascending from the jth special enclosed spread S_{jj} of a given spread S to its ith tangent spread $S_{j,j+i}$ the resulting reduction in range cannot be greater than that which takes place in ascending from S to its ith tangent spread S^{i0}.

In descending from the ith special enclosing spread S^{ii} of a given spread S to its jth focal spread $S^{i,i+j}$ the resulting reduction in range cannot be greater than that which takes place in descending from S to its jth focal spread $S_{j,0}$.

It is to be observed that although $s_{1j} \leqq s_1$, $s_{\varepsilon j}$ $(\varepsilon > 1)$ is not necessarily $\leqq s_\varepsilon$.

The minimum range of $S_{j,j+i}$ and $S^{i,i+j}$.

73. Comparing (59), (67) and (69), we see that the range of $S_{j,j+i}$ cannot be less than $r_{t+i}+r_{t-j}-r\,(=r')$. If $r'>0$, this is an actual restriction on the range of $S_{j,j+i}$; and the special case in which its range is equal to r' exists and is characterized by the equation $s_{1j}+\cdots+s_{ij}=s_1+\cdots+s_i$. This case is obviously the one in which the relations (65) involve only the fundamental directrices of $S_{j,j+i+1}$, and in which, therefore, the equations $s_{\varepsilon j}=s_\varepsilon$ $(\varepsilon=1,\ldots,i)$ all hold. Hence:

If the total reduction in range is the same in ascending from S_{jj} to $S_{j,j+i}$ and from S to S^i, the partial reductions are the same for each step of the ascent.

If the total reduction in range is the same in descending from S^{ii} to $S^{i,i+j}$ and from S to S_j, the partial reductions are the same for each step of the descent.

The following theorem has now been proved: *If a spread S, its ith tangent spread S^{i0} and its jth focal spread S_{j0} are of ranges r, r_{t+i} and r_{t-j}, respectively, where $r_{t+i}+r_{t-j}-r\geqq 0$, then the minimum value of the range of $S_{j,j+i}$, and also of $S^{i,i+j}$, is $r_{t+i}+r_{t-j}-r$;*

and if $S_{j,j+i}$ has its minimum range, each of the spreads $S_{j,j+1},\ldots,S_{j,j+i-1}$ has also its minimum range.

and if $S^{i,i+j}$ has its minimum range, each of the spreads $S^{i,i+1},\ldots,S^{i,i+j-1}$ has also its minimum range.

The choice of the fundamental relations.

74. We shall assume that the fundamental relations (65) have been selected as follows:

First choose a set of independent relations (if any exist), which, together with their derivative relations, fix the linear dependence of the fundamental directrices of $S_{t-1,t+i}$, and which, therefore, involve only the quantities in first r_1 columns of (24) and their derivatives; then choose a set of additional relations, independent of those already chosen and of each other, which, together with those already chosen and their derivative relations, fix the linear dependence of the fundamental directrices of $S_{t-2,t+i-1}$; and continue this process until the complete set of relations is obtained. Number them in such a way that those which involve only the fundamental directrices of $S_{j,j+i+1}$ are obtained, for every value of j from 1 to $t-1$, by giving to μ, in (65), the values $1,2,\ldots, s_{\varepsilon j}$ $(\varepsilon=1,\ldots, i)$.

The transformation of the fundamental relations.

75. We now proceed to find the directrices of the successive focal spreads of $S^{i,0}$ and of $S_{j,j+i}$ $(j=1,\ldots, t-1)$, in each case employing the corresponding part of the relations (65).

Following the method used in the special case (§§ 56-58), we first transform the equations (65) and write them in the form

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{\varrho=0}^{t+\varepsilon-\sigma}\left(\sum_{\lambda=1}^{r} l_{\rho\lambda\mu\varepsilon\sigma} A_{\lambda}^{\varrho}\right)^{t+\varepsilon-\sigma-\rho}+f_{\mu\varepsilon\sigma}(A,\ C)=0 \\ (\mu=1,\ldots, s_{\varepsilon};\ \varepsilon=1,\ldots, i),\end{array}\right\} \tag{70}$$

where σ is a fixed non-negative integer to be chosen as small as the conditions of the particular case will allow, and $f_{\mu\varepsilon\sigma}(A,\ C)$ denotes a linear homogeneous function of the quantities A_{λ}^{i} and C_{λ} involving no derivatives of A_{λ} higher than the $(\sigma-1)$-st. Evidently σ can always be chosen $\leqq t-1$.

The transformation can always be accomplished and the new coefficients can be found by means of the equations

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle l_{\rho\lambda\mu\varepsilon\sigma}=\sum_{\beta=0}^{\varrho}(-1)^{\rho-\beta}\binom{t+\varepsilon-\sigma-\beta}{\rho-\beta} h_{\beta\lambda\mu\varepsilon}^{\varrho-\beta} \\ (\rho=0,\ldots,\ t+\varepsilon-\sigma;\ \lambda=1,\ldots, r;\ \mu=1,\ldots, s_{\varepsilon};\ \varepsilon=1,\ldots, i),\end{array}\right\} \tag{71}$$

The old coefficients are expressed in terms of the new by means of the equations

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle h_{\beta\lambda\mu\varepsilon}=\sum_{\varrho=0}^{\beta}\binom{t+\varepsilon-\sigma-\rho}{\beta-\rho} l_{\varrho\lambda\mu\varepsilon\sigma}^{\beta-\varrho} \\ (\beta=0,\ldots,\ t+\varepsilon-\sigma;\ \lambda=1,\ldots, r;\ \mu=1,\ldots, s_{\varepsilon};\ \varepsilon=1,\ldots, i).\end{array}\right\} \tag{72}$$

In particular, putting $\rho=0$ in (71), we have

$$l_{0\lambda\mu\varepsilon\sigma}=h_{0\lambda\mu\varepsilon}. \tag{73}$$

The matrix

$$\left\| \begin{matrix} l_{0\lambda\mu 1\sigma} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{0\lambda\mu i\sigma} \end{matrix} \right\| \tag{74}$$

is of rank $s_1 + \ldots + s_i$ for general values of ω.

THE SUCCESSIVE FOCAL SPREADS OF $S^{i,0}$.

76. As in § 59, we introduce, for each value of σ, a set of auxiliary quantities

$$\left.\begin{array}{c} L_{\nu\mu\varepsilon\sigma} = \sum\limits_{\rho=0}^{\nu} \left(\sum\limits_{\lambda=1}^{r} l_{\rho\lambda\mu\varepsilon\sigma} A_\lambda^\sigma \right)^{\nu-\rho} \\ (\nu = 0, \ldots, t + \varepsilon - \sigma - 1;\ \mu = 1, \ldots, s_\varepsilon;\ \varepsilon = 1, \ldots, i). \end{array}\right\} \tag{75}$$

In particular, for $\nu = 0$, we have

$$L_{0\mu\varepsilon\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{r} l_{0\lambda\mu\varepsilon\sigma} A_\lambda^\sigma. \tag{76}$$

$L_{\nu\mu\varepsilon\sigma}$ involves the $(\nu + \sigma)$-th, but no higher, derivatives of the quantities A_λ.

In terms of these auxiliary quantities we can write the equations of the first $t + i - \sigma$ focal spreads of $S^{i,0}$, as follows:

$$S^{i,1} = [S^{i-1,0};\ L_{0\mu i\sigma}^{t+i-\sigma-1}\ (\mu = 1, \ldots, s_i)],$$

$$S^{i2} = [S^{i-2,0};\ L_{0\mu i\sigma}^{t+i-\sigma-2},\ L_{1\mu i\sigma}^{t+i-\sigma-2}\ (\mu = 1, \ldots, s_i);\ L_{0\mu, i-1, \sigma}^{t+i-\sigma-2}\ (\mu = 1, \ldots, s_{i-1})],$$

. . . .

. . . .

$$\left.\begin{array}{l} S^{i\nu} = [S^{i-\nu,0};\ L_{\beta\mu\varepsilon\sigma}^{t+i-\sigma-\nu}\ (\beta = 0, \ldots, \nu - i + \varepsilon - 1;\ \mu = 1, \ldots, s_\varepsilon;\ \varepsilon = i, \ldots, i - \nu + 1)] \\ \quad (\nu = 1, \ldots, i), \end{array}\right\} \tag{77}$$

$$\left.\begin{array}{l} S^{i\nu} = [\dot{S}_{\nu-i,0};\ L_{\beta\mu\varepsilon\sigma}^{t+i-\sigma-\nu}\ (\beta = 0, \ldots, \nu - i + \varepsilon - 1;\ \mu = 1, \ldots, s_\varepsilon;\ \varepsilon = i, \ldots, 1)] \\ \quad (\nu = i + 1, \ldots, t + i - \sigma). \end{array}\right\} \tag{78}$$

77. Since the proof of these formulae is not essentially more difficult than that given in § 60 for the special case, we shall omit it. Only one point requires mention. The s_i directrices $L_{0\mu i\sigma}^{t+i-\sigma-1}$ of the spread $S^{i,1}$ are independent of one another and of the directrices of $S^{i-1,0}$, altho the r curves $A_1^{t+i-1},\ldots, A_r^{t+i-1}$, on which they are linearly dependent, are themselves not independent of the directrices of $S^{i-1,0}$.

This follows from (74) and the fact that the linear dependence of these curves is fixed by the first $i-1$ sets of relations (70), whereas the directrices under consideration depend on the ith set of relations. Similarly, in the general case of the spread $S^{i\nu}$ the directrices $L_{\beta\mu\varepsilon\sigma}^{t+i-\sigma-\nu}$ are all independent of one another and of the directrices of $S^{i-\nu,0}$ or $S_{\nu-i,0}$, as the case may be; and the dimensionality of $S^{i\nu}$ is equal to that of $S^{i-\nu,0}$ (or $S_{\nu-i,0}$) plus the number of the additional directrices.

78. If σ cannot be chosen $< t-1$, the formula (78) determines only one spread $S^{i,i+1}$. Since the descending series of spreads $S^{i\nu}$ is regular as far as S^{ii}, inclusive, therefore $S^{i\nu}$ $(0 < \nu \leq i)$ is of range r_{t+i} $(= r - \sum_{\delta=1}^{i} s_\delta)$ and dimensionality $m_{t+i} - \nu\, r_{t+i}$.

When $\nu > i$ and $S^{i\nu}$ is determined by (78), its dimensionality is $m_{t-\nu+i} + \sum_{\delta=1}^{i} (\nu - i + \delta)\, s_\delta$ and its range (except when $\nu = t + i - \sigma$) is $r_{t-\nu+i} - \sum_{\delta=1}^{i} s_\delta = r_{t+i} + r_{t-\nu+i} - r$. This is the smallest value that the range of $S^{i\nu}$ can have, for given values of r, r_{t+i} and $r_{t-\nu+i}$.

When $\nu = t + i - \sigma$, the range of $S^{i\nu}$ can be found and the equations of its focal spread $S^{i,\nu+1}$, which are not given by (78), can be obtained by a method analogous to that of § 66.

THE SUCCESSIVE FOCAL SPREADS OF $S_{j,j+i}$.

79. In order to write the equations of the successive focal spreads of $S_{j,j+i}$, we employ only those particular relations (70), $s_{1j} + \ldots + s_{ij}$ in number, which involve the directrices of $S_{j,j+i}$, and the corresponding auxiliary quantities (75); and we find that

$$\left.\begin{array}{l} S_{j,j+i,\nu} = [S_{j,j+i-\nu};\ L_{\beta\mu\varepsilon\sigma}^{t+i-\sigma-\nu}\ (\beta = 0,\ldots, \nu - i + \varepsilon - 1;\ \mu = 1,\ldots, s_{\varepsilon j};\ \varepsilon = i,\ldots, i - \nu + 1)] \\ \qquad\qquad (\nu = 1, \ldots, i), \end{array}\right\} \quad (79)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{j,j+i,\nu} = [S_{j,j+i-\nu};\ L^{t+i-\sigma-\nu}_{\beta\mu\varepsilon\sigma}\ (\beta=0,\dots,\ \nu-i+\varepsilon-1;\ \mu=1,\dots,\ s_{\varepsilon\gamma};\ \varepsilon=i,\dots,\ 1)] \\ \qquad (\nu = i+1, \dots, i+j), \end{array}\right\} \tag{80}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{j,j+i,\nu} = [S_{\nu-i};\ L^{t+i-\sigma-\nu}_{\beta\mu\varepsilon\sigma}\ (\beta=0,\dots,\ \nu-i+\varepsilon-1;\ \mu=1,\dots,\ s_{\varepsilon\gamma};\ \varepsilon=i,\dots,\ 1)] \\ \qquad (\nu = i+j+1, \dots, t+i-\sigma). \end{array}\right\} \tag{81}$$

In these formulae σ can be chosen $\leqq t-j-1$; if $\sigma = t-j-1$, the formula (81) determines only one spread $S_{j,j+i,j+i+1}$. The descending series of spreads $S_{j,j+i,\nu}$ is regular, of range

$$r_{t-j} - \sum_{\delta=1}^{i} s_{\delta j}\,, \tag{82}$$

as far as $S_{j,j+i,j+i}$; and since $S_{j,j+i}$ is evidently of dimensionality

$$m_{t-j} + (i+j)\, r_{t-j} - \sum_{\delta=1}^{i-1} (i-\delta)\, s_{\delta j}\,, \tag{83}$$

therefore, if $\nu \leqq j+i+1$, $S_{j,j+i,\nu}$ is of dimensionality

$$m_{t-j} + (i+j-\nu)\, r_{t-j} + \sum_{\delta=1}^{i} (\nu - i + \delta)\, s_{\delta j}\,. \tag{84}$$

In particular, $S_{j,j+i,j+i}$ is of dimensionality

$$m_{t-j} + \sum_{\delta=1}^{i} (j+\delta)\, s_{\delta j}\,. \tag{85}$$

The descending series (81), like (78), can be continued one step further by the method of § 66. Comparing (79) and (80) with (77) and (78), we easily verify the fact that $S_{j,j+i,\nu}$ is enclosed in $S^{i\nu}$.

Three special cases, §§ 80-89.

80. We shall now consider three special cases in which σ, in formulae (77) and (78), can be chosen $< t-1$.

First, if it happens that $r_t = r_{t-1} = \dots = r_{t-j}$, then σ can be chosen as small as $t-j-1$, and the equations of the spreads $S^{i,i+1}, \dots, S^{i,i+j}$ will be given by (78); hence the descending series of focal spreads of $S^{i,0}$ will continue regular, of range r_{t+i}, as far as $S^{i,i+j}$. This was to be expected, because the entire tree determined by S is in this case also determined by S_j, and $S^{i,i+j} = (S_j)^{i+j,i+j}$.

The case in which $S_{j,j+i}$ is of minimum range.

81. The second special case, which is more interesting, is the one considered in § 73, in which $s_{\varepsilon j} = s_\varepsilon$ ($\varepsilon = 1, \ldots, i$), and in which, therefore, the identical relations that fix the linear dependence of the fundamental directrices of $S^{i+1,0}$ involve only the directrices of the first r_{t-j} columns of the array (24) and their derivatives, namely the fundamental directrices of $S_{j,j+i+1}$. An example illustrating this case was given in §§ 64 and 67.

We can again choose σ as small as $t - j - 1$; and the spreads $S^{i,i+1}, \ldots, S^{i,i+j}$ will be given by the equations (78), but will no longer necessarily form a regular series.

82. In this case, putting $\nu = i + j$ in (78) and (80), we discover that $S^{i,i+j}$ coincides with $S_{j,j+i,j+i}$, and therefore that *the* $(i+j)$*-th focal spread of* $S_{j,j+i}$, which, as we saw in § 33, is always enclosed in $S^{i,i+j}$, *in this case coincides with* $S^{i,i+j}$. In other words, $S_{j,j+i}$ is the $(i+j)$-th special enclosed spread of $S^{i,0}$; and dually $S^{i,i+j}$ is the $(i+j)$-th special enclosing spread of $S_{j,0}$.

Connecting series.

83. Hence $S^{i,i+j}$ and $S_{j,j+i}$ are of the same range $r_{t+i} + r_{t-j} - r$ $(= r' \geqq 0)$, which, in view of §§ 72, 73, is a minimum for both; and *if* $r' > 0$, *they form the first and last terms of a regular connecting series of* $i + j + 1$ *spreads.*

The two following theorems, both converses of the one just given, are evidently true:

If the ranges r, r_{t+i} *and* r_{t-j} *of* S, $S^{i,0}$ *and* $S_{j,0}$, *respectively, satisfy the inequality* $r_{t+i} + r_{t-j} - r$ $(= r') \geqq 0$, *and if the range of one of the two spreads* $S^{i,i+j}$ *and* $S_{j,j+i}$ *has its minimum value* r', *the same is true of the other, and the first is the* $(i+j)$*-th focal spread of the second.*

If $S^{i,i+j}$ is the $(i+j)$-th focal spread of $S_{j,j+i}$, then $r' \geqq 0$ and both spreads are of minimum range r'.

84. Moreover, *if $S^{i,i+j}$ is the $(i+j)$-th focal spread of $S_{j,j+i}$, it is clear that $S^{\alpha,\alpha+\beta}$ $(\alpha \leqq i,\ \beta \leqq j)$ is the $(\alpha+\beta)$-th focal spread of $S_{\beta,\beta+\alpha}$*, and therefore that they also are connected by a regular series. This connecting series will be merely a part of the one connecting $S^{i,i+j}$ and $S_{j,j+i}$, if $S^{i,0}$ and $S^{\alpha,0}$ are of the same range and if S_{j0} and S_{β_0} are of the same range; otherwise it will be a distinct series. Hence if the number of reductions in range that occur in the ascent from S to $S^{i,0}$ is i' $(\leqq i)$ and the number of reductions in range that occur in the descent from S to $S_{j,0}$ is j' $(\leqq j)$, then there are *exactly $i'j'$ distinct connecting series* between the spreads $S^{\alpha,\alpha+\beta}$ $(\alpha = 1,\dots, i;\ \beta = 1,\dots,j)$ on the one hand and the spreads $S_{\beta,\beta+\alpha}$ on the other.

$S_{j,j+i} = S^{i,i+j} =$ A FIXED FLAT.

85. A subcase of some interest is the one in which $r' = 0$; $S^{i,i+j}$ is then of range zero and coincides with $S_{j,j+i}$.

That is, *if $r_{t+i} + r_{t-j} - r = 0$, and if the $(i+j)$-th focal spread of $S^{i,0}$ is a fixed flat F, then F is also the $(i+j)$-th tangent spread of $S_{j,0}$.* Every spread of the entire tree determined by $S^{i,0}$ encloses F, and every spread of the tree determined by $S_{j,0}$ is enclosed in F.

Moreover, if $S^{i-1,0}$ is of higher range than $S^{i,0}$, the former does not enclose F, and the spreads $S_{j,0}, S_{j,1},\dots, S_{j,j+i}\ (= F)$ are all distinct. Dually, if $S_{j-1,0}$ is of higher range than $S_{j,0}$, the former is not enclosed in F, and the spreads $S^{i,0}, S^{i,1},\dots, S^{i,i+j}\ (= F)$ are all distinct.

A CASE IN WHICH $S_{j,j+i}$ ENCLOSES $S^{i,i+j}$.

86. A third special case in which σ, in (77) and (78), can be chosen $< t-1$, and which includes the second case but is somewhat more general, is that in which $s_{\varepsilon,j-1} = s_\varepsilon$ $(\varepsilon = 1,\dots, i)$, and in which the $\sum_{\varepsilon=1}^{i} (s_\varepsilon - s_{\varepsilon j})\ (= s')$ identical relations (70), that are independent of those fixing the linear depen-

dence of the fundamental directrices of $S_{j,j+i+1}$, involve merely the $r_{t-j+1} - r_{t-j}$ curves

$$A^{t-j}_{r_{t-j}+1}, \ldots, A^{t-j}_{r_{t-j+1}}, \tag{86}$$

and not any higher derivatives of the same. Obviously $s' \leqq r_{t-j+1} - r_{t-j}$. We can choose $\sigma = t - j$.

Putting $\sigma = t - j$ and $\rho = j + \varepsilon$ in those particular equations (70) that involve the quantities (86), we find that the coefficients of these quantities are $l_{j+\varepsilon,\lambda\mu\varepsilon,t-j}$. But these coefficients are not involved in the auxiliary quantities $L_{\nu\mu\varepsilon.t-j}$, defined by (75); for the highest value of ρ occuring there is $j + \varepsilon - 1$.

Hence, putting $\nu = i + j$ in (78), we see that the quantities (86) are not involved in the expression for the directrices of $S^{i,i+j}$, and that *the latter spread, therefore, is enclosed in* $S_{j,j+i}$. Moreover, it is easy to see that $r_{t+i} + r_{t-j} - r\,(= r') \geqq 0$, and that $S^{i,i+j}$ *and* $S_{j,j+i}$ *are of the same range* $r' + s'$, although they do not necessarily belong to a connecting series.

87. To illustrate this case take the example considered in §§ 55-63, and let the relation (34) or (35), of § 56, involve A^2_3 but not A^3_3, A^4_3 or A^5_3; that is, let $l_{03} = l_{13} = l_{23} = 0$ and $l_{33} \neq 0$. Take $i = 2$ and $j = 1$; then $r_{t+i} = 2$, $r_{t-j} = 2$, $r' = 1$, $s' = 1$; $S^{i,i+j} = S^{2,3} = S_6$, as given by (42); $S_{j,j+i} = S_{1,3} = S_9$, as given by (43); S_6 and S_9 are both of range $r' + s' = 2$. Equations (41) show that L_{02}, L_{12} and L_{22} do not involve A^2_3 or its derivatives, and therefore that S_6 is enclosed in S_9. But S_6 is evidently not a focal spread of S_9, as in § 64.

$S^{i,i+j}$ COINCIDING WITH $S_{j,j+i}$.

88. In the subcase in which $r' = 0$ the fundamental directrices of $S^{i,i+j}$, as given by (78), include exactly enough linear functions of the quantities A^δ_λ ($\lambda = 1, \ldots, r_{t-j}$; $\delta = t - j, \ldots, t + i - 1$) to determine all of the latter, and $S^{i,i+j}$ coincides with $S_{j,j+i}$.

Hence, if $r_{t+i} + r_{t-j} - r = 0$ *and the conditions of* § 86 *are fulfilled*, $S^{i,i+j}$ *is of range* s' *and coincides with* $S_{j,j+i}$. Consequently, $S^{i,i+j}$, its first $i + j$ focal spreads and its first $i + j$ tangent spreads together form a regular series of $2(i + j) + 1$ terms, all of range s'.

89. To illustrate this subcase we can again return to the example of §§ 55-63. This time let $i = j = 2$; then $r_{t+i} = 2$, $r_{t-j} = 1$, and $r' = 0$. Let (34)

involve A_2^1 but not any of the other elements in the 2nd or 3rd columns of (31). Accordingly, (34) can be written in the form (49), of § 67, and the condition

$$b_{\rho\lambda} = 0\,(\lambda = 2,\ 3;\ \rho = 0,\ 1,\ 2,\ 3),\ b_{42} \mathrel{=}\!\!|\ 0, \tag{87}$$

is satisfied. $S_{j,j+i} = S_{2,4} = S_5$, as given by (45), and $S^{i,i+j} = S^{2,4} = S_5$, as given by (52). The quantities B_{01}, B_{11}, B_{21}, B_{31}, determined by (50), involve only A_1 and its derivatives. Hence $S^{2,4}$ coincides with $S_{2,4}$ and is of range 1. It determines a regular series of nine spreads, including its first four focal spreads and its first four tangent spreads.

If we alter the above condition (87) merely by putting $b_{42} = 0$, we get an illustration of the case of § 85. $S^{2,4}$ will still coincide with $S_{2,4}$, but will now be a fixed flat F. The spreads (42) will all enclose F, while the spreads (45) will all be enclosed in F.

The general case.

90. Returning to the general case (§§ 68-79) and imposing the one condition that

$$r_{t+i} + r_{t-j} - r \leqq 0, \tag{88}$$

we find, in view of (59), § 68, that $s_1 + \ldots + s_i$ must be $\geqq r_{t-j}$. This means that the number of independent relations involving $A_\lambda^{t+i}\,(\lambda = 1, \ldots, r)$ is large enough to make it possible for the r_{t-j} curves $A_\lambda^{t+i}\,(\lambda = 1, \ldots, r_{t-j})$ to be directrices of $S^{i,0}$. If so, $S^{i,0}$, which always encloses $S_{j,j+i}$ will also enclose its tangent spread $S_{j,j+i+1}$. But this is obviously impossible, unless (88) is satisfied.

Hence, *if* $S^{i,0}$ *encloses* $S_{j,j+i+1}$, *or, dually, if* $S_{j,0}$ *is enclosed in* $S^{i,i+j+1}$, *the condition* (88) *must be satisfied.*

The dimensionalities of $S_{j,j+i}$ and $S^{i,i+j}$.

