LES ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DU CORPS.

Qui comprennent tout ce qu'Euclide en a enseigné: Les plus belles propositions d'Archimede & l'Analise.

Par le R. P. BERNARD LAMY, Prêtre de l'Oratoire.

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, ruë S. Jacques, à l'Occasion.

M. DC. LXXXV.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

TABLE.

LIVRE PREMIER.

PREFACE.

APRES avoir consideré les proprietés de la Grandeur en general, dans le Traité que nous en avons publié il y a quelques années, nous recherchons icy celles du corps, qui est une des especes de la grandeur. Quoy que nous ne parlions point en particulier de la terre, cependant, parce que de tous les corps, elle est la plus connuë, & que c'est la necessité de la mesurer & de la partager, qui a porté les hommes à cultiver les Mathematiques; la Science du corps en general que nous traitons icy, s'appelle *Geometrie*, c'est à dire, la Science de la mesure de la terre.

L'utilité de cette Science est evidente, puis qu'elle donne les Elemens de l'Astronomie, de la Gnomonique, de la Marine, de l'Optique, de l'Architecture, des Fortifications, des Mechaniques, & generalement de toutes les Sciences qui ont le corps pour objet, & par consequent de la Physique, qui étant bien traitée, comme plusieurs Philosophes le pretendent, n'est qu'une Geometrie. Cela ne me persuaderoit pas neanmoins qu'on dût l'enseigner dans les Ecoles publiques, si d'ailleurs elle n'étoit propre pour former l'esprit, le rendre exact, étendu & penétrant.

Nous avons vû dans la Preface du Traité de la Grandeur, l'importance qu'il y a de s'accoûtumer à considerer les choses spirituelles, & que pour cette raison l'Etude de ce Traité étoit avantageuse, parce que les verités qu'on y proposoit étant expliquées sans figures, leurs idées se presentoient à l'esprit sans images. On ne peut voir par l'imagination que ce qui est corps; ceux donc qui ne font usage que de leur imagination, ne peuvent appercevoir les choses spirituelles, ils ne croyent pas même qu'il y en ait, parce qu'ils n'en trouvent point d'image dans leur imagination ; ainsi qu'en cherchant des corps avec les mains, si l'on ne rencontre rien qui resiste, on croit qu'il n'y en a point.

Il est donc important de s'accoûtumer à voir sans images, & de se convaincre qu'il y a des verités qui se conçoivent autrement que les corps; mais il ne faut pas pour cela negliger de cultiver son imagination : on en peut même tirer un grand secours pour concevoir les choſes ſpirituelles; & c'eſt une neceſſité dans l'état où nous nous trouvons, d'y avoir recours. En quittant Dieu nous ſommes tombés dans les corps, il faut donc nous y appuyer, pour nous relever, comme nous le faiſons quand nous ſommes tombés par terre.

L'ame voit une verité qui luy eſt preſente, lors qu'elle la conſidere, comme les yeux un objet dont ils ne ſe détournent point. Mais les corps l'attirent vers eux par les impreſſions qu'ils font ſur elle, & luy font perdre de veüe cette verité, à moins qu'elle n'y ſoit comme attachée par les corps mêmes, qui ſont la cauſe de ſes diſtractions. Ce qui arrive lors que cette verité eſt exprimée par des ſignes ſenſibles, qui tournant l'ame vers eux, l'obligent de la voir. Peu de perſonnes ſe peuvent paſſer de ce ſecours. Il y a d'habiles gens qui ne voyent rien dans un ſujet lors qu'ils le conſiderent par les ſeuls yeux de l'eſprit, & qui aprés l'avoir exprimé ſur le papier, apperçoivent tout ce qu'il en faut voir pour en juger.

Aprés donc s'eſtre accoûtumé à concevoir les choſes ſans images, ce qui eſt tres-important pour la Religion, il eſt utile d'apprendre icy comme il faut ſe ſervir de ſon imagination, qui n'eſt point dangereuſe à ceux qui ſçavent diſtinguer ce que l'eſprit pur conçoit d'avec ce qu'elle preſente. Elle eſt une ſource de pluſieurs erreurs lors qu'on ne conſulte point la raiſon ; mais auſſi il faut avoüer que ceux qui veulent trop s'élever ſans s'appuyer ſur ce qui eſt ſenſible, ſont fort ſujets à l'illuſion, & qu'ils s'égarent ſouvent dans de vaines penſées.

L'ame qui eſt plus occupée des corps que des autres choſes ſpirituelles, n'apperçoit qu'à demy celles-cy. Si elle n'eſt donc reſervée dans ſes jugemens pour ne prononcer que ſur ce qu'elle voit, elle attribue ou elle retranche plus qu'il ne faut de ce qui luy eſt propoſé. Il eſt bien plus facile d'être ébloüy, & de ſe laiſſer ſurprendre en penſant à quelque choſe de ſpirituel, qu'en maniant les corps. Une application trop forte à la verité qui eſt au deſſus des ſens, bleſſe l'ame, & la douleur l'oblige pour ſe délaſſer de conſiderer quelque objet ſenſible qui luy ſoit agreable ; ainſi comme ces ſortes de meditations ſont interrompuës, elle y eſt facilement ſurpriſe par l'erreur, ſi ce n'eſt que ce qu'elle conſidere ſoit extrêmement ſimple, comme ce qui a fait le ſujet du Traité de la Grandeur. Dans les autres Sciences abſtraites l'erreur y eſt toûjours à craindre; on eſt obligé de ſe contenter de vrayſemblances; ce qui n'arrive pas dans celles qui ſont aydées de l'imagination, comme la Geometrie, dont les Theorêmes frappent l'eſprit trop vivement pour s'y tromper, quand on les conſidere avec un peu d'attention : la verité ou la fauſſeté y paroiſſent trop evidemment, pour qu'on les confonde.

Outre que la Geometrie donne des modeles qui ne peuvent tromper, de demonſtrations claires & convaincantes, elle apprend la methode de conduire l'eſprit de verité en verités. On y voit des exemples comme il faut dans la recherche des Sciences ſe ſervir des premieres connoiſſances qu'on a acquiſes, ou qui nous ſont naturelles, pour aller plus loin. L'art & le ſecret des Sciences ne conſiſtent qu'à déduire des premieres verités que Dieu a miſes dans nôtre cœur, les conſequences dont elles renferment les principes, c'eſt à dire, à ménager la Science naturelle ; ce que les Geometres font admirablement, comme nous l'allons faire voir, en découvrant en même temps les principes & les fondemens de la Geometrie, ce qui ſervira de diſpoſition pour la comprendre avec plus de facilité.

La Geometrie eſt établié ſur un tres petit nombre de principes : les connoiſſances qu'elle donne, ſe peuvent reduire à trois ou quatre verités principales, qui ſont naturellement connuës; par exemple, qu'*une choſe ne peut pas être & n'être pas dans un même temps*; d'où il ſuit que puiſque le tout & ſes parties priſes enſemble ne ſont qu'une même choſe, il faut que *le tout ſoit égal à ſes parties*, autrement la même choſe ſeroit & ne ſeroit pas, & que *deux grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles*; car ces trois grandeurs ne ſont qu'une même choſe, ainſi ſi elles étoient inégales entr'elles, elles ſeroient & ne ſeroient pas.

On peut rapporter à ce principe qu'*une choſe ne peut pas être & n'être pas*, ces quatre Axiomes ſuivans.

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'egales, les touts ſeront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux.

Si à des grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les touts ſeront inégaux.

Tous ces Axiomes ne ſont fondés que ſur ce que les touts égaux ont des parties égales, & les inégaux ont des parties inégales. Si les touts égaux n'avoient pas des parties égales, ils ſeroient & ne ſeroient pas.

De ces verités ſuit une infinité d'autres verités; par exemple, que *les moitiés* *de deux touts égaux sont égales*, ou que *les doubles de ces touts sont égaux*, & à la même raison que *les tiers de deux touts égaux sont égaux*, ou que *les triples de deux touts égaux sont égaux*, ainsi des quarts & des quadruples, & d'une infinité de semblables propositions.

Ces verités suivantes, bien qu'elles soient, pour ainsi dire, grossieres, sont des sources tres fecondes de plusieurs demonstrations, sçavoir que *le tout est plus grand qu'une de ses parties* : & que *ce qui est contenu*, ou *renfermé dans une grandeur, ne peut être plus grand que cette grandeur.* Que *deux grandeurs qui conviennent en tout, lors qu'on les pose l'une sur l'autre, ou l'une dans l'autre, sont égales.*

Les Geometres recourent souvent à ce premier principe, qu'*une chose ne peut pas être & n'être pas*; en faisant voir que si les choses n'étoient pas telles qu'ils les proposent, elles seroient & ne seroient pas. Ainsi ils reduisent la chose à l'impossible, comme lors qu'ils tirent leur preuve de la construction ou de la supposition qu'ils ont faite, c'est à dire, qu'aprés qu'ils ont fait une chose en telle maniere, ils tirent une cõclusion qui ne leur peut être contestée, à moins que de dire qu'une chose peut être & n'être pas en même temps, ce qui est absurde, car leur conclusion est une suite si naturelle de ce qui a été fait, que si cette conclusion ne suit pas, il faut que la chose n'ait pas été faite comme on l'a supposé.

Voilà tous les principes des Geometres, personne ne les ignore. Ce n'est donc que l'usage qu'ils en ont fait, qui leur a fait découvrir une infinité de verités si cachées au reste des hommes ; ce qui est une preuve que si on usoit bien des premieres connoissances naturelles, & si on alloit par ordre comme font les Geometres, on feroit d'admirables progrés dans les Sciences; on ne les acquiert que par ce moyen. C'est pourquoy les premieres études n'étant que pour apprendre comme il faut étudier, il n'y a point de Science plus propre pour les premiers exercices que la Geometrie.

Les livres des anciens Geometres ne sont pas si propres pour exercer l'esprit que ceux qui ont été faits en ce temps. Les premiers Geometres ne faisoient que ramasser les materiaux, ils étoient occupés à trouver les principaux Theorêmes de la Science, ils n'ont point proposé leurs inventions dans un ordre qui soit naturel : Cela étoit reservé à nôtre siecle, où toutes les verités de Geometrie necessaires pour élever un bâtiment, s'il m'est permis de parler de la sorte, se sont trouvé ramassées. La Geometrie a été cultivée en ces derniers temps avec plus de ſuccez qu'en aucun autre. On y a fait de grandes découvertes, & ce qui eſt de plus conſiderable, on a trouvé le moyen d'éclaircir ce que les Anciens avoient écrit avec obſcurité & confuſion.

Ce n'eſt pas icy le lieu de faire l'Hiſtoire de ces découvertes, & de rapporter en détail quels ſont les Grands Hommes qui ont enrichy cette Science par leurs inventions, mais je ſuis obligé de dire que l'Auteur des Elemens de Geometrie qui furent imprimés en François chez Savreux l'an 1667. c'eſt le premier qui a dõné un ordre naturel aux Elemens de Mathematique. Cet Auteur n'a point parlé des ſolides, ce que je fais d'une maniere beaucoup plus étenduë que ne fait Euclide ny tous ſes Commentateurs, car j'y comprend ce qu'Archimede a demontré de plus conſiderable touchant les Cylindres & les Cones, & la Sphere. Je r'enferme auſſi dans ces Elemens ce que ce Geometre a écrit de la dimenſion du cercle.

Je diſtribue mon Ouvrage ſelon les trois dimenſions, qui ſe diſtinguent dans le corps, ſçavoir la longueur, la largeur, & la profondeur, ou la ſolidité. Dans le premier livre je conſidere les proprietés de la premiere dimenſion du corps, me retranchant encore à la longueur qui eſt une ligne, ou droite ou circulaire, parce que ces lignes ſont les plus ſimples & les plus faciles à connoître, Ainſi l'ordre demande qu'on commence par elles, & qu'on reſerve à un autre lieu de parler des autres lignes, qui ſont plus compoſées, & ont des proprietés plus cachées.

Dans le ſecond Livre je traite de la ſeconde dimenſion, & je n'y parle pour la même raiſon que des largeurs ou ſurfaces qui ſont les plus ſimples; c'eſt à dire, des ſurfaces droites qu'on nomme plans, qui ſont bornées par des lignes droites ou par des cercles. Dans le troiſiéme Livre, j'explique ce qui regarde les raiſons & les proportions des lignes droites, & des cercles, & des ſurfaces droites, ou des plans. Dans le quatriéme, je traite de la ſolidité. Je n'y ay pû parler que des ſolides compris ſous des ſurfaces planes ou ſpheriques, qui ſe font par le mouvement d'une ligne droite ou d'un cercle. J'expliqueray les differentes eſpeces de lignes & de ſurfaces courbes, & les ſolides qu'elles compoſent dans une troiſiéme partie, qui contiendra les Elemens de ces lignes & de ces ſurfaces.

Je me ſuis appliqué à rendre ces Elemens faciles & courts; car la longueur eſt une des cauſes du dégoût qu'on a de cette Science, qui fait que peu de perſonnes s'y appliquent, quoy que tout le monde l'eſtime, & juge qu'elle eſt utile. Je n'abbrege pas ces Elemens en retranchant des propositions necessaires: il y a plus de choses que dans Euclide; mais en me servant de démonstrations courtes, & prenant des voyes abbregées par où je mene tout d'un coup à la verité.

Outre cela, je me sers de démonstrations generales, de sorte qu'en ayant conceu une, on en conçoit plusieurs autres. Ce qui fait qu'on rencontre peu de difficulté, car pourvû qu'on prenne peine à comprendre la demonstration de certains Theorêmes fondamentaux, qui sont en petit nombre, on trouve que tout le reste est presque connu; ainsi je reduis les matieres sous certains chefs, ce qui contribue à faire retenir ce que l'on a apris.

Comme mon principal dessein est de contribuer à rendre l'esprit de ceux qui étudient, exact & penetrant, à quoy la methode des Geometres, qu'ils appellent Analyse, est particulierement utile, je tâche de donner une idée de cette methode, appliquant à la Geometrie ce que j'en ay dit ailleurs par rapport à la Grandeur en general. Je fais voir comment l'on peut porter loin les premieres connoissances de la Geometrie, & en même temps je propose des modeles de la methode qu'il faut suivre dans la resolution d'une question.

Je n'envisage la justesse de l'esprit que par rapport à la Religion. C'eſt Dieu même que je regarde dans l'étude de la Geometrie. L'on n'y parle que du Corps: on y trouve cependant de grands ſujets de penſer à Dieu. L'harmonie du Monde n'eſt bien connuë que par ceux qui ſçavent la Geometrie. Tout ce qu'on voit de beau dans cette Science touchant les figures, leurs raiſons & leurs proportions, ſe remarque en ſuite dans les Ouvrages de la Nature; ce qui donne lieu d'admirer la Sageſſe de celuy qui en eſt l'Ouvrier.

Il n'y a point de petit Corps qui ne ſoit capable de toutes les figures de Mathematique, ſelon qu'on concevra que ſa matiere ſera diſpoſée. Ces figures ont toutes leurs proprietez. L'eſprit peut par conſequent découvrir en chaque Corps un nombre infini de veritez ſurprenantes, lors qu'il le conſidere avec ordre; c'eſt à dire, s'il fait les conſiderations que peut faire un habile Geometre, & s'il applique à ce Corps tout ce que la Geometrie enſeigne.

Combien d'admirables veritez verrions-nous donc en Dieu, ſi nous l'étudions autant que nous faiſons les Corps? Nous n'y voyons preſque rien, parce que nôtre eſprit ne peut s'applique autant de temps à luy, qu'il fait à la matiere; mais combien de choſes les Saints découvrent-ils en ſa Divine Eſſence, qui eſt la cauſe de la fecondité de la matiere ? Et ſi la connoiſſance des veritez que la Geometrie nous enſeigne donne tant de contentement, quel eſt le plaiſir des Bienheureux qui voyent des veritez d'autant plus excellentes, que Dieu ſurpaſſe infiniment les Corps.

Ainſi l'étude de la Geometrie, outre que par le plaiſir ſpirituel qu'elle cauſe, peut inſinüer du mépris pour les voluptés, & par là nous rendre plus propres pour la Morale de l'Evangile qui en eſt ennemie; outre, dis-je, qu'elle diſpoſe l'eſprit pour toutes les Sciences, pour celles mêmes qui ſont élevées au deſſus de la matiere, puis qu'elle l'en rend capable, elle nous fait encore connoître quelle eſt la vaſte étenduë de la Science que poſſedent ceux qui voyent Dieu, & de quel plaiſir ils joüiſſent en découvrant tant de veritez dans la Divine Eſſence; & par conſequent elle enflâme ceux qui l'étudient avec un eſprit Chrêtien d'une plus forte ardeur pour acquerir Dieu, que pour devenir Geometres.

DEFINITIONS DE QVELQVES termes dont on ſe ſert dans les Mathematiques.

Axiome.

ON appelle ainſi une propoſition ſi claire qu'elle n'a pas beſoin de preuve.

Suppoſition ou demande.

C'eſt une propoſition qui n'eſt pas ſi evidente qu'un Axiome, mais auſſi qu'on ne peut conteſter ; ainſi on demande qu'on l'accorde, pour n'être pas obligé de la démontrer.

Definition.

C'eſt une propoſition qui détermine l'idée d'un mot & en ôte la confuſion.

Theorême.

On nomme ainſi une propoſition dont il faut démontrer la verité.

Problême.

C'eſt une propoſition dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe,& de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit propoſé de faire.

Lemme.

C'eſt une propoſition qui n'eſt au lieu où elle eſt que pour ſervir de preuve à d'autres qui ſuivent.

Corollaire,

C'est une proposition qui n'est qu'une suite d'une autre precedente.

Explication de quelques Notes.

CEtte marque + signifie *plus*, A + B, c'est à dire, A plus B.

Celle-cy − signifie *moins*, A − B, c'est à dire, A moins B.

= C'est la marque de l'égalité C = D: c'est à dire, que C est égal à D.

Ces quatre points : : sont la marque de la proportion.

Cecy ∺ c'est la marque d'une proportion continuë.

§. C'est à dire, Section.

Sup. supra, ou, cy-dessus.

Ainsi Theor. 4. §. 3. liv. 2. c'est à dire, Theorême 4^e^ section 3^e^ livre second, ou Theor. 5^e^ *sup.* c'est à dire, Theorême 5^e^ cy-dessus.

Gr. c'est une marque qui fait connoître qu'on cite le Traité de la Grandeur.

Principes generaux, ou *Axiomes.*

1. LE tout est plus grand que sa partie.
2. Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.
3. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entr'elles.
4. Si à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les touts sont égaux.
5. Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

6. Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les restes seront inégaux.
7. Si à des grandeurs inégales on en ajoûte d'égales; les touts seront inégaux.
8. Les grandeurs qui conviennent étant posées les unes sur les autres, sont égales.
9. Deux choses doubles ou triples d'une troisiéme sont égales entr'elles.
10. Les choses qui sont moitiés ou tiers d'une même chose, ou de choses égales, sont égales entr'elles.
11. Une grandeur qui a le signe + étant jointe avec la même grandeur qui a le signe − est égale à rien, c'està dire, que $+A - A = zero$.

Lors que la verité d'une proposition est évidente, on se contente de l'enoncer par des termes clairs. Si cette proposition à besoin de preuves, on la prouve en se servant, ou d'axiomes, ou de suppositions qu'on a faites, & qui ont esté receües, ou des Theorêmes, ou des Problêmes, ou des Lemmes, ou enfin des Corollaires precedens, dont les verités ont esté démontrées auparavant.

On dit qu'une chose est vraye par la construction, lors qu'étant convenu que certaines regles sont bonnes, supposé qu'on les ait suivies, on ne peut rejetter les consequences qui en sont tirées.

Ie suppose que les principes generaux sont si connus & si presens à l'esprit, qu'il n'est pas necessaire de les citer.

ELEMENS DE GEOMETRIE. OU DE LA MESURE DU CORPS.

LIVRE PREMIER.

De la premiere dimension du Corps.

SECTION PREMIERE.

Des differentes mesures, ou dimensions du Corps.

Premiere Definition.

LE Corps est un être étendu, dans lequel l'on distingue trois dimensions, sçavoir, la longueur, la largeur & la profondeur.

Premiere Demande.

On peut considerer une de ces trois choses sans faire attention à l'autre, la longueur sans considerer la largeur, & la largeur sans considerer la profondeur, comme l'on regarde la longueur des chemins sans faire reflexion sur leur largeur, & leur largeur sans penser à la profondeur de la terre.

Scholie.

La notion de la longueur exclut celle de la largeur & de la profondeur, & celle de la largeur exclut celle de la profondeur, & ces notions ne sont point fausses, quoy qu'effectivement ces trois choses soient inseparables; parce que dans la maniere dont elles sont conceües, elles sont distinguées en ce que l'une est considerée sans l'autre. Ainsi les Geometres peuvent supposer en cette maniere des êtres qui soient longs sans être larges, & & qui soient larges sans être profonds ou épais; & quand on voudroit soûtenir que ces suppositions sont entierement fausses, les consequences qu'on en tire ne pourroient être rejettées comme fausses. Car par exemple, bien qu'il n'y ait point de cercle parfait dans le monde, il est evident que selon qu'on suppose que le cercle est une figure dont la circonference est en toutes ses parties également éloignée du centre, il faut que toutes les lignes tirées du centre du cercle à la circonference soient égales.

Seconde definition.

Le point, c'est ce qui n'a aucune partie, & qui par consequent est indivisible.

Scholie.

C'est à dire, que c'est une grandeur dont on ne considere point les parties dans lesquelles elle peut être divisée.

Troisiéme definition.

Ligne, c'est une longueur sans largeur

Scholie.

C'est à dire, une longueur dont on ne considere point la largeur, ou qu'on suppose n'avoir point de largeur.

Quatriéme definition.

La ligne ou la longueur qui eſt la plus courte entre deux points, s'appelle ligne droite.

Cinquiéme definition.

La ligne qui n'eſt pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener entre deux points, eſt ou courbe ou compoſée de deux ou de pluſieurs differentes lignes droites.

Scholie.

La ligne A faite de deux lignes, & la ligne B faite de pluſieurs lignes qui ſe joignent dans un point, ne peuvent point être conſiderées comme une ſeule ligne droite.

Sixiém. definition

De deux lignes courbes menées entre deux mêmes points, celle qui eſt la plus longue, eſt dite eſtre la plus courbe.

Septiéme definition

Surface, c'eſt une grandeur longue & large, ſans profondeur.

Scholie.

C'eſt à dire, une longueur & largeur dont on ne conſidere point la profondeur.

Huitiéme definition.

Surface droite ou plane, eſt celle qui eſt la plus courte entre deux lignes droites.

Neuviéme definition.

Surface courbe, eſt celle qui eſt plus grande entre deux mêmes lignes, qu'une ſurface droite ou plane.

Dixiéme d finition.

Solide, c'eſt une grandeur de trois dimenſions, qui s'appelle corps.

SECTION II.

De la longueur.

Qui eſt la premiere & la plus ſimple dimenſion du Corps.

Des lignes droites.

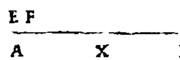
Propoſitions naturellement connuës touchant les lignes droites.

Premiere propoſition ou demande.

LEs extremitez d'une ligne ſont deux points.

Scholie.

Les extremitez de la ligne X ſont A & B qui ſont indiviſibles, premierement, quant à leur longueur, car ſi A avoit deux parties, par exemple E & F, ce ſeroit E qui ſeroit l'extremité. En ſecond lieu, puiſque cette ligne X n'a ny largeur, ny profondeur, les deux extremitez A & B n'ont ny largeur, ny profondeur ; étant donc indiviſibles en tout ſens, ce ſont deux points par la definition ſeconde.

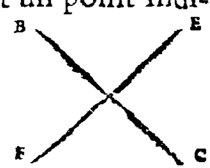


Seconde propoſition ou demande.

Lors que deux differentes lignes ſe coupent, leur ſection eſt un point indiviſible.

Scholie.

La ligne E F coupe B C, ſi elle la coupe en deux differens points, cette ligne E F a de la largeur, ce qui eſt contre la definition de la ligne droite, la ſection de B C & de E F eſt donc un point,



Troisiéme proposition ou demande.

Une ligne menée entre deux points, laquelle s'écarte d'une part ou de l'autre d'une ligne droite menée entre ces deux mêmes points, eſt plus grande que cette ligne droite. Voyez la figure ſuivante.

Quatriéme propoſition ou demande.

Deux points étant donnez, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.

Scholie.

L'eſprit n'apperçoit rien d'impoſſible dans cette propoſition. L'inſtrument dont on ſe ſert pour mener une ligne droite eſt une regle. Pour connoître ſi une regle eſt bonne, on s'en ſert pour tirer une ligne, à laquelle appliquant dans un autre ſens & d'un autre côté cette même regle, ſi on trouve qu'elle convient toujours avec cette ligne, on juge qu'elle eſt juſte. Un moyen ſeur pour mener une ligne droite eſt de ſe ſervir d'un filet fort ſubtil, comme pourroit être un cheveu, car aprés l'avoir tendu entre deux points autant qu'on le peut, ſans le rompre, ſelon la notion de la ligne droite, il marquera une ligne droite entre ces deux points,

Cinquiéme propoſition ou demande.

Une ligne droite étant donnée, on la peut prolonger. Elle ne peut pas étre prolongée du même côté vers deux differens points.

Scholie.

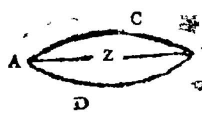
On prolonge une ligne par le moyen d'une regle.

Sixiéme propoſition ou demande.

Entre deux mêmes points on ne peut mener qu'une ligne droite.

Scholie.

Si on peut mener pluſieurs lignes droites entre A & B autres que la ligne Z, il faut qu'elles s'écartent ou vers C ou vers D, donc elles feront plus longues que Z, par conſequent elles ne ſeront pas droites.



Car une ligne entre A & B ne peut être droite qu'elle ne soit la plus courte de toutes les lignes qu'on puisse mener entre ces deux points. Ainsi on ne peut mener qu'une seule ligne droite entre A & B. On pourroit concevoir plusieurs lignes entre deux points, couchées les unes sur les autres, mais elles ne seroient qu'une même ligne.

Entre deux mêmes points on peut mener une infinité de differentes lignes courbes, c'est pourquoy lors qu'il s'agit de mesurer la distance d'un point à un autre point, on ne prend pas pour mesure une ligne courbe, mais une ligne droite.

Septiéme proposition ou demande.

Deux lignes droites qui ont deux points communs ne sont qu'une même ligne.

Scholie.

La ligne C B & la ligne A D ont deux points communs, sçavoir A & B, on ne peut concevoir entre A & B qu'une ligne droite par la sixiéme proposition *sup.* Ainsi A B & B A ne sont point deux differentes lignes. La ligne B A étant prolongée ne peut aller ailleurs qu'au même point C, ny A B ailleurs que vers D lors qu'on la prolonge; partant A D avec B C ne sont qu'une même ligne droite; car entre C & D il n'y a qu'une seule ligne droite.

Huitiéme proposition ou demande.

Donc, la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Scholie.

Car si par les deux points donnez A & B l'on mene une ligne droite, elle sera celle que l'on cherche, puis qu'on ne peut pas mener par deux points plusieurs differentes lignes droites, toutes celles qui ont deux points communs n'étant qu'une même ligne par la proposition 7.

Neuviéme proposition ou demande.

Deux lignes droites qui croisent, ou qui se coupent, ne se peuvent rencontrer que dans un seul point.

Scholie.

Car si elles se rencontroient en deux points, elles ne seroient qu'une même ligne par la proposition 7 *sup.* Ainsi elle ne seroient pas differentes l'une de l'autre, comme le sont deux lignes qui croisent & qui se coupent.

SECTION III.

De la ligne courbe qui eſt circulaire.

Scholie.

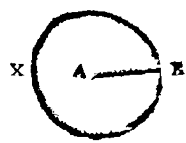
LE nombre des differentes eſpeces de lignes courbes étant infini, l'ordre ne me permet pas de parler de toutes : je ne conſidere donc icy que la ligne courbe qui eſt circulaire, laquelle aprés la ligne droite eſt la plus ſimple, & la plus aiſée à connoître,

Premiere definition.

Une ligne courbe, ſur un plan, qui n'a ny commencement ny fin, & dont toutes les parties ſont également éloignées d'un même point, eſt un cercle; ce point dont toutes les parties de cette ligne ſont également éloignées, s'appelle le centre du cercle.

Scholie.

Concevons que dans la ligne A B l'extremité A eſt immobile pendant que B l'autre extremité tourne, ſi B laiſſe une trace, ce ſera un cercle dont toutes les parties ſont éloignées du point A d'un intervale égal, ſçavoir, A B, Ainſi A eſt le centre. Il eſt bon de conſiderer cette maniere dont un cercle ſe fait, qui eſt ſi uniforme qu'on ne peut concevoir aucune difference entre toutes ſes parties.



Seconde definition.

Les lignes menées du centre à la circonference, s'appellent rayons ou demy diametres.

Scholie.

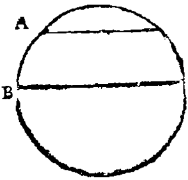
A B eſt un rayon du cercle X.

Troiſiéme definition.

Les lignes menées d'un point de la circonference à un autre point, s'appellent cordes.

Scholie.

A est une corde du cercle X.



Quatriéme definition.

Les cordes qui passent par le centre s'appellent diametres.

Scholie.

La corde B qui passe par le centre du cercle X est le diametre de ce cercle.

Cinquiéme definition.

La partie de la circonference qui se trouve entre les extremitez d'une corde s'appelle arc.

Scholie.

Lors qu'une corde, comme est A dans le cercle X, ne passe pas par le centre, il y a deux portions de circonference, qui se terminent aux extremitez de cette corde, l'une plus grande, l'autre plus petite. Quand on parle de la corde d'un arc, si l'on n'ajoûte autre chose, on entend l'arc qui n'est pas le plus grand.

Sixiéme definition.

Toute circonference se conçoit divisée en trois cens soixante parties égales, qui se nomment degrez.

Septiéme definition.

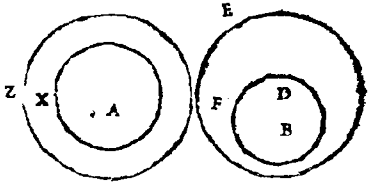
Chaque degré se divise en soixante minutes, ou petites parties, qu'on appelle premieres, chaque minute ou premiere en soixante secondes, & chaque seconde en soixante troisiémes: ainsi à l'infiny.

Huitiéme definition.

Cercles concentriques, sont ceux qui sont décris d'un même centre. Excentriques, qui n'ont pas même centre.

Scholie.

Z & X qui ont pour centre le même point A, sont concentriques, & les cercles E & F qui ont pour centre D & B, deux points differens sont excentriques.



Propositions naturellement connuës, touchant la ligne circulaire.

Premiere proposition ou demande.

Un intervalle étant donné, on peut décrire une circonference.

Scholie.

Pour cela il faut qu'une des extremitez de la ligne droite, qui mesure cet intervalle, étant immobile, comme il a été dit cy-dessus, l'autre extremité continuë de se mouvoir, jusques à ce qu'elle se trouve au point où elle avoit commencé son mouvement. L'instrument dont on se sert ordinairement pour décrire un cercle est un compas.

Seconde proposition ou demande.

Dans un même cercle, ou dans les cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales, & les cordes égales sont les cordes d'arcs égaux.

Troisiéme proposition ou demande.

Une corde ou diametre qui passe par le centre coupe le cercle en deux parties égales, qui s'appellent demie circonference.

Scholie.

Cette proposition & la precedente sont une suite de la simplicité & uniformité des cercles, dont toutes les parties étans faites de même maniere, on ne peut concevoir aucune difference entre elles.

Quatriéme proposition ou demande.

Toutes les lignes tirées du centre, qui sont plus petites que les rayons du cercle, ont leur extremité au dedans du cercle : que si elles sont plus longues, elles l'ont au dehors : si égales, dans la circonference même.

Cinquiéme proposition ou demande.

Les cercles sont égaux dont les rayons sont égaux.

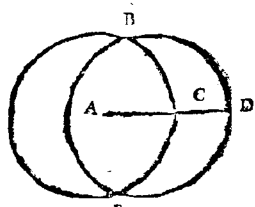
Scholie.

Ces propositions n'ont besoin d'aucune explication.

Theorême premier.

Deux cercles qui se coupent ne sont pas concentriques.

Les cercles BCE & BDE se coupent au point B. Le point A est le centre de BCE, je dis que ce point A ne peut être le centre de B D E ; s'il l'étoit, il s'ensuivroit une absurdité, sçavoir, que A C partie de AD seroit égale à AD. Car 1° A B & A C étans rayons d'un même cercle, ces deux lignes sont necessairemẽt égales. 2° Si A est centre de BDE, les lignes AB & AD rayõs d'un même cercle serõt aussi égales, partant, puisque deux choses qui sont égales à une troisiéme, sont égales entre elles, A C & A D étant égales à A B, ces deux lignes

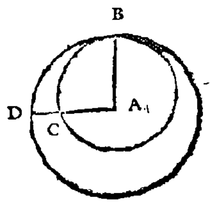


ſont égales ; mais la partie A C ne peut être égale à ſon tout AD : donc on ne peut pas dire que deux cercles qui ſe coupent ſoient concentriques.

Theorême ſecond.

Deux cercles qui ſe touchẽt ne ſont pas concẽtriques,ou n'ont pas même centre.

Le cercle BCB touche le cercle BDB lequel B D B a pour centre le point A, je dis que le cercle B C B a un autre centre. Si le contraire eſt vray, c'eſt à dire, que A ſoit le centre de ces deux cercles, il s'enſuivroit une abſurdité que A C ſeroit égal à AD la partie au tout.Car 1° les lignes A B & A D ſont les rayons de B D B,ainſi elles ſont égales. 2° Si A eſt le centre de BCB, il faut que A B & A C ſoient

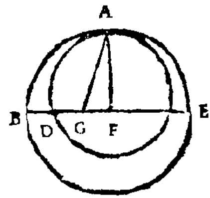


encor égales : donc A C & AD étant egales avec une 3me ligne, ſçavoir avec AB,elles ſont égales entre elles,la partie AC ſera égale à ſon tout AD : cela ne peut être ; ſi deux cercles ſe touchent donc ils ſont excentriques.

Theorême troiſiéme.

Si les deux cercles A B A & AD A ſe touchent l'un l'autre en dedans ; la ligne droite qui joindra leurs centres (qui ne ſont pas un même point par le Theor. 2e) étant prolongée tombera dans le point d'attouchement de ces deux cercles.

Si on le nie,& qu'on ſuppoſe que leurs centres, qui par le 2ᵉ Theor. ſont differens, ſoient F & G par leſquels paſſe la ligne E B, qui ne tōbe point dans A où ſe touchent ces deux cercles, je mōtre qu'il s'enſuit que GD eſt plus grand que G B, & qu'ainſi la partie eſt plus grande que le tout, ce qui eſt abſurde.



Entre les deux points A & F la plus courte ligne eſt A F qui eſt droite ; ainſi A F eſt plus petite que A G + GF. Le centre de A B A eſt F, ainſi les rayons A F & F B ſont égaux, partant F B eſt plus petit que F G + G A, ôtant de F B & de F G + G A la partie qui leur eſt cōmune, ſçavoir, FG, le reſte GA ſera plus grand que GB. Or GD eſt égal à GA, puis qu'on ſupppoſe que G eſt le centre du cercle A D A, & qu'ainſi ils ſont rayons du même cercle : donc A G étant plus grand que GB, comme on l'a demontré, il faut que G D ſoit plus grand que GB, ce qui eſt l'abſurdité qu'il falloit prouver devoir ſuivre en niant le Theorême propoſé, qui par conſequent ne peut être conteſté.

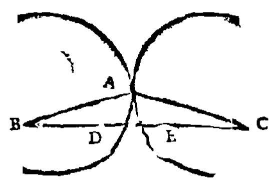
Theorême quatriéme.

Si deux cercles ſe touchent en dehors,

la ligne droite menée par leurs centres paſſera par leur point d'attouchement.

Qu'ainſi ne ſoit, que le centre du cercle DAD ſoit B, & celuy du cercle EAE ſoit C, & que la ligne BC qui ne paſſe pas par A, point d'attouchement de ces deux cercles, joigne les deux centres B & C.

Pour démontrer le Theorême propoſé, il faut faire voir que de cette ſuppoſition il s'enſuit une abſurdité, ſçavoir que la ligne B C eſt plus grande que BA + AC contre ce qui a été dit



que la ligne droite eſt la plus courte entre deux points.

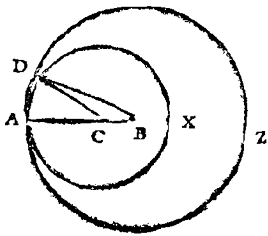
Les lignes BA & BD ſont égales étant rayons d'un même cercle. Les lignes CA & C E ſont auſſi égales par la même raiſon : donc ajoûtant à B D + CE la partie D E qui eſt entre ces deux cercles, alors BD + D E + E C ſera plus grand que B A + A C, ce qu'il faloit démontrer pour faire voir que ſi on nie le Theorême propoſé, il s'enſuit une abſurdité.

Theorême cinquiéme.

Deux cercles ne ſe peuvent toucher qu'en un point.

Que cela ne ſoit, & que les cercles Z & X ſe touchent dans les deux points

A & D. Par le ſecond Theorême ils n'ont pas même centre. Que celuy de X ſoit C, & que celuy de Z ſoit B : donc puiſque D & A ſont ſuppoſez dans la circonference de X & de Z, il faut que C A ſoit égal à CD, qu'ainſi BC + CA ſoit égal à B C + C D, & puiſque B eſt le centre de Z, il faut auſſi que B D ſoit égal à BC + CA. On vient de démontrer que B C + CA eſt égal à



BC+CD : donc ces deux grandeurs BC + CD & BD étans égales à une troiſiéme, ſçavoir à BC+CA, elles ſont égales entre elles, ce qui eſt abſurde, la ligne droite BD étant plus petite que les lignes BC+CD par la definition de la ligne droite. Deux cercles ne ſe peuvent donc toucher en deux points,

SECTION IV.

De la differente poſition des lignes droites qui ſont entr'elles ou perpendiculaires, ou obliques, ou paralelles.

Scholie.

Deux lignes droites ne peuvent être diſpoſées qu'en ces trois manieres ; ou elles ſe rencontrent & ſe coupent, ou elles ne se rencontrent point. Quand elles se rencontrent elles le peuvent faire de sorte que l'une panche plus vers un côté que vers l'autre, ou qu'elle ne panche pas plus. On considere icy ces trois positions.

Des lignes perpendiculaires.

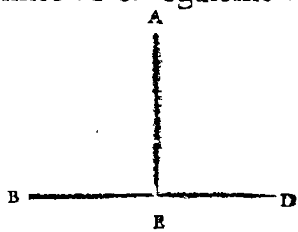
Definition.

Une ligne qui tombe sur une autre ligne, ou qui la coupe, de sorte qu'elle ne panche pas plus vers un côté de cette ligne qu'elle coupe que vers l'autre, s'appelle perpendiculaire.

Propositions naturellement connuës touchant les lignes perpendiculaires.

Premiere proposition ou demande.

La ligne A E tombe sur E milieu de B D. Si son sommet A est également éloigné des extremitez B & D de la ligue B D, elle ne panche pas plus d'un côté que d'autre, ainsi elle est perpendiculaire sur B D.



Scholie.

C'est une suite de la notion que la Definition precedente donne de la ligne perpendiculaire.

Seconde proposition ou demande.

Si deux points de la ligne AE sont également distans de B & de D, chaque point de la ligne AE sera également distant de B & de D.

Scholie.

C'eſt une ſuite de ce que la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points. On ne peut point concevoir que quelque point dans la ligne A E ſoit plus prês de B que de D qu'on ne conçoive que A E ſe courbe en ce point du côté de B, & qu'ainſi elle n'eſt pas une ligne droite, comme on ſuppoſe qu'elle l'eſt.

Troiſiéme propoſition ou demande.

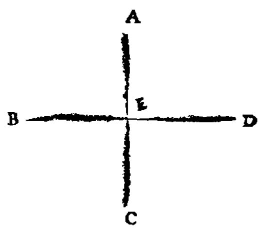
Si AE eſt perpendiculaire ſur B D, & que l'un de ſes points A ou E, ſoit également diſtant de B & de D, l'autre ſera également éloigné des mêmes points B & D

Scholie.

Car ſi A eſt également diſtant de B & D, & que E ne le ſoit pas, alors A E panchera plus d'un côté que d'autre, ainſi elle ne ſera pas perpendiculaire, contre la ſuppoſition qu'on fait qu'elle l'eſt.

Quatriéme propoſition ou demande.

Pour démontrer donc que la ligne AE eſt perpendiculaire ſur B D, il ſuffit de faire voir que deux de ſes points ſont chacun en égale diſtance des points B & D.



5ᵉ propoſ. ou dem.

Si la ligne AE eſt perpendiculaire ſur B D, la ligne EC qui eſt ſon prolongement, ſera pareillement perpendiculaire ſur BD.

Scholie.

Ce n'eſt qu'une même ligne droite, on ne peut pas concevoir la choſe autrement, à moins que A C ne ſe courbe vers B ou vers D.

Sixiéme

Sixiéme propoſition ou demande.

Si A C eſt perpendiculaire ſur B D, la ligne B D eſt perpendiculaire ſur A C.

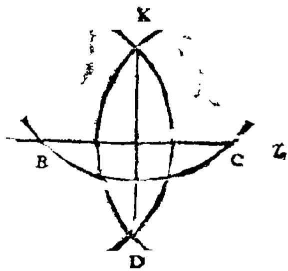
Scholie.

On ne peut concevoir que B panche plus vers A que vers C, qu'en même temps on ne conçoive que D panche plus vers C, & cela étant, A panchera plus vers B que vers D, car cela eſt reciproque. Ainſi A E ne ſeroit pas perpendiculaire ſur B D, contre la ſuppoſition. B D eſt donc perpendiculaire ſur A C, comme A C eſt perpendiculaire ſur B D.

Problême premier.

Du point K hors de la ligne Z tirer une perpendiculaire ſur Z.

1° De K comme centre, je décris l'arc B C, ainſi B & C qui ſont dans la circonference de ce cercle & dans la ligne Z, ſont également éloignez de K. 2° de C comme centre, & de l'intervale C K je décris un cercle, & du point B un ſecond du même intervale, ces deux cercles ſe coupent aux points K & D qui ſont ainſi également diſtans de B & de C. 3° Par K & D je mene une ligne droite, dans laquelle les deux points K & D étant par la conſtruction également éloignez de B & de C, il faut par la quatriéme demande cy-deſſus que cette ligne K D

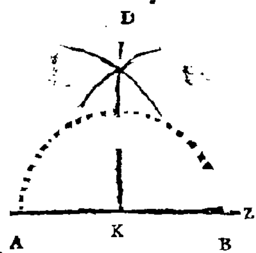


ſoit perpendiculaire ſur Z, ce qu'il faloit faire.

Probléme ſecond.

Du point K dans la ligne Z élever une perpendiculaire.

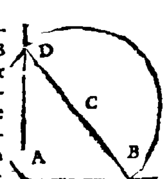
De K comme centre je décris un cercle qui coupe Z en deux points, qui ſont icy A & B, deſquels comme centres je décris deux autres cercles d'un même intervale pris à diſcretion, de ſorte que ces deux cercles ſe coupent. Je ſuppoſe que ce ſoit au point D : d'où ayant mené une ligne au point K, elle eſt la perpendiculaire que l'on cherche. Car par la conſtruction D eſt également éloigné de A & de B, dont



le point K eſt auſſi également éloigné par la conſtruction; ainſi par la quatriéme demande cette ligne ayant deux de ſes points également éloignez de A & de B, elle eſt perpendiculaire ſur Z.

Scholie.

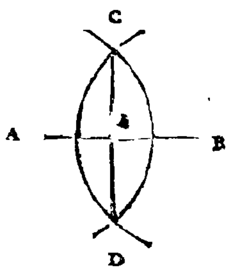
Lors que le point donné eſt ſur l'extremité de la ligne donnée, comme icy ſi A B eſtant la ligne donnée il faloit élever ſur A une perpendiculaire, je prends à diſcretion le point C, & ouvrant le compas de l'intervale A C je décris un cercle & je mene le diametre B D, & du point de ſection D, je tire une autre ligne au point A, qui ſera la perpendiculaire qu'on vouloit élever : ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.



Corollaire.

De là nous apprenons comment l'on peut couper une ligne en deux parties égales.

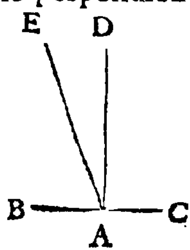
Soit A B une ligne droite de A & de B comme centres, je fais d'un même intervale pris à diſcretion deux cercles qui ſe coupent en C & D, par où je mene une ligne qui eſt perpendiculaire ſur A B, puiſque D & C ſont également éloignez de A & de B.



Or par la ſeconde demande le point E commun aux deux lignes D C & A B, eſt également éloigné de A & de B, ainſi A E eſt égale à E B, par conſequent la ligne A B eſt coupée par la moitié.

Theorême premier.

On ne peut élever ſur un même point dans une ligne plus d'une perpendiculaire.



Sur le point A, dans la ligne B C, également diſtant de B & de C, ſoit élevée la perpendiculaire A D, il eſt viſible que ſi on en vouloit élever une autre ſur le même point A on ne le pourroit faire que cette ligne telle qu'A E, ne fût plus d'un côté que d'autre, comme icy plus vers B que vers C, ce qui est directement contraire à la definition des lignes perpendiculaires.

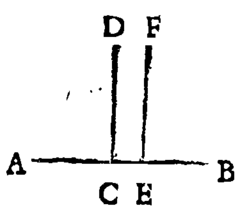
Scholie.

C'est une suite de la notion que nous avons donnée de la perpendiculaire, qu'elle est éloignée également de part & d'autre des extremitez de la ligne sur le milieu de laquelle elle tombe ; or il ne se peut pas faire que deux differentes lignes soient dans le même éloignement de ces mêmes extremitez.

Theorême second.

Si la ligne C D tombe perpendiculairement sur le milieu de la ligne A B, elle passe par tous les points qui sont également éloignez de A & B extremitez de la ligne A B.

Si on le conteste & qu'on veüille dire que le point F par où C D ne passe pas, est également éloigné de A & de B, de ce point soit mené sur A B une perpendiculaire, qui par le precedant Theorême ne tombera pas sur C, car il y auroit deux perpendiculaires sur C, ce sera donc ailleurs. Que ce soit au point E. Puisque F est supposé également distant de A & de B par la quatriéme demande, le point E sera également distant de A & de B : or C par l'hipothese est aussi également distant

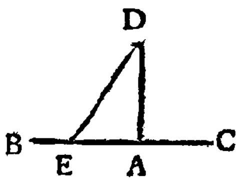


de A & de B, donc A C ſera égal à A E, ce qui eſt abſurde. Si la ligne CD tombe, donc, &c.

Theorême troiſiéme.

On ne peut mener plus d'une perpendiculaire d'un même point ſur une ligne.

La ligne A D tombe perpendiculairement ſur le milieu de la ligne B C, je dis qu'on ne peut du même point D mener d'autres lignes perpendiculaires ſur B C, car ces lignes tomberont de part ou d'autre de A, que ce ſoit en E. Alors par la troiſiéme demande, le point E eſt également diſtant de B & de C, donc B E eſt moitié de cette ligne. Mais A B en eſt auſſi la moitié, ainſi BA eſt égal à B E, ce qui eſt abſurde. Partant on ne peut pas dire qu'on puiſſe mener plus d'une perpendiculaire d'un point ſur une ligne.



Scholie.

C'eſt encore une ſuite de la notion de la perpendiculaire qu'elle eſt également éloignée des extremitez de la ligne ſur le milieu de laquelle elle tombe. Deux différentes lignes ne peuvent pas être chacune également éloignées des extremitez de la ligne ſur laquelle elles tombent.

Corollaire.

Dans un plan deux lignes qui ſont perpendiculaires ſur une troiſiéme, ne ſe peuvent rencontrer.

Car ſi elles ſe rencontroient, ou ſe

coupoient, du point de cette rencontre ou section il y auroit deux perpendiculaires sur la même ligne, ce que l'on vient de démontrer être impossible.

Scholie.

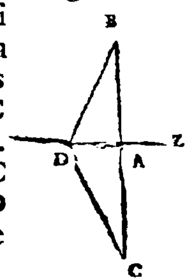
L'on mesure la distance d'un point à une ligne par une perpendiculaire, parce que c'est la mesure la plus simple & la plus constante, puis qu'on ne peut mener d'un point à une ligne qu'une seule perpendiculaire ; & qu'outre cela elle est plus courte que toute autre ligne qu'on tire du même point à la même ligne, comme on le va faire voir dans le Theorême suivant.

Theorême quatriéme.

La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qui puissent être menées d'un point à une ligne.

La ligne B A est perpendiculaire sur Z, il faut démontrer qu'elle est la plus courte de toutes les lignes qui puissent être menées du point B sur la ligne Z.

Prolongez B A jusques en C, en sorte que B A soit égale à A C, la ligne D A est perpendiculaire sur B C par la sixiéme demande, donc D est également éloigné de B & de C, ainsi B D est égal à D C, mais la ligne droite B C est plus courte que la ligne B D C par la 3^e proposition §. 2. Donc A B, moitié de B C est plus courte que B D moitié de B D+D C, ce qu'il faloit démontrer.



Scholie.

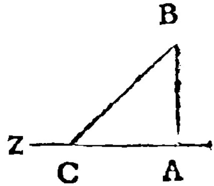
C'est aussi une suite de la nature de la perpendiculaire qui ne s'écartant point & s'éloignant également des extremitez de la ligne sur le milieu de laquelle elle tombe, elle va par le chemin le plus droit, & par consequent le plus court.

Des lignes obliques.

Definition.

Les lignes obliques sont celles qui panchent plus vers un côté que vers l'autre.

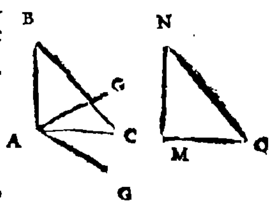
L'on mesure leur obliquité par l'éloignement que leur pied a du pied d'une perpendiculaire tirée d'un de leurs points sur l'autre ligne.



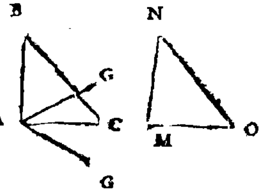
C B est une ligne oblique sur Z, si A B est perpendiculaire sur Z, la ligne C A, qui est la mesure de l'éloignement du perpendicule, est aussi la mesure de l'obliquité de B C.

Theorême cinquiéme.

S'il y a égalité dans la perpendiculaire, & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques sont égales.



Si A B = M N & A C = M O je dis que B C = N O, que cela ne soit, concevons que M N soit posé sur A B, ces deux lignes étant égales, elles conviendront : si M O ne convient pas avec AC qui luy est égale, qu'elle convienne avec A G, donc puisque O M est perpendiculaire sur M N, il faut que A G soit perpendiculaire sur A B, qui est la même que M N, ainsi sur A il y a deux perpendiculaires, ce que nous avons démontré ne pouvoir être.

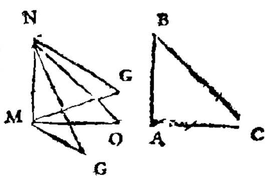


Il faut donc que M O convienne avec A C, ainsi O avec C, comme N avec B, partant les deux lignes O N & B C entre mêmes points sont égales, ce qu'il faloit démontrer.

Theorême sixiéme.

S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans la ligne oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.

Si A B = M N & B C = N O, je dis que C A = MO ; posez A B sur M N, ces deux lignes étant égales, elles conviendront. Si on dit que BC ne convient pas avec N O qui luy est égale, mais avec N G, je dis qu'il s'ensuit une absurdité.



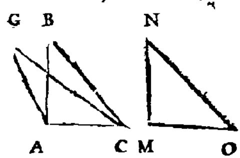
Car, puisque dans cette supposition

B C convient avec N G, il faut que AC convienne avec M G; ainſi M G ſera perpendiculaire ſur M N , qui eſt la même ligne que A B , ſur laquelle C A eſt perpendiculaire , par conſequent ſur M N au point M il y a deux perpendiculaires, ſçavoir M O & M G, ce qui eſt abſurde. B C conviendra donc avec N O , partant A avec M & C avec O : ainſi les lignes C A & M O étant entre mêmes points,ſont égales :ainſi les éloignemens du perpendicule ſont égaux , ce qu'il faloit démontrer.

Theorême ſeptiéme.

S'il y a égalité dans la ligne oblique, & dans l'éloignement du perpendicule, les perpendiculaires ſont égales.

Si B C, = N O, & A C, = M O, je dis que A B, = M N , cela ſe démontre par la même voye que le precedent Theorême. Il faut concevoir que O M eſt poſée ſur A C , qui doivent convenir , ſi N O ne convient pas avec C B,mais avec C G, & par conſequent que M N convienne avec A G , il s'enſuivroit que les deux lignes A G, &



A B, ſeroient perpendiculaires ſur A C, ce qui eſt impoſſible (par le premier Theorême) Il faut donc que O N convienne avec C B, le point A avec M, & B avec N;ainsi que les lignes AB,& M N, étans entre mêmes points,elles soient égales , ce qu'il faloit démontrer.

Des lignes paralelles.

Definition.

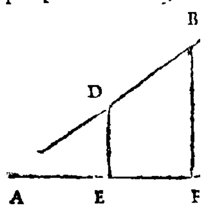
Deux lignes droites qui sont également distantes l'une de l'autre, chacune dans deux de leurs points (& par consequent dans toutes leurs parties) sont dites paralelles.

proposition ou demande.

Deux lignes droites qui estant prolongées à l'infiny, ne se rencontrent point, sont paralelles.

Scholie.

Les lignes droites qui ne sont pas paralelles se rencontrent necessairement ; car, par exemple, si A F & B D s'approchent d'un côté, & qu'au point D la ligne B D soit plus proche de A F, de la valeur de la moitié de B F que je suppose égale à D E, si A E est moitié de A F, & qu'on prolonge B D, comme elle s'approchera uniformément selon la nature des lignes droites, vis à vis de A, elle sera approchée de la ligne A F de la valeur D E, ainsi elle ne sera point éloignée de A, par consequent elle rencontrera la ligne A F dans ce point : il n'en est pas de



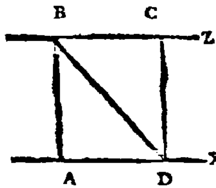
même d'une ligne courbe avec une ligne droite. La courbe en s'approchant toujours,de quelque chose,de la droite,elle le peut faire par des degrés,qui vont en diminuant , à mesure qu'on la prolonge,de sorte qu'elle ne la rencontre jamais,comme l'on le démontre dans les Elemens des lignes courbes.

Lemme premier.

Si A B, & C D, sont perpendiculaires

ſur X, paralelle à Z, elles ſont égales.

La diſtance de B & C de la ligne X ſe meſure par les perpendiculaires A B & C D. Ces deux points ſont en même diſtance de X, puiſque Z & X ſont paralelles, donc ces perpendiculaires ſont égales ; ce qui ſe démontrera en la même maniere de toutes les autres perpendiculaires entre Z & X.



Lemme ſecond.

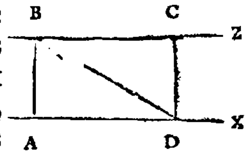
Deux ou pluſieurs lignes perpendiculaires ſur une même ligne ſont paralelles entre elles.

Par le Corollaire du Theorême 3e *ſupr.* les lignes perpendiculaires ſur une même ligne ne ſe rencontrent point, donc par la demande precedente elles ſont paralelles.

Lemme troiſiéme.

Entre deux paralelles les lignes qui ſont perpendiculaires ſur l'une, le ſont ſur l'autre.

