ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino | **Beniamino Segre** in Bologna
Tullio Levi-Civita in Roma | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO XVI

(LXXV DELLA RACCOLTA)

NICOLA ZANICHELLI. EDITORE

BOLOGNA, 1937-XVI

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1937-XVI

Sulle terne di congruenze di curve nello spazio proiettivo.

Memoria di GUIDO FUBINI (a Torino).

Sunto. - *Studio proiettivo di elementi geometrici che, in geometria metrica, sono stati studiati dal* LAMÉ *e dal* RICCI (*cfr. la breve introduzione*).

Introduzione.

Sono classiche le ricerche di LAMÉ per i sistemi di coordinate curvilinee dello spazio: specialmente noto il caso di coordinate curvilinee ortogonali. Nello spazio sono definiti tre sistemi Σ di superficie, tali che per ogni punto dello spazio escono tre superficie, una di ciascun sistema, che non hanno in tale punto alcuna tangente comune. Tali superficie hanno il nome di superficie coordinate; l'intersezione di due superficie di differente sistema è chiamata *linea coordinata.* Vi sono pure tre sistemi di linee coordinate. Da *ogni punto dello spazio escono tre linee coordinate, una per ogni sistema, le cui rette tangenti non giacciono in un medesimo piano.* Perciò ogni sistema di linee coordinate si dice essere una *congruenza* di curve, e le tre congruenze si dicono formare *un reticolo.* Viceversa, dato un reticolo di congruenze di curve, non sempre queste curve possono pensarsi come linee coordinate: cioè non sempre esistono tre sistemi Σ di superficie che con le loro mutue intersezioni determinano, c. s., le congruenze studiate: se fosse possibile determinare tali sistemi Σ, noi diremmo che il reticolo è *elementare.* Nel caso più generale (supponendo però che le tre curve uscenti da un punto generico siano a due a due ortogonali), e restando nell'ambito delle geometrie metriche definite da un elemento lineare, il RICCI ha caratterizzato tali congruenze mediante alcuni invarianti (rotazioni γ), che hanno trovato le più felici interpretazioni in molte ricerche. Generalizzare alla geometria proiettiva le ricerche del LAMÉ e del RICCI, pure rinunciando alle estensioni iperspaziali, ecco lo scopo del presente lavoro! Il caso dei reticoli piani è già stato studiato dal CECH ([1]), da me ([2]) e dal prof. PALOZZI ([3]).

([1]) Cfr. il Chap. X di G. FUBINI ed E. CECH: *Introduction à la géométrie projective-différentielle des surfaces* (Gauthier-Villars, 1931).

([2]) *Sur la géom. project. différ. des réseaux plans* in « Compositio Mathematica » (1933).

([3]) Cfr. « Rend. della R. Acc. dei Lincei »: una nota in vol. 18, due note in vol. 22,

§ 1. Prime definizioni.

Le ricerche di cui qui ci occupiamo generalizzano, da un punto di vista proiettivo, gli studii di Lamé e di Ricci sulle coordinate curvilinee nello spazio, e, più generalmente, sulle terne di congruenze di curve. Tranne forse in poche pagine, relative a certe condizioni di integrabilità, che non son' necessarie per l'intelligibilità di questa Memoria, gli studii si compiono coi mezzi più elementari. Cionpremostante ritengo la ricerca non sprovvista di ogni interesse, perchè completa in un punto essenziale gli studii di geometria proiettivo differenziale, e presenta i più stretti legami con altri capitoli della geometria differenziale non solo proiettiva, ma anche metrica.

Nella geometria proiettiva noi determineremo un punto P mediante quattro coordinate omogenee x, y, z, t; e diremo sovente punto x, anzichè punto P. Per determinare una retta uscente da P, mancando l'analogo dei coseni direttori, noi daremo le coordinate omogenee x', y', z', t' di un altro punto P' posto su questa retta. Date le x, x' (e analoghe $y, y', \ldots$) la retta è determinata; invece, se sono dati il punto P e la retta, le x, x' (ed analoghe) *non sono determinate*; nulla cambia se alle x, x' sostituiamo i numeri ρx, $\sigma x' + \tau x$ (ed analogamente alle y, y' le ρy, $\sigma y' + \tau y$, ecc.) ove ρ, σ, τ sono fattori qualsiasi soddisfacenti soltanto alle $\rho \neq 0$, $\sigma \neq 0$. Quando più avanti parleremo di *indeterminazione*, ci riferiremo sempre alla precedente osservazione elementare.

Diremo che K è una congruenza di curve C, se da ogni punto x_0 dello spazio esce una sola curva C di K: per determinare K, basterà per ogni punto x_0 dello spazio assegnare un altro punto x_α posto sulla tangente t nel punto x_0 alla curva C di K che esce da x_0: basterà p. es. dare x_α, y_α, ecc. (o anche solo i loro rapporti) come funzione dei rapporti $x_0 : y_0 : z_0 : t_0$. Od anche, se determiniamo i punti dello spazio (o di un suo pezzo) mediante tre coordinate curvilinee u, v, w, potremo dare le x_0, x_α (e analoghe y_0, $y_\alpha, \ldots$) in funzione di u, v, w: naturalmente permane la indeterminazione sopra segnalata.

Diremo che tre congruenze K_α di curve C_α ($\alpha = 1, 2, 3$) formano *un reticolo,* se le curve di K_α uscenti da un punto generico x_0 hanno le tangenti t_α *non complanari.* Cosicchè, scelta su ogni t_α un punto x_α distinto

due note in vol. 24; in esse è anche studiato qualche problema relativo ai reticoli dello spazio nel caso elementare.

da x_0, il determinante

(1) $$D = (x_0 x_1 x_2 x_3)$$

sarà differente da zero. Con questa notazione indichiamo il determinante di cui è stata scritta esplicitamente la prima riga, mentre le altre righe se ne deducono, sostituendo alle x rispettivamente le y, le z, le t. Useremo sempre notazioni analoghe per determinanti analoghi.

Indicheremo con ξ_i, η_i, ζ_i, τ_i i complementi algebrici di x_i, y_i, z_i, t_i, divisi per D. Sarà allora

(2) $$S x_i \xi_j = x_i \xi_j + y_i \eta_j + z_i \zeta_j + t_i \tau_j = \varepsilon_{ij}, \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

quando d' ora in poi si ponga

(3) $$\varepsilon_{ii} = 1, \quad \varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

Diremo piano ξ_i il piano $\xi_i x + \eta_i y + \zeta_i z + \tau_i t = 0$. Esso passa per i tre punti x_j con indice $j \neq i$. Così ξ_1 *è il piano tangente in* x_0 *alle curve* C_2, C_3 *di* K_2, K_3 *uscenti da* x_0: in modo simile si possono definire i piani ξ_2 e ξ_3. Invece il piano ξ_0 è un piano qualsiasi non passante per x_0, perchè è determinato dai punti x_α, che si possono scegliere ad arbitrio sulle rette t_α $(\alpha = 1, 2, 3)$.

D' ora in poi indicheremo *con lettere greche* gli indici che possono avere i valori 1, 2, 3 e *con lettere latine* quelli che possono ricevere i valori 0, 1, 2, 3.

Essendo $D \neq 0$, le

(4) $$dx_i = \omega_{i0} x_0 + \omega_{i1} x_1 + \omega_{i2} x_2 + \omega_{i3} x_3$$
(e analoghe in y, z, t)

determinano i pfaffiani ω_{ij}. Essendo il punto x_0 liberamente mobile nello spazio, i pfaffiani $\omega_{0\alpha}$ *saranno linearmente indipendenti* e noi li indicheremo con ω_α, ponendo

(5) $$\omega_{01} = \omega_1, \quad \omega_{02} = \omega_2, \quad \omega_{03} = \omega_3.$$

Se usassimo coordinate *non omogenee,* cioè ponessimo $t = 1$, e se con x_α indicassimo i punti ove le solite rette tangenti alle curve C_α incontrano il piano $t = 0$, le quarte coordinate dei punti x_α sarebbero nulle. E sarebbe

$$\omega_{00} = \omega_{10} = \omega_{20} = \omega_{30} = 0$$

(in coordinate *non* omogenee).

Essendo i tre pfaffiani ω_α linearmente indipendenti, ogni altro pfaffiano ω_{ij} si potrà ottenere come loro combinazione lineare. E noi porremo pertanto

(6) $$\omega_{ij} = \sum_\alpha \binom{i\alpha}{j} \omega_\alpha = \binom{i1}{j} \omega_1 + \binom{i2}{j} \omega_2 + \binom{i3}{j} \omega_3 .$$

Questi simboli $\binom{i\alpha}{j}$ *a tre indici sono*, come proveremo, *l'analogo dei simboli di Christoffel di seconda specie per la geometria metrica*; e si potrebbero quasi considerare come l'analogo delle *rotazioni del Ricci*, se mancasse l'indeterminazione che essi presentano come conseguenza della indeterminazione con cui si possono scegliere le x_i. Uno degli scopi del presente lavoro è pertanto quello di sopprimere tale indeterminazione.

Dalla loro stessa definizione e dalla osservazione che, se $i=0$, $j=\alpha$ allora $\omega_{ij}=\omega_\alpha$, segue

$$\binom{0\beta}{\alpha}=\varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta=1,2,3) \tag{7}$$

(al solito $\varepsilon_{\alpha\beta}=1$ se $\alpha=\beta$, mentre $\varepsilon_{\alpha\beta}=0$ se $\alpha\neq\beta$).

Le ω e i simboli a tre indici determinano le congruenze K (ma non viceversa, in causa *delle indeterminazioni citate*). Naturalmente le ω_α e i simboli a tre indici non si possono scegliere ad arbitrio: le ω_α devono essere *linearmente indipendenti; devono valere le* (7) e *devono essere soddisfatte le condizioni* (25) *d'integrabilità delle* (4).

Per studiare le possibili indeterminazioni, poniamo:

$$x_0=\sigma_0 X_0 \qquad x_\alpha=\sigma_\alpha X_\alpha+\mu_\alpha X_0 \qquad (\alpha=1,2,3) \tag{8}$$

$$(\sigma_0\neq 0,\ \sigma_\alpha\neq 0). \qquad \text{(e analoghe in } y, z, t)$$

Sostituendo in (4), troveremo

$$dX_i=\sum_k \Omega_{ik}X_k \qquad (i,k=1,2,3,4) \tag{9}$$

ove:

$$\begin{cases} \Omega_{0\alpha}=\omega_{0\alpha}\dfrac{\sigma_\alpha}{\sigma_0} & (\alpha=1,2,3) \\ \Omega_{\alpha\beta}=\omega_{\alpha\beta}\dfrac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}-\varepsilon_{\alpha\beta}\dfrac{d\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha}-\dfrac{\mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\Omega_{0\beta} & (\alpha,\beta=1,2,3) \end{cases} \tag{10}$$

(al solito $\varepsilon_{\alpha\alpha}=1$; $\varepsilon_{\alpha\beta}=0$ se $\alpha\neq\beta$).

Ponendo, analogamente alle (6):

$$\Omega_{\alpha\beta}=\sum_\gamma \begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{bmatrix}\Omega_{0\gamma} \qquad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3) \tag{11}$$

troveremo che i nuovi simboli $\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{bmatrix}$ sono dati dalla:

$$\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{bmatrix}=\binom{\alpha\gamma}{\beta}\frac{\sigma_0\sigma_\beta}{\sigma_\alpha\sigma_\gamma}-\varepsilon_{\beta\gamma}\frac{\mu_\alpha}{\sigma_\alpha}-\varepsilon_{\alpha\beta}(\log\sigma_\alpha)_\gamma\frac{\sigma_0}{\sigma_\gamma}. \qquad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3) \tag{12}$$

La (12) è stata dedotta dalla seconda delle (10), ponendo:

$$\omega_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \binom{\alpha\gamma}{\beta}\omega_\gamma = \sum \binom{\alpha\gamma}{\beta}\frac{\Omega_{0\gamma}\sigma_0}{\sigma_\gamma}$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha} = d\log\sigma_\alpha = (\log\sigma_\alpha)_1\omega_1 + (\log\sigma_\alpha)_2\omega_2 + (\log\sigma_\alpha)_3\omega_3 \qquad \left[\omega_\gamma = \frac{\Omega_{0\gamma}\sigma_0}{\sigma_\gamma}\right]$$

e confrontando con (11) il risultato così ottenuto. Noi anzi adotteremo in generale le notazioni qui usate per $\log\sigma_\alpha$. Se φ è una funzione qualunque, noi porremo

(13) $$d\varphi = \varphi_1\omega_1 + \varphi_2\omega_2 + \varphi_3\omega_3 .$$

[Sarà naturalmente $\varphi_\alpha = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}$, se ω_α sono differenziali esatti, e precisamente se $\omega_\alpha = du_\alpha$].

Da (12) si deduce per $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$:

(14) $$\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{bmatrix} = \binom{\alpha\gamma}{\beta}\frac{\sigma_0\sigma_\beta}{\sigma_\alpha\sigma_\gamma} \quad \text{se } \beta \neq \alpha \text{ e } \beta \neq \gamma \text{ (non si esclude che } \alpha = \gamma).$$

Se $\gamma = \beta \neq \alpha$

$$\begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \gamma\end{bmatrix} = \binom{\alpha\gamma}{\gamma}\frac{\sigma_0}{\sigma_\alpha} - \frac{\mu_\alpha}{\sigma_\alpha} \qquad (\gamma \neq \alpha)$$

e quindi ~~se~~ $\gamma \neq \beta$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \alpha$, cioè se gli indici α, β, γ sono gli indici 1, 2, 3 posti in un ordine *qualsiasi*:

$(14)_{bis}$ $$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \gamma\end{bmatrix} = \left\{\binom{\alpha\beta}{\beta} - \binom{\alpha\gamma}{\gamma}\right\}\frac{\sigma_0}{\sigma_\alpha}. \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$$

Da (14) e $(14)_{bis}$ segue che

(15) $$\left\{\begin{array}{ll}\binom{\alpha\gamma}{\beta} & (\beta \neq \alpha,\ \beta \neq \gamma)\\ \binom{\alpha\beta}{\beta} - \binom{\alpha\gamma}{\gamma} & (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)\end{array}\right\} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$$

sono invarianti relativi, perchè un possibile cambiamento delle coordinate x_i, y_i, ecc. li può moltiplicare soltanto per un fattore diverso da zero. L'espressione $(14)_{bis}$, essendo α, β, γ i numeri 1, 2, 3 disposti in ordine qualunque, è (a meno del segno) determinata dal solo indice α; il segno si può precisare, fissando che α, β, γ sia una permutazione *pari* degli indici 1, 2, 3; noi la indicheremo con (α). È facile dedurre da (14) e $(14)_{bis}$ che *le*

(16) $$\binom{\alpha\gamma}{\beta}\frac{(\beta)}{(\alpha)(\gamma)} \qquad (\beta \neq \alpha,\ \beta \neq \gamma)$$

e le loro funzioni sono invarianti assoluti. Fra questi avranno speciale importanza gli invarianti

$$R_{\alpha\beta} = \binom{\beta\beta}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\beta}^2 : \left[\binom{\gamma\gamma}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\gamma}^2\right] \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \tag{17}$$

Si noti l'invariante

$$R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} R_{\gamma\alpha} = \frac{\binom{\gamma\gamma}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\beta}\binom{\beta\beta}{\gamma}}{\binom{\gamma\gamma}{\beta}\binom{\beta\beta}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\gamma}} \tag{18}$$

che ha due soli valori, uno reciproco dell'altro, secondo che la permutazione degli indici α, β, γ è pari o dispari.

Scriviamo ora le condizioni di integrabilità delle (4): per il che basterà esprimere che i secondi membri sono differenziali esatti, ossia che le loro derivate (forme pfaffiane simboliche del 2° ordine) sono nulle. Come nel Cap. XIII del trattato di FUBINI e CECH già citato si troverà che tali condizioni sono le formole di CARTAN:

$$\omega'_{rs} = \sum_k [\omega_{rk}\omega_{ks}]. \tag{19}$$

Sostituendo alle ω_{ij} i loro valori $\sum_\alpha \binom{i\alpha}{j}\omega_\alpha$, (ove $\alpha = 1, 2, 3$), si trova

$$\sum_\alpha \binom{r\alpha}{s}\omega'_\alpha + \sum_\beta \left[d\binom{r\beta}{s},\ \omega_\beta\right] = \sum_{\alpha,\beta}\sum_k \left\{\binom{r\alpha}{k}\binom{k\beta}{s} - \binom{r\beta}{k}\binom{k\alpha}{s}\right\}[\omega_\alpha\omega_\beta] \tag{20}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ r, s, k = 0, 1, 2, 3).$$

Conformemente a (13), poniamo

$$d\binom{r\beta}{s} = \binom{r\beta}{s}_1 \omega_1 + \binom{r\beta}{s}_2 \omega_2 + \binom{r\beta}{s}_3 \omega_3 \tag{21}$$

e scriviamo

$$\omega'_\alpha = \lambda_{\alpha 1}[\omega_2\omega_3] + \lambda_{\alpha 2}[\omega_3\omega_1] + \lambda_{\alpha 3}[\omega_1\omega_2]. \tag{22}$$

Quest'ultima posizione è lecita, perchè dalle lineare indipendenza della ω_α segue per noti teoremi generali (o, come si può verificare direttamente) che anche le forme (simboliche di secondo grado)

$$\psi_1 = [\omega_2\omega_3], \quad \psi_2 = [\omega_3\omega_1], \quad \psi_3 = [\omega_1\omega_2] \tag{23}$$

sono *linearmente indipendenti.* Anzi un facile calcolo permette di esplicitare le $\lambda_{\alpha\beta}$. Se u, v, w sono coordinate curvilinee qualsiasi, ed è

$$\omega_\alpha = a_\alpha du + b_\alpha dv + c_\alpha dw \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

si trova

$$\lambda_{\alpha\beta}=\frac{1}{\Delta}\left\{a_\beta\left(\frac{\partial c_\alpha}{\partial v}-\frac{\partial b_\alpha}{\partial w}\right)+b_\beta\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial w}-\frac{\partial c_\alpha}{\partial u}\right)+c_\beta\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial u}-\frac{\partial a_\alpha}{\partial v}\right)\right\} \tag{24}$$

(ove Δ è il determinante delle a_α, b_α, c_α).

Da (24) segue che: *È* $\lambda_{\alpha\alpha}=0$ *soltanto se* $\omega_\alpha=0$ *è completamente integrabile; se* ω_α *è un differenziale esatto,* $\omega'_\alpha=0$ *e quindi* $\lambda_{\alpha 1}=\lambda_{\alpha 2}=\lambda_{\alpha 3}=0$.

Ne segue anche: *Il caso elementare* (in cui le congruenze K possono assumersi a congruenze di linee coordinate) *è caratterizzato dalle* $\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{33}=0$.

Se così è (moltiplicando le x_α per opportuni fattori), *potremo ottenere che le* ω_α *siano differenziali esatti, cioè che tutte le* $\lambda_{\alpha\beta}$ *siano nulle.*

Sviluppiamo ora le (20), sostituendo alle ω'_α ed alle $d\binom{r\beta}{s}$ i valori dati dalle (22) e (21) e teniamo conto delle (23). Essendo le ψ linearmente indipendenti, uguagliamo nei due membri di (20) i coefficienti di ciascuna delle ψ, indicando poi con α, β, γ una qualsiasi *permutazione pari* degli indici 1, 2, 3. Otterremo (al solito le lettere greche assumono i valori 1, 2, 3, le lettere latine i valori 0, 1, 2, 3):

$$\sum_\delta \binom{r\delta}{s}\lambda_{\delta\gamma}+(rs,\,\beta\alpha)=0 \tag{25}$$

ove:

$$(rs,\,\beta\alpha)=\binom{r\beta}{s}_\alpha-\binom{r\alpha}{s}_\beta+\sum_k\left\{\binom{r\alpha}{k}\binom{k\beta}{s}-\binom{r\beta}{k}\binom{k\alpha}{s}\right\}. \tag{26}$$

Si noti la grandissima analogia delle (26) coi simboli a quattro indici di RIEMANN di seconda specie per la geometria metrica (le (26), come vedremo, si riducono in un caso particolare a tali simboli di RIEMANN).

Si noti che *nel caso elementare* si possono rendere nulle tutte le λ; cosicchè saranno nulli *tutti i simboli a quattro indici*: risultato del tutto analogo ai risultati della teoria delle coordinate curvilinee in geometria metrica euclidea.

Espressioni analoghe alle (26) sono state trovate dal CARTAN per le connessioni proiettive più generali.

§ 2. Alcune osservazioni.

I) Da (19) si trae:

$$\sum_r \omega'_{rr}=\sum_{r,k}[\omega_{rk},\ \omega_{kr}].$$

Poichè il secondo membro non muta scambiando i nomi k, r degli indici di sommazione, mentre ogni suo addendo cambia di segno, segue che esso è nullo, cioè che $\Sigma\, \omega'_{r,r} = 0$, ossia che $\Sigma\, \omega_{rr}$ è *un differenziale esatto*. Ciò si può confermare facilmente. Da (1) si trae:

$$dD = (dx_0, x_1, x_2, x_3) + (x_0, dx_1, x_2, x_3) + (x_0, x_1, dx_2, x_3) + (x_0, x_1, x_2, dx_3),$$

che per (4) diventa:

$$dD = (\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33})D$$

cosicchè:

$$\Sigma_r\, \omega_{rr} = \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = d \log D, \tag{27}$$

che conferma quanto si era enunciato. Con le trasformazioni (8), si trova

$$(x_0 x_1 x_2 x_3) = \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (X_0 X_1 X_2 X_3), \tag{28}$$

che prova come il nuovo valore di D si trova, dividendo il valore iniziale per $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Potremmo, volendo, imporre che

$$D = 1 \quad \text{e quindi} \quad \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0, \tag{29}$$

limitando così la scelta delle possibili coordinate dei punti x_i.

II) Differenziando le (2), si trova:

$$S\xi_j dx_i + Sx_i d\xi_j = 0. \tag{30}$$

Poichè le ξ sono linearmente indipendenti, potremo trovare dei pfaffiani $\bar{\omega}_{ij}$ tali che

$$d\xi_j = \Sigma_k\, \bar{\omega}_{jk} \xi_k. \tag{31}$$

Sostituendo in (30) i valori dei dx, $d\xi$ dati da (4) e (31), e ricordando le (2), si trova:

$$\bar{\omega}_{ij} + \omega_{ij} = 0.$$

Cosicchè le (31) restano completamente determinate da (4) e sono le:

$$d\xi_j = -\Sigma_k\, \omega_{kj} \xi_k. \tag{32}$$

Le (32) si possono chiamare le equazioni *duali* delle (4).

III) Nelle (26) si possono separare i termini che provengono dal supporre $k = 0$ dai termini che si ottengono ponendo $k = \rho$, ove ρ (lettera greca) ha i valori 1, 2, 3. Si trova così:

$$(rs, \beta\alpha) = \binom{r\beta}{s}_\alpha - \binom{r\alpha}{s}_\beta + \binom{r\alpha}{0}\binom{0\beta}{s} - \binom{r\beta}{0}\binom{0\alpha}{s} + \Sigma_\rho \left\{ \binom{r\alpha}{\rho}\binom{\rho\beta}{s} - \binom{r\beta}{\rho}\binom{\rho\alpha}{s} \right\}. \tag{33}$$

Se $s \neq 0$, poniamo per $s = \sigma$, avremo da (7):

$$(r\sigma, \beta\alpha) = \binom{r\beta}{\sigma}_\alpha - \binom{r\alpha}{\sigma}_\beta + \varepsilon_{\beta\sigma}\binom{r\alpha}{0} - \varepsilon_{\alpha\sigma}\binom{r\beta}{0} + \Sigma_\rho \left\{ \binom{r\alpha}{\rho}\binom{\rho\beta}{\sigma} - \binom{r\beta}{\rho}\binom{\rho\alpha}{\sigma} \right\} \tag{33$_{\text{bis}}$}$$

che, se $r=0$, si riduce $\left[\text{essendo } \binom{0\beta}{\sigma} \text{ costanti e quindi } \binom{0\beta}{\sigma}_\alpha = 0\right]$ a:

$$(34) \qquad (0\sigma,\, \beta\alpha) = \varepsilon_{\beta\sigma}\binom{0\alpha}{0} - \varepsilon_{\alpha\sigma}\binom{0\beta}{0} + \binom{\alpha\beta}{\sigma} - \binom{\beta\alpha}{\sigma}$$

che per (25) deve valere $-\sum_\delta \binom{0\delta}{\sigma}\lambda_{\delta\gamma}$, osssia, per le (7) $-\lambda_{\sigma\gamma}$. Quindi

$$(35) \qquad \lambda_{\sigma\gamma} = \varepsilon_{\alpha\sigma}\binom{0\beta}{0} - \varepsilon_{\beta\sigma}\binom{0\alpha}{0} + \binom{\beta\alpha}{\sigma} - \binom{\alpha\beta}{\sigma},$$

se (α, β, γ) è una permutazione *pari* di (1, 2, 3). Ponendo successivamente $\sigma = \alpha, \beta, \gamma$ se ne trae:

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_{\alpha\gamma} = \binom{0\beta}{0} + \binom{\beta\alpha}{\alpha} - \binom{\alpha\beta}{\alpha}; \quad \lambda_{\beta\gamma} = -\binom{0\alpha}{0} + \binom{\beta\alpha}{\beta} - \binom{\alpha\beta}{\beta} \\ &\lambda_{\gamma\gamma} = \binom{\beta\alpha}{\gamma} - \binom{\alpha\beta}{\gamma}. \end{aligned} \right.$$

Dalla seconda, osservando che anche β, γ, α è una permutazione pari di 1, 2, 3, si deduce:

$$(36)_{\text{bis}} \qquad \lambda_{\gamma\alpha} = -\binom{0\beta}{0} + \binom{\gamma\beta}{\gamma} - \binom{\beta\gamma}{\gamma}.$$

Si ha pertanto

$$(36)_{\text{ter}} \qquad \binom{0\beta}{0} = -\lambda_{\gamma\alpha} + \binom{\gamma\beta}{\gamma} - \binom{\beta\gamma}{\gamma} = \lambda_{\alpha\gamma} + \binom{\alpha\beta}{\alpha} - \binom{\beta\alpha}{\alpha}.$$

Dunque: *Dati i simboli* $\binom{\rho\sigma}{\tau}$ con $\rho, \sigma, \tau = 1, 2, 3$, *restano determinate non solo le* $\lambda_{\alpha\gamma} + \lambda_{\gamma\alpha}$ [anche se $\alpha = \gamma$, come si deduce dall'ultima delle (36)], *ma anche tutti i simboli* $\binom{0\beta}{0}$ *con* $\beta = 1, 2, 3$.

Ponendo in (33) $r = s = 0$, e confrontando con (35) si ha:

$$(37) \qquad \sum_\delta \binom{0\delta}{0}\lambda_{\delta\gamma} + \binom{0\beta}{0}_\alpha - \binom{0\alpha}{0}_\beta + \binom{\alpha\beta}{0} - \binom{\beta\alpha}{0} = 0.$$

Dal risultato precedente si deduce così: *Dati i simboli* $\binom{\rho\sigma}{\tau}$ *e date anche le* λ (che sono determinate quando *siano date* le ω), *i simboli* $\binom{\alpha\beta}{0} - \binom{\beta\alpha}{0}$ *sono completamente determinati.* Non mi è riuscito di determinare singolarmente le $\binom{\alpha\beta}{0}$ con un metodo semplice che eviti equazioni differenziali. Si noti però che le $\binom{0\beta}{0}$ e le $\binom{\alpha\beta}{0}$ (cioè tutti quelli dei nostri simboli, per cui almeno un indice è nullo), non si presenteranno mai nelle ricerche geometriche di cui ci dovremo occupare: così come non si presenteranno mai le λ.

IV) Alcuni di questi risultati si possono enunciare in altro modo, ricorrendo a forme differenziali *del primo ordine*: ciò che stabilisce una grande analogia con altri risultati che si riattaccano alla definizione di una superficie nella geometria metrica mediante le forme di GAUSS. Dalle (10), (14) e $(14)_{\text{bis}}$ segue infatti la *completa invarianza* delle forme (che potremo considerare come *covarianti assoluti*)

$$\binom{\alpha\gamma}{\beta}\frac{\omega_\alpha\omega_\gamma}{\omega_\beta}, \qquad (\beta \neq \alpha,\ \beta \neq \gamma;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \tag{38}$$

$$\left\{\binom{\alpha\beta}{\beta} - \binom{\alpha\gamma}{\gamma}\right\}\omega_\alpha. \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \tag{39}$$

Altre forme sono determinate a meno di un fattore (*covarianti relativi*), come p. es.

$$F_\alpha = \binom{\beta\beta}{\alpha}\omega_\beta^2 + \left[\binom{\beta\gamma}{\alpha} + \binom{\gamma\beta}{\alpha}\right]\omega_\gamma\omega_\beta + \binom{\gamma\gamma}{\alpha}\omega_\gamma^2. \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha) \tag{40}$$

(Questa ultima forma, divisa per ω_α, darebbe origine a un covariante assoluto). È facile dedurre altre forme, che siano covarianti assoluti, p. es.

$$\begin{cases} \binom{\alpha\alpha}{\beta}^2\binom{\beta\beta}{\alpha}\omega_\alpha^3 + \binom{\beta\beta}{\gamma}^2\binom{\gamma\gamma}{\beta}\omega_\beta^3 + \binom{\gamma\gamma}{\alpha}^2\binom{\alpha\alpha}{\gamma}\omega_\gamma^3 \\ \binom{\alpha\alpha}{\gamma}^2\binom{\gamma\gamma}{\alpha}\omega_\alpha^2 + \binom{\beta\beta}{\alpha}^2\binom{\alpha\alpha}{\beta}\omega_\beta^3 + \binom{\gamma\gamma}{\beta}^2\binom{\beta\beta}{\gamma}\omega_\gamma^3. \end{cases} \tag{41}$$

Queste due forme, per ragioni che vedremo, possono essere considerate come costituenti insieme *l'elemento lineare proiettivo* del reticolo [cfr. (17)]. (Si potrebbe anche scambiare qualche termine di queste due forme). Ad alcune di queste forme si può giungere anche per tutt'altra via. Se alle x_i sostituiamo le X_i definite dalle (8), dovremo alle ξ_i sostituire le $\bar{\xi}_i$ definite dalle $S\xi X_j = \varepsilon_{ij}$ analoghe alle (2). Ne deduciamo immediatamente che

$$\bar{\xi}_\alpha = \sigma_\alpha\xi_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3); \qquad \bar{\xi}_0 = \sigma_0\xi_0 + \mu_1\xi_1 + \mu_2\xi_2 + \mu_3\xi_3 \tag{42}$$

(e analoghe in η, ζ, τ).

Si trova pertanto

$$Sd\bar{\xi}_\alpha dX_0 = S(\xi_\alpha d\sigma_\alpha + \sigma_\alpha d\xi_\alpha)\left(\frac{dx_0}{\sigma_0} - x_0\frac{d\sigma_0}{\sigma_0^2}\right) =$$

$$= \frac{d\sigma_\alpha}{\sigma_0}S\xi_\alpha dx_0 - \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_0}\frac{d\sigma_0}{\sigma_0}Sx_0 d\xi_\alpha + \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_0}Sd\xi_\alpha dx_0,$$

come si prova osservando che $S\xi_\alpha x_0 = 0$. E, poichè, derivando questa, si ha $-Sx_0 d\xi_\alpha = S\xi_\alpha dx_0 = \omega_{0\alpha} = \omega_\alpha$, ne deduciamo

$$Sd\xi_\alpha dX_0 = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_0}[Sd\xi_\alpha dx_0 + \omega_\alpha d \log(\sigma_\alpha \sigma_0)].$$

E poichè il nuovo valore di ω_α vale

$$S\bar{\xi}_\alpha dX_0 = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_0}\omega_\alpha,$$

ne segue che il sistema di equazioni

(43) $$Sd\xi_\alpha dx_0 = 0, \quad \omega_\alpha = 0,$$

si muta, per una trasformazione (8), in *un sistema equivalente.* Il primo membro della prima di queste equazioni si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} -\Sigma\,\omega_{i\alpha}\xi_i \Sigma\,\omega_{0j}x_j &= -\Sigma\,\omega_{0i}\omega_{i\alpha} = -(\omega_{00}\omega_{0\alpha} + \omega_{01}\omega_{1\alpha} + \omega_{02}\omega_{2\alpha} + \omega_{03}\omega_{3\alpha}) = \\ &= -\omega_{00}\omega_\alpha - \omega_\beta\omega_{\beta\alpha} - \omega_\gamma\omega_{\gamma\alpha} - \omega_\alpha\omega_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

cioè nella forma

$$-\omega_{00}\omega_\alpha - \sum_{\rho=1}^{3}\left\{\binom{\beta\rho}{\alpha}\omega_\rho\omega_\beta + \binom{\gamma\rho}{\alpha}\omega_\rho\omega_\gamma\right\} - \Sigma\binom{\alpha\rho}{\alpha}\omega_\rho\omega_\alpha.$$

Tale equazione, tenuto conto dell' altra $\omega_\alpha = 0$, si riduce pertanto alla

(44) $$\binom{\beta\beta}{\alpha}\omega_\beta^2 + \left[\binom{\beta\gamma}{\alpha} + \binom{\gamma\beta}{\alpha}\right]\omega_\beta\omega_\gamma + \binom{\gamma\gamma}{\alpha}\omega_\gamma^2 = 0$$

cioè alla $F_\alpha = 0$, ove F_α è definito dalla (40). E questo risultato si poteva dedurre dalle precedenti considerazioni, perchè sia F_α che ω_α sono forme covarianti relative. Vedremo che la $F_\alpha = 0$ definisce nel piano ξ_α due direzioni, a cui, per ragioni di stretta analogia, daremo il nome di *direzioni asintotiche* nel piano ξ_α.

§ 3. **Considerazioni geometriche.**

A) Ogni punto x_0 determina i piani ξ_α, tra essi p. es. il piano ξ_1 (tangente alle curve C_2, C_3 uscenti da x_0). Se il punto x_0 va in un punto $x_0 + dx_0$ infinitamente vicino, il piano ξ_1 va in un piano $\xi_1 + d\xi_1$ infinitamente vicino, passante per $x_0 + dx_0$ e per le corrispondenti nuove posizioni $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ dei punti x_2, x_3.

Troviamo *la intersezione dei due piani* ξ_1 e $\xi_1 + d\xi_1$.

Ogni punto x di ξ_1 è una combinazione lineare dei punti x_0, x_2, x_3,

(45) $$x = \lambda x_0 + \mu x_2 + \nu x_3 . \qquad \text{(e analoghe in } y, z, t)$$

Esso giacerà nel piano $\xi_1 + d\xi_1$, se sarà nullo il determinante

$$(\lambda x_0 + \mu x_2 + \nu x_3 ,\ x_0 + dx_0 ,\ x_2 + dx_2 ,\ x_3 + dx_3) = 0.$$

Questa equazione equivale evidentemente alla

$$\lambda(x_0 ,\ dx_0 ,\ x_2 ,\ x_3) + \mu(x_2 ,\ x_0 ,\ dx_2 ,\ x_3) + \nu(x_3 ,\ x_0 ,\ x_2 ,\ dx_3) = 0,$$

che, per le (4), si riduce a

$$0 = D(\lambda\omega_{01} + \mu\omega_{21} + \nu\omega_{31})$$

cioè, essendo $D \neq 0$, ed essendo le ω_{ij} date da (6), alla:

(46) $$\sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ \lambda \binom{0\alpha}{1} + \mu \binom{2\alpha}{1} + \nu \binom{3\alpha}{1} \right\} \omega_\alpha = 0,$$

ove, per le (7):

(46)bis $$\binom{0\alpha}{1} = \varepsilon_{1\alpha} .$$

Distinguiamo ora parecchi casi:

CASO 1°). Il punto x_0 ha cominciato a muoversi sulle curve C_1: vale a dire dx_0 è combinazione lineare di x_0, x_1: in altre parole è $\omega_2 = \omega_3 = 0$. La (46) diventa semplicemente:

(47) $$\lambda + \mu \binom{21}{1} + \nu \binom{31}{1} = 0.$$

Se vale la (47), il punto (45) appartiene alla retta in cui ξ_1 interseca, nelle attuali ipotesi, il piano $\xi_1 + d\xi_1$: e noi chiameremo tale retta la *retta focale* del piano ξ_1; essa è la retta che congiunge i punti

(48) $$x_2 - \binom{21}{1} x_0 , \quad x_3 - \binom{31}{1} x_0$$

posti rispettivamente sulle tangenti t_2, t_3 alle curve C_2, C_3 nel punto x_0. Indicheremo questi due punti con F_{21} ed F_{31} e li chiameremo i *primi fuochi* di tali tangenti. Permutando gli indici troveremo due (primi) fuochi su ognuna delle t_i. Così i primi fuochi di t_1 saranno i punti

(49) $$F_{12} = x_1 - \binom{12}{2} x_0 , \quad F_{13} = x_1 - \binom{13}{3} x_0 ;$$

confrontando con (15) e (39) vediamo che *l'annullarsi dell'invariante relativo* $\binom{12}{2} - \binom{13}{3}$ o *della forma covariante* (assoluta) $\left[\binom{12}{2} - \binom{13}{3}\right]\omega_1$ significa che i *due primi fuochi di* t_1 *sono sovrapposti.* Se così avviene, assunto a punto x_1 uno di questi fuochi, potremo rendere

(50) $$\binom{12}{2} = \binom{13}{3} = 0.$$

Se invece tali primi fuochi sono distinti, potremo assumere a nuovo punto x_1 il punto $P_1 = x_1 - \frac{1}{2}\left[\binom{12}{2} + \binom{13}{3}\right] x_0$, *cogniugato armonico* di x_0 rispetto a tali fuochi, punto che chiameremo il punto *principale* di t_1. Con questa scelta del punto x_1, sarà:

(51) $$\binom{12}{2} + \binom{13}{3} = 0.$$

Ma possiamo giungere ad una ulteriore semplificazione moltiplicando le coordinate x_1 del punto principale per un fattore tale che i fuochi F_{12} ed F_{13} siano i punti $x_1 - x_0$, $x_1 + x_0$: otterremo così che

(52) $$\binom{12}{2} = 1, \quad \binom{13}{3} = -1.$$

Con questa nuova convenzione, se moltiplichiamo le x_0, y_0, ecc. per un fattore σ, dovremo moltiplicare le x_1, y_1, ecc. per lo stesso fattore.

Nel caso generale i fuochi di ogni tangente t_i sono distinti; potremo quindi su ogni tangente scegliere in modo univoco il punto x_i, e *normalizzare* tutte le coordinate, in guisa che, se si moltiplicano le coordinate di x_0 per un fattore σ, anche le coordinate degli altri punti x_i siano moltiplicate per lo stesso fattore σ. E, volendo, si può anche togliere quest'ultima indeterminazione, imponendo al determinante $D = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ un valore costante prefissato. Per restare nel campo reale, se noi prefissiamo che $D = 1$, non solo il precedente valore σ resta determinato a meno del segno, ma resta anche fissato l'ordine dei punti x_1, x_2, x_3 dall'ipotesi che $D > 0$.

Dunque: *Se sopra ogni tangente* t *i primi fuochi sono distinti, si possono non solo normare tutte le* 16 *coordinate dei* 4 *punti* $\mathrm{x_i}$ *in modo che unica indeterminazione sia un contemporaneo cambiamento di segno, ma si può anche orientare il tetraedro dei quattro punti* $\mathrm{x_i}$. *I simboli* $\binom{\mathrm{ij}}{\mathrm{h}}$ *restano così completamente determinati,* e diventano pertanto l'analogo delle *rotazioni* del RICCI.

Se su ciascuna delle tangenti t_α i fuochi sono sovrapposti si può soltanto ottenere che siano nulli tutti i simboli $\binom{\alpha\beta}{\beta}$ con $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

CASO 2°). Il punto x_0 cominci a muoversi su C_2, o, ciò che è lo stesso, sulla tangente t_2: o, più generalmente, il punto x_0 cominci a muoversi sulla retta r del piano ξ_1 che congiunga x_0 al punto $\rho x_2 + \sigma x_3$: sia cioè $\omega_1 = 0$, $\omega_2 : \rho = \omega_3 : \sigma$ [cosicchè dx_0 risulterà combinazione lineare di x_0 e di $\rho x_2 + \sigma x_3$]. La retta (46) diventerà:

$$(53)\qquad \mu\left[\rho\binom{22}{1} + \sigma\binom{23}{1}\right] + \nu\left[\rho\binom{32}{1} + \sigma\binom{33}{1}\right] = 0.$$

Essa sarà la retta congiungente il punto x_0 al punto $\mu x_2 + \nu x_3$, ove $\mu : \nu$ è definito da (53), retta che diremo la *coniugata* della precedente retta r congiungente x_0 a $\rho x_2 + \sigma x_3$. La (53) definisce una *proiettività* (la proiettività di *coniugio*) del fascio di rette (che ha per centro x_0 e giace in ξ_1) in se stesso. Tale proiettività è una *involuzione* soltanto se $\binom{23}{1} = \binom{32}{1}$, ossia se *l'invariante assoluto* $\binom{23}{1} : \binom{32}{1}$ *è uguale ad* 1. Se $\sigma = 0$, la precedente retta r coincide con t_2: *la coniugata di* t_2 *in* ξ_1 *è pertanto la retta* che *da* x_0 *proietta il punto* $\binom{32}{1} x_2 - \binom{22}{1} x_3$. Naturalmente la tangente t_2 avrà un'*altra* coniugata nel piano ξ_3.

I raggi doppii di tale proiettività saranno definiti dalla equazione che si ottiene da (53) ponendo $\rho : \sigma = \mu : \nu$

$$(54)\qquad \binom{22}{1}\rho^2 + \left[\binom{23}{1} + \binom{32}{1}\right]\rho\sigma + \binom{33}{1}\sigma^2 = 0$$

od anche (ricordando che si è posto $\omega_2 : \rho = \omega_3 : \sigma$) dalla:

$$(54)_{\text{bis}}\qquad F_2 = \binom{22}{1}\omega_2^2 + \left[\binom{23}{1} + \binom{32}{1}\right]\omega_2\omega_3 + \binom{33}{1}\omega_3^2 = 0.$$

A queste direzioni che diremo le *direzioni asintotiche* di ξ_1 eravamo già arrivati per altra via [cfr. (40)].

CASO 3°). Studiamo ora il caso generale che x_0 cominci a spostarsi sulla retta che lo congiunge al punto $\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$, così che sia $\omega_1 : \rho_1 = \omega_2 : \rho_2 = \omega_3 : \rho_3$. La (46) diventa

$$(55)\qquad \left[\lambda + \mu\binom{21}{1} + \nu\binom{31}{1}\right]\rho_1 + \left[\mu\binom{22}{1} + \nu\binom{32}{1}\right]\rho_2 + \left[\mu\binom{23}{1} + \nu\binom{33}{1}\right]\rho_3 = 0,$$

che definisce una retta descritta dal punto (45) $x = \lambda x_0 + \mu x_2 + \nu x_3$.

La (55) definisce pertanto una *proiettività tra le rette della stella avente per centro il punto* x_0 *e le rette del piano* ξ_1. Di essa è un caso particolare la proiettività di coniugio, ottenuta supponendo $\rho_1 = 0$. Altri casi particolari notevoli si ottengono supponendo $\rho_2 = 0$ oppure $\rho_3 = 0$ (il caso $\rho_2 = \rho_3 = 0$ porta alla retta *focale* di ξ_1). Ma a noi basterà questo rapido cenno.

B) Consideriamo ora il piano osculatore in x_0 alla curva C_α. Esso sarà il piano dei punti x_0, x_α (posto sulla tangente t_α a C_α) e dai punti $x_0 + dx_0$, $x_\alpha + dx_\alpha$, quando x_0 cominci a muoversi sulla retta t_α, o, in altre parole, quando dei tre pfaffiani ω_1, ω_2, ω_3 soltanto ω_α sia differente da zero. Poichè $dx_\alpha = \omega_{\alpha 0} dx_0 + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} x_\beta$, e poichè nell'ipotesi precedente è $\omega_{\alpha\beta} = \binom{\alpha\alpha}{\beta}\omega_\alpha$, il piano osculatore a C_α sarà il piano che dalla tangente t_α passante per x_0 ed x_α, proietta il punto $\binom{\alpha\alpha}{\beta}x_\beta + \binom{\alpha\alpha}{\gamma}x_\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$.

Se fosse identicamente $\binom{\alpha\alpha}{\beta} = \binom{\alpha\alpha}{\gamma} = 0$, le linee C_α si ridurrebbero pertanto a rette: il che si può dimostrare osservando che in tal caso, se x_0 comincia a muoversi sulla tangente t_α a C_α, altrettanto avviene di x_α; cosicchè le linee C_α si riducono alla retta t_α.

[Se fosse soltanto p. es. $\binom{\alpha\alpha}{\beta} = 0$, il piano osculatore a C_α coinciderebbe col piano ξ_β].

Restando nel caso generale che $\binom{\alpha\alpha}{\beta}\binom{\alpha\alpha}{\gamma} \neq 0$, una retta qualunque uscente da x_0 e posta sul piano ξ_α si potrà determinare mediante il birapporto che tale retta e la intersezione di ξ_α col precedente piano osculatore formano coi piani ξ_β, ξ_γ: in altre parole si potrà determinare dando il punto

$$\rho\binom{\alpha\alpha}{\beta}x_\beta + \sigma\binom{\alpha\alpha}{\gamma}x_\gamma$$

della retta (x_β, x_γ) posto sulla retta considerata.

Il rapporto $\rho : \sigma$ ha un significato geometrico, che è chiarito appunto dalla considerazione del birapporto citato. Invece, se indicassimo, come sopra, un punto della retta (x_β, x_γ) con $\rho x_\beta + \sigma x_\gamma$, il rapporto $\rho : \sigma$ non avrebbe un significato geometrico. Se scriviamo anche $\mu\binom{\alpha\alpha}{\beta}x_\beta + \nu\binom{\alpha\alpha}{\gamma}x_\gamma$ invece di $\mu x_\beta + \nu x_\gamma$, e supponiamo p. es. $\alpha = 1$, la proiettività (53) diventa nelle nuove notazioni

$$\mu\rho\binom{11}{2}^2\binom{22}{1} + \left\{\mu\sigma\binom{23}{1} + \rho\nu\binom{32}{1}\right\}\binom{11}{2}\binom{11}{3} + \nu\sigma\binom{11}{3}^2\binom{33}{1} = 0. \tag{56}$$

I rapporti dei coefficienti di questa equazione sono invarianti assoluti (cfr. la (17)), che trovano così la loro interpretazione geometrica.

Anche l'invariante (18) viene interpretato geometricamente e collegato ai noti teoremi di MENELAO e di CEVA, tanto che lo si potrebbe chiamare l'*invariante dl Menelao e di Ceva* (quando esso è uguale a ± 1, i tre piani osculatori alle curve C_α passano per una stessa retta, oppure le rette in cui essi incontrano i piani ξ giacciono in un medesimo piano). Esso si può definire p. es. mediante il birapporto del piano ξ_1, del piano ξ_2, del piano osculatore a C_3 e del piano che dalla retta t_3, loro intersezione, proietta l'intersezione dei piani osculatori a C_1 ed a C_2.

Se le linee C_3 si riducono a rette, abbiamo già visto che $\binom{33}{1}$ e $\binom{33}{2}$ sono nulli. Al posto delle (41), (scambiando, come si è già osservato loc. cit., alcuni loro termini), troveremo come *elemento lineare proiettivo* la forma

$$\binom{11}{2}^2\binom{22}{1}\omega_1^2 + \binom{22}{1}^2\binom{11}{2}\omega_2^2; \tag{57}$$

l'elemento lineare proiettivo di una superficie, si ottiene, come vedremo, *come caso particolare del precedente* $\Big($dividendolo per la forma $\binom{11}{2}\binom{22}{1}\omega_1\omega_2$, che è ancora un *covariante assoluto*$\Big)$.

C) Studiamo la congruenza H_1 generata dalla tangente t_1, quando il punto x_0 si muove nel piano ξ_1. Cerchiamone i fuochi $x_1 + rx_0$ che diremo *secondi fuochi*, o fuochi di seconda specie, ed i corrispondenti piani focali. A questa ricerca si è indotti quando si voglia generalizzare la definizione di raggi di curvatura. Per determinare i valori di r, si noti che per ogni fuoco si devono poter trovare uno spostamento di x_0 in ξ_1 (per cui pertanto sarà $\omega_1 = 0$) e due pfaffiani λ, μ così che per tale spostamento sia

$$d(x_1 + rx_0) = \gamma x_1 + \mu x_0,$$

ossia

$$dx_1 + rdx_0 = \gamma x_1 + lx_0. \qquad (l = \mu - dr)$$

Il primo membro vale

$$(\omega_{10} + r\omega_{00})x_0 + (\omega_{11} + r\omega_{01})x_1 + (\omega_{12} + r\omega_{02})x_2 + (\omega_{13} + r\omega_{03})x_3.$$

Basterà scrivere che sono nulli i coefficienti di x_2 ed x_3; cioè, tenuto conto che $\omega_1 = 0$, si dovrà porre:

$$\left[\binom{12}{2} + r\right]\omega_2 + \binom{13}{2}\omega_3 = \binom{12}{3}\omega_2 + \left[\binom{13}{3} + r\right]\omega_3 = 0. \tag{58}$$

Eliminando $\omega_2 : \omega_3$, si trova l'equazione di 2° grado in r, che determina i due secondi fuochi $x_1 + r x_0$ di t_1:

$$r^2 + r\left[\binom{12}{2} + \binom{13}{3}\right] + \left[\binom{12}{2}\binom{13}{3} - \binom{13}{2}\binom{12}{3}\right] = 0. \tag{59}$$

Invece, eliminando r, si trova:

$$\binom{12}{3}\omega_2^2 + \omega_2\omega_3\left[\binom{13}{3} - \binom{12}{2}\right] - \binom{13}{2}\omega_3^2 = 0. \tag{60}$$

Da (59) si deduce che il punto coniugato di x_0 rispetto ai *secondi fuochi* coincide col punto *principale,* cioè col punto coniugato di x_0 rispetto ai primi fuochi. Se a punto x_1 si assume tale punto principale, è $\binom{12}{2} + \binom{13}{3} = 0$, come già sappiamo: e, se i primi fuochi coincidono è anche $\binom{12}{2} = \binom{13}{3} = 0$; ma, se è $\binom{12}{3}\binom{12}{3} \neq 0$, allora i *secondi fuochi sono distinti.* In tale caso potremo scegliere il fattore di proporzionalità per le x_1, x_2, ecc. in modo che i secondi fuochi siano i punti $x_1 \pm x_0$, oppure i punti $x_1 \pm x_0\sqrt{-1}$, cioè in modo che

$$\binom{12}{2} = \binom{13}{3} = 0, \quad \binom{13}{2}\binom{12}{3} = \pm 1.$$

Fissate le coordinate di x_0, quelle di x_1 saranno determinate soltanto *a meno del segno.* Se anche su t_2 e t_3 i primi fuochi coincidono, ma i secondi fuochi sono distinti, e se imponiamo al determinate D il valore $+1$, allora, dati i punti x_0, x_1, x_2, x_3, ne restano anche determinate le sedici coordinate, a meno di un cambiamento di segno per le coordinate di due o di tutti e quattro i punti citati; (e non si può *orientare* per questa via il tetraedro di cui tali punti sono i vertici).

Sarebbe da studiare a parte il caso che su almeno una delle t_i coincidessero sia i primi che i secondi fuochi.

La (60) determina gli spostamenti di x_0, che corrispondono alle sviluppabili della congruenza H_1; per essi:

$$dx_0 = \omega_{00}x_0 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3, \qquad (\omega_1 = 0)$$

ove $\omega_2 : \omega_3$ è determinato da (60). Il piano focale corrispondente è il piano che dalla retta t_1 dei punti x_0, x_1 proietta il punto dx_0, ossia è il piano che da tale retta proietta il punto $Q = \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3$. Perciò le due radici $\omega_2 : \omega_3$ determinano i due piani focali. Se noi indichiamo con $\rho\binom{11}{2}x_2 + \sigma\binom{11}{3}x_3$ uno di tali punti Q, la equazione (60) si deve sostituire con la

$$(61)\qquad \binom{11}{2}^2\binom{12}{3}\rho^2+\left[\binom{13}{3}-\binom{12}{2}\right]\binom{11}{2}\binom{11}{3}\rho\sigma-\binom{13}{2}\binom{11}{3}^2\sigma^2=0.$$

Le radici $\rho:\sigma$ *di questa equazione (e pertanto anche i rapporti dei suoi coefficienti) hanno,* (per quanto si è detto in *B*), *un significato geometrico preciso, e sono perciò invarianti assoluti del reticolo.*

La (60) prova che *i due piani focali della retta* t_1 *separano armonicamente i piani* ξ_2, ξ_3 *soltanto se* $\binom{12}{2}=\binom{13}{3}$, *cioè soltanto se i due primi fuochi coincidono.*

Dai teoremi testè provati segue che i primi fuochi, i secondi fuochi, il punto x_0 contato due volte, e il punto principale, pure contato due volte, sono *quattro coppie di una medesima involuzione,* che si potrà chiamare l'*involuzione focale.*

Le altre coppie di punti di questa involuzione sono date dalle coppie di punti ax_0+bx_1, che per un qualche valore del parametro ν, soddisfano alla

$$\left[a+\frac{1}{2}b\left\{\binom{12}{2}+\binom{13}{3}\right\}\right]^2+\nu b^2=0,$$

(al variare di ν tale coppia di punti descrive tutte le coppie della involuzione focale). Per $\nu=0$, si ha il punto principale contato due volte, per $\nu=\infty$ il punto x_0 contato due volte; per

$$\nu=-\frac{1}{4}\left[\binom{12}{2}-\binom{13}{3}\right]^2,\quad \nu=-\frac{1}{4}\left[\binom{12}{2}-\binom{13}{3}\right]^2-\binom{12}{3}\binom{13}{2}$$

si hanno le coppie dei fuochi di prima e di seconda specie.

Il birapporto di queste quattro coppie dell'involuzione focale vale dunque

$$(62)\qquad 1+4\frac{\binom{12}{3}\binom{13}{2}}{\left[\binom{13}{3}-\binom{12}{2}\right]^2}$$

che si potrà chiamare l'*invariante focale.*

D) Potremmo anche studiare la congruenza generata dalla retta t_1, quando il punto x_0 si muove p. es. sul piano ξ_3 (cioè quando $\omega_3=0$). Uno dei fuochi sarà lo stesso punto x_0, e il corrispondente piano focale sarà il piano osculatore a C_1; la corrispondente direzione della sviluppabile sarà quella corrispondente al caso che x_0 si muova lungo C_1, cioè al caso che non solo $\omega_3=0$, ma anche $\omega_2=0$. Cerchiamo l'altro fuoco x_1+rx_0. Procedendo come in *C*), e ricordando che ora è $\omega_3 = 0$, troviamo le equazioni

$$\omega_{12} + r\omega_2 = \omega_{13} + r\omega_3 = 0.$$

La seconda di queste si riduce alla $\omega_{13} = 0$, ossia

$$\binom{11}{3}\omega_1 + \binom{12}{3}\omega_2 = 0, \tag{63}$$

che, tenuto conto della precedente, equivale alle:

$$r\binom{11}{3} = \binom{11}{2}\binom{12}{3} - \binom{11}{3}\binom{12}{2}. \tag{64}$$

Essendo $\omega_{13} = 0$, è corrispondentemente $dx_1 = \omega_{10}x_0 + \omega_{11}x_1 + \omega_{12}x_2$; il piano focale, cioè il piano dei punti x_0, x_1, dx_1 si riduce al piano ξ_3 dei punti x_0, x_1, x_2. Dall'esame dei piani focali non deduciamo alcun nuovo elemento geometrico. Dobbiamo pertanto accontentarci del punto $x_1 + rx_0$ definito da (64): un altro punto analogo si troverebbe, permutando gli indici 2, 3, sulla tangente t_1; e i due punti così determinati si diranno i *terzi fuochi* o fuochi di terza specie. Essi sono i punti

$$\begin{aligned} &\binom{11}{3}x_1 + \left[\binom{11}{2}\binom{12}{3} - \binom{11}{3}\binom{12}{2}\right]x_0, \\ &\binom{11}{2}x_1 + \left[\binom{11}{3}\binom{13}{2} - \binom{11}{2}\binom{13}{3}\right]x_0. \end{aligned} \tag{65}$$

Se i primi fuochi coincidono, ed i secondi fuochi coincidono pure, allora, scelto a punto x_1 il punto principale, a cui tali fuochi si sovrappongono, è:

$$\binom{12}{2} = \binom{13}{3} = \binom{12}{3}\binom{13}{2} = 0,$$

e quindi *almeno uno dei terzi fuochi coincide coi precedenti.*

Sopra ogni tangente t abbiamo dunque determinato altri due punti, oltre ai quattro fuochi precedenti: il punto x_0 ed il punto principale. I birapporti che i terzi fuochi formano con alcuni dei punti precedenti danno nuovi invarianti suscettibili di semplice interpretazione geometrica.

Lasciamo al lettore la ricerca dei fuochi e dei piani focali della congruenza generata da t_1, quando x_0 si muove sul piano osculatore a C_1, o su un altro piano uscente da t_1, che si potrà determinare mediante il birapporto che esso forma con tale piano osculatore e coi piani ξ_2, ξ_3.

E) La normalizzazione delle coordinate x_i coi metodi precedenti non è possibile quando su una almeno delle tangenti t_i coincidono sia i primi che i secondi fuochi. In tali casi può servire un metodo che, da solo, dà già *una* *normalizzazione parziale* di tali coordinate. I piani osculatori alle curve C_α sono i piani che dalle loro tangenti t_1, t_2, t_3 proiettano rispetiivamente i punti

$$\binom{11}{2}x_2 + \binom{11}{3}x_3, \quad \binom{22}{1}x_1 + \binom{22}{3}x_3, \quad \binom{33}{1}x_1 + \binom{33}{2}x_2.$$

Noi potremo scegliere tre fattori K_α (per $\alpha = 1, 2, 3$) in modo che, sostituendo le $K_\alpha x_\alpha$ alle K_α, i *nuovi* valori w dei tre rapporti

$$(66) \qquad \binom{11}{2}:\binom{11}{3}, \quad \binom{22}{3}:\binom{22}{1}, \quad \binom{33}{1}:\binom{33}{2}$$

diventino uguali tra loro, e quindi anche alla radice cubica w dell'invariante di CEVA e MENELAO. In tal modo i piani osculatori delle curve C_1, C_2, C_3, passeranno rispettivamente per i punti $wx_2 + x_3$, $wx_3 + x_1$, $wx_1 + x_2$. (Fa eccezione il caso che uno dei rapporti (66) sia nullo, infinito o indeterminato, cioè il caso che il piano osculatore ad una delle curve C coincida con uno dei piani ξ o sia inderminato). Fissate così, a meno di un comune fattore, le dodici coordinate dei *tre* punti x_α, quelle di x_0 si potranno determinare mediante la $D = 1$.

Può darsi che la completa determinazione dei fattori proporzionalità si ottenga, combinando la precedente osservazione con la considerazione di qualche punto focale.

È importante notare un significato geometrico dell'invariante di CEVA e MENELAO; che si deduce o direttamente o tenendo conto della precedente osservazione,

Dati due reticoli, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una proiettività che porti un punto x_0, *le rette tangenti* t *e i piani osculatori alle curve* C *del primo reticolo che escono da* x_0, *in un punto* x'_0 *e nelle tangenti e nei piani osculatori alle curve del secondo reticolo che escono da* x'_0 *è che l'invariante di Ceva e Menelao, calcolato in* x_0 *per il primo reticolo, sia uguale al valore di tale invariante calcolato in* x'_0 *per il secondo reticolo.*

§ 4. **Applicabilità proiettiva di due reticoli.**

Due punti x ed X, funzioni rispettivamente di due parametri s ed S, descrivano due curve C, Γ. Indicando con $\dot{x}$, $\dot{X}$ e analoghe le derivate fatte rispetto ad s, od S, la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due curve si osculino in un punto è che si possano trovare dei parametri α, β, γ, δ, σ in guisa che in tale punto valgano le:

$$(67) \qquad x = \alpha X, \quad \dot{x} = \alpha\sigma\dot{X} + \beta X, \quad \ddot{x} = \alpha\sigma^2\ddot{X} + \gamma\dot{X} + \delta X.$$

(e analoghe in y, z, t) $(\alpha \neq 0, \ \sigma \neq 0)$.

Se $s = S$ e quindi fra i punti delle curve C, Γ vi è una corrispondenza biunivoca (essendo omologhi punti definiti da un medesimo valore del parametro), l'osculazione diventa *analitica* se

$$\sigma = 1, \quad \gamma = 2\beta\sigma \tag{68}$$

(cfr. il § 3 della mia Mem.: *Applicabilità proiettiva di due superficie,* in « Rend. del Circ. Matem. di Palermo », 1916, tomo 41).

Siano ora dati due reticoli in due spazii, fra i punti dei quali intercede una corrispondenza biunivoca. Noi diremo che i reticoli sono *proiettivamente applicabili* se per ogni coppia di punti omologhi esiste una proiettività P che porta il secondo punto nel primo e le tre curve del secondo reticolo che escono dal secondo di tali punti, in curve osculatrici alle curve del primo reticolo che escono dal primo dei punti considerati. Non ci occuperemo nè delle generalizzazioni iperspaziali, nè del caso di osculazione *analitica,* che ha invece importanza essenziale per l'analogo studio, compiuto da CECH, relativo ai reticoli piani.

Se s è un parametro per una curva del primo reticolo, noi indicheremo con $\overline{\omega}_{ij}$ i rapporti ω_{ij}: ds. Useremo lettere maiuscole X, Ω, $\overline{\Omega}$ e parentesi quadre [ ] per il secondo reticolo. Una proiettività P sarà determinata da una trasformazione P lineare intera omogenea (a determinante differente da zero) sulle coordinate X, Y, Z, T dei punti del secondo spazio. Noi diremo che le x, y, z, t sono trasformate di X, Y, Z, T o, più brevemente, che x è trasformato di X, se tale trasformazione lineare porta le X, Y, Z, T *proprio* nelle x, y, z, t (e non soltanto in quantità proporzionali alle x, y, z, t). Lungo una curva C_1 del primo reticolato è $\omega_2 = \omega_3 = 0$, quindi

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \overline{\omega}_{00} x_0 + \overline{\omega}_1 x_1, \\ \dot{x}_1 &= \sum_i \overline{\omega}_{1i} x_i = \overline{\omega}_1 \sum_i \binom{11}{i} x_i, \\ \ddot{x}_0 &= \frac{d\overline{\omega}_{00}}{ds} x_0 + \overline{\omega}_{00}(\overline{\omega}_{00} x_0 + \overline{\omega}_1 x_1) + \frac{d\overline{\omega}_1}{ds} x_1 + \overline{\omega}_1^2 \sum \binom{11}{i} x_i = \\ &= a_1 x_0 + b_1 x_1 + \overline{\omega}_1^2 \left[\binom{11}{2} x_2 + \binom{11}{3} x_3\right], \end{aligned}\right. \tag{69}$$

e analoghe in y, z, t; ed ove ci è inutile esplicitare i valori di a_1, b_1.

Per la curva omologa Γ_1 del secondo reticolo varranno equazioni analoghe:

$$\dot{X}_0 = \overline{\Omega}_{00} X_0 + \overline{\Omega}_1 X_1; \quad \ddot{X}_0 = A_1 X_0 + B_1 X_1 + [\overline{\Omega}_1]^2 \left\{ \begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix} X_2 + \begin{bmatrix}11\\3\end{bmatrix} X_3 \right\}. \tag{70}$$

Per l'applicabilità proiettiva dei due reticoli nei punti x_0, X_0, dovranno esistere dei parametri α, β_1, γ_1, δ_1, σ_1 e una proiettività P tali che

x_0, $\dot{x}_0$, $\ddot{x}_0$ siano rispettivamente i trasformati di αX_0, di $\alpha\sigma_1\dot{X}_0 + \beta_1 X_0$, $\alpha\sigma_1^2\ddot{X}_0 + \gamma_1\dot{X}_0 + \delta_1 X_0$; e proprietà analoghe dovranno valere per le altre curve dei reticoli. Nel passare però dalle curve C_1 alle C_2, C_3, i valori delle σ_1, β_1, γ_1, δ_1 potranno cambiare: non cambierà però il parametro α, che è determinato dal fatto che x è proprio il trasformato di αX. Cambiando lievemente il significato delle β_1, γ_1, δ_1 e analoghe β_ρ, γ_ρ, δ_ρ (per $\rho = 2, 3$) potremo dire più semplicemente che, per $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$, $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \lambda$, le x_0, $\bar{\omega}_\lambda x_\lambda$, $\bar{\omega}_\lambda^2\left[\binom{\lambda\lambda}{\mu}x_\mu + \binom{\lambda\lambda}{\nu}x_\nu\right]$ devono essere trasformate rispettivamente di

$$(71)\qquad \alpha X_0,\ \alpha\sigma_\lambda\bar{\Omega}_\lambda X_\lambda + \beta_\lambda X_0,\ \alpha\sigma_\lambda^2\bar{\Omega}_\lambda^2\left\{\begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ \mu\end{bmatrix}X_\mu + \begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ \nu\end{bmatrix}X_\nu\right\} + \gamma_\lambda X_\lambda + \delta_\lambda X_0 .$$

Dando a λ i valori μ, ν, ne deduciamo che $\bar{\omega}_\mu x_\mu$ ed $\bar{\omega}_\nu x_\nu$ sono trasformati di $\alpha\sigma_\mu\bar{\Omega}_\mu X_\mu + \beta_\mu X_0$ e di $\alpha\sigma_\nu\bar{\Omega}_\nu X_\nu + \beta_\nu X_0$ e che quindi $\bar{\omega}_\lambda^2\left[\binom{\lambda\lambda}{\mu}x_\mu + \binom{\lambda\lambda}{\nu}x_\nu\right]$ è il trasformato di

$$\bar{\omega}_\lambda^2\binom{\lambda\lambda}{\mu}\frac{1}{\bar{\omega}_\mu}(\alpha\sigma_\mu\bar{\Omega}_\mu X_\mu + \beta_\mu X_0) + \bar{\omega}_\lambda^2\binom{\lambda\lambda}{\nu}\frac{1}{\bar{\omega}_\nu}(\alpha\sigma_\nu\bar{\Omega}_\nu X_\nu + \beta_\nu X_0)$$

che deve coincidere con la terza delle (71). Essendo i punti X_0, X_1, X_2, X_3 linearmente indipendenti, dovrà essere

$$(72)\qquad \binom{\lambda\lambda}{\mu}\frac{\bar{\omega}_\lambda^2}{\bar{\omega}_\mu}\alpha\sigma_\mu\bar{\Omega}_\mu = \alpha\sigma_\lambda^2\bar{\Omega}_\lambda^2\begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ \mu\end{bmatrix}$$

per tutte le coppie di valori λ, μ tra loro differenti ($\lambda \neq \mu$) scelti tra i tre valori possibili 1, 2, 3. È inutile occuparci delle altre condizioni, che determinano soltanto i valori delle β, γ, δ. Il poter trovare le $\sigma_\lambda \neq 0$ in modo da soddisfare a (72) è la condizione necessaria e sufficiente per la applicabilità proiettiva dei due reticoli.

Le (72) si possono scrivere più semplicemente:

$$(73)\qquad \frac{\theta_\lambda^2}{\theta_\mu} = \frac{\binom{\lambda\lambda}{\mu}}{\begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ \mu\end{bmatrix}} \quad \text{ove è posto} \quad \theta_\lambda = \frac{\sigma_\lambda\bar{\Omega}_\lambda}{\bar{\omega}_\lambda}; \quad (\lambda \neq \mu),\ (\lambda, \mu = 1, 2, 3).$$

Basterà vedere quando le (73) sono risolubili rispetto alle θ.

Moltiplicando (73) per il quadrato della equazione dedottane scambiando gli indici, troveremo:

$$(74)\qquad \theta_\mu^3 = \frac{\binom{\lambda\lambda}{\mu}\binom{\mu\mu}{\lambda}^2}{\begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\mu\\ \lambda\end{bmatrix}^2}.$$

Uguagliando questo valore di θ_μ^3 con quello ottenutone scambiando gli indici λ, ν (essendo ν quello degli indici 1, 2, 3 che è differente sia da λ, che da μ) otterremo in conclusione le:

$$(75) \qquad \frac{\binom{\lambda\lambda}{\mu}\binom{\mu\mu}{\lambda}^2}{\binom{\nu\nu}{\mu}\binom{\mu\mu}{\nu}^2} = \frac{\begin{bmatrix}\lambda\lambda\\ \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\mu\\ \lambda\end{bmatrix}^2}{\begin{bmatrix}\nu\nu\\ \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\mu\\ \nu\end{bmatrix}^2}$$

per ogni permutazione λ, μ, ν *degli indici* 1, 2, 3. *Queste sono le condizioni per l'applicabilità proiettiva dei due reticoli.* È facile riconoscere che, se sono soddisfatte le (75), le (73) e (74) sono risolubili, e determinano univocamente (anche nel campo dei numeri complessi) i valori delle θ.

Si noti che le (75) provano che gli invarianti R definiti con le (17) sono gli *unici invarianti* di un reticolo che si conservano per deformazioni proiettive; in luogo di dire che due reticoli hanno gli stessi invarianti R, si può dire che essi hanno *lo stesso elemento lineare proiettivo* (41). Dagli invarianti (75) o (17) segue che anche *l'invariante di Ceva e Menelao è invariante per deformazioni proiettive*: ciò che si poteva prevedere senz'altro in virtù dell'ultimo teorema del precedente paragrafo.

È importante osservare che i precedenti calcoli sono in difetto se qualcuna delle $\binom{\lambda\lambda}{\mu}$ è nulla; se ciò avvenisse, è meglio riprendere la trattazione partendo senz'altro dalle (72). Il calcolo naturalmente si semplifica; e noi lo eseguiremo più avanti soltanto in un caso particolare che sembra degno di speciale attenzione.

Nel caso generale possiamo anche dare una interpretazione geometrica degli R, invarianti anche per deformazioni proiettive. Basta ricordare (56) in cui si ponga $\mu:\nu=\rho:\sigma$ per riconoscere che p. es. $\binom{11}{3}^2\binom{33}{1}:\binom{11}{2}^2\binom{22}{1}$ *è il prodotto dei birapporti che ciascuna delle direzioni asintotiche sul piano* ξ_1 *forma col piano osculatore a* C_1 *e coi piani* ξ_2, ξ_3.

§ 5. **Applicazioni varie alla geometria differenziale proiettiva.**

1. Quando il punto x_0 si muove, ciascuno dei punti principali x_α si muove pure: così pure si muove ogni fuoco, e più generalmente si muove ogni punto

$$(76) \qquad x = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

ove i rapporti $a_0:a_1:a_2:a_3$ siano invarianti assoluti. Alle curve C descritte da x_0 corrisponderanno altre curve descritte o dai punti principali, o dai fuochi, o, più generalmente, dal punto (76).

Otteniamo così nuovi reticoli, ciascuno dei quali si può considerare come un *trasformato di Laplace* del reticolo primitivo: l'analogia con la abituale trasformazione di LAPLACE per le equazioni lineari iperboliche diventa completa, se *due* delle a_1, a_2, a_3 sono nulle.

2. Se si suppongono integrabili le $\omega_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, cioè se si suppongono le ω_α del tipo $r_\alpha du_\alpha$, ove le r_α sono funzioni delle u_1, u_2, u_3, siamo ridotti al caso elementare, cioè allo studio proiettivo del più generale sistema di coordinate curvilinee nello spazio. Le condizioni di integrabilità da noi trovate sono in tal caso le equazioni che corrispondono alle equazioni di LAMÉ per la geometria metrica. E fra tutte queste equazioni vi è anche una grande analogia di struttura, perchè tutte si riducono all'uguagliare a zero certi simboli a quattro indici.

3. Il fatto che, tranne casi del tutto eccezionali, si riesca a *normare* le coordinate dei punti x_i, cioè a *determinare i corrispondenti fattori di proporzionalità,* ha un semplice significato geometrico: quello cioè che si può stabilire una *connessione proiettiva* fra i varii punti dello spazio.

Se x_0 ed x_0' sono due punti dello spazio ed x_1, x_2, x_3 e x_1', x_2', x_3' sono i punti corrispondenti posti sulle tangenti in x_0 ed x_0' alle corrispondenti curve del reticolo, tale connessione fa corrispondere ad un punto $\Sigma \lambda_i x_i$ il punto $\Sigma \lambda_i x_i'$.

Nello stesso tempo i simboli $\binom{ij}{h}$ restano complelamente determinati e si possono considerare gli analoghi delle *rotazioni* del RICCI.

4. Se $\binom{11}{2} = \binom{11}{3} = 0$, cioè se ω_{12} e ω_{13} sono combinazioni lineari di ω_2 e di ω_3, le curve C_1 si riducono a rette. Potremmo partire dalle formole qui ottenute per studiare le congruenze rettilinee; ma ci accontenteremo del solo esame di un caso particolare.

5. Supporremo che il punto $x = x(u, v)$ generi, al variare delle $u, v,$ una superficie S su cui le linee u, v siano asintotiche; se a^2 è il determinante (x, x_u, x_v, x_{uv}), noi porremo

$$X = \frac{x_{uv}}{a} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},$$

con notazioni abituali nella geometria proiettiva delle superficie. Se le x sono coordinate normali, la retta (x, X) è la *normale proiettiva* ad S; se le x

sono coordinate omogenee qualsiansi, la retta (x, X) descrive la più generale congruenza di rette che sia *coniugata* alla S (ossia le cui sviluppabili determinino su S un sistema coniugato). Porremo:

$$x_0 = x + wX; \quad x_1 = x_u + wX_u; \quad x_2 = x_v + wX_v; \quad x_3 = X$$
$$dx_0 = x_1 du + x_2 dv + x_3 dw$$
$$(\omega_{00} = 0; \ \omega_1 = du, \ \omega_2 = dv, \ \omega_3 = dw).$$

E le equazioni fondamentali della geometria proiettiva delle superficie permettono facilmente di determinare le forme ω_{ik} e quindi i simboli $\binom{i\alpha}{k}$, per $i, k = 0, 1, 2, 3, \alpha = 1, 2, 3$. Si verifica subito che $\binom{33}{1} = \binom{33}{2} = 0$, come si poteva prevedere osservando che nel nostro caso le linee $C_3(\omega_1 = \omega_2 = 0)$ sono rette. Infatti, essendo $x_3 = X$ indipendente da w, il differenziale dx_3 non dipenderà da dw; dal che segue subito che $\binom{33}{i} = 0$ (per $i = 0, 1, 2, 3$). Così pure è facile verificare che $\binom{13}{3} = \binom{23}{3} = 0$; pertanto la retta *focale* del piano ξ_3, cioè del piano passante per i punti (x_0, x_1, x_2) è la retta x_1, x_2. Per $w = 0$ troviamo che *la retta focale del piano tangente ad* S *in un suo punto* x *è la retta dei punti* x_u, x_v: *cioè la duale della retta* (x, X) *nella polarità fondamentale* (definita p. es. mediante le quadriche di DARBOUX). Tale polarità viene così ritrovata in modo semplice e diretto.

E, senza continuare oltre, ci basti ancora soltanto osservare che per $w = 0$ l'elemento lineare proiettivo (57) è precisamente quella forma cubica che ha permesso di definire l'*elemento lineare proiettivo* della superficie S.

§. 6. Applicazioni alla geometria metrica di una superficie.

Può essere interessante osservare che i metodi qui seguiti permettono di ritrovare le nozioni fondamentali della geometria *metrica* di una superficie e di aggiungere anzi qualche risultato che sembra nuovo. Sia $t = 1$, e siano x, y, z coordinate cartesiane ortogonali. Il punto $x = x(u, v)$ generi, al variare delle u, v, una superficie S riferita a coordinate curvilinee u, v qualsiasi. Siano X, Y, Z i coseni direttori della normale ad S; e poniamo $T = 0$. Poniamo pure:

$$x_0 = x + wX, \quad y_0 = y + wY, \quad z_0 = z + wZ, \quad t_0 = t + wT = 1. \tag{76}$$

Le superficie $w =$ cost. saranno le superficie parallele ad S; e con

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$$

indichiamone le due forme fondamentali di GAUSS; esse, per $w = 0$, si ridurranno alle forme relative alla superficie S. È ben noto che, indicando con $\left\{ {ij \atop k} \right\}$ i noti simboli di CHRISTOFFEL, è:

$$(77)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial u^2} = \left\{ {11 \atop 1} \right\} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + DX \quad \text{(e analoghe in } y_0, z_0, t_0) \\ X_u = A \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + B \dfrac{\partial x_0}{\partial v}; \quad X_v = P \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + Q \dfrac{\partial x_0}{\partial v} \end{cases}$$

ove

$$(78)\quad A = \frac{D'F - DG}{EG - F^2}, \quad B = \frac{FD - ED'}{EG - F^2}, \quad P = \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}, \quad Q = \frac{D'F - ED''}{EG - F^2}.$$

Sceglieremo a punti x_1, x_2, x_3 i punti improprii delle tangenti alle linee $v = \text{cost.}$ ed $u = \text{cost.}$, e della normale ad S, ponendo:

$$(79)\quad x_1 = \frac{\partial x_0}{\partial u} = x_u + wX_u; \quad x_2 = \frac{\partial x_0}{\partial v} = x_v + wX_v; \quad x_3 = \frac{\partial x_0}{\partial w} = X.$$

(e analoghe in y, z; sarà $t_1 = t_2 = t_3 = 0$).

Ne segue

$$(80)\quad dx_0 = x_1 du + x_2 dv + x_3 dw,$$

donde si deduce

$$(81)\quad \omega_{00} = 0, \quad \omega_{01} = \omega_1 = du, \quad \omega_{02} = \omega_2 = dv, \quad \omega_{03} = \omega_3 = dw.$$

Da (77) si trae:

$$(82)\quad \begin{cases} dx_1 = \left[\left\{ {11 \atop 1} \right\} du + \left\{ {12 \atop 1} \right\} dv + A dw \right] x_1 + \\ \qquad + \left[\left\{ {11 \atop 2} \right\} du + \left\{ {12 \atop 2} \right\} dv + B dw \right] x_2 + (D du + D' dv) x_3 \\ dx_2 = \left[\left\{ {12 \atop 1} \right\} du + \left\{ {22 \atop 1} \right\} dv + P dw \right] x_1 + \\ \qquad + \left[\left\{ {12 \atop 2} \right\} du + \left\{ {22 \atop 2} \right\} dv + Q dw \right] x_2 + (D' du + D'' dv) x_3 \\ dx_3 = (A du + P dv) x_1 + (B du + Q dv) x_2 . \end{cases}$$

Ne deduciamo, confrontando con le (4), tutti i pfaffiani ω_{ij}, e quindi anche i valori dei simboli $\binom{ij}{k}$. E troviamo:

$$(83)\quad \begin{cases} \omega_{i0} = 0 \text{ e quindi } \binom{i\alpha}{0} = 0 \text{ per } \alpha = 1, 2, 3, \text{ ed } i = 0, 1, 2, 3 \\ \binom{ij}{l} = \left\{ {ij \atop l} \right\} \text{ per } i, j, l = 1, 2; \ \omega_{33} = 0 \text{ e quindi } \binom{3\alpha}{3} = 0 \text{ per } \alpha = 1, 2, 3 \\ \binom{11}{3} = D; \quad \binom{12}{3} = \binom{21}{3} = D'; \quad \binom{22}{3} = D''; \quad \binom{13}{3} = \binom{23}{3} = 0 \\ \binom{31}{1} = \binom{13}{1} = A; \quad \binom{23}{1} = \binom{32}{1} = P; \quad \binom{31}{2} = \binom{13}{2} = B; \quad \binom{32}{2} = \binom{23}{2} = Q \\ \qquad \binom{33}{0} = \binom{33}{1} = \binom{33}{2} = \binom{33}{3} = 0. \end{cases}$$

Sono dunque nulli i simboli $\binom{i\alpha}{j}$ (*per* i, j $= 0, 1, 2, 3$, *e per* $\alpha = 1, 2, 3$) *se* j $= 0$, *o se due degli indici* i, j, α *sono uguali a* 3. *Quelli con* i, α, j *uguali ad* 1 *oppure a* 2 *si riducono ai simboli* $\left\{ {i\alpha \atop j} \right\}$ *di seconda specie di Christoffel per l'elemento lineare di Gauss della superficie* w $=$ *cost. I simboli* $\binom{ij}{3}$ *con* i, j *uguali ad* 1 *od a* 2 *si riducono a* D, D′, D″. *I simboli* $\binom{i3}{j}$ *con* i, j *uguali ad* 1 *od a* 2 *sono uguali a* $\binom{3i}{j}$ *e si riducono alle* A, P, B, Q. Come si vede, gli attuali simboli a tre indici comprendono tutti gli elementi essenziali della geometria metrica. E si ricordi che le equazioni

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0 \tag{84}$$

$$Bdu^2 + (Q - A)dudv - Pdv^2 = 0 \tag{85}$$

$$r^2 \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} - (A + Q)r + 1 = 0, \tag{86}$$

$$\left[\text{ove } \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^3} = AQ - BP = \binom{31}{1}\binom{32}{2} - \binom{32}{1}\binom{31}{2}\right]$$

determinano rispettivamente le *asintotiche*, le *linee di curvatura*, i *raggi di curvatura.*

I fuochi della retta $(x, x_u) = (x, x_1)$ sono i punti $x_1 - \binom{13}{3}x_0$ ed $x_1 - \binom{12}{2}x_0$, cioè il punto improprio e il punto $x_0 - \left(x_u : \left\{ {12 \atop 2} \right\}\right)$.

Risultato analogo vale per la retta (x, x_v). *Dunque i due fuochi coincidono su ciascuna tangente alle linee* u $=$ *cost.*, *o* v $=$ *cost. di una superficie* S(w $= 0$), *soltanto se* $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$ *ed* $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$ *sono nulli, cioè se le linee* u, v *formano una rete di Cebicef.* Se noi teniamo fissa la superficie S, e non variamo le linee $v =$ cost., ma variamo le linee $u =$ cost., i fuochi della retta (x, x_u) sono l'uno il punto improprio, l'altro il punto

$$x - \frac{x_u}{\left\{ {12 \atop 2} \right\} + q\left\{ {11 \atop 2} \right\}} \ (^1).$$

(1) Per provarlo, si assumano a linee coordinate le $V = v =$ cost., e le $U = U(u, v) =$ cost. La u risulterà funzione di U, V. La formola del testo si prova p. es. calcolando il simbolo $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$ per le nuove linee coordinate, e ponendo $q = \frac{\partial u}{\partial V}$.

Questo fuoco resta immobile soltanto se $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$, *cioè se la linea* v = *cost. considerata ha curvatura geodetica nulla.* Così i fuochi della normale (x, x_3) sono i punti $x - (X : A)$ ed $x - (X : Q)$. Essi *coincidono se* A = Q, *cioè se* ED″ = DG, *in altre parole se le linee* u, v *dividono armonicamente le linee di curvatura.* Se le linee *u, v coincidono invece con queste linee di curvatura, tali fuochi sono i centri di curvatura.* In ogni caso *il punto principale della normale è il punto* $\mathrm{x} - \frac{2}{\mathrm{A} + \mathrm{Q}} \mathrm{X} = \mathrm{x} - \frac{2}{\mathrm{H}} \mathrm{X}$, *indipendente dalla particolare scelta delle linee* u, v, *perchè* H *è la curvatura media,* che viene così definita in nuovo modo.

La retta (x, x_1) tangente ad S ha per coniugata sul piano tangente ad S la retta che da x proietta il punto (improprio) $\binom{21}{3} x_1 - \binom{11}{3} x_2 = D' x_u - D x_v$, com'è ben noto, e sul piano (x, x_1, x_3) passante per tale tangente (x, x_1) e normale alla superficie ha per coniugata la retta che da x proietta il punto (improprio) $\binom{31}{2} x_1 - \binom{11}{2} x_3 = B x_u - \left\{ {11 \atop 2} \right\} X$. *Questa retta coniugata della tangente* $(\mathrm{x}, \mathrm{x_u})$ *coincide con questa tangente se* $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$, *cioè se la linea* v = *cost. è geodetica; coincide con la normale* se B = 0, *cioè se la* v = *cost. è linea di curvatura.*

In generale i coseni direttori di tale retta coniugata sono proporzionali alle $\frac{1}{T} \frac{dx}{ds} - \frac{1}{\rho} X$, ove s è l'arco della linea ($v =$ cost.) considerata, ed $1 : \rho$, $1 : T$ sono la sua curvatura geodetica, e la sua torsione geodetica: il rapporto di queste è così definito con metodo nuovo e semplicissimo.

Anche tutte le proiettività, di cui si è parlato al § 3, e quelle che se ne ottengono permutando gli indici 1, 2, 3 servono a nuove interpretazioni di elementi geometrici fondamentali. Qui ricorderemo le più importanti.

La proiettività (53) trasforma un punto $\rho x_2 + \sigma x_3$ in un punto $\mu x_2 + \nu x_3$, cioè è una proiettività della retta (x_2, x_3) in se stessa. (Tale retta è la retta impropria del piano che contiene la normale ad S e la tangente alla linea $u =$ cost.). Ponendo $\alpha = \sqrt{G} \rho$, $\alpha' = \sqrt{G} \mu$, $\sigma' = \nu$, i punti $\rho x_2 + \sigma x_3$ e $\mu x_2 + \nu x_3$ diventano i punti $\frac{\alpha}{\sqrt{G}} \frac{\partial x_0}{\partial v} + \sigma X$, $\frac{\alpha'}{\sqrt{G}} \frac{\partial x_0}{\partial v} + \sigma' X$ ove $\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x_0}{\partial v}$ ed X sono i coseni direttori della tangente alla linea $u =$ cost. e della normale alla superficie S. Con queste notazioni la (53) diventa (si noti il radicale cambiamento del significato della lettera ρ):

$$\frac{1}{\rho} \alpha \alpha' - \frac{1}{T} (\alpha' \sigma + \alpha \sigma') = 0$$

dove, c. s., $\frac{1}{\rho}$ e $\frac{1}{T}$ sono la curvatura geodetica e la torsione geodetica della linea considerata $u = \text{cost}$. Oltre a una nuova interpretazione di questo rapporto, si noti che questa proiettività *degenera* per le linee di torsione geodetica nulla, e *si riduce ad una involuzione* per le geodetiche.

La proiettività analoga per i punti della retta (x_1, x_2), o, meglio, per le rette che li proiettano dal punto x, si riduce alla *involuzione* delle tangenti coniugate.

Lasciamo al lettore lo studio delle proiettività più generali (55), che metterà in chiaro le semplificazioni che si presentano, quando fosse nullo $\binom{12}{1} = \binom{21}{1} = \left\{ {12 \atop 1} \right\}$, (cioè quando i fuochi della tangente t_2 sono sovrapposti), oppure quando $P = \binom{23}{1} = \binom{32}{1}$ è nullo (ciò che diviene se la linea $u = \text{cost.}$ è linea di curvatura). E così via.

Volgiamoci alle applicazioni per il caso attuale dei precedenti studii relativi alla applicabilità proiettiva. Come si è osservato al § 4, essendo ora $\binom{33}{i} = 0$, $(i = 1, 2)$, non si possono senz'altro applicare le formole di loc. cit.; ma è meglio rifare i calcoli che si semplificano grandemente. Basterà eliminare le θ dalle equazioni dedotte dalle (72), scrivendole non nella forma (73), ma nella forma

$$\binom{11}{2} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{\theta_1^2}{\theta_2}; \quad \binom{22}{1} = \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\theta_2^2}{\theta_1};$$

$$\binom{11}{3} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{\theta_1^2}{\theta_3}; \quad \binom{22}{3} = \begin{bmatrix} 22 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{\theta_2^2}{\theta_3}.$$

Il risultato della eliminazione di θ_3 dice semplicemente che l'espressione:

$$R = \left\{ \frac{\binom{22}{1}}{\binom{11}{2}} \right\}^2 \left\{ \frac{\binom{11}{3}}{\binom{22}{3}} \right\}^3 = \left[\frac{\left\{ {22 \atop 1} \right\}}{\left\{ {11 \atop 2} \right\}} \right]^2 \left(\frac{D}{D''} \right)^3 \tag{87}$$

deve avere valore uguale alla espressione analoga costruita per il secondo sistema di congruenze (formato, come il primo, partendo da una superficie e dalle superficie parallele). Si noti che, se $\frac{1}{\rho_u}, \frac{1}{\rho_v}, \left[\frac{1}{r_u}, \frac{1}{r_v}\right]$ sono le curvature geodetiche [normali] delle $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$, si ha

$$R = \left(\frac{\frac{1}{\rho_u}}{\frac{1}{\rho_v}} \right)^2 \left(\frac{\frac{1}{r_v}}{\frac{1}{r_u}} \right)^3. \tag{87$_{\text{bis}}$}$$

Scegliamo ad assi delle x, y le tangenti alle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, e ad asse delle z la normale; sia ω l'angolo delle prime due. Sarà nell'origine $x = y = z = 0$

$$x_v = 0, \quad y_u = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z_u = z_v = 0.$$

E quindi, a meno di infinitesimi del terz'ordine:

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots \qquad (a,\ b,\ c = \text{cost.}) \tag{88}$$

donde si trae che nell'origine è:

$$z_{uu} = z_{xx}x_u{}^2 = 2ax_u{}^2, \quad z_{vv} = 2cy_v{}^2.$$

Il piano osculatore nell'origine alla linea $v = \text{cost.}$ sarà

$$z = \lambda y, \quad \text{ove } \lambda = \frac{2ax_u{}^2}{y_{uu}}. \tag{89}$$

Il piano osculatore alla $u = \text{cost.}$ sarà

$$z = \mu x, \quad \text{ove } \mu = \frac{2by_v{}^2}{x_{vv}}. \tag{89$_{\text{bis}}$}$$

La linea $v = \text{cost.}$ osculerà la linea intersezione della superficie col suo piano osculatore $z = \lambda y$: linea le cui proiezioni sul piano normale zx e sul piano tangente hanno rispettivamente le equazioni

$$z = ax^2 + 2b\frac{xz}{\lambda} + c\frac{z^2}{\lambda^2} + \dots, \quad \lambda y = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots.$$

La curvatura normale e la curvatura geodetica della $v = \text{cost.}$ saranno uguali alle curvature di queste due proiezioni, cioè, ricordando che ω è l'angolo xy, saranno uguali a $2a$ ed a $(2a \operatorname{sen} \omega) : \lambda$.

Il rapporto tra il quadrato della seconda e il cubo della prima sarà:

$$\frac{\left(\frac{1}{\rho_v}\right)^2}{\left(\frac{1}{r_v}\right)^3} = \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\lambda^2} \frac{1}{2a}.$$

Scambiando u con v, e dividendo le formole così ottenute, da $(87)_{\text{bis}}$ dedurremo che l'*invariante* R *è dato da*:

$$R = \frac{a\lambda^2}{c\mu^2}, \tag{87$_{\text{ter}}$}$$

ove λ *e* μ *definiscono colle* (89) *e* $(89)_{\text{bis}}$ *i piani osculatori alle linee* u $=$ *cost.*, v $=$ *cost. uscenti dall'origine.*

È facile verificare che ogni collineazione

$$x = \frac{lX}{p+qX+rY+sZ}, \quad y = \frac{mY}{p+qX+rY+sZ}, \quad z = \frac{nZ}{p+qX+rY+sZ},$$

che trasformi in sè gli assi coordinati, lascia invariato il rapporto $(87)_{\text{ter}}$. Basta infatti osservare che questa collineazione porta la superficie (88) e i piani (89) e $(89)_{\text{bis}}$ nelle

$$Z = AX^2 + 2BXY + CY^2 + \dots \tag{90}$$

$$\left(A = \frac{al^2}{pn}, \; B = \frac{blm}{pn}, \; C = \frac{cm^2}{pn}\right) \tag{90_{bis}}$$

$$Z = MX, \quad Z = \Lambda Y \tag{91}$$

$$\left(\Lambda = \frac{\lambda m}{n}, \; M = \frac{\mu l}{n}\right) \tag{91_{bis}}$$

$$\frac{A\Lambda^2}{CM^2} = \frac{al^2}{pn}\,\frac{\lambda^2 m^2}{n^2} : \frac{cm^2}{pn}\,\frac{\mu^2 l^2}{n^2} = \frac{a\lambda^2}{c\mu^2}.$$

Viceversa sia data una superficie Σ, di cui (90) sia l'equazione, quando le coordinate dei punti siano indicate con lettere maiuscole. Gli assi delle X, Y, Z siano le tangenti nell'origine alle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, e la normale. Siano (91) i piani osculatori nell'origine a tali linee coordinate. Le proiettività che portano gli assi delle X, Y, Z negli assi x, y, z e i piani (91) nei piani (89) e $(89)_{\text{bis}}$ sono definite dalle:

$$\bar{x} = \frac{\lambda M}{p+qX+rY+sZ} X, \quad \bar{y} = \frac{\mu\Lambda}{p+qX+rY+sZ} Y, \quad \bar{z} = \frac{\lambda\mu}{p+qX+rY+sZ} Z.$$

Perchè le linee $v = \text{cost.}$ della S e della superficie $\bar{\Sigma}$ in cui tale proiettività trasforma Σ si osculino nell'origine, dovrà essere (essendo x, y, z le coordinate di un punto di S, ed $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ quelle di un punto di $\bar{\Sigma}$) nell'origine:

$$x_u = \sigma \bar{x}_u, \quad x_{uu} = \sigma^2 \bar{x}_{uu} + \tau \bar{x}_u, \qquad \text{(e analoghe in } y, z), \tag{92}$$

ove $\sigma \neq 0$, e τ sono opportune costanti. Ora: $y_u = \bar{y}_u = 0$, $z_u = \bar{z}_u = 0$

$$z_{uu} = z_{xx} x_u^2 = 2a x_u^2, \quad \bar{z}_{uu} = 2\bar{a}(\bar{x}_u)^2,$$

ove il valore di $\bar{a}$ si deduce da $(90)_{\text{bis}}$, ponendovi $a = \bar{a}$, $l = \lambda M$, $m = \mu\Lambda$, $n = \lambda\mu$:

$$\bar{a} = A\frac{pn}{l^2} = A\frac{p\lambda\mu}{\lambda^2 M^2} = A\frac{p\mu}{\lambda M^2}.$$

Esplicitando le (92) e analoghe, si avrà:

$$x_u = \sigma \bar{x}_u ; \quad x_{uu} = \sigma^2 \bar{x}_{uu} + \tau \bar{x}_u ; \quad y_{uu} = \sigma^2 \bar{y}_{uu} ;$$

$$a x_u^2 = \sigma^2 \bar{a} (\bar{x}_u)^2 = \sigma^2 A \frac{p\mu}{\lambda M^2} (\bar{x}_u)^2 .$$

La seconda di queste equazioni è l'unica che contenga τ; eliminare τ equivale a dimenticare tale equazione. L'ultima equazione, in virtù della prima, si riduce alla:

$$a = A \frac{p\mu}{\lambda M^2}, \tag{93}$$

che si dovrà ricordare insieme alla

$$\frac{y_{uu}}{(x_u)^2} = \frac{\bar{y}_{uu}}{(\bar{x}_u)^2} \tag{94}$$

dedotta eliminando σ tra la prima e la terza. Per costruzione i piani osculatori alle linee $v = \text{cost.}$ sulle superficie S e $\bar{\Sigma}$ nell'origine coincidono; e pertanto per le (89) e $(89)_{\text{bis}}$

$$\frac{y_{uu}}{a (x_u)^2} = \frac{\bar{y}_{uu}}{\bar{a} (\bar{x}_u)^2} = \frac{\lambda M^2}{A p \mu} \frac{\bar{y}_{uu}}{(\bar{x}_u)^2} .$$

Quindi l'equazione (94) si può dimenticare, perchè è equivalente alla (93). Perchè anche le linee $v = \text{cost.}$ su S e su $\bar{\Sigma}$ si osculino nell'origine, dovrà valere l'equazione analoga

$$c = C \frac{p\lambda}{\mu \Lambda^2} . \tag{95}$$

Perchè si possa determinare p in guisa da soddisfare ad entrambe le (93), (95) basterà che:

$$a : \frac{A\mu}{\lambda M^2} = c : \frac{C\lambda}{\mu \Lambda^2} \quad \text{ossia che} \quad \frac{a \lambda^2}{c \mu^2} = \frac{A \Lambda^2}{C M^2},$$

cioè che il rapporto R, definito da $(37)_{\text{ter}}$ sia uguale per le superficie S e Σ.

Ecco così verificato per via diretta in questo caso particolare il nostro risultato generale.

Una osservazione. — Possiamo chiederci come muti l'invariante R per una collineazione che trasformi bensì in se stessi gli assi x, y tangenti alle linee $v = \text{cost.}$ ed $u = \text{cost.}$, ma sposti l'asse delle z, Ogni tale collineazione è prodotto di una collineazione che porta in sè stesso ciascuno dei tre assi e di una collineazione

$$x' = x + lz, \quad y' = y + mz, \quad z' = z.$$

Basterà studiare l'effetto di quest'ultima; osserviamo che l'asse $x' = y' = 0$ delle z' è la retta $x:y:z = l:m = -1$.

L'equazione della superficie trasformata sarà:

$$\begin{aligned} z' &= a(x' - lz')^2 + 2b(x' - lz')(y' - mz') + c(y' - mz')^2 + \dots \\ &= ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + \dots . \end{aligned}$$

I trasformati dei piani osculatori $x - \lambda y = 0$, $z - \mu x = 0$ saranno i piani

$$z' - \frac{\lambda}{1 + \lambda m} x' = 0, \quad z' - \frac{\mu}{1 + l\mu} y' = 0.$$

Il nuovo invariante (calcolato, come se l'asse z' fosse la normale alla superficie) sarà:

$$R' = \frac{a\lambda^2}{c\mu^2} \left(\frac{1 + l\mu}{1 + \lambda m} \right)^2$$

e si ottiene dal suo valore R iniziale, moltiplicando questo per il quadrato di

$$k = \frac{1 + l\mu}{1 + \lambda m}.$$

Questo R' è l'invariante (per applicabilità proiettive) degli intorni del second'ordine delle linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ posti sulla superficie e dell'asse delle z', cioè della retta

$$l = -\frac{x}{z}, \quad m = -\frac{y}{z}, \quad \text{donde} \quad k = \frac{z - \mu x}{z - \lambda y}.$$

Questo invariante R' non varia se la retta (assunta a nuovo asse della z') si muove su uno dei piani

$$z - \lambda y = \pm k(z - \mu x).$$

Questi due piani appartengono al fascio determinato dai piani osculatori alle linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, ed anzi li dividono armonicamente.