91. In all that follows let r_{ij} denote the integer $r_{t+i} + r_{t-j} - r$, where r, r_{t+i} and r_{t-j} are, as usual, the ranges of the spread S, its ith tangent spread $S^{i,0}$, and its jth focal spread $S_{j,0}$, respectively; also let d denote the

dimensionality of $S_{j,j+i}$, the $(j+i)$-th tangent spread of $S_{j,0}$, and d' the dimensionality of $S^{i,i+j}$, the $(i+j)$-th focal spread of $S^{i,0}$. We wish to prove the inequality

$$d - d' \geqq (i+j)\, r_{ij}\,. \tag{89}$$

Proof: It follows from § 83 that if $r_{ij} \geqq 0$ and if $S_{j,j+i}$ and $S^{i,i+j}$ are both of minimum range r_{ij}, then $d - d' = (i+j)\, r_{ij}$. If the ranges of these two spreads are increased above their minimum value, the dimensionality d of $S_{j,j+i}$ will not change, unless the range of $S_{j,j+i-1}$ is also increased, and if the value of d changes at all, it is evidently increased; similarly, the dimensionality d' of $S^{i,i+j}$ will not change, unless the range of $S^{i,i+j-1}$ is increased, and if the value of d' does change, it is decreased; for both reasons, therefore, the value of $d - d'$ is either increased or not changed. Hence, if $r_{ij} \geqq 0$, (89) holds true. But if $r_{ij} < 0$, it obviously holds true a fortiori; and the theorem is proved.

In particular, *if $r_{ij} > 0$, the dimensionality of $S_{j,j+i}$ exceeds that of $S^{i,i+j}$ by at least $(i+j)\, r_{ij}$ units; if $r_{ij} = 0$, the dimensionality of $S_{j,j+i}$ is at least as great as that of $S^{i,i+j}$; and if $S_{j,j+i}$ is of lower dimensionality than $S^{i,i+j}$, r_{ij} must be negative, and the difference between their dimensionalities cannot exceed $(i+j)\,.\,|\,r_{ij}\,|$.*

92. If $d - d' = (i+j)\, r_{ij}$, the range of $S_{j,j+i-1}$ must have its minimum value $r_{i-1,j}\,(\geqq 0)$ which means (§ 73) that $s_{\varepsilon,j} = s_{\varepsilon}\;(\varepsilon = 1,\ldots,\, i-1)$; and the range of $S^{i,i+j-1}$ must have its minimum value $r_{i,j-1}\,(\geqq 0)$, which means that $s_{\varepsilon,j-1} = s_{\varepsilon}\;(\varepsilon = 1,\ldots,\, i)$.

Hence, *a necessary and sufficient condition that $d - d'$ is exactly equal to $(i+j)\, r_{ij}$ is that $r_{i-1,j} \geqq 0$, $r_{i,j-1} \geqq 0$, and that $S_{j,j+i-1}$ and $S^{i,i+j-1}$ are of minimum ranges $r_{i-1,j}$ and $r_{i,j-1}$, respectively.* This means that

$$s_{\varepsilon,j} = s_{\varepsilon}\,(\varepsilon = 1\,,\ldots,\, i-1) \quad \text{and} \quad s_{i,j-1} = s_i\,. \tag{90}$$

In other words, those particular relations of the set (65), or (70), which fix the linear dependence of the fundamental directrices of $S^{i,0}$ must involve only the fundamental directrices of $S_{j,j+i}$, and those additional relations, if any, which are independent of the former and their derivative relations and which help to fix the linear dependence of the fundamental directrices of $S^{i+1,0}$, must involve only the fundamental directrices of $S_{j-1,j+i}$.

In particular, if $r_{ij} = 0$, (90) is a necessary and sufficient condition that $S_{j,j+i}$ and $S^{i,i+j}$ are of the same dimensionality. It is also possible for r_{ij} to be negative; in that case (90) is a necessary and sufficient condition that $d' - d = (i + j) \cdot | r_{ij} |$.

93. A little attention to formulae (78) and (80) will make the following theorems clear:

If $S_{j,j+i}$ encloses $S^{i,i+j}$ and does not coincide with it, r_{ij} is positive; if $S_{j,j+i}$ coincides with $S^{i,i+j}$, r_{ij} vanishes; and if $S_{j,j+i}$ is enclosed in $S^{i,i+j}$ and does not coincide with it, r_{ij} is negative.

If $S_{j,j+i}$ encloses $S^{i,i+k}$ $(k < j)$, $S_{k,0}$ and $S_{j,0}$ are of the same range, and $r_{ij} \geqq 0$.

If $S_{j,j+i}$ is a fixed flat F, $S^{i,0}$ and all its focal spreads enclose F, and $r_{ij} \leqq 0$.

If $S^{i,i+j}$ is enclosed in $S_{j,j+k}$ $(k < i)$, $S^{k,0}$ and $S^{i,0}$ are of the same range, and $r_{ij} \geqq 0$.

If $S^{i,i+j}$ is a fixed flat F, $S_{j,0}$ and all its tangent spreads are enclosed in F, and $r_{ij} \leqq 0$.

If $S_{j,j+i}$ and $S^{i,i+j}$ are both fixed flats and do not coincide, r_{ij} must be negative.

Cornell University, June, 1912.

Sui sistemi obliqui di Weingarten.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

I sistemi di superficie pseudosferiche di egual raggio che studio nel presente lavoro costituiscono una generalizzazione di quelli che, in antiche mie ricerche, ho chiamato ***sistemi ortogonali di*** Weingarten (*). Con questi ultimi i nuovi sistemi hanno a comune la proprietà che: ***nella corrispondenza segnata sulle superficie pseudosferiche del sistema dalle trajettorie dei singoli punti, le linee asintotiche si corrispondono per archi eguali, e si corrispondono quindi anche le linee di curvatura.*** Ma, mentre negli antichi sistemi di Weingarten le curve trajettorie seguono la direzione normale alla superficie, nei nuovi invece esse tagliano le superficie pseudosferiche del sistema sotto ***angolo costante non retto.*** Quest'angolo può del resto essere una costante assoluta, ovvero, più generalmente, variare (con continuità) dall'una all'altra superficie pseudosferica.

Di più i sistemi considerati nella presente Memoria si generano colla ripetizione continua della ***trasformazione infinitesima di*** Bäcklund, nella stessa guisa come i sistemi ortogonali di Weingarten (a flessione costante) vengono generati dalla ripetizione continua della trasformazione infinitesima ***complementare.*** Questo modo stesso di generazione dei nuovi sistemi, che saranno indicati per brevità come ***sistemi obliqui di*** Weingarten, conduce a riconoscere, mediante considerazioni geometriche infinitesimali, la loro esistenza ed il loro grado di arbitrarietà, come dipendente da quattro funzioni arbitrarie, ciascuna di una sola variabile. Ne risulta altresì un sistema fonda-

(*) Vedi la Memoria: *Sopra i sistemi tripli ortogonali di* Weingarten nel Tom. XIII, Serie 2.ª di questi *Annali*, ovvero il Cap. XXIV, Vol. II delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (2.ª edizione). Cf. anche Darboux, *Leçons sur les systhèmes orthogonaux*, livre II, Chap. VI (2ème édition).

mentale di equazioni alle derivate parziali per due funzioni incognite di tre variabili (le equazioni (A), (B) § 5), dalla cui integrazione dipende la ricerca di questi sistemi obliqui; e dalle proprietà generali dei sistemi di equazioni a derivate parziali si potrebbe trarre la dimostrazione analitica rigorosa dei teoremi di esistenza.

Il risultato più importante a cui arriviamo nello studio dei nuovi sistemi consiste nel provare che: *anche ai sistemi obliqui di* WEINGARTEN *è applicabile la trasformazione di* BÄCKLUND, *in particolare la complementare, per dedurre infiniti di tali sistemi da uno inizialmente noto.* Si vedrà anzi che pei sistemi *obliqui* la trasformazione complementare si comporta affatto come la generale di BÄCKLUND e cioè: *si può assegnare ad arbitrio per una superficie pseudosferica iniziale del sistema la trasformata complementare o di* BÄCKLUND, *e ne resta individuata una corrispondente trasformazione dell'intero sistema.* È ben noto invece che pei sistemi ortogonali di WEINGARTEN la trasformazione complementare si comporta in modo eccezionale.

Per costruire effettivamente i sistemi obliqui derivati da uno iniziale per trasformazione di BÄCKLUND, o complementare, occorre integrare dapprima un'equazione differenziale del tipo di RICCATI, dopo di che l'applicazione successiva del procedimento di trasformazione ai nuovi sistemi derivati richiede dapprima sempre nuove quadrature. Ma anche qui, come per le superficie pseudosferiche isolate, si dimostra che sussiste il *teorema di permutabilità*, coll'ajuto del quale il procedimento si semplifica, risparmiando le quadrature.

Fra i sistemi obliqui di WEINGARTEN si distingue per singolari proprietà geometriche quella classe in cui le curve trajettorie tagliano tutte le superficie pseudosferiche sotto il medesimo angolo. Indicando con σ il *complemento* del detto angolo, chiameremo (Ω_σ) questi particolari sistemi obliqui, di cui trattano diversi paragrafi della Memoria. Nel caso particolare in cui sia $\sigma = 0$ si hanno sistemi ortogonali di WEINGARTEN e più precisamente, come sopra abbiamo già accennato, di quella classe in cui le trajettorie ortogonali del sistema sono curve colla medesima flessione costante. Così i sistemi ortogonali di WEINGARTEN a flessione costante costituiscono una particolare classe di sistemi (Ω_σ). E si vedrà d'altra parte che i generali sistemi (Ω_σ) si deducono dai sistemi ortogonali di WEINGARTEN a flessione costante coll'applicare alle singole superficie pseudosferiche di questi ultimi sistemi una medesima *trasformazione L_σ di* LIE.

Nei sistemi (Ω_σ) le trajettorie isogonali del sistema godono della singolare proprietà di essere tutte *curve di* BERTRAND, della medesima famiglia;

in particolare per $\sigma = 0$ esse sono curve colla medesima flessione costante, come è detto sopra. Inversamente, presa una qualunque superficie pseudosferica S, ed una curva C di BERTRAND *affatto arbitraria*, che esca da un punto di S (in conveniente orientazione), ne resta individuato un sistema (Ω_σ), che contiene S fra le superficie del sistema e la curva C fra le trajettorie. Così le trajettorie isogonali nei sistemi (Ω_σ) sono *le più generali curve di* BERTRAND.

Come i sistemi di WEINGARTEN a flessione costante si presentano a coppie di sistemi complementari, così i generali sistemi (Ω_σ) si presentano a coppie di sistemi che diciamo *coniugati*, ciascuna coppia di curve trajettorie corrispondenti constando di *curve coniugate di* BERTRAND, che hanno a comune le normali principali.

A ciascun sistema (Ω_σ) è poi collegata una doppia infinità di deformate rigate dell'iperboloide rotondo ad una falda, ciascuna rigata essendo il luogo delle normali alle superficie pseudosferiche del sistema nei punti d'incontro con una delle ∞^2 curve di BERTRAND C trajettorie del sistema; per ogni singola rigata la trajettoria C viene ad essere la linea di stringimento.

Sembra notevole che, in questi sistemi (Ω_σ), vengono a trovarsi riunite le curve di BERTRAND colle deformate rigate dell'iperboloide che le hanno per linee di stringimento. Le trasformazioni complementare e di BÄCKLUND pei sistemi (Ω_σ) si traducono, in riguardo alle curve trajettorie, nelle trasformazioni delle curve di BERTRAND già studiate da DEMARTRES e RAZZABONI, e per le deformate rigate dell'iperboloide in quelle trasformazioni B_k che furono il punto di partenza pei miei studî sulle deformazioni delle quadriche.

Indicati così sommariamente i risultati delle attuali ricerche, aggiungiamo che essi valgono non solo nell'ordinario caso dello spazio euclideo, ma anche più in generale per gli spazî di curvatura costante, positiva o negativa. La Memoria perciò è divisa in due parti, di cui la prima tratta la teoria dei sistemi obliqui di WEINGARTEN in geometria euclidea, mentre la seconda ne estende brevemente i risultati alla geometria ellittica ed iperbolica, con particolare riguardo alle proprietà delle curve di BERTRAND in questi spazî.

Da ultimo accennerò che i principii del metodo qui applicato sono suscettibili di estendersi con egual successo in molte diverse direzioni; in particolare:

1.° ai sistemi analoghi di quelle superficie (generalizzazione delle pseudosferiche) che si presentano nella teoria delle congruenze W a falde focali di egual curvatura e sono caratterizzate dalla espressione

$$K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}$$

della loro curvatura nei parametri u, v delle linee asintotiche,

2.° ai sistemi di superficie applicabili sulle quadriche generati dalla ripetizione continua di trasformazioni infinitesime B_k.

PARTE PRIMA.

I sistemi obliqui di Weingarten nello spazio euclideo.

§ 1.

La trasformazione infinitesima $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ di Bäcklund.

Di una superficie pseudosferica S', il cui raggio R si assumerà sempre nel seguito, per semplicità, eguale all'unità lineare ($R = 1$), si considerino le ∞^1 superficie pseudosferiche S (di egual raggio) trasformate per una stessa trasformazione B_σ di Bäcklund. Ad ogni punto P' della S' corrisponde, sopra ciascuna S, un determinato punto P, ed il luogo dei punti P è il circolo di raggio $= \cos\sigma$ tracciato col centro in P' nel piano tangente di S'. Questi ∞^2 circoli (trajettorie) tagliano le superficie S sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$ e segnano sopra di esse una corrispondenza che conserva le linee asintotiche col loro arco (e le linee di curvatura). Il sistema delle ∞^1 superficie S dà il primo e più semplice esempio di sistemi (Ω_σ), che diremo *sistemi* (Ω_σ) *elementari.*

In un tale sistema elementare (Ω_σ) il passaggio da una superficie qualunque S del sistema alla successiva S_1 viene dato da una trasformazione infinitesima, che si dirà la *trasformazione infinitesima di* BÄCKLUND, e si indicherà con $B_\sigma^{(\varepsilon)}$. Essa gode delle proprietà fondamentali sopra segnalate e cioè: 1.° le direzioni PP_1 degli spostamenti impressi dalla $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ ai punti P della S sono inclinate dell'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$ sulla superficie, 2.° la $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ conserva le linee asintotiche col loro arco, indi le linee di curvatura. La trasformazione infinitesima $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ della superficie pseudosferica S resta fissata quando si fissi la trasformata S' della S per la B_σ, e deve quindi considerarsi in relazione colla congruenza pseudosferica di cui S ed S' sono le falde focali, le congiungenti PP' dei punti corrispondenti essendo i raggi della congruenza. Per la definizione stessa della $B_\sigma^{(\varepsilon)}$, le direzioni PP_1 degli spostamenti impressi ai punti di S sono normali ai raggi della congruenza pseudosferica e giacciono nei rispettivi piani tangenti della trasformata S' (nei secondi piani focali). Si vede quindi che: *Ogni superficie pseudosferica S possiede ∞^2 trasformazioni infinitesime $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ di* BÄCKLUND, *corrispondenti biunivocamente alle ∞^2 congruenze pseudosferiche, di cui S è la prima falda focale.*

È utile confrontare ogni trasformazione infinitesima $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ con quella *deformazione isogonale infinitesima* della superficie pseudosferica S (riguardata come flessibile ed inestendibile) nella quale ciascun punto si sposta normalmente al secondo piano focale della congruenza pseudosferica appartenente alla $B_\sigma^{(\varepsilon)}$. Le direzioni degli spostamenti che avvengono nei due casi sono, per ogni punto della superficie, ortogonali fra loro ed ai raggi della congruenza pseudosferica, ed inclinate sulla superficie dell'angolo σ per la deformazione isogonale e dell'angolo complementare per la $B_\sigma^{(\varepsilon)}$.

Dalle formole che stabiliremo prossimamente (§ 3) risulterà poi che le ampiezze di queste due specie di spostamenti sono eguali (o proporzionali).

§ 2.

GENERAZIONE GEOMETRICA DEI SISTEMI OBLIQUI DI WEINGARTEN.

Partendo da una superficie pseudosferica S, si applichi a questa una trasformazione infinitesima $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ che la traduca in una superficie infinitamente vicina S_1, indi alla S_1 un'altra trasformazione infinitesima di BÄCKLUND ad angolo σ in generale variato (di una costante infinitesima), e così si proceda illimitatamente. È intuitivo che dalla ripetizione continua della trasformazione infinitesima di BÄCKLUND nasce così un *sistema obliquo di* WEINGARTEN, e l'arbitrarietà che resta ogni volta nella scelta della trasformazione infinitesima si traduce in un certo grado di arbitrarietà (funzioni arbitrarie) inerente ai sistemi obliqui di WEINGARTEN generati.

Tutto ciò viene precisato col teorema: *Data ad arbitrio una superficie pseudosferica S, ed una curva C uscente da un punto P di S obliquamente alla superficie, esiste uno ed un solo sistema obliquo di* WEINGARTEN, *che contiene S fra le superficie pseudosferiche, e nel quale la trajettoria descritta dal punto P coincide colla curva C assegnata.*

Questo teorema fondamentale d'esistenza è affatto analogo a quello che sussiste per *le deformazioni isogonali continue delle superficie pseudosferiche* (*), e può in effetto stabilirsi mediante considerazioni geometriche infinitesimali simili a quelle usate per l'altro caso.

Si tracci invero nel piano tangente in P alla S il raggio normale alla trajettoria C, e diretto dalla parte verso cui la C volge la concavità, e prendasi su questo raggio un segmento PP' di lunghezza $= \cos\sigma$, dove σ è il complemento dell'angolo d'inclinazione della tangente in P alla C sulla superficie. Ne risulta individuata una congruenza pseudosferica di cui S è la prima falda focale, e PP' un segmento iniziale focale, mentre il secondo piano focale è quello determinato dal segmento PP' e dalla tangente in P alla C. Applicando alla superficie pseudosferica S la trasformazione infinitesima appartenente alla detta congruenza, il punto P descriverà l'elemento lineare PP_1 della curva C, e la S' sarà cangiata in una nuova superficie pseudosferica S_1 infinitamente vicina. Si ripeta ora la medesima costruzione per la nuova superficie S_1, associata alla stessa curva C che esce da P_1, ed avremo una seconda trasformazione infinitesima di BÄCKLUND, nella quale P_1 descriverà l'elemento lineare successivo $P_1 P_2$ della C. La ripetizione continua di questa costruzione conduce a generare, in modo unico, il richiesto sistema obliquo di WEINGARTEN.

Avvertiamo poi che, sebbene nella costruzione indicata siasi inteso escluso il caso in cui C esca da P normalmente alla S, questo non è veramente un

(*) Vedi le mie due Memorie: I) *Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche.* — II) *Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica* (nel Tomo XVIII, Serie 3ª di questi *Annali*, pag. 1 e 185).

caso d'eccezione, bastando allora assumere il raggio iniziale della congruenza secondo la normale principale (positiva) di C nel punto ed il segmento focale $PP' = 1$.

È manifesto che i sistemi obliqui di Weingarten, costruiti in base al teorema precedente, vengono a dipendere da *quattro funzioni arbitrarie*, due delle quali inerenti alla superficie pseudosferica S e le altre due alla trajettoria C. Si vede inoltre che l'angolo σ risulterà, in generale, *variabile* dall'una all'altra superficie del sistema, e solo quando la curva C soddisfi a convenienti condizioni, che verranno stabilite più oltre (§ 8), l'angolo σ sarà una costante assoluta ed avremo un *sistema* (Ω_σ).

Aggiungiamo in fine esplicitamente che le considerazioni infinitesimali del presente paragrafo hanno soltanto un carattere provvisorio, e servono a dirigere le seguenti ricerche analitiche per la formazione del sistema di equazioni a derivate parziali da cui il nostro problema dipende. Sulle proprietà di questo sistema differenziale può fondarsi la dimostrazione rigorosa dei risultati sopra indicati, ciò che faremo almeno nel caso geometricamente più interessante dei sistemi (Ω_σ) (Vedi § 9).

§ 3.

I sistemi (Ω_σ) elementari.

Cominciamo la nostra trattazione analitica dal caso dei *sistemi* (Ω_σ) *elementari;* ciò è tanto più opportuno che le formole relative a questo caso elementare, generalizzandone convenientemente solo la interpretazione, si applicano al caso dei sistemi obliqui generali.

Siano S, S' due superficie pseudosferiche (di raggio $R = 1$), trasformate l'una dell'altra per mezzo di una trasformazione B_σ di Bäcklund. Ritenendo tutte le notazioni adoperate nelle *Lezioni* (Vol. II, § 373), supponiamo che S, S' corrispondano rispettivamente alle due soluzioni θ, φ della equazione fondamentale

$$\ldots \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \tag{1}$$

legate fra loro dalle formole della trasformazione B_σ di Bäcklund:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v}&=\frac{\cos\theta \operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{\cos\sigma}\\
\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}&=-\frac{\operatorname{sen}\theta \cos\varphi+\operatorname{sen}\sigma \cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{A}
$$

Il passaggio dalla S alla S' è allora dato dalle formole

$$
\ldots\ x'=x+\cos\sigma\,(\cos\varphi\, X_1+\operatorname{sen}\varphi\, X_2), \tag{2}
$$

colle analoghe per y', z'.

Fra i nove coseni di direzione $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$ dei tre spigoli del triedro principale relativo alla S e gli analoghi, da indicarsi con accenti, per la S' sussistono le relazioni:

$$
\left.\begin{aligned}
X'_1&=(\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\,.\,X_1+\\
&\quad+(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\,.\,X_2-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,.\,X_3\\
X'_2&=(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\,.\,X_1+\\
&\quad+(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)\,.\,X_2+\cos\sigma\cos\theta\, X_3\\
X'_3&=\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,X_1-\cos\sigma\cos\varphi\,.\,X_2-\operatorname{sen}\sigma\, X_3\,,
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

lasciando di scrivere le analoghe in Y, Z. Conviene riportare anche le formole corrispondenti alle (2), (3) nel passaggio inverso:

$$
x=x'-\cos\sigma\,(\cos\theta\, X'_1+\operatorname{sen}\theta\, X'_2) \tag{2*}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
X_1&=(\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\,.\,X'_1+\\
&\quad+(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\,.\,X'_2+\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,X'_3\\
X_2&=(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\,.\,X'_1+\\
&\quad+(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)\,.\,X'_2-\cos\sigma\cos\varphi\, X'_3\\
X_3&=-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,.\,X'_1+\cos\sigma\cos\theta\, X'_2-\operatorname{sen}\sigma\, X'_3\,,
\end{aligned}\right\} \tag{3*}
$$

insieme alle formole del quadro seguente che danno le derivate rapporto ad u, v di x, X_1, X_2, X_3, ecc. (Vol. II, pag. 391) (*):

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\theta \, . \, X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen}\theta \, . \, X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \cdot X_1, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen}\theta \, . \, X_1, \\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta \, . \, X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + \cos\theta \, . \, X_3, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos\theta \, . \, X_2 \, .
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}
$$

Ora supponiamo che, *tenendo fissa la S', la S percorra tutte le ∞^1 sue trasformate per la B_σ e descriva così un sistema elementare* (Ω_σ). Delle due soluzioni θ, φ della (1) la seconda φ resta fissa, mentre la prima θ, sempre legata a φ dalle (A), varia in una semplice infinità, contenendo una costante d'integrazione. Indicheremo questa costante, o parametro arbitrario, con w e la riguarderemo come terza variabile oltre u, v. Gli elementi relativi alla superficie S come θ, x, X_1, X_2, X_3 saranno funzioni delle tre variabili u, v, w, mentre invece quelli relativi alla S': φ, x', X'_1, X'_2, X'_3 saranno *indipendenti da w*.

Se in primo luogo deriviamo le formole (A) rapporto a w, otteniamo le seguenti

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} &= (\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \cos\theta \cos\varphi) \frac{\partial \theta}{\partial w} \\
\cos\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} &= (\operatorname{sen}\sigma \cos\theta \cos\varphi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot
\end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}
$$

Poi, derivando similmente le (2*), abbiamo

$$
\frac{\partial x}{\partial w} = \cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} (\operatorname{sen}\theta \, X'_1 - \cos\theta \, X'_2), \tag{4}
$$

che, osservando le (3), si scrivono

$$
\frac{\partial x}{\partial w} = \cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \left\{ - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \, X_1 + \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi \, X_2 - \cos\sigma \, X_3 \right\} \cdot \tag{5}
$$

(*) Le citazioni come questa si intendono riferite alle mie: *Lezioni di geometria differenziale* (2ª ediz.).