Z & X ſont paralelles, la ligne A B eſt perpendiculaire ſur Z, ſi elle ne l'eſt pas ſur X ; du point B je mene ſur X la perpendiculaire B D, & de D ſur Z la perpendiculaire DC ; ainſi BA, n'étant pas perpendiculaire ſur X, la ligne BD ſera plus courte, par le theorême quatriéme, *sup.* & par la même raiſon D C, ſera plus courte que B C, & partant plus que A B, ainſi la ligne Z dans

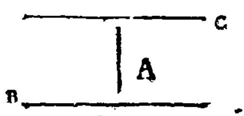


le point C s'approchera plus de X, que dans le point B, par conſequent elle n'eſt point paralelle, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Deux lignes donc étant paralelles, la ligne qui eſt perpendiculaire ſur l'une, l'eſt ſur l'autre, ce qu'il faloit démontrer.

Lemme quatriéme.

La ligne A ne peut être perpendiculaire ſur B & ſur C, deux differentes lignes, qu'elles ne ſoient paralelles.

Car ces deux lignes B & C ſont perpendiculaires ſur A par la demande cinquiéme, *ſup.* donc par le Theorême ſecond, *ſup.* elles

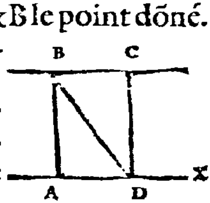


ne ſe rencontrent point ; ainſi par la demande precedente elles ſont paralelles.

Problême troiſiéme.

Par un point donné, mener une ligne paralelle à une ligne donnée.

Soit X la ligne donnée, & B le point dõné. de B j'abaiſſe la perpendiculaire B A ſur X & ſur A B j'éleve au point B la perpendiculaire B C, qui ſera la ligne paralelle que l'on cherche par le Lemme quatriéme, *ſup.*

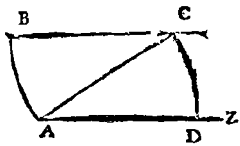


Autre maniere.

J'éleve ſur X une ſeconde perpendiculaire D C que je fais égale à A B, & je tire par B & C la ligne Z qui ſera la paralelle que l'on cherche, puiſque les deux lignes Z & X ſeront en égale diſtance l'une de l'autre.

Scholie.

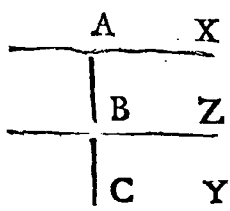
On fait la même choſe plus facilement en cette maniere, le point donné eſt C, de ce point comme centre, & d'un intervalle pris à diſcretion, je fais le cercle A B, & du point A, & de même intervalle, le cercle D C, je prens l'arc A B égal à l'arc DC, & par C & B, je mene une ligne qui ſera la paralelle que l'on cherche.



Theorême huitiéme.

Deux lignes paralelles à une troiſiéme ſont paralelles entr'elles.

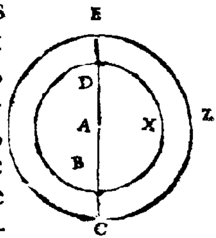
X & Y ſont paralelles avec Z. de X je mene A B, perpendiculaire ſur Z, laquelle étant prolongée juſques en C, puis qu'elle eſt perpendiculaire ſur Z, elle ſera par le Lemme troiſiéme, *ſup.* perpendiculaire ſur Y, paralelle avec Z, & puiſque Z eſt paralelle avec X, cette ligne perpendiculaire ſur Z le ſera auſſi par le Lemme troiſiéme, *ſup.* ſur X paralelle avec Z. Ainſi puiſque X & Y ſont perpendiculaires ſur A C, elles ſont paralelles



entr'elles par le Lemme quatriéme, *sup.* ce qu'il faloit démontrer.

Theorême neuviéme.

Deux ou plusieurs cercles concentriques sont paralelles, ou la distance entre leurs circonferences est égale.



Il est evident que les cercles X & Z étant concentriques BC=DE, car AC=AE & AB=AD de choses égales, ôtant choses égales, de AC la ligne AB, & de AE la ligne AD, les restes BC & DE doivent être égaux.

SECTION V.

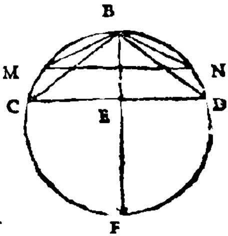
Des lignes terminées à une circonference.

Theorême premier.

LA ligne BF perpendiculaire sur la moitié de la corde CD, coupe par la moitié les arcs CBD, CFD aussi-bien que le cercle, & passe par le centre.

1° Puisque les points B & F sont également éloignez de C & de D, tous les points de BE, par la seconde demande §. 4. seront également éloignez de C &

de D, donc B C = B D & F C = F D, donc B C + C F = B D + D F, ainſi B F coupe les arcs & le cercle en deux parties égales. 2° La perpẽdiculaire B F paſſe par tous les points également éloignez de C & de D par le ſecond Theorême, § 4. Or le centre de ce cercle eſt également éloigné de ces deux points C & D; donc B F paſſe par ce centre.



Corollaire premier.

Donc pour couper un arc en deux parties égales il faut élever ſur la moitié de ſa corde une perpendiculaire.

Corollaire ſecond.

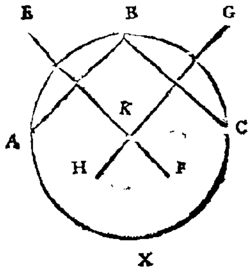
Ayant mené M N paralelle à la corde C D, les arcs entre ces paralelles ſont égaux.

Car B E étant perpendiculaire ſur C D, elle l'eſt ſur la paralelle M N, par le Lemme troiſiéme § 4ᵉ. Donc les lignes droites ou cordes B M, & B N, ſont égales, les cordes B C, & B D, ſont auſſi égales, donc les arcs de ces cordes égales ſont égaux par la deuxiéme demande §. 3. Otant donc choſes égales de choſes égales, l'arc B C moins, l'arc B M eſt égal à l'arc B D, moins l'arc B N, c'eſt à dire que l'arc M C eſt égal à l'arc N D.

Problême premier.

Trois points A, B, C, étant donnez trouver le cercle X, qui passe par ces trois points.

Je joints ces trois points par deux lignes, sur le milieu desquelles j'éleve les perpendiculaires E F, & G H, lesquelles par le Theoréme precedent, passent par le centre de X. Il faut donc que le centre de X se trouve en ces deux lignes, & par consequent au point K où elles se coupent. Ainsi on voit ce qu'il faut faire pour trouver le cercle X.



Scholie.

Si les trois points donnez étoient dans une ligne droite, la question auroit été impossible, comme il est evident; car alors les deux perpendiculaires EF & GH ne se couperoient pas étant paralelles, selon ce qui a été démontré cy-dessus Lemme 4.

Corollaire premier.

Deux cercles ne peuvent pas avoir trois points communs, comme A, B, C, qu'ils ne les ayent tous.

Car ces deux cercles auroient K pour centre, & seroient décrits d'un même intervalle, ainsi ils ne seroient qu'un même cercle.

Corollaire second.

Deux cercles ne se peuvent couper en plus de deux points.

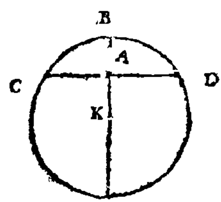
Car

Car s'ils ſe coupoient en trois, ils auroient trois points communs, ainſi par le Corollaire precedant ce ne ſeroit pas deux differens cercles.

Theoréme ſecond.

Si la ligne B K paſſe par le centre K, & coupe la ligne C D, ou l'arc C B D par la moitié, elle eſt perpendiculaire ſur la ligne C D.

Car il y a dans cette ligne B K deux points, ſçavoir A ou B, & K également éloignez de C & de D, puiſque A eſt la moitié de la ligne CD, & B moitié de l'arc CBD, & que K eſt le centre du cercle. Donc BK eſt perpendiculalre, par la notion qu'on a donnée de cette ligne.



Theorême troiſiéme.

Si la ligne B.K paſſe par le centre K, & eſt perpendiculaire ſur CD, elle coupe C D par la moitié.

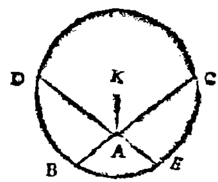
Puiſque K eſt le centre, ce point eſt également éloigné de C & de D: & puiſque B K eſt perpendiculaire, le point A & tous les autres de B K doivent être également éloignez de C & de D par la troiſiéme demande § 4 : donc CD eſt coupé par la moitié.

Theorême quatriéme.

Les deux cordes B C & D E qui ne

passent pas par le centre, ne se peuvent couper par le milieu.

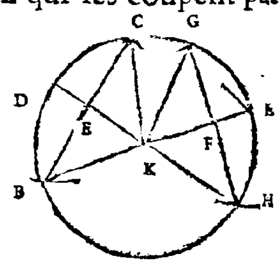
Si ces deux cordes se coupent en A, qui n'est pas le centre, & que ce point soit le milieu de ces deux lignes, ayant mené de A une ligne au centre K, cette ligne KA, par le Theorême second *sup.* sera perpẽdiculaire sur B C & sur D E, & par la Demande sixiéme, §. 4, B C & D E seront perpendiculaires sur K A, ainsi sur le méme point A il y a deux perpendiculaires, ce qui est contre le Theorême 1er §. 4e.



Theorême cinquiéme.

Les cordes B C & G H qui sont également éloignées du centre K sont égales, & si elles sont égales, leurs distances du centre, sçavoir, K E & K F sont égales.

Je mene sur ces cordes les perpendiculaires D K & K L qui les coupent par le milieu. Par l'hypothese K E = K F, & puisque les rayons d'un même cercle sont égaux BK = K H & K C = K G : donc l'oblique K B étant égale à l'oblique KH, & les perpendiculaires

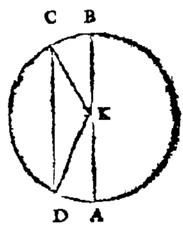


KE & K F de ces obliques étant égales, par le Theorême 6ᵉ § 4 B E = H F : par la méme voye on prouve que EC = FG, qu'ainsi BC = HG, ce qu'il faloit prouver. La seconde partie se démontre par le Theor. 7ᵉ § 4 cy-dessus, où l'on montre que les obliques comme KB & KH étant égales, & les distances BE & HF du perpendicule étant égales, les perpendiculaires KE & KF sont égales.

Theorême sixiéme.

De toutes les cordes d'un cercle, celle qui passe par le centre est la plus grande

Le centre est *K*, le diametre ou la corde qui passe par le centre est B A. Il faut prouver que B A est plus grande que C D, & que toute autre corde qui ne passe pas par le centre *K*



K C = *K*B & *K*D = *K* A, ainsi BA = KC + KD. or KC + *K*D est plus grand que C D ; donc B A est plus grand que CD : cette démonstration s'applique à toute autre corde.

Des lignes tangentes.

Definition.

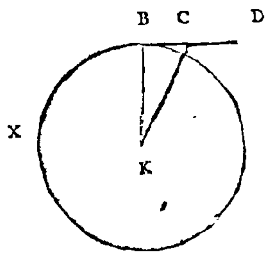
Une ligne qui touche un cercle sans entrer dedans, quoy qu'elle soit prolongée, s'appelle tangente de ce cercle.

Theoréme septiéme.

Une ligne perpendiculaire à l'extremité d'un rayon, touche le cercle, & ne le touche qu'en un seul point.

B D est perpendiculaire sur B *K*, il faut prouver que cette ligne ne touche le cercle X qu'au point B.

Si on dit qu'elle le touche dans un second point, comme en C, je mene de *K* à C une ligne, laquelle n'est pas perpendiculaire sur BD, puis qu'on ne peut mener de K sur B D qu'une seule perpendiculaire, par le Theoréme 1er § 4; elle est donc plus grãde par le Theor. 4e § 4, que le rayon BK, qui est perpendiculaire sur B D,

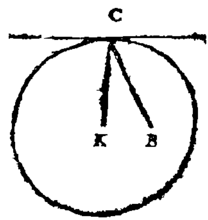


partant le point C est hors le cercle, ainsi BD ne le touche pas en ces deux points B & C, mais seulement en B.

Theorême huitiéme.

Si au dedans d'un cercle on tire une ligne qui soit perpendiculaire sur le point de l'attouchement de la tangente, cette perpendiculaire passera par le centre de ce cercle.

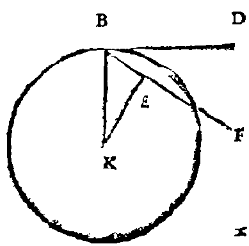
C D est une tangente du point C d'attouchement, je mene au dedans du cercle une perpendiculaire, je dis qu'elle passe par le centre K; si on veut que ce soit par B qui n'est pas le centre, je prouve qu'on n'a pas raison, car de K ayant mené le rayon K C, par le Theorême septiéme, C D est une ligne tangente, donc elle est perpendiculaire sur C K, ainsi il y auroit sur C deux perpendiculaires K C & B C, ce qui ne peut étre par le Theor. 1er § 4 *sup.*



Theorême neufiéme.

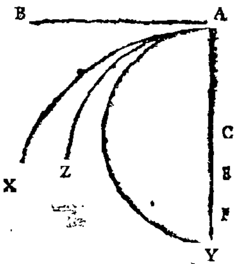
Entre une tangente & la circonference d'un cercle on ne peut mener aucune ligne droite, mais on peut mener un nombre infiny de lignes circulaires.

Si entre BD tangente & le cercle X, on peut mener quelque ligne droite qui partage l'espace entre B D la tangente & le cercle, que ce soit la ligne B F, sur laquelle je mene du point K une autre ligne qui luy soit perpendiculaire, savoir K E, qui par le Theorême 4e § 4 sera plus courte que le rayon B K, qui n'est pas perpendiculaire sur cette ligne, ainsi K E étant



plus petite que le rayon BK, ſon extremité E eſt au dedans du cercle, Par conſequent la ligne BF n'eſt pas hors du cercle, ainſi elle ne partage pas l'eſpace qui eſt entre luy & la tangente BD.

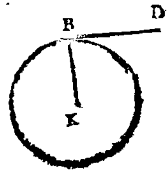
Mais entre AB la tangente & le cercle Y, on peut faire paſſer une infinité de cercles, car ayant prolongé le rayon AC au dedans du cercle, & de E comme centre & de l'intervalle EA ayant fait le cercle Z, la ligne AB ſera tangente à ce cercle, par le Theor. 7^e^ *ſup.* lequel étant plus grand, ſera au dehors du cercle Y. Pareillement le cercle X, dont le centre eſt F, ſera encore entre AB & Y, ainſi à l'infini. Par conſequent entre la tangente AB & le cercle Y on peut faire paſſer une infinité de lignes circulaires.



Problême ſecond.

Mener une ligne droite qui touche un cercle dans un point donné.

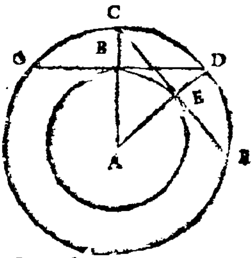
Le centre eſt K, le point donné B, je mene le rayon KB, & ſur ſon extremité B, j'éleve perpendiculairement BD qui par le Th. 7^e^ *ſup.* ſera la tangente qu'il faloit faire



Problême troisiéme.

D'un point donné hors le cercle tirer une tangente.

Le cercle eſt BEB, le point donné eſt C, duquel je mene une ligne au centre A & au point B, où cette ligne coupe le cercle, par le Problême precedant je fais la tangente GD. Je décris un cercle concentrique par C, & de D où ce cercle eſt coupé par la tangente G D je prends D F égale à D C, je joins C & F par une ligne qui ſera la tangente.

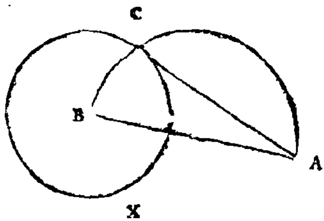


Par la conſtruction la corde G D = C F, car l'arc G C eſt égal à l'arc C D, & l'arc C D à l'arc DF, ainſi les arcs G D & C F étans égaux, leurs cordes ſont égales.

Je mene de D au centre A la ligne A D qui ſera perpendiculaire ſur C F, puiſque deux de ſes points, ſçavoir A & D ſont également éloignez de ſes extremitez : or puiſque les cordes D G & CF ſont égales, les lignes AB & AE ſont égales, par le Theorême cinquiéme *ſup.* Donc le point E auſſi-bien que B eſt dans le cercle BEB, ainſi la ligne C F étant perpendiculaire ſur E extremité du rayon AE elle touche le cercle, par le Theorême ſeptiéme *ſup.*

Scholie.

Ce Problême ſe pratique plus facilement ; ſoit A le point donné, duquel il faut mener une tangente au cercle X aprés avoir tiré la ligne A B de A à B centre du cercle X, il faut décrire ſur cette ligne le cercle A B C, & au point de ſection C mener A C qui ſera la tangente qu'on cherchoit, ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.



ELEMENS DE GEOMETRIE, OV DE LA MESVRE DV CORPS.

LIVRE SECOND.

De la ſeconde dimenſion du Corps.

SECTION PREMIERE.

Des Surfaces droites ou planes compriſes entre deux lignes qui ſe coupent, ce qui s'appelle, Angle.

Premiere definition.

VNE ſurface plane compriſe entre deux lignes droites qui ſe joignent en un point, & qui ſe coupent étans prolongées, ſe nomme Angle plan.

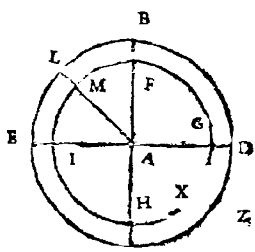
Seconde definition.

Ces deux lignes qui renferment cet eſpace, qu'on appelle Angle, ſont les côtez de cet Angle. Le point où ces deux lignes ſe coupent eſt le ſommet de l'Angle.

Lemme.

Deux ou pluſieurs cercles étant concentriques, les lignes menées du centre, qui diviſent en tant de degrez la circonference de l'un, diviſent ſemblablement en autant de degrez celle des autres cercles.

1° Il eſt evidant que E D étans diametre du cercle Z, & ſa partie I G étant diametre de X, cette ligne coupe par la moitié ces deux cercles qu'on ſuppoſe concentriques.



2° Suppoſãt que BC qui paſſe par le centre A eſt perpendiculaire ſur la ligne E D, le point B ſera également éloigné de E & de D, par la notion de la perpẽdiculaire, ainſi l'arc B E = BD, & par la même raiſon comme le point F eſt également éloigné de I & de G, l'arc FI = FG; ainſi BC coupe encore ſemblablement ces deux cercles.

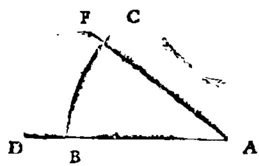
3° Je diviſe l'arc B E en deux parties égales au point L : donc concevant que l'on poſe L A B ſur LAE ces deux grandeurs conviendront, A B conviendra avec A E; partant A F avec A I, qui luy eſt égale, & F avec I, partant l'arc F M avec I M, ainſi ces deux arcs ſont égaux : donc comme L B ou L E eſt moitié du quart de Z, il faut que F M, ou I M ſoit moitié du quart de X, ainſi deux ou pluſieurs cercles, &c.

Troiſiéme definition.

La meſure d'un angle eſt la portion d'un cercle dont le centre eſt au ſommet de cet angle, laquelle portion eſt compriſe entre les côtez de ce même angle.

Scholie

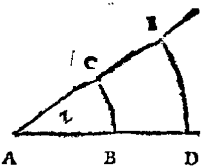
L'angle BAC eſt meſuré par la portion du cercle B C renfermée entre les côtez de l'angle, ſçavoir F A & DA: le point A eſt le centre du cercle dont B C eſt portion.



Theorême premier.

La grandeur d'un angle ne dépend point de la grandeur de ſes côtez.

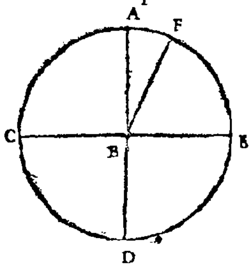
Soit l'angle Z, ayant décrit de A ſon ſommet deux ou pluſieurs cercles concentriques, les arcs E D & C B, par le Lemme precedant ſont d'un égal nombre de degrez, & quoy qu'on prolonge les côtez A D & A E à l'infini, les arcs entre ces lignes seront toujours semblables ou d'un égal nombre de degrez, partant cet angle Z, soit



qu'on le mesure par l'arc C B, ou par l'arc D E, aura toujours la même mesure. Ainsi il ne dépend point de la grandeur de ses côtez.

Quatriéme definition.

Un angle qui est mesuré par un arc de nonante degrez, qui sont le quart du cercle, est droit.



Scholie.

Ainsi supposant que l'arc AC est le quart de la circonference A C D E, & par consequent de nonante degrez, qui sont le quart de trois cens soixante degrez que vaut tout le cercle, l'angle A B C qui a pour mesure cet arc A C est droit.

Cinquiéme definition.

Un angle qui a pour sa mesure un arc de plus de nonante degrez est dit obtus.

Scholie.

L'Angle F B C est obtus, parce que l'arc F C qui le mesure est de plus de nonante degrez, puis qu'il est plus grand que le quart de cercle A C.

Sixiéme definition

Un angle qui a pour sa mesure un arc qui a moins de nonante degrez, est appellé aigu.

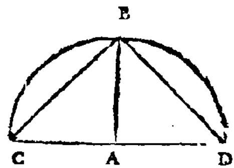
Scholie.

L'angle F B E est aigu, parce qu'il est mesuré par l'arc F E, qui est moindre que l'arc A E qui a nonante degrez.

Theorême second.

Une ligne perpendiculaire ſur une autre fait avec elle deux angles droits ; & ſi elle fait deux angles droits, elle eſt perpendiculaire.

1° B A eſt perpendiculaire ſur A milieu de CD, d'où comme centre ayant décrit le cercle CBD, par la notion de la perpendiculaire, les lignes ou cordes BC & BD ſont égales, ainſi les arcs qu'elles ſoûtiennent ſont égaux ; & partant puiſque CBD eſt la moitié de la circonference, CD étant le diametre du cercle, les arcs B C & B D en ſeront le quart ; donc les angles B A C & B A D ayant pour meſure chacun le quart de cercle, ils ſont droits, par la quatriéme definition.

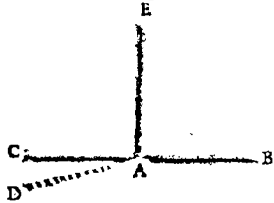


2° Il eſt facile de démontrer la ſeconde partie, car ſi les deux angles CAB & D A B ſont droits, les arcs B C & B D ſont égaux, & B étant ainſi en égale diſtance de C & de D, la ligne A B eſt perpendiculaire.

Corollaire.

Donc ſi deux lignes ſe joignent, & qu'elles faſſent deux angles droits avec une ligne élevée ſur le point où elles ſe joignent, elles ne font qu'une même ligne.

Si l'on n'en demeure pas d'accord, je ſuppoſe que deux differentes lignes A B & A D ſe joignent en A, qui font deux angles droits avec A E, quoy qu'elles ne ſoient pas la même ligne. Ie prolonge B A en C; puiſque B A E eſt droit par le preſent Theorême la ligne E A eſt perpendiculaire ſur B A ou B C, & par conſequent l'angle E A C eſt droit, par le même Theorême, donc il ſera égal à l'angle E A D, qui eſt ſuppoſé droit. Or cela ne peut pas être. Donc on ne peut pas dire que deux lignes qui ſe joignent & qui font deux angles droits avec une ligne élevée ſur le point où elles ſe joignent, ſoient deux differentes lignes,

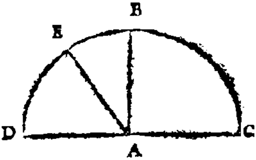


Theorême troiſiéme.

La ligne E A oblique ſur C D fait avec elle d'un côté un angle obtus, & de l'autre un aigu, qui tous deux enſemble valent deux droits,

Soit A B une perpendiculaire ſur A milieu de la ligne C D; donc l'arc C B ſera égal à B D, & par conſequent chacun eſt de nonante degrez; & puiſque E A eſt oblique, & qu'ainſi elle n'eſt pas perpendiculaire, les deux arcs C E & E D ſont inégaux; l'arc C E eſt plus grand que B C; donc l'angle C A E eſt obtus, par la definition 5^{e}.

L'arc ED eſt plus petit que BD qui eſt de nonante degrez; donc l'angle EAD par la 6^{e} defi-



nition eſt aigu. Ces deux angles C A E & E A D ont pour meſure les arcs C E & E D, qui ſont enſemble la demie circonference, c'eſt à dire, deux quarts de cercle. Ils valent donc deux angles droits, puiſque leur meſure égale deux fois nonante degrez, meſure de deux angles droits.

Septiéme definition

L'angle aigu qui vaut avec l'obtus deux droits, s'appelle le complement de l'angle obtus au demy cercle.

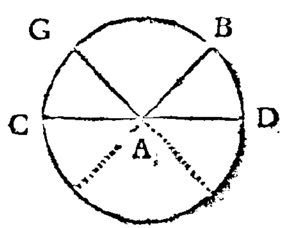
Scholie.

Ainſi D A E eſt le complement de C A E.

Theoréme quatriéme.

Tous les angles que deux ou pluſieurs lignes font avec une ligne ſur laquelle elles tombent, ſont égaux à deux angles droits, & ont par conſequent pour meſure la demie circonference.

Qu'on conçoive tant de lignes que l'on voudra, qui tombent ſur C D au point A, de ce point cōme centre ayant décrit un cerle, la meſure de tous ces angles ſera la demie circonference C G B D, qui eſt



la meſure de deux angles droits.

Corollaire.

Ainsi deux ou plusieurs lignes se coupant en un point, tous les angles qu'elles font autour de ce point sont égaux à quatre angles droits.

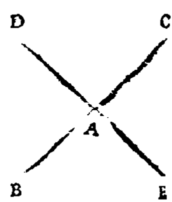
Car les angles que A G & A B font sur C D valant deux droits, si l'on conçoit que ces lignes soient prolongées, tous les angles qu'elles feront de l'autre part seront aussi égaux à deux angles droits : donc les angles qu'elles font autour du point A valent quatre angles droits.

Theorême cinquiéme.

Deux lignes en se coupant font les angles opposez au sommet égaux.

Les deux lignes B C & D E se coupent au point A. Je dis que les angles DAC & BAE sont égaux, comme aussi D A B & C A E.

Par le Theorême troisiéme *sup.* DAB & BAE valent deux droits; par le même Theorême D A B & D A C valent deux droits; donc ôtant de ces deux valeurs égales l'angle commun DAB, les restes DAC & BAE seront égaux. Par le même raisonnement on fait voir que D A B & C A E sont égaux.



Huitiéme definition.

Sinus d'un arc, c'est la moitié de la corde du double de cet arc.

Scholie.

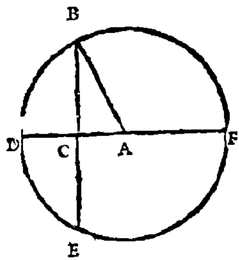
L'arc B DE est le double de l'arc B D, la ligne B C moitié de

B E

B E corde de B D E eſt ſinus tant de l'arc BD que de l'arc BF, ſon complément au demy cercle, ainſi les arcs DB & B F égaux enſemble au demy cercle ont un même ſinus, & ſont reciproquement complément l'un de l'autre au demy cercle.

Neuviéme definition.

Le ſinus d'un angle, c'eſt le ſinus de l'arc qui le meſure.



Scholie.

Ainſi B C qui eſt ſinus de l'arc B D meſure de l'angle BAD, eſt le ſinus de cet angle. Lors qu'un angle eſt obtus ſon ſinus eſt auſſi le ſinus de l'angle aigu, qui eſt ſon complément au demy cercle, ainſi BC eſt ſinus de l'angle obtus BAF auſſi-bien que de l'angle aigu BAC, c'eſt pourquoy dans la ſuite l'on ne conſidere que les ſinus des angles aigus,

Theoréme ſixiéme,

Ayant décrit l'arc qui meſure un angle, & du point où il coupe un des côtez mené une perpendiculaire ſur l'autre, cette perpendiculaire ſera le ſinus de cet angle,

Soit l'angle B A D, du ſommet duquel, & de l'intervalle qu'on a voulu, on ait fait l'arc BD. Si de B on abaiſſe la perpendiculaire B C ſur A D, je dis que B C ſera le ſinus de B A D, car par le Theor. 3ᵉ l. 1, § 5 B C = C E, & par le Theor. 2, l. 1, § 5 BD = DE: donc par la defin. 8ᵉ BC eſt le ſinus de l'arc BD, & par la neuviéme de l'angle BAD

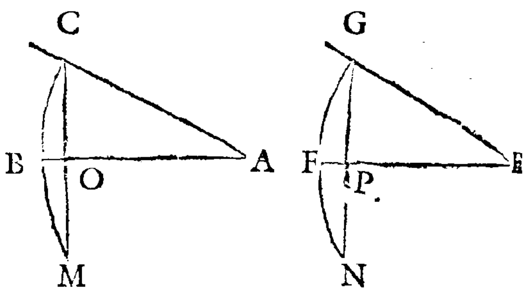
D

que mesure l'arc B D.

Theorême septiéme.

Les angles égaux ont des sinus égaux; & si les sinus sont égaux, les angles sont égaux.

1° Les angles CAB & GEF sont égaux. Ainsi de leur sommet A & E & d'un intervalle égal, ayant fait les arcs CB, GF qui mesurent ces angles, ces arcs seront égaux. Je les continuë de sorte que CB = B M & GF = F N : donc puisque les



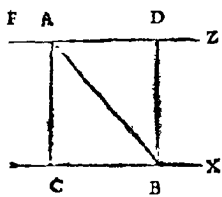
arcs égaux ont des cordes égales CM = G N; & par consequent C O & G P les moitiés de ces cordes, sont égales; or ces moitiés sont les sinus des angles CAB & G E F, donc les sinus de ces angles sont égaux.

Si les sinus CO & GP sont égaux, CM = G N, & partant CBM = GFN: donc les angles C A B & GEF étans meſurez par ces arcs égaux, ils ſont égaux.

Theorême huitiéme.

Les angles alternes que fait une ligne qui joint deux paralelles ſont égaux.

Z & X ſont deux paralelles, je dis que les angles D A B & A B C ſont égaux, & que XBA eſt auſſi égal à B A F.



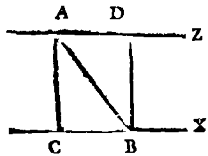
Je mene entre les paralelles Z &X,les perpendiculaires AC & D B, qui ſont ainſi égales. Concevãt que de A & B comme centre & d'un même intervalle A B on a décrit les arcs qui ſont les meſures des angles D A B & ABC, les lignes AC & BD par le Th.6^{e} en ſeront les ſinus, qui étans égaux,par le Theor. 7^{e}, les angles D A B & A B C ſeront égaux.

DAB & BAF valent deux droits, par le Theor. 3^{e} *ſup.* A B C & XB A valent auſſi deux droits. De ces deux tous égaux ôtant des choſes égales, ſçavoir les angles D A B & ABC,les reſtes XBA & BAF ſeront égaux.

Theorême neuviéme.

Si une ligne joignant deux autres lignes fait les angles alternes égaux, ces deux lignes ſont paralelles.

Si l'angle DAB est égal à l'angle ABC, concevant que de A & de B comme centre & d'un même intervalle A B on ait fait les arcs qui mesurent ces angles, ces arcs seront égaux, puisque les angles le sont, ayant donc abaissé de A sur X & de B sut Z des perpendiculaires, par le Theor. 6e, elles

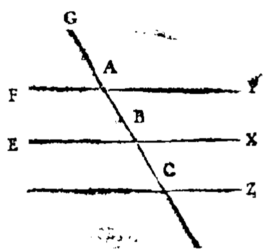


seront les sinus de ces angles, & par le Theor. 7e elles seront égales. Partant Z & X selon la definition des lignes paralelles sont paralelles.

Theorême dixiéme.

Une ligne coupant deux ou plusieurs paralelles, tous les angles qu'elle fait avec elles sont égaux.

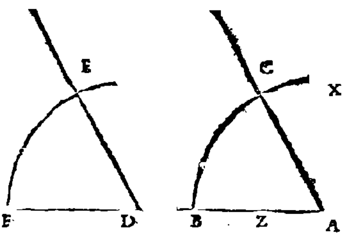
Par le Theor. 8e *sup.* ZCB = CBE, par le Theor. 5e *sup.* CBE = ABX : donc ZCB = XBA étant égaux à un troisiéme : on démõtre de même que GAY = ABX.



Problême premier.

Sur le point A élever une ligne, qui avec Z fasse un angle égal à un autre angle donné.

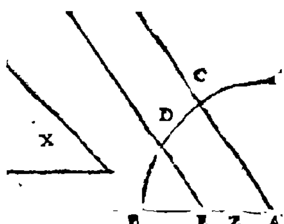
L'angle donné eſt E D F, de D comme centre je fais l'arc EF, aprés du point donné A comme centre, & de l'intervalle D E je fais le cercle X : dont je prends l'arc B C égal à l'arc E F, en ſuite menant de C au point A une ligne droite, l'angle C A B ſera celuy que l'on propoſoit de faire égal à E D F, car ils ont pour meſure des arcs égaux, ainſi ils ſont égaux.



Problême ſecond.

Par le point D mener une ligne droite ſur Z qui faſſe avec elle un angle égal à un angle donné.

Sur Z dans quelque point que ce ſoit pris à diſcretion, j'éleve une ligne telle que A C, qui par le problême precedãt faſſe l'angle C A B égal à l'angle donné X. ſi cette ligne paſſe par le point D, le Problême eſt achevé.

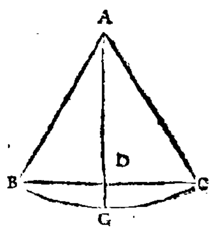


Si elle n'y passe pas, je mene par D une ligne paralelle à CA; par le Theorême 10e *sup* .DEB est égal à CAB, & CAB est égal à l'angle X, par consequent DEB est égal à l'angle proposé X: ainsi j'ay satisfait au problême.

Problême troisiéme.

Couper un angle en deux parties égales.

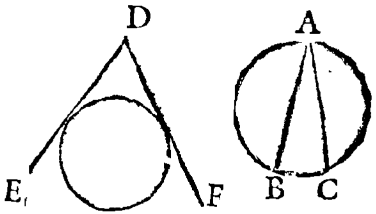
L'angle donné est B A C, ayant fait ses deux côtez A B & A C égaux, il faut les joindre par la ligne B C, sur laquelle, & du point A ayant mené une perpendiculaire A G, par le Coroll. du Prob. 2 § 4. l. 1. BD = DC, partant concevant que l'arc B G C est partie d'un cercle dont A est le centre, & AB & AC les rayons: selon la notion de la perpendiculaire, BG = GC, ce qui étant l'angle BAG est égal à GAC, ainsi BAC est coupé en deux parties égales.



Dixiéme definition.

L'angle B A C dont le sommet A est

dans la circonference du cercle. eſt dit être inſcrit à ce cercle, & l'angle EDF, dõt les côtez touchent le cercle, eſt nommé circonſcrit.

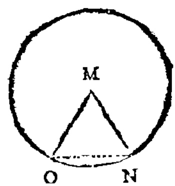


Onziéme definition.

On appelle ſegment de cercle une portion de cercle lequel eſt coupé par une ligne droite. La plus petite portion s'appelle le petit ſegment.

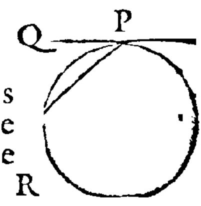
Douziéme definition.

L'angle N M O dont le ſommet M, eſt le centre du cercle, & qui a pour ſes côtez les rayons de ce cercle, eſt nommé l'angle du centre.



Treziéme definition.

L'angle Q P R compris entre P Q, une tangente & la corde PR eſt nommée angle du ſegment.



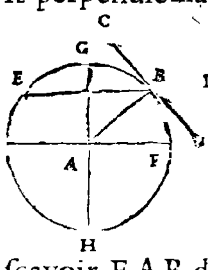
Quatorziéme definition.

L'angle TSV compris entre les deux cordes T S & V S, qui ſe joignent dans un point de la circonference, s'appelle angle dans le ſegment.

Theoréme onziéme.

L'angle C B E compris entre la tangente DC & la corde BE a pour meſure un arc égal à B G, moitié de l'arc dont BE eſt la corde.

Du point G je mene la ligne GH par le centre,& par le même centre je mene F A paralelle à B E,& du point d'attouchement B,une perpendiculaire ſur CD qui va au centre A par le Th. 8e§. 5 l. 1, partant par le Th. 2 *ſup.* ABC eſt droit: & puiſque B G = G E, donc par le 2e Theorême § 5, l.1.GH eſt perpendiculaire ſur BE & partant ſur FA, qui eſt paralelle à B E ; par conſequent l'angle FAG eſt droit, ainſi il eſt égal à ABC. Par le Theor. 8e *ſup.* les alternes FAB & E B A ſont égaux; donc ôtant ces deux angles égaux, ſçavoir F A B de FAG qui eſt droit, & ABE de l'angle droit A B C, les reſtes BAG & CBE ſeront égaux. Or B A G a pour ſa meſure l'arc BG ; donc C B E qui luy eſt égal,a pour ſa meſure un arc égal à BG,moitié de B G E, ce qu'il faloit prouver.

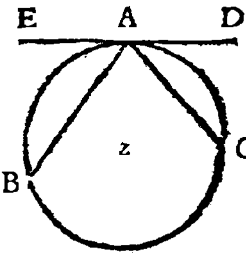


Theoréme douziéme.

L'angle B A C inſcrit dans le cercle Z

a pour sa mesure la moitié de l'arc B C, sur lequel il est appuyé.

Je mene par A la ligne E D qui touche le cercle Z: les trois angles EAB, BAC & CAD valent deux droits; ils ont donc pour leur mesure la demie circõference du cercle Z: Or par le Theor. precedant l'angle DAC a pour sa mesure la moitié de l'arc AC & l'angle E A B la moitié de l'arc A B; donc la moitié de l'arc BC, qui reste pour achever la demie circonference sera la mesure de l'angle BAC; ce qu'il faloit démontrer.



Corollaire premier.

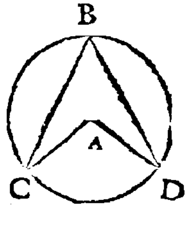
Tous les angles inscrits dans un cercle appuyez sur un même arc, ou sur un même segment sont égaux.

Car ils ont pour leur mesure la moitié de l'arc sur lequel ils sont appuyez, ainsi s'ils sont appuyez sur le même arc, ils sont égaux.

Corollaire second.

L'angle du centre CAD est double de l'angle inscrit CBD, qui est appuyé sur le même arc CD.

Car l'angle CAD, par la definit. 3. *sup.* a pour sa mesure l'arc CD, dont la moitié est la mesure de CBD.



Corollaire troisiéme.

L'angle inſcrit dans le demy cercle, où dont le diametre du cercle eſt la baſe, eſt droit.

Car il eſt appuyé ſur la demie circonference, dont la moitié, qui eſt de nonante degrez, eſt la meſure de l'angle droit.

Corollaire quatriéme.

L'angle dans le grand ſegment eſt aigu.

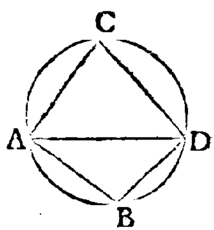
Car il eſt appuyé ſur un arc moindre que la demie circonference, ainſi la moitié de cet arc, qui eſt ſa meſure, eſt moins de nonante degrez.

Corollaire cinquiéme.

L'angle dans le petit ſegment eſt obtus.

Car il eſt appuyé ſur un arc plus grand que la demie circonferéce, dont la moitié, qui eſt ſa meſure eſt de plus de 90 degrez.

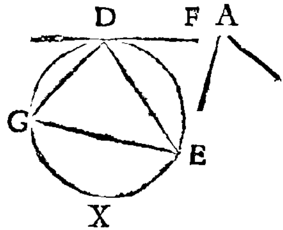
Corollaire ſixiéme.



Les angles ABD & ACD inſcrits en deux ſegmens oppoſez ſont égaux à deux droits.

Car ils ont pour meſure la moitié des arcs ABD & ACD, & par conſequent la moitié de toute la demie circonference qui vaut deux fois nonante degrez, ainſi ces deux angles ont pour meſure enſemble la valeur de deux angles droits.

Probléme troiſiéme.



Couper un ſegment dans le cercle X, qui ſoit capable de l'angle donné A.

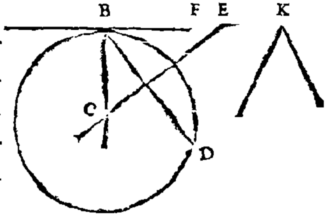
C'eſt à dire, que l'angle qui ſera appuyé ſur ce ſegment, ſoit égal à l'angle A.

Je mene D F qui touche le cercle X, & par le Probl. premier *sup.* ſur D F je mene D E une ſeconde ligne qui faſſe avec D F un angle égal à A : tout angle inſcrit dans le cercle X qui ſera appuyé ſur D E a pour ſa meſure la moitié de l'arc E D, par le Theor. *sup.* & ſon premier Corollaire : or la moitié de cét arc eſt la meſure de l'angle E D F égal à A par le Theor. 11^e *sup.* donc on a fait ce qui étoit propoſé : c'eſt à dire, que tout angle inſcrit dans le cercle X , dont la baſe ſera l'arc DE, quelque part que ſoit ſon ſommet dans la circonference du cercle, il ſera égal à A.

Probléme quatriéme.

Trouver le cercle dont le ſegment terminé par la ligne B D ſoit capable d'un angle égal à l'angle K.

Sur BD, par le Problême premier *sup.* ſoit fait l'angle FBD égal à l'angle K : au point B ſoit élevée B C perpendiculaire ſur BF, & ſur le milieu de B D une autre perpendiculaire EC, qui coupera B C au point C, d'où ayant décrit un cercle de l'intervalle B C, on aura le cercle que l'on cherchoit, ce qu'il faut prouver.

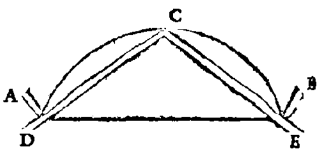


BF par la definition des tangentes touche ce cercle, ainsi par le Theor. 11e *sup.* l'angle FBD a pour sa mesure un arc égal à la moitié de l'arc BD : tous les angles inscrits dans ce cercle, & appuyez sur BD sont égaux par le Theor. 12 *sup.* & son premier Corollaire, & ont pour leur mesure la moitié de l'arc BD; ils sont donc égaux à l'angle FBD, & partant à l'angle K à qui on a fait égal FBD.

Scholie.

De ce que l'on a prouvé cy-dessus Corollaire premier du Theor. 12 *sup.* que tous les angles appuyez sur le même arc sont égaux ; l'on apprend le moyen de faire une portion de cercle de tant de degrez que l'on voudra, sans compas, ou sans avoir le centre, ce qui est d'une grande utilité.

AB est la corde d'un arc proposé, ou de la portion d'un cercle, laquelle l'on veut tracer. On veut que cet arc soit de dix degrez, ainsi l'angle inscrit dans cet arc, aura pour sa mesure la moitié de 360 degrez moins dix, c'est à dire, que cet angle sera de 175 degrez. Je dispose donc les deux regles droites CD & CE, de sorte que l'angle DCE soit de 175 degrez, & je les joints ensemble : je plante deux clous à l'extremité de la corde A & B, aprés quoy tournant le point C en sorte que les deux regles CD & CE rasent toujours les clous A & B, je décriray la ligne circulaire ACB, qui sera l'arc que l'on cherchoit.

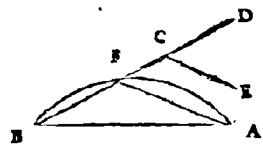


Par ce moyen on peut décrire la portion d'un cercle, quelque grandeur que puisse avoir ce cercle. Cette operation est mechanique, en voicy une qui est Geometrique.

Problême cinquiéme.

La corde AB d'un segment de cercle étant donnée avec l'angle dans ce segment, trouve les points par où passe l'arc dont AB eſt la corde, ſans connoître ny chercher le centre du cercle,dont cet arc eſt partie.

Je mene la ligne BD, aprés dans un point de cette ligne pris à diſcretion je fais l'angle ECF égal à l'angle donné, en ſuite je mene par A une ligne paralelle à EC, ainſi l'angle AFB eſt égal à ECF, Theor. 10 *ſup.* §.1. & à l'angle dõné, partant l'arc propoſé, ſelon ce



qui vient d'être démontré, paſſe par F: par une ſemblable operation je trouve les autres points par où paſſe cet arc, ſans qu'il ſoit neceſſaire, de chercher le cẽtre du cercle dont cet arc eſt une partie.

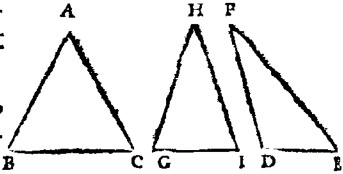
SECTION II.

Des ſurfaces compriſes entre trois lignes, ce qui s'appelle triangle.

Premiere definition.

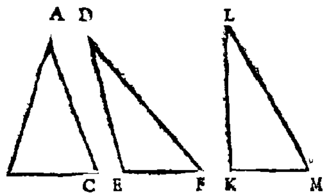
UN triangle, dont les trois côtez ſont égaux, eſt nommé Equilateral. Si ces trois côtez ſont inégaux, Scalene, & ſi deux ſeulement ſont égaux, Iſocele.

Ainſi le triã-gle A B C eſt Equilateral DEF Scalene, & GHI Iſoſce-le.



Seconde definition

Un triangle dont tous les angles ſont aigus, s'appelle Oxigone, ſi l'un d'eux eſt Obtus Ambly-gone, ſi l'un eſt droit rectãgle.



Le triangle A B C eſt oxigone, D E F amblygone & LKM rectangle.

Theorême premier.

Dans un triangle deux de ſes côtez, quels qu'ils ſoient, ſont plus grands que le troiſiéme.

A B+B C ſont plus grands que A C: cela a été dit. Entre deux points A & C on ne peut concevoir aucune ligne plus courte que la droite A C.

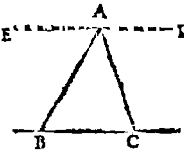
Corollaire.

Ainſi on ne peut faire un triangle de trois lignes données, ſi deux de ces lignes ne ſont plus grandes que la 3e.

Theorême second.

Les trois angles d'un triangle font égaux à deux droits.

Soit un triangle A B C, pour prouver le Theorême propofé je mene par le fommet d'un des angles la ligne DE paralelle à la bafe BC, par le Theor. 4, § 1 *fup.* les trois angles EAB, BAC, CAD font égaux à deux droits : or par le Theor. 8, § 1 *fup.* l'angle ABC eft égal à EAB, & A C B à l'angle D A C: donc les trois angles de ABC font égaux à deux angles droits, ce qu'il faloit démontrer.



Corollaire premier.

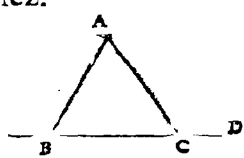
Donc connoiffant les deux angles d'un triangle on connoit le troifiéme.

Car les trois valant cent quatre vingts, fi deux valent cent foixante, le troifiéme vaudra vingt.

Corollaire fecond.

L'angle exterieur ACD eft égal aux deux interieurs oppofez.

Par le Theor. 3, § *fup.* A C B + ACD valent deux droits, Or ACB plus les deux angles interieurs CAB & CBA valent auffi deux droits, comme nous venons de le démontrer, donc les deux interieurs font égaux à l'exterieur A C D.



Corollaire troifiéme.

Les trois angles d'un triangle peuvent être aigus.

Car on peut partager 180 degrez valeur des trois angles d'un triangle en trois parties, dont chacune fera moindre que la valeur d'un angle obtus, ou d'un angle droit, & qui toutes trois ne feront que 180, valeur de deux angles droits.

Corollaire quatriéme

Dans un triangle il ne peut y avoir plus d'un angle droit, ny plus d'un obtus.

Si deux des' angles étoient droits, les trois ensemble vaudroient plus de deux droits. Si deux étoient obtus, l'angle obtus étant plus grand que le droit, les trois ensemble vaudroient davantage que deux droits; ce qui est contre le Th. precedant.

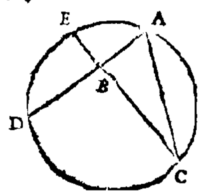
Corollaire cinquiéme.

Si dans deux triangles deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, ils sont equiangles, c'est à dire, que le troisiéme angle de l'un est égal au troisiéme angle de l'autre.

Car les trois angles de chacun de ces triangles sont égaux à deux droits; ainsi puisque de deux tous égaux ôtant des parties égales, les restes sont égaux, il faut qu'aprés avoir ôté de chaque triangle les deux premiers de l'un égaux aux deux premiers de l'autre, le troisiéme angle de l'un qui reste, soit égal au troisiéme angle de l'autre.

Corollaire sixiéme.

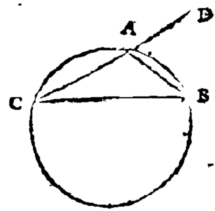
L'angle CBD dont le sommet B est au dedans du cercle & ailleurs qu'au centre, a pour sa mesure la moitié de l'arc CD, plus la moitié de l'arc AE.



Car l'angle CBD est égal aux deux interieurs CAD & ACE, par le Corol. 2 *sup.* Ou par le Theor. 12, §. 1 *sup.* la moitié de CD est la mesure de CAD, & la moitié de AE la mesure de ACE : donc l'angle CBD equivalant à CAD, & à ACE, a pour sa mesure la moitié de CD, plus la moitié de AE.

Corollaire septiéme.

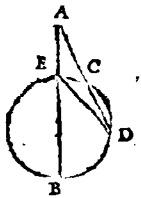
L'angle DAB, dont le sommet est dans la circonference, fait par une corde & la ligne CD qui coupe le cercle, a pour sa mesure la moitié de l'arc AB, plus la moitié de l'arc AC.



Car l'angle exterieur D A B par le Coroll. 2 *sup.* est égal aux deux interieurs ACB & ABC, qui ont pour mesure la moitié des arcs A B & A C par le Theor. 12 § 1. *sup.*

Corollaire huitiéme

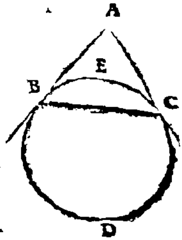
L'angle BAD qui est hors le cercle entre deux lignes secantes AB & AD, a pour sa mesure la moitié de BD, moins la moitié de CE.



Car l'angle exterieur BED, par le Coroll. 2. *sup.* est égal aux deux interieurs EDA & BAD : ainsi BED moins l'angle EDA, qui a pour mesure la moitié de EC, par le Theor. 12, § 3 *sup.* est égal à B A D : partant la mesure de cet angle BAD est la moitié de l'arc BD moins la moitié de l'arc E C.

Corollaire neuviéme.

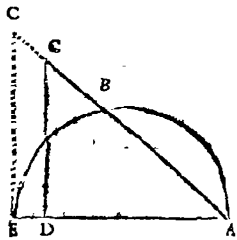
Les lignes AB, AC touchent le cercle. L'angle qu'elles comprēnent BAC a pour sa mesure la moitié de BDC, moins la moitié de BEC : c'est à dire, la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe.



L'angle ABC a pour sa mesure, par le Theor. 11 §. 1. *sup.* la moitié de l'arc BEC; les deux autres angles ont donc pour mesure la moitié de l'arc BDC, puisque tous trois ensemble ont la moitié du cercle : Or BCA a aussi pour mesure la moitié de BEC, par le Theor. 11, § 1, *sup.* donc BAC a pour mesure la moitié de BDC, moins la moitié de BEC.

Corollaire dixiéme.

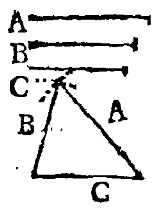
CD ou CE est perpendiculaire sur le diametre AE, l'angle ACD, ou ACE a pour sa mesure la moitié de l'arc AB.



Puisque l'angle ADC est droit les deux angles CAD & ACD valent un droit : ainsi ils ont pour mesure la moitié du demy cercle ABE: or BAD a pour mesure la moitié de l'arc BE; donc la moitié de AB reste du demy cercle, est la mesure de l'angle ACD ou ACE.

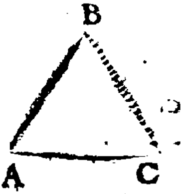
Probléme premier.

Faire le triangle dont on a les trois côtez A, B, C.



D'une des extremitez de ces trois lignes, par exemple de C, je faits un arc de l'intervalle de A; & de l'autre extremité je faits un autre arc de l'intervalle de B, en suite ayant mené des extremitez de C au point où ces deux arcs se coupent, les deux lignes A & B, le triangle sera fait, dont les côtez par la construction seront égaux aux lignes données.

Problême second.

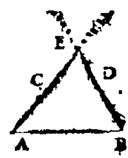


Faire le triangle dont on a un angle & la grandeur des côtez AB & AC, qui le comprennent.

Ayant mis ces deux côtez A B & AC, en ſorte qu'ils faſſent l'angle BAC égal à l'angle donné, ſelon que l'enſeigne le Probl. 1er § 1er *ſup.* la ligne BC qui en joindra les extremitez achevera le triangle.

Problême troiſiéme.

Faire le triangle dont on a un côté, & les deux angles ſur ce côté.

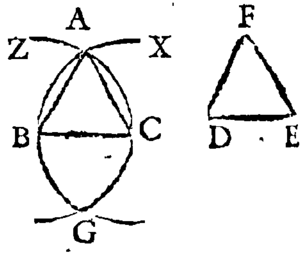


Tirant deux lignes ſur les extremitez du côté AB qui faſſent, par le Probl. premier § premier *ſup.* les angles donnez CAB & DBA, je dis qu'étant prolongées, elles acheveront le triangle ABE, qui eſt celuy qu'on cherchoit, comme il eſt evidant.

Theorême troiſiéme.

Deux triangles dont les côtez ſont égaux, ſont equiangles.

Les triangles A B C & DEF ont leurs côtez égaux. Je dis qu'ils ſont equiangles, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'étans posez l'un sur l'autre ils conviennent.



1° BC étant égal à D E, il est clair que la ligne D E estant posée sur BC, elles conviendrõt ensemble. Si on dit que D F ne conviendra pas avec AB, ny EF avec AC. Je démontre le contraire. De B comme centre & de l'intervalle AB ou DF lignes égales, je décris le cercle Z ; & de C de l'intervalle AC ou E F, qui sont égales, le cercle X ; ces deux cercles se coupent necessairement au point A.

2° Il est evident que D estant posé sur B, le point F se trouvera necessairement dans le cercle Z, & que E estant posé sur C, le point F se trouvera dans le cercle X : le point F se trouvera donc dans Z & dans X, partant dans le point A où ces deux cercles se coupent, ainsi ces deux triangles posez l'un sur l'autre conviendront: ce qu'il faloit démontrer.

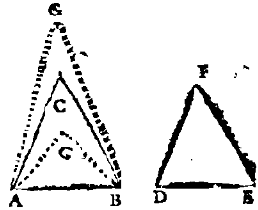
Scholie.

On pourroit dire que ces deux cercles Z & X se coupent ailleurs qu'en A : il est vray ; mais par ce qui a esté démontré, ce ne peut estre qu'en deux points, & ce second point est necessairement au dessous de BC, sçavoir au point G comme il est evident, ainsi s'ils se coupoient au dessus de BC en un autre point qu'en A, ils se couperoient en trois, ce qui ne peut estre.

Theorême quatriéme.

Deux triangles equiangles qui ont un côté égal, ſont entierement égaux.

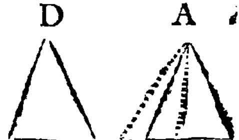
ABC & DEF ſont equiangles, & AB ≍ D E ; je dis qu'étant poſez l'un ſur l'autre ils conviendront, & qu'ainſi ils ſont en tout égaux.



D E conviendra avec AB, ſi DF ne cõvient pas avec A C, mais avec A G : comme les angles F D E & C A B ſont égaux, il s'enſuivra que l'angle C A B ≍ G A B qui ſera le même que FDE ; ce qui eſtant abſurde, & ne pouvant pas être, il faut reconnoître que DF conviendra avec A C, & par la même raiſon FE avec BC, ainſi le point F avec C, & par conſequent ces deux triangles ſont en tout égaux.

Theoréme cinquiéme.

Deux triangles qui ont un angle égal, & les deux côtez qui comprennent cet angle, égaux, ſont tout égaux.