On the determination of a simplex both inscribed to and circumscribed about a quadric in space of four dimensions.

By H. F. BAKER (Cambridge, Engl.).

(Extract from a letter to Professor B. SEGRE, Bologna).

. . . . I have been much interested of late in your paper in the « Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei », II, 1927, p. 204, on the determination of a simplex both inscribed to and circumscribed about a quadric in space [4], of four dimensions, and have learnt much from reading it. The key theorem is that the necessary and sufficient condition for the construction of the simplex is that the four points initially taken on the tangent prime (prime = iperpiano) of the quadric should be in equianharmonic relation (v. your paper, n. 9, p. 209). But the condition for the construction of such an in- and circumscribed simplex was given by me in the « Proc. London Math. Soc. », IX, 1911, p. 193, for space of any dimension r (≥ 4). The form in which it is there left, by no means so simple as that obtained by you for the case $r=4$, leads at once to your form, as I shew below.

Let the $r+1$ homogeneus coordinates of a point in the space $[r]$ be denoted by $x, y, \ldots, u$, the quadric considered having the equation

$$x^2 + y^2 + \ldots + u^2 = 0\,;$$

for two points $(x_i, y_i, \ldots, u_i)$, $(x_j, y_j, \ldots, u_j)$ let c_{ij} denote

$$x_i x_j + y_i y_j + \ldots + u_i u_j .$$

Take r points $(x_1), \ldots, (x_r)$, on the quadric, on the tangent prime at some point of this, so that the determinant

$$C_0 = \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, \ldots, & c_{1r} \\ c_{21}, & c_{22}, \ldots, & c_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r1}, & c_{r2}, \ldots, & c_{rr} \end{vmatrix},$$

where $c_{ij} = c_{ji}$, $c_{ii} = 0$, vanishes. From the space determined by any $(r-1)$ of the r points, another tangent prime can be drawn to the quadric. If the r possible such tangent primes meet in a point of the quadric, this point, with the r points taken, form such a simplex as it is desired to construct. It is shewn in the paper referred to that the necessary and sufficient condition for this is as follows: Let the minors of $r-1$ rows and columns, in the vanishing symmetrical determinant C_0 be denoted by ω_i^2, $\omega_i\omega_j$; consider the quadric of space $[r-2]$, in $r-1$ homogeneous coordinates, whose discriminantal determinant is

$$K = \begin{vmatrix} 0, & c_{12},\dots, & c_{1,r-1} \\ c_{21}, & 0,\dots, & c_{2,r-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{r-1,1} & c_{r-1,2},\dots, & 0 \end{vmatrix},$$

and let the minors of the diagonal elements of this determinant be denoted by $K_1,\dots, K_{r-1}$. It is easy to see that this quadric contains the point whose coordinates are ω_1, $\omega_2,\dots$, ω_{r-1}, namely that we have

$$\sum_1^{r-1}\sum c_{ij}\,\omega_i\,\omega_j = 0.$$

The condition in question is that we may also have

$$\sum_1^{r-1}\sum c_{ij}\,\frac{K_i K_j}{\omega_i\,\omega_j} = 0.$$

When $r=5$, the condition is identically satisfied whatever be the five points taken on the quadric on the tangent prime of the quadric in space [5]. and we thus prove SYLVESTER's theorem of a double six of lines of ordinary space (SYLVESTER, « Math. Papers », II, p. 242; « Compt. Rendus », LII, 1861, p. 977).

When $r=4$, the case considered by you, if for brevity we put $f=c_{23}$, $g=c_{31}$, $h=c_{12}$, $f_1=c_{14}$, $g_1=c_{24}$, $h_1=c_{34}$, the determinant K is

$$\begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix},$$

and K_1, K_2, K_3 are $-f^2$, $-g^2$, $-h^2$. The condition then is that, besides

$$f\omega_2\omega_3 + g\omega_3\omega_1 + h\omega_1\omega_2 = 0,$$

we may also have

$$f\frac{g^2h^2}{\omega_2\omega_3} + g\frac{h^2f^2}{\omega_3\omega_1} + h\frac{f^2g^2}{\omega_1\omega_2} = 0,$$

or, if we write ξ, η, ζ for ω_1, ω_2, ω_3 we have both

$$\frac{f}{\xi} + \frac{g}{\eta} + \frac{h}{\zeta} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\xi}{f} + \frac{\eta}{g} + \frac{\zeta}{h} = 0.$$

It is well known that the line represented by the second of these equations cuts the conic represented by the first in the two Hessian points of the triad on the conic constituted by the angular points of the triangle of reference; either of these points is in equianharmonic relation with the three angular points; further these equations (returning to the original notation) lead to

$$\frac{c_{23}}{\omega_1}=1, \quad \frac{c_{31}}{\omega_2}=\varepsilon, \quad \frac{c_{12}}{\omega_3}=\varepsilon^2,$$

where ε is one of the imaginary cube roots of unity. Then the equations

$$c_{11}\omega_1+c_{12}\omega_2+c_{13}\omega_3+c_{14}\omega_4=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{31}\omega_1+c_{32}\omega_2+c_{33}\omega_3+c_{34}\omega_4=0$$

give

$$c_{14}\omega_4=\omega_2\omega_3, \quad c_{24}\omega_4=\varepsilon\omega_3\omega_1, \quad c_{34}\omega_4=\varepsilon^2\omega_1\omega_2.$$

Hence it follows that the cone, in space $(\xi:\eta:\zeta,\tau)$, expressed by

$$c_{23}\eta\zeta+c_{31}\zeta\xi+c_{12}\xi\eta+\tau(c_{14}\xi+c_{24}\eta+c_{34}\zeta)=0,$$

this being the condition that the point

$$\xi(x_1)+\eta(x_2)+\zeta(x_3)+\tau(x_4)$$

should be on the quadric, becomes transformed, by writing

$$\xi=\omega_1X, \quad \eta=\varepsilon\omega_2Y, \quad \zeta=\varepsilon^2\omega_3Z, \quad \tau=\omega_4T,$$

to

$$YZ+ZX+XY+T(X+\varepsilon^2Y+\varepsilon Z)=0,$$

which puts in most explicit evidence the key discovery of your paper that the generators of this cone, to the four points (x_1), (x_2), (x_2), (x_4) are in equianharmonic relation.

Remark. — It can also be shown, using X, Y, Z, T, U for homogeneous coordinates in the space [4] that, referred to the vertices of an in- and circumscribed simplex of a quadric, the equation of the quadric is capable of the form

$$YZ+ZX+XY+TU+T(X+\varepsilon^2Y+\varepsilon Z)+U(X+\varepsilon Y+\varepsilon^2Z)=0.$$

This is the same as

$$(X-Y-Z)^2+(Y-Z)^2-(Y+Z)^2+(T'-U')^2-(T'+U')^2=0,$$

if

$$T'=\frac{1}{2}(T+X+\varepsilon Y+\varepsilon^2Z), \quad U'=\frac{1}{2}(U+X+\varepsilon^2Y+\varepsilon Z),$$

so that it is easy, on a general quadric

$$X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 = 0,$$

to find such an in- and circumscribed simplex.

That the points of contact of the five prime faces of the first simplex form another such simplex, in- and circumscribed to the first, as well as to the quadric, is put in evidence by the matrix identity $\Omega\Omega_0 = 1$, where

$$\Omega = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & \varepsilon^2, & \varepsilon \\ 1, & 1, & 0, & \varepsilon, & \varepsilon^2 \\ 1, & \varepsilon^2, & \varepsilon, & 0, & 1 \\ 1, & \varepsilon, & \varepsilon^2, & 1, & 0 \end{matrix}\right|, \qquad \Omega_0 = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & \varepsilon, & \varepsilon^2 \\ 1, & 1, & 0, & \varepsilon^2, & \varepsilon \\ 1, & \varepsilon, & \varepsilon^2, & 0, & 1 \\ 1, & \varepsilon^2, & \varepsilon, & 1, & 0 \end{matrix}\right|.$$

Here the columns of Ω_0 give the coordinates of the points of contact of the faces the first simplex, and the rows of Ω are the coefficients in the equations of the faces of the second simplex. We find $(\Omega^2 - 1)(\Omega^3 - 1) = 0$, $|\Omega| = -1$.

Cambridge, 15 January 1937.

Sviluppo in serie e valutazione asintotica del rapporto tra due polinomi consecutivi di JACOBI.

Memoria di G. SANSONE (a Firenze).

Sunto. - *Se* $\{ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \}$ *è la successione dei polinomi di* JACOBI *corrispondente ai parametri* α *e* β, *e se* x *non è interno ad un'ellisse* E *con i fuochi nei punti* -1 *e* $+1$, *l'A. trova lo sviluppo in serie di potenze di* ξ^{-1} $[\xi = x + \sqrt{x^2 - 1},\ |\xi| > 1]$ *di* $\xi^{-1} P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) / P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$; *dimostra poi che se* $1 + d$ *è la somma dei semiassi di* E, *per tutti i punti* x *non interni ad* E *sussiste la formula*

$$\left| \frac{1}{\xi} \frac{P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} - 1 \right| < \frac{1}{n} \left[H + K \left(\frac{3}{d} + \frac{1}{d^2} \right) \right]$$

con H *e* K *costanti indipendenti da* n, *da* x *e da* d.

1. Nella teoria delle equazioni alle differenze ha particolare importanza il seguente teorema di POINCARÉ: Se

$$R_0 = an^p + \dots, \quad R_1 = bn^p + \dots, \quad R_2 = cn^p + \dots$$

sono tre polinomi in n dello stesso grado p, $R_0(n) \neq 0$ per qualsiasi intero non negativo n, se $\{ P_n(x) \}$ è una successione di polinomi definita dalla relazione ricorrente

$$R_0(n) P_{n+2}(x) + R_1(n) P_{n+1}(x) + R_2(n) P_n(x) = 0, \tag{1.1}$$

e se l'equazione

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0 \tag{1.2}$$

ha radici di modulo distinto, allora $\lim_{n \to \infty} P_{n+1}(x)/P_n(x)$ converge in generale verso la radice di modulo maggiore dell'equazione (1.2) ed eccezionalmente verso la radice di modulo minore [[7], [8], [9], [3]] (1).

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia, posta in fondo al lavoro.

Del teorema di POINCARÉ vogliamo qui dare una dimostrazione che, inspirandosi a quella di PICARD [3], riesce assai semplice dal punto di vista didattico.

a) L'equazione (1.2) abbia le radici α e β e sia $|\alpha| > |\beta|$. Poniamo

$$P_{n+1}/P_n = v_n, \tag{1.3}$$

$$X_n = (v_n - \alpha)/(v_n - \beta), \tag{1.4}$$

Poichè per la successione $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ dei polinomi di Jacobi [[2], p. 292]

(1.9) $$P_0 = 1, \quad P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n},$$
$$\alpha > -1, \quad \beta > -1$$

---

dalla (1.1) si ha allora

$$X_{n+1} = \frac{X_n[\alpha\beta R_2 + \beta R_1 + R_0] - [\alpha^2 R_2 + \alpha R_1 + R_0]}{X_n[\beta^2 R_2 + \beta R_1 + R_0] - [\alpha\beta R_2 + \alpha R_1 + R_0]}$$

e perciò

(1.5) $$X_{n+1} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{X_n[1+\varepsilon]+\varepsilon'}{1+\eta+\eta' X_n} = \frac{\beta}{\alpha}X_n + \frac{X_n(\varepsilon-\eta)+\varepsilon'-\eta' X_n^2}{1+\eta+\eta' X_n}\frac{\beta}{\alpha}$$

con

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \eta,\ \eta' = 0(n^{-1}).$$

b) Supponiamo che esistano infiniti indici $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$

$$n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$$

tali che

(1.6) $$|X_{n_p}| \le M \qquad p = 1, 2, \dots;$$

vogliamo allora dimostrare che la successione $\{|X_n|\}$ è limitata e più precisamente esiste un intero N tale che per $n \ge N$ si ha

$$|X_n| \le M.$$

Infatti per $|z| \le M$ si ha

$$0 \le \left|\frac{\beta}{\alpha}\frac{z(\varepsilon-\eta)+\varepsilon'-\eta' z^2}{1+\eta+\eta' z}\right| \le \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \frac{M|\varepsilon-\eta|+|\varepsilon'|+|\eta'|M^2}{1-|\eta|-|\eta'|M}$$

ma l'ultimo termine di questa limitazione tende a zero per $n \to \infty$ e perciò preso il numero $M\left[1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right]$ esiste un n_0 tale che per qualunque $n \ge n_0$ e qualunque sia z, con $|z| \le M$, risulti

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\frac{z(\varepsilon-\eta)+\varepsilon'-\eta' z^2}{1+\eta+\eta' z}\right| < M\left[1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right].$$

Fissiamo un indice $n_p > n_0$, avremo per la (1.6) $|X_{n_p}| \le M$ e per la (1.5)

$$|X_{n_p+1}| \le \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| M + M\left[1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right] = M, \qquad |X_{n_p+1}| \le M$$

e iterando il procedimento

$$|X_{n_p+r}| \le M \qquad r = 1, 2, \dots \qquad [N = n_p].$$

c) Abbiamo allora che se la successione $\{|X_n|\}$ non è limitata è $\lim_{n\to\infty}|X_n| = +\infty$ e per la (1.4) $\lim_{n\to\infty} v_n = \beta$.

d) La successione $\{|X_n|\}$ sia limitata, $|X_n| \le M$, vogliamo dimostrare che si ha $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ e perciò $\lim_{n\to\infty} v_n = \alpha$.

Proviamo preliminarmente che fissato comunque un numero positivo σ non può esistere un indice n_0 tale che per $n \ge n_0$ sia

(1.7) $$0 < \sigma \le |X_n| \le M, \qquad n \ge n_0.$$

Questa condizione soddisfatta si avrebbe

(1.8) $$X_{n+1} = X_n \frac{\beta}{\alpha}\frac{1+\varepsilon+\varepsilon'/X_n}{1+\eta+\eta' X_n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\varepsilon+\varepsilon'/X_n}{1+\eta+\eta' X_n} = 1,$$

sussiste la relazione ricorrente [[6], p. 378]

(1.10) $$P_n = [A_n x + B_n] P_{n-1} - C_n P_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

con

(1.11) $$A_n = \frac{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)}{2n(n+\alpha+\beta)},$$

$$B_n = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2n} \frac{2n+\alpha+\beta-1}{(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}, \quad C_n = \frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}$$

e perciò $p = 3$, $a = 4$, $b = -8x$, $c = 4$, abbiamo che se x è tale che l'equazione

$$\xi^2 - 2x\xi + 1 = 0$$

ha radici di modulo diverso, cioè *se* x *non è reale, o se reale non è compreso tra* -1 *e* 1, fissato il segno di $\sqrt{x^2-1}$ in modo che posto $\xi = x + \sqrt{x^2-1}$ sia $|\xi| > 1$ si avrà

(1.12) $$\lim_{n \to \infty} P_{n+1}(x)/P_n(x) = \xi$$

ed eccezionalmente il limite riuscirà uguale ad $1/\xi$.

Nelle ipotesi dichiarate l'inesistenza di questo caso eccezionale può dedursi o da un teorema generale sulle successioni di polinomi ortogonali e normali [[5], p. 52], o dall'osservare che la serie di JACOBI

$$P_0(x) + P_1(x)\rho + P_2(x)\rho^2 + \ldots =$$
$$= \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2x\rho+\rho^2}} (1 - \rho + \sqrt{1-2x\rho+\rho^2})^{-\alpha} (1 + \rho + \sqrt{1-2x\rho+\rho^2})^{-\beta}$$

ha il raggio di convergenza $1/\xi$ [[1]] o anche dalla seguente formula di ap-

---

quindi per n sufficientemente grande, $n > N$

$$|(1+\varepsilon+\varepsilon'/X_n)/(1+\eta+\eta' X_n)| < h$$

dove con h indichiamo una quantità > 1 tale che

$$h\,|\beta/\alpha| < q' < 1;$$

si avrebbe allora dalla (1.8) per $n > N$

$$|X_{n+1}| < h\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| |X_n| < q' |X_n|, \qquad |X_{n+p}| < q'^p |X_n|$$

$$\lim_{n\to\infty} |X_n| = 0$$

e ciò è contro la (1.7).

Ne viene che se la successione $\{X_n\}$ è limitata, comunque piccolo si fissi un numero positivo σ esistono infiniti indici $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ tali che $|X_{n_p}| < \sigma$ e per l'osservazione fatta in *b)* esiste un N_σ tale che per $n > N_\sigma$ è $|X_n| < \sigma$ perciò $\lim_{n\to\infty} |X_n| = 0$, e $\lim_{n\to\infty} v_n = \alpha$.

prossimazione asintotica dei polinomi $P_n(x)$ di DARBOUX [[6], p. 24, (17)]

$$P_n(x) = \varphi(\xi) n^{-\frac{1}{2}} \xi^n (1 + \varepsilon)$$

dove $\varphi(\xi)$ indica una funzione indipendente da n, e supposto fisso ξ, è $\varepsilon = 0(n^{-1})$.

Noi daremo qui preventivamente lo sviluppo in serie di potenze di ξ^{-1} di $\xi^{-1} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)/P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e proveremo poi che *per tutti i punti* x *non interni all'ellisse con i fuochi nei punti* -1 *e* 1 *e con la somma dei semiassi uguale a* $1 + \mathrm{d}$ $(\mathrm{d} > 0)$ *sussiste la limitazione*

$$\left| \frac{1}{\xi} \frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)} - 1 \right| < \frac{1}{n}\left[H + K\left(\frac{3}{d} + \frac{1}{d^2}\right)\right]$$

con H *e* K *costanti indipendenti da* n, *da* x *e da* d, (ma dipendenti da α e β) e da questo resultato consegue immediatamente la (1.12).

2. **Sviluppo in serie di** $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)/\xi P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. — I polinomi P_n soddisfano l'equazione ipergeometrica [[2], p. 293]

(2.1) $$(1 - x^2)P_n'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]P'_n + n(n + \alpha + \beta + 1)P_n = 0;$$

fra essi sussiste la relazione ricorrente (1.10) e la relazione [[6] p. 378; [10]]

(2.2) $$P_n = \xi_n P'_{n+1} + \eta_n P'_n + \zeta_n P'_{n-1}$$

con

(2.3) $$\xi_n = \frac{2(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)},$$

$$\eta_n = \frac{2(\alpha - \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}, \quad \zeta_n = -\frac{2(n + \alpha)(n + \beta)}{(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)}.$$

Derivando la (2.2), tenuto conto della (2.1) ed esprimendo con la (1.10) P_{n-1} per P_n e P_{n+1}, con semplici calcoli si trova

(2.4) $$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \frac{(2n + \alpha + \beta + 2)x + (\alpha - \beta)}{2(n + 1)} + \frac{1}{2} \frac{2n + \alpha + \beta + 2}{n + \alpha + \beta + 1} \frac{x^2 - 1}{n + 1} \frac{P'_n(x)}{P_n(x)},$$

la quale per $\alpha = \beta = 0$ si riduce alla ben nota relazione tra i polinomi di LEGENDRE [4]

(2.5) $$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = x + \frac{x^2 - 1}{n + 1} \frac{P'_n(x)}{P_n(x)}.$$

Siano $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{n,n}$ gli n zeri di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, essi sono tutti distinti e appartenenti all'intervallo $(-1, 1)$ [[5], p. 38, teor. V] e supposto

(2.6) $$x_{1,n} > x_{2,n} > \dots > x_{n,n}$$

e posto anche

(2.7) $$x_r = x_{r,n} = \cos \varphi_{r,n} = \cos \varphi_r, \quad 0 < \varphi_{r,n} < \pi$$

(2.8) $$x + \sqrt{x^2 - 1} = \xi, \quad [\,|\xi| > 1, \quad x - \sqrt{x^2-1} = \xi^{-1}]$$

abbiamo nell'ipotesi $|\xi| > 1$

$$\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x - x_r} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x - \cos\varphi_r} = \sum_{r=1}^{n} \frac{2}{\xi - \xi^{-1}} \left[\frac{\xi}{\xi - e^{i\varphi_r}} + \frac{\xi^{-1}}{e^{i\varphi_r} - \xi^{-1}} \right] =$$

$$= \frac{2}{\xi - \xi^{-1}} \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{i\varphi_r}/\xi} - \frac{\xi^{-1}}{e^{i\varphi_r}} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{1 - \xi^{-1} e^{-i\varphi_r}} \right] =$$

$$= \frac{2}{\xi - \xi^{-1}} \sum_{r=1}^{n} \left[1 + \frac{2\cos\varphi_r}{\xi} + \frac{2\cos 2\varphi_r}{\xi^2} + \frac{2\cos 3\varphi_r}{\xi^3} + \dots \right],$$

talchè posto

(2.9) $$s_{k,n}^{(\alpha,\beta)} = s_{k,n} = \sum_{r=1}^{n} \cos k\varphi_{r,n} = \sum_{r=1}^{n} \cos k\varphi_r$$

si avrà

$$\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \frac{4}{\xi - \xi^{-1}} \left[\frac{n}{2} + \frac{s_{1,n}}{\xi} + \frac{s_{2,n}}{\xi^2} + \frac{s_{3,n}}{\xi^3} + \dots \right]$$

e la (2.4) dà allora

(2.10) $$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \frac{2n + \alpha + \beta + 2}{4(n+1)} (\xi + \xi^{-1}) + \frac{\alpha - \beta}{2(n+1)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{2n + \alpha + \beta + 2}{(n+1)(n + \alpha + \beta + 1)} (\xi - \xi^{-1}) \left[\frac{n}{2} + \frac{s_{1,n}}{\xi} + \frac{s_{2,n}}{\xi^2} + \frac{s_{3,n}}{\xi^3} + \dots \right].$$

Si ha dalle (1.9)

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \binom{2n + \alpha + \beta}{n} x^n + \frac{1}{2^n} (\alpha - \beta) \binom{2n + \alpha + \beta - 1}{n - 1} x^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \binom{2n + \alpha + \beta - 2}{n - 2} [(\alpha - \beta)^2 - (2n + \alpha + \beta)] x^{n-2} + \dots;$$

perciò

$$S_{1,n} = x_{1,n} + x_{2,n} + \dots + x_{n,n} = - \frac{n(\alpha - \beta)}{2n + \alpha + \beta},$$

$$S_{2,n} = x^2_{1,n} + x^2_{2,n} + \dots + x^2_{n,n} = n \frac{(n + \alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 + (n-1)(2n + \alpha + \beta)^2}{(2n + \alpha + \beta)^2 (2n + \alpha + \beta - 1)},$$

da cui

$$s_{1,n} = S_{1,n} = - \frac{n(\alpha - \beta)}{2n + \alpha + \beta},$$

$$s_{2,n} = 2S_{2,n} - n = n \frac{2(\alpha - \beta)^2 (n + \alpha + \beta) - (\alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)^2}{(2n + \alpha + \beta)^2 (2n + \alpha + \beta - 1)},$$

e dalla (2.10), nell'ipotesi $|\xi| = |x + \sqrt{x^2 - 1}| > 1$, si ottiene per $P_{n+1}(x)/P_n(x)$ lo sviluppo cercato

$$
\begin{aligned}
(2.11) \qquad \frac{1}{\xi}\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}}{P_n^{(\alpha,\beta)}} = 1 - \frac{2n - (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta-2)}{4(n+1)(n+\alpha+\beta+1} + \\
+ \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\frac{2n+\alpha+\beta+1}{(n+1)(2n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)}\frac{1}{\xi} + \\
+ \frac{2n+\alpha+\beta+2}{4(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}\left[\frac{(\alpha+\beta)^2-1}{2n+\alpha+\beta-1} + \frac{4n(n+\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2}{(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)}\right]\frac{1}{\xi^2} + R(\xi)
\end{aligned}
$$

con

$$
(2.12) \qquad R(\xi) = \frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}\left[\frac{s_{3,n}-s_{1,n}}{\xi^3} + \frac{s_{4,n}-s_{2,n}}{\xi^4} + \ldots\right].
$$

3. Valutazione asintotica del rapporto $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)/P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ nell'ipotesi $|\alpha| \leq 1/2$, $|\beta| \leq 1/2$. — Se nella (2.1) poniamo

$$
x = \cos\varphi, \quad P_n(\cos\varphi) = \left(\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}} u
$$

si ottiene

$$
(3.1) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left\{\left[n + \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)\right]^2 + \frac{1/4-\alpha^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}} + \frac{1/4-\beta^2}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right\} u = 0
$$

e supposto $|\alpha| \leq 1/2$, $|\beta| \leq 1/2$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1/2$, confrontando quest'ultima con l'equazione

$$
(3.2) \qquad \frac{d^2U}{d\varphi^2} + \left[n + \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)\right]^2 U = 0,
$$

col teorema di STURM (¹) troviamo che si ha

$$
(3.3) \qquad P_n(\cos\varphi_{r,n}) = 0 \qquad\qquad r = 1, 2, \ldots, n
$$

per gli n valori $\varphi_{r,n}$ soddisfacenti le limitazioni

$$
(3.4) \qquad \frac{r-1}{n+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)}\pi < \varphi_{r,n} < \frac{r}{n+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)}\pi.
$$

(¹) La limitazione per $\varphi_{1,n}$ si ottiene applicando il teorema di confronto di STURM nella forma enunciata recentemente da G. SZEGÖ [11]; per il caso $|\alpha| \leq 1/2$, $|\beta| \leq 1/2$, $\alpha = \beta$, cioè per il « *caso principale* » dei polinomi ultrasferici cfr. anche L. FEJÉR, [12].

È noto poi che si ha

$$P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)=\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\cos n\varphi;$$

$$P_n^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)=\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\left[\cos\frac{\varphi}{2}\right]^{-1}\cos\frac{2n+1}{2}\varphi,$$

$$P_n^{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)=\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\left[\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right]^{-1}\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\varphi;$$

$$P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)=\frac{(2n+1)!!}{2^n n!}\,\frac{\operatorname{sen}(n+1)\varphi}{\operatorname{sen}\varphi},$$

e perciò la (3.4) sussiste per $\alpha=\beta=-1/2$, $\alpha=-\beta=-1/2$; mentre nei casi $\alpha=-\beta=1/2$, $\alpha=\beta=1/2$ nella stessa (3.4) al secondo segno $<$ va sostituito il segno $=$.

Proveremo ora che esiste una costante assoluta A [indipendente da n ma dipende da α e β] tale che

$$(3.5)\qquad |s_{k,n}|<\frac{A}{2}(k+1)\qquad k=1,\ 2,\ldots\ ^{(1)}.$$

Posto

$$\delta=\pi/[n+(\alpha+\beta+1)/2],\quad a_r=r\delta$$

si ha

$$\cos kx=\cos k\varphi_r+2\operatorname{sen}k\frac{\varphi_r+x}{2}\operatorname{sen}k\frac{\varphi_r-x}{2},$$

quindi integrando tra a_{r-1} e a_r

$$(3.6)\qquad \frac{\operatorname{sen}ka_r-\operatorname{sen}ka_{r-1}}{k}=\delta\cos k\varphi_r+2\int_{a_{r-1}}^{a_r}\operatorname{sen}k\frac{\varphi_r+x}{2}\operatorname{sen}k\frac{\varphi_r-x}{2}\,dx;$$

ma è

$$2\left|\int_{a_{r-1}}^{a_r}\operatorname{sen}k\frac{\varphi_r+x}{2}\operatorname{sen}k\frac{\varphi_r-x}{2}\,dx\right|\le k\int_{a_{r-1}}^{a_r}|\varphi_r-x|\,dx\le\frac{k}{2}\delta^2$$

e dalla (3.6) sommando rispetto all'indice r da 1 a n otteniamo

$$\frac{\operatorname{sen}kn\delta}{k}=\delta s_{k,n}+\frac{1}{2}\theta kn\delta^2,\quad |\theta|<1,$$

e perciò

$$(3.7)\qquad s_{k,n}=\frac{\operatorname{sen}kn\delta}{k\delta}-\frac{\theta}{2}kn\delta.$$

(1) Limitandoci soltanto ai valori $k=n,\ n+1,\ldots$ la (3.5) è immediata; si ha infatti $|s_{k,n}|\le n$ per $k\ge n$.

Si ha

$$kn\delta = k\left[\pi - \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)\delta\right],$$

$$\left|\frac{\operatorname{sen} kn\delta}{k\delta}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{k}{2}(\alpha+\beta+1)\delta}{\frac{k}{2}(\alpha+\beta+1)\delta}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)\right| \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1),$$

$$n\delta = 0(1),$$

e dalla (3.7) segue la (3.5).

Tenuto ora conto della (3.5) possiamo maggiorare il termine $R(\xi)$ della (2.11); abbiamo infatti

$$|R(\xi)| \leq \frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)} A\left[\frac{3}{|\xi|^3} + \frac{4}{|\xi|^4} + \ldots\right]$$

$$(3.8) \qquad |R(\xi)| \leq \frac{2n+\alpha+\beta+2}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)} A\left[\frac{3}{|\xi|^2[|\xi|-1]} + \frac{1}{|\xi|^2[|\xi|-1]^2}\right].$$

Supposto infine che il punto x si muova esternamente o sul contorno dell'ellisse E con i fuochi nei punti -1 e 1 e con la somma dei semiassi uguale a $1+d$, $[d>0]$ si avrà $|\xi|-1 \geq d$ e dalle (2.11), (2.12), (3.8) otteniamo *per tutti i punti* x *non interni ad* E

$$(3.9) \qquad \left|\frac{1}{\xi}\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)} - 1\right| < \frac{1}{n}\left[H + K\left(\frac{3}{d} + \frac{1}{d^2}\right)\right]$$

con H *e* K *costanti indipendenti da* n, *da* x *e da* d, e la (3.9) esprime appunto il resultato che volevamo stabilire.

4. Dimostrazione della formula precedente per $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. — Abbiamo dedotto la (3.9) servendoci unicamente delle (2.11), (2.12) e della (3.5), sarà perciò dimostrata la (3.9) se proviamo che, comunque fissate le costanti α e $\beta > -1$, per le corrispondenti somme $s_{k,n}^{(\alpha,\beta)}$ vale la (3.5).

Procederemo per induzione, supposto cioè che si abbia

$$(4.1) \qquad |s_{k,n}^{(\alpha,\beta)}| < \frac{A}{2}(k+1)$$

dimostreremo che per le somme $s_{k,n}^{(\alpha,\beta+1)}$, $s_{k,n}^{(\alpha+1,\beta)}$ sussiste una limitazione analoga.

Avendosi

$$P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha+1)}(-x)$$

basterà evidentemente limitarci a dimostrare che supposta vera la (4.1) si ha anche

$$\left| s_{k,n}^{(\alpha,\beta+1)} \right| < \frac{B}{2}(k+1) \tag{4.2}$$

con B costante indipendente da n.

Poichè gli zeri $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ di $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ separano gli zeri $y_1 > y_2 > > \dots y_n > -1$ di $(1+x)\,P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)$ [[5], p. 38, teor. VI] abbiamo che posto

$$x_r = \cos\varphi_r, \quad y_r = \cos\psi_r, \qquad 0 < \varphi_r, \ \psi_r < \pi,$$

è

$$0 < \psi_1 < \varphi_1 < \psi_2 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{r-1} < \psi_r < \varphi_r < \dots < \psi_n < \varphi_n < \pi.$$

Si ha da qui

$$\cos k\psi_r = \cos k\varphi_r + 2 \operatorname{sen} k \frac{\psi_r + \varphi_r}{2} \operatorname{sen} k \frac{\varphi_r - \psi_r}{2},$$

e sommando rispetto all'indice r da 1 a n

$$\left| s_{k,n}^{(\alpha,\beta+1)} - s_{k,n}^{(\alpha,\beta)} \right| < 2k \sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r - \psi_r}{2} < k\pi < (k+1)\pi,$$

quindi

$$\left| s_{k,n}^{(\alpha,\beta+1)} \right| < \frac{A + 2\pi}{2} (k+1),$$

cioè la (4.2).

Dalle cose dette segue che la (4.1) è vera per qualunque coppia (α, β) tale che $\alpha \geq -1/2$, $\beta \geq -1/2$; d'altra parte, poichè il ragionamento ora fatto può invertirsi, cioè supposta vera la (4.2) e supposto anche $\alpha > -1$, $\beta > -1$ dalla (4.2) può dedursi la (4.1), ne viene che la (4.1) e perciò la (3.9) sussiste per qualunque coppia α, β con $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

BIBLIOGRAFIA

1. C. G. J. JACOBI: *Ges. Werke*; Bd. 6, p. 194, (Berlin, 1891).

2. G. PÓLYA und G. SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 2 Bd., (Berlin, 1925), p. 292, p. 293.

3. E. PICARD: *Traité d'Analyse*; T. 3, (Paris, 3ª ed.. 1928), p. 420.

4. E. W. HOBSON: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, (Cambridge, 1931), p. 33, form. (31).

5. J. SHOHAT: *Mémorial des Sciences Mathématiques*. Fasc. LXVI, (Paris, 1934); *Théorie générale des polynomes ortogonaux de Tchebichef*, p. 38, théor. V et VI, p. 52.

6. G. Darboux: *Mémoire sur l'approximation des fonction de très-grands nombres, et sur une classe étendue de developpements en séries,* « Journ. de Math. » (3), 4, (1878), (pp. 5-56; 377-416), p. 24, form. (17), p. 378.

7. H. Poincaré: *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies,* « Amer. Journ. of. Math. », VII, (1885), (pp. 203-258), p. 209.

8. E. B. Van Vleck: *On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values,* « Trans. of. the Amer. Soc. », V (1904), (pp. 253-262), p. 255.

9. S. Pincherle: *Studio sopra un teorema del Poincaré relativo alle equazioni ricorrenti,* « Rend. R. Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna », (2), IX, (1904-05), pp. 66-73.

10. A. Zygmund: *Sur la théorie riemannienne de certains systèmes ortogonaux,* II, « Prace-Mat. Fiz. », 39 (1932), (pp. 73-117), p. 91.

11. G. Szegö: *Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions,* « Trans. of the Am. Soc. », 39 (1936), (pp. 1-17), p. 3 (§ 1.1).

12. L. Fejér: *Bestimmung von Grenzen für die Nullstellen des Legendreschen Polynoms aus der Stieltjesschen Integraldarstellung desselben*; « Monatsh. für Math. », 43 (1936), (pp. 193-209), p. 208.

On a class of metric spaces admitting simply transitive groups of motions.

By JACK LEVINE (to Raleigh, N. C. - (U. S. A.))

1. Introduction. — It has been shown (1) that if a metric space, V_n, admits a simply transitive group of motions, then it also admits an orthogonal ennuple whose RICCI coefficients of rotation (2), γ_{ijk}, are constants, and conversely. We investigate here the metric spaces V_n admitting an n–tuply orthogonal system of hypersurfaces such that the γ_{ijk} associated with the normal congruences (3) are constant. Such V_n, by the above theorem, will then admit simply transitive groups of motions.

2. The General Case. — If in the coordinate system in which the congruences of the normal ennuple are taken as parametric we put

$$g_{ij} = e_i \delta^i_j H^2_i, \qquad (e_i = \pm 1), \tag{2.1}$$

then we have (4)

$$e_i \gamma_{hii} = \frac{1}{H_h H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^h}, \qquad (h \neq i), \tag{2.2}$$

the remaining γ's being zero. Geometrically, this means that the radii of principal normal curvature of the orthogonal hypersurfaces are constant. If r_{ij} is the radius of principal normal curvature of $x^i =$ const. for the curve of parameter x^j, then (5)

$$\frac{1}{r_{ij}} = - e_j \gamma_{ijj}.$$

We wish to solve (2.2) for the H_i assuming the γ's are constants. We

(1) G. D. MATTIOLI, « Atti del R. Istituto Veneto », 89_2, pp. 97-105 (1929). G. VRANCEANU, « Comptes Rendus », 189, pp. 386-389 (1929).

(2) L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, p. 97. We refer to this book as RG.

(3) RG, p. 114.

(4) RG, p. 119.

(5) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. 2, p. 472 (1923).

put $a_{ih} = c_i\gamma_{hii}$, and (2.2) can then be written

$$\frac{\partial H_i}{\partial x^h} = a_{ih} H_h H_i, \qquad (h \neq i). \tag{2.3}$$

The integrability conditions of (2.3) are

$$a_{ih} a_{hj} - a_{ij} a_{jh} = 0, \qquad (h, i, j \neq). \tag{2.4}$$

(We assume $n > 2$, the case $n = 2$ being treated later). We shall consider several cases depending on the number of a_{ij} which are zero.

CASE I. - All $a_{ij} \neq 0$.

From (2.4) we then have

$$\frac{a_{ih}}{a_{jh}} = \frac{a_{ij}}{a_{hj}}, \quad \frac{a_{hi}}{a_{ji}} = \frac{a_{hj}}{a_{ij}}.$$

So

$$\frac{a_{jh}}{a_{ih}} = \frac{a_{ji}}{a_{hi}} = \frac{a_{ij}}{a_{hj}} = \frac{a_{ih}}{a_{jh}},$$

which gives $a_{ih}^2 = a_{jh}^2$, or

$$a_{ih} = \pm a_{jh}, \qquad (h, i, j \neq).$$

We can therefore put $a_{ij} = \pm a_j$ where a_j are n non-zero constants. We shall now show that for $n > 3$, we must use the plus sign only, i. e., $a_{ij} = + a_j$. Consider then any three of the a_{ih} for h fixed, say, $a_{ih}, a_{jh}, a_{kh}, (h, i, j, k \neq)$, and suppose $a_{ih} = a_{jh} = - a_{kh}$, (two of the a's must have the same sign). Then

$$\frac{a_{ih}}{a_{jh}} = \frac{a_{jh}}{a_{ih}} = \frac{a_{ij}}{a_{hi}} = 1,$$

$$\frac{a_{ih}}{a_{kh}} = \frac{a_{kh}}{a_{ih}} = \frac{a_{ki}}{a_{hi}} = \frac{a_{ik}}{a_{hk}} = \frac{a_{jh}}{a_{kh}} = \frac{a_{jk}}{a_{hk}} = -1.$$

Hence

$$\frac{a_{jk}}{a_{ik}} = \frac{a_{ji}}{a_{ki}} = 1,$$

or $a_{ji} = a_{hi} = a_{ki}$ from the first and third sets of equations and $a_{ki} = - a_{hi}$ from the second. This gives a contradiction to $a_{ij} \neq 0$, and so $a_{ij} = a_j$. The system (2.3) thus becomes

$$\frac{\partial H_i}{\partial x^h} = a_h H_h H_i, \qquad (h \neq i). \tag{2.5}$$

By expressing the components R_{hijk} of the curvature tensor in terms of the H_i and their derivatives and then substituting for these derivatives by means of (2.5) it is found that the V_n determined by the H_i is of constant curvature [6]. We state this result in the following form.

If a V_n, $(n > 3)$, *admits an* n*-tuply orthogonal system of hypersurfaces whose radii of principal normal curvature are non-zero constants, the* V_n *is of constant curvature.*

It is consequently unnecessary to solve (2.5), but as similar equations are encountered in later cases we give here briefly the solution of (2.5) for the H_i. From (2.5) we obtain $\partial \log (H_i/H_j)/\partial x^h = 0$, $(h, i, j \neq)$, and so we can write [7]

$$\log \frac{H_i}{H_j} = \theta_{ij}(x^i, x^j) = -\theta_{ij}, \qquad (i \neq j),$$

$$\theta_{ij} + \theta_{jk} + \theta_{ki} = 0, \qquad (i, j, k \neq).$$

On differentiating this last equation with respect to x^i and x^j we obtain $\partial^2\theta_{ij}/\partial x^i \partial x^j = 0$ the solutions of which can be written $\theta_{ij} = \theta_i(x^i) - \theta_j(x^j)$. We then obtain $H_i/\eta_i(x^i) = H_j/\eta_j(x^j) = \tau$, say, or $H_i = \tau\eta_i$. Substituting these values for H_i in (2.5) gives $\tau^{-1} = -\sum\limits_i a_i \int \eta_i dx^i$, and

$$H_i = -\frac{1}{a_i} \frac{\Phi'_i}{\Sigma\, \Phi_j(x^j)}, \tag{2.6}$$

where

$$\Phi_i(x^i) = a_i \int \eta_i dx^i.$$

Under the coordinate transformation $\bar{x}^i = \Phi_i/a_i$, the $\bar{g}_{ij}$ have the form

$$\bar{g}_{ij} = \frac{e_i \delta^i_j}{(\sum\limits_h a_h \bar{x}^h)^2},$$

this being one of the forms for the metric of a V_n of constant curvature K which in this case is [8] $K = -e_i a_i^2$.

3. **Special Cases.** – In the following cases to be considered we assume some of the $a_{ij} = 0$, and that at least two of the H's are equal. Without this last assumption there appears to be no systematic method for imposing

(6) RG, pp. 84, 119.

(7) Troughout this paper all functions are to be analytic in their arguments, and an expression like $\Phi_i(x^i)$ indicates Φ_i is a function of the variable x^i only.

(8) RG, p. 85.

restrictions on the a_{ij} other than those of case I. We thus put

$$H_1 = H_2 = \dots = H_r = H, \qquad (2 \leq r \leq n-2),$$

(the cases $r = n \quad 1$ and $r = n$ are treated later). We let small Greek letters have the range $1, \dots, r$. If in (2.3) we take $i = \alpha$, we get

$$\frac{1}{HH_h}\frac{\partial H}{\partial x^h} = a_{\alpha h} \equiv a_h,$$

since the first member of the above equation is independent of α. We now let large Latin letters have the range of all indices for which $a_h \neq 0$, and small Latin letters from a through g the range for which $a_h = 0$, (in both cases the a_α are not to be included), the indices from h through z are to have the range $1, \dots, n$. We thus divide the a_h in three groups, a_α, a_I, $a_b = 0$. If there are t indices in the range for a_I, and s in the range for a_b, then $r + s + t = n$.

We now divide the system (2.3) into nine sets

$$\text{(a)}\ \frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = a_\alpha, \qquad \text{(d)}\ \frac{1}{HH_I}\frac{\partial H_I}{\partial x^\alpha} = a_{I\alpha}, \qquad \text{(g)}\ \frac{1}{HH_b}\frac{\partial H_b}{\partial x^\alpha} = a_{b\alpha},$$

$$\text{(b)}\ \frac{1}{HH_I}\frac{\partial H}{\partial x^I} = a_I, \qquad \text{(e)}\ \frac{1}{H_I H_J}\frac{\partial H_J}{\partial x^I} = a_{JI},\ (I \neq J), \qquad \text{(h)}\ \frac{1}{H_b H_c}\frac{\partial H_b}{\partial x^c} = a_{bc},\ (b \neq c),$$

$$\text{(c)}\ \frac{1}{HH_a}\frac{\partial H}{\partial x^a} = 0, \qquad \text{(f)}\ \frac{1}{H_b H_J}\frac{\partial H_J}{\partial x^b} = a_{Jb}, \qquad \text{(i)}\ \frac{1}{H_I H_b}\frac{\partial H_b}{\partial x^I} = a_{bI}.$$

If s or t is 0 or 1 certain of the above equations will not be present.

CASE IIa. - At least one $a_\alpha \neq 0$, $t > 1$, $s > 1$, $a_{bc} \neq 0$.

By a proper choice of the indices in (2.4) we find

$$a_{I\alpha} = a_\alpha, \quad a_{IJ} = a_J, \quad a_{Ab} = a_{b\alpha} = a_{bI} = 0.$$

These values are to be substituted in the above sets. From (a) and (c) we get $H = 1/(f(x^I) - a_\alpha x^\alpha)$, where f is to be determined. Then from (b) we have

$$H_I = -\frac{1}{a_I}\frac{1}{f - a_\alpha x^\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^I},$$

which satisfies (d) identically. Substituting for H_I in (e) gives $\partial^2 f / \partial x^I \partial x^J = 0$, or $f = \sum_I \Phi_I(x^I)$. Hence

$$H = \frac{1}{\Sigma\,\Phi_I(x^I) - a_\alpha x^\alpha}, \quad H_I = -\frac{1}{a_I}\frac{\Phi'_I}{\Sigma\,\Phi_J - a_\alpha x^\alpha}.$$

From (g) and (i) we see $H_a = H_a(x^b)$, and (h) are exactly the same form as (2.3). Hence if $s > 3$ we may put $a_{bc} = \alpha_c$, and then

$$H_a = -\frac{1}{\alpha_a}\frac{\Phi'_a}{\Sigma\,\Phi_b(x^b)}.$$

If $s = 2$ or $s = 3$ the values of the H_a will be the same as for the H_i for $n = 2$ and $n = 3$, these cases are treated later.

CASE IIb. - At least one $a_\alpha \neq 0$, $t > 1$, $a_{bc} = 0$.

From (2.4) we obtain

$$a_{I\alpha} = a_\alpha, \quad a_{IJ} = a_J, \quad a_{Ab} = 0, \quad \frac{a_{bJ}}{a_J} = \frac{a_{bI}}{a_I} \equiv -\rho_b = \frac{a_{b\alpha}}{a_\alpha}, \qquad (\text{if } a_\alpha \neq 0).$$

Using these values in (a)-(i) we find H and H_I have the same values as for case IIa. From (g) and (i) we then obtain

$$H_a = [\sum_I \Phi_I(x^I) - a_\alpha x^\alpha]^{\rho_a}\Phi_a(x^a).$$

In this case, the hypersurfaces $x^a = \text{const.}$ are totally geodesic [9].

CASE IIIa. - All $a_\alpha = 0$, $t > 1$, $s > 1$, $a_{bc} \neq 0$, $a_{IJ} \neq 0$.

From (2.4) we obtain

$$a_{I\alpha} = a_{Ia} = a_{b\alpha} = a_{bA} = 0.$$

From (a) and (c) we then get $H = 1/f(x^A)$, which when substituted in (b) gives

$$H_A = -\frac{1}{a_A}\frac{\partial\sigma}{\partial x^A}, \qquad (\sigma = \log f).$$

And this value used in (e) gives

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^A\,\partial x^B} = \rho_{AB}\frac{\partial\sigma}{\partial x^A}\frac{\partial\sigma}{\partial x^B}, \qquad (A \neq B), \tag{3.1}$$

where

$$\rho_{AB} = \rho_{BA} = -\frac{a_{BA}}{a_A} = -\frac{a_{AB}}{a_B}.$$

The integrability conditions of these equations in σ are

$$\rho_{BC}(\rho_{AB} - \rho_{AC}) = 0, \qquad (A, B, C \neq),$$

i. e.,

$$\rho_{AB} = \rho_{AC} = \rho, \quad \text{say},$$

and $\rho \neq 0$ since $a_{IJ} \neq 0$.

If we place $\sigma = \frac{1}{\rho}\log\frac{c}{\tau}$, where c is a constant, (3.1) reduces to $\partial^2\tau/\partial x^A\partial x^B = 0$.

---

(9) RG, p. 183.

Hence

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \log \frac{c}{\Sigma\, \Phi_A(x^A)},$$

which gives

$$H = \frac{1}{k} [\Sigma\, \Phi_J(x^I)]^{\frac{1}{\rho}}, \quad H_I = \frac{1}{\rho a_I} \frac{\Phi'_I}{\Sigma\, \Phi_J}, \qquad (k = \text{const.}).$$

If $t = 2$ we can put $\rho_{AB} = \rho$ in (3.1) and proceed as above. If $s > 3$ we may put $a_{bc} = \alpha_c$, and obtain

$$H_a = -\frac{1}{\alpha_a} \frac{\Phi'_a}{\Sigma\, \Phi_b(x^b)},$$

$x^\alpha =$ const. are totally geodesic.

CASE IIIb. - All $a_\alpha = 0$, $t > 1$, $a_{bc} = 0$, $a_{IJ} \neq 0$.

From (2.4) we have $a_{I\alpha} = a_{Ib} = a_{b\alpha} = 0$.

It is seen that H and H_I have the same form as in IIIa. From (i) we then get

$$H_a = (\Sigma \Phi_I)^{-\frac{\rho_a}{\rho}} \Phi_a(x^a),$$

where ρ_a and ρ are defined as in IIb and IIIa.

CASE IIIc. - All $a_\alpha = 0$, $t > 1$, $s > 1$, $a_{bc} \neq 0$, $a_{IJ} = 0$.

We proceed as in IIIa. Now $\rho = 0$ and (3.1) gives $\sigma = \Sigma\, \Phi_I$, so

$$H = e^{-\Sigma\, \Phi_I(x^I)}, \quad H_I = -\frac{\Phi'_I}{a_I}.$$

If $s > 3$, we have the same solutions for H_a as in IIIa. For $s = 2$ or $s = 3$ we use the forms as given in the cases $n = 2$ and $n = 3$.

CASE IIId. - All $a_\alpha = 0$, $t > 1$, $a_{bc} = a_{IJ} = 0$.

We find H and H_I have the same form as for IIIc. From (1) we then get

$$H_a = e^{\rho_a \Sigma\, \Phi_I(x^I)} \Phi_a(x^a).$$

If in IIa, IIb, IIIc, and IIId we replace the condition $t > 1$ by $t = 0$ or $t = 1$, it is found that the H's have the same form as for $t > 1$ (with one exception). For $t = 0$ we replace $\Sigma\, \Phi_I$ by a constant. The exception occurs in IIId when we use $t = 0$. The value of H_a is given by

$$H_a = e^{\frac{1}{k} \sum_\alpha a_{a\alpha} x^\alpha} \Phi_a(x^a).$$

If $r = n - 1$, we have the equations

$$\frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = a_\alpha, \quad \frac{1}{HH_n} \frac{\partial H_n}{\partial x^\alpha} = a_{n\alpha}, \quad \frac{1}{HH_n} \frac{\partial H}{\partial x^n} = a_n\,.$$

If $a_n \neq 0$, we obtain

$$H = \frac{1}{\Phi(x^n) - a_\alpha x^\alpha}, \quad H_n = \frac{-\Phi'}{a_n(\Phi - a_\alpha x^\alpha)}.$$

If $a_n = 0$, and at least one $a_\alpha \neq 0$,

$$H = \frac{1}{k - a_\alpha x^\alpha}, \quad H_n = (k - a_\alpha x^\alpha)^{\rho_n}\Phi(x^n), \quad \rho_n = -\frac{a_{n\alpha}}{a_\alpha}, \qquad (\text{for } a_\alpha \neq 0).$$

If $a_n = a_\alpha = 0$,

$$H = \frac{1}{k}, \quad H_n = e^{\frac{1}{k}\sum\limits_\alpha a_{n\alpha}x^\alpha}\Phi(x^n).$$

If $r = n$, we have one equation

$$\frac{1}{H^2}\frac{\partial H}{\partial x^i} = a_i,$$

or

$$H = \frac{1}{k - a_i x^i}.$$

The space is hence of constant curvature, which proves the theorem.

If a conformally flat space admits an ennuple of normal congruences with constant Ricci coefficients, the space is of constant curvature.

4. **The case $n = 2$.** — For this case (2.3) reduce to

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} = a_{12}H_1H_2, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x} = a_{21}H_1H_2, \quad (x^1 = x,\ x^2 = y).$$

The resulting space is always of constant curvature. If $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, we obtain

$$H_1 = -\frac{1}{a_{21}}\frac{\Phi_1'}{\Phi_1(x) + \Phi_2(y)}, \quad H_2 = -\frac{1}{a_{12}}\frac{\Phi_2'}{\Phi_1 + \Phi_2}.$$

If $a_{12} = 0$, $a_{21} \neq 0$,

$$H_1 = \Phi_1'(x), \quad H_2 = e^{a_{21}\Phi_1(x)}\Phi_2(y).$$

If $a_{12} = a_{21} = 0$,

$$H_1 = \Phi_1(x), \quad H_2 = \Phi_2(y).$$

5. **The case $n = 3$.** — If all $a_{ij} \neq 0$, we must have, as has been shown, $a_{ij} = \pm a_j$. If $a_{ij} = + a_j$, the space is of constant curvature and the H's have the same form as for case I. We consider the case where some $a_{ij} = + a_j$, and the remaining $a_{ij} = - a_j$, later. There are three distinct cases if some

$a_{ij}=0$. Let h, i, and j have the values 1, 2, 3 in some order. Then the three cases are given by

(α) $$a_{ih}=a_{jh}=0, \quad a_{ij}\neq 0, \quad a_{ji}\neq 0,$$
(β) $$a_{ih}=a_{jh}=a_{ij}=a_{hj}=0, \quad a_{ji}\neq 0,$$
(γ) $$a_{ih}=a_{jh}=a_{ij}=a_{ji}=0.$$

We find for (α),

$$H_i=-\frac{\Phi'_i}{a_{ji}[\Phi_i(x^i)+\Phi_j(x^j)]}, \quad H_j=-\frac{\Phi_j'}{a_{ij}(\Phi_i+\Phi_j)}, \quad H_h=e^{\rho_h(\Phi_i+\Phi_j)}\Phi_h(x^h),$$

where

$$\rho_h=-\frac{a_{hi}}{a_{ji}}=-\frac{a_{hj}}{a_{ij}}.$$

For (β),

$$H_i=\Phi'_i, \quad H_j=e^{a_{ji}\Phi_i(x^i)}\Phi_j(x^j), \quad H_h=e^{a_{hi}\Phi_i}\Phi_h(x^h).$$

For (γ),

$$H_i=\Phi_i(x^i), \quad H_j=\Phi_j(x^j), \quad H_h=e^{a_{hi}\Phi_i+a_{hj}\Phi_j}\Phi_h(x^h).$$

For the case $a_{ij}\neq 0$, and $a_{ij}\neq +a_j$, we have only one other possibility

$$a_{12}=-a_{32}\equiv a, \quad a_{13}=-a_{23}\equiv b, \quad a_{21}=-a_{31}\equiv c.$$

We put

$$H_1=u, \quad H_2=v, \quad H_3=w, \quad x^1=x, \quad x^2=y, \quad x^3=z.$$

Then our equations (2.3) become

$$\frac{\partial u}{\partial y}=auv, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=cuv, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=buw, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=-cuw, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-bvw, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=-avw. \tag{5.3}$$

We need only consider (5.1) and (5.2) since (5.3) follow from them as is easily shown. If we solve the first equations in (5.1) and (5.2) for v and w in terms of u, substitute in the second and put $u=e^{-h}$ in the results we obtain

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial e^{-h}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial z}-c\frac{\partial e^{-h}}{\partial z}=0.$$

Hence we may write

$$\frac{\partial h}{\partial x}+ce^{-h}=\Phi_1(x,z), \quad \frac{\partial h}{\partial z}-ce^{-h}=\Phi_2(x,y).$$

From these equations we obtain

$$e^{-h} = u = \frac{1}{2c}(\Phi_1 - \Phi_2), \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$$

so that

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{1}{2}(\Phi_1^2 - \Phi_2^2). \tag{5.5}$$

Differentiating this last equation with respect to y and z gives

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} + \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} + \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0.$$

Hence Φ_1 and Φ_2 satisfy an equation of the form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0.$$

This equation has for its general solution

$$\Phi = -\frac{\lambda''(\alpha)}{\lambda'(\alpha)} + \frac{\lambda'}{\frac{1}{2}\lambda(\alpha) + \mu(\beta)},$$

where $\lambda(\alpha)$ and $\mu(\beta)$ are arbitrary. We thus obtain

$$u = \frac{1}{2c}\left[-\frac{\gamma''}{\gamma'} + \frac{\gamma'}{\frac{\gamma(x)}{2} + \mu(z)} + \frac{\delta''}{\delta'} - \frac{\delta'}{\frac{\delta(x)}{2} + \lambda(y)}\right],$$

and $\gamma(x)$ and $\delta(x)$ must satisfy the relation

$$\frac{(\gamma'')^2 + 2\gamma'\gamma'''}{(\gamma')^2} = \frac{(\delta'')^2 + 2\delta'\delta'''}{(\delta')^2}.$$

This is obtained from the condition (5.4). It is possible to solve the above relation for δ in terms of γ and its derivatives. From (5.1) and (5.2) we then get v and w.

If we take $\gamma = \delta$, and make the change of coordinates $x' = \gamma(x)$, $y' = \lambda(y)$, $z' = \mu(z)$, the new u, v, and w have the form (dropping primes)

$$u = \frac{1}{c}\frac{y - z}{(x+y)(x+z)}, \quad v = \frac{1}{a}\frac{x+z}{(y-z)(x+y)}, \quad w = -\frac{1}{b}\frac{x+y}{(y-z)(x+z)}.$$

6. **The Groups.** — We shall now obtain the simply transitive groups of motions, G_n, admitted by the spaces under consideration. Let $\xi^i_{h|}$ denote the n

vectors of the G and $\lambda^i_{h|}$ the components of the normal congruences with the constant γ_{hij}. The $\lambda^i_{h|}$ are given by [4] $\lambda^i_{h|} = \delta^i_{h|}/H_i$. The $\lambda^i_{h|}$ define the reciprocal group of the G^i_n, and so [10]

$$\xi^i_h \frac{\partial \lambda^j_{k|}}{\partial x^i} - \lambda^i_{k|} \frac{\partial \xi^j_{h|}}{\partial x^i} = 0,$$

which because of the form of $\lambda^i_{h|}$ reduce to

$$\xi^i_{h|} \frac{\partial \lambda^j_{k|}}{\partial x^i} - \lambda^k_{k|} \frac{\partial \xi^j_{h|}}{\partial x^k} = 0.$$

If $j \neq k$, it follows that $\partial \xi^j_{h|}/\partial x^k = 0$, $(j \neq k)$, so $\xi^i_{h|} = \xi^i_h(x^i)$. If $j = k$, we obtain

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial x^j} = -\frac{\partial \log H_j}{\partial x^i} \xi^i, \tag{6.1}$$

where we have dropped the subscript index on the ξ since these equations are the same for all the n vectors. The equations (6.1) are easy to solve for the ξ^i. We shall illustrate the method, using case IIb. In (6.1) taking $j = \alpha$ we get

$$-\frac{d\xi^\alpha}{dx^\alpha} = \frac{\partial \log H}{\partial x^\beta} \xi^\beta + \frac{\partial \log H}{\partial x^I} \xi^I. \tag{6.2}$$

Since the right member of (6.2) is independent of α we may put $-d\xi^\alpha/dx^\alpha = k$, where k is a constant, and thus obtain

$$\xi^\alpha = -kx^\alpha + k^\alpha.$$

The k^α are also constant. On substituting these values for ξ^α back in (6.2) we get

$$k \sum_I \Phi_I + \Phi'_J \xi^J = a_\beta c^\beta,$$

and hence we may set

$$k\Phi_I + \Phi'_I \xi^I = k^I (= \text{const.}), \quad \Sigma\, k^I = a_\beta c^\beta,$$

since Φ_I and ξ^I are functions of x^I only. From this last equation, we have

$$\xi^I = \frac{k^I - k\Phi_I}{\Phi'_I}.$$

Using the values just found for ξ^α and ξ^I in (6.1) for $j = J$, we find these equations are identically satisfied. Now in (6.1) put $j = a$, and replace

---

[10] L. P. EISENHART, *Continuous Groups of Transformations*, Princeton University Press, (1933), p. 113.

ξ^α, ξ^I by their values. We obtain

$$\frac{d\xi^a}{dx^a} = -\frac{d\log\Phi_a}{dx^a}\xi^a + k\rho^a,$$

which gives

$$\xi^a = \frac{k^a + \rho_a k\theta_a}{\theta'_a}, \quad (\theta'_a = \Phi_a,\ k^a = \text{const.}).$$

The form of the ξ's for the other cases are given as follows.

Case IIa. - $(s > 3)$,

$$\xi^\alpha = -kx^\alpha + k^\alpha, \quad \xi^I = \frac{k^I - k\Phi_I}{\Phi'_I}, \quad \xi^a = \frac{l\Phi_a - k^a}{\Phi'_a},$$

$$\Sigma k^a = 0, \quad \Sigma k^I = a_\chi c^\alpha, \quad (k,\ l = \text{const.}).$$

Case IIIa. - Same as for IIa.

Case IIIb. - Same as for IIb.

Case IIIc. - $(s > 3)$,

$$\xi^\alpha = -kx^\alpha + k^\alpha, \quad \xi^I = -\frac{k^I}{\Phi'_I}, \quad \xi^a = \frac{l\Phi_a - k^a}{\Phi'_a},$$

$$\Sigma k^a = 0, \quad \Sigma k^I = -k.$$

Case IIId.

$$\xi^\alpha = -kx^\alpha + k^\alpha, \quad \xi^I = -\frac{k^I}{\Phi'_I}, \quad \xi^a = \frac{k^a - k\rho_a\theta_a}{\theta'_a},$$

$$\Sigma k^I = -k, \quad \Phi_a = \theta'_a.$$

In those cases for which $H = \text{const.}$, $k = 0$. In IIId for $t = 0$ we get

$$\xi^\alpha = k^\alpha, \quad \xi^b = \frac{k^b - \frac{1}{l}k^\alpha a_{b\alpha}\theta_b}{\theta'_b}, \quad \left(H = \frac{1}{l},\ \Phi_b = \theta'_b\right).$$

The forms of the ξ's for the remaining cases are easily obtained. They are essentially the same as those given.

Note added in proof: While this paper was in the hands of the editors, a paper by L. P. Eisenhart appeared on the same problem (« Monatsheften für Math. und Physik », vol. 43). From his results, it is seen that $\gamma_{hij} = \text{const.}$ is the general condition for the spaces under consideration. Also the condition that at least two H's be equal constitutes no real restriction.

Sopra le equazioni di Eulero dei problemi variazionali di ordine n (*).

Memoria di SILVIO CINQUINI (a Pisa).

Sunto. - *In alcuni precedenti lavori l'A. si è occupato dei problemi variazionali di ordine* n (n $\geq$ 2), *in forma ordinaria, nei quali cioè si deve rendere minimo un integrale*

$$I^{[n]}_{C[n]} = \int_{C[n]} f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) dx,$$

e, estendendo il metodo diretto fondato dal TONELLI *per* n = 1, *ha dato, oltre alle condizioni necessarie e a quelle sufficienti per la semicontinuità degli integrali* $\mathrm{I}^{[n]}_{C[n]}$, *teoremi di esistenza del minimo.*

Nella presente Memoria, nella quale l'A. prosegue lo studio intrapreso, occupandosi delle equazioni di EULERO, *relative ai problemi in questione, stabilisce le diverse forme che può assumere tale equazione a seconda delle ipotesi, che si fanno sia sulla funzione, da cui è definita la curva minimante, sia sulla funzione* f.

Poi giovandosi dei teoremi di esistenza del minimo già dati, ed anche per altra via, l'A. stabilisce, sotto opportune condizioni, teoremi di esistenza dell'estremo e delle estremali di ordine n, *sia « in piccolo », sia in campi comunque grandi.*

In alcuni recenti lavori mi sono occupato dei problemi del Calcolo delle Variazioni di ordine n, in forma ordinaria, nei quali, cioè, si devono trovare, fra le curve

$$C^{[n]}: \qquad y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

di una certa classe, quelle che rendono minimo l'integrale

$$I^{[n]}_{C[n]} = \int_a^b f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) dx,$$

ove n è un numero intero > 1, ed f è una data funzione.

Avendo constatato che anche per questi problemi il metodo classico e gli altri metodi diretti non avevano fornito quei risultati che si desideravano ([1]), mi sono proposto di estendere a questi problemi il metodo diretto

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

([1]) Per la bibliografia vedi i luoghi citati in: S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine* n (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II, Vol. V (1936), pp. 169-90).

fondato dal TONELLI [2] e basato sul concetto di semicontinuità, la cui efficacia è, ormai da parecchi anni, universalmente riconosciuta a motivo dei brillanti risultati che esso ha già fornito, ogniqualvolta è stato applicato a qualche problema variazionale.

A tal uopo, avendo come obiettivo che i risultati, che mi proponevo di raggiungere, presentassero, possibilmente, la stessa generalità di quelli stabiliti dal TONELLI per $n = 1$, ho considerato quelle classi di curve $C^{[n]}$, per le quali la funzione $y(x)$ è assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n - 1$ ordini, ed è tale che esista finito l'integrale (del LEBESGUE) $I^{[n]}_{C[n]}$.

Relativamente a tali curve, mi sono già occupato, dapprima delle condizioni sufficienti per la semicontinuità dell'integrale $I^{[n]}_{C[n]}$ [3], e dei teoremi di esistenza del minimo dell'integrale stesso [4], poi delle condizioni necessarie per la semicontinuità di tali integrali, dalle quali ho dedotto le condizioni di LEGENDRE e di WEIERSTRASS, necessarie per l'esistenza del minimo [5].

La presente Memoria, nella quale proseguo, nelle condizioni sopra indicate, lo studio intrapreso, è dedicata all'equazione differenziale di EULERO del problema in questione, alle proprietà delle soluzioni di tale equazione, ed ai teoremi di esistenza di tali soluzioni sia « in piccolo », sia in campi comunque grandi.

Richiamate nel § 1 alcune generalità, si stabilisce nel § 2 la condizione di EULERO.

Supposto dapprima che la funzione $y_0(x)$, dalla quale è definita una curva minimante, abbia, in tutto un intervallo (a_0, b_0), anche la derivata di ordine n finita e continua, si prova, facendo uso della variazione prima, che la $y_0(x)$ deve soddisfare in tutto (a_0, b_0) all'equazione

$$\text{(I)} \qquad f_y - \frac{d}{dx}\left[f_{y'} - \frac{d}{dx}\left\{f_{y''} - \dots - \frac{d}{dx}\left(f_{y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx} f_{y^{(n)}}\right)\right\}\right] = 0,$$

---

[2] L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Due Volumi (N. Zanichelli, Bologna, 1921-1923).

[3] Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in [1], § 1, n.° 2, ed anche S. CINQUINI, *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine* n (« Annali di Matematica pura e applicata », Serie IV, T. XV (1936-7), pp. 77-86).

[4] Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in [1], §§ 2 e 3, ed anche S. CINQUINI, *Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine* n (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II, Vol. VI, (1937)).

[5] S. CINQUINI, *Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine* n (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ». Serie II, Vol. VI (1937), pp. 149-178).

alla quale si perviene sotto la sola ipotesi che la funzione f sia finita e continua insieme con le sue derivate parziali $f_y, f_{y'}, \dots, f_{y^{(n)}}$.

Ogni curva $y = y(x)$, per la quale la $y(x)$ soddisfa alla (I), viene chiamata *estremale del problema di ordine* n, o, più brevemente, *estremale di ordine* n.

Se poi, sempre nel caso considerato, ognuna delle derivate parziali $f_{y^{(r)}}$, $(r = 1, 2, \dots, n)$ ammette, finite e continue, tutte le proprie derivate parziali dei primi r ordini, e se inoltre per ogni x di (a_0, b_0) è

$$\text{(II)} \qquad f_{y^{(n)}y^{(n)}}\left(x,\ y_0(x),\ \frac{dy_0(x)}{dx}, \dots, \frac{d^n y_0(x)}{dx^n}\right) \neq 0,$$

allora la $y_0(x)$ ammette, finite e continue in tutto (a_0, b_0), anche le derivate degli ordini $n+1$, $n+2, \dots, 2n$, e la (I) può scriversi nella forma seguente

$$\text{(III)} \qquad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0,$$

che per solito viene considerata dalla maggior parte dei Variazionisti, i quali, in realtà, suppongono già « a priori », che ogni estremale del problema di ordine n ammetta, finite e continue, le derivate dei primi $2n$ ordini.

Abbandonata l'ipotesi che la $\dfrac{d^n y_0(x)}{dx^n}$ sia finita e continua, e supposto che la $\dfrac{d^{n-1} y_0(x)}{dx^{n-1}}$ sia a rapporto incrementale limitato, facendo ancora uso della variazione prima, si stabilisce che la $y_0(x)$ deve soddisfare, in tutto (a_0, b_0), all'equazione

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d}{dx}\int_{a_0}^{x} f_{y^{(n)}} dx = \int_{a_0}^{x}\left[f_{y^{(n-1)}} - \int_{a_0}^{x}\left\{ f_{y^{(n-2)}} - \dots - \int_{a_0}^{x} f_y dx \right\} dx\right] dx + \\ + C_0 + C_1 x + \dots + C_{n-1} x^{n-1},$$

ove $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ sono n costanti.

Finalmente, nel caso in cui si supponga soltanto che la $y = y_0(x)$ sia una curva $C^{[n]}$, ma sotto opportune condizioni per la funzione f, estendendo opportunamente un procedimento recentemente usato dal TONELLI per $n = 1$ (6), si prova che la $y_0(x)$ soddisfa ancora all'equazione (IV).

Ogni curva $y = y(x)$, per la quale la $y(x)$ è soluzione della (IV) viene chiamata *estremaloide del problema di ordine* n, o, più brevemente, *estremaloide di ordine* n.

---

(6) Vedi L. TONELLI, *Sulle proprietà delle estremanti* (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II, Vol. III (1934), pp. 213-237), n.° 1.

Il § 2 termina con alcune condizioni sotto le quali un'estremaloide di ordine n è un'estremale di ordine n; se poi sono verificate anche le condizioni precedentemente indicate, la $y_0(x)$ possiede, finite e continue, tutte le derivate dei primi $2n$ ordini, e soddisfa alla (III).

Il problema dell'esistenza dell'estremale di ordine n, che unisce due punti e che in questi deve soddisfare a date condizioni, in generale presenta, per $n > 1$, notevoli difficoltà.

Nel presente lavoro esso viene risolto « in piccolo », all'inizio del § 3, nel caso in cui, in ciascuno dei punti terminali, siano prefissati i valori della funzione e delle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, per un'importante classe di integrali quasi-regolari positivi normali, seguendo il metodo ideato dal TONELLI per $n = 1$, cioè facendo uso dei teoremi di esistenza del minimo dell'integrale $I^{[n]}_{C[n]}$, cosicchè si ottengono contemporaneamente anche i teoremi di esistenza dell'estremo « in piccolo ».

Nella seconda parte del § 3, sotto altre ipotesi e generalizzando opportunamente un procedimento seguito dal TONELLI per $n = 1$ (7), si stabilisce l'esistenza dell'estremale di ordine n, uscente da un punto con valori prefissati della funzione e delle sue derivate dei primi $2n - 1$ ordini, e si accennano altri risultati, che estendono gli analoghi ottenuti dal TONELLI per $n = 1$, fra i quali l'unicità dell'estremale di ordine n nel caso ultimamente indicato.

Il teorema di esistenza dell'estremale di ordine n, stabilito « in piccolo » all'inizio del § 3, viene dato, nel § 4, *in un campo comunque grande*; e in questo paragrafo si prova anche, sotto opportune condizioni, l'unicità di tale estremale.

Dobbiamo rilevare che il teorema di esistenza ultimamente citato è dimostrato sotto l'ipotesi che, per $|y^{(n)}| \to \infty$, sia

$$\text{(V)} \qquad |f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})| \to \infty,$$

per ogni $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ del campo considerato, e questa limitazione figura sia nell'enunciato valido « in piccolo », sia *a fortiori* per quello in campi comunque grandi.

Effettivamente, se non è verificata la (V), può mancare l'estremale di ordine n, $(n \geq 2)$, che congiunge due punti, in ciascuno dei quali sono fissati i valori della funzione e delle sue derivate dei primi $n - 1$ ordini. Ciò risulta, per $n = 2$, da due esempi, dati nel § 3, e relativi alle funzioni

$$f(x, y, y', y'') \equiv e^{y''}; \quad f(x, y, y', y'') \equiv \sqrt{1 + y''^2},$$

(7) Vedi L. TONELLI, *Sulle equazioni di Eulero nel Calcolo delle Variazioni* (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II, Vol. IV (1935), pp. 191-216), n.° 10.

dal secondo dei quali, tenendo conto dei risultati della fine del § 2, risulta anche, che, se non è verificata la (V), può non esserci il minimo dell'integrale $I^{[n]}_{C[n]}$.

§ 1. Generalità.

1. Generalità. — Per le generalità rimandiamo alla mia Memoria già citata [8], limitandoci qui a qualche cenno e a qualche aggiunta.

α) IL CAMPO $A^{[n]}$. LA FUNZIONE $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. — Ricordiamo che considerato uno spazio ad $n+1$ dimensioni (con n numero intero positivo) riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, dicesi campo $A^{[n]}$ ogni insieme di questo spazio, contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito. Se il campo $A^{[n]}$ è limitato, esso viene indicato con $A^{[n]}_L$.

Salvo avviso contrario, supporremo che, *in ogni punto* $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}', \ldots, \mathrm{y}^{(\mathrm{n}-1)})$ *di* $\mathrm{A}^{[\mathrm{n}]}$, *e per ogni valore finito di* $\mathrm{y}^{(\mathrm{n})}$, *la funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}', \ldots, \mathrm{y}^{(\mathrm{n})})$ *sia finita e continua insieme con le derivate parziali* $\mathrm{f}_{\mathrm{y}}, \mathrm{f}_{\mathrm{y}'}, \ldots, \mathrm{f}_{\mathrm{y}^{(\mathrm{n})}}$.

β) LE CURVE $C^{[n]}$. L'INTEGRALE $I^{[n]}_{C[n]}$. — Ricordiamo ancora che si considerano le curve

$$C^{[n]}: \qquad y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

per le quali $y(x)$ è una funzione assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$, ogni punto $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$, (con $a \leq x \leq b$), appartiene al campo $A^{[n]}$, ed inoltre esiste finito l'integrale del LEBESGUE

$$I^{[n]}_{C[n]} = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx.$$

Indicheremo poi con $C^{[n]}_L$ quelle curve $C^{[n]}$, per le quali ogni punto $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ appartiene al campo limitato $A^{[n]}_L$.

γ) DEFINIZIONE [9]. — Sia $C^{[n]}_0$: $[y = y_0(x),\ a_0 \leq x \leq b_0]$ una curva appartenente ad una classe $K^{[n]}$ di curve $C^{[n]}$.

Diremo che un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0), \ldots, y_0^{(n-1)}(x_0))$, (con $a_0 \leq x_0 \leq b_0$), è un *punto di indifferenza rispetto al campo* $\mathrm{A}^{[\mathrm{n}]}$ *ed alla classe* $\mathrm{K}^{[\mathrm{n}]}$, se è

[8] Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in [1], § 1, n.° 1; ove trovansi anche le definizioni *di intorno* $(\rho)^{\mathrm{n}}$ *di una curva* $\mathrm{C}^{[\mathrm{n}]}$, *di classe completa di curve di ordine* n, ecc..

[9] Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in [5], § 5, n.° 12.

possibile determinare un suo intorno $(\rho_0)_n$, definito da quei punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, per i quali è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0(x_0))^2 + (y' - y_0'(x_0))^2 + \dots + (y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}(x_0))^2 \leq \rho_0^2,$$

in modo che si ottenga ancora una curva della classe $K^{[n]}$, quando si sostituisca ad un qualunque arco della $C_0^{[n]}$, (i cui punti terminali abbiano ascisse a, b), contenente P_0, e tutto appartenente a questo intorno, un qualunque arco di una curva $C^{[n]}$: $[y = y(x),\ a \leq x \leq b]$, appartenente al medesimo intorno (ed anche al campo $A^{[n]}$), e tale inoltre che si abbia

$$y(a) = y_0(a), \qquad y^{(r)}(a) = y_0^{(r)}(a), \quad (r = 1, 2, \dots, n-1);$$
$$y(b) = y_0(b), \qquad y^{(r)}(b) = y_0^{(r)}(b), \quad (r = 1, 2, \dots, n-1),$$

intendendosi che le prime n di queste uguaglianze, o le ultime n, possano anche non essere verificate, quando rispettivamente a, oppure b, coincidono con uno dei valori a_0, b_0.

§ 2. La condizione necessaria di Eulero.

2. La condizione di Eulero per le curve minimanti con derivata di ordine n finita e continua. — *Se* $C_0^{[n]}$: $[y = y_0(x),\ a_0 \leq x \leq b_0]$ *è una curva minimante per* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *in una classe* $K^{[n]}$ *di curve* $C^{[n]}$, *ogni suo arco, i cui punti terminali abbiano ascisse* a^*, b^*, (*con* $a^* < b^*$), *per il quale la derivata* $y_0^{(n)}(x)$ *esiste finita e continua per ogni* x *di* (a^*, b^*) *e per il quale ogni punto* $(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x))$, (*con* $a^* < x < b^*$) *è interno al campo* $A^{[n]}$ *e di indifferenza rispetto ad* $A^{[n]}$ *ed a* $K^{[n]}$, *soddisfa all'equazione differenziale*

$$f_y - \frac{d}{dx}\left[f_{y'} - \frac{d}{dx}\left\{f_{y''} - \dots - \frac{d}{dx}\left(f_{y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx} f_{y^{(n)}}\right)\right\}\right] = 0. \tag{1}$$

Infatti, sia $a^* < a' < b' < b^*$, e supponiamo che l'intervallo (a', b') sia sufficientemente piccolo, affinchè si possa trovare un numero $\rho > 0$ tale che: 1°) tutti i punti appartenenti all'intorno $(\rho)^n$ dell'arco di curva $y = y_0(x)$, $(a' \leq x \leq b')$ appartengano al campo $A^{[n]}$; 2°) sostituendo ad un qualunque arco parziale Γ dell'arco ora indicato, i cui punti terminali abbiano ascisse a, b, (con $a' \leq a < b \leq b'$), un qualsiasi arco di una curva $C^{[n]}$: $[y = y(x),\ a \leq x \leq b]$, tale che sia

$$y_0^{(j)}(a) = y^{(j)}(a), \quad y_0^{(j)}(b) = y^{(j)}(b), \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1;\ y^{(0)}(x) \equiv y(x)),$$

si ottenga ancora una curva della classe $K^{[n]}$.

Si consideri una funzione $\varphi(x)$, comunque definita nell'intervallo (a, b), purchè assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini, e tale inoltre che la derivata di ordine $n-1$ sia a rapporto incrementale limitato, e che si abbia

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(a)=\varphi'(a)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(a)=0 \\ \varphi(b)=\varphi'(b)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(b)=0, \end{cases} \quad \left(\varphi^{(r)}(x)\equiv\frac{d^r\varphi(x)}{dx^r},\ r=1,2,\ldots,n-1\right).$$

Possiamo quindi determinare un numero $\bar{\lambda}>0$, in modo che, definita una curva

$$\Gamma_\lambda: \qquad y=y_\lambda(x), \quad a\leq x\leq b,$$

ponendo

$$y_\lambda(x)\equiv y_0(x)+\lambda\varphi(x),$$

per ogni $|\lambda|\leq\bar{\lambda}$, Γ_λ sia una curva $C^{[n]}$ e appartenga all'intorno $(\rho)^n$ di Γ.

La curva $C_\lambda^{[n]}$, che si ottiene dalla $C_0^{[n]}$ sostituendo Γ con Γ_λ, è una curva della classe $K^{[n]}$, perchè è evidentemente

$$y_\lambda^{(j)}(a)=y_0^{(j)}(a), \quad y_\lambda^{(j)}(b)=y_0^{(j)}(b), \quad (j=0,1,2,\ldots,n-1;\ y^{(0)}(x)\equiv y(x)).$$

Per $\lambda=0$, $C_\lambda^{[n]}$ diviene $C_0^{[n]}$, e siccome questa $C_0^{[n]}$ deve essere minimante per l'integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$, la derivata di $I_{C_\lambda^{[n]}}^{[n]}$ rispetto a λ, se esiste, deve essere nulla per $\lambda=0$, e quindi, in modo analogo al caso $n=1$, si conclude che deve essere

$$\int_a^b(\varphi f_y+\varphi' f_{y'}+\ldots+\varphi^{(n)}f_{y^{(n)}})dx=0.$$

Integrando per parti ciascuno dei termini $\varphi^{(j)}f_{y^{(j)}}$, $(j=0,1,2,\ldots,n-1;$ $\varphi^{(0)}f_{y^{(0)}}\equiv\varphi f_y)$ rispettivamente $n-j$ volte, tenendo conto delle (2) e ponendo

$$F(x)\equiv f_{y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x),\ldots, y_0^{(n)}(x))-\int_a^x f_{y^{(n-1)}}(\ldots)dx+$$
$$+\int_a^x dx\int_a^x f_{y^{(n-2)}}(\ldots)dx-\ldots+(-1)^n\int_a^x dx\ldots\int_a^x f_y(\ldots)dx,$$

si ottiene

$$(3) \qquad \int_a^b\varphi^{(n)}(x)F(x)dx=0.$$

Vogliamo ora dimostrare che la funzione $F(x)$, la quale è continua in tutto (a, b), è necessariamente una funzione razionale intera di grado non superiore a $n-1$ ([9']). A tal uopo presi $n+1$ valori qualunque (a, b), tali che sia

$$a < p_0 < p_1 < \dots < p_n < b, \tag{4}$$

e scelto un $\delta > 0$, tale che $\frac{3}{2}\delta$, sia minore della minima fra le differenze $p_j - p_{j-1}$, $(j = 1, 2, \dots, n)$, si definisca la funzione φ nel seguente modo

$\varphi(x) \equiv 0$, in (a, p_0),

$\varphi(x) \equiv B_0(x-p_0)^n$, in $(p_0, p_0+\delta)$,

$\varphi(x) \equiv B_0\{(x-p_0)^n - [x-(p_0+\delta)]^n\}$, in $\left(p_0+\delta,\ p_1 - \frac{\delta}{2}\right)$,

$$\varphi(x) \equiv B_0\{(x-p_0)^n - [x-(p_0+\delta)]^n\} + \sum_{j=1}^{r-1} B_j \left\{\left[x - \left(p_j - \frac{\delta}{2}\right)\right]^n - \left[x - \left(p_j + \frac{\delta}{2}\right)\right]^n\right\} +$$
$$+ B_r\left[x - \left(p_r - \frac{\delta}{2}\right)\right]^n, \text{ in } \left(p_r - \frac{\delta}{2},\ p_r + \frac{\delta}{2}\right), \quad (r = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\varphi(x) \equiv B_0\{(x-p_0)^n - [x-(p_0+\delta)]^n\} + \sum_{j=1}^{r} B_j \left\{\left[x - \left(p_j - \frac{\delta}{2}\right)\right]^n - \left[x - \left(p_j + \frac{\delta}{2}\right)\right]^n\right\},$$
$$\text{in } \left(p_r + \frac{\delta}{2},\ p_{r+1} - \frac{\delta}{2}\right), \quad (r = 1, 2, \dots, n-2),$$

ed anche, per $r = n-1$, in $\left(p_{n-1} + \frac{\delta}{2},\ p_n - \delta\right)$,

$$\varphi(x) \equiv B_0\{(x-p_0)^n - [x-(p_0+\delta)]^n\} + \sum_{j=1}^{n-1} B_j \left\{\left[x - \left(p_j - \frac{\delta}{2}\right)\right]^n - \left[x - \left(p_j + \frac{\delta}{2}\right)\right]^n\right\} +$$
$$+ B_n[x-(p_n-\delta)]^n, \text{ in } (p_n - \delta,\ p_n),$$

$\varphi(x) \equiv 0$, in (p_n, b),

ove, affinchè $\varphi(x)$ sia finita e continua, insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini, anche per $x = p_n$, basta determinare i numeri B_j, $(j = 0, 1, 2, \dots, n)$, che in generale dipenderanno da δ, in modo che, nell'intervallo $(p_n - \delta, p_n)$, sia anche

$$\varphi(x) \equiv B_n(x-p_n)^n.$$

Questa condizione è sicuramente verificata, se è

$$P(x) \equiv B_0\{(x-p_0)^n - [x-(p_0+\delta)]^n\} + \sum_{j=1}^{n-1} B_j \left\{\left[x - \left(p_j - \frac{\delta}{2}\right)\right]^n - \left[x - \left(p_j + \frac{\delta}{2}\right)\right]^n\right\} +$$
$$+ B_n\{[x-(p_n-\delta)]^n - (x-p_n)^n\} \equiv 0;$$

e siccome $P(x)$ è evidentemente un polinomio di grado non superiore

([9']) Questa proprietà è stata dimostrata in altro modo da A. Haar, in: *Ueber eine Verallgemeinerung des Du Bois Reymond'schen Lemma's* (« Acta Litterarum ac Scientiarum R. Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae », T. I (1922-3), pp. 33-38).

a $n-1$, basta che siano tutti nulli i suoi coefficienti; cioè è sufficiente che sia

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} B_0 + B_1 + \ldots + B_n = 0, \\ [(p_0+\delta)^i - p_0^i]B_0 + \sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(p_j+\frac{\delta}{2}\right)^i - \left(p_j - \frac{\delta}{2}\right)^i\right]B_j + \\ \qquad\qquad + [p_n^i - (p_n-\delta)^i]B_n = 0, \quad (i=2, 3, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Questo sistema di n equazioni lineari omogenee nelle $n+1$ variabili B_j, $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$, è certamente soddisfatto, (ed è perciò anche $P(x) \equiv 0$), se prendiamo i numeri B_j, $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$ uguali ai minorí di ordine n ottenuti dalla seguente matrice, sopprimendo rispettivamente la prima colonna, la seconda, ..., la $(n+1)$-esima,

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \frac{(p_0+\delta)^2 - p_0^2}{2\delta} & \frac{\left(p_1+\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(p_1-\frac{\delta}{2}\right)^2}{2\delta} & \ldots & \frac{\left(p_{n-1}+\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(p_{n-1}-\frac{\delta}{2}\right)^2}{2\delta} & \frac{p_n^2 - (p_n-\delta)^2}{2\delta} \\ \frac{(p_0+\delta)^3 - p_0^3}{3\delta} & \frac{\left(p_1+\frac{\delta}{2}\right)^3 - \left(p_1-\frac{\delta}{2}\right)^3}{3\delta} & \ldots & \frac{\left(p_{n-1}+\frac{\delta}{2}\right)^3 - \left(p_{n-1}-\frac{\delta}{2}\right)^3}{3\delta} & \frac{p_n^3 - (p_n-\delta)^3}{3\delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{(p_0+\delta)^n - p_0^n}{n\delta} & \frac{\left(p_1+\frac{\delta}{2}\right)^n - \left(p_1-\frac{\delta}{2}\right)^n}{n\delta} & \ldots & \frac{\left(p_{n-1}+\frac{\delta}{2}\right)^n - \left(p_{n-1}-\frac{\delta}{2}\right)^n}{n\delta} & \frac{p_n^n - (p_n-\delta)^n}{n\delta} \end{array} \right\|;$$

abbiamo così fissato il fattore di proporzionalità, a meno del quale possono determinarsi i numeri B_j, soddisfacenti al sistema (6), in modo che per i numeri B_j, che indicheremo con $B_j(\delta)$, perchè effettivamente dipendono da δ, si abbia $B_j(0) \neq 0$, $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Ciò premesso, siccome è

$$\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} \equiv 0, \text{ in } (a, p_0), \text{ in } \left(p_0+\delta, p_1 - \frac{\delta}{2}\right), \text{ in } \left(p_{n-1}+\frac{\delta}{2}, p_n - \delta\right), \text{ in } (p_n, b)$$

$$\text{e in ciascuno degli intervalli } \left(p_j + \frac{\delta}{2}, p_{j+1} - \frac{\delta}{2}\right), (j=1, 2, \ldots, n-2),$$

ed inoltre

$$\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} \equiv n!\, B_0(\delta), \text{ in } (p_0, p_0+\delta),$$

$$\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} \equiv n!\, B_j(\delta), \text{ in } \left(p_j - \frac{\delta}{2}, p_j + \frac{\delta}{2}\right), \qquad (j=1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} \equiv n!\, B_n(\delta), \text{ in } (p_n - \delta, p_n),$$

la (3) diviene

$$B_0(\delta)\int_{p_0}^{p_0+\delta} F(x)dx + \sum_{j=1}^{n-1} B_j(\delta)\int_{p_j-\frac{\delta}{2}}^{p_j+\frac{\delta}{2}} F(x)dx + B_n(\delta)\int_{p_n-\delta}^{p_n} F(x)dx = 0, \tag{7}$$

e quindi dividendo ambo i membri di questa eguaglianza per δ, e passando al limite per $\delta \to 0$, risulta

$$\sum_{j=0}^{n} B_j(0)F(p_j) = 0. \tag{8}$$

Ma i $B_j(0)$, $(j = 0, 1, 2, \dots, n)$ sono precisamente i minori di ordine n estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_0^2 & p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0^{n-1} & p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \dots & p_n^{n-1} \end{matrix} \right\|,$$

e quindi per la (8) è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ p_0^2 & p_1^2 & \dots & p_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0^{n-1} & p_1^{n-1} & \dots & p_n^{n-1} \\ F(p_0) & F(p_1) & \dots & F(p_n) \end{vmatrix}.$$

Perciò, siccome $p_0, p_1, \dots, p_n$ sono $n+1$ valori qualunque di (a, b), $F(x)$ è necessariamente una funzione razionale intera di grado non superiore ad $n-1$, ossia per ogni x di (a, b), è

$$f_{y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x)) - \int_a^x f_{y^{(n-1)}}dx + \int_a^x dx \int_a^x f_{y^{(n-2)}}dx - \dots$$
$$\dots + (-1)^n \int_a^x dx \dots \int_a^x f_y dx = C_0 + C_1 x + \dots + C_{n-1}x^{n-1}.$$

Derivando n volte rispetto ad x, concludiamo che la (1) è verificata in tutto (a, b), e quindi anche, con considerazioni analoghe a quelle fatte dal TONELLI per $n = 1$, in tutto (a^*, b^*), ove, in luogo di ogni derivata, deve considerarsi per $x = a^*$ la derivata destra, e per $x = b^*$ la derivata sinistra.

Osservazione. — È da rilevare che, nel caso particolare $n=2$, la precedente dimostrazione può essere notevolmente semplicata, perchè, dovendo, in questo caso particolare, dimostrare che $F(x)$ è una funzione lineare, basta provare che, se p_0 e p_1 sono due punti qualunque di (a, b), è

$$F\left(\frac{p_0+p_1}{2}\right)=\frac{1}{2}[F(p_0)+F(p_1)].$$

3. **Estremale di ordine n.** - α) Definizione. — *Ogni curva* $C^{[n]}$

$$C_0^{[n]}: \qquad y=y_0(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0,$$

per la quale la derivata di ordine n *della* $y_0(x)$ *sia finita e continua in tutto* (a_0, b_0), *e che soddisfi in ogni punto di* (a_0, b_0) *all'equazione* (1), *la diremo estremale del problema di ordine* n, *o, più brevemente*, **estremale di ordine n** *relativa alla funzione* f *considerata.*

β) Osservazione. — Per solito l'equazione di Eulero del problema di ordine n viene scritta nella forma seguente

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}f_{y''}-\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}f_{y^{(n)}}=0, \tag{1'}$$

ma noi, sotto le sole ipotesi fatte al n.° 1 per la funzione f, non possiamo affermare che ogni curva minimante per l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$, e per la quale la derivata di ordine n sia sempre finita e continua, soddisfi all'equazione (1'), come mostra il seguente esempio.

Sia $n=2$; $f(x, y, y', y'') \equiv y'y''+x^4\left(y''-x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2$, con $\left[x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right]_{x=0}=0$. Fra le curve $y=y(x)$, con $y(x)$ finita e continua insieme con le sue derivate dei primi due ordini, e per le quali è

$$y(0)=y'(0)=0, \quad y(1)=\int_0^1 dx\int_0^x x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx, \quad y'(1)=\int_0^1 x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx,$$

la

$$y=\int_0^x dx\int_0^x x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx,$$

rende minimo l'integrale

$$\int_0^1\left[y'(x)y''(x)+x^4\left(y''(x)-x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2\right]dx,$$

come si verifica immediatamente tenendo presente che $y'y''dx$ è un differenziale esatto. Tale curva soddisfa all'equazione (1), relativa alla f considerata,

$$\frac{d}{dx}\left[y'' - \frac{d}{dx}\left\{ y' + 2x^4\left(y''(x) - x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)\right\}\right] = 0,$$

ma non all'equazione (1'), perchè, per $x = 0$, non esiste la derivata del terzo ordine della $y(x)$.

4. Esistenza delle derivate di ordine non superiore a $2n$ nei punti di un'estremale di ordine n. — *Sia* $C^{[n]}$: $[y = y(x),\ a_1 \leq x \leq b_0]$ *un'estremale di ordine* n *relativa alla funzione* $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, *e, mantenute fisse le ipotesi del n.º* 1, α), *supponiamo inoltre, nel presente n.º, che le derivate parziali* $f_{y^{(r)}}$, $(r = 1, 2, \dots, n)$ *ammettano finite e continue, in ogni punto* $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$, *e per tutti i valori finiti di* $y^{(n)}$, *le proprie derivate parziali dei primi* r *ordini rispettivamente; allora se per* $x = x_0$, $(a_0 < x_0 < b_0)$ *è*

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0), \dots,\ y^{(n)}(x_0)) \neq 0, \tag{9}$$

per $x = x_0$ *esistono finite anche le derivate degli ordini* $n + 1$, $n + 2, \dots, 2n$ *della* $y(x)$.

Osserviamo innanzi tutto che, siccome $y(x)$ soddisfa, per ogni x di (a_0, b_0) alla (1), essa soddisfa anche all'equazione integro-differenziale

$$\begin{aligned} f_{y^{(n)}}(x,\ y(x),\ y'(x), \dots,\ y^{(n)}(x)) - \int_{a_0}^{x} f_{y^{(n-1)}}dx + \int_{a_0}^{x} dx \int_{a_0}^{x} f_{y^{(n-2)}}dx - \dots \\ \dots + (-1)^n \int_{a_0}^{x} dx \dots \int_{a_0}^{x} f_y dx = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{n-1}x^{n-1}, \end{aligned} \tag{1*}$$

dove C_0, $C_1, \dots$, C_{n-1} sono n costanti fisse.

Dando ad x_0 un incremento h e indicando con Δy, $\Delta y', \dots$, $\Delta y^{(n)}$ gli incrementi che in corrispondenza subiscono le y, $y', \dots$, $y^{(n)}$, otteniamo dalla (1*)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f_{y^{(n)}}(x_0 + h,\ y(x_0) + \Delta y, \dots,\ y^{(n)}(x_0) + \Delta y^{(n)}) \quad f_{y^{(n)}}(x_0,\ y(x_0), \dots,\ y^{(n)}(x_0))] -$$

$$- f_{y^{(n-1)}}(x_0,\ y(x_0), \dots,\ y^{(n)}(x_0)) + \int_{a_0}^{x_0} f_{y^{(n-2)}}dx - \dots = C_1 + 2C_2 x_0 + \dots + (n-1)C_{n-1}x^{n-2}.$$

Ragionando come per $n = 1$ e tenendo conto della (9) si deduce che, per $x = x_0$, esiste finita la $y^{(n+1)}(x)$. Inoltre, sempre in virtù della (9) e della continuità delle $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$, $y(x)$, $y'(x), \dots$, $y^{(n)}(x)$, si conclude facilmente che la $y^{(n+1)}(x)$ esiste finita ed è continua anche per ogni x sufficientemente vicino a x_0, e dalla (1*) si ottiene per tali valori di x

$$f_{y^{(n)}x}+f_{y^{(n)}y}y'+\dots+f_{y^{(n)}y^{(n)}}y^{(n+1)}-f_{y^{(n-1)}}+\int_{a_0}^{x}f_{y^{(n-2)}}dx-\dots=$$
$$=C_1+2C_2x+\dots+(n-1)C_{n-1}x^{n-2}.$$

Dando ora un incremento h ad x_0 ed indicando con $\Delta y^{(n+1)}$ l'incremento che in corrispondenza subisce la $y^{(n+1)}(x)$, otteniamo da quest'ultima

$$\left[\frac{d}{dx}\{f_{y^{(n)}x}+f_{y^{(n)}y}y'+\dots+f_{y^{(n)}y^{(n-1)}}y^{(n)}\}\right]_{x=x_0}+$$
$$+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x_0+h,\ y(x_0)+\Delta y,\dots,\ y^{(n)}(x_0)+\Delta y^{(n)})\{y^{(n+1)}(x_0)+\Delta y^{(n+1)}\}-$$
$$-f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x_0,\ y(x_0),\dots,\ y^{(n)}(x_0))y^{(n+1)}(x_0)]-$$
$$-\left[\frac{d}{dx}f_{y^{(n-1)}}\right]_{x\ x_0}+f_{y^{(n-2)}}(x_0,\ y(x_0),\dots,\ y^{(n)}(x_0))-\int_{a_0}^{x_0}f_{y^{(n-3)}}dx+\dots=$$
$$=2C_2+3\cdot 2C_3x_0+\dots+(n-1)(n-2)C_{n-1}x_0^{\,n-3}.$$

Ragionando come prima, tenendo ancora conto della (9), concludiamo che la $y^{(n+2)}(x)$ esiste finita per $x=x_0$, ed anche per ogni x sufficientemente prossimo ad x_0, e che per tali valori di x essa è anche continua.

Procedendo a questo modo si prova che, per $x=x_0$, esistono finite tutte le derivate dei primi $2n$ ordini della $y(x)$.

Osservazione I. — Dalla dimostrazione del presente n.° risulta, sotto le ipotesi indicate nell'enunciato stesso, che, se per tutti gli x di un intervallo $(\alpha,\ \beta)$, con $(a_0<\alpha<\beta<b_0)$, è

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x,\ y(x),\ y'(x),\dots,\ y^{(n)}(x))\neq 0,$$

in tutto $(\alpha,\ \beta)$ la $y(x)$ ammette finite e continue le derivate dei primi $2n$ ordini.

Inoltre per ogni x di $(\alpha,\ \beta)$ l'equazione (1) può anche scriversi nella forma seguente

$$(1')\qquad f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}f_{y''}-\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}f_{y^{(n)}}=0.$$

Osservazione II. — Se per la funzione f, oltre all'ipotesi del n.° 1, α) è verificata la seguente: esiste un numero j, (con $j=1,\ 2,\dots,\ n-1$) tale che ognuna delle derivate parziali $f_{y^{(n-j+s)}}$, $(s=1,\ 2,\dots,\ j)$ ammette finite e continue, in tutti i punti $(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$ e per ogni $y^{(n)}$ finito, le proprie derivate parziali dei primi s ordini rispettivamente; allora, ferme restando le altre ipotesi dell'enunciato del presente n.°, risulta dalla dimostrazione stessa che, per $x = x_0$, esistono finite derivate degli ordini $n + 1$, $n + 2, \dots, n + j$ della $y(x)$.