Collo stesso metodo potremmo calcolare dalle (3*) le derivate $\frac{\partial X_1}{\partial w}$, $\frac{\partial X_2}{\partial w}$, $\frac{\partial X_3}{\partial w}$. Ma, per la estensione del significato delle nostre formole al caso dei generali sistemi obliqui di Weingarten, conviene meglio dedurle come *condizioni d'integrabilità* da quelle già stabilite. Per questo, confrontando la (5) colle due prime in colonna del quadro (a), si scrivano le due condizioni di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial w}(\cos\theta\,.\,X_1)=\frac{\partial}{\partial u}\left\{\cos\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,X_1+\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,X_2-\cos\sigma\,X_3)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(\operatorname{sen}\theta\,.\,X_2)=\frac{\partial}{\partial v}\left\{\cos\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,X_1+\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,X_2-\cos\sigma\,X_3)\right\}.$$

Eseguendo le derivazioni a destra, osservando le (a) e le (B), si trova:

$$\frac{\partial X_1}{\partial w}=\frac{\partial\theta}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\,X_2+\cos\sigma\cos\varphi\,X_3)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial w}=\frac{\partial\theta}{\partial w}(\operatorname{sen}\sigma\,X_1+\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,X_3),$$

e l'altra derivata $\frac{\partial X_3}{\partial w}$ si calcolerà dalla

$$X_1\frac{\partial X_1}{\partial w}+X_2\frac{\partial X_2}{\partial w}+X_3\frac{\partial X_3}{\partial w}=0,$$

che segue dalla condizione d'ortogonalità $X_1^2+X_2^2+X_3^2=1$, onde

$$\frac{\partial X_3}{\partial w}=-\cos\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}(\cos\varphi\,X_1+\operatorname{sen}\varphi\,X_2).$$

Riuniamo le formole ottenute nel seguente quadro (a') da aggregarsi alle (a):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial w}&=\cos\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,X_1+\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,X_2-\cos\sigma\,X_3)\\
\frac{\partial X_1}{\partial w}&=\frac{\partial\theta}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\,X_2+\cos\sigma\cos\varphi\,X_3)\\
\frac{\partial X_2}{\partial w}&=\frac{\partial\theta}{\partial w}(\operatorname{sen}\sigma\,X_1+\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,X_3)\\
\frac{\partial X_3}{\partial w}&=-\cos\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}(\cos\varphi\,X_1+\operatorname{sen}\varphi\,X_2).
\end{aligned}\right\}\quad(a')$$

Dalla prima di queste si vede che, indicando con H *l'ampiezza* dello spostamento prodotto per ogni punto della superficie S dalla trasformazione infinitesima di Bäcklund $B_\sigma^{(\varepsilon)}$, si ha

$$H = \cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w},$$

onde dalle (B) seguono le formole

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \cos\theta\cos\varphi}{\cos\sigma}\cdot H \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\cdot H. \end{aligned}\right\} \tag{B'}$$

Ma queste sono le formole stesse che nelle *Lezioni* (Vol. II, pag. 397) furono trovate per definire l'ampiezza ρ dello spostamento nella deformazione isogonale infinitesima corrispondente alla $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ (alla medesima congruenza pseudosferica). Le due ampiezze H, ρ sono dunque eguali (o proporzionali), come si era asserito alla fine del § 1.

§ 4.

Prime formole pei sistemi obliqui di Weingarten.

Dal caso dei sistemi elementari (Ω_ε) ora trattato passiamo ai più generali sistemi obliqui di Weingarten, generati per ripetizione continua della $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ al modo del § 2.

Suppongasi di avere un tal sistema, la cui superficie pseudosferica generica indichiamo con S, mentre S' indicherà la seconda falda della congruenza pseudosferica associata a quella trasformazione infinitesima $B_\sigma^{(\varepsilon)}$ che cangia S nella successiva S_1 del sistema. Tutti gli elementi θ, φ; x, x'; X_1, X_2, X_3; X'_1, X'_2, X'_3 delle due superficie S, S' saranno funzioni di tre variabili, e cioè dei due parametri u, v delle linee di curvatura (per ipotesi corrispondenti) e di una terza variabile o parametro w, che fisserà la posizione di S nel sistema; inoltre σ sarà in generale una funzione di w, eventualmente una costante assoluta.

Poichè le due superficie pseudosferiche S, S' sono trasformate l'una dell'altra per una B_σ, varranno certamente le formole (A) di questa trasformazione, e nostro primo scopo sarà di provare che *sussistono necessariamente insieme anche le* (B).

A tal fine cominciamo dall'osservare che nel passaggio dalla S alla successiva S_1 colla $B_\sigma^{(\varepsilon)}$, i coseni di direzione degli spostamenti che subiscono i punti di S son dati dalla espressione

$$-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi X_1+\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi X_2-\cos\sigma X_3,$$

colle analoghe. Se indichiamo quindi con $H=H(u, v, w)$ l'ampiezza dello spostamento, avremo

$$\frac{\partial x}{\partial w}=H(-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi X_1+\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi X_2-\cos\sigma X_3). \tag{5'}$$

Ora dalle formole

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=\cos^2\theta,\quad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=\operatorname{sen}^2\theta,\quad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=0$$

(il simbolo sommatorio S inteso riferito alle tre coordinate), derivando rispetto a w segue

$$\left.\begin{aligned}S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w},\quad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w},\\ S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}+S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ma si osservi che le formole del quadro (a), come relative alle superficie pseudosferiche *isolate*, sussistono necessariamente, e perciò, derivando la (5') rapporto ad u, v, si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}=&\left\{-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial H}{\partial u}-\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)H-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta H\right\}.X_1+\\ &+\left\{\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\frac{\partial H}{\partial u}-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)H\right\}X_2+\\ &+\left\{-\cos\sigma\frac{\partial H}{\partial u}+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi H\right\}X_3\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial w} = \left\{ -\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial H}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) H \right\} X_1 +$$

$$+ \left\{ \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi \frac{\partial H}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) H + \cos\sigma \cos\theta\, H \right\} X_2 +$$

$$+ \left\{ -\cos\sigma \frac{\partial H}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \cos\varphi\, H \right\} X_3 .$$

Sostituendo questi valori nelle due prime (6), otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial H}{\partial u} + \left\{ \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \cos\sigma \operatorname{sen}\theta \right\} H = \operatorname{sen}\theta \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ &\operatorname{sen}\sigma \cos\varphi \frac{\partial H}{\partial v} + \left\{ -\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) + \cos\sigma \cos\theta \right\} H = \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial w} , \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

e dalla terza l'altra

$$\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \frac{\partial H}{\partial u} - \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial H}{\partial v} =$$

$$= \left\{ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \cos\theta \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) \right\} H.$$

Eliminando $\frac{\partial \theta}{\partial w}$ dalle (6′) si ottiene inoltre:

$$-\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial H}{\partial u} + \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \frac{\partial H}{\partial v} =$$

$$= \left\{ \cos\theta \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) \cdot \right\} H,$$

e, risolvendo le due ultime equazioni scritte rapporto alle derivate $\frac{\partial H}{\partial u}$, $\frac{\partial H}{\partial v}$, abbiamo

$$(\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2\varphi) \frac{\partial H}{\partial u} = \left\{ \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) \right\} \cdot H$$

$$(\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2\varphi) \frac{\partial H}{\partial v} = \left\{ \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) \right\} \cdot H.$$

Ma a causa delle formole (A), che sussistono nel caso attuale, si trova

$$\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi-\cos\theta\cos\varphi}{\cos\sigma}\cdot(\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)=$$

$$=-\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\cdot(\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}^2\varphi),$$

onde, sopprimendo nelle due precedenti il fattore $\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}^2\varphi$ non nullo, restano precisamente le formole (B') § 3, le quali potevano anche scriversi *a priori* come determinanti l'ampiezza H dello spostamento infinitesimo (*). Ed ora basta introdurre questi valori di $\frac{\partial H}{\partial u}$, $\frac{\partial H}{\partial v}$ nell'una o nell'altra delle (6'), e ne risulta per H il valore

$$H=\cos\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}, \tag{7}$$

dopo di che le citate formole (B') si traducono precisamente nelle (B); queste sussistono adunque anche pei generali sistemi obliqui di Weingarten, come si era asserito.

§ 5.

Equazioni a derivate parziali pei sistemi obliqui di Weingarten.

Risulta così stabilito che anche pei generali sistemi obliqui valgono le formole (A), (B) § 3, come nel caso dei sistemi elementari (Ω_σ); soltanto è da ricordare che nel caso attuale σ può essere una funzione di w, in parti-

---

(*) Si è preferito dedurre nuovamente queste formole dalle (6), le quali erano d'altronde necessarie per giungere alle (7) che dà l'ampiezza H dello spostamento. Così viene inoltre stabilito che la direzione dello spostamento ne determina completamente l'ampiezza.

colare una costante, e la funzione φ dipende, come θ, anche dalla terza variabile w. Ma ora facilmente dimostriamo che sussistono ancora insieme le formole dei quadri (a) (a') § 3. Per le (a) ciò è stato osservato sopra; quanto alle (a') la prima di esse combina appunto colla equazione (5') dedotta al paragrafo precedente, ove per H si ponga il valore dato dalla (7).

Ma allora, valendo le formole (B), il calcolo stesso eseguito al § 3 dimostra che le altre formole del quadro (a') seguono dalle condizioni di integrabilità.

Importa ora dimostrare inversamente che, se (θ, φ) è una coppia di funzioni di u, v, w che soddisfano il sistema simultaneo (A), (B) § 3 (dove σ significhi una funzione di w ovvero una costante assoluta) ne resterà individuato un sistema obliquo di Weingarten. E invero dalle (A) segue intanto che θ è una soluzione della equazione (1)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \,,$$

alla quale soddisfa anche φ. In virtù di questa e delle (A), (B) stesse, le formole dei quadri (a), (a') relative alle derivate di X_1, X_2, X_3 costituiscono, come facilmente si verifica, un sistema ortogonale *completamente integrabile.* I valori dei nove coseni

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

delle direzioni principali ne restano così determinati, a meno di una sostituzione ortogonale a coefficienti costanti. Dalle formole della prima riga nei quadri (a), (a') si hanno poi le derivate rapporto ad u, v, w di x, y, z e le condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte, a causa delle (A), (B), e sono quindi determinate x, y, z a meno di costanti additive.

Dopo ciò possiamo enunciare il risultato finale:

I sistemi obliqui di Weingarten *corrispondono biunivocamente alle coppie* (θ, φ) *di funzioni di* u, v, w *che soddisfano al seguente sistema di equazioni a derivate parziali:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \cos\varphi}{\cos\sigma} \,, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma} \,, \end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}&=(\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi-\cos\theta\cos\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial w},\\ \cos\sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}&=(\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial w},\end{aligned}\right\}\qquad(B)$$

dove $\sigma=\sigma(w)$ è una funzione di w, ovvero una costante assoluta. Nota la coppia di funzioni $(\theta,\ \varphi)$, *il corrispondente sistema obliquo di* WEINGARTEN *è individuato, a meno di movimenti nello spazio, dalle formole* (a) (a') *§ 3.*

Osserviamo ancora che se si calcola, in coordinate u, v, w, l'elemento lineare dello spazio dalle formole (a), (a') risulta

$$\left.\begin{aligned}d s^2=\cos^2\theta\,d u^2+\operatorname{sen}^2\theta\,d v^2+\cos^2\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 d w^2\,-&\\ -2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}\,d u\,d w\,+&\\ +2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}\,d v\,d w,&\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

e da questa forma del $d s^2$ è *intrinsecamente* determinato il sistema obliquo di WEINGARTEN. Per il seguito conviene scrivere la formola che dà *l'elemento $d V$ di volume* dello spazio in coordinate u, v, w. Il discriminante della forma (8) ha il valore

$$\cos^4\sigma\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2,$$

e la formola cercata è quindi

$$d V=\cos^2\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}\,d u\,d v\,d w.\qquad(9)$$

§ 6.

I SISTEMI (Ω_σ) CONIUGATI.

Cominciamo ora a studiare il caso particolarmente interessante che l'angolo σ sia una costante assoluta, e si tratti quindi di un *sistema* (Ω_σ). In tal caso, se si derivano le (A) rapporto a w, osservando le (B), si ottengono le altre

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}&=(\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial w}\\ \cos\sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}&=(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial w},\end{aligned}\right\}\qquad(B^*)$$

che sono affatto simili alle (B) e si deducono da queste ponendo al posto di θ, φ rispettivamente $\pi+\varphi$, θ, colla quale sostituzione le formole (A) rimangono inalterate. Segue di qui che la coppia di funzioni (θ, φ) determina intrinsecamente un secondo sistema (Ω'_σ), corrispondente alla forma (8) del $d\,s^2$, nella quale sia effettuato il detto cangiamento, cioè alla

$$\left.\begin{aligned}d\,s'^2=\cos^2\varphi\,d\,u^2+\operatorname{sen}^2\varphi\,d\,v^2+\cos^2\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 d\,w^2+&\\ +2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w}\,d\,u\,d\,w-&\\ -2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w}\,d\,v\,d\,w.&\end{aligned}\right\}\qquad(8^*)$$

Ora è assai notevole che, una volta trovato il primo sistema (Ω_σ), il secondo (Ω'_σ), che diremo il *coniugato* del primo, si ottiene prendendo di ciascuna superficie pseudosferica S di (Ω_σ) la trasformata S' secondo quella trasformazione di BÄCKLUND B_σ cui appartiene la trasformazione infinitesima $B_\sigma^{(\varepsilon)}$. Per dimostrare questo basta partire dalle formole (2) § 3 che danno queste trasformate S':

$$x'=x+\cos\sigma\,(\cos\varphi\,X_1+\operatorname{sen}\varphi\,X_2),$$

e derivandole rapporto ad u, v, w si ottiene per le (a), (a') (cf. Vol. II, § 374):

$$\frac{\partial x'}{\partial u}=\cos\varphi\,X'_1,\quad \frac{\partial x'}{\partial v}=\operatorname{sen}\varphi\,X'_2,\quad \frac{\partial x'}{\partial w}=\cos\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial w}(-\operatorname{sen}\varphi\,X_1+\cos\varphi\,X_2),$$

delle quali l'ultima, a causa delle (3*) § 3, può scriversi anche

$$\frac{\partial x'}{\partial w}=\cos\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\,X'_1-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\,X'_2-\cos\sigma\,X'_3).$$

Queste formole dimostrano appunto che le superficie S'_1 così collocate nello spazio, formano il secondo sistema (Ω'_σ) corrispondente alla forma (8*) del $d\,s'^2$.

Osserviamo ora un caso particolare importante di sistemi (Ω_σ), (Ω'_σ) coniugati, il caso $\sigma = 0$ dei sistemi ortogonali di WEINGARTEN, nel qual caso le formule (A), (B), (B*) diventano

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial w} &= -\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v\,\partial w} &= -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial w} &= \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\,\partial w} &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w}\,. \end{aligned}\right.$$

Queste, cangiate leggermente le notazioni, coincidono colle formole che al § 441 delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 554-555) definiscono una coppia di *sistemi complementari di* WEINGARTEN *a flessione costante;* a questa coppia riducesi pertanto quando $\sigma = 0$ la coppia di sistemi (Ω_σ), (Ω'_σ) coniugati.

I sistemi complementari di WEINGARTEN a flessione costante sono dunque un caso particolare di sistemi coniugati (Ω_σ), (Ω'_σ); ma ora andremo a dimostrare che inversamente da quei sistemi complementari si passa alle coppie generali di sistemi coniugati (Ω_σ), (Ω'_σ) con una trasformazione ben nota nella teoria delle superficie a curvatura costante (trasformazione di LIE). Con questo risultato i teoremi di esistenza pei sistemi (Ω_σ) vengono ricondotti a quelli già analiticamente stabiliti pei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante e ricevono così una dimostrazione rigorosa. (Cf. § 2 in fine).

§ 7.

LE COPPIE DI SISTEMI CONIUGATI (Ω_σ), (Ω'_σ) E LA TRASFORMAZIONE L_σ.

Indichino Θ, Φ due funzioni delle variabili u', v', w' che soddisfino al sistema di equazioni a derivate parziali caratteristico per le coppie di sistemi complementari di WEINGARTEN a flessione costante:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u'} + \frac{\partial \Theta}{\partial v'} &= \cos\Theta \operatorname{sen}\Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v'} + \frac{\partial \Theta}{\partial u'} &= -\operatorname{sen}\Theta\cos\Phi \end{aligned}\right\} \ (\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u'\,\partial w} &= -\cos\Theta\cos\Phi\frac{\partial\Theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v'\,\partial w} &= -\operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\Phi\frac{\partial\Theta}{\partial w} \end{aligned}\right\} \ (\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u' \partial w} &= \cos\Theta \cos\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v' \partial w} &= \operatorname{sen}\Theta \operatorname{sen}\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \qquad (\beta^*)$$

che è quello già scritto sopra, cangiata soltanto la denominazione ai parametri delle linee di curvatura in u', v' e indicate le funzioni con lettere majuscole.

Se operiamo sulle variabili u', v' la sostituzione lineare

$$u' = \frac{u - v \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}, \quad v' = \frac{-u \operatorname{sen}\sigma + v}{\cos\sigma}, \qquad (10)$$

indi poniamo

$$\Theta(u', v', w) = \theta(u, v, w), \quad \Phi(u', v', w) = \varphi(u, v, w), \qquad (10^*)$$

vediamo subito che θ, φ vengono precisamente a soddisfare le equazioni (A), (B), (B*); e inversamente se θ, φ verificano le (A), (B), (B*), le funzioni Θ, Φ calcolate dalle (10*) soddisfano le (α), (β), (β^*).

L'interpretazione geometrica di questi risultati segue dall'osservare che le formole (10), (10*) corrispondono precisamente, per ogni singola superficie pseudosferica $w =$ cost., alla *trasformazione L_σ di* Lie (Vol. II, pag. 432-434), sicchè ogni superficie pseudosferica S del sistema (Ω_σ) è la trasformata, per mezzo della L_σ di Lie, della corrispondente Σ nel sistema di Weingarten. Tale risultato è tanto più notevole in quanto che la L_σ, applicata ad una superficie pseudosferica isolata, ha soltanto un significato intrinseco (analitico), e qui invece, nella trasformazione simultanea di tutte le superficie di un sistema di Weingarten a flessione costante, viene ad acquistare un effettivo significato geometrico, che possiamo enunciare così:

Se alle superficie pseudosferiche di una coppia di sistemi complementari a flessione costante di Weingarten *si applica una trasformazione L_σ di* Lie, *le superficie trasformate, convenientemente collocate nello spazio, costituiscono due sistemi coniugati* (Ω_σ), (Ω'_σ).

Od anche possiamo dire più brevemente: *La trasformazione L_σ di* Lie *cangia una coppia di sistemi complementari di* Weingarten *a flessione costante in una coppia di sistemi* (Ω_σ), (Ω'_σ) *coniugati.*

E poichè le trasformazioni L_σ di Lie al variare di σ formano un gruppo continuo (ad un parametro) ne segue più in generale: *Ogni coppia di sistemi*

(Ω_σ) (Ω'_σ) *coniugati è cangiata da qualunque trasformazione di* Lie *in un'altra tale coppia.*

In fine osserviamo che, se si confronta un sistema (W) di Weingarten a flessione costante col sistema (Ω_σ) derivato per trasformazione L_σ di Lie, ne resta altresì fissata (a meno di movimenti) una rappresentazione dello spazio sopra sè stesso, essendo punti corrispondenti in (W), (Ω_σ) quelli dati dalla stessa terna di valori di u, v, w. Ora per la formola (9) l'elemento di volume relativo al sistema (Ω_σ) è

$$d\,V = \cos^2\sigma \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial w}\, d\,u\, d\,v\, d\,w$$

e quello $d\,V'$ relativo a (W) in coordinate u', v', w

$$d\,V' = \cos\Theta \operatorname{sen}\Theta \frac{\partial\Theta}{\partial w}\, d\,u'\, d\,v'\, d\,w,$$

e per ciò in coordinate u, v, w, osservando le (10) (10*),

$$d\,V' = \cos\theta \operatorname{sen}\theta \frac{\partial\theta}{\partial w}\, d\,u\, d\,v\, d\,w.$$

Si ha dunque semplicemente

$$d\,V = \cos^2\sigma\, d\,V',$$

e per ciò: *La rappresentazione dello spazio sopra sè stesso che cangia il sistema* (W) *nel sistema* (Ω_σ) *conserva la proporzionalità dei volumi.* È notevole poi che per le superficie pseudosferiche corrispondenti nei due sistemi la rappresentazione stessa è una trasformazione di Lie e conserva le aree, mentre per le trajettorie (w) conserva la proporzionalità degli archi.

§ 8.

Le trajettorie (w) nei sistemi (Ω_σ) come curve di Bertrand.

Prendiamo ora a studiare nei sistemi (Ω_σ) le singole trajettorie isogonali (w) descritte dai punti delle superficie pseudosferiche. Risulta già dalle considerazioni geometriche del § 2 che queste trajettorie *non possono essere* *curve qualunque*, ed, esaminando la questione più da vicino, troveremo che esse debbono appartenere alla classe delle *curve di* BERTRAND.

Sia C una qualunque di queste trajettorie, lungo le quali restano costanti u e v ($u = u_0$, $v = v_0$) e varia w. Indichiamo con s l'arco di C e, mantenendo le usuali notazioni della teoria delle curve, denotiamo ancora con

α, β, γ	i coseni	di direzione	della tangente
ξ, η, ζ	»	»	normale principale
λ, μ, ν	»	»	binormale,

in fine con $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ rispettivamente la flessione e la torsione della curva.

Abbiamo in primo luogo

$$d s = \cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} d w, \tag{11}$$

indi

$$\alpha = \frac{1}{\cos\sigma \dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \cdot \frac{\partial x}{\partial w},$$

cioè per la prima (a′) § 3

$$\alpha = -\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi X_1 + \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi X_2 - \cos\sigma X_3, \tag{12}$$

colle analoghe per β, γ. Differenziamo queste rapporto a w, servendoci a sinistra delle formole di FRENET, a destra di quelle del quadro (a′) § 3, ed avremo

$$\cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot \frac{\xi}{\rho} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} - \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) (\cos\varphi X_1 + \operatorname{sen}\varphi X_2)$$

colle analoghe per η, ζ. Quadrando e sommando ne viene

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{1}{\cos\sigma} - \operatorname{tg}\sigma \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}}\right)^2,$$

per cui avremo

$$\frac{1}{\rho} = \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{\cos\sigma} - \operatorname{tg}\sigma \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}}\right), \tag{13}$$

essendo $\varepsilon = \pm 1$ secondo che il secondo fattore a destra è positivo o negativo (*). Dopo ciò la formola per ξ resta

$$\xi = \varepsilon (\cos \varphi X_1 + \operatorname{sen} \varphi X_2), \tag{14}$$

e valgono le analoghe per η, ζ. Ora dalle (12) e (14) risultano i valori dei coseni di direzione della binormale

$$\lambda = \varepsilon (\cos \sigma \operatorname{sen} \varphi X_1 - \cos \sigma \cos \varphi X_2 - \operatorname{sen} \sigma X_3), \tag{15}$$

colle analoghe per μ, ν. Se si torna a differenziare quest'ultima rapporto a w, osservando le formole di Frenet e quelle del quadro (a'), si trova subito:

$$\frac{1}{T} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{\frac{\partial \theta}{\partial w}}. \tag{16}$$

Sostituendo nella (13), ne risulta che fra le curvature $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ intercede la relazione lineare a coefficienti costanti

$$\frac{\operatorname{sen} \sigma}{T} + \frac{\varepsilon \cos \sigma}{\rho} = 1, \tag{17}$$

onde risulta il teorema: *In ogni sistema* (Ω_σ) *tutte le trajettorie isogonali* (w) *delle superficie pseudosferiche del sistema sono curve di* Bertrand *della medesima famiglia* (17), *che dipende solo dall'angolo* σ.

Si osservino qui due casi particolari: 1.° Se φ è indipendente da w, risulta $\frac{1}{T} = 0$, $\rho = \cos \sigma$, cioè le trajettorie sono circoli di raggio $= \cos \sigma$, e il sistema (Ω_σ) è elementare; 2.° Quando $\sigma = 0$ risulta $\frac{1}{\rho} = 1$ ed il sistema (Ω_σ) è un sistema di Weingarten a flessione costante $= 1$.

In fine si confrontino le formole generali precedenti con quelle che si hanno pel sistema (W) di Weingarten da cui deriva il nostro sistema (Ω_σ) colla trasformazione L_σ (§ 7). Indicando con $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{T'}$ le due curvature per

(*) Si ricordi che, per le convenzioni fondamentali, la flessione $\frac{1}{\rho}$ si assume sempre positiva.

la C' nel sistema (W), abbiamo, per le (13), (16) stesse,

$$\frac{1}{\rho'}=1, \quad \frac{1}{T'}=\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial w}}{\frac{\partial \Theta}{\partial w}}=\frac{1}{T},$$

e inoltre

$$d\, s=\cos \sigma\, d\, s' ;$$

dunque: *la curva C' a flessione costante e la curva C di* Bertrand *si corrispondono per archi proporzionali ed eguaglianza di torsione nei punti corrispondenti.*

§ 9.

Ulteriori proprietà geometriche dei sistemi (Ω_σ).

Le formole stabilite al paragrafo precedente conducono ad altre notevoli conseguenze che qui vogliamo esaminare.