L'angle BAC ≍ EDF & AB ≍ DE & AC ≍ DF, je dis que ces deux triangles conviendrõt étant poſez l'un ſur l'autre : car D E conviendra avec AB, ſi DF ne convenoit pas F E HCH B avec AC, mais avec A H, l'angle BAC ſeroit égal à l'angle B A H, ce qui ne peut être. Ainſi D F convient avec AC, le point F avec C, par conſequent BC = E F, ainſi ces deux triangles qui ont leurs côtez égaux ſont par le Theor. 3e *ſup.* equiangles, c'eſt à dire, égaux en toutes choſes.

Troiſiéme definition.

Une figure rectiligne eſt dite inſcrite dans une autre dont elle touche tous les côtez par ſes angles ; & au contraire elle eſt dite circonſcrite à une figure lors que tous ſes cotez en touchent tous les angles.

Quatriéme definition.

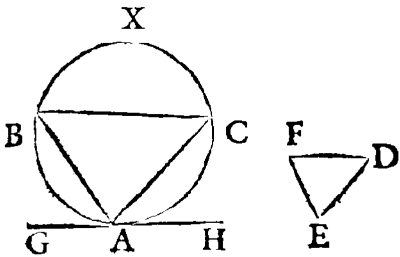
Une figure rectiligne eſt dite inſcrite dans un cercle lors que tous ſes angles touchent la circonference du cercle, & au contraire elle eſt dite circonſcrite à un cercle, lors que tous ſes côtez touchent la circonference du cercle.

Et pareillement le cercle eſt inſcrit ou circõſcrit à une figure, lors que ſa circonference touche les côtez ou les angles de la figure.

Problême quatriéme.

Dans le cercle X inſcrire un triangle equiangle au triangle donné D E F.

Je tire la tangente GH, je fais l'angle GAB égal à FDE, & CAH égal à DFE, j'acheve le triangle ABC en tirant la ligne B C.



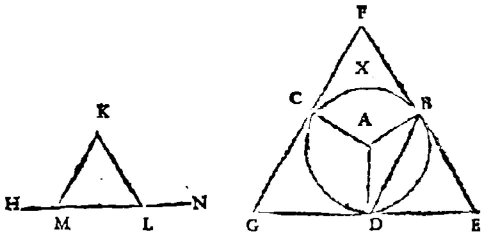
Puiſque l'angle BAG, dont la meſure eſt la moitié de l'arc BA, par le Th. 11ᵉ, § 1 *ſup.* qui eſt auſſi la meſure de l'angle BCA, eſt égal à FDE, donc BCA = FDE.

Par la même raiſon CAH fait égal à DFE, ayant pour ſa meſure la moitié de l'arc AC, meſure de C B A : il faut que CBA & DFE ſoient égaux: ainſi ces deux triangles A B C & E F D ayant deux angles égaux, ils ſont entierement equiangles, par le Coroll. 5 du Theor. 2. *ſup.*

Problême cinquiéme.

A l'entour du cercle X décrire un triangle equiangle au triangle KLM, ou circonſcrire au cercle X un triangle equiangle au triangle KLM.

Ayant tiré le rayon AD je faits d'une part l'angle BAD = NLK & de l'autre DAC = KMH ; aprés ayant mené par les trois points B, D, C, les tangentes EF, FG, GE : je dis que le triangle EFG ſera equiangle à L K M.

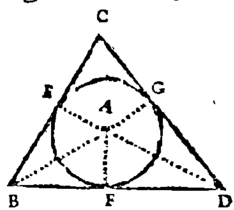


Les ſix angles des deux triangles BAD & BED valent quatre angles droits; AB & A D étant perpendiculaires EBD + ABD vaut un droit, EDB + B D A vaut encor un droit. Donc BED + BAD vaut deux droits. Or par la conſtruction BAD = KLN, cet angle K L N + KLM vaut deux droits. Donc BED = KLM : par la même voye on démontre que DGC = KML, & par conſequent que E F G = LKM, & qu'ainſi les triangles E F G & LKM ſont equiangles.

Problême ſixieme.

Dans le triangle BDC décrire un cercle.

Je coupe par le Problême 3 § 1. *ſup.* les angles CBD & CDB en deux parties égales par les lignes D A & B A : & du point A où ces deux lignes ſe coupent, je mene les perpendiculaires A E, A F, A G ſur les côtez du triangle ; en ſuite de A & de l'intervalle de l'une de ces lignes je décris le cercle X, qui ſe trouvera inſcrit dans le triangle BCD : pour le prouver il faut faire voir que les trois lignes AE : AF, AG ſont égales.



Les deux triangles AEB & AFB ſont rectangles par la conſtruction, puiſque A E & A F ont été faites perpendiculaires. Les angles EBA & ABF ſont égaux par l'hipotheſe : ainſi ces deux triangles ayant deux angles égaux ſont equiangles. Ils ont le côté AB commun. Donc par le Theorême 4 *ſup.* AE = AF : par la même voye on démontrera que AG eſt égal à AF & à AE : ce qu'il faloit prouver.

Probléme ſeptiéme.

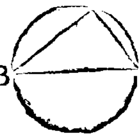
A l'entour du triangle A B C décrire un cercle.

Il n'eſt icy queſtion que de décrire un cercle par les trois points A,B,C, ainſi ce Probléme eſt le même que le Problême 1er § 5. l. 1.

Theoréme ſixiéme.

Le triangle ſcalene A B C a ſes trois angles inégaux.

Ayant décrit le cercle X à l'entour de ce triangle, puiſque les trois côtez AB, A C, B C ſont inégaux, les trois arcs dont ils ſont les cordes ſont inégaux. Donc les trois angles du triangle A B C, que la moitié de ces arcs meſure par le Th. 12ᵉ § 1. *ſup.* ſont inégaux.



Theoréme ſeptiéme.

Dans le triangle Iſoſcele A B C les angles ſur la baſe ſont égaux; & ſi les angles ſur la baſe ſont égaux, le triangle eſt Iſoſcele.

Ayant décrit le cercle X à l'entour de ce triangle, puiſque AB = AC; les arcs que ces côtez ſoûtiennent ſont égaux. Or par le Th. 12 § 1 *ſup.* la moitié de ces arcs égaux eſt la meſure des angles ABC & A C B; donc ces angles ſont égaux.

L'autre partie de cette propoſition eſt facile. Car ſi les deux angles ABC & ACB ſont égaux, les arcs AB & AC, ou leurs cordes ſont égales; ainſi le triangle ABC eſt Iſoſcele.

Corollaire premier.

Aucun des angles de la baſe d'un Iſoſcele ne peut être droit ny obtus.

Car si l'un étoit droit, l'autre le seroit aussi : ainsi les trois angles de ce triangle vaudroient plus que deux droits, ce qui ne peut être. Et si l'un étoit obtus l'autre le seroit ainsi deux seuls angles de ce triangle vaudroient plus que deux angles droits, ce qui est encore plus impossible.

Corollaire second.

Si deux triangles Isosceles ont un angle égal, ils les ont tous.

Car 1. Si cet angle égal est sur la base, ils auront le second angle de la base égal, partant le troisiéme, par le Coroll. 5. Theor. 2. *sup.*

2. Si c'est l'angle du sommet, la valeur des deux angles sur la base de chaque triangle sera la même, & puisque ces angles sur la base sont égaux, par le Theor. 7 *sup.* chacun sera la moitié de cette même somme, ainsi ils seront égaux.

Theoréme huitiéme.

Les trois angles d'un equilateral sont égaux.

Ayant décrit un cercle à l'entour du triangle equilateral, les arcs dont les côtez de ce triangle sont les cordes, sont par consequent égaux, & leurs moitiés égales. Or par le Theor. 12, § 1. *sup.* ces moitiés sont la mesure des angles du triangle. Donc tous ces angles sont égaux.

Corollaire.

Ainsi chaque angle d'un equilateral est aigu, & toujours de 60 degrez.

Car si l'un étoit obtus ou droit, tous trois le seroient, ainsi ils vaudroient plus que deux angles droits, ce qui ne peut être. Chacun est necessairement la troisiéme partie de deux angles droits, c'est à dire de 60 degrez, qui est le tiers de 180, valeur de deux angles droits, ausquels sont égaux les trois angles de tout triangle.

Theoréme neuviéme.

Dans un triangle le plus grand côté soûtient le plus grand angle, & le plus grand angle est soûtenu par le plus grand côté.

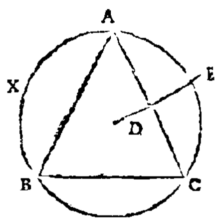
Ayant décrit un cercle à l'entour d'un triangle, le plus grand côté de ce triangle soûtient le plus grand arc. Or par le Theor. 12ᵉ § 1 *sup.* la moitié de cet arc mesure l'angle opposé à ce plus grand côté; donc cet angle qui est mesuré par la moitié du plus grand arc est le plus grand.

Dans un triangle inscrit dans un cercle le plus grād angle est mesuré par la moitié du plus grand arc. Or ce plus grand arc a la plus grande corde, ainsi le côté opposé à cet angle est le plus grand.

Theoréme dixiéme.

Dans un triangle la moitié de chaque côté est le sinus de l'angle opposé.

Le triangle ABC soit inscrit dans le cercle X, il faut démontrer que AD, moitié de AC est le sinus de l'angle ABC.



Par le Theor. 12, § 1 *sup.* l'arc AE moitié de l'arc AC est la mesure de l'āgle ABC, ainsi l'arc AC est double de l'arc qui est la mesure de l'āgle ABC: donc AD moitié de la corde de l'arc AC est le sinus de l'arc AE par la defin. 8, § 1 *sup.* & par consequent de l'angle ABC, par la definit. 9, § 1 *sup.*

On démontre par la même voye que

la moitié de AB eſt le ſinus de ACB, & la moitié de BC celuy de BAC.

Scholie.

Donc le ſinus d'un angle eſt au côté oppoſé de cet angle, comme le ſinus d'un autre angle eſt au côté oppoſé de cet angle, ou, les ſinus des angles ſont entr'eux comme les côtez oppoſez, puiſque les moitiés ſont comme les touts.

SECTION III.

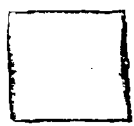
Des Surfaces compriſes entre pluſieurs lignes.

OU

Des figures de pluſieurs côtez.

Premiere definition.

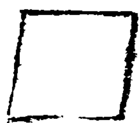
LES figures quadrilataires, ou de quatre côtez reçoivent differens nõs. 1° Si les côtez oppoſez ſont paralelles, le quadrilataire eſt appellé d'un nom general, *Parallelogramme.* 2° Si les quatre côtez ſont égaux, & que les angles ſoient droits, c'eſt un *Quarré.*



A

Telle eſt la figure A.

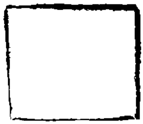
3° Si les quatre côtez ſont égaux, & que les angles oppoſez ſoient auſſi égaux, mais non droits, c'eſt ce qu'on appelle *Rhombe.*



B

La figure B eſt un Rhombe.

4° Si tous les côtez ne ſont pas égaux, mais que tous les angles ſoient droits, cela s'appelle, *Quarré long*, *Oblong*, *Parallelogramme Rectangle*, ou ſimplement, *Rectangle*.



C

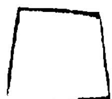
Telle eſt la figure C.

5° Si les côtez oppoſez ſont égaux, & les angles oppoſez auſſi égaux, mais non droits, cette figure eſt un *Rhomboïde*.

D

Telle eſt la figure D.

6° Toute figure quadrilataire, dont les côtez oppoſez ne ſont ny paralelles ny égaux, s'appelle un *Trapeze*.



E

Telle eſt la figure E.

Seconde definition.

Une figure eſt dite reguliere lors que tous ſes côtez & tous ſes angles ſont égaux.

Le quarré cy-deſſus marqué A eſt une figure reguliere.

Troiſiéme definition.

Une figure de pluſieurs côtez ſe nomme generalement *Polygone*. Elle prend le nom qui luy eſt propre du nombre de ſes côtez, ou du nombre de ſes angles que comprennent ſes côtez. Ainſi une figure de cinq angles eſt nommée, *Pentagone*; de ſix, *Exagone*, de ſept, *Eptagone*, ainſi de ſuite.

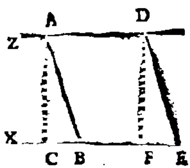
Quatrième definition.

Ayant mené deux lignes des extremitez d'un des côtez d'une figure reguliere inſcrite dans un cercle, ou circonſcrite, au centre de ce cercle, l'angle que ces lignes font, eſt appellé angle du centre.

Lemme premier.

Les lignes obliques AB & DE qui font les angles ABC & DEF égaux entre les paralelles Z & X ſont égales.

Ayant mené les perpendiculaires AC & DF entre les paralelles Z & X, elles ſeront égales. Les angles ACB & DFE ſont droits, & les angles ABC & DEF ſont égaux par l'hypotheſe. Les deux triangles ABC & DEF ſont donc equiangles, & AC étant égal à DF, ils ſeront tout égaux, par le Theor. 4 §. 2. *ſup.* & par conſequent AB eſt égal à DE.



Lemme ſecond.

Les lignes AB & DE qui font mêmes angles, ſont paralelles.

Par l'hypotheſe les angles ABC & DEF ſont égaux: par conſequent par le Th. 9, § 1, *ſup.* AB & DE doivent être paralelles.

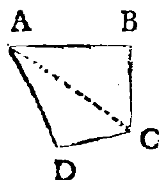
Lemme troiſiéme.

Deux lignes comme AD & BE qui joignent les deux lignes AB & DE égales & paralelles, sont égales.

Par le Theor. 6, §4, l. 1. B C = EF, puisque AB = DE & AC = DF, par consequent CF = BE, mais CF est égal à AD, puisque AC & DF sont des perpendiculaires paralelles, entre lesquelles les perpendiculaires AD & CF sont égales, selon la notion des paralelles. Donc BE = AD.

Theoréme premier.

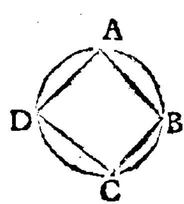
Les quatre angles d'un quadrilataire ABCD sont égaux à quatre droits.



Car menant la ligne AC d'un des angles à l'angle opposé, on partage cette figure dans les deux triangles ABC & ACD, de chacun desquels les angles valent deux droits. Ainsi tous les angles de ABCD valent quatre droits.

Theorême second.

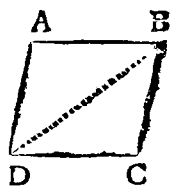
Si les angles opposez A B C & ADC ne valent pas deux droits, on ne peut pas inscrire la figure A B C D dans un cercle.



Si on suppose que ABCD est inscrit dans un cercle, & que neanmoins les deux angles opposez ABC & CDA valent plus ou moins que deux droits, il eſt facile de convaincre cette ſuppoſition de fauſſeté, car l'angle ABC a pour meſure la moitié de l'arc ABC, & l'angle ADC la moitié de l'arc ADC : ainſi ces deux angles ayant pour meſure la moitié du cercle, ils valent deux droits. Partant la ſuppoſition qu'on faiſoit, qu'ils valoient plus ou moins que deux droits, eſt fauſſe.

Theorême troiſiéme.

Si les côtez oppoſez du Quadrilataire ABCD ſont égaux, ils ſont paralelles.



Les triangles ABD & BCD ſont tout égaux, par le Theor. 3. §. 2. *ſup.* car par la ſuppoſition AB = CD & BC = AD: le côté BD eſt commun ; donc l'angle ABD = BDC, partant AB eſt paralelle à DC, par le Theor. 8, § 1, *ſup.* & par le méme Theor. BC ſera paralelle à AD, puiſque l'angle ADB eſt égal à DBC; ces deux triangles ADB & CBD étant en tout égaux, ainſi qu'il vient d'être dit : donc AB & DC ſont paralelles, comme auſſi AD & BC.

Theoréme quatriéme.

Si les deux côtez oppoſez d'un Quadrilataire ſont égaux & paralelles, les deux autres ſont auſſi égaux & paralelles.

1° Ils sont égaux par le Lemme 3 *sup.*

2° Par le Th. 3 *sup.* ils sont paralelles.

Theorême cinquiéme.

Si les quatre angles du Quadrilataire ABCD sont droits, il est Parallelogramme.

Car AB & C D, par l'hipothese sont perpendiculaires sur AC, partant par le Lemme 2ᵉ § 4 l. 1, ils sont paralelles. A C & B D sont aussi perpendiculaires sur DC, par consequent par la même raison ces lignes sont paralelles.

Theorême sixiéme.

Les angles opposez BCD & ADC du Parallelogramme ABCD sont égaux, & ceux qui sont proches comme BCD & ADC valent deux droits.

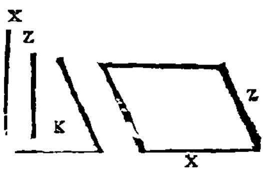
1° Par le Th. 10 §.1. *sup.* l'angle FDA = DCB: & par le Th. 8ᵉ § 1ᵉʳ *sup.* DCB = CBE, partant puisque deux angles égaux à un troisiéme, sont égaux, donc FDA = CBE: or F D A + A D C vaut deux angles droits par le Th. 3ᵉ §, 1. *sup.* ABC + CBE est aussi égal à deux droits par la même raison: donc ABC = ADC.

2° L'angle FDA = DCB: or FDA + ADC, comme nous venons de le dire, vaut deux droits, donc $ADC + BCD$ vaut deux droits, ce qu'il faloit démõtrer.

Problême premier.

Faire un Parallelogramme dont on a un angle & les deux côtez qui le comprennent.

Les côtez donnez ſont Z & X, l'angle donné K. Il faut joindre Z & X, de ſorte qu'ils faſſent un angle égal à K, ſelon qu'il a été enſeigné au 1. Probl. §1. l. 2. & en ſuite mener deux lignes paralelles à Z & à X.



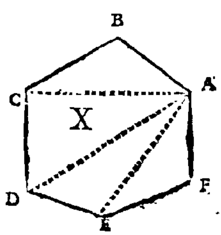
Corollaire.

Donc pour faire un quarré dont on a un côté, il n'eſt queſtion que de joindre deux lignes égales à celle qui eſt donnée, de ſorte qu'elles faſſent un angle droit.

Theorême ſeptiéme.

Toute figure, Polygone ou de pluſieurs côtez, ſe reduit en autant de triangles qu'elle a de côtez, moins deux.

Dans la figure Poligone X qui a ſix côtez, ayant mené de A à tous les autres angles des lignes droites, on fait autant de triãgles que le Polygone



X a de côtez, qui sont les bases de ces triangles, à la reserve des deux côtez qui sont proches de A, qui servent de côtez aux deux triangles les plus proches de A : ainsi on reduit une Polygone en autant de triangles qu'il a de côtez, moins deux. Le Polygone X qui a six côtez est reduit en quatre triangles.

Corollaire.

Donc tous les angles d'une figure de plusieurs côtez, comme de X, sont égaux à deux fois autant d'angles droits qu'elle a de côtez, moins deux, c'est à dire, que tous les angles de X qui a six côtez, sont égaux à huit angles droits.

Car elle se reduit en autant de triangles qu'elle a de côtez, moins deux, c'est à dire, en quatre. Donc puisque les angles de chaque triangle sont égaux à deux droits, tous les angles de cette figure sont égaux à huit droits. Ainsi tous les angles d'un Chiliogone, c'est à dire, d'une figure de mille côtez sont égaux à 1996 angles droits, ce qu'on conçoit clairement, quoy qu'il soit impossible d'imaginer nettement un Chiliogone.

Problême second.

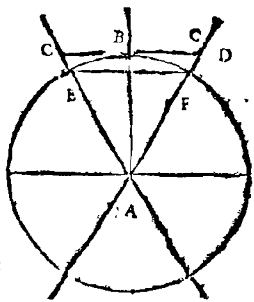
Trouver quel doit être l'angle du centre de toute figure reguliere.

Tous les angles au tour d'un point, par le Coroll. du Theor. 4, § 1. *sup.* sont égaux à quatre angles droits, qui valent 360 degrez : par consequent dans une figure reguliere tous les angles du centre étant égaux, si elle a dix côtez, l'angle du centre vaudra la dixiéme partie de 360 : divisant donc 360 par dix, le quotient de cette divifion donnera la valeur de l'angle du centre d'une figure de dix côtez, ainfi de tout autre Polygone.

Scholie.

De là on apprend comment lors qu'on connoît l'angle du centre d'une figure reguliere, on la peut infcrire dans un cercle.

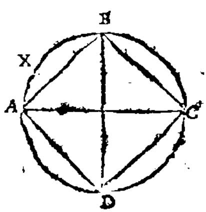
Il faut mener du centre deux rayons qui faffent un angle tel que doit eftre l'angle du centre de cette figure, car fi c'eft une figure de dix côtez faifant un angle de 36 degrez, qui eft la dixiéme partie de 360, la corde de cet angle fera un des côtez de cette figure.



Si l'on veut circonfcrire un Polygone ou figure reguliere autour d'un cercle, il faut premierement l'infcrire & en prolonger les rayons, aprés ayant divifé par la moitié un des côtez de ce Polygone infcrit, comme EF ayant mené le rayon AB par cette moitié, & mené par B une tangente entre AC & AD, on aura un des côtez du Polygone circonfcrit. En fuite il faut faire tous les rayons prolongez de l'infcrit égaux à AC & AD, par l'extremité defquels ayant mené des lignes droites on aura la figure que l'on cherchoit, ainfi qu'il eft evident ; mais l'on ne peut pas faire avec la feule regle & le compas l'angle du centre de toute figure reguliere, fans exception, comme nous le ferons voir : cela ne fe peut que mechaniquement en fe fervant d'un demy cercle, qui eft divifé par degrez, qu'on nomme un rapporteur.

Problême troifiéme.

Infcrire un quarré dans le cercle X.



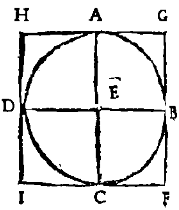
Aprés avoir mené le diametre AC, il faut divifer les arcs ABC & ADC par la moitié, & par les quatre points, A, B, C, D. mener des lignes droites.

1° Cette figure aura quatre côtez égaux, puiſque les lignes ſont les cordes d'arcs égaux.

2° Tous les angles de ABCD ſont droits, car ils ont pour meſure la moitié de la demie circonference, l'angle ABC s'appuyant ſur l'arc ADC, & BAD ſur l'arc BCD, &c.

Problême quatriéme.

Faire un cercle dans le quarré FGHI.



Ayant coupé par la moitié les quatre côtez de ce quarré, & mené AC & BD, ſi du point E où ils ſe coupent, & de l'intervalle AE on décrit un cercle, il ſe trouvera inſcrit dans ce quarré : car les quatre lignes AE, BE, CE, DE, ſont égales; ainſi le cercle paſſera par les points A, B, C, D.

Problême cinquiéme.

Circonſcrire un quarré à un cercle.

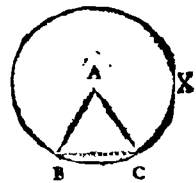
Il faut mener deux diamétres qui ſe coupent à angles droits; en ſuite par les quatre extremités de ces deux diamétres, ayant mené quatre lignes tangentes au cercle, elles feront le quarré que l'on cherche, comme il eſt evident.

Problême ſixiéme.

Faire un exagone, ou inſcrire un

exagone dans le cercle X.

Le rayon du cercle sera un des côtez de l'exagone, ainsi le probléme est facile: mais il faut démontrer cette verité. Je suppose B C égal au rayon A B ou AC, ainsi le triangle ABC est equilateral, dont les angles estant égaux, l'angle BAC vaut le tiers de deux droits qui est 60 degrez ; ainsi l'arc BC est de 60 degrez qui sont la sixiéme partie de la circonference, qui en vaut 360, BC est donc côté, de l'exagone.

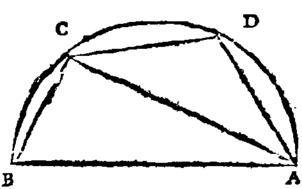


Scholie.

On ne peut point avec la regle & le compas diviser geometriquement un cercle en tant de parties que l'on voudra, comme nous le venons de dire *sup*. On ne peut pas, par exemple, diviser un arc de cercle en trois, en cinq, en sept parties &c, sans employer des lignes d'un autre genre que celles dont nous avons parlé, comme nous le dirons dans la suite.

En chérchant les cordes du cercle par les voyes ordinaires, il faut prendre garde.

1. Que les cordes ne sont pas entr'elles comme leurs arcs : car supposant l'arc A D égal à l'arc D C, la corde AC n'est pas double de la corde A D, comme l'arc ADC est double de l'arc AD. car AD+DC est plus grand que AC, ainsi A D, moitié de AD+DC, est plus grande que la moitié de A C.



2. Quand on connoit la corde d'un arc on peut trouver celle de la moitié de cet arc. Si AC est connu, en divisant AC par la moitié par vne perpendiculaire, cette ligne divisera l'arc ADC au point D en deux parties égales, ainsi la corde de l'arc AD moitié de l'arc ADC sera connue.

3. Quand on connoit une corde d'un arc, on trouve celle du

double de cet arc. Si AD m'eſt connue, ie prens DC égal à AD, ainſi j'auray AC corde du double de l'arc AD.

4. Quand une corde comme BC eſt connüe, on a celle qui eſt la corde du complément au demy cercle de l'arc dont BC eſt la corde, c'eſt à dire, que la corde AC eſt connue, quand on connoit la corde BC.

Ainſi quand on a un poligone, on en trouve facilement deux autres, l'un qui ait deux fois plus de côtés, l'autre qui en ait deux fois moins, l'on donnera dans la ſuite le moyen de trouver geometriquement les côtez du pentagone, & du decagone, ce que l'on n'a pû enſeigner icy.

SECTION IIII.

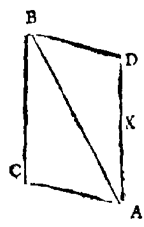
De la meſure de l'aire des ſurfaces.

AVERTISSEMENT.

Juſques à preſent nous n'avons preſque parlé que des lignes qui bornent les ſurfaces, nous parlons icy de leur étendüe.

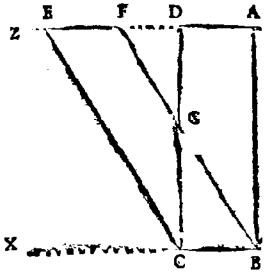
Theoréme premier.

LA diagonale AB, qui eſt une ligne menée d'un angle du parallelogramme X a un autre angle qui luy eſt oppoſé, partage X en deux triangles tout égaux.



Dans les deux triangles ABC & BAD, AD = BC & AC = BD, le côté AB eſt commun; ainſi par le Theor, 3. § 2. *ſup.* ces deux triangles ſont égaux & equiangles.

Theoréme second.



Les parallelogrãmes ABCD & BCEF qui ſont entre les mêmes paralelles, & qui ont leur baſe égale, ſont égaux.

Si la baſe de BCEF n'étoit pas la même baſe que de ABCD. ſur BC par le probléme 1. §. 3. *ſup.* ſoit fait un paralellogramme ſemblable & égal à ABCD. Je ſuppoſe que ABCD eſt rectangle ; il faut prouver qu'il eſt égal à BCEF.

AB & DC perpendiculaires entre les paralelles X & Z, ſont égales. Par l'hipotheſe F B = CE & AD = E F : partant AD + DF = EF + DF. Les deux triangles ABF & DCE ayant leurs côtez égaux, ils ſont entieremẽt égaux par le Th. 3 *ſup.* § 2. Otant de ces deux triangles égaux la partie DGF qui leur eſt commune, les trapezes ABGD & CGEF ſeront égaux. Ajoûtant donc à l'un & à l'autre la méme grandeur BGC, ce qui fait les parallelogrammes ABCD & BCEF, ces deux figures ſeront égales, ce qu'il faloit prouver.

Corollaire premier.

Donc en mesurant la surface d'un parallelogramme comme BCEF, il ne faut avoir égard qu'à la base BC & à la perpendiculaire qui mesure sa hauteur.

Car ce parallelogramme est égal à un parallelogramme rectangle dont BC est la base, & dont les côtez qui sont perpendiculaires sont égaux à sa hauteur. Ainsi c'est le Parallelogramme rectangle comme ABCD qui est la mesure de tous les Parallelogrammes dont les bases seront égales à BC & qui auront méme hauteur, ou seront entre les mémes paralleles X & Z. Il ne peut y avoir qu'un Parallelogramme rectangle sur la base BC entre X & Z, & il peut y avoir une infinité de Parallelogrammes non rectangles sur la méme base, & entre ces mémes paralleles X & Z.

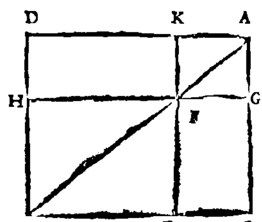
Corollaire second.

Donc en mesurant l'étendue d'un parallelogramme non rectangle, il ne faut point avoir égard à son circuit

Car quand les côtés BF & CE seroient d'un million de lieües ou infinis; ce qui se peut concevoir en supposant que les lignes X & Z soient prolongées à l'infiny: ce parallelogramme dont le circuit est infiny ne sera pas plus grand que ABCD dont le circuit est finy.

Theorême troisiéme.

Ayant partagé le Parallelogramme AB CD par H G paralelle à A D & KE paralelle à AB; de sorte que KE & H G coupent dans le même point la Diagonale A C, les suplémens qui sont à côté du diametre sont égaux, c'est à dire que BEFG est égal à DKFH.

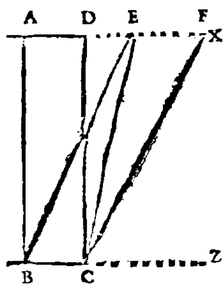


Par le Theor. 1er *sup.* A B C= ADC & AGF= AKF & FEC= F H C : donc de deux triangles égaux ADC & A B C ôtant des grandeurs égales AKF & FHC d'une part, & AGF & FEC de l'autte, les reſtes FKDH & BEFG ſeront égaux ; ce qu'il faloit démontrer.

Theorême quatriéme.

Les Parallelogrammes ſont doubles des triangles de même hauteur,& de même baſe.

Le triangle EBC a même baſe que le Parallelogramme ABCD, & ils ont même hauteur eſtant entre les paralelles X & Z : je mene C F paralelles à B E pour faire le Parallelogramme BCFE , lequel par le Theor. 2 *ſup.* eſt égal à A B C D : or par le Theor, 1. *ſup.* BEC eſt égal à E C F , donc BCFE ou la grandeur



égale ABCD, eſt le double de BEC.

Corollaire premier.

Donc les triangles de même baſe & de même hauteur ſont égaux.

Puis qu'ils ſont tous la moitié d'un Parallelogramme de même baſe & de même hauteur.

Corollaire ſecond.

Donc pour meſurer la ſurface d'un

triangle, il ne faut avoir égard qu'à sa hauteur & à sa base.

Puis qu'il est égal à la moitié d'un Parallelogramme, qui a même base & même hauteur.

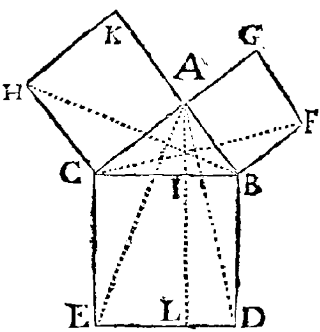
Definition.

Dans un triangle rectangle le côté opposé à l'angle droit se nomme Hypothenuse.

Theoréme cinquiéme.

Dans le triangle rectangle ABC le quarré de l'Hypothenuse, ou du côté qui soûtient l'angle droit, est égal aux deux quarrez des deux autres côtez.

L'Hypothenuse est CB, je faits sur les trois côtez AB, BC, CA, trois quarrez. Il faut prouver que BCED = ABFG + ACHK.

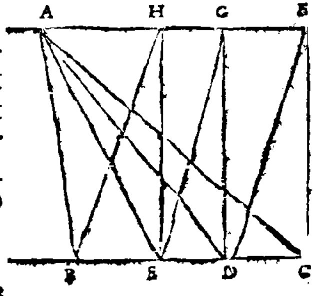


Je mene par le point A sommet de l'angle droit, AL paralelle à BD ou CE, & de H une ligne à B, & de E une autre ligne au point A qui font les deux triangles HCB & ACE: les lignes KA & AB ne font qu'une même ligne, par le Coroll. du Theor. 2. §. 1 *sup.* Par la definition du quarré les angles KAG & GAB & tous les autres de ces quarrez étant droits; ainsi par le Th. 5, § 3 KA, partant KB est paralelle à HC ; ajoûtant aux angles droits ACH & BCE à l'un & à l'autre l'angle ACB, il faut que HCB = ACE : or les côtez qui comprennent ces angles sont égaux, HC = AC & CB = CE, par la definit. du quarré ; donc ces triangles HCB & ACE sont égaux. Or par le Th. 4, *sup.* le quarré ACHK est double de HCB ; partant de ACE ; qui par le même Theor. n'est que la moitié de CILE : il faut donc que CILE soit égal à ACHK.

Par la même voye on démontre que BDLI est égal à ABFG : or CELI + BDLI = BCED, donc BCED = ABFG + ACHK : ce qu'il faloit prouver.

Theoréme sixiéme.

Un triangle est égal à deux ou plusieurs triãgles de même hauteur, & dont les bases prises ensemble sont égales à la sienne.

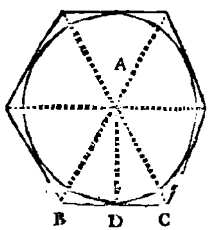


Le triãgle ABC est égal aux triangles ABE, AED, & ADC, qui sont ses parties. Or, par le Coroll. 1er du Theor. 4. *sup* ACD = CFD, & DAE = DGE, & EAB = EHB : donc CAB eſt égal à deux ouplusieurs triangles,&c. Ce qu'il faloit prouver.

Theorême ſeptiéme.

La ſurface d'un Polygone eſt égale à un triangle qui a pour baſe le circuit de ce Polygone, & pour hauteur le rayon du cercle qui luy eſt inſcrit.

Si c'eſt par exemple un exagone; ayant mené des lignes du centre A à chaque angle, on le reduit en autant de triangles qu'il a de côtez, ſçavoir en ſix, qui ſont tous égaux au triangle ABC, qui par le Coroll. 2 du Th. 4. *ſup.* eſt égal au triangle qui a BC pour baſe, & qui eſt de même hauteur, laquelle eſt icy le Rayon AD qui eſt perpendiculaire ſur BC; or par le Theor. precedant, un triangle qui a AD pour hauteur & pour baſe le circuit de cet exagone, eſt égal à tous ces ſix triangles dont la hauteur eſt DA, & les baſes priſes enſemble, le circuit de cet exagone, qui eſt ce qu'il faloit prouver.



Premiere demande.

Un Polygone eſt plus grand que le cercle auquel il eſt circonſcrit.

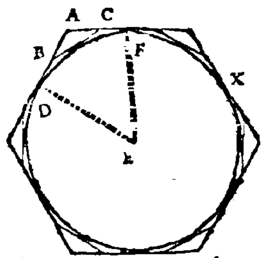
Seconde demande.

Un Polygone eſt plus petit que le cercle dans lequel il eſt inſcrit.

Theoréme huitiéme.

De deux Polygones circonſcrits à un cercle, celuy qui a plus de côtez a un plus petit circuit, & une plus petite ſurface.

X eſt un exagone circonſcrit à un cercle, je diviſe ſes côtez pour faire un autre Polygone qui ait plus de côtez en menant des tangentes, de ſorte qu'étãt hors du cercle, il eſt toujours plus grand que ce cercle par la 1re demande. Je conſidere la même partie de ces deux Polygones, c'eſt à dire, qui ſoit circonſcrite à la même partie du cercle, par exemple à E F D.



Il eſt evident que D B+B A+AC+ C F ſont plus grands que DB+B C+CF; donc il faut 1° que le circuit de celuy qui a moins de côtez ſoit plus grand. 2° Puiſque la figure EFCABD excede EFCBD de la grandeur du triangle ABC, la ſurface de celuy qui a plus de côtez eſt plus petite.

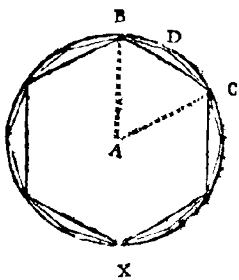
Corollaire.

Donc puiſque plus un Polygone a de

côtez, plus il eſt petit, demeurant toujours plus grand, par la premiere demande *ſup.* que le cercle auquel il eſt circonſcrit ; il s'enſuit que plus un Polygone a de côtez, ſon circuit & ſa ſurface approchent plus du circuit & de la ſurface du cercle auquel il eſt circonſcrit ; & qu'ainſi un Polygone circonſcrit d'une infinité de côtez ne differe point du cercle.

Theoréme neuviéme.

De deux Polygones inſcrits à un même cercle, celuy qui a plus de côtez a un plus grand circuit & une plus grande ſurface.



Deux Polygones étant inſcrits dans le cercle X ; je conſidere la partie A B D C & les parties de ces deux Polygones qui y répondent. 1° BD+DC eſt plus grand que BC ; partant le circuit de celuy qui a plus de côtez eſt déja plus grand.

2° La figure ABDC ſurpaſſe ABC de la grandeur du triangle BDC ; ainſi le Polygone qui a plus de côtez eſt plus grand, ce qu'il faloit prouver.

Corollaire premier.

Donc puiſque de deux ou pluſieurs Polygones

Polygones inſcrits dans un même cercle, celuy-là eſt plus grand qui a plus de côtez demeurant toujours plus petit que le cercle ; par la demande 2^{e} *ſup.* il s'enſuit que plus un polygone inſcrit a de côtez ; plus il approche de la circonference & de la ſurface du cercle ; & qu'ainſi un Polygone qui a une infinité de côtez ne differe point du cercle.

Theorême dixiéme.

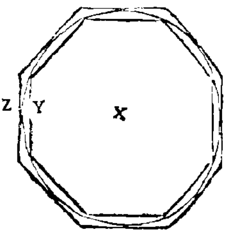
La ſurface d'un cercle eſt égale à un triangle qui a pour ſa hauteur le rayon de ce cercle, & pour baſe la circonference.

On peut ſuppoſer ſelon les deux Theorêmes precedans & leurs Corollaires, qu'un cercle eſt égal à un Polygone d'une infinité de côtez, qui luy eſt circonſcrit, ou inſcrit. Diſons icy qu'il eſt égal à un Polygone circonſcrit. Par le Th. 7 *ſup.* la ſurface de ce Polygone eſt égale à un triangle qui a pour baſe la circonference, & pour hauteur le rayon du cercle auquel il eſt circonſcrit ; ainſi la ſurface d'un cercle qui luy eſt égal, eſt égale à un triangle, dont la baſe eſt égale à ſa circonference, & la hauteur eſt égale à ſon rayon.

Scholie.

Il eſt facile, un cercle étant donné, de trouver une ſurface dont la difference avec celle de ce cercle ſoit plus petite qu'une grandeur donnée.

Soit le cercle donné X : je ſuppoſe qu'un Polygone que je nomme Z luy ſoit circonſcrit, & un autre que j'appelle Y luy ſoit inſcrit. La grandeur donnée, qui eſt la difference de la ſurface du cercle à une autre ſurface eſt T.



J'augmente ou je diminuë les côtez des Polygones Z & Y juſqu'à ce que leur difference ſoit plus petite que la grandeur T, ce qui eſt facile : car en augmentant les côtez de l'un & de l'autre. 1. On augmente la grandeur de Y, puiſque par le Theor. 9 *ſup.* de deux Polygones inſcrits à un même cercle, celuy qui a plus de côtez a un plus grand circuit & une plus grande ſurface ; & on diminuë celle de Z, puiſque par le Theor. 8 precedant, plus un Polygone circonſcrit a de côtez, plus ſon circuit eſt petit & ſa ſurface petite : ainſi l'un & l'autre approchent plus de la circonference du cercle. La difference de Z avec Y eſt plus grande que celle de Z avec X, puiſque X eſt plus grand que Y : donc la difference des ſurfaces de Z & de Y eſtant plus petite que la grandeur T : on trouve une ſurface qui differe de celle du cercle d'une grandeur, beaucoup plus petite que celle qu'on avoit propoſée ; c'eſt à dire que ſi on propoſoit de trouver une ſurface qui ne differe de celle d'un cercle donné que de la cent-miliéme partie d'une ligne, on en pourroit trouver une qui differeroit encore de moins.

ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
OV
DE LA MESVRE
DV CORPS.

LIVRE TROISIE'ME.
Des raiſons & proportions des lignes & des ſurfaces.

AVERTISSEMENT.

EN parlant icy des raiſons & des proportions que les lignes & les ſurfaces ont entr'elles, je ne repete point ce que j'ay dit dans le traité de la Grandeur des raiſons & des proportions en general, je n'ay *pas crû aussi devoir parler icy de la proportion Arithmetique, parce que je n'avois rien à ajoûter à ce que j'en ay dit dans le traité de la Grandeur qui soit particulier aux lignes & aux surfaces. Ie suppose qu'on a vû ce traité. Neantmoins en faveur de ceux qui ne l'ont pas lû, j'en ay extrait les propositions qu'il est necessaire d'avoir presentes à l'esprit pour lire avec plaisir ce troisiéme Livre, avant lequel il faut ainsi lire ces propositions que vous trouverez à la fin de ce volume.*

SECTION PREMIERE.

Des raisons & des proportions des lignes.

Definitions.

Premiere definition.

ESpace paralelle, est un espace compris entre deux lignes paralelles.

Seconde definition.

Deux lignes dans un même ou different espace paralelle sont dites également obliques, lors qu'elles font les mêmes angles sur les lignes paralelles qui comprennent cet espace.

Troisiéme definition.

Deux triangles sont dits semblables

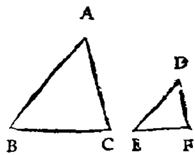
lors que leurs côtez font des angles égaux.

Quatriéme definition.

Les côtez de deux triangles qui font les mêmes angles, s'appellent Omologues.

Scholie

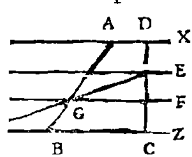
Si le côté AB fait avec BC le même angle que DE fait avec EF, les côtez AB & DE font Omologues, c'eſt à dire, proportionnels : on démontrera dans la ſuite que ce nom leur conviét.



Lemme premier.

Si l'on coupe l'eſpace qui eſt entre les paralelles X & Z (où la perpendiculaire CD qui meſure cet eſpace) par des paralelles à X & à Z, je dis que l'oblique AB entre X & Z ſera partagée en autant de parties que la perpendiculaire CD.

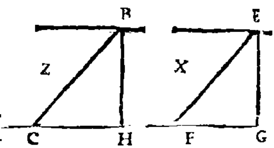
Que cela ne ſoit, & que E & F qui partagent CD en trois, ne diviſent AB qu'en deux. Alors ſi la ligne F coupe AB en G, il faut que E la rencontre en ce point, puiſque toutes deux coupẽt AB dans un ſeul point. Or cela eſt contre la nature des paralelles qui ne ſe rencontrẽt jamais. Donc cette hypotheſe que A B n'étoit pas coupée en autant de parties que C D, eſt fauſſe.



Lemme ſecond.

Les lignes également obliques dans des eſpaces égaux, ſont égales.

1° Les lignes BC & EF ſont également obliques, c'eſt à dire, par la ſeconde definition que l'angle B C H = E F G, 2° les eſpaces Z & X ſont égaux, ainſi les perpendiculaires BH & EG ſont égales, 3° les deux triangles BCH & EFG eſtant rectangles, & les angles BCH & EFG eſtans égaux ils ſont equiangles, ayans donc un côté égal, ils ſont entierement égaux, partant BC = FF; ce qu'il faloit prouver..

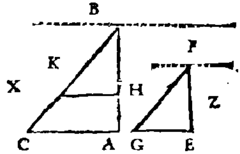


Lemme troiſiéme.

Les lignes également obliques dans des eſpaces paralelles inégaux, ſont inégales : plus grandes ſi l'eſpace eſt plus grand, plus petites ſi l'eſpace eſt plus petit.

Les lignes BC & GF ſont également obliques dans les eſpaces X & Z, la perpendiculaire AB eſt plus grande que EF, ainſi l'eſpace X eſt plus grand que l'eſpace Z : il faut donc démontrer que l'oblique FG eſt plus petite que l'oblique B C.

Soit pris sur BA la partie BH égale à FE, & par H soit menée une paralelle à la base CA, les deux triangles ABC & EFG estant rectangles, & l'angle BCA égal à FGE, ils sont equiangles. Par le Theor. 10, § 1, l. 2. l'angle BKH est égal à BCA, & BHK à BAC, ainsi le triangle BKH est equiangle avec BAC; & partant avec FGE: or FE est supposé égal à BH: donc par le Theor. 4, § 2, l. 2, FG = BK; partant FG égale à BK est plus petite que BC, dont BK est partie. Ce qu'il faloit démontrer.



Theoréme premier.

Ayant partagé un espace paralelle par deux ou plusieurs paralelles, la perpendiculaire de cet espace & la ligne oblique qui y sera, seront coupées proportionnellement.

1° La ligne oblique sera coupée en autant de parties que la perpendiculaire, par le Lemme 1er *sup*. Si par exemple, la perpendiculaire est coupée en cent parties, l'oblique sera aussi coupée en cent parties.

2° Si les parties de la perpendiculaire sont égales entr'elles, celles de l'oblique seront égales entr'elles, par le Lemme 2°

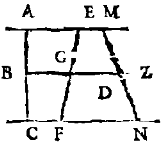
sup. car par le Theor. 10 § 1, l. 2. ces obliques font les mêmes angles sur ces paralelles, ainsi elles sont également obliques, ainsi si les cent parties, dans lesquelles la perpendiculaire a esté coupée sont toutes égales, les cent parties de l'oblique seront aussi toutes égales.

3° Si les parties de la perpendiculaire sont inégales, celles de l'oblique sont aussi inégales, ou si ayant pris cent parties égales dans la perpendiculaire, il reste une partie qui est ou plus petite, ou plus grande, l'oblique se trouvera aussi divisée; de sorte qu'aprés les cent parties égales, il y aura un reste plus petit, si le reste de la perpendiculaire est plus petit; plus grand, si le reste de la perpendiculaire est plus grand, comme il est evident, par le Lemme 3 *sup.* Partant comme la toute sera contenuë, ou contiendra la toute, les parties seront contenuës ou contiendront les parties. Ainsi selon la notion des proportions, les deux lignes dont il est question sont coupées proportionnellement.

Theorême second.

Plusieurs lignes obliques estant dans un même espace paralelle, si on coupe cet espace par une ligne paralelle, ces lignes seront coupées proportionnellement.

Les lignes obliques E F & M N ſont entre deux paralelles entre leſquelles AC eſt perpendiculaire, cet eſpace eſt partagé par Z une paralelle : donc par le Theor. precedant MN, AC :: MD, AB & par le même Theor. EF, AC :: EG, AB.



Permutando AC $\left\{ \begin{matrix} MN \\ EF \end{matrix} \right.$ :: AB $\left\{ \begin{matrix} MD \\ EG \end{matrix} \right.$

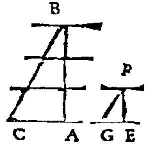
Par conſequent ſelon la 16ᵉ propoſ. du l. 3. *Grand.* la raiſon de MN avec EF eſt la même que celle de MD avec EG, ainſi MN, EF :: MD, EG : ce qu'il faloit prouver.

Theoréme troiſiéme.

Les lignes également obliques dans des eſpaces paralelles differens, ſont entr'elles comme ces eſpaces.

BC & FG ſont également obliques, par conſequent ſi AB eſt égal à EF, par le Lemme 2 *ſup.* BC = FG.

Si AB eſt plus grand que EF, par le Lemme 3 *ſup.* BC ſera plus grand que FG.



Si AB eſt par exemple triple de EF, alors BC ſera triple de FG : car ſuppoſant que BA eſt partagé en trois parties égales : par le

Lemme 1. *sup.* B C sera aussi partagé en trois parties, lesquelles par le 2^e^ Lem. *sup.* seront chacune égale à GF ; car ses parties, par le Th. 10, § 1, l. 2 font les mêmes angles ; ainsi elles sont également obliques; ainsi BC est triple de FG, comme nous venons de le démontrer.

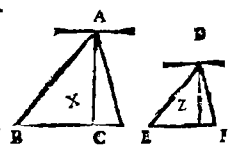
Par cette methode on démontrera que telle partie qu'est E F de A B, l'oblique FG est partie de l'oblique B C, ou que comme E F sera contenuë en A B, aussi FG sera contenuë en BC.

Si A B est égal ou contient une ou plusieurs fois E F, plus quelque reste, par la même methode on démontrera que B C contient de la même maniere une ou plusieurs fois exactement, F G, plus quelque reste. Ainsi les lignes également obliques, &c. ce qu'il faloit démontrer.

Theorême quatriéme.

Deux triangles semblables ont leurs côtez proportionnels.

Je mene par le sommet des deux triãgles ABC & DEF des lignes paralelles à leurs bases, & j'abaisse de leur sommet sur leur base les perpendiculaires X & Z.



Par l'hipothese, selon la 2^e^ defin. les angles ABC & DEF sont

égaux, ainsi AB & DE sont également obliques. A C & D F sont par la même raison également obliques. Donc par le Theor. precedant ∢ A B D E :: X. Z.
∢ A C D F :: X. Z.

Donc puisque deux raisons égales à une troisiéme sont égales entr'elles, par la 16 prop. du l. 3 *Grand.* AB, DE :: AC. DF, en menant par B & E des lignes paralelles aux côtez AC & DF, on demontrera de la même maniere que AB, DE :: B C, E F, & qu'ainsi deux triangles semblables ont tous leurs côtez proportionnels.

Scholie.

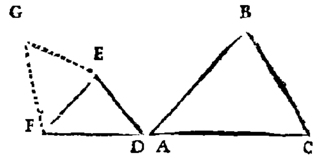
C'est pour cette raison qu'on appelle omologues les côtez qui se répondent dans les figures semblables, parce que ces côtez sont proportionnels les uns aux autres, ou qu'ils ont même raison, ce que signifie ce mot *Omologue.*

Theoréme cinquiéme.

Si dans deux triangles, les côtez qui comprennent l'angle du sommet sont proportionnels, les deux triangles sont semblables.

Dans les deux triangles ABC & DEF, les côtez qui comprennent l'angle du sommet sont proportionnels, je dis que ces deux triangles sont semblables, c'est à dire, par la 3e definit. qu'ils ont mêmes angles.

Je faits sur le côté FE l'angle EFG= BAC & l'angle FEG= ABC, partant l'angle EGF= BCA: ainsi ces deux triangles ſont ſemblables. Donc EG,EF : : BC, AB : or par la ſuppoſition BC,AB : :DE, EF : donc E G EF : : D E EF : partant E G & DE ayant même raiſon avec E F , ce ſont deux grãdeurs

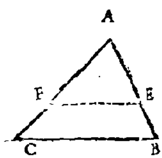


égales, par la 15ᵉ propoſ. du l. 3 *Gran.* Je démontreray de la même maniere que DF= FG, partant les triangles FDE & FGE eſtant égaux ils ſont equiangles par Th. 3. §. 2. l. 2. donc les deux triangles FDE & ABC, étant ſemblables à un troiſiéme, c'eſt à dire, à EGF, ils ſont ſemblables entr'eux: ce qu'il faloit démontrer.

Theoréme ſixiéme.

Lors qu'on coupe deux côtez d'un triangle par une ligne paralelle à la baſe de cet angle, ces côtez ſont coupez proportionnellement.

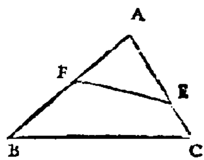
Soit le triangle ABC, je mene EF paralelle à BC, je dis que AB, AE : : AC,AF. Le triangle A E F eſt ſemblable au triangle A B C, puiſque l'angle AEF= ABC



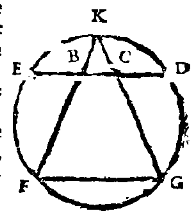
& l'angle AFE= ACB, par le Theor. 10, § 1, l. 2. Donc par le Theor. 4 *ſup.* A B, AE : : A C, A F.

Scholie.

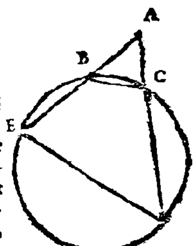
Les lignes paralelles sont des angles égaux d'un même côté avec les lignes qu'elles coupent. On appelle lignes antiparalelles celles qui sur la ligne qu'elles coupẽt font bien les mêmes angles, mais d'un autre cô.é : ainsi l'angle AEF estant égal à l'angle ABC, ces deux lignes EF & BC sont antiparalelles ; & voilà ce qui arrive dans ce cas. Le triangle AEF a les mêmes angles que ABC; ainsi ils sont tous deux semblables, & leurs côtez sont proportionnels ; mais leurs côtez omologues n'ont pas la même situation : car AB n'est pas omologue avec AF, mais avec AE ainsi ces côtez A B & A C ne sont pas coupez dans une proportion droite: AB n'est pas à AF comme AC à AE, de sorte que de ces quatre grandeurs la premiere est à la quatriéme, comme la troisiéme est à la seconde, AB AE: ; AC, A F, ce qui s'appelle être reciproque ; ainsi il n'est question que de bien remarquer qui sont les côtez omologues, c'est à dire, qui font les mêmes angles.



Il n'est pas difficile de reconnoître si deux lignes sont antiparalelles, ou non, si par les points E & D également éloignez de K, sommet du triangle FKG, on mene la ligne E D, cette ligne & F G seront antiparalelles ; Car par le Coroll. 6 du Theor. 2 de la seconde § I. 2, l'angle KBD a pour sa mesure la moitié de l'arc EF, plus celles de KD ou de KE égal à KD. Or la moitié de KF est aussi la mesure de KGF par le Theor. 2 de la premiere, §, I. 2. Donc KBC = KGF, par le même raisonnement à KCB = kFG ; ainsi selon la notion des antiparalelles FG & B C sont antiparalelles, & E D par consequent coupe reciproquement kF & kG, ainsi kF, kC, :: kG, kB.



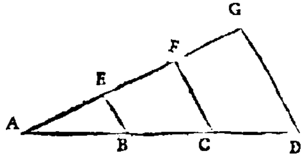
L'angle A B C a pour sa mesure par le Coroll. 7, Theor. 2, § 2. I. 2, la moitié de l'arc B C & de l'arc B E : donc il est égal à C F E qui a même mesure, par le Th, 12, § 1, I. 2, Par le même raisonnement A C B = AEF : donc BC & EF sont antiparalelles, ainsi B C coupe reciproquement AE & AF, & par consequent AE, A C : ; AF, AB,



Problême premier.

Couper une ligne droite ſemblablement à une ligne qui eſt déja coupée.

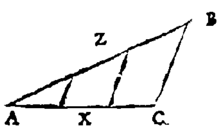
La ligne AD eſt coupée en trois parties AB, BC, CD : on propoſe de couper la ligne AG en trois parties proportionnelles à celles de AD : je joints AG avec AD, de ſorte qu'elles faſſent un angle, quel qu'il ſoit. Aprés je mene par les points G & D une ligne droite, & à celle-cy des paralelles par les points B & C de la coupée. Les paraleles coupent AG en trois parties, qui ſont proportionnelles à celles de AD : car par le Theor. 6 *ſup.* AD, AC :: AG, AF, & AF, AC :: AE, AB : ainſi on a fait ce qui eſtoit propoſé.



Corollaire premier.

Par ce Problême on peut diviſer une ligne preciſément en tant de parties qu'on voudra fort exactement.

La ligne donnée eſt X qu'il faut diviſer en trois parties : je la joins avec Z une ligne infinie, de ſorte qu'elles faſſent l'angle ZAX, n'importe de quelle grandeur. Ayant ouvert le compas au hazard, & mis une de ſes pointes ſur A, je marque ſur Z de ſuite avec la même ouverture trois parties égales. Aprés de B extremité de ces trois parties, je mene une ligne au point C, l'extremité



de X, & à celle-cy, des paralelles par les divisions de Z; selon ce qu'on vient de démontrer A C sera divisé semblablement à AB, c'est à dire, en trois parties.

Corollaire second.

