ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR

L'AVANCEMENT DES SCIENCES

FUSIONNÉE AVEC

L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE

(Fondée par Le Verrier, en 1864)

Reconnues d'utilité publique.

COMPTE RENDU DE LA 38e SESSION

LILLE

— 1909 —

NOTES ET MÉMOIRES

PARIS

AU SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION

rue Serpente, 28

ET CHEZ MM. MASSON ET Cie, LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

boulevard Saint-Germain, 120

1910

M. J. CLAIRIN
Professeur à l'Université (Lille)

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS FINIS ET CONTINUS

517.38

— *3 août* —

J'ai démontré (*) le résultat suivant : $x_1, x_2, \ldots x_n, z_1, z_2, \ldots z_h$ désignant $n + h$ variables, représentons par

$$(1) \qquad X_1 f, \ X_2 f, \ \ldots\ldots, \ X_r f$$

r transformations infinitésimales linéairement indépendantes et par

$$(2) \qquad X_1^{(t)} f, \ X_2^{(t)} f, \ \ldots\ldots, \ X_r^{(t)} f$$

les transformations précédentes prolongées jusqu'à un certain ordre t, h des variables, $z_1, z_2, \ldots, z_h$ par exemple, étant considérées comme des fonctions des n autres, il n'existe, lorsque t est suffisamment grand, aucun système de fonctions $W_1, W_2, \ldots\ldots, W_r$ de $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_h$ et des dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_h$ qui satisfassent à l'équation

$$(3) \qquad W_1 X_1^{(t)} f + W_2 X_2^{(t)} f + \ \ldots\ldots \ + W_r X_r^{(t)} f = 0.$$

Je me propose en premier lieu d'indiquer une généralisation, d'ailleurs très facile, de ce théorème, puis de montrer qu'il est possible de l'établir, quand les transformations (*) engendrent un groupe, par une méthode différente de celle que j'ai employée et susceptible de donner dans certains cas des résultats plus précis.

Il est commode d'employer le langage géométrique : les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_h$ seront considérées comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $n + h$ dimensions, à un système de h

(*) Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. XXXII, p. 221 ; 1908.

relations indépendantes entre les coordonnées d'un point correspond dans cet espace une multiplicité à n dimensions, nous désignerons en général par M_n une telle multiplicité. En chaque point d'une multiplicité M_n les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_h$ et des dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_h$ dont l'ordre ne dépasse pas le nombre entier α définissent un élément d'ordre α appartenant à la multiplicité.

1. Appelons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ r constantes quelconques, la transformation infinitésimale

$$(4) \qquad \lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots\ldots + \lambda_r X_r f$$

engendre un groupe à un paramètre, l'ensemble des transformations de ces groupes dépend des r paramètres essentiels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; ces transformations font correspondre à une multiplicité M_n quelconque une famille (F) de ∞^r multiplicités analogues, définies par un système d'équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \\ z_2 = \varphi_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ z_h = \varphi_h (x_1, x_2, \ldots, x_n ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r). \end{array} \right.$$

Remarquons que, s'il existe entre les transformations (2) p relations distinctes telles que (3), chaque élément d'ordre t de M_n appartient à ∞^p multiplicités de la famille (F) puisque les transformations infinitésimales (4) qui laissent invariant cet élément dépendent de $p - 1$ paramètres.

Pour simplifier l'écriture nous représenterons par μ_i le nombre des dérivées d'ordre i d'une fonction de n variables et nous poserons

$$h\,(1 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_t) = T$$

En écrivant qu'un élément (e) d'ordre t ($t < r$) appartient à une multiplicité de la famille (F) nous obtenons T équations indépendantes, imaginons que ces équations puissent être résolues par rapport à un certain nombre r' des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Si r' est égal à r la multiplicité M_n qui contient l'élément (e) est déterminée, ou du moins ses équations ne renferment pas des paramètres variant d'une manière continue, d'après la remarque faite précédemment $X_1^{(t)} f, X_2^{(t)} f, \ldots, X_r^{(t)} f$ ne satisfont à aucune égalité de la forme (3).

Nous voyons aussi qu'il n'y a pas, quand r' est inférieur à r, plus de $r - r'$ relations linéaires entre les transformations (2) puisque les multiplicités sur lesquelles se trouve l'élément donné ne peuvent dépendre de paramètres dont le nombre dépasse $r - r'$.