Si osservino in primo luogo le (14); queste ci dicono che nel sistema (Ω_σ) le normali principali delle trajettorie (w) coincidono colle congiungenti le coppie di punti corrispondenti nei due sistemi coniugati (Ω_σ), (Ω'_σ), ossia coi raggi delle relative congruenze pseudosferiche. E poichè la medesima proprietà compete, per simmetria, alle trajettorie (w) nel sistema coniugato (Ω'_σ), ne segue che due trajettorie corrispondenti C, C' in (Ω_σ), (Ω'_σ) hanno a comune le normali principali, onde si rileva nuovamente che esse sono curve di Bertrand:

In due sistemi (Ω_σ), (Ω'_σ) coniugati le coppie C, C' di trajettorie (w) corrispondenti sono curve coniugate di Bertrand *(aventi a comune le normali principali).*

Prendiamo ora le formole (15) pei coseni di direzione della binormale e osserviamo che, per le ultime (3) § 3, possono scriversi:

$$\lambda=\varepsilon X'_3, \quad \mu=\varepsilon Y'_3, \quad \nu=\varepsilon Z'_3,$$

in parole: *La binormale alla trajettoria (w) in un punto P è parallela alla normale nel punto corrispondente P' della superficie pseudosferica S' nel sistema coniugato,* ovvero anche:

I piani osculatori delle trajettorie (w) *nei punti di una superficie pseudosferica* S *del sistema* (Ω_σ) *inviluppano la superficie* S' *corrispondente nel sistema coniugato* (Ω'_σ).

Ora si ricordi che, per una proposizione dovuta a Bioche, se si conducono nei punti di una curva C di Bertrand le parallele alle binormali nei punti corrispondenti della curva C' di Bertrand coniugata, la rigata loro luogo ha la linea C per linea di stringimento ed è applicabile sull'iperboloide rotondo ad una falda.

Abbiamo quindi l'altro teorema:

In ogni sistema (Ω_σ) *le normali alle superficie pseudosferiche nei loro punti d'incontro con una delle curve* C *di* Bertrand *loro trajettorie isogonali formano una rigata che ha* C *per linea di stringimento ed è applicabile sull'iperboloide rotondo ad una falda* (*di semi-assi* $a = \cos\sigma$, $b = \operatorname{sen}\sigma$).

Senza ricorrere alla proposizione di Bioche, è facile constatare colle nostre formole questo risultato. Si consideri invero una tale rigata e dicasi ψ l'arco della curva C ($u = u_0$, $v = v_0$), e t il tratto di generatrice, contato a partire da C. Per le coordinate x_0, y_0, z_0 di un punto della rigata, espresse per le variabili w, t, avremo

$$x_0 = x + t X_3, \quad y_0 = y + t Y_3, \quad z_0 = z + t Z_3 .$$

Calcoliamo l'elemento lineare ds di questa rigata in coordinate t, ψ osservando che si ha

$$d\psi = \cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot dw,$$

e quindi per le (u') § 3

$$\frac{\partial x_0}{\partial \psi} = -(\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi + t\cos\varphi) X_1 + (\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi - t\operatorname{sen}\varphi) X_2 - \cos\sigma X_3;$$

e poichè

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = X_3,$$

ne risulta

$$ds_0^2 = dt^2 - 2\cos\sigma\, dt\, d\psi + (t^2 + 1)\, d\psi^2.$$

Questa forma d'elemento lineare appartiene appunto all'iperboloide rotondo ad una falda di semi-assi $a = \cos\sigma$, $b = \operatorname{sen}\sigma$ (cf. Vol. I, pag. 269). La stessa cosa risulta dalla formola stessa, ove si consideri che non dipende affatto dal particolare sistema (Ω_σ) considerato. Si prenda allora per (Ω_σ) un sistema elementare; la rigata diventa precisamente l'iperboloide rotondo ad una falda con raggio $a = \cos\sigma$ del circolo di gola, e coll'angolo $\frac{\pi}{2} - \sigma$ d'inclinazione della generatrice sull'asse.

Da ultimo possiamo ritornare sul teorema d'esistenza (§ 2) nel caso dei sistemi (Ω_σ) e dimostrarlo ora in modo rigoroso. Si ricordi per ciò che un sistema (W) di WEINGARTEN a flessione costante è individuato da una superficie pseudosferica del sistema e da una trajettoria a flessione costante, elementi questi che possono darsi ad arbitrio. Una trasformazione L_σ di LIE cangia il sistema (W) in un sistema (Ω_σ), nel quale resta arbitraria una superficie pseudosferica S del sistema ed una curva C di BERTRAND *della famiglia* (17), purchè esca da un punto P di S colla normale principale diretta nel piano tangente, mentre la normale di S coincide colla generatrice della rigata applicabile sull'iperboloide rotondo ed avente la curva C per linea di stringimento. Abbiamo dunque il risultato:

In un sistema (Ω_σ) possono darsi ad arbitrio una superficie pseudosferica S del sistema ed una curva C di BERTRAND *uscente da un punto di S in conveniente orientazione.*

§ 10.

I SISTEMI (Ω_σ) ELICOIDALI.

Prima di procedere oltre, alla teoria delle trasformazioni, consideriamo almeno un esempio di sistemi (Ω_σ) che non si riducono a sistemi elementari.

Per questo partiamo dal noto sistema di WEINGARTEN a flessione costante, costituito da elicoidi pseudosferiche congruenti per traslazione lungo l'asse (Vol. II, pag. 559-560), ed applichiamo ad un tale sistema (W) la trasformazione L_σ di LIE per dedurne, conforme al § 7, un sistema (Ω_σ). Siccome la L_σ cangia un'elicoide pseudosferica in un'altra tale elicoide, il sistema (Ω_σ) sarà composto ancora di elicoidi pseudosferiche eguali e di più, come risulta dalle formole effettive, congruenti per traslazione lungo l'asse. È poi da osservare che qualunque elicoide pseudosferica dà luogo, per traslazione lungo l'asse, ad un tale sistema (Ω_σ).

Senza trattenerci a dare qui in termini finiti le equazioni di questo sistema (Ω_σ), basterà definirlo intrinsecamente coi valori di θ, φ che lo individuano (§ 6). Indichi k il modulo di una classe di funzioni ellittiche di Jacobi, k' il modulo complementare, e pongasi

$$\tau = \frac{(k' - \operatorname{sen}\sigma)\,u + (1 - k'\operatorname{sen}\sigma)\,v}{k'\cos\sigma} + w,$$

indi si assumano le funzioni φ, θ definite dalle formole seguenti

$$\cos\varphi = c\,n\,\tau, \quad \operatorname{sen}\varphi = s\,n\,\tau$$

$$\cos\theta = c\,n\,(\tau + K) = -\frac{k'\,s\,n\,\tau}{d\,n\,\tau}, \quad \operatorname{sen}\theta = -s\,n\,(\tau + K) = -\frac{c\,n\,\tau}{d\,n\,\tau};$$

si vedrà che, avendosi

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = d\,n\,\tau, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{k'}{d\,n\,\tau},$$

le equazioni fondamentali (A), (B), § 6 risultano soddisfatte.

Siccome poi nella formola (8) pel $d s^2$ i coefficienti risultano funzioni solo di τ, ne segue che questo $d s^2$ ammette due gruppi ad un parametro permutabili fra loro di trasformazioni in sè (movimenti). In uno di questi w resta fissa e perciò le singole superficie pseudosferiche strisciano ciascuna sopra sè stessa e sono quindi elicoidi coassiali. Il secondo movimento scambia le elicoidi fra loro; esse sono quindi congruenti per traslazione lungo l'asse.

Un caso particolare notevole si ha prendendo $k = \cos\sigma$, $k' = \operatorname{sen}\sigma$; allora $\tau = \frac{v}{k} + w$ e le elicoidi si riducono a superficie pceudosferiche di rotazione del tipo ellittico.

§ 11.

L'equazione di Riccati per la trasformazione complementare B_0.

Riprendiamo ora la teoria generale dei sistemi obliqui di Weingarten, nei quali l'angolo σ può variare da una superficie pseudosferica all'altra del sistema, per stabilire la teoria delle *trasformazioni* per questi sistemi.

Cominciando dalla trasformazione complementare B_0, supponiamo di prendere di ciascuna superficie pseudosferica S del sistema obliquo iniziale *una* trasformata complementare $\bar{S}$ data dalle formole

$$\bar{x} = x + \cos\theta' X_1 + \operatorname{sen}\theta' X_2, \tag{18}$$

dove θ' è una funzione di u, v, w, che soddisfa alle equazioni della trasformazione complementare B_0:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \cos\theta \operatorname{sen}\theta' \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\operatorname{sen}\theta \cos\theta'. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Noi vogliamo ora ricercare se è possibile assoggettare θ' ad ulteriori condizioni per modo che le ∞^1 superficie $\bar{S}$, complementari della S, formino un nuovo sistema obliquo di Weingarten, corrispondente al medesimo angolo $\sigma = \sigma(w)$.

Cominciamo dal derivare le (18) rapporto a w, il che, tenendo conto delle (a′) § 3, ci dà

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial w} = &\left\{ \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} (\operatorname{sen}\theta' - \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi) - \operatorname{sen}\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial w} \right\} \cdot X_1 + \\ &+ \left\{ \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} (\cos\sigma\cos\varphi - \cos\theta') + \cos\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial w} \right\} X_2 + \\ &+ \cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \Big[\cos(\theta' - \varphi) - \cos\sigma \Big] X_3, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

e, quadrando e sommando colle analoghe, viene:

$$S\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial w}\right)^2 = \left(\frac{\partial \theta'}{\partial w}\right)^2 - 2 \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \frac{\partial \theta'}{\partial w} \Big[1 - \cos\sigma \cos(\theta' - \varphi) \Big] + \\ + \Big[1 - \cos\sigma\cos(\theta' - \varphi) \Big]^2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2.$$

Ora, affinchè le $\bar{S}$ formino un sistema obliquo di Weingarten corrispondente all'angolo σ, è in primo luogo *necessario* che si abbia (§ 4)

$$S\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial w}\right)^2 = \cos^2\sigma \left(\frac{\partial \theta'}{\partial w}\right)^2,$$

e questa, confrontata colla precedente, si scrive

$$\left\{ \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \theta'}{\partial w} - \left[1 - \cos\sigma \cos(\theta' - \varphi)\right] \frac{\partial \theta}{\partial w} \right\}^2 = 0\,;$$

alle equazioni (19) per θ' dobbiamo dunque aggiungere l'altra

$$\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \theta'}{\partial w} = \left[1 - \cos\sigma \cos(\theta' - \varphi)\right] \frac{\partial \theta}{\partial w}\,. \tag{19*}$$

Intanto osserviamo che le (19), (19*), assumendo per incognita $\operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}$ formano un sistema differenziale del *tipo di* Riccati; di più, se si scrivono le condizioni d'integrabilità per questo sistema, si trovano identicamente soddisfatte in forza delle equazioni (A), (B) § 5, onde si rileva che il sistema (19), (19*) è *completamente integrabile.* La sua soluzione più generale θ' contiene dunque una costante arbitraria; e noi vogliamo dimostrare che, comunque si scelga questa soluzione θ', le formole (18) daranno in effetto un nuovo sistema obliquo di Weingarten corrispondente al medesimo angolo σ.

§ 12.

Verifiche delle proprietà della trasformazione complementare B_0.

Dimostriamo in primo luogo che nel sistema formato dalle complementari $\bar{S}$, definito dalle (18), le trajettorie (w) sono inclinate su queste $\bar{S}$ dell'angolo $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

In effetto i coseni di direzione X_3, Y_3, Z_3 della normale alla $\bar{S}$ sono dati da

$$\overline{X_3} = \operatorname{sen}\theta' X_1 - \cos\theta' X_2$$

colle analoghe, e quelli delle trajettorie (w) da

$$\frac{1}{\cos\sigma \frac{\partial \theta'}{\partial w}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial w}$$

ed analoghe. Per il coseno dell'angolo compreso si trova quindi dalle (20)

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}\left[1-\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)\right]-\frac{\partial\theta'}{\partial w}}{\cos\sigma\frac{\partial\theta'}{\partial w}}=-\cos\sigma,$$

ciò che prova l'asserto.

In secondo luogo basterà ora provare che si può determinare un angolo φ' legato a θ' dalle equazioni (A), (B) § 5 e tale che sussistano inoltre le formole

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial w}=\cos\sigma\frac{\partial\theta'}{\partial w}\left\{-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi'\,\overline{X}_1+\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi'\,X_2-\cos\sigma\,\overline{X}_3\right\} \tag{21}$$

e le analoghe, dove $\overline{X}_1$, X_2, $\overline{X}_3$, ecc. indicano i coseni delle direzioni principali per la $\overline{S}$. Ora dalle (3) § 3 abbiamo

$$\left\{\begin{aligned}\overline{X}_1&=\cos\theta\,(\cos\theta'\,X_1+\operatorname{sen}\theta'\,X_2)-\operatorname{sen}\theta\,X_3\\ \overline{X}_2&=\operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta'\,X_1+\operatorname{sen}\theta'\,X_2)+\cos\theta\,X_3\\ \overline{X}_3&=\operatorname{sen}\theta'\,X_1-\cos\theta'\,X_2,\end{aligned}\right.$$

e introducendo questi valori nelle (21), poi paragonando i coefficienti di X_1, X_2, X_3 cogli omologhi nelle (20) si ottengono (soppresso il fattor comune $\operatorname{sen}\sigma\neq0$) le tre seguenti equazioni:

$$\left\{\begin{aligned}&(\operatorname{sen}\theta'-\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial w}=\left[\cos\sigma\cos\theta'\operatorname{sen}(\theta-\varphi')+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\right]\frac{\partial\theta'}{\partial w}\\ &(-\cos\theta'+\cos\sigma\cos\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial w}=\left[\cos\sigma\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}(\theta-\varphi')-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\right]\frac{\partial\theta'}{\partial w}\\ &\left[\cos(\theta'-\varphi)-\cos\sigma\right]\frac{\partial\theta}{\partial w}=\cos(\theta-\varphi')\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta'}{\partial w}\,.\end{aligned}\right.$$

Ma, se si ha riguardo alla (19*), queste tre si riducono alle due *concordanti*

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta-\varphi')&=\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\theta'-\varphi)}{1-\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)}\\ \cos(\theta-\varphi')&=\frac{\cos(\theta'-\varphi)-\cos\sigma}{1-\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)}\,,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

che possono anche compendiarsi nell'unica equivalente

$$\operatorname{tg}\frac{\theta-\varphi'}{2}=\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\theta'-\varphi}{2}\,. \tag{22*}$$

In queste (22), (22*) riconosciamo le formole del *teorema di permutabilità* per le quattro soluzioni θ, φ, θ', φ' della equazione fondamentale (1)

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta$$

(Vedi Vol. II, § 383); ne segue che siccome θ è legata a φ, θ' rispettivamente da una B_σ e da una B_0, la quarta soluzione φ' sarà legata a θ' dalla B_σ, a φ dalla B_0. In particolare sussisteranno dunque fra θ', φ' le equazioni (A) § 6

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\varphi'}{\partial u}+\frac{\partial\theta'}{\partial v}&=\frac{\cos\theta'\operatorname{sen}\varphi'+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi'}{\cos\sigma}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial v}+\frac{\partial\theta'}{\partial u}&=-\frac{\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi'+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\operatorname{sen}\varphi'}{\cos\sigma}\,.\end{aligned}\right.$$

Resta ora dunque soltanto da dimostrare che θ', φ' soddisfano anche le (B) § 5:

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma\frac{\partial^2\theta'}{\partial u\,\partial w}&=(\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'-\cos\theta'\cos\varphi)\frac{\partial\theta'}{\partial w}\\ \cos\sigma\frac{\partial^2\theta'}{\partial v\,\partial w}&=(\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\operatorname{sen}\varphi'-\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi')\frac{\partial\theta'}{\partial w}\,.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Per questo si comincino a dedurre dalle (19), derivate rapporto a w, le due

$$\left\{\begin{aligned}\cos\sigma\frac{\partial^2\theta'}{\partial u\,\partial w}&=-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\frac{\partial\theta}{\partial w}+\cos\sigma\cos\theta\cos\theta'\frac{\partial\theta'}{\partial w}-\cos\sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\\ \cos\sigma\frac{\partial^2\theta'}{\partial v\,\partial w}&=-\cos\sigma\cos\theta\cos\theta'\frac{\partial\theta}{\partial w}+\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\frac{\partial\theta'}{\partial w}-\cos\sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\end{aligned}\right.$$

ed in queste si pongano per $\cos\sigma\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}$, $\cos\sigma\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}$ i valori dati dalle (B) § 5.

Così le formole (23) da dimostrarsi diventano

$$\left.\begin{aligned}
&(\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'-\cos\theta'\cos\varphi'-\cos\sigma\cos\theta\cos\theta')\frac{\partial\theta'}{\partial w}=\\
&\qquad=(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta')\frac{\partial\theta}{\partial w}\\
&(\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\cos\varphi'-\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta')\frac{\partial\theta'}{\partial w}=\\
&\qquad=(\cos\theta\cos\varphi-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi-\cos\sigma\cos\theta\cos\theta')\frac{\partial\theta}{\partial w}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(23^*)$$

Ora dalle (22) risulta

$$\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\varphi'=\operatorname{sen}\theta\cos(\theta-\varphi')-\cos\theta\operatorname{sen}(\theta-\varphi')=\\
&\qquad=\frac{\operatorname{sen}\theta\,[\cos(\theta'-\varphi)-\cos\sigma]-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}(\theta'-\varphi)}{1-\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)}\\
&\cos\varphi'=\cos\theta\cos(\theta-\varphi')+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\theta-\varphi')=\\
&\qquad=\frac{\cos\sigma\,[\cos(\theta'-\varphi)-\cos\sigma]+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\theta'-\varphi)}{1-\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)}\,,
\end{aligned}\right.$$

formole che per la (19*) possiamo scrivere

$$\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta'}{\partial w}\operatorname{sen}\varphi'=\left\{\operatorname{sen}\theta\Big[\cos(\theta'-\varphi)-\cos\sigma\Big]-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}(\theta'-\varphi)\right\}\frac{\partial\theta}{\partial w}\\
&\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta'}{\partial w}\cos\varphi'=\left\{\cos\theta\Big[\cos(\theta'-\varphi)-\cos\sigma\Big]+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\theta'-\varphi)\right\}\frac{\partial\theta}{\partial w}\,.
\end{aligned}\right.$$

Se ora nelle (23*) introduciamo questi ultimi valori, esse si mutano in relazioni lineari omogenee in $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, che con semplici calcoli trigonometrici si verificano essere identiche. Come conclusione della nostra ricerca, formuliamo il teorema:

Noto un sistema obliquo di WEINGARTEN, *se si applica a ciascuna sua superficie pseudosferica S una trasformazione complementare B_0 che la traduca in una trasformata $\overline{S}$, secondo le* (18), *nelle quali per θ' si ponga una qualunque soluzione del sistema integrabile* (19), (19*), *le ∞^1 superficie complementari $\overline{S}$ formano un nuovo sistema obliquo di* WEINGARTEN.

Così ogni sistema obliquo di WEINGARTEN, *integrata l'equazione di* RICCATI *della trasformazione complementare* B_0, ne fa nascere una semplice infinità di nuovi. In tutto questo però noi abbiamo supposto $\operatorname{sen} \sigma \neq 0$, ed in effetto il caso $\operatorname{sen} \sigma = 0$ è veramente un caso eccezionale; qui il sistema diventa un sistema ortogonale di WEINGARTEN ed ammette un solo sistema complementare. Del resto la formola stessa (19*) rende ragione di questo caso d'eccezione, perchè se si suppone

$$\operatorname{sen} \sigma = 0, \quad \cos \sigma = 1$$

essa si riduce a $\cos(\theta' - \varphi) = 1$ e dà, come unico sistema complementare, il coniugato.

§ 13.

EQUAZIONE DI RICCATI PER LA TRASFORMAZIONE GENERALE DI BÄCKLUND.

Dal caso della trasformazione complementare B_0, trattata nei due paragrafi precedenti, passiamo alla generale trasformazione B_c di BÄCKLUND *a costante fissa* c, per compiere una ricerca perfettamente analoga. Di ciascuna superficie pseudosferica S del dato sistema obliquo di WEINGARTEN prendiamo *una* trasformata $\bar{S}$ secondo la B_c, data dalle formole

$$x = x + \cos c\,(\cos \theta' X_1 + \operatorname{sen} \theta' X_2), \tag{24}$$

dove questa volta θ' soddisfa alle equazioni per la trasformazione B_c:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \theta' + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \theta \cos \theta'}{\cos c} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta' + \operatorname{sen} c \cos \theta \operatorname{sen} \theta'}{\cos c}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Precisamente come al § 11, cerchiamo a quali ulteriori condizioni dobbiamo assoggettare θ' per ottenere che le superficie trasformate $\bar{S}$ formino un nuovo sistema obliquo di WEINGARTEN (collo stesso angolo σ). Perciò, derivando anzi tutto la (24) rapporto a w, deduciamo la

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}}{\partial w} = &\left\{\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}(\cos c\operatorname{sen}\theta' - \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi) - \cos c\operatorname{sen}\theta'\frac{\partial\theta'}{\partial w}\right\}X_1 + \\ &+\left\{\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}(\cos\sigma\cos\varphi - \cos c\cos\theta') + \cos c\cos\theta'\frac{\partial\theta'}{\partial w}\right\}X_2 + \\ &+\cos\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}\left[\cos c\cos(\theta'-\varphi) - \cos\sigma\right]X_3,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

indi, quadrando e sommando,

$$\begin{aligned}S\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial w}\right)^2 = \cos^2 c\left(\frac{\partial\theta'}{\partial w}\right)^2 - 2\operatorname{sen}\sigma\cos c\left[\cos c - \cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)\right]\frac{\partial\theta}{\partial w}\,\frac{\partial\theta'}{\partial w} + \\ +\left\{\cos^2\sigma + \cos^2 c\operatorname{sen}^2\sigma - 2\cos c\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi) + \right. \\ \left. + \cos^2 c\cos^2\sigma\cos^2(\theta'-\varphi)\right\}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2.\end{aligned}$$

Dobbiamo eguagliare questa espressione (cf. § 11) al valore $\cos^2\sigma\left(\frac{\partial\theta'}{\partial w}\right)^2$, onde segue per il rapporto $\xi = \dfrac{\frac{\partial\theta'}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}$ l'equazione quadratica

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{sen}^2\sigma - \operatorname{sen}^2 c)\,\xi^2 - 2\cos c\operatorname{sen}\sigma\left[\cos c - \cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)\right]\xi + \\ + \cos^2\sigma + \cos^2 c\operatorname{sen}^2\sigma - 2\cos c\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi) + \\ + \cos^2 c\cos^2\sigma\cos^2(\theta'-\varphi) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Il discriminante di questa equazione in ξ è il quadrato perfetto di

$$\operatorname{sen} c\cos\sigma\left[\cos\sigma - \cos c\cos(\theta'-\varphi)\right],$$

onde risolvendo la (27), *col supporre* $\operatorname{sen}^2\sigma \neq \operatorname{sen}^2 c$, abbiamo

$$\frac{\partial\theta'}{\partial w} = \frac{\cos c\operatorname{sen}\sigma[\cos c - \cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)] + \varepsilon\operatorname{sen} c\cos\sigma[\cos\sigma - \cos c\cos(\theta'-\varphi)]}{\operatorname{sen}^2\sigma - \operatorname{sen}^2 c}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial w}, \tag{28}$$

dove $\varepsilon = \pm 1$. Per togliere l'indecisione nel segno ricorriamo all'altra condizione (cf. § 11)

$$S\,\overline{X}_3 \frac{\partial \overline{x}}{\partial w} = \varepsilon' \cos^2 \sigma \frac{\partial \theta'}{\partial w}, \tag{29}$$

dove nuovamente $\varepsilon' = \pm 1$. Siccome qui

$$\overline{X}_3 = \cos c\,(\operatorname{sen} \theta' X_1 - \cos \theta' X_2) - \operatorname{sen} c\, X_3\,,$$

la (29) ci dà per la (26)

$$\frac{\partial \theta'}{\partial w} = \frac{\cos^2 c \operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen} c \cos^2\sigma - (\cos c \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma + \operatorname{sen} c\cos c\cos\sigma)\cos(\theta' - \varphi)}{\cos^2 c + \varepsilon' \cos^2 \sigma} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial w}.$$

Il confronto colla (28) dimostra che si deve prendere

$$\varepsilon = +1, \qquad \varepsilon' = -1,$$

dopo di che le due equazioni combinano, e sopprimendo al numeratore e denominatore della formola il fattore $\operatorname{sen} c + \operatorname{sen} \sigma$ (per l'ipotesi $\operatorname{sen}^2 \sigma - \operatorname{sen}^2 c$ non nullo), resta la formola definitiva

$$\frac{\partial \theta'}{\partial w} = \frac{1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \sigma - \cos c \cos \sigma \cos(\theta' - \varphi)}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial w}. \tag{25*}$$

Si è escluso nella discussione il caso $\operatorname{sen}^2 \sigma = \operatorname{sen}^2 c$; ma è facile vedere che in questo caso sarà $\operatorname{sen} \sigma = -\operatorname{sen} c$ e varrà ancora la stessa equazione finale (25*).