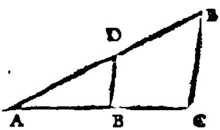
On peut par ce même moyen retrancher d'une ligne telle partie qu'on voudra.

Si de AC on veut retrancher sa troisiéme partie, il n'est question que de diviser AC en trois parties.

Probléme second.

Deux lignes estant données trouver une troisiéme qui soit à la seconde, comme celle-là est à la premiere, *ou*, à deux lignes données trouver une 3ᵉ proportionnelle.

La premiere ligne est AB, la seconde BC: je joins ces deux lignes de sorte qu'elles ne fassent qu'une ligne droite. En suite je prends AD égale à BC que je joins avec AB, de sorte qu'elles fassent un angle quel qu'il soit.



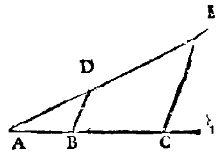
Je mene de D une ligne sur B, & à celle-cy une paralelle par le point C: je prolonge AD jusqu'à ce qu'elle rencontre la paralelle CE, ce qui estant fait, je dis que DE est la troisiéme proportionnelle cherchée.

Car par le Th. 6 *sup.* AB est à A D, ou à son égale BC, comme BC est à DE, ainsi ∺ AB, BC, DE, ce qui estoit proposé.

Probléme troisiéme.

Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes qui ſont en proportion.

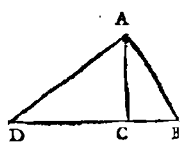
La premiere, eſt AB; la ſeconde, AD, avec leſquelles je fais l'angle quel qu'il ſoit BAD ; la troiſiéme eſt BC que je joins avec AB, de ſorte que toutes deux faſſent une ligne droite. Aprês je mene par B & D une ligne droite, & à celle-cy par le point C la paralelle CE : je prolonge AD juſqu'à ce qu'elle rencontre cette paralelle CE, ce qui eſtant fait, je dis que DE eſt la proportionnelle. Car par le Th. 6 *ſup.* AB, BC : : AD DE, & par conſequent, *alternando* AB, AD : : BC, DE.



Lemme quatriéme.

Dans le triangle rectangle ABD la ligne AC menée du ſommet de l'angle droit perpendiculairement ſur BC partage ce triangle en deux triangles ſemblables entr'eux & à ABD.

1° Ils ſont tous rectangles. 2° Ils ont un de leurs angles outre le droit qui eſt égal, car les triangles ABD & ABC ont l'angle B commun. Ainſi ils ſont ſemblables. Les triangles ABD & ADC ont auſſi l'angle D commun, ils



ſont

ſont donc auſſi ſemblables, & puiſque ABC & ADC ſont ſemblables à un troiſiéme, ils ſont ſemblables entre eux, par conſequent les trois triangles rectangles ABD, BCA, CAD, ſont ſemblables.

Theorême ſeptiéme.

Lors que dans un triangle rectangle, comme eſt ABD, on mene une perpendiculaire de l'angle droit A ſur l'hipothenuſe BD.

1° La perpendiculaire AC eſt moyen proportionnel entre les deux parties BC & CD de l'hipothenuſe BD, c'eſt à dire, que ∺ BC, AC, CD.

2° Le côté majeur AD eſt moyen proportionnel entre l'hipothenuſe BD, & la plus grande partie CD, c'eſt à dire, que ∺ CD, AD, BD.

3° Le côté mineur AB eſt moyen proportionnel entre l'hipothenuſe BD & ſa plus petite partie BC, c'eſt à dire, que ∺ BC, AB, BD.

Par le Lemme *ſup.* le triangle rectangle ABD eſt diviſé par la perpendiculaire AC en deux triangles rectangles ſemblables, de ſorte que ABD, CBA, CAD ſont trois triangles ſemblables. Partant par le Theor. 4 *ſup.* 1° BC, AC : : AC, CD, ou ∺ BC, AC, CD.

2° CD, AD, : : AD, BD, ou ∺ CD, AD, BD.

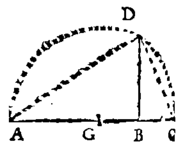
3o BC, AB :: AB, BD, ou ÷ BC, AB, BD : ce qu'il faloit démontrer.

Problême quatriéme.

Entre deux lignes données trouver une moyenne proportionnelle.

Premiere maniere.

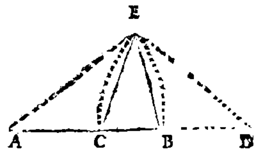
Les deux lignes données ſont AB & BC que je joins de ſorte qu'elles font une ligne droite, du milieu de laquelle, qui eſt G, & de l'intervalle de ſa moitié, ſçavoir de de l'intervalle A G je décris un demy cercle. J'éleve en ſuite ſur B une perpendiculaire que je prolonge juſqu'à ce qu'elle ſe termine dans la circonference du cercle, ſçavoir au point D : je dis que BD eſt moyenne entre AB & BC.



Par le Coroll. 3 du Th. 12, § 1. l. 2, l'angle A D C dans le demy cercle eſt droit , par la conſtruction BD eſt perpendiculaire. Donc par le Theor. precedant BD eſt moyenne proportionnelle entre AB & BC ÷ AB, BD BC.

Seconde maniere.

AB & CB ſont deux lignes données: je prolonge AB de ſorte que BD = AC : & de D & de A comme centres & d'intervalles égaux A B & C D je faits deux cercles qui ſe coupent en E : la ligne EB ou EC ſera la moyenne entre AB & CB.

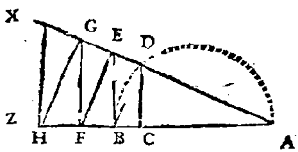


Par la conſtruction AB=AE & CE =BE, dõc EAB&CEB ſont deux Iſoſceles, ils ont l'angle commun ABE, donc par le Coroll. 2ᵉ Theor. 7 §. 2, l. 2 ces deux Iſoſceles ſont equiangles, & partant ſemblables; donc AB BE : : BE, BC ou ∺ AB, BE, B C.

Problême cinquiéme.

Ayant les trois premieres lignes d'une progreſſion Geometrique de lignes, trouver toutes les autres à l'infini.

La troiſiéme ligne eſt AB que je partage par la moitié, & de l'intervalle de cette moitié je décris un demy cercle. Je prends ſur cette ligne AB une partie AC égale à la premiere ligne, & ſur C j'éleve une perpendiculaire qui ſe termine à la circonference du cercle au point D, d'où je mene une ligne au point B, & de A par D, une ligne infinie.



Je prolonge auſſi à l'infini la ligne *AB*, que je nomme Z; en ſuite j'éleve au point B une perpendiculaire qui coupe X au point E, duquel je mene une perpendiculaire qui coupe Z au point F, où je dresse une perpendiculaire qui coupe X au point G, d'où j'abaisse une perpendiculaire GH, & ainsi de suite.

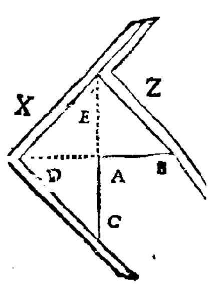
1° Par le Theor. 7 *sup.* la ligne AD étant moyenne proportionnelle entre AC & AB, elle est égale à la seconde ligne donnée, qui se trouve ainsi, si elle n'étoit pas donnée.

2° Tous les triangles ADB, ABE, AEF, AFG, &c. sont semblables, étant rectangles; car l'angle ADB dans le demy cercle est droit, par le Cor. 3 du Th. 12, § 1, l. 2, & par la construction EF & HG sont perpendiculaires sur X, comme DC, BE, GF le sont sur Z. Tous ces triangles ont un angle commun, sçavoir, XAZ: donc comme AD, AB :: AB, AE, & comme AB, AE :: AE, AF, & comme AF, AG :: AG, AH, &c. par consequent ∺ AC AD, AB, AE, AF, AG, AH, &c. *Scholie.*

Iusqu'à present on n'a point découvert le moyen de trouver avec le compas & la seule regle deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. On les trouve mechaniquement.

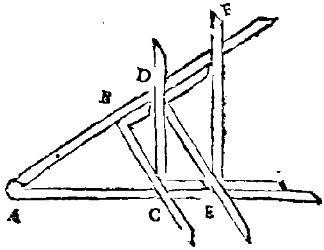
Les lignes données sont AB & A C, qu'on joint de sorte qu'elles font un angle droit. On dispose l'equerre X de sorte que son angle soit sur le prolongement de A B & qu'une de ses regles rase C extremité de A C.

Z est une seconde equerre qu'on dispose de sorte qu'une de ses regles rase X, & l'autre le point B extremité de AB ainsi les triangles CDE & DEB, sont rectangles, & DA & EA sont des perpendiculaires, ainsi par le Th. 7



ſup. ∺ AC, AD, AE, & par le même Theor. ∺ AD, AE, AB ; donc ∺ AC, AD, AE, AB.

Cette invention eſt de Platon Deſcartes en propoſe une autre, avec laquelle il trouve entre deux lignes données autant de proportionnelles qu'on en veut. L'inſtrument dont il ſe ſert eſt compoſé de pluſieurs equerres, qui ſont tellement ajuſtées les unes avec les autres, que lors



que l'angle FAE eſt fermé, ou que les deux regles FA & AE ſe touchent, toutes les autres regles BC, CD, DE, EF ſe touchent & viennent au point A : ſi cet angle EAF s'ouvre, ces mêmes regles ſe pouſſent & ſe chaſſent.

Deux lignes étant donc données, je pouſſe la regle BC de ſorte que AB ſoit égale à la plus petite, & j'ouvre l'angle EAF de ſorte que la regle DE ſoit éloignée de. A de la grandeur de la ſeconde ligne

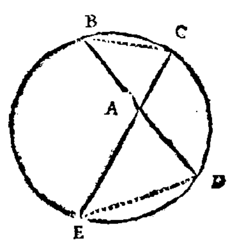
Par ce qui a eſté dit dans le Probl. 5 precedant, AC & AD ſeront deux moyennes proportionnelles entre AB & AE.

Pour trouver pluſieurs moyennes proportionnelles il faut augmenter le nombre des equerres.

Theoréme huitiéme.

Deux cordes qui ſe croiſent dans un cercle, ſont coupées reciproquement.

Les deux cordes ſont BD & CE, les triangles ABC & ADE ſont ſemblables; car 1° l'ãgle BAC = EAD; 2° L'angle CBD, = CED, puis qu'ils ſont appuyez ſur le même arc CD. 3° Par la même raiſon BCE = BDE : ainſi le côté BA eſt omologue à



AE & CA à AD, c'eſt à dire, que BA, AE :: AC, AD, par conſequent ces quatre lignes BA, AD, CA, AE ſont reciproques, c'eſt à dire, que la premiere BA eſt à la quatriéme AE, comme la troiſiéme AC eſt à la ſeconde AD.

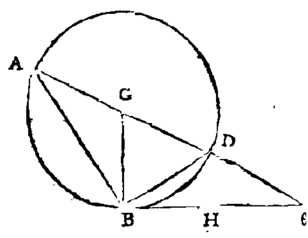
Scholie.

Ainſi quand deux lignes ſont coupées reciproquement, on doit être aſſuré qu'on peut faire paſſer un cercle par leurs quatre extremitez.

Theorême neufiéme.

BC eſt une tangente, AC eſt une ſecante qui paſſe par le centre du cercle, je dis que ∺ AC, BC, DC.

Les deux triangles ACB & DCB ont un angle commun à leur ſommet C, l'angle DBC a pour ſa meſure la moitié de l'arc BD par le Theorême 11, liv. 2, § 1, cette moitié eſt auſſi la meſure de l'angle



BAC par le Th. 12. §. 1, l. 2, ainſi les deux triangles ACB & BCD ayant deux angles égaux, & par conſequent le 3e, ils ſont ſemblables & proportionnels, le côté DC du triangle BCD eſt omologue avec le côté BC du triangle ACB, ainſi AC, BC :: BC, CD ou ∺ AC, BC CD, ce qu'il faloit démontrer.

Problême sixiéme.

Diviser une ligne en moyenne & extrême raison. Voyez la figure precedente.

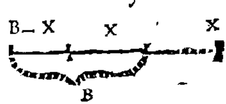
C'est à dire, en telle sorte que la plus grande partie soit moyenne proportionnelle entre la plus petite & la toute.

La ligne donnée est B C, au point B j'éleve la perpendiculaire B G qui soit moitié de BC : de l'intervalle de G B je faits un cercle dont le diametre sera par consequent égal à BC, je tire la secante A C : aprés quoy ayant pris CH sur B C égale à C D, je dis que la ligne BC sera divisée au point H, comme il est requis : si H C ou D C est la plus grande partie, & BH ou BC − HC la plus petite, il faut démontrer que ∺ BC − CH, HC, BC, ou ∺ BC, − CD, CD, BC. par le Th. precedant, DC, BC : : BC, A C : or A C = BC + DC, donc DC, BC, : : BC, DC + BC.

Permutando BC, DC : : DC + BC, B C. *Dividendo* B C − D C est à D C comme DC + BC − BC, c'est à dire, DC (car + BC − BC = o) est à BC : or BC − DC = BH & DC = HC, donc ∺ BH, HC, BC ; ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire premier.

La ligne B est divisée en moyenne & extrême raison, X est la plus grande partie qu'on appelle la Mediane, & B − X est la

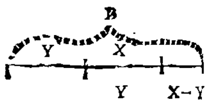


plus petite. Je dis que si on ajouste X à B, cette grandeur $X + B$ sera divisée en moyenne & extrême raison, & que B sera la mediane, c'est à dire que ∺ $X + B$. B, X.

Par l'hipothese ∺ B, X, $B - X$, ou B, X : : X. $B - X$, *permutando* X B : : $B - X$ X, *componendo* $X + B$ B : : $B - X + X$ X & puisque $B - X + X = o$, il faut que $B - X + X = B$, ainsi ∺ $X + B$, B, X, ce qu'il faloit prouver.

Corollaire second.

La ligne B étant divisée en moyenne & extrême raison, la petite partie est Y, la mediane X: ainsi ∺ Y. X, $Y + X$: je dis que retranchant Y de X, on aura une ligne divisée en moyenne & extrême raison ; c'est à dire que $X - Y$. Y : : Y, X, ou ∺ $X - Y$. Y. X.



Par l'hipothese ∺ Y. X. $Y + X$, ou Y, X : : X, $Y + X$, donc *permutando* X. Y : : $Y + X$ X & *dividendo* $X - Y$. Y : : $Y + X - X$. X & puisque $+ X - X = o$ il faut que $Y + X - X = Y$, ainsi $X - Y$ Y : : Y. X, c'est à dire que ∺ $X - Y$, Y. X : ce qu'il faloit prouver.

Corollaire troisième.

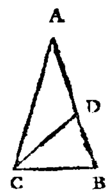
Du premier Corollaire il est aisé de conclure que lors qu'on a une ligne divisée en moyenne & extrême raison, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes divisées en moyenne & extrême raison, si on ajoûte à la toute la mediane: Et par le second Corollaire qu'on en peut avoir une infinité de plus petites toutes divisées en moyenne & extrême raison, en retranchant la plus petite de la mediane.

Lemme quatriéme.

Dans le triangle Isoscele ABC, si les angles de la base sont doubles de celuy du sommet. Je dis que la ligne BD, qui coupe par la moitié ACB, un des angles de la base, coupe AB en moyenne & extrême raison.

1° Puisque l'angle BCA est double de BAC; donc la moitié DCA sera égale à l'angle CAD : partant le triangle ADC ayant les angles égaux sur la base AC, il est Isoscele par le Th. 7, §, 2, l. 2.

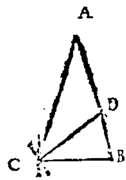
2° L'angle BDC est égal aux deux opposez DAC & ACD, par le Coroll. 2 du Th. 2, § 2, l. 2 par consequent il est égal à l'angle ACB qui vaut ces deux angles, & à DBC qui est égal par l'hipothese à ACB, ainsi le triangle DCB ayant les angles sur la base DB égaux, est encore Isoscele, ainsi DC = BC.



3° Les deux triangles Isosceles BAC & BCD qui ont un angle commun au point B, par le Cor. 2 du Th. 7, § 2, l. 2, sont equiangles, & partant semblables : donc par le Th. 4 *sup.* AB est à BC, ou à AD égal à BC, comme DC, ou son égale, AD est à DB, c'est à dire ∺ AB, AD, DB, & par consequent AB est coupé en moyenne & extrême raison, puisque la partie AD eſt moyenne entre la toute AB, & l'autre partie D B.

Lemme cinquiéme.

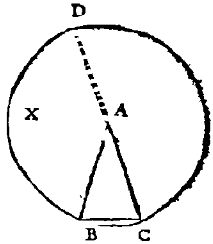
Si on diviſe AB en moyenne & extrême raiſon au point D : que de B & de D comme centres & de l'intervalle de la mediane D A on faſſe deux arcs qui ſe coupent en C, d'où l'on mene les lignes AC, DC, CB, le triangle ABC ſera Iſoſcele, & chaque angle de ſa baſe double de l'angle du ſommet.



Par la conſtruction B C= DC= AD, ainſi ADC & DCB ſont Iſoſceles, & puiſque ∺ A B. AD. DB. & que par la conſtruction AD= BC = DC, il s'enſuit que AB, BC : : DC. DB. donc par le Theor. 5 *ſup.* B A C & DCB ſont equiangles, & partant B A C eſt Iſoſcele : or l'angle B D C eſt égal à DAC+ACD les oppoſez interieurs qui ſont égaux, puiſque ADC eſt Iſoſcele : donc DBC égal à B D C eſt le double de BAC.

Lemme ſixiéme.

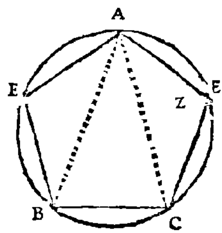
BC eſt un des côtez d'un decagone inſcrit dans le cercle X, je dis que les angles ABC & ABC de la baſe de l'Iſoſcele BAC ſont doubles de celuy du ſommet qui eſt l'angle du centre du decagone.



Cet angle du centre du decagone a pour mesure la corde ou l'arc BC de 36 degrez 10^e partie du cercle, l'ãgle ACB a pour mesure la moitié de l'arc BD, qui est complément de l'angle BAC, & par consequent de 144 degrez, dont la moitié septante-deux qui est la mesure de l'angle ACB, est double de trente-six degrez, mesure de l'angle BAC.

Lemme septiéme.

BC est le côté d'un pentagone regulier inscrit dans le cercle Z, les deux lignes AB, AC qui sont cordes des angles BEA & CFA, qui sont égaux, sont égales : ainsi ABC est un Isoscele, dont chacun des angles de la base est double de celuy du sommet, ce qu'il faut prouver.



Par le Th. 12, §. 1. l. 2, l'angle BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC, & l'angle ACB la moitié de l'arc AEB : or cet arc est double de BC ; donc l'angle ACB est double de l'angle BAC ; ce qu'il faloit démontrer.

Theoréme dixiéme.

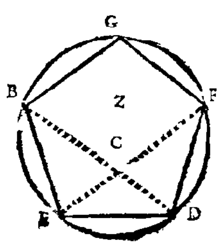
Le côté d'un decagone inſcrit dans un cercle eſt la mediane du rayon de ce cercle coupé en moyenne & extrême raiſon.

Car ayant fait un triangle Iſoſcele, dont les côtez ſoient égaux au rayon du cercle, & pris pour la baſe la mediane de ce rayon coupé en moyenne & extrême raiſon, par le Lemme cinquiéme dans cet Iſoſcele, chaque angle de la baſe eſt double de celuy du ſommet, & partant la baſe de cet Iſoſcele par le Lem. 6 eſt le côté du decagone.

Theoréme onziéme.

Z eſt un pentagone, B D & EF deux cordes qui ſoûtiennent les angles BED & EDF, & qui ſe coupent en C : je dis 1° que B C eſt un des côtez du pentagone : 2° que B D eſt coupé au point C en moyenne & extrême raiſon.

1° L'angle BEF a pour meſure la moitié des deux arcs BG & GF, par le Th. 12, § 1 l. 2, & l'angle BCE la moitié des deux arcs BE & F D par le Coroll. 6, Th. 2, § 2, l. 2 : or ces deux meſures ſont égales, dōc

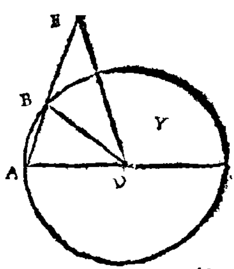


ces deux angles ſont égaux ; ainſi par le Th. 7, § 2, l. 2, EBC eſt Iſoſcele, & partant BE = BC : ainſi BC eſt un des côtés du pentagone, ce qu'il faloit prouver.

2° Par la même raiſon CF, = FD, & puiſque BD = FE cordes des mêmes angles, il faut que CE = CD : ainſi ECD eſt un Iſocele. Le triangle BED eſt auſſi Iſoſcele, puiſque BE = ED, car on ſuppoſe que Z eſt un pentagone regulier; ces deux Iſoſceles ont un angle commun au point D ; donc ils ſont equiangles par le Coroll. 2, Th. 7, §. 2; l. 2, ainſi par le Theor. 4 *ſup.* comme BD eſt à BE, ou ſon égale BC; ainſi ED ou ſon égale BC, ſera à CD, c'eſt à dire ÷ BD, BC, CD, & par conſequent, ſelon la notion de la moyenne & extrême raiſon BD eſt coupé comme il a eſté propoſé.

Theorême douziéme.

La ligne droite compoſée du côté de l'exagone & du decagone inſcrits au même cercle, eſt coupée en moyenne & extrême raiſon.



Soit AB côté du decagone, & BE côté de l'exagone, c'eſt à dire, une ligne égale au rayon B D, comme il a eſté démontré Prob. 6 § 3, l. 4 : je dis que AE eſt coupé en moyenne & extrê-me raiſon au point B.

EBD eſt Iſoſcele, puiſque BE eſt ſuppoſée égale au rayon B D, le triangle ADB eſt auſſi Iſoſcele, & par le Lem. 6. *ſup.* l'angle BAD, ou ABD eſt double de BDA : or DBA eſt auſſi double de BDE puiſque par le Cor. 2, Th. 2, § 2, l. 2, il eſt égal aux deux angles égaux BED, & EDB : donc BED & BDA ſont égaux entr'eux & pris enſemble ils ſont égaux à EAD, ainſi le triangle AED eſt Iſoſcele, partant puiſque B D coupe en deux l'angle EDA, par le Lemme 4, *ſup.* EA eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire.

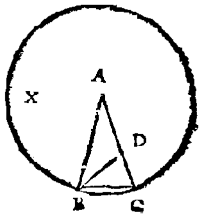
De là il s'enſuit que ſi AE eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, dont AB petit ſegment ſoit côté d'un decagone, BE ſera le côté de l'exagone inſcrit au même cercle.

Puiſque entre AE & AB il n'y peut avoir qu'une moyenne proportionnelle ; & qu'on vient de prouver que BE côté de l'exagone eſtoit cette mediane.

Problême ſeptiéme.

Un cercle étant donné trouver la corde de dix degrez ou le côté du decagone.

Le cercle eſt X dont AB eſt le rayon, que je diviſe par le Prob. 6 *ſup.* en moyenne & extrême raiſon en D. Je prends la corde BC égale à AD, qui ſera le côté du decagone : car par le Lemme 5 *ſup.* les angles ABC & ACB ſont doubles de BAC : donc par le Lemme 6 *ſup.* l'angle BAC eſt l'angle du centre du decagone, dont par conſequent BC eſt un des côtez.



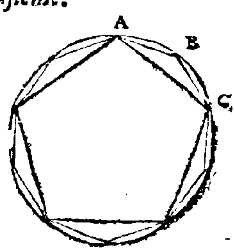
Problême huitième.

Décrire un decagone ſur BC, un côté donné.

Je diviſe le côté donné BC en moyenne & extrême raiſon : j'y ajoûte la mediane, ce qui me donne par le 1er Cor. du Probleme 6 *ſup.* une ligne diviſée en moyenne & extrême raiſon : dont BC ſera la mediane ; ainſi cette ligne par le Th. 10 *ſup.* ſera égale à AB rayon du cercle ou BC ſera un des côtez du decagone inſcrit.

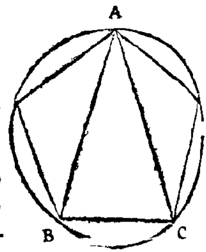
Problême neuſiéme.

Un cercle étant donné trouver le côté du pentagone.



1° Par le Prob. precedant ayant trouvé le côté du decagone, on a celuy du pentagone, qui eſt la corde du double de l'arc qui ſoûtient un des côtez du decagone. AB & BC ſont deux côtez d'un decagone, AC corde de l'arc ABC eſt evidemment celle du pentagone, cette corde étant la 5^{e} partie du cercle.

2° On peut trouver encor le côté du pentagone de cette maniere; il faut trouve par le Lemme 5 *ſup.* un triangle Iſoſcele, dont les angles de la baſe ſoient chacun double de celuy du ſommet, & l'inſcrire, ou un qui luy ſoit ſemblable dans le cercle dõné; je ſuppoſe que BAC eſt ce triangle, par le Lemme 7 *ſup.* BC ſera un des côtez du pentagone.

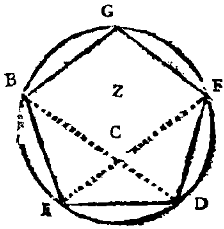


Probléme dixiéme.

Décrire un pentagone ſur ED un côté donné.

Soit donc ED le côté donné je le diviſe en moyenne & extrême raiſon. Je luy ajoûte la mediane, ce qui produit une autre ligne, qui par le Cor. 1er du Pr. 6 *ſup.* eſt diviſée en moyenne & extrême raiſon, dont ED ſera la moyenne : or cette ligne par le Theor. 11^{me} eſt égale à BD corde du double de l'arc dont ED eſt la corde, puiſque par ce Theor. B D eſt coupée

coupée au point C en moyenne & extrême raiſon, dont BC égal à ED eſt la mediane : cela étant de D comme centre, & de l'intervalle BD ayant fait un arc, & de E & de l'intervalle ED ayant fait un ſecond arc, qui coupe le premier, & mené une ligne à cette ſection : on aura EB, qui ſera le ſecond côté du pentagone, les autres ſe trouveront en la même maniere.



SECTION II.

Des raiſons & proportions qu'ont les circuits des figures ſemblables.

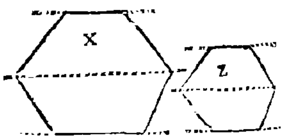
Definition.

DEux figures rectilignes ſont dites ſemblables lors que les angles ſont égaux chacun à chacun, & que les côtez qui les comprennent ont même raiſon.

Theorême premier.

Les figures regulieres de même nom ſont ſemblables.

Par la ſeconde definition § 3, liv. 2, les figures regulieres ſont celles dont tous les côtez & tous les angles ſont égaux ; ſoient donc X & Z deux figures regulieres de même nom, que je ſuppoſe exagones ; ayant mené des lignes paralelles qui renferment les côtez de ces figures : puiſque par l'hipotheſe ces deux figures ont mêmes



angles, & que leurs côtez compris entre ces paralelles ſont égaux, ils feront mêmes angles dans des eſpaces paralelles égaux, par conſequent par le Th. 3, § 1 *ſup.* ils ont même raiſon entre eux, ainſi ces deux figures par la definition precedante ſont ſemblables, ce qu'il faloit prouver.

Theorême ſecond.

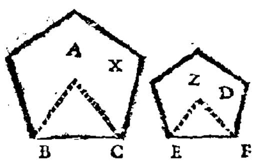
Les circuits de deux figures ſemblables ſont entr'eux en même raiſon que leurs côtez omologues.

Selon la defin. precedante ces deux figures ont mêmes angles, ainſi leurs côtez ſeront en même raiſon chacun à ſon omologue ; partant ſelon la Propoſ. 24, L. 3 *Gr.* la ſomme de tous les côtez de l'une, c'eſt à dire, le circuit ſera à la ſomme de tous les cotez, ou au circuit de l'autre, comme chaque côté de l'une eſt à chaque côté de l'autre, qui luy eſt omologue.

Theorême troiſiéme.

Les circuits de deux figures regulieres & ſemblables, ſont entr'eux comme les rayons ou diametres des cercles où elles ſont inſcrites.

X & Z ſont deux Polygones reguliers & ſemblables. Du centre du cercle où elles ſont inſcrites je mene les lignes AB & AC, DE & DF, qui ſont leurs rayons, les deux triangles ABC & DEF ſont Iſoſceles par la conſtruction, & puiſque ces deux figures ſont ſemblables, les angles de leurs centres BAC & EDF ſont les mêmes; ainſi ces triãgles ſont ſemblables: donc AB ou le rayon de X eſt à DE rayon de Z comme BC à EF: or le circuit de X eſt à celuy de Z, par le Th. precedant, comme BC à EF, dont le circuit de X eſt à celuy de Z comme le rayon de X eſt à celuy de Z, ou comme le diametre de l'un eſt au diametre de l'autre; car les rayons & les diametres ont entr'eux une même raiſon, les rayons étant la moitié des diametres.



Theorême quatriéme.

Les circonferences de deux cercles

ſont entr'elles comme les diametres de ces cercles.

Par le Cor. du Th. 9, § 4 l. 2, les cercles peuvent être conſiderez comme des Polygones reguliers: or les circuits de deux Polygones ſont entr'eux comme leurs diametres : donc les circuits ou circonferences des cercles ſont entr'elles comme les diametres des cercles.

Scholie.

Si on conçoit dans un cercle une infinité d'autres cercles concentriques, dont les circonferences ſoient deployéess & dreſſées comme des lignes droites, le rayon du grand cercle & ſon circuit feront un triangle rectangle dans l'hipothenuſe, duquel les extre-

mitez des cercles concentriques auſſi déployés, doivent ſe trouver, puis qu'ils ſont entr'eux comme les parties du rayon du cercle qu'ils coupent. C'eſt pourquoy l'on a conclu de là que la ſurface du cercle étoit égale à un tel triangle, Ce que nous avons démontré par une autre voye ſur la fin du ſecond Livre.

Theoréme cinquiéme.

Les arcs d'égale quantité de degrez dans differens cercles ſont entr'eux comme les cercles dont ils ſont les parties.

Cela eſt clair : les degrez ſont les parties proportionneles d'un tout : donc elles ſont entr'elles comme les touts, dont elles ſont les parties.

Theorême sixiéme.

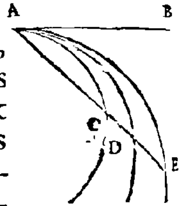
Les cordes d'arcs ſemblables dans differens cercles ſont entr'elles comme les arcs dont elles ſont les cordes.

Concevant que du centre des cercles où ſont ces cordes on ait mené des lignes à leurs extremitez, on aura des triangles ſemblables, puiſque ces cordes d'arcs ſemblables ont les angles au centre égaux, ainſi étant Iſoſceles, ils ont tous leurs angles égaux : ces cordes ſont donc entr'elles comme les rayons de ces cercles ; & partant comme ces cercles : or les arcs d'égale quantité de degrez ſont entr'eux comme les cercles dont ils ſont parties, par le Theor. precedant, ces cordes ſont donc entr'elles comme les arcs dont elles ſont les cordes.

Theorême ſeptiéme.

Si du point A où pluſieurs cercles ſe touchent, on mene une ligne comme AE qui coupe ces cercles, les parties de cette ligne ſeront entr'elles comme les cercles qu'elle coupe.

Par A je mene AB qui touche ces cercles ; ainſi l'angle BAE par le Th. 11, § 1, l. 2 a pour meſure ou l'arc AC, ou AD, ou AE, ainſi ces trois arcs ſont ſemblables.



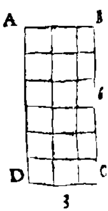
Les cordes AC, AD, AE, par le Theor. precedant, d'arcs ſemblables, ſont entr'elles comme les arcs AC, AD, AE, & par le Th. 5, puiſque ces arcs ſont entr'eux comme leurs cercles, les parties de ladite ligne ſeront entr'elles comme les cercles qu'elle coupe.

SECTION III.

Des raiſons & proportions des ſurfaces.

Demande.

LEs ſurfaces ſont des grandeurs faites par la multiplication de leurs deux dimenſions, ou de leurs côtez.

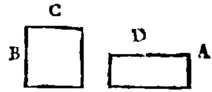


Les deux dimenſions de la ſurface ABCD, qui ſont ſes deux côtez BC & CD, multipliées l'une par l'autre, font la grandeur de cette ſurface : que BC ſoit de ſix pieds & GD de trois, ABCD ſera de dix-huit.

Theoréme premier.

Si quatre lignes ABCD ſont proportionnelles A, B, : : C, D, le rectangle des extrêmes AD eſt égal à celuy des moyens BC.

Ces quatre lignes ſont quatre grandeurs. Faire un rectangle de deux lignes, c'eſt la même choſe que de les multiplier l'une par l'autre, ſelon le Lemme precedant : donc ce Theorême eſt le même que la propoſition 21 du l. 3, *Grandeur.*



Corollaire.

Ayant donc le côté A d'un rectangle, pour trouver quel doit être l'autre, afin qu'il ſoit égal au rectangle BC, conſiderant A, B, C, comme trois lignes proportionnelles, il faut leur chercher une quatriéme proportionnelle, qui ſera le côté qui avec A fera un rectangle égal à B C.

Theorême deuxiéme.

Si de quatre lignes les extrêmes ſont un rectangle égal à celuy des moyens, ces lignes ſont proportionnelles.

Ce Theorême par ce que nous venons de dire eſt le même que la 22e prop. du l. 3. *Grandeur.*

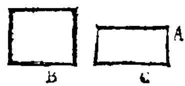
Corollaire.

Les complemens d'un paralelogramme étant égaux par le Theor. 3. § 4, l. 2 les lignes qui les comprennent ſont proportionnelles : cela ſe peut encore démontrer, parce que ces lignes ſont les mêmes angles entre les paralelles, qui les comprennent.

Theoréme troisiéme.

Si ∺ A, B, C, le rectangle AC de la 1^{re} & 3^{e} est égal à BB quarré de la moyenne.

Cette proposition est la même que le Coroll. de la 21^{e} proposition du l. 3 Gr.

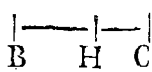


Corollaire premier.

Donc pour trouver un quarré égal à un rectangle donné, il faut trouver seulement une ligne moyenne proportionnelle entre les deux côtez du rectangle : ce qui est enseigné Prob. 4, § 1. l. 3. *sup.*

Corollaire second.

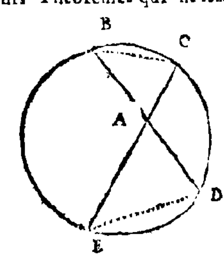
Donc lors qu'une ligne comme BC est coupée en moyenne & extrême raison au point H, le rectangle de la toute BC & de la petite partie HC est égal au quarré de la mediane BH, puisque ∺ BC, BH, HC par le Prob. 6, § 1. *sup.*



Scholie.

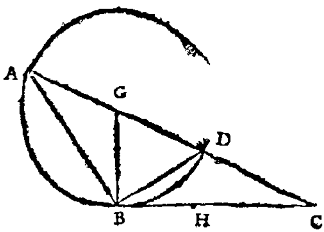
Nous pourrions icy ajoûter plusieurs Theorêmes qui ne sont que des Corollaires de ce qu'on vient de démontrer : car de ce que dans une proportion le rectangle des extrêmes est égal au rectangle des moyens, il s'ensuit par exemple,

1. Lors que deux cordes BD & CE dans un cercle se coupent l'une l'autre, le rectangle des deux parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre, car par le Th. 8, § 1 *sup.* BA, AE :: AC

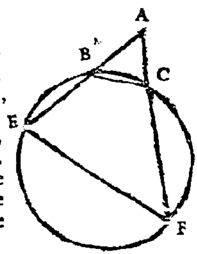


AD : donc par le Th. 1 *sup.* le rectangle de BA & de AD est égal au rectangle de AE & de AC.

2. Si du point C, hors d'un cercle on mene deux lignes droites CB & CA, dont l'une touche le cercle, & l'autre le coupe, le rectangle de AC & de CD est égal au quarré de la tangente BC : car, par le Th. 9, §. 1 ÷ AC, BC, DC : donc par le Th 3. sup. le quarré de la tangente BC est égal au rectangle de AC & de DC.

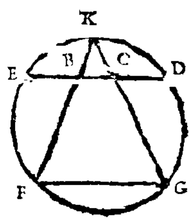


3. Si du point A hors un cercle on mene deux lignes droites AE & AF, qui le coupent, le rectangle de l'une AE, & de la partie AB est égal au rectangle de l'autre AF, & de la partie AC, car par la Scholie du Theorême 10 § *sup.* si AE. AF : : AC. AB : donc par le Theorême premier *sup.* le rectangle de AE, & de AB est égal au rectangle de AF & de AC.



4. Si par les points D & E également éloignez de K l'on mene la ligne DE, le rectangle de KF & de kB est égal au rectangle de KF & de KG ; car par la même Scholie kF, kG : : kC, kB, ainsi par le Theorême premier *sup.* le rectangle de kF & de kB est égal au rectangle de kG & de kC.

Ces exemples doivent suffire pour montrer qu'on peut tirer plusieurs propositions de ce qui vient d'être prouvé

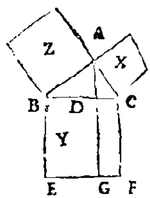


Theoréme quatriéme.

Dans un triangle rectangle le quarré de l'hipothenuse est égal aux quarrez des deux autres côtez.

ABC est un triangle rectangle, sur les

côtez duquel ſont les trois quarrez Z. X. Y : de l'angle droit A je mene ſur BC une perpendiculaire que je prolonge de ſorte qu'elle coupe BC en deux parties, en D & fait deux triangles rectangles ſemblables par le Lem. 4, § 1 *ſup.*



Par le Th. 7, § 1 *ſup.* AC eſt moyenne proportionnelle entre BC, ou CF, ſon égale & DC : donc par le Th. 3 *ſup.* le quarré X eſt égal au rectangle CDGF, & par le même Th. 7, § 1. *ſup.* AB étant moyen proportionnel entre BC ou ſon égale BE & BD, le quarré Z eſt égal au rectangle BDGE : ces deux rectangles ſont les parties de Y ; donc le quarré de Y eſt égal à ceux de Z & de X ; ce que nous avons démontré d'une autre maniere, Liv. 2, § 4, Th. 5.

Corollaire.

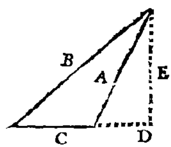
Donc pour trouver un quarré comme Y égal aux deux quarrez donnez Z & X, il faut joindre les côtez de Z & de X de ſorte qu'ils faſſent un angle droit, dont l'hipothenuſe ſera le côté du quarré que l'on cherche.

Theorême cinquiéme.

Le triangle ABC eſt ambligone : du ſommet je mene la perpendiculaire E ſur le côté C prolongé autant qu'il eſt neceſſaire. Je dis que le quarré de B qui ſoûtient l'angle obtus eſt égal au quarré de C & de A, plus à deux fois le rectangle de C & de la partie D compriſe entre C & la perpendiculaire E.

Il faut donc démontrer que BB = CC + AA + 2 CD. par la prop. 7. l. 2 *Grand.*

Le quarré de C + D eſt CD + 2CD + D D, par la propoſition precedante BB = CC + 2C D + DD + EE, puis qu'il eſt égal au



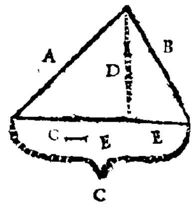
quarré de E & de C + D : par la même propoſition AA = EE + DD: ainſi au lieu de EE + DD mettant AA une valeur égale, nous aurons BB = CC + AA + 2CD ce qu'il faloit démontrer.

Theorême ſixiéme.

Dans un triangle oxigone le quarré de A qui ſoûtient l'angle aigu, eſt égal au quarré des deux autres côtez B & C, moins deux fois le rectangle fait de C & de E partie de C que la perpendiculaire D coupe en deux, ainſi l'autre partie de toute la ligne C ſe peut nommer C − E.

Il faut démontrer que AA = BB + CC − 2CE.

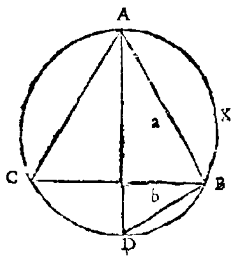
Par le Theor. 4 *ſup.* le quarré de A eſt égal aux quarrez de D & de C − E, celuy de $-$ E eſt C C $-$ 2CE $+$ EEC ainſi AA $=$ DD $+$ CC $-$ 2CE $+$ EE, & par le même Th. BB $=$ DD $+$ EE, plaçant donc BB au lieu de DD $+$ EE dans l'equation precedente, nous aurons A A $=$ BB $+$ C C $-$ 2 CE ; ce qu'il faloit démontrer.



Theorême ſeptiéme.

Dans le triangle equilateral ABC inſcrit dans le cercle X, le quarré de AB eſt triple de celuy du rayon.

Je coupe B C en deux parties égales par la perpendiculaire AD, qui ſera ainſi le diametre du cercle & paſſe par le centre : ainſi BD ſera égal à DC, & comme BC eſt la corde du tiers du cercle, BD ſera la corde de la 6e partie du cercle, & partant égale au rayon, par le Probl. 6, ſ. 3, l. 2.



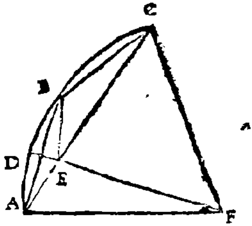
Le quarré de AD diametre, qui eſt double du rayon BD, eſt quadruple du quarré de BD, que je nomme b, ainſi le quarré de AD eſt 4bb. J'appelle aa celuy de AB: par le Th. 4 *ſup.* aa $+$ bb eſt égal au quarré AD, qui eſt 4bb : ainſi aa $+$ bb $=$

4bb : ôtant bb de part & d'autre, il reſtera aa = 3bb : ce qu'il faloit démontrer.

Theorême huitiéme.

Le quarré d'un des côtez d'un pentagone eſt égal aux quarrez d'un des côtez du decagone & de l'exagone inſcrits dans le même cercle.

A C eſt le côté d'un pentagone, par conſequent AB & BC moitiés de l'arc ABC, ſont les côtez du decagone. A F & CF ſont les rayons du cercle, & par conſequent côtez de l'exagone: l'arc A B eſt coupé en D, par la moitié, d'où DF a éte menée au centre.



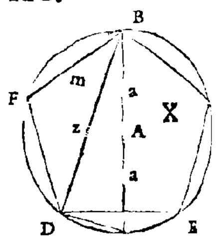
L'angle AFC qui eſt celuy du centre du pentagone eſt de 72 degrez, ainſi les angles ACF, & FAC ſont chacun de 54, l'angle EFC ayant pour ſa meſure BC de 36, & DB de 18, moitié de AB 36 eſt auſſi de 54 degrez, & partant égal à FCA & CAF, ainſi les deux triangles AFC & ECF, outre cet angle en ayant un autre qui leur eſt commun au point C, ils ſont equiangles : donc AC eſt à A F, comme FC, ou ſon égale AF eſt à EC, ainſi ∺ AC, AF, EC : donc le rectangle ſoit de AC & de EC eſt égal au quarré fait de AF.

Puiſque DF eſt perpendiculaire ſur AB, donc AE = EB, donc le triangle AEB eſt Iſoſcele. Il a un angle commun avec l'Iſoſcele ABC : donc par le Corol. 2 du Th. 7 § 2, l. 2, ces deux triangles ſont ſemblables : donc comme AE à AB, ainſi AB à AC, ainſi ∺ AE, AB, AC : donc le rectangle fait de A E & de AC eſt égal au quarré de AB.

Or le quarré de AC eſt égal aux deux rectangles AC,EC & AC,AE : par la pr.2, l. 2, *Gr.* donc le ſeul quarré AC, côté du pentagone eſt égal aux deux quarrez de AB & AF, côtez du decagone & exagone, ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire.

Un pentagone eſt inſcrit dans le cercle X. Je dis que le quarré du côté du pentagone BF, plus le quarré de la corde BD qui ſoûtient l'angle BFD vaut cinq fois le quarré du rayon AC.

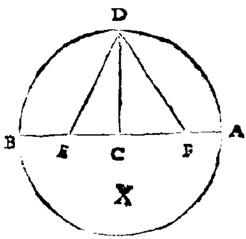


Car menant le diametre BC qui coupe le côté du pentagone DE & l'arc DCE par la moitié, la corde DC eſt le côté du decagone: ſoit maintenant FB = m, BD = z, DC = x, AC = a, BC = 2 a, & parce que B C eſt l'hipothenuſe du triangle rectangle BDC, il s'enſuit que $zz + xx = 4aa$ par le Theor. 4 *ſup.* & ajoûtant de part & d'autre le quarré de AC, qui eſt aa, vient $zz + xx + aa = 5aa$. Or par le precedant Th. le quarré du côté du decagone, plus le quarré du côté de l'exagone sont égaux au quarré du côté du pentagone, c'est à dire $xx + aa = mm$: donc au lieu de $xx + aa$ substituant la grandeur égale mm, on aura $zz + mm = 5aa$, c'est à dire que le quarré de BF, plus celuy de BD est égal à cinq fois le quarré du rayon de X, ce qu'il faloit prouver.

Problême premier:

Un cercle étant donné trouver le côté du pentagone & du decagone d'une autre maniere que celle qui a esté enseignée.

Le cercle donné est X, le diametre AB, le centre C, & CD une perpendiculaire. CE est la moitié de CB, il faut prendre EF = ED : en suite menant de D à F la ligne DF, on aura le côté du pentagone que l'on cherche.

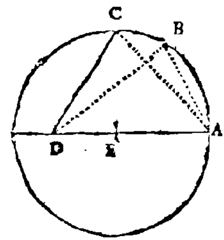


Par la propos. 13 l. 2 *Gr.* le plan de BF par FC plus le quarré de EC est égal au quarré de FE, lequel par la construction est le même que ED : or le quarré de ED est égal à celuy de EC & de DC : donc le plan de BF par FC est égal au quarré de DC ou de BC : partant par le Th. 2, § 3 *sup.* BF, BC : : BC, FC ; donc FB est coupée en moyenne & extrême raison ; & puisque BC ou CD est le côté de l'exagone. FC sera celuy du decagone, par le Th. 13, § 1 *sup.* or le quarré de

FD eſt égal à celuy de FC & de DC ou CB : donc par le Theo. precedant FD eſt le côté du pentagone : ainſi on a fait ce qui eſtoit propoſé.

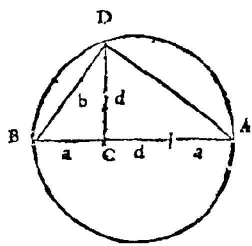
Scholie.

Cette operation s'abrege de cette maniere, on prend AB égale au rayon du cercle, & AC égale à la corde de nonante ou au côté du quarré inſcrit dans le cercle, & BD égale à AC: la ligne CD ſera le côté du pentagone, & EA eſtant le rayon du cercle, DE ſera le côté du decagone. I'en reſerve à un autre lieu la démonſtration.



Theorême neufiéme.

Le diametre AB eſt coupé en C, de ſorte que AC eſt double de BC, la ligne CD eſt perpendiculaire ſur le point C, je dis que le quarré de BD eſt triple du quarré de chacune des trois parties de AB, & celuy de CD double de chacune de ces mêmes parties.



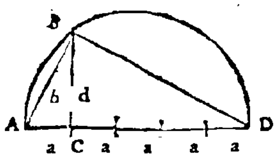
Soit chacune des trois parties de AB = a & DB = b. 1° Par le Th. 7 § 1 *ſup.* a + a + a, c'eſt à dire 3a, b : : b, a ; donc par le Th. 3 *ſup.* bb 3aa. 2° La perpendiculaire DC ou d eſt moyen entre AC & CB ∺ 2a, d, a : : donc 2aa = dd ; ce qu'il faloit démonſtrer.

Theorême

Theorême dixième.

Le diametre AD eſt coupé en C, de ſorte que CD eſt quadruple de A C, la ligne BC eſt perpendiculaire ſur AD. Je dis que le quarré de AB eſt quintuple de celuy de AC, dont celuy de BC eſt quadruple.

Ce Theor. ſe démontre de la même maniere que le precedant: car 1° ſoit AC appellé a & AB, b, par le Th. 7, § 1, *ſup.* ÷ 5a, b, a; donc par le Th. 3, § *ſup.* bb = 5aa. 2° BC eſt moyen entre AC & CD : donc ÷ a, d, 4a, & partant 4aa = dd : ce qu'il faloit démontrer.



Corollaire.

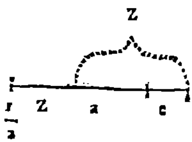
De ce dernier Theorême & du precedant, on peut conclure en general qu'ayant partagé le diametre AD en tant de parties égales, le quarré de AB ſera égal à autant de fois celuy de chacune de ces parties qu'il y a de parties ; car ſi AB eſt diviſé en ſix parties, dont chacune eſt a, puiſque A D = 6a, & que ÷ 6a, AB, a, & que le produit des extrêmes eſt égal à celuy des moyens, le quarré de AB vaudra 6aa, c'eſt à dire, ſix fois le quarré de la ſixiéme partie de AD.

On peut auſſi conclurre en general que le quarré de BC ſera égal a autant de fois le quarré de chacune de ces parties qu'il y a de parties, moins une ; $\div$ 5 a, BC, a donc le quarré de BC ſera égal à 5 aa.

On peut trouver de la même maniere la raiſon du quarré de AD avec le quarré de chacune des parties de AB.

Theoréme onziéme.

Z eſt une ligne coupée en moyenne & extrême raiſon, je dis que le quarré de la plus grande partie a, avec la moitié de z, lequel quarré eſt $aa + \frac{1}{4} ZZ + Za$, eſt cinq fois plus grand que le quarré de la moitié de Z qui eſt $\frac{1}{4} zz$.



Le quadruple de $\frac{1}{4}$ ZZ eſt ZZ ; ainſi le quintuple de $\frac{1}{4}$ ZZ eſt $ZZ + \frac{1}{4} ZZ$: il faut donc démontrer que $ZZ + \frac{1}{4} ZZ = aa + \frac{1}{4} ZZ + Za$: ôtant de part & d'autre $\frac{1}{4}$ ZZ reſte à démontrer que $ZZ = aa + Za$.

$Ze + Za = ZZ$ par la 4ᵉ propoſ. l. 2, Gr. & $Ze = aa$ par le Th. 3, § 3 *ſup.* puiſque par la ſuppoſition $\div$ Z, a, e : donc dans l'equation $ze + Za = zz$, au lieu de Ze ſubſtituant aa une valeur égale, on a cette equation $aa + Za = Zz$; ce qui reſtoit à prouver pour démontrer le preced. Th.

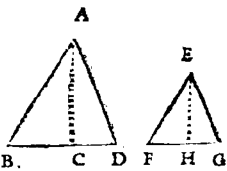
Scholie.

I'obmets pluſieurs Theorêmes ſemblables qui ſeront faciles à ceux qui auront compris les precedans.

Theorême douziéme.

Deux triangles ſemblables ſont en raiſon compoſée de celles de deux de leurs côtez omologues, & cette raiſon eſt doublée.

Soient A B D & EFG deux triangles ſemblables, par le Th. 4, § 4, l. 2, ABD eſt égal à un Parallelogramme fait de AC, & de la moitié de ſa baſe BD, & EFG a un Parallelogramme fait de E H & de la moitié de FG : donc par la Dem. cy-deſſus on peut conſiderer ces deux triãgles ABD cõme faits par la multiplication de AC, par la moitié de BD & E F G, de E H, par la moitié F G : donc par



la propoſ. 4, l. 4, *Gr.* la raiſon de ces deux triangles eſt compoſée de celle de AC à EH, & de la moitié de BD à la moitié de FG : or par le Theor. 3e § 1 *ſup.* AC, EH : : AB, EF : : BD, FG : donc on peut dire que la raiſon de ABD à E F G eſt compoſée des raiſons de AB à EF, & de BD à FG : or ces deux raiſons ſont égales; donc par la def. de la raiſon doublée, la raiſon qu'elles compoſent eſt doublée.

Theoréme treiziéme.

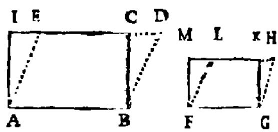
Deux triangles qui ont leur baſe ou leur hauteur égale, ſont entr'eux comme l'inégale.

Car la ſurface de deux triangles dépend de leur hauteur & de leur baſe, par conſequent cette propoſition eſt la même que la 6ᵉ du l. 4 *Gr.*

Theoréme quatorziéme.

Les Parallelogrammes ſemblables ſont en raiſon compoſée de celle de leurs côtez, & cette raiſon eſt doublée.

Par la Deman. cy-deſſus les Parallelogrãmes rectangles ABCI & FKGM ſont faits par la multiplication de leurs côtez l'un de AB, par BC, l'autre de FG par GK, donc par la prop. 4, L. 4 *Grand.* la raiſon de ABC à FGK eſt compoſée de celles de AB à FG, & de BC à GK. or ABCI= ABDE & FGKM= FGHL par le Th. 2, § 4, liv. 2.; ainſi la



raiſon de ABDE avec FGHL eſt compoſée de celle de AB avec FG, & de celle de BC avec GK : or la raiſon de BD à GH eſt la même que celle BC à GK ; donc puiſque les raiſons compoſées de raiſons égales, ſont égales, on peut dire que la raiſon de ABDE avec FGHL eſt cõpoſée de celles de leurs côtez, ſçavoir de AB avec FG, & de BD avec GH ; & puiſque ces deux raiſons ſont égales, celle qu'elles compoſent eſt doublée, par la definition des raiſons doublées.

Theoréme quinziéme.

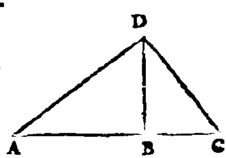
Les Parallelogrammes rectangles qui ont un de leurs côtez égaux, sont entre eux comme les côtez inégaux.

Puisque par la Deman. *sup.* ces Parallelogrammes peuvent être conçûs comme faits par la multiplication de leurs côtez : par la 4e proposition du 4 livre *Gr.* ils sont en raison composée des raisons de leurs côtez, & ayant un de leurs côtez égal, ils sont entr'eux comme les inégaux, par la 6 du même Livre 4, *G.* c'est ce qu'il faloit prouver.

Theoréme seiziéme.

Dans le triangle rectangle ADC, la ligne BD est perpendiculaire sur l'hipothenuse AC, : je dis que les quarrez sur ses trois côtez sont entr'eux comme AC. AB. BC.

Par le Th. 7, § 1, ∺ AC, AD, AB: donc le rectangle de AC par AB est égal au quarré sur AD, par le Th. 3, § 3, & par la même raison, puisque ∺ A C, D C, B C, le quarré sur D C est égal au rectangle fait de AC par B C, mais le rectangle de A C par



A C est égal au quarré fait sur AC, ces trois quarrez seront dôc entr'eux cõme ces trois rectangles, ausquels ils sont égaux. Or ces trois rectangles ont tous pour un de leurs côtez la ligne AC, ils seront donc entr'eux comme leurs autres côtez qui sont AC, AB, BC, par le Th. 15, ainsi le quarré sur AD & à celuy sur CD comme AB est à BC, & à celuy sur AC comme AB est à AC; ce qu'il faloit prouver.

Theoréme dix septiéme.

Les Polygones reguliers & semblables sont en raison doublée de celle des diametres des cercles où ils sont inscris.

Soient X & Z deux Polygones semblables, A est le rayon de X, & B son circuit. X est égal à un triangle rectangle, dont A est la hauteur & B la base, & Z à un rectangle dont C la hauteur & D la base par le Th. 7, § 4. l. 2: ces deux triangles sont semblables, car par le Th. 3, § 2 *sup.* les circonferences des Polygones semblables sont comme les rayons des cercles où ils sont inscrits, partant A, B, : :, C, D, donc par le Th. 12 *sup.* ces deux triangles sont en raison doublée, sçavoir de celle de A à C ou de B à D, par consequent X & Z sont en raison doublée de celle A à C, c'est à dire, de la raison de leurs rayons, qui estant la même que celle de leurs diametres, X & Z sont en raison doublée de celle qu'ont leurs diametres; ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire.