5. La condizione di Eulero per le curve minimanti con derivata di ordine n in modulo limitata. — *Se* $C_0^{[n]}$: $[y = y_0(x), a_0 \leq x \leq b_0]$ *è una curva* $C^{[n]}$ *minimante per* $I_{C[n]}^{[n]}$ *in una classe* $K^{[n]}$ *di curve* $C^{[n]}$, *ogni suo arco (i cui punti terminali abbiano ascisse* a^*, b^*, *con* $a^* < b^*$), *per il quale ogni punto* $(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x))$, *ad eccezione al più di quelli terminali, sia interno al campo* $A^{[n]}$ *e di indifferenza rispetto ad* $A^{[n]}$ *e a* $K^{[n]}$, *e per il quale, in quasi tutto l'intervallo* (a^*, b^*), *la* $y_0^{(n)}(x)$ *resti, in valore assoluto, inferiore ad un numero fisso, soddisfa all'equazione*

$$\text{(10)} \qquad \frac{d}{dx}\int_{a^*}^{x} f_{y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x))dx =$$

$$= \int_{a^*}^{x}\left[f_{y^{(n-1)}} - \int_{a^*}^{x}\left\{ f_{y^{(n-2)}} - \dots - \int_{a^*}^{x} f_y dx \right\} dx\right] dx + C_0' + C_1'x + \dots + C'_{n-1}x^{n-1},$$

ove $C_0', C_1', \dots, C'_{n-1}$ *sono* n *costanti.*

Osserviamo innanzi tutto che possiamo ripetere il ragionamento fatto al n.° 2 fino a stabilire la (7), e che in quasi-tutto (a, b) l'integrale

$$\text{(11)} \qquad \int_{a}^{x} F(x)dx$$

ammette per derivata la $F(x)$.

Conveniamo di scegliere per $p_0, p_1, \dots, p_n$, $n + 1$ valori distinti di (a, b) verificanti la (4) e tali inoltre che in ciascuno di questi punti l'integrale (11) abbia per derivata la funzione integranda.

Possiamo dunque affermare che, limitatamente a quelle $(n + 1)$-ple $p_0, p_1, \dots, p_n$, che si trovano nelle condizioni ora indicate, sussiste ancora la (8), e perciò, con ragionamento analogo a quello del n.° 2, concludiamo che la funzione $F(x)$ coincide, in quasi-tutto (a, b), con una funzione razionale intera di grado non superiore a $n - 1$, e che quindi è anche in quasi-tutto (a, b)

$$f_{y^{(n)}}(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) - \int_{a^*}^{x} f_{y^{(n-1)}}dx + \dots + (-1)^n \int_{a^*}^{x} dx \dots \int_{a^*}^{x} f_y dx =$$
$$= C_0' + C_1'x + \dots + C'_{n-1}x^{n-1},$$

ove $C_0', C_1', \dots, C'_{n-1}$ sono n costanti.

Ne segue in tutto (a, b)

$$\int_a^x f_{y^{(n)}}dx = \int_a^x \left[\int_{a^*}^x f_{y^{(n-1)}}dx \quad ... + (-1)^{n-1}\int_{a^*}^x dx ... \int_{a^*}^x f_y dx \right] dx +$$
$$+ C_0'(x - a) + C_1' \frac{x^2 - a^2}{2} + ... + C'_{n-1} \frac{x^n - a^n}{n},$$

e siccome il secondo membro ammette derivata in tutto (a, b) l'ammette anche il primo, e la (10) è così provata in tutto (a, b).

Ripetendo ora un ragionamento fatto dal TONELLI per $n = 1$ [10] e tenendo conto del principio di identità per le funzioni razionali intere, concludiamo facilmente che la (10) è valida in tutto (a^*, b^*).

6. **Estremaloide di ordine n.** - α) DEFINIZIONE. — *Ogni cuvva* $C^{[n]}$

$$C_0^{[n]}: \qquad y = y_0(x), \quad (a^*, b^*)$$

tale che ognuna delle derivate parziali

$$f_{y^{(j)}}(x, y_0(x), y_0'(x), ..., y_0^{(n)}(x)), \qquad (j=0, 1, 2, ..., n; y^{(0)}=y)$$

risulti integrabile sull'intervallo (a^*, b^*) *e che soddisfi in tutto* (a^*, b^*) *all'equazione* (10) *si dirà estremaloide del problema di ordine* n *o più semplicemente* **estremaloide di ordine n** *relativa alla funzione* f *considerata.*

β) *Se un'estremaloide di ordine* n *ammette, per ogni* x *di* (a^*, b^*), *finita e continua la derivata* $y^{(n)}(x)$, *essa è anche un'estremale di ordine* n *e soddisfa quindi all'equazione* (1).

γ) *Se* $I_{C[n]}^{[n]}$ *è un integrale quasi-regolare normale* [11] *ogni estremaloide di ordine* n, *sulla quale la* $y^{(n)}(x)$ *resti sempre, in valore assoluto, inferiore ad un numero fisso, è un'estremale di ordine* n.

Basta ripetere il ragionamento fatto dal TONELLI per $n = 1$ [12].

δ) Il ragionamento, fatto per provare quanto è affermato nel capoverso γ) del presente n.°, prova anche che, *se l'integrale* $I_{C[n]}^{[n]}$ *è quasi-regolare normale, su ogni estremaloide di ordine* n, *esiste sempre, finita o no, la derivata* $y^{(n)}(x)$ *e tale derivata è sempre continua* [13].

---

[10] Vedi L. TONELLI, opera cit. in [2], Vol. II, n.i 96, *b)* e 34, *a)*.
[11] Per questa definizione vedi S. CINQUINI, luogo cit. in [1], n.° 1, ε).
[12] Vedi L. TONELLI, opera cit. in [2], Vol. II, n.i 96, *d)* e 34, *d)*.
[13] Vedi L. TONELLI, idem n.° 96, *d)*.

7. La condizione di Eulero per una curva minimante $C^{[n]}$ (nel caso generale) sotto opportune ipotesi per la funzione f. — α) *Se in corrispondenza ad ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$, *appartenente ad* $A^{[n]}$, *si possono determinare quattro numeri positivi* M, N_1, N_2, N_3, *in modo che, per tutti i punti* $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *di* $A_L^{[n]}$, *per ogni* $y^{(n)}$ *finito, e per ogni* n*-pla* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, *tale che* $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \ldots + \varphi^2_{n-1} \leq M^2$, *e che* $(x, y + \varphi_0, y' + \varphi_1, \ldots, y^{(n-1)} + \varphi_{n-1})$ *sia un punto di* $A^{[n]}$, *si abbia*

$$(12) \qquad |f_{y^{(j)}}(x, y + \varphi_0, y' + \varphi_1, \ldots, y^{(n-1)} + \varphi_{n-1}, y^{(n)})| \leq$$
$$\leq N_1 |y^{(n)}| + N_2 |f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})| + N_3, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n-1; y^{(0)}=y);$$

se $C_0^{[n]}$ *è una curva* $C^{[n]}$ *minimante per* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *in una classe* $K^{[n]}$ *di curve* $C^{[n]}$;

allora ogni arco $\overline{C}_0^{[n]}$ *della* $C_0^{[n]}$, *i cui punti* $(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n-1)}(x))$, *ad eccezione al più di quelli terminali, siano interni al campo* $A^{[n]}$ *e di indifferenza rispetto ad* $A^{[n]}$ *e a* $K^{[n]}$, *è un'estremaloide di ordine* n *relativa alla funzione* f *considerata* ([14]).

Sia

$$C_0^{[n]}: \qquad y = y_0(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0,$$

e siano a, b, (ove $a_0 \leq a < b \leq b_0$) le ascisse dei punti terminali dell'arco $\overline{C}_0^{[n]}$.

Si supponga dapprima che ogni punto $P \equiv (x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n-1)}(x))$, $(a \leq x \leq b)$ sia interno al campo $A^{[n]}$, e che inoltre esista un numero $\rho > 0$, minore della minima distanza dei punti P dalla frontiera di $A^{[n]}$, e tale che, sostituendo a $\overline{C}_0^{[n]}$ una qualunque curva $C^{[n]}$: $y = y(x)$, per la quale sia

$$y^{(j)}(a) = y_0^{(j)}(a), \quad y^{(j)}(b) = y_0^{(j)}(b),$$
$$\left(j = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1;\ y^{(j)}(x) = \frac{d^j y(x)}{dx^j},\ \text{per } j \neq 0;\ y^{(0)}(x) = y(x)\right),$$

e che appartenga all'intorno $(\rho)^n$ della $\overline{C}_0^{[n]}$, non si esca dalla classe $K^{[n]}$.

Scelto come campo $A_L^{[n]}$ l'insieme di tutti i punti di $A^{[n]}$ che distano, di non più di 1, da almeno un punto $(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n-1)}(x))$, $(a_0 \leq x \leq b_0)$, siano M, N_1, N_2, N_3 i quattro numeri di cui si parla nell'enunciato del teorema, corrispondenti ad $A_L^{[n]}$, e si supponga che sia $\rho < M$.

([14]) Per $n = 1$, vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([6]), n.° 1.

Le considerazioni fatte all'inizio di questa dimostrazione, fino alla (14), sono completamente analoghe a quelle fatte dal TONELLI per $n = 1$, e vengono qui ripetute soltanto per comodità del lettore.

Rileviamo che dalla (12) segue immediatamente l'integrabilità di ognuna delle derivate $f_y(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x))$, $f_{y'}(\dots), \dots, f_{y^{(n-1)}}(\dots)$ sull'intervallo (a_0, b_0).

Indicato con E_r l'insieme di tutti gli x di (a, b), nei quali la derivata $y_0^{(n)}(x)$ esiste finita ed è $|y_0^{(n)}(x)| \leq r$, ove r è un qualunque numero intero positivo, siccome, per $r \to \infty$, la misura $m(E_r)$ di E_r tende a $b - a$, se r_0 è un valore di r, per il quale sia

$$m(E_{r_0}) > \frac{b-a}{2},$$

risulta, per tutti gli $r \geq r_0$,

$$m(E_r) > \frac{b-a}{2}.$$

È poi noto che la densità di E_r è uguale ad 1 su quasi-tutto E_r. Inoltre, se poniamo

$$\begin{aligned} &\psi_r(x) = f_{y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x)), && \text{in } E_r, \\ &\psi_r(x) = 0, && \text{fuori di } E_r, \end{aligned}$$

l'integrale

$$\int_a^x \psi_r(x)dx \tag{13}$$

ammette, in quasi-tutto (a, b), derivata finita ed uguale a $\psi_r(x)$.

Indicato con $\bar{E}_r$ l'insieme di tutti i punti di E_r, in cui questo insieme ha densità uguale ad 1 ed in cui l'integrale (13) ammette per derivata $\psi_r(x)$, risulta $m(\bar{E}_r) = m(E_r)$, e quindi, per tutti gli $r \geq r_0$, $m(\bar{E}_r) > \frac{b-a}{2}$.

Fissato un valore di r maggiore di r_0, siano $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n+1$ punti qualunque di $\bar{E}_r$, con $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, e si scelga un numero $\bar{\delta} > 0$, minore della metà del minimo delle differenze $x_j - x_{j-1}$, $(j = 1, 2, \dots, n)$, e tale che per ogni δ soddisfacente alla limitazione $0 < \delta \leq \bar{\delta}$, la misura della parte di $\bar{E}_r$, contenuta in uno qualunque degli $n+1$ intervalli $(x_0, x_0 + \delta)$, $(x_j - \delta, x_j)$, $(j = 1, 2, \dots, n)$, risulti maggiore di $\frac{\delta}{2}$.

Ad ogni x_0', con $x_0 < x_0' < x_0 + \frac{\delta}{2}$, corrispondono n massimi valori x_j', $(j = 1, 2, \dots, n)$, con $x_j - \delta < x_j' < x_j$, tali che la parte $l_{r,0}$ di $\bar{E}_r$, contenuta in (x_0, x_0') abbia una misura positiva, uguale a quella di ciascuna delle parti $l_{r,j}$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ di $\bar{E}_r$, contenute rispettivamente in (x_j', x_j):

$$m(l_{r,0}) = m(l_{r,1}) = \dots = m(l_{r,n}) > 0. \tag{14}$$

Ciò premesso, siano $A_{r,j}$, $(j=0, 1, 2,\ldots, n)$, $n+1$ numeri qualunque, non tutti nulli, tali che ognuno di essi non superi, in valore assoluto, l'unità e soddisfacenti alle n condizioni

$$(15)\qquad \left\{ \sum_{j=0}^{n} A_{r,j} = 0; \qquad \sum_{j=0}^{n} A_{r,j} \int_{l_{r,j}} x^{\mu} dx = 0, \quad \mu = 1, 2,\ldots, n-1; \right.$$

e si definisca una funzione $i_r(x)$ nel seguente modo

$$i_r(x) = A_{r,j}, \quad \text{nei punti di } l_{r,j}, \qquad (j=0, 1, 2,\ldots, n),$$
$$i_r(x) = 0, \quad \text{in tutti gli altri punti di } (a_0, b_0),$$

e una funzione $\Omega_r(x)$, ponendo

$$\Omega_r(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{a_0}^{x} i_r(t)(x-t)^{n-1}dt = \int_{a_0}^{x} dx \ldots \int_{a_0}^{x} i_r(x)dx.$$

Posto $l_r = l_{r,0} + l_{r,1} + \ldots + l_{r,n}$, è, quasi dappertutto fuori di l_r, $\dfrac{d^n\Omega_r(x)}{dx^n} = 0$, e inoltre, per quanto si è supposto riguardo ai numeri $A_{r,j}$, abbiamo in quasi-tutto (a_0, b_0)

$$(16)\qquad \left| \frac{d^n\Omega_r(x)}{dx^n} \right| \leq 1$$

e quindi anche

$$| \Omega_r^{(\nu)}(x) | \leq \frac{(b_0 - a_0)^{n-\nu}}{(n-\nu)!},$$

$$\left(\nu = 0, 1, 2,\ldots, n-1;\ \Omega_r^{(\nu)} \equiv \frac{d^\nu\Omega_r}{dx^\nu}, \text{ per } \nu \neq 0,\ \Omega_r^{(0)} \equiv \Omega_r\right);$$

$$(17)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} | \Omega_r^{(\nu)}(x) | \leq e^{b_0 - a_0}.$$

Inoltre per le (15) risulta, negli intervalli (a_0, x_0) e (x_n, b_0),

$$(18)\qquad \Omega_r^{(\nu)}(x) = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2,\ldots, n-1).$$

Considerata ora la curva

$$C_{r,t}^{[n]}: \qquad y = y_{r,t}(x) \equiv y_0(x) + t\Omega_r(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0,$$

in modo analogo a quello seguito dal TONELLI per $n=1$, e tenendo ora conto della (12), si prova che, per tutti i t minori, in valore assoluto, di un certo $\bar{t}$, la $C_{r,t}^{[n]}$ è una curva $C^{[n]}$ appartenente alla classe $K^{[n]}$ e al campo $A_L^{[n]}$.

Per ogni $|t| < \bar{t}$ dovrà quindi essere

$$(19)\qquad I^{[n]}_{C_{r,t}^{[n]}} - I^{[n]}_{C_0^{[n]}} \geq 0.$$

Abbiamo

$$I^{[n]}_{C^{[n]}_{r,t}} - I^{[n]}_{C_0^{[n]}} = \int_{a_0}^{b_0} [f(x, y_{r,t}, y'_{r,t}, \dots, y^{(n)}_{r,t}) - f(x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)})]dx =$$

$$= t\int_{x_0}^{x_n} \{ \Omega_r f_y(x, y_0 + t\theta\Omega_r, y_0' + t\theta\Omega_r', \dots, y_0^{(n)} + t\theta\Omega_r^{(n)}) + \Omega_r' f_{y'}(\dots) + \dots$$

$$\dots + \Omega_r^{(n)} f_{y^{(n)}}(\dots) \} dx,$$

ove θ è compreso fra 0 e 1, e siccome, quasi dappertutto fuori di l_r, è $\Omega_r^{(n)}(x) = 0$, se $\bar{t}$ è sufficientemente piccolo, si ha in quasi-tutto (x_0, x_n), per le (12), (16), (17)

$$(20) \quad | \Omega_r f_y(x, y_0 + t\theta\Omega_r, y_0' + t\theta\Omega_r', \dots) + \Omega_r' f_{y'}(\dots) + \dots + \Omega_r^{(n)} f_{y^{(n)}}(\dots) | <$$
$$< e^{b_0 - a_0} \{ N_1 | y_0^{(n)} | + N_2 | f(x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) | + N_3 + \Phi \} + \Phi,$$

dove Φ indica il massimo modulo delle derivate parziali $f_y, f_{y'}, \dots, f_{y^{(n)}}$ per tutti gli $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A_L^{[n]}$ e per tutti gli $y^{(n)}$ tali che $|y^{(n)}| \leq r + \bar{t}$.

Siccome il secondo membro della (20) è integrabile in tutto (a_0, b_0), per un noto teorema d'integrazione per serie, si conclude che esiste finito $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[I^{[n]}_{C^{[n]}_{r,t}} - I^{[n]}_{C_0^{[n]}} \right]$, e che quindi, tenendo conto della (19), risulta

$$(20') \quad \int_{x_0}^{x_n} [\Omega_r f_y(x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) + \Omega_r' f_{y'}(\dots) + \dots + \Omega_r^{(n)} f_{y^{(n)}}(\dots)]dx = 0.$$

Posto

$$F(x) \equiv f_{y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x)) - \int_a^x f_{y^{(n-1)}} dx + \int_a^x dx \int_a^x f_{y^{(n-2)}} dx + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \int_a^x dx \dots \int_a^x f_y dx,$$

integrando per parte i primi $n - 1$ termini dell'espressione che figura sotto il segno d'integrale nella (20'), rispettivamente $n - 1$ volte, $n - 2$ volte, ..., 1 volta, e tenendo conto della (18) risulta

$$\int_{x_0}^{x_n} \Omega_r^{(n)}(x) F(x) dx = 0,$$

cioè

$$(21) \qquad \sum_{j=0}^{n} A_{r,j} \int_{l_{r,j}} F(x) dx = 0.$$

Siccome x_0 è un punto di $\overline{E}_r$, in modo analogo al TONELLI, si prova che per $x_0' \to x_0$, è

$$\frac{1}{m(l_{r,0})}\int_{l_{r,0}} F(x)dx \to F(x_0);$$

e analogamente per $x_j' \to x_j$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ risulta

$$\frac{1}{m(l_{r,j})}\int_{l_{r,j}} F(x)dx \to F(x_j), \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Tenendo ora conto delle (14), e osservando che, in virtù di esse, quando $x_0' \to x_0$, anche ogni $x_j' \to x_j$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ dalla (21) risulta

$$\sum_{j=0}^{n} A_{r,j} F(x_j) = 0. \tag{22}$$

D'altra parte, tenendo ancora conto delle (14), dalle ultime $(n-1)$ delle (15) si deduce, in modo analogo

$$\sum_{j=0}^{n} A_{r,j} x_j^{\mu} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \dots, n-1).$$

Ora, siccome $x_0, x_1, \dots, x_n$ sono $n+1$ punti qualunque di $\overline{E}_r$, dalla prima delle (15), da queste ultime e dalla (22) segue che, in tutti i punti di $\overline{E}_r$, ossia per quasi tutti gli x di E_r, $F(x)$ coincide con una funzione razionale intera della x di grado non superiore ad $n-1$, ossia

$$f_{y^{(n)}}(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x)) - \int_a^x f_{y^{(n-1)}} dx + \dots + (-1)^n \int_a^x dx \dots \int_a^x f_y dx = \tag{22'}$$
$$= C_0^{(r)} + C_1^{(r)} x + \dots + C_{n-1}^{(r)} x^{n-1},$$

ove $C_0^{(r)}, C_1^{(r)}, \dots, C_{n-1}^{(r)}$ sono n costanti.

Siccome E_r è tutto contenuto in E_{r+1}, e ognuno di questi insiemi, per $r > r_0$, ha misura maggiore di $\frac{1}{2}(b-a)$, per il principio d'identità dei polinomi razionali interi concludiamo che è $C_j^{(r)} = C_j^{(r+1)}$, $(j = 0, 1, 2 \dots, n-1)$, ossia che la (22') è verificata in quasi-tutto (a, b).

Per liberarsi dalla limitazione imposta all'inizio della dimostrazione basta ripetere il ragionamento fatto dal TONELLI per $n = 1$, tenendo ancora conto del principio di identità per le funzioni razionali intere, e pure in modo analogo al TONELLI si conclude che in tutto (a, b) è verificata la (10).

β) OSSERVAZIONE. — Il teorema del presente n.° continua a sussistere se, in luogo della (12), si suppone che valgano quasi dappertutto su (a, b)

le n disuguaglianze seguenti

$$|f_{y^{(j)}}(x, y_0(x)+\varphi_0, y_0'(x)+\varphi_1, \dots, y_0^{(n-1)}(x)+\varphi_{n-1}, y_0^{(n)}(x)| \leq$$
$$\leq N_1 |y_0'(x)| + N_2 |f(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x)| + g(x),$$
$$(j = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

ove $g(x)$ è una funzione integrabile in (a, b), intendendo che queste disuguaglianze siano verificate per tutte le n-ple $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, tali che sia $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \dots + \varphi_{n-1}^2 \leq M^2$, e per le quali il punto $(x_0, y_0(x)+\varphi_0, y_0'(x)+\varphi_1, \dots, y_0^{(n-1)}(x) + \varphi_{n-1})$ appartenga ad $A^{[n]}$.

γ) Un notevole caso particolare. — *La condizione* (12) *del teorema del presente n.° è verificata, se, in corrispondenza ad ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$, *appartenente ad* $A^{[n]}$, *si possono determinare cinque costanti* μ, m, m_1, M, M_1, *con* $\mu > 0$, $m > 0$, $M > 0$, *tali che si abbia, in tutti i punti* $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *di* $A_L^{[n]}$ *e per ogni* $y^{(n)}$ *finito,*

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n)})| \geq m\, |y^{(n)}|^{\mu} + m_1$$
$$|f_j(x, y, y', \dots, y^{(n)})| \leq M\, |y^{(n)}|^{\mu} + M_1, \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1;\ y^{(0)} = y).$$

8. **Estremaloidi di ordine n con derivate di ordine $n-1$ a rapporto incrementale superiormente [inferiormente] limitato.** — α) *Se in ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$, *appartenente ad* $A^{[n]}$, $|f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)})|$ *tende uniformemente a* $+\infty$, *per* $y^{(n)} \to +\infty$ [*per* $y^{(n)} \to -\infty$], *allora per ogni estremaloide di ordine* n: $y = y(x)$, $(a \leq x \leq b)$, *relativa alla funzione* $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ *e per la quale ogni punto* $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ *appartenga ad* $A^{[n]}$, *la derivata di ordine* $n-1$ *della* y(x) *è a rapporto incrementale superiormente* [*inferiormente*] *limitato.*

La dimostrazione è analoga a quella data dal Tonelli per $n = 1$ ([15]).

β) *Se la funzione* f *dipende soltanto dalle* x *e* $y^{(n)}$, *e se in ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$, *appartenente ad* $A^{[n]}$, *la* $f_{y^{(n)}}(x, y^{(n)})$ *tende uniformemente, per* $y^{(n)} \to +\infty$ [*per* $y^{(n)} \to -\infty$] *ad un limite* l, *indipendente da* x, *e per ogni* $y^{(n)}$ *finito maggiore* [*minore*] *di un* $Y^{(n)}$, *indipendente da* x, *è* $f_{y^{(n)}}(x, y^{(n)}) \neq l$, *allora su ogni estremaloide di ordine* n *relativa alla* $f(x, y^{(n)})$ *ed appartenente ad* $A^{[n]}$, *la derivata di ordine* $n-1$ *della* y(x) *è a rapporto incrementale superiormente* [*inferiormente*] *limitato.*

Basta ripetere la dimostrazione data dal Tonelli per $n = 1$ ([16]).

([15]) Vedi L. Tonelli, luogo cit. in ([6]), n.i 3 e 4.
([16]) Vedi L. Tonelli, luogo cit. in ([6]), n.i 5 e 6.

9. **Estremaloide di ordine n con derivata di ordine $n-1$ a rapporto incrementale limitato.** — α) *Se in ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$, *appartenente ad* $A^{[n]}$, $|f_{y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})|$ *tende uniformemente all'*∞ *per* $|y^{(n)}| \to \infty$, *per ogni estremaloide di ordine* n: $y = y(x)$, $(a \leq x \leq b)$, *relativa alla funzione* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, *e tale che ogni punto* $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ *appartenga ad* $A^{[n]}$, *la derivata di ordine* $n-1$ *della* $y(x)$ *è a rapporto incrementale limitato.*

β) *Si perviene alla stessa conclusione se per la funzione* f *è soddisfatta la condizione del n.º* 8, β), *intendendosi che si abbia*

$$f_{y^{(n)}}(x, y^{(n)}) \to l_1, \quad \text{per} \quad y^{(n)} \to +\infty,$$
$$f_{y^{(n)}}(x, y^{(n)}) \to l_2, \quad \text{per} \quad y^{(n)} \to -\infty,$$

ove i numeri l_1 *e* l_2, *(ciascuno dei quali può essere finito o no) possono essere uguali o no.*

Ciò è conseguenza immediata del n.º 8.

10. **Condizione sufficiente affinchè un'estremaloide di ordine n sia un'estremale di ordine n.** — *Se l'integrale* $I_{C[n]}^{[n]}$ *è quasi-regolare normale ed è verificata o la condizione del n.º* 9, α), *oppure quella del n.º* 9, β), *per ogni estremaloide di ordine* n: $y = y(x)$, $(a \leq x \leq b)$, *relativa alla funzione* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *e tale che ogni punto* $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ *appartenga ad* $A^{[n]}$, *la derivata di ordine* n *della* $y(x)$ *è sempre finita e continua e quindi l'estremaloide di ordine* n *è un'estremale di ordine* n.

Ciò segue immediatamente dal n.º 6, δ).

11. **Variazione prima** (17). — α) Considerata una curva $C^{[n]}$: $[y = y(x), a \leq x \leq b]$ e indicate con $\bar{\delta}y, \bar{\delta}y', \ldots, \bar{\delta}y^{(n)}$ le variazioni smorzate delle $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ sull'intervallo (a, b), e supposto che esistano finiti gli integrali

$$\int_a^b f_{y^{(j)}}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx, \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ y^{(0)} = y),$$

dicesi *variazione prima smorzata* dell' integrale $I_{C[n]}^{[n]}$ sulla curva $C^{[n]}$ l' espressione

$$\bar{\delta}I_{C[n]}^{[n]} = \int_a^b \{ f_y \bar{\delta}y + f_{y'}\bar{\delta}y' + \ldots + f_{y^{(n)}}\bar{\delta}y^{(n)} \}\, dx,$$

(17) Per $n = 1$, vedi L. TONELLI, opera cit. in (2), Vol. II, n.º 98.
È bene ricordare che la variazione $\bar{\delta}y^{(j)}$ della $y^{(j)}(x)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, è la derivata di ordine j della variazione $\bar{\delta}y$ della $y(x)$.

intendendo di considerare soltanto quelle variazioni $\bar{\delta}y$, per le quali il prodotto $f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))\ \bar{\delta}y^{(n)}$ risulta integrabile sull'intervallo (a, b).

β) *Se sulla curva* $C^{[n]}$: $[y = y(x),\ a \leq x \leq b]$ *esiste la variazione prima* $\delta I^{[n]}_{C[n]}$ *ed è*

$$\bar{\delta} I^{[n]}_{C[n]} \equiv 0, \tag{23}$$

tale curva è un'estremaloide di ordine n, *e se in tutti i punti di* (a, b) *esiste sempre finita e continua la derivata di ordine* n *della* y(x), *tale curva è un'estremale di ordine* n.

γ) Viceversa, *se la curva* $C^{[n]}$: $[y = y(x),\ a \leq x \leq b]$ *è un'estremaloide di ordine* n, *su tale curva vale la* (23).

Basta ripetere, con qualche piccola estensione, le dimostrazioni date dal TONELLI per $n = 1$.

§ 3. Estremo « in piccolo ».

12. Esistenza dell'estremo « in piccolo ». - α) DEFINIZIONI. — Premettiamo le due seguenti definizioni:

1°) Dicesi *strato* $S(A^{[n]})$, $[S(A^{[n]}_1)]$ il minimo strato dello spazio ad $n+1$ dimensioni $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, limitato da due iperpiani paralleli all'iperpiano $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, e che contiene il campo $A^{[n]}$, [o la sua parte $A^{[n]}_1$].

2°) Un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ dicesi *interno al campo* $A^{[n]}$ [o alla sua parte $A^{[n]}_1$] *relativamente allo strato* $S(A^{[n]})$, $[S(A^{[n]}_1)]$, se è possibile determinare un numero $\rho_2 > 0$ in modo che tutti i punti, comuni all'ipersfera $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (y' - y_0')^2 + \dots + (y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)})^2 \leq \rho^2$, e allo strato $S(A^{[n]})$, $[S(A^{[n]}_1)]$, appartengano pure ad $A^{[n]}$, [ad $A^{[n]}_1$].

β) TEOREMA I (CAMPO LIMITATO). — *Se*: a) *l'integrale* $I^{[n]}_{C[n]}$ *è quasi-regolare positivo normale;*

b) *in ciascun punto del campo* $A^{[n]}_L$ *è, per* $|y^{(n)}| \to \infty$,

$$|f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)})| \to \infty; \tag{24}$$

c) *si possono determinare quattro numeri positivi* M, N_1, N_2, N_3, *in modo che sia, in tutti i punti* $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}_L$, *per ogni* $y^{(n)}$ *finito e per ogni* n*-pla* $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, *tale che* $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \dots + \varphi^2_{n-1} \leq M$, *e che* $(x, y + \varphi_0, y' + \varphi_1, \dots, y^{(n-1)} + \varphi_{n-1})$ *sia un punto di* $A^{[n]}$,

$$|f_{y^{(j)}}(x, y + \varphi_0, y' + \varphi_1, \dots, y^{(n-1)} + \varphi_{n-1})| \leq$$
$$\leq N_1 |y^{(n)}| + N_2 |f(x, y, y', \dots, y^{(n)})| + N_3, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1;\ y^{(0)} = y);$$

d) $A_0^{[n]}$ *è un insieme chiuso tutto composto di punti interni ad* $A_L^{[n]}$ *relativamente allo strato* $S(A_L^{[n]})$;

allora, preso comunque un numero $\rho_0 > 0$, *se ne può determinare un altro* δ_0 *positivo e* $\leq \rho_0$, *in modo che se* $P_0 \equiv (x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ *e* $P_1 \equiv (x_1, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})$ *sono due punti qualunque, rispettivamente di* $A_0^{[n]}$ *e di* $A_L^{[n]}$, *con* $x_0 \neq x_1$, *tali che sia*

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (y_0' - y_1')^2 + \ldots + (y_0^{(n-1)} - y_1^{(n-1)})^2 \leq \delta_0^2, \tag{25}$$

e che fra le curve $C_L^{[n]}$: $[y = y(x),\ x_0 \leq x \leq x_1]$, *per le quali è*

$$y^{(r)}(x_i) = y_i^{(r)}, \tag{26}$$

$$\left(r = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1;\ y^{(r)}(x) = \frac{d^r y(x)}{dx^r},\ r \neq 0;\ y^{(0)} = y;\ i = 0,\ 1\right),$$

ne esista almeno una $\Gamma^{[n]}$: $y = y_\gamma(x)$ *per la quale, in quasi tutto* (x_0, x_1), *sia*

$$\left|\frac{d^n y_\gamma(x)}{dx^n}\right| \leq M^*, \tag{27}$$

con M^* *numero fisso, fra tutte le curve* $C_L^{[n]}$, *che soddisfano alle condizioni* (26), *ne esiste almeno una minimante per l'integrale*

$$I_{C[n]}^{[n]} = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\ y(x),\ y'(x), \ldots,\ y^{(n)}(x))dx$$

e inoltre tutte queste curve minimanti sono delle estremali di ordine n, *per le quali, in tutto* (x_0, x_1), *è sempre*

$$(x - x_0)^2 + (y(x) - y_0)^2 + (y'(x) - y_0')^2 + \ldots + (y^{(n-1)}(x) - y_0^{(n-1)})^2 \leq \rho_0^2. \tag{28}$$

Infatti, siccome alla condizione (24) può sostituirsi la seguente

$$\left|\frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{y^{(n)}}\right| \to \infty, \tag{29}$$

per un teorema di esistenza, dato in altro mio lavoro ([18]), fra le curve $C_L^{[n]}$ che, nei punti terminali, soddisfano alle condizioni (26), ne esiste almeno una minimante per l'integrale $I_{C[n]}^{[n]}$.

Inoltre, siccome dalla (24) e dall'ipotesi che $I_{C[n]}^{[n]}$ sia quasi-regolare positivo normale, segue che, per $|y^{(n)}| \to \infty$, è $|f_{y^{(n)}}| \to \infty$, uniformemente in tutto $A_L^{[n]}$, per i risultati dei n.i 7 e 10 del presente lavoro, queste curve minimanti sono tutte estremali di ordine n.

([18]) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ([1]), § 2, n.° 5.

Rimane da provare la (28). Sia $y = y(x)$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ una qualunque di queste estremali di ordine n e supponiamo, se è possibile, che esista un x_*, con $x_0 < x_* < x_1$, tale che si abbia

(30) $(x_* - x_0)^2 + (y(x_*) - y_0)^2 + (y'(x_*) - y_0')^2 + \ldots + (y^{(n-1)}(x_*) - y_0^{(n-1)})^2 > \rho_0^2.$

Indichiamo con (a_0, a_1), $(a_0 < a_1)$ il massimo intervallo di (x_0, x_1) che contiene x_*, ed è tale che in tutti i suoi punti, eccettuati quelli terminali, sia

$$(x - x_0)^2 + (y(x) - y_0)^2 + (y'(x) - y_0')^2 + \ldots + (y^{(n-1)}(x) - y_0^{(n-1)})^2 >$$
$$> (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (y_1' - y_0')^2 + \ldots + (y_1^{(n-1)} - y_0^{(n-1)})^2.$$

L'esistenza dell'intervallo (a_0, a_1) è assicurata, in virtù della (30), dalla (25); e si tenga presente, che entrambi i punti $(a_i, y(a_i), y'(a_i), \ldots, y^{(n-1)}(a_i))$, $(i = 0, 1)$ sono non esterni all'ipersfera (P_0, δ_0).

Inoltre, se δ_0 è sufficientemente piccolo, il massimo modulo della differenza $y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a_0)$, in (a_0, a_1) è necessariamente $> \frac{\rho_0}{2}$ [19].

---

[19] Infatti, in caso contrario, posto per ogni x di (a_0, a_1),

$$\Delta(x) = (x - x_0)^2 + (y(x) - y_0)^2 + (y'(x) - y_0')^2 + \ldots + (y^{(n-1)}(x) - y_0^{(n-1)})^2,$$

abbiamo

$$\Delta(x) \leq (x - x_0)^2 + 2[(y(a_0) - y_0)^2 + (y'(a_0) - y_0')^2 + \ldots + (y^{(n-1)}(a_0) - y_0^{(n-1)})^2] +$$
$$+ 2[(y(x) - y(a_0))^2 + (y'(x) - y'(a_0))^2 + \ldots + (y^{(n-2)}(x) - y^{(n-2)}(a_0))^2] + 2[y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a_0)]^2$$

Ma per lo sviluppo accorciato di Taylor, abbiamo per ogni x di (a_0, a_1) e per $r = 0, 1, 2, \ldots, n-2$,

$$y^{(r)}(x) - y^{(r)}(a_0) = (x - a_0)y^{(r+1)}(a_0) + \frac{(x - a_0)^2}{2!} y^{(r+2)}(a_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x - a_0)^{n-r-1}}{(n - r - 1)!} y^{(n-1)}(a_0) + \frac{(x - a_0)^{n-r-1}}{(n - r - 1)!} \mid y^{(n-1)}(\tilde{a}_r) - y^{(n-1)}(a_0) \mid,$$

ove $\tilde{a}_r$ è compreso fra a_0 e a_1, e quindi anche, supposto $\delta_0 \leq 1$,

$$\mid y^{(r)}(x) - y^{(r)}(a_0) \mid \leq \delta_0 \sum_{s=1}^{n-1} \mid y^{(s)}(a_0) \mid + \delta_0 \operatorname{Max} \mid y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a_0) \mid \leq$$
$$\leq \delta_0 \left\{ \sum_{s=1}^{n-1} \mid y^{(s)}(a_0) - y_0^{(s)} \mid + \sum_{s=1}^{n-1} \mid y_0^{(s)} \mid \right\} + \delta_0 \operatorname{Max} \mid y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a_0) \mid \leq$$
$$\leq \delta_0 \left\{ (n-1)\delta_0 + \sum_{s=1}^{n-1} \mid y_0^{(s)} \mid + \operatorname{Max} \mid y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a_0) \mid \right\},$$

e pertanto

$$\Delta(x) \leq 3\delta_0^2 + 2n\delta_0^2 \left\{ (n-1)\delta_0 + \sum_{s=1}^{n-1} \mid y_0^{(s)} \mid + \operatorname{Max} \mid y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a_0) \mid \right\}^2 +$$
$$+ 2 \operatorname{Max} [y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a_0)]^2.$$

Dunque in tutto (a_0, a_1) risulta

$$\Delta(x) \leq \delta_0^2 \left[3 + 2n \left\{ (n-1)\delta_0 + \sum_{s=1}^{n-1} \mid y_0^{(s)} \mid + \frac{\rho_0}{2} \right\}^2 \right] + 2\frac{\rho_0^2}{4} < \rho_0^2,$$

se δ_0 è sufficientemente piccolo; e ciò è contrario alla (30).

Ora, fissato un $H > 0$ ad arbitrio, per la (29) si può determinare un $H_0 > 0$, in modo che, per $|y^{(n)}| > H_0$, risulti, in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A_L^{[n]}$,

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq H\,|y^{(n)}|,$$

e quindi, indicato con H_1 un numero non positivo e non superiore al minimo della funzione f per ogni $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A_L^{[n]}$ e per ogni $y^{(n)}$, abbiamo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))dx \geq H_1(x_1 - x_0) + H\int_{a_0}^{a_1} |y^{(n)}(x)|\,dx - HH_0(a_1 - a_0),$$

e siccome l'integrale, che figura al secondo membro di quest'ultima, non è inferiore all'oscillazione della $y^{(n-1)}(x)$ nell'intervallo (a_0, a_1) ed è quindi « a fortiori » $\geq \frac{\rho_0}{2}$, risulta

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \dots, y^{(n)})dx \geq (H_1 - HH_0)\delta_0 + H\frac{\rho_0}{2} > \frac{1}{4} H\rho_0,$$

se δ_0 è sufficientemente piccolo.

Ma siccome, per ipotesi, esiste almeno una curva $\Gamma^{[n]}$, che gode della proprietà indicata nell'enunciato, indicato con H_2 il massimo modulo della funzione f per ogni $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A_L^{[n]}$ e per ogni $|y^{(n)}| \leq M^*$, e scelto δ_0 in modo che sia anche

$$H_2\delta_0 \leq \frac{1}{4}\rho_0,$$

risulta

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_\gamma, y'_\gamma, \dots, y_\gamma^{(n)})dx < \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \dots, y^{(n)})dx,$$

contrariamente all'ipotesi che la curva $y = y(x)$ sia minimante per l'integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$.

Dunque non può esistere un x_* di (x_0, x_1) che verifichi la (30), e con ciò la (28) è dimostrata.

γ) TEOREMA II (CAMPO ILLIMITATO). — *Se sono soddisfatte le condizioni del teorema del n.° 10 della mia Memoria citata in* [1], *nell'enunciato del teorema, dato nel* β) *del presente n.°, può sostituirsi al campo* $\mathrm{A}_L^{[n]}$ *il campo* $\mathrm{A}^{[n]}$ *e, ad* $\mathrm{A}_0^{[n]}$, *un insieme, limitato e chiuso, di punti interni ad* $\mathrm{A}^{[n]}$ *relativamente allo strato* $\mathrm{S}(\mathrm{A}^{[n]})$, *intendendosi che la condizione* c) *di tale* *enunciato sia verificata per ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$, *tutto costituito di punti di* $A^{[n]}$.

Basta modificare lievemente la dimostrazione data in β).

δ) OSSERVAZIONE I. — Nell'enunciato del teorema dato in β) [e così pure in γ)], all'ipotesi che per la funzione $y_\gamma(x)$, che definisce la curva $\Gamma^{[n]}$, sia verificata la (27), può sostituirsi quella che la funzione $y_\gamma(x)$ soddisfi alla disuguaglianza

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,\ y_\gamma(x),\ y_\gamma'(x), \ldots,\ y_\gamma^{(n)}(x))dx \leq \Phi\left(|\, x_1 - x_0 \,|\right),$$

ove $\Phi(u)$ è una funzione definita per $u \geq 0$, continua e non negativa nell'intervallo $(0,\ \rho_0)$, e tale che, per $u \to 0$, sia $\Phi(u) \to 0$.

ε) OSSERVAZIONE II. — È da rilevare che, nelle dimostrazioni dei teoremi del presente n.°, ci si giova dell'esistenza della curva $\Gamma^{[n]}$, soltanto per provare la (28).

È da soggiungere che se non esiste almeno una curva $\Gamma^{[n]}$, che goda della proprietà indicata in β), o di quella indicata in δ), la (28) può non essere verificata, come risulta dal seguente esempio:

Sia $n = 2$;

$$P_0 \equiv (0,\ 0,\ 1), \quad P_1 \equiv (a,\ 0,\ 1), \quad \text{con} \quad 0 < a < 1;$$

e sia

$$f(x,\ y,\ y',\ y'') \equiv y''^2,$$

e si indichi con $A_L^{[2]}$ il cubo dello spazio $(x,\ y,\ y')$, di vertici opposti $(-2,\ -2,\ -2)$, $(2,\ 2,\ 2)$, avente gli spigoli paralleli agli assi coordinati.

Sono soddisfatte tutte le altre condizioni del teorema dato in β), ma non esiste alcuna curva $\Gamma^{[n]}$ che goda o della proprietà indicata in β), o di quella indicata in δ).

Ebbene, per quanto sia piccolo il numero $a > 0$, non esiste alcuna estremale di ordine 2

$$y = y(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

soddisfacente alla (28), e per la quale sia

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \quad y(a) = 0,\ y'(a) = 1, \tag{31}$$

se è $\rho_0 < \frac{3}{2}$. Infatti se ci fosse, essa dovrebbe soddisfare all'equazione differenziale

$$2y'' = C_0 + C_1 x,$$

dalla quale si ricava, integrando due volte e tenendo conto delle (31)

$$y = \frac{2}{a^2} x^3 - \frac{3}{a} x^2 + x.$$

Qualunque sia $a > 0$, è $y'\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, mentre si ha $y'(0) = y'(a) = 1$.

13. Esistenza dell'estremale di ordine *n* per due punti in ciascuno dei quali sono fissati i valori della funzione e delle derivate dei primi $n-1$ ordini. — α) Le proposizioni del n.° 12 forniscono dei teoremi di esistenza per le estremali di ordine n, e si ha precisamente: *Se sono verificate le ipotesi di uno qualunque dei n.i* 12, β); γ); δ), *esiste sempre almeno un'estremale di ordine* n, *che nei punti terminali soddisfa alle condizioni* (26), *e in tutti i punti della quale è sempre verificata la* (28).

β) Osservazione. — È importante mettere in rilievo che, se non è verificata la (24) può non esserci alcuna estremale di ordine n, $(n \geq 2)$, soddisfacente, nei punti terminali, alle condizioni (26), come risulta dai seguenti esempi.

γ) Esempio I. — Sia $n = 2$; sia $A_L^{[2]}$ la sfera dello spazio (x, y, y') di centro nell'origine e raggio R, con R grande a piacere, ma fissato, e sia

$$P_0 \equiv (0,\ 0,\ 0), \quad P_1 \equiv (a,\ -a^2,\ -3a), \quad \text{con} \quad 0 < a \leq 1;$$
$$f(x,\ y,\ y',\ y'') \equiv e^{y''}.$$

Sono soddisfatte tutte le altre condizioni del n.° 12, β), eccettuata la (24), e fra le curve $C_L^{[2]}$: $y = y(x)$, $(0 \leq x \leq a)$ per le quali è

(32) $$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(a) = -a^2, \quad y'(a) = -3a,$$

assumiamo come curva $\Gamma^{[2]}$ la $y = -\frac{x^3}{a}$, $(0 \leq x \leq a)$, per la quale è, in tutto $(0, a)$,

$$|\, y''(x) \,| \leq 6.$$

Ci proponiamo di mostrare che, comunque si prenda piccolo il numero δ_0, che figura nell'enunciato del n.° 12, β) (e a tal uopo basta prendere sufficientemente piccolo il numero $a > 0$ ora considerato), non esiste mai alcuna estremale di ordine 2:

$$y = y(x), \quad (0 \leq x \leq a)$$

la quale verifichi le condizioni terminali (32), e per la quale possa anche *non* aver luogo la (28).

Dall'equazione delle estremali di ordine 2

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{y''} = 0,$$

si ricava

$$e^{y''} = C_1 x + C_2 \tag{33}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \lg (C_1 x + C_2), \\ y' &= \frac{1}{C_1} (C_1 x + C_2) \lg (C_1 x + C_2) - x + C_3, \\ y &= \frac{1}{2C_1^2} (C_1 x + C_2)^2 \lg (C_1 x + C_2) - \frac{1}{4C_1^2} (C_1 x + C_2)^2 - \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4, \end{aligned} \tag{34}$$

ove C_1, C_2, C_3, C_4 sono 4 costanti arbitrarie. Per le (32) deve essere

$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{C_2^2}{2C_1^2} \lg C_2 - \dfrac{C_2^2}{4C_1^2} + C_4 = 0 \\ y'(0) = \dfrac{C_2}{C_1} \lg C_2 + C_3 = 0 \\ y(a) = \dfrac{(C_1 a + C_2)^2}{2C_1^2} \lg (C_1 a + C_2) - \dfrac{(C_1 a + C_2)^2}{4C_1^2} - \dfrac{a^2}{2} + C_3 a + C_4 = -a^2 \\ y'(a) = \dfrac{C_1 a + C_2}{C_1} \lg (C_1 a + C_2) - a + C_3 = -3a. \end{cases}$$

Osserviamo subito che deve essere $C_2 > 0$. Infatti, per la (33), non può essere $C_2 < 0$, e se fosse $C_2 = 0$, dalle prime due risulterebbe $C_3 = C_4 = 0$, e le ultime due sarebbero incompatibili.

Ciò premesso, sostituiamo nelle ultime due a C_4 e a C_3 i valori ricavati dalle prime due e poniamo

$$C_1 = \frac{C_2 z}{a},$$

ove deve essere necessariamente $z > -1$. Infatti, per la (33), non può essere $C_1 a + C_2 < 0$, e d'altra parte nemmeno $C_1 a + C_2 = 0$, perchè il nostro sistema sarebbe incompatibile. Dobbiamo quindi avere $C_1 a + C_2 > 0$ e perciò $z > -1$.

Eliminando C_2 fra le ultime due dopo avere fatto le sostituzioni indicate, otteniamo

$$\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z}\right) \lg (1 + z) - \frac{1}{z} - \frac{3}{2} = 0.$$

Posto

$$F(z) = z \frac{\frac{3}{2} z + 1}{z + 1} - \lg (1 + z), \quad (z > -1)$$

è evidentemente $F(0) = 0$, ma questa soluzione non ci fornisce alcuna estremale di ordine n, soddisfacente alle condizioni fissate nei punti terminali, come si verifica facilmente, tenendo conto che, per $z = 0$, è $C_1 = 0$, e quindi dalla (34) si deduce

$$y = \frac{x^2}{2} \lg C_2 + C_3 x + C_4 .$$

D'altra parte essendo

$$F'(z) > 0, \text{ per } z > 0; \quad F'(z) < 0, \text{ per } -1 < z < 0,$$

l'equazione $F(z) = 0$, non ha, per $z > -1$, altre radici, fuorchè $z = 0$, e quindi, comunque si prenda piccolo il numero $a > 0$, non può esserci alcuna estremale di ordine 2, relativa alla funzione $e^{y''}$ e soddisfacente nei punti terminali alle (32).

δ) ESEMPIO II. — *a*) Sia $n = 2$, sia $A_L^{[2]}$ il campo dello spazio (x, y, y') indicato in γ) e sia

$$P_0 \equiv (a, a^2, 0), \quad P_1 \equiv (-a, -a^2, 0), \quad 0 < a \leq 1;$$
$$f(x, y, y', y'') \equiv \sqrt{1 + y''^2}.$$

Sono soddisfatte tutte le altre condizioni del n.° 12, β), eccettuata la (24), e fra le curve $C_L^{[2]}$: $y = y(x)$, $(-a \leq x \leq a)$, per le quali è

$$y(a) = a^2, \ y'(a) = 0; \quad y(-a) = -a^2, \ y'(-a) = 0, \tag{35}$$

possiamo assumere come curva $\Gamma^{[2]}$ la

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a)^3 - \frac{3}{2}(x - a)^2 + a^2, \quad (-a \leq x \leq a),$$

per la quale, in tutto $(-a, a)$, è $|y''(x)| \leq 3$.

Ci proponiamo di mostrare che, comunque si prenda piccolo il numero δ_0, che figura nell'enunciato del n.° 12, β), (e a tal uopo basta prendere sufficientemente piccolo il numero $a > 0$, ora considerato), non esiste mai alcuna estremale di ordine 2:

$$y = y(x), \quad (-a \leq x \leq a),$$

la quale verifichi le condizioni terminali (35), e per la quale possa anche *non* aver luogo la (28).

Dall'equazione delle estremali di ordine 2

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{y''}{\sqrt{1 + y''^2}} = 0,$$

si ricava

$$y'' = \frac{C_1 x + C_2}{\sqrt{1 - (C_1 x + C_2)^2}}, \tag{36}$$

$$y' = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - (C_1 x + C_2)^2} + C_3,$$

$$y = -\frac{1}{2C_1^2}[\text{arc sen}(C_1 x + C_2) + (C_1 x + C_2)\sqrt{1 - (C_1 x + C_2)^2}] + C_3 x + C_4,$$

ove C_1, C_2, C_3, C_4 sono 4 costanti arbitrarie. Osserviamo subito che non può essere $C_1 = 0$, perchè in questo caso si avrebbe dalla (36)

$$y = \frac{C_2}{\sqrt{1 - C_2^2}}\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

e fra queste parabole non ve n'è alcuna soddisfacente alle condizioni fissate nei punti terminali.

Inoltre, dovendo essere $C_1 \neq 0$, non può esistere alcun $\bar{x}$, con $-a < \bar{x} < a$, per il quale sia $|C_1 \bar{x} + C_2| = 1$, perchè in tal caso, o per ogni $x < \bar{x}$, o per ogni $x > \bar{x}$, sarebbe necessariamente $|C_1 x + C_2| > 1$, e ciò è impossibile.

Da questa osservazione segue immediatamente che nell'intervallo $(-a, a)$ il radicale, che figura nelle espressioni della y e della y', non può cambiare di segno, e che la funzione arc sen può variare soltanto in un intervallo $\left(h\pi - \frac{\pi}{2}, h\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, con h numero intero.

Ciò premesso, per le condizioni fissate nei punti terminali, deve essere:

$$\begin{cases} y(a) = -\dfrac{1}{2C_1^2}[\text{arc sen}(C_1 a + C_2) + (C_1 a + C_2)\sqrt{1 - (C_1 a + C_2)^2}] + \\ \qquad\qquad + C_3 a + C_4 = a^2, \\ y(-a) = -\dfrac{1}{2C_1^2}[\text{arc sen}(-C_1 a + C_2) + (-C_1 a + C_2)\sqrt{1 - (-C_1 a + C_2)^2}] - \\ \qquad\qquad - C_3 a + C_4 = -a^2, \\ y'(a) = -\dfrac{1}{C_1}\sqrt{1 - (C_1 a + C_2)^2} + C_3 = 0 \\ y'(-a) = -\dfrac{1}{C_1}\sqrt{1 - (-C_1 a + C_2)^2} + C_3 = 0. \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni si deduce $C_1 C_2 = 0$, e siccome non può essere $C_1 = 0$, è necessariamente $C_2 = 0$, e quindi $C_3 = \frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2 a^2}$.

Sostituendo questi due valori nelle prime due equazioni del sistema, ed eliminando fra esse C_4, si ottiene

$$\text{arc sen}(C_1 a) - \text{arc sen}(-C_1 a) - 2C_1 a\sqrt{1 - C_1^2 a^2} + 4C_1^2 a^2 = 0.$$

Posto $C_1 a = z$, consideriamo la funzione

$$F(z) = \text{arc sen}\, z - \text{arc sen}\,(-z) - 2z\sqrt{1-z^2} + 4z^2, \qquad (-1 < z < 1)$$

e l'equazione

(37) $$F(z) = 0.$$

Per quanto abbiamo sopra osservato è

(38) $$[\text{arc sen}\, z - \text{arc sen}\,(-z)]_{z=0} = 0,$$

e quindi $z = 0$ è una soluzione della (37), alla quale corrisponde $C_1 = 0$, valore, che, per quanto si è sopra osservato, deve essere scartato.

Osserviamo ora che, quando si tenga presente la (38), $z = 0$ è l'unica soluzione della (37). Infatti abbiamo

$$F'(z) = 4\left\{ \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} + 2z \right\},$$

e supposto, per fissare le idee, che il radicale debba essere preso con segno positivo, risulta

$$F'(z) < 0, \text{ per } -\frac{2}{\sqrt{5}} < z < 0; \quad F'(z) > 0, \text{ per } 0 < z < 1,$$

e quindi, in $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 1\right)$, la (37) non può avere altre radici, oltre a $z = 0$.

D'altra parte, avendosi, in virtù della (38),

$$F(-1) = \text{arc sen}\,(-1) - \text{arc sen}\, 1 + 4 = 4 \pm \pi > 0,$$

ed essendo

$$F'(z) > 0, \quad \text{per} \quad -1 < z < -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

nemmeno in questo intervallo la (37) può avere alcuna radice.

Ad analogo risultato si perviene anche nel caso in cui il radicale venga preso con segno negativo, e si conclude quindi che non esiste alcuna estremale di ordine 2, relativa alla funzione $\sqrt{1 + y''^2}$, e soddisfacente, nei punti terminali, alle condizioni fissate.

b) Dal risultato a cui siamo ora pervenuti, possiamo dedurre facilmente, che, se il numero a, (> 0), è sufficientemente piccolo, fra le curve $C_L^{[2]}$, soddisfacenti, nei punti terminali, alle condizioni (35), non ve n'è alcuna minimante per l'integrale

$$I^{[2]}_{C_L^{[2]}} = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y''^2}\, dx.$$

Infatti, se vi fosse almeno una curva avente tale proprietà, essendo

$$\sqrt{1+y''^2} > |y''|,$$

fissato comunque un $\rho_0 > 0$, con considerazioni analoghe a quelle della dimostrazione del n.° 12, β), potremmo determinare un $\delta_1 > 0$, in modo che per ogni curva $C_0^{[2]}$, $y = y_0(x)$, $(-a \leq x \leq a;\ 0 < a < \delta_1)$, minimante per $I_{C_L^{[2]}}^{[2]}$ si abbia, per ogni x di $(-a, a)$,

$$(x-a)^2 + (y_0(x) - a^2)^2 + [y_0'(x)]^2 \leq \rho_0^2.$$

Allora assunta, come campo $A_L^{[2]}$, una sfera di centro nell'origine e raggio $R > \rho_0 + \delta_1\sqrt{1+\delta_1^2}$, ciascun punto $(x, y_0(x), y_0'(x))$ di ogni curva minimante sarebbe interno ad $A_L^{[2]}$ e di indifferenza rispetto ad $A_L^{[2]}$ e alla classe di curve considerata, e quindi, per i risultati dei n.i 7 e 10, ogni curva minimante dovrebbe essere una estremale di ordine 2, relativa alla funzione $\sqrt{1+y''^2}$.

Per quanto si è visto in a) il nostro asserto è così provato.

14. Esistenza dell'estremale di ordine n uscente da un punto, in cui sono fissati i valori della funzione e delle derivate dei primi $2n-1$ ordini. — *Supponiamo, nel presente n.°, che la funzione* $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ *sia finita e continua, insieme con le sue derivate parziali* $f_y, f_{y'}, \dots, f_{y^{(n)}}$, *in ogni punto* $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *di un campo* $A_L^{[n]}$, *e per tutti gli* $y^{(n)}$ *di un intervallo* $(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)})$, *che per questi valori ognuna delle derivate* $f_{y^{(r+1)}}$, $(r = 1, 2, \dots, n-1)$ *ammetta, finite e continue, le proprie derivate parziali dei primi* r *ordini rispettivamente, e inoltre che la derivata* $f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, *considerata come funzione della sola* $y^{(n)}$, *sia sempre crescente in un intervallo* $(\overline{Y}_1^{(n)}, \overline{Y}_2^{(n)})$, *appartenente ad* $(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)})$. *Sotto queste ipotesi, considerato un punto* $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ *interno ad* $A_L^{[n]}$, *fissati* n *valori* $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \dots, y_0^{(2n-1)}$, *con* $\overline{Y}_1^{(n)} < y_0^{(n)} < \overline{Y}_2^{(n)}$, *e supposto che sia*

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) > 0, \tag{39}$$

è possibile determinare un $\delta > 0$, *in modo che esista almeno un'estremale di ordine* n

$$y = y_0(x), \quad (x_0 \leq x \leq x_0 + \delta),$$

definita in tutto l'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$, *e soddisfacente alle condizioni*

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y_0^{(j)}(x_0) = y_0^{(j)}, \quad \left(j = 1, 2, \dots, 2n-1;\ y_0^{(j)}(x) \equiv \frac{d^j y_0(x)}{dx^j}\right)$$ [20].

[20] Per $n = 1$, vedi L. TONELLI, luogo cit. in [7], n.° 10.

Senza ledere affatto la generalità del nostro teorema, possiamo supporre, per semplicità, che sia $x_0 = 0$.

Fissato allora un numero $l > 0$, in modo che tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, soddisfacenti alle disuguaglianze

$$0 \leq x \leq l, \quad |y - y_0| \leq l, \quad |y^{(j)} - y_0^{(j)}| \leq l, \qquad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

appartengano al campo $A_L^{[n]}$ e in modo che tutti gli $y^{(n)}$, tali che $|y^{(n)} - y_0^{(n)}| \leq l$, appartengano ad $(\overline{Y}_1^{(n)}, \overline{Y}_2^{(n)})$, e, indicato con M il maggiore dei massimi moduli delle derivate $f_{y^{(r)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, $(r = 0, 1, 2, \dots, n;\ y^{(0)} = y)$ per tutti gli $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ ora indicati, poniamo, per $r = 2, 3, \dots, n$,

$$k_{r-1} = \Big[\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} f_{y^{(n)}}(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) - \frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}} f_{y^{(n-1)}}(\dots) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{r-2} \frac{d}{dx} f_{y^{(n-r+2)}}(\dots) + (-1)^{r-1} f_{y^{(n-r+1)}}(\dots)\Big]_{0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-r+1)}},$$

intendendo con ciò che l'espressione ottenuta dopo aver eseguito le derivazioni indicate deve essere calcolata per $x = 0$, $y = y_0$, $y' = y_0', \dots, y^{(n-r+1)} = y_0^{(n-r+1)}$ [21], e indichiamo con K il maggiore dei moduli dei numeri $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$.

Posto

$$z = f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \tag{40}$$

$$z_0 = f_{y^{(n)}}(0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}),$$

si determini un $l_1 > 0$, non superiore all'unità, in modo che la (40) definisca $y^{(n)}$ come funzione, ad un valore, di $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z)$

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z) \tag{40'}$$

in tutto il campo B definito da

$$0 \leq x \leq l_1; \quad y_0^{(j)} - l_1 \leq y^{(j)} \leq y_0^{(j)} + l_1, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1;\ y^{(0)} = y);$$
$$z_0 - l_1 \leq z \leq z_0 + l_1,$$

in modo che sia

$$y_0^{(n)} = \varphi(0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, z_0).$$

Supposto $l_1 \leq l$, e supposto inoltre che, in tutto il campo B, risulti sempre

$$y_0^{(n)} - l \leq \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, z) \leq y_0^{(n)} + l, \tag{41}$$

---

[21] Quindi in particolare

$$k_1 = f_{y^{(n)}x}(0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) + f_{y^{(n)}y}(\dots) y_0' + f_{y^{(n)}y'}(\dots) y_0'' + \dots$$
$$\dots + f_{y^{(n)}y^{(n)}}(\dots) y_0^{(n+1)} - f_{y^{(n-1)}}(\dots),$$

ecc..

si ponga

$$\delta = l_1 : \{ 1 + l + (n-1)K + nM + \sum_{j=1}^{n} | y_0^{(j)} | \}.$$

Preso un numero intero positivo $r > \frac{1}{\delta}$ si definisca una funzione $y_r(x)$ nel seguente modo

$$(42) \quad \begin{cases} y_r(x) = y_0 + y_0' \cdot x + \dfrac{y_0''}{2!} x^2 + \dots + \dfrac{y_0^{(n)}}{n!} x^n, & \text{per } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{r}, \\ y_r(x) = y_r\left(\dfrac{1}{r}\right) + y_r'\left(\dfrac{1}{r}\right) \dfrac{x - \frac{1}{r}}{1!} + y_r''\left(\dfrac{1}{r}\right) \dfrac{\left(x - \frac{1}{r}\right)^2}{2!} + \dots \\ \quad \dots + y_r^{(n-1)}\left(\dfrac{1}{r}\right) \dfrac{\left(x - \frac{1}{r}\right)^{n-1}}{(n-1)!} + \displaystyle\int_0^{x-\frac{1}{r}} dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_0^{x_2} \varphi_r \{ x_1 \} dx_1, \\ & \text{per } \dfrac{1}{r} < x \leq \delta, \end{cases}$$

ove

$$\varphi_r \{ x \} \equiv \varphi(x, y_r(x), y_r'(x), \dots, y_r^{(n-1)}(x), z_0 + u_r(x)),$$

con

$$u_r(x) \equiv k_1 x + \frac{k_2}{2!} x^2 + \dots + \frac{k_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \int_0^x f_{y^{(n-1)}}(x, y_r(x), y_r'(x), \dots, y_r^{(n)}(x)) dx -$$

$$- \int_0^x dx \int_0^x f_{y^{(n-2)}}(\dots) dx + \dots + (-1)^{n-1} \int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_0^{x_2} f_y(\dots) dx_1 .$$

Si prova ora facilmente, tenendo conto del valore di δ, che le (42) definiscono effettivamente, su tutto $(0, \delta)$, $y_r(x)$, come funzione continua insieme con le proprie derivate dei primi n ordini, e che in tutto $(0, \delta)$ è

$$(43) \qquad | y_r^{(j)}(x) - y_0^{(j)} | < l, \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, n;\ y^{(0)} = y).$$

Indicato con R il minimo intero positivo per il quale è $\frac{1}{R} < \delta$, ognuna delle $n + 1$ successioni

$$y_r^{(j)}(x), \quad (r = R, R+1, \dots); \qquad j = 0, 1, 2, \dots, n, \ (y^{(0)} = y),$$

è quindi costituita di funzioni ugualmente limitate in $(0, \delta)$, e perciò ognuna delle prime n successioni è costituita di funzioni ugualmente continue. In modo analogo, al caso $n = 1$, si conclude poi facilmente che anche la successione delle $y_r^{(n)}(x)$ è costituita di funzioni ugualmente continue.

Pertanto nella successione delle $y_r^{(n)}(x)$ possiamo scegliere una successione parziale $y_{r_s}^{(n)}(x)$, uniformemente convergente verso una funzione continua $y_\infty^{(n)}(x)$, in modo che si abbia anche

$$y_{r_s}^{(n-1)}(x) = y_0^{(n-1)} + \int_0^x y_{r_s}^{(n)}(x)dx \to y_\infty^{(n-1)}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{r_s}(x) = y_0 + y_0' \cdot x + \ldots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_2} y_{r_s}^{(n)}(x_1)dx_1 \to y_\infty(x),$$

con

$$y_\infty^{(j)}(x) \equiv \frac{d^j}{dx^j} y_\infty(x), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

e sarà

(44) $$y_\infty(0) = y_0, \; y'_\infty(0) = y'_0, \ldots, \; y_\infty^{(n)}(0) = y_0^{(n)}.$$

Siccome $\varphi_r\{x\}$ soddisfa alla (41), abbiamo

$$\left| \int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_2} \varphi_r\{x_1\}\, dx_1 - \int_0^{x-\frac{1}{r}} dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_2} \varphi_r\{x_1\}\, dx_1 \right| < \frac{1}{r}\{|y_0^{(n)}| + l\},$$

e d'altra parte essendo, per $s \to \infty$,

$$\int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_2} \varphi_{r_s}\{x_1\}\, dx_1 \to$$

$$\to \int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_2} \varphi(x_1, \; y_\infty(x_1), \; y'_\infty(x_1), \ldots, \; y_\infty^{(n-1)}(x_1), \; z_0 + u_\infty(x_1))dx_1,$$

con

$$u_\infty(x) = k_1 x + \frac{k_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x f_{y^{(n-1)}}(x, \; y_\infty(x), \; y'_\infty(x), \ldots, \; y_\infty^{(n)}(x))dx -$$

$$- \int_0^x dx \int_0^x f_{y^{(n-2)}}(\ldots)dx + \ldots + (-1)^{n-1} \int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_2} f_y(\ldots)dx_1,$$

segue dalla (42), per $s \to \infty$, in tutto $(0, \delta)$

$$y_\infty(x) = y_0 + y_0' x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_0^{x_2} \varphi_\infty\{x_1\}\, dx_1,$$

ove

$$\varphi_\infty\{x\} \equiv \varphi(x, \; y_\infty(x), \; y'_\infty(x), \ldots, \; y_\infty^{(n-1)}(x), \; z_0 + u_\infty(x)).$$

Risulta quindi

$$y_\infty^{(n)}(x) = \varphi_\infty\{x\},$$

e per le (40) e (40') si ha

$$(45)\quad z_0 + k_1 x + \frac{k_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{k_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x f_{y^{(n-1)}}(x, y_\infty(x), y_\infty'(x), \dots, y_\infty^{(n)}(x))dx -$$

$$-\int_0^x dx \int_0^x f_{y^{(n-2)}}(\dots)dx + \dots + (-1)^{n-1}\int_0^x dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_0^{x_2} f_y(\dots)dx_1 =$$

$$= f_{y^{(n)}}(x, y_\infty(x), y_\infty'(x), \dots, y_\infty^{(n)}(x)),$$

da cui derivando n volte si conclude che $y = y_\infty(x)$, $(0 \leq x \leq \delta)$ è un'estremale di ordine n, per la quale sono intanto verificate le (44).

Ma per le ipotesi fatte all'inizio del presente n.° sulla funzione f, essendo

$$(39')\qquad f_{y^{(n)}y^{(n)}}(0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) > 0,$$

in virtù dell'Osservazione II del n.° 4 esistono finite, per $x = 0$, anche le derivate $y_\infty^{(n+1)}(x)$, $y_\infty^{(n+2)}(x), \dots, y_\infty^{(2n-1)}(x)$.

Derivando ambo i membri della (45) rispetto ad x, calcolandoli per $x = 0$, e tenendo conto delle (44) otteniamo

$$k_1 + f_{y^{(n-1)}}(0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) = f_{y^{(n)}x}(0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}) + f_{y^{(n)}y}(\dots)y_0' +$$
$$+ f_{y^{(n)}y'}(\dots)y_0'' + \dots + f_{y^{(n)}y^{(n-1)}}(\dots)y_0^{(n)} + f_{y^{(n)}y^{(n)}}(\dots)y_\infty^{(n+1)}(0),$$

e quindi, tenendo presente il valore di k_1, in virtù della (39'), risulta necessariamente

$$(46)\qquad y_\infty^{(n+1)}(0) = y_0^{(n+1)}.$$

Facendo ora la derivata seconda di ambo i membri della (45), calcolandoli poi per $x = 0$, e tenendo conto delle (44) e (46) e del valore di k_2, risulta, in virtù della (39'),

$$y_\infty^{(n+2)}(0) = y_0^{(n+2)},$$

e procedendo a questo modo arriviamo a dimostrare che è anche

$$y_\infty^{(2n-1)}(0) = y_0^{(2n-1)}.$$

Osservazione. — A differenza da quanto avviene per $n = 1$, se non è verificata la (39), il teorema del presente n.°, per $n \geq 2$, può non esser vero, come mostra il seguente esempio:

Sia $n = 2$, $\qquad f(x, y, y', y'') \equiv y''^4;$

$$x_0 = 0, \quad y_0'' = 0.$$

Qualunque siano y_0, e y_0', se è $y_0''' \neq 0$, non esiste alcuna estremale di ordine 2, relativa alla funzione f considerata, soddisfacente alla condizione $y''(0) = 0$, e per la quale la $y'''(0)$ sia finita, $(e \neq 0)$.

15. **Altri risultati che si deducono dal teorema del n.° 14.** — In modo perfettamente analogo al TONELLI ([22]), tenendo conto del teorema del n.° 14 e di quanto si stabilisce nel presente n.°, si perviene, *sotto ipotesi che,* per brevità, *non stiamo qui a precisare, ai seguenti risultati*:

α) Teorema di oscillazione delle derivate degli ordini $n, n+1, \ldots, 2n-1$ sopra un'estremale di ordine n, per la quale esiste almeno un punto, in cui le derivate dei primi $2n-1$ ordini sono, in modulo, inferiori ad un numero fisso.

β) Unicità dell'estremale di ordine n uscente da un punto, in cui sono fissati i valori della funzione e delle derivate dei primi $2n-1$ ordini.

γ) Continuità delle estremali rispetto agli elementi iniziali dei primi $2n-1$ ordini.

δ) Esistenza dell'estremale di ordine n, che unisce due punti vicini, in uno dei quali sono fissati, oltre al valore della funzione, anche quelli delle derivate dei primi $2n-2$ ordini, sotto l'ipotesi che esista almeno una curva, la quale unisce i due punti dati, soddisfacendo in quello già fissato alle stesse condizioni, a cui deve soddisfare l'estremale di ordine n, e per la quale la derivata di ordine $2n-1$ della funzione, da cui è definita tale curva, sia sempre in valore assoluto inferiore a un numero fisso.

§ 4. Estremanti ed estremali di ordine n in campi comunque grandi.

16. **Proprietà delle curve minimanti.** — α) *Supposto che* $\mathrm{I}^{[n]}_{\mathrm{C}[n]}$ *sia un integrale quasi-regolare positivo normale, che sia verificata la condizione* (12) *del* n.° 7 *e la* (24) *del* n.° 12, *se* $\mathrm{C}^{[n]}_{*}$: $[\mathrm{y} = \mathrm{y}_0(\mathrm{x}),\ \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}]$ *è un arco di una curva* $\mathrm{C}^{[n]}_0$ *minimante per* $\mathrm{I}^{[n]}_{\mathrm{C}[n]}$ *in una classe* $\mathrm{K}^{[n]}$ *di curve* $\mathrm{C}^{[n]}$, *e se i suoi punti, eccettuati al più quelli terminali, sono interni al campo* $\mathrm{A}^{[n]}$ *e di indifferenza rispetto ad* $\mathrm{A}^{[n]}$ *e a* $\mathrm{K}^{[n]}$, *in ogni punto di* (a, b) *esiste finita e continua la derivata* $\mathrm{y}_0^{(n)}(\mathrm{x})$, *ed è soddisfatta l'equazione* (1).

β) *Se poi in tutto il campo* $\mathrm{A}^{[n]}$, *e per ogni valore finito di* $\mathrm{y}^{(n)}$, *ciascuna delle derivate parziali* $\mathrm{f}_{\mathrm{y}^{(r)}}$, $(\mathrm{r} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$ *ammette, finite e continue, le proprie*

([22]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([7]), n.i 3, 11, 12, 13.

derivate parziali dei primi r *ordini rispettivamente, e se* $I^{[n]}_{C[n]}$ *è un integrale regolare, in tutto* (a, b) *esistono, finite e continue, anche le derivate* $y_0^{(n+1)}(x)$, $y_0^{(n+2)}(x), \dots, y_0^{(2n)}(x)$, *ed è soddisfatta l'equazione* (1').

La prima parte del teorema è una conseguenza immediata dei risultati dei n.^{i} 7 e 10, e la seconda di quello del n.^{o} 4.

17. **Esistenza dell'estremale di ordine *n*.** — *Se*

a) *il campo* $A^{[n]}$ *coincide con tutto lo spazio* $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *o con una sua parte definita da* $a_* \leq x \leq b_*$, *ove* a_* *e* b_* *sono due numeri, finiti o no, tali che sia* $a_* < b_*$;

b) *sono soddisfatte le condizioni del teorema del* n.^{o} 10 *della mia Memoria citata in* ([1]);

c) *sono soddisfatte le condizioni dei teoremi dei* n.^{i} 7 *e* 10 *del presente lavoro*;

allora presi due punti qualunque $P_j \equiv (x_j, y_j, y_j', \dots, y_j^{(n-1)})$, $(j = 0, 1)$, *appartenenti al campo* $A^{[n]}$, *con* $x_0 \neq x_1$, *esiste sempre almeno un'estremale di ordine* n: $y = y(x)$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ *soddisfacente alle condizioni*

$$y^{(r)}(x_j) = y_j^{(r)} \qquad (r = 0, 1, 2, \dots, n-1,\ y^{(0)} = y;\ j = 0, 1), \tag{47}$$

Ciò è conseguenza immediata dei teoremi indicati.

18. **Unicità dell'estremale di ordine *n*.** — Supponiamo in tutto il presente n.^{o} che la funzione f ammetta, finite e continue, in tutti i punti di $A^{[n]}$ e per ogni valore finito di $y^{(n)}$, tutte le proprie derivate parziali dei primi due ordini rispetto alle variabili $y, y', \dots, y^{(n)}$.

α) *Allora, se è soddisfatta la condizione* a) *del* n.^{o} 17, *e se in tutti i punti* $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *e per ogni* $y^{(n)}$ *è*

$$f_{y^{(n)}y^{(n)}} > 0,$$

e se, per tutte le $(n+2)$*-ple* $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, *ora indicate, la forma quadratica* F, *avente per discriminante*

$$\begin{vmatrix} f_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) & f_{y^{(n)}y^{(n-1)}}(\dots) & \dots & f_{y^{(n)}y'}(\dots) & f_{y^{(n)}y}(\dots) \\ f_{y^{(n-1)}y^{(n)}}(\dots) & f_{y^{(n-1)}y^{(n-1)}}(\dots) & \dots & f_{y^{(n-1)}y'}(\dots) & f_{y^{(n-1)}y}(\dots) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{yy^{(n)}}(\dots) & f_{yy^{(n-1)}}(\dots) & \dots & f_{yy'}(\dots) & f_{yy}(\dots) \end{vmatrix}$$

è semidefinita positiva, presi comunque due punti $P_j \equiv (x_j, y_j, y_j', \dots, y_j^{(n-1)})$, $(j = 0, 1)$ *di* $A^{[n]}$, *esiste al più una sola estremale di ordine* n, *che soddisfa alle condizioni* (47).

Basta estendere la dimostrazione data dal Tonelli per $n = 1$ ([23]), tenendo conto del n.° 11 del presente lavoro.

β) Dalla dimostrazione della proposizione data in α) si deduce anche che *l'estremale* $E_0^{[n]}$ *di ordine* n, *se esiste, è una curva minimante per l'integrale* $I_{C[n]}^{[n]}$ *nella classe* $K^{[n]}$ *di tutte le curve* $C^{[n]}$, *che soddisfano alle condizioni* (47).

γ) Inoltre, *se la forma quadratica* F *è definita positiva, l'estremale* $E_0^{[n]}$ *è l'unica curva minimante per* $I_{C[n]}^{[n]}$ *in* $K^{[n]}$.

δ) *Anche quando si supponga soltanto che la forma quadratica* F *sia semidefinita positiva, l'estremale* $E_0^{[n]}$ *di ordine* n *è pure l'unica curva minimante per* $I_{C[n]}^{[n]}$, *se sono soddisfatte le ipotesi dei* n.^{i} 7 *e* 10 *del presente lavoro.*

ε) *Se poi la funzione* f *è indipendente dalle* $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, *e se l'integrale* $I_{C[n]}^{[n]}$ *è regolare, esiste, al più, una sola estremale di ordine* n *che soddisfa alle condizioni* (47), *e tale estremale di ordine* n, *quando esiste, è l'unica curva minimante per* $I_{C[n]}^{[n]}$ *nella classe* $K^{[n]}$ *di tutte le curve* $C^{[n]}$, *che soddisfano alle condizioni* (47).

([23]) Vedi L. Tonelli, opera cit. in ([2]), Vol. II, n.° 128.

Cremona involutions and covariants connected with the Weddle surface.

By ARNOLD EMCH (Urbana - Illinois).

1. Introduction. — The surface inconspicuously introduced by WEDDLE as the locus of vertices of quadric cones on six generic points in space, since the time of its discovery in 1850, has been the object of a large number of investigations of the properties of this surface and related geometric problems. For example, it appears as the pointwise invariant surface of the GEISER transformation T_7 determined by the web of quadrics on six generic points in space, or as the Jacobian of this web. Then, there is the space cubic curve on the six points which lies on the WEDDLE surface and which determines also an involutorial cubic transformation in space, or simply a cubic involution T_3. The product of these is an involution T_9 of order nine which leads to an interesting covariant surface of the WEDDLE surface. It is the purpose of this paper to establish the properties of this and some other related surfaces. To facilitate the understanding I shall first give a short account of the most important properties of the T_3 and T_7 (1).

2. The cubic involution T_3. — Let C_3 be the cubic on the six generic points $A_1 \dots A_6$, and g a bisecant of C_3, cutting C_3 in G_1 and G_2. A generic point A on g determines uniquely a point A' by the condition $(A'AG_1G_2) = -1$. Now to A' corresponds conversely A. Every generic point A in space determines a bisecant g uniquely. Thus is determined the involution $T_3 \equiv A' \rightleftarrows A$ of order 3, with C_3 as the fundamental curve and its developable tangent surface Γ_3^4 of class 3 and order 4 as a principal corresponding surface. To a point B of C_3 corresponds every point of the tangent t to C_3 at B.

In the T_3 a generic g^* is met by four tangents of C_3. To these correspond by T_3 four points of C_3 which also lie on the cubic C_3^* corresponding to g^*.

---

(1) Cfr. f. i. L. BERZOLARI, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*, « Encykl. d. math. Wissensch. », 1112, 2077-78.

Hence C_3^* *cuts* C_3 *in four points.* To a plane α corresponds a cubic surface F_3 which touches Γ_3^4 along the cubic of regression C_3. α cuts C_3 in three points E_1, E_2, E_3, so that F_3 passes through the three tangents to C_3 at the E's and also through the three E_iE_h, and the E's become double points of F_3.

3. **The Geiser involution T_7.** — All quadrics Q of the web on six generic points $A_1 \dots A_6$ in a projective space S_3 (as in T_3) which pass through a generic point P pass through a second point P', and all quadrics of the web which pass through this P', pass through P. This establishes an involutorial Cremona transformation $P' \rightleftarrows P$ of order 7 which is known as the Geiser involution. It has the six A's as fundamental points and the cones on each five and the sixth A as a vertex as principal or fundamental surfaces. Moreover it has the property that the C_3 on the six A's is self-corresponding. i. e., to each of its points corresponds every other point of C_3. The pointwise invariant surface is the Weddle surface on the A's on which C_3 lies. This gives rise to another well known description of the T_7: Choose any generic point P through which there is a unique bisecant g of C_3. This g cuts the Weddle surface W in two points W_1 and W_2. Determine P' such that $(P'PW_1W_2) = -1$. There is just one such point P' associated with P. The relation of $P' \rightleftarrows P$ is precisely that of T_7.

4. **The involution $T_9 = T_7T_3 = T_3T_7$.** — By T_7 a generic plane α is transformed into a septimic F_7 which has C_3 as a triple curve. By T_3, F_7 is transformed into an F_{21}^*. But as F_7 passes three times through C_3 (triple curve), Γ_3^4 splits off three times from F_{21}^*, leaving as proper correspondence a surface F_9 of order nine.

Again a generic line l by T_3 is transformed into a cubic C_3' which cuts C_3 in four points. Now l cuts F_7 outside of C_3 in seven points. Consequently also C_3' cuts F_9, the transformed of F_7 by T_3, in seven points outside of C_3. Hence of $3 \cdot 9 = 27$ intersections of C_3' with F_9, $27 - 7 = 20$ must lie at the four points which C_3 and C_3' have in common. These are therefore five fold points for F_9; i. e., C_3 is a five fold curve of F_9.

To A_i correspond by T_7 all points of the cone (A_i) with A_i as a vertex. In T_3 to a point of (A_i) corresponds another point of (A_i), hence these cones are principal surfaces of T_9. A tangent t to C_3 at a point S cuts W outside of C_3 in two points W_1, W_2. On t any couple P', P with the property $(P'PW_1W_2) = -1$ is a couple of corresponding points of T_7. By T_3 every point of t corresponds to S. Hence by $T_9 = T_7T_3$ to P corresponds S, and Γ_3^4 becomes a principal surface of T_9. It is easily shown that also T_3T_7 is a nonic involution. That $T_7T_3 = T_3T_7$ follows from the fact that two involutions on a line are permutable when their double points form a harmonic quadruple. The double points of T_3 on a bisecant g of T_3 may be chosen as 0, ∞; of T_7 $+\lambda$, $-\lambda$; of T_9 $i\lambda$, $-i\lambda$. It is easily verified that *the three couples of double points are mutually harmonic by twos.* The foregoing results may be checked up as follows: As F_9 passes five-fold through C_3 to F_9 corresponds an F_{81} by T_9, from which split off the six principal cones and the Γ_3^4 five times, leaving a residual F_1; $81 - 6\cdot5\cdot2 - 5\cdot4 = 1$; i. e., $F_1 = \alpha$. By T_7, F_9 goes into an F_{63}, from which split off the six cones (A_i), leaving F_3. By T_3, F_9 goes into an F_{27} from which split off the Γ_3^4 five times, leaving the F_7. The WEDDLE surface W by T_9 is transformed into an F_{36} from which split off each of the six cones (A_i) twice and Γ_3^4 twice, since W touches Γ_3^4 along C_3, leaving an $F_4 = W$; etc..

All these results may be stated by the

THEOREM 1. — *The product of the involutions* T_7 *and* T_3 *connected with the Weddle surface* W *is an involution* $\mathrm{T}_7\mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_3\mathrm{T}_7 = \mathrm{T}_9$ *of order nine. It has the cubic* C_3 *on the six double points* $\mathrm{A_i}$ *of* W *as a five-fold fundamental curve, the tangent surface* Γ_3^4 *of* C_3 *and the six osculating cones* $(\mathrm{A_i})$ *of* W *as principal surfaces. On every bisecant* g *of* C_3 *there are two points* D_1, D_2 *which are invariant in* T_3 *and* T_7 *and pointwise invariant in* T_9.

5. **The covariant surface $D \equiv (D_1, D_2)$.** — The bisecants g of C_3 form a line-congruence. On every g there are two points D_1, D_2 as determined in the preceding section 4, which form a two dimensional manifold, or a certain surface D which is invariant in T_3, T_7 and T_9. To determine its order, assume C_3 in the normal form

$$\rho x_1 = \theta^3, \quad \rho x_2 = \theta^2, \quad \rho x_3 = \theta, \quad \rho x_4 = 1, \tag{1}$$

and let $\theta_1, \ldots, \theta_6$ be the parameters of the six double points $A_1, \ldots, A_6$ of W. Moreover denote by $f(\alpha)$ the polynomial

$$f(\alpha) = \prod_{i=1}^{6} (\alpha - \theta_i), \tag{2}$$

then

$$\rho x_r = \frac{\theta^{4-r}}{\sqrt{f(\theta)}} \pm \lambda \frac{\varphi^{4-r}}{\sqrt{f(\varphi)}} \qquad \text{(for } r = 1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

for a given value of λ represents a surface with the parameters θ, φ. In (1) these represent two points $E_1(\theta)$ and $E_2(\varphi)$ on C_3, and when these are fixed and λ varies, (3) represents the bisecant g. For $\lambda = 0$ we obtain E_1, for

$\lambda = \infty$, E_2. Moreover for $\lambda = +1$, or $\lambda = -1$, with θ and φ variable the well known parametric representation of the WEDDLE surface W by RICHMOND, as reported by H. BATEMAN [1], is obtained.

For this surface $\lambda = 1, \ -1$ the double points of T_9 on g have the parameters $D_1(+i)$, $D_2(-i)$, so that the parametric representation of the surface D is in this case

$$(4) \qquad \rho x_r = \frac{\theta^{4-r}}{\sqrt{f(\theta)}} \pm i\,\frac{\varphi^{4-r}}{\sqrt{f(\varphi)}}, \qquad r = 1, 2, 3, 4.$$

6. **The order of the D-surface.** — We first determine the order of (3) for any value of λ by finding the intersections of D with a line l as the intersection of two planes $\sum_{i=1}^{4} a_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{4} b_i x_i = 0$. Substitute (3) in these so that we get

$$(5a) \quad (a_1\theta^3 + a_2\theta^2 + a_3\theta + a_4)\sqrt{f(\varphi)} \pm (a_1\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_3\varphi + a_4)\lambda\sqrt{f(\theta)} = 0,$$

$$(5b) \quad (b_1\theta^3 + b_2\theta^2 + b_3\theta + b_4)\sqrt{f(\varphi)} \pm (b_1\varphi^3 + b_2\varphi^2 + b_3\varphi + b_4)\lambda\sqrt{f(\theta)} = 0.$$

Consistency for common solutions requires

$$(6) \quad \begin{aligned} &(a_1\theta^3 + a_2\theta^2 + a_3\theta + a_4)(b_1\varphi^3 + b_2\varphi^2 + b_3\varphi + b_4) - \\ &\quad - (a_1\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_3\varphi + a_4)(b_1\theta^3 + b_2\theta^2 + b_3\theta + b_4) = 0 \end{aligned}$$

which $\equiv 0$ for $\varphi = \theta$ and hence divisible by $(\theta - \varphi)$. Moreover the highest term $a_1 b_1 \theta^3\varphi^3$ drops out, so that after this reduction a symmetric function C_4 of degree 4 in θ and φ is left in which the highest degres of θ and φ are each equal to 2. Thus in the (θ, φ)-plane C_4 is a symmetric quartic with the infinite points of the θ-and φ-axis as double points. It suffices therefore to solve one of the (5) say (5a) in rational form, i. e.,

$$(7) \quad C_{12} = (a_1\theta^3 + a_2\theta^2 + a_3\theta + a_4)^2 f(\varphi) - \lambda^2(a_1\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_3\varphi + a_4)^2 f(\theta) = 0,$$

which is a curve of order 12, with the infinite points of θ-and φ-axis as six-fold points, with the reduced form of (6), i. e., with C_4. C_4 and C_{12} intersect in 48 points, from which we must subtract $2\cdot 2\cdot 6 = 24$ due to the multiplicities at infinity. The intersections of $a_1\theta^3 + a_2\theta^2 + a_3\theta + a_4 = 0$ and $a_1\varphi^3 + a_2\varphi^2 + a_3\varphi + a_4 = 0$ diminished by the common intersections with $\theta - \varphi = 0$, are $3\cdot 3 - 3 = 6$ in number and are single points of C_4 and double points of C_{12}. Thus 12 more points must be subtracted. Finally there are $48 - 24 - 12 = 12$ proper intersections left of the line l with the surface (1). Hence

[1] « Proc. Lond. Math. Soc. », 2nd Ser., Vol. III, pp. 225-238 (1905).

THEOREM 2. — *The irrational parametric equations* (1) *represent a surface* $F_{12}^{(\lambda)}$ *of order* 12.

When $\lambda = \pm 1$, the highest terms $a_1 a_6 \theta^6 \varphi^6$ in (7) drop out. Moreover (7) is then divisible by $\theta - \varphi$ so that (7) reduces to a symmetric C_{10} with the infinite points of θ-and φ-axis as five-fold points. C_4 and C_{10} now intersect in 40 points, from which must be subtracted $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$, due to the multiplicities at infinity. The same six points as in the case for a generic value of λ are double points for the C_{10} and single for C_4, which again account for $2 \cdot 6 = 12$ intersections to be excluded. This leaves 8 proper intersections. But on account of the symmetric character of C_4 and C_{10}, $(\theta, \varphi) \equiv (\varphi, \theta)$ yield the same point on l. Thus l cuts the surface (1) $\lambda = \pm 1$ in four points.

The surface is in this case of order 4 *and is, of course, the Weddle surface.*

For $\lambda = \pm i$, C_{12} becomes a symmetric curve of order 12 which, as for a general value of λ, has 12 proper solutions with C_4. But on account of the symmetry the number of intersections of l with the surfaces reduces to 6. Hence

THEOREM 3. — *The surface* D, *invariant in both transformations* T_3 *and* T_7 *and pointwise invariant in* T_9, *is of order six.* D *has* C_3 *as a double curve, in fact, the same curve of regression as* Γ_3^4 *the tangent-surface of* C_3, *as follows from the properties of the transformation.*

Moto libero smorzato dei sistemi a due gradi di libertà.

Memoria di LUIGI GRASSI (a Pisa).

Sunto. - *Si studia il moto libero smorzato dei sistemi a due gradi di libertà, dapprima in un caso particolare e se ne fa l'applicazione al pendolo di* BLACKBURN. *Si passa poi al caso generale giungendo ad enunciare condizioni sufficienti per poter riconoscere la natura del moto del sistema. Infine si studiano, in modo completo, alcuni casi particolari di speciale interesse.*

Premessa.

I sistemi considerati sono ad un numero finito di gradi di libertà, olonomi ed a vincoli indipendenti dal tempo; le forze interne derivano da una funzione potenziale; le resistenze passive vengono compendiate nei loro effetti dalla funzione di dissipazione di Lord RAYLEIGH. Per i moti vibratori di questi sistemi, che si svolgono intorno ad una configurazione di equilibrio stabile, la forza viva T, l'energia potenziale $-V$ e la funzione di dissipazione F si possono considerare come forme quadratiche definite positive a coefficienti costanti.

Le equazioni del moto libero smorzato costituiscono un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, omogenee a coefficienti costanti, uguali in numero al grado di libertà del sistema considerato; e, data la loro linearità, vale il principio della sovrapposizione dei piccoli movimenti. Integrando questo sistema con i metodi noti si cade nella sua equazione caratteristica, di grado uguale al doppio del grado di libertà del sistema materiale. Ogni radice complessa dà luogo, con la sua coniugata, ad un moto vibratorio smorzato periodico, ogni coppia di radici reali ad un moto smorzato aperiodico. Il moto più generale del sistema risulta, quindi, dalla sovrapposizione di vibrazioni smorzate, alcune periodiche ed altre aperiodiche. Siamo così ricondotti, nello studio del moto, ad una questione puramente algebrica.

D'altra parte l'integrazione delle equazioni del moto sarebbe una cosa immediata se si potesse, con un'unica sostituzione lineare sulle coordinate lagrangiane, ridurre a forma canonica la forza viva, l'energia potenziale e la funzione di dissipazione.

Infatti si avrebbero così le equazioni del moto in coordinate normali, ciascuna delle quali, contenendo una sola coordinata, s'integrerebbe separatamente. Ma tale riduzione simultanea non è, in generale, possibile.

Per un sistema a due gradi di libertà si ha un sistema di due equazioni differenziali, la cui equazione caratteristica, essendo di quarto grado, può avere due coppie di radici complesse coniugate, oppure tutte e quattro le radici reali, oppure una coppia di radici complesse coniugate e due radici reali.

Si hanno, quindi, due moti fondamentali che possono essere, rispettivamente, entrambi di tipo aperiodico, oppure entrambi di tipo periodico, oppure uno di tipo aperiodico ed uno periodico. La natura del moto più generale del sistema dipende, dunque, da quella delle radici dell'equazione caratteristica.

Nella presente Memoria ho ridotto, in un caso particolare, simultaneamente a forma canonica le tre forme quadratiche che esprimono T, $-V$ e F. L'equazione caratteristica si spezza così in due equazioni di secondo grado, le cui radici si hanno immediatamente. Un concreto sistema a due gradi di libertà in cui, avendo T e $-V$ i coefficienti proporzionali, si verifica questo caso particolare, è il pendolo semplice. Al § 2 ho studiato un sistema alquanto più complesso in cui si possono ancora ridurre simultaneamente a forma canonica le tre forme quadratiche T, $-V$ e F: il cosidetto *pendolo di Blackburn.*

Passando al caso generale, ho ridotto simultaneamente a forma canonica la forza viva e la funzione di dissipazione. Si hanno così le equazioni del moto in coordinate normali, senza ottenere però un vantaggio decisivo.

L'equazione caratteristica assume la forma:

$$(\mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1)(\mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2) = b_{12}^2;$$

ed è, quindi, un'equazione di quarto grado avente negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse; cioè è un'equazione di HURWITZ (¹). Una discussione generale delle condizioni sotto cui le radici di un'equazione biquadratica sono negative od a parte reale negativa si trova nel ROUTH (²). Si possono consultare a proposito anche i noti lavori di CHERUBINO.

Mettendomi da un punto di vista più generale ho studiato, nella presente Memoria, le condizioni di realità o complessità dell'equazione caratteristica. Ora per esprimere, in tutta completezza, tali condizioni si andrebbe incontro a formule talmente complicate da renderle praticamente inapplicabili. D'altra

(¹) Cfr. L. ORLANDO, *Sul problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un'equazione algebrica*, « Math. Ann. », **71** (1911), pp. 241-242. Cfr. anche il classico lavoro di HURWITZ che si trova nei « Math. Ann. », **46** (1895), pp. 273-284.

(²) J. ROUTH, *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies,* Vol. 2°, Cap. VI (§§ 286-289).

parte, per i problemi che si presentano in pratica, non ha grande importanza giungere ad una discussione completa. Infatti tali problemi o sono casi particolari del problema generale, o si ottengono da esso sotto certe ipotesi semplificative.

Un problema di questo tipo è quello delle scariche di un condensatore secondo due fili in parallelo ([1]). La carica q è espressa da:

$$q = Ae^{at} + Be^{bt} + Ce^{ct}$$

essendo A, B e C costanti arbitrarie e a, b e c radici dell'equazione caratteristica delle equazioni del problema:

$$(1 + m_1 + m_2)D^3 + [r_1(1 + m_2) + r_2(1 + m_1)]D^2 +$$
$$+ (l_1 + l_2 + r_1 r_2)D + r_1 l_2 + r_2 l_1 = 0,$$

ove r_1, r_2, l_1, l_2, m_1 e m_2 indicano 6 costanti. Ora la discussione della natura delle radici di questa equazione di terzo grado porta condizioni molto complesse, dalle quali difficilmente si può ricavare un significato fisico chiaro. Si riconosce, però, che, se s'introducono certe ipotesi, la condizione affinchè due radici siano complesse coniugate è sempre verificata; inoltre si possono studiare casi particolari di speciale interesse.

Tornando al nostro problema, ho discusso, con un metodo di tipo grafico-differenziale, la natura delle radici dell'equazione caratteristica giungendo ad enunciare condizioni *sufficienti* affinchè abbia quattro radici reali per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4b_2$ (§ 4); oppure due coppie di radici complesse coniugate per $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_2$ (§ 5); oppure due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate (§ 6). Fra i casi particolari in cui si può giungere alla condizione necessaria e sufficiente è interessante, per il suo significato fisico, quello in cui lo smorzamento è espresso da un sol coefficiente ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$). Infine (§ 8) ho trattato, brevemente, con metodo perfettamente analogo a quello usato per T e F, il caso della riduzione simultanea a forma canonica delle forme quadratiche che esprimano T e $-V$.

Similmente potrebbe trattarsi il caso di $-V$ e F.

§ 1. Riduzione simultanea di T, $-V$ e F a forma canonica.

Per un sistema a due gradi di libertà la forza viva T, la energia potenziale $-V$, e la funzione di dissipazione F prendono la forma (indicando

([1]) Cfr. ANTONIO GARBASSO, *Le scariche oscillanti nei sistemi di conduttori complessi e la teoria elettromagnetica dell'analisi spettrale*, Cap. III, « Nuovo Cimento », 1904.

con q_1 e q_2 coordinate lagrangiane):

$$\begin{cases} 2T = a_{11}q_1'^2 + 2a_{12}q_1'q_2' + a_{22}q_2'^2 \\ -2V = b_{11}q_1^2 + 2b_{12}q_1q_2 + b_{22}q_2^2 \\ 2F = \varepsilon_{11}q_1'^2 + 2\varepsilon_{12}q_1'q_2' + \varepsilon_{22}q_2'^2, \end{cases}$$

dove le costanti a, per essere T, $-V$ e F forme quadratiche definite positive, devono soddisfare alle disuguaglianze:

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

e analoghe per le b e le ε.

Le equazioni del moto libero smorzato sono:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}q_1'' + a_{12}q_2'' + \varepsilon_{11}q_1' + \varepsilon_{12}q_2' + b_{11}q_1 + b_{12}q_2 = 0 \\ a_{21}q_1'' + a_{22}q_2'' + \varepsilon_{21}q_1' + \varepsilon_{22}q_2' + b_{21}q_1 + b_{22}q_2 = 0. \end{cases}$$

Per integrarle poniamo:

$$q_1 = \lambda_1 e^{\mu t}; \quad q_2 = \lambda_2 e^{\mu t},$$

con λ_1, λ_2 e μ costanti da determinarsi.

Le (1) diventano, dopo aver diviso per $e^{\mu t}$:

$$\begin{cases} (a_{11}\mu^2 + \varepsilon_{11}\mu + b_{11})\lambda_1 + (a_{12}\mu^2 + \varepsilon_{12}\mu + b_{12})\lambda_2 = 0 \\ (a_{21}\mu^2 + \varepsilon_{21}\mu + b_{21})\lambda_1 + (a_{22}\mu^2 + \varepsilon_{22}\mu + b_{22})\lambda_2 = 0\,; \end{cases}$$

da cui eliminando λ_1, λ_2 si ricava per μ l'equazione di quarto grado:

$$(2) \qquad D \equiv \begin{vmatrix} a_{11}\mu^2 + \varepsilon_{11}\mu + b_{11}, & a_{12}\mu^2 + \varepsilon_{12}\mu + b_{12} \\ a_{21}\mu^2 + \varepsilon_{21}\mu + b_{21}, & a_{22}\mu^2 + \varepsilon_{22}\mu + b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora la natura del moto più generale del sistema dipende da quella dell'integrale generale delle (1), e questo, a sua volta, dipende dalla natura delle radici della (2), che è *l'equazione caratteristica* del sistema (1).