Nous allons montrer que dans ce dernier cas le nombre r' est supérieur ou égal à $t + 1$. Les T équations que nous avons obtenues peuvent se partager en $t+1$ systèmes : le premier système comprend h équations et exprime que la multiplicité passe par le point qui supporte l'élément (e), le second système se compose de $h\mu_1$ équations formées en écrivant que l'élément du premier ordre contenu dans (e) appartient à la multiplicité et ainsi de suite. Du premier système on peut tirer la valeur de certaines des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; imaginons que l'on remplace ces paramètres par les expressions trouvées dans les équations du second système qui seront résolues par rapport à quelques-uns des paramètres non calculés et que l'on poursuive ainsi, ce qui sera possible tant que l'on n'arrivera pas à un système dont toutes les équations soient indépendantes de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ après que les opérations précédentes ont été effectuées. Si cette circonstance se présentait pour le i^e système $(i \leq t+1)$ on obtiendrait ainsi un système d'équations aux dérivées partielles du $(i-1)^e$ ordre auxquelles devraient satisfaire les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$, ces équations permettraient de calculer toutes les dérivées d'ordre $i-1$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puis de $z_1, z_2, \ldots, z_h$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $i-2$, la condition de contenir un élément d'ordre $i-2$ définirait complètement une multiplicité de la famille, les transformations infinitésimales

$$X_1^{(i-2)}f,\ X_2^{(i-2)}f,\ \ldots\ldots,\ X_r^{(i-2)}f$$

et par conséquent

$$X_1^{(t)}f,\ X_2^{(t)}f,\ \ldots,\ X_r^{(t)}f \tag{6}$$

ne seraient liées par aucune relation de la forme (3). D'ailleurs r' serait égal à r, sinon les multiplicités M_n ne dépendraient pas de r paramètres ; c'est le cas que nous avons examiné et écarté.

Le nombre r' est donc supérieur ou égal à $t+1$ si r' est moindre que r, puisque chacun des $t+1$ systèmes d'équations que nous avons considérés plus haut permet de calculer une ou plusieurs des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Le rapprochement des résultats précédents montre que le nombre des relations linéaires et homogènes distinctes entre les transformations (6) ne dépasse jamais $r-t-1$; en particulier

$$X_1^{(r-1)}f,\ X_2^{(r-1)}f,\ \ldots\ldots,\ X_r^{(r-1)}f$$

ne satisfont à aucune relation de cette espèce.

2. Faisons maintenant une hypothèse plus spéciale sur les transformations (1) et supposons qu'elles engendrent un groupe (G) ; les transformations (2) engendrent un groupe que nous désignerons par $(G^{(t)})$ qui n'est autre que le groupe (G) prolongé jusqu'à l'ordre t. Imaginons t assez grand pour que T soit égal ou supérieur à r, $(G^{(t)})$ possède au moins n invariants, c'est-à-dire qu'il existe au moins n invariants diffé-

rentiels d'ordre t de (G), ces invariants sont en effet les intégrales du système

$$(7) \qquad X_1^{(t)}f=0, \quad X_2^{(t)}f=0, \quad \ldots\ldots, \quad X_r^{(t)}f=0$$

qui est composé de r équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre où figurent $n+T$ variables. Nous allons montrer que si les transformations (2) sont liées par un certain nombre q de relations indépendantes telles que (3), les transformations

$$(8) \qquad X_1^{(t+1)}f, \quad X_2^{(t+1)}f, \quad \ldots\ldots, \quad X_r^{(t+1)}f$$

qui sont obtenues en prolongeant $X_1f, X_2f, \ldots, X_rf$ jusqu'à l'ordre $t+1$ et qui engendrent le groupe $(G^{(t+1)})$ ne satisfont pas à plus de $q-1$ équations analogues.