Donc puisque les cercles peuvent être pris pour des Polygones, ils sont aussi entr'eux en raison doublée de celle de leurs diametres.

Theoréme dix-huitiéme.

Les Polygones reguliers & semblables sont entr'eux comme les quarrez des diametres des cercles où ils sont inscrits.

La raison de X à Z est doublée de celle des diametres des cercles où ils sont inscrits, par le Theor. precedant : or les quarrez, dont ces diametres sont les côtez ou les racines, sont aussi en raison doublée de la raison de ces diametres par le Cor. de la 7 Proposition l. 4 *Gr.* donc X est à Z, comme les quarrez des diametres des cercles où ils sont inscrits; ce qu'il faloit prouver.

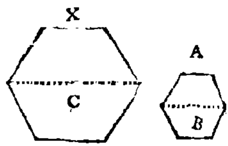
Corollaire.

Donc puisque les cercles peuvent être pris pour des Polygones, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrez de leurs diametres.

Problême troisiéme.

A une figure donnée, en trouver une autre semblable, en raison donnée.

Soit A une figure dont le diametre est B, on cherche X une figure qui luy soit semblable, & dont la surface soit quintuple de A : ces figures sont par le Th. precedant comme les quarrez de leurs diametres : il ne s'agit donc que de trouver un diametre dont le quarré soit quintuple du quarré de B; Pour cela il faut trou-



ver par le Probl. 4 § 1, *sup.* une ligne moyenne proportionnelle entre le diametre B & une ligne cinq fois plus grande que je nomme D: supposant la chose faite, & que cette ligne moyenne que l'on cherche soit C; de sorte que ∺ B, C, D. par la 11^e l. 4 *Grand.* le quarré de B est à celuy de C, comme B est à D : or D est quintuple de B : donc le quarré de C est quintuple de celuy de B, ainsi on a trouvé ce que l'on cherchoit.

SECTION IV.

De la commensurabilité, ou incommensurabilité des lignes & des surfaces.

AVERTISSEMENT.

Cette Section suppose qu'on a vû le 6 livre de la Grandeur. Si on ne l'a pas lû, on peut passer cette Section, & tout ce qui se dira dans le Livre suivant de l'incommensurabilité.

Definitions.

Premiere definition.

LES grandeurs ſont dites commenſurables lors qu'elles peuvent être meſurées par une troiſiéme, qui eſt ainſi leur commune meſure.

Scholie.

La commune meſure d'une toiſe & d'un pied, c'eſt le poulce qui ſe trouve exactement 12 fois dans un pied, & 72 fois dans une toiſe.

Seconde definition.

Les grandeurs incommenſurables ſont celles qui ne peuvent être meſurées par une commune meſure.

Scholie.

C'eſt à dire qu'on ne peut trouver aucune meſure qui ſoit contenuë exactement tant de fois dans l'une & tant de fois dans l'autre.

Troiſième definition.

L'on appelle rationnelle une grandeur connuë & determinée, dont la valeur ſe peut exprimer par nombre.

Scholie.

Grandeur rationnelle eſt celle à laquelle on rapporte toutes les autres & ſur laquelle on raiſonne, ainſi on la ſuppoſe connuë.

Demande ou Axiome.

Deux nombres ſont toujours commenſurables entr'eux, car ils ont au moins l'unité, pour leur commune meſure, qui ſe trouve preciſement tant de fois dans chacune.

Seconde Demande ou Axiome.

Lors que d'un nombre on en retranche un autre, le reste est un nombre.

Troisiéme Demande ou Axiome.

Les lignes & les surfaces qui sont comme nombre à nombre, sont commensurables, & celles qui sont incommensurables ne sont pas comme nombre à nombre.

Theorême premier.

Deux grandeurs commensurables à une troisiéme sont commensurables entr'elles.

B est commensurable avec C, & D avec C, ainsi par la troisiéme demande *sup.* B est à C comme nombre à nombre, & C avec D comme nombre à nombre: on peut donc exprimer le rapport de ces trois grandeurs par des nombres ; ainsi elles sont commensurables,

Theorême second.

La ligne sur laquelle est fait un quarré qui n'est pas égal à un nombre quarré n'est pas rationnelle ; & si son quarré est égal à un nombre quarré, elle est rationnelle.

Soit X cette ligne dont XX est le quarré, je dis que X ne peut être rationnelle, c'est à dire, égale a un nombre; car X racine de XX sera égale à la grandeur, qui eſt la racine du nombre auquel XX eſt égal : or par la prop. 14 l. 6 *Grandeur*, un nombre non quarré ne peut avoir pour racine un nombre : ainſi X égale à cette raiſon ne peut être égale à un nombre, & par conſequent elle n'eſt pas rationnelle.

Que ſi XX eſt égal à un nombre quarré bb ſa racine X ſera égale à b, & b eſt un nombre, donc X ſe peut exprimer par un nombre.

Theorême troiſiéme.

Si les quarrez de deux lignes ne ſont pas entr'eux comme deux nombres quarrez, ces deux lignes ne ſont pas commenſurables.

Soient Z & X ; ſi ZZ n'eſt pas à XX comme deux nombres quarrez, je dis que Z & X ne ſont pas commenſurables, car ſi Z eſtoit à X comme deux nombres : les quarrez de Z & de X ſeroient entr'eux, comme les quarrez de ces deux nombres : par exemple, ſi on dit que Z eſt à X comme 2 à 3 : donc ZZ, XX :: 4, 9 ; ainſi leurs quarrez ſont entr'eux comme nombres quarrés : ce qui eſt contre l'hipotheſe.

Theorême quatriéme.

Un quarré rationnel, ou qui ſe peut exprimer par nombre ne peut être égal à deux quarrez, dont l'un eſt rationnel & l'autre ne l'eſt pas.

Soit aa = 30, je dis qu' aa ne peut être égal à deux autre quarrez dont l'un ſoit rationnel, & l'autre ne le ſoit pas ; car ayant ôté de a a l'un qui eſt rationnel, par exemple, ayant ôté 25 de 30, par l'Axiome 2 *ſup.* le reſte eſt un nombre, qui par conſequent eſt une grandeur rationnelle, ce qui eſt contre l'hipotheſe. Ainſi un quarré rationnel, &c.

Theorême cinquiéme.

Une ligne commenſurable eſtant diviſée en deux parties, ſi l'une eſt commenſurable, l'autre le ſera auſſi.

Car ayant ôté la partie commenſurable, puiſque le tout luy eſt commenſurable, & que par conſequent il s'exprime par nombre, le reſte ſera un nombre, par le 2 Axiome *ſup.* ainſi ce reſte ou cette partie eſt commenſurable par le troiſiéme Axiome.

Theorême ſixiéme.

Si à une ligne commenſurable on ajoûte une grandeur commenſurable, le tout ſera commenſurable.

Cela eſt clair, car ces deux grandeurs par le 3 Axiome ſont comme deux nombres : or un nombre ajoûté à un nombre fait un nombre, ainſi une grandeur commenſurable ajoûtée à une commenſurable, fait un tout commenſurable.

Theoréme ſeptiéme.

Si d'une ligne commenſurable on retranche une grandeur incommenſurable, le reſte eſt incommenſurable.

Pour retrancher une partie il faut couper le tout : or par le Th. 5 *ſup.* une grandeur commenſurable eſtant diviſée en deux parties, ſi l'une eſt commenſurable, l'autre l'eſt auſſi: ainſi ſi de ces deux parties l'une eſt incommenſurable, l'autre l'eſt auſſi ; puiſque ſi celle-cy eſtoit commenſurable par le Th. 5, la premiere ſeroit auſſi commenſurable.

Scholie.

Ie travaille à eſtre court & à ne rien dire que d'utile. C'eſt pourquoy je ne propoſeray point pluſieurs choſes qui ſe trouvent dans le 10 l. d'Euclide, que je pourrois démontrer plus clairement que ſes Interpretes ordinaires, de la maniere que nous avons fait les propoſitions precedantes, dont les demonſtrations ſont une clef pour trouver la demonſtration de pluſieurs autres propoſitions.

Lors que l'on joint enſemble les grandeurs qui ne ſont pas commenſurables, & à qui par conſequent on ne peut pas donner le même nom, ou que l'on eſt obligé d'exprimer par deux noms differens, cela s'appelle, comme nous avons dit l. 6 Gr. un Binome.

Ce que nous venons de démontrer des grandeurs qu'on compoſe ou qu'on ajoûte enſemble, s'applique aiſément à la diviſion ou ſeparation qu'on fait de deux grandeurs, lors que d'une grandeur l'on en retranche une autre qui luy eſt incommenſurable, & qu'ainſi l'on ne les peut exprimer avec un ſeul ſigne: c'eſt bien un Binome, mais pour diſtinction on appelle cela Apotome, reſidu, ou grandeurs diminuées.

Nous avons traitté cette matiere avec autant d'exactitude qu'il estoit necessaire de le faire dans le 6 l. Grandeur.

Theorême huitiéme.

Quatre grandeurs estant proportionnelles, si la premiere est commensurable à la seconde; la troisiéme le sera à la quatriéme. Si la premiere est incommensurable avec la seconde, la troisiéme sera incommensurable avec la quatriéme.

Si la raison de la premiere à la seconde se peut exprimer par nombres; celle de la seconde, à la troisiéme, qui est la même, s'exprimera par nombres; ainsi selon le troisiéme Axiome *sup.* ces grandeurs seront commensurables.

Si la raison de la premiere à la seconde est sourde, celle de la troisiéme à la quatriéme, qui est la même, sera aussi sourde; ainsi par le même Axiome elles sont incommensurables.

Scholie.

Cette demonstration donne jour pour démontrer plusieurs autres propositions semblables, mais peu utiles.

Theoréme neufiéme.

Les quarrez décrits sur des lignes commensurables entr'elles, sont commensurables entr'eux.

Les quarrez sont en raison doublée de leurs côtez ou de la ligne sur laquelle ils ſont décrits par le Th. 14, § 3 *ſup* ſelon l'hipotheſe ces lignes ſont comme nombre à nombre étant commenſurables. Or par la 8 Prop. l. *Grand* la raiſon doublée d'une raiſon de nombre à nombre eſt auſſi une raiſon de nombre à nombre, par conſequent les quarrez eſtant comme nombre à nombre, ils ſont commenſurables,

Theorême dixiéme.

Si quatre lignes proportionnelles ſont commenſurables, le rectangle fait des antecedans, eſt commenſurable à celuy qui eſt fait des conſequans.

Cette propoſition eſt la même que la ſeconde du l 6 *Grandeur.*

Theorême onziéme.

Si trois lignes ſont proportionnelles, & que la premiere ſoit à la troiſiéme comme un nombre quarré, ces trois lignes ſeront commenſurables.

Voyez le premier cas de la Propoſition 10, l. Gr. où cela eſt demontré.

Corollaire.

Donc en ce cas le rectangle des extrêmes ſera commenſurable avec le quarré de la moyenne.

Car par l'hipotheſe B C :: C D, & ces quarre lignes ſont commenſurables, comme on le vient de prouver, donc par le Th. precedant BD ſera commenſurable avec CC.

Theorême douziéme.

Si trois lignes B, C, D, ſont proportionnelles, & que la premiere ſoit à la troiſiéme, comme deux nombres qui ne ſont pas quarrez, la moyenne ſera incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec la premiere & la troiſiéme.

Voyez le ſecond cas de la Prop. 10 l. 6 Gr. où cela eſt démontré.

Theorême treiſiéme.

Trois grandeurs B, C, D eſtant proportionnelles, ſi la premiere n'eſt pas à la troiſiéme comme nombre à nombre, la moyenne eſt incommenſurable avec elles, tant en elle-même qu'en puiſſance, c'eſt à dire, que CC eſt incommenſurable avec BB, & avec D D, & C avec B & avec D.

Voyez le 3 cas de la Prop. 10 l. 6 Gr. où cela eſt démontré.

Probléme premier.

Une grandeur connuë & determinée, eſtant propoſée, trouver des grandeurs qui luy ſoient commenſurables.

Pour trouver des lignes & ſurfaces commenſurables, il ne faut qu'en prendre qui ſoient égales à des nõbres qu'on peut trouver tant qu'on voudra.

Probléme ſecond.

Trouver une ligne qui ſoit incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance avec une ligne connuë.

Je

Je cherche premierement une ligne dont la valeur soit à la connuë comme deux nombres qui ne sont pas quarrez. Entre ces deux lignes je cherche une moyenne proportionnelle, laquelle par le Th. 12 *sup.* sera incommensurable en elle-même avec ces deux premieres lignes, & commensurable en puissance.

Problême Troisiéme.

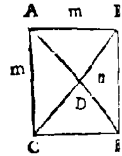
Trouver une ligne qui soit incommensurable tant en elle-même qu'en puissance avec une ligne connuë & donnée.

Soit la ligne donnée & connuë B, je luy cherche par le Probl. precedant la ligne D qui luy soit incommensurable en elle-même. Aprês entre B & D ayant trouvé la ligne C moyenne proportionnelle, cette ligne par le Th. 13 *sup* sera incommensurable tant en elle-même, qu'en puissance avec B, ce qu'il faloit faire.

Theoréme quatorziéme.

La diagonale d'un quarré est incommensurable en elle-même & commensurable en puissance avec chacun des côtez.

Les diagonales AE & BC dans le quarré A B C E se coupent par la moitié, ainsi BD est la moitié de B C, par conſequent BC, BD :: 2, 1 : or AB eſt moyen proportionnel entre BC & BD par le Théorême 7, § 1 *ſup.* donc par le Th. 12 *ſup.* puiſque 2 & 1 ne ſont pas deux nombres quarrez, AB côté du quarré ABCE ſera incommenſurable avec la diagonale BC en elle-même, & commenſurable en puiſſance, ce qui eſt evident, car ſuppoſant BC égal à n, par le Th. 4, § 3 *ſup.* nn = mm + mm, partant nn, mm :: 2, 1.

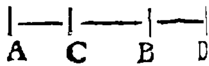


Theorême quinziéme.

Les deux parties d'une ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raiſon, ne ſont pas rationnelles.

Soit AB ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raiſon au point C : je dis que les parties AC & CB ne ſont pas lignes rationnelles, ou ce qui eſt la même choſe, elles ne peuvent être exprimées par nombre.

J'ajoûte à AB la ligne BD moitié de AB, par le Th. 11, § 3 *ſup.* le quarré de la mediane CB jointe avec BD eſt cinq fois plus grand que le quarré de BD : ainſi ces deux quarrez ſont comme 5 à 1 : or 5 n'eſt pas un nombre quarré ; donc par le Th. 2 *ſup.* la ligne CB+



BD n'eſt pas rationnelle, mais BD moitié de AB ligne rationnelle eſt rationnelle; il faut donc que ce ſoit la mediane CB qui ne ſoit pas rationnelle: & partant par le Th. 7 la petite partie AC ſera incommenſurable, car ſi elle eſtoit commenſurable, CB le ſeroit auſſi, par le Th. 5.

Corollaire.

La mediane eſt incommenſurable avec la toute, tant en elle-même qu'en puiſſance.

Soit b une ligne coupée en moyenne & extrême raiſon, x eſt la mediane, & b − x la petite partie ÷ b, x. b − x Or puiſque b − x eſt une ligne non rationnelle, par le Theoréme preſent: donc par le Th. 13 *ſup.* x moyenne entre b & b − x eſt incommutable avec b. tant en elle-même qu'en puiſſance.

Theoréme ſeiziéme.

Quand le rayon d'un cercle eſt rationnel, le côté du decagone inſcrit dans ce cercle eſt incommenſurable, tant en luy-même qu'en puiſſance avec ce rayon.

Soit B ligne rationnelle rayon d'un cercle; coupée en moyenne & extrême raiſon: x que je ſuppoſe être la mediane, ſera par le Problême 7, § 1 *ſup.* le côté du decagone. Or par le Corollaire du Th. precedant x mediane eſt incommenſurable tant en elle-même qu'en puiſſance avec B.

Theoréme dix-ſeptiéme.

Lors que le rayon d'un cercle eſt rationel, les côtez du pentagone inſcrit dans ce cercle ſont incommenſurables tant en eux-mêmes qu'en puiſſance avec ce rayon.

Soit b ligne rationelle rayō d'un cercle, z le côté d'un pētagone, & x le côté d'un decagone inſcrits dans le cercle dōt b eſt le rayon. Par le Th. 8 § 3, *ſup.* bb + xx = zz: donc par le Th. 4 *ſup.* puiſque le quarré xx n'eſt pas rationnel, comme nous venons de le démontrer dans le dernier Theorême, le quarré zz ne peut être rationnel, & par conſequent ſa racine z n'eſt pas rationnelle, puiſque tout quarré qui n'eſt pas égal à un nombre quarré ne peut avoir pour racine une grandeur préciſement égale à un nombre, comme nous l'avons prouvé cy-deſſus Theor. 2^e

ELEMENS DE GEOMETRIE, OV DE LA MESVRE DV CORPS.

LIVRE QVATRIE'ME.
De la troisiéme dimension du corps, OV Des Solides.

AVERTISSEMENT.

LES plans en se coupant, ou en se rencontrant forment les solides, ce qui nous oblige de parler icy de leurs Sections & rencontres : outre que les Theorémes suivans servent à démontrer plusieurs propositions *considerables dans les Mathematiques. L'on ne cite pas dans ce Livre rigoureusement toutes les propositions qui pouvoient servir à la demonstration d'un Theorême, lors qu'il est facile de les suppléer, à quoy il est bon d'accoûtumer l'esprit.*

SECTION PREMIERE.

Des Sections & rencontres des Plans.

Definitions.

Premiere definition.

PLan, ou surface droite, est celle qui est faite par le mouvement droit & uniforme d'une ligne droite le long d'une ligne droite.

Scholie.

C'est à dire, que l'espace que parcourt cette ligne droite, qui est meüe le long d'une autre ligne droite qu'on conçoit immobile, & avec laquelle elle garde toujours la même disposition, est un plan : ainsi il est evident qu'un plan est composé de lignes droites, ce qui fait qu'on le definit de la maniere suivante.

Seconde definition.

Plan est une surface, à laquelle une ligne droite peut être appliquée en tout sens, & convenir avec elle.

Scholie

Puis qu'un plan est composé de lignes droites, qui sont les plus courtes qu'on puisse concevoir entre leurs extremitez, la definition suivante est encore vraye.

Troisiéme definition

La surface d'un plan est la plus courte

qu'on puisse concevoir entre les bornes de ce plan.

Scholie.

Ie ne dis pas que toute surface qui est la plus courte entre ses bornes soit un plan ; car entre deux lignes qui sont à quelque distance l'une de l'autre, & qui ne sont pas posées de la même maniere, ou ne sont pas dans un même plan, si on mene des lignes droites ; on fera une surface la plus courte qui puisse être entre ces deux lignes, mais elle ne sera pas un plan, ainsi quoy qu'il soit vray que tout plan est une surface la plus courte qu'on conçoive entre ses bornes; neanmoins toute surface la plus courte entre ses bornes n'est pas un plan. Euclide definit le plan une surface qui est également comprise entre ses lignes, ce qui n'est pas clair.

Quatriéme definition.

Un plan est dit perpendiculaire sur un autre plan, lors qu'il ne panche pas plus d'un côté que de l'autre.

Cinquiéme definition.

Deux plans sont paralelles lors que dans toutes leurs parties ils sont à une égale distance l'un de l'autre, & qu'étant prolongés ils ne se rencontrẽt point.

Demandes ou propositions evidentes.

Premiere Demande.

On peut prolonger un plan, ou le concevoir prolongé de tous côtez, autant qu'il sera necessaire.

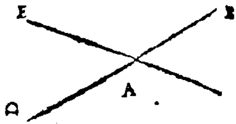
Seconde Demande.

Vne ligne droite ne peut être en partie sur un plan, & en partie en l'air.

Scolie.

Car pour lors cette ligne ne pourroit être appliquée avec ce plan, & convenir avec luy ; ainsi selon la seconde definition ce plan ne seroit pas plan.

Troisiéme demande.



Deux lignes droites qui se coupent peuvent être conceües dans un même plan.

Scholie.

Les lignes DB & EC se coupent, ayant mené entre AB & AC des lignes droites par la seconde & la troisiéme definition, on aura une surface qui est un plan: car on y peut appliquer une ligne droite, & c'est la surface la plus courte qu'on puisse concevoir entre les lignes AB & AC qui seront sur ce plan, lequel étant prolongé si AD & AE, qui sont parties des lignes BD & EC ne se trouvent pas dans ce même plan, BD & CE seront en partie sur luy, & en partie en l'air contre la seconde demande.

Quatriéme demande.

Tout triangle peut être conceu dans un plan.

Scholie.

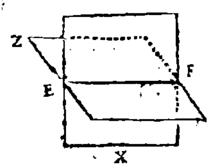
Cela se peut demontrer comme la demande precedante.

Cinquiéme demande.

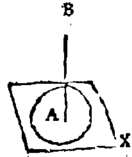
La commune section ou rencontre de deux plans, est une ligne droite.

Scholie.

X & Z se coupent. Les extremitez de leur section sont les points E & F, entre lesquels on a mené une ligne sur Z & une sur X. Si ces deux lignes n'étoient pas une même ligne; on pourroit mener entre deux mêmes points plus d'une ligne droite, ce qui n'est pas. La section de ces deux plans ne peut donc être qu'une ligne droite.



Sixiéme demande.

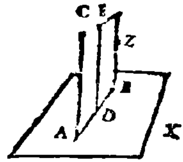


Une ligne droite telle que AB élevée sur le plan X doit être censée perpendiculaire, lors que de A son pied, comme centre ayant fait un cercle, B son sommet est également éloigné de la circonference de ce cercle ; & si cela n'est pas, elle ne peut être dite perpendiculaire.

Scholie.

Cela est conforme à la notion de la ligne perpendiculaire, qui ne panche pas plus d'un côté que d'autre.

Septiéme demande.



Concevant que AC une ligne perpendiculaire sur le plan X, est meüe d'un mouvement droit & uniforme selon une ligne droite, telle que AB, elle fera le plan Z, qui sera perpendiculaire en toutes ses parties sur le plan X.

Huitieme demande.

Si la ligne ED perpendiculaire sur AB section de Z & de X est perpendiculaire sur X, tout le plan Z est perpendiculaire sur X.

Scholie.

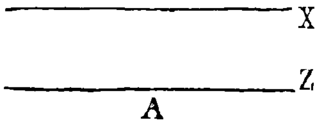
Car on peut concevoir que le plan Z est fait par le mouvement droit & uniforme de DE sur AB, ainsi par la demande precedante, le plan Z est perpendiculaire sur le plan X.

Theorême premier.

Entre deux lignes Z & X qui sont dans un même plan, ou entre la ligne X & le point A, on ne peut concevoir qu'un même plan.

Car si on veut concevoir deux plans,

l'un ſera plus grand ou plus petit, ce qui ne peut être, puiſque par la 3^e definit. toute ſurface qui n'eſt pas la plus petite entre ſes bornes n'eſt pas un plan : ils ſeront donc égaux, ce qui étant, ils ne ſont pas differens ; car ſi on veut dire qu'ils ſont poſez l'un ſur l'autre, comme ils n'ont point d'épaiſſeur, ils ne peuvent faire qu'un ſeul plan.



Theorème ſecond.

Deux plans qui conviennent en trois points qui ne ſont pas ſur la même ligne, conviennent entierement.

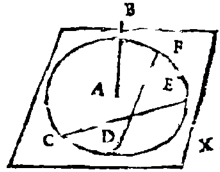
Entre ces trois points on ne peut concevoir deux differens plans, par le Th. precedant, ainſi la partie de ces deux plans entre ces trois points eſt une même choſe ; par conſequent ſi on prolonge cette partie, ce ne ſera qu'un même plan, ainſi ces deux plans ne ſeront pas differens.

Corollaire.

La poſition d'un plan ne dépend ainſi que de trois points, qui ne ſoient pas ſur une même ligne.

Ou, *Ce qui eſt la même choſe*, Trois points qui ne ſont pas ſur une même ligne étant donnez, le point eſt donné.

Theoreme troisième.



Si B sommet de la ligne A B élevée sur le plan X est également éloigné de C, D, E, trois points également distans de son pied A, cette ligne est perpendiculaire sur X.

1° Concevons dans le plan X un cercle également distant de B, qui passe par C, D, E, qu'on a supposé en égale distance de B. 2° Concevons un second cercle dont A soit le centre, qui passe par les trois points C, D, E, aussi également éloignez de A par l'hipotese. Ces deux cercles par le 1er Cor. Prob. 1er liv. 1er § 5e ne sont qu'un méme cercle. Donc par la dem. 6e *sup*. AB est perpendiculaire sur X.

Probléme premier.

D'un point donné en l'air comme est B. abaisser une perpendiculaire sur le plan X. je tire à discretion deux lignes droites C E & D F, & appliquant une pointe du compas sur B, avec l'autre je prend les points C, B, E, F, également distans, par lesquels je fais passer un cercle, au centre duquel je mene de B. une ligne qui sera perpendiculaire par le Th. preced.

Theorème quatrième.

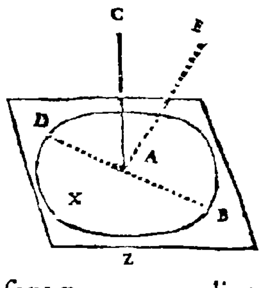
Si une ligne est perpendiculaire sur le point de la section de deux lignes qui ſont ſur un plan,elle l'eſt ſur tout ce plan.

Car ayant pris dans ces deux lignes de part & d'autre du point de ſection des points également éloignez, le ſommet de la perpendiculaire ſur ces lignes ſera également éloigné de quatre points qui ſont ſur ce plan, partant par le Th. precedant cette ligne ſera perpendiculaire ſur tout le plan.

Theoréme cinquiéme.

La ligne droite AB & toute autre dans le plan Z menée par A pied de la perpendiculaire AC ſur ce plan, eſt perpendiculaire ſur AC, *ou* AC eſt perpendiculaire ſur toutes les lignes droites du plan Z qui paſſent par A.

De A pied de la perpendiculaire AC je décris X un cercle & je prolonge la ligne BA, de ſorte qu'elle coupe X en D & B, ſi C ſommet de la perpendiculaire AC n'eſt pas également diſtant de D & de B, alors AC ne ſera pas perpēdiculaire ſur AB, mais auſſi ſelon la



6ᵉ demande A C ne ſera pas perpendiculaire ſur le plan Z; ce qui eſt contre l'hipotheſe. AB rencontre donc perpendiculairement AC, ainſi de toute autre ligne du plan Z qui paſſe par A,

Theorême ſixiéme.

On ne peut d'un point ſur un plan élever qu'une perpendiculaire

Voyez la figure precedante.

Que cela ne ſoit, concevons que ſur le même point A on éleve les deux lignes AE & AC qu'on ſuppoſe perpendiculaires, & que de A comme centre on décrive X un cercle, les points E & C ſommets des deux lignes égales AE & AC eſtans differens ne peuvent eſtre également éloignez de la circonference du cercle X ; partant par la 6ᵉ dem. *ſup.* elles ne ſont pas toutes deux perpendiculaires ſur le plan Z.

Theorême ſeptiéme.

D'un point hors d'un plan on ne peut mener qu'une perpendiculaire ſur ce plan.

Soit A le point donné au deſſus d'un plan d'où on ſuppoſe qu'on a mené deux perpendiculaires, ſçavoir AB & AC : je joints leurs pieds B & C par la ligne BC, laquelle par le Th. 5ᵉ *ſup.* eſt perpendiculaire ſur BA : on peut par la demande 4 *ſup* concevoir le triangle ABC dans un même plan ; puiſque donc AB eſt perpendiculaire ſur BC, par le Th. 3 liv. 1 ſ 4, AC ne peut

être perpendiculaire ſur BC, & par conſequent elle ne l'eſt pas ſur le plan propoſé. On ne peut donc mener d'un même point A qu'une perpendiculaire ſur un plan.

Theoréme huitiéme.

La ligne perpendiculaire eſt la plus courte qu'on puiſſe mener d'un point hors d'un plan ſur ce plan.

Voyez la figure cy-deſſus.

Le point donné eſt A, la ligne AB eſt perpendiculaire, AC ne l'eſt pas: je joins C & B par une ligne droite, le triangle ABC peut être conceu dans un plan par la demande 4. Or par le Th. 4 § 4, liv. 1. AB eſt la ligne la plus courte.

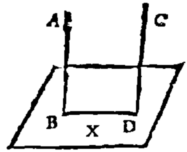
Corollaire.

Donc la meſure de la diſtance d'un point hors d'un plan, à ce plan doit être une perpendiculaire, puiſque cette perpendiculaire eſt la ligne la plus courte, & qu'on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire.

Theoréme neufiéme.

Deux lignes étans perpendiculaires ſur un même plan, on les peut concevoir dans un même plan.

Concevons qu'on a mené par le pied des deux lignes AB & CD perpendiculaires ſur X, une troiſiéme ligne BD, ſur laquelle concevons que AB ou CD se meuve uniformement & toujours perpendiculairemēt, par la 1re defin. elles feront un plan, ce qu'il faloit démontrer.



Theoréme dixiéme.

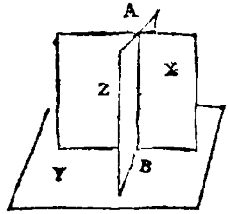
AB & CD perpendiculaires sur le plan X sont paralelles, & si de deux paralelles l'une est perpendiculaire sur le plan X, l'autre le sera.

1° Soit mené la ligne BD par le pied de AB & de CD, lesquelles lignes, par le Theor. 5 *sup.* sont perpendiculaires sur BD, donc par le Th. precedant ces trois lignes AB, CD, BD peuvent être dans un même plan, & AB, CD étant perpendiculaires sur BD, elles seront paralelles, par le Lem. 2 § 4. l. 1.
2° Si AB & CD sont paralelles, & que AB soit perpendiculaire, je dis que CD le sera aussi ; car ayant mené BD, par le Th. 5 AB sera perpendiculaire sur BD : donc par le Lem. 3, § 4. l. 1er CD paralelle à AB est aussi perpendiculaire sur BD, ce qu'il faloit prouver.

Theorême onziéme.

La section AB de deux plans Z & X, qui sont perpendiculaires sur Y, est une perpendiculaire sur le même plan Y.

1° Par la demande 5ᵉ cette ſection eſt une ligne droite.



2° puiſque les plans Z & X ſont perpendiculaires ſur Y, la ligne AB en tant qu'elle eſt conſiderée en Z ne peut être conceüe pãchante de part & d'autre de Z : Et par la même raiſon en tant qu'elle eſt conſiderée en X, on ne peut pas concevoir qu'elle panche de côté ou d'autre de ce plan X ; partant on peut concevoir pour le moins trois points dans le plan Y egalement éloignez de B, qui feront auſſi également éloignez de A, ainſi ſelon le Th. 3 *ſup.* AB eſt perpendiculaire ſur le plan Y.

Theoréme douzième.

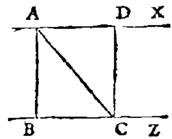
Si trois points dans un même plan, & non ſur une même ligne, ſont également diſtans d'un ſecond plan, ces deux plans ſont paralelles.

Car par le Cor. du Th. 2 *ſup.* la poſition d'un plan ne dépend que de trois points ; ainſi ſi trois points d'un plan ſont également diſtans d'un ſecond plan, ces deux plans ſont paralelles. Je ſuppoſe qu'on a meſuré la diſtance d'un point à un plan, par une perpendiculaire, comme on a dit dans le Corollaire du Theorême 8ᵉ rême 8e ; qu'il le faloit faire.

Theoréme treziéme.

Les plans X & Z étant paralelles, si la ligne AB est perpendiculaire sur X, elle le sera aussi sur Z.

Si on pretend que AB perpendiculaire sur X ne l'est pas sur Z, soit conçû de A sur Z, la ligne AC perpendiculaire qui sera plus courte que AB, *par le Th.* 4, *l.* 1. §. 4. De C je conçois une perpendiculaire sur X, qui sera encor plus courte que A C, partant plus que AB; ainsi



le point D s'approchera plus de Z que A, ainsi X & Z n'étant pas en égale distance, ils ne sont pas paralelles, ce qui est contre l'hipothese ; une ligne donc qui est perpendiculaire sur l'un de ces plans, l'est aussi sur l'autre.

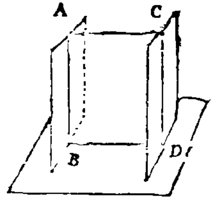
Theorême quatorziéme.

Les sections AB & CD de deux plans paralelles coupez par un 3e plan, sont des lignes paralelles.

Ces sections A B & C D sont des lignes droites, *par la* 5 *dem. sup.* lesquelles sont dans le 3e plan, où étant prolongées, elles se rencontreront si elles ne sont

M

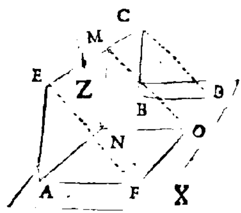
pas paralelles, par consequent les deux autres plans où elles sont étant prolongez, se rencontreront aussi, ainsi ils ne seront pas paralelles, contre la supposition. On ne peut pas donc dire que A B & C D ne sont pas paralelles.



Theorême quinziéme.

La ligne CE dans le plan Z étant paralelle avec AB section de Z & de X, est aussi paralelle avec toute autre ligne mené sur le plan X paralellement à AB.

Dans Z je mene C B perpendiculaire sur AB & & dans X au même point B, la perpendiculaire BD, on peut concevoir CB & B D dans un même plan, sur lequel AB est perpendiculaire, *par le Th.* 4 *sup.* EC & D F étant paralelle à AB, elles seront aussi perpendiculaires sur ce même plan, *par le Th.* 10 *sup.* & consequemment toutes paralelles, ce qu'il faloit démontrer.



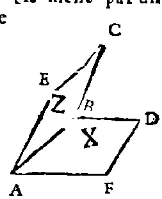
Theoréme seiziéme.

Toutes lignes paralelles dans le plan X rencontrant d'autres lignes aussi paralelles dans le plan Z font entr'elles des angles égaux.

BD & NO sont paralelles entr'elles sur le plan X & BC, & NM sur le plan Z; il faut prouver que l'angle CBD est égal à MNO, pour cela je mene DF & CE paralelles à AB. Puisque les paralelles entre paralelles sont égales, & que CE est paralelle à DF, *par le Th precedant* : partant BD = NO & BC = NM & CD = MO ; donc les triangles CBD & MNO sont égaux & semblables, ainsi l'angle CBD est égal à MNO ; ce qu'il faloit démontrer.

Scholie.

Si la ligne BC, perpendiculaire sur AB, faisant avec BD, aussi perpendiculaire sur AB un certain angle, est mené par un mouvement droit & uniforme sur AB, elle formera Z un plan où toute ligne comme AE perpendiculaire sur AB fera avec une ligne dans X, aussi perpendiculaire sur AB, telle qu'est AF, le même angle que fait BC avec BD.



Ainsi pour connoître l'angle de l'inclinaison d'un plan sur un autre, il faut mener de Z sur X à un même point de leur section, comme au point A, deux lignes perpendiculaires AE & AF: l'angle EAF sera celuy que Z est censé faire avec X.

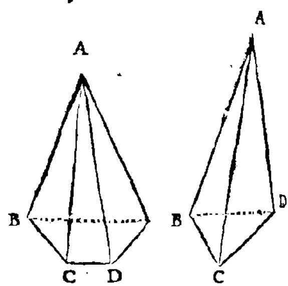
SECTION II.

De la compoſition des Solides.

Definitions.

Premiere definition.

SI la ligne AB, dont le ſommet A eſt fixe, eſt meüe de ſorte qu'elle parcoure les côtez de quelque Polygone, comme de BCD, cette ligne décrira par ce mouvement un ſolide qu'on nomme Pyramide.



Seconde definition.

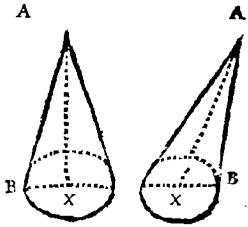
Le Polygone BCD s'appellela baſe de la Pyramide, laquelle Pyramide a autant de faces que ce Polygone a de côtez.

Scholie.

Vne Pyramide de trois faces s'appelle triangulaire, ſi elle en a plus de trois on l'appelle generalement Pyramide Polygone. Euclide dit que la Pyramide eſt un ſolide compris de pluſieurs plans qui ſe rencontrent en un même point, ayant un autre plan pour baſe.

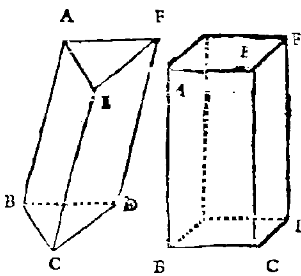
Troisième definition.

Si la ligne AB,dōt le sommet A est fixe, se meut en parcourant le cercle X,elle fait un cone dont le cercle X est la base, & la ligne tirée de la pointe A au centre du cercle est dite l'axe de ce Solide.



Quatriéme definition,

Si la ligne A B se meut uniformément autour de deux Polygones égaux & sēblables A E F & BCD qui soient paralelles & situez, de sorte que les côtez égaux se répondent paralellement, le solide qui se fera est un prisme, qui a pour base ce Polygone.



Scholie.

Euclide considere les Prismes comme compris entre des plans

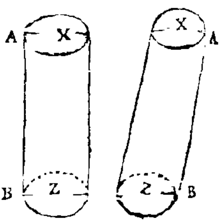
Cinquiéme definition.

Un Prisme a autant de faces que le

Polygone qui eſt ſa baſe a de côtez. Si la baſe du Priſme eſt un Parallelogramme, il s'appelle Parallelipide, ſi c'eſt un triangle, Priſme triangulaire ; s'il a plus de trois faces, Priſme Polygone.

Sixiéme definition.

Si la ligne A B ſe meut autour de deux cercles Z & X égaux, & dont les plans ſont paralelles, elle décrit un cilindre.



Septiéme definition.

La ligne qui joint les centres des cercles X & Z, qui ſont les baſes du cilindre, s'appelle l'axe du cilindre.

Huitiéme definition.

Dans toutes ces figures, lors que l'axe eſt perpendiculaire ſur la baſe, les ſolides ſont appellez droits.

Neufiéme definition.

Si un demy cercle tourne autour de ſon diametre, il décrit une ſphere.

Dixiéme definition.

Le diametre du cercle dont la revolution a formé la ſphere, eſt l'axe de cette ſphere.

Onziéme definition.

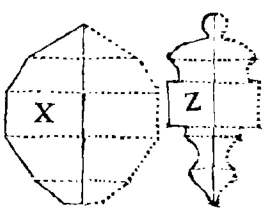
Le centre du cercle qui a décrit la ſphere eſt le centre de la ſphere

Douziéme definition.

Les lignes tirées du centre de la ſphere à la circonference, s'appellent rayons de la ſphere, & celles qui paſſant par le centre de la ſphere ſe terminent à la circonference, ſont appellées diametres de la ſphere.

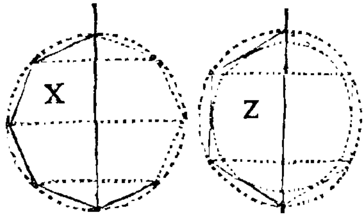
Treziéme definition.

Si on conçoit qu'une figure rectiligne ou mixte, comme X ou Z tourne circulairement ſur un de ſes côtez, comme axe elle décrira par ſa revolution un ſolide nommé Spheroïde.



Scholie.

Quoy qu'il puiſſe y avoir ainſi une infinité de Spheroïdes faits par la revolution d'une infinité de figures rectilignes ou mixtes, neanmoins l'on ne parle dans la ſuite que des ſeuls



Spheroïdes formez par la revolution de la moitié d'un Polygone regulier, inſcrit, ou circonſcrit à un cercle, tournant circulairement ſur le diametre de ce cercle comme axe, tel qu'eſt X ou Z.

Quatorziéme definition.

L'angle ſolide ſe fait quand trois ou pluſieurs plans ſe coupent en aboutiſſant à un point, comme la pointe d'un diamant bien taillé.

Scholie.

Ainſi deux angles plans ne peuvent faire un angle ſolide.

Quinziéme definition.

Corps regulier eſt celuy qui eſt compris entre des figures regulieres & égales, duquel auſſi tous les angles ſolides ſont égaux.

Scholie.

ON demontrera dans la ſuite qu'il n'y a que cinq corps reguliers, dont voicy les definitions par avance.

Seziéme definition.

La Tetraëdre eſt un ſolide regulier compris ſous quatre triangles égaux & equilateraux ; ce qui eſt une pyramide dont la baſe eſt égale à chaque face.

Dix ſeptiéme definition.

L'exaëdre ou Cube eſt composé de ſix

quarrez égaux, comme un dé à joüer.

Dix-huitiéme definition.

L'Octaëdre est de huit triangles égaux & equilateraux.

Dix-neufiéme definition.

Le Dodecaëdre est compris sous douze pentagones égaux & equilateraux.

Vingtiéme definition.

L'Icosaëdre est de vingt triangles égaux & equilateraux.

Vingt-uniéme definition.

Un solide A est dit circonscrit à un autre solide B qu'il contient, s'il est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent renfermer B, *ou, ce qui est la méme chose*, si B est le plus grand de tous les solides que A peut renfermer.

Vingt-deuxiéme definition.

Un solide B est dit inscrit dans une autre solide A, où il est renfermé, s'il est le plus grand de tous les solides semblables qui puissent être renfermez dans A, *ou ce qui est la méme chose*, si A est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent renfermer B.

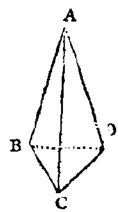
Scholie.

Ces definitions donnent les idées les plus claires & les plus generales qu'on puisse avoir des circonscriptions, ou inscriptions des solides. Vn cilindre est dit circonscrit à une sphere, qui est la plus grande qu'il puisse renfermer & par consequent dont il touche la circonference : si la sphere estoit plus petite, on ne pourroit pas dire proprement que le cilindre luy fut circonscrit, & un cilindre est conceu inscrit dans une sphere qui est la plus petite qu'on puisse concevoir renfermer ce cilindre, & par consequent qui touche les deux cercles de ces deux bases.

Theorême premier.

Si un angle solide est compris de trois angles plans, deux de ces angles plans pris ensemble comme on voudra, sont plus grands que le troisiéme.

Les angles BAD, BAC, CAD font un angle solide; on ne peut pas, par la 2e definit. des surfaces planes, concevoir de plan plus petit entre AB & AD que BAD; partant BAD est plus petit que la surface creuse ABCD: on démontrera de la même maniere que l'angle plan BAC est plus petit que BAD avec CAD.

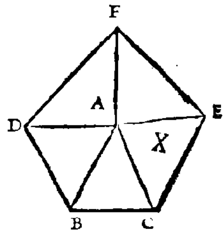


Theorême second.

Tous les angles des plans qui comprennent un angle solide, valent moins que quatre angles droits.

1° Soit X un angle solide compris sous cinq triangles, dont le sommet A doit être conçû en l'air. Langle DBC est plus petit que les deux angles DBA & CBA; *par le Th. precedant*, ainsi BCE est plus petit que les angles ACB & ACE pris ensemble, de même des autres.

2° Tous les angles du Polygone BCEFD base de l'angle solide sont, *par le Coroll. du Th. 7, § 3 l. 2.* égaux à six angles droits, ainsi tous les angles de la base des cinq triangles qui font l'angle solide X sont plus grands que six droits, puis qu'ils sont plus grands que les angles du Polygone, *par le Th. precedant.*



Tous les angles de ces cinq triangles qui font l'angle solide valent dix droits; donc puisque ceux de leurs bases valent plus de six droits; ceux des sommets valent moins que quatre droits ; ce qu'il faloit démontrer.

Scholie.

On peut démontrer ce Theorême en cette maniere, concevons que A est un point dans X, & le sommet de plusieurs triangles dont les côtez de X sont les bases. 1. Tous ces angles autour de A ne valent que quatre angles droits. 2. Si on leve le point A, alors les angles du sommet de ces triangles deviendront plus petits ayans mêmes bases, & les côtez plus grands, ce qui étant tous ces angles vaudront moins que quatre angles droits.

Theorême troisiéme.

On ne peut inscrire dans une sphere que les cinq corps reguliers.

C'est à dire, qu'on ne peut concevoir aucun autre solide compris sous des figures planes toutes égales & semblables, dont tous les angles touchent la sphere dans laquelle ce ſolide ſoit conceu inſcrit.

La raiſon eſt qu'il n'y a que les angles plans dont ces cinq corps ſont compoſez qui puiſſent faire un angle ſolide, comme nous l'allons démontrer.

1° Trois triangles égaux & equilateraux peuvent faire un angle ſolide, car les trois angles de ces triangles qui comprendront un angle ſolide ne valent que trois fois 60 degrez, chacun des angles d'un equilateral étant de 60. Trois de ces triangles joints enſemble font les angles ſolides du Tetraëdre.

2° Quatre de ces triangles peuvent encore faire un angle ſolide, tel que celuy de l'Octaëdre; car les quatre angles qu'ils comprendront ne valent que quatre fois 60, ce qui eſt moins que quatre droits.

3° Cinq de ces triangles peuvent faire encor un angle ſolide, car les angles des plans qu'ils comprennent, ne valent que cinq fois 60 degrez, ce qui eſt moins que quatre angles droits. L'angle de l'Icoſaëdre eſt fait par cinq triangles.

Six triangles equilateraux ne peuvent faire un angle ſolide; car les angles plans qui comprendroient l'angle ſolide vaudroient quatre angles droits; ainſi ils feroient un plan & non un ſolide, *par le Th. 2. ſi p.*

4° Prenant des quarrez, ſi on en joint

trois enſemble, on a l'angle du cube, mais quatre quarrez dont les quatre angles ſont droits, joints enſemble font un plan.

4° Trois pentagones font encor un angle ſolide, qui eſt celuy du Dodecaëdre, mais quatre pentagones ne le peuvent pas, car leurs angles vaudroient plus de quatre droits.

6° Plus les figures ont de côtez, les angles que comprennent ces côtez ſont plus grands; ainſi ſi trois exagones ne peuvent faire un angle ſolide, à plus forte raiſon les eptagones, ne le peuvent faire; ainſi des autres figures qui ſuivent.

Premiere demande.

Une figure eſt plus grande que celle autour de laquelle elle eſt circonſcrite, & plus petite que celle dans laquelle elle eſt inſcrite.

Seconde Demande.

De deux priſmes de même hauteur, celuy dont la baſe eſt moindre, & qui par conſequent peut être compriſe en celle de l'autre, eſt plus petit.

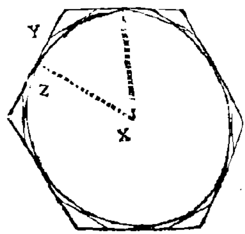
Scholie.

Car il eſt evident qu'il y eſt contenu: or ce qui contient eſt plus grand que ce qui eſt contenu.

Theorême quatrième.

De deux priſmes circonſcrits à un cilindre, celuy-là approche plus du cilindre qui a plus de côtez.

La baſe d'un cilindre propoſé eſt X, celle du priſme qui a moins de côtez, & qui eſt circonſcrit au cilindre ſoit nommé Y, & Z celle d'un autre priſme qui a plus de côtez, & qui eſt circonſcrit au même cilindre. Le Polygone Z *par le T. 8, § 4. l. 2*, eſt plus petit que le Polygone Y : les Priſmes



dont ces Polygones ſont les baſes, ſont de même hauteur, étant circonſcrits à un même cilindre, donc *par la demande preced.*. celuy qui ſera ſur Z, & qui a ainſi plus de côtez, eſt plus petit que celuy qui en a moins, dont Y eſt la baſe; ainſi il approche plus du cilindre ; ce qu'il faloit démontrer.

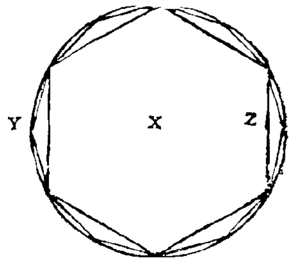
Corollaire.

Donc un Priſme d'une infinité de côtez approche ſi prés du cilindre qu'il n'y a point de difference ; ainſi on peut ſuppoſer que le cilindre eſt un Priſme d'une infinité de côtez.

Theorême cinquieme.

De deux Priſmes inſcrits dans un cilindre, celuy-là approche plus du cilindre qui a plus de côtez.

La base du cilindre proposé est X, les deux Polygones Z & X inscrits dans ce cercle soient les bases de deux Prismes inscrits dans ce cilindre dont X est la base.



Par le Th.9, § 4, l. 1, le Polygone Y qui a plus de côtez, est plus grand & approche plus du cercle que le Polygone Z : ces deux Prismes, dont Z & Y sont les bases, sont de même hauteur, étans inscrits dans un même cilindre; donc *par la demande prec.* le Prisme qui est sur Y est plus grand que celuy qui est sur Z : ainsi il approche plus du cilindre, ce qu'il faloit démontrer.

Troisiéme demande.

De deux pyramides de même hauteur, celle qui a une plus grande base est la plus grande.

Scholie.

Car il est evidant que si l'on conçoit que l'une soit mise dans l'autre, celle qui a une plus grande base contiendra celle qui en a une plus petite.

Theorême sixiéme.

De deux pyramides circonſcrites à un cone, celle qui a plus de côtez approche plus du cone.

Cela ſe démontre comme les precedans Theorêmes.

Theoréme ſeptiéme.

De deux pyramides inſcrites dans un cone, celle qui a plus de côtez approche plus du cone.

Cela ſe démontre comme les precedans Theorêmes.

Corollaire.

Donc on peut ſuppoſer qu'un cone eſt une pyramide d'une infinité de côtez.

Theorême huitiéme.

Plus un Polygone a de côtez, le ſpheroïde qu'il forme approche plus de la ſphere autour de laquelle il eſt circonſcrit.

Cela ſe démontre par la même voye que les Theorêmes precedans, car plus le Polygone, qu'on peut appeller le Generateur du Spheroïde, aura de côtez, par les *par les th. 8 & 9 § 4 l. 2 & leurs Coroll.* plus il approchera du cercle; ainsi le Spheroide qu'il décrira par sa revolution approchera plus de la sphere, à laquelle il est circonscrit. Ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire.

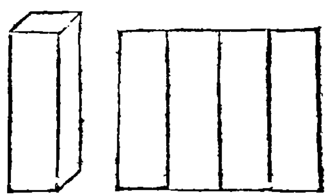
Donc une sphere peut être prise pour un Spheroïde formé par un Polygone d'une infinité de côtez.

SECTION III.

De la surface des Solides.

Theoréme premier.

LA surface d'un Prisme droit est égale à un Parallelogramme, qui est de même hauteur que ce Prisme, & dont la base est égale au circuit de ce Prisme.



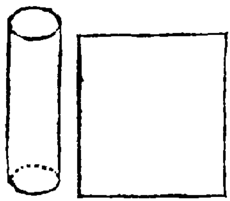
Les surfaces d'un Prisme sont des Parallelogrammes tous de même hauteur, dont les bases prises ensemble font le circuit de ce Prisme, par consequent ils sont égaux à un Parallelogramme de la hauteur du Prisme, & dont la base est égale à son circuit, ce qui est evident.

Scholie.

On n'y comprend point les ſurfaces des baſes.

Corollaire premier.

Donc puis qu'un cilindre peut être pris pour un Priſme, *conformément à la definition 8e, § 2 ſup.* qui a une infinité de faces, la ſurface d'un cilindre eſt égale à un Parallelogramme de même hauteur, & dōt la baſe eſt égale à la circonference du cercle, qui eſt la baſe de ce cilindre.



Corollaire ſecond.

Donc tout ce qui a été démontré de la raiſon qu'ont les Parallelogrammes entr'eux convient, aux ſurfaces des cilindres.

Per exemple. 1. Les ſurfaces de deux cilindres ſont l'une à l'autre en raiſon compoſée de leur hauteur, & du circuit de leur baſe.

2. Ainſi dans deux cilindres, ſi la hauteur eſt à la hauteur, comme la baſe à la baſe, c'eſt à dire, ſi la raiſon de leurs ſurfaces eſt compoſée de deux raiſons égales, cette raiſon eſt doublée, *par le Th.* 14 § 3. *l.* 3.

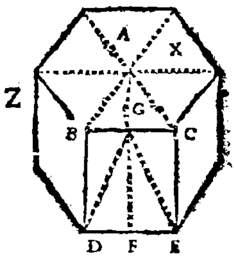
3. Si deux cilindres ont, ou leurs hauteurs, ou leurs baſes égales, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les inégales, *par le Th.* 15, § 3, *l.* 3.

4 Les baſes d'un cilindre ſont des cercles; donc puiſque les circonferences ſont entr'elles comme leurs diametres, *par le Th.* 5 § 2, *l.* 2. les ſurfaces de deux cilindres de même hauteur ſont entr'elles comme les diametres des cercles de leurs baſes.

5. Enfin comme l'on peut trouver, *par le Probl.* 3. §. 3. *l.* 3 un Parallelogramme qui ſoit ſemblable, & en raiſon donnée à un autre; ainſi on pourra trouver un cilindre dont la ſurface ait une raiſon requiſe avec celle d'un autre cilindre.

Theoréme second.

Le Polygone X est une des deux bases du Prisme Z, la hauteur GF de ce Prisme est égale à GA, qui est une ligne menée de A centre du Poligone X perpendiculairement sur BC l'un des côtez: je dis que la surface du Prisme Z est double de celle du Polygone X.



De tous les angles du Polygone X ayant mené des lignes au centre A, on fait autant de triangles que Z a de faces, lesquelles faces sont des Parallelogrammes. Or ces Parallelogrammes, comme est BCED, & ces triangles comme est ABC, ont même hauteur & même base : donc ces Parallelogrammes sont doubles de ces triangles, *par le Th.* 4, § 4. *l.* 2, & par consequent la surface de Z composée de ces Parallelogrammes est double de celle de X égale à tous ces triangles.

Corollaire premier.

Donc si la hauteur d'un cilindre qu'õ peut regarder comme un Prisme est égale au rayon du cercle, qui est sa base, sa surface sera double de celle du cercle.

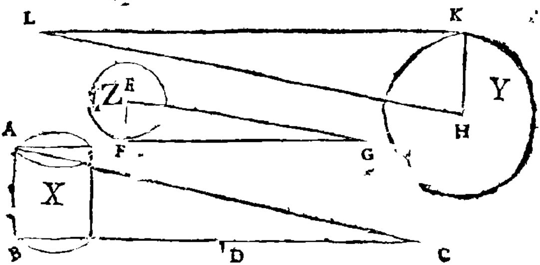
Corollaire second.

Ainsi si un cilindre a pour sa hauteur

deux fois le rayon, ou une fois le diametre du cercle, qui eſt ſa baſe, ſa ſurface ſera quatre fois plus grande que celle de ce cercle.

Theorême troiſiéme.

La ſurface du contour d'un cilindre eſt égale à celle d'un cercle dont le rayon eſt moyen proportionnel entre la hauteur de ce cilindre & le diametre du cercle qui eſt ſa baſe.



X eſt un cilindre dont AB eſt la hauteur, BD le circuit de ſa baſe, qui eſt le cercle Z, dont le circuit eſt FG ou BD, & BC le double de ce circuit. La ſurface de X eſt égale au Parallelogramme ABD, ou au triangle ABC, comme celle du cercle Z au triangle EFG.

Je ſuppoſe que HK rayon du cercle Y eſt moyen proportionnel entre AB hauteur de X, & 2 EF diametre de Z.

Soit KL le circuit de Y, ainſi ſa ſurface eſt égale au triangle HKL: il n'eſt donc question que de prouver que le triangle HKL est égal au triangle ABC.

Par l'hipothese : : AB , HK, 2EF : or HK , KL : : 2EF , 2FG ou B C : donc HK , 2 E F : : KL , B C donc puisque
A B , H K , } : : HK, 2EF : donc A B ,
K L , B C , }
HK : : KL , BC ; partant le rectangle de des extrêmes AB & BC est égal à celuy des moyens HK & KL, & consequemmẽt les triangles ABC, HKL , qui en seront les moities seront égaux, ce qu'il faloit prouver.

Theorême quatriéme.