Trasformiamo, quindi, opportunamente la (2). Costruiamo con i coefficienti di T, $-V$ e F le tre forme quadratiche definite positive:

$$(3) \qquad \begin{cases} G(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ H(x) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ L(x) = \varepsilon_{11}x_1^2 + 2\varepsilon_{12}x_1x_2 + \varepsilon_{22}x_2^2, \end{cases}$$

e vediamo se è possibile, mediante la sostituzione lineare propria S definita dalle formule:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2, \end{cases}$$

ridurle simultaneamente alle forme canoniche:

$$(5)\qquad \begin{cases} G(x) = G'(y) = a'_{11}y_1^2 + a'_{22}y_2^2 \\ H(x) = H'(y) = b'_{11}y_1^2 + b'_{22}y_2^2 \\ L(x) = L'(y) = \varepsilon'_{11}y_1^2 + \varepsilon'_{22}y_2^2, \end{cases}$$

Affinchè tale riduzione simultanea sia possibile occorre e basta che una delle (3) sia combinazione lineare omogenea delle altre due. Infatti, in tal caso, la sostituzione lineare propria S, definita dalle (4), che riduce simultaneamente a forma canonica due delle tre forme quadratiche $G(x)$, $H(x)$, e $L(x)$ riduce anche la terza. Possiamo, dunque, affermare:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una sostituzione lineare propria S *definita dalle* (4) *che riduca simultaneamente le tre forme quadratiche* (3) *alle forme canoniche* (5) *è che si abbia*:

$$(6)\qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposto verificata la (6), sia:

$$S_0 \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

la sostituzione lineare che riduce simultaneamente le forme quadratiche (3) alle forme canoniche (5), e cambiamo le coordinate q_1 e q_2 in altre ρ_1 e ρ_2 mediante S_0; cioè poniamo:

$$q_1 = c_{11}\rho_1 + c_{12}\rho_2; \quad q_2 = c_{21}\rho_1 + c_{22}\rho_2;$$

da cui derivando rispetto al tempo:

$$q_1' = c_{11}\rho_1' + c_{12}\rho_2', \quad q_2' = c_{21}\rho_1' + c_{22}\rho_2'.$$

Con ciò possiamo scrivere in definitiva, indicando con b_1, b_2, ε_1, ε_2 nuove costanti:

$$\begin{cases} 2T = \rho_1'^2 + \rho_2'^2 \\ -2V = b_1\rho_1^2 + b_2\rho_2^2 \\ 2F = \varepsilon_1\rho_1'^2 + \varepsilon_2\rho_2'^2. \end{cases}$$

Le equazioni del moto diventano:

$$(1')\qquad \begin{cases} \rho_1'' + \varepsilon_1\rho_1' + b_1\rho_1 = 0 \\ \rho_2'' + \varepsilon_2\rho_2' + b_2\rho_2 = 0. \end{cases}$$

Le (1') si scindono, così, in due equazioni, ciascuna delle quali contiene una sola ρ, ed ognuna si integra separatamente.

Le (1'), scritte in coordinate normali ρ_1 e ρ_2, equivalgono alle (1) scritte in coordinate qualunque q_1 e q_2; per cui le proprietà fondamentali del moto si potranno studiare sulle (1').

L'equazione caratteristica del sistema (1') attualmente si spezza nelle due equazioni caratteristiche delle due (1').

§ 2. **Pendolo di Blackburn.**

In pratica si possono presentare dei concreti sistemi a due gradi di libertà in cui, verificandosi il caso particolare del § precedente, si può ridurre simultaneamente a forma canonica le tre forme quadratiche che esprimano T, $-V$ e F. Un primo esempio è fornito dal pendolo semplice; infatti per tale sistema le forme quadratiche che esprimano T e $-V$ hanno i coefficienti proporzionali. Un altro sistema vibrante del medesimo tipo è il cosidetto pendolo di BLACKBURN.

Un filo inestendibile ACB è fissato agli estremi A e B posti al medesimo livello, mentre un peso P, attaccato al punto medio C, mediante un filo CP, distende i due tratti AC e CB secondo segmenti rettilinei.

Assumiamo una terna di assi cartesiani ortogonali con l'origine nel punto O e con l'asse delle z verticale volto in basso. Per le piccole oscillazioni, che avvengono nel piano della fig. 1, cioè nel piano yz, il punto di

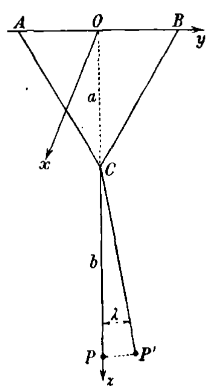

Fig. 1

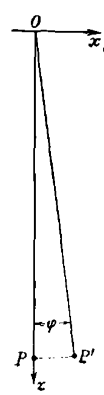

Fig. 2

sospensione è praticamente C, quando si supponga il peso P abbastanza grande per tenere ben tesi i due tratti AC e CB.

Indichiamo con λ l'angolo che CP' forma con l'asse z, si ha per le coordinate x, y e z di P':

$$x = 0, \quad y = b \operatorname{sen} \lambda, \quad z = b \cos \lambda + a,$$

indicando con a e b i due tratti OC e CP.

Facciamo ora oscillare P nel piano xz (fig. 2): esso trascina con sè tutto il filo ABC ed il punto di sospensione diventa O, e si ha, analogamente al caso precedente:

$$x = (a + b) \operatorname{sen} \varphi, \quad y = 0, \quad z = (a + b) \cos \varphi.$$

Componendo i movimenti, le coordinate di P al tempo t, nel moto risultante, sono:

$$x = (a + b) \operatorname{sen} \varphi, \quad y = b \operatorname{sen} \lambda, \quad z = (a + b) \cos \varphi + b \cos \lambda - b.$$

La forza viva e la funzione potenziale sono date da:

$$T = \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad V = mg[z - (a + b)],$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} 2T = m[(a + b)^2 \cos \varphi \cdot \varphi'^2 + b^2 \cos^2 \lambda \cdot \lambda'^2 + (a + b)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \varphi'^2 + \\ + b^2 \operatorname{sen}^2 \lambda \cdot \lambda'^2 + 2b(a + b) \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \lambda \cdot \varphi' \cdot \lambda'], \\ V = mg[(a + b) \cos \varphi + b \cos \lambda - b] - mg(a + b). \end{aligned}$$

Tenendo presente che gli angoli φ e λ si mantengono piccolissimi durante il moto abbiamo, nei soliti limiti di approssimazione:

$$\begin{aligned} 2T &= m[(a + b)^2 \varphi'^2 + b^2 \lambda'^2], \\ V &= mg\left[(a + b) - (a + b)^2 \frac{\varphi^2}{2} + b - \frac{b\lambda^2}{2} - b\right] - mg(a + b). \end{aligned}$$

Dunque la forza viva e l'energia potenziale prendono la forma:

$$\begin{cases} 2T = m(a + b)^2 \varphi'^2 + mb^2 \lambda'^2 \\ -2V = mg(a + b)^2 \varphi^2 + mgb\lambda^2. \end{cases}$$

La funzione di dissipazione F, nei soliti limiti di approssimazione, prende la forma:

$$2F = \varepsilon(a + b)^2 \varphi'^2 + \varepsilon b^2 \lambda'^2,$$

supponendo che l'azione della resistenza incontrata dal punto P, muovendosi nell'aria, si possa rappresentare mediante una forza opposta alla sua velocità e proporzionale, in grandezza, a quest'ultima. La forza (R) così applicata al punto P ha per proiezioni cartesiane:

$$R^x = -kx', \quad R^y = -ky', \quad R^z = -kz';$$

od anche, ponendo $-k = \varepsilon$:

$$R^x = \varepsilon x', \quad R^y = \varepsilon y', \quad R^z = \varepsilon z'.$$

Le equazioni del moto smorzato sono:

$$\begin{cases} m(a+b)^2\varphi'' + \varepsilon(a+b)^2\varphi' + mg(a+b)\varphi = 0 \\ mb^2\lambda'' + \varepsilon b^2\lambda' + mgb\lambda = 0; \end{cases}$$

od anche:

$$\begin{cases} m\varphi'' + \varepsilon\varphi' + \dfrac{mg}{a+b}\varphi = 0 \\ m\lambda'' + \varepsilon\lambda' + \dfrac{mg}{b}\lambda = 0, \end{cases}$$

che sono equazioni del tipo (1').

A seconda dei segni di $\varepsilon^2 - \dfrac{4m^2g}{a+b}$ e $\varepsilon^2 - \dfrac{4m^2g}{b}$, il moto, naturalmente smorzato, corrispondente alle coordinate φ e λ ha carattere periodico o aperiodico; sicchè il moto più generale del sistema si compone di due vibrazioni smorzate, entrambe periodiche, o entrambe aperiodiche, oppure una periodica ed una aperiodica.

§ 3. Riduzione simultanea di T e F a forma canonica.

Come si è visto al § 1 non si può, in generale, ridurre simultaneamente a forma canonica le tre forme quadratiche T, $-V$ e F; possiamo, però, sempre effettuare tale riduzione simultanea per due qualunque di esse. Sia:

$$S_0 \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

la sostituzione lineare propria a coefficienti reali che riduce simultaneamente a forma canonica le forme quadratiche T e F, e cambiamo le coordinate q_1 e q_2 in altre ρ_1 e ρ_2 mediante S_0.

Potremò scrivere le tre forme fondamentali nel seguente modo:

$$\begin{cases} 2T = \rho_1'^2 + \rho_2'^2 \\ -2V = b_1\rho_1^2 + 2b_{12}\rho_1\rho_2 + b_2\rho_2^2 \\ 2F = \varepsilon_1\rho_1'^2 + \varepsilon_2\rho_2'^2. \end{cases}$$

Le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} \rho_1'' + \varepsilon_1\rho_1' + b_1\rho_1 + b_{12}\rho_2 = 0 \\ \rho_2'' + \varepsilon_2\rho_2' + b_{12}\rho_1 + b_2\rho_2 = 0; \end{cases}$$

la cui equazione caratteristica è:

$$f(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1 & b_{12} \\ b_{12} & \mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

La (7), essendo di quarto grado, può avere due coppie di radici complesse coniugate, una coppia di radici complesse coniugate e due radici reali, o tutte e quattro le radici reali. Vediamo sotto quali condizioni possiamo assicurarci della presenza di uno di questi casi.

Scritta la (7) sotto la forma:

$$(\mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1)(\mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2) = b_{12}^2,$$

poniamo:

$$y_1 = (\mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1)(\mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2), \quad y_2 = b_{12}^2, \tag{8}$$

$$z_1 = \mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1, \quad z_2 = \mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2. \tag{9}$$

La 1ª delle (8) rappresenta una curva del 4° ordine; la 2ª una retta parallela all'asse μ e distante da esso di b_{12}^2; le (9) rappresentano due parabole. Le radici di $y_1 = 0$ sono:

$$\left.\begin{matrix}\mu_1\\ \mu_2\end{matrix}\right\} = \frac{-\varepsilon_1 \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 - 4b_1}}{2}; \quad \left.\begin{matrix}\mu_3\\ \mu_4\end{matrix}\right\} = \frac{-\varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2 - 4b_2}}{2};$$

quelle reali sono negative; per $\mu = 0$ si ha $y_1 = b_1 b_2$; per $\mu \geq 0$, $y_1 > y_2$, essendo $b_1 b_2 - b_{12}^2 > 0$; quindi se $y_1 = 0$ ha radici reali, $y_1 = y_2$ ha, a sua volta (fig. 3), almeno due radici reali; cioè, se sono verificate le due condi-

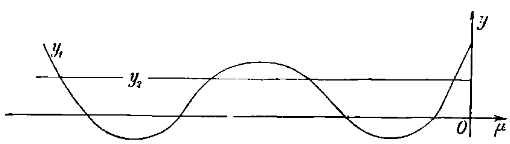

Fig. 3

zioni $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4b_2$, od almeno una di esse, siamo sicuri che le radici dell'equazione caratteristica (7) non sono tutte complesse. Dunque:

Condizione necessaria affinchè l'equazione caratteristica abbia due coppie di radici complesse coniugate è che siano verificate le condizioni $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_2$.

La condizione precedente non è però sufficiente potendo essere $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_2$ e la (7) avere radici reali.

Questa condizione necessaria è particolarmente interessante in quanto fornisce un limite superiore per i coefficienti di smorzamento, affinchè questi coefficienti consentano ancora moti fondamentali di tipo periodico.

§ 4. Condizioni sufficienti affinchè, per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4b_2$, l'equazione caratteristica abbia quattro radici reali.

Esaminiamo, separatamente, i seguenti quattro casi che si possono presentare fra le costanti b e ε.

I. CASO:

$$b_1 \geq b_2, \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1.$$

Dalle (9) segue $z_1 > z_2$ in tutto l'intervallo $(-\infty, 0)$ (escluso al più il secondo estremo); le radici di $y_1 = 0$ soddisfano alle disuguaglianze: $|\mu_4| > |\mu_2| \geq |\mu_1| > |\mu_3|$ (fig. 4).

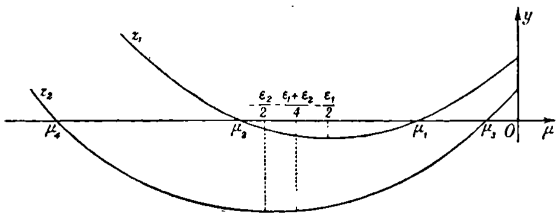

Fig. 4

Il massimo di y_1 è compreso nell'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}, -\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$, $\left(\text{essendo, per } \mu = -\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}, \ y_1 \text{ crescente}\right)$, od anche nell'intervallo $\left(\mu_2, -\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$, che è più o meno ristretto del precedente secondo che è $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4} \gtrless |\mu_2|$.

Se il valore che assume y_1 nel punto $\mu = -\frac{\varepsilon_1}{2}$ è $\geq$ di b_{12}^2 vi sono (fig. 5)

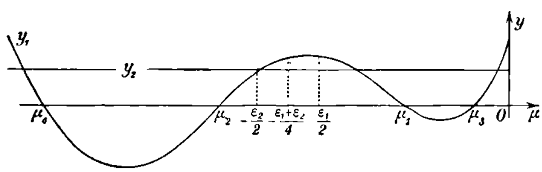

Fig. 5

quattro intersezioni fra le curve (8), e quindi altrettante radici reali dell'equazione caratteristica (7). Dunque:

Condizione sufficiente affinchè la (7) *abbia quattro radici reali è che sia*:

(10) $$(\varepsilon_1^2 - 4b_1)(2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 - 4b_2) \geq 16b_{12}^2.$$

II. CASO:

$$b_2 \geq b_1, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2.$$

Vale ancora tutto quanto s'è visto al caso precedente, basta scambiare b_1 con b_2 e ε_1 con ε_2.

III. CASO:

$$b_1 > b_2, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2.$$

Dalla (9) si ha $z_1 > z_2$ nell'intervallo $(-\infty, \bar{\mu})$, essendo per $\mu = \bar{\mu} = -\dfrac{b_1 - b_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$, $z_1 = z_2$; $z_1 > z_2$ nell'intervallo $(\bar{\mu}, 0)$. Vediamo le disuguaglianze che si possono presentare fra le radici di $y_1 = 0$. Per:

(11) $\qquad |\mu_4| > |\mu_2| \geq |\mu_1| > |\mu_3|$ o per $|\mu_2| > |\mu_4| \geq |\mu_3| > |\mu_1|$,

cioè per $|\mu_4| > |\mu_2|$ o per $|\mu_3| > |\mu_1|$, valgono ancora i risultati ottenuti ai casi I e II. Bisogna, però, notare che nel I caso si supponeva $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ mentre ora si suppone $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$; quindi, per $|\mu_4| > |\mu_2| \geq |\mu_1| > |\mu_3|$, il massimo di y_1 è contenuto nell'intervallo $\left(-\dfrac{\varepsilon_1}{2}, \mu_1\right)$, che è più o meno ristretto dell'intervallo $\left(-\dfrac{\varepsilon_1}{2}, -\dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4}\right)$ secondo che è $|\mu_1| \gtrless \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4}$. Se le disuguaglianze (11) non sono verificate deve essere:

(12) $\qquad |\mu_2| \geq |\mu_1| > |\mu_4| \geq |\mu_3|$ o $|\mu_2| > |\mu_4| > |\mu_1| > |\mu_3|$.

Per il verificarsi del primo gruppo di queste disuguaglianze occorre e basta che sia $|\mu_1| > |\mu_4|$; per il verificarsi del secondo: $(b_1 - b_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(b_2\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_2) < 0$. Sia verificato il primo gruppo delle disuguaglianze (12) (fig. 6). Il massimo valore di y_1 è contenuto nell'intervallo $(\bar{\mu}, \mu_4)$,

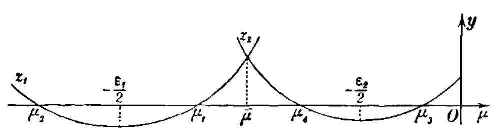

Fig. 6

o nell'intervallo $(\mu_1, \bar{\mu})$ secondo che è $\varepsilon_1^2 - 4b_1 \gtrless \varepsilon_2^2 - 4b_2$; essendo y_1 rispettivamente crescente o decrescente per $\mu = \bar{\mu}$.

Sia ora verificato il secondo gruppo delle (12) (fig. 7). Per $\varepsilon_1^2 - 4b_1 > \varepsilon_2^2 - 4b_2$

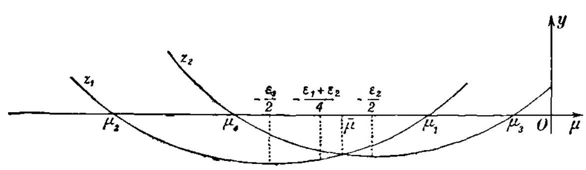

Fig. 7

il massimo di y_1 è contenuto nell'intervallo $\left(-\dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4}, \dfrac{\varepsilon_2}{2}\right)$; ma in certi casi possiamo sostituirgli un intervallo più ristretto. Precisamente per

$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4} > |\mu_4|$ e $|\bar{\mu}| > \frac{\varepsilon_2}{2}$ l'intervallo $(\mu_4, \bar{\mu})$; per $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4} < |\mu_4|$ e $|\bar{\mu}| > \frac{\varepsilon_2}{2}$ l'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}, \bar{\mu}\right)$; infine per $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4} > |\mu_4|$ e $|\bar{\mu}| < \frac{\varepsilon_2}{2}$ l'intervallo $\left(|\mu_4|, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$. Analogamente si ha per $\varepsilon_2^2 - 4b_2 > \varepsilon_1^2 - 4b_1$. Il massimo è contenuto nell'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}\right)$; per $|\mu_1| > \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}$ e $|\bar{\mu}| < \frac{\varepsilon_1}{2}$ nell'intervallo $(\bar{\mu}, \mu_1)$; per $|\mu_1| > \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}$ e $|\bar{\mu}| > \frac{\varepsilon_1}{2}$ nell'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, \mu_1\right)$; infine per $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4} > |\mu_1|$ e $\frac{\varepsilon_1}{2} > |\bar{\mu}|$ nell'intervallo $\left(\bar{\mu}, -\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}\right)$.

Se il valore che assume y_1 per $\bar{\mu} = -\frac{b_1 - b_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$ è maggiore od uguale a b_{12}^2 siamo sicuri che la (7) ha quattro radici reali. Si ha quindi: *condizione sufficiente affinchè l'equazione caratteristica abbia, per* $|\mu_2| \geq |\mu_1| > |\mu_4| \geq |\mu_3|$ *o per* $|\mu_2| > |\mu_4| > |\mu_1| > |\mu_3|$, *quattro radici reali è che sia*:

$$\left|\left(\frac{b_1 - b_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\right)^2 + \frac{b_1\varepsilon_2 - b_2\varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\right| \geq |b_{12}|. \tag{13}$$

Per $|\mu_2| > |\mu_4| > |\mu_1| > |\mu_3|$ possono anche essere verificate le condizioni sufficienti viste ai casi I e II. Di queste due condizioni è preferibile quella del I caso per $\varepsilon_2^2 - 4b_2 > \varepsilon_1^2 - 4b_1$; quella del II caso per $\varepsilon_1^2 - 4b_1 > \varepsilon_2^2 - 4b_2$, essendo:

$$(\varepsilon_1^2 - 4b_1)(2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 - 4b_2) \gtrless (\varepsilon_2^2 - 4b_2)(2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 - 4b_1)$$

secondo che è $\varepsilon_2^2 - 4b_2 \gtrless \varepsilon_1^2 - 4b_1$. Per $|\bar{\mu}| > \frac{\varepsilon_1}{2}$, alla condizione sufficiente (13) è preferibile quella vista al I caso, per $\frac{\varepsilon_2}{2} > |\bar{\mu}|$ quella del II caso.

IV. CASO:

$$b_2 > b_1, \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1.$$

Vale ancora tutto quanto s'è visto al caso precedente, basta scambiare b_1 con b_2 e ε_1 con ε_2.

§ 5. Condizioni sufficienti affinchè, per $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_2$, l'equazione caratteristica abbia due coppie di radici complesse coniugate.

Se l'equazione $y_1 = 0$ ha due coppie di radici complesse coniugate il prodotto dei minimi valori di z_1 e z_2, nell'intervallo in cui è contenuto il minimo valore di y_1, è minore di questo minimo valore. Ora il minimo valore di y_1 è compreso nell'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}\right)$, o nell' intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_1}{4}, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$ secondo che è $4b_2 - \varepsilon_2^2 \gtrless 4b_1 - \varepsilon_1^2$. Infatti i valori che assumono z_1 e z_2 nei punti $\mu = -\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4} + a\right)$ e $\mu = -\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4} - a\right)$ (essendo a una quantità positiva arbitraria) hanno la stessa somma, e quindi y_1 è maggiore in quello di quei due punti in cui $|z_1 - z_2|$ è minore. Dunque, se il minimo valore di y_1 è compreso nell'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}\right)$, una condizione *sufficiente* affinchè l'equazione caratteristica (7) abbia due coppie di radici complesse coniugate è espressa da:

$$(4b_1 - \varepsilon_1^2)\left[\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + 4b_2 - \varepsilon_2^2\right] \geq 16b_{12}^2;$$

se è contenuto nell'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$ è espressa da:

$$(4b_2 - \varepsilon_2^2)\left[\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^4 + 4b_1 - \varepsilon_1^2\right] \geq 16b_{12}^2.$$

OSSERVAZIONE. — Se y_1 ha un sol minimo, ciò che accade certamente se è verificata la (15) (§ 6, III caso), possiamo restringere a piacere l'intervallo in cui è contenuto il minimo di y_1, bastando, in tal caso, conoscere il segno di y_1 in punti convenienti; e quindi possiamo ottenere condizioni sufficienti più restrittive.

§ 6. Condizioni sufficienti affinchè l'equazione caratteristica abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate.

A seconda del segno dei discriminanti delle equazioni $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ si possono presentare i seguenti casi:

I. CASO:

$$\varepsilon_1^1 \geq 4b_1, \quad \varepsilon_2^2 \geq 4b_2.$$

Se b_{12}^2 è maggiore del massimo di y_1 vi sono due sole intersezioni fra le curve (8). Ora questo massimo è sempre compreso nell'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$.

Per $|\mu_2| \geq |\mu_1| > |\mu_4| \geq |\mu_3|$, o per $|\mu_4| \geq |\mu_3| > |\mu_2| \geq |\mu_1|$, il massimo valore di y_1 è minore del prodotto dei valori che assumono z_1 e z_2 rispettivamente per $\mu = -\frac{\varepsilon_2}{2}$, $\mu = -\frac{\varepsilon_1}{2}$; se le disuguaglianze precedenti fra le radici di $y_1 = 0$ non sono verificate dobbiamo, invece, considerare il prodotto dei valori che assumono z_1 e z_2 rispettivamente per $\mu = -\frac{\varepsilon_1}{2}$, $\mu = -\frac{\varepsilon_2}{2}$.

Quindi, se è verificato uno dei due gruppi di disuguaglianze:

$$|\mu_2| \geq |\mu_1| > |\mu_4| \geq |\mu_3|, \quad |\mu_4| \geq |\mu_3| > |\mu_2| \geq |\mu_1|,$$

una condizione *sufficiente* affinchè la (7) abbia una coppia di radici complesse coniugate e due radici reali è espressa da:

$$16b_{12}^2 \geq (\varepsilon_2^2 + 4b_1 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2)(\varepsilon_1^2 + 4b_2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2),$$

altrimenti è espressa da:

$$16b_{12}^2 \geq (\varepsilon_1^2 - 4b_1)(\varepsilon_2^2 - 4b_2).$$

OSSERVAZIONE. — Si possono ottenere condizioni più restrittive in quei casi (§ 4) in cui all'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$, contenente il massimo valore di y_1, si può sostituire un intervallo più ristretto.

II. CASO:

$$\varepsilon_1^2 < 4b_1, \quad \varepsilon_2^2 < 4b_2.$$

L'eventuale massimo di y_1 è sempre compreso nell'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$. Si ha: *condizione sufficiente affinchè l'equazione caratteristica abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate è che sia*:

$$16b_{12}^2 \geq (\varepsilon_2^2 + 4b_1 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2)(\varepsilon_1^2 + 4b_2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2). \tag{14}$$

Anche in questo caso possiamo ottenere condizioni più restrittive sostituendo all'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$, contenente il massimo di y_1, intervalli più ristretti. $\left(\text{Per es. (§ 5) uno degli intervalli } \left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}\right), \left(-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{4}, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\right)$. Se y_1 ha un sol minimo, affinchè l'equazione caratteristica abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate basta che b_{12}^2 sia maggiore di un qualunque valore di y_1.

III. CASO:

$$\varepsilon_1^2 \geq 4b_1, \ \varepsilon_2^2 < 4b_2 \quad \text{o} \quad \varepsilon_1^2 < 4b_1, \ \varepsilon_2^2 \geq 4b_2.$$

Sussiste ancora la condizione sufficiente (14) del caso precedente; condizioni più restrittive si otterrebbero restringendo l'intervallo $\left(-\frac{\varepsilon_1}{2}, -\frac{\varepsilon_2}{2}\right)$ contenente il massimo di y_1.

Per $2\varepsilon_1\varepsilon_2 > \varepsilon_2^2 + 4b_1$ $\left(\text{cioé per } |\mu_2| > \frac{\varepsilon_2}{2} > |\mu_1|\right)$ e $\varepsilon_2^2 < 4b_2$, o per $2\varepsilon_1\varepsilon_2 > \varepsilon_1^2 + 4b_2$ $\left(\text{cioè per } |\mu_4| > \frac{\varepsilon_1}{2} > |\mu_3|\right)$ e $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, la (14) è sempre verificata; quindi vi sono due sole radici reali per l'equazione caratteristica. Infatti, da $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 > 2\varepsilon_1\varepsilon_2$ segue $\varepsilon_1^2 + 4b_2 > 2\varepsilon_1\varepsilon_2$ o $\varepsilon_2^2 + 4b_1 > 2\varepsilon_1\varepsilon_2$ secondo che è $4b_2 > \varepsilon_2^2$ o $4b_1 > \varepsilon_1^2$.

Vediamo, ora, un'altra condizione sufficiente affinchè la (7) abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate. Se y_1 ha un sol minimo vi sono due sole intersezioni fra le curve (8). Derivando due volte y_1 si ha:

$$y_1'' = 12\mu^2 + 6(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mu + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + b_1 + b_2),$$

e le radici di $y_1'' = 0$ sono:

$$\left.\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-3(\varepsilon_1 + \varepsilon_1) \pm \sqrt{9(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 24(\varepsilon_1\varepsilon_2 + b_1 + b_2)}}{12};$$

quindi per $3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 < 8(\varepsilon_1\varepsilon_2 + b_1 + b_2)$ l'equazione $y_1' = 0$ ha una sola radice reale e y_1 un sol minimo. Dunque:

Condizione sufficiente affinchè la (7) *abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate è che sia*:

$$(15) \qquad 2(4b_1 - \varepsilon_1^2 + 4b_2 - \varepsilon_2^2) > (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2.$$

§ 7. **Alcuni casi particolari.**

I. $$\varepsilon_1^2 - 4b_1 = \varepsilon_2^2 - 4b_2.$$

In questo caso è sempre $y_1' = 0$ per $\mu = \bar{\mu} = -\frac{b_1 - b_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4}$. Per $\varepsilon_1^2 > 4b_1$, $\varepsilon_2^2 > 4b_2$, essendo $y_1'' < 0$, y_1 ha il massimo nel punto $\mu = \bar{\mu}$. Si ha quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione caratteristica abbia quattro radici reali è che sia:

$$(16) \qquad |(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 16b_1 - 4\varepsilon_1^2| > 16|b_{12}|.$$

Segue che per:

$$|(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 16b_1 - 4\varepsilon_1^2| < 16\,|b_{12}|$$

la (7) ha due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate.

Sia ora $4b_1 > \varepsilon_1^2$, $4b_2 > \varepsilon_2^2$. Essendo $y_1'' \gtrless 0$ secondo che è $\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 \gtrless 4b_1 - \varepsilon_1^2$, y_1 ha, rispettivamente, il massimo od il minimo nel punto $\mu = \bar{\mu}$. Quindi per $\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 < 4b_1 - \varepsilon_1^2$ la (16) esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione caratteristica (7) abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate. Se la (16) non è verificata si hanno due coppie di radici complesse coniugate. Per $\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 > 4b_1 - \varepsilon_1^2$ si ha: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione caratteristica* (7) *abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate è che sia*:

$$16\,|b_{12}| > (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 16b_1 - 4\varepsilon_1^2.$$

In particolare per $\varepsilon_1^2 = 4b_1$, $\varepsilon_2^2 = 4b_2$ la (16) si riduce a:

$$\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{4}\right)^2 > |b_{12}|.$$

II. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad b_1 \neq b_2.$

Per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_1^2 \geq 4b_2$, y_1 ha il massimo per $\mu = -\frac{\varepsilon_1}{2}$; per $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_1 < 4b_2$, y_1 non ha massimo, ed ha un sol minimo per $\mu = -\frac{\varepsilon_1}{2}$. Si ha quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè, per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_1^2 \geq 4b_2$, *l'equazione caratteristica* (7) *abbia quattro radici reali, o, per* $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_1^2 < 4b_2$, *abbia due coppie di radici complesse coniugate è che sia*:

$$(\varepsilon_1^2 - 4b_1)(\varepsilon_1^2 - 4b_2) > 16b_{12}^2.$$

Se questa disuguaglianza non è verificata la (7) ha due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate.

Infine, per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_1^2 < 4b_2$, o per $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_1^2 \geq 4b_2$, l'equazione caratteristica (7) ha due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate.

OSSERVAZIONE. — Questo caso particolare è interessante anche per il suo significato fisico; infatti si presenta quando lo smorzamento è espresso da un sol coefficiente ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$).

§ 8. Riduzione simultanea di T e $-V$ a forma canonica.

Similmente a quanto si è fatto per la riduzione simultanea a forma canonica delle forme quadratiche T e F, si può trattare il caso della riduzione simultanea di T e $-V$, o di $-V$ e F.

Mi limito al caso, praticamente più notevole, della forza viva e dell' energia potenziale. Per queste forme quadratiche si ha [1]:

$$\begin{cases} 2T = \rho_1'^2 + \rho_2'^2 \\ -2V = b_1\rho_1^2 + b_2\rho_2^2 \\ 2F = \varepsilon_1\rho_1'^2 + 2\varepsilon_{12}\rho_1'\rho_2' + \varepsilon_2\rho_2'^2. \end{cases}$$

Le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} \rho_1'' + \varepsilon_1\rho_1' + \varepsilon_{12}\rho_2' + b_1\rho_1 = 0 \\ \rho_2'' + \varepsilon_2\rho_2' + \varepsilon_{12}\rho_1' + b_2\rho_2 = 0, \end{cases}$$

la cui equazione caratteristica è:

$$f(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1 & \varepsilon_{12}\mu \\ \varepsilon_{12}\mu & \mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Scritta la precedente sotto la forma:

$$\left(\frac{\mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1}{\mu}\right)\left(\frac{\mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2}{\mu}\right) = \varepsilon_{12}^2,$$

poniamo:

$$y_1 = \left(\frac{\mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1}{\mu}\right)\left(\frac{\mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2}{\mu}\right), \quad y_2 = \varepsilon_{12}^2, \tag{18}$$

$$z_1 = \frac{\mu^2 + \varepsilon_1\mu + b_1}{\mu}, \quad z_2 = \frac{\mu^2 + \varepsilon_2\mu + b_2}{\mu}. \tag{19}$$

La prima delle (18) rappresenta una curva del quart' ordine; la seconda una retta parallela all' asse μ e distante da questo di ε_{12}^2. Le (19) rappresentano due iperboli.

Ora, con metodo perfettamente analogo a quello usato precedentemente, si ottengono risultati analoghi a quelli ottenuti riducendo simultaneamente a forma canonica T e F.

Mi limito, quindi, ad esporre i principali risultati:

1°) *Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinchè l' equazione ca-*

---

(1) Naturalmente, le attuali costanti b e ε sono *diverse* da quelle ottenute riducendo simultaneamente a forma canonica T e F.

ratteristica (17) *abbia due coppie di radici complesse coniugate è che sia*: $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_2$.

2°) Condizioni sufficienti affinchè, per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4b_2$, l'equazione caratteristica (17) abbia quattro radici reali.

Per $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, $b_1 > b_2$, una condizione *sufficiente* è espressa da:

$$(\varepsilon_1 - 2\sqrt{b_1})\left(\varepsilon_2 - \sqrt{b_1} - \frac{b_2}{\sqrt{b_1}}\right) \geq \varepsilon_{12}^2, \tag{20}$$

per $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$, $b_2 > b_1$, da:

$$(\varepsilon_2 - 2\sqrt{b_2})\left(\varepsilon_1 - \sqrt{b_2} - \frac{b_1}{\sqrt{b_2}}\right) \geq \varepsilon_{12}^2. \tag{21}$$

Sia ora $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $b_1 > b_2$. Per $|\mu_1| > |\mu_2|$ o $|\mu_3| > |\mu_4|$ (¹) valgono ancora le condizioni (20) e (21).

Se le precedenti disuguaglianze fra le radici di $y_1 = 0$ non sono verificate una condizione sufficiente è espressa da:

$$\left|\frac{b_1 - b_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2 b_1 - \varepsilon_1 b_2}{b_1 - b_2}\right| \geq |\varepsilon_{12}|. \tag{22}$$

Notiamo che per:

$$(b_1 - b_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(b_2\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_2) < 0$$

possono anche essere verificate le condizioni sufficienti (20) e (21). Per $|\mu| > \sqrt{b_1}$ (²) alla (22) è preferibile la (20), per $\sqrt{b_2} > |\bar{\mu}|$ la (21). Per $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, $b_2 > b_1$ vale ancora quanto s'e visto per $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $b_1 > b_2$; basta scambiare b_1 con b_2 e ε_1 con ε_2.

3°) *Condizione sufficiente affinchè, per* $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_2$, *l'equazione caratteristica* (17) *abbia due coppie di radici complesse coniugate è che sia*:

$$(2b_1 - \varepsilon_1)(2b_2 - \varepsilon_2) \geq \varepsilon_{12}^2.$$

4°) Condizioni sufficienti affinchè l'equazione caratteristica abbia due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate. Sia dapprima: $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4b_2$. Per:

$$|\mu_2| \geq |\mu_1| > |\mu_4| \geq |\mu_3|, \quad \text{o per} \quad |\mu_4| \geq |\mu_3| > |\mu_2| \geq |\mu_1|$$

una condizione *sufficiente* è espressa da:

$$\varepsilon_{12}^2 \geq \left(\varepsilon_1 - \sqrt{b_2} - \frac{b_1}{\sqrt{b_2}}\right)\left(\varepsilon_2 - \sqrt{b_1} - \frac{b_2}{\sqrt{b_1}}\right); \tag{23}$$

(¹) Con $|\mu_1|$, $|\mu_2|$, $|\mu_3|$ e $|\mu_4|$ indichiamo, rispettivamente, i valori assoluti delle radici delle equazioni $z_1 = 0$, $z_2 = 0$.

(²) Posto $\bar{\mu} = \dfrac{b_1 - b_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$.

altrimenti da:

$$\varepsilon_{12}^2 \geq (\varepsilon_1 - 2\sqrt{b_1})(\varepsilon_2 - 2\sqrt{b_2}).$$

Per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_2$, o per $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4b_2$, vale ancora la (23).

5°) Sia:

$$b_1 = b_2, \quad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè, per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4b_1$, *l'equazione caratteristica* (17) *abbia quattro radici reali, o per* $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_1$, *abbia due coppie di radici complesse coniugate è che sia*:

$$(\varepsilon_1 - 2\sqrt{b_1})(\varepsilon_2 - 2\sqrt{b_1}) < \varepsilon_{12}^2.$$

Se questa condizione non è verificata l'equazione caratteristica ha due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate.

Infine per $\varepsilon_1^2 \geq 4b_1$, $\varepsilon_2^2 < 4b_1$, o per $\varepsilon_1^2 < 4b_1$, $\varepsilon_2^2 \geq 4b_1$, si hanno due radici reali ed una coppia di radici complesse coniugate.

BIBLIOGRAFIA

LORD RAYLEIGH, *The theory of Sound.*
THOMSON and TAIT, *Treatise an Natural Philosophy.*
LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale.*
DANIELE, *Lezioni di fisica-matematica.* R. Università di Pisa. Anno 1925-26.

Trasformazioni funzionali lineari ed equazioni integrali singolari.

Memoria di EUGENIO FROLA (a Torino).

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni funzionali lineari del tipo:*

$$g(x) = \int_0^\infty A(xy) f(y) dy,$$

mettendo in luce le connessioni tra le loro proprietà involutorie e quelle di distribuzione degli autovalori e natura di autofunzioni delle equazioni integrali singolari:

$$f(x) = \lambda \int_0^\infty A(xy) f(y) dy$$

ad esse connesse.

Premesse ed introduzione.

È nota l'importanza assunta nella matematica moderna dalle trasformazioni funzionali lineari, apportatrici, e nel campo analitico puro, ed in quello applicativo, di sostanziali semplificazioni e di notevoli applicazioni.

Anche se il loro studio sistematico non è incominciato che in epoca abbastanza recente, esse sono apparse da quasi un secolo e mezzo, con la classica trasformazione di FOURIER:

$$\text{(I)} \qquad a(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x) dx$$

e con la non meno classica trasformazione di LAPLACE:

$$\text{(II)} \qquad b(m) = \int_0^\infty e^{-mx} g(x) dx.$$

Queste due trasformazioni, che, operando linearmente su di una funzione, la trasformano in un'altra, sono divise, pur sotto una notevole parvenza di analogia, da differenze sostanziali di comportamento tali da indurmi ad affermare che esse possono stare agli estremi di una classificazione nel campo delle trasformazioni lineari.

Pur prescindendo dal fatto che la (I) opera su funzioni definite in $(-\infty, +\infty)$ mentre la (II) agisce su funzioni definite in $(0, \infty)$ (*), voglio ricordare che, mentre per trovare un campo, in cui si sia certi di poter operare con la (I), bisogna limitarsi, ad esempio, alle funzioni assolutamente integrabili in $(-\infty, +\infty)$, campo che chiamerò come d'uso L_1, oppure, ma con precauzioni sulla definizione stessa della (I), alle funzioni integrabili in $(-\infty, +\infty)$ col quadrato del loro modulo, campo funzionale che chiamerò L_2; il campo di applicazione della (II) è assai più vasto: basta ad esempio che la funzione trasformanda rimanga asintoticamente limitata da un infinito algebrico, oltre essere integrabile L in ogni intervallo finito di $(0, \infty)$.

È, mi sia lecito dirlo, assai più facile operare con la trasformazione di LAPLACE che non con quella di FOURIER. Ma se si tenta di invertire l'operazione, cioè nella (I) di trovare la $f(x)$ nota la $a(m)$, e nella (II) di trovare la $g(x)$ nota la $b(m)$, le difficoltà mutano improvvisamente di sede; mi basti dire, che, mentre per l'inversione della trasformazione di FOURIER, è sufficiente che $a(m)$ sia L_2, e che la formula di inversione è data da:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(m) e^{-mx} dm,$$

sempre con qualche precauzione nel considerare l'eguaglianza; invece per invertire la trasformazione di LAPLACE è necessario che la trasformata $b(m)$ sia analitica nel semipiano della variabile complessa m definito dalla condizione parte reale di $m > 0$ e la determinazione di $g(x)$ è data da:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} b(m) e^{-mx} dm,$$

a mezzo, dunque, di un cammino di integrazione complesso, il che porta di conseguenza la necessità della previa determinazione dei valori complessi di b.

Se si considera la:

(I bis) $$y(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} y(\xi) d\xi$$

oppure la:

(II bis) $$y(x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x\xi} y(\xi) d\xi$$

(*) Indico con $(-\infty, +\infty)$, come è uso, l'intervallo che va da $-\infty$ a $+\infty$, comprendente cioè tutti i valori reali della variabile: con $(0, \infty)$ l'intervallo comprendente i soli valori positivi della variabile.

e si cercano i valori di λ che permettono di soddisfare le relazioni, valori che chiamerò trattandosi di equazioni integrali, sia pur singolari, autovalori; come chiamerò autofunzioni le funzioni soluzioni di tali equazioni integrali; si sa che la (I bis) non ha altri autovalori che 1, i, -1, $-i$, e che ad ognuno di essi corrispondono una infinità di autofunzioni. Mentre la (II bis) ammette uno spettro continuo di autovalori, con un numero finito di autofunzioni linearmente indipendenti connesse a ciascun autovalore.

Ho riassunto in modo sommario [1] il comportamento delle due equazioni integrali (I bis), (II bis), per mostrare come sia stato indotto a supporre che la distribuzione degli autovalori dell'equazione integrale connessa alla trasformazione lineare, sia intimamente legata alla natura della trasformazione stessa.

Le trasformazioni lineari generali che finora furono studiate sono quelle del tipo:

(III) $$g(x) = \int_0^\infty A(xy) f(y) dy$$

dove $A(xy)$ è funzione di una sola variabile z calcolata per $z = xy$; oppure quelle del tipo sostanzialmente simile:

(III bis) $$\gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x + y) \varphi(y) dy$$

dove H è funzione della sola $z = x + y$; cui si perviene dalla (III) con un semplice cambiamento di variabile.

La notevole particolarizzazione dei tipi (III) e (III bis), di fronte al tipo più generale di trasformazione lineare:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(x, y) f(y) dy$$

è dovuta al fatto che tutte le trasformazioni spontaneamente sorte nell'analisi sono riconducibili alla forma (III), o ciò che è lo stesso alla (III bis), non

[1] Anche per la trasformazione di GAUSS e per quella di HANKEL, sono state studiate le equazioni integrali connesse; la prima da DOETSCH, « Math, Zeischrift », 41 (1936), la seconda da TRICOMI (« Atti R. Acc. di Torino », aprile 1936); è anzi da quest'ultimo lavoro che è partita la prima idea di questa mia memoria. Colgo l'occasione della citazione per ringraziare il prof. TRICOMI che mi è stato largo di consigli, nella redazione del presente lavoro; esprimo anche la mia gratitudine al prof. FUBINI che mi è stato pur esso largo di aiuto prezioso.

disgiunto dalle notevoli difficoltà che si frappongono ad uno studio sistematico della trasformazione più generale.

In particolare, essendo il problema dell'inversione il primo a sorgere spontaneamente, si è cercato di stabilire tra le trasformazioni (III) o tra le (III bis) se si potesse determinare la classe delle trasformazioni involutorie, di quelle trasformazioni, cioè, che applicate due volte consecutivamente su una qualunque funzione riproducessero la funzione di partenza, tali cioè che valesse (per quelle di tipo III):

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^\infty A(x,\ x')\left[\int_0^\infty A(x'y)f(y)dy\right]dx' = f(x),$$

per tali classi di trasformazioni involutorie riducendosi il problema dell'inversione a quello di applicare sulla funzione trasformata la trasformazione stessa.

Fu risposto in modo esauriente alla questione dell'involutorietà dal WATSON [2], che trovò le condizioni necessarie e sufficienti a che una trasformazione fosse involutoria. Si noti che il WATSON spostò il problema nel modo seguente: se si parte da

$$g(x) = \int_0^\infty A(xy)f(y)dy$$

e si integrano ambo i membri da 0 a x, e se si pensa di poter invertire le due operazioni di integrazione che vengono a nascere a secondo membro, si trova:

$$\text{(V)} \qquad \int_0^x g(\xi)d\xi = \int_0^\infty \frac{X(xy)}{y} f(y)dy$$

ove si è posto:

$$\int_0^s A(z)dz = X(s).$$

Il WATSON studiò la (V) invece della (III). Più precisamente nella parte introduttiva delle sue « General transforms » trovò con procedimento puramente formale delle condizioni necessarie e sufficienti perchè la (III) fosse involutoria, ma tali risultati abbandonò, spaventato forse dalla difficoltà di renderli rigorosamente sostanziali, per affrontare lo studio della (V); dimostrò

[2] Vedi G. N. WATSON, *General Transforms*, « Proc. Math. Soc. » (2), 35 (1932) e vedi pure G. H. HARDY and E. C. TITCHMARSH, *A class of Fourier kernels.* Ibidem.

allora quali fossero le condizioni necessarie e sufficienti perchè vi fosse involutorietà (si può precisare, nel caso della (V), che si intende involutorio un nucleo $X(xy)$ quando per esso valgono qualunque sia f contemporaneamente

$$\int_0^x g(\xi)d\xi = \int_0^\infty \frac{X(xy)}{y} f(y)dy; \quad \int_0^x f(\xi)d\xi = \int_0^\infty \frac{X(xy)}{y} g(y)dy\Big).$$

Le condizioni di WATSON per la necessità e la sufficienza dell'involutorietà della trasformazione è che, sotto limitazioni qualitative per il nucleo e per il campo funzionale in cui si opera, sia:

$$\int_0^\infty \frac{X(xy)X(yz)}{y^2} dy = \operatorname{Min}(x, z).$$

Trovò infine tutte le $X(xy)$ soddisfacenti alla espressa condizione; ritrovando inoltre il teorema di PARSEVAL per le trasformazioni involutorie.

Notevoli semplificazioni di dimostrazioni furono successivamente apportate da PLANCHEREL e da DOETSCH ([3]).

Io mi propongo in questa Memoria lo studio della trasformazione del tipo (III), abbinando tale studio con quello dell'equazione integrale:

$$\text{(VI)} \qquad f(x) = \lambda \int_0^\infty A(xy)f(y)dy,$$

che chiamo equazione integrale connessa con la trasformazione. Ho, in particolare, sotto opportune ipotesi sul nucleo A della trasformazione e sul campo funzionale in cui la trasformazione agisce, trovati i seguenti risultati:

1) Condizione necessaria e sufficiente perchè la (III) sia involutoria è che la (VI) ad essa connessa non abbia altri autovalori che $+1$ e -1.

2) Condizione necessaria e sufficiente perchè la (III) sia involutoria (in un senso leggermente più lato dell'usuale) è che la (VI) ad essa connessa ammetta una autofunzione a quadrato integrabile $f^*(x)$, tale che:

$$a^*(m) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{\sqrt{x}} x^{im} dx$$

non sia mai nulla per nessun valore di m.

([3]) PLANCHEREL, *Sur les formules de réciprocitè du type de Fouries*, « Journ. London Math. Soc. » (1936); DOETSCH, *Beitrag zu Watsons General Transforms*, « Math. Annalen », 113 (1936) e *Zur Theorie der involutorischen Transformationen....* Ibidem.

In una seconda Memoria svolgerò lo studio sistematico di una particolare classe di equazioni integrali di prima e seconda specie, omogenee o non, connesse con le trasformazioni (III), aventi nuclei che, generalizzando con le loro proprietà le proprietà dei nuclei involutori, chiamerò involutori generalizzati.

CAP. II. **Alcune definizioni preliminari. Sulla trasformazione di Mellin-Fourier.**

Nel corso di questa Memoria interviene una trasformazione ausiliaria, che, per le analogie che essa ha con la trasformazione di MELLIN e con quella di FOURIER, ho chiamata trasformazione di MELLIN–FOURIER (o abbreviando tras. M.–F.).

Essa opera su funzioni definite in $(0, \infty)$ ed è definita da:

$$a(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{f(z)}{\sqrt{z}} z^{im} dz$$

la trasformata $a(m)$, contrariamente alla trasformanda $f(x)$, viene definita, ove esista in $(-\infty, +\infty)$. Le proprietà della M.–F. si riconnettono subito alle note proprietà della trasformazione di FOURIER cui la conduce il cambiamento di variabile:

$$z = e^{x}$$

che porta a:

$$a(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x}{2}} f(e^{x}) e^{imx} dx.$$

Concludo quindi:

1° *La trasformata di M.–F. di una funzione* f(z) *definita in* $(0, \infty)$ *è null'altro che la trasformata di Fourier, ove esista, della funzione* $e^{\frac{x}{2}}f(e^{x})$ *definita in* $(-\infty, +\infty)$.

Segue facilmente dalla considerazione della seguente uguaglianza:

$$\int_0^{\infty} | f(z) |^2 dz = \int_0^{+\infty} e^{x} \, | f(e^{x}) |^2 dx = \int_0^{+\infty} \left| e^{\frac{x}{2}} f(e^{x}) \right|^2 dx.$$

ottenuta col cambiamento di variabile $z = e^{x}$, che per la M.–F. valgono i teoremi di PLANCHEREL e di PARSEVAL, così enunciabili:

2° *Se* f(z) *è* L_2 *in* (0, ∞) *definita la sua trasf. M.-F. come*:

$$a(m) = \underset{A \to \infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{e^{-A}}^{e^{A}} \frac{f(z)}{\sqrt{z}} z^{im} dz$$

sussistono le due eguaglianze:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{B \to \infty}{\text{l. i. m.}} \int_{-B}^{+B} \frac{a(m)}{\sqrt{z}} z^{-im} dm$$

$$\int_0^{\infty} | f(z) |^2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} | a(m) |^2 dm \quad (^1).$$

Cap. III. **Ipotesi sul nucleo della trasformazione.**

Come ho detto nelle premesse mi propongo lo studio delle trasformazioni lineari del tipo:

$$g(x) = \int_0^{\infty} A(xy) f(y) dy$$

dove il nucleo $A(xy)$ è funzione del solo prodotto xy; se pongo $z = xy$ la trasformazione diventa:

$$g(x) = \int_0^{\infty} \frac{A(z)}{x} f\left(\frac{z}{x}\right) dz$$

le due espressioni essendo perfettamente equivalenti. Per evitare inutili complicazioni mi riferirò alla seconda forma e definisco trasformata di un funzione $f(x)$ secondo il nucleo $A(z)$ il:

$$\lim_{a \to \infty} \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} \frac{A(z)}{x} f\left(\frac{z}{x}\right) dz$$

sempre inteso che tale limite esista per ogni x di (0, ∞). Tale limite indico brevemente con:

$$\mathfrak{A}[f(x)].$$

---

(1) L'espressione $\underset{a \to b}{\text{l. i. m.}} f(x \mid a) = y(x)$ sta per indicare che $\lim_{a \to b} \int | f(x \mid a) - y(x) |^2 dx = 0$ l'integrale esteso all'insieme per cui si intende verificata l'espressione stessa.

Nel corso poi della presente Memoria si intenderà sempre (salvo avvertimento esplicito) con il segno:

$$\int_0^\infty$$

indicare il:

$$\lim_{a \to \infty} \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} .$$

Enuncio le ipotesi che definiscono il campo funzionale cui appartengono i nuclei $A(z)$ considerati in questa memoria.

1.° *È* A(z) *una funzione reale della variabile reale* z, *definita per* z *positivo, integrabile* L *in ogni intervallo finito interno a* (0, ∞).

2.° *Detto*:

$$\Omega(m \mid a) = \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} \frac{A(z)}{\sqrt{z}} z^{im} dz$$

sia sempre: a) $\Omega(m \mid a)$ *limitato per ogni* m *ed* a *del campo di definizione, continuo come funzione di* m *per ogni* m *reale;* b) *esista per ogni* m *reale il*

$$\lim_{a \to \infty} \Omega(m \mid a) = \Omega(m);$$

c) *sia* $\Omega(m)$, *oltreche limitato, come segue da* a) *e* b) *continuo in* $(-\infty, +\infty)$ *eccetto al più in un insieme numerabile di punti* $\{m_d\}$, *non condensantisi al finito, in cui abbia solo discontinuità di prima specie;* d) *sia la convergenza di* $\Omega(m \mid a)$ *verso* $\Omega(m)$ *uniforme in ogni intervallo tutto interno ad un intervallo limitato da due successivi* m_d; e) *sia sempre* $\Omega(m) \neq 0$.

La parte e) non essendo verificata il nucleo sarà definito incompleto.

Cap. IV. Le autofunzioni fondamentali dell'equazione integrale $f(x) = \lambda\mathfrak{A}[f(x)]$ ed una condizione necessaria per l'involutorietà della trasformazione.

Considero l'equazione integrale singolare omogenea di 2ª specie, connessa con la trasformazione $\mathfrak{A}$:

$$f(x) = \lambda\mathfrak{A}[f(x)] = \lambda \lim_{a \to \infty} \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} \frac{A(z)}{x} f\left(\frac{z}{x}\right) dz. \tag{1}$$

Sulla (1) enuncio un teorema, fondamentale per il resto della ricerca, che mostra come ogni equazione integrale di tal tipo non solo ammetta sempre autovalori e autofunzioni, ma ammetta una classe di autofunzioni assai vasta che chiamo fondamentali, (lo stesso aggettivo applico ai relativi autovalori) le quali sono comuni, a meno del valore di due costanti, a tutte le equazioni (1) il cui nucleo soddisfi solo, le ipotesi specificate in precedenza, invero assai poco restrittive. Anzi neppure tutte le ipotesi fatte sono strettamente necessarie alla validità di questo teorema: basta che siano verificate la 1ª, e le a) e b) della 2ª, e ciò per ovvii motivi che seguono.

Teorema I. — *L'equazione*:

(1) $$f(x) = \lambda \mathfrak{A}[f(x)] = \lambda \lim_{a \to \infty} \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} \frac{A(z)}{x} f\left(\frac{z}{x}\right) dz$$

ammette sempre le soguenti autofunzioni e relativi autovalori, che chiamo fondamentali:

(2) $$\begin{aligned} & H\left[\sqrt{\Omega(-m)}\,\frac{x^{im}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\Omega(m)}\,\frac{x^{-im}}{\sqrt{x}}\right]; \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\Omega(m)}\sqrt{\Omega(-m)}} \\ & K\left[\sqrt{\Omega(-m)}\,\frac{x^{im}}{\sqrt{x}} - \sqrt{\Omega(m)}\,\frac{x^{-im}}{\sqrt{x}}\right]; \quad \lambda = \frac{-1}{\sqrt{\Omega(m)}\sqrt{\Omega(-m)}} \end{aligned}$$

H *e* K *essendo due costanti arbitrarie e le determinazioni dei radicali essendo le stesse nelle autofunzioni e nei relativi autovalori.*

Dim. — Se in (1) pongo:

$$f(x) = c_1 \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}}$$

ricavo facilmente:

$$c_1 \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}} = \lambda c_1 \lim_{a \to \infty} \Omega(m \mid a) \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}} + \lambda c_2 \lim_{a \to \infty} \Omega(-m \mid a) \frac{x^{im}}{\sqrt{x}}$$

e, dato che:

$$\lim_{a \to \infty} \Omega(m \mid a) = \Omega(m)$$

ricavo ancora:

(3) $$c_1 \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}} = \lambda c_1 \Omega(m) \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}} + \lambda c_2 \Omega(-m) \frac{x^{im}}{\sqrt{x}}.$$

Ora se la (3) vuole essere soddisfatta deve essere:

(4) $$\begin{cases} c_1 - \lambda c_2 \Omega(-m) = 0 \\ -\lambda c_1 \Omega(m) + c_2 = 0. \end{cases}$$

Il sistema (4) non può essere a sua volta soddisfatto con soluzione propria se non è il relativo determinante uguale allo zero: deve essere dunque

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\Omega(m)}\,\sqrt{\Omega(-m)}}$$

oppure

$$\lambda = \frac{-1}{\sqrt{\Omega(m)}\,\sqrt{\Omega(-m)}}$$

nel primo caso le (4) ci danno:

$$c_1 = H\sqrt{\Omega(-m)}; \quad c_2 = H\sqrt{\Omega(m)}$$

nel secondo:

$$c_1 = K\sqrt{\Omega(-m)}; \quad c_2 = -K\sqrt{\Omega(m)}.$$

Resta così pienamente dimostrato il teorema 1 coll'ausilio delle sole ipotesi previste per $A(z)$.

Segue subito il:

COROLLARIO 1°. — *Ogni equazione di tipo* (1) *ammette sempre coppie di autovalori reali eguali in valore assoluto ma di segno opposto date da*: $\dfrac{\pm 1}{|\Omega(m)|}$.

Infatti per il Teor. 1 esistono, per ogni m reale (purchè il nucleo sia completo) i due autovalori:

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{\Omega(m)}\,\sqrt{\Omega(-m)}}$$

ora, essendo $A(z)$ reale è:

$$\Omega(m) = \int_0^\infty \frac{A(z)}{\sqrt{z}}\, z^{im} dz = \int_0^\infty \frac{A(z)}{\sqrt{z}} \cos(m \log z) dz + i \int_0^\infty \frac{A(z)}{\sqrt{z}} \operatorname{sen}(m \log z) dz,$$

dove:

$$\int_0^\infty \frac{A(z)}{\sqrt{z}} \cos(m \log z) dz, \quad \int_0^\infty \frac{A(z)}{\sqrt{z}} \operatorname{sen}(m \log z) dz$$

sono entrambi reali; di conseguenza:

$$\Omega(-m) = \int_0^\infty \frac{A(z)}{\sqrt{z}} \cos(m \log z) dz - i \int_0^\infty \frac{A(z)}{\sqrt{z}} \operatorname{sen}(m \log z) dz = \bar{\Omega}(m) \quad (*).$$

(*) Con $\bar{\Omega}(m)$ indico il numero complesso coniugato di $\Omega(m)$.

A parte l'ordine dei segni, è:

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{\Omega(m)}\sqrt{\Omega(-m)}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{\Omega(m)\Omega(-m)}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{\Omega(m)\bar{\Omega}(m)}}=\frac{\pm 1}{|\Omega(m)|};$$

il che dimostra l'enunciato corollario 1°.

Suppongo ora che $A(z)$ sia involutorio: preciso il significato di questa locuzione: dico che $A(z)$ è involutorio se, per ogni funzione $f(x)$ su cui è possibile operare la doppia trasformazione:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A}[f(x)]]$$

è:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A}[f(x)]]=f(x).$$

Ciò premesso, segue che le autofunzioni fondamentali, $\varphi(x\mid m)$, sono funzioni su cui è certo possibile operare con A non solo due ma quante volte si voglia, e per esse vale in particolare:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A}[\varphi(x\mid m)]]=\frac{1}{\lambda^2_m}\varphi(x\mid m)$$

essendo λ_m l'autovalore fondamentale relativo alla $\varphi(x\mid m)$.

Se $A(z)$ è involutorio deve necessariamente essere:

$$|\lambda_m|=1$$

da cui per il corollario 1°:

$$|\Omega(m)|=1 \qquad (m \text{ in } (-\infty,+\infty)) \tag{5}$$

essendo la $\varphi(x\mid m)$ dipendente da m che può assumere un qualunque valore reale.

È dunque:

Teorema II. — *Condizione necessaria perchè una trasformazione sia involutoria, nel senso precedentemente specificato, è che per ogni* m *reale, sia*:

$$|\Omega(m)|=1.$$

Delle ipotesi fatte su $A(z)$ per la validità di quest'ultimo teorema bastano la 1ª e la a) e b) della 2ª.

Cap. V. Il campo funzionale *M*.

Giunto facilmente al teorema I, che assicura l'esistenza per tutte le equazioni integrali:

$$f(x)=\lambda\mathfrak{A}[f(x)]$$

connesse alle trasformazioni funzionali in studio, della comune e vasta classe delle autofunzioni fondamentali, ed al teorema II che dice che la trasformazione non può essere involutoria se la trasformata di M.-F. del suo nucleo non soddisfa a:

$$|\,\Omega(m)\,| = 1 \tag{5}$$

sono stato naturalmente spinto a cercare se la anzidetta condizione, necessaria alla involutorietà, non fosse anche sufficiente. Per riuscire a dimostrare che la (5) è condizione sufficiente perchè il nucleo $A(z)$ sia involutorio, è necessario fissare con chiarezza il campo funzionale cui devono appartenere le funzioni su cui opera la trasformazione.

In ricerche analoghe si suole fissare come campo funzionale quello L_1 delle funzioni assolutamente integrabili in $(0, \infty)$ oppure quello L_2 delle funzioni a quadrato integrabile in $(0, \infty)$; il campo funzionale da me scelto parimenti o forse più vasto, se sono leciti tali confronti, di quello L_1 e di quello L_2, è in connessione assai intima con la classe delle autofunzioni fondamentali.

Se considero un certo numero finito di autofunzioni fondamentali:

$$\varphi(x \mid m) = \sqrt{\Omega(-m)}\,\frac{x^{im}}{\sqrt{x}} \pm \sqrt{\Omega(m)}\,\frac{x^{-im}}{\sqrt{x}}$$

e ne faccio una qualunque combinazione lineare, tale combinazione potrà pure essere pensata come combinazione lineare di termini del tipo:

$$\frac{x^{im}}{\sqrt{x}}$$

e, viceversa, ogni combinazione lineare di tali termini sarà pure pensabile come combinazione lineare di autofunzioni fondamentali $\varphi(x \mid m)$.

La combinazione lineare, in senso lato, più vasta possibile, di termini $\frac{x^{im}}{\sqrt{x}}$ è data dall'integrale di STIELTJES:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\, dV(m)$$

ma tale integrale è sempre ancora, in senso lato, combinazione lineare di autofunzioni fondamentali, mi si permetta farlo notare esplicitamente, di *qualsivoglia* delle equazioni integrali di tipo:

$$f(x) = \lambda\mathcal{A}[f(x)].$$

Occorre una ultima precisazione, per giungere alla definizione del preannunciato campo funzionale.

Perchè l'integrale di STIELTJES abbia sempre un significato bisogna fare una qualunque ipotesi sulla *funzione peso* V(m). Qui, a differenza di ciò che si fa per gli integrali di STIELTJES, di tipo analogo, che definiscono le funzioni definite positive (⁵), non impongo che $V(m)$ sia limitato e monotono (non decrescente), ma mi limito ad imporre che sia a variazione totale limitata, che sia cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | dV(m) | = V$$

c che sia, ciò in accordo con le ipotesi che vengono emesse nella definizione delle funzioni definite positive, per ogni m:

$$V(m) = \frac{V(m+0) + V(m-0)}{2} \quad (*).$$

Ecco dunque la definizione del campo M.

Detta V(m) *una qualunque funzione a variazione limitata, definita in* $(-\infty, +\infty)$, *soddisfacente alle condizioni*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | dV(m) | = V; \quad V(m) = \frac{V(m+0) + V(m-0)}{2}.$$

Chiamo campo M *il campo delle funzioui della variabile* z *definita in* $(0, \infty)$ *da*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}} \, dV(m).$$

CAP. VI. Le proprietà delle funzioni appartenenti al campo *M*.

Definito il capo M, passo ad enunciarne le più salienti proprietà, che servono a metterne in evidenza l'ampiezza e le caratteristiche.

Ad ogni funzione $f(z)$ appartenente a M si può fare corrispondere una funzione peso $V(m)$ in $(-\infty, +\infty)$, che la definisce a mezzo della:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}} \, dV(m);$$

(⁵) Per le funzioni definite positive vedi per es. BOCHNER, *Vorlesunggn über fouriesche integrale*, da pag. 74 a pag- 82.

(*) Indico con $V(m+0)$ il $\lim\limits_{h \to 0+} V(m+h)$ e con $V(m-0)$ il $\lim\limits_{h \to 0-} V(m+h)$; limiti che devono sempre esistere per ogni m di $(-\infty, +\infty)$.

se due funzioni peso $V_1(m)$, $V_2(m)$ definiscono la stessa funzione $f(z)$, esse devono differire tra loro di una costante. Infatti, posto

$$W(m) = V_1(m) - V_2(m)$$

se fosse $W(m)$ diversa da una costante, sarebbe certo, per la natura dell'integrale di STIELTJES:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\, dW(m) \neq 0.$$

Si potrebbe rendere la corrispondenza tra funzioni appartenenti a M e funzioni peso $V(m)$ biunivoca imponendo alle funzioni peso di soddisfare la relazione:

$$V(0) = 0,$$

ma tale corrispondenza biunivoca non è necessaria per l'ulteriore svolgimento del lavoro, e per semplicità preferisco non imporre condizioni che non siano assolutamente indispensabili.

Una funzione peso $V(m)$ può, essendo a variazione limitata, essere pensata come differenza di due funzioni monotone mai decrescenti, limitate: $U_1(m)$, $U_2(m)$; posto dunque:

$$V(m) = U_1(m) - U_2(m)$$

considero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} dV(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} dU_1(m) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} dU_2(m)$$

ed essendo per le $U_1 U_2$ soddisfatte ovviamente:

$$U_1(m) = \frac{U_1(m+0) + U_1(m-0)}{2}; \quad U_2(m) = \frac{U_2(m+0) + U_2(m-0)}{2}$$

saranno:

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} dU_1(m); \quad p_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} dU_2(m);$$

entrambe definite positive [5]; posto $x = \log z$ ricavo facilmente:

$$\frac{p_1(\log z) - p_2(\log z)}{\sqrt{z}} = \int_0^{\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\, dV(m).$$

È facile concludere che date due funzioni in $(-\infty, +\infty)$ $p_1(x)$, $p_2(x)$, definite positive, posto $x = \log z$, e divisa la loro differenza per $\sqrt{z}$ si ottiene una funzione appartenente ad M; ed inversamente una qualunque funzione appartenente a M può pensarsi come la differenza di due funzioni definite positive, calcolate per $x = \log z$, divisa per $\sqrt{z}$. Concludo con:

1.° *Se* f(z) *appartienie a* M, $e^{\frac{x}{2}}f(e^x)$ *è sempre decomponibile nella differenza di due funzioni definite positive, di cui una può anche essere nulla.*

Essendo le funzioni definite positive funzioni continue in tutto $(-\infty, +\infty)$ posso per l'enunciato 1.° asserire:

2.° *Ogni funzione* f(z) *appartenente ad* M *è una funzione continua in* $(0, \infty)$.

Un particolare sottocampo di M è dato dalle funzioni definite a mezzo di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\, a(m)dm$$

con $a(m)$, L_1 in $(0, \infty)$. Per convincersi che funzioni così definite appartengono ad M, basta porre:

$$V(m) = \int_0^m a(m')dm'$$

per poter scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\, a(m)dm = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\, dV(m).$$

Penso ora una funzione $g(z)$, L_2 in $(0, \infty)$ essa sarà, per il risultato 2, del I Capitolo che estende il teorema di PLANCHEREL alla trasformazione di M.-F., data da:

$$g(z) = \underset{B\to\infty}{\text{l. i. m.}} \int_{-B}^{+B} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\, b(m)dm,$$

con $b(m)$, L_2 in $(-\infty, +\infty)$; se si suppone che $b(m)$ sia anche L_1 in $(-\infty, +\infty)$ allora la $g(z)$ appartiene ad M oltre che ad L_2, dirò che appartiene a ML_2.

È facile convincersi che ogni funzione appartenente a ML_2 è del tipo:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\, b(m)dm$$

con $b(m)$, L_1L_2 in $(-\infty, +\infty)$. Infatti per ogni funzione appartenente ad M, l'integrazione rispetto ad m non richiede alcuna precauzione, essendo l'integrale assolutamente ed uniformemente convergente per z in $(0, \infty)$ è dunque per ogni funzione L_2 appartenente ad M:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\,b(m)dm$$

con $b(m)$, L_2, in quanto $g(z)$ è L_2, e contemporaneamente L_1, in quanto $g(z)$ è appartenente a M. Segue:

3.° *Ogni funzione* ML_2 *è data da*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\,b(m)dm$$

con $a(m)$, L_1L_2 *in* $(-\infty, +\infty)$.

Un'altra notevole proprietà delle funzioni appartenenti ad M è la seguente:

4.° *Data una funzione* $f(z)$ *appartenente a* M, *ed una successione di insiemi* $\{\rho_n\}$, *tali che ogni* m *di* $(-\infty, +\infty)$ *appartenga ad uno e ad uno solo di essi, e tale ancora che, preso ad arbitrio un intervallo finito* (a, b) *si possa sempre trovare un* k *intero positivo, in modo che, gli* m *di* (a, b) *non appartengano a nessuno dei* ρ_n *con* $n > k$, *sussiste la*:

$$f(z)=\sum_n\int_{\rho_n}\frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\,dV(m).$$

Dato, infatti, un numero positivo A, gli insiemi ρ_n che hanno punti in $(-A, A)$ hanno per ipotesi indice minore di q (essendo q un opportuno intero positivo); considero allora:

$$R_q(z)=f(z)-\sum_{n=0}^{q-1}\int_{\rho_n}\frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\,dV(m).$$

Detto σ_q l'insieme formato da tutti i ρ_n con $n \geq q$ è:

$$R_q(z)=\int_{\sigma_q}\frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\,dV(m)$$

a cui:

$$|\sqrt{z}R_q(z)|<\int_{\sigma_q}|dV(m)|$$

ma è:

$$\int_{\sigma_q} | dV(m) | \leq \int_{-\infty}^{-A} | dV(m) | + \int_{A}^{+\infty} | dV(m) |.$$

Essendo $V(m)$ a variazione limitata è possibile, dato ε positivo, piccolo a piacere, trovare un A tale che:

$$\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{+\infty} | dV(m) | < \varepsilon$$

e di conseguenza risalire ad un q per cui sia:

$$| \sqrt{z} R_q(z) | < \varepsilon.$$

È così dimostrato l'enunciato 4.° insieme all'assoluta ed uniforme convergenza della serie in cui ho decomposto $f(z)$ in ogni intervallo interno a $(0, \infty)$.

5.° *Definisco sottocampo* $M[\rho_n]$ *di* M *il campo delle funzioni date da*:

$$\int_{\rho_n} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}} dV(m).$$

I termini della serie in cui (per l'enunciato 4.°) *so decomporre ogni funzione* f(z) *appartenente ad* M *li chiamo componenti della funzione secondo i sottocampi* $M[\rho_n]$ *connessi con l'insieme* ρ_n, *e li indico con* $f[\rho_n](z)$.

Cap. VII. **Due lemmi sul campo funzionale *M*.**

Lemma I. — *Se* $\Omega(m)$ *è una funzione limitata in modulo da* Ω *per* m *in* $(-\infty, +\infty)$ *e quivi continua, se* V(m) *è una funzione peso, allora*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}} \Omega(m) dV(m)$$

appartiene ad M.

Dim. — Posto:

$$W(m) = \int_{0}^{m} \Omega(m') dV(m')$$

è:

$$dW(m) = \Omega(m) dV(m)$$

da cui segue:

$$|\,d\,W(m)\,| = |\,\Omega(m)\,|\,|\,d\,V(m)\,|, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\,d\,W(m)\,| > \Omega \int_{-\infty}^{+\infty} |\,d\,V(m)\,| = \Omega\,V.$$

Inoltre, essendo $\Omega(m)$ continuo sarà:

$$W(m-0) = \int_0^{m-0} \Omega(m')d\,V(m')$$

$$W(m) = \int_0^{m-0} \Omega(m')d\,V(m') + \Omega(m)[V(m) - V(m-0)] =$$

$$= \int_0^{m} \Omega(m)d\,V(m') + \Omega(m)\,\frac{V(m+0) - V(m-0)}{2}$$

$$W(m+0) = \int_0^{m-0} \Omega(m')d\,V(m') + \Omega(m)[V(m+0) - V(m-0)]$$

da cui segue:

$$W(m) = \frac{W(m+0) + W(m-0)}{2}.$$

È dunque $W(m)$ una funzione peso, e dato che:

$$d\,W(m) = \Omega(m)d\,V(m)$$

posso scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\,\Omega(m)d\,V(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\,d\,W(m).$$

Questo lemma non regge più quando si tolga l'ipotesi della continuità di $\Omega(m)$ in $(-\infty, +\infty)$; non è più infatti possibile, con le ipotesi fatte per il peso $V(m)$ considerare alla luce delle ordinarie definizioni di integrale di STIELTJES (*):

$$\int_0^m \Omega(m')d\,V(m')$$

quando $\Omega(m)$ non è continua.

(*) L'ordinaria def. di integrale di STIELTJES vale solo quando o la funzione peso o la funzione integranda sono in ciascun punto, almeno una, continua.

Sono state, è vero, compiute recentemente estensioni del concetto di integrale di STIELTJES nel senso che occorre, e precisamente il DE FINETTI ed il JACOB [6] hanno data una nuova definizione di integrale di STIELTJES, che potrebbe estendere il lemma I nel caso in cui $\Omega(m)$ cessa di essere continua. Siccome, per quanto occorre in questo studio, tale estensione potrebbe parere artificiosa, ho preferito evitare una definizione arbitraria, salvo poi, a risultati raggiunti riconoscere la possibilità di una definizione che rientra perfettamente in quella di DE FINETTI-JACOB.

Per sveltire la dimostrazione del lemma che mi propongo di enunciare mi permetto di introdurre alcune locuzioni sulle quali richiamo l'attenzione del lettore.

Presa una funzione peso $V(m)$, ed una successione di punti $\{m_d\}$ in $(-\infty, +\infty)$ indico con $V_{(m_d)}(m)$, che leggo *la* $V(m)$ *liberata dalle discontinuità in* $\{m_d\}$, la funzione così definita: *per ogni* m_d *determino un* C_d *dato da*:

$$C_d = V(m_d + 0) - V(m_d - 0)$$

(*potrà essere* $C_d = 0$ *se* m_d *non è un punto di discontinuità per* $V(m)$). *Ciò premesso considero una funzione a scala* $S_{(m_d)}(m)$ *così definita:* $S_{(m_d)}$ *è costante tra due successivi* m_d *e soddisfacente in ogni* m_d *alle*:

$$S_{(m_d)}(m_d + 0) - S_{(m_d)}(m_d - 0) = C_d;$$

$$S_{(m_d)}(m_d) = \frac{S_{(m_d)}(m_d + 0) - S_{(m_d)}(m_d - 0)}{\cdot 2}$$

la differenza:

$$V(m) - S_{(m_d)}(m)$$

è $V_{(m_d)}(m)$. *È ovvio che la* $V_{(m_d)}(m)$ *è continua negli* $\{m_d\}$.

Faccio ancora notare, prima di enunciare il lemma II, che: data una funzione $\Omega(m \mid a)$, continua per ogni m di $(-\infty, +\infty)$, qualunque sia a; la quale tende per a che va all'infinito ad una funzione $\Omega(m)$, continua in ogni m di $(-\infty, +\infty)$ eccetto in un insieme di punti $\{m_d\}$ numerabile, non condensantisi al finito, in cui è affetta da sole discontinuità di prima specie, se la tendenza al limite è uniforme in ogni pluriintervallo tutto al finito, escludente gli $\{m_d\}$, è allora sempre possibile, determinati tre numeri positivi: ε (piccolo a piacere) k (grande a piacere) δ (piccolo a piacere), ed in conseguenza degli ultimi due un pluriintervallo Δ, cui appartengono i

[6] Vedi B. DE FINETTI e M. JACOB, *Sull'integrale di Stieltjes Riemann*, « Giorn. dell'Istit. degli Attuari », ottobre 1935.

punti con $|m| \leq k$ e con $|m - m_d| \geq \frac{\delta}{2}$, per ogni m_d; trovare un a_0 tale che per ogni $a > a_0$ siano:

$$|\Omega(m \mid a) - \Omega(m)| < \varepsilon \qquad (m \text{ in } \Delta)$$

$$|\Omega(m_d \mid a) - \Omega(m_d)| < \varepsilon \qquad (|m_d| < k).$$

Ecco dunque il lemma:

Lemma II. — *Data una funzione limitata* $\Omega(m \mid a)$, *della variabile* $a > 0$, *ed* m *arbitraria reale, che per* $a \to \infty$ *tende ad una funzione* $\Omega(m)$ *necessariamente limitata, continua in* $(-\infty, +\infty)$ *eccetto che in un insieme* $\{m_d\}$ *numerabile, non condensantesi al finito, in cui è affetta da sole discontinuità di prima specie; se la tendenza è uniforme in ogni plurintervallo tutto al finito, escludente i punti di* $\{m_d\}$, *esiste allora:*

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im} \Omega(m \mid a) dV(m)$$

convergente uniformemente per z *in* $(0, \infty)$ *verso:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^{im} \Omega(m) dV_{(m_d)}(m) + \sum_d z^{im_d} \Omega(m_d) C_d$$

dove $V_{(m_d)}(m)$ *è la funzione peso* V *liberata dalle discontinuità negli* $\{m_d\}$. *ed i* C_d *sono gli eventuali salti che* $V(m)$ *compie negli* m_d.

Dim. — Essendo $V(m)$ a variazione totale limitata, è possibile, fissato un η arbitrario (piccolo a piacere) trovare un intero k, tale che:

$$\int_{-\infty}^{+k} |dV(m)| + \int_{k}^{+\infty} |dV(m)| < \eta.$$

Essendo anche $V_{(m_d)}(m)$ a variazione totale limitata, e continua negli $\{m_d\}$, fissato lo stesso η di prima, è possibile trovare un δ positivo tale che:

$$\sum_{-k}^{+k} \int_{m_d - \frac{\delta}{2}}^{m_d + \frac{\delta}{2}} |dV_{(m_d)}(m)| < \eta,$$

intendendosi con $\sum_A^B$ la somma estesa a tutti gli m_d che cadono in (A, B); chiamo inoltre Δ il plurintervallo formato dagli m che soddisfano $|m| \leq k$;

$|m - m_d| \geq \frac{\delta}{2}$ per ogni m_d. Ciò premesso considero che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m|a)dV(m) = \int_{-\infty}^{-k} + \int_{k}^{\infty} z^{im}\Omega(m|a)dV_{(m_d)}(m) + \sum_{-k}^{+k}\int_{m_d-\frac{\delta}{2}}^{m_d+\frac{\delta}{2}} z^{im}\Omega(m|a)dV_{(m_d)}(m) +$$

$$+ \sum_{-k}^{+k} z^{im_d}\Omega(m_d|a)C_d + \sum_{-\infty}^{-k} + \sum_{k}^{\infty} z^{im_d}\Omega(m_d|a)C_d + \int_{\Delta} z^{im}\Omega(m|a)dV_{(m_d)}(m)$$

e che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m)dV_{(m_d)}(m) + \sum_{-\infty}^{+\infty} z^{im_d}\Omega(m_d)C_d = \int_{-\infty}^{-k} + \int_{k}^{\infty} z^{im}\Omega(m)dV_{(m_d)}(m) +$$

$$+ \sum_{-k}^{+k}\int_{m_d-\frac{\delta}{2}}^{m_d+\frac{\delta}{2}} z^{im}\Omega(m)dV_{(m_d)}(m) + \sum_{-k}^{+k} z^{im_d}\Omega(m_d)C_d +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{-k} + \sum_{k}^{\infty} z^{im_d}\Omega(m_d)C_d + \int_{\Delta} z^{im}\Omega(m)dV_{(m_d)}(m),$$

per cui

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m|a)dV(m) - \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m)dV_{(m_d)}(m) - \sum_{-\infty}^{+\infty} z^{im_d}\Omega(m_d)C_d \right| <$$

$$< \int_{\Delta} |\Omega(m|a) - \Omega(m)|\,|dV_{(m_d)}(m)| + \sum_{-k}^{+k} |\Omega(m_d|a) - \Omega(m_d)|\,|C_d| +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-k} + \int_{k}^{\infty} (|\Omega(m|a)| + |\Omega(m)|)\,|dV_{(m_d)}(m)| + \sum_{-\infty}^{-k} + \sum_{k}^{\infty} (|\Omega(m_d|a)| + |\Omega(m_d)|)\,|C_d| +$$

$$+ \sum_{-k}^{+k}\int_{m_d-\frac{\delta}{2}}^{m_d+\frac{\delta}{2}} (|\Omega(m|a)| + |\Omega(m)|)\,|dV_{(m_d)}(m)|.$$

Detto ora H un numero positivo maggiore del limite superiore di $|\Omega(m|a)|$ e di quello di $|\Omega(m)|$, tenuto conto delle condizioni di convergenza di $\Omega(m|a)$ verso $\Omega(m)$, e delle considerazioni che ho fatto precedere all'enunciato del lemma, si può, fermo restando η ed il conseguente pluriintervallo Δ, determinare a_0 tale che per ogni $a < a_0$ sia sempre:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m\,|\,a)dV(m) - \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m)dV_{(m_d)}(m) - \sum_{-\infty}^{+\infty} z^{im_d}\Omega(m_d)C_d\right| <$$

$$< \eta\left(\int_\Delta |\,dV_{(m_d)}(m)\,| + \Sigma\,|\,C_d\,|\right) + 2H\left\{\int_{-\infty}^{+k} + \int_k^{\infty} |\,dV_{(m_d)}(m)\,| + \right.$$

$$\left. + \sum_{-\infty}^{+k} + \sum_k^{\infty} |\,C_d\,| \sum_{-k}^{+k} \int_{m_d-\frac{\delta}{2}}^{m_d+\frac{\delta}{2}} |\,dV_{(m_d)}(m)\,|\right\}$$

ma:

$$\int_\Delta |\,dV_{(m_d)}(m)\,| + \sum_{-k}^{+k} |\,C_d\,| \leq \int_{-k}^{+k} |\,dV(m)\,| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\,dV(m)\,| = V,$$

e

$$\int_{-\infty}^{-k} + \int_k^{\infty} |\,dV_{(m_d)}(m)\,| + \sum_{-\infty}^{-k} + \sum_k^{\infty} |\,C_d\,| = \int_{-\infty}^{-k} + \int_k^{\infty} |\,dV(m)\,| < \eta\,;$$

$$\sum_{-k}^{+k} \int_{m_d-\frac{\delta}{2}}^{m_d+\frac{\delta}{2}} |\,dV_{(m_d)}(m)\,| < \eta.$$

Segue quindi per ogni $a > a_0$:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m\,|\,a)dV(m) - \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m)dV_{(m_d)}(m) - \sum_{-\infty}^{+\infty} z^{imd}\Omega(m_d)C_d\right| < \eta[V + 4H]; \quad (a > a_0)$$

il che dimostra il Lemma II.

Se, data $V(m)$, definisco:

$$W(m) = \int_0^m \Omega(m)dV_{(m_d)}\cdot(m) + S_{(m_d)}(m),$$

posso anche scrivere:

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}\Omega(m\,|\,a)dV(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im}dW(m).$$

Le esposte considerazioni sull'integrale di STIELTJES, mi avevano sin qui imposto di considerare solo funzioni integrande continue, e mi avevano impedito di enunciare il Lemma II nella forma:

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im} \Omega(m \mid a) dV(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im} \Omega(m) dV(m).$$

Se però introduco la seguente generalizzazione di integrale di STIELTJES per funzioni integrande aventi un'infinità numerabile di continuità di prima specie non condensantisi al finito:

$$\int_0^m \Omega(m') dV(m') = \int_0^m \Omega(m') dV_{(m_d)}(m') + S_{(m_d)}(m),$$

generalizzazione che si identifica con quella citata in nota di DE FINETTI-JACOB, giungo al:

LEMMA II-bis. — *Se si verificano le ipotesi ammesse nel Lemma II è:*

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im} \Omega(m \mid a) dV(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^{im} \Omega(m) dV(m)$$

uniformemente per z *in* $(0, \infty)$. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{2}} \Omega(m) dV(m)$ *appartiene ad* M.

CAP. VIII. **La trasformazione funzionale nel campo *M*.**

Considero una qualunque funzione appartenente ad M:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} dV(m)$$

e ne cerco la trasformata:

$$\mathfrak{A}[f(x)]$$

essa è per definizione:

$$\lim_{a \to \infty} \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} \frac{A(z)}{x} f\left(\frac{z^{im}}{x}\right) dz = \lim_{a \to \infty} \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} \frac{A(z)}{\sqrt{zx}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z^{im} x^{-im} dV(m) \right) dz.$$

Ora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^{im} x^{-im} dV(m)$$

essendo $V(m)$ a variazione totale limitata, ha per maggiorante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |dV(m)| = V$$

e converge quindi uniformemente per tutti gli z di $(0, \infty)$; essendo poi in (e^{-a}, e^{+a}), $\frac{A(z)}{\sqrt{z}}$ limitato, anche:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(z)}{\sqrt{2}} z^{im} x^{-im} dV(m)$$

converge uniformemente in tale intervallo, posso quindi in (e^{-a}, e^{+a}) integrare rispetto z sotto il segno di $\int_{-\infty}^{+\infty}$. Ma dato che:

$$\int_{e^{-a}}^{e^{+a}} \frac{A(z)}{\sqrt{2}} z^{im} dr$$

è stato chiamato $\Omega(m \,|\, a)$ segue:

$$\mathfrak{A}[f(x)] = \lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}} \, \Omega(m \,|\, a) dV(m).$$

Ora per le ipotesi su $A(z)$, e per il Lemma II-bis, si ha:

(6) $$\mathfrak{A}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}} \, \Omega(m) dV(m)$$

o ciò che è lo stesso:

(6-bis) $$\mathfrak{A}[f(x)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} \, \Omega(-m) dV(-m)$$

enuncio allora:

TEOREMA III. — *Ogni funzione appartenente ad* M:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} \, dV(m)$$

ammette trasformata $\mathfrak{A}$[f(x)] *appartenente pure ad* M *data da:*

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} \, \Omega(-m) dV(-m).$$

La notevole semplicità del risultato va spiegata col fatto che il campo M, pur essendo di grande generalità è composto di combinazioni lineari di autofunzioni fondamentali del nucleo della trasformazione.

CAP. IX. Condizioni necessarie e sufficienti per l'involutorietà.

Considero una funzione appartenente ad M, $f(z)$, esistendo la sua trasformata $\mathcal{A}[f(z)]$ pure in M posso calcolare la $\mathcal{A}[\mathcal{A}f(z)]$ essa per il Teorema III è data da:

$$(7) \qquad \mathcal{A}[\mathcal{A}[f(z)]] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{2}} \Omega(-m)\Omega(m) dV(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{2}} |\Omega(m)|^2 dV(m).$$

Riprendo ora la questione tralasciata, se la (5), oltre ossere condizione necessaria, è anche condizione sufficiente per l'involutorietà della trasformazione; un semplice esame della (7) mi induce ad enunciare il:

TEOREMA IV. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè* A(z) *sia involutorio in* M, *è che per ogni* m *reale sia:*

$$|\Omega(m)| = 1.$$

Ho già fatto notare che se $A(z)$ è involutorio la (1) non possiede altri autovalori che $+1$, -1; è parimenti vero che, se $A(z)$ è involutorio in M, la (1) non possiede, in M, che autofunzioni relative agli autovalori $+1$, -1; o con linguaggio abbreviato, come dirò dianzi, non possiede in M che gli autovalori $+1$, -1. Se invece penso che $A(z)$ non possegga, in M, altri autorevoli che $+1$, -1, devono anche le autofunzioni fondamentali, che pure appartengono ad M, essere connesse tutte quante agli autovalori $+1$, -1: ma gli autovalori fondamentali sono dati da:

$$\lambda = \frac{\pm 1}{|\Omega(m)|}$$

dunque se, in M, $A(z)$ non ammette che gli autovalori $+1$ e -1, deve essere verificata la (5); e per il teorema IV segue allora:

TEOREMA V. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè* A(z) *sia involutorio in* M *è che quivi non possegga altri autovalori che* $+1$, -1.

È ovvio che se $A(z)$ è involutorio in M:

$$A^*(z) = cA(z),$$

dove c è una costante qualunque diversa da $\pm s$, non sarà più involutorio, ma operando due volte con esso su di una funzione appartenente ad M si avrà:

$$\mathcal{A}^*[\mathcal{A}^*]f(z)] = c^2 f(z)].$$

D'altra parte i nuclei che soddisfano alla scritta relazione, qualunque sia f purchè appartenente ad M, si riducono ad involutori col dividerlo per una costante: tali nuclei li chiamo *quasi involutori fattore c*. Posso allora facilmente enunciare i seguenti teoremi per i nuclei quasi involutori:

TEOREMA IV-bis. — *Condizione necessaria e sufficiente, perchè un nucleo sia quasi involutorio in* M *fattore* c *è che per ogni* m *reale sia:*

$$|\Omega(m)| = c.$$

TEOREMA V-bis. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè un nucleo sia quasi involutorio in* M *fattore* c *è che quivi non possegga altri autovalori che* $\pm \frac{1}{c}$.

CAP. X. **L'involutorietà e le autofunzioni.**

TEOREMA VI. — *Se* A(z) *è quasi involutorio in* M *ad autovalori* $\pm \lambda$, *cioè fattore* $\frac{1}{\lambda}$, *e se* f(x) *è una qualsiasi funzione di* M:

$$f(x) + \lambda \mathfrak{A}[f(x)]$$

è una autofunzione connessa a λ, mentre:

$$f(x) - \lambda \mathfrak{A}[f(x)]$$

è una autofunzione connessa $a - \lambda$.

DIM. — Infatti:

$$\lambda \mathfrak{A}[f(x) + \lambda \mathfrak{A}[fx)]] + \lambda^2 \mathfrak{A}[\mathfrak{A}[f(x)]]$$

ma:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A}[f(x)]] = \frac{1}{\lambda^2} f(x).$$

segue dunque:

$$f(x) + \lambda \mathfrak{A}[f(x)] = \lambda \mathfrak{A}[f(x) + \lambda \mathfrak{A}[f(x)]].$$

il chè dimostra la prima parte del teorema; per la seconda si ottiene, in modo uguale, la dimostrazione.

Segue immediatamente:

COROLLARIO II. — *Dato un nucleo quasi involutorio fatlore* c, *ogni funzione appartenente ad* M *può decomporsi nella somma di una autofunzione del nucleo, connessa all'autovalore* $\frac{1}{c}$, *e di una, connessa all'autovalore* $-\frac{1}{c}$.

Suppongo ora che $A(z)$ possegga una autofunzione $f^*(x)$ appartenente ad ML_2, connessa all'autovalore λ^*; è per l'enunciato 3 del capitolo VI:

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} a(m) dm$$

dove $a(m)$ è L_1L_2 in $(-\infty, +\infty)$. A priori non si può escludere che esista un insieme Σ in cui $a(m)$ sia nulla. Se ciò accade, detto allora σ l'insieme complementare di Σ, è lecito scrivere:

$$f^*(x) = \int_\sigma \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} a(m)dm.$$

Non peccherò di generalità scrivendo in ogni caso:

$$f^*(x) = \int_\sigma \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} a(m)dm$$

potendo σ, che non sarà mai a misura nulla, perchè sarebbe allora $f^*(x) = 0$ (identicamente), anche coincidere con tutto $(-\infty, +\infty)$. È allora:

$$\mathfrak{A}[f^*(x)] = \int_\sigma \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}} \Omega(m)a(m)dm$$

ma $f^*(x)$ è una autofunzione connessa a λ^*, deve essere perciò:

$$\int_\sigma \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} a(m)dm = \lambda^* \int_\sigma \frac{x^{-im'}}{\sqrt{x}} \Omega(m')a(m')dm'.$$

Chiamo $-\sigma$ l'insieme simmetrico di σ rispetto l'origine, posto nello integrale a secondo membro dell'ultima equazione $m' = -m$, ottengo:

$$\int_\sigma \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} a(m)dm = \lambda^* \int_{-\sigma} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} \Omega(-m)a(-m)dm. \tag{8}$$

Segue dalla (8) che σ e $-\sigma$ devon coincidere; ossia che l'insieme σ deve essere simmetrico di se stesso rispetto l'origine. Ciò premesso, se voglio verificata la (8) devo ammettere che sia, detto ρ un insieme simmetrico coincidente con quasi tutto σ:

$$a(m) = \lambda^*\Omega(-m)a(-m) \qquad (m \text{ in } \rho). \tag{9}$$

Posto in (9) $-m$ al posto di m ho:

$$a(-m) = \lambda^*\Omega(m)a(m) \qquad (m \text{ in } \rho)$$

che assieme alla (9) mi dice:

$$a(m) = \lambda^{*2} \,|\, \Omega(m) \,|^2 a(m) \qquad (m \text{ in } \rho).$$

Deve dunque se è una autofunzione essere verificata la:

$$|\, \Omega(m) \,| = \frac{1}{|\lambda^*|} \qquad (m \text{ in } \rho) \tag{10}$$

Se la (10) è soddisfatta non è difficile soddisfare la (9), e quindi la (8), insieme con le condizioni di appartenenza ad $L_1 L_2$ per $a(m)$ in ρ.

Infatti, detta $b(m)$ una funzione $L_1 L_2$ in ρ, se pongo:

$$a(m) = b(m) + \lambda^* \Omega(-m) b(-m),$$

soddisfo la (9) ed è di conseguenza:

$$\int_\rho a(m) \frac{X^{im}}{\sqrt{m}}\, dm$$

una autofunzione del nucleo $A(z)$, appartenente ad ML_2, connessa all'autovalore λ^*. Enuncio quindi:

Teorema VII. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè il nucleo* A(z) *possegga in* M *un'autofunzione a quadrato integrabile, connessa all'autovalore (reale)* λ^*, *è che esista un insieme* ρ *a misura non nulla, simmetrico rispetto l'origine in cui sia verificato*:

$$| \Omega(m) | = \frac{1}{|\lambda^*|}.$$

Teorema VIII. — *Se le condizioni del teorema VII sono verificate, la trasformazione è quasi involutoria nel sotto campo* $\mathrm{M}_{[\rho]}$ *delle funzioni*:

$$f_{[\rho]}(x) = \int_\rho \frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\, dV(m).$$

La dimostrazione del teorema VIII segue immediatamente. È infatti:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A}[f_\rho(x)]] = \int_\rho \frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\, \Omega(m)\Omega(-m) dV(m) = \frac{1}{\lambda^{*2}} \int_\rho \frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\, dV(m) = \frac{1}{\lambda^{*2}} f_\rho(x).$$

Teorema IX. — *Se le condizioni del teorema VII sono verificate, e se* $f_{[\rho]}$ *è una funzione appartenente a* $\mathrm{M}_{[\rho]}$:

$$f_{[\rho]} + \lambda^* \mathfrak{A}[f_{[\rho]}]$$

è una autofunzione connessa all'autovalore λ^*, *mentre*:

$$f_{[\rho]} - \lambda^* \mathfrak{A}[f_{[\rho]}]$$

è un'autofunzione connessa a $-\lambda^*$.

Ometto la dimostrazione rimandando il lettore a quella del teorema VI.

Se l'equazione (1) possiede, connessa all'autovalore reale λ^*, l'autofunzione:

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\, a(m) d(m)$$

con $a(m)$ L_1L_2 in $(-\infty, +\infty)$ e quivi sempre diverso da zero, allora l'insieme σ dei precedenti teoremi diventa $(-\infty, +\infty)$; segue per il Teorema VI che è

$$|\Omega(m)| = \frac{1}{|\lambda^*|},$$

in quasi tutto $(-\infty, +\infty)$.

D'altra parte se $a(m)$ è L_2, anche $f^*(x)$ e L_2 (per l'enunciato 2 del Cap. II) e quindi ha trasformata di M.-F. che coincide proprio con $a(m)$. Posso allora dire che, se $A(z)$ possiede una autofunzione $f^*(x)$ appartenente ad M e a quadrato integrabile, la cui trasformata di M.-F. sia sempre diversa da zero, allora esso è quasi involutorio in ML_2.

D'altra parte se $A(z)$ è quasi involutorio in ML_2 possederà, in M, certo autofunzioni a quadrato integrabile: infatti, detta $g(x)$ una qualsiasi funzione appartenente ad ML_2, anche $\mathcal{A}[g(x)]$ è ML_2 essendo:

$$\mathcal{A}[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(m)a(m)\frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\,dx$$

e per l'enunciato 2 del Cap. II:

$$\int_0^\infty |\mathcal{A}[g(x)]|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega(m)|^2\,|a(m)|^2\,dm = \frac{1}{\lambda^{*2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|a(m)|^2\,dm = \frac{1}{\lambda^{*2}}\int_0^\infty |g(x)|^2\,dx$$

ed allora anche:

$$g(x) + \lambda^*\mathcal{A}[g(x)]$$

appartiene a ML_2. Enuncio quindi i seguenti:

TEOREMA X. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè* A(z) *sia quasi involutorio in* ML_2 *è che esso possegga una autofunzione, appartenente a* M, *a quadrato integrabile, avente trasformata di M.-F. mai nulla* (*).

TEOREMA XI. — *Se* A(z) *è quasi involutorio in* M *fattore di* $\frac{1}{\lambda^*}$ *è, per ogni* f(x) *appartenente ad* M *e a quadrato integrabile:*

$$\int_0^\infty |\mathcal{A}[g(x)]|^2\,dx = \frac{1}{\lambda^{*2}}\int_0^\infty |g(x)|^2\,dx.$$

Quest'ultimo teorema è la generalizzazione di quello di PARSEVAL.

(*) Quest'ultimo teorema riceverà forma più completa nella seconda parte di questa Memoria.

Intorno ad un teorema di Hodge sulla teoria della base per le curve di una superficie algebrica.