Les transformations (2) peuvent être rangées de façon qu'il n'y ait entre les $r-q$ premières aucune relation de la forme (3) tandis que $X_{r-q+1}^{(t)}f, X_{r-q+2}^{(t)}f, \ldots, X_r^{(t)}f$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1^{(t)}f, X_2^{(t)}f, \ldots, X_{r-q}^{(t)}f$, le système (7) se réduit à

$$(9) \qquad X_1^{(t)}f=0, \quad X_2^{(t)}f=0, \quad \ldots\ldots, \quad X_{r-q}^{(t)}f=0.$$

Imaginons qu'il existe le même nombre de relations linéaires et homogènes entre les transformations (2) et (8) ; les invariants d'ordre $t+1$ de (G) sont les intégrales du système

$$(10) \qquad X_1^{(t+1)}f=0, \quad X_2^{(t+1)}f=0, \quad \ldots\ldots, \quad X_{r-q}^{(t+1)}f=0,$$

les équations qui composent ce système sont indépendantes puisque les équations (9) le sont, de plus les équations

$$X_{r-q+1}^{(t+1)}f=0, \quad \ldots\ldots, \quad X_r^{(t+1)}f=0$$

sont des conséquences des précédentes si les transformations (8) satisfont à q relations distinctes telles que (3). Le système (10) est donc complet, il admet toutes les intégrales de (9), il admet en outre d'autres intégrales dont le nombre est égal au nombre des dérivées d'ordre $t+1$ de $z_1, z_2, \ldots, z_h$ c'est-à-dire $h\mu_{t+1}$. Ces nouvelles intégrales sont des fonctions indépendantes de ces $h\mu_{t+1}$ quantités, en effet, s'il en était autrement, elles satisferaient à une équation linéaire et homogène (ε) qui contiendrait les dérivées du premier ordre de f par rapport à ces dérivées $(t+1)^{es}$ de $z_1, z_2, \ldots, z_h$, cette équation ne pourrait être qu'une conséquence des équations (10), on l'obtiendrait en égalant à zéro une combinaison linéaire et homogène des premiers membres et on en déduirait

$$(11) \qquad H_1X_1^{(t)}f+H_2X_2^{(t)}f+\ldots\ldots+H_{r-q}X_{r-q}^{(t)}f=0,$$

$H_1, H_2, \ldots, H_{r-q}$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_h$ et des dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_h$, puique $X_1^{(t+1)}f, X_2^{(t+1)}f, \ldots\ldots, X_{r-q}^{(t+1)}f$ sont formées en ajoutant certains termes à $X_1^{(t)}f, X_2^{(t)}f,$

$\ldots, X_{r-q}^{(t)}f$ et que les termes contenus dans ces dernières expressions ne peuvent figurer dans le premier membre de (ε). Par hypothèse, il n'existe aucune relation telle que (11), les invariants d'ordre $t+1$ sont donc des fonctions indépendantes des dérivées $(t+1)^{es}$ de $z_1, z_2, \ldots, z_k$.

Considérons une multiplicité M_n quelconque, si nous écrivons dans les invariants différentiels de (G) d'ordre inférieur ou égal à $t+1$, au lieu de $z_1, z_2, \ldots, z_k$ et de leurs dérivées, leurs valeurs en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et si nous éliminons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nous obtenons des relations entre les invariants d'ordre $t+1$ et les invariants d'ordre moindre, les premiers peuvent être calculés en fonction des autres. Remplaçons dans ces relations les invariants par leurs expressions générales, nous trouvons un certain nombre d'équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les multiplicités transformées de M_n, d'après ce que nous avons démontré pour les invariants d'ordre $t+1$ ces équations peuvent être résolues par rapport aux dérivées $(t+1)^{es}$ de $z_1, z_2, \ldots, z_k$, la condition de contenir un élément d'ordre t définit donc une transformée de M_n : nous avons vu qu'il ne peut y avoir dans ce cas une relation du type (3) entre les transformations (2).

Nous arrivons ainsi à une contradiction en supposant que les transformations (2) et (8) sont liées par le même nombre de relations linéaires et homogènes, le nombre de ces relations diminue d'une unité au moins quand on passe de l'ordre t à l'ordre $t+1$. En poursuivant le raisonnement, on démontre qu'en prolongeant les transformations (1) jusqu'à un ordre assez élevé on obtient des transformations telles qu'il n'existe aucune relation.

On conçoit facilement que cette seconde méthode peut fournir parfois des résultats meilleurs que la première. Imaginons que l'on connaisse le nombre s des équations linéaires et homogènes auxquelles satisfont les expressions (1) et que le nombre t défini comme nous l'avons expliqué ($T \geqq r$) soit moindre que $r-s-1$, il n'y a pas plus de s relations distinctes analogues à (3) et nous venons de démontrer qu'après avoir prolongé le groupe jusqu'à l'ordre $t+s$, on trouve des transformations infinitésimales entre lesquelles il n'y a pas de relations linéaires et homogènes : le nombre $t+s$ est plus petit que $r-1$.