La surface d'une pyramide est égale à un triangle, dont la hauteur est égale à la hauteur de chacune de ses faces, & dont la base est égale au circuit de la base de cette pyramide, *ou* à un Parallelogramme de même hauteur, dont la base est la moitié plus petite.

Chacune des faces de la pyramide est un triangle, ces faces étant égales, ces triangles sont égaux entr'eux, & à un triangle rectangle de même hauteur, & dont la base est égale à toutes les bases prises ensemble de ces triangles, *par le Th. 6 §. 4, l. 2, & par le Th. 4, § 4, l. 2*, ce triangle est égal à un Parall. de même hauteur dont la base est moitié plus petite, qui est ce qu'il faloit démontrer.

Corollaire premier.

Donc puiſque les cones peuvent être conſiderez comme des pyramides, la ſurface d'un cone eſt égale à un triangle rectangle de même hauteur, que la ſurface du cone, & dõt la baſe eſt égale au circuit de la baſe du cone, *ou*, à un Parallelogramme rectangle de même hauteur, dont la baſe eſt égale à la moitié de la baſe.

Scholie.

La hauteur de la ſurface du cone & de la pyramide eſt une ligne droite la plus courte qu'on puiſſe concevoir menée ſur la ſurface du ſommet à la baſe.

Corollaire ſecond.

Tout ce qui a donc été démontré des raiſons & des proportions entre pluſieurs rectangles ſemblables, convient aux ſurfaces des cones.

1. Les ſurfaces des cones ſont entr'elles en raiſon compoſée de leur hauteur & de leur baſe.

2. Si la hauteur eſt à la hauteur comme la baſe à la baſe, ces ſurfaces ſeront en raiſon doublée, *par le Th.* 12. § 3. *l.* 3.

3. Si les deux cones ont leur hauteur ou leur baſe égale, leurs ſurfaces ſeront entr'elles comme les inégales, *par le Th.* 13. § 3, *l.* 3.

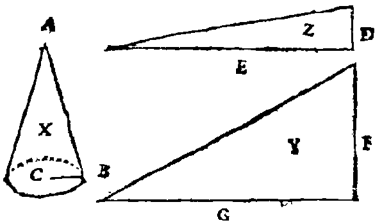
4. Donc puiſque les circonferences des cercles ſont entr'elles comme leurs diametres, deux cones ayant même hauteur, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les diametres de leurs baſes.

5. Vn rectangle étant donné, on en peut trouver un, ou pluſieurs ſemblables, qui ayent une telle raiſon avec luy; auſſi un cone étant donné, on peut trouver un ou pluſieurs autres cones auſſi ſemblables, qui ſoient avec le donné en raiſon requiſe.

6. La ſurface du cone X eſt à celle du cercle qui eſt ſa baſe comme ſa hauteur eſt au rayon de ce cêrcle.

La ſurface de ce cercle eſt égale au triangle rectangle Z dont le côté D eſt égal au rayon BC, & le côté E au circuit du cercle, *par le Th.* 10 § 4. *l.* 2.

La surface du cone X est égale au triangle rectangle Y, dont le côté F est égal à AB, & le côté G au circuit de sa base, *par le Coroll. du Th. preced.*

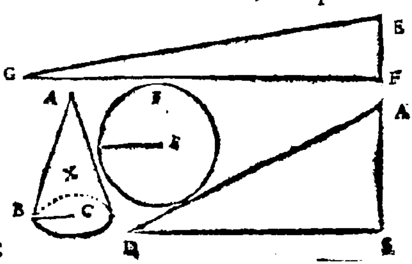


G & E étant égaux chacun au circuit du cercle, qui est la base du cone, ils sont égaux entre eux, partant les surfaces de ces deux triangles rectangles Y & Z, qui ont des bases égales, sçavoir G & E, sont entr'elles comme F à D; mais AB = F, & BC = D, donc X surface du cone est à celle du cercle de sa base, comme AB est à BC: ce qu'il faloit prouver.

Theorême cinquiéme.

La surface d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la hauteur du cone, & le rayon de la base de ce cone, est égale à la surface de ce cone.

Soit X un cone dont AB est la hauteur & BD le circuit du cercle qui est sa base, ainsi sa surface est égale au rectangle ABD. La ligne BC est le rayon de sa base. Je suppose que EF est moyen proportionnel entre AB & BC, & que EF est le rayõ d'un cercle dõt FG est le circuit, ainsi la surface de ce cercle est égale



au triangle EFG, par consequent il n'est question que de prouver que ABD = EGF

Par l'hipothese AB, EF :: EF, BC : & puisque les circonferences des cercles sont entr'elles comme leurs diametres, EF, BC :: FG, BD.

Ainsi EF, BC, :: $\left\{\begin{array}{l} AB, EF, \\ FG, BD, \end{array}\right.$

donc AB, EF :: FG, BD,

Donc le rectangle de AB & de BD les extrêmes est égal à celuy de EF, & FG les moyens, & par consequent les triangles ABD, EFG, qui en sont moitiés, seront égaux, ce qu'il faloit prouver.

Theoréme sixiéme.

Si la hauteur & la base d'un Prisme sont égales à la hauteur & à la base d'une pyramide droite la surface du Prisme sera double de celle de la pyramide.

Chaque face du Prisme est un Parallelogramme, & chaque face de la pyramide est un triangle. Dans le cas proposé ces Parallelogrammes & ces triangles sont de même hauteur & sur même base : donc *par le Th.* 4. *§* 4, *l.* 2. ces Parallelogrammes sont doubles de ces triangles; ainsi la surface du Prisme est double de celle de la pyramide, ce qu'il faloit prouver.

Corollaire.

Donc les cones pouvant être considerez comme des pyramide, & les cilindres comme des Prismes ; on peut dire que la surface du cilindre est double de celle du cone de même hauteur & sur même base.

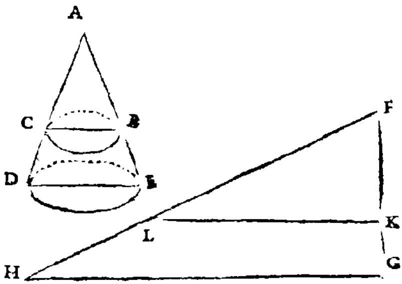
Scholie.

Tout ce que l'on peut démontrer des raisons des triangles rectangles avec les parallelogrammes, convient aux surfaces des cones au regard de celles des cilindres, laquelle raison est composée de celle de leurs hauteurs, & des circonferences des cercles qui sont leurs bases.

Lemme premier.

La surface de BCDE fragment du cone ADE est égale à celle du Trapeze GHLK.

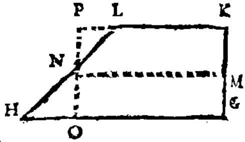
Par le Coroll. 1er du Th. 4e *sup.* la surface du cone AED est égale au triangle rectãgle FGH, dont FG = AD & GH égales à la circonference du cercle DE & celle du cone ABC au triangle rectangle FKL dont FK = AB & KL à la circonference du cercle CB: ôtant donc FKL de FGH le reste GHLK sera égal au fragment BCDE, ce qui est evident.



Lemme second.

Si on coupe les deux côtez KG, LH

par la moitié, en menant la ligne MN paralelle à GH, le Trapese KLHG sera égal à un rectangle fait de KG & MN: la démonstration en est aisée



Demande.

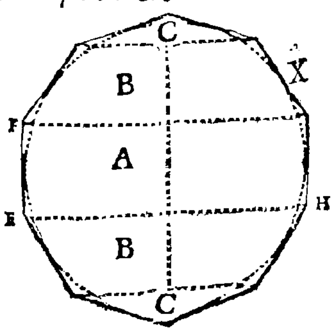
Si l'on joint les angles d'un spheroïde comme X, *figure suivante*, par des plans perpendiculaires à son axe qui le divisent en plusieurs parties, ces parties seront ou des cones comme C, ou des fragmens de cone, comme B, ou un cilindre comme A.

Theorême septiéme.

Chaque surface des portions d'un spheroïde est égale au rectangle fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonference du cercle ou sphere inscrite dans ce spheroïde.

Pour la partie A.

Quant à la partie A, il n'y a pas de difficulté, puisque c'est un cilindre dont la surface, *par le Coroll. 1. Th. 1 sup.* est égale

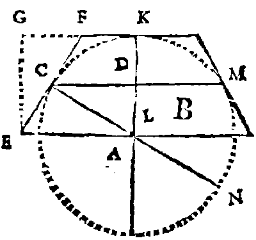


au rectangle de EF par la circonference d'un cercle dont le diametre est EH, lequel est égal au diametre du cercle ou sphere inscrite dans le spheroïde X, ce qu'il faloit prouver.

Pour la partie B.

Il faut démontrer que la surface de la partie B, qui est un fragment de cone, est égale à un rectangle fait de K L partie de l'axe du spheroïde, à laquelle elle répond, & de la circonference d'un cercle inscrit audit spheroïde, dont CN est le diametre.

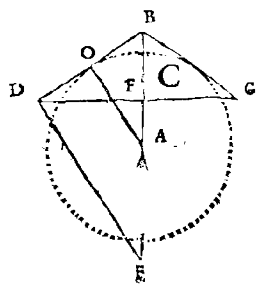
Je partage ce fragment de cone par la moitié, menãt CM paralelle à FK & à EL: je mene aussi G E paralelle à KL à laquelle elle est égale. Le triangle EFG & ACD sont rectangles, ainsi GFE & GEF valent un droit, l'angle GFE étans donc égal à l'angle FCD *par le Th.* 8 § 1. *l.* 2. retranchant de l'angle droit FCA, l'angle FCD le reste DCA sera égal à



GEF, ainsi les deux triangles ACD & EFG sont equiangles donc GE ou KL, EF :: CD, CA; partant KL est à EF comme le double de CD qui est CM est au double de AC, qui eſt CN : or *par le Th. 4 § 2, l. 3*, les lignes CM, CN priſes cõme diametres, ſont entr'elles cõme les circõferences des cercles dont elles ſont diametres: donc le rectangle fait de GE & de la circonference d'un cercle dont CN eſt le diametre, eſt égal au rectangle fait de EF & de la circonference d'un cercle dont CM eſt diametre, auquel eſt égale la ſurface de B fragment de cone, *par le Lemme precedant*, ce rectangle, dis-je, eſt égal à un rectagle fait de KL par la circonference d'un cercle, dont CN eſt le diametre ; ce qu'il faloit prouver.

Pour la partie C.

De O moitié de BD côté du cone C je mene une ligne à A centre du cercle qui eſt inſcrit dans le ſpheroïde, une ligne AO, & par D une paralelle à AO, ainſi comme BO eſt moitié de BD, AO ſera moitié de DF; partant DF ſera le diametre du cercle inſcrit dont AO eſt le rayon.



La ſurface du cone C, ou, DBG, *par le Cor. 1. Th. 4. ſup.* eſt égale à un triangle rectangle dont BD eſt la hauteur, & la baſe un cercle dont DG eſt le diametre; partant à un

Paralellogramme rectangle dont BD eſt la hauteur, & la baſe eſt la circonference d'un cercle, dont DE moitié de DG eſt le diametre; ainſi il faut prouver que le rectangle de BD par la circonference du cercle dont DE eſt diametre, eſt égal au rectangle de BE par la circonference du cercle dont DF eſt le diametre.

Les deux triangles DEF & DEB ſont ſemblables, *par le Lem.* 4. § 1, *l.* 3, donc BD, BE :: DF, DE : or DF eſt à DE, cõme les circonferences des cercles dont ils ſont les diametres, partant le rectangle de BE par la circonference du cercle dont DE eſt le diametre, eſt égal au rectangle de BD par la circonference du cercle dont DE eſt le diametre, ce qu'il faloit prouver.

Theorême huitiéme.

La ſurface d'un ſpheroïde eſt égale au rectangle fait de ſon axe par la circonference du cercle, ou ſphere qui luy eſt inſcrite.

Par le Th. precedant; puiſque la ſurface de chaque partie du ſpheroïde eſt égale au rectangle faite de chaque partie de ſon axe à laquelle elle répond, & de la circonference du cercle ou ſphere, qui luy eſt inſcrite, toute la ſurface entiere ſera égale au rectangle de tout l'axe par la circonference du cercle ou ſphere qui luy eſt inſcrite, puiſque le tout & ſes parties ſont un produit égal quand ils ſont multipliez par une même grandeur, comme on a démontré, *l. 1. Grand. prop.* 2ᵉ

Theorême neufiéme.

La ſurface d'une ſphere eſt égale au rectangle de ſon axe par la circonference d'un cercle qui a même diametre que cette ſphere.

Par la definition 9 § 1, ſup. la ſphere eſt formée par la revolution d'un demy cercle, ſur ſon diametre comme axe: or *par le T. 9 & 10, § 4, l. 2.* le cercle peut être cõſideré comme un Polygone regulier d'une infinité de côtez; ainſi par la definition du ſpheroïde la ſphere eſt un ſpheroïde d'une infinité de cercles, dont l'axe par conſequent eſt égal à l'axe ou diametre de la ſphere, ainſi puiſque par le prec. Th. la ſurface du ſpheroïde eſt égale au rectangle fait de ſon axe par la circõference d'un cercle dont le diametre eſt celuy de la ſphere qui luy eſt inſcrite, la ſurface de cette ſphere ſera égale de même au rectangle fait de ſon axe & de la circonference d'un cercle qui a même diametre que cette ſphere, ce qu'il faloit démontrer.

Theorême dixiéme.

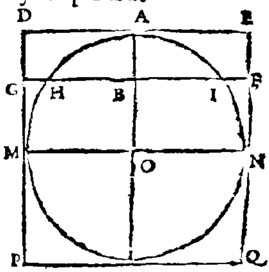
La ſurface d'une ſphere eſt égale à celle du contour d'un cilindre où elle eſt inscrite, qui a même hauteur que son axe.

Figure suivante.

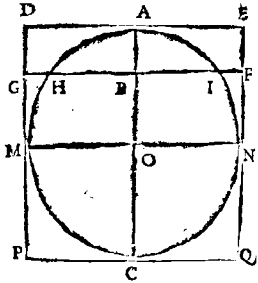
La surface de la sphere AMNC est égale à un rectangle fait de son axe par la circonferēce du cercle fait sur son diametre MN, or la surface du cilindre ou cette sphere est inscrite dont les côtez DP, EQ sont égaux à AC, l'axe de cette sphere est égale à ce même rectangle ; car *par le Coroll.1, Th. 1. sup.* elle est égale au rectangle fait de PD par la circonference du cercle de sa base qui a pour diametre PQ égal à MN ; puisque le diametre d'une sphere inscrite dans un cilindre doit être égal à celuy de la base du cilindre, selon l'idée qu'on a des figures inscrites.

Theoréme onziéme.

Si on coupe une sphere inscrite dans un cilindre par des plans perpendiculaires à son axe, la surface de chaque partie de la sphere est égale à celle de la partie du cilindre qui luy répond.



A C axe de la sphere est la hauteur du cilindre où la sphere est inscrite, ainsi ce cilindre touche par ces deux bases cette sphere. Je coupe l'axe AC



par des plans perpendiculaires ſur luy qui coupe auſſi le cilindre. Je dis que la ſurface de la partie MHIN eſt [illegible] celle de la partie MGFN du cilindre, comme auſſi la ſurface de HAI à celle de EFGD.

Car on peut prendre cette ſphere pour un ſpheroïde, ainſi la partie MHIN & HAI pour des portiõs de ſpheroide. Ainſi *par le Th. 7 ſup.* la ſurface de MHIN, eſt égale au rectangle BO par la circonference d'un cercle dont MN eſt le diametre, auquel rectangle, *par le Cor. 1. du Th. 1 ſup.* eſt égal, la ſurface de FGMN: de même la ſurface de HAI eſt égale au rectangle de AB par la circonference d'un cercle dont GF eſt le diametre, auquel eſt égale la ſurface de la partie DEFG, *par le Coroll. 1 du Th. cy-deſſus allegué.*

Problême premier.

Couper une ſphere par un plan, de ſorte que les ſurfaces des portions de la ſphere ſoient en raiſon donnée.

Il faut inſcrire la ſphere dans un cilindre, en ſuite couper les côtez de ce cilindre, ſelon la raiſon donnée & mener par les

les points de cette ſection des lignes ou des plans paralelles qui couperont la ſphere ſelon la raiſon donnée ; car les ſurfaces des portions de la ſphere, compriſes entre ces paralelles, ſeront égales à celles des portions du cilindre auſquelles elles répondront, *par le Th. 11 ſup.*

Scholie.

Ie ne parle point des raiſons qui ſe peuvent obſerver entre la ſurface du cone & de la ſphere. I'en ay aſſez dit pour des Elemens. Ce que je ne dis pas peut ſe déduire facilement de ce que j'ay expliqué.

Theorême douziéme.

La ſurface d'une ſphere eſt quatre fois plus grande que celle de ſon plus grand cercle.

Concevons une ſphere dans un cilindre, dont la baſe par conſequent ſera égale au plus grand cercle de la ſphere, & ſa hauteur ſera le diametre du cercle; par conſequent, *ſelon le Coroll. 2, Th. 2, ſup.* le contour de ce cilindre ſera quatre fois plus grand que la ſurface de ce cercle: or *par le Th. 10 ſup.* la ſurface de la ſphere eſt égale à ce contour ; donc elle eſt quatre fois plus grande que celle de ſon plus grand cercle.

Theorême treiziéme.

La ſurface d'une ſphere X eſt égale à celle d'un cercle que je nomme Z, dont le rayon eſt égal au diametre de ſon plus grād cercle, *ou, ce qui eſt la même choſe*, ſi le diametre du plus grand cercle de la ſphere X eſt 1, & celuy du cercle Z eſt 2, la ſurface de X eſt égale à celle de Z.

1° Les ſurfaces des cercles étant entr'elles, *par le Cor. du Th. 18, l. 3, § 3*, comme les quarrez de leurs diametres, puiſque le quarré de 1 eſt 1, & que celuy de 2 eſt 4, ſelon l'hipotheſe la ſurface de Z ſera quadruple de celle du plus grand cercle de la ſphere X: or la ſurface de cette ſphere eſt quadruple de celle de ſon plus grand cercle, par le Theor. preced, donc elle ſera égale à celle de Z. Ce qu'il faloit prouver.

Theorême quatorziéme.

La ſurface entiere d'un cilindre, *c'eſt à dire*, tant de ſon contour que de ſes deux baſes, eſt à celle d'une ſphere à laquelle il eſt circonſcrit, en raiſon ſeſquialtere.

1° *Par le Th. 10 ſup.* le ſeul contour du cilindre eſt egal à la ſurface de la ſphere. 2° Chaque baſe de ce cilindre eſt le plus grand cercle de la ſphere, qui eſt la 4e partie de ſa ſurface, *par le Th. 12 ſup.* ainſi les deux baſes du cilindre ſont la moitié de la ſurface de la ſphere.

Partant toute la ſurface du cilindre eſt égale, 1° à une fois toute la ſurface de la ſphere ; 2° à la moitié de cette ſurface ; ainſi cette raiſon eſt ſeſquialtere, c'eſt à dire, comme 3 à 2.

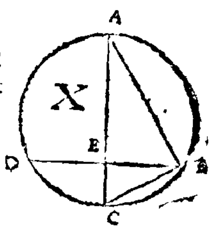
Scholie.

Nous avons enſeigné, *probl.* 3. § 3. *l.* 3, cõmment on trouve des cercles qui ſoient dans une raiſon dõnée, ainſi on voit comment on peut trouver deux ou pluſieurs ſpheres qui ayent entr'elles une raiſon propoſée.

Theorême quinziéme.

La ſurface de la portion DAB de la ſphere X eſt égale à celle d'un cercle dont AB eſt le rayon, comme celle de BCD à celle du cercle dont BC eſt le rayon.

Le quarré de AC eſt égal aux quarrez de AB & de BC, donc la ſurface du cercle dont AC eſt le rayon, eſt égale aux ſurfaces de deux cercles, dõt AB & BC ſont les rayons, puiſque les ſurfaces des cercles ſont cõme les quarrez de leurs rayons ou de leurs diametres.



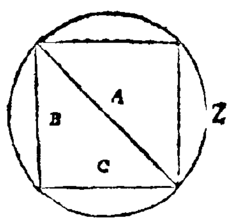
Or, *par le Th.* 13^e *ſup.* le cercle dont AC eſt rayon, a ſa ſurface égale à celle de la ſphere X; ainſi cette ſurface eſt égale à celle des deux cercles dont AB & BC ſont les rayons.

Reſte à démontrer que la ſurface de la portion DAB eſt à celle de BCD, comme le quarré de AB à celuy de BC.

Ayant inſcrit la ſphere X dans un cilindre de même hauteur que cette ſphere, la ſurface de la portion DAB ſera égale, *par le Probl 1. ſup.* au contour de la partie du cilindre qui luy répond, comme celle de BCD. a l'autre partie du cilindre. Les contours de ces deux parties ſont entr'eux comme AE & EC : or les quarrez ſur AB & BC ſont auſſi, *par le Th 16 § 3. l. 2.* comme AE à EC ; donc les ſurfaces des portions de cette ſphere ſeront entr'elles comme ces deux quarrez.

Theoréme ſeiziéme.

La ſurface d'une ſphere eſt double de celle du contour du cilindre qui luy eſt inſcrit, & dont la hauteur eſt égale au diametre de ſa baſe.



La ſurface de la ſphere Z eſt quadruple de celle du cercle dont A eſt le diametre, *par le Th. 12 ſup.*

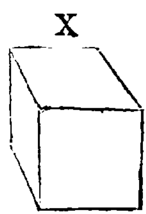
La ſurface du cercle dont A eſt le diametre, eſt égale à la ſurface des cercles dont C & B ſont les diametres, puiſque ces ſurfaces ſont comme les quarrez de leurs diametres, & que $AA = CC + BB$: or $C = B$; ainſi la ſurface du cercle dont A eſt le diametre, eſt égale à deux fois celle du cercle dont C eſt le diametre, & par conſequent puiſque la ſurface de A eſt la 4^e partie de la ſurface de la ſphere Z, celle du cercle dont C eſt le diametre, ſera la huitiéme partie de celle de la ſphere Z : la ſurface de ce même cercle dont C eſt diametre, eſt la 4^e partie du contour de ce cilindre inſcrit, *par le Coroll. 1, du Th. 2, ſup.* donc ce contour eſt la moitié de la ſurface de la ſphere Z.

SECTION IV.

De la ſolidité des Solides.

Lemme premier.

LA Solidité d'un Parallelipipede rectangle eſt faite par la multiplication de ſes trois dimenſions, ou de ſa hauteur multipliée par ſa baſe.



Le Solide X eſt fait de ſurfaces planes, égales chacune à la ſurface de la baſe, & poſées directemẽt les unes ſur les autres ; ainſi il eſt vray de dire que cette baſe eſt autant de fois dans le ſolide X, que ſa hauteur A contient de parties. En multipliant donc la baſe B par la hauteur A, on aura une grandeur égale au ſolide X, ainſi on peut dire que le ſolide X eſt fait par la multiplication de ſa baſe B, par ſa hauteur A.

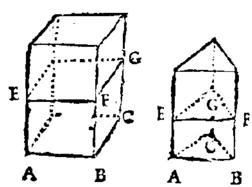
Lemme ſecond.

Deux ſolides de même baſe, ou de baſes ſemblables & égales, & de même hauteur, dont les côtés ſont les mêmes angles, ſont égaux.

Cela eſt clair; car ſi par la penſée on les met l'un dans l'autre, il faut qu'ils conviennent en tout.

Lemme troiſiéme.

Toutes les ſections d'un priſme paralelles à la baſe, ſont égales & ſemblables à la baſe.



Le plan ou la ſection EFG eſtãt paralelle à ABC, il faut que EF ſoit paralelle à AB, & FG à BC; mais les lignes paralelles entre mémes paralelles ſont égales, donc les côtez du plan qui coupe le priſme ſont égaux à ceux de la baſe du priſme: or *par le Th. 16, § 1, ſup.* l'angle EFG eſt égal à l'angle ABC, ainſi des autres, partant les plans ABC & EFG ayant les côtez égaux, & les angles que ces côtez comprennent égaux, ils ſont égaux & ſemblables.

Premiere demande.

On peut ſuppoſer que tout ſolide eſt fait d'un nombre infiny de plans, qui ayant quelque épaiſſeur, mais inſenſible, ſont poſés paralellement les uns ſur les autres.

Scholie.

Cette ſuppoſition ne peut être conteſtée par ce nombre infiny, je n'entans qu'un grand nombre.

Seconde demande.

Si deux ſolides ont même hauteur, & que les plans qui les compoſent ſoient également épais, l'un & l'autre auront un égal nombre de plans.

Theorême premier.

Les priſmes de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes.

Deux priſmes cõme Z & X qui ont même hauteur, ou qui ſont entre deux plans paralelles, ſelon la 1re demande, peuvent être cõſiderez cõpoſez de plans paralelles, dont ils contiennent un égal nombre, *selon la 2^e demande :* or *par le Lem. 3.* tous ces plans sont égaux chacun au plan de leur base, par consequent si Z & X ont des bases égales ils ont un égal nombre de plans égaux, ainsi ils sont égaux. Si la base de Z est le tiers de celle de X, tous les plans de Z seront le tiers de ceux de X, ainsi Z sera le tiers de X.

Corollaire premier.

Donc la solidité d'un prisme n'est pas plus grande lors qu'il a une plus grande surface.

Car deux prismes entre deux plans paralelles sont égaux, s'ils ont leurs bases égales, quoyque les côtez de l'un soient obliques, & par consequent plus grands, & qu'ainsi il ait une plus grande surface.

Corollaire second.

En mesurant un prisme, s'il est oblique, il le faut rapporter à un prisme droit de même hauteur, ou qui puisse être compris entre deux plans paralelles.

Car celuy qui est droit est égal à celuy qui ne l'est pas, quoyque la surface du droit soit plus petite.

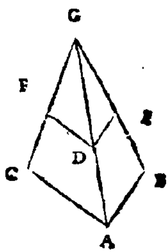
Corollaire troisiéme.

Les cilindres sont des prismes d'une infinité de côtez; ainsi deux cilindres qui ont même base, & qui peuvent être compris entre mêmes paralelles ſont égaux, quoyque l'un ſoit droit & l'autre oblique.

Lemme quatriéme.

Toute ſection d'une pyramide qui ſe fait paralellement à ſa baſe, eſt ſemblable à ſa baſe.

Le plan F D E eſt paralelle à la baſe ABC, ainſi DE eſt paralelle à AB & DF à AC. *Par le Th.* 16, § 1. *ſup.* l'angle C A B eſt égal à l'angle EDF, ainſi les angles de la ſection E D F ſont les mêmes que ceux de la baſe ABC, & outre cela tous les côtez ſont proportionaux, car dans les triangles GAC GAB *par le Th.* 4, § 1. *l.* 3.



$$GD,\ GA :: \left\{ \begin{array}{ll} FD, & CA \\ DE & AB \end{array} \right.$$

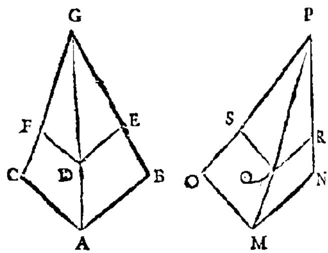
Donc *par le Th.* 5. *l.* 2, § 2, F D E eſt ſemblable à CAB.

Lemme cinquiéme.

Si on coupe deux pyramides de même hauteur, ou qui ſoient entre des plans paralelles, par des plans paralelles à leurs baſes, les ſections de l'une ſeront à celle de l'autre qui eſt en même hauteur, comme la baſe de l'une eſt à la baſe de l'autre.

Soient deux pyramides BACG & NMOP entre des plans paralelles, & par consequent de même hauteur, les plans FDE & SQR sont paralelles aux bases de ces pyramides, & à la même hauteur, il faut prouver que si les bases sont égales, les sections sont égales.

Par le Lemme preced. ces sections sont sẽblables à leurs bases, ainsi il suffit de démontrer que MN, QR :: AB, DE, car deux figures semblables sont entr'elles en raison doublée de leurs côtez omologues.



Soit nommé T la hauteur de ces pyramides qui est la même, & V la hauteur des plans qui les coupe, qui est encore la même.

$$\left.\begin{array}{l} MN,\ QR :: PM,\ PQ \\ AB,\ DE :: GA,\ GD \end{array}\right\} :: T\ V,$$

Donc, puis que deux raisons égales à une 3^e sont égales entr'elles, MN, QR :: AB, DE, ce qu'il falloit prouver.

Theoréme second.

Les pyramides de même hauteur

ſont entr'elles comme leurs baſes.

1° Par la premiere demande deux pyramides peuvent être conſiderées comme compoſées de plans poſez paralellement les uns ſur les autres. 2° Par la 2e demande deux pyramides de même hauteur ont égal nombre de ces plans paralelles.

Il ne reſte donc qu'à prouver que tous les plans dont ces pyramides ſont compoſées, & qui ſe répondent ou ſont à la même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes ; ce qui a été prouvé dans le dernier Lemme : Ainſi ſi les baſes ſont égales, ces deux pyramides ſont égales, puis que tous les plans pris à la même hauteur dans l'une & dans l'autre ſont êgaux; ſi la baſe de l'un eſt le tiers de la baſe de l'autre , comme chaque plan de l'un pris à la même hauteur, ſera le tiers de l'autre , l'une de ces pyramides ſera le tiers de l'autre. Donc les pyramides de même hauteur ſont comme leurs baſes.

Corollaire premier.

Donc la ſolidité d'une pyramide ne depend pas de la grandeur de ſes côtez.

Car une pyramide qui n'eſt pas droite, à plus de ſurface qu'une de même hauteur qui eſt droite, & cependant ſi leurs baſes ſont égales elles ſont égales.

Corollaire second.

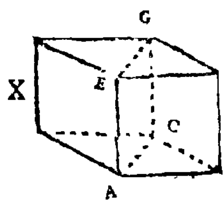
Donc en meſurant une pyramide, ſi elle n'eſt pas droite, il la faut rapporter à une qui le ſoit, & qui ait la même hauteur, puis que celle qui n'eſt pas droite n'eſt pas plus grande que celle qui eſt droite.

Corollaire troiſiéme.

Les Cones ſont des Pyramides d'une infinité de côtez, donc tous ceux qui ſont de même hauteur, droits ou non droits, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Theorême troiſiéme.

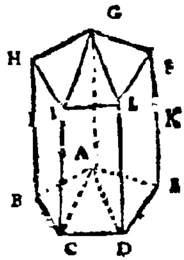
Si on coupe le Pararellipipede X par un plan, ſelon la diagonale AC ou EG : il ſera coupé en deux priſmes triangulaires égaux.



1° Les deux parties de X ont leurs baſes égales, elles ont même hauteur & mêmes angles; donc, *par le Lem.* 2 *ſup.* elles ſont égales. 2° Pour démontrer que ce ſont deux priſmes triangulaires, il ne faut que rapporter la definit. de ces ſolides qui leur convient.

Theorême quatriéme.

Tout prisme polygone peut être divisé en prismes triangulaires.



Soit K un prisme polygone dont les bases sont ABCDE, & GHILF : ces bases polygones se reduisent en triangles. Par la definition des prismes triangulaires, les solides ABCGHI. ACDGIL. ADECLF. sont des prismes triangulaires; donc le prisme K peut être divisé en prismes triangulaires.

Theorême cinquiéme.

Vn prisme est égal à plusieurs prismes de même hauteur, si sa base est égale à celles de tous ces prismes. Il en est de même des pyramides.

Car concevant dans ces solides des plans paralelles à la base. 1° Par la 2e demande *sup.* il y aura un égal nombre de plans dans chacun. 2° Selon la maniere que nous avons demontré, les Th. premier & second *sup.* chaque plan dans le grand prisme sera égal à tous les plans qui seront dans les autres prismes; car il leur sera comme sa base est à toutes les bases de ces prismes, or elle leur est égale, donc &c. Il en est de méme des pyramides.

Theoreme sixiéme.

Les cilindres de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Les cilindres sont des prismes d'une infinité de côtez: Or *par le Th. 1. sup.* les prismes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Donc les cilindres, &c.

Theoréme septiéme.

Vn cilindre est égal à un prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à la sienne.

Vn cilindre est un prisme poligone, tout prisme poligone peut être divisé en prismes triangulaires, par le Theor. 4^e *sup.* qui par le Theor. 5^e *sup.* seront égaux à un seul prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à toutes celles de ces prismes. Partant le cilindre égal à ce prisme polygone, l'est à ce prisme triangulaire qui a même hauteur, & dont la base est égale à la sienne.

Corollaire.

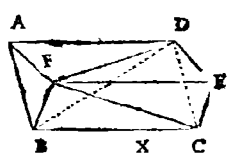
Donc un cilindre X eſt égal à pluſieurs cilindres A, B, C, &c. de même hauteur, dont toutes les baſes priſes enſemble ſont égales à la ſienne.

Car tous ces cilindres ſeront égaux à autant de priſmes triangulaires, qui ont même hauteur & baſes égales. Celuy auquel X eſt égal, & partant de même hauteur, & ſur baſe égale, par le Theor, 5. eſt égal à tous ces autres priſmes triangulaires, & partant aux cilindres A, B, C, &c. dont toutes les baſes ſont égales à celle de X, partant X eſt égal à A, B, C, &c.

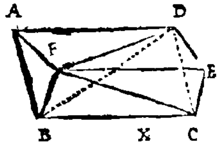
Theoréme huitiéme.

Vn priſme triangulaire ſe diviſe en trois pyramides triangulaires égales.

Soit X, un priſme triangulaire, je méne ſur chacune de ces trois faces des diagonales, qui feront ſix triangles par le Th. 1. §. 4. l. 2. donc les triangles BAD, & BDC étant égaux, les pyramides BADF, & B D C F, qui ont méme ſommet, & partant méme hauteur, ſont égales par le Theor. 2e *ſup.* Ayant ôté par la penſée de ce priſme X, ces deux pyramides, il en reſte une troiſiéme, ſçavoir, FCED, laquelle a premierement même ſommet, ſçavoir, D, & partant même hauteur



que la pyramide FBCD , elles ont des bases égales, sçavoir les triangles égaux FBC & FCE, donc elles sont égales; or la pyramide FBCD est la même que BDCF estant formée par les mêmes triangles.



Donc FCED,& BADF seront égales, entre elles, étant égales à une troisiéme, ainsi X sera divisé en trois pyramides égales qui sont BADF, BDCF,& FCED.

Theoreme neuviéme.

Vne pyramide polygone se peut diviser en pyramides triangulaires.

Ce Theoréme se demontre facilement, car la base d'une pyramide poligone est un poligone,qui par consequent se reduit en triangles, sur lesquels concevant des plans élevez le long des côtez de cette pyramide jusques à son sommet, on aura plusieurs pyramides triangulaires, qui seront les parties de la pyramide poligone.

Theoréme dixiéme.

Toute pyramide poligone est le tiers de tout prismes de même hauteur, & qui est sur même base, ou sur base égale.

Car

Car ayant reduit en triangles l'une & l'autre base de ces deux solides, la pyramide polygone sera divisée en pyramides triangulaires, & le prisme polygone en prismes triangulaires: or *par le Th 8 sup.* chacune de ces pyramides triangulaires sera le tiers de chacun de ces prismes triangulaires ; ainsi toute la pyramide polygone sera le tiers de tout le prisme polygone.

Theoréme onziéme.

Un cone est le tiers d'un cilindre de même hauteur sur bases égales.

Un cone est une pyramide d'une infinité de côtez: or une pyramide est le tiers, *par le Th. 10 sup.* d'un prisme de même hauteur qui a une base égale ; donc le cone est aussi le tiers d'un cilindre de même hauteur, & sur même base, ou base égale, puisque un cilindre est un prisme d'un nombre infini de côtez.

Theoréme douziéme.

Un cone est égal à tous les cones de même hauteur, dont les bases prises ensemble sont égales à la sienne.

Ces cones sont des pyramides, ainsi ce Th. n'est pas different du Th. 5 *sup.*

B

AVERTISSEMENT.

IL est evident que la grandeur d'un solide depend de ses trois dimensions , c'est à dire, *de sa longueur , de sa largeur , & de sa hauteur. La solidité d'un parallelipipede , comme on a dit* lemme premier sup. *est faite par la multiplication de sa base par sa hauteur & sa base , depend de la longueur de ses côtez. La solidité d'un cilindre depend de sa hauteur & de sa base ; comme aussi celle du cone ; & puisque la base de l'un & de l'autre , est un cercle dont la surface depend du diametre, pour connoistre la solidité d'un cilindre & d'un cone , il faut considerer sa hauteur & la circonference & le diametre du cercle qui est la base. Ce sont là leurs trois dimensions. On peut dire aussi que la solidité d'une sphere depend de trois dimensions , sçavoir 1° De son diametre. 2° De son plus grand cercle. 3° De son rayon en la maniere qu'on le va dire au Th. 17e qui suit.*

Dans le traité de la Grandeur on a appellé racines *d'un solide ce qu'on nomme icy* dimension.

Theoréme treiziéme.

Les parallelipipedes & les prismes dont les côtez font les mêmes angles, sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions.

S'ils sont rectangles, la chose est claire; car *par le Lem.* 1. leur solidité dépend de la multiplication de leurs dimensions; donc *par la definition des raisons composées, & par la propos.* 8 *l.* 4 *Grand.* la raison qu'ils ont entr'eux est composée de celle de leurs trois dimensions.

S'ils ne sont pas rectangles, mais qu'ils soient semblables, la même chose arrive, car par le *Theor.* 3 § 1. *l.* 3 leurs côtez étant également inclinez, ils sont entr'eux comme les perpendiculaires de leur hauteur : Or les raisons composées d'égales raisons sont égales; donc ces solides semblables, sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions.

Corollaire premier.

Les cilindres dont les axes sont également inclinez, sont entr'eux en raison composée de leurs dimensions.

Corollaire second.

Les pyramides dont les axes ſont également inclinez, ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions.

Cela eſt evident, car elles ſont le tiers des Priſmes qui ſont ſur leurs baſes, & qui ont même hauteur.

Corollaire troiſiéme.

Les cones dont les axes ſont également inclinez, ſont entr'eux en raiſon compoſée des raiſons de leurs dimenſions.

C'eſt une ſuite, car les cones ſont des pyramides.

Theoréme quatorziéme.

Les parallelipipedes ſemblables ſont en raiſon triplée des raiſons de leurs trois dimenſions; ainſi de tous les autres ſolides ſemblables.

Elles ſont en raiſon compoſée par le *prec. Theor.* des trois raiſons de leurs trois dimenſions. Or ces raiſons ſont égales, donc la raiſon qu'elles compoſent, par par la definition de la raiſon triplée, eſt triplée.

Theorême quinziéme.

Les cilindres ſemblables, ſont entr'eux

comme les cubes des diametres de leurs bases.

Ils sont en raison triplée de chacune de celles de leurs trois dimensions, *par le Th. prec.* & par consequent de la raison des diametres de leurs bases : Or les cubes de leurs diametres sont en raison triplée de celle de ces mêmes diametres : Donc puisque les raisons composées d'égales raisons, sont égales, les cilindres semblables sont entr'eux comme les cubes des diametres de leurs bases. Il en est de même des cones semblables, & se démontre de la même maniere.

Theoréme seziéme.

Si les parallelipipedes, dont les côtés font les mêmes angles, ont une ou deux de leurs dimensions égales, ils seront entr'eux comme l'inegale. Il en est de même des prismes, des pyramides, des cilindres & des cones.

Ces solides sont en raison composée de leurs dimensions, donc *par la prop. 6 du l. 4. grand.* S'ils ont quelqu'une de leurs dimensions égales, & les autres inegales, ils doivent estre entr'eux comme l'inégale : Ainsi, par exemple, si deux cilindres ou deux cones sont de même hauteur, ils seront comme leurs bases.

Thoréme dix-septiéme.

Vne sphere est égale à un cone, ou

pyramide polygone, qui a pour axe le rayon de cette ſphere, & pour baſe un cercle, dont le rayon eſt le diametre de cette même ſphere.

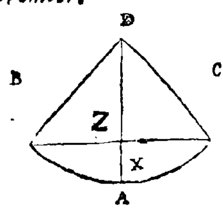
1° En concevant une infinité de cones ou de pyramides poligones, dont le ſommet eſt dans le centre d'une ſphere, & les baſes dans la ſurface de la même ſphere; il eſt evident qu'on peut dire que la ſolidité de cette ſphere eſt égale à tous ces cones, ou pyramides poligones puiſque c'eſt dire que le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

2° Tous ces cones, par le *Theor.* 12ᵉ *ſup.* ſont égaux à un cone qui a même hauteur, à ſçavoir le rayon de cette ſphere, & pour baſe toute la ſurface de cette ſphere qui eſt égale aux baſes de ces cones.

3° Or la ſurface de cette ſphere eſt égale à celle d'un cercle qui a pour rayon le diametre de cette ſphere, *par le Theor.* 13ᵉ §. 3. *ſup.* donc la ſolidité eſt égale à celle d'un cone, dont la baſe &c.

Corollaire premier.

Donc le ſecteur ABDC d'une ſphere eſt égal à un cone, qui a pour hauteur le rayon AB de cette ſphere, & pour baſe la ſurface de ce ſecteur.



Cette surface, *par les 11. & 15. Th §. 3. sup.* est connuë, ainsi on connoistra la solidité de ce secteur, connoissant qu'il est égal à un cone dont la base & la hauteur sont connuës.

Corollaire second.

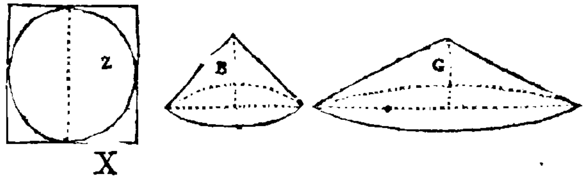
Donc la solidité d'un segment de sphere tel qu'est égale BCD ou X est égale à celle du secteur ABDC, moins le cone Z ou ABC.

Ainsi pour avoir la quantité de X, il faut *par le Cor. preced.* chercher la valeur de tout ce secteur ABDC, & en retrancher le cone Z, dont BC est la base, & AE l'axe.

Theorême dix-huitiéme.

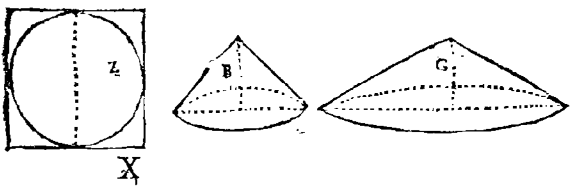
La raison de X cilindre à la sphere Z qui luy est inscrite, est sesquialtere.

Soient B & C deux cones qui ayent pour axe le rayon de la sphere Z, & que le rayon de la base de B soit celuy de la sphere Z, & le rayon de la base de C soit



l'axe ou le diametre de la méme sphere Z alors *par le Coroll. 3^e du Th. 2^e sup.* ces deux cones B & C seront comme leurs bases:

or celle de C eſt quadruple de celle de B; donc le cone C eſt quadruple du cone B; ainſi B, C :: 1, 4. Le plus petit cone B eſt la ſixiéme partie du cilindre X, qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere Z, & pour axe le diametre, car, *par le Th. 11. ſup.* ce cone B eſt le tiers d'un cilindre qui a même baſe que luy, & même axe; par cõſequẽt il eſt la 6ᵉ partie d'un cilindre qui



a même baſe, & un axe deux fois plus grand; ainſi X, B :: 6, 1. *Par le Th. 18. ſup.* le cone C eſt égal à la ſphere Z : on a prouvé que B, C :: 1, 4; ainſi B, Z :: 1, 4, donc puiſque le cilindre X vaut ſix parties telles que la ſphere Z en vaut quatre X, Z :: 6, 4 ; ce qui eſt une raiſon ſeſquialtere.

Theoréme dix-neufiéme.

Les ſpheres ſont entre elles comme les cubes de leurs diametres.

Les ſpheres ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions, toutes les ſpheres ſont ſemblables; ainſi leurs trois dimenſions ont même raiſon: Donc la raiſon qu'elles compoſent eſt triplée de chacune des raiſons de leurs dimenſions, par exemple, de celle de leurs diametres. Or les cubes de ces diametres ſont en raiſon triplée de celle de ces diametres; donc les ſpheres ſont entre elles comme le cubes de leurs diametres,

SECTION V.

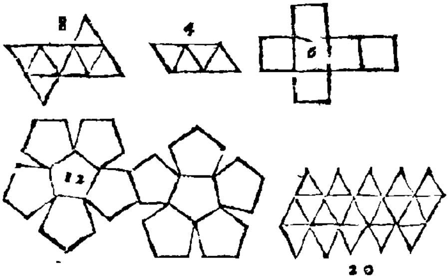
De la maniere d'inſcrire ou circonſcrire à une ſphere les cinq corps reguliers.

AVERTISSEMENT.

POur faire les cinq corps reguliers, il faut couper une ſphere, de ſorte que chaque ſection qui eſt un cercle, comme nous l'alons montrer, ſoit capable du polygone, qui eſt une des faces du corps regulier: Ainſi une ſphere étant donnée, il ne s'agit que de trouver la proportion de ſon diametre avec celuy du cercle capable d'une des faces du corps regulier qu'on veut faire.

Pour entendre cette derniere partie de nos Elemens avant que de la lire, il ſera bon de faire avec du carton les cinq corps reguliers; la ſeule veüe de la figure ſuivante en apprend le moyen.

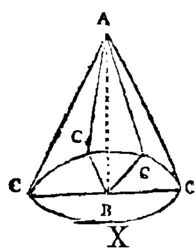
Apres avoir tracé ces figures & coupé le carton on le plie de maniere que les plans qui compoſent ces corps reguliers ſe joignent tous.



Theoréme premier.

Toute ſection d'une ſphere par un plan eſt un cercle.

X eſt la ſection d'une ſphere dont A eſt le centre ; il faut prouver que cette ſection eſt un cercle ; pour cela concevons 1°, que du centre A de la ſphere on fait tomber ſur le plan de cette ſection, que je nomme X une perpendiculaire AB. 2° Que l'on tire du même centre A des lignes telles que AC à tous les points des extremitez de X: toutes ces lignes qui ſont rayons de la ſphere, ſont égales. Elles ſont obliques, puis qu'on ne peut mener de A plus d'une perpendiculaire ſur X : or les obliques égales ont leur

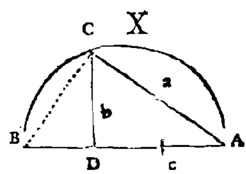


pied également éloigné de la perpendiculaire, *par le th 6, §, 4, l. 1*, donc toutes ces lignes menées des extremitez de X au point B sont égales, & par consequent ces extremitez sont dans la circonference d'un cercle, ainsi X est un cercle.

Lemme.

Si le quarré sur AC est triple de celuy sur CD, je dis que D B est la troisiéme partie du diametre AB.

Soit AC = a & CD = b & DA = c, *par le th. 4, §. 3, l. 3*, $aa = bb + cc$, & puisque par la supposition $3bb = aa$, donc $3bb = bb + cc$: ôtant de part & d'autre bb, on aura $2bb = cc$: on suppose que CD ou b est moyen entre A D ou c & BD ÷ AD, CD, BD ou c, b, BD, *par la propos. 11. liv. 4. Grand.*



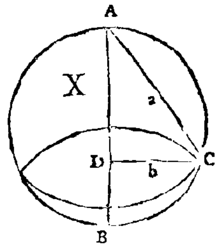
cc ou 2bb, bb : : c ou AD, D B : donc DA sera double de BD, & consequemment D B est un tiers de DA, ce qu'il faloit prouver.

Theorême second.

Le quarré d'un des côtez du tetraëdre

eſt égal à ſix fois le quarré de la 3[e] partie du diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.

Le tetraëdre eſt fait de quatre triangles égaux & equilateraux. Concevons que dans la ſphere X il y a un tetraëdre inſcrit, dont AC ou a eſt un des côtez, & que DC eſt le rayon du cercle dans lequel eſt inſcrit un des triangles equilateraux qui compoſent ce ſolide, par conſequent, *ſelon le th. 7, § 3, l. 3.* le quarré de AC, qui eſt un des côtez du triangle equilateral inſcrit



dans le cercle dont CD eſt rayon, eſt triple du quarré de ce rayon; ainſi aa =, 3bb, partant *par le Lem. prec.* DB eſt la 3[e] partie de AB diametre de la ſphere X: ſoit donc AB = 3c, *par le th. 7. § 1. l. 3.* ÷ 3c, a, 2c; donc 6cc = aa, ce qu'il faloit demõtrer.

Theoréme troiſiéme.

Le quarré du diametre de la ſphere eſt en raiſon ſeſquialtere avec un des côté du tetraedre qui luy inſcrit.

Soit le côté du tetraedre a, & le diametre de la ſphere eſt 3c, *par le theoréme preced* aa = 6 cc. Or le quarré de 3c diametre de la ſphere eſt 9cc; ainſi la raiſon du quarré du côté du tetraedre à celuy du diametre de la ſphere ſera comme 6cc , à 9cc, ou de 6 à 9. qui eſt une raiſon ſeſquialtere.

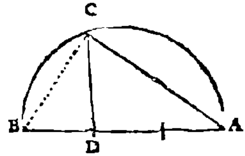
Theoréme quatriéme.

Le côté du Tetraedre eſt incommenſurable en luy même, & commenſurable en puiſſance avec le diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.

Soit comme cy-deſſus A C, ou a, côté du tetraedre, & AB, ou 3c diametre de la ſphere, *ſelon le th. 2. ſup.* 6cc = aa, partãt ∺ 3c, a, 2c; donc 9cc, aa :: 3c, 2c: Or ces nombres 3. & 2. ne ſont pas nombres quarrez; donc *par le theor.* 12. *§.* 4. *l.* 3. a ſera incommenſurable en luy même avec 3 c, & commenſurable en puiſſance. Nous venons de voir dans *le theor. prec.* que aa eſt au quarré du diametre de la ſphere comme 6. a 9.

Probleme premier.

Inſcrire un tetraedre dans une ſphere, ou trouver un cercle capable d'une des faces du tetraedre.

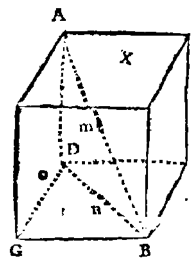


Il faut couper AB diametre de la ſphere en trois parties égales, de ſorte que AD ſoit double de B D : ſur D élever la perpendiculaire DC, laquelle sera le rayon d'un cercle dans lequel ayant fait un triangle equilateral dont AC est le côté, vous aurez une des faces du tetraëdre, comme il est evident, *par le th. 2. sup.*

Theorême cinquiéme.

Le quarré du diametre de la sphere est triple du quarré de chaque côté du cube, ou de l'hexaëdre qui luy est inscrit.

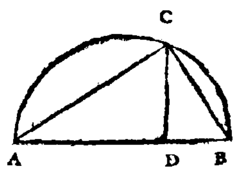
Le cube X est inscrit dans une sphere; soit la diagonale AB= m qui est le diametre de la sphere, la diagonale d'une des faces du cube soit BD= n, soient nommez o, tous les côtez de ce cube qui sont tous égaux. Le quarré de AB est égal à ceux de AD & de DB, c'est à dire mm= nn+oo & celuy de DB est égal à ceux de CD, & de BC; c'est à dire, nn= oo+oo : donc en substituant dans l'equation precedante oo +oo en, la place de nn, on aura mm= oo+oo+oo, ou mm= 3oo : qui est ce qu'il faloit demontrer, sçavoir que le quarré de m ou de AB diametre de la sphere, valoit trois fois le quarré de chaque côté du cube.



Problême premier.

Le diametre d'une ſphere étant donné trouver le côté du cube qui y peut être inſcrit.

Soit AB le diametre de la ſphere où il faut inſcrire un cube. Il faut trouver le côté de ce cube, qui eſt une ligne dont le quarré eſt le tiers du quarré de AB diametre de la ſphere donnée, *ſelon ce qui vient d'être demontré dans le th. preced.* Je diviſe le diametre de la ſphere AB en trois parties, de ſorte que AD eſt double de DB : ſur D j'éleve la perpendiculaire CD, & de C je mene une ligne à B qui ſera le côté du cube que je cherche. Car ſoit BA = 3c & CB = d, *par le th. 7. § 1. l. 3.* ∺ 3c, d, c, donc 3cc = dd. Le quarré de AB, ou de 3c eſt 9cc, donc le quarré de AB eſt triple de celuy de d, qui ne vaut que 3cc. Partant *ſelon le th. 5 ſup.* BC eſt le côté du cube qu'on cherchoit.



En ſuite ſi on veut avoir le cercle capable d'une face du cube, il faut faire un quarré dont CB ſoit un des côtez, & luy circonſcrire un cercle qui ſera celuy qu'on demandoit.

Theoréme sixiéme.

Le côté du cube est incommensurable en luy même,& commensurable en puissance avec le diametre de la sphere.

Par ce qu'on vient de prouver dans la proposition preced. BC,ou,d côté du cube est moyen proportionnel entre tout le diametre & sa 3e partie ∺ 3c, d, c, ainsi 3c , c , : : 3, 1 , ces deux nombres 3 & 1 ne sont pas deux nombres quarrez, partant *par le th. 12. §. 4. l. 3.* BC est incommensurable avec AB en luy-même , mais commensurable en puissance , puisque son quarré est le tiers de AB.

Theoréme septiéme.

Le quarré du côté d'un octaëdre est la moitié de celuy du diametre de la sphere où il est inscrit.

Concevez une sphere dont l'axe ou le diametre soit AB qui soit coupé à angles droits au centre par le plan d'un cercle.

Concevez outre cela dans ce cercle CDEF. un quarré , dont les côtez seront les cordes du quart de cercle , ou de 90 degrez.Concevons de rechef qu'on ait

ait mené des lignes de ces quatre points C, D, E, F, aux extremitez A & B de l'axe AB. *Ayez à la main une sphere où soiēt marquez A & B extremitez de l'axe, & les quatre points C,D,E,F.* 1°Ces lignes forment d'un côté quatre triangles, & de l'autre autant. 2° Toutes ces lignes étant les cordes du quart du cercle ou de 90 degrez, sont toutes egales. Ces huit triangles sont donc equilateraux.

Or comme il est evident ; le quarré de la corde de 90 degrez est la moitié de celuy du diametre: car deux cordes de 90 degrez font un angle droit, dont la base est le diametre du cercle ; ainsi le quarré de ces deux cordes est égal à celuy du diametre, qui est par consequent le double de celuy de chacune de ces deux cordes.

Theoréme huitiéme.

Le côté d'un octaëdre est incommensurable en luy-même, & commensurable en puissance avec le diametre de la sphere où il est inscrit.

Par le Th. preced. le quarré de chaque côté de l'octogone est la moitié de celuy du diametre de la sphere, auquel par cōsequēt il est comme 1 a 2 : or 1 & 2 ne sont pas des nombres quarrez; donc, *par le Th. 3, § 4 l. 3* ce côté est incommensurable en luy-même, avec le diametre de la ſphere, & commenſurable en puiſſance, puiſque ſon quarré eſt à celuy de ce diametre, comme 1 à 2.

Problême troiſiéme.

Trouver le côté d'un octaëdre, & un cercle capable d'une des faces de ce ſolide.

Par le Th. 7, chaque côté de l'octaëdre eſt la corde du quart d'un cercle dont le diametre eſt le même que celuy de la ſphere : La ſphere étant donc donnée, il ne s'agit que de faire un cercle ſur ſon diametre, lequel étant diviſé en quatre, la corde de chaque quatriéme partie, ſera ce qu'on cherche. En ſuite pour avoir un cercle capable d'une des faces de cet octaëdre, il faut faire un triangle equilateral, dont les côtez ſoient égaux au côté trouvé ; & luy circonſcrire un cercle, qui ſera capable du triangle qui eſt une des ſurfaces de l'octaëdre ; ce qu'il faloit faire.

AVERTISSEMENT.

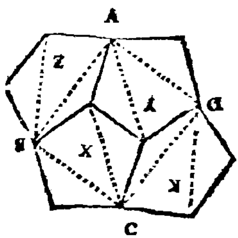
Ayez à la main un dodecaëdre en liſant ce qui ſuit.

Lemme.

Voyez la figure ſuivante.