Memoria di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Si dimostra, con procedimento algebrico-geometrico assai semplice, un teorema di* HODGE *sulla teoria della base per le curve tracciate sopra una superficie algebrica; da questo si traggono poi varie conseguenze, concernenti i gradi virtuali delle curve di una superficie algebrica o delle corrispondenze fra due curve algebriche, il principio di degenerazione di* ENRIQUES, *e la teoria di* SEVERI *delle corrispondenze fra due superficie algebriche.*

Il sig. W. V. D. HODGE ha recentemente provato che *la forma quadratica relativa ad una qualunque base per la totalità delle curve di una superficie algebrica ammette sempre indice d'inerzia unitario* (1); la dimostrazione di questo importante teorema è condotta nel lavoro citato con mezzi elevati, di natura topologico-trascendente, sfruttando in modo essenziale la teoria degli integrali armonici creata dallo stesso HODGE.

Può essere non privo di interesse vedere come il risultato possa facilmente venir inquadrato nella classica teoria della base di SEVERI: ciò che appunto qui io faccio nel n. 2, ottenendolo come corollario di una proposizione stabilita al n. 1 con procedimento algebrico-geometrico semplicissimo, della quale inoltre assegno un'estensione (n. 3) e varie conseguenze ulteriori (nn. 4-6). Chiudo infine questa breve Memoria coll'arrecare qualche complemento alle belle ricerche del SEVERI sulle corrispondenze a valenza zero fra i punti di due superficie algebriche (n. 7).

1. *Una curva virtuale* D *d'ordine zero sopra una superficie algebrica* F, *ha sempre il grado virtuale negativo o nullo; e nullo allora e solo allora che* D *sia un divisore dello zero (onde il suo genere virtuale dev'essere* $+1$).

---

(1) Cfr. W. V. D. HODGE, *Note on the theory of the base for curves on an algebraic surface*, « Journ. London Math. Soc. », t. 12 (1937), p. 58. Secondo la terminologia dello SCORZA, l'indice d'inerzia denota il numero dei termini positivi che si ottengono riducendo la forma quadratica ad una somma algebrica di quadrati, con una sostituzione lineare reale sulle variabili.

Fissiamo un intero h superante l'ordine delle curve canoniche impure della superficie F, appartenente ad S_r, di cui $|C|$ denoti il sistema lineare delle sezioni piane o iperpiane e p_a il genere aritmetico; h sia inoltre tale che la dimensione virtuale

$$d_0 = p_a + \nu_0 - \pi_0 + 1$$

del sistema lineare $|C_0| = |hC|$, di grado ν_0 e genere π_0, sia maggiore di zero. Dalla $[CD] = 0$ segue che, qualunque sia l'intero $i \gtrless 0$, la dimensione virtuale d_i del sistema lineare $|C_i| = |hC + iD| = |C_0 + iD|$ è espressa da

$$d_i = d_0 + \frac{i(i+1)}{2}\nu - i(\pi - 1),$$

dove ν e π indicano grado e genere virtuali di D.

Se fosse $\nu > 0$, oppure $\nu = 0$ ma $\pi \neq 1$, la dimensione virtuale di $|C_i|$ — e quindi anche la sua dimensione effettiva (²) — potrebbero assumere valori maggiori di un qualunque numero prefissato, pur di prendere i abbastanza grande in valore assoluto e (nel secondo caso) di segno opportuno. Ma ciò è assurdo, in quanto tutte le curve C_i hanno lo stesso ordine $n = \nu_0 : h$, mentre le curve algebriche d'ordine n di S_r costituiscono un sistema algebrico (eventualmente riducibile) di dimensione determinata (³).

Deve pertanto essere $\nu < 0$, oppure $\nu = \pi - 1 = 0$. In quest'ultima ipotesi risulta $d_1 = d_0 > 0$ e su F esistono perciò curve effettive C_1, dello stesso ordine n delle C_0; siccome inoltre si ha

$$[C_0^2] = [C_0 C_1] = [C_1^2] = \nu_0 > 0,$$

in base ad un teorema fondamentale di SEVERI (⁴) deve esistere un intero positivo λ tale che $\lambda C_0 \equiv \lambda C_1$, ossia $\lambda D \equiv 0$.

Il teorema enunciato è così completamente dimostrato.

(²) Ved. F. SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, « Rendic. R. Istituto Lombardo », serie II, t. 38 (1905), p. 859.

(³) Il fatto — virtualmente noto ad ogni cultore di geometria algebrica — che le V_k^n algebriche di un S_r aventi dati caratteri k, n si distribuiscono in un numero finito di famiglie algebriche distinte, è stato per la prima volta provato dal SEVERI: cfr. F. SEVERI, *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche*, « Mem. R. Accad. d'Italia », t. 5 (1934), p. 239, n. 1. Un'altra dimostrazione molto interessante, fondata sulla possibilità d'introdurre per le V_k^n di S_r coordinate (sovrabbondanti) legate da un certo numero di relazioni algebriche, è stata data recentemente dal CHOW: ved. W.-L. CHOW e B. L. VAN DER WAERDEN, *Ueber zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten*, « Math. Ann. », t. 113 (1937), p. 692, § 1.

(⁴) F. SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, « Math. Ann. », t. 62 (1906), p. 194, n. 2.

OSSERVAZIONE 1ª. — Il teorema stesso contiene un'estensione del teorema di SEVERI testè applicato (cfr. col successivo n. 4); nell'originaria dimostrazione di questo, il SEVERI profitta del medesimo fecondo concetto, operando cioè per somme ed invocando il fatto che in uno spazio (e quindi sopra una superficie) le curve di dato ordine si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui completi.

OSSERVAZIONE 2ª. — Si avvertirà che se una curva virtuale è di ordine negativo il suo grado virtuale può benissimo esser positivo, negativo o nullo, perchè la curva $-A$, ove A sia una curva effettiva, ha lo stesso grado virtuale di A. Pertanto la limitazione offerta dal teorema dimostrato non si estende dalle curve di ordine zero a quelle di ordine negativo.

2. Presa una base $\{C_1, C_2, \dots, C_\rho\}$ per la totalità delle curve tracciate sopra una superficie algebrica F, d'ordine ν (>0), si può senza restrizione supporre $|C_1|$ coincidente col sistema lineare $|C|$ delle sezioni piane o iperpiane di F. Sostituendo (se $\rho > 1$) a detta base la seguente

$$\{C, \quad D_2 = \nu C_2 - [CC_2]\cdot C, \dots, \quad D_\rho = \nu C_\rho - [CC_\rho]\cdot C\}$$

e posto per abbreviare

$$D = \sum_{i=2}^{\rho} x_i D_i,$$

talchè risulta $[CD] = 0$ identicamente rispetto alle x, in virtù del n. 1 si ha che la forma quadratica

$$[D^2] = \sum_{i,j=2}^{\rho} [D_i D_j]\, x_i x_j$$

è **definita negativa**; poichè la forma quadratica relativa all'ultima base è

$$[\{x_1 C + x_2 D_2 + \dots + x_\rho D_\rho\}^2] = \nu x_1^2 + \sum_{i,j=2}^{\rho} [D_i D_j]\, x_i x_j,$$

si ottiene così senz'altro il teorema di HODGE citato in principio.

Da qui segue subito che *i determinanti delle varie basi hanno tutti il medesimo segno* $(-1)^{\rho-1}$ (ρ denotando il numero di PICARD-SEVERI della superficie), ciò che precisa un noto risultato di SEVERI (5).

3. La proposizione del n. 1 può venir affinata, col provare — invertendo gli sviluppi del n. 2 — che:

Se C, D *sono due curve (virtuali) sopra una superficie algebrica* F *tali*

(5) F. SEVERI, Mem. cit. in (1), n. 10, Osservazione 1ª.

che $[C^2] = \nu > 0$, $[CD] = 0$, *sussiste di conseguenza la limitazione* $[D^2] \leq 0$, *nella quale vale il segno di uguaglianza solo se* D *è un divisore dello zero.*

Scelta nel modo indicato al principio del n. 2 la base $\{C, D_2, \dots, D_\rho\}$ per la totalità delle curve tracciate su F, colla sola variante che attualmente C denoti la prima delle due curve dianzi considerate, la seconda di queste risulterà legata alle curve della base da un' equivalenza algebrica che — in forza della $[CD] = 0$ — sarà del tipo

$$xD \equiv \sum_{i=2}^{\rho} x_i D_i \qquad \text{(con } x \neq 0).$$

Siccome anche ora la forma quadratica relativa alla base fissata è

$$\nu x_1^2 + \sum_{i,j=2}^{\rho} [D_i D_j] \, x_i x_j$$

ed è $\nu > 0$, così la

$$\sum_{i,j=2}^{\rho} [D_i D_j] \, x_i x_j = x^2 [D^2]$$

dev'essere una forma quadratica definita negativa, ciò che dimostra l'asserto.

4. Sia ancora C una curva di grado virtuale positivo appartenente alla superficie algebrica F. Prese su F altre due curve virtuali A, B qualsiansi, e posto per abbreviare

$$a = [AC], \quad b = [BC],$$

si può applicare il teorema del n. 3 alla curva $D = bA - aB$ in quanto risulta $[CD] = 0$. Limitandoci per semplicità ad enunciare la conclusione a cui così si giunge nell'ipotesi che C sia una sezione piana o iperpiana di F, si ha che:

Date sopra una superficie algebrica due curve (effettive o virtuali) A, B, *degli ordini rispettivi* a, b, *sussiste sempre la limitazione*

$$b^2 [A^2] + a^2 [B^2] - 2ab [AB] \leq 0,$$

nella quale il segno di uguaglianza ha luogo se e solo se le curve considerate sono fra loro algebricamente dipendenti.

Nel caso particolare di due curve A, B del medesimo ordine $a = b$, la precedente limitazione si semplifica riducendosi in fondo al teorema del n. 1, perchè si ha:

$$[(A - B)^2] = [A^2] + [B^2] - 2 [AB] \leq 0,$$

ove il segno di uguaglianza vale solo quando esista un intero λ per cui sia $\lambda A \equiv \lambda B$; risultato, questo, più espressivo di quello richiamato in (4), ma che ad esso si riconduce nel modo indicato al n. 1.

Assumendo invece come curve B e C due sezioni piane o iperpiane di F, si ottiene che:

Il grado virtuale di una curva virtuale A, *sopra una superficie* F, *non supera il quoto del quadrato dell'ordine di* A *per l'ordine di* F, *ed è uguale a questo quoto soltanto quando* A *è algebricamenle legata ad una sezione piana o iperpiana di* F.

Tale teorema estende quello del n. 1. Va inoltre rilevato che — per quanto si è detto in principio del n.° — la limitazione

$$[A^2]\cdot[C^2]\leq[AC]^2,$$

data da questo teorema, sussiste più generalmente se si considera A in relazione ad una qualunque curva C di grado virtuale positivo o nullo; ma non si può prescindere da quest'ultima condizione: invero, conservando le notazioni del n. 2 e supponendo $\rho\geq 3$, si ha p. es.

$$[D_i^2]\cdot[D_j^2]>[D_iD_j]^2 \qquad \text{per } i,j=2,\dots,\rho;\ i\neq j.$$

5. Riferiamoci ora ad una superficie algebrica F contenente due fasci $\{A\}$, $\{B\}$ di curve unisecantisi, e consideriamo su essa una qualunque curva T (effettiva o virtuale). Posto per abbreviare

$$\alpha=[AT],\quad \beta=[BT],\quad C=A+B,\quad D=T-\beta A-\alpha B,$$

si ha ovviamente $[C^2]=2$, $[CD]=0$, onde — in virtù del n. 3 — dev'essere $[D^2]\leq 0$, ossia

$$[T^2]\leq 2\alpha\beta;$$

e poichè su F la divisione delle curve per un intero riesce univoca [6], così in questa limitazione vale il segno di uguaglianza sempre e solo che sia $D\equiv 0$, e cioè:

$$T\equiv\beta A+\alpha B.$$

Risulta pertanto in modo assai semplice provato il fatto noto che:

Il grado virtuale di una corrispondenza algebrica (effettiva o virtuale) di indici (α,β) *fra due curve algebriche non supera mai* $2\alpha\beta$, *il massimo essendo raggiunto allora e solo allora che la corrispondenza sia a valenza zero* [7].

6. Poggiando sul n. 3 possiamo agevolmente stabilire per via algebrico-geometrica l'importante principio di degenerazione di ENRIQUES, secondo cui:

---

[6] Cfr. F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, « Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino », serie II, t. 54 (1903), Osservazione al n.° 11.

[7] Ved. F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, vol. 1, parte I (Bologna, Zanichelli, 1926), pp. 265-267.

Se una curva algebrica irriducibile — variando con continuità — viene a spezzarsi in due o più componenti, ad ogni componente della curva spezzata appartiene qualche punto di collegamento [8].

Non è restrittivo supporre che la curva E variabile stia sopra una superficie fissa F (algebrica, irriducibile), come certo accade quando ci si limiti a considerare per E una semplice infinità algebrica di posizioni. Ammettiamo inoltre, per assurdo, che una componente C (irriducibile) della curva spezzata non abbia alcun punto in comune colla o colle componenti residue, il cui insieme denotiamo con D; si ha allora ovviamente su F

$$[C^2] = [CE] \geq 0, \quad [D^2] = [DE] \geq 0.$$

Ma non può essere $[C^2] > 0$, se no — in base alla $[CD] = 0$ ed al n. 3 — ne seguirebbe $[D^2] < 0$, non potendo su F la curva (effettiva) D risultare un divisore dello zero; e similmente non può aversi $[D^2] > 0$. Dunque è necessariamente

$$[C^2] = 0, \quad [D^2] = 0$$

epperciò

$$[E^2] = 0,$$

onde sulla superficie F il sistema continuo $\{E\}$ dev'essere un fascio. Siccome la curva di questo infinitamente prossima alla $C + D$ determina su C un gruppo (di zero punti) della serie lineare virtuale $|(C, C + D)| = |(C^2)|$, così sulla curva irriducibile C esiste — effettiva — la serie caratteristica $|(C^2)| = g_0^0$; tanto basta per poter concludere che su F si ha un sistema continuo infinito di cui la C è curva totale [9]: sistema che, in forza delle $[C^2] = 0$, $[CE] = 0$, è un fascio col quale $\{E\}$ risulta composto.

L'ipotesi $[CD] = 0$ è quindi assurda, perchè porta alla riducibilità di tutte le curve E; e ciò dimostra il teorema enunciato. Il medesimo procedimento, completato in modo opportuno, permette più in generale di stabilire che:

Una curva spezzata che sia limite di una curva irriducibile, non può mai venir decomposta in due parti — riducibili od irriducibili — fra loro non connesse.

---

[8] Cfr. F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, « Rend. della R. Accad. delle Scienze di Bologna », t. 9 (1904-5), p. 5; oppure F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, t. III (Bologna, Zanichelli, 1924), pp. 404-405. La dimostrazione dell'ENRIQUES è di natura topologica; una dimostrazione puramente algebrica concernente curve variabili su di un piano, ma dalla quale è agevole risalire al caso generale, trovasi in F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), Anhang F, pp. 319-321.

[9] Ved. B. SEGRE, *Sulla completezza della serie caratteristica di un sistema continuo di curve irriducibili tracciate su di una superficie algebrica*, « Rendic. Circolo Mat. di Palermo », t. 55 (1931), p. 443.

7. Date due superficie algebriche F, F', si fissino comunque due basi $\{C_1, C_2, \dots, C_\rho\}$, $\{C'_1, C'_2, \dots, C'_{\rho'}\}$ per le curve tracciate su esse, i determinanti (non nulli) delle quali denotiamo rispettivamente con c, c'.

Osserviamo intanto che *le $\rho\rho'$ corrispondenze degeneri elementari di 2ª specie* ([10])

$$\Gamma_{ii'} = C_i \times C'_{i'} \qquad (i = 1, 2, \dots, \rho;\ i' = 1, 2, \dots, \rho')$$

sono sempre fra loro algebricamente indipendenti. Ciò segue subito da proprietà ben conosciute del prodotto topologico $F \times F'$; od anche direttamente in base al fatto che il determinante γ relativo alle Γ vale $\gamma = c^{\rho'} \cdot c'^{\rho}$ (e risulta dunque non nullo), come tosto si vede osservando che è

$$[\Gamma_{ii'}\Gamma_{jj'}] = [C_i C_j] \cdot [C'_{i'} C'_{j'}] \qquad (i, j = 1, 2, \dots, \rho;\ i', j' = 1, 2, \dots, \rho')$$

e rammentando un teorema di Kronecker sui determinanti ([11]).

Applicando poi il teorema di Hodge (n. 2), si ottiene facilmente che *l'indice d'inerzia della forma quadratica d'intersezione delle $\Gamma_{ii'}$ vale $\rho\rho' - \rho - \rho' + 2$.*

Siccome ogni corrispondenza a valenza zero fra F ed F' dipende algebricamente dalle $\rho\rho'$ corrispondenze $\Gamma_{ii'}$ e dalle due corrispondenze degeneri di 3ª specie

$$\Delta = P \times F', \quad \Delta' = F \times P'$$

(dove P è un punto di F e P' è un punto di F') ([12]), e poichè

$$[\Delta^2] = 0, \quad [\Delta\Delta'] = 1, \quad [\Delta'^2] = 0$$
$$[\Delta\Gamma_{ii'}] = [\Delta'\Gamma_{ii'}] = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, \rho;\ i' = 1, 2, \dots, \rho'),$$

si conclude col seguente teorema:

Ogni base per le corrispondenze a valenza zero fra due superficie algebriche coi numeri di Picard-Severi *ρ, ρ', consta di $\rho\rho' + 2$ corrispondenze algebricamente distinte, la cui forma quadratica d'intersezione ammette indice d'inerzia uguale a $\rho\rho' - \rho - \rho' + 3$ [onde il segno del relativo determinante vale sempre $(-1)^{\rho+\rho'+1}$].*

Rileviamo da ultimo come dalla relazione $\gamma = c^{\rho'} \cdot c'^{\rho}$ possa trarsi agevolmente che:

Se le $\Gamma_{ii'}$ costituiscono una base intermediaria per le corrispondenze degeneri di 2ª specie fra F, F', *entrambe le basi determinate dalle* C_i *su* F *e dalle* $C'_{i'}$ *su* F' *risultano intermediarie* ([13]).

([10]) Cfr. F. Severi. Mem. cit. in ([3]), p. 253.

([11]) Ved. p. es. E. Pascal, *I determinanti* (Milano, Hoepli, 1897). pp. 138 e segg..

([12]) Cfr. F. Severi, Mem. cit. in ([3]), p. 261.

([13]) Per la parte inversa di questa proposizione, ved. F. Severi, Mem. cit. in ([3]), p. 266.

Trasformazioni funzionali lineari ed equazioni integrali singolari.

Memoria di EUGENIO FROLA (a Torino) (*).

PARTE II.

CAP. XI. La generalizzazione del concetto di involutorietà.

Ferme restando le ipotesi fatte sulla natura del nucleo $A(z)$ e sulla classe funzionale M, rispettivamente nel III e V Capitolo della prima parte di questa Memoria cui rimando il lettore, cerco ora di generalizzare il concetto di involutorietà per i nuclei $A(z)$. Ogni nucleo quasi involutorio era definito dalla:

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A}[f(z)]] = c^2 f(z), \qquad (c \text{ costante qualunque reale } \neq 0)$$

per ogni $f(z)$ appartenente ad M: relazione che, con le notazioni famigliari all' algebra delle trasformazioni, si può anche scrivere:

$$[\mathfrak{A}^2 - c^2] f(z) = 0. \tag{11}$$

La (11) può dunque essere assunta come equazione di definizione dei nuclei quasi involutori, ed in particolare degli involutori se in essa si pone $c = 1$.

Volendo generalizzare il concetto di involutorietà, una prima via spontanea è quella di occuparsi dei nuclei definibili a mezzo di:

$$[\mathfrak{A}^r - c^r] f(z) = 0, \qquad (c \text{ costante qualunque reale } \neq 0) \tag{12}$$

essendo anche qui $f(z)$ una qualsiasi funzione di M, ed r un intero positivo.

Suppongo dapprima r dispari: so che, per il teorema I, $A(z)$ ammette sempre almeno una coppia di autovalori reali λ, $-\lambda$, uguali e di segno opposto, cui si connette certo almeno una coppia di autofunzioni appartenenti ad M: $\varphi(z)$, $\gamma(z)$.

(*) Continuazione della Parte I, pubblicata collo stesso titolo a p. 127 di questo volume degli « Annali di Matematica ».

Se in (12) pongo, al posto della generica $f(z)$, la $\varphi(z)$, la (12) stessa diventa:

$$\left[\frac{1}{\lambda^r} - c^r\right]\varphi(z) = 0,$$

ma se sostituisco ad $f(z)$, $\gamma(z)$, diventa invece:

$$\left[-\frac{1}{\lambda^r} - c^r\right]\gamma(z) = 0.$$

Ora nè $\varphi(z)$ nè $\gamma(z)$ sono identicamente nulle; dovrebbe allora essere contemporaneamente:

$$\frac{1}{\lambda^r} - c^r = 0, \quad \frac{1}{\lambda^r} + c^r = 0,$$

relazioni ovviamente incompatibili. *È dunque impossibile trovare dei nuclei che soddisfino la* (12) *con* r *dispari, cioè dei nuclei ciclici di ordine dispari.*

Se invece r è pari ($r = 2s$) la (12), per il Teorema III, diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}} \{ |\Omega(m)|^{2s} - c^{2s} \} \, dV(m) = 0,$$

da cui segue:

$$|\Omega(m)|^{2s} - c^{2s} = 0.$$

Essendo $|\Omega(m)|$ ovviamente positivo deve essere:

$$|\Omega(m)| = |c|,$$

scartandosi così le rimanenti $2s - 1$ radici dell'equazione $|\Omega(m)|^{2s} - c^{2s} = 0$; ma questa relazione è la condizione del Teorema IV-bis, necessaria e sufficiente perchè la trasformazione sia quasi involutoria.

Si conclude così che *gli eventuali nuclei ciclici di ordine pari non sono altro che nuclei involutori o quasi involutori* (cioè nuclei ciclici di ordine 2).

Una più proficua generalizzazione si ha invece per la seguente via: si consideri una qualsiasi equazione algebrica, a coefficienti reali, di grado r:

(13) $$c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0,$$

una funzione $f(z)$ appartenente ad M, ed una trasformazione lineare (il cui nucleo soddisfi le ipotesi del Cap. III). Costruisco l'espressione:

$$g(z) = [c_r \mathfrak{A}^r + c_{r-1} \mathfrak{A}^{r-1} + \dots + c_1 \mathfrak{A} + c_0] f(z),$$

(dove la $g(z)$ per il Teorema III è pure appartenente ad M). Se esistono delle trasformazioni tali che, qualunque sia $f(z)$, purchè appartenente ad M, risulti $g(z)$ identicamente nulla, le chiamo *involutorie generalizzate algebriche ad equazione caratteristica* (13).

Suppongo ora che esista una trasformazione involutoria generalizzata algebrica ad equazione caratteristica (13) e considero la autofunzione fondamentale del suo nucleo:

$$\varphi(z\,|\,m) = \frac{z^{im}}{\sqrt{z}}\sqrt{\Omega(-m)} + \frac{z^{-im}}{\sqrt{z}}\sqrt{\Omega(m)},$$

connessa all'autovalore fondamentale (v. Cap. IV):

$$\lambda(m) = \frac{1}{\sqrt{\Omega(m)}\sqrt{\Omega(-m)}}.$$

Se al posto di $f(z)$ pongo $\varphi(z\,|\,m)$ deve essere identicamente:

(14) $$[c_r\mathfrak{A}^r + c_{r-1}\mathfrak{A}^{r-1} + \dots + c_1\mathfrak{A} + c_0]\varphi(z\,|\,m) = 0,$$

per ogni valore di m in $(-\infty, +\infty)$, ma essendo $\varphi(z\,|\,m)$ un'autofunzione è:

$$\mathfrak{A}^r[\varphi(z\,|\,m)] = \frac{1}{\lambda^r(m)}\varphi(z\,|\,m),$$

segue che la (14) si riduce alla:

(15) $$\left[\frac{c_r}{\lambda^r(m)} + \frac{c_{r-1}}{\lambda^{r-1}(m)} + \dots + \frac{c_1}{\lambda(m)} + c_0\right]\varphi(z\,|\,m) = 0.$$

Non essendo mai per nessun m $\varphi(z\,|\,m)$ identicamente nullo, segue in forza della (15):

$$c_r\frac{1}{\lambda^r(m)} + c_{r-1}\frac{1}{\lambda^{r-1}(m)} + \dots + c_1\frac{1}{\lambda(m)} + c_0 = 0.$$

Devono cioè gli inversi degli autovalori fondamentali di un nucleo involutorio generalizzato algebrico a data equazione caratteristica soddisfare l'equazione caratteristica stessa, quindi devono al più essere r, se r è il grado dell'equazione caratteristica. Ma se si osserva che gli autovalori fondamentali sono tutti reali ed a coppie eguali e di segno opposto, segue che la (15) non può essere equazione caratteristica se non possiede almeno una coppia di radici reali eguali e di segno opposto.

Anzi data una equazione algebrica di grado r che possa essere equazione caratteristica, che possieda cioè s coppie di radici reali eguali e di segno opposto, la si potrà spezzare in due equazioni, a coefficienti reali:

$$Q_{2s}(x)\cdot P_{r-2s}(x) = 0,$$

essendo $Q_{2s}(x)$ un polinomio di grado s in x^2.

È facile vedere che $P_{r-2s}(x)$ non avendo alcuna coppia di radici reali eguali e di segno opposto non può essere mai considerato come equazione caratteristica. Ogni equazione (13) che sia equazione caratteristica può essere ridotta alla sua parte essenziale cioè ad un polinomio in x^2 avente tutte radici positive; anzi d'ora innanzi ogni equazione caratteristica sarà sempre un'equazione in x^2 a radici tutte positive.

Ciò premesso, è facile riconoscere che, se una trasformazione è tale che il suo nucleo $A(z)$ ammetta solo $2s$ autovalori fondamentali, i cui inversi soddisfano un'equazione algebrica (caratteristica) di grado $2s$, allora la trasformazione è involutoria generalizzata ed ha per equazione caratteristica l'equazione in parola. Infatti, posto:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{im}}{\sqrt{z}} \, dV(m),$$

segue:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} [d_s \, |\Omega(m)|^{2s} + d_{s-1} \, |\Omega(m)|^{2s-2} + \dots + d_1 \, |\Omega(m)|^2 + d_0] \frac{z^{im}}{\sqrt{z}} \, dV(m), \tag{16}$$

se l'equazione caratteristica è

$$d_s x^{2s} + d_{s-1} x^{2s-2} + \dots + d_1 x^2 + d_0 = 0.$$

Tenendo presente che è:

$$\lambda^2(m) = \frac{1}{|\Omega(m)|^2},$$

la (16) diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[d_s \frac{1}{\lambda^{2s}(m)} + d_{s-1} \frac{1}{\lambda^{2s-2}(m)} + \dots + d_1 \frac{1}{\lambda^2(m)} + d_0 \right] \frac{z^{im}}{\sqrt{z}} \, dV(m) = 0,$$

espressione identicamente nulla se gli inversi degli autovalori fondamentali soddisfano l'equazione caratteristica.

Segue dunque il:

TEOREMA XI. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione sia involutoria generalizzata algebrica in* M, *ad equazione caratteristica assegnata, è che il suo nucleo non possegga altri autovalori fondamentali che gli inversi delle radici dell'equazione (radici che debbono essere reali ed a coppie uguali e di segno opposto).*

Tenendo presente che:

$$\frac{1}{|\lambda(m)|} = |\Omega(m)|,$$

discende il seguente:

Corollario III. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione sia involutoria generalizzata algebrica in* M *è che il modulo della trasformata di M.-F. del suo nucleo non assuma che un numero finito di valori: sia cioè una funzione a scala ad un numero finito di valori* (necessari positivi).

Di questo passo il concetto di involutorietà potrebbe essere ancora generalizzato col sostituire al polinomio, primo membro dell'equazione caratteristica, una trascendente intera pari, i cui zeri siano a coppie simmetrici rispetto all'origine sull'asse reale; sostituire poi a trascendenti intere funzioni analitiche generiche e così via: ho invece preferito definire la classe di nuclei che generalizzano le proprietà dei nuclei involutori, quasi involutori, involutori generalizzati algebrici (classe che contiene questi come casi particolari), estendendo ad essi come loro definizione la generalizzazione del Corollario III. Di tale ampia classe di nuclei mi sono poi preoccupato di analizzare il comportamento nell'ambito della teoria delle equazioni integrali, ricavando la perfetta analogia di essi nuclei con quelli Fredholmiani.

Cap. XII. **Definizione dei nuclei involutori generalizzati.**

Considero la funzione $\Omega(\mathrm{m})$ *relativa ad un nucleo* $\mathrm{A}(\mathrm{z})$, *essa, per le ipotesi del Cap. III, possiederà un insieme numerabile di punti (che potrebbe anche ridursi ad un numero finito), non condensantesi al finito,* $\{\mathrm{m_d}\}$ *in cui il suo modulo può essere discontinuo. Supposti ordinati per valori crescenti i* $\{\mathrm{m_d}\}$, *tra due successivi resta individuato un intervallo* $\sigma_{\mathrm{m_r}}$ *i cui punti* $\mathrm{m}_{\sigma_\mathrm{r}}$ *soddisfano:*

$$m_r < m_{\sigma_r} < m_{r+1}.$$

Se per ogni $\sigma_{\mathrm{m_r}}$ *è:*

$$|\Omega(m)| = \Omega_r \qquad (\Omega_r \textit{ costante positiva}),$$

definisco il nucleo involutorio generalizzato.

Il valore:

$$|\Omega(m_r)| = \omega_r \qquad (\omega_r \text{ costante positiva}),$$

potrà coincidere o con Ω_{r-1} o con Ω_r, od essere diverso da entrambi.

Se non è nessun Ω_r e nessun ω_r nullo il nucleo è completo, se vi è anche un solo Ω_r nullo (in deroga all'ipotesi 2ª *e*) del Capitolo III) chiamo il nucleo incompleto, se pur non essendovi degli Ω_r nulli vi è anche un solo ω_r nullo chiamo il nucleo quasi completo.

Ovviamente i nuclei involutori, quasi involutori, involutori generalizzati algebrici appartengono alla classe degli involutori generalizzati ora definiti.

Cap. XIII. I nuclei involutori generalizzati e le autofunzioni a quadrato integrabile.

Nel Cap. X ho dimostrato che se un nucleo ammette in M una autofunzione $f^*(z)$ a quadrato integrabile ed a trasformata di M.-F. mai nulla in $(-\infty, +\infty)$ è allora in quasi tutto $(-\infty, +\infty)$

$$|\Omega(m)| = \frac{1}{|\lambda^*|},$$

essendo λ^* l'autovalore connesso all'autofunzione $f^*(z)$.

Se considero l'insieme ϑ, a misura nulla, in cui non è

$$|\Omega(m)| = \frac{1}{|\lambda^*|},$$

tale insieme deve essere di punti di discontinuità per $|\Omega(m)|$, allora per ipotesi deve essere l'insieme $\{m_a\}$ del precedente Capitolo, cioè un insieme numerabile non condensantisi al finito. In tali punti $|\Omega(m)|$ potrà assumere quali si vogliano valori, ma tuttavia esso godrà sempre delle proprietà caratterizzanti i nuclei involutori generalizzati, potrò quindi enunciare il:

Teorema XII. *Se un nucleo possiede in* M *una autofunzione a quadrato integrabile, a trasformata di M.-F. mai nulla in* $(-\infty, +\infty)$ *tale nucleo oltre essere quasi involutorio per le funzioni* ML_2, *è involutorio generalizzato per le funzioni appartenenti ad* M.

Il teorema può avere ancora un'enunciato più ampio, si può infatti dire:

Teorema XII-bis. — *Se un nucleo possiede in* M *una autofunzione a quadrato integrabile, a trasformata di M.-F. diversa da zero in quasi tutto* $(-\infty, +\infty)$ *tale nucleo oltre essere quasi involutorio in* ML_2, *è involutorio generalizzato per le funzioni appartenenti ad* M.

Ometto per brevità la dimostrazione che d'altra parte è immediata.

Cap. XIV. Il teorema fondamentale sull'equazione integrale omogenea a nucleo involutorio generalizzato.

Supposto $A(z)$ involutorio generalizzato, considero l'equazione integrale omogenea di seconda specie, già considerata nei precedenti Capitoli:

$$f(x) = \lambda \mathfrak{A}[f(x)], \tag{16}$$

e ne cerco le soluzioni appartenenti ad M; siccome una qualunque funzione appartenente ad M è data da:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\,dV(m),$$

posta in (9), questa diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\,dV(m)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\,\Omega(-m)dV(-m), \tag{17}$$

la (17) subordina:

$$dV(m)=\lambda\Omega(-m)dV(-m). \tag{18}$$

Quest' ultima per iterazione ci fornisce:

$$dV(m)=\lambda^2\,|\,\Omega(m)^2\,|\,dV(m). \tag{19}$$

Non è possibile soddisfare la (18) e quindi la (16) se non è soddisfatta la (19), ma quest' ultima può essere soddisfatta solo se è:

$$|\,\Omega(m)\,|^2=\frac{1}{\lambda^2},$$

oppure:

$$dV(m)=0.$$

Supposto che non sia mai $|\Omega(m)|=\frac{1}{\lambda^2}$ la (19) implica senz' altro $dV(m)=0$ in tutto $(-\infty,+\infty)$ cioè soluzione identicamente nulla per la (16). Se si vogliono soluzioni, non identicamente nulle per la (16), deve allora in un qualche insieme di $(-\infty,+\infty)$ essere verificata la prima alternativa, cioè, deve esistere un insieme ρ per cui:

$$\lambda^2=\frac{1}{|\,\Omega(m)\,|^2}, \qquad (m \text{ in } \rho). \tag{20}$$

La (20) è dunque condizione necessaria perchè esista una autofunzione della (16). Considerando la (20) si ricava che gli eventuali autovalori debbono essere reali perchè a quadrato positivo, ed in modulo eguali all' inverso di uno degli $\{\Omega_r\}$ o degli $\{\omega_s\}$.

Riprendo in esame le due successioni $\{\Omega_r\}$, $\{\omega_s\}$ e considerando un numero λ_n^{-1}, *positivo*, che coincida con uno degli $\{\Omega_r\}$ o degli $\{\omega_s\}$, non peccherò di generalità supponendo che λ_n^{-1} coincida con una successione parziale $\{\Omega_{n_r}\}$ estratta da $\{\Omega_r\}$ e con una successione parziale $\{\omega_{n_s}\}$ estratta da $\{\omega_s\}$. Ciò supposto, se pongo $\lambda = \lambda_n$ esisterà un insieme ρ_n formato da tutti i $\{\sigma_{n_r}\}$, e da tutti gli $\{m_{n_s}\}$ tale che:

$$|\Omega(m)| = \frac{1}{\lambda_n}, \qquad (m \text{ in } \rho_n).$$

Per ciò che è stato dimostrato nel Cap. X, deve essere ρ_n simmetrico rispetto l'origine; segue poi per il Teorema VIII che detta al solito $V(m)$ una funzione a variazione limitata in $(-\infty, +\infty)$, il nucleo $A(z)$, quasi involutorio (Teorema VII) per le funzioni:

$$f_{[n]}(x) = \int_{\rho_n} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}}\, dV(m),$$

appartenenti al sotto campo $M[\rho_n]$ ammette l'autofunzione, connessa a λ_n:

$$f_{[n]}(x) + \lambda_n \mathfrak{A}[f_{[n]}(x)]. \tag{21}$$

È facile riconoscere che nella (21) vengono comprese tutte le possibili autofunzioni della (16) connesse a λ_n (appartenenti a M) basta scrivere la (21) nel seguente modo:

$$\int_{\rho_n} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} [dV(m) - \lambda_n \Omega(-m) dV(-m)], \tag{21-bis}$$

e riconoscere che la soluzione più generale della (18) è appunto data da:

$$dV(m) - \lambda_n \Omega(-m) dV(-m),$$

dove $V(m)$ è una qualunque funzione a variazione limitata in $(-\infty, +\infty)$.

Se invece di λ_n si fosse posto $-\lambda_n$ si sarebbe trovato, con procedimento del tutto analogo, che la forma più generale dell'autofunzione relativa a $-\lambda_n$ è:

$$f_{[n]}(x) - \lambda_n \mathfrak{A}[f_{[n]}(x)]. \tag{22}$$

Enuncio allora il:

TEOREMA XIII. — *L'equazione integrale singolare di 2ª specie, omogenea, a nucleo involutorio generalizzato, ammette nel campo* M *una successione di autovalori positivi* $\{\lambda_n\}$ *ed una di autovalori negativi* $\{-\lambda_n\}$, *(le due successioni possono anche ridursi ad un numero finito di termini) ogni* λ_n *coincide con l'inverso di almeno uno dei valori* $\{\Omega_s\}$, $\{\omega_s\}$ *che può assumere il modulo di* $\Omega(m)$ *relativo a* A(z). *Non esistono in* M *altri autovalori. Ogni autovalore subordina in* M *un sottospazio* $M[\rho_n]$, *essendo* ρ_n *l'insieme, simmetrico rispetto l'origine, dei punti in cui è soddisfatto:*

$$|\Omega(m)| = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Detta $f_{[n]}(x)$ *una qualunque funzione appartenente a* $M[\rho_n]$ *tutte le autofunzioni connesse a* λ_n *sono date da:*

$$f_{[n]}(x) + \lambda_n \mathfrak{A}[f_{[n]}(x)],$$

tutte quelle connesse a $-\lambda_n$ *da:*

$$f_{[n]}(x) - \lambda_n \mathfrak{A}[f_{[n]}(x)].$$

CAP. XV. **Rango degli autovalori.**

Nell'ordinaria teoria delle equazioni integrali si parla di rango di un autovalore: esso coincide con il numero sempre finito, di autofunzioni linearmente indipendenti, connesse con l'autovalore; vedo se è possibile estendere anche alle equazioni a nucleo involutorio generalizzato il concetto di rango di un autovalore. Considero all'uopo l'autovalore positivo λ_n (lo stesso accade per il negativo) e vediamo di classificare il relativo insieme ρ_n in cui è:

$$|\Omega(m)| = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Essa può essere verificata:

a) in una sola coppia di punti simmetrici $m_s - m_s$;

b) in un numero finito t di coppie di punti simmetrici;

c) in una successione di coppie di punti simmetrici;

d) in un insieme di misura diversa da zero, quando si verifica in almeno un σ_r.

Nel caso *a)* la sottoclasse funzionale $M[\rho_n]$ si riduce alle funzioni date da:

$$c_1 \frac{x^{im_s}}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{x^{-im_s}}{\sqrt{x}},$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie; le autofunzioni relative a λ_n si riducono ad una sola autofunzione fondamentale, connessa a λ_n, (moltiplicata per una arbitraria costante). Dirò che nel caso *a)* il rango è *I*.

Nel caso *b)* la sottoclasse $M[\rho_n]$ si riduce a t addendi del tipo precedente, le autofunzioni connesse a λ_n, alla combinazione lineare di t autofunzioni fondamentali; dirò che in questo caso il rango è t.

Nel caso *c)* se $\{m_s\}$, $\{-m_s\}$ sono i punti in cui è $|\Omega(m)| = \frac{1}{\lambda_n}$, l'integrale di STIELTJES:

$$\int_{\rho_n} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} \, dV(m),$$

che definisce la relativa sottoclasse $M[\rho_n]$ si riduce alle due serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_s \frac{x^{im_s}}{\sqrt{x}} + \sum_{n=1}^{\infty} d_s \frac{x^{-im_s}}{\sqrt{x}},$$

con

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_s| : \sum_{n=1}^{\infty} |d_s|$$

convergenti. Segue che le autofunzioni sono date da serie totalmente convergenti di autofunzioni fondamentali; dirò dunque che in questo caso il rango è infinito.

Nel caso *c)* l'autofunzione dipende addirittura da una funzione arbitraria, dirò allora che il rango è continuo.

Dalle considerazioni svolte nel Cap. X segue facilmente il:

COROLLARIO IV. — *Non esistono autofunzioni* ML_2 *nel caso di rango finito o infinito.*

CAP. XVI. **I teoremi di sviluppo in serie di autofunzioni.**

Considero ora una qualsiasi funzione $f(z)$ appartenente a M, e la totalità degli insiemi $\{\rho_n\}$ connessi con gli autovalori (positivi) della (16). Detto P l'insieme somma logica degli insiemi $\{\rho_n\}$, se $A(z)$ è completo, P coincide con $(-\infty, +\infty)$; se $A(z)$ è quasi completo, P differisce da $(-\infty, +\infty)$ al più per un insieme numerabile di punti; se $A(z)$ è incompleto, P differisce da $(-\infty, +\infty)$ per un insieme a misura diversa da zero.

Per il risultato 4° del Cap. VI, ogni funzione appartenente a $M_{[P]}$ sottocampo connesso con P, sarà decomponibile in una serie totalmente convergente, a meno del fattore $\frac{1}{\sqrt{z}}$ comune, di funzioni appartenenti ai sottocampi $M[\rho_n]$; d'altra parte ogni funzione $f_{[n]}$ appartenente a $M[\rho_n]$ si decompone nella somma dell'autofunzione:

$$\frac{1}{2}[f_{[n]} + \lambda \mathfrak{A}[f_{[n]}]],$$

relativa a λ_n, e della autofunzione:

$$\frac{1}{2}[f_{[n]} - \lambda \mathfrak{A}[f_{[n]}]],$$

relativa a $-\lambda_n$, segue quindi che ogni funzione di $M_{[P]}$ è decomponibile in serie totalmente convergente di autofunzioni dell'equazione integrale (9); enuncio il:

TEOREMA XIV. — *Se* A(z) *è involutorio generalizzato completo, ogni fun-*

zione appartenente a M *è decomponibile in serie totalmente convergente (a meno di un fattore comune a tutti i termini) di autofunzioni.*

TEOREMA XV. — *Se* A(z) *è involutorio generalizzato quasi completo ogni funzione appartenente a* ML_2, *è decomponibile in serie totalmente convergente (a meno di un fattore comune a tutti i termini) di autofunzioni.*

DIM. — Nel nostro caso l'insieme ρ_z complementare di P è formato al più da un insieme numerabile di punti (ρ_z è l'insieme in cui è $|\Omega(m)| = 0$): ora lo spazio ML_2 non comprende funzioni che hanno componenti in $M_{[\rho_z]}$; cioè le funzioni ML_2 non possono avere dei termini:

$$\frac{x^{im}}{\sqrt{x}},$$

che sappiamo non essere a quadrato integrabile in $(-\infty, +\infty)$.

TEOREMA XVI. — *Se* A(z) *è involutorio generalizzato incompleto, ogni funzione di* M *può essere espressa come somma: di una serie totalmente convergente (a meno del solito fattore) di autofunzioni, e di una funzione appartenente al sottocampo* $\mathrm{M}_{[\rho_z]}$ (ρ_z *insieme complementare di* P) *la cui trasformata secondo* A(z) *è nulla.*

Non ritengo necessaria la dimostrazione.

CAP. XVII. I teoremi sull'equazione di seconda specie non omogenea.

Passo all'equazione singolare di 2ª specie non omogenea, a nucleo involutorio generalizzato:

$$f(x) = \lambda \mathfrak{A}[f(x)] + g(x), \tag{23}$$

dove $g(x)$, funzione nota, appartiene a M.

Suppongo dapprima $A(z)$ completo.

Considero la successione $\{\lambda_n\}$ degli autovalori positivi di (16), e la relativa successione degli insiemi $\{\rho_n\}$ in cui è $|\Omega(m)| = \frac{1}{|\lambda_n|}$. Per il Teorema XI posso decomporre il termine noto $g(x)$, che per ipotesi appartiene a M, nella somma delle sue componenti secondo gli $M_{[\rho_n]}$, e scrivere quindi:

$$g(x) = \sum_n g_{[n]}(x). \tag{24}$$

Suppongo λ diverso da ogni autovalore (positivo o negativo) di (16) e da ogni eventuale punto di condensazione di tali autovalori (λ è considerato per i suoi valori reali e complessi); se anche $f(x)$, come ho supposto, deve appartenere a M, deve per esso potersi scrivere:

$$f(x) = \sum_n f_{[n]}(x), \tag{25}$$

dove al solito con $f_{[n]}(x)$ si indica una funzione appartenente a $M[\rho_n]$. Posta la (24) e la (25) in (23), si ricava facilmente:

$$\sum_n [f_{[n]}(x) - \lambda \mathcal{A}[f_{[n]}(x)]] = \sum_n g_{[n]}(x). \tag{26}$$

Se soddisfo a ciascuna delle:

$$f_{[n]}(x) - \lambda \mathcal{A}[f_{[n]}(x)] = g_{[n]}(x), \qquad (n = 1, 2, \dots, \infty) \tag{27}$$

soddisferò anche alla (26), purchè le serie convergano uniformemente.

Ma la (27) è soddisfatta per:

$$f_{[n]}(x) = \frac{g_{[n]}(x) + \lambda \mathcal{A}[g_{[n]}(x)]}{1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_n^2}}.$$

Segue ora, almeno formalmente:

$$f(x) = \sum_n \frac{g_{[n]}(x) + \lambda \mathcal{A}[g_{[n]}(x)]}{1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_n^2}}. \tag{28}$$

Dimostro ora la convergenza totale di (28); se λ è diverso da un autovalore e da un punto limite di autovalori, sarà possibile trovare un k positivo tale che:

$$\left| \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_n^2}} \right| < k.$$

La serie che compare nella (28) ha allora per maggiorante la serie:

$$k \sum_n (|g_n(x)| + |\lambda| |\mathcal{A}[g_{[n]}(x)]|),$$

ma è

$$|g_{[n]}(x)| < \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\rho_n} |dV(m)| : |\lambda| |\mathcal{A}[g_{[n]}(x)]| < \frac{|\lambda|}{\sqrt{x}} \int_{\rho_n} |\Omega(m)| |dV(m)| < \frac{\Omega|\lambda|}{\sqrt{x}} \int_{\rho_n} |dV(m)|,$$

dove Ω è il limite superiore di $|\Omega(m)|$ che per ipotesi esiste, segue:

$$k \sum_{n=1}^{s} |g_{[n]}(x)| + |\lambda| |\mathcal{A}[g_{[n]}(x)]| < \frac{k}{\sqrt{x}} (1 + \Omega|\lambda|) \int_{-\infty}^{+\infty} |dV(m)|,$$

ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | \, dV(m) \, |,$$

è la variazione, limitata, di $V(m)$ in $(-\infty, +\infty)$. È dunque dimostrata la validità della soluzione (28).

Suppongo ora che possano esistere due soluzioni di (23) appartenenti a M; la loro differenza appartiene a M e soddisfa la (23) omogenea; ma per ipotesi λ non è un autovalore della (23) omogenea, quindi le due eventuali soluzioni coincidono.

Enuncio di conseguenza il:

TEOREMA XVII. — *Ogni equazione integrale di 2ª specie non omogenea, a nucleo involutorio generalizzato completo e termine noto appartenente ad* M, *ammette in* M, *se il parametro non è nè un autovalore, nè un punto limite di autovalori (della stessa equazione omogenea) una ed una sola soluzione. Tale soluzione, funzione analitica monodroma del parametro* λ *avente singolarità sul solo asse reale, è data da:*

$$f(x) = \sum_n \frac{g_{[n]}(x) + \lambda \mathcal{A}[g_{[n]}(x)]}{1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_n^2}},$$

se con $\mathrm{g}_{[\mathrm{n}]}$ *indico le componenti del termine noto rispetto ai sottocampi* $\mathrm{M}_{[\rho_z]}$, *connessi agli autovalori dell'equazione stessa ridotta omogenea.*

L'ipotesi fatta che $A(z)$ sia completo può essere facilmente rimossa, estendendo il Teorema XVII a tutti i nuclei involutori generalizzati completi, quasi completi o non completi.

Supposto infatti esistente un insieme ρ_z in cui è $|\Omega(m)| = 0$; si potrà scrivere al posto di (24)

$$g(x) = \sum_n g_{[n]}(x) + g_{[z]}(x),$$

ed al posto di (25)

$$f(x) = \sum_n f_{[n]}(x) + f_{[z]}(x),$$

ma è per il Teorema XVI:

$$\mathcal{A}[f_{[z]}(x)] = 0,$$

segue quindi, ponendo nella (27) $f_{[z]}$ e $g_{[z]}$ al posto di $f_{[n]}$ e $g_{[n]}$

$$f_{[z]}(x) = g_{[z]}(x),$$

perciò la soluzione è data da:

$$f(x) = g_{[z]}(x) + \sum_n \frac{g_{[n]}(x) + \lambda \mathcal{A}[g_{[n]}(x)]}{1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_n^2}}.$$

Il teorema XVII diventa così il:

TEOREMA XVII-bis. — *Ogni equazione integrale non omogenea di 2ª specie, a nucleo involutorio generalizzato, completo o no:*

$$f(x) = \lambda \mathfrak{A}[f(x)] + g(x),$$

ammette in M *se il parametro non coincide nè con un autovalore, nè con un punto limite di autovalori (della stessa equazione ridotta omogenea) una ed una sola soluzione. Tale soluzione, funzione analitica monodroma del parametro* λ, *avente singolarità solo sull'asse reale è data da:*

$$f(x) = g_{[z]}(x) + \sum_n \frac{g_{[n]}(x) + \lambda \mathfrak{A}[g_{[n]}(x)]}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}},$$

se con $g_{[n]}(x)$ *indico le componenti del termine noto rispetto i sottocampi* $M_{[\rho_n]}$, *connessi con gli autovalori* λ_n *dell'equazione stessa ridotta omogenea, e con* $g_{[z]}(x)$ *la eventuale componente del termine noto rispetto il sottocampo* $M_{[\rho_z]}$ *connesso all'eventuale insieme* ρ_z *in cui si annulla il modulo dell'* $\Omega(m)$ *relativo al nucleo.*

CAP. XVIII. **L'equazione non omogenea nel caso in cui il parametro sia un autovalore.**

Considero ancora l'equazione (23) nel caso in cui il parametro λ coincida con un autovalore $\pm \lambda_p$, senza essere $\pm \lambda_p$ un punto limite degli autovalori stessi. Enuncio il:

TEOREMA XVIII. — *Se* λ *coincide con l'autovalore* λ_p (¹) (*o* $-\lambda_p$) *dell'equazione omogenea senza che* λ_p (*o* $-\lambda_p$) *sia un punto limite di autovalori, allora l'equazione di 2ª specie non omogenea, a nucleo involutorio generalizzato, ammette soluzione solo e quando la componente del termine noto secondo* $M_{[\rho_p]}$ *è una autofunzione relativa all'autovalore* $-\lambda_p$ (*o* λ_p). *Soddisfatta questa condizione, esistono infinite soluzioni differenti tra loro per una autofunzione arbitraria connessa a* λ_p (*o* $-\lambda_p$).

DIM. — Decomposta la $g(x)$, termine noto, in:

$$g(x) = g_{[z]}(x) + \sum_n g_{[n]}(x),$$

dalla $\sum g_{[n]}$ estraggo il termine $g_{[p]}$ relativo al campo ρ_p connesso con l'auto-

(¹) λ_p positivo.

valore λ_p. Avrò quindi:

$$g(x) = g_{[z]}(x) + g_{[p]}(x) + \sum_n{}'^{[p]} g_{[n]}(x),$$

se il termine $g_{[p]}$ fosse identicamente nullo, allora tutto andrebbe come nella dimostrazione del Teorema XVII-bis. Suppongo invece che $g_{[p]}$ non sia nullo; la componente $f_{[p]}$ di $f(x)$ deve soddisfare la

$$f_{[p]} - \lambda_p \mathfrak{A}[f_{[p]}] = g_{[p]}. \tag{29}$$

Opero sulla (22) con $\mathfrak{A}$ e moltiplico per λ_p, ottengo allora:

$$\lambda \mathfrak{A}[f_{[p]}] - \lambda_p^2 \mathfrak{A}[\mathfrak{A}[f_{[p]}]] = \lambda_p \mathfrak{A}[g_{[p]}], \tag{30}$$

ma è:

$$\lambda_p^2 \mathfrak{A}[\mathfrak{A}[f_{[p]}] = f_{[p]},$$

perciò la (30) diventa:

$$f_{[p]} - \lambda_p \mathfrak{A}[f_{[p]}] = - \lambda_p \mathfrak{A}[g_{[p]}], \tag{31}$$

segue dal confronto della (30) con la (31) che, perchè la (30) sia compatibile, deve essere:

$$g_{[p]} = - \lambda_p \mathfrak{A}[g_{[p]}], \tag{32}$$

ma la (32) è soddisfatta solo se $g_{[p]}$ è un'autofunzione connessa a $-\lambda_p$.

Suppongo verificata la (32), segue che la (30) è soddisfatta da:

$$f_{[p]} = \frac{1}{\lambda} g_{[p]}.$$

Una soluzione $f(x)$ è dunque data da:

$$g_{[z]} + \frac{1}{2} g_{[p]} + \sum_n{}'^{[p]} \frac{g_{[n]} + \lambda_p \mathfrak{A}[g_{[n]}]}{1 - \frac{\lambda_p^2}{\lambda_n^2}}.$$

D'altra parte due soluzioni sono sempre tali che la loro differenza soddisfa l'equazione omogenea, ma essendo λ_p un autovalore differiranno solo per una qualunque autofunzione connessa all'autovalore λ_p; resta così dimostrato il teorema.

CAP. XIX. La natura analitica in λ della soluzione e l'equazione di prima specie.

Il Teorema XVII-bis ci fa vedere l'analogia profonda tra i nuclei involutori generalizzati delle equazioni singolari e quelli delle equazioni regolari. È noto che, nel campo delle equazioni integrali singolari, in generale non si conosce la natura analitica della soluzione dell'equazione di 1ª specie non omogenea, pensata come funzione della variabile complessa λ (cioè del parametro): si hanno infatti esempi in cui la natura analitica cambia al cambiare della natura della funzione $g(x)$ termine noto. Invece, nel caso dei nuclei involutori generalizzati, sussiste sempre l'analiticità della soluzione come funzione di λ, e la natura della soluzione (funzione analitica di λ) non dipende dalla natura della funzione g termine noto (funzione di variabile reale). Detta:

$$f(x\,|\,\lambda) = g_{[z]}(x) + \sum_n \frac{g_{[n]} + \lambda \mathfrak{A}[g_{[n]}]}{1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_n^2}},$$

la soluzione dell'equazione è $f(x\,|\,\lambda)$, funzione monodroma di λ, avente dei poli del primo ordine nei punti λ_n che sono autovalori dell'equazione omogenea, e non punti *di condensazione* degli autovalori stessi, e delle singolarità di natura essenziale negli eventuali punti di condensazione degli autovalori. È questa possibilità di singolarità essenziali al finito che distingue sostanzialmente i nuclei involutori generalizzati dai regolari. Ed è proprio la presenza di tali singolarità essenziali che mi costringe nel Teorema XXII-bis a fare l'ipotesi che λ non sia un punto di condensazione di autovalori, ipotesi che ripeto nel Teorema XVIII e di cui non si ha invece traccia nei corrispondenti teoremi delle equazioni regolari, perchè in esse non può esistere altro punto di condensazione degli autovalori che l'infinito.

Nel caso del nucleo involutorio generalizzato, può anche darsi che il punto infinito sia un punto regolare di $f(x\,|\,\lambda)$, e ciò accade sempre se la successioue degli autovalori è limitata superiormente come negli involutori generalizzati algebrici.

Mi siano permesse alcune considerazioni su questi punti singolari essenziali della soluzione, cadenti nei punti di condensazione degli autovalori.

Suppongo che λ^* sia un punto di condensazione dei $\{\lambda_n\}$ senza essere un λ_n. La soluzione, data dal Teorema XVII-bis, continua formalmente a verificare l'equazione, ma non è più legittima perchè non ne può più essere dimostrata la convergenza. Per dimostrare la convergenza della serie che formalmente soddisfa l'equazione, sarebbe necessario fare delle ipotesi sulla natura della funzione $g(x)$ termine noto, qualche cosa cioè di analogo a quello che si è costretti a fare per l'equazione di 1ª specie regolare a nucleo simmetrico.

Mi pare si possa concludere che le difficoltà che si frappongono alla soluzione dell'equazione a nucleo involutorio generalizzato, nel caso che λ^* sia un punto di condensazione degli autovalori, sono dello stesso tipo di quelle che si incontrano nello studio dell'equazione regolare di 1ª specie [1]; provenendo entrambe dalle gravissime difficoltà che si incontrano quando si tenta di dominare un punto singolare essenziale di una funzione analitica.

A conferma di quanto ho detto voglio indicare la soluzione dell'equazione di prima specie:

$$\mathcal{A}[f(x)] = g(x), \tag{33}$$

quando gli autovalori del nucleo $A(z)$ involutorio generalizzato sono superiormente limitati in valore assoluto, e non si addensano quindi all'infinito.

Dette al solito $g_{[n]}$ le componenti secondo i sottocampi $M_{[\rho_n]}$ di $g(x)$, e $f_{[n]}$ le corrispondenti componenti di $f(x)$, faccio due ipotesi distinte.

1°) Il nucleo è completo; ho allora:

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_n \mathcal{A}[f_{[n]}] = \sum_n g_{[n]},$$

se pongo:

$$f(x) = \sum_n \lambda_n^2 \mathcal{A}[g_{[n]}(x)],$$

soddisfo formalmente all'equazione essendo per il Teorema VIII:

$$\mathcal{A}[\mathcal{A}[f_{[n]}]] = \frac{1}{\lambda_n^2} f_{[n]},$$

ma, per ipotesi i λ_n sono limitati, tutti cioè più piccoli di un Λ opportuno, la serie ha allora per maggiorante:

$$\Lambda^2 \sum_n |\mathcal{A}[g_{[n]}(x)]|,$$

il che basta a convincere che la soluzione indicata è effettiva.

2°) Il nucleo non è completo: esiste allora un sottocampo $M_{[\rho_z]}$ che chiude i sottocampi $M_{[\rho_n]}$, è evidente che condizione necessaria e sufficiente perchè esista soluzione della (33) è che la componente di $g(x)$ secondo M sia identicamente nulla. Se poi tale condizione è soddisfatta:

$$f(x) = \sum_n \lambda_n^2 \mathcal{A}]g_{[n]}(x)] + q_{[z]}(x),$$

essendo $q_{[z]}(x)$ una qualunque funzione appartenente al sottocampo $M_{[\rho_z]}$, è soluzione della (33). Concludendo enuncio il:

TEOREMA XIX. — *L'equazione di 1ª specie a nucleo involutorio genera-*

---

(1) Che può essere pensata come equazione limite di quella di 2ª specie

$$y(x) = \lambda \int_0^1 N(x\xi) y(\xi) d\xi + \lambda g(x),$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$.

lizzato completo, e a successione di autovalori limitati, in valore assoluto, ammette sempre una ed una sola soluzione nel campo M. *Dette* $g_{[n]}$ *le componenti del termine noto, secondo i sottospazi funzionali* $M_{[\rho_n]}$ *la soluzione è data da:*

$$\sum_n \lambda_n^2 \mathfrak{A}[g_{[n]}(x)].$$

Se il nucleo, pur essendo involutorio generalizzato, ed a successione limitata di autovalori, non è completo, condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione ammetta soluzione è che sia nulla la componente $g_{[z]}$ *del termine noto, secondo il sottospazio funzionale* $M_{[\rho_z]}$, *connesso all'insieme* ρ_z *in cui il modulo di* $\Omega(m)$ *è nullo. Se tale condizione è soddisfatta allora la soluzione è data da:*

$$q_{[z]}(x) + \sum_n \lambda_n^2 \mathfrak{A}[g_{[n]}(x)],$$

dove $q_{[z]}$ *è una arbitraria funzione appartenente a* $M_{[\rho_z]}$.

Sur la solution de l'équation du cinquième degré

par KARL BOHLIN (de Stockholm).

1. Les recherches exposées dans la communication suivante sont destinées à former un complément aux mémoires précédents sur le thème dont il s'agit, publiés, en particulier, dans les « Annali di Matematica » (1) — complément essentiel en effet par rapport aux singularités remarquées de la solution jusqu'ici considérée (2). Au surplus, par la nouvelle réduction de notre problème, nous pourrons nous dispenser de la considération de la solution dite paracyclique, seulement provisoire et imparfaite au point de vue de la rigueur. Les particularités de la théorie des équations algébriques sous la forme libre étant exposées dans les Mémoires antérieurs, il suffira d'en récapituler ici quelques points principaux, tenant aux recherches dont nous aurons à nous occuper.

Les équations normales du troisième, du quatrième et du cinquième degré s'écrivent, comme on sait,

$$z^3 + 3sz = 2\tau, \qquad z^4 + 4sz = 3\tau, \qquad z^5 + 5sz = 4\tau$$

et pour la troisième d'elles la réduction particulière employée, dite de BRING-JERRARD, est bien connue et citée des ouvrages communs d'algèbre. La réduction à la forme libre, exposée, par exemple, dans le second des Mémoires cités des « Annali », conduit à l'équation du cinquième degré considérée dans ce qui suit :

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27. \tag{1}$$

(1) I. *Sur l'équation algébrique du cinquième degré*, « Annali di Matematica pura ed applicata », Serie IV, Tomo XI, 1932-33; II. *Sur la solution de l'équation générale du cinquième degré*, « Annali di Matematica », Serie IV, Tomo XII, 1933-34.

(2) *Zusätze und Erläuterungen zur Lösung der algebraischen Gleichung fünften Grades auf Grundlage des Racinals*, « Arkiv für Matematik, Astronomi o. Fysik. », K. Vetenskapsakademien, Stockholm, Band 25 A, N.° 6, 1935.

Une méthode directe de former la racine principale d'une équation de forme libre c'est de développer la racine dans les environs de $\frac{1}{u^5} = \infty$ selon les puissances de la quantité u. Nous parviendrons par des approximations successives à une série qui, pour l'équation du troisième degré, se trouve interrompue dès les deux premiers termes

$$\eta = \frac{1}{u} - 1,$$

et qui, pour celle du quatrième degré, est déjà infinie, mais réductible aux expressions algébriques finies

$$\eta = -1 + \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}; \qquad \eta = +1 + i\sqrt{\frac{1}{u^2} + 1}.$$

Les résultats, obtenus selon cette méthode pour l'équation (1), sont donnés dans les Mémoires antérieurs. En premier lieu nous trouverons

$$\eta = \frac{1}{u} A - B - uC - u^2 D \, * .$$

Théorème I. — Tous les termes contenant le facteur u^3, qui suiveraient dans cette expression, s'évanouissent.

Les termes ultérieurs se réunissent aux quatre précédents, en sorte que les coëfficients A, B, C, D soient des séries procédant suivant u^5. Pour chaque équation algébrique on aura en général à employer une *résolvante* de degré inférieur à l'équation originale. Pour l'équation (1) la résolvante valant pour les valeurs de u^5 est bien de la forme

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0,$$

et possède les mêmes points de racines égales que l'équation originale (1), savoir les points

$$\frac{1}{u^5} = 7 + 4i\sqrt{2}.$$

On peut alors développer les coefficients A, B, C, D suivant les puissances de α; il sera même plus avantageux encore de choisir la quantité β, définie par

$$\beta = \alpha + \alpha^2,$$

pour élément du développement. C'est en réduisant ces séries en forme de produits infinis suivant les facteurs $(1 + \beta)$, $(1 + \beta^2)$,... que la rélation fondamentale —

Théorème II. $AD = BC$
— se trouve établie. Introduisons les notations:

$$\delta = \frac{\alpha}{3}; \qquad \gamma = \frac{\beta}{3},$$

et posons

$$s = AD = BC.$$

Ainsi qu'il a été démontré dans le Mémoire II, on a alors

$$s = \gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4.$$

En posant encore

$$p = \frac{AC}{D},$$

l'expression de la quantité p est bien

$$p = 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4,$$

et notre développement, dit *racinal,* sera ainsi:

$$\eta = \frac{1}{u} A - \frac{A^2}{p} - u \frac{p}{A^2}(1 - s) - u^2 \frac{1}{A}(1 - s). \tag{2}$$

Pour ce qui concerne la quantité A dans cette formule, tandis qu'il ne paraît pas possible d'en trouver un développement en série convenable, on obtient au contraire une expression symétrique de la cinquième puissance d'elle, à savoir

$$A^5 = 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6. \tag{3}$$

Nous désignons la racine cinquième de ce polynome par A_δ, pour faire ressortir la connexion fonctionelle de A avec la quantité δ.

Il existe encore une autre représentation de A, fondée sur l'expression également symétrique suivante:

$$A^5 = 1 + 6s + 16s^2 + 52s^3 + 16s^4 + 6s^5 + s^6. \tag{4}$$

Désignons la racine cinquième de ce polynome en s par A_s, pour faire ressortir la connexion fonctionelle entre A et la quantité s, définie ci-haut.

Cette quantité A_s a reçu moins d'attention, d'une part parceque la quantité A_δ paraît suffisante pour le but, et d'autre part parceque l'analogue de la quantité s, dans le cas de l'équation du *quatrième degré,* consiste en une constante, figurant en facteur $\frac{1}{2}$ du dernier terme de l'expression trinôme de la racine dans ce cas. Néanmoins l'introduction de la *quantité* A_s à côté de A_δ paraît bien propre à contribuer à certaines simplifications, que nous allons succinctement considérer, si même leure signification ne soit pas d'importance plus profonde.

2. **Racines sur l'axe réel des arguments $\frac{1}{u^5}$.** — La formule (2) de la racine amène pour des valeurs assez grandes de $\frac{1}{u^5}$ — soit depuis $\frac{1}{u^5} = 27$ à $\frac{1}{u^5} = \infty$ — l'accord presque parfait en sept décimales. Par exemple, s'obtient, pour

$$\frac{1}{u^5} = 54, \qquad \eta = + 0.4925960, \qquad \textit{valeur vraie:} + 0.4925958.$$

A mesure que le paramètre s'approche de l'origine $\frac{1}{u^5} = 0$, l'accord se trouve réduit. La formule employée conduit pourtant au point $\frac{1}{u^5} = 3$ à la valeur de la racine

$$\eta = - 1.581439, \qquad \textit{valeur vraie:} - 1.5518461 = - 3^{3/5}.$$

Au lieu du proposé, fait dans le mémoire précédent, de faire usage d'une paire d'équations du quatrième degré, pour arriver à l'accord parfait dans ce point, nous allons proposer le procédé qui suit. Mais nous faisons remarquer d'avance que, selon cette méthode ainsi que par l'autre, il restera des écarts pour des arguments intermédiaires tels que $\frac{1}{u^5} = 7$ et $\frac{1}{u^5} = 8$; et, si même par quelque méthode il réussit d'anéantir la différence, ayant lieu pour $\frac{1}{u^5} = 7$, la différence au point voisin $\frac{1}{u^5} = 8$ n'est pas remuée. Voici cependant en quoi consiste le procédé nouveau. Soient

$$\eta_\delta, \qquad \eta_s$$

deux valeurs de la racine obtenus en employant la formule (2) et respectivement $A = A_\delta$ et $A = A_s$.

Posons

$$\eta_0 = \frac{\eta_\delta + p_s \eta_s}{1 + p_s}, \tag{5}$$

et essayons de déterminer la quantité p_s de manière que l'accord

$$\eta = \eta_0$$

aura lieu pour $\frac{1}{u^5} = 3$ et pour $\frac{1}{u^5} = 27$.

Nous obtenons au moyen de notre formule (2), pour $\frac{1}{u^5} = 3$

$\eta_\delta = 1.5814388,$ $\quad \eta_s = 1.4522155,$ $\quad$ *valeur vraie:* $\eta = 1.5518462,$

d'où se déduit tout de suite

$$p_s = +0.29702.$$

En écrivant

$$p_s = p_0\left[1 - \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} - \frac{1}{(100)^3} + \ldots\right],$$

avec

$$p_0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(u^5)^2} = \frac{3}{10},$$

nous aurons

$$p_s = 0.29702970297\ldots,$$

ce qui d'après (5) nous donne $\eta = 1.551846$, tout en accord avec la valeur vraie de η ci-haut.

Pour $\frac{1}{u^5} = 27$ s'obtient

$$\log p_s = 9.5222824 \qquad \begin{aligned} \log \eta_s &= 2.09671 \\ \log p_s &= 9.52228 \\ p_s\eta_s &= +41.7 \\ \eta_\delta &= -42.0 \text{ \textit{septième décimale}} \\ \hline \eta_0 &= -0.000000.3. \end{aligned}$$

La formule générale de p_s employée est

$$p_s = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(u^5)^2}\cdot\frac{1+2(u^5)^2}{[1+(u^5)^2]^2}\cdot\frac{1}{1-\left[\frac{(u^5)^2}{1+(u^5)^2}\right]^4}. \tag{6}$$

Nous avons eu soin de calculer d'après cette méthode les vauleurs de η_0 suivantes, intermédiaires à $\frac{1}{u^5} = 3$ et $\frac{1}{u^5} = 27$, $\frac{1}{u^5} = +5, +7, +8, +10.125, +14$ et pour $\frac{1}{u^5} = -9$ — points, ou les valeurs vraies des racines sont données dans le Mémoire I. Sans entrer en particularités dans les calculs, il suffira de constater ici que l'accord s'est trouvée plus grand dans tous les cas, en employant le procédé nouveau relatif à la formule (5), qu'en employant respectivement η_δ ou η_s seules au calcul d'après la formule (2). Voici les valeurs calculées de η_0 et, à côté d'elles, le valeurs vraies η des racines.

TABLEAU I.

		η_0	η
	$\frac{1}{u^5} = 3$	-1.5518462	-1.5518462
	5	-1.3383009	-1.3427982
	7	-1.1277686	-1.1299153
(7)	8	-1.0247066	-1.0259724
	10.125	-0.8223538	-0.8226765
	14	-0.5319309	-0.5319505
	27	0.0000000	0.0000000
	-9	-2.4082272	-2.4082245.

Les écarts se trouvent notés dans la troisième colonne du Tableau II, (7-a).

Ainsi qu'il va ressortir du n.° 5 ci-après, il y aura lieu de considérer encore les éléments suivants

$$\eta_{\delta s} \qquad \text{et} \qquad \eta_{s\delta},$$

formés en prenant dans l'expression (2) deux termes en A_δ et les deux autres de A_s ou inversement. Nous pouvons alors faire l'hypothèse

$$\eta - \eta_0 = \frac{\eta_{\delta s} - \eta_0 + f(\eta_{s\delta} - \eta_0)}{1 + f} \tag{8}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\eta = \frac{\eta_{\delta s} + f\eta_{s\delta}}{1 + f}. \tag{8-a}$$

En déterminant la quantité f d'après la formule linéaire

$$f = a + \frac{b}{u^5},$$

où il est facile de déduire, d'après les données pour $\frac{1}{u^5} = 3$ et $\frac{1}{u^5} = 27$, les coefficients

$$a = 1 + \frac{4 \cdot 3^3}{10^3} = 1.1081; \qquad b = 3^2 \cdot \frac{4^2 + 3^3}{10^4} = 0.0387,$$

on aura en effet des écarts encore amoindris, se trouvant dans la quatrième colonne du Tableau suivant.

TABLEAU II.

		$\eta - \eta_0$ formule (8)	$\eta - \eta_0$ formule (5)	écarts (8)-(5)
	$\frac{1}{u^5} = 3$	0.000000	0.000000	0.000000
	5	— 0.004606	— 0.004497	+ 0.000115
	7	— 0.001278	— 0.002147	— 0.000869
(7-a)	8	— 0.000583	— 0.001266	— 0.000683
	10.125	— 0.000116	— 0.000323	— 0.000207
	14	— 0.000011	— 0.000020	— 0.000009
	27	0.000000	0.000000	0.000000
	— 9	+ 0.000216	+ 0.000002	— 0.000214.

Ainsi les écarts se trouvent d'après cela très réduits, outre pour $\frac{1}{u^5} = -9$. Il paraît que la formule (5) soit en quelque sorte à préférer.

Pour atteindre un accord parfait, il faudra pourtant, comme doit ressortir de ces recherches, faire usage de quelque autre procédé.

3. Approximations sur l'axe réel des arguments $\frac{1}{u^5}$. — Afin d'arriver au but, il faudra encore avoir recours à notre équation originelle

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27.$$

Soit (η_0) une valeur approchée de la racine en quelque point, par exemple obtenue par la méthode décrite das le n.° précédent, et posons

(9) $$\eta = z \cdot (\eta_0).$$

Alors nous pouvons nous assurer que la valeur de z soit à peu près égale à *l'unité*. Nous aurons l'équation de la forme normale

(10) $$z^5 + 5sz = 4\tau,$$

avec

$$5s = \frac{5}{(\eta_0)^4} \cdot \frac{1}{u^3}; \qquad 4\tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{(\eta_0)^5},$$

et il s'agit de réduire cette équation à la forme libre.

Ainsi qu'il fut exposé dans les Mémoires antérieurs, nous avons à ce but la *résolvante*

(11) $$w^4 + 4\tau w = 3s^{5/3}$$

et les *substitutions*

$$u_1 = \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4/5}}{s^{1/3}}; \qquad \zeta_1 = \frac{z \cdot \left(\frac{w}{3}\right)^{1/5}}{s^{1/3}}$$

qui amènent l'équation nouvelle de forme libre

$$\zeta_1^5 + 5u_1\zeta_1 = 1 - 27u_1^5$$

ou bien, en posant

$$\zeta_1 = \eta_1 u_1,$$

l'équation

$$\eta_1^5 + \frac{5\eta_1}{u_1^3} = \frac{1}{u_1^5} - 27,$$

c.-à-d. l'équation primaire, pourtant à d'autres valeurs de $\frac{1}{u^3}$ et $\frac{1}{u^5}$. On peut déterminer, d'après la formule (2) du n.º 1 la racine nouvelle η_1. Cela étant, nous aurons

$$z = \eta_1 u_1 \cdot \frac{s^{1/3}}{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/5}}$$

après quoi s'obtient la valeur de la racine de l'équation originelle, en seconde approximation, — soit η — selon (9), c.-à-d.

$$\eta = z \cdot (\eta_0).$$

Quelques exemples vont prouver l'effet de ce procédé.

Exemple 1. $\frac{1}{u^5} = 7$. — Selon le Tableau (7-a) ci-haut nous avons la différence $\eta - \eta_0 = -0.001278$, de quoi s'ensuit, en considérant la valeur primaire $\eta_0 = -1.1277686$ du Tableau (7), la valeur

$$(\eta_0) = -1.129047$$

pour la valeur approchée de la racine, devant être employée. Il s'ensuit

$$\log s = 0.2362116; \qquad \log \tau = 0.4354110; \qquad \log w = 9.912469.$$

Il doit être utile de donner un peu de particularités du calcul dans cet exemple. Ainsi qu'il doit être connu, l'équation du quatrième degré (11) admet elle-même la *résolvante* du troisième degré

$$w_1^3 + 3\tau_1 w_1 = 2s_1^2,$$

dont la solution est donnée d'apres les formules connues pour les racines d'une équation du troisième degré. C'est ainsi que nous obtenons

$$\frac{1}{u_1^5} = 567.0005 \equiv 7.81$$

et

$$\log z = 0.0003337.$$

Nous avons obtenu déjà

$$\log(\eta_0) = 0.0527118_n,$$

de sorte qu'on obtient encore

$$\log \eta = 0.0530455_n$$

c.-à-d.

$$\eta = z \cdot (\eta_0) = -1.129914, \qquad \textit{valeur vraie}: \ -1.129915.$$

Exemple 2. $\frac{1}{u^5} = 8$. — Dans ce cas la solution primaire (Tableau I) a donné $\eta_0 = -1.0247066$, d'où, en considérant les écarts du Tableau (7-a)

$$(\eta_c) = -1.0252898,$$

quantité devant être employée comme point de départ. Tout comme dans l'exemple précedent, on trouvera successivement

$$\log s = 0.4984672, \qquad \log \tau = 0.6284601, \qquad \log w = 0.6485849$$

et puis

$$\frac{1}{u_1^5} = 350.6905, \qquad \log z = 0.0002894.$$

Nous avions

$$\log(\eta_0) = 0.0108467_n$$

et l'on déduit par suite

$$\eta = (\eta_0) \cdot z = -1.025973, \qquad \textit{valeur vraie}: \ -1.025972.$$

Nous voyons, par ces exemples, comment par le procédé employé les arguments primaires $\left(\frac{1}{u^5} = 7\,;\ \frac{1}{u^5} = 8\right)$ viennent être transposés à des point plus lointains $\frac{1}{u_1^5} = 567$ ou $\frac{1}{u_1^5} = 350.6905$, et que désormais ils appartiennent au *domaine racinal* ou extérieur, s'étendant à l'infini, tandis qu'on peut dire que les points primaires $\frac{1}{u^5} = 7$ et $\frac{1}{u^5} = 8$ mêmes appartiennent à un domaine *interne*, se trouvant aux environs plus ou moins étendus autour de l'origine, domaine où, comme nous l'avons vu, l'application de la *formule racinale* (2) est en défaut. Les exemples font voir encore que le procédé employé conduit bien aux valeurs vraies des racines cherchées. On pourrait être d'avis que le procédé pourrait être poursuivi par des approximations successives. Mais nous allons voir qu'il n'est pas ainsi, et qu'il n'existe pas d'autres approximations successives.

Ajoutons encore l'exemple suivant.

EXEMPLE 3. $\frac{1}{u^5} = 54$. — Dans ce troisième cas la solution primaire était

$$\eta = + 0.4925960,$$

tout en accord avec la valeur vraie, $+ 0.4925958$. Si pourtant nous nous mettons à l'application du procédé de la solution secondaire, dans ce cas

$$(\eta_0) = + 0.4925960$$

nous sommes conduits, tout comme dans les exemples précédents, aux résultats suivants

$$\log s = 0.2694727, \qquad \log \tau = 2.3668493, \qquad \log w = 0.9896368$$

et puis

$$\frac{1}{u_1^5} = 53.99993 \qquad \begin{aligned} \log z &= 0.0000002 \\ \log (\eta_0) &= 9.6524909 \\ \log \eta &= 9.6924911 \\ \eta &= + 0.492596. \end{aligned}$$

Ainsi la seconde solution amène l'argument de départ $\left(\frac{1}{u^5} = 54\right)$ et la valeur primaire même de la racine η.

4. Sur les singularités de la solution. Les points isolines. — Tandis que il faut supposer que les points sur l'axe réel ou dans ses environs, auxquels tout d'abord nous avons adjugé une solution « paracyclique », viendront se transposer à l'aide de la méthode nommée au domaine racinal, il y aura de l'interêt de considérer à part les points *isolines* proprement dits. Ce sont en particulier les points, où la solution (2) prend des valeurs infinies. C'est ce qui a lieu pour $A_\delta = 0$ et pour $p = 0$. Considérons les *δ-isolines*. Ce sont les racines de l'équation (¹)

$$A_\delta = 0,$$

(¹) *Zusätze und Erläuterungen zur Lösung der algebraischen Gleichung fünften Grades auf Grundlage des Racinals*, « Arkiv für Matematik, Astronomi o. Fysik », K. Vetenskapsakademien, Stockholm, Band 25 A, N.° 6, 1935.

savoir

$$\delta_1 = -1.6911970, \qquad \delta_3, \delta_4 = -0.1498669 \pm i\, 0.2554175,$$
$$\delta_2 = -0.5912970, \qquad \delta_5, \delta_6 = -1.7088867 \mp i\, 2.9124605,$$

auxquelles corréspondent

pour δ_1, δ_2 $\quad \frac{1}{u^5} = +0.027$ et $+0.713$,

» δ_5, δ_6 $\quad$ des valeurs encore plus petites,

» δ_3, δ_4 $\quad \frac{1}{u^5} = +15.23295 \pm i\, 10.49492$.

Les quatre premiers de ces points appartiennent au domaine des solutions « paracycliques ». Mais quant aux deux derniers il y aura de difficulté d'appliquer une solution de cette sorte.

Si, comme nous avons essayé, on introduit encore l'expression

$$A_s = 1 + 6s + 16s^2 + 52s^3 + 16s^4 + 6s^5 + s^6,$$

il faut aussi considérer les *s-isolines*, tenant à l'équation

$$A_s = 0$$

du sixième degré, qui toutefois, comme au cas antérieur, se rèduit au troisième degré. En effet, en posant

$$s + \frac{1}{s} = x \qquad \text{et} \qquad x = y - 2,$$

elle se réduit à

$$y^3 + y + 30 = 0,$$

avec la racine réelle $y = -3$. Il n'y a pas lieu d'exposer ici les valeurs de $\frac{1}{u^5}$ corréspondantes qu'on en déduit. De même pour les *p-isolines* on aura à résoudre l'équation

$$p = 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4 = 0,$$

ce qui conduit, par la substitution $\delta = y - \frac{1}{4}$, à l'équation

$$y^4 - \frac{26}{16} y^2 - \frac{39}{256} = 0.$$

5. **Sur une représentation de la racine dans les points isolines.** — Il s'agit des points

$$\frac{1}{u^5} = 15.2329 + i\, 10.4949$$

du n.° précédent, où l'expressiou principale (2) devient infinie.

Pour l'éviter on pourrait introduire dans cette formule la quantité A_s au lieu de A_δ, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} A_s \quad & = -2.4366 - i\,0.0584 \\ -\frac{A_s^2}{p} \quad & = -1.7306 + i\,3.8982 \\ -u\frac{p}{A_s^2}(1-s) & = -0.1123 - i\,0.1664 \\ -u^2\frac{1}{A_s}(1-s) & = +0.3443 - i\,0.0698. \end{aligned}$$

Puisque la valeur vraie de la racine, dans le point considéré, est

$$\eta = -0.25161 + i\,0.48639,$$

la représentation n'étant pas atteinte par l'expression complète en A_s, on peut introduire la représentation $\eta_{\delta s}$, qui, à cause de $A_\delta = 0$, se réduit aux deux derniers termes

$$\eta_{\delta s} = -u\frac{p}{A_s^2}(1-s) - u^2\frac{1}{A_s}(1-s),$$

ce qui donne

$$\eta_{\delta s} = +0.2330 - i\,0.2362.$$

Soit $\eta_0 = \eta_{\delta s}$. L'expression diffère pourtant encore de

$$\eta = -0.2516 + i\,0.4864,$$

mais il est facile de trouver l'expression

$$\eta = \frac{\eta_0}{2} + \sqrt{\frac{\eta_0^2}{4} + ik_0}, \tag{12}$$

qui, pour $k_0 = \frac{3}{10}$, fait représenter la racine. On pourra même donner à la quantité k_0 une forme, qui pour l'axe réel se réduit à *zéro* et aux points isolines retient la valeur de 3/10 à peu près. Si l'on pose

$$\frac{1}{u^5} = \alpha + i\beta = \lambda e^{i\varphi},$$

cela est atteint par la formule

$$k_0 = \sin^2\varphi.$$

Pour les isolines serait à peu près

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3},$$

et $k_0 = 4/13$. Au surplus nous aurions, pour $\varphi = 90°$, $k_0 = 1$.

Pour les points des racines égales

$$\frac{1}{u^5} = 7 + i\sqrt{32},$$

on aurait de cette manière $k_0 = 0.39505$ et la formule (12) donnerait

$$\eta = 1.96338 - i\,0.1382,$$

tandis que, en réalité,

$$\eta = 1.7796 - i\,1.4492.$$

Évidemment ainsi la formule (12) doit être toute particulière pour les points isolines.

6. **Les points de racines égales.** — Nous avons entrepris d'éprouver encore la formule (5)

$$\eta_0 = \frac{\eta_\delta + p_s \eta_s}{1 + p_s},$$

pour les points

$$\frac{1}{u^5} = 7 + 4i\sqrt{2},$$

des racines égales.

Quoique, ainsi qu'il y aurait lieu de prévoir, l'accord parfait avec la réalité n'est pas atteint par cela, le résultat confirme pourtant l'utilité de la formule (5) à un certain degré, aussi pour des valeurs complexes, comme celles rélatives aux racines égales.

La *résolvante* a dans ce cas la forme

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -3u^5 = -\frac{3}{7 + 4i\sqrt{2}},$$

et fournit la valeur

$$\alpha = \frac{-1 + 2i\sqrt{2}}{2},$$

devant être employée. On déduit de la manière usuelle successivement les quantités β, γ, δ ainsi que p et δ. Ayant obtenu à la suite A_δ et A_s, on a formé les valeurs

$$\eta_\delta = +1.98826 + i\,1.47790, \qquad \eta_s = +1.26052 + i\,2.18996.$$

De plus, au moyen de la formule (6), s'obtient

$$p_s = [9.51813] + i\,[7.60732].$$

Évidemment on aurait pu se contenter avec la valeur $p_s = 1/3$.

Notre formule (5) donne ainsi

$$\eta_0 = \frac{\eta_\delta + p_s\eta_s}{1 + p_s} = 1.8061 - i\,1.6528,$$

à quoi on peut comparer la valeur vraie

$$\eta = 1.7796 - i\,1.4492.$$

Le calcul donne ainsi la partie réelle de l'approximation suffisante, mais il vaudra mieux d'apporter la partie imaginaire de l'expression simple de

$$\eta_\delta = 1.98826 - i\,1.47790,$$

en mettant pour point de départ du calcul suivant

$$(\eta_0) = 1.8061 - i\,1.4779.$$

7. **Les points de racines égales** (*suite*). — Il va se trouver que le point de départ de la seconde approximation soit arbitraire. Néanmoins nous avons employé la valeur indiquée à la fin du n.º précédent. Le résultat du calcul soit donné tout d'abord. On a trouvé

$$\eta = 1.7794 - i\,1.4493,$$

la valeur vraie étant

$$\eta = 1.7796 - i\,1.4492.$$

Ainsi cet exemple vérifie de nouveau le procédé employé. Il peut être utile d'en adjoindre ici un exposé succinct. Le calcul fut conduit de la même manière que dans le n.º 3, savoir en mettant dans l'équation originelle

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^2} - 27,$$

la substitution

$$\eta = (\eta_0)\cdot z,$$

par où l'équation

$$z^5 + 5sz = 4\tau,$$

est obtenue, avec

$$5s = \frac{5}{(\eta_0)^4 u^3}; \qquad 4\tau = \frac{\dfrac{1}{u^5} - 27}{(\eta_0)^5}.$$

Au cours du calcul il s'est trouvé que

$$\tau^4 + s^5 = 0,$$

relation simplifiant la question, qui désormais peut être traitée, sans des calculs numériques, comme il suit. À traduire à la forme libre sert la *résolvante*

$$w^4 + 4\tau w = 3s^{5/3}$$

et les substitutions

$$u_0 = \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4/5}}{s^{1/3}}; \qquad \zeta_0 = z \cdot \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/5}}{s^{1/3}},$$

par où s'obtient l'équation

$$\zeta_0^5 + 5u_0\zeta_0 = 1 - 27u_0^5.$$

Pour la solution de la résolvante du quatrième degré il sera avantageux de mettre

$$w = z_1; \qquad \tau = s_1; \qquad s^{5/3} = \tau_1.$$

L'équation prend avec cela la forme

$$z_1^4 + 4s_1z_1 = 3\tau_1.$$

Elle possède de nouveau la résolvante

$$w_1^3 + 3\tau_1 w_1 = 2s_1^2,$$

et se trouve, par les substitutions

$$u_1 = \frac{\left(\frac{w_1}{2}\right)^{3/2}}{s_1^{1/2}}; \qquad \zeta_1 = z_1 \cdot \frac{\left(\frac{w_1}{2}\right)^{1/4}}{s_1^{1/2}},$$

réduite à la forme libre

$$\zeta_1^4 + 4u_1\zeta_1 = 1 - 4u_1^4.$$

Soit

$$\zeta_1 = u_1\eta_1,$$

pour transformer aux deux équations séparées:

$$\eta_1^2 + 2\eta_1 = \frac{1}{u_1^2} - 2, \qquad \eta_1^2 - 2\eta_1 = -\frac{1}{u_1^2} - 2,$$

de manière que, par exemple,

$$\zeta_1 = \eta_1 u_1 = -u_1 + \sqrt{1 - u_1^2},$$

soit l'une des solutions.

Pour la résolvante du troisième degré nous avons la solution bien connue

$$w_1 = [s_1^2 + \sqrt{s_1^4 + \tau_1^3}]^{1/3} + [s_1^2 - \sqrt{s_1^4 + \tau_1^3}]^{1/3},$$

ou bien, d'après les désignations introduites,

$$w_1 = [\tau^2 + \sqrt{\tau^4 + s^5}]^{1/3} + [\tau^2 - \sqrt{\tau^4 + s^5}]^{1/3}.$$

On trouve ainsi, par suite de la condition

$$\tau^4 + s^5 = 0,$$

les valeurs

$$w_1 = 2(\tau^2)^{1/3}; \qquad u_1 = \frac{\tau^{1/2}}{\tau^{1/2}} = 1; \qquad \zeta_1 = -1,$$

puis encore

$$z_1 = -\tau^{1/3}; \qquad w = z_1 = -\tau^{1/3},$$

et enfin

$$\frac{1}{u_0^5} = -81; \qquad z = -\eta_0 \cdot \frac{\tau^{1/5}}{3^{3/5}}.$$

À la détermination de η_0 servirait l'équation

$$\eta_0^5 + \frac{5\eta_0}{u_0^3} = \frac{1}{u_0^5} - 27,$$

mais, la valeur de cette racine est connue ([1]) et égale à

$$\eta_0 = +3^{3/5},$$

de sorte qu'on obtient

$$z = -\tau^{1/5}$$

et, en considérant la rélation

$$4\tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{(\eta_0)^5},$$

on trouve

$$\tau^{1/5} = -\frac{(-5 + i\sqrt{2})^{1/5}}{(\eta_0)}.$$

On a ainsi

$$\eta = (5 - i\sqrt{2})^{1/5}$$

ce qui, en effet, est la valeur de chacune des racines égales. La valeur de la racine principale s'en déduit en multipliant par

$$\lambda = -1.65063,$$

racine de l'équation

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0,$$

ainsi qu'il est facile de se convaincre. Notre résultat devient par cela

$$\eta = 1.7794 - i\,1.4493,$$

ainsi qu'il fut noté à l'introduction du n.° présent.

([1]) « Annali di Matematica », Tomo XI, pag. 270.

8. **L'invariante** $\varkappa$. — Nous pourrons tout d'abord introduire une quantité $\varkappa$, définie par

$$\varkappa = \frac{s^5}{\tau^4} = \frac{1}{(u^5)^3} \cdot \frac{4^4}{\left(\frac{1}{u^5} - 27\right)^4}, \tag{13}$$

et indépendante du choix de la valeur de (η_0). Cette quantité admet des simplifications en cas des racines égales:

$$\frac{1}{u^5} = 7 + 4i\sqrt{2},$$

et précisément dans ces points on a

$$\varkappa = -1.$$

La quantité $\varkappa$ se trouve, en général, propre aux développements dont il s'agit.

On peut se demander quels points $\frac{1}{u^5}$ viennent correspondre à une valeur $\varkappa$ d'avance donnée. Soit

$$\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27$$

l'équation donnée et

$$z^5 + 5sz = 4\tau$$

la transformée, provenant en mettant $\eta = (\eta_0)z$. Puisque la quantité (η_0) s'en va de l'expression de $\varkappa$, nous sommes autorisés de prendre $(\eta_0) = 1$. En mettant $\frac{1}{u^5} = \varepsilon$ la quantité $\varkappa$ s'écrit

$$\varkappa = \frac{256\,\varepsilon^3}{(\varepsilon - 27)^4}.$$

On obtient ainsi une équation du quatrième degré en ε, à savoir

$$\varepsilon^4 - \left(108 + \frac{256}{\varkappa}\right)\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2(27)^2 - 4\varepsilon(27)^3 + (27)^4 = 0.$$

Par l'application de la substitution

$$\frac{27}{\varepsilon} = x + 1 = 27u^5 \tag{14}$$

l'équation se réduit à la forme normale

$$x^4 + 4s_0 x = 3\tau_0, \tag{15}$$

avec les valeurs suivantes des coefficients

$$s_0 = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{1}{\varkappa}; \qquad \tau_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \frac{1}{\varkappa}.$$

En effectuant la solution nous aurons à considérer la résolvante

$$w_0^3 + 3\tau_0 w_0 = 2s_0^2$$

et à mettre, d'après le procédé de solution de l'équation du quatrième degré,

$$u_0 = \frac{\left(\frac{w_0}{2}\right)^{3/4}}{s_0^{1/2}}; \qquad w_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{\varkappa^{2/3}} R,$$

où nous aurons bien

$$R = [1 + \sqrt{1+\varkappa}]^{1/3} + [1 - \sqrt{1+\varkappa}]^{1/3}.$$

Sans entrer dans les particularités des déductions, les résultats suivants sont à noter. On aura

$$u_0 = -i\left(\frac{R}{2}\right)^{3/4}; \qquad x = i\,\frac{4}{3}\,\frac{1}{\varkappa^{1/3}}\,\frac{1}{\left(\frac{R}{2}\right)^{3/4}}\cdot\zeta_0,$$

où ζ_0 soit l'une des racines des équations séparées

$$\zeta_0^2 + 2u_0\zeta_0 = 1 - 2u_0^2; \qquad \zeta_0^2 - 2u_0\zeta_0 = -1 - 2u_0^2$$

c.-à-d.

$$\zeta_0 = -u_0 + i\sqrt{1-u_0^2}; \qquad \zeta_0 = +u_0 + i\sqrt{1+u_0^2}.$$

Dans notre cas ce sont les racines

$$\zeta_0 = u_0 \pm i\sqrt{1+u_0^2}$$

qu'il faut employer. L'une de ces racines réconduit à la valeur primaire de $\frac{1}{u^5}$, l'autre cependant à un point nouveau $\frac{1}{u^5}$. Au contraire, les racines

$$\zeta_0 = -u_0 \pm \sqrt{1-u_0^2}$$

vont conduire à des résultats étrangers à la questions. Nous n'insisterons pas de plus sur ces circonstances, parceque l'équation (15) ne fut employée que pour le contrôle.

9. **Sur la solution de l'équation proposée:** $\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27$. — L'équation importante (15) du n.º précédent, tout en prouvant l'existence de points transposés de $\frac{1}{u^5}$, ne conduit pas immédiatement à une valeur η de la racine cherchée. C'est ce qui est atteint seulement par le procédé suivant, d'ailleurs plus simple que l'emploi de la formule (15). Remarquons d'avance qu'il n'y

a qu'une seule approximation, en faisant usage des points transposés de $\frac{1}{u^5}$. Car une approximation ultérieure réconduirait au point primaire. En second lieu, comme la valeur approchée (η_0), considérée dans ce qui précède, s'en va des formules définitives, on pourra déjà d'avance supposer $(\eta_0) = 1$ et écrire

$$\eta = z,$$

par où notre équation secondaire

$$z^5 + 5sz = 4\tau$$

soit assujettie aux conditions

$$s = \frac{1}{u^3}; \qquad \tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{4}; \qquad \varkappa = \frac{1}{(u^5)^3} \frac{4^4}{\left(\frac{1}{u^5} - 27\right)^4} = \frac{s^5}{\tau^4}.$$

Nous allons au surplus introduire quelques désignations améliorées définitives.

Soit

$$w^4 + 4\tau w = 3s^{5/3}$$

la résolvante de notre équation en z et mettons, afin de réduire à la forme libre,

$$u_0 = \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4/5}}{s^{1/3}}; \qquad z = \zeta_0 \frac{s^{1/3}}{\left(\frac{w}{3}\right)^{1/5}},$$

par où s'obtient

$$\zeta_0^5 + 5u_0\zeta_0 = 1 - 27u_0^5$$

où bien l'équation, obtenue par la substitution

$$\eta_0 = \frac{\zeta_0}{u_0},$$

suivante

$$\eta_0^5 + \frac{5\eta_0}{u_0^3} = \frac{1}{u_0^5} - 27,$$

tout analogue, du reste, à l'équation originelle, mais au *paramètre transposé* $\frac{1}{u_0}$.

Solution de la résolvante : $w^4 + 4\tau w = 3s^{5/3}$. — Il sera commode de mettre

$$w = z_1; \qquad \tau = s_1; \qquad s^{5/3} = \tau_1$$

de manière que

$$z_1^4 + 4s_1z_1 = 3\tau_1$$

à quoi appartient la *résolvante* du troisième degré:

$$w_1^3 + 3\tau_1 w_1 = 2s_1^2.$$

Afin de réduire l'équation en z_1 du *quatrième degré* à la forme libre, nous aurons à employer les substitutions

$$u_1 = \frac{\left(\frac{w_1}{2}\right)^{3/4}}{s_1^{1/2}}; \qquad z_1 = \frac{s_1^{1/2}}{\left(\frac{w_1}{2}\right)^{1/4}} \cdot \zeta_1,$$

d'où s'obtient

$$\zeta_1^4 + 4u_1\zeta_1 = 1 - 4u_1^4,$$

équation qui, au moyen de la substitution

$$\eta_1 = \frac{\zeta_1}{u_1},$$

se partage en deux équations du *second degré*, qui à leur tour possèdent les racines

$$\eta_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{u_1^2} - 1}; \qquad \eta_1 = +1 + i\sqrt{\frac{1}{u_1^2} + 1}.$$

C'est, dans notre cas, la solution

$$\eta_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{u_1^2} - 1}$$

qu'il faut employer. Le signe *minus* de la racine carrée réconduirait au point du départ. Les racines complexes conduisent à des points étrangers.

SOLUTION DE LA RÉSOLVANTE: $w_1^3 + 3\tau_1 w_1 = 2s_1^2$. — En ayant recours aux désignations de τ_1, et s_1, introduites ci-haut, nous trouverons

$$w_1 = \tau^{2/3} R$$

où l'on aura enfin

$$R = [1 + \sqrt{1 + \varkappa}]^{1/3} + [1 - \sqrt{1 + \varkappa}]^{1/3}.$$

RÉSUMÉ DES FORMULES POUR L'ÉQUATION: $\eta^5 + \frac{5\eta}{u^3} = \frac{1}{u^5} - 27$. — Selon ce que nous avons mentionné, le procédé va s'ordonner comme il suit.