Difatti per $\operatorname{sen}^2 \sigma = \operatorname{sen}^2 c$, la (27) diventa lineare in ξ e dà

$$\frac{\partial \theta'}{\partial w} = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 c - \cos c \cos \sigma \cos(\theta' - \varphi)}{2 \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial \theta}{\partial w}, \tag{30}$$

mentre l'equazione tratta dalla (29) non può essere compatibile con questa se non riducendosi all'identità, ciò che avviene solo per $\operatorname{sen} c = -\operatorname{sen} \sigma$, ed allora la (30) si riduce appunto alla (25*).

La discussione fatta suppone per altro che la (27) non sia un'identità, ciò che ha luogo per $\operatorname{sen}^2 \sigma = \operatorname{sen}^2 c$, $\cos c = \cos \sigma \cos(\theta' - \varphi)$. Questo è veramente un caso eccezionale, ove si può fare $\sigma = c$, $\theta' = \varphi$, ed il sistema diventa ad angolo σ costante, mentre le (24) dànno in effetto il passaggio al sistema coniugato (Ω'_σ) (§ 6). Questa particolare trasformazione B_σ di un sistema (Ω_σ) nel coniugato (Ω'_σ) è dunque da riguardarsi come *trasformazione singolare* (*).

Ritornando al caso generale, vediamo che anche qui abbiamo per determinare θ' un sistema differenziale del tipo di Riccati, cioè:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \theta'}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\theta\cos\theta'}{\cos c} \\
\frac{\partial \theta'}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta' + \operatorname{sen} c\cos\theta\operatorname{sen}\theta'}{\cos c} \\
\frac{\partial \theta'}{\partial w} &= \frac{1-\operatorname{sen} c\operatorname{sen}\sigma - \cos c\cos\sigma\cos(\theta'+\varphi)}{\operatorname{sen}\sigma-\operatorname{sen} c}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

che, nel caso particolare $c=0$, si riduce naturalmente al sistema (19), (19*) § 11 per la trasformazione complementare. Ma anche nel caso di c qualunque il sistema (I) risulta *completamente integrabile*, a causa delle equazioni (A), (B) § 5; la sua soluzione generale θ' contiene quindi una costante arbitraria.

§ 14.

Le ∞^2 trasformazioni di Bäcklund per un sistema obliquo di Weingarten.

Immaginiamo fissata una qualunque soluzione θ' del sistema (I) e sostituiamola nelle formole (24); vogliamo dimostrare che le ∞^1 superficie trasformate $\bar{S}$ formano un nuovo sistema obliquo di Weingarten. In primo luogo osserviamo che, pel modo stesso come abbiamo dedotto al paragrafo precedente la terza delle (I), ossia la (25*), le trajettorie (w) nel sistema formato dalle S taglieranno queste superficie pseudosferiche sotto l'angolo $\frac{\pi}{2}-\sigma$. Dopo ciò, come al § 12, tutto si riduce a provare che si può determinare un angolo φ' legato a θ' dalle equazioni fondamentali (A), (B) § 5, e tale che sussistano insieme le (21), § 12

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial w}=\cos\sigma\frac{\partial\theta'}{\partial w}\left\{-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi' X_1+\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi' X_2-\cos\sigma X_3\right\},$$

(*) In particolare pei sistemi ortogonali di Weingarten a flessione costante la trasformazione singolare è la complementare.

i valori attuali di $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $\overline{X_3}$ essendo (cf. § 3):

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= (\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta')\, X_1 + \\ &\qquad + (\cos\theta \operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta')\, X_2 - \cos c \operatorname{sen}\theta\, X_3 \\ \overline{X_2} &= (\operatorname{sen}\theta\cos\theta' + \operatorname{sen} c\cos\theta \operatorname{sen}\theta')\, X_1 + \\ &\qquad + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen} c\cos\theta\cos\theta')\, X_2 + \cos c\cos\theta\, X_3 \\ X_3 &= \cos c\,(\operatorname{sen}\theta' X_1 - \cos\theta' X_2) - \operatorname{sen} c\, X_3 . \end{aligned}\right.$$

Sostituendo questi valori nella precedente, e confrontando colla (26), risultano le tre equazioni

$$\left\{ \operatorname{sen} c\cos\sigma \operatorname{sen}\theta'\cos(\theta-\varphi') + \cos\sigma\cos\theta' \operatorname{sen}(\theta-\varphi') + \cos c \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta' \right\} \frac{\partial\theta'}{\partial w} =$$

$$= (\cos c \operatorname{sen}\theta' - \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi) \frac{\partial\theta}{\partial w}$$

$$\left\{ -\operatorname{sen} c\cos\sigma\cos\theta'\cos(\theta-\varphi') + \cos\sigma \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}(\theta-\varphi') - \cos c \operatorname{sen}\sigma\cos\theta' \right\} \frac{\partial\theta'}{\partial w} =$$

$$= (\cos\sigma\cos\varphi - \cos c\cos\theta') \frac{\partial\theta}{\partial w}$$

$$\left\{ \cos c \operatorname{sen}\sigma\cos(\theta-\varphi') + \operatorname{sen} c\cos\sigma \right\} \frac{\partial\theta'}{\partial w} = \left\{ \cos c\cos(\theta'-\varphi) - \cos\sigma \right\} \frac{\partial\theta}{\partial w} .$$

A causa della terza delle (I), queste si riducono alle due concordanti

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta-\varphi') &= \frac{(\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} c)\operatorname{sen}(\theta'-\varphi)}{1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma - \cos c\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)} \\ \cos(\theta-\varphi') &= \frac{(1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma)\cos(\theta'-\varphi) - \cos c\cos\sigma}{1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma - \cos c\cos\sigma\cos(\theta'-\varphi)} , \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

che si compendiano nell'unica

$$\operatorname{tg}\frac{\theta-\varphi'}{2} = \frac{\cos\dfrac{\sigma+c}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma-c}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\theta'-\varphi}{2} . \tag{31*}$$

Qui riconosciamo nuovamente (cf. § 12) le formole del teorema di permutabilità per la quaderna (θ, φ, θ', φ') di soluzioni della equazione fondamentale (1) § 3. Ne risulta in particolare che θ', φ' sono certamente legate fra loro dalle (A) § 5, e resta solo a provare che sono soddisfatte anche le (B). Ciò si verifica con un calcolo perfettamente analogo a quello già eseguito al § 12.

Possiamo riassumere i nostri risultati (che comprendono anche la trasformazione complementare) nel teorema: *Ogni sistema obliquo di* WEINGARTEN *possiede* ∞^1 *sistemi analoghi derivati per trasformazione* B_c *di* BÄCKLUND *a costante c qualunque; per individuare il sistema derivato basta scegliere di una superficie pseudosferica iniziale S del sistema (ad arbitrio) la trasformata* S, *e la determinazione effettiva del sistema derivato richiede l'integrazione di un'equazione di* RICCATI.

Se si fa poi variare anche la costante c, si ottiene una *doppia infinità* di sistemi trasformati, contigui al sistema dato per trasformazione di BÄCKLUND.

§ 15.

IL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ.

Se di un sistema obliquo di WEINGARTEN ne conosciamo *uno* contiguo per trasformazione B_c, tutti gli altri si ottengono *per quadrature,* giacchè della corrispondente equazione di RICCATI conosciamo una soluzione particolare. Questa osservazione si applica in particolare quando si vogliano costruire di un sistema derivato i sistemi trasformati per la stessa B_c, poichè uno di essi, l'iniziale, è già noto. Così, a questo punto della teoria, la ripetuta applicazione del processo di trasformazione richiede, ad ogni passo, nuove quadrature. Ma anche qui, come per le superficie pseudosferiche isolate, il procedimento può notevolmente perfezionarsi sino a risparmiare affatto le quadrature, facendo uso del *teorema di permutabilità,* che vale ancora in questo caso. Basterà enunciare e dimostrare il teorema stesso, le cui conseguenze pel processo d'integrazione non differiscono da quelle per le superficie pseudosferiche isolate.

TEOREMA DI PERMUTABILITÀ: *Di un sistema obliquo* (Σ) *di* WEINGARTEN *siano noti due tali sistemi contigui* (Σ_1), (Σ_2) *derivati da* (Σ) *per trasformazioni di* BÄCKLUND B_{c_1}, B_{c_2}, *a costanti* c_1, c_2 *differenti. Siano* S, S_1, S_2 *tre qualunque superficie pseudosferiche, corrispondenti nei tre sistemi, e col teorema* *di permutabilità per le superficie pseudosferiche isolate* (Vol. II, pag. 411), *si costruisca la quarta superficie S_3 dopo S, S_1, S_2: questa quarta superficie pseudosferica S_3 descrive un quarto sistema obliquo* (Σ_3) *legato a* (Σ_1) *da una* B_{c_2} *ed a* (Σ_2) *da una* B_{c_1}.

Indichi (θ, φ) la coppia di soluzioni delle equazioni fondamentali (A), (B) § 5 appartenente al sistema (Σ), e siano similmente (θ_1, φ_1), (θ_2, φ_2) quelle che individuano rispettivamente (Σ_1), (Σ_2). Queste saranno legate alla (θ, φ) dalle formole delle rispettive trasformazioni B_{c_1}, B_{c_2}, secondo i §§ 13, 14 in particolare avremo per la (I_3)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial w} &= \frac{1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \sigma - \cos c_1 \cos \sigma \cos(\theta_1 - \varphi)}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_1} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial w} &= \frac{1 - \operatorname{sen} c_2 \operatorname{sen} \sigma - \cos c_2 \cos \sigma \cos(\theta_2 - \varphi)}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial w} \;. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Ora, secondo l'enunciato del teorema, si determini la funzione θ_3 corrispondente alla quarta superficie S_3 dalle formole del teorema di permutabilità (Vol. II, pag. 415)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta) &= \frac{(\operatorname{sen} c_1 - \operatorname{sen} c_2) \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{\cos c_1 \cos c_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2 - 1} \\ \cos(\theta_3 - \theta) &= \frac{\cos c_1 \cos c_2 + (\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2 - 1) \cos(\theta_2 - \theta_1)}{\cos c_1 \cos c_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2 - 1} \,, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_3 - \theta}{2} = \frac{\cos \dfrac{c_1 + c_2}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{c_1 - c_2}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \,. \tag{33*}$$

Si deve dimostrare che la funzione θ_3 di u, v, w così determinata è legata alla (θ_2, φ_2), secondo le formole (I), da una B_{c_1} e cioè che sussistono le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta_3}{\partial u} + \frac{\partial \theta_2}{\partial v} &= \frac{\cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1 + \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1}{\cos c_1} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial v} + \frac{\partial \theta_2}{\partial u} &= - \frac{\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1 + \operatorname{sen} c_1 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1}{\cos c_1} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial w} = \frac{1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \sigma - \cos c_1 \cos \sigma \cos(\theta_3 - \varphi_2)}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_1} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial w} \,; \tag{34*}$$

similmente θ_3 dovrà essere legata all'altra coppia (θ_1, φ_1) da una B_{c_2}. Però basterà provare la prima cosa, l'altra seguendone per simmetria. Ora, le (34) essendo un'immediata conseguenza del teorema di permutabilità per le superficie pseudosferiche isolate (cf. Vol. II, pag. 416, formole (40*)), resta solo a provare che sussiste anche la (34*). Per questo si cominci a derivare rapporto a w la (33*), ciò che dà

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial w} - \frac{\partial \theta}{\partial w} = \frac{\cos\frac{c_1+c_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c_1-c_2}{2}} \cdot \frac{2\cos^2\frac{\theta_3-\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} \cdot \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial w} - \frac{\partial \theta_2}{\partial w}\right). \tag{35}$$

poi si osservi che, per la seconda delle (33)

$$2\cos^2\frac{\theta_3-\theta}{2} = 1 + \cos(\theta_3 - \theta) = \frac{[\cos(c_1-c_2)-1] \,.\, 2\cos^2\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}{\cos c_1 \cos c_2 \cos(\theta_2-\theta_1) + \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2 - 1},$$

e in luogo della (35) si potrà scrivere

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial w} = \frac{\partial \theta}{\partial w} + \frac{\operatorname{sen} c_2 - \operatorname{sen} c_1}{\cos c_1 \cos c_2 \cos(\theta_2-\theta_1) + \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2 - 1} \cdot \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial w} - \frac{\partial \theta_2}{\partial w}\right).$$

Per verificare la (34*) basta dunque provare che si ha identicamente

$$\frac{1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \sigma - \cos c_1 \cos\sigma \cos(\theta_3 - \varphi_2)}{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} c_1} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial w} = \frac{\partial \theta}{\partial w} +$$
$$+ \frac{\operatorname{sen} c_2 - \operatorname{sen} c_1}{\cos c_1 \cos c_2 \cos(\theta_2-\theta_1) + \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2 - 1} \cdot \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial w} - \frac{\partial \theta_2}{\partial w}\right).$$

Se in questa poniamo per $\frac{\partial \theta_1}{\partial w}$, $\frac{\partial \theta_2}{\partial w}$ i valori (32), poi dividiamo per $\frac{\partial \theta}{\partial w}$, l'identità da dimostrarsi resta:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen}\sigma - \cos c_1 \cos\sigma \cos(\theta_3-\varphi_2)}{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} c_1} \,. \\
&\quad . \frac{1 - \operatorname{sen} c_2 \operatorname{sen}\sigma - \cos c_2 \cos\sigma \cos(\theta_2-\varphi)}{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} c_2} = \\
&\quad = 1 + \frac{\operatorname{sen} c_2 - \operatorname{sen} c_1}{\cos c_1 \cos c_2 \cos(\theta_2-\theta_1) + \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2 - 1} \,. \\
&\quad . \left\{ \frac{1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen}\sigma - \cos c_1 \cos\sigma \cos(\theta_1-\varphi)}{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} c_1} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1 - \operatorname{sen} c_2 \operatorname{sen}\sigma - \cos c_2 \cos\sigma \cos(\theta_2-\varphi)}{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} c_2} \right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Ora le formole (31), applicate a θ_2, φ_2, dànno

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta-\varphi_2) &= \frac{(\operatorname{sen}\sigma-\operatorname{sen}c_2)\operatorname{sen}(\theta_2-\varphi)}{1-\operatorname{sen}c_2\operatorname{sen}\sigma-\cos c_2\cos\sigma\cos(\theta_2-\varphi)} \\ \cos(\theta-\varphi_2) &= \frac{(1-\operatorname{sen}c_2\operatorname{sen}\sigma)\cos(\theta_2-\varphi)-\cos c_2\cos\sigma}{1-\operatorname{sen}c_2\operatorname{sen}\sigma-\cos c_2\cos\sigma\cos(\theta_2-\varphi)}, \end{aligned}\right.$$

dalle quali, calcolando

$$\cos(\theta_3-\varphi_2)=\cos(\theta_3-\theta)\cos(\theta-\varphi_2)-\operatorname{sen}(\theta_3-\theta)\operatorname{sen}(\theta-\varphi_2),$$

risulta l'identità:

$$\left.\begin{aligned} &\{1-\operatorname{sen}c_2\operatorname{sen}\sigma-\cos c_2\cos\sigma\cos(\theta_2-\varphi)\}\,. \\ &.\{\cos c_1\cos c_2\cos(\theta_2-\theta_1)+\operatorname{sen}c_1\operatorname{sen}c_2-1\}\cos(\theta_3-\varphi_2)= \\ &=\{\cos c_1\cos c_2+(\operatorname{sen}c_1\operatorname{sen}c_2-1)\cos(\theta_2-\theta_1)\}\,. \\ &.\{(1-\operatorname{sen}c_2\operatorname{sen}\sigma)\cos(\theta_2-\varphi)-\cos c_2\cos\sigma\}+ \\ &+(\operatorname{sen}c_2-\operatorname{sen}c_1)(\operatorname{sen}\sigma-\operatorname{sen}c_2)\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2-\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Ciò posto, se si moltiplica la (36) pel prodotto dei denominatori, utilizzando la (37) e l'identità

$$\cos(\theta_1-\varphi)=\cos(\theta_2-\theta_1)\cos(\theta_2-\varphi)+\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2-\varphi),$$

la (36) si riduce ad una relazione lineare in $\cos(\theta_1-\varphi)$, $\cos(\theta_2-\varphi)$, $\cos(\theta_2-\theta_1)$ con coefficienti tutti nulli. Il teorema di permutabilità è così dimostrato.

§ 16.

Le trasformazioni dei sistemi (Ω_σ).

La teoria delle trasformazioni pei sistemi obliqui di Weingarten che abbiamo sviluppato nei paragrafi precedenti, a cominciare dal § 11, vale in generale per $\sigma=\sigma(u)$ variabile o per σ costante. Ma in quest'ultimo caso, cioè nel caso dei sistemi (Ω_σ), intervengono nuove interessanti proprietà che andiamo ora ad esaminare.

a) Si è visto che i sistemi (Ω_σ) si presentano sempre a coppie di sistemi coniugati (Ω_σ), (Ω'_σ) e la trasformazione che fa passare da un sistema (Ω_σ) al sistema coniugato (Ω'_σ) è la *trasformazione singolare* B_σ (cf. § 13). Abbiamo poi osservato, al § 14, che ogni altra trasformazione di Bäcklund B_σ cangia ogni coppia di sistemi (Ω_σ), (Ω'_σ) coniugati in un'altra tale coppia, diciamo $(\overline{\Omega}_\sigma)$, $(\overline{\Omega}'_\sigma)$. I quattro sistemi (Ω_σ), (Ω'_σ), $(\overline{\Omega}_\sigma)$, $(\overline{\Omega}'_\sigma)$ stanno allora chiaramente fra loro nella relazione stessa del teorema di permutabilità per le trasformazioni B_σ, B_c, di cui la prima singolare; dunque: *Pei sistemi* (Ω_σ) *il teorema di permutabilità resta valido, anche se delle due trasformazioni componenti una coincide colla singolare* B_σ.

b) Quando, per mezzo di una B_c, si trasforma un sistema (Ω_σ) in un altro $(\overline{\Omega}_\sigma)$, le superficie pseudosferiche dell'uno si cangiano nelle corrispondenti dell'altro, e in pari tempo le curve di Bertrand trajettorie isogonali di (Ω_σ) nelle corrispondenti di $(\overline{\Omega}_\sigma)$. Considerate per le singole coppie $(C, \overline{C})$ di curve corrispondenti di Bertrand queste trasformazioni B_c vengono a coincidere con trasformazioni ben note. Se diciamo P, $\overline{P}$ una coppia di punti corrispondenti sopra C, $\overline{C}$ e P', $\overline{P}'$ i loro omologhi per le due curve di Bertrand C', $\overline{C}'$ rispettivamente coniugate di C, $\overline{C}$, abbiamo: *Il segmento* $P\overline{P}$ *ha la lunghezza costante* $= \cos c$ *e giace sulla intersezione dei due piani osculatori in* P', $\overline{P}'$ *alle curve coniugate* C', $\overline{C}'$; *le binormali di* C, $\overline{C}$ *negli estremi* P, $\overline{P}$ *formano fra loro l'angolo costante* $\frac{\pi}{2} - c$. Le proprietà geometriche ora indicate caratterizzano quelle trasformazioni delle curve di Bertrand che vennero studiate in generale da Razzaboni (*), dopo che Demartres ne aveva fatto conoscere il caso particolare $c = 0$, corrispondente alla trasformazione complementare.

Analiticamente si prova la coincidenza delle due specie di trasformazioni ricorrendo alle formole del § 13, coll'osservare che il segmento $P\overline{P}$ è inclinato sulla normale principale di C di un angolo ψ dato da $\psi = \theta' - \varphi$, mentre l'elemento d'arco ds della C è dato da $ds = \cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot du$. Con questo, avendo

(*) *Atti del Reale Istituto Veneto*, Tomo LX (1900-1901); cf. anche il § 23 della mia Memoria: *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, Serie 3.ª, Tomo XIV (1905).

riguardo alle formole del § 8, la terza delle (I) § 13 si muta appunto nella equazione differenziale (di RICCATI) data da RAZZABONI per le trasformazioni delle singole curve di BERTRAND.

In fine noteremo che dal teorema di permutabilità per le trasformazioni dei sistemi (Ω_σ) (§ 15) segue ora subito un corrispondente teorema per le trasformazioni delle curve di BERTRAND.

§ 17.

PARAGONE COLLE TRASFORMAZIONI DEI SISTEMI (W) A FLESSIONE COSTANTE.

Ritorniamo ancora sulle relazioni stabilite al § 7 fra i sistemi (Ω_σ) ed i particolari sistemi (Ω_0), o sistemi ortogonali (W) di WEINGARTEN a flessione costante. Ivi si è visto che da una coppia (W), (W') di sistemi complementari di WEINGARTEN, intrinsecamente determinata da una coppia di funzioni

$$\Theta(u', v', w), \quad \Phi(u', v', w)$$

soluzioni delle (α), (β), (β^*) § 7, si passa ad una coppia (Ω_σ), (Ω'_σ) di sistemi coniugati appartenente alla coppia di funzioni

$$\theta(u, v, w), \quad \varphi(u, v, w)$$

colle formole (10), (10*) della trasformazione L_σ di LIE.

Ora una trasformazione B_c di BÄCKLUND cangia la coppia (θ, φ) (*) di sistemi (Ω_σ) coniugati in un'altra tale coppia (θ', φ'), alla quale corrisponderà alla sua volta, per trasformazione di LIE, una coppia (Θ', Φ') di sistemi complementari di WEINGARTEN, secondo le formole

$$\begin{cases} \theta'(u, v, w) = \Theta'(u', v', w) \\ \varphi'(u, v, w) = \Phi'(u', v', w). \end{cases}$$

Ora si domanda: *In quale relazione stanno fra loro le due coppie di sistemi complementari di* WEINGARTEN (Θ, Φ), (Θ', Φ')?

(*) Siccome la coppia di funzioni (θ, φ) individua intrinsecamente la coppia di sistemi coniugati (Ω_σ), (Ω'_σ), così indichiamo anche quest'ultima coppia con (θ, φ).

Dimostreremo che queste due coppie, *convenientemente collocate nello spazio,* sono trasformate l'una dell'altra per una trasformazione di BACKLUND $B_{c'}$, la cui costante c' dipende in certo modo (formole (38)) da c e da σ.

Per questo osserviamo le funzioni θ, θ' sono legate fra loro dalle formole (I) § 13 della trasformazione B_c, e queste, trasformate in coordinate u', v', ove

$$u' = \frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}, \quad v' = \frac{-u \operatorname{sen} \sigma + v}{\cos \sigma},$$

diventano

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Theta'}{\partial u'} + \frac{\partial \Theta}{\partial v'} = \frac{1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \sigma}{\cos c \cos \sigma} \cos \Theta \operatorname{sen} \Theta' + \frac{\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} \sigma}{\cos c \cos \sigma} \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta' \\ &\frac{\partial \Theta'}{\partial v'} + \frac{\partial \Theta}{\partial u'} = -\frac{1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \sigma}{\cos c \cos \sigma} \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta' - \frac{\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} \sigma}{\cos c \cos \sigma} \cos \Theta \operatorname{sen} \Theta' \\ &\frac{\partial \Theta'}{\partial w} = \frac{1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \sigma - \cos c \cos \sigma \cos (\Theta' - \Phi)}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial w}. \end{aligned}\right.$$

Si prenda ora c' dalle relazioni concordanti

$$\operatorname{sen} c' = \frac{\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} \sigma}{1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \sigma}, \quad \cos c' = \frac{\cos c \cos \sigma}{1 - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \sigma}, \tag{38}$$

e le precedenti si scriveranno

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Theta'}{\partial u'} + \frac{\partial \Theta}{\partial v'} = \frac{\cos \Theta \operatorname{sen} \Theta' + \operatorname{sen} c' \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta'}{\cos c'} \\ &\frac{\partial \Theta'}{\partial v'} + \frac{\partial \Theta}{\partial u'} = -\frac{\operatorname{sen} \Theta \cos \Theta' + \operatorname{sen} c' \cos \Theta \operatorname{sen} \Theta'}{\cos c'} \\ &\frac{\partial \Theta'}{\partial w} = \frac{\cos c' \cos (\Theta' - \Phi) - 1}{\operatorname{sen} c'}. \end{aligned}\right.$$

Ma queste, secondo le (I) stesse ove si faccia $\sigma = 0$, sono appunto le formole per la trasformazione $B_{c'}$ applicata alla coppia (Θ, Φ) di sistemi complementari di WEINGARTEN, che si trasforma così nella coppia (Θ', Φ') come è enunciato nel teorema. Si osservi che le formole (38) si scrivono inversamente

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} c' + \operatorname{sen} \sigma}{1 + \operatorname{sen} c' \operatorname{sen} \sigma}, \quad \cos c = \frac{\cos c' \cos \sigma}{1 + \operatorname{sen} c' \operatorname{sen} \sigma}, \tag{38*}$$

Alla trasformazione *singolare* B_σ dei sistemi (Ω_σ) corrisponde, secondo queste formole, la trasformazione complementare con $c' = 0$ dei sistemi di Weingarten, che per questi sistemi rappresenta appunto la trasformazione singolare (§ 13 nota).