KXZY ſont des pentagones égaux, qui chacun ſont une des faces d'un dodecaëdre inſcrit dans une ſphere, je mene ſur chacune de ces faces une diagonale de A à B, de B à C, de C à D & de D à A, & aprés avoir fait de même sur toutes les autres qui composent le dodecaëdre. Je dis. 1° Que ces quatre diagonales font un quarré ABCD. 2° Que les diagonales des douze pentagones menées de sorte qu'elles se joignent forment six quarrez égaux à ABCD, lesquels font un cube inscrit dans la même sphere que le dodecaëdre, dont chaque côté, par consequent est égal à la diagonale de chaque pentagone.

1° Toutes ces diagonales sont égales soûtenant des angles égaux. 2° On peut concevoir les quatre points A, B, C, D, dans un même plan qui coupe la sphere où le dodecaëdre est inscrit; car la figure qui est dessus a ses côtez égaux.



3° Cette section de la sphere par le plan ABCD, *par le th. 1. sup.* sera un cercle : or *par le Th. 1. § 3 l. 4.* on ne peut inscrire aucune figure de quatre côtez égaux dans un cercle, que le seul quarré, donc la figure ABCD, qui a ses cotez égaux, & qui est inscrite dans un cercle est un quarré.

4° Tout pentagone ſe peut reduire en trois triangles;partãt la ſurface d'un dodecaëdre compoſée de douze pentagones ſe reduit en trente-ſix triangles. Or chaque quarré égal à ABCD en ſoûtient ſix,comme il ſe voit dans la figure; donc ces trente-ſix triangles ne peuvent être ſoûtenus que par ſix quarrez égaux, qui forment un cube inſcrit dans la même ſphere ; & partant il eſt vray de dire que la diagonale d'un pentagone, qui eſt une des faces d'un dodecaedre inſcrit dans une ſphere, eſt égale au côté du cube inſcrit dans la même ſphere.

Scholie.

Il faut obſerver que cette figure n'eſt pas exacte. Les pentagones n'étant pas égaux ny le quadrilataire ABCD n'étant pas un quarré, mais il eſt impoſſible de repreſenter autrement ſur un plan un ſolide que ſelon qu'on le voit, & non pas tel qu'il eſt, ainſi il faut concevoir ces pentagones tous égaux & ABCD un veritable quarré, comme on vient de le demontrer.

T*heorême neuviéme.*

La mediane, ou la plus grande partie d'un des côtez de l'hexaëdre coupée en moyenne & extrême raiſon eſt le côté du dodecaëdre inſcrit dans une même ſphere.

Je ſuppoſe un dodecaëdre fait dans lequel on a marqué un cube ou hexaëdre. Comme l'on l'a dit dans le Lemme prec.

chaque côté de ce cube est égal à la diagonale de chaque pentagone, dont le dodecaëdre est composé. Mais *par le Th.* 11. §. 1. *l.* 3. la mediane ou la plus grande partie de la diagonale du pentagone coupée en moyenne & extrême raison est égale au côté de ce pentagone ; partant coupant le côté d'un cube ou exaëdre en moyenne & extrême raison, la plus grande partie sera un des côtez de chaque pentagone, dont le dodecaëdre est formé.

Problême quatrième.

Trouver le côté d'un dodecaëdre & un cercle capable d'une des faces de ce solide.

Il faut premierement trouver, *par le Problême* 2 *sup.* le côté d'un cube inscrit dans la sphere proposée. 2° Couper ce côté du cube en moyenne & extrême raison : la plus grande partie sera le côté du dodecaëdre proposé, selon ce qui vient d'être démontré.

Pour avoir le cercle capable d'une des faces du dodecaëdre, il faut faire, *par le Problême* 10. § 1. *l.* 3. le pentagone dont on vient de connoître un des côtez ; en suite luy circonscrire un cercle qui sera ce quon cherche.

Theorême dixiéme.

Le côté du dodecaëdre eſt incommenſurable avec le diametre de ſa ſphere, tant en luy même, qu'en premiere puiſſance.

Soit le diametre de la ſphere b, celuy du côté du cube inſcrit dans la ſphere c+d coupé en moyenne & extrême raiſon dont c, eſt la plus grande partie, qui *par le Th. 9^e ſup.* eſt le côté du dodecaëdre.

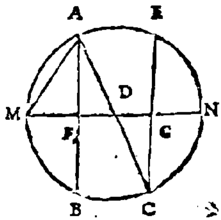
1° *Par le Cor. du Th. 15^e § 4. l. 3.* c, eſt incommenſurable tant en elle-même qu'en puiſſance avec c+d.

2° *par le Theorême 6 ſup.* c+d eſt commenſurable en premiere puiſſance avec b, c'eſt à dire, que cc+2cd+dd eſt cõmenſurable avec bb, puis qu'il en eſt le tiers, il faut donc que cc ſoit incommenſurable avec bb; car s'il étoit commenſurable avec bb il le ſeroit avec le quarré de c+d, *par le Th. 1^er § 4^e l. 3^e.* par conſequent cc eſt incommenſurable en puiſſance avec bb, & *par le Th. 3§ 4 l. 3.* c ſera auſſi incommenſurable en luy-même avec b, donc, &c.

Lemme premier.

MN eſt le diametre d'un cercle, dans lequel les deux cordes AB & CE qui coupent MN à angles droits, ſont paralelles entr'elles, & la diſtance de F G égale à la moitié de chacune; je dis que MF ſera le côté d'un decagone inſcrit dans un cercle dont FA ſera le rayon.

Suppoſant M F ou GN $=$ x & AF $=$ z$+$x : ſi MF ou x eſt le côté d'un decagone dont AF ou z$+$x eſt le rayon; il faut qu'ayant coupé AF en moyenne & extrême raiſon, x en ſoit la mediane, *ſelon le Theorême* 10e § 1er *l.* 3e, & que par conſequent ∺ z$+$x, x, z, ainſi ſi nous démontrons cela, ſçavoir que ∺ z$+$x, x, z, nous avons fait ce qui eſt propoſé.



Puiſque AF $=$ z$+$x; donc AB $=$ 2z$+$2x, & BC $=$ z$+$x, le quarré de AB, qui eſt 4zz$+$8zx$+$4xx, avec celuy de BC qui eſt zz$+$2zx$+$xx, ſont égaux à celuy de AC ou de MN : or par l'hipotheſe M N $=$ 3x $+$ z; car MF & GN ſont chacun égaux à x, & FG $=$ z$+$x : or le quarré de 3x$+$z eſt 9xx$+$6xz$+$zz : mettant donc les deux quarrez de AB & de BC en une ſomme 9xx$+$6zx$+$zz $=$ 5zz$+$10zx$+$5xx, ôtant de part & d'autre 5xx$+$6xz$+$zz, il reſtera 4xx $=$ 4 zz$+$ 4zx; diviſant l'un & l'autre membre par 4, il viendra xx $=$ zz$+$zx; donc ∺ z$+$x, x, z, puiſque le produit de extrêmes z$+$x & z qui eſt zz+zx eſt égal à xx, quarré de la grandeur moyenne x; c'eſt ce qu'il faloit démontrer.

Lemme ſecond.

La ligne AM eſt le côté d'un pentagone inſcrit dans un cercle dont AF eſt le rayon.

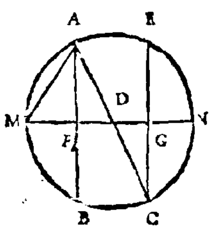
Voyez la figure ſuivante,

MF eſt le côté du decagone dans un cercle dont A F eſt le rayon, comme nous venons de le démontrer: le quarré de AF avec celuy de MF ſont égaux à celuy de A M; donc, *par le Theor.* 8 §. 3, *l.* 3, AM eſt le côté du pentagone.

Lemme troiſiéme,

Le quarré de AF ou de FB, ou de GE, ou de G C lignes égales, eſt la cinquiéme partie de celuy du diametre AC ou MN.

Soit AF = b; donc AB = 2b, & BC = b, le quarré de AB eſt 4bb & celuy de B C eſt bb: or ces deux quarrez qui font 5bb ſont égaux à celuy de AC ou de MN; donc ſce quarré vaut cinq fois celuy de AF.

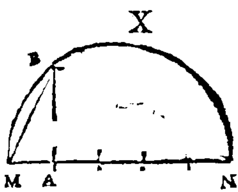


Lemme quatrième.

Trouer la ligne AF, le diametre MN étant donné.

Voyez la figure precedante. Il n'est question que de trouver une ligne dont le quarré soit la cinquiéme partie de celuy de MN, selon ce que nous venons de démontrer dans le Lemme precedant.

Pour cela je faits un cercle X dont MN est le diametre que je coupe de sorte que AM est la cinquiéme partie de MN, *par le Th.* 10. *§.* 3, *l.* 3, le quarré de MN peut cinq fois celuy de MB, ainsi MB sera la ligne que l'on cherchoit, c'est à dire égale à AF de la figure du Lemme premier.



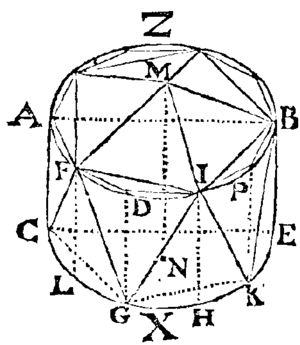
Problême cinquiéme.

MN diametre d'une sphere étant donné faire un icosaëdre.

1° *Par le Lemme* 4 *sup.* ayant trouvé la valeur de AF. *Voyez la figure du premier Lem.* & l'ayant coupé par la moitié: du centre D je faits DF & DG égales à cette moitié, de ſorte que FG = AF, aprés je mene AB & CE, qui coupent MN à angles droits.

2° Prenant AB & CE pour diametres, je faits deux cercles que je nomme Z & X, qui ſont paralelles, *Voyez la figure ſuiv.* étant ſur des plans qu'on ſuppoſe paralelles.

3° J'inſcrits dans chacun de ces deux cercles un pentagone, & de chaque angle je mene des lignes droites à M & à N extremité du diametre de la ſphere, ce qui fait cinq triangles dont les côtez ſont égaux chacun au côté du pentagone inſcrit dans ces deux cercles, *par le Lemme 2 ſup.* ainſi tous les côtez de ces triangles étãt tous égaux aux côtez des pentagones forment deux angles ſolides ſur



les cercles Z & X chacun de cinq triangles equilateraux dont le ſommet eſt aux extremitez M & N du diametre de la ſphere; & voila déja dix faces trouvées de l'icoſaëdre. *On n'a pas jugé à propos de marquer l'angle ſolide ny ſes côtez dont le ſommet eſt en N, de peur de rendre la figure confuſe,* *il y faut suppléir par la pensée.*

4° J'inſcrits encor dans ces mêmes cercles Z & X un decagone, dont je joints les angles qui ſe repondent dans X & Z par les lignes BE, PK, IH, DG, FI, &c. qui par l'hipotheſe ſeront toutes egales aux rayons de Z & de X, 5° je mene les diagonales BK, KI, IG, GF, &c. Les quarrez BP côté du decagone avec celuy de PK, qui eſt égal au rayon de Z & de X ſont égaux à celuy de BK; donc, *par le Th.* 8ᵉ § 3ᵉ *L.* 3ᵉ BK eſt le côté du pentagone inſcrit dans Z & dans X : la même choſe ſe demontre de KI, de IG, de CF, &c. les triangles BKI, KIG, IGF, &c. ont pour baſe les côtez dudit pentagone, ils ſont donc equilateraux entre eux & aux dix qui compoſent les deux angles ſolides, dont nous avons parlé cy-deſſus : par conſequent il y a entre Z & X dix de ces triangles, dont cinq ont leurs baſes ſur Z & les cinq autres ſur X, leſquels avec les dix déja trouvez ſont les vingt triangles égaux & equilateraux qui doivent compoſer l'icoſaëdre, ce qu'il faloit faire.

Corollaire premier.

De ce Problême & des Lemmes precedans il ſuit 1° *Par le Lemme* 3ᵉ, que le quarré du diametre de la ſphere eſt quintuple du quarré du rayon du cercle ou X qui eſt la baſe d'un angle Z ſolide fait de cinq triangles equilateraux..

Voyez la figure du Lemme 4. où on a fait voir que le quarré de AF eſt la cinquiéme partie de celuy de AC ou de MN

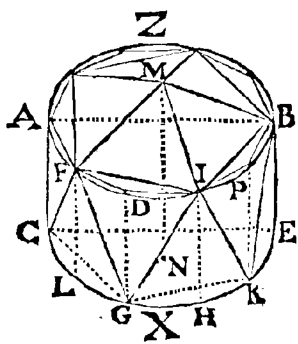
Corollaire ſecond.

2° Le diametre MN eſt composé du côté de l'exagone, ou du rayon des cercles Z & X, & de deux côtez du decagone inſcrit dans ces cercle.

Puiſque MN = MF + FG + GN.

Corollaire 3ᵉ.

3° Les côtez des triangles de l'icoſaëdre ſont égaux aux côtez des pentagones inſcrits dans Z ou X.



Theoréme onziéme.

Les côtez de l'icoſaëdre ſont incommenſurables, tant en eux-mêmes qu'en puissance avec le diametre de la sphere où l'icosaëdre est inscrit.

Par le Coroll. 1. sup. le quarré du rayon des cercles qu'on décrit pour faire l'icosaëdre est la cinquiéme partie ce celuy du diametre de la sphere.

Soit ce quaré bb, partant celuy du diametre de la sphere est 5bb. Ces deux quarrez sont donc commensurables, étans comme 1 a 5. Soit x côté des triangles qui font l'icosaedre, lequel x est un des côtez d'un pentagone inscrit dans un cercle dont b est le rayon, *par le Coroll. 3e sup.* partant, *par le Th. 17e § 4e l. 3e*, bb & xx quarrés du côtê du pentagone dont b est le rayon, sont incommensurables: aussi-bien que leurs racines, x & b & puisque le quarré bb du rayon est cõmensurable avec le quarré du diametre de la sphere, il faut que xx soit incõmensurable avec le quarré de ce diametre; car s'il étoit commensurable avec luy, il le seroit, *par le Th. 1er § 4e l. 3e* avec celuy de b, & si xx & le quarré du diametre sont incommensurables x & le diametre le sont aussi, puisque les raisons des quarrez sont doublées de celles de leurs racines, & qu'ainsi si les doubles sont sourdes, il faut que les composantes le soient aussi: car le produit de deux nombres est un nombre.

Scholie.

Nous n'avons parlé que de la maniere d'inſcrire les cinq corps reguliers dans une ſphere donnée. Si on veut les circonſcrire, ayant trouvé le cercle ou une des faces du corps propoſé eſt inſcrite, il faut circonſcrire à ce même cercle cette même face, qui ſera celle d'un ſolide circonſcrit à la ſphere donnée.

Il n'y a rien à dire touchant la maniere de meſurer les ſurfaces de ces corps. Il eſt clair qu'il ſuffit de meſurer une de leurs faces, & de multiplier en ſuite cette face par le nombre des autres, ce produit donnera la ſurface entiere de ce ſolide. Il eſt evidant que ces ſolides ſont compoſez d'autant de pyramides égales qu'ils ont de faces, qui ſont les baſes de ces pyramides, dont la pointe eſt au centre de la ſphere dans laquelle ces ſolides ſont inſcrits : ainſi il eſt facile de meſurer leur ſolidité.

ELEMENS DE GEOMETRIE, OV DE LA MESVRE DV CORPS.

LIVRE CINQVIE'ME.

De la Methode.

CHAPITRE PREMIER.

L'on peut déduire des Elemens qui ont été expliquez cy-dessus, tout ce qui se peut sçavoir de Geometrie, lors qu'on suit une bonne methode.

IE ne pretends pas avoir épuisé tout ce que l'on peut dire des trois dimensions du corps dont j'ay traité dans les quatre Livres precedans. Les Elemens des Sciences doivent être courts & faciles. On n'y doit renfermer que les proprietez generales du sujet que l'on traite ; on fait assez lors qu'on les explique de maniere qu'un Problême étant proposé, la resolution s'en presente à l'esprit, qui étant plein des premieres veritez, découvre sans peine les veritez particulieres qui en coulent comme de leurs sources. Pour sçavoir ce que nous ne disons point icy, ou plus que nous ne disons il n'y a qu'à étudier avec soin ce qui a été dit. Il seroit même dangereux pour ceux qui s'appliquent à la Geometrie qu'on ne leur laissât rien à faire. On ne l'étudie que pour exercer l'esprit & le former en cherchant avec methode quelque nouveau Theorême.

Il y a plusieurs pratiques aisées pour executer les problêmes de Geometrie. On en peut inventer cent autres qui seront nouvelles. Celles qui s'enseignent ordinairement sont si faciles à ceux qui sçavent les Elemens, que quand le desir d'être court ne me les auroit pas fait passer sous silence, je n'aurois pas crû les devoir rapporter. Il y a une infinité de Livres où tout cela est enseigné. En jettant les yeux dessus on apperçoit d'abord les

les fondemens des pratiques qu'on y propose. Toutes les figures se peuvent reduire en triangles; ainsi ces pratiques consistent à mesurer un triangle, comme aussi ce qu'on peut dire de la mesure des distances des hauteurs & des profondeurs, n'est qu'une application de ce qui a été enseigné dans ces Elemens touchant les triangles & leurs proportions. On a des instrumens qui abregent les operations de ces pratiques. Ces instrumens sont même comme des Corollaires de quelque Theorême; car par exemple, le compas de proportion, avec lequel on divise une ligne selon une raison donnée, n'est qu'une application de ce qu'on démontre des raisons & proportions des triangles, *l. 3. § 1.* Avec le même compas on partage un cercle donné en ses degrez. La pratique qu'enseignent pour cela ceux qui ont traité de l'usage de ce compas, est fondée sur ce que nous avons enseigné, *l. 2. § 3. Pr. 6.* que le rayon d'un cercle est égal à la corde d'un arc de 60 degrez du même cercle. Je dis cela pour exemple, celuy qui sçaura nos Elemens en parcourant en peu d'heures un traité de l'usage du compas de proportion, en emportera tout ce qu'il y a d'utile, ainsi de tous les autres livres semblables.

Lors qu'on étudie la Geometrie dans

le dessein de se rendre l'esprit juste, ce qui doit être la fin de nos études, il ne suffit pas de s'exercer par la recherche de quelques Problêmes. Il faut entreprendre quelque petit traité de Geometrie, pour s'accoûtumer à étendre ses connoissances, à traiter les choses dont on veut parler avec ordre. Il y a bien des choses que nous n'avons traitées que succintement, qu'on peut étendre fort au long. On n'épuisera jamais la Geometrie si entierement, qu'il ne reste assez de matiere pour des traitez particuliers, ausquels personne n'aura encore point touché; & même quand un traité auroit déja été fait, cela n'empêche pas qu'on ne s'y puisse appliquer avec fruit. En comparant son travail avec les ouvrages des Grands Hommes, on reconnoit où on a manqué; ce qu'il auroit fallu faire, & les differentes manieres dont on peut traiter un méme sujet.

Nous n'avons dit que peu de choses des lignes antiparalelles dans la *Scholie du Theor. 6. § 1. l. 3.* Mr Arnaud dans ses Elemens de Geometrie, traite cette matiere avec l'exactitude qui luy est ordinaire. On pourroit donc choisir cette matiere. & en dire & démontrer tout ce qui se peut, & en suite comparer ce que l'on auroit fait avec ce qu'il en a démontré.

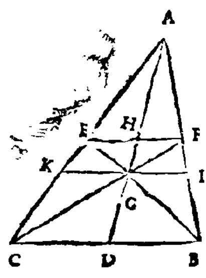
Nous avons démontré *l. 2. §. 4. Th. 1.*

que deux paralelogrammes qui ont même hauteur & même base sont égaux, quoyque leurs côtez soient inégaux. Nous avons démontré la même chose des triangles; de là on peut prendre occasion de rechercher quelles sont les figures qui dans un plus petit circuit, renferment un plus grand espace. Des Theorêmes qui ont été proposez dans ces Elemens on peut tirer plusieurs Corollaires ou veritez, qui mises en ordre feront un traitté sur cette matiere. Clavius a fait ce traitté qu'il appelle, Des Isoperimetres; il est dans ses Commentaires sur la sphere de Sacrobosco.

On peut trouver une infinité de differens sujets qui sont tres utiles. Par exẽple, 1° De la section des espaces. Comment on peut diviser selon une raison donnée tout espace donné. 2° De la transformation des Grandeurs, c'est à dire, de la maniere de trouver une certaine figure dont l'espace soit égal à celuy d'une figure donnée, qui est d'une autre espece; par exemple, un triangle égal à un quarré donné.

Il y a des Geometres qui ont traité en particulier des cordes & des sinus du cercle, qui ont consideré les proprietez des lignes tangentes, des lignes inclinées. Les autres se sont attachez à considerer en particulier les raisons de quelques figures particulieres. Ils ne disent rien dont nous n'ayons jetté les fondemens dans nos Elemens. J'ay fait ces reflexions pour faire remarquer comme l'on peut trouver plusieurs sujets qui regardent la Geometrie pour s'y exercer, & en méme temps augmenter les connoissances dont nous avons enseigné les Elemens.

Pour essay je feray icy quelque consideration sur la Section des triangles. On peut couper un triangle en differentes manieres. 1° Par des lignes tirées du sommet de l'angle sur la base comme dans BAC, menant de A sur BC une ligne. Alors la portion BAD sera à la portion ACD comme BD est à CD, concevant des paralelles à la base BC, si CD est moitié de BD. Toutes ces paralelles seront coupées par la moitié, ainsi BAD sera égal à CAD : si BD est le double de CD, les portions des paralelles dans D A B seront le double des portions de ces paralelles qui sont dans CAD.

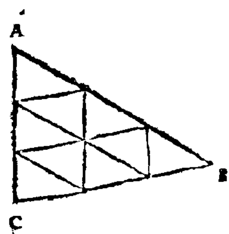


D'où l'on voit que pour couper un triangle dans cette premiere maniere, selon une raison donnée; il faut couper sa base selon cette raison ; & au point de la division mener du sommet une ligne.

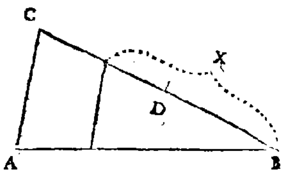
C'est une chose remarquable qu'en menant du sommet de chaque angle une ligne sur la moitié du côté opposé comme BE & CF : ces lignes se coupent en un seul point, de sorte que la petite portion GF est le tiers de toute la ligne CF, ce qui est evident; car ayant mené par E & F une ligne, elle sera paralelle à BC, & DH sera la moitié de AD & EF, la moitié de BC: or puisque les deux triangles BGC & EGF sont semblables, & que EF est moitié de BC ; GF sera moitié de CG, & consequemment GF le tiers de CF; on demontrera de même que EG est le tiers de EB. &c.

2° On peut couper un triangle par une paralelle à sa base. Dans le cas precedent ayant mené par G une ligne paralelle à BC : la portion BCIK sera à AIK comme 5 est à 4 ; car les surfaces des deux triangles ABC & AIK sont entr'elles comme les quarrez de AD & de AE, *par les Th.* 12 *&* 13 *l.* 3. *§* 3. or si AD est 3, AG sera 2 par ce qu'on vient de démontrer, elles seront donc comme 9 est à 4; & partant BCIK ou ABC moins AIK est à AIK comme 9 – 4 est à 4, c'est à dire, comme 5 est à 4.

3° Lors qu'on coupe en parties égales les côtez d'un triangle, & qu'on mene des paralelles par les points de division, on trouve que les espaces augmentent selon les nombres impairs. Le premier espace qui est au sommet ne contient qu'un trianngle ; le second espace en a trois : le troisiéme en a cinq, ainsi de suite.



On peut couper un triangle par une paralelle à la base en la raison qu'on le voudra ; par exemple, ABC, de sorte qu'une portion soit moitié du tout; pour cela 1° il faut couper CB en D, en sorte que BD soit la moitié de BC. 2° Il faut chercher entre BC & DB une moyenne proportionnelle que je nomme X, à laquelle je prends une ligne égale sur BC.



Le triãgle dõt X sera le côté, sera à celuy dont B C est le côté, c'est à dire, au triangle ABC qui luy est semblable en raison doublée de celle de X à BC, & par consequent comme le quarré de X est à celuy de BC: or puisque par l'hipothese ∺ BD, X, BC, *par la prop.* 11ᵉ *l.* 4ᵉ *Grandeur*, ces deux quarrez de X & de BC, sont comme BD à BC,

& partant cõme 1 à 2, puiſque B D eſt la moitié de BC par la conſtruction ; donc le triangle dont X eſt le côté, eſt la moitié du triangle ABC.

CHAPITRE II.

De la methode qu'il faut ſuivre dans l'examen d'une queſtion.

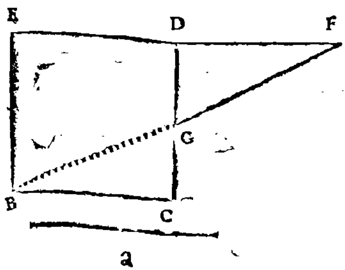
LE ſeul ordre eſt un moyen general pour reſoudre pluſieurs difficultez, & pour trouver des veritez qui ne ſe peuvent déduire de la ſeule cõnoiſſance des proprietez particulieres du corps. Nous en avons vû l'effet dans le 7ᵉ livre de la Grandeur. Je faits icy une application de ce qui a été dit de la Grandeur en general à une eſpece particuliere de grandeur, c'eſt à dire, à la Geometrie ou meſure des corps.

Ce n'eſt que par l'application de l'eſprit qu'on atteint la verité. Il faut donc conſiderer attentivement le ſujet de la queſtion qui eſt propoſée, pour appercevoir ce qu'il en faut penſer. Ce qui nous arrête, c'eſt le peu de fermeté qu'a nôtre eſprit dans la conſideration de la verité. Il ſe diſtrait facilement : mille & mille pẽſées ſe preſentent à luy en foule, qui le font tourner de tous côtez, & ne luy permettent pas de conſiderer une même choſe autant de temps qu'il ſeroit neceſſaire pour appercevoir ce qu'elle eſt. Pour remedier à ce defaut qui eſt la cauſe de pluſieurs autres, il faut tâcher de fixer l'eſprit, & de l'arrêter par quelque objet qui luy ſoit ſenſible, c'eſt à dire, qu'il luy faut exprimer d'une maniere qui frappe les ſens la choſe qui eſt le ſujet de la queſtion. Cela n'eſt pas impoſſible ; car quoy qu'on ne connoiſſe pas entierement les choſes qui ſont propoſées, puis qu'il n'y auroit pas lieu d'en faire une queſtion, auſſi ne l'ignore-t-on pas entierement, on ne l'attaqueroit pas, ſi elle n'avoit quelque priſe, ſi l'on n'ẽn connoiſſoit quelque partie qui pût donner la connoiſſance du tout. De ce qu'on connoit on peut ſuppoſer que la choſe qui eſt propoſée eſt telle ou telle: ce qui ſe comprendra mieux dans un exemple.

On propoſe de couper un des côtez d'un quarré par une ligne menée de l'un des angles de ce quarré juſques à ce qu'elle rencontre un de ſes autres côtez prolongé autant qu'il eſt neceſſaire, de ſorte que la partie de cette ligne qui eſt hors le quarré ſoit égale à une ligne donnée.

Voilà la queſtion. Pendant qu'aucune figure ne la rend ſenſible, l'eſprit a de la peine à s'y attacher, il eſt vagabond. Quoy que l'on ne ſçache point encore quelle eſt la grandeur que l'on cherche, & comment il faut faire ce qui eſt propoſé ; neanmoins on peut ſuppoſer la choſe faite en la maniere ſuivante.

Aprés avoir donné les noms aux grandeurs dans la queſtion, nommant a *la ligne connuë & BCDE, ce quarré propoſé qui eſt auſſi connu, je prolonge ED un des côtez à diſcretion juſque en F, & de B l'un des angles du quarré je mene la ligne BF. Il eſt evident que cette figure repreſente la forme de celle où le côté DC ſeroit tellement coupé en G, que la ligne GF fut égale à la ligne connuë* a, *ainſi je puis ſuppoſer cette ligne GF égale à* a, *& en ſuite examiner cette queſtion comme ſi le côté DC avoit été coupé en la maniere qu'il le doit être. Cette figure me donne de la facilité pour m'appliquer à la queſtiõ propoſée en me la rendant ſenſible.*



Ie la conſidere ſans peine ; & j'en examine toutes les proprietez qui peuvent me decouvrir la verité, c'eſt à dire, le moyen de couper DC, de *sorte qu'ayant mené de B une ligne par le point de cette section, la partie de cette ligne qui sera entre DC, & se terminera au prolongement de ED, soit la ligne que l'on cherche, c'est à dire, que GF soit égale à la ligne connuë* a.

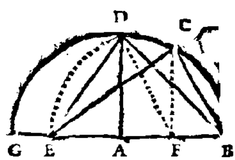
CHAPITRE III.

Il faut premierement, éclaircir une question. En second lieu retrancher ce qui ne feroit que l'embarrasser, & suppléer les choses qui la rendent plus claire. On doit employer des termes propres pour l'exprimer.

NOus avons vû dans le 7e livre de la Grandeur qu'une des choses les plus importantes dans l'examen d'une question, est d'en separer tout ce qui ne sert qu'à la rendre plus obscure, & qu'il faut suppléer ce que celuy qui l'a proposé ne dit point, & dont on peut se servir pour la resoudre.

On dit que si BC est égal au rayon AB, & que BD soit la corde de 90 degrez, qu'ayant pris CE égal à BD, la ligne ED ſera le côté du pentagone inſcrit dans ce cercle dont AB eſt le rayon. La queſtion eſt de trouver ſi cela eſt vray, ou ſi cela eſt faux.

Cette figure avec les ſeules lignes BC, BD, BE ne me fait point appercevoir la demonſtration de cette verité. Mais comme je ſçay que *ſelon le Problême* 1. §. 3. *l.* 3. en coupant le rayon AB par la moitié en F, & faiſant EF égale à FD, la ligne ED ſera le côté du pentagone. J'examine ſi l'operation propoſée n'eſt point la même choſe que celle qui eſt enſeignée dans le lieu que je viens de citer, c'eſt à dire, 1° Si ayant abaiſſé de C extremité du rayon BC une perpendiculaire elle coupe AB en deux parties égales. 2° Et ſi cela étant & ayant de C de l'intervalle BD coupé GB en E, il ſe trouve que FE ſoit égal à FD.

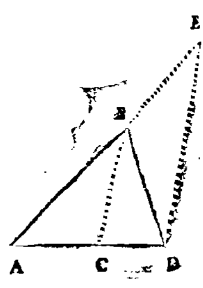


1° Je ſuppoſe AB ou BC = 2a, partant GB = 4*a*. BC, ou 2*a* eſt moyen proportionnel entre GB ou 4*a* & FB, partant le quarré de BC qui eſt 4*aa* ſera égal au plan de GBF, qui ſera ainſi 4*aa*. Diviſant ce plan par GB l'une de ſes racines, c'eſt à dire, par 4*a*, le quotient qui eſt *a* ſera la valeur de FB, ainſi FB eſt moitié de AB qui vaut $2a$, ce qu'on cherchoit premierement.

2° Le quarré de BC, c'eſt à dire, $4aa$ eſt égal à ceux de FC & de FB, celuy de FB eſt aa, donc celuy de FC eſt $3aa$.

Le quarré de FD eſt égal à celuy de AD, qui eſt $4aa$ & à celuy de AF qui eſt aa, ainſi il vaut $5aa$; donc ſi le quarré de EF eſt auſſi $5aa$, alors $EF = FD$: or le quarré de DB égal à ceux des deux rayõs AD & AB, eſt $8aa$, ainſi le quarré de EC égal par l'hipotheſe à BD ſera $8aa$, ce quarré de EC eſt égal à ceux de FC, qui eſt $3aa$ & de EF; donc ôtant $3aa$ de $8aa$ le reſte $5aa$ ſera la valeur du quarré de EF partant EF eſt égal à FD, ce qu'il faloit prouver.

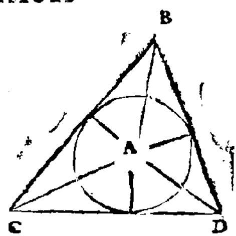
Remarquez bien que ce qui nous a facilité la demonſtration precedante, c'eſt que nous avons éclairci la queſtion, & donné des noms convenables aux lignes propoſées, ayant nommé $2a$ le rayon du cercle. L'éclairciſſement d'une queſtion conſiſte ſouvent à faire une figure qui l'exprime bien. En voicy un exemple.



Si l'angle ABD eſt coupé par la moitié par la ligne BC, on dit que AB, AC : : BD, CD. Pour le démontrer je mene DE paralelle à

BC. Je prolonge AB jusques en E ; ainsi les angles ABC & AED sont égaux : or l'angle CBD= ABC= BDE, puis qu'ils sont fait par l'oblique BD sur les paralelles BC, DE. partant AED= BDE, ainsi EBD est un triangle isoscele, ainsi BD= BE : or les triangles BAC & EAD étant semblables AB, AC : : BE, CD mettant donc à la place de BE son égale BD, alors AB, AC : : BD, CD, ce qu'il faloit prouver.

On dit que la surface d'un triangle est égale à la moitié de la somme de ses trois côtez multipliez par le rayon d'un cercle qui luy est inscrit. La seule veüe de cette figure démontre que cela est veritable. Des angles du triangle BCD ayant mené des lignes au centre A du cercle qui luy est inscrit, on fait trois triangles égaux ensemble au triangle BCD, lesquels ont pour hauteur le rayõ de ce cercle. Ces trois triangles sont égaux

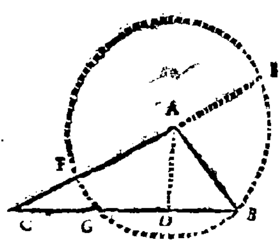


à un, dont la base est égale aux trois côtez de BCD, & qui a pour hauteur le rayon du cercle inscrit : donc la surface de ce triangle est égale au produit de la moitié de sa base par sa hauteur, qui est la même chose que ce qu'il faloit prouver.

Voyons encor par un autre exemple combien la maniere d'exprimer une question par une figure convenable en facilite la resolution.

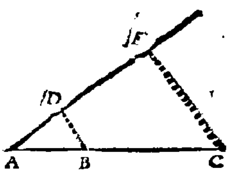
Dans un triangle comme ABC, si de l'angle CAB on mene une perpendiculaire sur BC, la somme des deux côtez AB, AC est à BC base de l'angle que ces deux côtez comprennent comme la difference de CD & DB est à celle de AC & AB.

Pour trouver la demonstration de ce Theorême & l'exprimer d'une maniere qui en facilite l'invention. De A comme centre, & de l'intervalle AB le plus petit côté, je faits un cercle ; & puisque AB = AE, CE est la somme des côtez AC & AB, & que AF = AB ; CF est leur difference.



Puisqu'aussi DB = DG la ligne GC sera la difference entre CD & DB : ainsi voilà une expression ou une figure qui marque ce que l'on cherche. Après quoy la questiõ se resoud facilemẽt, car *par la Scholie du Th. 6 l. § 1.* les lignes CE & CB sont coupées reciproquement en F & en G, ainsi CE, CB :: CG, CF, ce qu'il faloit démontrer.

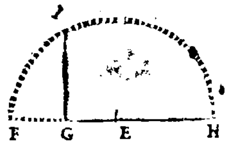
Pour construire une figure, selon que la question le requiert, il est bon de sçavoir qu'on peut faire toutes les operations de l'Arithmetique avec le compas & la regle. On peut ajoûter une figure avec une autre, ou retrancher la plus petite de la plus grande. Pour la multiplication d'une ligne par une ligne, c'est à dire pour trouver une ligne qui soit égale au produit de deux lignes, comme AD & A C, il faut prendre sur AC la ligne AB égale à l'unité, & mener une ligne AD qui fasse un angle à discretion avec AB : je tire une ligne par D & B, & une autre par C qui luy soit paralelle, ce qui étant fait, AE sera la ligne que l'on cherche : car AB, AD :: AC, AE, donc le produit des extrêmes AB & AE est égal au produit des moyens AD, AC ; or AE étant multiplié par AB qui est l'unité, n'augmente point donc AE, qui est une 4ᵉ proportionnelle sera égale au produit de AD par AC ce que l'on cherchoit.



Si l'on veut diviser AE par AC ayant pris AB égale à l'unité, & mené par B une paralelle à CE, on aura AD qui sera la valeur de AE divisé par AC, car

AB, AD :: AC, AE, & l'unité eſt au quotient d'une diviſion, comme le diviſeur eſt à la grandeur diviſée.

S'il faut tirer la racine quarrée de GH, je luy ajoûte en ligne droite FG qui eſt l'unité, & diviſant FH en deux parties égales au point E : du centre E je faits le cercle FIH, élevant en ſuite du point G une ligne droite juſques à I à angles droits ſur FH, la ligne GI eſt la racine que l'on cherche : car



÷ FG, GI, GH, donc le quarré de GI eſt égal au produit de FG & GH : or FG étant l'unité, elle n'augmente point la valeur de GH en la multipliant, ainſi GH eſt égale au quarré de GI, qui par conſequent eſt la racine de GH. Par ce même moyẽ on peut trouver une ligne qui ſoit égale à la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas quarré, par exemple de 18, car prenant GH égale à 18, & luy ajoûtãt FG égale à l'unité & du milieu de cette ligne faiſant un cercle, &c. la ligne GI ſera égale à la racine quarrée de 18, qui ne peut être exprimée par nombre, comme on l'a demontré.

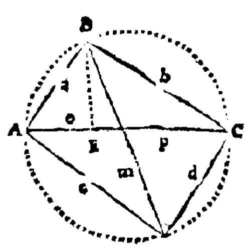
CHAPITRE

CHAPITRE IV.

Ayant supposé la chose que l'on cherche, telle qu'elle doit être, en considerant les proprietez qui luy conviennent, l'on connoît si ce qu'on propose est possible, & le moyen de resoudre la question.

APrés que la figure a été faite telle qu'elle se doit être, selon que la question a été proposée, on doit considerer les proprietez qui suivent, ou de la supposition, ou de la construction de la figure. Si ces suites ou consequences se contrarient, on découvre par là l'impossibilité de la chose qui est proposée, si cette impossibilité ne paroît pas, & qu'ainsi on ait sujet de croire la question possible, on cherche les moyens de la resoudre, qui sont 1° La connoissance des proprietez qui par les Elemens doivent convenir à la figure qu'on examine. 2° La connoissance des angles que font les lignes qui composent cette figure, par lesquels on découvre les rapports de ces lignes. 3° Les raisons & les proportions de ces lignes étant connuës, on va de connoiſſance en connoiſſance: car comme on l'a vû dans les Elemens, lors que les trois premiers termes d'une proportion ſont connus on peut connoître le quatriême. Dans une progreſſion ſi on connoit ſeulement les deux premiers, on peut connoître tous les autres. 4° On ſçait que des lignes ſont proportionnelles, lors que les triangles qu'elles forment ſont ſemblables, c'eſt pourquoy il faut quand cela ſe peut, reduire toutes les figures en triangles qui ſoient ſemblables.

. C'eſt par ce moyen que nous allons trouver la demonſtration de cette propoſition. Que *le produit ou le rectangle fait des diagonales AC & BD, eſt égal à la ſomme des rectangles BC par AD & de AB par DC, côtez oppoſez du quadrilataire ABCD inſcrit dans un cercle.*



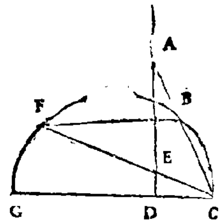
Je mene BE de ſorte que l'angle ABE $=$ DBC & par conſequent l'angle CBE eſt égal à l'angle ABD : ſoit AE $= o$ & EC $= p$ & $o + p$, c'eſt à dire, AC $= q$; ainſi comme les angles ADB & ACB ſont égaux, étant appuyez ſur le même arc, il s'ensuit que les triangles BDA & BCE sont semblables; donc BD, AD : : BC,CE ou m, c, : : b, p, ainsi le produit de BD par CE est égal à celuy de AD par BC, c'est à dire, $mp = bc$.

Les triangles BDC, BAE sont semblables, puisque par la construction ABE = DBC, & que BAC & BDC ont pour mesure la moitié de l'arc BC : donc BD, CD : : AB, AE, ou m, d, : : a, o; donc le produit de BD par AE est égal à celuy de CD par AB, c'est à dire, que $mo = da$: or les produits de BD par AE & par CE parties de AC sont égaux à celuy de BD par AC; c'est à dire, $mo + mp = qm$; ainsi puisque $mp = bc$ & $mo = ad$; donc $qm = bc + ad$; c'est à dire, que le produit des diagonales est égal à celuy des côtez opposez du quadrilataire.

Cette proposition est tres estimée par les Geometres, à cause de l'usage étendu qu'on en peut faire dans la construction des tables des sinus.

Nous avons expliqué les proprietez des triangles & leurs raisons, de maniere qu'on peut aller fort loin par l'analogie des triangles.

AD est une ligne infinie perpendiculaire sur le diametre GC, ayant mené de C deux lignes dont la premiere CF coupe AD en E; & la seconde coupe le cercle en B, & AD au point A, on dit *que le rectangle de CF par CE est égal au rectangle de AC par BC.*

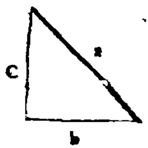


Pour le démontrer je mene de F à B une ligne. L'angle BFC a pour sa mesure la moitié de l'arc BC, qui est aussi la mesure de DAC : les deux triangles ACE& BFC ayans donc l'angle ACF commun, & par consequent deux angles égaux, les troisiémes sont égaux FBC= CEA, donc AE & BF sont antiparalelles:donc AC,CF : : EC,BCpartant le rectangle des moyens CF, & EC est égal à celuy des extrêmes AC & BC; ce qu'il faloit prouver.

Il en est de même de toute autre ligne menée de Cà la ligne AD: cōme aussi de celles qui sont menées de G à la ligne AD.

Il faut aussi remarquer que deux rectangles, l'un fait par une ligne qui vient de C,l'autre par une ligne qui viēt de G, sont ensemble égaux au quarré du diametre, ce qui est evident, car le rectangle fait de DC par CG avec celuy qui est fait de DG par CG est égal au quarré de GC, puisque GD+DC= GC.

Ce que nous avons démontré en son lieu, que dans un triangle rectangle, le quarré de l'hipothenuse est égal aux quarrez des côtez, est une source feconde d'où l'on peut tirer plusieurs consequences ; car si *abc* est un triangle rectangle dont *a* est l'hipothenuse, par consequent $aa = bb + cc$, par consequent $aa - bb = cc$, par consequent $aa - cc = bb$; ce qui donne moyen d'exprimer



la même grandeur en differentes manieres, car par tout où sera aa je puis placer $bb + cc$, où sera bb mettre $aa - cc$, où sera cc mettre $aa - bb$, selon qu'il sera commode.

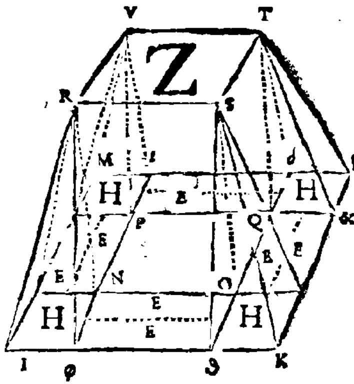
En examinant un Problême, il faut premierement chercher s'il est possible, car on se donne souvent beaucoup de peine en vain. On propose de trouver la demonstration de la regle suivante pour avoir la solidité d'un fragment de pyramide : j'appelle Z un tel fragment dont les bases sont paralelles: l'inferieure est 36, & la superieure 9, entre lesquels nombres 18 est moyen geometrique. On dit que *si on ajoûte ces trois nombres qui font 63, qu'on les multiplie par le tiers de la hauteur de ce fragment, qui est 2, le produit 126 sera la solidité de ce fragment.* On demande que je trouve la demonstration de cette regle.

J'examine premierement, si je n'appercevray point quelque contradiction manifeste qui m'aprêne que cette regle est fausse, avant que de me fatiguer à en rechercher la demonstration. Je considere qu'elle est toute la solidité de la pyramide entiere, dont le fragment est connu : ayant trouvé cette valeur, j'en ôte celle de la petite pyramide qui avec le fragment proposé fait la grande pyramide entiere. Si aprés cela le restant est 126, c'est une marque que la regle est bonne ; & afin que ce ne soit pas un cas particulier ; j'examine si la même chose arrive en d'autres pyramides: aprés quoy m'étant assuré que la regle proposée est bonne, j'en cherche la demonstration.

Comme la regle dit qu'il faut 1° ajoûter dans une somme les deux bases de la pyramide Z ; & le moyen proportionnel entre ces deux bases; 2° multiplier cette somme par le tiers de la hauteur de Z ; cela me fait juger qu'il faut que cette somme soit le triple de la base d'un prisme égal à Z ; car multiplier le triple de la base d'un prisme par le tiers de sa hauteur, c'est la même chose que de multiplier sa base par toute sa hauteur.

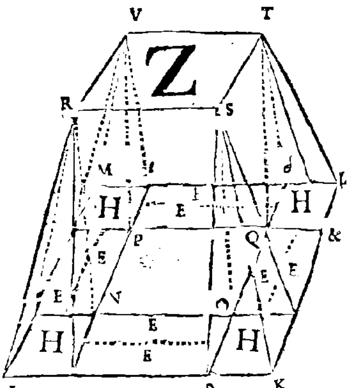
Je nomme B la base superieure, D l'inferieure, ainsi B est égal à RSTV, ou NOPQ, qui est la même chose & D à IKLM. & C à un plan qui est moyen geometrique entre B & D : selon que nous venons de dire, $B+C+D$ est le triple de la base d'un prisme égal à Z.

Si C étoit moyen Arithmetique entre B & D alors $B+D$ seroit double de C partãt $B+C+D = 3C$, mais puisque C est moyen Geometrique entre B & D, la differẽce de B à C n'est pas la même que celle de C à D, par consequent $B+C+D$ excede le triple de C, de l'excês de la difference de D à C par dessus celle de B à C : lequel excês je nomme G : ainsi $B+C+D-G = 3C$, ou $B+C+D = 3C+G$, & puisque $B+C+D$ est le triple de la base d'un prisme égal à Z donc $C+\frac{1}{3}G$ sera égal à cette base, ce qui est vray, comme nous l'allons démontrer, aprés avoir examiné de quelles parties est composé le solide Z.



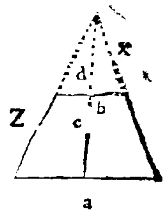
Il est constant que Z est égal 1° au parallilipipede NQRT ; donc NOPQ est la base. 2° à quatre prismes égaux chacun au prisme O & ST, qui ont pour base chacun le paralelogramme EE, ou à quatre parallelipipedes égaux qui ont chacun E moitié de EE pour base. 3° à quatre pyramides égales chacune à la pyramide KOS, dont la base est H, ou à quatre prismes, dont le tiers de H est la base, & OS la hauteur : ainsi la base du solide égal à Z est la valeur de NOPQ, plus 4E, plus quatre tiers de H, à quoy il faut montrer, que $C + \frac{1}{3}G$ est égal, ou que $B + 4E + \frac{4}{3}H = C + \frac{1}{3}G$.

Il est evident que 4E + B, c'est à dire, 4E, plus NOPQ sont égaux à φιδϑ, or ce parallellogrãme est moyen Geometriq; ẽtre le quarré B & le quarré D, ou entre IKLM



& NOPQ, puis qu'il est produit par la multiplication des racines de B & de D, c'est à dire, de φι par ιδ, dõc il est aussi égal à C, qui par l'hipothese est un moyen proportionnel entre B & D, ou entre IKLM & NOPQ : il ne reste donc plus qu'à faire voir que $4H = G$: or 4E est la difference entre C & B & 4E + 4H est la difference entre D & C : l'excez de 4E + 4H par dessus 4E, difference de C avec B, eſt 4H : donc $4H = G$, qui eſt le même excês. Nous avons dit que $B + 4E + \frac{4}{3}H$ eſt égal à la baſe du ſolide égal à Z; Donc puiſque $C = B + 4E$ & $G = 4H$ il faut que $C + \frac{1}{3}G = B + 4E + \frac{4}{3}H$, ce qu'il faloit prouver.

Je joindray à la demonſtration precedante celle qui ſuit qui eſt plus courte; elle peut ſervir d'exemple de la difference qu'il y a entre éclairer & convaincre l'eſprit. Soit a la baſe inferieure, b la ſuperieure du fragment Z dont c eſt la hauteur, d eſt le reſte de l'axe qui manque pour achever la pyramide. En mulipliant aa par tout l'axe $c + d$, le produit $aac + aad$ ſera le triple de toute la pyramide, d'où ayant ôté bbd, qui eſt le triple de la petite pyramide X, on aura $aac + aad - bbd = 3Z$: ſelon la regle propoſée dont on recherche la demonſtration $aac + bbc + abc = 3Z$ (car remarquez que je multiplie $aa + bb + ab$ non par le tiers de la hauteur de Z, mais par toute la hauteur c) il faut donc demontrer que $aac + bbc + abc = aac + aad - bbd$.



1° $a - b, b :: c, d$; multipliant $a - b$ & b par $a + b$, on a $aa - bb$ & $ab + bb$, ainſi $aa - bb, ab + bb :: c, d$: multipliant les extrêmes & les moyens on a $aad - bbd = abc + bbc$:

à la place de $aad - bbd$, ſubſtituant $abc + bbc$ qui luy eſt égal : on aura $aac + abc + bbc = aac + aad - bbd$, ce qu'il faloit prouver

CHAPITRE V.

Les principales Regles de la Methode.

POur rendre ce diſcours de la Methode plus intelligible, je rangeray de ſuite les principales Regles, comme je l'ay fait dans le 7e Livre de la Grandeur.

Premiere Regle.

Tout n'étant pas inconnu dans une queſtion, on en ſçait aſſez pour repreſenter la choſe dont il s'agit, & la ſuppoſer comme faite, & c'eſt par là qu'il faut commencer.

C'eſt ce que nous venons de dire dans les Chapitres precedens.

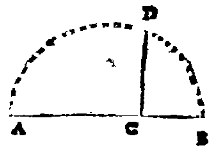
Seconde Regle.

Selon qu'une queſtion eſt propoſée, nous pouvons connoiſtre ſi pour la conſtruction de ce qu'il faut faire il dépend de nous de choiſir certaines grandeurs, & par conſequent ſi la queſtion eſt determinée ou indeterminée.

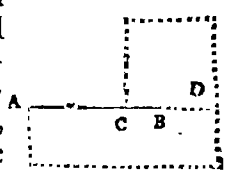
On propoſe de couper la ligne AB,

de ſorte que le rectangle de ſes deux parties, ſoit égal à un quarré d'une de ſes parties.

Je coupe AB au hazard en C. J'éleve la perpendicul. CD moyenne entre AC & BC dont le quarré eſt égal au rectangle de AC & & de BC: cette ligne CD qui ſera plus petite que AB, ſera une de ſes parties; ainſi j'ay ſatisfait au Problême. Je pouvois couper AB ailleurs qu'en C; ce Problême eſt donc indeterminé, c'eſt à dire, qu'on y peut ſatisfaire en differentes manieres.



Un Problême eſt dit determiné, lors qu'il ne peut être fait qu'en obſervant une certaine choſe qui le determine, & qui ne dépend point du choix de celuy à qui il eſt propoſé. Par exemple, ſi on propoſe de prolonger AB diviſé en C, juſques en D, de ſorte que le quarré de CD ſoit égal au rectangle de AD & de BD; alors comme ce prolongement BD eſt déterminé, c'eſt à dire, qu'il a une certaine longueur precise, ce Problême eſt determiné.



On connoit qu'un Problême eſt indeterminé lors qu'on ne trouve point d'equations entre les grandeurs dont il est parlé dans ce Problême: car il est facile de trouver des equations entre deux grandeurs determinées, lors qu'on en connoît les rapports. Par exemple, si Z est le tiers de X, il est evident que $3Z = X$, & si la difference de Z à X est b que $Z + b = X$ ou $X - b = Z$: ainsi quand on ne trouve point d'equations, c'est une marque qu'il n'y a point de rapport determiné entre les grandeurs qu'on propose de trouver, & par consequent que ces grandeurs sont indeterminées, que celuy qui propose le Problême n'en avoit point de particulieres, ainsi on en peut supposer de telles, que par leur moyen on peut satisfaire à ce qui est proposé.

C'est à quoy il faut bien prendre garde, car dans un Problême indeterminé, toutes les grandeurs qu'on peut choisir à discretion sont connuës, puis qu'on les choisit : ce qui fait qu'aprés ce choix, le Problême qui auparavant estoit difficile, devient tres aisé.

Troisiéme Reglé.

On doit étudier avec soin ce qu'il faut chercher dans une question ; en suite marquer ce qui est connu, & le distinguer de ce qui ne l'est pas.

C'est une regle de bon sens que nous

avons expliquée dans le 7e Livre de la Gr. Nous avons dit que les Grandeurs connuës se marquent avec les premieres lettres de l'alphabet, & les inconnuës avec les dernieres.

Quatriéme Regle.

Dans une question on découvre quelle est la valeur d'une grandeur inconnuë par les proprietez de la figure qui a été faite pour resoudre cette question, & par les rapports connus que ces grandeurs inconnuës ont avec celles qui sont connuës.

Si par exemple x est le côté d'un triangle rectangle dont les deux côtez a & b sont connus; il est evident que si x est l'hipothenuse $xx = aa + bb$, si b est l'hipothenuse $bb - aa = xx$.

On reduit, comme il a été dit, les figures en triangles dont on connoit les angles par la construction de la figure, & par les cercles dans lesquels on peut les concevoir inscrits ou circonscrits. Si ces triangles sont semblables, on découvre en suite les raisons & les proportions de ces lignes. Quand on connoit le rapport d'une grandeur inconnuë, avec celle qui est connuë, elle devient connuë, car si x est le tiers de b, donc $3x = b$; si x est moyenne proportionnelle entre b & c, donc $xx = bc$.

Cinquiéme Regle.

En examinant quels sont les rapports des grandeurs dont parle le Problême qui a été proposé, on ouvre le moyen de les exprimer en deux manieres, ce qui s'appelle, equation.

Car si je sçay que x eſt l'hipothenuſe d'un triangle rectangle dont b & c sont les côtez, puiſque $xx = bb + cc$: J'ay deux noms ou deux ſignes pour exprimer la même grandeur ; au lieu de xx je puis mettre $bb + cc$: ſi je ſçay que $x + b = z$; par tout où ſera $x + b$, je puis mettre z en ſa place : ſi x eſt le tiers de b, j'exprimeray la même grandeur en l'appellant ou x ou $\frac{1}{3}$ b ; ainſi en connoiſſant les rapports des grandeurs, on peut trouver des expreſſions differentes quant à leurs ſignes, qui n'ont qu'une même valeur ; ce qui eſt d'une grande utilité.

Sixiéme Regle.

Il faut exprimer les differens termes d'une queſtion ; de ſorte que ſi cela ſe peut, il n'y ait qu'une ſeule lettre inconnuë.

C'eſt à dire, qu'il n'y ait qu'une des dernieres lettres de l'alphabet dont on ſe ſert pour marquer les grandeurs inconnuës. Cela ſe peut faire, parce que comme nous venons de le dire, ce qu'on connoît d'une queſtion ouvre le moyen d'exprimer en differentes manieres la même grandeur, & quand cela ne ſe peut pas, c'eſt une marque que le Problême eſt indeterminé: ainſi on peut alors choiſir à diſcretion des grandeurs connuës, avec leſquelles on pourra reduire les expreſſions de tous les termes de la queſtion, de ſorte qu'il n'y ait qu'une des dernieres lettres de l'alphabet.

Septiéme Regle.

Ayant une equation, ou une double expreſſion, dans laquelle il n'y a qu'une grandeur inconnuë, il faut faire en ſorte que tout ce qui eſt connu ſe trouve d'un des côtez du ſigne de l'egalité, & qu'on faſſe paſſer de l'autre côté ce qui eſt inconnu.

Si par exemple, $bb = xx + aa$, la grandenr inconnuë xx étant mélée avec aa, qui eſt une grandeur connuë, je faits paſſer aa de l'autre côté, & vient $bb - aa = xx$.