Point de départ:

$$\varkappa = \frac{1}{(u^5)^3} \cdot \frac{4^4}{\left(\frac{1}{u^5} - 27\right)^4}; \qquad \tau = \frac{\frac{1}{u^5} - 27}{4}.$$

On trouvera successivement :

$$R = [1 + \sqrt{1+\varkappa}]^{1/3} + [1 - \sqrt{1+\varkappa}]^{1/3},$$

$$\frac{1}{u_1^2} = \left(\frac{R}{2}\right)^{-3/2}, \qquad \eta_1 = -1 + \sqrt{\frac{1}{u_1^2} - 1},$$

$$\text{(A)}\quad \frac{1}{u_0^5} = 81 \cdot \frac{\varkappa^{1/3}}{\eta_1^4 \left(\frac{R}{2}\right)^2}, \qquad \text{(B)}\quad f = \frac{\tau}{27} \cdot \eta_1^3 \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^{3/2},$$

après quoi la racine cherchée est donné sous la forme

(C) $$\eta = f^{1/5} \cdot \eta_0.$$

La détermination de η_0 sera effectuée selon l'équation

$$\eta_0^5 + \frac{5\eta_0}{u_0^3} = \frac{1}{u_0^5} - 27,$$

en faisant usage du développement *racinal* [voir (2) ou (D) ci-bas].

Si le point $\frac{1}{u^5}$ considéré se trouvait dans le domaine *interne*, où plusieurs singularités et divergences des valeurs obtenues à l'emploi immédiat de la formule (2) ont lieu, le point transposé $\frac{1}{u_0^5}$ sera au contraire en général situé dans le domaine *externe* ou *racinal*, où le développement racinal, c.-à-d.

(D) $$\eta_0 = \frac{1}{u_0} A - \frac{A^2}{p} - u_0 \frac{p}{A^2}(1-s) - u_0^2 \frac{1}{A}(1-s),$$

conduit, en général, à la valeur juste de la racine η_0.

En général il suffit de calculer la quantité A dans la formule pour η_0 d'après l'expression originelle (3) :

(b) $$A_\delta^5 = 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6,$$

de laquelle ne diffère, en général, que peu l'expression secondaire (4) :

(b_1) $$A_s^5 = 1 + 6s + 16s^2 + 52s^3 + 16s^4 + 6s^5 + s^6,$$

où

$$s = \gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4.$$

La formule générale donnant η_0 est pourtant, selon (5) :

$$\eta_0 = \frac{\eta_\delta + p_s \eta_s}{1 + p_s},$$

η_δ et η_s désignant les valeurs obtenues suivant que la formule (b) où (b_1) est employée.

Pour la quantité p_s fut proposée la formule (6), déstinée soit au point $\frac{1}{u^5} = 27$ soit au point $\frac{1}{u^5} = 3$. Mais, parceque le dernier n'appartient pas aux points transposés, il n'est plus nécessaire d'avoir recours à la formule générale (6), qui, de plus, ne s'étend au point second spécial de notre équation, savoir $\frac{1}{u^5} = -9$, que par la condition que, pour lui, A_s soit échangée en A_{s_1} où s_1 se déduit de la formule inverse

$$\gamma = s_1 + 2s_1^2 + 4s_1^3 + 3s_1^4.$$

Dans ces circonstances il paraît que la valeur simple de

$$p_s = \frac{1}{3}; \qquad \lg p_s = 9.5228787$$

soit à adopter pour les points transposés, de manière qu'il faudra bien mettre:

$$\text{(c)} \qquad \eta_0 = \frac{\eta_\delta + \frac{1}{3}\eta_s}{1 + \frac{1}{3}}.$$

Si le point considéré se trouvait déjà dans le domaine externe, la transformation secondaire le conduirait au même point, ou, en prenant le signe *minus* de la racine carrée, au domaine intérieure. Il va sans dire qu'alors le développement racinal (2) doit être immédiatement employé.

Remarque. — Il faut rappeler que ce n'est qu'à l'aide d'une formule spéciale (5) ou (8-a), et en utilisant à la foi les deux expression A_δ et A_s, qu'on parvient pour l'axe réel depuis $\frac{1}{u^5} = 3$ à $\frac{1}{u^5} = 27$ à une représentation de la racine d'accord plus marqué. C'est cela pour la partie interne de l'axe réel. Puisque les arguments sont transposés au domaine externe, c'est cependant qui ne sera pas d'importance. Les écarts vont en diminuant quand on s'approche de point $\frac{1}{u^5} = 27$, point de racine *zéro*, à considérer comme point limite des domaines *interne* et *externe*. À ce point même il existe une petite différence de A_δ et A_s, nécessitant l'emploi de la formule de secours (5) ou (c) pour arriver à la valeur *zéro* de la racine. Il faut présumer que les écarts au delà du point $\frac{1}{u^5} = 27$ soient de plus en plus presque insensibles, mais que pourtant ils puissent être de caractère systématique. Si à quelque instant l'emploi de plus de sept décimales paraît désirable, on peut avoir recours à l'équation originelle $z^5 + 5sz = 4\tau$, afin d'obtenir par une approximation ultérieure faite sur cette formule un nombre de chiffres plus grand. Parceque en tout cas il faudra contrôler les calculs, en ayant recours à l'équation initiale, c'est qui se fera sans difficulté. Mais, nous n'insisterons pas ici de plus sur cette question.

10. **Exemples.** — Le cas de racines égales fut déjà exposé dans ce qui précède. Nous allons considérer le cas des *isolines*, où la singularité la plus essentielle dans le domaine intérieure a lieu. Ces points sont

$$\frac{1}{u^5} = + 15.2329 + i\, 10.4949.$$

On obtient dans ce cas

$$\varkappa = + 0.2814 - i\, 26.216, \qquad \varkappa^{1/3} = [8.02646_n] + i\,[0.47286],$$
$$R = - 0.000206 - i\, 0.22434,$$

et il suffira de mentionner encore les résultats suivants

$$\frac{1}{u_0^5} = 56.830 + i\, 25.394, \qquad f = \frac{\tau}{27}\eta_1^3\left(\frac{R}{2}\right)^{5/3} = [8.74099_n] + i\,[9.60069],$$
$$f^{1/5} = [8.35953_n] + i\,[9.92080], \qquad \eta_0 = [9.77197] + i\,[9.45598],$$

d'où s'ensuit

$$\eta = - 0.25164 + i\, 0.48639, \qquad \textit{valeur vraie:}\ - 0.25161 + i\, 0.48639,$$

l'accord étant ainsi établi.

On obtient, en utilisant la deuxième racine

$$R_2 = 2.12017 - i\, 1.99063,$$

le même point transposé

$$\frac{1}{u_0^5} = + 56.830 + i\, 25.394,$$

mais à l'emploi de la troisième racine

$$R_3 = - 2.11821 + i\, 2.21497,$$

aucun résultat utile n'est trouvé.

Si nous écrivons d'une manière schématique

$$R = (+)^{1/3} + (-)^{1/3} \qquad \text{et} \qquad (+) = \rho e^{i\vartheta} \qquad \text{et} \qquad (-) = \rho e^{i\vartheta},$$

on aura à appliquer à $\frac{\vartheta}{3}$ dans l'expression de

$$R = (+)^{1/3} + (-)^{1/3},$$

240° et 0° pour le premier terme et pour le second respectivement.

On aura les corréspondances suivantes :

$\frac{\vartheta}{3}$: $+240^\circ$; $+0^\circ$

η_1 : $-$ $+$

$\frac{1}{u_0^5} = 56.830 + i\,25.39$

point transposé

$\frac{\vartheta}{3}$: $+240^\circ$; $+0^\circ$

η_1 : $-$ $-$

$\frac{1}{u_0^5} = 14.20 + i\,23.03$

point contraposé

$\frac{\vartheta}{3}$: $+0^\circ$; $+240^\circ$

η_1 : $-$ $-$

$\frac{1}{u_0^5} = +15.23 + i\,10.49$

point primaire

$\frac{\vartheta}{3}$: $+0^\circ$; $+240^\circ$

η_1 : $-$ $+$

$\frac{1}{u_0^5} = 56.83 + i\,25.39$

point transposé.

À la détermination de la racine dans les isolines appartient encore la quantité η_0, devant être calculée par le racinal (2) de l'équation

$$\eta_0^5 + \frac{5\eta_0}{u_0^3} = \frac{1}{u_0^5} - 27,$$

dans le point transposé

$$\frac{1}{u_0^5} = +56.830 + i\,25.395.$$

Il n'y a lieu de réproduire des calculs que quelques traits principaux. On a obtenu

$$\alpha = -0.045587 + i\,0.021198$$

et puis les valeurs corréspondentes de β, γ, δ, s, p, pour enfin parvenir à la valeur A_δ^5

$$A_\delta^5 = +0.912734 + i\,0.038368.$$

Ensuite s'obtient, au moyen de la formule

$$\eta_0 = \frac{1}{u_0} A - \frac{A^2}{p} - u_0 \frac{p}{A^2}(1-s) - u_0^2 \frac{1}{A}(1-s),$$

la valeur cherchée

$$\eta_0 = \eta_\delta = +0.59155 + i\,0.28575\,;$$

c'est la valeur inscrite ci-haut dans la première partie des calculs.

Exemple : $\frac{1}{u^5} = 7$. — On aura dans ce cas

$$\varkappa = \frac{7^3}{5^4} \qquad \text{et} \qquad \tau = -5,$$

et l'on obtient de plus

$$\frac{1}{u_1^2} = + 5,$$

et pour η_1 les quatre valeurs

$$+ 1, \qquad - 3, \qquad + 1 + i\sqrt{6}, \qquad + 1 - i\sqrt{6},$$

desquelles la première est à employer. Le point transposé devient

$$\frac{1}{u_0^5} = 7.81,$$

et dans ce point on trouve

$$\eta_0 = 0.339318,$$

de quoi enfin

$$\eta = - 1.129914, \qquad \textit{valeur vraie:}\ - 1.129915.$$

Exemple : $\frac{1}{u^5} = 8$. — Le calcul fournit le point transposé

$$\frac{1}{u_0^5} = + 350.6905,$$

puis, dans ce point,

$$\eta_0 = 1.8088863,$$

et enfin, pour la racine η, la valeur

$$\eta = - 1.025973, \qquad \textit{valeur vraie:}\ 1.025972.$$

Aussi confirmées sont les formules pour les points

$$\frac{1}{u^5} = 3; \quad \frac{1}{u^5} = - 9; \quad \frac{1}{u^5} = 16; \quad \frac{1}{u^5} = 21; \quad \frac{1}{u^5} = 36,$$

et d'autres qui furent considérés de plus ou de moins.

11. Sur le choix des signes et des quadrants. — Dans les formules figurent des racines telles que

$$1^{\circ})\ \varkappa^{1/3}; \qquad 2^{\circ})\ f^{1/5}.$$

Dans le cas de quantités réelles il n'y a pas de difficulté par rapport à cela. Dans les cas complexes, comme il s'agit d'une racine principale, on aura, pour $\varkappa^{1/3}$ et $f^{1/5}$, à appliquer des valeurs convenables de $\frac{2k\pi}{3}$ et $\frac{2k\pi}{5}$. Nous pouvons choisir les k de manière que les racines soient homologues aux valeurs $\varkappa$ et f mêmes. Il peut arriver qu'on aura les mêmes quadrants, mais aussi que les quadrants soient opposés. Soient $a + bi$ les expressions des quantités mêmes et $\alpha + \beta i$ les expressions de leurs racines. Ce qu'on doit exiger de α, β, c'est qu'elles s'accomodent de façon homologue aux quantités a, b, les quadrants devant être les mêmes ou bien les opposés, ce qui sera en général autrement pour les racines troisièmes et pour les cinquièmes.

Quant au choix des quadrants dans l'expression binome

$$3^{\circ}) \quad R = [1 + \sqrt{1 + \varkappa}]^{1/3} + [1 - \sqrt{1 + \varkappa}]^{1/3},$$

nous nous avons déjà prononcé dans ce qui précède. Il faudra les choisir de manière que des résultats étrangers soient évités. Nous n'entrerons pas ici sur cette question en général. Dans le cas des isolines, le choix juste se trouve indiqué par ce qu'on peut y arriver de deux manières différentes.

Sulle singolarità delle funzioni analitiche definite da integrali determinanti.

Memoria di CARLOS BIGGERI (Buenos Aires).

Dimostro nel teorema I un *criterio fondamentale* per la singolarità di un punto della retta di convergenza semplice per la funzione analitica $f(z)$ definita dall' integrale determinante

$$(1) \qquad \int_0^\infty a(t)e^{-tz}dt.$$

Di questo criterio faccio poi uso per dimostrare alcune proposizioni che si possono considerare come estensioni alle dette funzioni e generalizzazioni del teorema di VIVANTI–PRINGSHEIM–DIENES.

Senza restringere, per nulla, la generalità possiamo supporre che:

a) *l'ascissa di convergenza semplice dell'integrale* (1) *sia nulla;*

b) *il punto, della retta di convergenza, la cui singolarità o regolarità si vuol riconoscere sia l'origine*, z = 0.

TEOREMA I. — *Facciamo*

$$J_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} a(t)t^n e^{-\frac{2}{3}t} dt; \qquad (n \text{ intero} > 0)$$

a) *condizione necessaria e sufficiente affinchè* z = 0 *sia punto singolare per* f(z), *è che*

$$(2) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|J_n|} = 1;$$

b) *condizione necessaria e sufficiente affinchè* z = 0 *sia punto regolare per* f(z), *è che*

$$(3) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|J_n|} < 1.$$

DIMOSTRAZIONE. — Poichè $f(z)$ è regolare nel semipiano $R(z) > 0$, possiamo considerarne l'elemento

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)}{n!}\left(z - \frac{2}{3}\right)^n,$$

essendo:

$$f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^n \int_0^\infty a(t) t^n e^{-\frac{2}{3}t} dt. \tag{4}$$

Posto

$$L \equiv \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} \left| \int_0^\infty a(t) t^n e^{-\frac{2}{3}t} dt \right|},$$

il punto $z = 0$ è quindi *singolare* per $f(z)$ se

$$L = \frac{3}{2}; \tag{5}$$

e sarà *regolare* se

$$L < \frac{3}{2}. \tag{6}$$

Orbene, a causa dell'ipotesi che l'ascissa di convergenza sia 0,

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_0^t a(\tau) d\tau \right|}{t} \leq 0.$$

In conseguenza, dato arbitrariamente un numero positivo ε, esiste un $t_1 \equiv t_1(\varepsilon)$ tale che per ogni $t \geq t_1$ si ha:

$$\left| \int_0^t a(\tau) d\tau \right| < e^{\varepsilon t}. \tag{7}$$

Chiamiamo $M(\varepsilon)$ l'estremo superiore di tutti i valori che la funzione

$$\left| \int_0^t a(\tau) d\tau \right|$$

prende nell'intervallo $(0, t_1)$. Dalla (7) e dalla definizione di $M(\varepsilon)$ si deduce che, per ogni t dell'intervallo $0 \leq t < +\infty$, è:

$$\left| \int_0^t a(\tau) d\tau \right| < K(\varepsilon) e^{\varepsilon t}, \tag{8}$$

essendo

$$K(\varepsilon) \equiv 1 + M(\varepsilon).$$

Facciamo

$$A_n \equiv \int_0^n a(t) t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt.$$

Trasformiamo questa espressione integrando per parti:

(9) $$A_n = -\int_0^n \left(\int_0^t a(\tau)\tau^n d\tau \right) de^{-\frac{2}{3}t} + e^{-\frac{2}{3}n} \int_0^n a(\tau)\tau^n d\tau.$$

Dalle (8) e (9) si trae:

(10) $$|A_n| < 2K(\varepsilon) n^n e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)n} + \frac{4}{3} K(\varepsilon) \int_0^n t^n e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)t}\, dt.$$

Dato che la funzione

$$t^n e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)t}$$

è *monotona crescente* nell'intervallo $0 \leq t \leq n$, dalla (10) si deduce, per $n > 1$,

(11) $$|A_n| < 4K(\varepsilon) n^{n+1} e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)n}.$$

Poniamo

$$B_n \equiv \int_{2n}^{\infty} a(t) t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt$$

(B_n esiste in virtù della (4)).

Integrando per parti e tenendo conto della (8) si deduce che, per $t \geq 2n$, si ha:

$$\left| \int_{2n}^{t} a(t) t^n e^{-\frac{2}{3}t}\, dt \right| < 4K(\varepsilon) t^n e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)t} + \frac{8}{3} K(\varepsilon) \int_{2n}^{t} t^n e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)t}\, dt;$$

donde, per $\varepsilon < \frac{2}{3}$, si deduce:

(12) $$|B_n| \leq \frac{8}{3} K(\varepsilon) \int_{2n}^{\infty} t^n e^{-\left(\frac{2}{3}-2\varepsilon\right)t} e^{-\varepsilon t} dt.$$

Come la funzione

$$t^n e^{-\left(\frac{2}{3}-2\varepsilon\right)t}$$

è *monotona decrescente* nell'intervallo $2n \leq t < +\infty$, se facciamo $\varepsilon < \frac{1}{12}$, dalla (12) si trae:

$$|B_n| < \frac{8}{3\varepsilon} K(\varepsilon)(2n)^n e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)2n}. \tag{13}$$

Secondo la formola di STIRLING e le (11) e (13), esiste un numero naturale n_0, così grande che per $n \gtrsim n_0$ si ha:

$$|A_n + B_n| < 4K(\varepsilon)\left(1 + \frac{2}{3n\varepsilon}\right)nn!\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{17}{18}\right)^n e^{3\varepsilon n}$$

onde:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|A_n + B_n|} \leq \frac{3}{2}\frac{17}{18}e^{3\varepsilon}$$

e prendendo i limiti per $\varepsilon \to 0$:

$$l \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|A_n + B_n|} < \frac{3}{2}. \tag{14}$$

Poniamo finalmente:

$$C_n \equiv \int_n^{2n} a(t) t^n e^{-\frac{2}{3}t} dt.$$

Ora supponiamo che il punto $z = 0$ sia *singolare* per $f(z)$, cioè che sia soddisfatta la (5). Sia δ un numero positivo arbitrario ma fisso, e q un numero fisso positivo tale che

$$l < q < \frac{3}{2}.$$

Secondo le (5) e (14) a partire da un valore determinato di n, sufficientemente grande, si verifica, rispettivamente, che:

$$\frac{1}{n!}|(A_n + B_n) + C_n| < \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n$$

$$\frac{1}{n!}|A_n + B_n| < q^n$$

e in conseguenza:

$$\frac{1}{n!}|C_n| < \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n + q^n = \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n\left[1 + \left(\frac{q}{\frac{3}{2} + \delta}\right)^n\right].$$

onde:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|C_n|} \leq \frac{3}{2} + \delta$$

e prendendo i limiti per $\delta \to 0$:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | C_n |} \leq \frac{3}{2}. \tag{15}$$

Nella (15) *non si può verificare il segno minore.* Effettivamente, se fosse

$$l' \equiv \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | C_n |} < \frac{3}{2},$$

prendendo un numero positivo arbitrario fisso, q', minore di $\frac{3}{2}$ e maggiore di l ed l', si avrebbe, per n sufficientemente grande,

$$\frac{1}{n!} | C_n | < q'^n$$

$$\frac{1}{n!} | A_n + B_n | < q'^n$$

onde:

$$\frac{1}{n!} | (A_n + B_n) + C_n | < 2q'^n$$

ossia

$$L \leq q' < \frac{3}{2};$$

cioè: se nella (15) si verificasse il segno minore non sarebbe più soddisfatta la (5) bensì la (6); dunque: è condizione *necessaria* perchè il punto $z = 0$ sia *singolare* per $f(z)$ che venga soddisfatta:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | C_n |} = \frac{3}{2}. \tag{16}$$

Vediamo che questa condizione è anche *sufficiente.* Difatti, se $z = 0$ non fosse singolare, necessariamente la (6) sarebbe soddisfatta; dunque se prendiamo un numero positivo q'', minore di $\frac{3}{2}$ e maggiore di l ed L, per le (6) e (14) a partire da un valore di n, sufficientemente grande, si avrebbe:

$$\frac{1}{n!} | (A_n + B_n) + C_n | < q''^n$$

$$\frac{1}{n!} | A_n + B_n | < q''^n$$

onde:

$$\frac{1}{n!} | C_n | < 2q''^n$$

cioè:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,|}\leq q''<\frac{3}{2},$$

vale a dire, non si verificherebbe la (16). Dunque: *l'uguaglianze* (5) *e* (16) *sono equivalenti* ed applicando alla (16) la formola di Stirling si ottiene l'uguaglianza (2).

La prima parte a) del teorema è dunque dimostrata.

Analogamente per la seconda parte b): Abbiamo provato che se la (6) viene soddisfatta, cioè se il punto $z=0$ è *regolare* per $f(z)$, si verifica:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,|}<\frac{3}{2} \tag{17}$$

e reciprocamente, se si verifica la (17) si verifica la (6): *le disuguaglianze* (3) *e* (17) *sono equivalenti.*

Come complemento interessante a questo teorema osserviamo che:

Se esiste il limite ordinario di $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|}$, *per* $n\to\infty$, *esiste anche il limite ordinario di* $\sqrt[n]{|J_n|}$, *nel caso in cui il punto* $z=0$ *sia singolare per* $f(z)$.

Difatti, supponiamo:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|}\equiv L=\frac{3}{2}. \tag{18}$$

Sia δ un numero positivo arbitrario minore di $\frac{3}{2}-l$. A partire da un valore di n, sufficientemente grande, si verificano:

$$\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|>\left(\frac{3}{2}-\delta\right)^n \tag{19}$$

$$\frac{1}{n!}\,|\,A_n+B_n\,|<\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+l-\delta\right)\right]^n \tag{20}$$

in virtù delle (18) e (14), rispettivamente. Dalle (19) e (20) si deduce:

$$\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,|>\left(\frac{3}{2}-\delta\right)^n\left[1-\left(\frac{3-2\delta+2l}{2(3-2\delta)}\right)^n\right]$$

onde:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\,C_n\,|}\geq\frac{3}{2}-\delta \tag{21}$$

(dato che: $3 - 2\delta + 2l < 2(3 - 2\delta)$); e prendendo i limiti nella (21), per $\delta \to 0$:

(22) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | C_n |} \geq \frac{3}{2}.$$

Dalle (16) e (22) si deduce l'esistenza del *limite ordinario* di $\sqrt[n]{|J_n|}$, se il punto $z = 0$ è *singolare* per $f(z)$.

Questo complemento ci sarà utile più avanti.

Osservazione. Senza mutare sostanzialmente il ragionamento si può dimostrare il seguente teorema più generale.

Supposta nulla, come precedentemente, l'ascissa di convergenza, *poniamo*

$$K_n = \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \int_{\frac{n}{\sigma}(1-\omega)}^{\frac{n}{\sigma}(1+\omega)} a(t) t^n e^{-\sigma t} dt$$

dove ω *rappresenta un numero qualunque compreso fra* 0 *e* 1 *e* σ *un numero arbitrario* > 0: *condizione necessaria e sufficiente affinchè* $z = 0$ *sia punto singolare per la funzione* $f(z)$ *è che*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|K_n|} = 1;$$

in caso contrario

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|K_n|} < 1.$$

Facciamo ora qualche applicazione del teorema I.

Si sa che il teorema del Vivanti sulle serie di potenze si generalizza (con dimostrazione analoga) alle funzioni analitiche definite da integrali determinanti; cioè: « Se la funzione generatrice è positiva, il punto reale della retta di convergenza è singolare per la funzione analitica definita dall'integrale ».

Mediante il nostro criterio e questo teorema, analogo a quello del Vivanti, siamo riusciti a dimostrare un teorema molto generale per gl'integrali determinanti, cioè:

Teorema II. — *Se l'argomento* $\varphi(t)$ *della funzione generatrice* $a(t)$ *dell'integrale determinante*:

(1) $$\int_0^\infty a(t) e^{-tz} dt$$

soddisfa alla condizione:

(23) $$\lim_{t \to \infty} \frac{\log | \cos \varphi(t) |}{t} = 0$$

e inoltre le ascisse di convergenza, semplice ed assoluta, dell'integrale (1) *sono uguali; allora, il punto reale della retta di convergenza dell'integrale* (1) *è singolare per la funzione analitica,* f(z), *definita da questo integrale.*

DIMOSTRAZIONE. — Senza restringere la generalità del teorema, possiamo supporre che *l'ascissa di convergenza dell'integrale* (1) *sia nulla.* Si cerca allora di dimostrare che *il punto* $z = 0$ *è singolare per* f(z).

Chiamiamo $\rho(t)$ il modulo di $a(t)$ e facciamo:

$$J_n' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} \rho(t) \cos \varphi(t) t^n e^{-\frac{2}{3}t} dt$$

$$J_n'' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} \rho(t) t^n e^{-\frac{2}{3}t} dt.$$

Evidentemente è:

$$| J_n | \geq | J_n' |$$

e quindi, per il teorema della media,

$$(24) \qquad | J_n | \geq | \cos \varphi(\xi) | \, J_n''$$

per un conveniente ξ tale che

$$n < \xi \equiv \xi(n) < 2n.$$

Dato che:

$$\sqrt[n]{| \cos \varphi(\xi) |} = \left(| \cos \varphi(\xi) |^{\frac{1}{\xi}}\right)^{\frac{\xi}{n}}$$

è compreso fra $| \cos \varphi(\xi) |^{\frac{1}{\xi}}$ e $| \cos \varphi(\xi) |^{\frac{2}{\xi}}$, in virtù della (23) si verifica:

$$(25) \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{| \cos \varphi(\xi) |} = 1.$$

Siccome le ascisse di convergenza, semplice ed assoluta, dell'integrale (1) sono uguali, ed avendo supposto che l'ascissa di convergenza della (1) è nulla, per il teorema analogo a quello del VIVANTI, il punto $z = 0$ sarà *singolare* per la funzione analitica definita dall'integrale:

$$\int_0^\infty \rho(t) e^{-tz} dt;$$

in conseguenza, in virtù del teorema I (conclusione a)), si ha:

$$(26) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{J_n''} = 1.$$

Dalle (24), (25) e (26) si deduce:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|J_n|} \geq 1 \tag{27}$$

e come $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|J_n|}$ non può essere maggiore dell'unità, secondo la (27) sarà:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|J_n|} = 1,$$

ed in virtù del teorema I, il punto $z = 0$ è *singolare* per $f(z)$.

Se l'ascissa di convergenza, che chiamiamo C, *dell'integrale* (1) *si potesse calcolare mediante la formola:*

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log |a(t)|}{t} \tag{28}$$

(e in questo caso le ascisse di convergenza, semplice ed assoluta, dell'integrale (1) sono *uguali*), *la condizione* (23) *può essere sostituita dalla seguente, che è più generale*:

$$\overline{\lim_{\zeta\to\infty}} \frac{\log |\cos \varphi(\zeta)|}{\zeta} = 0, \tag{29}$$

essendo $|\cos \varphi(\zeta)|$ *il minore (in senso lato) di tutti i valori di* $|\cos \varphi(t)|$, *nell'intervallo* $n \leq t \leq 2n$.

Difatti, il teorema della media dà:

$$J_n' = \rho(\theta) \cos \varphi(\theta) J_n''',$$

essendo

$$J_n''' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \int_n^{2n} t^n e^{-\frac{2}{3}t} dt$$

e θ un certo valore di t, tale che $n \leq \theta \leq 2n$. Onde si ha:

$$|J_n| \geq \rho(\theta) |\cos \varphi(\theta)| J_n'''. \tag{30}$$

Se chiamiamo $\rho(\omega)$ il *minore* (in senso lato) dei valori di $\rho(t)$, nell'intervallo $n \leq t \leq 2n$, dalla (30) si trae:

$$|J_n| \geq \rho(\omega) |\cos \varphi(\zeta)| J_n'''. \tag{31}$$

Dato che $\sqrt[n]{\rho(\omega)} = \left[(\rho(\omega))^{\frac{1}{\omega}}\right]^{\frac{\omega}{n}}$ è compreso fra $(\rho(\omega))^{\frac{1}{\omega}}$ e $(\rho(\omega))^{\frac{2}{\omega}}$ ed avendo supposto $C = 0$, dalla (28) si trae:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho(\omega)} = 1. \tag{32}$$

In modo analogo, come $\sqrt[n]{|\cos\varphi(\zeta)|} = \left(|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{1}{\zeta}}\right)^{\frac{\zeta}{n}}$ è compreso fra $|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{1}{\zeta}}$ et $|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{2}{\zeta}}$, per la (29) si ha:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\cos\varphi(\zeta)|} = 1. \tag{33}$$

Orbene l'integrale $\int_0^\infty e^{-tz}dt$ (la cui ascissa di convergenza è nulla) definisce la funzione $g(z) = \frac{1}{z}$, per la quale si ha:

$$\sqrt[n+1]{\frac{1}{n!}\left|g^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|} = \frac{3}{2} \to \frac{3}{2}, \quad \text{per} \quad n \to \infty;$$

allora, in virtù del complemento al teorema I, si verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{J_n'''} = 1. \tag{34}$$

Dalle (31), (32), (33) e (34) si trae

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|J_n|} \geq 1:$$

ciò dimostra la proposizione.

Due casi particolari interessanti nei quali si verifica la condizione (23) sono:

a) *L'affisso di* a(t) *varia, a partire da un valore di* t, *sufficientemente grande, in un paio d'angoli opposti al vertice (origine).* (Si tenga conto che questo paio d'angoli opposti al vertice, si può sempre trasformare in un paio d'angoli simmetrici rispetto all'asse reale, moltiplicando la generatrice, $a(t)$, per un certo numero complesso).

b) *La generatrice,* a(t), *è reale e prende valori positivi e negativi (ma a partire da un valore di* t, *sufficientemente grande,* a(t) *non si annulla).*

Se la parte reale della generatrice, $a(t)$, a partire da un valore di t (sufficientemente grande) è *positiva* l'uguaglianza delle ascisse di convergenza, semplice ed assoluta, dell'integrale (1) è conseguenza della condizione (23). Cioè, possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema III. — *Se si verificano le due seguenti condizioni:*

1ª) *la parte reale della generatrice* a(t), *a partire da un valore di* t, *sufficientemente grande, è positiva;*

2ª) *l'argomento* φ(t) *di* a(t) *soddisfa la condizione:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log\cos\varphi(t)}{t} = 0; \tag{35}$$

allora, il punto reale della retta di convergenza dell'integrale (1) *è singolare per la funzione analitica* f(z), *definita da questo integrale.*

Per dimostrare questo teorema, basta provare che sotto la condizione (35) le ascisse di convergenza, semplice ed assoluta, dell'integrale (1) sono uguali.

Difatti, chiamiamo C e C' le ascisse di convergenza, semplice ed assoluta, dell'integrale (1), rispettivamente; e facciamo: $a(t) \equiv a_1(t) + ia_2(t)$. Per un teorema di K. Kurosu si ha:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_{[t]}^{t} a(\tau)\, d\tau \right|}{t}$$

$$C' = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \int_{[t]}^{t} | a(\tau) |\, d\tau}{t}.$$

Dato arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, esiste un $t_0 \equiv t_0(\varepsilon)$, tale che per $t \geq t_0$ si ha, secondo la (35):

$$\sqrt{a_1(\tau)^2 + a_2(\tau)^2} \leq a_1(\tau) e^{\varepsilon\tau},$$

onde si deduce:

(36) $$\int_{[t]}^{t} | a(\tau) |\, d\tau \leq e^{\varepsilon t} \int_{[t]}^{t} a_1(\tau) d\tau.$$

Inoltre, si ha:

(37) $$\left| \int_{[t]}^{t} a(\tau)\, d\tau \right| \geq \int_{[t]}^{t} a_1(\tau) d\tau.$$

Facciamo

$$C'' = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \int_{[t]}^{t} a_1(\tau) d\tau}{t}.$$

Per la (36) è

$$C' \leq \varepsilon + C''$$

e prendendo i limiti per $\varepsilon \to 0$:

(38) $$C' \leq C''.$$

Per la (37) si ha:

(39) $$C \geq C''.$$

Dalle (38) e (39) si trae:

$$C \geq C',$$

e come

$$C' \geq C,$$

si ha:

$$C = C'.$$

Un caso particolare interessante, in cui si verificano le condizioni del teorema III, si presenta quando

$$|\varphi(t)| \leq \tau < \frac{\pi}{2} \quad \text{(essendo } \tau \text{ un valore fisso)};$$

si ottiene, allora, la generalizzazione del teorema del Dienes della teoria delle serie di potenze. (Cfr. K. Kurosu, « Tôhoku Math. J. », 20).

BIBLIOGRAFIA

1. Pincherle, « Annales de l'École Normale Supérieure », 3° série, t. 22, 1905.
2. Pincherle, « Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei », 1902, 1903.
3. Pincherle, *Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti*, (« Atti del IV Congresso dei Matematici », Roma, tomo 2, 1908).
4. Landau, *Ueber die Grundlagen der Theorie der Facultatenreihen*, « Sitzungber. der K. bayer. Akad. der Wissenschaften », tomo 36, p. 215. (In questo lavoro si trova l'analogo del teorema del Vivanti).
5. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, « Journal de Mathématiques », 4^{e} série, tomo VIII, 1892.
6. Fabry, *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux*, « Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure », 3^{e} série, t. 13, 1896.
7. Pringsheim, *Ueber einige funktionenth. Anwend. der Euler. Reiheentw.* « Sitzungb. der Kgl. Bayr. Ak. », 1912.
8. Vivanti, *Sulle serie di potenze*, « Rivista di matematica », tomo 3, p. 112, 1893.
9. Lecornu, *Sur les séries entières*, « Comptes Rendus de l'Acad. Sc. Paris », tomo 104, 1887, pp. 349-352.
10. Dienes, *Essai sur les singularités des fonctions analytiques*, « Journal de Mathématiques », 3^{e} série, tomo 4, p. 344, 1909.
11. Fekete, *Sur les séries de Dirichlet et sur un théorème de M. Landau*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », tomo 150 ed 151, 1910.
12. Landau, *Ueber einen Satz von Tschebyschef*, « Mathematische Annalen », tomo 61, 1905.
13. Kurosu, *On the Convergence-Abscissa of a certain definite Integral*, « Tôhoku Mathematical Journal », tomo 16, p. 291, 1919.
14. Kurosu, *On the definite Integral* $\int_a^\infty \varphi(t) e^{-xt} dt$, ibid., tomo 20, p. 100, 1921.

La geometria delle funzioni analitiche di più variabili ed i teoremi di esistenza e di unicità ad esse relativi.

Memoria di FRANCESCO SEVERI (a Roma).

Sunto. - *Dopo aver classificato e caratterizzato le varietà algebroidi dello spazio reale a* 2n *dimensioni, rappresentativo di* n *variabili complesse, più importanti dal punto di vista delle trasformazioni pseudoconformi, l'Autore dà i teoremi di unicità e di esistenza concernenti una funzione analitica delle* n *variabili, della quale sia assegnata la traccia (colle condizioni che occorrono) sopra una varietà algebroide di dimensione qualunque.*

Rappresentati nel modo consueto i punti complessi $(x_1, x_1, \dots, x_n)$ coi punti di uno spazio euclideo reale Σ, a $2n$ dimensioni, i tipi di varietà reali algebroidi (cioè analitiche, regolari) di Σ, più notevoli dal punto di vista delle trasformazioni pseudoconformi, sono i seguenti:

1) *Varietà caratteristiche*, imagini di legami analitici (complessi) fra $x_1, x_2, \dots, x_n$.

2) *Iperplanoidi*, varietà di livello delle singole funzioni n-armoniche (componenti reali delle funzioni olomorfe di $x_1, x_2, \dots, x_n$).

3) *Varietà planoidi*, intersezioni di iperplanoidi o, ciò che (come vedremo) è lo stesso, trasformate pseudoconformi degli spazi lineari di Σ.

4) *Varietà pseudocaratteristiche*, giacenti in varietà caratteristiche subordinate all'ambiente.

5) *Varietà pseudoplanoidi*, giacenti in varietà planoidi [1].

Una varietà planoide diviene una particolare varietà pseudocaratteristica quando fra gl'iperplanoidi che passan per essa ve n'è qualche coppia di *coniu-*

---

[1] Per $n = 2$ le superficie caratteristiche sono state, com'è noto, considerate da LEVI-CIVITA e gl'iperplanoidi da E. E. LEVI, POINCARÉ, ALMER (ved. le notizie bibliografiche p. es. nella mia Monografia, *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, « Rend. del Seminario Matem. della R. Università di Roma », 1932). Per $n > 2$ le varietà 1), 2), 3), 4) sono state studiate dal mio discepolo spagnuolo J. M. PLANAS in una tesi iniziata con me e pubblicata, con ulteriori sviluppi, nel giugno 1935 fra le « Memòries de l'Acadèmia de Ciences i Arts de Barcelona » (*Contribución a la geometria pseudoconforme de n dimensiones*). La parola planoide è però usata dal PLANAS in un'accezione più particolare, che, come risulterà dal seguito, va abbandonata. Ho anche reputato opportuno (per ragioni che risulteranno poi evidenti) cangiare un poco la terminologia, che io stesso avevo suggerito al PLANAS.

gati (provenienti cioè da due funzioni n-armoniche coniugate, componenti di una medesima funzione analitica). È ovvio che le varietà caratteristiche sono sempre varietà planoidi particolari, definibili altresì come le trasformate pseudoconformi di *spazi lineari caratteristici*, rappresentanti sistemi di equazioni lineari nelle $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Dal punto di vista geometrico (¹) gli spazi lineari caratteristici di Σ vengono pienamente determinati dal loro comportamento rispetto ai due spazi lineari S_{n-1} all'infinito e imaginari-coniugati, che chiamo *spazi ciclici* di Σ, perchè son luoghi dei punti ciclici dei piani caratteristici.

Le varietà caratteristiche sono alla lor volta caratterizzate dal fatto che i loro spazi lineari tangenti son caratteristici (²) e le varietà pseudocaratteristiche dal fatto che i loro spazi lineari tangenti giacciono in spazi lineari caratteristici o (ciò che è lo stesso) contengono spazi caratteristici di conveniente dimensione (³).

Le varietà caratteristiche di dimensione $2k$, dal punto di vista analitico, sono tutte e sole le varietà reali algebroidi di tal dimensione, integrali del sistema differenziale:

(1) $$dx_{j_1} dx_{j_2} \dots dx_{j_{k+1}} = 0,$$

ove $j_1, j_2, \dots, j_{k+1}$ è una qualunque combinazione di classe $k+1$ degl'indici $1, 2, \dots, n$ (⁴). Tale proprietà (n. 2) estende quella che avevo in precedenza osservato per $k=2$ (⁵).

Che una varietà caratteristica di dimensione $2k$ sia integrale del sistema (1) è quasi immediato (n. 2), perchè sovr'essa $k+1$ delle $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfanno ad un'equazione analitica. La reciproca richiede invece maggior attenzione.

(¹) Di cui diedi un primo saggio nel 1927 (ved. la mia citata Monografia) allargato e approfondito di poi da miei discepoli e segnatamente, per $n=2$, da B. Segre e per n qualunque da Planas.

(²) L'osservazione trovasi già nella tesi di Planas e prima, per $n=2$, in B. Segre.

(³) Che una varietà pseudocaratteristica goda di questa proprietà è evidente, attesa la precedente proprietà delle varietà caratteristiche. L'inversa, enunciata da Planas senza dimostrazione, richiede qualcosa che sostanzialmente equivalga all'uso di un teorema di esistenza (ved. i successivi nn. 6, 7).

(⁴) Pel simbolismo e per la terminologia relativi a forme differenziali di grado qualunque mi riferisco alla Monografia di E. Kaehler, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (« Hamburger Math. Einzelschriften », 16 Heft, 1934), ove trovasi esposta in modo sistematico la teoria generale dei sistemi di forme differenziali, dovuta essenzialmente ad É. Cartan.

(⁵) Severi, « Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris », 1931 (2 mars); *Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche* (« Memorie della R. Accademia d'Italia », 1931), pag. 407.

Le (1) esprimon sotto la forma più compatta, elegante e manevole le condizioni differenziali del 1° ordine perchè una varietà sia caratteristica [1].

Le varietà pseudocaratteristiche sono varietà integrali di dimensione $< 2k$ dei sistemi del tipo (1).

La maggior parte di queste proprietà si conseguon rapidamente col metodo del passaggio dal reale al complesso, da me usato in modo sistematico dal 1931.

Delimitate analiticamente e geometricamente le varietà caratteristiche e pseudocaratteristiche, mi occupo delle varietà che chiamo *policaratteristiche* o *pseudo-policaratteristiche*, le quali son varietà caratteristiche o rispettivamente pseudocaratteristiche degli spazi via via più amplii ottenuti da Σ salendo dal campo complesso al bicomplesso, ..., al policomplesso. La loro considerazione permette di dare ai teoremi esistenziali un più largo significato.

Passo di poi alla caratterizzazione delle varietà planoidi [2], le quali risultano le trasformate pseudoconformi degli spazi lineari di Σ e sono altresì caratterizzate dal fatto di contenere sistemi continui (analitici, reali) di varietà caratteristiche.

Lo studio delle specie elencate di varietà era necessario onde ottenere il quadro completo dei teoremi di esistenza delle funzioni analitiche di n variabili. Di essi mi occupo nell'ultima parte della Memoria. Il metodo che mi consente di pervenire ai teoremi in questione con semplicità, che pare irriducibile, è ancora quello del passaggio dal reale al complesso, di cui mi ero già servito per le funzioni di due variabili. Pervengo in tal guisa alle condizioni differenziali necessarie e sufficienti da imporsi (quando vi sieno), sopra una varietà algebroide V_h (di dimensione h qualunque, da $h = 1$ ad $h = 2n - 1$), ad una funzione $f = u + iv$ (u, v funzioni reali olomorfe del punto di V_h). perchè sia traccia su V_h di una funzione analitica di $x_1, x_2, \dots, x_n$ olomorfa in un intorno $2n$-dimensionale di V_h o perchè u sia traccia di una funzione n-armonica. In taluni casi — come in quello $h = n$ trattato e risoluto nel 1905, con altro metodo, da LEVI-CIVITA — non si richiede in generale nessuna condizione per f o per u.

Le varietà caratteristiche o pseudocaratteristiche si presentano come varietà eccezionali rispetto ai teoremi di esistenza riguardanti le funzioni analitiche di $x_1, x_2, \dots, x_n$; mentre le varietà planoidi o pseudoplanoidi si presentano come varietà eccezionali rispetto ai teoremi di esistenza relativi alle

---

(1) Nella tesi di PLANAS queste condizioni, altrimenti ottenute, sono scritte in forma molto diversa e complicata.

(2) Tale caratterizzazione trovasi in qualche caso particolare, non sempre in modo perfetto, nella tesi citata.

funzioni n-armoniche. Io dò i teoremi di esistenza e, dove sussistono, i teoremi di unicità, per ogni valore della dimensione h ed anche nei casi eccezionali.

Tutto questo esposi, nei suoi lineamenti essenziali, in una conferenza tenuta a Parigi, presso l'Istituto Poincaré, il 13 febbraio 1935. I risultati allora enunciati con sommarie spiegazioni, trovano qui il complemento dei necessari sviluppi.

CAPITOLO I.

Le varietà caratteristiche e pseudocaratteristiche.

Le varietà caratteristiche. - Loro caratterizzazione differenziale.

1. Sieno

$$x_h = y_h + iz_h \qquad (h = 1, \dots, n)$$

le n variabili complesse e Σ lo spazio reale euclideo $(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$, dove y_h, z_h, componenti reali di x_h, son assunte a coordinate cartesiane ortogonali del punto di Σ. Indicheremo con $\mathfrak{S}_n$ lo spazio lineare (proiettivo, complesso) delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ e con S'_{n-1}, S''_{n-1} i due spazi ciclici ad $n-1$ dimensioni di Σ, luoghi dei punti ciclici dei piani caratteristici di Σ. Questi due spazi imaginari-coniugati all'infinito, sono sghembi fra loro; cioè hanno come spazio congiungente lo S_{2n-1} all'infinito di Σ.

Si riconosce agevolmente (veggasi p. es. la citata tesi di PLANAS) che un S_{2k} caratteristico di Σ è caratterizzato dalla proprietà di appoggiarsi ai due spazi ciclici secondo due S_{k-1} complesso-coniugati (aventi per spazio congiungente lo S_{2k-1} all'infinito di S_{2k}). Si verifica pure subito che gli spazi intersezione e congiungente di due spazi caratteristici sono spazi caratteristici (imagini degli spazi intersezione e congiungente dei due spazi lineari di $\mathfrak{S}_n$, rappresentati dagli spazi caratteristici dati).

2. Una varietà algebroide complessa, a punti semplici (ipotesi questa sempre sottintesa nel seguito), a k dimensioni, di $\mathfrak{S}_n$, è rappresentata da una varietà algebroide reale a punti semplici, a $2k$ dimensioni, di Σ: una *varietà caratteristica* M_{2k} (1).

L'intorno di un punto $P(x_1{}^0, \dots, x_n{}^0)$ di M_{2k} (una falda lineare della varietà,

(1) Ci si può limitare a considerare le varietà algebroidi irriducibili, di ognuna delle quali, per le proprietà in piccolo che noi avremo da studiare, basta fissar l'attenzione sopra una falda.

trattandosi di un punto semplice) può ottenersi ponendo $x_1, \dots, x_n$ uguali a convenienti funzioni olomorfe di k parametri *complessi* $t_1, t_2, \dots, t_k$, definite nell'intorno di $(t_1^0, \dots, t_k^0)$ cui corrisponde P.

Ciò premesso, consideriamo su M_{2k} $k+1$ delle n variabili complesse: sieno $x_{j_1}, \dots, x_{j_{k+1}}$; e formiamo con esse il differenziale di grado $k+1$:

$$\omega = d(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k+1}}) = dx_{j_1} dx_{j_2} \dots dx_{j_{k+1}}.$$

Dico che su M_{2k} è $\omega = 0$. Invero ciascuna delle $dx_{j_1}, dx_{j_2}, \dots, dx_{j_{k+1}}$ risulta uguale attorno a P ad una forma lineare, a coefficienti olomorfi, di $t_1, \dots, t_k$; e il prodotto di queste $k+1$ forme lineari viene uguale ad una forma differenziale di grado $k+1$ nelle k variabili $t_1, \dots, t_k$, cioè ad una forma identicamente nulla, in quanto ogni suo termine contiene almeno due differenziali uguali.

Supponiamo, viceversa, che sopra una M_h reale, algebroide, di Σ, di dimensione h, con $2k \geq h > k$, sieno soddisfatte le condizioni (1), per ogni combinazione $j_1, \dots, j_{k+1}$ degli indici $1, 2, \dots, n$; ma che non sieno su M_h tutti nulli i differenziali di grado k [1]. Sia per esempio $d(x_1, x_2, \dots, x_k) \neq 0$.

Il modo più spedito per conseguire la inversione desiderata, evitando ogni calcolo, è di applicare come segue il passaggio dal reale al complesso.

Per ipotesi su M_h è $d(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = 0$. Fissiamo un punto generico $P(x_1^0, \dots, x_n^0)$ della varietà. Sieno $t_1, \dots, t_h$ coordinate *reali* interne del punto mobile su M_h attorno a P, sicchè le componenti reali delle x del punto mobile sien funzioni olomorfe delle t. Viene allora:

$$d(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{k+1}} \frac{\partial(x_1, \dots, x_{k+1})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_{k+1}})} d(t_{j_1}, \dots, t_{j_{k+1}}) = 0,$$

donde [2]:

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_{k+1})}{\partial(t_{j_1}, \dots, t_{j_{k+1}})} = 0. \tag{2}$$

Dunque sopra M_h la matrice jacobiana delle $x_1, \dots, x_{k+1}$ rispetto alle $t_1, \dots, t_h$ è nulla:

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_{k+1})}{\partial(t_1, \dots, t_h)} = 0. \tag{3}$$

---

(1) In caso contrario il ragionamento si riferirebbe a tutti i differenziali di un conveniente grado, minore di $k+1$.

(2) Una forma differenziale come quella scritta è identicamente nulla rispetto alle t, variabili indipendenti, allora e soltanto allora che sian nulli i coefficienti dei suoi differenziali, come si riconosce subito annullando tutti i differenziali meno uno, col porre uguali a costanti $h-k-1$ delle t.

Estendiamo i valori delle t al campo complesso, distendendoli sopra uno spazio euclideo Σ' a $2h$ dimensioni. Le formule esprimenti $x_1, \dots, x_n$ come funzioni olomorfe di $t_1, \dots, t_h$, nell'intorno di P, interpretate nel campo complesso $(t_1, \dots, t_h)$, dànno luogo ad un intorno complesso M del punto $P^0(t_1^0, \dots, t_h^0)$, che nello spazio Σ' corrisponde al punto scelto P di M_h. L'intorno $\overline{M}$ estende dal reale al complesso l'intorno di P in M_h.

Ora ogni minore d'ordine $k+1$ della matrice funzionale (3) è funzione olomorfa delle t, definita in M_h epperò anche in $\overline{M}$; e siccome tale funzione si annulla nell'intorno reale di P^0, si annulla identicamente anche nell'intorno complesso [1]. Pertanto le $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ sono legate da una relazione analitica come funzioni olomorfe delle t complesse, epperò anche come funzioni olomorfe delle t reali [2]. Si ha cioè fra le dette variabili, sulla M_h, una relazione del tipo:

$$f_1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = 0,$$

con f_1 simbolo di funzione olomorfa (complessa) in un intorno di P. In questa relazione x_{k+1} non può mancare, perchè altrimenti le $x_1, x_2, \dots, x_k$ sarebbero funzionalmente dipendenti su M_h e — pel ragionamento esposto nel dimostrare la proposizione diretta — ne seguirebbe $d(x_1, \dots, x_k) = 0$, contro l'ipotesi.

Similmente si trovano fra le x le relazioni:

$$f_2(x_1, \dots, x_k, x_{k+3}) = 0, \quad \dots, \quad f_{n-k}(x_1, \dots, x_k, x_n) = 0.$$

Le equazioni, manifestamente tra loro indipendenti:

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_{n-k} = 0 \tag{4}$$

rappresentano una varietà caratteristica di dimensione $2k$, che contiene M_h o coincide con M_h, se $h = 2k$. Si conclude che:

La condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebroide reale $M_h (k < h \leq 2k < 2n)$ sia contenuta in almeno una varietà caratteristica di dimensione $2k$ (o sia addirittura una M_{2k} caratteristica, per $h = 2k$) è che sovr'essa si annullino tutti i differenziali di grado $k+1$ nelle $x_1, \dots, x_n$.

Inoltre:

Sopra una varietà caratteristica M_{2k} è diverso da zero uno almeno dei differenziali di grado k.

---

(1) Cfr. SEVERI, *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche* (« Atti della R. Acc. Nazionale dei Lincei », 1931); pag. 798.

(2) Naturalmente la relazione di cui si parla sarà una relazione analitica *complessa*, che si considera nel campo reale di variabilità delle t.

Invero tutti i differenziali di grado k non possono essere nulli su M_{2k}, perchè la più ampia varietà su cui si annullano tutti i differenziali di grado k ha la dimensione $2k-2$.

Osservazione. — Dalla dimostrazione precedente scende altresì che *se sopra una* M_h *non è nullo il differenziale* $d(x_1, \ldots, x_k)$, *affinchè* M_h *sia contenuta in una* M_{2k} *caratteristica occorre e basta che sieno su essa nulli gli* $n-k$ *differenziali di grado* $k+1$,

$$d(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}), \ldots, \quad d(x_1, \ldots, x_k, x_n).$$

Cioè dall'annullarsi di questi segue l'annullarsi su M_h di tutti gli altri differenziali dello stesso grado.

Le varietà pseudocaratteristiche e la loro caratterizzazione differenziale.

3. Sia ora M_h una varietà algebroide reale, con $1 \leq h \leq n-1$. Poichè nell'intorno di un punto generico di M_h ([1]) le x (cioè le loro componenti reali) sono funzioni olomorfe di h variabili reali, i differenziali $dx_1, \ldots, dx_n$ si riducono sopra M_h ad n forme lineari dei differenziali di h variabili; onde su M_h si annulla ogni differenziale di grado $h+1 \leq n$ nelle $x_1, \ldots, x_n$. Siccome poi su M_h non son identicamente nulli tutti i singoli differenziali $dx_1, \ldots, dx_n$, potremo p. es. supporre che si annullino su M_h tutti i differenziali di grado $k+1$ $(1 \leq k \leq h)$, ma non tutti quelli di grado minore.

Se $k < h$, dovrà ad ogni modo essere $2k \geq h$, poichè $2k$ è la dimensione della più ampia varietà in cui s'annullano tutti i differenziali di grado $k+1$. Ma allora, pel n. prec., la M_h deve stare almeno in una varietà caratteristica di dimensione $2k$.

Resta da esaminare il caso $h = k$, cioè il caso (generale, per $h < n$) in cui su M_h si annullano i differenziali di grado $h+1$, ma non tutti quelli di grado h. In tal caso il procedimento del n. 2 non è applicabile, ma vale lo stesso la conclusione che M_h sta in una M_{2h} caratteristica. Anche questa è un'immediata conseguenza dell'estensione dal reale al complesso.

Invero, a prescinder dall'ipotesi che $h+1$ sia il grado minimo dei differenziali tutti nulli su M_h, si riconosce subito, nel modo seguente, che per M_h passa una M_{2h} caratteristica.

L'intorno di un punto generico P di M_h, attesa l'analiticità di questa varietà, sarà dato da una rappresentazione parametrica del tipo:

$$(5) \qquad y_l = \varphi_l(t_1, \ldots, t_h), \quad z_l = \psi_l(t_1, \ldots, t_h) \qquad (l = 1, \ldots, n),$$

([1]) S'intende che, quando diciamo così, alludiamo sempre ad una falda conveniente di M_h.

ove le φ, ψ son funzioni reali olomorfe dei parametri t, attorno ai valori t^0, cui corrisponde P.

Le (5) posson anche scriversi:

$$x_l = \theta_l(t_1, \dots, t_h) \qquad (\theta_l = \varphi_l + i\psi_l\,;\; l = 1, \dots, n). \tag{6}$$

in cui le θ_l son funzioni complesse olomorfe nell'intorno reale di t^0 e quindi anche nell' intorno complesso dello stesso punto. Poichè $h < n$, al variare delle t nell'intorno complesso di t^0, le (6) rappresentano una varietà caratteristica di dimensione $2h$ o minore, secondo che i parametri t sono o no essenziali, anche nel campo complesso, come lo sono nella rappresentazione (5) del campo reale. Non si può affermare che la dimensione della varietà caratteristica (6) sia proprio $2h$, perchè dal fatto che è diversa da zero, nell' intorno reale di t^0, la matrice funzionale delle y, z rispetto alle t, non segue necessariamente che sia diversa da zero, nell'intorno complesso di t^0, la matrice funzionale delle x rispetto alle t.

Comunque sia, anche se la dimensione della varietà caratteristica (6) risulta minore di $2h$, esistono infinite varietà caratteristiche di dimensione $2h$, che contengono la (6) e quindi M_h.

4. Come abbiamo detto nella introduzione, una varietà algebroide reale, contenuta in qualche varietà caratteristica, si chiamerà *pseudocaratteristica*. Per una varietà siffatta si può considerare la specie. Diremo che una M_h è una *varietà pseudocaratteristica di specie k*, quando la meno ampia varietà caratteristica che la contiene, ha la dimensione $2k$. Questa varietà caratteristica è *individuata* da M_h, perchè se M_h giacesse in due distinte M_{2k} la intersezione di queste risulterebbe una varietà caratteristica di dimensione $\leq 2k-2$, una cui parte irriducibile (costituente a sè una varietà caratteristica irriducibile) conterrebbe M_h.

Se una M_h è pseudocaratteristica di specie k, su essa non s' annullano tutti i differenziali di grado k, perchè in caso contrario M_h giacerebbe in una varietà caratteristica di dimensione $2k-2$ (n. 2).

Colle locuzioni introdotte, i risultati dei nn. 2, 3 dànno luogo agli enunciati:

a) Una varietà algebroide reale M_h, di dimensione $h < n$, è sempre pseudocaratteristica di specie h. Soltanto varietà M_h particolari posson essere pseudocaratteristiche di specie minore.

b) Condizione necessaria e sufficiente perchè una M_h algebroide, reale, di dimensione arbitraria $h < 2n-2$, sia pseudocaratteristica di specie k, è che k sia il massimo ordine dei differenziali sovr' essa non tutti nulli. La specie k è sempre minore di h, tranne il caso in cui M_h sia una varietà generica di dimensione $h < n$, nel qual caso è $k = h$.

Che la specie k sia minore di h è evidente quando $h > n$ $(2h > 2n > 2k)$. Quando $h \leq n$ abbiam già detto in $a)$ che k non può superare h.

OSSERVAZIONE. — Talora una varietà non pseudocaratteristica si considererà, per semplificare qualche enunciato, come una *varietà pseudocaratteristica di specie* n, in quanto $2n$ è la minima dimensione della varietà caratteristica che la contiene e che è, in tal caso, lo spazio ambiente Σ.

Caratterizzazione geometrica delle varietà caratteristiche e pseudocaratteristiche.

5. Le condizioni differenziali (1), peculiari delle M_{2k} caratteristiche, si traducono, come s'è visto al n. 2, nelle equazioni differenziali del 1° ordine:

$$\frac{\partial(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k+1}})}{\partial(t_{l_1}, t_{l_2}, \ldots, t_{l_{k+1}})} = 0, \tag{7}$$

ove $j_1, j_2, \ldots, j_{k+1}$ è una combinazione semplice degli indici $1, 2, \ldots, n$ ed $l_1, l_2, \ldots, l_{k+1}$ una combinazione semplice degl' indici $1, 2, \ldots, 2k$. Anzi, se è su M_{2k} $d(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0$, le (7) riduconsi soltanto alle

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_k, x_s)}{\partial(t_{l_1}, t_{l_2}, \ldots, t_{l_{k+1}})} = 0 \qquad (s = k + 1, \ldots, n)\ (^1). \tag{8}$$

Dalle (8) deducesi un' importante conseguenza geometrica, derivante dal solo fatto che trattasi di equazioni del 1° ordine. Invero, questo fatto geometricamente significa che le condizioni cui soddisfanno le varietà caratteristiche M_{2k} sono relative soltanto ai loro S_{2k} tangenti (nei punti generici, cioè semplici delle varietà stesse) e non a spazi aventi contatti più intimi. E poichè le equazioni medesime caratterizzano nello stesso tempo gli S_{2k} caratteristici (per i quali esse riduconsi a equazioni in termini finiti) si può senz' altro enunciare che:

La condizione necessaria e sufficiente perchè una M_{2k} sia caratteristica è che i suoi S_{2k} tangenti siano caratteristici.

Si perviene così rapidamente alla proprietà già stabilita da B. SEGRE (per $n = 2$) e da PLANAS (per n qualunque).

---

(1) Come ho ricordato, relazioni equivalenti alle (8), ma molto più complicate, sono già state scritte da PLANAS. Nel caso $n = 3$, quando trattasi di superficie o di varietà a quattro dimensioni caratteristiche, l' A. ha trasformato le proprie relazioni in altre più compatte, che si riducono subito a quelle del testo.

6. Similmente, la condizione perchè una M_h sia pseudocaratteristica di specie k, essendo espressa dall' annullarsi su M_h dei soliti differenziali, si riduce ad una condizione relativa soltanto agli S_h tangenti ad M_h: essa esprime che ciascuno di questi S_h tangenti soddisfa per suo conto alla condizione richiesta per M_h.

Ora per un S_h di Σ le condizioni differenziali di cui s' allude (riducentisi subito ad equazioni in termini finiti) esprimono che lo S_h sta in un S_{2k} caratteristico (e non in uno spazio caratteristico di dimensione inferiore). Cioè la M_{2k} caratteristica di dimensione minima contenente S_h è necessariamente uno spazio lineare. La cosa riesce evidente, quando si pensi che le predette condizioni si riducono ad equazioni lineari fra i coefficienti della rappresentazione parametrica di S_h. Comunque, si può anche osservare che lo S_{2k} caratteristico tangente ad una M_{2k} contenente S_h, in un punto generico di S_h, deve contenere tutto S_h; epperò, se la M_{2k} fosse distinta da quel suo spazio tangente, lo S_h sarebbe contenuto in una varietà caratteristica di dimensione $< 2k$, intersezione di questo S_{2k} e della M_{2k}.

Inoltre, la condizione necessaria e sufficiente perchè S_h sia pseudocaratteristico di specie $k < h$, è che lo S_h s' appoggi agli S_{n-1} ciclici secondo due spazi coniugati S'_{h-k-1}, S''_{h-k-1}, ossia che contenga un sistema ∞^{2k-h} di spazi caratteristici $S_{2(k-h)}$, tale che per ogni punto di S_h ne passi uno solo; è questo il sistema degli $S_{2(k-h)}$ caratteristici che dai singoli punti reali di S_h proiettano i predetti spazi all' infinito S'_{h-k-1}, S''_{h-k-1}.

Suppongasi invero, che un S_h soddisfaccia alla predetta condizione. Allora proiettando i due spazi ciclici S'_{n-1}, S''_{n-1} dallo S_{h-1} all' infinito di S_h sopra uno spazio S_{2n-h-1}, duale di S_{h-1} entro all' iperpiano all' infinito, avremo in S_{2n-h-1} due spazi indipendenti coniugati $S'_{n+k-h-1}$, $S''_{n+k-h-1}$, che si taglian dunque in un S_{2k-h-1} reale, proiettato da S_{h-1} secondo l' unico S_{2k-1} all' infinito passante per lo S_{h-1} e incontrante secondo spazi a $k-1$ dimensioni i due spazi ciclici. Lo S_{2k} che proietta il detto S_{2k-1} da un punto fissato in S_h, è un S_{2k} caratteristico contenente S_h; ed è l' unico, perchè se no S_h starebbe in un S_{2k-2} caratteristico e le traccie S'_{k-2}, S''_{k-2} di questo sugli spazi ciclici, incontrerebbero S_h secondo spazi S_{h-k}. Pertanto S_h si appoggerebbe ai ciclici in spazi ad $h-k$ e non ad $h-k-1$ dimensioni.

È dunque vero che S_h *è pseudocaratteristico di specie* k $(< h)$ *allora e allora soltanto che appoggiasi agli spazi ciclici secondo spazi ad* $h-k-1$ *dimensioni. Nel caso* $h=k$ (che può verificarsi soltanto quando $h < n$; n. 4, *b*)) *non si richiede alcuna condizione perchè un* S_h *sia caratteristico di specie* k.

Tenuto conto del principio del n. 4, si può in conclusione enunciare:

c) *Condizione necessaria e sufficiente perchè una* M_h *sia pseudocaratte-*

ristica di specie $< k$ $(k < h)$ *è che in ogni suo punto vi sia qualche* $S_{2(h-k)}$ *tangente caratteristico. La specie è esattamente* k *allora e soltanto allora che questo* $S_{2(h-k)}$ *sia unico. Una varietà generica di dimensione* $h \geq n$ *non è mai pseudocaratteristica.*

d) Per una M_h *pseudocaratteristica di dimensione* $h < 2n - 2$ *e di specie* k *passa una sola varietà caratteristica di dimensione* $2k$. *Quando* $h < n$, *essendo ogni* M_h *pseudocaratteristica, per essa passa sempre qualche varietà caratteristica di dimensione* $2h$, *che è unica, se la* M_h *è generica (cioè se un* S_h *tangente ad* M_h *non contiene spazi caratteristici).*

Per es. per una linea algebroide, reale, di Σ passa sempre una ed una sola superficie caratteristica; per una superficie algebroide, reale, che non sia caratteristica, passa sempre una ed una sola varietà caratteristica a 4 dimensioni; per una varietà algebroide, reale, a 3 dimensioni passa generalmente una sola varietà caratteristica a 6 dimensioni; o, in particolare, una sola varietà caratteristica a 4 dimensioni; ecc.

7. Una volta dimostrato che le varietà M_{2k} caratteristiche son tutti e soli gl'integrali ∞^{2k} del sistema (1), il teorema relativo alla determinazione di tali varietà mediante varietà algebroidi (pseudocaratteristiche) per cui esse debban passare, può pure derivarsi dai teoremi esistenziali di un sistema di equazioni ai differenziali di grado qualunque (1).

Però, a parte la maggior difficoltà concettuale, la stessa risoluzione del problema perderebbe in semplicità, essenzialmente pel fatto che si dovrebbe in primo luogo dimostrare che ogni S_{k+l} di Σ $(l = 1, ..., k)$, pseudocaratteristico di specie k, cioè che contenga uno ed un solo S_{2l} caratteristico, è un *elemento integrale regolare* (2) del sistema (1): cosa che dai nostri teoremi risulta a posteriori. Tuttavia ammessa questa proprietà, si deduce subito dai teoremi esistenziali cui s'allude (3), che:

Per una varietà algebroide reale M_{k+l} $(l = 1, ..., k)$ *i cui* S_{k+l} *tangenti sieno pseudocaratteristici di specie* k, *passano infinite varietà* M_{k+l+1} *dipendenti da* $k - l$ *funzioni arbitrarie, i cui* S_{k+l+1} *tangenti sono pseudocaratteristici della stessa specie.*

Invero, se nel punto (semplice) generico di M_{k+l} c'è un solo S_{2l} caratteristico tangente, sicchè lo S_{k+l} tangente a M_{k+l} in quel punto è contenuto in un solo S_{2k} caratteristico, per S_{k+l} passano ∞^{k-l} S_{k+l+1} contenuti in questo S_{2k}.

(1) Cfr. Kaehler, loc. cit., pagg. 26, 32. Ved. pure a pag. 61 della citata Monografia, dove il teorema d'esistenza è applicato a dimostrare, nel caso $n = 2$, che per ogni linea algebroide reale di S_4 passa una sola superficie caratteristica.

(2) Cfr. Kaehler, loc. cit., pag. 23.

(3) Ibidem, pag. 32.

Risalendo per valori crescenti di l, da $l=1$ a $l=k$, si conclude che per M_{k+l} $(l=1,\dots,k-1)$ passa una varietà caratteristica M_{2k}, la quale è necessariamente unica (n. 4), e si prova così di nuovo che la condizione perchè una M_{k+l} sia pseudocaratteristica di specie k' è che nel generico suo punto vi sia uno ed un solo S_{2l} caratteristico tangente (n. 6, teor. *c*)).

CAPITOLO II.

Le funzioni analitiche nei campi pluricomplessi.

8. Le proprietà finora esposte, in quanto sostanzialmente si riducono a teoremi di esistenza e di unicità per certi sistemi di equazioni a derivate parziali del 1° ordine, considerati nel campo analitico reale delle $2n$ variabili y, z, sono suscettibili di estensione al campo complesso. Si tratta di riguardare le y, z come variabili complesse, passando (secondo la locuzione di C. SEGRE) dai *punti complessi* dello $\mathfrak{S}_n$ $(x_1, x_2,\dots,x_n)$ ai *punti bicomplessi* dello stesso spazio (cioè ai punti complessi di Σ).

Sia Σ' lo spazio euclideo reale a $4n$ dimensioni, rappresentativo dei punti complessi di Σ. Una varietà algebroide reale V_h di Σ ha per imagine una varietà caratteristica di dimensione $2h$ di Σ'. In particolare le varietà caratteristiche M_{2k} di Σ hanno per imagini varietà caratteristiche particolari, di dimensione $4k$, di Σ': le chiameremo *varietà bicaratteristiche* nei confronti collo $\mathfrak{S}_n$ originario $(x_1, x_2,\dots, x_n)$.

È facile, come vedremo, di riconoscere in che cosa consiste la particolarità delle varietà bicaratteristiche, fra le varietà caratteristiche di Σ'. Nella rappresentazione su Σ' dello spazio Σ, concepito come spazio metrico-proiettivo complesso, ai punti all'infinito di Σ corrispondono le ∞^{4n-2} rette reali di una congruenza ellittica K', avente per spazi direttori (complesso-coniugati) S'_{2n-1}, S''_{2n-1}, gli spazi ciclici di Σ'. In particolare, ai punti di ciascuno degli spazi ciclici di Σ corrispondono in Σ' le ∞^{2n-2} rette congiungenti le coppie di punti complesso-coniugati di due spazi imaginari coniugati ad $n-1$ dimensioni appartenenti a S'_{2n-1}, S''_{2n-1}. Si hanno così due spazi σ'_{n-1}, τ'_{n-1}, corrispondenti in S'_{2n-1} agli spazi ciclici S'_{n-1}, S''_{n-1} di Σ; e due spazi σ''_{n-1}, τ''_{n-1}, coniugati ai precedenti, corrispondenti in S''_{2n-1} ai medesimi spazi ciclici di Σ. Le coppie σ'_{n-1}, σ''_{n-1}; τ'_{n-1}, τ''_{n-1}, si chiameranno le coppie di *spazi ipociclici* di Σ'.

Gli spazi ciclici son luoghi di punti ciclici dei piani caratteristici di Σ'; gli spazi ipociclici son luoghi di punti ciclici di quei particolari piani caratteristici di Σ', che rappresentano le *rette di lunghezza nulla* di Σ, ciascuna delle quali è appoggiata ad uno degli spazi ciclici S'_{n-1}, S''_{n-1} (¹). Di tali rette ve ne sono in Σ due distinti sistemi ∞^{3n-2}: i punti ciclici dei piani caratteristici di Σ' imagini delle rette di uno di questi sistemi dànno la coppia d'ipociclici σ', σ''; i punti ciclici dei piani caratteristici imagini delle rette dell'altro sistema dànno la coppia τ', τ''.

Chiameremo brevemente *rette nulle* le rette di ciascuno dei detti sistemi ∞^{3n-2} e *spazi lineari nulli* gli spazi lineari riempiti da rette nulle del medesimo sistema.

Un S_{4k} caratteristico di Σ', che sia imagine di un S_{2k} caratteristico di Σ, interseca S'_{2n-1}, S''_{2n-1} secondo due spazi indipendenti, imaginari coniugati S'_{2k-1}, S''_{2k-1}, ciascun dei quali, alla sua volta, incontra gl'ipociclici del proprio spazio ciclico secondo due spazi indipendenti a $k-1$ dimensioni. Dalla condizione cui soddisfa lo S_{4k} considerato, in relazione ai quattro ipociclici, consegue evidentemente la condizione cui esso soddisfa in relazione ai due spazi ciclici. Pertanto:

Un S_{4k} (reale) bicaratteristico è caratterizzato dal fatto d'incontrare ciascuno dei quattro spazi ipociclici secondo spazi (imaginari, a coppie coniugati) S_{k-1}.

9. Determinati gli S_{4k} bicaratteristici di Σ' si presenta il problema di determinare le varietà bicaratteristiche eppoi le pseudo-bicaratteristiche, nelle prime contenute.

Sia M'_{4k} una varietà algebroide, reale, di Σ', imagine di una varietà caratteristica M_{2k} di Σ. Poichè su M_{2k} si annullano i differenziali di grado $k+1$ nelle variabili $x_1, \dots, x_n$, concepite come complesse, su M'_{4k} si annulleranno i differenziali stessi, ove $x_1, \dots, x_n$ si considerino come variabili bicomplesse (²).

Per dimostrar la proprietà reciproca, si rappresenti l'intorno d'un generico punto P' di M'_{4k} col porre le sue $4n$ coordinate reali uguali a funzioni olomorfe reali di $4k$ parametri $t_1, \dots\ t_{4k}$. Allora su M'_{4k} le $x_1, \dots, x_n$ risulteranno funzioni olomorfe complesse di $t_1, \dots, t_{4k}$ e, per le argomentazioni analoghe a quelle del n. 2, su M'_{4k} si annullerà la matrice jacobiana:

$$\frac{\partial(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{k+1}})}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_{4k})} = 0,$$

(¹) Queste rette son (particolari) rette di lunghezza nulla di Σ, perchè S'_{n-1}, S''_{n-1} appartengono all'assoluto, come spazi generatori della stessa schiera.

(²) Questa è una facile conseguenza del teorema locale di esistenza delle funzioni olomorfe di più variabili bicomplesse dato da SCORZA-DRAGONI a pag. 621 delle « Memorie della R. Accademia d' Italia », 1934, nel lavoro: *Sulle funzioni olomorfe di una variabile bicomplessa.*

con $j_1, j_2, \ldots, j_{k+1}$ combinazione semplice, comunque scelta, di $k+1$ degl'indici $1, \ldots, n$. Siccome i minori d'ordine $k+1$ estratti da questa matrice son funzioni olomorfe dei parametri t, nulle nell'intorno reale del punto $(t^0_1, \ldots, t^0_{4k})$, cui corrisponde P', esse risultano nulle nell'intorno bicomplesso di $(t^0_1, \ldots, t^0_{4k})$ (¹). Dal che segue (come nel n. 2) che le funzioni $x_1, \ldots, x_n$ dei parametri t soddisfanno su M'_{4k} ad $n-k$ legami indipendenti e quindi M'_{4k} è bicaratteristica. Pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebroide reale M'_{4k} sia bicaratteristica, è che su essa si annullino tutti i differenziali di grado $k+1$ delle variabili bicomplesse $x_1, \ldots, x_n$.

Il fatto che su M'_{4k} si annullino anche i differenziali di grado $2k+1$ delle variabili y_l, z_l, cioè che M'_{4k} sia caratteristica in Σ', consegue, com'è naturale, dalla condizione precedente.

Sono ormai ovvie le dimostrazioni delle proprietà seguenti, che estendono alle varietà bicaratteristiche le proprietà delle varietà caratteristiche:

a) Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà sia bicaratteristica è che i suoi spazi tangenti sieno bicaratteristici.

b) Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebroide reale V'_h $(h > k)$ sia pseudo-bicaratteristica di specie k (²), *è che k sia il massimo grado dei differenziali delle variabili bicomplesse, non tutti nulli su V'_h; ossia che nel punto generico di V'_h vi sia un solo $S_{4(h-k)}$ tangente bicaratteristico (o, ciò che è lo stesso, lo S'_h tangente in quel punto sia contenuto in un solo S_{4k} bicaratteristico).*

c) Una varietà algebroide reale V'_h di dimensione $h < n$ è sempre pseudo-bicaratteristica, in generale di specie h. La sua specie può esser minore di h, soltanto quando in ogni suo punto vi sia qualche spazio bicaratteristico tangente di dimensione $< 4h$.

Questa proprietà si dimostra estendendo il ragionamento del n. 3, tenuto conto del passaggio dal reale al bicomplesso.

d) Per una varietà algebroide V'_h pseudo-bicaratteristica di dimensione $h < 4n-4$ e di specie k passa una sola varietà bicaratteristica M'_{4k}. In particolare, quando $h < n$ per una generica M'_h passa una sola varietà bicaratteristica M'_{4h}.

Il teorema *d)* deriva dall'osservare che l'intersezione di due varietà bicaratteristiche è una varietà bicaratteristica.

(¹) Cfr. SCORZA-DRAGONI, loc. cit, pag. 624.

(²) Cioè appartenga ad una M'_{4k} bicaratteristica, ma non ad una varietà bicaratteristica di dimensione minore, cosicchè la M'_{4k} bicaratteristica che la contiene sia individuata.

10. Dedichiamo ora qualche attenzione ai rapporti tra varietà caratteristiche di Σ' e varietà bicaratteristiche.

Il comportamento delle une rispetto alle altre è già fissato dai teoremi dei nn. 4, 6, allorchè la data varietà caratteristica M'_{2h} di Σ' è imagine di una varietà algebroide reale M_h di Σ, perchè le varietà bicaratteristiche per M'_{2h} non son che le imagini delle varietà caratteristiche di Σ passanti per M_h.

Diverso è il caso quando M'_{2h} è imagine di una varietà algebroide complessa di Σ. Perchè esista una varietà bicaratteristica M'_{4k} passante per M'_{2h} occorre e basta che nel punto generico P' di M'_{2h} vi sia un S_{4k} bicaratteristico tangente. Suppongasi, per semplicità, $h < n$.

Chiamiamo π lo S_{2h} tangente in P' a M'_{2h}. Poichè M'_{2h} è caratteristica in Σ', lo spazio π appoggiasi secondo due spazi ad $h-1$ dimensioni, complesso-coniugati, ρ', ρ'', agli spazi ciclici S'_{2n-1}, S''_{2n-1}. Essendo $h < n$, qualora M'_{2h} sia generica, gli spazi ρ', ρ'' non incontrano gli spazi ipociclici. Inoltre per ρ' passa un solo S'_{2h-1}, ε', appoggiato lungo un S_{h-1} a ciascuno degl' ipociclici σ'_{n-1}, τ'_{n-1}: come si riconosce proiettando σ', τ' da ρ' (che è poi un S_{h-1} generico di S'_{2n-1}) sopra uno spazio S_{2n-1-h}, duale di ρ' entro S'_{2n-1}. Similmente per ρ'' passa un solo S_{2h-1}, ε'', appoggiato lungo un S_{h-1} a σ''_{n-1}, τ''_{n-1}. I due spazi ε', ε'', complesso-coniugati, son congiunti da un S_{4h-1} reale, contenente lo S_{2h-1} all'infinito di π. Infine lo S_{4h-1} così ottenuto è proiettato da P' secondo un S_{4h}, tangente a M'_{2h} in P' e bicaratteristico, perchè incontra ciascuno degl' ipociclici secondo uno spazio ad $h-1$ dimensioni. La conclusione è dunque che per una generica M'_{2h} caratteristica di Σ' ($h < n$), provenga essa da una varietà algebroide reale o da una varietà algebroide complessa di Σ, passa sempre una ed una sola M'_{4h} bicaratteristica. Cioè per una generica M_h algebroide, reale o complessa, di Σ ($h < n$) passa sempre una ed una sola M_{2h} caratteristica: il che estende alle varietà algebroidi complesse il teorema già dimostrato per le varietà algebroidi reali (n. 3).

Eccezioni a questo teorema posson presentarsi soltanto quando non sia più univocamente determinato lo S_{4h-1} all'infinito, di cui sopra; cioè quando per lo spazio ρ' passino infiniti spazi S_{2h-1}, come ε', appoggiati a σ'_{n-1}, τ'_{n-1} secondo spazi S_{h-1} e quindi per ρ'' infiniti spazi S_{2h-1}, come ε'' (e complesso-coniugati degli ε'), appoggiati a σ'', τ'' secondo spazi S_{h-1}. Or è facile riconoscere che quest' eventualità può presentarsi soltanto quando ρ' è appoggiato ad uno determinato degl' ipociclici σ'_{n-1}, τ'_{n-1} (sempre il medesimo, per ragione di continuità, mentre P' muovesi su M'_{2h}) e quindi ρ'' allo ipociclico coniugato.

Invero, se per ρ' passassero infiniti S_{2h-1} come ε' e tuttavia ρ' non incontrasse σ'_{n-1} nè τ'_{n-1}, proiettando questi spazi entro S'_{2n-1} da ρ', sopra un generico S_{2n-1-h}, avremmo ivi due spazi $\bar{\sigma}'_{n-1}$, $\bar{\tau}'_{n-1}$, che dovrebbero tagliarsi secondo uno spazio di dimensione maggiore della normale, che è $h-1$; ed allora essi sarebbero congiunti non già dallo S_{2n-1-h}, ma da uno spazio $S_{2n-1-h-\mu}$ $(\mu > 0)$ ivi contenuto. Questo spazio, proiettato da ρ', fornirebbe un $S_{2n-1-\mu}$ congiungente σ'_{n-1}, τ'_{n-1}, mentre σ'_{n-1}, τ'_{n-1} hanno per spazio congiungente (minimo) proprio lo S'_{2n-1} ciclico.

Effettivamente, quando ρ' appoggiasi a σ'_{n-1} lungo un S_l $(l \geq 0)$ (e ρ'' a σ''_{n-1} secondo un altro S_l), le proiezioni di σ'_{n-1}, τ'_{n-1} sopra un S_{2n-1-h} sghembo con ρ', entro S'_{2n-1}, sono due spazi $\bar{\sigma}'_{n-2-l}$, $\bar{\tau}'_{n-1}$, che s'intersecano lungo un S_{h-2-l}, il quale vien proiettato da S_l secondo un S_{h-1}, ω', contenuto in σ'_{n-1}, e da ρ' secondo un S_{2h-l-2} passante per ω' ed incontrante τ'_{n-1} secondo un S_{h-2-l}. Lo spazio S_{2h-1}, che congiunge il detto S_{2h-l-2} con un S_l generico di τ'_{n-1}, incontra σ'_{n-1}, τ'_{n-1} secondo spazi S_{h-1}. Vi sono dunque in tal caso infiniti S_{2h-1} passanti per ρ' e appoggiati a σ'_{n-1}, τ'_{n-1} lungo spazi S_{h-1}.

La particolarità, che stiamo esaminando, di M_{2h}, consiste in ciò: tutti gli S_{2h} tangenti a M'_{2h} si appoggiano secondo spazi S_l $(l \geq 0)$ ad uno spazio ipociclico σ'_{n-1} e quindi anche al coniugato σ''_{n-1}. Gli S_h tangenti alla M_h algebroide di Σ, di cui M'_{2h} è l'imagine in Σ', si appoggiano in conseguenza secondo spazi S'_l allo spazio ciclico S'_{n-1} di Σ, cui corrispondono in Σ' gli spazi ipociclici σ'_{n-1}, σ''_{n-1}.

Se la M_h è reale i suoi S_h tangenti non posson appoggiarsi lungo spazi S'_l allo spazio ciclico S'_{n-1}, senza appoggiarsi in conseguenza lungo spazi S''_l all'altro spazio ciclico S''_{n-1}. In tal caso lo S_h tangente generico a M_h sta in un (solo) $S_{2(h-l-1)}$ e quindi M_h è pseudocaratteristica di specie $h-l-1$.

Quando invece M_h è complessa, in ogni suo punto vi è un S_{l+1} riempito da rette tangenti nulle. Diremo perciò che M_h è una *varietà algebroide nulla*. In tal caso non esiste generalmente alcun S_{2h} caratteristico (reale) che contenga lo S_h tangente a M_h nel suo punto generico. Invero, un S_h imaginario, per $h < n$, non possiede in generale alcun punto reale, essendo sghembo col proprio coniugato; mentre se un S_h imaginario è contenuto in un S_{2h} caratteristico (che contiene necessariamente anche il coniugato di S_h), esiste nello S_h dato almeno un punto reale. Concludendo:

Per una M_h $(h < n)$ algebroide, reale o complessa, dello spazio Σ, passa generalmente una sola M_{2h} caratteristica. Fanno eccezione soltanto i due casi seguenti:

1) *La M_h è reale e pseudocaratteristica di specie $< h$ (allora vi sono infinite M_{2h} caratteristiche che la contengono).*

2) *La M_h è una varietà nulla (allora non esiste, generalmente, alcuna M_{2h} caratteristica passante per M_h).*

Per $h=1$, una M_1 eccezionale ha per tangenti rette nulle (epperò è essa pure una linea di lunghezza nulla). Proiettando da un S_{n-2} generico di S'_{n-1} sopra un S_{n+1} di Σ, si ottiene ivi una linea algebroide, proiezione di M_1, con tutte le sue tangenti passanti per un punto; cioè una retta. Onde M_1 sta in un S_n nullo (passante per S'_{n-1}).

Siccome questo S_n (al finito e nullo) non può possedere che un punto reale P (perchè se vi fosse una retta reale comune a quello S_n e al suo coniugato. il punto all'infinito di questa dovrebbe esser comune ad S'_{n-1} e ad S''_{n-1}); e d'altronde non può accadere che tutte le tangenti ad M_1 passino pel punto reale P, senza che M_1 riducasi ad una retta nulla per P, si giunge al seguente teorema più preciso:

Per una linea algebroide, reale o complessa, ma non nulla, di Σ, passa sempre una ed una sola superficie caratteristica. Per una linea nulla non può passare alcuna superficie caratteristica, salvo il caso che si tratti di una retta isotropa d'un piano caratteristico (¹).

Non ci dilunghiamo sul caso di una M_h complessa di dimensione $h \geq n$, perchè non interverrebbero argomentazioni essenzialmente nuove.

11. Si può proseguire a considerare i punti complessi di Σ', che son punti bicomplessi per Σ e *punti quadricomplessi* per S_n. Nel nuovo spazio rappresentativo Σ'', di dimensione $8n$, si avranno due S_{4n-1} ciclici, quattro S_{2n-1} *ipociclici di rango* 1 e otto S_{n-1} *ipociclici di rango* 2. La trattazione delle *varietà quadricaratteristiche* di S_n assume un aspetto geometrico semplice, analogo a quello sopra svolto per le varietà bicaratteristiche, mercè la caratterizzazione degli spazi lineari quadricaratteristici in relazione agl'ipociclici di rango 2; ecc. ecc.

(¹) Per $n=2$ questo risultato fu ottenuto analiticamente da B. SEGRE poggiando sul teorema d'esistenza di CAUCHY-KOWALESKI. Ved. la Memoria, *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse* (« Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma », 1931): n. 6. La denominazione di *piani nulli* ($n=2$) è di questo Autore. Egli però chiama « bicaratteristiche » le linee eccezionali che noi abbiamo chiamate « nulle ». La denominazione di bicaratteristiche sembra invece più appropriata per le varietà (dello spazio Σ') che abbiamo denotato con questo nome, in quanto esse sono, in un certo senso, due volte caratteristiche.

CAPITOLO III.

Le varietà planoidi.

Iperplanoidi e loro intersezioni.

12. Chiamiamo *planoide* ogni varietà (algebroide) dello spazio reale Σ (rappresentativo dello $\mathfrak{S}_n$ complesso), trasformata pseudoconforme di uno spazio lineare di Σ (¹).

Per $n = 2$ è classico (POINCARÉ-ALMER) che ogni iperplanoide (trasformato pseudoconforme di un S_3 dello spazio a quattro dimensioni Σ) è luogo (analitico, reale) di ∞^1 superficie caratteristiche, e viceversa (²).

Per n qualunque vale il teorema analogo (³):

Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebroide, reale, V_{2n-1} di Σ, sia un iperplanoide (cioè che si riduca a un iperpiano con un' opportuna trasformazione pseudoconforme), è che sia luogo (analitico, reale) di ∞^1 varietà caratteristiche M_{2n-2}.

Eccone una dimostrazione, che è forse d'irriducibile semplicità. La necessità della condizione è ovvia, perchè ogni iperpiano di Σ contiene un fascio di S_{2n-2} caratteristici passanti per le traccie dell'iperpiano stesso sugli spazi ciclici. Occupiamoci dunque della sufficienza. Sia $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ un generico punto (semplice) di V_{2n-1} non appartenente all'eventuale inviluppo del sistema ∞^1 di M_{2n-2} caratteristiche, esistenti sulla varietà. Siccome in $\bar{P}$ la V_{2n-1} ammette un solo S_{2n-2} caratteristico tangente, nell'intorno di una M_{2n-2} caratteristica, che passi per P, cadrà una sola M_{2n-2} àttraversante l'intorno di $\bar{P}$; perciò, limitando la variabilità di un punto all'intorno di $\bar{P}$ in V_{2n-1} e la variabilità di una M_{2n-2}, entro il sistema ∞^1 considerato, all'intorno della prescelta M_{2n-2} uscente da $\bar{P}$, la M_{2n-2} variabile sarà rappresentata da una equazione del tipo:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n; t) = 0,$$

(¹) Nella tesi citata, PLANAS chiama planoide ogni varietà luogo di una infinità analitica (reale) di varietà caratteristiche e si limita a dedurre in qualche caso particolare la trasformabilità della varietà in uno spazio lineare, coll'aggiunta implicita di ipotesi (risolubilità di certi sistemi di equazioni rispetto a parametri, ecc.), che non sembrano dettate dalla natura della questione e che tuttavia debbon accettarsi per render plausibile il procedimento. La definizione del testo è più generale ed evita queste difficoltà.

(²) Dimostrazioni semplicissime di questo teorema trovansi in B. SEGRE e in una mia Memoria. Ved. la mia Monografia citata, *Risultati, vedute e problemi*, ecc.; pag. 27.

(³) Contenuto sostanzialmente nella Memoria di WIRTINGER citata più tardi (n. 24), ed in modo esplicito nella tesi più volte citata, con dimostrazione però meno semplice di quella esposta nel testo.

ove t è il parametro reale indiduante la M_{2n-2} attorno al valore $\bar{t}$, cui corrisponde la M_{2n-2} per $\bar{P}$; la φ è olomorfa rispetto ai suoi $n+1$ argomenti attorno a $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t)$, e infine dalla $\varphi = 0$ si deve poter trarre t come funzione uniforme olomorfa di $x_1, \dots, x_n$, attorno ad $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$; cioè:

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = t, \tag{9}$$

ove ψ assume il valore t per $x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_n = \bar{x}_n$. Passando alle variabili y, z, dalla (9) segue:

$$\psi_1(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) = t, \quad \psi_2(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n) = 0,$$

in cui

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2.$$

Pertanto l'equazione di V_{2n-1} attorno a $\bar{P}$, si ottiene annullando il coefficiente dell'imaginario in ψ, cioè una funzione n-armonica ψ_2.

Scegliamo ora $n-1$ funzioni di $x_1, \dots, x_n$ olomorfe attorno a $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, e siano $\theta^{(1)}(x_1, \dots, x_n), \dots, \theta^{(n-1)}(x_1, \dots, x_n)$, tali che in $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ sia

$$\frac{\partial(\psi, \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n-1)})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Allora le:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \psi(x_1, \dots, x_n) \\ \xi_{h+1} &= \theta^{(h)}(x_1, \dots, x_n) \qquad (h = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

rappresentano in Σ una trasformazione pseudoconforme, invertibile nell'intorno di P, la quale muta V_{2n-1} nell'iperpiano $\zeta_1 = 0$, ove $\xi_1 = \eta_1 + i\zeta_1$.

13. Sulla varietà V_{2n-1}, di cui al prec. n., è costante ogni funzione n-armonica $\psi_2 - k$ (ove k sia una costante arbitraria) e più generalmente ogni funzione olomorfa reale del tipo $\Phi\ (\psi_2)$, ove Φ sia simbolo d' un' arbitraria funzione analitica reale di ψ_2, olomorfa attorno a $\psi_2 = 0$.

Viceversa, se ψ_2 è una qualunque funzione n-armonica, l' equazione $\psi_2 = 0$ o $\Phi(\psi_2) = 0$, ove Φ sia una funzione reale olomorfa attorno a $\psi_2 = 0$ e nulla ivi, rappresenta un iperplanoide V_{2n-1}. Invero, la funzione $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, ove ψ_1 sia la funzione n-armonica (definita a meno d' una costante reale additiva) associata a ψ_2, assume sopra V_{2n-1} soltanto valori reali e l'equazione $\psi = t$ (t parametro reale dell'intorno di $\bar{t}$, essendo $\bar{t}$ il valore che ψ assume in un prescelto punto generico $\bar{P}$ di V_{2n-1}) definisce pertanto sulla varietà un fascio analitico reale di M_{2n-2} caratteristiche. Questo, per ciò che concerne l' equazione $\psi_2 = 0$.

Nei riguardi dell' equazione $\Phi(\psi_2) = 0$, basta osservare che, nell' intorno di $\psi_2 = 0$, essa equivale all' equazione $\psi_2 = 0$, perchè la funzione $\Phi(\psi_2)$, nulla e olomorfa in $\psi_2 = 0$, non si annulla per altri valori di ψ_2 in un intorno abbastanza piccolo di $\psi_2 = 0$. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebroide reale V_{2n-1}, sia un iperplanoide, è ch' essa sia di livello costante per una funzione n–armonica (o per una funzione olomorfa di una funzione n–armonica).

La forma più generale dell' equazione di una tal varietà è $\Phi(\psi_2) = 0$, ove i simboli Φ, ψ_2 hanno il significato sopra detto.

Gl' iperplanoidi sono stati considerati come varietà di livello delle funzioni n–armoniche da WIRTINGER e da me [1].

La traduzione analitica del fatto che l' equazione d' un iperplanoide è del tipo $\Phi(\psi_2) = 0$, conduce al sistema a derivate parziali del 2° ordine, che è stato scritto per $n = 2$ da E. E. LEVI e, per n qualunque, da WIRTINGER e da PLANAS [2].

L' essere questo sistema di 2° ordine ne rende più difficile l' interpretazione geometrica, in relazione a spazi tangenti alla varietà.

14. Consideriamo ora le varietà intersezioni di più iperplanoidi e cerchiamo di determinarne la struttura. Osserviamo in primo luogo che *ogni varietà planoide ∞^{2n-r} è intersezione (semplice) di r iperplanoidi indipendenti,* che corrispondono ad r iperpiani indipendenti passanti per uno spazio lineare S_{2n-r}, di cui la data varietà sia la trasformata pseudoconforme.

Viceversa, siano dati r iperplanoidi ed un punto P ad essi comune, semplice per gli r iperplanoidi e tale che in P i loro iperpiani tangenti siano linearmente indipendenti: allora l' intersezione è una V_{2n-r} algebroide, i cui punti, in P e nell' intorno, son semplici [3], perchè gl' iperplanoidi considerati risultano funzionalmente indipendente nell' intorno di P.

Esaminiamo anzitutto il caso $r = 2$. La V_{2n-2} intersezione dei due iperplanoidi non è in generale caratteristica. Basta pensare ad esempio alla trasformata pseudoconforme di un S_{2n-2} non caratteristico, concepito come intersezione di due iperpiani. Però la V_{2n-2} contiene in ogni caso ∞^2 M_{2n-4}

(1) Ved. la mia citata Memoria, *Contributi, ecc.*; n. 20.

(2) Il sistema di PLANAS è più semplice di quello scritto prima da WIRTINGER e contiene un minor numero di equazioni.

(3) Dal teorema d'esistenza delle funzioni analitiche implicite segue senz'altro che due varietà analitiche di dimensioni h, h', appartenenti ad una varietà analitica di dimensione $s < h + h'$ ed aventi un punto comune P, semplice per entrambe e per la varietà ambiente, si tagliano nell'intorno di P in una varietà analitica di dimensione $\geq h + h' - s$ passante per P. L'intersezione è certo di dimensione $h + h' - s$ — e non maggiore — se gli spazi tangenti in P alle due varietà son indipendenti entro lo spazio tangente in P alla varietà ambiente. La varietà intersezione ha in tal caso, in P e nell'intorno, punti semplici. Questi teoremi valgono tanto nel campo reale, che in quello complesso.

caratteristiche, intersezioni delle coppie di M_{2n-2} caratteristiche tracciate sui due iperplanoidi. Effettivamente le due M_{2n-2} uscenti da un punto generico P di V_{2n-2} e tracciate sui due iperplanoidi, si tagliano in una M_{2n-4} caratteristica, perchè i loro S_{2n-2} tangenti in P sono indipendenti, avendo in comune l'unico S_{2n-4} caratteristico contenuto nello S_{2n-2} tangente a V_{2n-2} in P. E questo S_{2n-2} contiene un solo S_{2n-4} caratteristico, perchè altrimenti sarebbe esso medesimo caratteristico; epperò sarebbe caratteristica anche V_{2n-2} (n. 5).

La V_{2n-2} comune ai due dati iperplanoidi può, in particolare, esser caratteristica. Basta pensare alla trasformata pseudoconforme di un S_{2n-2} caratteristico, considerato come intersezione di due iperpiani per esso.

Orbene, le trasformate pseudoconformi degli S_{2n-2} caratteristici e non caratteristici di Σ forniscono tutte le possibili V_{2n-2} intersezioni di coppie d' iperplanoidi. Sia, invero, dapprima una V_{2n-2} non caratteristica, intersezione di due iperplanoidi, che non si tocchino nell' intorno di un loro punto comune, e $\psi_2 = 0$, $\theta_2 = 0$ designino le equazioni dei due iperplanoidi. Si può addirittura supporre che ψ_2, θ_2 sieno due funzioni n-armoniche (n. 13).

Ciò posto, costruiamo due funzioni n-armoniche ψ_1, θ_1 rispettivamente associate a ψ_2, θ_2 e consideriamo le funzioni olomorfe delle variabili complesse $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2, \quad \theta = \theta_1 + i\theta_2.$$

Allora le M_{2n-2} caratteristiche appartenenti ai due dati iperplanoidi, son fornite dalle equazioni (n. 12):

$$\psi = t, \quad \theta = \tau, \tag{10}$$

t, τ essendo parametri reali, variabili negl' intorni di due certi valori, che possiamo assumere uguali a zero. Dico che ψ, θ son funzionalmente indipendenti.

Se fosse infatti $\psi = F(\theta)$, con F funzione olomorfa di θ, nell' intorno di $\theta = 0$, sopra la M_{2n-2} caratteristica $\theta = \tau$ risulterebbe ψ uguale ad una costante k (funzione di τ), cosicchè le ∞^1 M_{2n-2} caratteristiche tracciate sul secondo iperplanoide apparterrebbero alla congruenza ∞^2 di M_{2n-2} caratteristiche definite dall' equazione:

$$\psi = \lambda, \tag{11}$$

ove λ è un' arbitraria costante complessa, variabile nello intorno di $\lambda = 0$.

Ma allora la M_{2n-2} della congruenza (11) passante per una generica intersezione P degl' iperplanoidi (10) sarebbe comune a questi; epperò l' intersezione dei due iperplanoidi risulterebbe caratteristica, contro il supposto.

Ora, se alle funzioni ψ, θ funzionalmente indipendenti, si aggiungono altre $n-2$ funzioni olomorfe di $x_1, \dots, x_n$, e siano $f_1, \dots, f_{n-2}$, tali che

$\frac{\partial(\psi, \theta, f_1, \dots, f_{n-2})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$ nell'intorno di un punto P, prefissato genericamente in V_{2n-2}, la trasformazione pseudoconforme:

$$\xi_1 = \psi, \quad \xi_2 = \theta, \quad \xi_3 = f_1, \dots, \quad \xi_n = f_{n-2},$$

muta V_{2n-2} nello S_{2n-2} $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ (ove $\xi_h = \eta_h + i\zeta_h$ per $h = 1, 2, \dots, n$).

Quando invece V_{2n-2} è caratteristica, è possibile rappresentarla con una equazione del tipo $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (f funzione olomorfa di $x_1, \dots, x_n$) e associando ad f altre $n-1$ funzioni olomorfe di $x_1, \dots, x_n$, in guisa da avere n funzioni a determinante jacobiano non nullo in un punto (semplice) di V_{2n-2}, si costruisce una trasformazione pseudoconforme, che muta la data V_{2n-2} in un S_{2n-2} caratteristico.

15. Passiamo ad $r = 3$. Se due dei tre iperplanoidi si incontrano secondo una W_{2n-2} luogo di ∞^2 M_{2n-4} caratteristiche e P è un generico punto della V_{2n-3} comune ai tre iperplanoidi, la M_{2n-4} passante per P e la M_{2n-2} caratteristica uscente dallo stesso punto e tracciata sul terzo iperplanoide, si segano generalmente secondo una M_{2n-6} caratteristica e si ha così V_{2n-3} come luogo di ∞^3 M_{2n-6} caratteristiche. Questo accade di certo quando lo S_{2n-3} tangente a V_{2n-3} in P contiene un solo S_{2n-6} caratteristico passante per P, perchè allora gli spazi caratteristici tangenti in P alla M_{2n-4} e alla M_{2n-2} sopra considerate, sono indipendenti.