Possiamo compendiare i risultati ottenuti nel teorema:

La trasformazione L_σ di Lie *cangia due coppie* (Θ, Φ), (Θ', Φ') *di sistemi complementari di* Weingarten, *legate fra loro da una trasformazione $B_{c'}$ di* Bäcklund, *in due coppie* (θ, φ), (θ', φ') *di sistemi* (Ω_σ) *coniugati, legate fra loro da una corrispondente B_c, la relazione fra le costanti c, c', essendo data dalle* (38) o (38*).

Simbolicamente questa dipendenza fra le B_c pei sistemi (Ω_σ) e le $B_{c'}$ pei sistemi (W) di Weingarten a flessione costante può esprirmersi colla formola

$$B_c = L_\sigma^{-1} B_{c'} L_\sigma .$$

PARTE SECONDA.

I sistemi (Ω_σ) negli spazî a curvatura costante

§ 18.

Trasformazioni di Backlund nello spazio ellittico.

In questa seconda parte vogliamo estendere la ricerca al caso dei sistemi obliqui di Weingarten negli spazî di curvatura K costante, positiva o negativa. Supporremo senz'altro $K = +1$ se si tratta dello spazio ellittico, e $K = -1$ nel caso dello spazio iperbolico; inoltre ci limiteremo, per brevità, a studiare il caso geometricamente più interessante che l'angolo σ d'inclinazione delle trajettorie sulle superficie a curvatura costante del sistema sia una costante assoluta e chiameremo questi sistemi *sistemi* (Ω_σ) (*).

Cominciamo dallo spazio ellittico $(K=+1)$ ed in primo luogo estendiamo le ricerche del § 3 sui sistemi elementari (Ω_σ). Si consideri una superficie S dello spazio ellittico a curvatura *relativa* costante e negativa

$$\frac{1}{\rho_1\,\rho_2}=-\frac{1}{a^2}\quad (a \text{ costante}).$$

Riferendo la S alle sue linee di curvatura u, v, avremo pel suo elemento lineare (**)

$$d\,s^2=a^2\,(\cos^2\theta\,d\,u^2+\operatorname{sen}^2\theta\,d\,v^2), \tag{1}$$

e per le curvature principali

$$\frac{1}{\rho_1}=-\frac{\cot\theta}{a},\quad \frac{1}{\rho_2}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{a}, \tag{2}$$

dove θ è una soluzione della equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\,u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial\,v^2}=(1-a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta. \tag{3}$$

Indichiamo con (x_0, x_1, x_2, x_3) le coordinate di Weierstrass di un punto mobile sopra S, con $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ quelle del piano tangente, in fine con $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ quelle dei due piani principali. Allora nel determinante ortogonale destrorso $(=+1)$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

gli elementi di ciascuna colonna sono legati dalle formole fondamentali del

(*) Si avverta che qui, per ragione di confronto con formole stabilite in altre Memorie, l'angolo σ ha il significato *complementare* rispetto alla notazione usata per lo spazio euclideo nella Parte prima.

(**) Per le formole utilizzate nel presente paragrafo vedi §§ 1, 2 delle mie: *Ricerche sulla deformazione delle quadriche* nel Tomo 22 dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1906), inoltre la Memoria: *Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazii di curvatura costante* nel Tomo X, Serie III di questi *Annali* (1904).

quadro seguente (dove omettiamo per brevità di scrivere gli indici):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=a\cos\theta\,.\,\eta,\quad \frac{\partial \xi}{\partial u}=\operatorname{sen}\theta\,.\,\eta,\\
&\qquad\qquad\frac{\partial \eta}{\partial u}=-a\cos\theta\,.\,x-\operatorname{sen}\theta\,.\,\xi+\frac{\partial\theta}{\partial v}\zeta,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial u}=-\frac{\partial\theta}{\partial v}\eta\\
&\frac{\partial x}{\partial v}=a\operatorname{sen}\theta\,.\,\zeta,\quad \frac{\partial\xi}{\partial v}=-\cos\theta\,.\,\zeta,\quad \frac{\partial\eta}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}\zeta,\\
&\qquad\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial v}=-a\operatorname{sen}\theta\,.\,x+\cos\theta\,\xi-\frac{\partial\theta}{\partial u}\eta.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(a)}$$

Ora si sa che esistono infinite congruenze pseudosferiche di cui S è la prima falda focale e nelle quali l'angolo σ dei piani focali e la distanza τ fra i due fuochi sono costanti, legate fra loro dalla relazione

$$\operatorname{sen}\tau=a\operatorname{sen}\sigma. \tag{4}$$

Inversamente, scelte le costanti σ, τ, in guisa da soddisfare la precedente (4), si hanno ∞^1 di tali congruenze, le cui seconde falde S' sono superficie pseudosferiche del medesimo raggio; ciascuna S' è una trasformata di S per la trasformazione B_σ di Backlund.

Per gli elementi di questa trasformata S' abbiamo le formole

$$x'=\cos\tau\,.\,x+\operatorname{sen}\tau\,(\cos\varphi\,.\,\eta+\operatorname{sen}\varphi\,.\,\zeta), \tag{5}$$

dove φ è una funzione di u, v legata a θ dalle equazioni di trasformazione

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}&=\quad a\cot\tau\cos\theta\operatorname{sen}\varphi-\cot\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}&=-a\cot\tau\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+\cot\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,
\end{aligned}\right\}\quad\text{(A)}$$

che formano un sistema completamente integrabile. Gli altri elementi ξ', η', ζ' della superficie S' sono dati dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
\xi'&=\quad\cos\sigma\,.\,\xi+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta-\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,.\,\zeta\\
\eta'&=-\operatorname{sen}\tau\cos\theta\,.\,x-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\,.\,\xi+(\cos\tau\cos\theta\cos\varphi+\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\,.\,\eta\\
&\qquad+(\cos\tau\cos\theta\operatorname{sen}\varphi-\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\,.\,\zeta\\
\zeta'&=-\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\theta\,.\,x+\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\,.\,\xi+(\cos\tau\operatorname{sen}\theta\cos\varphi-\cos\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\,.\,\eta\\
&\qquad+(\cos\tau\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi+\cos\sigma\cos\theta\cos\varphi)\,.\,\zeta,
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

e scriviamo altresì le formole inverse delle (5)

$$x=\cos\tau\,.\,x'-\operatorname{sen}\tau\,(\cos\theta\,\eta'+\operatorname{sen}\theta\,\zeta'). \tag{5*}$$

§ 19.

Formole pei sistemi (Ω_σ).

Suppongasi ora che resti fissa la superficie S', e la S percorra tutte le ∞^1 trasformate della S' per la B_σ, descrivendo così un sistema *elementare* (Ω_σ) (cf. § 3).

Delle due soluzioni θ, φ della equazione (3) la φ resta fissa, mentre la θ varia in una semplice infinità dipendente da una costante arbitraria w, che assumeremo come terza variabile. Tutti gli elementi di S' sono dunque indipendenti da w, invece quelli relativi alla S contengono, oltre u, v, anche la terza variabile w.

Si cominci dal derivare le (A) rapporto a w, coll'osservare la (4), e si otterranno le altre

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} &= -(\cos\tau\cos\theta\cos\varphi+\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial w} \\ \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} &= -(\cos\tau\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi+\cos\sigma\cos\theta\cos\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial w}\,. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Derivando similmente le (5*), abbiamo

$$\frac{\partial x}{\partial w}=\operatorname{sen}\tau\frac{\partial\theta}{\partial w}(\operatorname{sen}\theta\,\eta'-\cos\theta\,\zeta'),$$

che per le (6) possiamo scrivere

$$\frac{\partial x}{\partial w}=\operatorname{sen}\tau\frac{\partial\theta}{\partial w}\left\{-\operatorname{sen}\sigma\,.\,\xi+\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta-\cos\sigma\cos\varphi\,.\,\zeta\right\}. \tag{7}$$

Ora per calcolare le derivate $\frac{\partial\eta}{\partial w}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial w}$, $\frac{\partial\xi}{\partial w}$ si proceda come al § 3, e paragonando le due prime (a) colla (7) si formino le condizioni d'integrabilità

$$a\frac{\partial}{\partial w}(\cos\theta\,.\,\eta)=\operatorname{sen}\tau\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\,\xi+\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta-\cos\sigma\,.\,\cos\varphi\,.\,\zeta)\right\}$$

$$a\frac{\partial}{\partial w}(\operatorname{sen}\theta\,.\,\zeta)=\operatorname{sen}\tau\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\,\xi+\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta-\cos\sigma\cos\varphi\,\zeta)\right\},$$

svolgendo a destra colle formole (a) e (B). Così si ottengono $\frac{\partial \eta}{\partial w}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial w}$, e per avere anche $\frac{\partial \xi}{\partial w}$ basta ricorrere alla formola

$$x\frac{\partial x}{\partial w}+\xi\frac{\partial \xi}{\partial w}+\eta\frac{\partial \eta}{\partial w}+\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial w}=0,$$

che segue dalla identità

$$x^2+\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

Riunendo le formole così ottenute alla (7), si ha il seguente quadro (a′) da aggregarsi al quadro (a):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial w} &= \operatorname{sen}\tau\,\frac{\partial \theta}{\partial w}\,(-\operatorname{sen}\sigma\,\xi+\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,\eta-\cos\sigma\cos\varphi\,\zeta)\\
\frac{\partial \xi}{\partial w} &= \operatorname{sen}\sigma\,\frac{\partial \theta}{\partial w}\,(\operatorname{sen}\tau\,x-\cos\tau\cos\varphi\,\eta-\cos\tau\operatorname{sen}\varphi\,\zeta)\\
\frac{\partial \eta}{\partial w} &= \frac{\partial \theta}{\partial w}\,(-\operatorname{sen}\tau\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,x+\cos\tau\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,.\,\xi+\cos\tau\cos\sigma\,\zeta)\\
\frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \frac{\partial \theta}{\partial w}\,(\operatorname{sen}\tau\cos\sigma\cos\varphi\,.\,x+\cos\tau\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,\xi-\cos\tau\cos\sigma\,\eta).
\end{aligned}\right\}\text{(a}'\text{)}$$

Stabilite queste formole pei sistemi *elementari* (Ω_σ) in geometria ellittica, un procedimento affatto analogo a quello esposto nei §§ 4, 5, che qui non staremo a ripetere, conduce a riconoscere che le medesime formole valgono pei sistemi (Ω_σ) più generali; soltanto, nel caso generale, ambedue le funzioni θ, φ dipenderanno da tutte tre le variabili u, v, w, sempre dovendo soddisfare alle equazioni (A) e (B).

Dopo di ciò le formole dei quadri (a), (a′) dànno un sistema ortogonale *completamente integrabile* e definiscono (a meno di movimenti nello spazio) il sistema (Ω_σ) corrispondente. Abbiamo dunque il risultato:

I sistemi (Ω_σ) dello spazio ellittico corrispondono biunivocamente alle coppie di funzioni θ, φ delle tre variabili u, v, w *che soddisfano al sistema di equazioni a derivate parziali* (A) e (B). *Note* θ, φ *in funzione di u, v, w, il sistema (Ω_σ) è determinato, a meno di movimenti, dalle formole dei quadri* (a), (a′).

Osserviamo che derivando le (A) rapporto a w, coll'aver riguardo alle (B), ne seguono le analoghe

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\sigma\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w} &= (\cos\tau\cos\theta\cos\varphi+\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\\
\operatorname{sen}\sigma\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w} &= (\cos\tau\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi+\cos\sigma\cos\theta\cos\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{B}^*)$$

Notevole è il caso $\sigma=\frac{\pi}{2}$, il quale però, a causa delle (4), può aver luogo solo per $a<1$; allora il sistema (Ω_σ) diventa un sistema ortogonale di Weingarten (a flessione costante) e le equazioni (A), (B), (B*) si riducono alle seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v} &= \cos\tau\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u} &= -\cos\tau\operatorname{sen}\theta\cos\varphi
\end{aligned}\right\}(\alpha)\qquad
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} &= -\cos\tau\cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\\
\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} &= -\cos\tau\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial\theta}{\partial w}
\end{aligned}\right\}(\beta)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w} &= \cos\tau\cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w} &= \cos\tau\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}.
\end{aligned}\right\}\qquad(\beta^*)$$

§ 20.

Sistemi (Ω_σ) polari e sistemi (Ω_σ) coniugati.

a) La perfetta dualità che, anche per le proprietà metriche, vige nello spazio ellittico fa sì che, noto in questo spazio un sistema (Ω_σ), se ne ottiene subito un secondo prendendo di ciascuna superficie pseudosferica S del primo la *polare* (parallela distante di un quadrante); questo secondo sistema si dirà il ***sistema polare*** del primitivo. Più precisamente abbiamo il teorema:

Ogni sistema (Ω_σ) *dello spazio ellittico ha per sistema polare un sistema* (Ω_τ), *gli angoli* σ, τ *essendo legati fra loro dalla* (4).

La dimostrazione risulta subito dall'osservare che le coordinate di un punto della superficie polare sono appunto le ξ e quelle del suo piano tangente le x, e per le formole (a'), corrispondentemente alle relazioni

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\tau\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2, \quad S\,\xi\frac{\partial x}{\partial w} = -\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\tau\frac{\partial\theta}{\partial w},$$

sussistono le omologhe

$$S\left(\frac{\partial \xi}{\partial w}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2, \quad S\,x\frac{\partial \xi}{\partial w} = \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}.$$

Notevole nel teorema precedente è il caso particolare $\sigma = \frac{\pi}{2}$, che enunciamo esplicitamente così: *Ogni sistema a flessione costante di* Weingarten *nello spazio ellittico ha per sistema polare un sistema obliquo* (Ω_τ), *con* $\tau = \operatorname{arc\,sen} a$.

b) Ritornando al caso generale di un sistema qualunque (Ω_σ), si costruisca per ogni superficie S del sistema la congruenza (pseudosferica) i cui raggi sono condotti nei piani tangenti di S normalmente alle trajettorie (w). La seconda falda focale S' di questa congruenza è una seconda superficie pseudosferica per la quale valgono le (5), (6) § 18. Derivando le (5) rapporto ad u, v, w, otteniamo per le (6)

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = a\cos\varphi\,.\,\eta', \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = a\operatorname{sen}\varphi\,.\,\zeta',$$

$$\frac{\partial x'}{\partial w} = \operatorname{sen}\tau\frac{\partial\varphi}{\partial w}\left\{-\operatorname{sen}\sigma\,\xi' - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,\eta' + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta\,\zeta'\right\}.$$

Basta confrontare queste formole colle (a), (a') per dedurne il teorema: *Le superficie pseudosferiche S' formano un nuovo sistema* (Ω'_σ). Questo si dirà, come nello spazio euclideo, il *coniugato* del primitivo.

c) Ora dimostriamo che anche nello spazio ellittico si ottengono tutti i sistemi (Ω_σ) trasformando colla L_σ di Lie i sistemi (W) a flessione costante. Supponiamo che nel nostro sistema (Ω_σ) sia $|a| < 1$, cioè la curvatura relativa della S sia, in valore assoluto, > 1; ciò è lecito perchè nel caso contrario basterebbe passare al sistema polare secondo a). Essendo dunque $a < 1$, potremo porre $a = \operatorname{sen}\alpha$, con α costante reale, e la (4) si scriverà:

$$\operatorname{sen}\tau = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\sigma. \tag{8}$$

Consideriamo ora un sistema di WEINGARTEN a flessione costante, definito secondo le (α), (β), (β^*) da una coppia di funzioni

$$\Theta(u', v', w), \quad \Phi(u', v', w)$$

che soddisfino le equazioni caratteristiche

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u'} + \frac{\partial \Theta}{\partial v'} &= \cos\alpha \cos\Theta \operatorname{sen}\Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v'} + \frac{\partial \Phi}{\partial u'} &= -\cos\alpha \operatorname{sen}\Theta \cos\Phi \end{aligned}\right\} (\alpha') \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u' \partial w} &= -\cos\alpha \cos\Theta \cos\Phi \frac{\partial \Theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v' \partial w} &= -\cos\alpha \operatorname{sen}\Theta \operatorname{sen}\Phi \frac{\partial \Theta}{\partial w} \end{aligned}\right\} (\beta')$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u' \partial w} &= \cos\alpha \cos\Theta \cos\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v' \partial w} &= \cos\alpha \operatorname{sen}\Theta \operatorname{sen}\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial w}\,. \end{aligned}\right\} (\beta'^*)$$

Se prendiamo una costante c dalle relazioni concordanti

$$\operatorname{sen} c = \frac{\cos\sigma}{\cos\tau}, \quad \cos c = \frac{\operatorname{sen}\sigma \cos\alpha}{\cos\tau}, \tag{9}$$

poi facciamo le sostituzioni della trasformazione di LIE

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{u - v \operatorname{sen} c}{\cos c} = \frac{u\cos\tau - v\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma\cos\alpha} \\ v' &= \frac{-u\operatorname{sen} c + v}{\cos c} = \frac{-u\cos\sigma + v\cos\tau}{\operatorname{sen}\sigma\cos\alpha} \end{aligned}\right.$$

$$\theta(u, v, w) = \Theta(u', v', w), \quad \varphi(u, v, w) = \Phi(u', v', w),$$

risulta subito che le equazioni (α'), (β'), (β'^*) si cangiano nelle fondamentali (A), (B), (B*) § 19. Dunque: *La trasformazione L_c di* LIE *cangia una coppia di sistemi complementari di* WEINGARTEN *a flessione costante in una coppia di sistemi* (Ω_σ) *coniugati.*

§ 21.

Le trajettorie (w) come curve di Bertrand.

Andiamo ora a stabilire pei sistemi (Ω_σ) dello spazio ellittico le proprietà analoghe a quelle osservate nei §§ 8, 9 per lo spazio euclideo.

Consideriamo un sistema (Ω_σ) ed una curva C trajettoria nel sistema. L'elemento d'arco della C è dato da

$$d\,s = \operatorname{sen}\tau\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,w}\cdot d\,w, \tag{10}$$

e noi designeremo con $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ rispettivamente la flessione e la torsione di C, poi con

$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3$ i coseni di direzione della tangente

$n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3$ » » normale principale

$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3$ » » binormale.

Per le formole di Frenet in geometria ellittica (Vol. I, pag. 457), omettendo di scrivere gli indici, abbiamo

$$\frac{d\,x}{d\,s} = t,\quad \frac{d\,t}{d\,s} = \frac{n}{\rho} - x,\quad \frac{d\,n}{d\,s} = -\frac{t}{\rho} - \frac{b}{T},\quad \frac{d\,b}{d\,s} = \frac{n}{T}. \tag{11}$$

Dalla (10) e dalla prima delle (a′) si calcola quindi subito

$$t = \frac{1}{\operatorname{sen}\tau\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,w}}\,\frac{\partial\,x}{\partial\,w},$$

cioè

$$t = -\operatorname{sen}\sigma\,\xi + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta - \cos\sigma\cos\varphi\,\zeta. \tag{12}$$

Derivando rapporto a w, coll'osservare la (10) e la (11_2), viene

$$\operatorname{sen}\tau\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,w}\left(\frac{n}{\rho} - x\right) = \frac{\partial}{\partial\,w}\left\{-\operatorname{sen}\sigma\,\xi + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta - \cos\sigma\cos\varphi\,.\,\zeta\right\},$$

ed eseguendo le derivazioni a destra colle formole del quadro (a′)

$$\operatorname{sen}\tau\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\cdot\frac{n}{\rho}=(\cos\varphi\,\eta+\cos\varphi\,\zeta)\left(\cos\sigma\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\cos\tau\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)\cdot \tag{13}$$

Si immagini scritte le quattro equazioni (13) per n_0, n_1, n_2, n_3, e quadrando e sommando risulterà

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\,\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}+\cot\tau\right)^2,$$

indi

$$\frac{1}{\rho}=\varepsilon\left(\frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\,\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}+\cot\tau\right), \tag{14}$$

designando ε l'unità positiva o negativa presa con tal segno da rendere $\frac{1}{\rho}$ positiva. Dopo ciò la (13) ci dà

$$n=\varepsilon\,(\cos\varphi\,.\,\eta+\operatorname{sen}\varphi\,.\,\zeta), \tag{15}$$

onde segue immediatamente (*)

$$b=\varepsilon\,(\cos\sigma\,\xi+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,\eta-\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,\zeta). \tag{16}$$

Se in fine deriviamo quest'ultima rispetto a w, a sinistra colla (11_4) di Frenet, a destra colle formole del quadro (a′), troviamo

$$\frac{1}{T}=\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\,\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}\,. \tag{17}$$

Eliminando fra la (14) e la (17) il rapporto $\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}$, risulta il teorema:

(*) Si ricordi che il determinante $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ n_0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ è ortogonale destrorso $(=+1)$.

In ogni sistema (Ω_σ) *dello spazio ellittico con superficie pseudosferiche di curvatura relativa* $\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{1}{a^2}$, *le trajettorie isogonali* (w) *del sistema hanno le due curvature* $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ *legate dalla relazione lineare a coefficienti costanti*

$$\frac{\varepsilon \operatorname{sen} \sigma}{\rho} - \frac{\cos \sigma}{T} = \frac{\cos \tau}{a} \quad (\operatorname{sen} \tau = a \operatorname{sen} \sigma). \tag{18}$$

Le curve dello spazio ellittico colle due curvature legate linearmente si diranno ancora *curve di* Bertrand, perchè le loro proprietà sono affatto analoghe a quelle che si hanno nello spazio euclideo. Sarebbe facile constatarlo direttamente sulle formole di Frenet (11) imitando l'analisi ben nota nello spazio euclideo (Vol. I, pag. 50-51); ma risulterà anche dal paragrafo seguente.

Intanto si osservino qui tre casi particolari delle formole superiori:

1.° Se si suppone $\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0$, risulta

$$\frac{1}{T} = 0, \quad \frac{1}{\rho} = \cot \tau$$

e le trajettorie (w) sono circoli di raggio $= \tau$; il sistema (Ω_σ) è un sistema elementare (§ 19).

2.° Quando $\sigma = \frac{\pi}{2}$ il sistema (Ω_σ) diventa un sistema ortogonale di Weingarten, ma la formola (14), che diventa $\frac{1}{\rho} = \cot \tau$, dimostra che il sistema è a *flessione costante.*

3.° Suppongasi ora invece $\tau = \frac{\pi}{2}$ e per ciò $a = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} > 1$; la (18) diventa

$$\frac{\rho}{T} = \operatorname{tg} \sigma = \text{cost}$$

e le curve di Bertrand trajettorie isogonali del sistema hanno in questo caso costante il rapporto delle due curvature.

È poi da osservarsi che, per quanto si è detto al paragrafo precedente, i sistemi (Ω_σ) corrispondenti a questi due ultimi casi sono polari l'uno dell'altro.

§ 22.

Ulteriori proprietà dei sistemi (Ω_σ).

Le formole (15) ci dicono che le normali principali delle trajettorie (w) nel sistema (Ω_σ) coincidono coi raggi della congruenza pseudosferica avente S, S' per le due falde focali. Manifestamente la medesima proprietà compete alle trajettorie (w) nel sistema coniugato (Ω'_σ), onde si ha il teorema: ***Due trajettorie corrispondenti*** (w) ***nei due sistemi coniugati*** (Ω_σ), (Ω'_σ) ***hanno a comune le normali principali.*** E questa è appunto la proprietà che caratterizza qui nello spazio ellittico (come nell'euclideo) le coppie di curve di Bertrand coniugate.

Si osservi poi che le formole (16) possono scriversi $b_i = \varepsilon\, \xi'_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ e dimostrano che: ***il piano osculatore della trajettoria*** (w) ***coincide col piano tangente della superficie*** S' ***nel sistema coniugato.***

Consideriamo ancora la rigata delle normali alle superficie pseudosferiche S nei loro punti d'incontro con una loro trajettoria (w), e indichiamo con ψ l'arco di questa curva C, con t il tratto di generatrice contato a partire da C (cf. § 9). Per le coordinate X_0, X_1, X_2, X_3 di un punto di questa rigata avremo

$$X = x \cos t + \xi \operatorname{sen} t,$$

da cui ricaviamo

$$\frac{\partial X}{\partial t} = - x \operatorname{sen} t + \xi \cos t,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \psi} = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} t \,.\, x - \operatorname{sen}\sigma \cos t \,.\, \zeta + \left(\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \cos t - \frac{\cos\tau}{a} \cos\varphi \operatorname{sen} t\right)\eta$$
$$+ \left(\frac{\cos\tau}{a} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} t - \cos\sigma \cos\varphi \cos\tau\right)\zeta,$$

e quindi per l'elemento lineare $d s_0$ di questa rigata, in coordinate t, ψ,

$$d s_0^2 = d t^2 - 2 \operatorname{sen}\sigma\, d t\, d\psi + \left\{ \operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma \cos^2 t + \frac{\cos^2\tau}{a^2} \operatorname{sen}^2 t \right\} d\varphi^2. \quad (18')$$

Questa forma del $d s_0$ non dipende che dalle costanti a, σ e nulla affatto dallo speciale sistema (Ω_σ), e dalla trajettoria (w) in esso considerata. Ma se si prende un sistema (Ω_σ) elementare, la rigata è generata dal rotare di una retta attorno ad un asse sghembo con questa ed è quindi un iperboloide rotondo ad una falda, che diventa per altro una sviluppabile quando $\tau = \frac{\pi}{2}$, come è confermato dalla (18'), la forma differenziale del secondo membro diventando allora di curvatura $= +1$, cioè appartenendo al piano della geometria ellittica.

Abbiamo dunque: *Le normali alle superficie pseudosferiche di un sistema* (Ω_σ) *nei punti d'incontro con una loro trajettoria isogonale* (*curva di* BERTRAND) *formano una rigata applicabile sull'iperboloide rotondo ad una falda* $\left(\textit{nel caso } \tau = \frac{\pi}{2} \textit{ una sviluppabile}\right)$.

Se si considera poi che le curve di BERTRAND trajettorie isogonali nei nostri sistemi (Ω_σ) sono le più generali possibili, potendosi qualunque curva colle due curvature legate da una relazione lineare inserire in un sistema (Ω_σ) quale trajettoria isogonale (w) (*), possiamo dare alla proposizione precedente l'altra forma che corrisponde al teorema di BIOCHE nello spazio euclideo: *In ogni coppia di curve coniugate di* BERTRAND *dello spazio ellittico* (*aventi a comune le normali principali*) *le normali condotte pei punti dell'una perpendicolarmente ai piani osculatori dell'altra formano una rigata applicabile sull'iperboloide rotondo, in particolare una sviluppabile quando è costante il rapporto delle due curvature.*

Sarebbe facile confermare questo teorema appoggiandosi unicamente sulle formole di FRENET; ma qui lo faremo soltanto pel caso particolare delle curve con $\frac{\rho}{T} = \text{cost.}$ per far conoscere altre semplici proprietà di queste curve nello spazio ellittico, che non sembrano osservate fino ad ora.

(*) Questo si proverebbe precisamente come nel caso euclideo (§ 9 in fine).

§ 23.

Le curve $\frac{\rho}{T} = \text{cost.}$ in geometria ellittica.

Cominciano dal dimostrare il seguente teorema:

a) *Ogni curva C dello spazio ellittico con $\frac{\rho}{T} = \text{cost.}$ ha a comune le normali principali con una seconda curva C' che dista da C di un quadrante ed ha lo stesso rapporto costante per le curvature.*

Sopra ogni normale principale MM' della supposta curva C riportiamo un segmento $MM' = \frac{\pi}{2}$ e verifichiamo che la curva C' luogo del punto M' gode delle proprietà ora enunciate. Riprendendo ora per la curva C le usuali notazioni (Vol. I, § 201), indicheremo cogli accenti le quantità relative alla C' ed avremo quindi in primo luogo

$$x' = \xi.$$

Derivando rapporto ad s colle formole di Frenet (Vol. I, pag. 457), risulta

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T},$$

indi

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{T^2}}.$$

Poichè $\frac{\rho}{T}$ è costante, poniamo

$$\frac{\rho}{T} = \operatorname{tg} \sigma \ (\sigma \text{ costante}), \tag{19}$$

ed avremo dalle precedenti

$$ds' = \frac{ds}{\rho \cos \sigma} \tag{19*}$$

$$\alpha' = -\alpha \cos \sigma - \lambda \operatorname{sen} \sigma. \tag{20}$$

Una nuova derivazione porge

$$\frac{1}{\rho \cos \sigma}\left(\frac{\xi'}{\rho'} - \xi\right) = \cos \sigma \left(x - \frac{\xi}{\rho}\right) - \operatorname{sen} \sigma \frac{\xi}{T},$$

e riducendo

$$\frac{1}{\rho \cos \sigma} \frac{\xi'}{\rho'} = \cos \sigma \,.\, x,$$

da cui

$$\frac{1}{\rho'} = \rho \cos^2 \sigma, \tag{21}$$

ed anche

$$\xi' = x. \tag{22}$$

Dopo ciò risulta

$$\lambda' = - \varkappa \operatorname{sen} \sigma + \lambda \cos \sigma,$$

e con una nuova derivazione

$$\frac{1}{T'} = \rho \cos \sigma \operatorname{sen} \sigma. \tag{21*}$$

La (22) dimostra che C' ha le stesse normali principali di C, e dalle (21), (21*) segue dividendo: $\frac{\rho'}{T'} = \operatorname{tg} \sigma = \frac{\rho}{T}$; il teorema è dimostrato.

Le curve con $\frac{\rho}{T} = \text{cost.}$ si presentano dunque a coppie aventi a comune le normali principali e distanti di un quadrante; ma anche inversamente:

b) Se due curve C, C' hanno a comune le normali principali e distano di un quadrante, esse hanno eguali ad una medesima costante i rapporti $\frac{\rho}{T}$, $\frac{\rho'}{T'}$ delle due loro curvature.

Per dimostrare questo teorema basta riprendere il calcolo superiore e, fatta la posizione (19), verificare che σ è necessariamente una costante. E infatti, sussistendo per ipotesi la (22), dalla derivazione delle (20) risulta appunto $\frac{d\sigma}{ds} = 0$.

Prendiamo ora una coppia qualunque (C, C') di tali curve coniugate e facciamo la costruzione indicata nel teorema finale al paragrafo precedente per verificare che le rigate così ottenute sono *sviluppabili.* Ma noi dimostreremo insieme altre notevoli proprietà che collegano le curve con $\frac{\rho}{T} = \text{cost.}$ nello spazio ellittico colle curve a flessione costante, contenute nel seguente teorema:

c) Se (C, C') è una coppia di curve coniugate con $\frac{\rho}{T} = \text{cost.}$ *(aventi quindi a comune le normali principali e distanti di un quadrante), si conduca per ogni punto M di C la perpendicolare al piano osculatore della coniugata C' nel punto corrispondente e su questa retta si stacchi un segmento $M\overline{M}$ eguale ad un quadrante. La curva $\overline{C}$ luogo degli estremi $\overline{M}$ gode delle due seguenti proprietà: 1.° essa ha per tangente in $\overline{M}$ il segmento $M\overline{M}$, 2.° la sua flessione $\frac{1}{\overline{\rho}}$ è costante ed uguale a $\frac{T}{\rho}$.*

Indicando infatti con $\overline{x}$ le coordinate di $\overline{M}$, abbiamo

$$\overline{x} = \lambda' = -\alpha \operatorname{sen} \sigma + \lambda \cos \sigma,$$

e di qui derivando deduciamo gli elementi della curva $\overline{C}$. Una prima derivazione porge

$$\frac{d\overline{s}}{ds} = \operatorname{sen} \sigma, \quad \overline{\alpha} = x, \tag{23}$$

e una seconda derivazione

$$\operatorname{sen} \sigma \left(\frac{\overline{\xi}}{\overline{\rho}} - \overline{x} \right) = \alpha,$$

ossia

$$\operatorname{sen} \sigma \frac{\overline{\xi}}{\overline{\rho}} = -\cos \sigma (\alpha \cos \sigma + \lambda \operatorname{sen} \sigma),$$

quindi

$$\frac{1}{\overline{\rho}} = \cot \sigma = \frac{T}{\rho} \cdot \tag{24}$$

Le formole (23), (24) dimostrano la proposizione enunciata. Si vede poi facilmente che eseguendo la costruzione del teorema *c*) per la curva coniugata C', anzichè per la C, la nuova curva $\overline{C'}$ a flessione costante è il luogo dei centri di curvatura della C. Nè si deve lasciare di osservare che la C è altresì il luogo degli estremi di quadranti staccati sulle binormali di C' (a partire da C' stessa), cioè la curva polare di C', e medesimamente C' è la polare di C.

In fine invertiamo i risultati precedenti dimostrando il seguente teorema:

d) Se una curva C dello spazio ellittico ha la flessione $\frac{1}{\rho}$ *costante e sulle tangenti e sulle binormali di C, a partire dal punto M della curva, si riportano* *segmenti MM', MM'' eguali a quadranti, le curve C', C'' luogo dei rispettivi estremi M', M'' hanno costanti ed eguali a $\frac{1}{\rho}$ i rapporti $\frac{T'}{\rho'}$, $\frac{T''}{\rho''}$ delle due curvature e sono curve coniugate (hanno a comune le normali principali e distano di un quadrante).*

Calcoliamo invero gli elementi delle curve C', C''. Poichè $\frac{1}{\rho}$ è costante poniamo

$$\frac{1}{\rho} = \cot \sigma \; (\sigma = \text{cost.}).$$

Per la curva C' abbiamo

$$x' = \alpha,$$

e derivando

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma},$$

indi

$$\alpha' = -x \operatorname{sen} \sigma + \xi \cos \sigma.$$

Una nuova derivazione dà

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \sigma}\left(\frac{\xi'}{\rho'} - \alpha\right) = -\alpha \operatorname{sen} \sigma - \cos \sigma \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{T}\right),$$

ossia riducendo

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma}{T}, \quad \xi' = -\lambda. \tag{25}$$

Per conseguenza avremo

$$\lambda' = x \cos \sigma + \xi \operatorname{sen} \sigma,$$

e con una nuova derivazione

$$\frac{1}{T'} = \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{T}. \tag{25*}$$

Dividendo la (25) per (25*) risulta $\frac{T'}{\rho'} = \cot \sigma = \frac{1}{\rho}$, ciò che dà una prima parte della proposizione enunciata. Ed ora calcolando gli elementi della curva C'' polare della C abbiamo le formole (valevoli per qualunque curva C)

$$x'' = \lambda, \quad \alpha'' = \xi, \quad \xi'' = -\alpha, \quad \lambda'' = -x$$

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{T}{\rho}, \quad \frac{1}{T''} = T; \quad \frac{T''}{\rho''} = \frac{1}{\rho},$$

e queste, paragonate colle precedenti, completano il teorema.

Da tutto ciò si raccoglie che nello spazio ellittico la determinazione delle curve a flessione costante e quella delle curve in cui è costante il rapporto delle due curvature sono problemi perfettamente equivalenti.

§ 24.

Trasformazione B_c pei sistemi (Ω_σ) in geometria ellittica.

Ritorniamo ai sistemi generali (Ω_σ) e andiamo a stabilire, anche per lo spazio ellittico, la teoria delle trasformazioni.

Di ciascuna superficie pseudosferica S del sistema dato (Ω_σ) prendasi *una* trasformata S' di Bäcklund secondo una trasformazione B_c a costante c fissa. Questa S' sarà data dalle formole (§ 18)

$$x' = \cos c' \,.\, x + \operatorname{sen} c' (\cos \theta' \,.\, \eta + \operatorname{sen} \theta' \,.\, \zeta), \tag{26}$$

dove la costante c' è legata alla c dalla relazione (4) § 18

$$\operatorname{sen} c' = a \operatorname{sen} c, \tag{27}$$

e la funzione θ' di u, v soddisfa alle equazioni (A) di trasformazione (§ 18)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \quad a \cot c' \cos \theta \operatorname{sen} \theta' - \cot c \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -a \cot c' \operatorname{sen} \theta \cos \theta' + \cot c \cos \theta \operatorname{sen} \theta'. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Domandiamo se è possibile scegliere ulteriormente θ' in guisa che le superficie trasformate S' formino un nuovo sistema (Ω'_σ) Per questo è anzi tutto necessario che siano soddisfatte le due relazioni

$$S\left(\frac{\partial x'}{\partial w}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 \cdot \left(\frac{\partial \theta'}{\partial w}\right)^2, \quad S\,\xi'\frac{\partial x'}{\partial w} = \pm \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\tau \frac{\partial \theta'}{\partial w}, \tag{28}$$

dove

$$\xi' = \cos c\, \xi + \operatorname{sen} c\,(\operatorname{sen}\theta'\,\eta - \cos\theta'\,\zeta) \tag{29}$$

sono i coseni di direzione della normale alla S'. Ora derivando la (26) rapporto a w, col tener conto delle equazioni fondamentali, si trova:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial w} &= \operatorname{sen} c' \operatorname{sen}\tau \cos\sigma \operatorname{sen}(\theta' - \varphi)\frac{\partial \sigma}{\partial w}\cdot x + \\ &\quad + \left[\operatorname{sen} c' \cos\tau \cos(\theta' - \varphi) - \cos c' \operatorname{sen}\tau\right]\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}\cdot \xi + \\ &+ \left\{(\cos c' \operatorname{sen}\tau \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen} c' \cos\tau \operatorname{sen}\theta')\cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} - \operatorname{sen} c' \operatorname{sen}\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial w}\right\}\cdot \eta + \\ &+ \left\{(-\cos c' \operatorname{sen}\tau \cos\varphi + \operatorname{sen} c' \cos\tau \cos\theta')\cos\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} + \operatorname{sen} c' \cos\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial w}\right\}\cdot \zeta,\end{aligned}$$

e, formando le condizioni (28), con procedimento analogo a quello tenuto nel § 13, si giunge alla equazione di condizione:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial w} = \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma(\cos c' \cos\sigma + \cos c \cos\tau)\cos(\theta' - \varphi) - \operatorname{sen}^2 c \cos\sigma\cos\tau - \operatorname{sen}^2\sigma \cos c \cos c'}{\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2\sigma}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial w}. \tag{I*}$$

Aggregando questa alle (I), si ha un sistema (del tipo di Riccati) completamente integrabile, a causa delle (A) e (B). Ed ora si può dimostrare che, prendendo per θ' una qualunque delle ∞^1 soluzioni del sistema (I), (I*), le formole (26) vengono in effetto a definire un nuovo sistema (Ω'_σ). Per questa verifica basta procedere come al § 14 e calcolare la funzione φ' associata a θ', come prima φ a θ. Paragonando le (30) colle altre

$$\frac{\partial x'}{\partial w} = \operatorname{sen}\tau \frac{\partial \theta'}{\partial w}\left\{-\operatorname{sen}\sigma\,\xi' + \cos\sigma\,(\operatorname{sen}\varphi'\,\eta' - \cos\varphi'\,\zeta'),\right\},$$

si trovano per definire φ' le due formole concordanti:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta - \varphi') &= \frac{(\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2\sigma)\operatorname{sen}(\theta' - \varphi)}{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma(\cos c' \cos\sigma + \cos c \cos\tau)\cos(\theta' - \varphi) - \operatorname{sen}^2 c \cos\sigma\cos\tau - \operatorname{sen}^2\sigma\cos c \cos c'} \\ \cos(\theta - \varphi') &= \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma(\cos c' \cos\tau + \cos c \cos\tau) - (\operatorname{sen}^2 c \cos\sigma\cos\tau + \operatorname{sen}^2\sigma \cos c \cos c')\cos(\theta' - \varphi)}{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma(\cos c' \cos\sigma + \cos c \cos\tau)\cos(\theta' - \varphi) - \operatorname{sen}^2 c \cos\sigma\cos\tau - \operatorname{sen}^2\sigma\cos c \cos c'},\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

che possono compendiarsi nell'unica

$$\operatorname{tg}\frac{\theta-\varphi'}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\tau+c'}{2}\cos\frac{c+\sigma}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau-c'}{2}\cos\frac{c-\sigma}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\theta'-\varphi}{2}. \tag{31*}$$

Con queste formole, corrispondenti alle (31), (31*) § 14 pel caso euclideo, le altre verifiche si conducono nel medesimo modo. Possiamo dunque concludere:

I sistemi (Ω_σ) *dello spazio ellittico ammettono trasformazioni di* Bäcklund (*e complementari*) *nella stessa generalità come nello spazio euclideo.*

È bene evidente poi che, considerando l'effetto di queste trasformazioni B_c sulle curve di Bertrand trajettorie isogonali, si è condotti a trasformazioni di queste curve che corrispondono esattamente a quelle di Razzaboni e Demartres per lo spazio euclideo.

§ 25.

Sistemi (Ω_σ) di superficie a curvatura nulla.

Esaminiamo il caso particolare notevole in cui le superficie S del sistema (Ω_σ) hanno nulla la curvatura *assoluta* (sono applicabili sul piano euclideo).

Come si sa, queste superficie dello spazio ellittico godono di proprietà affatto singolari (*) ed è quindi interessante osservare come si comportano nei sistemi (Ω_σ).

Otteniamo il caso delle superficie a curvatura nulla ponendo nelle nostre formole generali la costante $a=1$ e quindi per la (4) § 18

$$\operatorname{sen}\tau=\operatorname{sen}\sigma,\quad \cos\tau=\pm\cos\sigma.$$

1) Intanto la formola (18), § 21 che lega le curvature delle trajettorie

(*) Vedi *Lezioni*, Vol. I, §§ 200, 219, 220 e più diffusamente la mia Memoria: *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* nel Tomo 24, Serie 2.ª di questi *Annali* (1895.

isogonali (w) diventa qui

$$\frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{T} \pm 1} = \text{cost.}$$

Il denominatore $\frac{1}{T} \pm 1$ di questo rapporto è la così detta *torsione di* CLIFFORD (*) della curva (destrorsa o sinistrorsa), e le curve caratterizzate dalla relazione superiore vengono dette le *eliche* della geometria ellittica, poichè corrispondono alle eliche della geometria euclidea come geodetiche delle rigate a curvatura nulla. Abbiamo dunque il primo risultato: *Nei sistemi* (Ω_σ) *di superficie a curvatura nulla in geometria ellittica le trajettorie isogonali* (w) *del sistema sono eliche cilindriche.* In particolare quando $\sigma = \frac{\pi}{2}$, risulta $\frac{1}{\rho} = 0$ e le eliche sono rette, ossia il sistema (Ω_σ) è un sistema di superficie a curvatura nulla parallele.

2) Esaminiamo ora le rigate che si formano (cf. § 22) conducendo nei punti di una trajettoria (w) (elica cilindrica) le normali alle superficie di curvatura nulla del sistema. La formola (18'), § 22, essendo qui $a = 1$, $\cos^2\tau = \cos^2\sigma$, diventa

$$d\,s_0^2 = d\,t^2 - 2\,\text{sen}\,\sigma\,d\,t\,d\,\psi + d\,\psi^2$$

e dimostra che questa rigata è a curvatura nulla, onde le sue generatrici sono parallele nel senso di CLIFFORD (Vol. I, pag. 507). Abbiamo dunque il teorema:

Le normali alle superficie a curvatura nulla di un sistema (Ω_σ) *nei punti d'incontro con una medesima trajettoria (elica cilindrica) sono parallele nel senso di* CLIFFORD.

E siccome le trajettorie (w) segano sotto angolo costante un sistema di parallele di CLIFFORD, segue nuovamente che esse sono eliche cilindriche.

D'altra parte ricordiamo che le normali ad una superficie a curvatura nei punti di una sua linea asintotica sono pure parallele, nel senso destrorso o sinistrorso a seconda del sistema cui l'asintotica appartiene. L'uno o l'altro

(*) La denominazione venne data dal FUBINI nella sua tesi: *Sul parallelismo di* CLIFFORD [Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. IX (1900)].

di questi due sensi combinerà con quello delle normali lungo una trajettoria, e perciò: *Le normali alle superficie a curvatura nulla di un sistema* (Ω_σ) *lungo asintotiche corrispondenti di uno dei due sistemi sono parallele nel senso di* CLIFFORD (*formano cioè una congruenza di* CLIFFORD). Sarebbe facile confermare analiticamente questo teorema dal calcolo dei parametri di scorrimento (destrorsi o sinistrorsi) delle normali (cf. § 10 della Memoria *sulle deformazioni isogonali* citata al § 2).

3) Consideriamo ora il sistema di equazioni a derivate parziali (A), (B), (B*) § 19 da cui dipende la ricerca degli attuali sistemi (Ω_σ). Pongasi p. e. in queste equazioni $a = 1$, $\tau = \sigma$; esse diventano

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = \cot\sigma \operatorname{sen}(\varphi - \theta), \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} = \cot\sigma \operatorname{sen}(\varphi - \theta), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w} = -\cot\sigma \cos(\varphi - \theta)\frac{\partial \theta}{\partial w} \\ &\frac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w} = -\cot\sigma \cos(\varphi - \theta)\frac{\partial \theta}{\partial w} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial w} = \cot\sigma \cos(\varphi - \theta)\frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\, \partial w} = \cot\sigma \cos(\varphi - \theta)\frac{\partial \varphi}{\partial w}\,. \end{aligned}\right.$$

Si cangino le variabili u, v delle linee di curvatura in quelle α, β delle linee asintotiche colle formole

$$u = \alpha + \beta, \quad v = \alpha - \beta$$

e si cangi anche di funzioni incognite ponendo

$$\Phi = \varphi + \theta, \quad \Omega = \varphi - \theta;$$

il sistema proposto diventa

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 2\cot\sigma \operatorname{sen}\Omega, && \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial w} = 0, \\ &\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = 0, && \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha\, \partial w} = 2\cot\sigma \cos\Omega \,.\, \frac{\partial \Phi}{\partial w}\,. \end{aligned}\right.$$

Per conseguenza la Ω non contiene β e deve soddisfare in α, w l'equazione del 3.° ordine

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\cos\Omega}\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha\, \partial w}\right) = 4\cot^2\sigma \cos\Omega\,\frac{\partial \Omega}{\partial w}\,. \tag{32}$$

Viceversa se Ω soddisfa la (32), si indichi con Φ_0 quella funzione (delle sole α, w) che ha per differenziale totale

$$2 \cot \sigma \operatorname{sen} \Omega \, . \, d\alpha + \frac{1}{2 \cot \sigma \cos \Omega} \, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha \, \partial w} \cdot d w,$$

e il valore più generale per Φ sarà

$$\Phi = \Phi_0 + \psi(\beta), \tag{32*}$$

con $\psi(\beta)$ funzione arbitraria di β. In particolare se si fa $\psi(\beta) = 0$ (o costante), le superficie a curvatura nulla del sistema (Ω_σ) sono tutte rigate.

Come si vede, la determinazione dei sistemi (Ω_σ) di superficie a curvatura nulla è ridotta alla integrazione della equazione del 3.° ordine (32).

4) *Trasformazione parallela.* Nel caso attuale dei sistemi (Ω_σ) di superficie a curvatura nulla esiste un'altra trasformazione semplicissima data dal teorema seguente:

Se di ciascuna superficie S a curvatura nulla del sistema (Ω_σ) si prende la parallela $\overline{S}$ a distanza fissa costante δ, queste superficie $\overline{S}$ costituiscono un nuovo sistema (Ω_σ).

La dimostrazione risulta subito calcolando gli elementi della $\overline{S}$, pei quali abbiamo

$$\overline{x} = x \cos \delta - \xi \operatorname{sen} \delta, \quad \overline{\xi} = x \operatorname{sen} \delta + \xi \cos \delta, \quad \overline{\eta} = \eta, \quad \overline{\zeta} = \zeta,$$

e quindi

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = \cos(\theta + \delta) \, . \, \overline{\eta}, \quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = \operatorname{sen}(\theta + \delta) \, \overline{\zeta},$$

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial w} = \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \theta}{\partial w} \left\{ - \operatorname{sen} \sigma \, \overline{\xi} + \cos \sigma \operatorname{sen}(\varphi + \delta) \, . \, \overline{\eta} - \cos \sigma \cos(\varphi + \delta) \, \overline{\zeta} \right\} .$$

Il nuovo sistema (Ω_σ) corrisponde alla coppia di soluzioni $(\theta + \delta, \ \varphi + \delta)$ delle equazioni fondamentali; in particolare per $\delta = \frac{\pi}{2}$ si ha il sistema polare del primitivo.

È poi da osservarsi che la trasformazione parallela risulta geometricamente dal comporre due trasformazioni complementari successive (cf. il § 12 della seconda Memoria citata al § 2).

§ 26.

Sistemi (Ω_σ) di 1.ª specie in geometria iperbolica.

Passiamo ora a studiare i sistemi (Ω_σ) nello spazio iperbolico $(K = -1)$, limitandoci per altro ad indicare i momenti principali della ricerca.

In geometria iperbolica sono da distinguersi due specie diverse di sistemi (Ω_σ) a seconda che le superficie pseudosferiche del sistema hanno la curvatura relativa $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ negativa o positiva. Diremo sistemi (Ω_σ) di *prima specie* quelli con $\frac{1}{\rho_1 \rho_2} < 0$, di *seconda specie* quelli con $\frac{1}{\rho_1 \rho_2} > 0$. Cominciamo lo studio da quelli di 1.ª specie, le cui formole derivano con leggieri cambiamenti dalle formole già stabilite per la geometria ellittica.