Ma può invece avvenire che lo S_{2n-3} tangente a V_{2n-3} contenga un fascio di S_{2n-4} caratteristici, e questo perchè S_{2n-3} incontra gli spazi ciclici secondo spazi ad $n-3$, invece che ad $n-4$ dimensioni, come normalmente avviene. Allora lo S_{2n-3} è pseudocaratteristico di specie $n-1$ (n. 6) e lo stesso avviene di V_{2n-3} (n. 6). La V_{2n-3} risulta così intersezione (semplice) della M_{2n-2} caratteristica, che la contiene, e di uno dei dati iperplanoidi. Invero, non tutti i tre iperplanoidi dati posson toccare lo S_{2n-2} caratteristico su cui giace lo S_{2n-3} tangente a V_{2n-3} nel punto generico P, perchè altrimenti i loro iperpiani tangenti ivi sarebbero dipendenti.

Nel caso in esame non è più possibile ricercare le eventuali varietà caratteristiche contenute in V_{2n-3} per intersezione delle M_{2n-4} di W_{2n-2} e delle M_{2n-2} del terzo iperplanoide, perchè in ogni punto P di V_{2n-3} le M_{2n-4}, M_{2n-2} da intersecarsi si toccano, sicchè non si può applicare il teorema di esistenza delle funzioni implicite.

Vedremo però tra breve che nel caso eccezionale considerato la V_{2n-3} è particolare (fra le varietà pseudocaratteristiche di dimensione $2n-3$), nel senso che contiene un sistema ∞^1 di M_{2n-4} caratteristiche.

Per esaurire l'analisi dei possibili casi d'intersezione dei tre iperplanoidi, ci rimane da esaminare l'ipotesi che due degli iperplanoidi si incontrino (senza toccarsi) secondo una W_{2n-2} caratteristica. Questo caso si riconduce subito al precedente caso eccezionale. Infatti, la V_{2n-3} comune ai 3 iperplanoidi non è che l'intersezione (semplice) di una W_{2n-2} caratteristica col terzo iperplanoide. Effettivamente non può darsi che nel punto generico P di V_{2n-3} il terzo iperplanoide tocchi lo S_{2n-2} caratteristico tangente ivi a V_{2n-3}, perchè gl'iperpiani tangenti in P ai tre iperplanoidi risulterebbero dipendenti.

La distinzione essenziale fra il caso generale ed i due casi eccezionali (ridotti in sostanza ad uno solo) consiste in ciò: che nel caso generale fra gl'iperplanoidi passanti per V_{2n-3} [1] non ce ne sono mai due relativi a funzioni n-armoniche coniugate; mentre nel caso eccezionale una tal coppia esiste.

16. Proviamo che tanto nel caso in cui la V_{2n-3} considerata nel n. prec. non è pseudocaratteristica, quanto nel caso in cui lo è, essa è trasformata pseudoconforme di un S_{2n-3}.

Esaminiamo dapprima il caso generale. Siano $\varphi_2 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\theta_2 = 0$ le equazioni dei dati iperplanoidi, ove φ_2, ψ_2, θ_2 sono tre funzioni n-armoniche, delle quali φ_1, ψ_1, θ_1 siano tre funzioni n-armoniche rispettivamente coniugate. Le M_{2n-2} caratteristiche tracciate sui tre iperplanoidi son rappresentate dalle equazioni:

$$\varphi = s, \quad \psi = t, \quad \theta = \tau \qquad (\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2,\ \psi = \psi_1 + i\psi_2,\ \theta = \theta_1 + i\theta_2)$$

con s, t, τ parametri reali, variabili negl'intorni di tre valori, che possiamo assumere uguali a zero. Proviamo che le funzioni olomorfe φ, ψ, θ sono indipendenti. Invero, nel caso opposto, sarebbe per es. $\varphi = F(\psi, \theta)$, con F funzione olomorfa di ψ, θ nell'intorno di $\psi = 0$, $\theta = 0$. Ma allora φ sarebbe costante su ciascuna della $\infty^2 M_{2n-4}$ caratteristiche comuni alle M_{2n-2} caratteristiche del secondo e terzo iperplanoide; cioè queste M_{2n-4} apparterebbero al sistema ∞^2 delle M_{2n-2} dell'ambiente rappresentato dall'equazione $\varphi = \lambda$, λ essendo un parametro complesso variabile attorno a $\lambda = 0$. Pertanto la M_{2n-4} passante pel punto generico P di V_{2n-3} e tracciata sulla W_{2n-2} intersezione del secondo e del terzo iperplanoide, sarebbe contenuta nella M_{2n-2} passante per P, del primo iperplanoide; e quindi apparterebbe a V_{2n-3}. Sicchè V_{2n-3} risulterebbe luogo di ∞^1 M_{2n-4} caratteristiche ed il suo S_{2n-3} tangente in P conterrebbe un S_{2n-4} caratteristico (e sarebbe esso medesimo, perciò, luogo di ∞^1 S_{2n-4} caratteristici). Insomma la V_{2n-3} sarebbe pseudocaratteristica, contro il supposto.

[1] E ve ne sono infiniti, perchè ad es. una combinazione lineare a coefficienti costanti delle equazioni di due iperplanoidi passanti per V_{2n-3}, è l'equazione di un altro iperplanoide passante per la varietà.

Dunque le φ, ψ, θ son funzionalmente indipendenti; e associando ad esse altre $n-3$ funzioni olomorfe di $x_1, \ldots, x_n$, in guisa che le n funzioni sieno indipendenti, mercè queste si definisce una trasformazione pseudoconforme, che muta V_{2n-3} in un S_{2n-3}, non pseudocaratteristico, come V_{2n-3}.

Passiamo al caso in cui V_{2n-3} è pseudocaratteristica, cioè intersezione (semplice) di una M_{2n-2} caratteristica e di un ipeplanoide. Sia $f=0$ l'equazione della M_{2n-2} caratteristica (f funzione olomorfa di $x_1, x_2, \ldots, x_n$) e $\varphi = t$ (φ funzione olomorfa di $x_1, \ldots, x_n$; t parametro reale, attorno a $t=0$) l'equazione della generica M_{2n-2} tracciata nell'iperplanoide. Dico anzitutto che f, φ son indipendenti. Invero, in caso contrario, f sarebbe costante lungo ogni M_{2n-2} dell'iperplanoide, epperò $f=0$ sarebbe addirittura tracciata sull'iperplanoide, mentre abbiam supposto che $f=0$ e l'iperplanoide s'intersechino soltanto lungo V_{2n-3}. La considerazione consueta prova allora la possibilità di portare, con una trasformazione pseudoconforme, la $f=0$ in un S_{2n-2} caratteristico e il dato iperplanoide in un S_{2n-1} non passante per questo; sicchè V_{2n-3} si muta nello S_{2n-3} comune a quell' S_{2n-2} caratteristico e a questo iperpiano: cioè in un iperpiano dello spazio caratteristico S_{2n-2}, assunto come ambiente. Ne segue altresì che V_{2n-3} è luogo di ∞^1 M_{2n-4} caratteristiche, trasformate dagli S_{2n-4} caratteristici contenuti nell'iperpiano S_{2n-3} di S_{2n-2}.

17. L'analisi svolta nei num. 14, 15, 16 si può ormai ovviamente estendere e (tenuto conto, per ciò che concerne le V_{2n-r} di dimensione $\leq n$ dei teoremi *c*), *d*) del n. 6) conduce al seguente teorema generale:

La varietà algebroide V_{2n-r} intersezione (semplice) di r iperplanoidi indipendenti, è sempre una varietà planoide. Se $r \geq n$, non esiste in generale su V_{2n-r} alcuna varietà caratteristica; invece, se $r < n$, la V_{2n-r} è generalmente luogo di ∞^r $M_{2(n-r)}$ caratteristiche e non di varietà caratteristiche di dimensione superiore. Essa non è allora pseudocaratteristica. In casi particolari, la V_{2n-r} può esser luogo di ∞^{r-2l} $M_{2(n-r+l)}$ caratteristiche ($l>0$) e non di varietà caratteristiche di dimensione superiore: allora essa è pseudocaratteristica di specie $n-l$ ed è definibile come intersezione (semplice) della $M_{2(n-l)}$ che la contiene e di $r-2l$ iperplanoidi in posizione generica fra loro e rispetto alla $M_{2(n-l)}$.

Le varietà algebroidi di dimensione $\leq n$.

18. Per invertire il teorema precedente e giunger così a caratterizzare le varietà planoidi o mediante il valore della loro dimensione, se è $\leq n$, o mediante l'esistenza di sistemi continui di varietà caratteristiche su esse tracciate, se la dimensione è $> n$, sbarazziamo prima il terreno dalle V_{2n-r}

algebroidi di dimensione $\leq n$ $(r \geq n)$. Vedremo appunto che ogni tal varietà è planoide. All'uopo cominciamo a dimostrare che:

Date due varietà algebroidi reali V_n, V'_n (¹), *che non siano pseudocaratteristiche* [n. 6, teor. *c*)], *e fissata comunque una corrispondenza biunivoca (biolomorfa) tra V_n, V'_n, esiste una ed una sola trasformazione pseudoconforme dell'ambiente in sè, che muta V_n in V'_n subordinando la data corrispondenza* (²).

Questo lemma si ottiene in modo semplicissimo considerando il prodotto topologico dello spazio ambiente Σ con una propria copia Σ'. Tale prodotto è uno spazio $\bar{\Sigma}$ a $4n$ dimensioni, che può assumersi come imagine reale del prodotto topologico dello spazio proiettivo complesso $(x_1, \ldots, x_n)$ con una propria copia $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Trattandosi di proprietà in piccolo, possiamo addirittura supporre che $\bar{\Sigma}$ sia lo spazio euclideo reale su cui si distendono al solito modo le $2n$ variabili complesse $(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)$.

La trasformazione analitica fissata tra V_n, V'_n è rappresentata in $\bar{\Sigma}$ da una varietà $\bar{V}_n$ algebroide (a punto generico semplice). Una trasformazione pseudoconforme di Σ in sè, è rappresentata da n equazione analitiche nelle variabili $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$, cioè da una M_{2n} caratteristica di $\bar{\Sigma}$. Viceversa, l'intorno di un punto generico di una M_{2n} caratteristica di $\bar{\Sigma}$ rappresenta una corrispondenza biunivoca (biolomorfa) fra gl'intorni di due certi punti $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$ di Σ, perchè attorno ad un punto generico di quella varietà la n equazione analitiche in $(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)$ di M_{2n} si posson risolvere tanto rispetto alle x che rispetto alle x'.

Ricordando ora [n. 6, teor. *d*)] che per $\bar{V}_n$ passa almeno una M_{2n} caratteristica di $\bar{\Sigma}$, si conclude che esiste almeno una trasformazione pseudoconforme di Σ in sè, subordinante la corrispondenza data tra V_n, V'_n.

Per provare che questa trasformazione è unica, bisogna dimostrare che per $\bar{V}_n$ passa una sola M_{2n} caratteristica, cioè (n. 6) che lo S_n tangente a $\bar{V}_n$ nel punto generico $\bar{P}$ non contiene spazi caratteristici.

Invero. se il detto S_n tangente contiene un $S_{2(n-k)}$ caratteristico passante per $\bar{P}$ $\left(\frac{n}{2} \leq k < n\right)$, cioè se $\bar{V}_n$ è pseudocaratteristica di specie k entro lo spazio $\bar{\Sigma}$, agli elementi lineari di $\bar{V}_n$ uscenti da $\bar{P}$ e giacenti nello $S_{2(n-k)}$ corrispondono coppie di elementi lineari di V_n, V'_n omologhi nella corrispon-

(¹) Si sottintende sempre: a punti generici semplici!

(²) Per $n = 2$ il teorema è stato dato da B. Segre, *Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse* (« Rendiconti del Seminario Matematico di Roma », 1931-IX); n. 24. La dimostrazione di B. Segre è però molto meno semplice, nè sembra facilmente generalizzabile.

denza analitica data fra V_n, V'_n; e siccome un elemento lineare di V_n uscente da $\bar{P}$ e variabile nello $S_{2(n-k)}$ caratteristico è funzione olomorfa di $n-k-1$ parametri complessi [1], così ciascuno degli elementi lineari omologhi di V_n, V'_n, rappresentati dall'elemento considerato di $\bar{V}_n$, risulta funzione olomorfa di $n-k-1$ parametri complessi. Perciò lo spazio tangente a V_n nel suo punto generico (e a V'_n nel punto corrispondente) contiene un $S_{2(n-k)}$ caratteristico, contrariamente all'ipotesi che V_n, V'_n non siano pseudocaratteristiche.

Nel corso del ragionamento si è di più provato che qualora $\bar{V}_n$ sia pseudocaratteristica di specie k, anche V_n, V'_n sono pseudocaratteristiche di specie $\leq k$. Per provare che V_n, V'_n son esattamente di specie k, basta osservare in primo luogo ch'esse son necessariamente della stessa specie (come trasformata pseudoconformi l'una dell'altra) e che se la loro specie fosse $k' < k$, sicchè nel generico punto di P di V_n esistesse un $S_{2(n-k')}$ tangente caratteristico, le coppie di elementi lineari omologhi di V_n, V'_n, uscenti dai punti omologhi P, P', sarebbero funzioni olomorfe di $n-k'-1$ parametri complessi: onde $\bar{V}_n$ sarebbe toccata nel punto $\bar{P}$, imagine della coppia P, P' da un $S_{2(n-k')}$ caratteristico e risulterebbe di specie $k' < k$.

La conclusione è che, se sono pseudocaratteristiche, $\bar{V}_n$, V_n, V'_n lo sono della stessa specie.

Analoga conclusione si consegue similmente, se si prendono in considerazione due varietà algebroidi V_h, V'_h di Σ, di dimensione $h < n$, che siano pseudocaratteristiche di specie k ($k \leq h$, essendo generalmente $k = h$, n. 6). La varietà $\bar{V}_h$, che rappresenta in $\bar{\Sigma}$ una qualsiasi corrispondenza biunivoca biolomorfa prescelta fra V_h, V'_h, risulta essa pure di specie k.

Se $k \leq h \leq n$ è la specie comune di $\bar{V}_h$, V_h, V'_h, per ciascuna delle tre varietà passa una sola varietà caratteristica di dimensione $2k$: rispettivamente $\bar{M}_{2k}$, M_{2k}, M'_{2k}. La varietà M_{2k} è imagine di una corrispondenza pseudoconforme fra la M_{2k}, M'_{2k}, subordinante la data corrispondenza fra V_h, V'_h. E siccome per una data $\bar{M}_{2k}$ di $\bar{\Sigma}$, se $k < n$, passano infinite M_{2n} caratteristiche, si perviene al teorema:

Date due varietà algebroidi V_h, V'_h ($h \leq n$) pseudocaratteristiche della stessa specie $k \leq h$, e fissata comunque una corrispondenza biunivoca (biolomorfa) tra V_h, V'_h, esiste una ed una sola trasformazione pseudoconforme fra le due varietà caratteristiche, ben determinate, M_{2k}, M'_{2k}, contenenti rispettivamente V_h, V'_h; ed essa subordina tra V_h, V'_h la fissata corrispondenza.

[1] Diciamo brevemente così per esprimere che la posizione dell'elemento considerato entro la varietà degli elementi lineari di origine P di $\bar{\Sigma}$ può determinarsi mediante $4n-1$ funzioni olomorfe di $n-k-1$ parametri complessi.

Se $k < n$, esistono poi infinite trasformazioni pseudoconformi dello spazio ambiente in sè, che subordinano la corrispondenza data fra V_h e V'_h ed esse dipendono dalla scelta, entro uno spazio complesso a $2n$ dimensioni, di una varietà analitica ad n dimensioni passante per una varietà analitica data a k dimensioni.

OSSERVAZIONE. — I precedenti teoremi esprimono naturalmente proprietà *in piccolo.* Perciò se una delle due varietà V_h, V'_h, di specie $k \leq h \leq n$ (il caso $k = n$ essendo quello in cui le due varietà non sono pseudocaratteristiche) possiede un luogo di punti particolari, che pur conservandosi semplici, hanno i relativi S_h tangenti di specie più bassa dello S_h tangente generico, questo luogo andrà escluso dalla varietà. Insomma i teoremi si riferiscono agl'intorni di due punti P, P' di V_h, V'_h dove si mantenga invariata le specie degli S_h tangenti rispetto alla specie k degli S_h tangenti in P, P'. Allora soltanto si può assegnare ad arbitrio la corrispondenza biunivoca biolomorfa tra i detti intorni, senza che venga a mancare qualche trasformazione pseudoconforme dell'ambiente, che la subordini.

19. Dai teoremi del n. prec. deducesi il risultato preannunciato e cioè: *Una varietà algebroide di dimensione $\leq n$ è sempre planoide.*

Sia, invero, V_h $(h \leq n)$ una varietà algebroide pseudocaratteristica di specie k $(k \leq h \leq n)$ ed S_h sia uno spazio lineare generico, pseudocaratteristico della stessa specie. Intendiamo di contemplare anche il caso di una varietà pseudocaratteristica di specie n, la quale corrisponde ad $h = k = n$.

Fissata una corrispondenza biunivoca biolomorfa fra V_h ed S_h [1], esiste una (se $h = k = n$) od esistono infinite trasformazioni pseudoconformi che mutano V_h in S_h, subordinando la prescelta corrispondenza. Pertanto V_h è planoide.

OSSERVAZIONE. — Dal teorema *a)* del n. 4 consegue che *per $h < n$ una V_h algebroide è non soltanto planoide, ma pseudocaratteristica; mentre per $h = n$ essa è planoide, ma non generalmente pseudocaratteristica.*

20. Conseguono altresì immediatamente dai teoremi del n. 18 i corollari: *Una varietà algebroide generica (cioè non pseudocaratteristica) di dimensione n, non possiede alcuna trasformazione pseudoconforme in sè (diversa dall'identità).*

Una varietà algebroide di dimensione $h < n$, che sia pseudocaratteristica

---

[1] Ogni corrispondenza siffatta si ottiene scegliendo una qualsiasi varietà analitica reale ∞^h entro il prodotto topologico $V_h \times S_h$. La corrispondenza risulta biunivoca fra gl'intorni di due punti corrispondenti generici di V_h e di S_h. Del resto la corrispondenza richiesta è senz'altro fornita dalla rappresentazione parametrica dell'intorno di un punto generico di V_h.

di specie k $(\leq h)$ possiede un gruppo continuo infinito di trasformazioni pseudoconformi in sè, la cui generica trasformazione dipende dalla scelta, entro uno spazio complesso a $2n$ dimensioni, di una varietà analitica ad n dimensioni passante per una varietà analitica a k dimensioni.

Le varietà planoidi di dimensione $> n$.

21. Innanzi d'invertire il teor. n. 17, per ciò che concerne le varietà algebroidi di dimensione $> n$, occorre che ci procuriamo due lemmi. Il primo è un *principio d'identità per le funzioni analitiche di n variabili* (¹):

Se una funzione analitica f di n variabili complesse, olomorfa in un punto O, si annulla in un insieme di punti avente un'accumulazione in O e se le tangenti in O a quest'insieme (²) *non appartengon tutte ad un medesimo S_{2n-2} caratteristico o la f è identicamente nulla oppure le sue derivate prime son tutte nulle in O.*

Infatti, se f non è identicamente nulla, l'equazione $f=0$ rappresenta una M_{2n-2} caratteristica, che ha in O un punto algebroide. Nelle nostre ipotesi questo punto non può esser semplice per M_{2n-2}, perchè se no le tangenti all'insieme in cui f si annulla dovrebbero appartenere allo S_{2n-2} caratteristico tangente in O alla M_{2n-2}. Dunque O è un punto multiplo (algebrico) per la M_{2n-2} ed ivi si annullano almeno le derivate prime di f.

Ne segue che *f è identicamente nulla, se le tangenti in O all'insieme non appartengono tutte ad un medesimo cono algebrico (irriducibile o riducibile) a $2n-2$ dimensioni.* P. es. se O è un punto di Σ imagine di un punto reale, f (com'è del resto noto) è identicamente nulla in O, se è nulla per tutti i gruppi di valori reali delle variabili (situati attorno ad O).

Un altro corollario, utile pei nostri scopi immediati, è il seguente:

Una funzione f olomorfa è identicamente nulla, se si annulla sopra una varietà V ad n dimensioni, a punti semplici, il cui S_n tangente generico non contenga alcun piano caratteristico.

(¹) Ved. per $n=2$ un principio del genere nella mia citata Monografia, *Risultati, vedute, ecc.*; n. 36. Altri Autori si sono occupati della questione da punti di vista diversi da quello del testo (MONTEL, CARATHÉODORY, BOULIGAND, B. LEVI, VIOLA). Ved. p. es. la Nota di B. LEVI nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1934; n. 1, pag. 1, dove si trovano citati i lavori degli Autori sopra nominati. (In una postilla a tale Nota uscita nel successivo fascicolo del medesimo « Bollettino », p. 104, è citata altresì la mia anteriore osservazione per le funzioni di due variabili). La Nota del VIOLA (che pure mostra di ignorare la mia osservazione) è posteriore anche a quella del LEVI e trovasi nei « Comptes rendus »; 19 febbraio 1934.

(²) Ved. la mia Nota, *Su alcune questioni di topologia infinitesimale,* « Annales de la Société polonaise de Mathématique », t. IX, 1930, p. 97.

Infatti, non esistendo nel punto generico di V alcun piano tangente caratteristico, V non è pseudocaratteristica [n. 6, c]. Pertanto f non può annullarsi semplicemente lungo V; ossia o f è identicamente nulla in un intorno $2n$-dimensionale di V oppure V è luogo di punti multipli algebroidi della M_{2n-2} caratteristica $f=0$.

La molteplicità di V per M_{2n-2} sarà in tal caso un certo intero finito $s>1$, sicchè nel punto generico di V si annulleranno tutte le derivate di f fino all'ordine $s-1$, ma non tutte quelle di ordine s. Ora questo è assurdo, perchè una derivata d'ordine $s-1$, la quale possegga una prima derivata (cioè una derivata d'ordine s di f) non nulla nel punto generico di V, uguagliata a zero, fornisce un'effettiva M_{2n-2} caratteristica passante semplicemente per V; cosicchè V risulterebbe pseudocaratteristica, contro il supposto. Resta dunque possibile la sola alternativa che f sia identicamente nulla.

Il corollario ultimamente dimostrato si estende alle funzioni analitiche considerate sopra le varietà caratteristiche e dà luogo alla seguente proposizione, che è il secondo lemma, cui sopra alludevamo:

Una funzione olomorfa di k variabili complesse, sopra una varietà caratteristica M_{2k}, è ivi identicamente nulla, se s'annulla sopra una varietà Z_k (di M_{2k}) a punto generico semplice e nel quale non esista alcun piano caratteristico a questa tangente.

Questo teorema riducesi al precedente corollario con una trasformazione pseudoconforme di Σ, che muti M_{2k} in un S_{2k} caratteristico. Invero, nel punto generico P' della varietà Z'_k trasformata di Z_k non può esistere alcun piano caratteristico tangente, perchè, in caso contrario, un siffatto piano si muterebbe in una superficie caratteristica tangente a Z_k nel punto P omologo di P' e il piano tangente a questa in P sarebbe un piano caratteristico tangente a Z_k in P.

22. Stabilito il principio d'identità sotto la forma che a noi conviene, cominciamo ad esaminare una V_{2n-r} $(r<n)$, che non sia pseudocaratteristica e che contenga un sistema analitico, reale, H, di ∞^r varietà caratteristiche $M_{2(n-r)}$. Si può supporre, senza restrizione (cfr. col n. 12), che il sistema H sia d'indice 1; che cioè per un punto generico P (semplice) di V_{2n-r} passi una sola $M_{2(n-r)}$. All'uopo basta assumere P fuori dell'eventuale inviluppo di H e limitare V_{2n-r} ad un intorno conveniente di P ed H ad un intorno conveniente di una sua varietà, uscente da P. Ciò posto, proviamo che un S_n generico condotto per P sullo S_{2n-r} tangente ivi a V_{2n-r} non è pseudocaratteristico. Invero, se il detto S_{2n-r} s'appoggiasse ad un S_{n-1} ciclico (e quindi all'altro) secondo un S_{n-r} o secondo uno spazio di dimensione maggiore, vi sarebbe

almeno un $S_{2(n-r+1)}$ caratteristico passante per P e situato nello S_{2n-r} tangente (ciò che richiederebbe intanto $r \geq 2$) e quindi V_{2n-r} sarebbe pseudocaratteristica di specie $\leq n-1$ (n. 6). Nella nostra ipotesi si deve concludere dunque che lo S_{2n-r} tangente a V_{2n-r} nel generico P appoggiasi a un S_{n-1} ciclico secondo un S_{n-r-1}; epperò un S_n generico uscente da P e tracciato nel detto S_{2n-r} non incontra affatto gli spazi ciclici e non è pseudocaratteristico.

Condotte per P $n-r$ ipersuperficie generiche, algebroidi, queste intersecano V_{2n-r} secondo una varietà algebroide W_n, il cui S_n tangente in P non è, per quanto precede, pseudocaratteristico; inoltre W_n incontra la $M_{2(n-r)}$ di H passante per P secondo una varietà algebroide Z_{n-r}, a punto generico semplice. Lo S_{n-r} tangente in P a Z_{n-r} non contiene alcun piano caratteristico tangente, perchè altrimenti questo starebbe nello S_n tangente a W_n in P e tale S_n sarebbe pseudocaratteristico. Ne deriva (n. 21) che ogni funzione olomorfa, di $n-r$ variabili complesse, sopra $M_{2(n-r)}$, è costante su $M_{2(n-r)}$ se lo è su Z_{n-r}.

Premesso tutto ciò, si assegni su W_n una costante reale a ed una funzione olomorfa reale φ, che, senza esser costante su tutta la W_n, sia costante sopra ciascuna delle Z_{n-r} segate su W_n dalle $M_{2(n-r)}$ solcanti l'intorno di P. Poichè W_n non è pseudocaratteristica. resta individuata, nell'intorno $2n$-dimensionale di W_n entro l'ambiente Σ, una funzione olomorfa f delle variabili complesse $x_1, \dots, x_n$, che riducesi su W_n ad $a+i\varphi$ (ved. il successivo n. 24). La f subordina su V_{2n-r} una funzione, che è costante sopra ogni $M_{2(n-r)}$ perchè è costante sopra ogni Z_{n-r}. Pongasi, nell'ambiente Σ, $f = A + i\Phi$; ove A, Φ sono le due funzioni n-armoniche coniugate, che forniscono le parti, reale ed imaginaria, di f. La A subordina su V_{2n-r} una funzione analitica reale, costante su ogni $M_{2(n-r)}$. Ma siccome su ogni $M_{2(n-r)}$ è $A=a$, ove a è la medesima costante per tutte le $M_{2(n-r)}$, così su tutta la V_{2n-r} è $A=a$. D'altronde Φ non è costante sopra V_{2n-r}, in quanto riducesi ivi all'assegnata funzione non costante φ; pertanto Φ non è costante entro Σ; e quindi neppure A può esser costante in Σ, se no ogni funzione n-armonica coniugata ad A, avendo le derivate nulle, sarebbe costante. Si conclude che V_{2n-r} è di livello per la funzione n-armonica non costante A.

Mutando a, ma non φ, non muta Φ e la A s'altera per una costante addittiva. Perciò le funzioni n-armoniche A costanti su V_{2n-r} dipendono, a meno di costanti additive, ai nostri fini insignificanti, dalla sola scelta della φ. E siccome si vuole che φ sia costante lungo ogni Z_{n-r}, così possono scegliersi su W_n r e soltanto r funzioni analitiche reali funzionalmente indipendenti, da assumersi ciascuna come funzione φ: sieno $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$. In corrispondenza a tali scelte della φ si determinano le funzioni $A_1, A_2, \dots, A_r$; $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r$ individuate dalle costanti $a_1, a_2, \dots, a_r$ e da $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$. Nel generico punto

P di V_{2n-r} le $A_1, \dots, A_r$ son funzionalmente indipendenti, perchè la matrice jacobiana $\dfrac{\partial(A_1, \dots, A_r)}{\partial(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_r)}$ è ivi diversa da zero. Invero, se così non fosse, in forza delle condizioni di monogeneità sarebbe identicamente nulla attorno a P la matrice $\dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r)}{\partial(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)}$, che riducesi sopra W_n alla matrice $\dfrac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_r)}{\partial(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)}$. Le $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ non sarebbero dunque funzionalmente indipendenti.

La conclusione è che V_{2n-r} è di livello per r funzioni n-armoniche indipendenti $A_1, \dots, A_r$, ossia che è una varietà planoide, intersezione di r iperplanoidi di indipendenti.

23. Passiamo a considerare il caso di una V_{2n-r} algebroide ($r < n$), che sia pseudocaratteristica di specie $n - l$ ($l > 0$), cioè che giaccia in una (ed in una sola) $M_{2(n-l)}$ caratteristica e contenga inoltre un sistema analitico, reale ∞^{r-2l}, di varietà caratteristiche $M_{2(n-r+l)}$.

Vogliamo provare che V_{2n-r}, in conseguenza di queste proprietà, è intersezione della $M_{2(n-l)}$ caratteristica che la contiene e di $r - 2l$ iperplanoidi indipendenti fra loro e dalla $M_{2(n-l)}$.

Invero, una conveniente trasformazione pseudoconforme Ω, dell'ambiente Σ in sè, riduce la $M_{2(n-l)}$ caratteristica, che contiene V_{2n-r}, ad un $S_{2(n-l)}$ caratteristico. La V_{2n-r} diviene ivi una $\overline{V}_{2(n-l)-s}$ ($s = r - 2l < n - l$), che non è pseudocaratteristica: altrimenti essa apparterrebbe ad una varietà caratteristica di dimensione $\leq 2(n - l) - 2$, alla quale, mediante la trasformazione pseudoconforme Ω^{-1}, corrisponderebbe una varietà caratteristica di dimensione $\leq 2(n - l) - 2$, contenente la data V_{2n-r}, che sarebbe dunque pseudocaratteristica di specie $\leq n - l - 1$, contro il supposto.

Inoltre sulla $\overline{V}_{2(n-l)-s}$ di $S_{2(n-l)}$ son tracciate ∞^s $M_{2(n-l-s)}$ caratteristiche. Pertanto ad essa può applicarsi il teorema del n. 22 e si conclude che $\overline{V}_{2(n-l)-s}$ è, in $S_{2(n-l)}$, intersezione di s iperplanoidi indipendenti, che posson supporsi traccie su $S_{2(n-l)}$ di altrettanti iperplanoidi indipendenti di Σ. La trasformazione Ω^{-1} muta tali iperplanoidi in altrettanti iperplanoidi, i quali intersecano la $M_{2(n-l)}$ caratteristica originaria secondo la data V_{2n-r}. Questi ultimi iperplanoidi son indipendenti tra loro e da $M_{2(n-l)}$; cioè gli s iperplanoidi e $2l$ ipersuperficie algebroidi reali condotte genericamente per $M_{2(n-l)}$ sono, nel loro complesso, indipendenti. Si posson p. es. assumere come ipersuperficie algebroidi reali passanti per $M_{2(n-l)}$, gl'iperplanoidi, a coppie coniugati, trasformati dei $2l$ iperpiani a coppie coniugati che definiscono $S_{2(n-l)}$. Questi $2l$

iperpiani e gli s iperplanoidi che segnano su $S_{2(n-l)}$ traccie indipendenti, dànno evidentemente un gruppo di $s+2l=r$ ipersuperficie indipendenti, che s'intersecano nella $\overline{V}_{2(n-l)-s}$.

Tenuto presente il teorema del n. 17, si arriva finalmente a caratterizzare come segue le varietà intersezioni d'iperplanoidi, cioè le varietà planoidi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebroide (reale) V_{2n-r}, di dimensione $> n$, sia planoide (e quindi intersezione di r iperplanoidi indipendenti), è che sia riempita da un sistema analitico (reale) di varietà caratteristiche, aventi la dimensione $\geq 2(n-r)$.

Precisamente: Se $2(n-r+l)$ $(l\geq 0)$ è la massima dimensione delle varietà caratteristiche di un sistema ∞^{r-2l} siffatto, tracciato nella V_{2n-r}, questa è pseudocaratteristica di specie $n-l$ (non è pseudocaratteristica, per $l=0$); e gli r iperplanoidi indipendenti che la definiscono possono scegliersi in modo che ve ne siano $2\,l$ (e soltanto $2\,l$) a coppie coniugati.

Nel seguito avremo da considerare, oltre alle varietà planoidi le varietà tracciate sulle varietà planoidi: le chiameremo *pseudoplanoidi.* Ogni tal varietà può ridursi con una trasformazione pseudoconforme ad esser contenuta in uno spazio lineare.

Si osserverà che *una varietà generica di dimensione $> n$ non è planoide nè pseudoplanoide,* come si constata provando, col metodo del n. 18, che una corrispondenza biolomorfa tra due varietà di ugual dimensione $>n$, una delle quali giaccia in un iperpiano, non è in generale pseudoconforme.

CAPITOLO IV.

Teoremi di esistenza e di unicità.

Caso in cui la traccia della funzione da determinarsi è data sopra una V_{2n-r} algebroide di dimensione $\geq n$.

24. Nel caso in esame la V_{2n-r} non è generalmente pseudocaratteristica (n. 6) e per $r<n$ in generale non è neppur pseudoplanoide (n. 23). Ora considereremo appunto l'ipotesi che V_{2n-r} non sia pseudocaratteristica, non escludendo, in un primo tempo, che possa essere pseudoplanoide o, in particolare, planoide.

Si tratta di vedere a quali eventuali condizioni debba sottoporsi una funzione analitica complessa del punto di V_{2n-r}, perchè esista una funzione olomorfa di $x_1, \dots, x_n$, che subordini su V_{2n-r} la data funzione e sia definita nell'intorno $2n$-dimensionale di V_{2n-r} entro l'ambiente Σ.

L' intorno di un punto generico (semplice) P di V_{2n-r} è rappresentato entro l' ambiente Σ da r equazioni analitiche reali:

(12) $$\theta_1(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) = 0, \ldots, \quad \theta_r(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) = 0.$$

Ciò premesso, applichiamo in generale il metodo del passaggio dal reale al complesso, da me usato fin dal 1931 per risolvere il problema nei casi $n = 1, 2$. Consideriamo cioè lo spazio euclideo Σ_0 sul quale può rappresentarsi lo spazio Σ, quando le variabili y, z si prolunghino nel campo complesso (n. 8). La trasformazione omografica in sè dello spazio *complesso* Σ:

(13) $$y_h = \frac{x_h + \bar{x}_h}{2}, \quad z_h = \frac{x_h - \bar{x}_h}{2i} \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

dove le x_h, $\bar{x}_h$ son variabili determinate in funzione delle y, z dalla sostituzione inversa della (13), cangia il sistema (12) nel sistema:

(14) $$\Theta_1(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0, \ldots, \quad \Theta_r(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0,$$

rappresentativo di V_{2n-r} nello spazio Σ-complesso, ossia della varietà $V^{(0)}_{4n-2r}$ imagine di V_{2n-r} in Σ_0 [1].

La funzione analitica complessa [2]

$$f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) = u(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) + iv(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$$

data su V_{2n-r}, si muta in una funzione $\Phi(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ su $V^{(0)}_{4n-2r}$.

Proviamo anzitutto che, nelle nostre ipotesi, le (14) son funzionalmente indipendenti (nel campo analitico) come funzioni di $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Invero, se una delle Θ, p. es. Θ_r, fosse funzione di $\Theta_1, \ldots, \Theta_{r-1}$, cioè se fosse:

$$\Theta_r = \Theta(x_1, \ldots, x_n; \Theta_1, \ldots, \Theta_{r-1}),$$

con Θ funzione analitica degli argomenti $x_1, \ldots, x_n$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_{r-1}$, la funzione Θ non potrebbe annullarsi identicamente rispetto alle $x_1, \ldots, x_n$ ponendovi nulle tutte le $\Theta_1, \ldots, \Theta_{r-1}$, perchè, in caso diverso, V_{2n-r}, come varietà complessa, sarebbe rappresentabile con meno di r equazioni, epperò sarebbe rappresentabile con meno di r equazioni nell' originario campo reale, contrariamente all' ipotesi che la sua dimensione ivi sia proprio $2n - r$.

D' altronde, se Θ non svanisce identicamente per $\Theta_1 = 0, \ldots, \Theta_{r-1} = 0$, l' ultima delle (14), scritta sotto la forma

$$\Theta(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = 0,$$

---

[1] A coordinate di un punto di Σ_0 posson assumersi sia le $2n$ variabili complesse $x_1, \ldots, x_n$, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, come le loro $4n$ componenti reali.

[2] Così chiamiamo f quando u, v son funzioni reali olomorfe di $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_n$.

rappresenta un legame analitico effettivo fra le sole variabili $x_1, \dots, x_n$, cioè una M_{2n-2} caratteristica di Σ, contenente V_{2n-r}, che dunque sarebbe pseudocaratteristica.

Pertanto, avendo supposto V_{2n-r} non pseudocaratteristica, le (14) son funzionalmente indipendenti come funzioni di $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. e, nel campo analitico, si posson risolvere, attorno al generico P di V_{2n-r}, rispetto a certe r convenienti delle $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$: sieno $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$.

Sostituite in Φ queste espressioni di $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ ricavate dalle (14), la funzione Φ, quando $r < n$, riducesi ad una funzione analitica del tipo:

$$F(x_1, \dots, x_n;\ \bar{x}_{r+1}, \dots \bar{x}_n).$$

Se $r = n$ invece Φ riducesi senz' altro ad una $F(x_1, \dots, x_n)$; onde non occorrono ulteriori condizioni affinchè la funzione ottenuta sia indipendente da tutte le $\bar{x}$. Così non è, quando $r < n$. Perchè F riesca indipendente dalle $\bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n$ occorre allora che *sopra* V_{2n-r} sieno soddisfatte le condizioni:

$$(15) \qquad \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_k} + \sum_{t=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_t} \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial \bar{x}_k} = 0 \qquad (k = r+1, \dots, n),$$

in cui le funzioni $\dfrac{\partial \bar{x}_t}{\partial \bar{x}_k}$ son conosciute, in quanto esse posson essere tratte con derivazioni dalle (14).

Il punto essenziale e più delicato della deduzione sta nel provare che è sufficiente che le (15) sieno soddisfatte *sopra* V_{2n-r}, perchè la F risulti indipendente da $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ nell' ambiente Σ_0 e quindi dia luogo nell' ambiente Σ ad una funzione analitica olomorfa in un intorno $2n$-dimensionale di V_{2n-r}, riducentesi su V_{2n-r} alla f ivi data.

Le (15) si riferiscono invero allo spazio Σ considerato come complesso, mentre noi cerchiamo le condizioni cui deve sottoporsi f, cioè Φ, sulla varietà *reale* V_{2n-r} (quando dunque le $\bar{x}_h$ s' interpretano come variabili complesso-coniugate delle x_h). Ebbene, se ricordiamo che una serie di potenze di più variabili è nulla nell' intorno complesso d' un punto reale P, s' essa è nulla nell' intorno reale dello stesso punto [1], concludiamo che, anche nel campo reale, le (15) dànno le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare la funzione Φ delle variabili complesso-coniugate $x_1, \dots, x_n$, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, data sulla varietà reale V_{2n-r}, perchè essa sia ivi traccia d' una funzione olomorfa esistente in tutto l' intorno $2n$-dimensionale di P.

[1] Ved. il n. 21 o il n. 1 (pag. 798) della mia Nota, *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche* (« Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », giugno 1931).

Se nelle (15) si ritorna dalle variabili x, $\bar{x}$ alle variabili y, z, in luogo delle derivate prime della funzione Φ intervengon le derivate prime della funzione f e in luogo delle derivate prime delle Θ $\left(\text{che entrano nelle espressioni di } \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial \bar{x}_k}\right)$ intervengono le derivate prime delle θ. Se poi nel sistema così trasformato si separa la parte reale dall'imaginaria, *si ricavano* $2(n-r)$ *equazioni differenziali di 1° ordine, che chiameremo le equazioni A,* alle quali debbon soddisfare su V_{2n-r} le componenti reali u, v di f.

Si osserverà che la funzione $F(x_1, \dots, x_n)$ resa indipendente dalle $\bar{x}$, dopo averla costruita a partire dalla sua traccia $f = u + iv$ (con u, v soddisfacenti alle A), è unica. Invero, se vi fossero due distinte funzioni $F(x_1, \dots, x_n)$, $G(x_1, \dots, x_n)$ aventi la stessa traccia f su V_{2n-r}, la M_{2n-2} caratteristica $F - G = 0$ passerebbe per V_{2n-r}, che sarebbe dunque pseudocaratteristica.

Si perviene così al seguente teorema di esistenza e di unicità.

I. *La condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f = u + iv$, ove u, v son funzioni olomorfe reali del punto (semplice) di una varietà algebroide reale V_{2n-r} $(r < n)$, non pseudocaratteristica, sia traccia ivi di una funzione analitica F delle n variabili complesse $x_1, \dots, x_n$, olomorfa in un intorno $2n$-dimensionale di V_{2n-r}, è che u, v soddisfacciano sopra V_{2n-r} al sistema differenziale del 1° ordine A. Ad ogni soluzione u, v di questo sistema corrisponde una sola funzione F.*

Se $r = n$, e la V_n non è pseudocaratteristica, non si richiede alcuna condizione (quantitativa) per le u, v; e la coppia u, v individua anche in tal caso la funzione F (1).

25. Le equazioni (15) o il sistema A esprimono in ultima analisi che una funzione $f = u + iv$ del punto di V_{2n-r} si riduce sulla varietà ad una fun-

(1) Per $n = 2$ il teorema trovasi stabilito, seguendo lo stesso concetto della dimostrazione sopra esposta, nella mia Nota lincea citata, *Risoluzione generale del problema di Dirichlet, ecc.* Per le V_n di Σ (caso in cui $r = n$) ed in particolare dunque per le superficie di S_4, il teorema fu conseguito (per via molto diversa da quella da noi battuta) da LEVI-CIVITA (« Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », t. XIV, 2° sem. 1905, pag. 492). La caratterizzazione in questo caso delle varietà eccezionali rispetto al teorema di esistenza e di unicità, che LEVI-CIVITA si era limitato ad indicare per mezzo di una relazione formale, fu geometricamente espressa da WIRTINGER nella Memoria, *Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr complexen Veränderlichen* (« Math. Annalen », Bd. 97; 1926, pag. 375). Le varietà eccezionali restano appunto, nel caso $r = n$, determinate con WIRTINGER, come nel nostro teorema generale, dal fatto di appartenere a M_{2n-2} caratteristiche. Il teorema generale e la sua dimostrazione, quali abbiamo dato nel testo, furono esposti per la prima volta nella mia citata conferenza all'Istituto Poincaré e riprodotti di poi nella tesi di PLANAS.

zione di n variabili complesse. Per conseguenza, se si parte da una rappresentazione (analitica, reale) dell'intorno di un punto (semplice) P di V_{2n-r} mediante i parametri $t_1, t_2, \dots, t_{2n-r}$, le equazioni (15) si dovranno certamente potere scrivere sotto la forma compatta equivalente

$$\frac{\partial(f, x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_{2n-r})} = 0, \tag{16}$$

esprimente che la matrice funzionale delle $n+1$ funzioni $f, x_1, \dots, x_n$ dei parametri $t_1, t_2, \dots, t_{2n-r}$ ha la caratteristica $\leq n$.

Il metodo del passaggio dal reale al complesso dà alle (16) un significato più profondo, giacchè esso conduce alla conclusione che le (16), le quali risultano ovviamente condizioni necessarie per l'esistenza d'una funzione olomorfa dell'intorno $2n$-dimensionale di P, riducentesi ad f sopra V_{2n-r}, sono altresì sufficienti. E così la questione viene spostata dall'ambiente a $2n$ dimensioni Σ all'ambiente a $2n-r$ dimensioni V_{2n-r}.

Si può affermare a priori, cioè senza alcun calcolo, che le (15) coincidono colle equazioni scritte da WIRTINGER per determinare una funzione di più variabili complesse sopra una data varietà [1]: problema, che generalizza quello di BELTRAMI per le funzioni di una variabile complessa sopra una superficie.

Ricordo che WIRTINGER definisce le funzioni di n variabili complesse sopra una V_{2n-r} $(r < n)$, considerando su questa un sistema completo di $n-r$ equazioni lineari alle derivate parziali del 1° ordine, non avente integrali reali (diversi dalle costanti). Questo sistema dà su V_{2n-r} un insieme di funzioni tali che ognuna può esser espressa come funzione analitica di n convenienti funzioni dell'insieme stesso. Prese queste ultime come variabili indipendenti, si costruisce così sopra V_{2n-r} la totalità richiesta delle funzioni analitiche di n variabili complesse.

26. Ritorniamo al nostro problema. È concettualmente facile (nonostante i calcoli effettivi sieno tutt'altro che brevi) di ottenere un sistema differenziale caratterizzante una sola delle componenti reali di una f, traccia di una delle funzioni F, di cui al teor. I. Basta esprimere la *condizione d'integrabilità* del sistema A rispetto ad una, v, delle funzioni u, v. *Si perviene in tal guisa ad un sistema differenziale B in u* (di ordine > 1) [2].

---

[1] WIRTINGER, *Zur formalen Theorie*, ecc. (citata).

[2] Per $n=2$ la deduzione è sviluppata con maggiore dettaglio nella mia Memoria, *Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche* («Memorie della R. Acc. d'Italia», 1931), n. 10 e segg. e nella citata Nota lincea, *Risoluzione generale del problema di Dirichlet*, ecc.. Se la varietà a tre dimensioni $(n=2,\ r=1)$ non è un iperplanoide, il sistema B consta di due equazioni a derivate parziali del 3° ordine.

Determinato un integrale u di questo sistema (olomorfo e non costante nell'intorno del generico punto P di V_{2n-r}), *se V_{2n-r} non è pseudoplanoide,* rimane associata ad u una ed una sola funzione n-armonica U dell'ambiente, olomorfa attorno a P e riducentesi ad u sopra V_{2n-r}.

Invero, se esistessero due distinte funzioni n-armoniche subordinanti la stessa traccia u, la loro differenza sarebbe un'effettiva funzione n-armonica annullantesi sopra V_{2n-r}; epperò la varietà data giacerebbe sopra un iperplanoide (almeno) e sarebbe dunque pseudoplanoide.

La funzione n-armonica U, individuata dalla sua traccia u su V_{2n-r}, determina alla sua volta, a meno di una costante addittiva, la funzione n-armonica associata V, che viene espressa da:

$$V(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) = \int_{P_0}^{Q} \sum_{h}^{n} {}_1 \left[\frac{\partial U}{\partial y_h} dz_h - \frac{\partial U}{\partial z_h} dy_h \right]$$

ove P_0 è un punto fissato ad arbitrio nell'intorno di P e Q è un punto variabile nello stesso intorno.

E così la conoscenza di un integrale non costante u del sistema B vincolante le funzioni sopra V_{2n-r}, conduce a costruire la funzione analitica $F = U + iV$, definita nell'ambiente Σ, a meno di una costante addittiva, e la cui parte reale U dà come traccia u su V_{2n-r}.

In conclusione si ottiene il seguente teorema di esistenza e di unicità per le funzioni n-armoniche:

II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione olomorfa reale u, del punto di una varietà algebroide reale V_{2n-r} $(r < n)$, non pseudoplanoide, sia traccia ivi di una funzione n-armonica U, olomorfa in un intorno $2n$-dimensionale di V_{2n-r}, è che u soddisfaccia sopra V_{2n-r} al sistema differenziale B. La U è univocamente determinata da u.*

Abbiamo escluso che sia $r = n$, perchè altrimenti V_{2n-r} sarebbe stata necessariamente pseudoplanoide, anzi planoide.

Nel caso $r = n$ una qualunque funzione olomorfa reale u del punto di V_n è ivi traccia d'infinite funzioni n-armoniche come U, se V_n non è pseudocaratteristica (n. 25). Se V_n è pseudocaratteristica vale il successivo teor. IV.

Non abbiamo poi enunciato esplicitamente l'ipotesi che V_{2n-r} non sia pseudocaratteristica, perchè se per V_{2n-r} passasse una varietà caratteristica, che è anche planoide, la V_{2n-r} sarebbe pseudoplanoide.

Osservazione. — Per $r = 1$ ed $n \geq 2$ il teorema classico di Hartogs permette di trasformare i precedenti teoremi « in piccolo » in teoremi « in grande », come trovasi spiegato diffusamente, per $n = 2$, nella mia Nota lincea più volte citata sulla risoluzione del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche. Tenuto conto che un'ipersuperfice chiusa, analitica, reale, dello spazio Σ, non può mai essere un iperplanoide [1] si conclude che *le funzioni n-armoniche olomorfe in una 2n-cella avente per contorno una varietà analitica, reale, chiusa, sono individuate ognuna dalla rispettiva traccia sul contorno, la quale è soggetta soltanto a soddisfare ivi al sistema differenziale B.*

27. Esaminiamo finalmente i casi esclusi in cui V_{2n-r} $(r \leq n)$ è pseudoplanoide o, più particolarmente, pseudocaratteristica.

Se V_{2n-r} è pseudoplanoide, senza essere pseudocaratteristica, il teor. I vale immutato.

Se è pseudocaratteristica di specie $n - l$ $(l > 0)$, una conveniente trasformazione pseudoconforme riduce V_{2n-r} ad una varietà non pseudocaratteristica entro un $S_{2(n-l)}$ caratteristico di Σ: sicchè si passa da un problema in n variabili complesse ad un problema in $n - l$ variabili complesse. E nello $S_{2(n-l)}$ il problema si risolve applicando il teor. I, che è valevole, appunto perchè la V_{2n-r} trasformata non è più, ivi, pseudocaratteristica.

Il sistema differenziale A, che bisogna considerare in tal caso su V_{2n-r}, deriva dalla scissione del reale dal complesso nella relazione analoga alla (16), esprimente che f riducesse su V_{2n-r} ad una funzione di $n - l$ variabili complesse. Poichè questo carattere della funzione f permane con una trasformazione pseudoconforme, che riconduca alla V_{2n-r} iniziale, così (tenuto anche conto del caso ovvio in cui V_{2n-r} è addirittura caratteristica) concludesi col seguente teorema di esistenza e di unicità:

III. *Sia V_{2n-r} $(r \leq n)$ una varietà algebroide pseudocaratteristica di specie $n - l$ $(l > 0)$. Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione olomorfa $f = u + iv$ del punto (semplice) di V_{2n-r} sia ivi traccia di una e di una sola funzione olomorfa F di $n - l$ variabili complesse, esistente in un intorno di V_{2n-r} nella varietà caratteristica $M_{2(r-l)}$, ben determinata, che la contiene, è che u, v soddisfacciano sopra V_{2n-r} al sistema differenziale A_l derivante (per separazione del reale dall'imaginario) da quello che caratterizza sopra V_{2n-r} le funzioni di $n - l$ variabili complesse. La funzione F è alla sua volta traccia su $M_{2(n-l)}$ di infinite funzioni di n variabili complesse, olomorfe in un'intorno 2n-dimensionale di $M_{2(n-l)}$.*

Se $r = 2l$, così che V_{2n-r} è addirittura caratteristica (e si riduce alla $M_{2(n-l)}$), il sistema A_l è il corrispondente, mediante la trasformazione pseudoconforme che muta un $S_{2(n-l)}$ in V_{2n-r}, di quello che, sopra $S_{2(n-l)}$, esprime le condizioni di monogeneità.

[1] Ved. la mia Monografia, *Risultati, vedute e problemi*, ecc.; n. 39.

L'ultima affermazione dell'enunciato deriva senza altro da ciò: che una funzione di $n-l$ variabili complesse sopra un $S_{2(n-l)}$ caratteristico di Σ, è traccia di infinite funzioni di n variabili complesse dell'ambiente $2n$-dimensionale.

Si osserverà inoltre che il sistema A_l non può mai mancare, perchè, nelle nostre ipotesi, V_{2n-r} ha sempre dimensione $> n-l$.

Nei riguardi del teor. II, è meno agevole di vedere com'esso debba trasformarsi quando la V_{2n-r} sia pseudoplanoide, senza esser addirittura planoide. La difficoltà è legata alla circostanza che, mentre le varietà pseudocaratteristiche son definite da sistemi differenziali di 1° ordine, le varietà pseudoplanoidi son definite da sistemi differenziali di 2° ordine (n. 13).

Bisogna in primo luogo risolvere la questione per le varietà planoidi; ma, per quanto il problema non sia così esaurito, noi qui ci limiteremo a considerarlo per queste sole varietà.

Sia dunque V_{2n-r} una varietà planoide ($r \leq n$), epperò (n. 23) luogo di ∞^{r-2l} ($l \geq 0$) $M_{2(n-r+l)}$ varietà caratteristiche. Una funzione olomorfa f, di n variabili complesse, su V_{2n-r}, dà come traccia sopra ogni $M_{2(n-r+l)}$ una funzione di $n-r+l$ variabili complesse, e la parte reale di f fornisce su ogni $M_{2(n-r+l)}$ una funzione $(n-r+l)$-armonica. L'estensione di un ragionamento da me esposto altrove nel caso degl'iperplanoidi di S_4 [1], permette di riconoscere senza difficoltà che una funzione olomorfa u del punto di V_{2n-r}, la quale subordini su ogni $M_{2(n-r+l)}$ una funzione $(n-r+l)$-armonica, è traccia di una (anzi di infinite) funzioni n-armoniche olomorfe in un intorno $2n$-dimensionale di V_{2n-r}. Pertanto sussiste il seguente teorema di esistenza:

IV. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione reale olomorfa u del punto di una V_{2n-r} planoide $(r \leq n)$, luogo di ∞^{r-2l} $(l \geq 0)$ $M_{2(n-r+l)}$ caratteristiche, sia ivi traccia di una funzione n-armonica, olomorfa in un intorno $2n$-dimensionale di V_{2n-r}, è che u sia $(n-r+l)$-armonica sopra ogni $M_{2(n-r+l)}$.*

Ogni siffatta u è traccia di infinite funzioni n-armoniche, le quali dipendono dalla scelta di una arbitraria funzione reale olomorfa di $r-2l$ variabili reali.

Caso in cui la traccia della funzione da determinarsi è data sopra una V_h algebroide di dimensione $< n$.

28. La V_h di cui vogliamo occuparci, avendo la dimensione $h \leq n-1$, è sempre planoide (n. 19), anzi pseudocaratteristica (n. 4) di specie h, se trattasi di una varietà generica o di specie minore, se la varietà è particolare.

---

[1] Ved. la mia Memoria citata, *Contributi*, ecc.; n. 22.

Dicasi dunque $k \leq h$ la specie di V_h, sicchè una conveniente trasformazione pseudoconforme riduce V_h ad esser contenuta di un S_{2k} caratteristico; ed ivi V_h non è più pseudocaratteristica. Trasformata così la V_h, si riconosce senz'altro, in base al teorema I, che, se $k = h$, non si richiede alcuna condizione per le componenti reali u, v di una funzione olomorfa $f = u + iv$ del punto di V_h, perchè f sia traccia su V_h di una funzione olomorfa F di k variabili complesse esistente in un intorno di V_h in S_{2k}; e che invece, se $k < h$, occorre che u, v soddisfacciano su V_h ad un *sistema differenziale del 1° ordine* $\bar{A}$, derivante per separazione del reale dal complesso, da quello che caratterizza sopra V_h le funzioni di k variabili complesse.

Si conclude insomma col teorema:

V. *Sia V_h una varietà algebroide di dimensione $h < n$ (necessariamente planoide, anzi pseudocaratteristica di specie $k \leq h$). Se V_h è generica ed è perciò $k = h$, non si richiede alcuna condizione (quantitativa) per u, v, affinchè una funzione olomorfa $f = u + iv$ del punto di V_h sia ivi traccia di una funzione olomorfa F, di k variabili complesse, esistente in un intorno di V_h sulla varietà caratteristica ben individuata M_{2k}, che contiene V_h.*

Se invece V_h, essendo particolare, ha la specie $k < h$, condizione necessaria e sufficiente perchè esista la F di cui sopra, è che u, v soddisfacciano sopra V_h al sistema differenziale di 1° ordine $\bar{A}$.

In ogni caso F è traccia su M_{2k} di infinite funzioni di n variabili complesse, olomorfe in un intorno $2n$-dimensionale di M_{2k}.

Per conseguire, nei casi che stiamo esaminando, il teorema di esistenza delle funzioni poliarmoniche, occorre ridurre anzitutto, per mezzo di una trasformazione pseudoconforme, la varietà V_h, che è planoide, ad un S_h giacente in un S_{2k} caratteristico ($k \leq h$).

Questo S_h, se $k < h$, contiene ∞^{2k-h} $S_{2(h-k)}$ caratteristici ed è addirittura caratteristico per $h = 2k$. Quando $h = k$, S_h non contiene invece alcuno spazio caratteristico, perchè, ove ne contenesse, sarebbe di specie minore di k.

Ora, se $k < h < 2k$, la questione viene senz'altro risoluta dall'applicazione del teorema IV. E si badi che in tal caso le *sole* $M_{2(h-k)}$ caratteristiche appartenenti alla V_h originaria, sono le corrispondenti degli $S_{2(h-k)}$ cattesistici, situati nello S_h trasformato. Invero, una $M_{2(h-k)}$ caratteristica tracciata in S_h, dovendo avere tutti i suoi $S_{2(h-k)}$ tangenti paralleli fra loro (cioè uscenti da un medesimo $S_{2(h-k)-1}$ all'infinito), non può che esser costituita da un insieme di $S_{2(h-k)}$ caratteristici.

Se $k < h$ e $2k = h$, cosicchè V_h coincide addirittura con una M_{2k} caratteristica, trasformando questa, con una trasformazione pseudoconforme, in un S_{2k}, si riconosce [1] che una funzione reale olomorfa u del punto di S_{2k} è k–armonica, nell'intorno di un punto di S_{2k}, allora e solo allora che è armonica su tutti gli $\infty^{3(k-1)}$ piani caratteristici solcanti il campo di olomorfismo.

Se infine $h = k$ non si richiede per u alcuna condizione quantitativa (ved. teor. I), perchè V_h è affatto generica entro la M_{2k} che la contiene, essendo di specie h e non minore.

Si perviene concludendo al teorema:

VI. *Sia* V_h *una varietà algebroide di dimensione* $h < n$, *pseudocaratteristica di specie* $k \leq h$. *Se* $k < h < 2k$, *condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione reale olomorfa del punto di* V_h *sia ivi traccia di una funzione* U, *k–armonica, olomorfa in un intorno di* V_h *entro la* M_{2k} *caratteristica, che contiene* V_h, *è che* u *sia* $(h-k)$*–armonica sopra ogni* $M_{2(h-k)}$ *caratteristica contenuta in* V_h. *Vi sono infinite funzioni* U *siffatte. Se* $k < h$ *e* $2k = h$, *occorre e basta che* u *sia armonica sopra le superficie caratteristiche di un sistema analitico reale* $\infty^{3(h-1)}$, *che riempie in tal caso* V_h; *e la* U *è allora unica. Se infine* $h = k$, *non si richiede per* u *alcuna condizione quantitativa.*

In ogni caso ogni U *è subordinata su* M_{2k} *da infinite funzioni n–armoniche, olomorfe in un intorno* $2n$*–dimensionale di* M_{2h}.

---

[1] Con facile estensione del ragionamento esposto, per $k = 2$, nel n. 7 della mia citata Memoria, *Contributi*, ecc..

Anwendung linearer Integralgleichungen auf Probleme der Statik.

Von L. Holzer und E. Melan (in Wien).

Die übliche Theorie statisch unbestimmter Systeme setzt die unbeschränkte Gültigkeit des Hook'schen Gesetzes voraus. Die Erfahrung lehrt aber, dass der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen bei einem einachsigen System in allerdings noch immer idealisierter, aber bedeutend zutreffenderer Weise durch das in Abb. 1 dargestellte Diagram gegeben ist. Unter Zugrundelegung dieses funktionellen Zusammenhanges wurde von dem zweitgenannten der Verfasser eine Theorie statisch unbestimmter Fachwerke entwickelt. Für die Praxis ist aber die Untersuchung von Systemen, die aus biegungssteifen Stäben bestehen, viel wichtiger als jene von Fachwerken. In der Tat haben einige Länder wie z. B. Oesterreich und Deutschland in den einschlägigen Bestimmungen die Berechnung solcher Systeme im Hochbau unter Annahme plastisch-elastischen Verhaltens des Materiales vorzunehmen gestattet. Es mag aber nicht unerwähnt bleiben, dass es an einer exakten Begründung der Theorie für biegungssteife Systeme, die in einigen Punkten von jener der Fachwerke abweicht, bisher gefehlt hat.

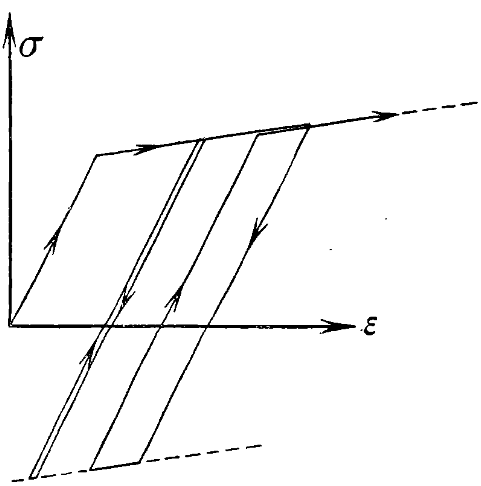

Abb. 1

Wir übertragen wie üblich den in Abb. 1 dargestellten Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung für den einachsigen Spannunszustand auch auf den Zusammenhang zwischen der Aenderung k des Winkels zweier benachbarter Querschnitte des gebogenen Stabes und dem Biegungsmoment u. Wir können also in Abb. 1 an Stelle von s und σ ... k und u setzen, und erhalten demnach für einen Punkt x der Stabachse, in welchem $u(x)$ innerhalb des Intervalls

$$l_1(x) + c(x)z(x) < u(x) < l_2(x) + c(x)z(x)$$

mit $l_1(x) < l_2(x)$ liegt, die Beziehung

$$k(x) = \mu u(x) + z(x),$$

wobei l_1, l_2, μ und c Grössen sind, welche von der Formgebung des betreffenden Querschnittes und den Materialkonstanten, nicht aber von der Belastung abhängen. Die Aenderung des Winkels zweier benachbarter Querschnitte, im folgenden kurz als Biegung bezeichnet, besteht demnach aus zwei Teilen: einem elastischen Anteil, welcher dem biegenden Moment proportional ist, μu, und einem bleibenden Teil z. c und μ sind stets positive Grössen.

Betrachten wir nun sämtliche Grössen u, z als Funktion nicht nur von x, sondern auch von einem Parameter, etwa der Zeit t, schreiben also genauer $u(x, t)$, $z(x, t)$, so gilt für hinreichend kleine h

$$l_1(x) + c(x)z(x, t+h) < u(x, t+h) < l_2(x) + c(x)z(x, t+h),$$
$$k(x, t+h) = \mu u(x, t+h) + z(x, t+h)$$

mit der Bedingung $z(x, t+h) = z(x, t)$, d. h. $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Bemerkt sei, dass unter den partiellen Ableitungen nach t immer die vorwärts genommenen partiellen Differentialquotienten zu verstehen sind. Die bleibende Winkeländerung bleibt demnach in diesem Falle, unabhängig ob $\frac{\partial u}{\partial t} \gtrless 0$ ist, unverändert.

Erreicht aber u eine der beiden Grenzen des Intervalls, ist also entweder $l_1(x) + c(x)z(x, t) = u(x, t)$ oder $u(x, t) = l_2(x) + c(x)z(x, t)$, so gilt, wenn an der untern Grenze $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ oder an der obern Grenze $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ ist, wiederum $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Ist jedoch an der untern Grenze $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ oder an der obern $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$, so wird $c(x)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Nun sei angenommen, dass die Biegungsmomente in einem statisch unbestimmten Systeme bei einer gegebenen äusseren Belastung durch $y(x, t)$ gegeben seien, wenn nach der üblichen Theorie die unbeschränkte Gültigkeit des Hook'schen Gesetzes vorausgesetzt wird. Unter Annahme des oben beschriebenen Zusammenhanges zwischen Biegung und biegendem Moment mögen bei derselben äussern Belastung die Momente $u(x, t)$ auftreten. Liegen dann im Augenblicke bereits bleibende Biegungen $z(x, t)$ vor, so gilt

$$\int_\alpha^\beta a(x, \xi)z(\xi, t)d\xi + u(x, t) = y(x, t) \tag{1}$$

für jeden Punkt der Stabachse. $a(x, \xi)$ stellt sonach das Biegungsmoment an der Stelle x vor, wenn lediglich an der Stelle ξ die bleibende Biegung 1 aufgetreten ist. Wir bemerken, dass sich unschwer beweisen lässt, dass

1°) der Kern $a(x, \xi)$ symmetrisch ist, d. h. $a(x, \xi) = a(\xi, x)$ ist.

2°) der Kern positiv semidefinit ist, demnach für jede integrierbare Funktion $f(x)$

$$\int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta a(x, \xi) f(x) f(\xi) dx d\xi \geqq 0$$

gilt.

Wir setzen ferner noch voraus, dass $y(x, t)$ eine für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ und jedes t definierte Funktion ist, die vorläufig nur der Bedingung zu genügen braucht, dass sie für jedes x und t nach t einseitig differenzierbar ist. Dieselben Eigenschaften postulieren wir hinsichtlich der Differenzierbarkeit von $z(x, t)$ und $u(x, t)$. Unter $\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}$ sind immer die vorwärts genommenen Differentialquotienten von y, z, u nach t zu verstehen. Von z postulieren wir noch, dass diese einseitige Differentiation nach t in x gleichmässig erfolgt.

Wir wollen sagen, dass $u(x, t)$ bei festgehaltenem x in Zeitintervallen, wo $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ist, zur Klasse A, in jenen mit $c(x) \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ zur Klasse B gehört.

Es ist natürlich nicht möglich, die tatsächlich auftretenden Biegungsmomente $u(x, t)$ in einem bestimmten Augenblick zu bestimmen, wenn nur der Wert $y(x, t)$ im Augenblick t und nicht der ganze Verlauf der $y(x, t)$ bis zu dem betreffenden Augenblick bekannt ist. Nimmt man unbeschränkte Giltigkeit des Hook'schen Gesetzes an, so ist diese Vorgeschichte irrelevant. Entsprechend der Willkürlichkeit, mit der in der Praxis verschiedene mögliche Belastungen auf einander folgen, lässt sich aber im allgemeinen über die Funktion $y(x, t)$ nichts aussagen. Es erscheint daher nachfolgender Satz, dessen exakter Beweis das Hauptziel der vorliegenden Arbeit bildet, von besonderer Bedeutung für die Dimensionierung statisch unbestimmter Systeme, deren Material die oben formulierten Eigenschaften besitzt. Wir sprechen diesen Satz wie folgt aus: *Bei einem System, dessen Material den in Abb. 1 dargestellten Zusammenhang zwischen Biegung und Biegungsmoment besitzt, werden sich nach einer hinreichend grossen Anzahl von Belastungsänderungen schliesslich solche bleibende Biegungen einstellen, die sich bei weiteren Belastungswechseln nicht mehr ändern werden, soferne nur die Funktion für jedes* x, t *stets zwischen den Grenzen*

$$m_1(x) \leqq y(x, t) \leqq m_2(x)$$

eingeschlossen ist und

$$m_1(x) - m_2(x) \leqq l_2(x) - l_1(x)$$

gilt. Es werden also nach einer hinreichend grossen Zahl von Wechseln der Belastung, demnach nach Ablauf einer hinreichenden Zeit nur mehr rein elastische Formänderungen auftreten. Die schliesslich eingetretenen bleibenden Biegungen liegen dabei unter einer endlichen Schranke.

Das vorerwähnte Problem der technischen Mechanik führt somit auf die lineare Integralgleichung erster Art (1) mit symmetrischem positiv semidefiniten Kern. Hiebei ist $u(x, t)$ an die Bedingung gebunden

$$l_1(x) + c(x)z(x, t) \leqq u(x, t) \leqq l_2(x) + c(x)z(x, t) \tag{2}$$

mit gegebenen stetigen Funktionen $l_1(x)$, $l_2(x)$, $c(x)$, wo $l_1(x) < l_2(x)$ und $c(x) > 0$ im ganzen Grundintervall $[\alpha, \beta]$ gilt.

Wir erwähnten schon: z soll nach t einseitig differenzierbar sein und zwar gleichmässig in x, d. h. es soll

$$z(x, t+h) - z(x, t) = h\frac{\partial z}{\partial t} + h\rho(h, t, x)$$

$(h > 0)$ mit folgendem Gesetz für $\rho(h, t, x)$ gelten: Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kann $|\rho(h, t, x)| < \varepsilon$ durch $h < \delta(t, \varepsilon)$ erreicht werden, wo δ von x nicht abhängt.

I.

Ersetzt man in (1) das Argument t in y, z, u durch $t + h$, subtrahiert man (1) und setzt man

$$y(x, t+h) - y(x, t) = \Delta y(x, t),$$

analog Δz, Δu, so bleibt:

$$\int_\alpha^\beta a(x, \xi)\Delta z(\xi, t)d\xi + \Delta u(x, t) = \Delta y(x, t). \tag{3}$$

Postulieren wir ausser den bereits erwähnten Bedingungen noch die Stetigkeit von $z(x, t)$ nach beiden Veränderlichen zugleich, dann können wir behaupten: die Gleichung (3) hat nur eine Lösung.

Dies scheint sehr auffallend, da zwei unbekannte Funktionen $\Delta z(x, t)$ und $\Delta u(x, t)$ auftreten.

Wir zeigen, dass bei Annahme zweier Funktionensysteme

$$\Delta z = \Delta' z, \quad \Delta u = \Delta' u; \qquad \Delta z = \Delta'' z, \quad \Delta u = \Delta'' u, \tag{4}$$

sich $\Delta' z = \Delta'' z$ ergibt. Daraus folgt dann

$$\Delta' u = \Delta'' u.$$

Einsetzung der beiden Systeme (4) in (3) und Subtraktion gibt:

$$\int_\alpha^\beta a(x, \xi)(\Delta' z - \Delta'' z) d\xi + \Delta' u - \Delta'' u = 0. \tag{5}$$

Division von (5) durch h und Grenzübergang $h \to +0$ gibt, wenn analog wie früher:

$$\frac{\Delta' z}{h}\bigg|_{h \to +0} = \frac{z'(x, t+h) - z'(x, t)}{h}\bigg|_{h \to +0} = \frac{\partial z'}{\partial t}$$

ebenso

$$\frac{\Delta'' z}{h}\bigg|_{h \to +0} = \frac{\partial z''}{\partial t}$$

gesetzt wird, ähnlich $\frac{\partial u'}{\partial t}$, $\frac{\partial u''}{\partial t}$ definiert werden:

$$\int_\alpha^\beta a(x, \xi)\left(\frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{\partial z''}{\partial t}\right) d\xi + \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial u''}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Mit den Abkürzungen

$$\zeta = \frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{\partial z''}{\partial t}, \quad \chi = \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial u''}{\partial t}$$

schreibt sich (6) kürzer:

$$\int_\alpha^\beta a(x, \xi)\zeta(\xi, t) d\xi + \chi(x, t) = 0. \tag{6a}$$

Die einseitige Differentiation nach dem Parameter t unter dem Integralzeichen rechtfertigt sich nach der obigen Annahme über gleichmässige einseitige Differentiation.

Multiplikation von (6a) mit $\zeta(x, t)$ und Integration über $[\alpha\beta]$ gibt:

$$\int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta a(x, \xi)\zeta(x, t)\zeta(\xi, t) dx d\xi + \int_\alpha^\beta \zeta(x, t)\chi(x, t) dx = 0 \tag{7}$$

oder in sofort verständlicher Schreibung

$$I' + I'' = 0. \tag{7a}$$

1°) Nun gilt

$$I' \geq 0. \tag{8}$$

Beweis: $a(x, \xi)$ ist positiv semidefinit.

2°) $\zeta(x, t) \neq 0$ könnte nur in zwei Fällen eintreten:

α) wenn $\Delta' u(x, t)$ und $\Delta'' u(x, t)$ beide zur Klasse B gehörten. Dann wäre

$$\zeta(x, t)\chi(x, t) = c(x)\zeta^2(x, t) > 0$$

wegen $c(x) > 0$.

β) Wenn z. B. $\Delta' u$ zur Klasse A, aber $\Delta'' u$ zur Klasse B gehörte. Dann wäre

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = 0, \quad \text{sgn.} \frac{\partial u''}{\partial t} = \text{sgn.} \frac{\partial z''}{\partial t} = - \text{sgn.} \frac{\partial u'}{\partial t}, \quad \text{sgn.}\, \zeta\chi = - \text{sgn.} \frac{\partial z''}{\partial t}\frac{\partial u'}{\partial t} = +1.$$

Es bleibt

$$\zeta(x, t)\ \chi(x, t) \geqq 0, \tag{9}$$

somit

$$I'' \geqq 0. \tag{9a}$$

Aus (9a), (8) und (*ι*a) folgt sofort:

$$I' = I'' = 0.$$

Aus $I'' = 0$, wo der Integrand nach (9) nicht negativ ist, darf nicht ohne weiters geschlossen werden: $\zeta(x, t)\chi(x, t) = 0$, da diese Funktion im allgemeinen unstetig ist.

Erwägen wir die Sache z. B., wenn für $x = x_1$ die Funktion $u'(x, t)$ die obere Grenze erreicht und gleichzeitig u' von der Klasse B ist. Dann ist

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = \gamma > 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} > 0.$$

Sei für ein $h > 0$

$$\Delta' z(x_1, t) = h\gamma + h\rho_1,$$

wo ρ_1 der vorhin gegebenen Bedingung für ρ genügt, also für hinreichend kleines h

$$\Delta' z(x_1, t) > h\frac{\gamma}{2} \tag{10a}$$

ist.

Weiter gilt für hinreichend kleine h und jedes x mit $\alpha \leq x \leq \beta$ wegen der gleichmässigen einseitigen Differenzierbarkeit von z nach t in x, da $\frac{\partial z''}{\partial t} \geqq 0$ auf Grund unserer Voraussetzungen ist:

$$\Delta' z(x, t) \leqq 2h\frac{\partial z'}{\partial t}. \tag{10b}$$

Wir nehmen h von vornherein so klein an, dass sowohl (10a) als auch (10b) erfüllt ist, halten aber dieses h fest.

Die Ungleichung (10a) mit x statt x_1 gilt dann wegen der Stetigkeit von z_1 in einem ganzen Intervall $\alpha_1 < x \leqq \beta_1$ mit $\alpha_1 < \beta_1$ und $\alpha_1 \leqq x_1 \leqq \beta_1$.

In dem Intervalle $[\alpha_1, \beta_1]$ gilt also bei dem nunmehr festgehaltenen $h > 0$:

$$2h \frac{\partial z'}{\partial t} > \frac{\gamma h}{2}$$

oder

$$\frac{\partial z'}{\partial t} > \frac{\gamma}{4} > 0.$$

In den anderen Fällen ist die Rechnung ganz ähnlich.

Wir können sagen: tritt $\frac{\partial z'}{\partial t} \neq 0$ für $x = x_1$ ein, so gilt dies bei festgehaltenem t für ein ganzes Intervall $[\alpha_1, \beta_1]$ von x mit x_1 als Element u. zw. so, dass $\frac{\partial z'}{\partial t}$ in $[\alpha_1, \beta_1]$ nach unten beschränkt ist.

Daraus folgt sofort: gibt es überhaupt Werte x mit $\zeta(x, t) \neq 0$, dann auch mindestens ein Intervall $\alpha' \leqq x \leqq \beta'$ mit

$$|\zeta(x, t| > \eta > 0.$$

Nun führen wir den Beweis zu Ende, indem wir zeigen: da $I'' = 0$ ist, so ist $\zeta(x, t) = 0$.

Wir führen die Grösse Γ, die untere Grenze von $c(x)$ in $[\alpha, \beta]$ ein. Es ist $\Gamma > 0$, da $c(x)$ im Gesamtintervall positiv und stetig ist. Im Teilintervalle $[\alpha'\beta']$ bleibt:

$$\zeta(x, t)\chi(x, t) = c(x)\zeta^2(x, t) \geqq \eta^2\Gamma > 0.$$

Sofort folgt:

$$I'' \geqq \int_{\alpha'}^{\beta'} \zeta(x, t)\chi(x, t)dx \geqq \eta^2\Gamma(\beta' - \alpha') > 0$$

im Widerspruch zu (10).

Es folgt

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = \frac{\partial z''}{\partial t},$$

also wegen

$$\Delta' z(x, t) = \int_0^h \frac{\partial z'}{\partial t}(x, t + s)ds$$

und der analogen Formel für $\Delta'' z(x, t)$:

(11) $$\Delta' z = \Delta'' z,$$

was zu beweisen war.

II.

Bleibt die Funktion $y(x, t)$ immer zwischen den von t unabhängigen Grenzen

$$m_1(x) \leqq y(x, t) \leqq m_2(x), \tag{12}$$

wobei die Bedingung

$$m_2(x) - m_1(x) = l_2(x) - l_1(x)$$

genügt, so gibt es eine Funktion $\bar{z}(x)$, so dass für

$$z(x, t_0) = \bar{z}(x)$$

sich $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ ergibt.

Darüber hinaus ergibt sich: $z(x, T) = \bar{z}(x)$ für $T > t_0$, d. h. für $t > t_0$ ändert sich z nicht mehr.

Wir setzen

$$\left\{\begin{aligned} m_1(x) &= l_1(x) + c(x)z(x) + \int_\alpha^\beta a(x, \xi)z(\xi, t)d\xi + v(x, t), \\ m_2(x) &= l_2(x) + c(x)z(x) + \int_\alpha^\beta a(x, \xi)z(\xi, t)d\xi + v(x, t). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Setzt man in (12) für $y(x, t)$ den Wert aus (1), hingegen für $m_1(x)$ und $m_2(x)$ den Wert aus (14) ein, so bleibt:

$$l_1(x) + c(x)z(x, t) + v(x, t) \leqq u(x, t) \leqq l_2(x) + c(x)z(x, t) + v(x, t). \tag{15}$$

Vergleich von (15) mit (2) lehrt, dass $u(x, t)$ bei positivem $v(x, t)$ nur die obere Grenze des Bereiches (2) annehmen kann, bei negativem $v(x, t)$ nur die untere Grenze.

Also an der unteren Grenze ist sicher $v(x, t) \leqq 0$, da aber dort $\frac{\partial z}{\partial t} \leqq 0$ ist, so folgt $v(x, t)\frac{\partial z}{\partial t} \geqq 0$. Analog beweist sich dieselbe Ungleichung auch für die obere Grenze. Gilt in (2) kein Gleichheitszeichen, so ist $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, also gilt allgemein:

$$v(x, t)\frac{\partial z}{\partial t} \geqq 0. \tag{16}$$

Sei $v(x, t) \equiv 0$ für jedes x. Identitätszeichen sollen von jetzt ab Gleichheit für jedes x bei festgehaltenem t bedeuten.

Wir setzen dies in die erste der Gleichungen (14) ein. Statt $m_1(x) - l_1(x)$

schreiben wir $\varphi(x)$. Da der Parameter t dann nur mehr in $z(x, t)$ vorkommt, schreiben wir dafür $z(x)$.

Es bleibt die lineare Integralgleichung dritter Art:

$$c(x)z(x) + \int_{\alpha}^{\beta} a(x, \xi)z(\xi)d\xi = \varphi(x). \tag{17}$$

Im folgenden sei unter $\sqrt{c(x)}$, $\sqrt{c(x)c(\xi)}$ die positive Quadratwurzel verstanden. Wir dividieren (17) durch $\sqrt{c(x)}$. Hier wird die Voraussetzung $c(x) > 0$ angewendet. Mit

$$s(x) = z(x)\sqrt{c(x)}, \quad b(x, \xi) = \frac{a(x, \xi)}{\sqrt{c(x)c(\xi)}}, \quad \varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{c(x)}}$$

geht (17) in die lineare Integralgleichung zweiter Art:

$$s(x) = \varphi_1(x) - \int_{\alpha}^{\beta} b(x, \xi)s(\xi)d\xi \tag{18}$$

über.

Der Kern $b(x, \xi)$ ist:

1°) symmetrisch. Dies ist trivial;

2°) positiv semidefinit.

Beweis zu 2°). Mit $f(x) = f_1(x)\sqrt{c(x)}$ wird aus

$$I(f) = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} b(x, \xi)f(x)f(\xi)dxd\xi,$$

wo $f(x)$ eine beliebige integrierbare Funktion bedeutet:

$$I(f) = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} a(x, \xi)f_1(x)f_1(\xi)dxd\xi \geqq 0.$$

Als symmetrischer positiv semidefiniter Kern hat $b(x, \xi)$ nur positive Eigenwerte, daher ist -1 kein Eigenwert. Also ist nach dem Grundtheorem über Integralgleichungen die Gleichung (18) somit auch (17) eindeutig lösbar. $\bar{z}(x)$ sei die Lösung von (17).

Damit ist zunächst $\bar{z}(x)$ eingeführt.

Nun zeigen wir, dass die Funktion $z(x, t)$ bei Verlauf von $y(x, t)$ gemäss Gl. (12) jedenfalls $\bar{z}(x)$ nahezukommen strebt.

Wir ersetzen in (17) $z(x)$ durch seinen Wert $\bar{z}(x)$ und addieren die erste Gleichung (14). Mit der Abkürzung

$$w(x, t) = \bar{z}(x) - z(x, t)$$

bleibt:

(19)
$$v(x, t) = c(x)w(x, t) + \int_\alpha^\beta a(x, \xi)w(\xi, t)d\xi.$$

Aus $v(x, t) \equiv 0$ folgt $w(x, t) \equiv 0$, da $b(x, \xi)$ nicht den Eigenwert -1 hat. Also $z(x, t) \equiv \bar{z}(x)$ hat $w(x, t) \equiv 0$ zur Folge. Umgekehrt folgt aus $w(x, t) \equiv 0$, dass $z(x, t) \equiv \bar{z}(x)$ ist.

Mit

$$I = \int_\alpha^\beta v(x, t)w(x, t)dx,$$

d. h.

$$I = \int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta a(x, \xi)w(\xi, t)dxd\xi + \int_\alpha^\beta c(x)w^2(x, t)dx$$

oder entsprechend

$$I = L_1 + L_2$$

folgt:

1°) Es ist $I \geqq 0$. Denn es gilt:
$L_1 \geqq 0$, da $a(x, \xi)$ positiv semidefinit ist und
$L_2 \geqq 0$ wegen $c(x) > 0$.

2°) $I = 0$ hat $L_1 = L_2 = 0$ zur Folge.

3°) Aus $L_2 = \int_\alpha^\beta c(x)w^2(x, t)dx = 0$ folgt, da $c(x) > 0$ und $w(x, t)$ stetig ist: $w(x, t) \equiv 0$, also $v(x, t) \equiv 0$, d. h. $z(x, t) = \bar{z}(x)$.

Aendert sich v um Δv, also w um

(20)
$$\Delta w = - \Delta z(x, t),$$

so ergibt sich eine Aenderung von I um ΔI, wobei

(21)
$$\Delta I = \int_\alpha^\beta v\Delta w dx + \int_\alpha^\beta w\Delta v dx + \int_\alpha^\beta \Delta v \Delta w dx$$

oder kurz

(22)
$$\Delta I = K_1 + K_2 + K_3$$

ist.

Nun ist aber:

(23)
$$\Delta v(x, t) = c(x)\Delta w(x, t) + \int_\alpha^\beta a(x, \xi)\Delta w(\xi, t)d\xi.$$

Einsetzen von v aus (19) in das Integral K_1, von Δv aus (23) in das Integral K_2 von (22) zeigt, dass $K_1 = K_2$ ist, und gibt:

$$\Delta I = \int_\alpha^\beta (2v + \Delta v)\Delta w dx. \tag{24}$$

Division von (24) durch h und Grenzüberganz $h \to +0$, gibt, da wegen (20) $\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial t}$ ist:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -2\int_\alpha^\beta v(x, t)\frac{\partial z}{\partial t} dx. \tag{25}$$

also wegen (16):

$$\frac{\partial I}{\partial t} \leqq 0. \tag{26}$$

Man sieht, dass mit wachsender Zeit I nicht zunimmt. Im allgemeinen wird also $z(x, t)$ gegen $\bar{z}(x)$ zustreben.

Ist I schliesslich, etwa für $t = t_0$, Null geworden, so gilt $z(x, t_0) = \bar{z}(x)$. Für ein $t > t_0$ ist weiter $I = 0$, somit $w(x, t) \equiv 0$ oder $z(x, t) \equiv \bar{z}(x)$. es ist damit die letzte aufgestellte Behauptung bewiesen, dass dann $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ und $\Delta z = 0$ ist. Ist dieser Grenzfall erreicht, so treten weitere bleibende Formänderungen nicht mehr hinzu.

Su alcuni nuovi invarianti delle varietà topologiche.

Memoria di ACHILLE BASSI (a Torino).

Sunto. - *Si definiscono alcuni nuovi invarianti di una varietà topologica, ottenuti mediante speciali decomposizioni in parti elementari della varietà, e se ne studiano le proprietà.*

Nel rapido sviluppo della topologia moderna, la teoria generale dei complessi e delle varietà ha sempre conservato una posizione centrale. Essa fu e continuerà ad essere la teoria madre dalla quale scaturiscono le idee che trovano felice estensione ed applicazione in altri campi della topologia.

Ritengo quindi che nuovi contributi ad essa riescano particolarmente opportuni; tanto più che ora, dopo un ultimo periodo di sviluppo nel 1920-32, che portò alle brillanti e profonde teorie moderne della dualità, la teoria attraversa un periodo di relativa stasi, pur essendo la maggior parte di essa tuttora da costruire.

Forse nuovi impulsi potranno indirettamente venire dalle recenti idee introdotte dall'HUREWICZ ([1]) sulla teoria della deformazione.

Da parte mia ho inteso portare un contributo diretto, alla teoria delle varietà, basandomi su altri concetti. E farò seguito alla presente Memoria con successivi studi.

Introduzione.

1. In questo lavoro sviluppo ricerche su alcuni tipi nuovi di invarianti di varietà ([2]).

Tali invarianti sono ottenuti nel modo seguente: data una varietà ad n dimensioni V, si considera una parte di questa che sia una n-varietà connessa, costituita di n-celle, di V o di una suddivisione di V. Poichè conveniamo che le facce contorno di una cella facciano parte della cella stessa,

([1]) W. HUREWICZ: *a)* [Per questo richiamo e gli analoghi, vedi l'elenco bibliografico alla fine del lavoro].

([2]) I principali risultati di questa Memoria sono già stati esposti nella Nota preventiva A. BASSI *d)*.

la parte considerata conterrà il proprio contorno; e facciamo l'ipotesi che questo sia regolare, cioè sia una $(n-1)$-varietà senza contorno.

Supporremo tale parte dotata di proprietà topologiche particolarmente semplici, e la chiameremo quindi *parte elementare.*

La definizione di detta parte potrà darsi, naturalmente, in vario modo. Per altro si supporrà che *la definizione sia tale che la parte elementare risulti divisibile in parti, pur esse elementari a norma della definizione adottata.*

Ciò premesso, è naturale considerare il *numero minimo* di tali parti elementari in cui si possa suddividere la varietà, in cui cioè, si possano raggruppare le n-celle, di V o di una suddivisione di V: in altre parole, il numero minimo di parti elementari necessario per ricoprire tutta la varietà, con l'esclusione che due parti elementari abbiano delle n-celle in comune.

Tale numero è evidentemente un invariante della varietà, rispetto alle equivalenze combinatorie (3).

Per chiarezza, rileviamo in modo esplicito che, avendo ogni parte elementare della varietà un contorno regolare, si esclude che tra i punti contorno di una *stessa* parte possano avvenire identificazioni. La varietà può quindi immaginarsi costruibile per mezzo delle sue parti elementari identificando, o, con linguaggio fisico, sovrapponendo sempre facce di una parte elementare con facce di *altra* parte elementare.

È evidente che le proprietà dell'invariante, del *minimo,* cioè, a cui si accenna, dipendono in modo essenziale dalla definizione di parte elementare che si è adottata. Tra le varie definizioni suggeribili, ne ho scelto tre, che, per la loro semplicità, più si presentano spontanee.

Secondo la *prima* definizione, *parte elementare della varietà è una* n-*cella,* o, per meglio dire, un n-elemento (cioè un complesso avente le matrici di incidenza identiche a quelle di una suddivisione di un n-simplesso). Si indichi con μ_0 l'invariante corrispondente. Quindi μ_0 *è il numero minimo di* n-*celle possedute da un complesso equivalente a* V.

Assumiamo, come *seconda* definizione di parte elementare, *una* n-*varietà a contorno regolare, i cui gruppi di omologia siano quelli di un* n-*simplesso;* e, come *terza, una* n-*varietà connessa, i cui* r-*cicli siano, per* $r > 0$, *tutti* ~ 0 *nella varietà ambiente* V. Siano μ_1 e μ_2 gli invarianti corrispondenti a queste nuove parti elementari.

(3) Si ricordi che due complessi sono detti *equivalenti* se esistono due loro suddivisioni *congruenti*, cioè tali che, per un opportuno ordinamento delle loro celle, presentino identiche matrici di incidenza.

In queste due ultime definizioni interviene il concetto di omologia. Quindi, se, variando il modulo $\mathfrak{M}$ cui appartengono i coefficenti delle catene di V, si cambia il tipo di omologia che si considera, si ottengono, in ciascuno dei due casi, parti elementari di differente definizione, e quindi differenti invarianti.

Le proprietà di μ_1 e di μ_2 studiate in questo lavoro sussistono tanto nel caso in cui $\mathfrak{M}$ sia il modulo dei numeri interi, come in quello in cui $\mathfrak{M}$ sia il modulo dei numeri interi mod m. Nei risultati che veniamo ad esporre supporremo quindi, senza più ricordarlo espressamente, di riferirci, nella definizione di μ_1 e di μ_2, indifferentemente ad uno qualsiasi dei casi ora detti.

2. Nella teoria di questi invarianti, qui sviluppata, si perviene a vari risultati, alcuni dei quali sono compendiati nelle proposizioni e nelle formule seguenti:

Nelle n*-varietà prive di contorno è*

(1) $$2 \leq \mu_i \leq n+1 \qquad (i=0,1,2),$$

e in quelle dotate di contorno è

(2) $$1 \leq \mu_i \leq n,$$

potendo in entrambi i casi le μ_i *assumere tutti i valori entro i limiti descritti;*

(3) $$\mu_i(A \times B) \leq \mu_i(A) + \mu_i(B) - 1$$

e

(4) $$\mu_i(A \dotplus B) \leq \mu_i(A) \quad \text{se} \quad \mu_i(A) \geq \mu_i(B) \text{ (}^4\text{)}.$$

Queste formule valgono nel campo delle varietà che soddisfano la definizione del BROUWER, ma, se è $i = 1, 2$, esse valgono anche nel campo delle varietà combinatorie [5].

Dalla (1) e dalla (2), supposto $i = 0$, si ha la seguente semplicissima proposizione di topologia delle varietà poliedrali:

Ogni n*-varietà priva di contorno può ottenersi saldando tra loro le facce di* n + 1 *opportuni* n*-poliedri convessi* (le facce da saldare appartengono sempre a diversi poliedri); *se si opera nello stesso modo su di un numero di poliedri, minore di* n + 1, *ciò non avviene più. In modo analogo, ogni* n*-varietà dotata di contorno regolare può essere costruita per mezzo di* n n*-poliedri e di non meno di* n.

Questi risultati non erano attesi, perchè il DEHN aveva fatto, su questo argomento, una previsione molto diversa, la quale, se esatta, avrebbe anzi

[4] Con il segno $\dotplus$ indico una particolare operazione di saldatura tra due varietà, definita nel n. 7.

[5] Tali definizioni di varietà sono riportate rispettivamente nel n. 1 del § 1 e nel n. 10 del § 3.

tolto alla teoria di questi invarianti vera ragione d'essere [6]. Per altro, nel caso di $n = 2$ e di $n = 3$, alcuni dei risultati esposti sono già stati dati dal Dehn stesso [7].

In questo lavoro sono ricercate le proprietà generali, comuni a tutti gli invarianti considerati, alcune delle quali costituiscono appunto i risultati già esposti; il primo paragrafo, che ha carattere introduttivo, ed il secondo sono dedicati esclusivamente a μ_0, essendo così possibile svolgere la trattazione con maggior semplicità e purezza.

Nel terzo paragrafo si estendono a μ_1 e a μ_2, con grande facilità, i risultati ottenuti nei riguardi di μ_0.

È bene richiamare l'attenzione su concetti quali quello di *complesso coniugato* (n. 2) e di *deformata di una varietà* (n. 4), che sono di grande giovamento, poichè permettono di raggiungere con semplicità di mezzi i risultati cercati, e sul *teorema* 5:1, che è fondamentale per lo svolgimento della teoria, così come è stata impostata.

3. La teoria svolta suggerisce varie interessanti questioni, in parte nuove e in parte collegate a problemi classici.

Consideriamo le differenze $r_1 = \mu_0 - \mu_1$ ed $r_2 = \mu_0 - \mu_2$: sono quantità ≥ 0, nulle nelle varietà più usuali e positive negli spazi del Poincaré, i quali costituiscono, com'è noto, varietà che hanno i gruppi di omologia di una cella o di una sfera, senza essere nè celle, nè sfere. Questi invarianti, quando non si annullano, indicano la presenza, nella varietà cui si riferiscono, di proprietà analoghe a quelle che differenziano gli spazi del Poincaré dalle sfere e dalle celle ordinarie. Queste proprietà complicano naturalmente la struttura topologica della varietà. Non è quindi arbitrario chiamare tali invarianti *irregolarità.*

§ 1. Concetti e osservazioni preliminari.

1. Per maggiore chiarezza, ricordiamo il significato di alcune locuzioni di topologia combinatoria che verranno usate frequentemente. Abbiamo già avuto occasione di richiamare il significato di equivalenza e di congruenza combinatoria tra due complessi [8]. Ricordiamo ora che per n-*elemento* si

---

[6] M. Dehn, *a)* pag. 167. Vedi anche A. Bassi *b).*

[7] Per $n = 2$ vedi M. Dehn und P. Heegaard, *a)* pag. 197. Per $n = 3$ vedi la Memoria M. Dehn, *a)*, pagg. 165-167.

[8] Vedi annotazione n. 3.

intende un n–complesso equivalente ad un n–simplesso, e cioè, congruente ad una suddivisione di questo. Per n-*cella* si intende, invece, un ordinario poliedro convesso. È chiaro che una n–cella è un n–elemento. In essa la suddivisione dell'n–simplesso, cui è congruente, è eseguita solo sulle facce contorno. Viceversa, se in un n–elemento si sopprime la suddivisione nell'interno di esso, si ottiene una n–cella.

La n–sfera è un n–complesso, equivalente al contorno di un $(n+1)$–simplesso. Dato un n–complesso C ed un vertice P di questo, si consideri il primo derivato C' di C, e la stella degli n–simplessi di C' di vertice P. L'insieme delle $(n-1)$–facce di tali simplessi, opposte a P, si dice *complesso avvolgente (linked complex)* di P rispetto a C.

Un n–complesso si dice una n-*varietà* se i complessi avvolgenti dei suoi vertici sono o $(n-1)$–elementi, o $(n-1)$–sfere. Quando, per alcuni vertici, si verifichi la prima eventualità, la varietà ha un *contorno*, cui appartengono i vertici detti.

Tale definizione, strettamente combinatoria, di varietà è quella qui adottata per i due primi paragrafi del lavoro. Essa risale sostanzialmente al BROUWER (9) e fu indi ripresa in considerazione dal NEWMAN e dall'ALEXANDER (10).

Faremo uso dei seguenti segni di relazioni od operazioni tra complessi: $\equiv$, $\cdot$, $+$, $-$, $\times$, $\dot{+}$.

Il segno $\equiv$ indica l'equivalenza combinatoria tra due complessi. Se A e B sono due complessi, aventi un sottocomplesso in comune (eventualmente vuoto), questo è indicato con $A \cdot B$; $A+B$ è invece il complesso costituito dall'insieme delle celle di A e di B. Il segno $-$ è qui usato topologicamente solo tra due n–varietà A e B; ed $A-B$ indica il complesso costituito dalle n–celle di A che non giacciono in B. $A \times B$ rappresenta l'ordinario prodotto topologico di A e B, ed il segno $\dot{+}$ indica una particolare operazione di saldatura tra varietà, definita nel n. 7.

Ciò premesso, ricordiamo ora alcune proposizioni elementari di topologia combinatoria, che trovansi dimostrate, ad esempio, nella Memoria dell'ALEXANDER sopra citata. Esse hanno molta importanza per il presente studio, perchè su di esse baseremo, in gran parte, la nostra trattazione.

Le riportiamo quindi, per comodità del lettore.

1:1. - *Se* E_1 *ed* E_2 *sono due* n-*elementi aventi il contorno in comune e privi di punti interni comuni,* $E_1 + E_2$ *è una* n-*sfera.*

---

(9) L. E. J. BROUWER, *a)*.

(10) M. H. A. NEWMAN, *a), b), c), d)*; J. W. ALEXANDER, *a)*.

1:2. - *Se* $S = E_1 + E_2$ *è una* n-*sfera, se i due* n-*complessi* E_1 *ed* E_2 *sono privi di* n-*simplessi in comune e se* E_1 *è un* n-*elemento, anche* E_2 *è un* n-*elemento.*

1:3. - *Se una* n-*varietà* V *dotata di contorno ed un* n-*elemento* E *hanno in comune una* (n — 1)-*cella del loro contorno e nessun altro punto in comune, è* $V + E \equiv V$.

1:4. - *Se* V *è una* n-*varietà dotata di contorno, se* E *è un* n-*elemento facente parte di* V, *se inoltre i contorni di* V *e di* E *hanno in comune un* (n — 1)-*elemento e nessun altro punto, è la varietà* $V - E \equiv V$.

In particolare:

1:5. - *Se* V *è un* n-*elemento, la varietà che si ottiene da* V, *con una delle due operazioni specificate nella* 1:3 *e nella* 1:4, *è ancora un* n-*elemento.*

Inoltre:

1:6. - *Se* V_1 *e* V_2 *sono due* n-*varietà dotate di contorno e aventi in comune una* (n — 1)-*varietà* W *del contorno di entrambe, e nessun altro punto fuori di questa,* $V_1 + V_2$ *è una* n-*varietà senza contorno, o con contorno, secondo che* W *esaurisce o no il contorno di entrambe.*

1:7. - *Se è la* n-*varietà* $V = V_1 + V_2$, *essendo* V_1 *e* V_2 *due* n-*complessi privi di* n-*simplessi in comune, se* V_1 *è una* n-*varietà aperta il cui contorno o sia privo di punti comuni con quello eventuale di* V, *o abbia in comune con esso una* (n — 1)-*varietà che non esaurisca il contorno di* V_1, *anche* V_2 *è una varietà* [11].

2. Data una n-varietà V, consideriamo il primo derivato V' di questa e le stelle degli n-simplessi di V' che hanno come centri i vertici di V. Per proprietà elementari delle suddivisioni baricentriche, ogni n-simplesso di V' fa parte di una e di una sola di tali stelle [12], e queste costituiscono le n-celle di un nuovo complesso V^*, equivalente a V.

Tale complesso V^* sarà detto *coniugato* di V. In esso ogni n-cella si dirà *coniugata* al vertice di V, centro della stella di n-simplessi, di cui essa è costituita.

Le r-celle ($r = 0, 1, \dots n-1$) di V^* sono:

1°) le celle *trasverse*, rispetto a V, delle $(n-r)$-celle di V (comprese,

---

[11] Le 1:1, 1:2, 1:3 corrispondono rispettivamente alle 14:1, 14:2 e 14:3 della Memoria citata dell'ALEXANDER; la 1:5 corrisponde all'insieme della 14:3a e della 14:5b; la 1:6 corrisponde, con qualche modificazione, all'insieme della 14:4 e della 14:5b; la 1:7, con qualche modificazione, alla 14:5a. La 1:4 è una conseguenza immediata della 1:7, della 1:2 e delle 1:3.

[12] Vedi, a questo proposito, ad esempio, S. LEFSCHETZ, *a)*, pag. 117 e segg..

tra queste ultime, le celle del contorno di V); le celle così ottenute non appartengono al contorno di V^*.

2°) le celle trasverse, rispetto al contorno di V, delle $(n - r - 1)$-celle del contorno; le celle così ottenute costituiscono il contorno di V^*.

V* *coincide col reticolato duale di* V *se* V *è priva di contorno, e solo in questo caso* (13).

Se V è un complesso *simpliciale in cui due simplessi non abbiano mai gli stessi vertici*:

2:1. - *Due* n*-celle di* V* *o sono prive di punti comuni o hanno una* (n — 1)*-cella in comune; più in generale, i* n*-celle di* V* *o sono prive di punti comuni o hanno in comune una* (n — *i* + 1)*-cella.*

Invero se due n-celle α_1 e α_2 di V^* hanno in comune un punto P, ad esse corrispondono due vertici A_1 e A_2 di V appartenenti all'n-simplesso π, coniugato a P. Esiste quindi uno spigolo b di vertici A_1 e A_2. L'$(n-1)$-cella β, trasversa di b è quindi comune al contorno di α_1 e di α_2.

Non possono α_1 e α_2 avere in comune un altro punto fuori di β, altrimenti A_1 e A_2 sarebbero estremi di un altro segmento di V, diverso da b, il che contraddice le ipotesi. Analogamente si ragiona per $i > 2$.

Mostreremo che una conseguenza della 2:1 è la

2:2. - *Un insieme qualsiasi di* n*-celle di* V* *costituisce una* n*-varietà.*

A tal fine, procederemo per induzione rispetto al numero r delle n-celle dell'insieme W considerato, osservando che, per la 2:1 e la 1:5, la proposizione è verificata se $r = 2$.

Sia E una delle n-celle di W, e sia $\overline{W}$ l'insieme delle $r - 1$ n-celle residue di W. Per l'induzione fatta, W è una n-varietà. Poichè ogni n-cella di W ha al più una $(n-1)$-cella contorno in comune con il contorno di E, quest'ultimo ha in comune con quello di W al più $r - 1$ $(n-1)$-celle b_i. Ma tra le n-celle di W si verifica la proprietà 2:1, e perciò la 2:1 stessa, in cui si legga $n - 1$ al posto di n, si verifica anche tra le dette $r - 1$ $(n-1)$-celle del contorno di W. L'insieme di queste $(n-1)$-celle è allora, per l'induzione fatta, una $(n-1)$-varietà (eventualmente vuota). Quindi, per la 1:6, anche W è una varietà.

(13) Se V presenta un contorno, il duale di V non è un complesso.

Può osservarsi che, se V ha un contorno, $(V^*)^* \neq V$. Si ha, anzi, che il coniugato di un reticolato generico di una varietà dotata di contorno non è generico, ma presenta delle particolarità, facili a determinarsi, riguardo alle celle che hanno punti sul contorno, senza giacere completamente in esso.

3. Diamo ora un complesso C ed un suo sottocomplesso K.

Diremo *intorno di* K *rispetto a* C *l'insieme di tutte le celle di* C *che hanno almeno un vertice su* K.

Nel seguito ci riferiremo ad intorni di K presi rispetto ad una opportuna suddivisione di C; questa sarà la derivata di C del second' ordine, o di un ordine superiore $j > 2$. Chiameremo gli intorni così ottenuti *intorni di ordine* j e li indicheremo con $I_j^C(K)$, o, quando non vi sia ambiguità, con $I_j(K)$.

Per elementari proprietà delle suddivizioni baricentriche, si ha che:

3:1. - *Se è* $\mathrm{H}\cdot\mathrm{K} = 0$ *o è* $\mathrm{H}\cdot\mathrm{K} = \mathrm{L}$, *rispettivamente è*

$$I_j(H)\cdot I_j(K) = 0 \quad o\ \grave{e} \quad I_j(H)\cdot I_j(K) = I_j(L) \qquad (j \geq 2).$$

Gli intorni di ordine $j \geq 2$ presentano un interesse speciale, perchè hanno un significato fisico molto chiaro: si prova, infatti, facilmente che, rappresentato C in uno spazio euclideo, $I_j^C(K)$ è combinatorialmente equivalente al luogo dei punti di C, che distano da K meno di un ε sufficentemente piccolo.

3:2. - *Se* V *è una* n*-varietà e* K *un suo sottocomplesso*, $\mathrm{I}_2(\mathrm{K})$ *e* $\mathrm{V}'' - \mathrm{I}_2(\mathrm{K})$ *sono* n*-varietà (quest' ultima eventualmente vuota).*

Infatti $I_2(K)$ è costituito dalle n-celle di V'^* coniugate ai vertici del primo derivato K' di K e $V'' - I_2(K)$ è costituito dalle residue n-celle di V'^*. Ora si è già osservato (2:2) che siffatti insiemi di n-celle sono varietà.

Osserviamo ora, una volta per tutte, che la proprietà degli intorni del second' ordine che ora abbiamo esposta, e quelle che verremo esponendo sono conseguenza esclusivamente del fatto che tali intorni sono insiemi di n-celle coniugate ai vertici di un reticolato simpliciale, in cui due simplessi non hanno mai gli stessi vertici. *Tali proprietà continuano quindi a sussistere anche per gli intorni di ordine più elevato* $\mathrm{j} > 2$.

Veniamo a dimostrare che

3:3. - *Se* V *è una* n*-varietà dotata di contorno, e se* K *è un sottocomplesso del contorno (coincidente eventualmente con tutto il contorno), è* $\mathrm{V}'' - \mathrm{I}_2(\mathrm{K}) \equiv \mathrm{V}$.

$I_2(K)$ è l' insieme delle n-celle del coniugato del primo derivato di V, V'^*, coniugate ai vertici del primo derivato K' di K. Il teorema è vero se K si riduce ad un solo vertice P: in tal caso, infatti, il contorno di $I_2(P)$ ha in comune con quello di V l' $(n-1)$-elemento duale di P rispetto al primo derivato del contorno, e vale quindi la 1:4. Procediamo indi per induzione rispetto al numero dei vertici di K', e supponiamo il teorema vero quando si tolgano a V tutte le n-celle di V'^* di cui $I_2(K)$ è costituito, eccetto una E, coniugata ad un vertice Q di K'. E sia $\bar{V}$ il complesso ottenuto. $\bar{V}$, essendo un insieme di n-celle di V'^*, è (2:2) una varietà. Il contorno di E consta di quanto E ha in comune con il contorno di $\overline{V}$ e di una parte residua, che è il complesso trasverso di Q rispetto a $\overline{V}$. Ma, essendo Q un vertice del contorno di $\overline{V}$, tale complesso trasverso è una $(n-1)$-cella. Segue (1:2) che i contorni di E e $\overline{V}$ hanno una $(n-1)$-cella in comune, e che quindi (1:4) $\overline{V} - E = V'' - I_2(K)$ è equivalente a $\overline{V}$. Ma, essendo per l'induzione fatta, $\overline{V} \equiv V$, sarà pure $V'' - I_2(K) \equiv V$.

Una proprietà analoga alla 3:3 è la

3:4. - *Se* V *è una* n-*varietà dotata di contorno, contenuta in una* n-*varietà* W, *e se* K *è un complesso del contorno di* V *(eventualmente coincidente con tutto il contorno), è* $\mathrm{V} + \mathrm{I}_2^{\mathrm{W}}(\mathrm{K}) \equiv \mathrm{V}$.

Nell'ipotesi che $W - V$ sia una n-varietà (il che certo si verifica se i contorni di V e di W non hanno punti in comune), la dimostraziane della 3:4 può farsi in modo perfettamente analogo a quella della 3:3, richiamandosi alla 1:3 invece che alla 1:4.

Se, al contrario, $W - V$ non è una varietà, si identifichi il contorno di W con quello di un'altra varietà, W_1, avente un contorno congruente a quello di W; e si consideri l'insieme Z di W_1 e di W, costituente una varietà chiusa (1:6). $Z - V$ è ora certo una n-varietà. Quindi, posto $V_1 = V + I_2^Z(K)$, è $V_1 \equiv V$. Ma $I_2^W(K) = I_2^Z(K) - I_2^{W_1}(K_1)$, ove con K_1 si è indicato il sottocomplesso di K (eventualmente anche nullo, o coincidente con K) che appartiene al contorno di W. Basterà quindi provare che è $V_1 - I_2^{W_1}(K_1) \equiv V_1$, cosa che si dimostra subito ragionando per induzione rispetto al numero dei vertici di K_1', primo derivato di K_1, in modo del tutto analogo a quello tenuto nel dimostrare la 3:3.

In particolare abbiamo che

3:5. - *Se nei teoremi precedenti* V *è una* n-*cella, le operazioni descritte negli enunciati* 3:3 *e* 3:4 *trasformano* V *in un'altra* n-*cella.*

Osserviamo ancora che

3:6. - *L'intorno del second'ordine di un* 1-*elemento* K *di* V *è un* n-*elemento.*

Se ricordiamo che tale intorno è costituito da n-celle di V'^*, la proposizione si dimostra subito ragionando per induzione rispetto al numero r dei vertici di K' e riferendoci ad un complesso K_1' costituito da tutti i segmenti di K', eccetto quello contenente un estremo di K.

4. Siano: C un n-complesso e H e K dei sottocomplessi di C, e H non sia contenuto in K. Indicato, come di consueto, con $H^{(j)}$ il derivato di ordine j di H, si consideri l'$\overline{H} = H^{(j)} - I_j(K)$ e poi l'intorno di ordine j H_j di $\overline{H}$ rispetto a $C^{(j)} - I_j(K)$.

Chiameremo H_j *il deformato di ordine* j *di* H *rispetto a* K.

Se C è una n–varietà ed H è una n–cella, per la 3:5, $\bar{H}$ è equivalente ad H, ed essendo, per la 3:2, $C^{(j)} - I_j(K)$ una n–varietà, H_j è equivalente ad H (3:5) ed è quindi un n–elemento.

Scritte ora le n–celle dell'n–varietà V nell'ordine

(5) $$A^1,\ A^2, \dots,\ A^r,$$

si consideri la successione

(6) $$A_j^1,\ A_j^2, \dots,\ A_j^r,$$

ove A_j^1 è l'intorno di ordine j di A_j^1, e A_j^i $(i > 1)$ è la deformata di ordine j di A^i rispetto all'insieme delle n–celle A^1, $A^2, \dots,$ A^{i-1}. Poichè ogni n–simplesso del derivato j^{mo} di V appartiene ad uno e ad uno solo degli n–elementi della successione (6), questi, quando siano tolte in ciascun n–elemento le suddivisioni interne, sì da ridurlo ad un n–cella poliedrale, costituiscono le n–celle di un nuovo complesso, equivalente a V, che diremo *deformato di ordine* j *di* V e che indicheremo con V_j.

Notiamo che

4:1. - *Un insieme qualsiasi di* n–*celle di* V_j *è una* n–*varietà, se è* $j \geq 2$.

Infatti le A_j^i, per il modo con cui sono state costruite, sono un insieme di n–celle del coniugato $V^{(j-1)*}$ del derivato di V di ordine $j - 1$. Un insieme di n–celle di V_j è quindi altresì un insieme di n–celle di $V^{(j-1)*}$, e, per la (2:2), è quindi una varietà, se è $j \geq 2$.

Per proprietà elementari delle suddivisioni baricentriche, A_j^1 è contenuto in A_{j-t}^1 e le facce contorno di A_j^1 non hanno alcun punto in comune con il contorno della varietà $V_{j-t} - A_{j-t}^1$. Più in generale, l'insieme $A_j^1 + A_j^2 + \dots + A_j^i$ è contenuto nell'analogo insieme $A_{j-t}^1 + A_{j-t}^2 + \dots + A_{j-t}^i$, e il contorno del primo non ha alcun punto in comune con quello della varietà $V_{j-t} - (A_{j-t}^1 + A_{j-t}^2 + \dots + A_{j-t}^i)$ cioè con quello della varietà $A_{j-t}^{i+1} + A_{j-t}^{i+2} + \dots + A_{j-t}^r$. Da ciò si ricava la relazione

(7) $$A_j^i \cdot A_{j-t}^{i+v} = 0,$$

per $i = 1,\ 2, \dots,\ r - 1,\ t > 0,\ v > 0,\ j = 3,\ 4, \dots$.

§ 2. Questioni sulla decomponibilità di una varietà in celle.

5. I concetti introdotti nel paragrafo precedente permettono di procedere rapidamente nello studio dell'invariante μ_0.

Incominciamo col dimostrare il seguente

5:1. - Teorema: *Se le* n-*celle di una* n-*varietà connessa* V *si possono ripartire in* r *classi, tali che due celle di una stessa classe siano prive di punti comuni, esiste una varietà equivalente a* V *composta di* r n-*celle.*

In altre parole, nelle ipotesi dette, V *può essere ricoperta da un complesso costituito di* r n-*celle.*

La dimostrazione di questo teorema consiste sostanzialmente nel mostrare che è possibile modificare il reticolato della varietà in modo che al posto di due n-celle di una stessa classe, data arbitrariamente, venga ad aversi una sola cella, rimanendo invariato il numero delle classi, e quello delle celle componenti le altre classi.

Una tale operazione, infatti, diminuisce di un'unità il numero delle n-celle di una classe, se questo è > 1; ed è ben evidente che mediante il prodotto di operazioni di questo genere, si possa ridurre ad 1 il numero delle n-celle di tutte le classi, venendo così a determinare una varietà equivalente alla data e di sole r n-celle.

Sia allora A la classe di n-celle considerata, siano A_1 e A_2 due n-celle di questa, e siano P_1 e P_2 due vertici del contorno di A_1 e di A_2, rispettivamente. Poichè V è connessa, potremo trovare una successione a di segmenti, tale che due segmenti consecutivi abbiano un vertice in comune, e avente P_1 e P_2 come estremi.

Potremo supporre che a sia senza nodi e che, per un'opportuna coppia di n-celle A_1 e A_2, solo P_1 e P_2 siano vertici di celle della classe A. Infatti, se la a presentasse un nodo, detti Q_i e Q_{i+1} i vertici del segmento l_i ($Q_1 = P_1$, $Q_r = P_2$), in essa due vertici Q_i e Q_{i+d} $(d > 1)$ coinciderebbero, e, togliendo dalla a i segmenti $l_i, \ldots l_{i+d-1}$, si otterrebbe un'altra successione di segmenti, in cui Q_i non ha più quel nodo, e avente le altre proprietà di a. Se a invece contenesse, oltre P_1 e P_2, altri vertici di celle della classe A, basterebbe, per evitare questa eventualità, percorsa la spezzata da P_1 a P_2, denominare con A_2 la *prima* delle n-celle della classe A che essa tocca dopo A_1, con P_1 l'*ultimo* dei vertici di a che giace su A_1 e con P_2 il *primo* che appartiene ad A_2.

Consideriamo ora l'intorno del secondo ordine di a, $I_2(a)$, che, per la 3:6, è un n-elemento. Esso ha in comune con A_1 l'intorno di secondo ordine di P_1 rispetto ad A_1. La parte residua di A_1, $\bar{A}_1$, per la 3:5, è un n-elemento. Il suo contorno ha in comune con quello di $I_2(a)$ l'$(n-1)$-elemento, complesso trasverso di P_1 rispetto ad A_1'. Analogamente, posto $A_2 = A_2 - I_2(a)$, si ha che il contorno di $\bar{A}_2$ ha in comune con quello di $I_2(a)$ l'$(n-1)$-elemento, complesso trasverso di P_2 rispetto ad A_2'. E siccome

$A_1 \cdot A_2 = 0$, applicando due volte la 1:5, abbiamo che l'insieme di $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ e $I_2(a)$, cioè anche quello di A_1, A_2 e $I(a)$ è un n-elemento $\mathfrak{A}$.

Presa ora una qualsiasi r-cella ($r = 0, 1, \ldots n$) B di V che non appartenga ad a, poniamo $\bar{B} = B - I_2(k)$, dove k è il complesso (eventualmente vuoto) che il contorno di B ha in comune con a. Per la 3:5, $\bar{B}$ è una r-cella.

Si sostituisca ora alla reticolazione primitiva di V il reticolato equivalente $\bar{V}$, costituito dall'n-elemento $\mathfrak{A}$ (nel quale si siano tolte le suddivisioni interne sì da ridurlo una n-cella), dalle celle contorno di $\mathfrak{A}$, e dalle $\bar{B}$. La $\mathfrak{A}$ non ha alcun punto in comune con le residue n-celle $\bar{A}_i = A_i$ ($i = 3, 4, \ldots$) della classe A, perchè, essendo a esterno alle residue A_i, anche $I(a)$ (3:1) è esterno a tali A_i. La $\mathfrak{A}$ può quindi formare una sola classe con tali A_i. D'altra parte, si faccia corrispondere ad una B il suo residuo $\bar{B}$. Poichè da $B_1 \cdot B_2 = 0$ segue che $\bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2 = 0$, ad n-celle di una stessa classe di V corrispondono n-celle di una stessa classe di $\bar{V}$. Quindi le r classi di V si trasformano in altrettante classi di n-celle di $\bar{V}$ a due a due prive di punti comuni. Ciascuna di queste classi ha lo stesso numero di n-celle della classe di V a cui corrisponde. Fa eccezione la classe corrispondente alla A. Tale classe infatti, avendo perso, per la trasformazione, le due celle A_1 e A_2 ed acquistato la nuova cella $\mathfrak{A}$, si trova ad avere il numero delle sue n-celle diminuito di un'unità.

Abbiamo dunque trasformato la V nel modo che si voleva. A norma delle osservazioni già fatte, il teorema è quindi dimostrato.

Vi è un caso, che interessa le prossime pagine, in cui il teorema dimostrato si può migliorare. Infatti:

5:2. – *Se* V *è una varietà con contorno, e se le* n*-celle di una,* A, *delle* r*-classi considerate nell'enunciato della* 5:1 *sono prive di punti comuni con il contorno, esiste una varietà equivalente a* V *composta di* r — 1 n*-celle.*

Uniamo un vertice P_1 di una n-cella A_1 della classe A con un vertice P_2 del contorno di V, mediante una successione a di segmenti (si abbiano anche qui le precauzioni che a sia senza nodi e che non abbia altri vertici di celle della classe A oltre P_1, nè altri vertici del contorno di V, oltre P_2). Ancora avremo che $\mathfrak{A} = A_1 + I_2(a)$ è un n-elemento. Essa ha un $(n-1)$-elemento del contorno sul contorno di V (precisamente l'intorno del secondo ordine di P_2 rispetto al contorno), sicchè, per la 1:4, $\bar{V} = V - \mathfrak{A}$ è equivalente a V.

Si rifacciano ora, nei riguardi di $\bar{V}$, quelle osservazioni fatte nella dimostrazione del teorema precedente circa la varietà ivi rappresentata dallo stesso simbolo. La conclusione cui si perviene è perfettamente analoga: che cioè, $\bar{V}$ risulta reticolata, come la V, da un complesso avente r classi di

n–celle, ma in cui la classe di V corrispondente alla A di V ha una cella di meno, essendosi eliminata la n–cella A_1.

Ora questo procedimento può di nuovo applicarsi ad un'altra cella della classe A, e, colla sua applicazione ripetuta, provoca la eliminazione di *tutte* le n–celle della classe A. Si perviene così ad una varietà equivalente a V, in cui le classi considerate di n–celle sono solo $r - 1$. A questo punto, basta applicare il procedimento descritto nella dimostrazione della 5:1, per concludere nel modo enunciato.

6. Diamo ora una n–varietà V, e consideriamo il coniugato V'^* del primo derivato di V. Le n–celle di V'^* sono coniugate dei vertici di V', e questi o sono vertici di V, o sono interni ad una r–cella di V. Essi corrispondono quindi biunivocamente alle celle di V. Perciò le n–celle di V'^* corrispondono biunivocamente alle r–celle di V $(r = 0, 1, \ldots, n)$. Se si mettono in una stessa classe le n–celle di V'^* che corrispondono a celle di V di una stessa dimensione, tali celle sono a due a due prive di punti comuni. Infatti, se due tali n–celle avessero un punto in comune, avrebbero in comune altresì una $(n - 1)$–cella (2:1), e quindi i vertici di V', loro corrispondenti, sarebbero estremi di un segmento di V'. Ora ciò è assurdo, perchè i vertici di un simplesso di V' sono sempre interni a celle di V di dimensione diversa. Poichè le classi di n–celle di V'^* così costruite sono $n + 1$, concludiamo (5:1) che:

6:1. – *Ogni* n–*varietà (priva di contorno) può reticolarsi con un complesso costituito di* n + 1 n–*celle.*

Vedremo tra poco che il numero delle n–celle così ottenuto non può ulteriormente ridursi, per la varietà più generale, se questa è priva di contorno. Se invece la varietà presenta un contorno, consideriamo la classe delle n–celle di V'^* corrispondenti alle n–celle di V. È subito visto che le n–celle di questa classe non hanno alcun vertice sul contorno di V: invero ciascuna di esse si ottiene dalla n–cella di V cui corrisponde, togliendo a questa l'intorno del second'ordine del proprio contorno. Applicando la 5:2, potremo allora concludere che

6:2. – *Ogni* n–*varietà dotata di contorno può reticolarsi con un complesso costituito di* n n–*celle.*

Vedremo tra poco che il numero delle n–celle ora ottenuto non può ulteriormente ridursi per la varietà più generale dotata di contorno.

Osserviamo ancora che

6:3. – *Se* K *è un* r–*complesso connesso facente parte di una* n–*varietà* V, *l'intorno del secondo ordine di* K *rispetto a* V *è una varietà reticolabile con un complesso costituito di* r + 1 n–*celle.*

In primo luogo, $I_2(K)$ è una n-varietà connessa, perchè costituito dalle n-celle di V'^* corrispondenti alle celle del complesso connesso K. Essendo queste ultime di $r+1$ dimensioni diverse, le n-celle a queste corrispondenti si potranno suddividere nelle $r+1$ classi diverse delle n-celle corrispondenti a celle di K di una stessa data dimensione. Poichè le n-celle di una stessa classe sono prive di punti comuni, segue (5:1) la 6:3.

La 6:2, benchè apparentemente di natura diversa da quella della 6:3, può considerarsi una conseguenza della 6:3, perchè si ha che:

6:4. – *Ogni* n-*varietà* V *dotata di contorno è equivalente all'intorno del secondo ordine rispetto a* V *di un opportuno* (n — 1)-*complesso in essa contenuto.*

Si ordinino infatti le n-celle di V, $A_1, A_2, \ldots, A_t$, in modo che A_1 abbia una $(n-1)$-cella contorno, b_1, sul contorno di V, e in modo che A_i e l'insieme delle $A_1, \ldots, A_{i-1}$ abbiano una $(n-1)$-cella contorno b_i in comune (oltre ad eventuali altri elementi cellulari). Tale ordinamento è sempre possibile. Si vede allora subito che l'insieme C delle n-celle di V'^* corrispondenti alle A e alle b è un n-elemento, avente un $(n-1)$-elemento del contorno in comune col contorno di V'^*: C risulta infatti l'intorno, rispetto a V'', dell'1-elemento costituito dei segmenti trasversi dei b. Quindi (1:4) $M - C$ è equivalente ad M. Ma $M - C$ è l'intorno del secondo ordine, rispetto ad M, del $(n\ \ 1)$-complesso delle $(n-1)$-celle di V diverse dalle b.

7. Veniamo ora a provare che

7:1. – Teorema: *Se* A *e* B *sono due varietà e* $A \times B$ *è la varietà loro prodotto topologico,*

$$\mu_0(A \times B) \leq \mu_0(A) + \mu_0(B) - 1. \tag{8}$$

Supponiamo la varietà A ad n dimensioni, reticolata da un complesso di r n-celle $A^1, A^2, \ldots, A^r$, e la B, ad m dimensioni, da un complesso di s m-celle $B^1, B^2, \ldots, B^s$.

Reticoleremo la $A \times B$ suddividendola, in primo luogo, nei prodotti parziali $A \times B^l$, $l = 1, 2, \ldots, s$. Indi converrà valerci per A di un complesso, che vari al variare di l, e che sarà il deformato di A di ordine $l+1$. $A \times B$ risulterà decomposto secondo lo schema $\sum_{l}^{s}{}_{1} A_{l+1} \times B^l$. Consideriamo infatti la matrice

$$\begin{matrix} A_2^1 \times B^1 & A_2^2 \times B^1 & \ldots & A_2^r \times B^1 \\ A_3^1 \times B^2 & A_3^2 \times B^2 & \ldots & A_3^r \times B^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{s+1}^1 \times B^s & A_{s+1}^2 \times B^s & \ldots & A_{s+1}^r \times B^s \end{matrix} \tag{9}$$

(ove A_j^i è il deformato di ordine j di A^i), i cui elementi rappresentano le $r \times s$ $(n+m)$–celle di un reticolato R di $A \times B$. Dalla $A_j^i \cdot A_{j-t}^{i+v} = 0$ del n. 4 si ricava che la cella di R rappresentata dal simbolo $A_j^i \times B^{j-1}$ non ha alcun punto in comune con una qualunque cella di R, della forma $A_{j-t}^{i+v} \times B^{j-t-1}$ ($v > 0$ e $t > 0$), cioè rappresentata da un simbolo che, nella matrice scritta, si trova a destra della verticale e superiormente alla orizzontale che passa per $A_j^i \times B^{j-1}$.

Da ciò si ha che i termini della (9), che sono su di una data parallela alla diagonale non principale di una matrice quadrata estratta dalla (9), rappresentano una classe di $(n+m)$–celle di R, prive a due a due di punti comuni. Ma il numero di tali classi, comprendendo in esse anche i due elementi isolati, situati nell'angolo superiore sinistro e in quello inferiore destro della matrice, è $r + s - 1$. $A \times B$ è quindi reticolabile, per la 5:1, da un complesso costituito da $r + s - 1$ $(n+m)$–celle.

Se $r = \mu_0(A)$ e se $s = \mu_0(B)$, si ha, in particolare, il teorema.

Ricordiamo ora un'operazione di saldatura tra n–varietà dotate o prive di contorno, definita in un'altra Memoria dell'A. ([14]): questa operazione, applicata a due varietà con contorno, consiste nella identificazione di un $(n-1)$–simplesso del contorno dell'una con un $(n-1)$–simplesso del contorno dell'altra; applicata invece a varietà prive di contorno, consiste nella sottrazione di un n–simplesso a ciascuna di esse, e nella identificazione delle facce dei contorni così ottenuti. Se, invece di identificare una coppia di $(n-1)$–simplessi o una coppia di contorni di n–simplessi, si identifica rispettivamente una coppia di $(n-1)$–elementi del contorno che siano congruenti, o una coppia di $(n-1)$–sfere contorno congruenti, la operazione così definita ha le stesse proprietà topologiche della precedente.

La operazione considerata, applicata a due varietà con contorno, conduce ad una varietà con contorno, e, applicata a due varietà prive di contorno, conduce ad una varietà priva di contorno (1:6).

Rappresenteremo una tale operazione tra varietà con il segno $\dot{+}$. Essa coincide con l'operazione $+$, se è applicata a varietà con contorno.

Mostriamo ora che:

7:2. - *Se* A *e* B *sono due varietà entrambe con contorno, o entrambe senza contorno, supposto* $\mu_0(A) \geq \mu_0(B)$, *è*

$$\mu_0(A \dot{+} B) \leq \mu_0(A). \tag{10}$$

([14]) A. BASSI, *a*).

Siano la A e la B reticolate da un complesso costituito rispettivamente di r n-celle A_i e di s n-celle B_j $(r \geq s)$, e supponiamo, per esempio, le varietà A e B entrambe chiuse.

Se a_{12} è una $(n-1)$-cella di A che separa due n-elementi A_1 e A_2, si costruisca in A_1 un n-simplesso σ di punti interni ad A_1 eccetto che in una sua faccia $(n-1)$-dimensionale τ, che sarà di punti interni ad A_2, e si estraggano i punti interni a σ. Si ripeta la stessa operazione sulla B, e si identifichino i contorni sferici di A e di B, in modo che la faccia τ si sovrapponga colla sua analoga nella b_{12}, di B. È allora chiaro che l'insieme di A_1 e di B_1, avendo A_1 e B_1 in comune un $(n-1)$-elemento dei loro contorni, è una n-cella C_1, e che è una n-cella C_2 anche l'insieme di A_2 e di B_2. Consideriamo inoltre, per $i = 3, 4, \ldots, s$, l'insieme C_i delle n-celle A_i e B_i (n-celle che sono prive di punti comuni), e, per $i = s+1, \ldots, r$, si ponga $C_i = A_i$. È chiaro che le n-celle di $A + B$ sono, in tal modo, suddivise in r classi C_i, di una o due n-celle, soddisfacenti le proprietà dell'enunciato 5:1. $A \dot{+} B$ sarà quindi reticolabile da un complesso costituito di r n-celle. Se $\mu_0(A) = r$ e $\mu_0(B) = s$, si ha, in particolare, il teorema enunciato.

La dimostrazione nel caso che A e B abbiano entrambe un contorno è del tutto analoga.

8. Veniamo ora a mostrare, con semplicissimi esempi, che la μ_0 può assumere tutti i valori consentiti dai teoremi 6:1 e 6:2.

Premettiamo che:

8:1. - *Se* V *è il prodotto di* k *sfere* $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_\mathrm{k}$ *(ciascuna di dimensione arbitraria, purchè maggiore di zero), è* $\mu_0(\mathrm{V}) = \mathrm{k} + 1$.

Infatti, essendo $\mu_0(S_i) = 2$, per la 7:1, sarà, in primo luogo, $\mu_0(V) \leq k+1$.

Esaminiamo se può essere $\mu_0(V) < k+1$.

Siano $C_1, C_2, \ldots, C_k$ k celle della massima dimensione di un complesso che reticola V. Fissiamo su ciascuna S_i un punto P_i e consideriamo le k sottovarietà V_i che, per ogni i, corrispondono al prodotto di P_i e di tutte le sfere diverse da S_i. Esse hanno in comune un punto P, corrispondente ai P_i, ed hanno quindi un indice topologico, relativo alla loro intersezione multipla, di valore assoluto uguale ad 1. Deformiamo allora la V_j in una V_j' tale che $C_j \cdot V_j' = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$ (ove C_j è considerato, come sempre, insieme ai punti contorno). Le V_j', di indice topologico ancora in valore assoluto uguale ad 1, hanno in comune un insieme di punti non vuoto, che è necessariamente esterno all'insieme delle celle $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Queste non ricoprono quindi tutta V. Abbiamo perciò $\mu_0(V) \geq k+1$, sicchè concludiamo nel modo esposto.

È ora immediato che, fissato un valore di n, si possono determinare le dimensioni n_i delle sfere S_i, in modo che sia $\Sigma n_i = n$, e che le sfere siano in un numero arbitrario, compreso tra 1 ed n.

Dalla 8:1 e dalla 6:1 potremo infine concludere che:

8:2. – *La* μ_0 *può assumere, nel campo delle varietà chiuse, un valore intero qualsiasi, compreso tra* 2 *ed* n + 1, *e solo un tale valore.*

Reticoliamo ora una n–varietà chiusa mediante un complesso K costituito dal numero minimo μ_0 di n–celle, complesso che diremo perciò, brevemente, *minimo*, e, ordinate queste ultime in un modo qualsiasi, consideriamone il deformato del secondo ordine K_2, il quale ha pure μ_0 n–celle. Si ha allora che: *Un insieme qualsiasi di* r n–*celle di* K_2 *è una* n–*varietà connessa avente* $\mu_0 = \mathrm{r}$.

Tale insieme è infatti una varietà (4:1). È connessa, altrimenti esisterebbero almeno due n–celle di K_2 prive di punti comuni, e allora, a norma del teorema 5:1, K_2 sarebbe reticolabile da un complesso avente meno di μ_0 n–celle. Ha inoltre $\mu_0 = r$, perchè tale varietà è reticolata da un complesso di r n–celle, e non può esser reticolata da un complesso avente un numero minore di celle, poichè altrimenti anche K_2 risulterebbe reticolabile da un complesso avente meno di μ_0 n–celle.

Perciò se K_2 reticola una n–varietà priva di contorno, avente $\mu_0 = n + 1$, gli insiemi di 1, 2,... n n–celle di K_2 danno esempi di n–varietà con contorno aventi un μ_0 arbitrario, compreso tra 1 ed n. Quindi, tenuto conto anche della 6:2, potremo concludere che:

8:3. – *La* μ_0 *può assumere nel campo delle varietà aperte un valore qualsiasi compreso tra* 1 *ed* n, *e solo un tale valore.*

§ 3. Considerazioni sugli invarianti μ_1 e μ_2.

9. Una grande parte dei risultati ottenuti nei riguardi di μ_0 si estende a μ_1 e a μ_2.

Si può vedere, in primo luogo, che i due risultati 8:2 e 8:3, che concludono la teoria svolta, sussistono anche nei riguardi di μ_1 e di μ_2.

A tal fine basterà mostrare che negli esempi portati per giustificare la 8:2 e la 8:3 è $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$.

Poichè in ogni varietà è evidentemente

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2, \tag{11}$$

sarà sufficente provare che in tali esempi è $\mu_0 = \mu_2$. Basterà quindi dimostrare che nella varietà ad r dimensioni V, prodotto di k sfere (ciascuna di dimensione maggiore di zero) è $\mu_2(V) = k + 1$ ([15]).

Ma dalla 8:1 e dalla (11) si trae che $\mu_2(V) \leq k + 1$. Tutto si ridurrà perciò a dimostrare che se $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sono k parti elementari, ad r dimensioni, di V, soddisfacenti la terza delle definizioni considerate nel n. 1 dell'Introduzione, e prive a due a due di r-simplessi in comune, esse non possono ricoprire l'intera varietà V.

A tal fine, consideriamo in V una, V_i, delle sottovarietà ad s_i dimensioni, che intervengono nella dimostrazione della 8:1, e mostriamo che si può trovare un ciclo V_i' di V, esterno a C_i e tale che $V_i' \backsim \lambda_i V_i$, con $\lambda_i \neq 0$. Da ciò si ricava che l'indice multiplo del KRONECKER $(V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_k) = 1$ (qualora le V_i siano opportunamente orientate), e che $(V_1' \cdot V_2' \cdot \ldots \cdot V_k') = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k$, ove $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k \neq 0$; che quindi l'intersezione geometrica di $V_1', \ldots, V_k'$ è non vuota, e che perciò, essendo questa intersezione esterna all'insieme di C_1, $C_2, \ldots, C_k$, questo insieme non può, per l'appunto, ricoprire tutta la V.

Dobbiamo quindi solamente provare l'esistenza dei detti V_i'.

Sostituiamo a C_i l'insieme, C_i', di C_i e dell'intorno del second'ordine di C_i; C_i' è equivalente a C_i (vedi proposizione 3:4) ed è quindi ancora una parte elementare. Poichè V è priva di contorno, il contorno D_i' di C_i' non ha punti in comune con quello di C_i.

Poniamo ora $V_i = V_i^* + W_i$, ove V_i^* è la catena costituita dall'insieme dei termini dell'espressione di V_i relativi ad s_i-simplessi che appartengono a C_i', e W_i è la catena dei termini residui. $V_i^* \rightarrow Y_i$, ove Y_i è un $(s_i - 1)$-ciclo di D_i'. Secondo una locuzione del LEFSCHETZ, V_i^* è un ciclo *relativo* o *modulare* della varietà *relativa* $C_i' \bmod D_i'$.

Sia ora Γ un $(r - s_i)$-ciclo ordinario (o assoluto, secondo la terminologia del LEFSCHETZ) di C_i'. Siccome C_i' è una parte elementare di V, a norma della *terza* definizione che di tale parte si diede, qualunque sia il tipo di omologia al quale, secondo quanto si osservò nel n. 1 dell'Introduzione, ci si riferisca nella definizione, Γ è, relativamente a V, un divisore dello zero, rispetto alle omologie ordinarie. L'indice del KRONECKER di Γ e di V_i è quindi nullo, ed è perciò nullo anche quello, coincidente col primo, del ciclo ordinario Γ e del ciclo relativo V_i^*, pensati entrambi appartenenti alla varietà relativa C_i'.

Il ciclo relativo V_i^* di C_i' ha quindi indice del KRONECKER nullo con tutti

---

([15]) Quest'ultima proprietà (di cui è data qui una dimostrazione diretta) risulta anche conseguenza di una proprietà generale dell'invariante μ_2, della quale intendo occuparmi in un prossimo lavoro.

i cicli ordinari di C_i', di dimensione complementare. Per un teorema noto ([16]), esso è quindi divisore dello zero mod D_i'; esiste cioè una (s_i+1)-catena $\mathcal{C}$ di C_i' tale che $\mathcal{C} \to \lambda_i V_i^* - Z_i$, ove $\lambda_i \neq 0$ ed ove Z_i è una catena del contorno D_i' di C_i'.

Ma, poichè $\lambda_i V_i^* - Z_i \to 0$ e $V_i^* \to Y_i$, sarà $Z_i \to \lambda_i Y_i$. D'altra parte $V_i = V_i^* + W_i \to 0$, e quindi la catena $V_i' = \lambda_i W_i + Z_i$ è un ciclo. Ma dalla relazione $\lambda_i V_i - V_i' = \lambda_i V_i^* - Z_i$ e dalla $\mathcal{C} \to \lambda_i V_i^* - Z_i$ abbiamo allora che $V_i' \backsim \lambda_i V_i$.

Inoltre V_i' ha in comune con C_i' i punti della catena Z_i, che appartiene al contorno di C_i'. Ma si è osservato che tale contorno non ha alcun punto in comune con quello di C_i. Quindi V_i' non ha alcun punto in comune con C_i.

È quindi provato quanto si voleva.

10. Osserviamo ora che, *nei riguardi di* μ_1 *e di* μ_2, *le* 8:2 e 8:3 *valgono anche per le varietà combinatorie.*

Tali varietà combinatorie sono una categoria di complessi più vasta di quella delle varietà ordinarie, e in cui le proprietà di carattere omologico riguardanti le varietà hanno, com'è noto, il loro più appropriato campo di validità ([17]).

Poichè è $\mu_1 \geq \mu_2$ e poichè negli esempi dati per giustificare la 8:2 e la 8:3 è $\mu_1 = \mu_2$, basterà mostrare la cosa nei riguardi di μ_1. La proprietà accennata è dovuta al fatto che la maggior parte delle proposizioni del NEWMAN e dell'ALEXANDER, richiamate nel n. 1, e di cui la teoria qui svolta è una conseguenza, si conservano valide quando nei loro enunciati si sostituiscano le parole « elemento », « sfera », « varietà », rispettivamente con le parole « cella combinatoria », « sfera combinatoria », « varietà combinatoria ».

Infatti, un breve esame, fatto fondandosi, quando è il caso, su di una recente formola del MAYER-VIETORIS ([18]), mostra che, anche dopo la detta sostituzione di parole, le 1:1, 1:2, 1:5, 1:6, 1:7 sussistono senza variazioni. Non sussiste, per altro, la 1:3 e la 1:4, potendosi ora, invece, solo dedurre che la $V+E$ e la $V-E$, considerate in tali proposizioni, hanno le stesse

---

([16]) Vedi, ad esempio, S. LEFSCHETZ, *a)*, pag. 178.

([17]) Delle n-varietà combinatorie (dette anche varietà del VAN KAMPEN o varietà omologiche) si può dare la seguente definizione, ricorrente rispetto alla dimensione n: Una n-varietà combinatoria

per $n=0$, è un gruppo di punti;

per $n>0$, è un n-complesso in cui i complessi avvolgenti dei vertici sono $(n-1)$-celle combinatorie o $(n-1)$-sfere combinatorie.

Una n-cella ed un n-sfera combinatoria sono n-varietà combinatorie aventi i gruppi di omologia rispettivamente di un n-simplesso o del contorno di un $(n+1)$-simplesso.

([18]) W. MAYER, *a)*; L. VIETORIS, *a)*. Si veda anche A. BASSI, *c)*.

basi di omologia della *V*. Per altro la 1:5, di frequente uso, *conserva la sua validità*, benchè caso particolare della 1:3 e 1:4, in conseguenza del fatto che due *n*-celle combinatorie possono non essere equivalenti.

Proposizioni analoghe alle 1:3 e 1:4, che sussistono, come è evidente, anche nel campo delle varietà combinatorie. sono le seguenti:

1:3'. - *Se una* n-*varietà combinatoria* V, *dotata di contorno, ed una* n-*cella* *ordinaria* E *hanno in comune una* (n — 1)-*cella* *ordinaria* *del loro contorno e nessun altro punto fuori di questa, è* V + E ≡ A.

1:4'. - *Se* V *è una* n-*varietà combinatoria, dotata di contorno, se* E *è una* n-*cella* *ordinaria* *contenuta in una* n-*cella* *ordinaria* F *di* V; *se inoltre i contorni di* E *e di* F *hanno in comune una* (n — 1)-*cella* *ordinaria* *del contorno di* V *e nessun altro punto, è* V — E ≡ V.

Se ora si vengono ad esaminare quali proposizioni della teoria svolta si basino sulla 1:3 e sulla 1:4, si vede che in soli tre punti del lavoro esse furono richiamate: nelle dimostrazioni delle 3:3, 3:4 e 5:2. Le 3:3 e 3:4 non sussistono infatti nel campo delle varietà combinatorie; e non sussiste neppure la dimostrazione della 5:2. Per altro, queste proposizioni non influenzano il resto della teoria. Sono state esposte perchè presentano interesse per la teoria combinatoria delle varietà ordinarie, cui i primi due paragrafi di questo lavoro sono dedicati, ma il resto della trattazione può prescindere da esse. Infatti, nel seguito, è richiamato solo quel caso particolare della 3:3 e della 3:4, rappresentato dalla 3:5. Ma la 3:5 continua a sussistere, indipendentemente dalla 3:3 e dalla 3:4, perchè può dimostrarsi usufruendo solo della 1:5, che, come si è già osservato, continua ad essere valida. La 5:2, d'altra parte, è richiamata solo nella dimostrazione della 6:2. Ma nella 6:2 si considera un caso in cui si verificano contingenze particolari: infatti, riferitici ad un complesso di celle ordinarie che reticoli una varietà combinatoria dotata di contorno, le *n*-celle di V'^* corrispondenti alle *n*-celle di *V* (19) sono tutte ordinarie, e l'1-elemento a cui si accenna nella 5:2, che congiunge un vertice di una di queste con un vertice del contorno, è costituito di segmenti di V'^*, trasversi di $(n-1)$-celle ordinarie di V' ed ha perciò un intorno, che è ancora una *n*-cella ordinaria. Quindi la $A_1 + I(a)$ è ancora una *n*-cella ordinaria e la sua sottrazione alla *V* non altera la *V*, perchè effettivamente si viene ad applicare non la 1:4, su cui la 5:2 si fonda, ma invece solo la 1:4', che è valida anche nelle varietà combinatorie. La cosa si vede in modo anche più chiaro prendendo in considerazione la seconda dimostrazione della 6:2. quale risulta dalle 6:3 e 6:4. Infatti si vede che una

(19) Vedi a questo proposito il primo capoverso del n. 6.

varietà combinatoria può ridursi all'intorno, rispetto a se stessa, di un $(n-1)$–complesso ordinario, mediante l'estrazione di una n–cella *ordinaria*, avente in comune una $(n-1)$–cella *ordinaria* con il contorno di V, e che verifica inoltre l'altra proprietà accennata nella 1:4′; quindi mediante un'operazione per cui essa si mantiene equivalente a se stessa.

Fatta quindi astrazione dalle proposizioni isolate 3:3, 3:4, 5:2, potremo concludere che:

10:1. – *La teoria svolta nei primi due paragrafi vale anche nei riguardi delle varietà combinatorie, quando nelle proposizioni enunciate le celle e le sfere ordinarie siano sostituite da celle e sfere combinatorie.*

11. Considerata ora una n–varietà combinatoria V, priva di contorno, reticoliamola con un complesso ordinario, e infine consideriamo il suo V'^{*}. Le n–celle di quest'ultimo reticolato corrispondenti alle n–celle di V sono tutte ordinarie. Se a tali celle applichiamo il procedimento indicato nella dimostrazione del teorema 5:1, poichè la a è qui composta di segmenti di V'^{*} trasversi ad $(n-1)$–celle di V' e $I(a)$ è quindi un n–cella ordinaria, otteniamo come risultato una n–cella ancora ordinaria. Sicchè (riadottando le stesse notazioni usate nel n. 5) la $\mathfrak{A}$ che viene a sostituire, in un opportuno reticolato equivalente al dato, tutte le n–celle di V'^{*} della classe considerata, è ancora una n–cella ordinaria. Anche le n–celle di V'^{*} corrispondenti a celle di dimensione $n-1$, $n-2$, $n-3$ di V sono n–celle ordinarie perchè esse risultano il collegamento *(join)* di celle ordinarie di V delle dimensioni ora dette e di una sfera rispettivamente a zero, uno, due dimensioni. Ragionando come sopra, potremo concludere che, in un opportuno reticolato equivalente a V, a ciascuna di tali classi di n–celle di V'^{*} viene a corrispondere una n–cella ordinaria.

Avremo quindi che

11:1. – *Una* n–*varietà combinatoria (priva di contorno) si può reticolare con un complesso di* n + 1 n–*celle combinatorie, delle quali* 4 *(almeno) sono ordinarie.*

In modo analogo si può dimostrare che:

11:2. – *Una* n–*varietà combinatoria dotata di contorno si può reticolare con un complesso di* n n–*celle combinatorie, delle quali* 3 *(almeno) sono ordinarie.*

12. Anche altri dei risultati trovati si possono estendere al caso in cui come parte elementare della n–varietà combinatoria V si consideri un n–varietà combinatoria, connessa e a contorno regolare, i cui cicli siano tutti $\backsim 0$ in V (eccetto il ciclo 0–dimensionale). Per una suddivisione in tali parti, oltre che valere, come si è già osservato, le 8:2 e le 8:3, vale anche il teorema 5:1. La cosa si dimostra subito, tutto riducendosi a provare che, se A_1, A_2 sono due parti elementari senza punti comuni, e se $I(a)$ è una n-cella combinatoria il cui contorno abbia in comune una $(n-1)$-cella combinatoria con quello di A_1, e un'altra con quello di A_2, l'insieme di A_1, A_2 e $I(a)$ è ancora una varietà elementare del tipo detto; cosa quest'ultima che si dimostra immediatamente.

Essendo valida la 5:1, ne sono valide anche le conseguenze, quali, ad esempio, le formule (9) e (11).

Si avrà perciò, complessivamente, che

Nelle n*-varietà prive di contorno è*

$$2 \leq \mu_i \leq n+1; \qquad i=0,\ 1,\ 2. \tag{1}$$

In quelle dotate di contorno è

$$1 \leq \mu_i \leq n, \tag{2}$$

potendo le μ_i *assumere tutti i valori entro i limiti descritti.*

Inoltre, se A e B sono varietà prive di contorno o aventi un contorno regolare, è

$$\mu_i(A \times B) \leq \mu_i(A) + \mu_i(B) - 1 \tag{3}$$

$$\mu_i(A \dotplus B) \leq \mu_i(A) \quad \text{se} \quad \mu_i(A) \geq \mu_i(B). \tag{4}$$

Tali formule, se i $=1$, 2, *valgono anche nel campo delle varietà combinatorie.*

BIBLIOGRAFIA

J. W. ALEXANDER: *a) The combinatorial theory of complexes.* « Annals of Mathematics », serie 2ª, vol. 31, 1930, pagg. 294-322.

A. BASSI: *a) Un problema topologico di esistenza.* « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. VI, 1935, pagg. 667-714.

b) Alcune osservazioni su di un'affermazione del Dehn circa la decomponibilità in celle delle varietà topologiche ad n *dimensioni.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », vol. XIV, 1935, pagg. 219-225 e 286-292.

c) Su di una formola topologica del Vietoris. « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXVIII, 1935, pagg. 880-890.

d) On some new invariants of a manifold. « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. 22, 1936, pagg. 698-699.

L. E. J. BROUWER: *a) Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten.* « Mathematische Annalen », Band 71, 1912, pagg. 97-115.

M. DEHN: *a) Ueber die Topologie des dreidimensionalen Raumes.* « Mathematische Annalen », Band 69, 1910, pagg. 137-158.

M. DEHN u. P. HEEGAARD: *a) Analysis Situs.* « Encyklopedie der Mathematische Wissenschaften », III, A. B. 3°, pagg. 153-220.

W. HUREWICZ: *a) Beiträge zur Topologie der Deformationen*, I, II, III, IV, « Koninklijke Akademie van Wetenshappen te Amsterdam », vol. 38, 1935 e vol. 39, 1936.

S. LEFSCHETZ: *a) Topology*. « American Mathematical Society, Colloquium Publications », vol. XII, 1930.

W. MAYER: *a) Ueber abstracte Topologie*. « Monatshefte für Mathematik und Physik », Band 36, 1929, pagg. 1-42.

M. H. A. NEWMAN: *a) On the foundations of combinatory analysis situs*. « Koninklijke Akademie van Wetenshappen te Amsterdam », vol. 29, 1926, pagg. 611-647, e vol. 30, 1927, pagg. 670-673.

b) On the superposition of n*-dimensional manifold*. « Journal of the London Mathematical Society », vol. 2, 1927, pagg. 56-64.

c) Topological equivalence of complexes. « Mathematische Annalen », Band 98, 1927-28, pagg. 399-412.

d) Combinatory topology of convex region. « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. 16, 1930, pagg. 240-242.

L. VIETORIS: *a) Ueber di Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*. « Monatshefte für Mathematik und Physik », Band 37, 1930, pagg. 159-162.

Il potenziale terrestre e la riduzione dei valori osservati della gravità a una superficie di riferimento.

Memoria di CORRADINO MINEO (a Palermo).

Sunto. - *Posizione rigorosa del problema della riduzione delle misure di gravità a una superficie d'equilibrio terrestre, in parte esterna e in parte interna alle masse attraenti, mettendo in rilievo le difficoltà analitiche del problema; discussione di alcuni metodi in uso.*

Si può affermare che i metodi astronomico-geodetici mettono in grado di determinare con sufficiente esattezza una superficie d'equilibrio terrestre, che in parte è interna alla Terra e *praticamente* coincide, nella sua parte accessibile, con la superficie media dei mari.

Per converso, nella determinazione della forma della Terra per mezzo delle misure di gravità, si parte (secondo la posizione che al problema diede inizialmente lo STOKES) da una superficie d'equilibrio contenente nel suo interno tutte le masse attraenti. La determinazione del potenziale newtoniano, fuori di una tale superficie, costituisce allora, come primo notò lo STOKES, un problema di DIRICHLET esterno.

Ma una superficie esteriore a tutte le masse terrestri, alla quale bisognerebbe poi ridurre i valori osservati della gravità, sembra poco conveniente ai pratici. Di qui ripieghi per adattare la soluzione, valevole per una superficie affatto esteriore, al caso d'una superficie parte esterna e parte interna alle masse attraenti (e vicinissima a quella media dei mari opportunamente prolungata). Ma questi ripieghi, a parte quel che spesso hanno di arbitrario e di non rigoroso, hanno il grave inconveniente di dissimulare le difficoltà matematiche del problema e di non dare quindi un'idea sufficientemente esatta del loro effettivo valore.

Convien dunque affrontare direttamente il problema, nel caso d'una superficie d'equilibrio in parte esterna e in parte interna alle masse terrestri. Ora qui la prima difficoltà che si presenta, e sulla quale richiamarono l'attenzione il BRILLOUIN (1) e il POINCARÉ (2), consiste in ciò, che una superficie

(1) BRILLOUIN, *Les reductions de la pesanteur au niveau de la mer. Les différents Geoïdes.* « Revue générale des Sciences pures et appliquées », T. XI (1900), pp. 875-882.

(2) POINCARÉ, *Les mesures de gravité et la Géodésie.* « Bulletin astronomique », T. XVIII (1901), pp. 5-39.

continua e a curvature continue, per es. un ellissoide, non può essere una di siffatte superficie; perchè le curvature subiscono discontinuità, quando una superficie d'equilibrio s'interna nel suolo: un unico ellissoide, per es., può essere d'equilibrio nella sua parte marina, ma non nella sua parte continentale inaccessibile, dove non può costituire se non la continuazione analitica (dato che questa continuazione analitica esista) della parte esteriore. È dunque, rigorosamente parlando, assurda l'ipotesi d'un unica superficie d'equilibrio continua con curvature continue, che sia parte esterna e parte interna alle masse attraenti: ipotesi, che, come vedremo, è implicita nei tentativi accennati di adattare al caso d'una superficie non esteriore la soluzione valevole per il caso esteriore.

Nella parte sotto i continenti, insomma, sono da considerare due superficie: una G_1, molto complicata, che il Brillouin chiama *geoide di* Bouguer, le cui normali sono le verticali, la quale non è punto la continuazione analitica della superficie d'equilibrio esteriore; una seconda G_2, chiamata, dal Brillouin, *geoide di* Pratt, assai più semplice, che è la continuazione analitica della superficie d'equilibrio esteriore. Nel caso di densità continue e per pendenze dolci, (rigorosamente parlando, nel caso limite in cui il mare incontri la costa sotto angolo nullo o quando si prescinda dalle masse comprese tra la superficie d'equilibrio considerata e il suo piano tangente, limitandosi a masse, per così dire, *tangenti* alla detta superficie), le due superficie G_1 e G_2 coincidono. Non così in generale. Tuttavia il dislivello tra G_1 e G_2, se non del tutto trascurabile, si può ritenere molto piccolo (presumibilmente non superiore ai quattro metri), e si può stabilire di trascurarlo (almeno in prima approssimazione) [1].

Con questa ipotesi (necessaria dal punto di vista analitico), noi esamineremo il caso d'una superficie d'equilibrio S, che lascia al di fuori di essa il rilievo terrestre: la determinazione del potenziale newtoniano all'esterno di S, dovuto alle masse sconosciute interne a S, è sempre manifestamente riducibile a un problema di Dirichlet, a patto che si possa parlare (come un dato del problema) del potenziale delle masse sovrastanti a S. Il problema della riduzione alla superficie S dei valori osservati della gravità, riceve quindi una formulazione rigorosa, che ha il vantaggio non soltanto di far vedere dove risiedono le difficoltà analitiche del problema stesso e come

---

[1] Così fa il Poincaré nel lavoro citato, se bene. a stretto rigore, non sia prevedibile come la soluzione del problema di Dirichlet, dal quale dipende la determinazione del potenziale newtoniano (esterno) dovuto alle masse interne alla considerata superficie d'equilibrio, possa venire alterata.

alcune formole in uso siano manifestamente erronee, ma anche di mettere nella sua vera luce l'idea, che storicamente ha avuto tanta importanza, del *compenso* (le masse emergenti, come oggi si dice, non possono essere sopportate dalla considerata superficie d'equilibrio come un semplice sovraccarico): questo compenso discende da una immediata interpretazione delle formole.

1. Sia S una superficie d'equilibrio terrestre, molto vicina al livello medio dei mari, la quale quindi è in parte interna alla Terra. Sia m_i $(i=1, 2, \ldots, q)$ una massa che giace al di sopra della superficie S; e v_i $(i=1, 2, \ldots, q)$ il potenziale newtoniano della massa m_i. Riferiamo la Terra a coordinate polari, prendendo come asse polare l'asse della rotazione diurna e come polo il centro di massa della Terra. Denotiamo rispettivamente con r, θ, Φ il raggio vettore, la colatitudine e la longitudine d'un punto generico. Chiamiamo V il potenziale newtoniano, *all'esterno di* S, della massa M comunque distribuita dentro S. La funzione V è armonica, regolare e nulla all'infinito e sulla superficie S, *avendo supposto questa d'equilibrio per l'intero sistema di masse* M *e* $\mathrm{m_i}$ $(i=1, 2, \ldots, q)$, verifica la condizione

$$fV_s + f\sum_{i=1}^{q}(v_i)_s + \frac{1}{2}\omega^2 r_s^2 \operatorname{sen}^2\theta = fC, \tag{1}$$

essendo f la costante dell'attrazione universale, ω la velocità angolare della Terra e C una costante.

Siano U_1 e U_2 le funzioni armoniche nello spazio esterno a S, regolari e nulle all'infinito e che su S si riducono rispettivamente a

$$1, \quad \frac{1}{2}\frac{r_s^2}{R^2}\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{3}\frac{r_s^2}{R^2}(1 - P_2(\theta))\,; \tag{2}$$

dove $P_2(\theta)$ è il polinomio di Legendre di 2° grado in $\cos\theta$ e R è un valore medio del raggio vettore della superficie S.

Sia finalmente u_i la funzione armonica fuori di S, regolare e nulla all'infinito e che sulla frontiera S prende gli stessi valori di v_i [1].

Segue allora

$$fV = fCU_1 - \omega^2 R^2 U_2 - f\sum_{i=1}^{q} u_i, \tag{3}$$

[1] Bisogna naturalmente ammettere che la funzione v_i esista, sia continua, ecc., anche se in natura la superficie esterna della massa m_i non sia una superficie di Liapounoff! Se quella superficie è molto irregolare, bisognerà renderla più regolare. Del resto, senza l'esistenza di v_i e di u_i, non si può assolutamente parlare di riduzione della gravità al livello del mare o al geoide.

e la costante C è data dalla relazione

$$(4) \qquad fC = \frac{fM + \omega^2 R^2 l_2 + f\sum_{i=1}^{q} \mu_i}{l_1},$$

dove

$$(5) \qquad l_1 = \lim_{r\to\infty} rU_1, \quad l_2 = \lim_{r\to\infty} rU_2, \quad \mu_i = \lim_{r\to\infty} ru_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

E facilmente si dimostrerebbe che, supponendo S non molto differente da una sfera di raggio R, le costanti l_1 e l_2 sono dell'ordine di R. Le costanti μ_i differiscono poco dalle masse m_i.

Il potenziale totale W della Terra (cioè la somma del potenziale newtoniano delle masse attraenti e del potenziale della forza centrifuga) è quindi

$$(6) \qquad W = fCU_1 - \omega^2 R^2 U_2 - f\sum_{i=1}^{q} u_i + f\sum_{i=1}^{q} v_i + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 (1 - P_2(\theta)).$$

Poniamo

$$(7) \qquad W_0 = fC_0 U_1 - \omega^2 R^2 U_2 + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 (1 - P_2(\theta)),$$

dove

$$(8) \qquad fC_0 = \frac{fM + \omega^2 R^2 l_2 + f\sum_{i=1}^{q} m_i}{l_1}.$$

Possiamo dire che W_0 sarebbe il potenziale terrestre totale, *quando le masse emergenti* $\mathrm{m_i}$ *venissero tolte dal loro posto e distribuite comunque dentro* S *e questa si supponesse sempre d'equilibrio per la Terra così immaginata.*

Segue:

$$(9) \qquad W = W_0 + f\frac{\sum_{i=1}^{q}(\mu_i - m_i)}{l_1} U_1 + f\sum_{i=1}^{q} v_i - f\sum_{i=1}^{q} u_i.$$

2. Il valore *teorico* della gravità (nell'ipotesi, cioè, che S sia d'equilibrio per la Terra effettiva), in un punto qualunque P, fuori di S, è

$$(10) \qquad g_P = \frac{dW_0}{dn_P} + f\frac{\sum_{i=1}^{q}(\mu_i - m_i)}{l_1}\frac{dU_1}{dn_P} + f\sum_{i=1}^{q}\frac{dv_i}{dn_P} - f\sum_{i=1}^{q}\frac{du_i}{dn_P},$$

dove dn_P indica l'elemento di normale interno alla superficie d'equilibrio che passa per il punto P.

Se g_P^* è il valore osservato della gravità in P, *l'anomalia di gravità* in P, è $g_P^* - g_P$.

Ponendo

$$\gamma_P = \frac{dW_0}{dn_P}, \tag{11}$$

possiamo scrivere

$$g_P^* - g_P = \left(g_P^* - f \frac{\sum_{i=1}^{q} (\mu_i - m_i)}{l_1} \frac{dU_1}{dn_P} - f \sum_{i=1}^{q} \frac{dv_i}{dn_P} + f \sum_{i=1}^{q} \frac{du_i}{dn_P} \right) - \gamma_P . \tag{12}$$

Ma il termine

$$f \frac{\Sigma(\mu_i - m_i)}{l_1} \cdot \frac{dU_1}{dn_P}$$

è piccolissimo, essendo dell'ordine di

$$f \frac{\Sigma(\mu_i - m_i)}{R^2},$$

dove, come abbiamo accennato, μ_i differisce pochissimo da m_i. Si può dunque, se si vuole, scrivere semplicemente

$$g_P^* - g_P = \left(g_P^* - f \sum_{i=1}^{q} \frac{dv_i}{dn_P} + f \sum_{i=1}^{q} \frac{du_i}{dn_P} \right) - \gamma_P . \tag{12$^{\text{bis}}$}$$

Questa formola è suscettiva della seguente interpretazione. Si può assumere γ_P come gravità *normale* nel punto P (corrispondente alla Terra ideale poc'anzi definita), purchè, nel calcolare l'anomalia di gravità in P, il valore osservato g_P^* venga ridotto per mezzo delle due correzioni

$$-f \sum_{i=1}^{q} \frac{dv_i}{dn_P}, \quad f \sum_{i=1}^{q} \frac{du_i}{dn_P}. \tag{13}$$

Per mezzo della prima, l'effetto delle masse protuberanti m_i vien sottratto dalla gravità osservata in P; mentre la seconda correzione può rappresentare l'effetto (da aggiungere) di masse *ipotetiche* μ_i ($i = 1, 2, \ldots, q$) distribuite nell'interno di S in modo da produrre sulla superficie S lo stesso potenziale newtoniano delle masse *reali* m_i ($i = 1, 2, \ldots, q$).

Il procedimento di sostituzione di masse interne a masse esterne, si presenta, invero, come un espediente inevitabile nella teoria di STOKES e in altre consimili, dovendosi tener conto della circostanza che S non comprende dentro di sè tutta la superficie fisica della Terra; ma non ha ragion d'essere nella presente teoria, dove diventa del tutto fittizio e costituisce soltanto una interpretazione della formola (12), che è conseguenza immediata dell'ipotesi che S sia superficie d'equilibrio per la Terra *attuale* (e non per la Terra *ideale*).

Possiamo, se ci piace, concepire una *compensazione*, sempre come conseguenza della (12), ma è da notare che *l'eguaglianza tra massa del rilievo terrestre e massa di compensazione è, rigorosamente parlando, impossibile*, giacchè le masse apparenti μ_i differiscono (per quanto poco) dalle masse reali m_i.

Notiamo finalmente che la sostituzione di masse ipotetiche, idealmente corrispondenti ai potenziali u_i ($i = 1, 2, \ldots, q$), può essere concepita in infiniti modi. Se la superficie S è una sfera, è ben noto il classico metodo d'inversione; ma questo metodo (dal quale deriva il così detto metodo di RUDZKI) dà luogo soltanto a una delle infinite distribuzioni possibili.

3. Certo, si è ben lontani oggidì dal possedere l'immenso numero di dati topografici e geologici, occorrenti per tentare di costruire le funzioni v_i e u_i (1). Non si è quindi in grado di assegnare il valore teorico della gravità in un punto P, fuori di S, dato dalla (10). Soltanto il valore normale γ_P si può assegnare; e l'anomalia di gravità in P si può ottenere per mezzo della (12^{bis}), calcolando (più o meno empiricamente e grossolanamente) le correzioni (13) con i dati topografici e geologici relativi alle vicinanze della stazione.

Ma si presenta ancora una difficoltà. Se il punto P sta sopra uu continente, la (12^{bis}) dà l'anomalia in P; mentre si richiede che le anomalie vengano riferite alla superficie S: in altri termini, il valore osservato g^*_P è da ridurre alla superficie S nel senso che ora diremo. Sia P' il punto in cui la linea di forza passante per P incontra la superficie S: la questione è di poter conoscere il valore $g^*_{P'}$, che si osserverebbe realmente nel punto P' se questo punto fosse accessibile. *Rigorosamente parlando, nessuna predizione è possibile intorno a questo valore.* Non si possono fare se non congetture più o meno accettabili, con le quali in sostanza si assegna un valore *teorico* alla gravità non osservabile $g^*_{P'}$: così l'anomalia, che dovrebbe essere la differenza tra un dato sperimentale e un valore teorico, diventa la differenza tra due valori teorici!

Le considerazioni che si posson fare per assegnare un valore a $g^*_{P'}$, sono le seguenti. Le anomalie di gravità originano certamente dal fatto che la superficie S, *che abbiamo supposto d'equilibrio,* non è tale in realtà: la vera superficie d'equilibrio è un'altra, che chiameremo S^*, e, *come un risultato delle osservazioni,* si può ammettere che S^* *differisca poco da* S. Se Δr è l'in-

(1) Oso credere, tuttavia, che, giovandosi di opportune carte orometriche, come ha fatto il BRILLOUIN in una questione simile (vedi *Centre de gravité et moments d'inertie des Océans*, « Bulletin géodésique », 1926, pp. 155-180), si potrebbe facilmente e con vantaggio pratico schizzare una prima soluzione schematica del problema.

cremento del raggio vettore nel passaggio da S a S^*, si può supporre che $\Delta r/R$ sia una quantità piccola del prim'ordine e che il suo quadrato sia del tutto trascurabile.

Sia

$$W^* = W_0^* + f \sum_{i=1}^{q} v_i^* - f \sum_{i=1}^{q} u_i^* \tag{14}$$

il vero potenziale totale della Terra, essendo W_0^*, v_i^*, u_i^* le funzioni relative alla nuova frontiera S^*. Ora si può ritenere che v_i^* e u_i^* coincidano rispettivamente con v_i e u_i [1]; sicchè è da considerare soltanto la variazione di W_0 nel passare da S a S^*. Dall'ordinaria teoria segue che questa variazione è dell'ordine di

$$\frac{\Delta r}{R} \frac{f(M + \Sigma\, m_i)}{r}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$g_P^* = g_P + 2 \frac{\Delta r}{R} \frac{f(M + \Sigma\, m_i)}{r^2} F\left(\frac{R}{r},\ \theta,\ \Phi\right), \tag{15}$$

essendo F una funzione regolare dei suoi argomenti. Sia P' il punto in cui la linea di forza passante per P incontra la superficie S^*. Per ottenere $g_{P'}^*$ dalla formola generale (15), è da notare che il 2° termine del 2° membro di (15) subisce una variazione piccola del 2° ordine (affatto trascurabile) nel passare da P a P'. Invero, l'angolo tra la verticale in un punto qualunque P di S^* e il raggio vettore OP è una piccola quantità del prim'ordine, sicchè, nel fare la riduzione da P a P', si può supporre che la detta linea di forza coincida con il raggio vettore OP. Se h è l'altitudine di P sulla superficie S^*, stimata lungo il raggio vettore OP, la variazione predetta è quindi dell'ordine di

$$\frac{\Delta r}{R} \frac{h}{R} \frac{f(M + \Sigma\, m_i)}{r^2},$$

epperò trascurabile. Per conseguenza deduciamo da (15):

$$g_P^* - g_{P'}^* = g_P - g_{P'}, \tag{16}$$

o anche

$$g_{P'}^* - g_{P'} = g_P^* - g_P; \tag{17}$$

vale a dire che *l'anomalia di gravità in* P′ *è eguale all'anomalia di gravità in* P. Risultato che era da aspettarsi e che vale quando le premesse valgono.

[1] Sarebbe facile dimostrare che, nel computo della correzione dovuta al rilievo terrestre, la massa compresa tra S e S^* è trascurabile, almeno in prima approssimazione. Similmente è da trascurare la massa compresa tra S e il livello medio del mare. In pratica è quasi impossibile fare altrimenti.

Per ottenere $g^*_{P'}$, scriviamo

$$g^*_{P'} = g^*_P + (g_{P'} - g_P), \tag{18}$$

e resta da calcolare $g_{P'} - g_P$ [1]. Ora, nelle ipotesi dell'ordinaria teoria, si può scrivere con approssimazione sufficiente

$$\frac{dW_0}{dn_{P'}} = \frac{dW_0}{dn_P}\left(1 + 2\,\frac{h}{r_{P'}}\right) + 2\omega^2 h. \tag{19}$$

E quindi, in virtù della (10):

$$g_{P'} - g_P = 2\,\frac{dW_0}{dn_P}\,\frac{h}{r_{P'}} + 2\omega^2 h + f\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{dv_i}{dn_{P'}} - \frac{dv_i}{dn_P}\right) - f\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{du_i}{dn_{P'}} - \frac{du_i}{dn_P}\right). \tag{20}$$

Dalle (18) e (20), tenendo presente la (11), segue:

$$g^*_{P'} = g^*_P\left(1 + 2\,\frac{\gamma_P}{g^*_P}\,\frac{h}{r_{P'}}\right) + 2\omega^2 h + f\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{dv_i}{dn_{P'}} - \frac{dv_i}{dn_P}\right) - f\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{du_i}{dn_{P'}} - \frac{du_i}{dn_P}\right). \tag{21}$$

Tenendo conto che

$$\frac{h}{R}\,f\sum_{i=1}^{q}\frac{dv_i}{dn_P},\quad \frac{h}{R}\,f\sum_{i=1}^{q}\frac{du_i}{dn_P}$$

sono quantità piccole (non raggiungendo 2×10^{-4} cm/sec²), si ha con l'approssimazione consueta della pratica,

$$\frac{h}{r_{P'}}\,g^*_P \cong \frac{h}{r_{P'}}\,g_P \cong \frac{h}{r_{P'}}\,\frac{dW_0}{dn_P} \cong \frac{h}{R}\,\gamma_P;$$

e la (21) si può scrivere

$$g^*_{P'} = g^*_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h + f\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{dv_i}{dn_{P'}} - \frac{dv_i}{dn_P}\right) - f\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{du_i}{dn_{P'}} - \frac{du_i}{dn_P}\right). \tag{21bis}$$

---

[1] Per far questo, il BRILLOUIN (loc. cit.) pensa che l'unico metodo logico sia quello di servirsi d'un tubo di forza, applicando il teorema generale della divergenza. Ma il vantaggio è soltanto apparente, perchè s'incontra la grave difficoltà di determinare questo tubo, la cui *forma* appunto dipende rigorosamente dal circostante rilievo. Se, per esempio, si fa la solita ipotesi, che le superficie d'equilibrio passanti per P e P' siano sfere concentriche e che le linee di forza coincidano con i raggi vettori uscenti dal comune centro, si trova

$$g_{P'} = g_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h - 4\pi f k h,$$

dove k è la densità media del rilievo terrestre attraversato dal tubo.

Si può scrivere

$$g_{P'} = g_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R} - 3\,\frac{k}{\delta}\,\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h,$$

dove δ è la densità media della Terra. Questa formola, salvo il termine $2\omega^2 h$, dà la correzione di BOUGUER *per la Terra nello stato attuale.* Ma questa formola è in generale inesatta, come si dimostrerà appresso con un esempio.

Finalmente, per l'anomalia di gravità in P', tenendo conto che

$$g_{P'} = \gamma_{P'} + f \sum_{i=1}^{q} \frac{dv_i}{dn_{P'}} - f \sum_{i=1}^{q} \frac{du_i}{dn_{P'}},$$

si deduce:

$$g^*_{P'} - g_{P'} = g^*_P\left(1 + 2\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h - f \sum_{i=1}^{q}\left(\frac{dv_i}{dn_P} - \frac{du_i}{dn_P}\right) - \gamma_{P'}. \tag{22}$$

Ponendo

$$g'_{P'} = g^*_P\left(1 + 2\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h - f \sum_{i=1}^{q}\left(\frac{dv_i}{dn_P} - \frac{du_i}{dn_P}\right), \tag{23}$$

possiamo scrivere

$$g^*_{P'} - g_{P'} = g'_{P'} - \gamma_{P'}. \tag{24}$$

$g'_{P'}$ si suol chiamare *il valore osservato della gravità ridotto alla superficie S.* È quasi superfluo avvertire che $g'_{P'}$ non ha nulla a che fare con $g^*_{P'}$ dato dalla (21).

Il primo termine del 2° membro della (23) rappresenta il valore osservato della gravità ridotto *in linea d'aria.* Il secondo termine (non insensibile per stazioni molto elevate) non è contemplato nell'ordinaria teoria. Il terzo termine rappresenta la correzione dovuta all'effetto delle masse sovrastanti alla superficie S e all'effetto delle masse *apparenti* sottostanti alla superficie stessa.

È da notare che la riduzione da P a P' in ragione del dislivello, che abbiamo applicato alla funzione W_0, non è per nulla applicabile alle funzioni v_i e u_i: nel caso della funzione W_0, si tratta delle masse interne a S, che su punti esterni a S agiscono (nel loro effetto più cospicuo) come se fossero raccolte nel centro di massa della Terra, mentre le funzioni v_i e u_i sono relative a masse troppo vicine ai punti considerati e i cui effetti non si possono ritenere proporzionali ai dislivelli. La funzione u_i, per esempio, è analitica fuori di S (se la massa m_i è omogenea, il potenziale v_i è analitico anche *dentro* la massa stessa); ma la serie

$$\frac{du_i}{dn_{P'}} = \frac{du_i}{dn_P} + h\frac{d^2u_i}{dn_P^2} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^3u_i}{dn_P^3} + \dots$$

è troppo lentamente convergente da potere essere adoperata.

Ne viene subito che il così detto *secondo metodo di riduzione di* HELMERT è erroneo. Per ottenere $g'_{P'}$, secondo codesto metodo, si sottrae l'effetto delle masse m_i su P, si riduce da P a P' in linea d'aria e infine si aggiunge l'effetto su P' delle ipotetiche masse μ_i. Chiamando $g''_{P'}$ il valore osservato della gravità ridotto secondo questo procedimento, si ha:

$$g''_{P'} = \left(g^*_P - f\sum_{i=1}^{q} \frac{dv_i}{dn_P}\right)\left(1 + 2\frac{h}{R}\right) + f\sum_{i=1}^{q} \frac{du_i}{dn_{P'}};$$

e si vede subito, confrontando con la (23), che $g''_{P'}$, è formalmente e sostenzialmente diverso da $g'_{P'}$. Poichè, come abbiamo già notato,

$$\frac{h}{R} f\sum_{i=1}^{q} \frac{dv_i}{dn_P}$$

è trascurabile, noi possiamo scrivere:

$$g''_{P'} = g^*_P\left(1 + 2\frac{h}{R}\right) - f\sum_{i=1}^{q} \frac{dv_i}{dn_P} + f\sum_{i=1}^{q} \frac{du_i}{dn_{P'}};$$

e poichè, come sarebbe facile dimostrare, i due ultimi termini del 2° membro a un di presso si conpensano, possiamo scrivere ancora

$$g''_{P'} \backsimeq g_P\left(1 + 2\frac{h}{R}\right),$$

e la riduzione non differisce da quella in linea d'aria!

Consideriamo il così detto *metodo originale di riduzione di* RUDZKI. Secondo questo metodo, l'effetto delle masse m_i sulla gravità in P è sottratto dal valore della gravità osservato in P e l'effetto delle ipotetiche masse μ_i è aggiunto; poi il valore della gravità così corretto è ridotto in linea d'aria da P a P' (sulla superficie S). Chiamando $g'''_{P'}$ il valore così ridotto, abbiamo

$$g'''_{P'} = \left(g^*_P - f\sum_{i=1}^{q} \frac{dv_i}{dn_P} + f\sum_{i=1}^{q} \frac{du_i}{dn_P}\right)\left(1 + 2\frac{h}{R}\right) \backsimeq g^*_P\left(1 + 2\frac{h}{R}\right) - f\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{dv_i}{dn_P} - \frac{du_i}{dn_P}\right).$$

Sebbene inaccettabile in principio, il metodo di riduzione di RUDZKI porta a un valore che si confonde con il valore rigoroso $g'_{P'}$, dato dalla (23), salvo il termine $2\omega^2 h$ (1).

Non è semplice discutere il metodo isostatico. L'isostasia concerne un

(1) Il LAMBERT, nel suo notevole scritto *The reduction of observed values of gravity to sea level* (« Bulletin géodésique », 1930, pp. 107-181) esita tra i due metodi; ma egli dice che il metodo di HELMERT è *probabilmente* preferibile a quello di RUDZKI (p. 121) e che sembra più logico (p. 137). La nostra analisi prova che il così detto secondo metodo di HELMERT è *certamente* erroneo, mentre il metodo di RUDZKI, se bene concettualmente ingiustificabile, porta a un risultato soddisfacente.

passato geologico. Una certa superficie Σ era d'equilibrio in un certo tempo, quando le masse m_i, che oggi costituiscono il rilievo terrestre, stavano dentro Σ (e non esistevano gli oceani). Nulla di più facile, dal punto di vista teorico, di assegnare la gravità *normale* corrispondente a questo supposto stato della Terra: basta, come abbiamo visto, risolvere un problema di DIRICHLET esterno per il dato contorno Σ, tenendo conto che la massa totale interna a Σ è $M + \Sigma\, m_i$. Il difficile, dovendo mettere a prova l'ipotesi isostatica, è di inferire i valori della gravità che si misurerebbero su Σ, se le masse m_i fossero tolte dal loro stato *attuale* e distribuite dentro Σ con una certa legge. Fino a qual punto si può prescindere dalla conoscenza d'una qualche superficie d'equilibrio S^*, quale è oggi effettivamente e non quale era in un periodo geologico più o meno lontano? Pare che i fautori dell'isostasia non se ne diano pensiero; giacchè il loro scopo non è d'indagare quale sia oggi la forma della Terra, ma soltanto se una certa ipotesi geologica di distribuzione delle masse nel così detto *strato di compensazione* sia ammissibile per quel lontano passato. S'intende, però, che dato pure che si possa rispondere affermativamente a una tale domanda, infinite altre distribuzioni di masse sono possibili. Comunque, noi non ci occuperemo qui della teoria isostatica, che è estranea al problema della forma della Terra.

In relazione a questo problema, tutto quello che nel campo sperimentale si può sperare dalle misure (e che si può anche ritenere abbastanza bene conseguito), è la determinazione di porzioni di superficie appartenenti a una superficie S d'equilibrio in parte interna alle masse terrestri.

La determinazione del campo della gravità all'esterno di S costituisce un problema di DIRICHLET esteriore più o meno difficile; e lo stesso si deve dire del problema della riduzione dei valori osservati della gravità alla superficie S, *il quale problema quindi non comporta vari metodi di risoluzione più o meno arbitrari, ma è perfettamente determinato.*

4. A illustrare le cose dette, credo non inutile un esempio semplice quanto è possibile.

La superficie S, che in un primo tempo si suppone d'equilibrio, sia una sfera di raggio R. Si supponga una sola massa m_1 sovrastante a S, consistente in una sfera omogenea σ di diametro h, tangente esternamente alla sfera S nel punto P' (R, θ_0, Φ_0) [1].

[1] Suppongo masse di forma sferica per potere usare formole rigorose. Del resto, non è difficile, per lo scopo che si vuol raggiungere, di sostituire le masse del rilievo terrestre con un conveniente numero di masse sferiche.

Segue

(25) $$U_1 = \frac{R}{r}, \quad U_2 = \frac{R}{3}\left(\frac{1}{r} - \frac{R^2}{r^3} P_2(\theta)\right).$$

(26) $$l_1 = R, \quad l_2 = \frac{R}{3}, \quad \mu_1 = m_1 \frac{R}{R + \frac{1}{2}h}.$$

(27) $$v_1 = \begin{cases} \dfrac{m_1}{\sqrt{r^2 + \left(R + \frac{h}{2}\right)^2 - 2r\left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\gamma}} & \text{(fuori della sfera } \sigma), \\ \dfrac{3m_1}{h} - m_1 \dfrac{r^2 + \left(R + \frac{h}{2}\right)^2 - 2r\left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\gamma}{\frac{1}{4}h^3} & \text{(dentro } \sigma). \end{cases}$$

(28) $$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_0 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta_0 \cos(\Phi - \Phi_0).$$

(29) $$\begin{cases} u_1 = \dfrac{m_1}{R + \frac{1}{2}h} \dfrac{R}{r} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{R^4}{r^2\left(R + \frac{1}{2}h\right)^2} - 2\dfrac{R^2}{r\left(R + \frac{1}{2}h\right)}\cos\gamma}} = \\ \quad = \dfrac{m_1}{R + \frac{1}{2}h}\left(\dfrac{R}{r} + \dots + \dfrac{R^n}{\left(R + \frac{1}{2}h\right)^n} \dfrac{R^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\gamma) + \dots\right), \quad (r \geqq R). \end{cases}$$

(30) $$W_0 = \frac{f(M + m_1)}{r} + \frac{1}{3}\omega^2 R^5 \frac{P_2(\theta)}{r^3} + \frac{1}{3}\omega^2 r^2 (1 - P_2(\theta)).$$

(31) $$W = W_0 - \frac{h}{2R + h}\frac{fm_1}{r} + fv_1 - fu_1.$$

Supponiamo che la superficie S^* (il vero geoide) sia una sfera di raggio $R + \varepsilon$, e di centro O_1 $(\varepsilon, \pi - \theta_0, \Phi_0)$: la superficie S^* è quindi tangente alle sfere S e σ nel punto P'.

Riteniamo che ε/R sia una quantità piccola del 1° ordine e che il suo quadrato sia del tutto trascurabile; sicchè l'equazione di S si può scrivere così:

(32) $$r = R\left(1 + \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R}\cos\gamma\right).$$

Segue, trascurando termini in $\omega^2\varepsilon/R$:

(33) $$W_0^* = W_0 - \frac{fM}{r}\frac{\varepsilon}{r}\cos\gamma.$$

La funzione v_1 non cambia, cioè

$$v_1^* = v_1 .$$

Per costruire la funzione u_1^*, prendiamo il punto O_1 come nuovo polo e il nuovo asse polare parallelo all'antico, e chiamiamo ρ, ϑ, φ le nuove coordinate polari d'un punto generico. Abbiamo rigorosamente:

$$(35)\qquad u_1^* = \frac{m_1}{R + \frac{1}{2}h + \varepsilon}\left(\frac{R+\varepsilon}{\rho} + \ldots + \frac{(R+\varepsilon)^{2n+1}}{\left(R + \frac{1}{2}h + \varepsilon\right)^n}\frac{P_n(\gamma_1)}{\rho^{n+1}} + \ldots\right),$$

$$(36)\qquad \rho^2 = r^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon r \cos\gamma, \quad \operatorname{sen}\gamma_1 = \frac{r}{\rho}\operatorname{sen}\gamma.$$

Ma, nella nostra approssimazione, possiamo scrivere:

$$(37)\qquad \rho = r\left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\cos\gamma\right), \quad \cos\gamma_1 = \cos\gamma + \frac{\varepsilon}{R}\operatorname{sen}^2\gamma ;$$

e quindi la (35) diventa

$$(38)\qquad u_1^* = u_1 - \frac{m_1}{R + \frac{1}{2}h}\frac{\varepsilon}{R}\frac{h}{2R}\left(R^2\frac{P_1(\gamma)}{r^2} + \ldots + n\frac{R^{2n}}{\left(R + \frac{1}{2}h\right)^{n-1}}\frac{P_n(\gamma)}{r^{n+1}} + \ldots\right).$$

Come si era asserito (n. 2), la parte dipendente da ε è piccolissima: in ogni caso, il suo effetto sulla gravità è dell'ordine di 10^{-7} cm/sec^2 per la Terra.

Possiamo dunque scrivere

$$(39)\qquad u_1^* = u_1 .$$

Segue

$$(40)\qquad W^* = W - \frac{\varepsilon}{r}\frac{f(M+m_1)}{r}\cos\gamma.$$

Consideriamo ora il punto P $(R+h,\ \theta_0,\ \Phi_0)$ della superficie sferica σ, diametralmente opposto al punto P' $(PP' = h)$. Per un punto qualunque del segmento PP', abbiamo

$$(41)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial r} = \frac{8m_1}{h^3}\left(R + \frac{1}{2}h - r\right), \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = -m_1 R\left(R + \frac{1}{2}h\right)\left[r\left(R + \frac{1}{2}h\right) - R^2\right]^{-2};$$

e quindi deduciamo

$$(42)\qquad \frac{dv_1}{dn_P} = \frac{4m_1}{h^2}, \quad \frac{dv_1}{dn_{P'}} = -\frac{4m_1}{h^2}, \quad \frac{du_1}{dn_P} = \frac{4m_1}{9h^2}, \quad \frac{du_1}{dn_{P'}} = \frac{4m_1}{h^2}.$$

Abbiamo quindi

$$g_{P'} = g_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h - \frac{12 f m_1}{h^2} + \frac{4 f m_1}{9h^2}. \tag{43}$$

Chiamando k la densità della massa m_1 e δ la densità media della massa M, possiamo scrivere con sufficiente esattezza:

$$\frac{f m_1}{h^2} = \frac{1}{8}\, g_P\, \frac{k}{\delta}\, \frac{h}{R}, \tag{44}$$

epperò

$$g_{P'} = g_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R} - \frac{13}{9}\,\frac{k}{\delta}\,\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h. \tag{45}$$

Per mezzo di un tubo di forza, come si è descritto (n. 2), troviamo un valore ben differente $\bar{g}_{P'}$, cioè

$$\bar{g}_{P'} = g_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R} - 3\,\frac{k}{\delta}\,\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h,$$

e abbiamo

$$g_{P'} - \bar{g}_{P'} = \frac{14}{9}\,\frac{k}{\delta}\,\frac{h}{R}.$$

Supponendo

$$R = 6370 \times 10^5 \text{ cm}, \quad h = 4 \times 10^5 \text{ cm},$$

questa differenza è di 0.479 cm/sec². *Questo esempio mostra a quali forti errori può condurre l'inesatta conoscenza dei dati geometrici (di forma e di grandezza) del rilievo circostante al luogo di osservazione.*

Sia $\overset{*}{g}_P$ il valore osservato della gravità nella stazione P: il valore ridotto alla superficie S è quindi

$$g'_{P'} = \overset{*}{g}_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R} - \frac{4}{9}\,\frac{k}{\delta}\,\frac{h}{R}\right) + 2\omega^2 h. \tag{46}$$

L'anomalia di gravità in P' è quindi $g'_{P'} - \gamma_{P'}$ e $\gamma_{P'}$ è dato dalla formola

$$\gamma_{P'} = \frac{f(M + m_1)}{R^2} + \frac{1}{3}\,\omega^2 R(5P_2(\theta_0) - 2). \tag{47}$$

Il valore osservato e ridotto secondo il così detto secondo metodo di HELMERT è

$$g''_{P'} = \overset{*}{g}_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R}\right) - f\,\frac{dv_1}{dn_P} + f\,\frac{du_1}{dn_{P'}} = \overset{*}{g}_P\left(1 + 2\,\frac{h}{R}\right),$$

e coincide, come avevamo asserito (n. 2), con quello ridotto in linea d'aria.

Il valore osservato e ridotto secondo il così detto metodo originale di RUDZKI concorda con il vero, dato dalla (47), salvo il termine $2\omega^2 h$ [1].

---

[1] La riduzione di BOUGUER non ha nulla a che fare con lo scopo di questo scritto. Il metodo di BOUGUER è fondato sull'ipotesi che S sia superficie d'equilibrio, non per la Terra nello stato *attuale*, ma per la Terra privata senz'altro dalle masse sovrastanti su S. È, però, molto arduo predire quale valore si osserverebbe in P' (per riferirci al nostro esempio), se la massa m_1 fosse portata via.

In pratica codesta riduzione è fatta grossolanamente. Nell'esempio addotto, si trova

$$(g'_{P'})_{\text{BOUGUER}} = g^*_P\left(1 + 2\frac{h}{R} - \frac{1}{2}\frac{k}{\delta}\frac{h}{R}\right).$$

CORRECTION

By ARNOLD EMCH (Urbana - Illinois).

In a paper on *Cremona involutions and covariants connected with the Weddle surface*, which appeared to p. 101 of the present volume of this journal, the statement is made (theorem 1) that C_3 is a fivefold fundamental curve of the involution T_9.

It should be noted that C_3 is not a proper fundamental curve of multiplicity five, but must be counted five times as a part of the intersection of F_9 with Γ_3^4.

INDICE DEL TOMO XVI DELLA SERIE 4ª

ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino | **Beniamino Segre** in Bologna
Tullio Levi-Civita in Roma | **Francesco Severi** in Roma

INDICE ALFABETICO PER AUTORI

DEI TOMI I-XVI DELLA SERIE 4ª

NICOLA ZANICHELLI, EDITORE

BOLOGNA, 1938-XVI

INDICE ALFABETICO PER AUTORI

DEI TOMI I-XVI DELLA SERIE 4ª

DEGLI « ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA »

T. I (1924), II (1925), III (1926), IV (1927), V (1928), VI (1929), VII (1930), VIII (1930), IX (1931), X (1932), XI (1933), XII (1934), XIII (1935), XIV (1936), XV (1936), XVI (1937).

BOMPIANI E. - « Sulle superficie integrali di due o più equazioni lineari a derivate parziali del terzo ordine ». T. 9, pp. 287–306.

BONVICINI D. - « Sulla deformazione pura nel caso di spostamenti finiti e sulla relazione di essa colla tensione nei corpi anisotropi ». T. 13, pp. 113–117.

BORTOLOTTI ENEA. - « Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo ». T. 8, pp. 53–101.

— — « Spazi proiettivamente piani ». T. 11, pp. 111–134.

— — (con V. HLAVATY). - « Contributi alla teoria delle connessioni ». T. 15, pp. 1–45; ibid., pp. 129–154.

BOTSFORD J. L. (con A. D. MICHAL). - « Geometries involving affine connections and general linear connections. An extension of the recent Einstein-Mayer geometrie ». T. 12, pp. 13–32.

BRELOT M. - « Sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévorante et dévorée ». T. 9, pp. 57–74.

BROGGI U. - « Su di uno speciale problema dei momenti ». T. 12, pp. 63–73.

BURGATTI P. - « Studio sulle varietà a due dimensioni appartenenti a un S_4 euclideo ». T. 9, pp. 121–142.

CALAPSO P. - « Sulle reti e congruenze coniugate e sulle trasformazioni delle superficie per congruenze (W) ». T. 4, pp. 121–141.

— — « Intorno alle congruenze sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura ». T. 5, pp. 231–250.

— — « Una trasformazione delle congruenze cicliche ». T. 7, pp. 213–224.

— — « Inviluppi di sfere sulle cui focali si corrispondono le linee di curvatura e le linee asintotiche ». T. 7, pp. 225–229.

— — « Intorno alle congruenze sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura ». T. 8, pp. 201–213.

CALAPSO R. - « Sulle congruenze cicliche ». T. 2, pp. 23–41.

CALONGHI M. - « Sulla curvatura delle varietà degli spazî riemanniani ». T. 13, pp. 171–189.

CARATHÉODORY C. - « Ueber geschlossene Extremalen und periodische Variationsprobleme in der Ebene und im Raume ». T. 2, pp. 297–320.

CARTAN É. - « La géométrie des groupes simples ». T. 4, pp. 209–256.

— — Complément au Mémoire: « Sur la Géométrie des groupes simples ». T. 5, pp. 253–260.

— — « Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes ». T. 11, pp. 17–90.

EMCH A. – « Cremona involutions and covariants connected with the Weddle surface ». T. 16, pp. 101–105.

— « Correction ». T. 16, p. 313.

ENRIQUES F. – « Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione ». T. 1, pp. 185–198.

FÉDOROFF W. – « Sur la monogénéité des fonctions d'une variable complexe ». T. 6, pp. 161–168.

FINIKOFF S. – « Congruences avec les deux nappes de la surface focale applicables l'une sur l'autre par les points correspondants ». T. 1, pp. 175–184.

FINZI B. – « Sui veli elastici ». T. 5, pp. 131–145.

— — « Equazioni intrinseche della meccanica dei sistemi continui perfettamente od imperfettamente flessibili ». T. 11, pp. 215–245.

FISCHER A. – « Ueber die nomographische Lösung einer elementarmechanischen Extremumaufgabe ». T. 12, pp. 57–61.

— — « Graphischen Rechentafeln (Nomogramme) für die Berechnung der ganzen rationalen Funktion ». T. 13, pp. 281–286.

FROLA E. – « Trasformazioni funzionali lineari ed equazioni integrali singolari ». T. 16, pp. 127–155; *ibid.*, pp. 165–182.

FUBINI G. – « Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R ». T. 1, pp. 241–257.

— — « Luigi Bianchi e la sua opera scientifica ». T. 6, pp. 45–83.

— — « Sulle terne di congruenze di curve nello spazio proiettivo ». T. 16, pp. 1–33.

— — (con T. LEVI-CIVITA). – « Sulle curve analoghe al circolo osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini ». T. 7, pp. 193–211.

GHERMANESCO M. – « Sur les équations aux différences finies ». T. 12, pp. 305–326.

— — « Sur les équations aux différences finies ». T. 13, pp. 309–333.

GIULOTTO V. – « Funzioni sferiche poliarmoniche a due variabili ». T. 1, pp. 219–240.

— — « Funzioni di Bessel del campo poliarmonico ». T. 14, pp. 41–74.

GOLAB ST. – « Sopra le connessioni lineari generali. Estensione d'un teorema di Bompiani nel caso più generale ». T. 8, pp. 283–291.

— — « Sopra certe classi di connessioni lineari ». T. 11, pp. 283–293.

— — « Sur l'ordre de planéité des espaces plongés ». T. 13, pp. 119–125.

— — (con J. A. SCHOUTEN). – « Ueber projektive Uebertragungen und Ableitungen II ». T. 8, pp. 141–157.

NERONOFF N. - « Sur la loi de l'attraction ». T. 14, pp. 75–97.
— — « Sur une méthode de détermination des figures d'équilibre relatif, voisines des ellipsoïdes, d'une masse liquide homogène en rotation ». T. 15, pp. 175-185.
NICOLETTI O. - « Un teorema di limite ». T. 1, pp. 91–104.
NIEMYTZKI V. - « Ueber vollständig unstabile dynamische Systeme ». T. 14, pp. 275–286.

OBLÀTH R. - « Ueber Primzahlen in aufeinander folgenden Intervallen ». T. 14, pp. 299–303.
OBRECHKOFF N. « Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles ». T. 13, pp. 75–90.
OCCHIPINTI R. - « Alcune formole per le falde dell'evoluta di una superficie ». T. 7, pp. 131–143.
ONOFRI L. - « Teoria delle sostituzioni che operano su una infinità numerabile di elementi ». T. 4, pp. 73–106; t. 5, pp. 147–168; t. 7, pp. 103-130.
— — « Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche ». T. 12, pp. 41–56; t. 13, pp. 209–225.

PETERSON T. S. - « The analogue of Weyl's conformal curvature tensor in a Michal functional geometry ». T. 13, pp. 55–62.
PFEIFFER G. - « Die Konstruktion des allgemeinen Operators des Involutionssystems von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen ». T. 14, pp. 327–341.
PHALEN H. R. - « Le proprietà metriche della quadrica di Moutard ». T. 13, pp. 37–40.
PIAZZOLLA-BELOCH M. - « Costruzioni di curve sghembe aventi il massimo numero di circuiti ». T. 2, pp. 203–216.
PICONE M. - « Sui metodi di sommazione delle serie ». T. 2, pp. 263–295.
— — « Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine ». T. 7, pp. 145–192.
PINCHERLE S. - « Sui Coefficienti di Fattoriali ». T. 7, pp. 315–318.
— — « Le dilatazioni nello spazio delle serie di potenze ». T. 14, pp. 343–348.
— — « Contributo alla teoria degli operatori lineari ». T. 15, pp. 243–308.
PODTIAGUINE N. - « Sur une classe de fonctions croissantes ». T. 5, pp. 207–229.
— — « Sur l'ordre de régularité de la croissance ». T. 10, pp. 85–120.
— — « Sur la régularité des fonctions à croissance très rapide ou très lente ». T. 13, pp. 163–170.

VITALI G. - « Proiettività nello spazio hilbertiano ». T. 11, pp. 155-179.

VRANCEANU G. - « Studio geometrico dei sistemi anolonomi ». T. 6, pp. 9-43.

WAZEWSKI T. - « Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre ». T. 15, pp. 155-158.

WINTNER A. - Ueber eine Anwendung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf das Levi-Civitasche Problem der mittleren Bewegung ». T. 10, pp. 277-282.

— — « On the Linear Conservative Dynamical Systems ». T. 13, pp. 105-112.

WISNIEWSKI F. J. (DE) - « Une remarque relative à la mécanique corpusculaire ». T. 10, pp. 173-181.

— — « Les probabilités à structure héréditaire et la statistique moléculaire ». T. 12, pp. 33-39.