Una superficie S a curvatura (relativa) costante negativa

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{1}{a^2}$$

dello spazio iperbolico, riferita alle sue linee di curvatura u, v, è definita dalle formole (cf. § 18)

$$d s^2 = a^2 (\cos^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2) \tag{33}$$

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\cot \theta}{a}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{a}, \tag{34}$$

dove θ è una soluzione della equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = (1 + a^2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \tag{35}$$

Usando poi le solite notazioni per gli elementi della superficie S, abbiamo le formole fondamentali

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = a \cos \theta \,.\, \eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \operatorname{sen} \theta \,.\, \eta, \\
&\qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = a \cos \theta \,.\, x - \operatorname{sen} \theta \, \xi + \frac{\partial \theta}{\partial v} \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} \eta, \\
&\frac{\partial x}{\partial v} = a \operatorname{sen} \theta \,.\, \zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\cos \theta \,.\, \zeta, \\
&\qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = a \operatorname{sen} \theta \,.\, x + \cos \theta \, \xi - \frac{\partial \theta}{\partial u} \eta.
\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Si consideri ora una congruenza pseudosferica, con S per prima falda focale, di cui sia σ l'angolo dei piani focali e τ la distanza dei fuochi; fra le costanti σ, τ sussiste la relazione

$$\operatorname{senh} \tau = a \operatorname{sen} \sigma. \tag{36}$$

La seconda falda S', trasformata di S per una B_σ, è data dalle formole

$$x' = \cosh \tau \,.\, x + \operatorname{senh} \tau (\cos \varphi \,.\, \eta + \operatorname{sen} \varphi \,.\, \zeta), \tag{37}$$

e analoghe, dove l'angolo φ soddisfa alle equazioni di trasformazione

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= a \coth \tau \cos \theta \operatorname{sen} \varphi - \cot \sigma \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= - a \coth \tau \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \cot \sigma \cos \theta \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}\right.$$

Suppongasi ora, come al § 19, di tener fissa S' e di far percorrere ad S le ∞^1 trasformate di S' per la B_σ; così S descrive un sistema elementare (Ω_σ), e dalle formole ottenute pei sistemi elementari si passa a quelle pei sistemi (Ω_σ) in generale collo stesso metodo del § 19. Così si giunge al risultato finale seguente:

I *sistemi* (Ω_σ) *di prima specie nello spazio iperbolico corrispondono biunivocamente alle coppie* (θ, φ) *di funzioni* u, v, w *che soddisfano al seguente sistema di equazioni a derivate parziali:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= a \coth \tau \cos \theta \operatorname{sen} \varphi - \cot \sigma \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= - a \coth \tau \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \cot \sigma \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \quad (\operatorname{senh} \tau = a \operatorname{sen} \sigma) \right\} \tag{A'}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} &= -(\cosh \tau \cos \theta \cos \varphi + \cos \sigma \operatorname{sen} \theta \cos \varphi) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} &= -(\cosh \tau \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \cos \sigma \cos \theta \cos \varphi) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot \end{aligned}\right\} \tag{B'}$$

Note le funzioni θ, φ, *il corrispondente sistema* (Ω_σ) *è determinato, a meno di movimenti nello spazio, dalle equazioni del quadro* (c) *a cui si aggreghino* *le seguenti:*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial w} &= \quad \operatorname{senh}\tau \frac{\partial \theta}{\partial w}(-\operatorname{sen}\sigma\,\xi + \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\,\eta - \cos\sigma\cos\varphi\,\zeta) \\
\frac{\partial \xi}{\partial w} &= -\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \theta}{\partial w}(\operatorname{senh}\tau\,.\,x + \cosh\tau\cos\varphi\,\eta + \cosh\tau\operatorname{sen}\varphi\,\zeta) \\
\frac{\partial \eta}{\partial w} &= \frac{\partial \theta}{\partial w}(\operatorname{senh}\tau\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,x + \cosh\tau\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,\xi + \cosh\tau\cos\sigma\,\zeta) \\
\frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \frac{\partial \theta}{\partial w}(-\operatorname{senh}\tau\cos\sigma\cos\varphi\,x + \cosh\tau\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,\xi - \cosh\tau\cos\sigma\,\eta).
\end{aligned}\right\} \quad (C')$$

Una volta trovato questo sistema (Ω_σ), se ne ha immediatamente in termine finiti un secondo (Ω'_σ) dalle formole (37). Questo secondo sistema deriva dal primo per trasformazione B_σ ed è da dirsi il *coniugato* del primo.

§ 27.

Proprietà dei sistemi (Ω_σ) di 1.ª specie.

Esaminiamo, in uno di questi sistemi (Ω_σ), le curve (w) trajettorie isogonali delle superficie pseudosferiche col procedimento stesso del § 21; soltanto qui in luogo delle (11) dovremo servirci delle formole di Frenet in *geometria iperbolica* (Vol. I, pag. 458), che scriviamo

$$\frac{dx}{ds} = t, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{n}{\rho} + x, \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{t}{\rho} - \frac{b}{T}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{n}{T}. \tag{11*}$$

a) Avremo in primo luogo

$$t = -\operatorname{sen}\sigma\,\xi + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,\eta - \cos\sigma\cos\varphi\,\zeta \quad \left(ds = \operatorname{senh}\tau\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\cdot dw\right), \tag{38}$$

poi derivando rapporto a w, a sinistra colle formole di Frenet (11*), a destra con quelle del quadro (c′), troviamo:

$$\frac{1}{\rho} = \varepsilon\left(\frac{\cos\sigma}{\operatorname{senh}\tau}\,\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial w}} + \coth\tau\right) \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{39}$$

$$n = \varepsilon (\cos \varphi \, \eta + \operatorname{sen} \varphi \, \zeta) \tag{40}$$

$$b = \varepsilon (\cos \sigma \, \xi + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \varphi \, \eta - \operatorname{sen} \sigma \cos \varphi \, \zeta). \tag{41}$$

Una nuova derivazione di queste ultime rapporto a w porge

$$\frac{1}{T} = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{senh} \tau} \, \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}}, \tag{42}$$

quindi fra $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ la relazione lineare a coefficienti costanti

$$\frac{\varepsilon \operatorname{sen} \sigma}{\rho} - \frac{\cos \sigma}{T} = \frac{\cosh \tau}{a}, \tag{43}$$

che caratterizza le trajettorie (w) come *curve di* Bertrand. Le formole (40) poi dimostrano che le normali principali delle trajettorie (in ambedue i sistemi coniugati (Ω_σ), (Ω'_σ)) coincidono coi raggi delle congruenze pseudosferiche a falde focali S, S', onde abbiamo anche qui: *Ogni coppia di trajettorie corrispondenti in due sistemi coniugati* (Ω_σ), (Ω'_σ) *è formata da due curve coniugate di* Bertrand, *aventi a comune le normali principali.*

b) Si osservi che nel caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $a = \operatorname{senh} \tau$, il sistema ($\Omega_\sigma$) diventa un sistema ortogonale di Weingarten a flessione costante $\frac{1}{\rho} = \coth \tau > 1$; e col solito procedimento si dimostra: *I sistemi* (Ω_σ) *di 1.ª specie nello spazio iperbolico derivano con una trasformazione di* Lie (*) *dai sistemi di* Weingarten *a flessione costante* > 1.

c) Si consideri la rigata delle normali alle superficie pseudosferiche S nei loro punti d'incontro con una trajettoria (w). Usando le medesime notazioni che al § 22, troviamo per l'elemento lineare $d s_0$ di una tale rigata

$$d s_0^2 = d t^2 - 2 \operatorname{sen} \sigma \, d t \, d \psi + \left\{ \operatorname{sen}^2 \sigma + \cos^2 \sigma \cosh^2 t + \frac{\cosh^2 \tau}{a^2} \operatorname{senh}^2 t \right\} d \psi^2,$$

(*) Per la costante σ' di questa trasformazione di Lie si trovano le formole: $\operatorname{sen} \sigma' = \frac{\cos \sigma}{\cosh \tau}$, $\cos \sigma' = \frac{\operatorname{sen} \sigma \sqrt{a^2 + 1}}{\cosh \tau}$.

analoga alla (18'), e dalla quale si traggono conseguenze affatto simili, che non importa nemmeno formulare.

d) Da ultimo dimostriamo l'esistenza delle trasformazioni B_c di Bäcklund per gli attuali sistemi (Ω_σ) coll'addurre le formole relative. Prendasi la costante c' legata alla costante c dalla relazione

$$\operatorname{senh} c' = a \operatorname{sen} c,$$

e si assuma per θ' una funzione di u, v, w che soddisfi al sistema di Riccati completamente integrabile:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta'}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}= \quad a\coth c'\cos\theta\operatorname{sen}\theta'-\cot c\operatorname{sen}\theta\cos\theta'\\
&\frac{\partial\theta'}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=-a\coth c'\operatorname{sen}\theta\cos\theta'+\cot c\cos\theta\operatorname{sen}\theta'\\
&\frac{\partial\theta'}{\partial w}=\frac{\operatorname{sen}c\operatorname{sen}\sigma(\cosh c'\cos\sigma+\cos c\cosh\tau)\cos(\theta'-\varphi)-\operatorname{sen}^2 c\cos\sigma\cosh\tau-\operatorname{sen}^2\sigma\cos c\cosh c'}{\operatorname{sen}^2 c-\operatorname{sen}^2\sigma}\,\frac{\partial\theta}{\partial w};
\end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

le formole

$$x' = \cosh c' \,.\, x + \operatorname{senh} c'(\cos\theta'\,\eta + \operatorname{sen}\theta'\,\zeta)$$

daranno il sistema trasformato.

§ 28.

Paragone colle formole dello spazio euclideo. Trasformazione H.

Le equazioni fondamentali (A), (B), §§ 18, 19, dalle quali abbiamo fatto dipendere la determinazione dei sistemi (Ω_σ) nello spazio ellittico, come pure la (A'), (B'), § 26 pei sistemi (Ω_σ) di 1.ª specie nello spazio iperbolico, offrono stretta analogia colle corrispondenti (A), (B), § 5 per lo spazio euclideo. Ma possiamo andare più oltre sino ad identificare i due sistemi di formole; con ciò verremo a porre una *corrispondenza biunivoca* fra i sistemi (Ω_σ) nello spazio euclideo e quelli nello spazio curvo.

Per esaminare la cosa più da vicino, prendiamo le formole (A), (B) del § 5 nelle quali la costante σ si cangierà in σ' e le variabili u, v si muteranno in ku, kv, con k costante, da scegliersi poi convenientemente. Dopo ciò le formole ricordate si scrivono

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial v}&= k\,\frac{\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi+\text{sen}\,\sigma'\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi}{\cos\sigma'}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \theta}{\partial u}&=-k\,\frac{\text{sen}\,\theta\cos\varphi+\text{sen}\,\sigma'\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\sigma'}\end{aligned}\right\}\tag{C}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma'\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}&=k\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\,(\text{sen}\,\sigma'\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi-\cos\theta\cos\varphi)\\ \cos\sigma'\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}&=k\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\,(\text{sen}\,\sigma'\cos\theta\cos\varphi-\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi).\end{aligned}\right\}\tag{D}$$

Prendiamo ora nello spazio ellittico un sistema (Ω_σ), *escludendo per altro il caso che le superficie* $w=\text{cost.}$ *siano a curvatura assoluta nulla*, supponendo cioè $(a)\neq 1$, e noi riterremo che sia $(a)<1$, bastando nel caso opposto passare al sistema polare di (Ω_σ). Le (C), (D) si identificano colle (A), (B), §§ 18, 19 se si prendono le costanti k, σ' per modo da soddisfare le equazioni

$$\frac{k}{\cos\sigma'}=\frac{\cos\tau}{\text{sen}\,\sigma},\quad k\,\text{tg}\,\sigma'=-\cot\sigma.$$

Da queste, quadrando e sottraendo viene

$$k^2=\frac{\cos^2\tau-\cos^2\sigma}{\text{sen}^2\,\sigma}=\frac{\text{sen}^2\,\sigma-\text{sen}^2\,\tau}{\text{sen}^2\,\sigma}=1-a^2,$$

e quindi per le formole richieste

$$k=\sqrt{1-a^2},\quad \cos\sigma'=\frac{k\,\text{sen}\,\sigma}{\cos\tau},\quad \text{sen}\,\sigma'=-\frac{\cos\sigma}{\cos\tau}.\tag{d}$$

Similmente si identificheranno le (C), (D) colle (A'), (B') § 26, ponendo

$$k=\sqrt{1+a^2},\quad \cos\sigma'=\frac{k\,\text{sen}\,\sigma}{\cosh\tau},\quad \text{sen}\,\sigma'=-\frac{\cos\sigma}{\cosh\tau}.\tag{d*}$$

Ad ogni coppia (θ,φ) di soluzioni delle equazioni fondamentali così identificate corrisponderà un sistema $(\Omega_{\sigma'})$ nello spazio euclideo ed un sistema (Ω_σ) nello spazio ellittico od iperbolico. E se riguardiamo come punti corrispondenti nello spazio euclideo e nello spazio curvo quelli che corrispondono alle medesime terne (u, v, w) di valori delle variabili, avremo anzi una rappresentazione dell'uno spazio sull'altro che cangia ogni superficie pseudosferica S' del primo sistema in una corrispondente S del secondo. Si vede subito che nella corrispondenza fra S, S' le due forme quadratiche fondamentali dell'una superficie sono proporzionali, per fattori costanti, alle corrispondenti dell'altra e per ciò: *le due superficie S, S' si corrispondono insieme per linee geodetiche e per sistemi coniugati, sono cioè coniugate in deformazione* (Vol. III, Cap. V). Il passaggio dall'una all'altra superficie è dato dalla così detta *trasformazione H* (Vol. III, § 73). Possiamo dunque dire: *La trasformazione H cangia i sistemi (Ω_σ) dello spazio euclideo in sistemi analoghi dello spazio ellittico od iperbolico, e quindi le curve di* BERTRAND (*trajettorie*) *dello spazio euclideo in corrispondenti curve di* BERTRAND *dello spazio ellittico od iperbolico.*

E la ragione ultima di questa corrispondenza stabilita dalla trasformazione H fra le curve di BERTRAND dei due spazî sta nel fatto che le rispettive rigate applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda che le hanno per linee di stringimento sono nuovamente superficie coniugate in deformazione.

§ 29.

FORMOLE PEI SISTEMI (Ω_σ) DI 2.ª SPECIE IN GEOMETRIA IPERBOLICA.

Da ultimo completiamo le nostre ricerche sui sistemi (Ω_σ) nello spazio iperbolico colla considerazione dei sistemi (Ω_σ) di *2.ª specie* (§ 26), nei quali la curvatura relativa $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ delle superficie *pseudosferiche* (a curvatura assoluta negativa) del sistema è positiva. Poniamo

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{a^2},$$

con a costante (positiva) > 1, affinchè la curvatura assoluta $\frac{1}{\rho_1 \rho_2} - 1$ sia negativa; e noi faremo quindi

$$a = \cosh \alpha,$$

con α costante reale e positiva. Per ogni singola superficie S, riferita alle sue linee di curvatura u, v valgono le formole

$$d s^2 = \cosh^2 \alpha \, (\cosh^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, d v^2) \tag{44}$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\coth \theta}{\cosh \alpha}, \qquad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\operatorname{tgh} \theta}{\cosh \alpha}, \tag{45}$$

dove θ è una soluzione della equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh}^2 \alpha \, . \operatorname{senh} \theta \cosh \theta. \tag{46}$$

Inoltre per gli elementi x, ξ, η, ζ di S sussistono le formole fondamentali del quadro:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \cosh \alpha \cosh \theta \, . \, \eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \operatorname{senh} \theta \, . \, \eta, \\
&\qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = \cosh \alpha \cosh \theta \, . \, x - \operatorname{senh} \theta \, \xi - \frac{\partial \theta}{\partial v} \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \eta, \\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \cosh \alpha \operatorname{senh} \theta \, . \, \zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \cosh \theta \, . \, \zeta, \\
&\qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \cosh \alpha \operatorname{senh} \theta \, . \, x - \cosh \theta \, . \, \xi - \frac{\partial \theta}{\partial u} \eta.
\end{aligned}\right\} \tag{C}$$

Ora se θ indica una qualunque soluzione della (46) e c una costante arbitraria, il sistema differenziale per una nuova funzione incognita ω dato dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} &= \operatorname{senh} \alpha \, (\operatorname{sen} c \operatorname{senh} \theta \cos \omega + \cos c \cosh \theta \operatorname{sen} \omega) \\
\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \omega}{\partial u} &= \operatorname{senh} \alpha \, (\operatorname{sen} c \cosh \theta \operatorname{sen} \omega - \cos c \operatorname{senh} \theta \cos \omega)
\end{aligned}\right\} \tag{C*}$$

è completamente integrabile, e qualunque sua soluzione ω soddisfa all'altra equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{senh}^2 \alpha \, . \operatorname{sen} \omega \cos \omega. \tag{46*}$$

Viceversa, se ω soddisfa a quest'ultima, le (C*) dànno un sistema integrabile per θ, e questa è una soluzione della (46).

Ciò premesso, suppongasi che θ e ω siano funzioni anche di una terza variabile w e soddisfino, insieme alle (C*), anche le altre

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w} &= \operatorname{senh} \alpha \frac{\partial \theta}{\partial w}(\operatorname{sen} c \cosh \theta \cos \omega + \cos c \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \omega)\\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w} &= \operatorname{senh} \alpha \frac{\partial \theta}{\partial w}(\operatorname{sen} c \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \omega - \cos c \cosh \theta \cos \omega).\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{D}^*)$$

Ad ogni tale coppia (θ, ω) di soluzioni delle (C*), (D*) corrisponde, nello spazio iperbolico, un sistema (Ω_σ) *di 2.ª specie*, che si ottiene nel modo seguente. Prendasi in primo luogo la costante σ legata a c ed α dalla relazione

$$\cot \sigma = \operatorname{senh} \alpha \cos c, \tag{47}$$

e pongasi

$$k = \operatorname{sen} \sigma + \operatorname{senh} \alpha \cos c \cos \sigma = \operatorname{sen} \sigma (1 + \operatorname{senh}^2 \alpha \cos^2 c). \tag{48}$$

Se aggreghiamo alle formole del quadro (C) le altre

$$\left.\begin{aligned}k\frac{\partial x}{\partial w} &= \cosh \alpha \frac{\partial \theta}{\partial w}(\operatorname{sen} \sigma\, \xi + \cos \sigma \operatorname{sen} \omega\, \eta - \cos \sigma \cos \omega\, \zeta)\\ k\frac{\partial \xi}{\partial w} &= \frac{\partial \theta}{\partial w}\Big\{\cosh \alpha \operatorname{sen} \sigma\, x - \operatorname{sen} c \operatorname{senh} \alpha (\cos \omega\, \eta + \operatorname{sen} \omega\, \zeta)\Big\}\\ k\frac{\partial \eta}{\partial w} &= \frac{\partial \theta}{\partial w}\Big\{\cosh \alpha \cos \sigma \operatorname{sen} \omega\, .\, x + \operatorname{sen} c \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \sigma \cos \omega\, \xi -\\ &\qquad - \operatorname{sen} c \cos \sigma \operatorname{senh} \alpha\, .\, \zeta\Big\}\\ k\frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \frac{\partial \theta}{\partial w}\Big\{- \cosh \alpha \cos \sigma \cos \omega\, .\, x + \operatorname{sen} c \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \omega\, \xi +\\ &\qquad + \operatorname{sen} c \cos \sigma \operatorname{senh} \alpha\, .\, \eta\Big\},\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{C}')$$

il sistema così ottenuto per x, ξ, η, ζ è completamente integrabile, soddisfatte le (C*), (D*); la sua integrazione dà il sistema (Ω_σ) di 2.ª specie corrispondente, determinato anche qui a meno di movimenti nello spazio.

Questi sistemi (Ω_σ) di seconda specie sono ben differenti, dal punto di vista reale, dai sistemi di 1.ª specie, nè si possono ottenere come questi dai sistemi (Ω_σ) dello spazio euclideo per trasformazione H (reale).

§ 30.

PROPRIETÀ DEI SISTEMI (Ω_σ) DI 2.ª SPECIE.

Esaminiamo ora le trajettorie (w) degli attuali sistemi (Ω_σ). Mantenendo le notazioni del § 27 ed usando analogo procedimento, troviamo pei coseni di direzione del triedro principale le formole

$$\left.\begin{aligned} t &= \operatorname{sen}\sigma\,\xi + \cos\sigma\,(\operatorname{sen}\omega\,\eta - \cos\omega\,\zeta) \\ n &= \varepsilon\,(\cos\omega\,\eta + \operatorname{sen}\omega\,\zeta) \qquad\qquad (\varepsilon = \pm 1), \\ b &= \varepsilon\,(\cos\sigma\,\xi - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\omega\,\eta + \operatorname{sen}\sigma\cos\omega\,\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

e per le due curvature $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ le altre

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \varepsilon\left(\frac{k\cos\sigma}{\cosh\alpha}\,\frac{\frac{\partial\omega}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}} - \operatorname{sen} c\operatorname{tgh}\alpha\right) \\ \frac{1}{T} &= -\frac{k\operatorname{sen}\sigma}{\cosh\alpha}\,\frac{\frac{\partial\omega}{\partial w}}{\frac{\partial\theta}{\partial w}}, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

indi fra $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ la relazione lineare a coefficienti costanti

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} + \varepsilon\frac{\cos\sigma}{T} = -\varepsilon\operatorname{sen} c\operatorname{sen}\sigma\operatorname{tgh}\alpha. \tag{51}$$

Abbiamo dunque anche in questo caso il teorema: *Le trajettorie isogonali (w) in un sistema (Ω_σ) di 2.ª specie sono curve di* BERTRAND, *colle normali principali dirette nei piani tangenti delle superficie S' del sistema.*

La differenza dal caso dei sistemi di 1.ª specie consiste in ciò che qui il sistema coniugato è *immaginario* e così pure le curve di BERTRAND attuali hanno curve coniugate *immaginarie.*

Si osservino i due seguenti casi particolari di sistemi (Ω_σ) di 2.ª specie:

1.º Nelle (C^*) suppongasi ω indipendente da w, con che dalle (C^*) seguono per derivazione le (D^*). Le formole (50) dànno allora

$$\frac{1}{T} = 0, \quad \frac{1}{\rho} = \operatorname{sen} c \operatorname{tgh} \alpha < 1,$$

onde si rileva che le trajettorie isogonali del sistema sono circoli, però con curvatura < 1 e quindi a centro ideale.

2.º Suppongasi $\sigma = \frac{\pi}{2}$ e quindi per la (47) anche $c = \frac{\pi}{2}$; la prima delle (50) dà

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{tgh} \alpha < 1,$$

ed il sistema (Ω_σ) diventa un sistema ortogonale di Weingarten a flessione costante < 1. Per questi particolari sistemi le equazioni fondamentali (C^*), (D^*) diventano semplicemente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial u'} + \frac{\partial \Omega}{\partial v'} &= \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \Theta \cos \Omega \\ \frac{\partial \Theta}{\partial v'} - \frac{\partial \Omega}{\partial u'} &= \operatorname{senh} \alpha \cosh \Theta \operatorname{sen} \Omega \end{aligned}\right\} \tag{E}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u' \partial w} &= \operatorname{senh} \alpha \cosh \Theta \cos \Omega \frac{\partial \Theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v' \partial w} &= \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \Theta \operatorname{sen} \Omega \frac{\partial \Theta}{\partial w} . \end{aligned}\right\} \tag{F}$$

D'altra parte, se effettuiamo sulle variabili u', v' la sostituzione ortogonale

$$u' = u \operatorname{sen} c - v \cos c, \qquad v' = u \operatorname{sen} c + v \cos c,$$

indi poniamo

$$\theta(u, v, w) = \Theta(u', v', w), \qquad \varphi(u, v, w) = \Phi(u', v', w),$$

il sistema (E), (F) si traduce nel sistema (C^*), (D^*); dunque: *I sistemi (Ω_σ) di seconda specie nello spazio iperbolico si deducono da quelli ortogonali di* Weingarten *a flessione costante < 1 per mezzo della trasformazione di* Lie.

Dopo ciò la ricerca delle trasformazioni di questi sistemi (Ω_σ) è ricondotta a quella pei sistemi di WEINGARTEN a flessione costante e risoluta dalle formole date in altra mia Memoria (*).

Viareggio, Agosto 1912.

(*) *Sui sistemi di* WEINGARTEN *negli spazii di curvatura costante.* Memorie della R. Accademia dei Lincei. Serie 4.ª, Vol. IV (1887).

INDICE DEI PARAGRAFI

PARTE PRIMA.

I SISTEMI OBLIQUI DI WEINGARTEN NELLO SPAZIO EUCLIDEO.

PARTE SECONDA.

I SISTEMI (Ω_σ) NEGLI SPAZÎ A CURVATURA COSTANTE.