Lors que cela ſe peut faire, & qu'un des membres de l'equation eſt tout connu, & que dans l'autre membre la grandeur inconnuë ſe trouve ſeule, la queſtion eſt reſoluë, car ſi $bb - aa = xx$, ayant ôté aa de bb, ſuppoſant que le reſte ſoit cc, nous aurons cette equation $cc = xx$, partant $c = x$.

Je ne repete point icy par quels moyens on peut faire passer une grandeur d'un membre dans un autre ; cela a été enseigné en son lieu l. 7[e] de la Grandeur.

Huitiéme Regle.

Il faut reduire les termes d'une question aux termes les plus simples.

Nous avons parlé avec étenduë de ces reductions *l. 7[e] Grandeur.* Nous y avons vû qu'un des grands secrets de la methode est de donner des noms convenables. On peut diviser un tout en tant de parties qu'on voudra, & le nommer par une seule lettre, ou par plusieurs qui expriment les parties de ce tout. Par exemple, je puis supposer que B est divisé en trois parties dont chacune est b, ainsi puisque $B = 3b$, selon qu'il sera à propos, je marqueray la même grandeur, ou par B, ou par $3b$.

Il faut reduire les differentes grandeurs d'une question aux mêmes signes: ce qui se peut faire en differentes manieres. Par exemple, si $\div\!\!\div b, x, z, y$, en supposant $b = 1$, je puis exprimer ces quatre termes b, x, z, y de cette maniere où il n'y a qu'un seul signe $\div\!\!\div 1, x, xx, xxx$; car *par la pr. 11. l. 4. G.* b ou 1. est à z comme le quarré de b ou de 1, est à celuy de x. c'est à dire $b, z :: bb, xx$, ou $1, z :: 1, xx$, ainsi puisque $xx = z$, je puis substituer xx à la place de ce de z, & *par la prop. 12 l. 4. Gr.* $b, y :: bbb, xxx$, ou $1, y :: 1, xxx$: donc puiſque $x^3 = y$, au lieu de y je place x^3, ainſi je reduits ces quatre grandeurs b, x, z, y, à celles-cy $1, x, x^2\ x^3$. Il y a cent manieres ſemblables.

CHAPITRE VI.

Les Problêmes que l'on entreprend de reſoudre par l'ordre qui eſt icy expliqué, & que nous avons appellé ailleurs Analyſe, ſe diſtinguent en certaines claſſes : ils ſont ou lineaires, ou plans, ou ſolides.

LOrs qu'on a reduit l'equation dont on ſe ſert pour la reſolution d'un Problême, aux termes les plus ſimples ; ce Problême eſt appellé ou lineaire, ou plan, ou ſolide, ſelon que le membre de l'equation qui eſt inconnu, eſt d'une, ou de deux, ou de trois dimenſions. Si par exemple $x = b$, comme x n'a qu'une dimenſion, ce Problême qui ſe reſoud par cette equation eſt lineaire. Dans cette equation $xx = ab + xb$, la grandeur x monte juſques au ſecond degré : x eſt un plan, ainſi le Problême pour la reſolution duquel cette equation eſt employée, ſe nomme plan. Enfin un Problême eſt ſolide lors que l'equation dont on ſe ſert pour le reſoudre eſt de pluſieurs dimenſions, comme celle-cy, $xxx = xd + aa + xa$, ou x, monte à la troiſiéme dimenſion, ainſi de ſuite.

Tous les Problêmes ne peuvent pas être lineaires, parce que l'on ne peut pas tellement debarraſſer les grandeurs connuës des inconnuës, que les unes & les autres ſe trouvent ſeparément comme dans cette equation où je ſuppoſe qu'aprés toutes les reductions poſſibles, on a $xx = xb + aa$; vous voyez que x eſt mélé avec b, l'inconnu avec le connu, de ſorte que l'on ne peut pas dire preciſément quelle eſt la valeur de x, & le comparer avec une grandeur toute connuë, à laquelle il ſe trouve preciſément égal.

Voicy comme on arrive aux equations de pluſieurs dimenſions. Lors qu'on ſçait par les conditions d'une queſtion, qu'une grandeur telle que a étant multipliée par elle-même, eſt égale au produit de x multiplié par z deux grandeurs inconnuës, & qu'on connoit le rapport qu'ont entr'elles ces grandeurs inconnuës, par exemple que $x = z - a$, multipliant z par x, ou par $z - a$, on aura cette equation $zz - za = aa$ ou $zz = aa + za$, laquelle equation eſt de deux dimenſions, & par confequent le Problême par lequel l'on cherche les valeurs de x & de z eft plan.

On fçait que le produit de ces trois grandeurs z, x, y, eft égal au cube de a: on a trouvé par ce qui eft connu dans la queftion que $z = x + b$, & $y = x + c$, ainfi multipliant ces trois grandeurs, x, $x + b$, $x + c$, par elles mêmes, on a cette equation $a^3 = x^3 + xxb + xxc + xbc$, laquelle equation a trois dimenfions, ainfi le Problême eft folide.

On reduit à de certaines formules les equations de deux ou de plufieurs dimenfions. On les transforme en differentes manieres par les additions ou diminutions qu'on y peut faire pour reduire à des formes convenables qui en facilitent la refolution. Voyez le 3e Liv. de la Geometrie de Defcartes, où cela eft expliqué exactement ; comme auffi dans les Elemens de Mathematique du P. Prefter. Je ne veux point toucher prefentement à cette matiere ; parce que fon utilité regarde les Elemens des lignes courbes, ainfi je referve à ce lieu d'en traitter à fond. Les Problêmes folides ne fe peuvent refoudre, parce que nous avons enfeigné dans les deux premiers volumes de nos Elemens ; ainfi ce feroit inutilement que je parlerois des preparations que l'on doit faire d'une equation de plus de deux dimenfions ;

pour la resoudre, puisque cela ne se peut faire que par le moyen des lignes courbes dont l'on n'a point encor parlé.

Il est facile de reduire les equations de deux dimensions aux mêmes formules, par exemple à celle-cy $xx = aa - xd$ ou $xx = aa + xd$: car si $xx = ab - xd$, comme ab est une grandeur connuë en prenant $ab = cc$ j'auray cette equation $xx = cc + xd$. Pour changer le plan ab dans un quarré il faut chercher entre a & b une moyenne proportionnelle, laquelle étant nommée c, puisque $cc = ab$, je puis substituer cc en la place de ab. Si $xx = xd + c$, puisque c est une grandeur connuë, je puis supposer que sa valeur est égale à la grandeur bb, ainsi que $xx = bb + xd$: or pour trouver le quarré bb qui égale c, je cherche une moyenne proportionnelle entre l'unité & c, laquelle étant nommée b, il faut que $bb = 1c$, ou $bb = c$, puis qu'une grandeur multipliée par l'unité ne devient pas plus grande aprés cette multiplication.

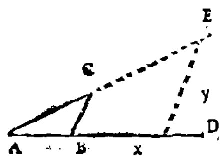
CHAPITRE VII.

Des lieux Geometriques, ou des Problêmes qui sont un lieu Geometrique.

ON appelle lieu Geometrique toute ligne ou droite ou courbe dont tous les points ont un même rapport aux points d'une même ligne droite ou courbe, au regard de l'un des points de cette ligne. Et cela eſt fort bien appellé lieu ; car le lieu, par exemple, d'un cercle, ſont tous les points qui ont un certain rapport avec le point d'une ligne droite ; c'eſt à dire, le même rapport avec cette ligne droite que ce cercle a avec cette ligne ; de ſorte qu'en connoiſſant ces rapports, & par ce moyen les points par où doit paſſer ce cercle, on connoit ſon lieu, c'eſt à dire, le plan où il eſt

Ces rapports ſe peuvent marquer par une ſeule equation ; ainſi par la nature d'une equation qui eſt connuë on connoit la nature d'une ligne quelle qu'elle ſoit, & ſon lieu ou ſa place, ce qui eſt la connoître entierement. C'eſt pourquoy comme cette ſcience des lieux eſt d'une grande utilité, les Geometres ſe ſont appliquez avec un ſoin particulier à la perfectionner. Elle conſiſte particulierement à reduire les equations que l'on trouve à de certaines formules, dont nous venons de parler dans le Chapitre precedent. Les lignes droites & circulaires nous ſont aſſez connuës ; ainſi la methode des lieux n'eſt neceſſaire que pour les lignes courbes, dont nous ne parlons point encore, neanmoins pour donner quelque notion de cette methode : j'en donneray des exemples ſur les lignes droites & ſur les cercles.

Soit $AB = a$ & $BC = d$: il eſt evident que $a, d :: x . y$, donc $ay = dx$, & diviſant par a, le quotient $\frac{dx}{a}$ ſera egal à y, c'eſt à dire, $\frac{dx}{a} = y$, & cette equation marquera le rapport de tous les points de la ligne AE prolongée à l'infini avec la ligne AD, prolongée auſſi à l'infiny: car par x nous pouvōs entendre quelque partie que ce ſoit de la ligne infinie AD, & par y toute ligne menée de l'extremité de x à la ligne AE faiſant même angle avec AD que la ligne BC, c'eſt pourquoy cette equation $\frac{dx}{a} = y$ marque le lieu de cette ligne AD, & fait connoître ſa nature qui eſt, comme il a été démontré que $a, d, :: x, y$, & qu'ainſi $ay = dx$, & partant $\frac{dx}{a} = y$.

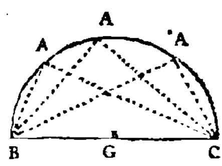


Si donc on propoſoit de trouver une ligne telle qu'elle ſoit, avec cette condition : 1° qu'ayant mené de cette ligne deux autres lignes droites ſur une quatriéme ligne droite connuë, avec laquelle elles faſſent les mêmes angles; 2° que ces quatre lignes que je nomme a, d, x y

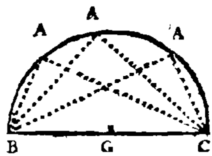
ſoient proportionnelles; 3° qu'on puiſſe exprimer le rapport de cette ligne que l'on cherche avec la droite qui eſt donnée par cette equation, $\frac{dx}{a} = y$, il eſt evident que cette ligne inconnuë ſeroit une ligne droite.

Ce Problême, ſelon la maniere de parler des Geometres, eſt un lieu; puis qu'il s'agit de trouver le lieu ou la place d'une ligne; qu'on connoit, quand on peut connoître tous les points par où elle paſſe : car ayant élevé ſur la ligne donnée que je ſuppoſe être AD les lignes BC & y que je ſuppoſe être proportionnelles, je ſçauray que cette ligne dont il eſt queſtion, doit paſſer par C & par le ſommet de y.

La ligne BC eſt donnée, on propoſe de trouver le lieu d'une ligne, de tous les points de laquelle ayant mené deux lignes, que j'appelle x & y aux extremitez de BC, elles faſſent toujours le même angle; & que leurs quarrez ſoient égaux à celuy de BC que je nomme a, de ſorte que cette equation ſe trouve toujours $aa = xx + yy$, il eſt evident que ce Probleme ſe reſoudroit en coupant BC par le milieu au point G, & de G,



comme centre, & de l'intervalle BG ou CF faisant un demy cercle. Car 1° *par le Coroll. 1. du Theor. 11, §. 1. l. 2.* ayant mené de chaque point de la circonference des lignes à B & à C. ces angles BAC sont tous égaux. 2° Puisque ces angles sont droits, *par le Coroll. 3 du même Theorême* les quarrez des côtez qui comprennent ces angles droits sont égaux à celuy de l'hipothenuse BC, *par le Th. 4. §. 3 l. 3.* par consequent le lieu de cette ligne qui



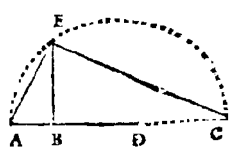
étoit proposé est un demy cercle, c'est à dire, qu'elle est circulaire. En voila assés pour avoir une idée de ce que c'est que les Geometres appellent lieu.

CHAPITRE VIII.

De la construction ou effection Geometrique des equations d'une & de deux dimensions.

ON appelle construction ou effection Geometrique d'une equation ce qu'on fait pour exprimer par une ligne la valeur d'une grandeur inconnuë que l'on a cherchée, & ses rapports avec les grandeurs connuës qu'on exprime aussi par lignes. La construction des equations d'un degré est facile, puis qu'il ne s'agit que de faire une ligne égale à des grandeurs entierement connuës, ausquelles la grãdeur connuë se trouve precisémẽt égale comme dans cette equatiõ $x = \frac{bb}{a-b}$ Puisque b & $a-b$ sont des grãdeurs connuës, que par exemple $bb = 16$ & $a-b = 2$, il est clair que $x = 8$, & qu'ainsi il est facile d'exprimer par une ligne la valeur de x. On peut aussi resoudre cette equation $x = \frac{bb}{a-b}$ en cette progression $\div a-b, b, x$, car multipliant b, le terme moyen par luy même, & divisant le produit, qui est bb, par $a-b$ premier terme de la progression, le quotient qui est $\frac{bb}{a-b}$ sera égal au 3^e^, sçavoir à x, ce qu'on peut exprimer ainsi par lignes.

Je faits $AD = a$ & $AB = a-b$, ainsi $b = BD$: sur AD au point B j'éleve la perpendiculaire BE égale à BD: de A je mene à E une ligne droite, & sur AE au point E je mene perpendiculairement E C qui coupe la ligne AD prolongée : alors l'angle



CEA eſt droit, ainſi ayant décrit un cercle par ces trois points , il eſt evident que ∺ AB, EB, BC, ou ∺ $a-b$, b, BC, partant BC $= x$.

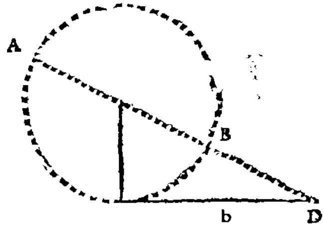
On reduit les equations de deux dimenſions à de ſemblables formules $xx = ax + bb$, ou $xx = ax - bb$, ou $xx = bb - ax$, comme nous l'avons vû cy-deſſus ch. 6e. Aprés quoy il s'agit de trouver la grãdeur inconnuë x dont on ſçait que le quarré xx eſt égal à un quarré connu bb, plus à un plan ax, ſelon la premiere formule fait de x & d'une grandeur connuë, ou ſelon la ſeconde formule xx eſt égal à ce plan ax moins le quarré d'une grandeur connuë, ou ſuivant la 3e xx eſt égal au quarré d'une grandeur connuë moins un plan fait de a une grandeur connuë, & de x qui eſt inconnu.

Problême premier.

$yy = bb + yd$, trouver la valeur de y.

J'éleve ſur l'une des extremitez de b une perpendiculaire égale à la moitié de d. Du ſommet de cette perpendiculaire comme centre & de l'intervalle de cette perpendiculaire, je faits un cercle, & par ſon centre je mene une ſecante juſques à D.

La ligne *b* eſt une tangente par la conſtruction, & puiſque le rayon de ce cercle eſt égal à la moitié de *d*, tout le diametre AB $=$ *d* : je nomme *y* la ſecante AD & *x* la partie BD qui eſt hors le cercle.



Puiſque le tout multiplié par les parties eſt égal au produit du tout par le tout $yy = yd + yx$: or *par le Th.* 9, §. 1. *l.* 3. $\div y, b, x$, donc $yx = bb$, ainſi en ſubſtituant dans l'equation precedente $yy = yd + yx$, le quarré bb en la place de yx, nous aurons $yy = bb + yd$; ainſi en faiſant ce que l'on a fait on a trouvé la ligne AD, qui eſt égale à la grandeur *y* auparavant inconnuë.

Scholie.

Il ſeroit facile de trouver la valeur de la ligne *y* en nombre. Les Geometres aiment mieux trouver une ligne égale à la grandeur inconnuë qu'ils cherchent, parce que ſouvent ces grandeurs ſont des racines ſourdes qui ne ſe peuvent exprimer par nombres. Neanmoins je crois que les racines ſourdes ſont en quelque maniere plus connuës que les lignes. Car ſi par exẽple un quarré vaut 18, l'eſprit n'apperçoit point ſi clairement la valeur d'une ligne qu'on a trouvé égale à la racine de 18, c'eſt à dire, qui eſt un des côtez de ce quarré, qu'il fait la valeur de ce ſigne. R 18.

Problême ſecond.

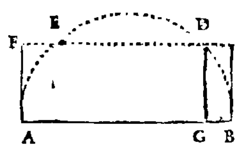
$xx = bb - xd$, on cherche la valeur de *x*.

On fait la même chose que dans le Problême precedent. Les lignes ont le même nom; on trouve que la valeur de x eſt BD, car *par le Theorême* 9. §. 1. *l.* 3. $\div x, b, x+d$, donc $xx+xd = bb$; & en ôtant de part & d'autre xd on aura $xx = bb - xd$, qui étoit l'equation propoſée, ainſi BD eſt la valeur de x.

Problême troiſiéme.

$xx = xd - bb$ on cherche la valeur de x.

On fait un cercle dont le diametre AB eſt égal à la grandeur d qui eſt connuë : au point B on éleve une perpendiculaire, ou tangente égale à l'autre grandeur connuë, ſçavoir, à b : par le ſommet de cette tangente, c'eſt à dire, par C, on mene FC paralelle au diametre du cercle. Si cette paralelle F C ne coupe pas le cercle, parce que b eſt égale ou plus grande que la moitié de d, c'eſt à dire, que le rayon du cercle. Alors le



Problême eſt impoſſible, c'eſt à dire, qu'il eſt faux que $xx = xd - bb$, puiſque b eſt trop grand au regard de x, pour que cela puiſſe être. Si cette paralelle F C coupe le cercle, je mene par A une paralelle à BC, ſçavoir AF, aprés quoy je dis que ſi x eſt plus petite que b, ſa valeur ſera DC, & FD, ſi il vaut plus que b ce qui ſe démontre ainſi.

Soit FD ou EC $= x$ & DC. $= y$, *par le Th. 7 § 1. l. 3.* $\div\!\div$ A G, DG, GB, & par conſequent puiſque AG $= x$ & DG $= b$ & GB ou DC $= y$, donc $\div\!\div\ x,\ b,\ y$ donc $xy = bb$. Nous avons ſuppoſé $d =$ AB, partant $d = x + y$, laquelle equation $d = x + y$ étant multipliée par x, il vient $xd = xx + xy$. J'en retranche la precedante equation $xy = bb$, ce qui me donne $dx - bb = xx - xy + xy$, & puiſque $+ xy - xy = 0$, je reduiray cette equation à celle cy $dx - bb = xx$ ce qui fait voir la verité qu'il faloit démontrer.

CHAPITRE IX.

Les equations de deux dimenſions ſe peuvent reduire à une progreſſion de trois termes, ce qui donne un moyen plus naturel pour reſoudre les Problêmes plans.

ON peut reduire les equations de deux dimenſions à une progreſſion de trois termes. Par exemple, cette equation $yy = bb + yd$ ſe reduit en cette progreſſion $\div y - d, b, y$, car $yy - yd = bb$ & ajoûtant yd de part & d'autre $yy = bb + yd$, qui eſt la même equation que celle qui étoit propoſée.

Cette equation $zz = bb - zd$ ſe reduit à cette progreſſion $\div z + d, b, z$; car ainſi $zz + dz = bb$, & retranchant de part & d'autre dz, vient $zz = bb - zd$, qui eſt la même equation que celle qui étoit propoſée.

Cette equation $zz = zd - bb$ ſe reduit en cette progreſſion $\div z, b, d - z$. Car $zd - zz = bb$, ajoûtant de part & d'autre zz, il vient $zd = bb + zz$, & retranchant de part & d'autre bb, nous avons $zd - bb = zz$ qui eſt ainſi la même equation que celle qui étoit propoſée.

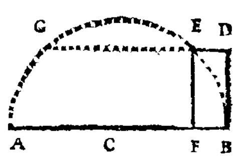
Dans les deux premieres progreſſions, ſçavoir, $\div y - d, b, y$ & $\div z + d, b, z$. le terme moyen b eſt connu, & par conſequent la valeur du produit des extrêmes égal au quarré de b. On connoit auſſi la difference des extrêmes qui eſt d. Dans la troiſiéme progreſſion qui eſt $:: z, b, d - z$. on connoit b le terme moyen, & d qui eſt la ſomme des extrémes. Car $d - z$ eſt le dernier terme & z le premier, ainſi d seul vaut z, le premier terme & le dernier terme, qui eſt d moins z.

Ainsi en cherchant par l'Analise la resolution d'un Problême, aprés qu'on est venu à quelqu'une des trois equations precedentes, il les faut reduire en une progression de trois termes, dans laquelle la moyenne proportionnelle est toujours connuë, & il ne s'agit que de connoître les deux extrêmes dont l'on connoit ou la somme de l'un joint à l'autre, ou la difference des deux.

Problême premier.

Soit cette progression de trois lignes $\div z, b, x$ &, & $z+x = a$ connoissant la moyenne b, & a somme de x & de z les extrêmes, connoître les extrémes.

Je prends AB égal à a somme des extrêmes. De C milieu de AB comme centre & de l'intervalle AC ou CB je faits un cercle. Sur B j'éleve perpendiculairement BD égale à la moyenne b, & par le sommet D je mene DG paralelle à AB, & de E où DG coupe le cercle, j'abaisse EF, une



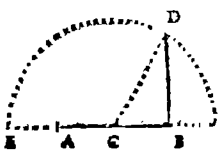
perpendiculaire sur AB, qui est égale à BD, ainsi EF $= b$; donc puisque $\div$ AF, EF, FB : les extrêmes seront AF & FB: ainsi si z est le grand extrême, il sera égal à

AF, & FB, qui eſt le petit extrême, ſera égal à y, partant z & y ſeront connus.

Probléme ſecond.

Soit cette progreſſion de trois lignes ∺ $x+d$, b, x, ou ∺ $x-d$, b, x, la moyenne b eſt connuë, & d la difference des extrêmes $x+d$ & x, connoître la valeur de x.

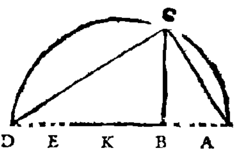
Je faits AB égale à d, & ſur B, j'éleve perpendiculairement BD égale à b en ſuite de C, moitié de AB, & de l'intervalle CD je faits un cercle. Je prolonge AB de part & d'autre; juſques à la circonference du cercle, aprés quoy AE, ou BF $= x$, car ∺ EB, BD, BF: donc ∺ $x+d$, b, x.



Si la progreſſion eſt ∺ $x-d$, b, x il faut faire la même choſe, mais en ce cas $x=$ EB: le plus petit terme eſt BF égal à EB $-$AB, ou à $x-d$. Il eſt evident que la difference de $x-d$ & de x eſt d. Quand le ſigne eſt $+$ la grandeur x eſt EA. à laquelle on ajoûte la difference d pour avoir le plus grand extrême. Quand le ſigne eſt $-$ on retranche d de EB ou FA qui eſt la valeur de x. Il eſt evident que ∺ EB, BD, AF $-$ AB: ou ∺ x, b, $x-d$.

Probléme troisiéme.

Soit cette progression de trois lignes ÷ $d + x, b, d$, la moyenne b étant connüe connoître la difference des extrêmes $d + x$ & d laquelle est x.



Sur B extremité de A B égale à d j'éleve perpendiculairement B C égale à b, par A&C je mene une ligne droite sur laquelle au point C ie fais une perpendiculaire qui est C D, ainsi l'angle ACD est droit. Je prolonge AB jusques à ce qu'elle coupe CD, la ligne BD aprés en avoir ôté AB sera égale à x, car ayant coupé AD par la moitié au point K, & de l'intervale AK ou KD fait un cercle, ce cercle passera par C, ainsi ÷ AB ou d, BC ou b, BD, partant BD = $d + x$ qui est le troisiéme terme ; ayant donc retranché de BD la ligne DE = AB le reste B E sera égal à x dont on cherchoit la valeur.

CHAPITRE X.

De la transformation des grandeurs.

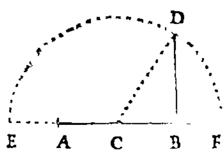
Puisque l'on veut donner icy une idée generale de l'analyse, il faut dire un mot de la transformation des équations, c'eſt à dire, de la maniere de changer leurs expreſſions, ſans que leur valeur augmente ou diminüe. On fait ces changemens pour faire paroître une equation ſous une forme plus commode, & qui en faſſe appercevoir la reſolution, auſſi c'eſt en cela que conſiſte le grand ſecret de la bonne methode, comme nous l'avons vû par une infinité d'exemples.

Par la transformation d'une équation, l'on n'entend que les changemens qui ſe font dans les lettres qui marquent les grandeurs inconnuës. On a dit que pour reduire une équation à des termes plus ſimples, quant on a pluſieurs grandeurs connués, il en faut prendre une ſeule qui ſoit égale à toutes celles-là : Par exemple ſi $xd + xb = xx$ prenant $c = b + d$ il eſt evident que $xc = xx$. Ces changemens ſe peuvent faire auſſi ſur les racines inconnuës d'une équation qu'on peut augmenter ou diminüer de quelque quantité connuë : Au lieu du terme inconnu, il en faut ſuppoſer un autre qui ſoit plus ou moins grand, de cette même quantité, & le ſubſtituer par tout en la place du premier : Comme ſi $xx = xd + bb$, dont les racines ſont $x + d$, b, x, & qu'on veüille augmenter cette équation de 3. Il faut prendre y, qu'on ſupoſera égal à $x + 3$, ainſi $y - 3 = x$, en ſuite par tout où ſera x metre $y - 3$, aprés quoy l'équation $xx = xd + bb$ ſera transformée en celle-cy $yy - 6y + 9 = yd - 3d + bb$ qui eſt la même.

Par ces transformations on reduit une equation en luy ajoûtant, ou retranchant de certaines grandeurs, à des formes plus ſimples, en faiſant evanoüir les grandeurs embarraſſantes. Car on peut faire que deux termes d'une queſtion dont on connoit la difference, ayent des ſignes contraires, & que par conſequent une partie de ce qu'elles produiſent s'évanoüiſſe, ou ne paroiſſe point; comme il arrive lors que deux grandeurs qui ont des ſignes contraires ſe multiplient. Soient par exemple ces deux lignes AE & EC dont la difference eſt DE, ainſi AD = EC, ſoit B le milieu de cette difference, il eſt evident que AB ou BC + BE = AE & qu'au contraire BC ou AB − BE = EC. Ainſi ſi DE difference de AE & de EC eſt m; que la petite partie EC ſoit x, ſuppoſant AB $= y$ donc $y + \frac{1}{2}m =$ AE & $y - \frac{1}{2}m = x$ ou

EC, ainſi ces deux grandeurs AE & EC ſont reduites à ces deux termes $y + \frac{1}{2}m$ & $y - \frac{1}{2}m$ qui ont des ſignes contraires.

Si j'avois donc cette equation $xx + xd = bb$ en ſupoſant $y - \frac{1}{2} d = x$ & $y + \frac{1}{2} d = x + d$ ie trãsformeray l'equation precedente en celle-cy $yy - \frac{1}{4} dd = bb$, ou $yy = bb + \frac{1}{4} dd$, laquelle formule eſt bien plus aiſée à reſoudre ; car la racine inconnüe ne ſe trouve que dans un des membres ; ainſi ajoûtant $\frac{1}{4} dd$ qui eſt tout connu avec bb auſſi connu, on a une ſomme préciſement égale au quarré de y, ainſi y ſera connu. Cette equation $yy = bb + \frac{1}{4} dd$ ſe peut reſoudre avec le compas , & la regle comme le Problême 2ᵉ du chapitre precedent. Je prens $AB = d$ & CB ou $CA = \frac{1}{2} d$, ſur B j'éleve une perpendiculaire $BD = b$: de C comme centre & de l'intervalle CD je décris un cercle ; je dis que EC ou $CF = y$, que



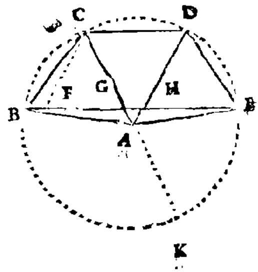
$EB = y + \frac{1}{2} d$ & $BE = y - \frac{1}{2} d$, que $\div\, y + \frac{1}{2} d, b, y - \frac{1}{2} d$, qu'ainſi $yy - \frac{1}{4} dd = bb$ & par conſequent $yy = bb + \frac{1}{4} dd$. Ce qui eſt evident , car le triangle BCD eſt droit, partant le quarré de y eſt égal aux quarrez de b & de $\frac{1}{2} d$. Or quand on connoit y ou EC, on connoit EA dont la difference avec EC eſt la $\frac{1}{2} d$ ou AC ou CB.

CHAPITRE XI.

On ne peut resoudre avec le compas & la regle, les problêmes solides.

LEs équations solides, ou de trois dimensions, se reduisent dans une progression de quatre termes ; mais outre que cela ne se peut expliquer en peu de paroles, pour connoître ce que l'on cherche dans une semblable progression, il faut trouver deux moyennes proportionnelles entre deux termes, ce que l'on ne peut faire que mecaniquement, avec les lignes droites & les cercles ainsi qu'on l'a vû *l.* 3. §. 1. Ce qui peut arriver dans les problêmes qui ne regardent que les lignes droites & les cercles, comme dans ce problême si fameux de la trisection de l'angle qu'on ne peut resoudre que par l'anylise, où l'on vient à une équation de trois dimensions, ce qui montre que ce problême est solide.

La corde BE de l'arc BCDE est connuë. On propose de couper cet arc en trois parties égales, selon les premieres regles de la Methode, je suppose la chose faite, c'est à dire, que BC$=$ CD$=$ DE. Je mene CF paralelle à DH : ainsi CF$=$ DH ; & partant puisque CG$=$ DH; CF $=$ CG, ainsi FCG est un isoscele. Les angles BCG, & BGC sont égaux, car la mesure de BCG est la moitié de l'arc BK, & celle de BGC est la moitié de KE, plus la moitié de BC ou de DE égal à BC : or BK est égal à KD; donc ces deux



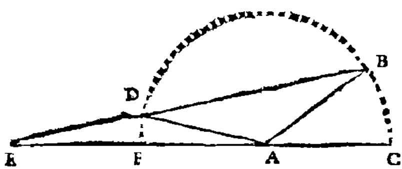
angles qui ont même mesure sont égaux; partant le triangle CBG est isoscele. Il a un angle commun avec FCG ; ces deux isosceles sont donc semblables. BAC est aussi isoscele, & il a un angle commun avec CBG, sçavoir BCG ; ces trois triangles sont donc semblables.

Ces trois triangles BAC, CBG, FCG étant semblables, il faut que $\div$ AB, BC, CG, GF, donc si, AB$=$ 1 & BC$=$ z, selon ce qui a été dit cy-dessus chap. 7. reg. 8. $\div$ AB, BC, GC, GF, ou $\div$ 1, z, zz, zzz.

Je nomme *b* la ligne connue BE ; par consequent puisque CD $=$FH, & partant HE$=$ DE ; il ne s'en faut que la valeur de FG que BE, ou *b* ne soit triple de BC. Or F G$=$ zzz, donc $b +$ zzz$=$ 3 z, ou zzz$=$ 3 z $-$ *b*.

Voilà jusques où nous pouvons pousser icy ce problême ; mais vous voyez qu'il n'y a point de Theorême dans les Elemens precedens, dont on puisse tirer un moyen pour connoître la grandeur inconnuë *z*, sçachant seulement que son cube *zzz* est égal à 3 fois elle même, c'est à dire, à 3 *z*, aprês en avoir retranché la grandeur connuë *b*. Or cela se peut par le moyen d'une certaine ligne courbe; ainsi de tous les problêmes solides, dans lesquels en suivant l'ordre analytique, on arrive à des equations de plusieurs dimensions.

Ces problêmes solides se resolvent facilement par des voyes mecaniques, cõme celuy-cy de la trisection de l'angle; Soit l'arc BC, mesure de l'angle B A C

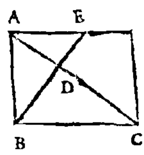


qu'il faut couper en trois. Je prolonge vers E le diametre CF, & appliquant une regle sur B, & sur le prolongement de CF je cherche le point D dans le cercle tel que AD soit égal à DE, ce que je trouve en tâtonnant, comme on dit. L'arc DF sera le tiers de BC, & ainsi DAF le tiers de BAC, ce que je démontre.

ADE & DAB sont isosceles ; donc DBA= BDA & DAE= DEA : l'angle BDA exterieur est égal aux deux interieurs DEA & DAE, donc DBA est égal à ces deux mêmes angles, & par consequent il est double de l'un & de l'autre. L'angle BAC exterieur est aussi égal aux deux interieurs DEA (ou son égal DAF) & à DBA, partant il est triple de DAE moitié de DBA.

Pour resoudre geometriquement les Problêmes solides, il faut trouver deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données, comme on le fera voir en son lieu.

Il est facile de trouver en general avec le compas & la regle, quatre lignes proportionnelles, car si on mene une perpendiculaire sur la diagonale d'un rectange, les quatre portions de la diagonale & de cette ligne seront proportionnelles, car *car par le Th. 7e § 1 l. 5* ∻ CD, BD, AD & *par le même Th.* ∻ BD, AD, DE, ainsi ∻ CD, BD, AD, DE, mais il n'est pas question de cela; il s'agit, deux lignes étant données, de trouver entr'elles deux moyennes proportionnelles; ce que je ne puis trouver par cette voye.



CHAPITRE XII.

Eſſais de la methode ſur quelques problêmes.

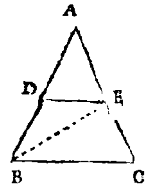
ON peut tenter la reſolution d'un problême par deux voyes. La premiere n'eſt qu'une aplication des Elemens qui font découvrir quelque moyen particulier au problême dont il s'agit, & qui ne peut pas ſervir dans un autre. La ſeconde voye eſt l'ordre que preſcrit la methode, par lequel on trouve ce que l'on cherche d'une maniere d'autant plus excellente, qu'elle s'étend generalement à tout problême. Donnons un exemple de ces deux voyes.

Problême.

BAC eſt un iſoſcele, on propoſe de couper ſes côtés AB, AC, par une parallele à la baſe BC; de ſorte que cette parallele ſoit égale à ce qui reſte des côtés, c'eſt à dire (je ſupoſe la choſe faite) que DB = DE.

Premiere maniere.

Je ſupoſe la choſe faite, que BD = DE,



donc le triangle BDE est isoscelle, ainsi les angles DBE, & DEB sont égaux : Or les angles CBE & BED sont aussi égaux *par le Theor. 8. liv. 2. §. 1.* partant EBC, & EBD sont égaux ; partant la ligne BE coupe par la moitié l'angle DBC. D'où je connois que dans un triangle isoscelle, tel que BAC, en divisant en deux l'angle ABC par une ligne droite BE, menant par E une parallele à BC, elle sera égale à DB; ainsi par cette proprieté du triangle isoscelle, je trouve ce moyen de resoudre le problême proposé; mais comme vous voyés, ce moyen est particulier & propre à ce seul problême.

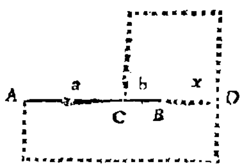
Seconde maniere.

Suposant la chose faite, je nomme AB qui est connu a, & d, la base BC, aussi connuë, & x, la grandeur inconnuë AE que l'on cherche ; ainsi comme EC$=a-x$, aussi DE$=a-x$, il est evident que a, d :: x, $a-x$, donc $aa-ax=dx$. J'ajoûte de part & d'autre ax,& il vient $aa=dx+ax$; je supose $c=d+a$, ainsi $cx=dx+ax$, & par consequent au lieu de $dx+ax$, mettant cx, j'ay $aa=cx$; divisant donc cette equation par c, j'ay $\frac{aa}{c}=x$; par consequent $\div$ c, a, x, ainsi il ne s'agit que de trouver une troisiéme proportionnelle à deux lignes connües, qui sont les deux premiers termes d'une progression. La ligne AB jointe avec la ligne BC est le premier terme & AB le second. Cette seconde maniere analitique est generale & n'est point particuliere à ce problême.

Problême

La ligne AB est coupée dans un de ses points, comme C, on propose de la prolonger jusques à D; de sorte que le rectangle fait de AD,& de BD, soit égal au quarré de CD.

Je supose la chose faite. Il est evident que la question se termine à trouver la valeur de BD, ou de x; je multiplie AD ou $a+b+x$ par DB, c'est à dire, par x ce qui fait $ax+bx+xx$, lequel produit, selon la question est égal au produit de CD ou de $b+x$ multiplié par luymême; c'est à dire,



que $ax+bx+xx = bb+2bx+xx$; j'ôte des deux membres de cette equation $bx+xx$ & il reste $ax = bb+bx$, je fais passer bx de l'autre côté, afin que la grandeur connuë bb reste toute seule, & j'ay $ax-bx = bb$; pour reduire cette equation aux plus simples termes, je la divise par $a-b$

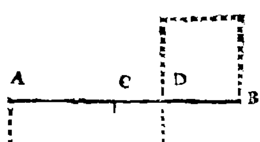
& alors $x = \frac{bb}{a-b}$ laquelle equation se resout dans cette progression $\div a - b, b, x$, dont les deux premiers termes étant connus, le troisiéme que je cherchois, qui est x me sera aussi connu, ainsi pour faire le Probléme il faut prolonger la ligne AB de la grandeur de x qu'on vient de connoître.

Scholie.

La resolution de chaque probléme, donne la connoissance d'un nouveau Theorême : Car selon ce qui vient d'être trouvé, si le quarré de BD, prolongement d'une ligne, plus CB partie de cette ligne, est égal au rectangle fait de AD, & de BD : Ce prolongement sera le troisiéme terme d'une progression ; dont AC — BC est le premier terme, & BC le second. La plus grande partie des Theorémes sont les fruits de l'analyse, qui comme vous voyés, est une source feconde de verités

Problème.

La ligne AB est coupée en C. on propose de la couper de rechef en D, de sorte que le rectangle de AC + CD par CD soit égal au quarré de DB.

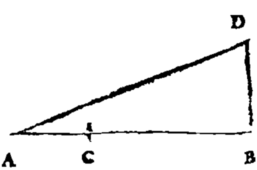


Je suppose la chose faite. Il faut trouver la valeur de CD : soit $AC = a$ & $CB = b$ & $CD = x$; ainsi $DB = b - x$. Le rectangle de AD par CD est $ax + xx$, & le quarré de DB eſt $bb - 2bx + xx$, donc ſelon la queſtion $ax + xx = bb - 2bx + xx$. Je retranche xx de part & d'autre;& $ax = bb - 2bx$. Je faits paſſer $2bx$ de l'autre côté, afin que le connu ſoit ſeul, $ax + 2bx = bb$, je diviſe cette equation par $a + 2b$ il vient $x = \frac{bb}{a+2b}$ reduiſant cette égalité en proportion $\div a + 2b,\ b,\ x$, les deux premiers termes ſont connus, donc x le ſera auſſi, ainſi en prenant ſur CB la ligne CD égale à x, on aura fait ce qui eſtoit requis.

Probléme.

La ligne droite AB eſt coupée en C, la ligne BD infinie eſt perpendiculaire ſur AB : il faut de A mener AD une ligne ſur BD, de ſorte que AD = BC + BD.

Je ſuppoſe la choſe faite, & que AB $= a$, & BC $= b$ & BD $= x$, valeur de BD que l'on cherche. Selon la queſtion AD = BC + BD, partant AD $= b + x$. Or puiſque l'angle ABD eſt droit, le quarré de AD, ou de $b + x$, lequel quarré eſt $bb + 2bx + xx$ eſt égal à ceux de AB, & de DB qui ſont aa & xx.



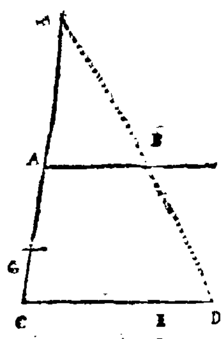
Ainſi $bb + 2bx + xx = aa + xx$, ôtant de part & d'autre xx, il vient $bb+2bx = aa$. Afin que le connu ſoit tout d'un côté, faiſans changer de place à bb, nous aurons $2bx = aa - bb$ que je diviſe par $2b$, & j'ay $x = \frac{aa-bb}{2b}$ laquelle equation ſe reduit ainſi dans cette proportion $2b, a+b :: a - b, x$ dont les trois premiers termes étant connus, le 4^e x ſera connu, ce que l'on cherchoit.

Problême.

Deux lignes paralleles AB, CD, ſont données par poſition avec CF, comme auſſi les points F & E. on propoſe de mener FD coupant AB & CD prolongée au beſoin ; de ſorte que AB ſoit à ED comme AF eſt à AG.

Soit AF $= a$, CF, $= b$, CE $= c$, A G $= d$, & AB $= x$.

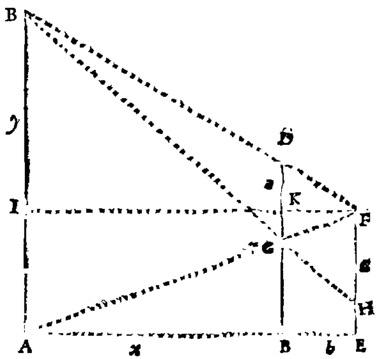
Nous ſuppoſons la choſe faite : partant ſelon l'hipotheſe $a, d :: x$, ED. multipliant donc x par d & diviſant le produit qui eſt dx par a, le quotient $\frac{dx}{a}$ = E D. Les deux triangles AFB & FCD ſont ſemblables, donc $a, x :: b$, CD. or CD = CE + ED, & par-



tant C D $= c + \frac{dx}{a}$ Le produit des extrêmes a & $c + \frac{dx}{a}$ qui eſt $ac + dx$ eſt égal à celuy des moyens. Donc $ac + dx = bx$. Je transporte $+dx$ & vient $ac = bx - dx$. Je diviſe cette equation par $b - d$ & j'ay $x = \frac{ac}{b-d}$ laquelle equation ſe reduit en cette proportion $b - d, c :: a, x$ dont les trois premiers termes ſont connus.

Problême.

Meſurer la hauteur inacceſſible AB & & ſa diſtance AC par le moyen de deux bâtons CD & EF.



Je ſuppoſe que AC $= x$, AB $= y$ CE $= b$, GD $= a$ & FH $=$ c, alors puiſque les triangles BAF & GDF ſont ſemblables, AB, GD :: FA, FG, mais FA, FG :: FI, FK, à cauſe des paralelles CD, BA, donc AB, G D :: FI, FK, ou leurs égales AE, CE, ainſi $y, a :: x + b, b$, par conſequent $by = ax + ab$.

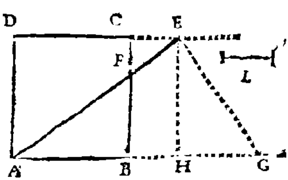
Les deux triangles BHF, & BGD sont semblables; donc comme BD à BF, ou IK à IF, ou AC à AE, de même GD à HF, ainsi AC, AE : : GD, FH, ou $x, x+b$ :: a, c, partant $xc = xx + ab$ ôtant ax de part & d'autre il reste $xc - ax = ab$, divisant l'un & l'autre membre par $c - a$ on a $x = \frac{ab}{c-a}$ ainsi $c - a, a :: b, x$, mais on connoît les trois premiers termes; donc x le quatriéme que l'on cherche sera aussi connu.

Puisque l'on a trouvé cy-dessus que $by = ax + ab$ & $xc = ax + ab$, il s'ensuit que $by = cx$, êtans égaux à la même grandeur $ax + ab$ partant $b, c :: x, y$. Or x est déja connu, donc les trois premiers termes estant connus, on connoîtra le quatriéme terme y que l'on cherchoit.

Probléme.

Un quarré AC étant donné, il faut mener de A l'un de ses angles la ligne droite AE, de sorte que la partie EF comprise entre le côté DC prolongé en E & entre le côté BC, soit égale à une ligne droite donnée L.

Je supose la chose faite, & je marque les lignes connues par les premieres lettres à l'ordinaire, sçavoir AB, ou



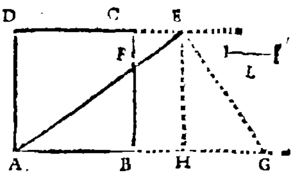
BC, ou CD, ou AD, avec a & EF avec b. Je ne connois point d'autres lignes. Entre les lignes inconnuës je choisis CF, & AF, avec lesquelles je crois venir plus aisément à une equation, & je fais AF $=$ x & CF $= z$.

Je cherche des equations par la voye des proportions. Les triangles ABF, ECF, EDA, sont rectangles & semblables, partant $x, a :: b$, CE, donc CE $= \frac{ab}{x}$ & par la même raison $b, z :: b + x, a$, ou AD. Donc $ba = zb + zx$.

Je cherche une seconde equation par une autre voye, je sçay que le quarré de EF, ou b est égal aux deux quarrés de CF, qui est zz, & de CE qui est $\frac{aabb}{xx}$ puisque CE $= \frac{ab}{x}$ Donc $bb = zz + \frac{aabb}{xx}$

Il faut faire en sorte qu'il n'y ait qu'une grandeur inconnuë. Pour cela je divise la premiere equation $ba = zb + zx$ par $b + x$ il vient $z = \frac{ba}{b+x}$ dont le quarré sera $\frac{bbaa}{bb+2bx+xx} = zz$. Mettant donc dans la seconde equation à la place de zz sa valeur que nous avions trouvée, sçavoir $bb = zz + \frac{aabb}{xx}$ il viendra $bb = \frac{aabb}{bb+2b+xx}$ $+ \frac{aabb}{xx}$ laquelle equation aprés les reductions necessaires se reduit à une equation de quatre dimensions.

Or en tirant quelques autres lignes dont il n'est point parlé dans la question, on peut trouver une autre equation plus simple. Soit mené sur A E, la perpendiculaire E G &, de E sur AG, la perpendiculaire EH. Les triangles A B F, AEG, EHG sont rectangles, ils ont un angle commun, ils sont donc semblables. Or EH $=$ AB, donc FAB & HEG sont égaux; ainsi EG $=$ AF, & partant EG $= x$. Je suppose BG $= y$; ainsi AG $= a+y$ le quarré de $a+y$ qui $aa+2ay+yy$ est égal à celuy de EG ou de x qui est xx à celuy de AE ou $x+b$ qui est $xx+2xb+bb$, ainsi on a cette equation $aa+2ay+yy = xx \quad xx+2xb+bb$. Et parceque AB, AF :: AE, AG, on $a, x, :: x+b, a+y$, par consequent $aa+ay = xx+bx$, ainsi en la place de $2xx+2xb$, mettant sa valeur $2aa+2ay$ dans l'equation precedente, il n'y aura plus qu'une lettre inconnuë, $aa+2ay+yy = 2aa+2ay+bb$; ôtant de part & d'autre $aa+2ay$, il reste $yy = aa+bb$, qui est une equation tres simple.



Problême.

Deux Marchands ont mis en societé 12.

liv. & ont gagné 34 liv. le premier a pris 7 liv. tant pour mise que pour gain pour deux mois ; le second a pris 39. liv. tant pour sa mise que pour son gain pour cinq mois. On demande la mise & le gain d'un chacun en particulier.

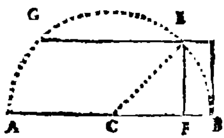
La mise des deux $12 = a$. La mise du premier soit x ; ainsi celle du second est $a - x$.

La mise & gain du premier est $7 = b$; donc $b - x$ sera le gain du premier.

La mise & gain du second est $39 = c$; donc $c - a + x$ sera le gain du second.

Or comme la mise du premier multipliée par son temps est à son gain ; ainsi la mise du second multipliée par son temps est à son gain ; c'est à dire, $2x, b - x :: 5a - 5x, c - a + x$. Le produit des extrêmes est égal à celuy de ceux du milieu ; donc $2xc - 2ax + 2xx = 5ab - 5ax - 5bx + 5xx$; & ajoûtant de part & d'autre $2ax$ & retranchant en même temps $2xx$; on aura $2xc = 5ab - 3ax - 5bx + 3xx$; j'ajoûte de part & d'autre $3ax + 5bx$, ce qui me donne $2cx + 3ax + 5bx = 5ab + 3xx$. Je suppose que $d = 2c + 3a + 5b$; ainsi $dx = 5ab + 3xx$; je prend aussi $f = 5ab$, que je retranche de part & d'autre ; & j'ay $dx - f = 3xx$, en suite pour reduire cette equation dans une formule qui me donne la resolution de la question, je suppose

$d = 3g$ & $f = 3h$; ainsi $gx - h = xx$, je trouve un quarré égal à h, que je nomme ll, partant $gx - ll = xx$; ainsi par le problême 3e du chap. 8e ou 3e exemple du chap. 9e cette equation se reduit à cette progression ∺ $g - x, l, x$, car $gx - xx = ll$, & par consequent $gx = ll + xx$, & $gx - ll = xx$; les extrêmes de cette progression sont $g - x$ & x, dont g est la somme. On trouvera leur difference si sur $AB = g$ ayant décrit le cercle AGB on éleve perpendiculairement $BD = l$, & l'on tire de DG parallele à AB, & du point E la perpendiculaire EF qui coupera AB aux points



cherchés : ce qui est expliqué, *Probl.* 1. *chap* 9. La grandeur inconnüe que l'on cherchoit est x. Or comme dans ce Problême on cherche la valeur de x en nombre, il faut du quarré de CE ou CB, moitié de AB, somme des extrêmes connuës, ôter le quarré de $FE = ll$ aussi connuë, il restera le quarré de CF, moitié de la difference des extrêmes, dont la racine ajoûtée à CB donnera le plus grand, & étant ôtée le plus petit $x = 3$ mise du premier. Aprés quoy tout le reste est facile.

CHAPITRE XIII.

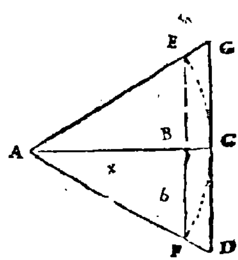
Il y a des bornes dans la Geometrie, au delà desquelles l'on ne peut aller. L'on n'a encore pû connoître le rapport du cercle avec la ligne droite, on démontre ce qui en est connu.

ON peut juger à present de l'étenduë de la Geometrie, dont nous n'avons donné que les premiers Elemens, nous étant bornés aux lignes droites & circulaires, qui sont les plus simples & les plus faciles à connoître. Ce n'est pas icy le lieu de faire des reflexions morales. Nous avons insinué dans la Preface combien il faut qu'il y ait de choses en Dieu, puis que la matiere est si feconde, & que l'esprit y découvre tant d'admirables proprietês, apprenant en même temps qu'il y a des choses qui luy sont incomprehensibles. Le cercle, quoyque si simple, l'arrête. Cette figure se fait de maniere qu'il n'y peut y avoir de difference entre ses parties; elle n'a ny commencement ny fin, ce qui fait qu'on a dit plusieurs fois que le cercle est une image de la simplicité, & en même temps de la fecondité Divine, puis qu'il n'y a point de figure qui n'y puisse être r'enfermée, & qu'il est imcomprehensible. Quelques efforts qu'ayent fait les Geometres, ils n'ont pû, un cercle étant donné, assigner une ligne droite, égale à la circonference, Ce qui vient de ce qu'on ne peut concevoir dans un cercle aucune partie pour petite qu'elle soit, qui luy soit cõmune avec une ligne droite; car si cette partie est une ligne droite, les points dont elle est composée ne seront pas éloignez également du centre du cercle, ainsi elle n'est pas partie d'un cercle.

Les moyens les plus exacts pour connoître le cercle, sont les polygones qui luy sont inscrits & circonscrits, car comme plus un polygone à de côtés, plus il approche du cercle, ainsi qu'il a été demontré, en prenant deux polygones *z* & *x* d'un nombre de côrés fort grand, dont l'un soit circonscrit, & l'autre inscrit, si on pouvoit connoître la raison que *x* inscrit à avec le diametre du cercle, on connoîtroit une raison plus petite, mais de peu, que celle que le cercle a avec le diametre, & voyant celle que circonscrit *z* a avec le diametre du même cercle, on connoîtroit une raison plus grande, mais de peu de chose, que celle du même cercle avec le diametre ainſi on connoîtroit de fort prés la raiſon du cercle avec le diametre.

Cela ſe peut ſans doute à peu prés, mais ce n'eſt pas une connoiſſance exacte: il n'eſt pas même poſſible de connoître le rapport de tous les polygones avec le diametre du cercle où ils ſont inſcrits, ou auquel ils ſont conſcrits, quant ils ont pluſieurs côtés, puiſque leurs raiſons ſont ſourdes. La raiſon des côtês du triangle, du quarré inſcrits dans un cercle avec le diametre du cercle eſt ſourde; celle de l'exagone inſcrit ne l'eſt pas, puis que chaque côtê eſt un des rayons du cercle, & par conſequent la moitié du diametre, mais la raiſon d'un exagone inſcrit à un exagone circonſcrit l'eſt.

Soit DE côtê d'un exagone inſcrit egal à $2b$, ainſi $DB = b$, ſoit AB nommé x, le quarré de AB ou de x, plus celuy de DB étant egaux à celuy de AD le rayon du cercle, $xx + bb = 4bb$ ôtant bb de part & d'autre $xx = 3bb$, donc puiſque 3 n'eſt pas un nombre quarré, la valeur de x ne ſe peut exprimer par nombre. Or AB ou

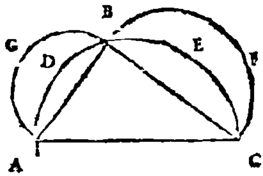


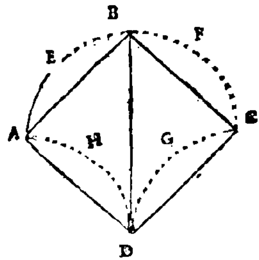
x, BD :: AC, CF, la raiſon de x à BD eſt ſourde; celle de AC à CF ſera donc ſourde. Ainſi DE & FG ſeront incommenſurables. Ce qu'il falloit prouver.

La raiſon du côté du Pentagone avec le diametre du cercle où il ſe trouve eſt auſſi ſourde en elle même, comme il a eſté demontré. Celle du decagone l'eſt en elle même & en puiſſance, de ſorte que nous avons droit de juger que c'eſt chercher ce qui ne ſe peut trouver, que la raiſon exacte du cercle a ſon diametre,

Si on pouvoit connoître la raiſon du diametre à la circonference, il ne ſeroit pas difficile de trouver un quarré égal à la ſurface, ce qui s'appelle la quadrature du cercle ; car on a fort bien demontré que la ſurface d'un cercle eſt égale à un triangle rectangle, qui a pour hauteur le rayon de ce cercle, & pour baſe une ligne droite, égale à ſa circonference : il eſt facile de trouver un quarré preciſément égal à un triangle donné. Mais comme on ne peut point trouver de lignes droites, qu'on puiſſe prouver être égales à la circonference d'un cercle, l'on en doit regarder la quadrature comme une choſe inconnuë.

Cependant cela ne paroît pas impoſſible, quand on conſidere qu'on peut aſſigner un eſpace compris entre des lignes circulaires, qui ſoit égal à un eſpace compris entre des lignes droites. Car le triangle ABC étant rectangle, le demy cêrcle ADBE est égal aux deux demy cercles AGB & BFC : ôtant donc les parties communes, sçavoir ADB&BEC, il restera AGBDA, & CEBFC, comme deux lunes ou croissans qui seront égales au reste du demy cercle ADBEC, lequel reste est le triangle ABC.

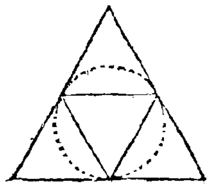




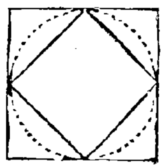
On voit aussi à l'œil que la figure AEBFCGDH semblable au couteau tranchant d'un Cordonier est égale au quarré ABCD, car par la construction les parties AHD= AEB= BFC= CGD sont égales; ainsi on ne voit pas qu'il soit impossible d'assigner une figure rectiligne égale à la surface d'un cercle.

Mais quand on veut chercher cette figure, on trouve des obstacles. La voye qui est connuë comme nous l'avons dit, c'est de comparer la surface d'un polygone inscrit avec celle d'un circonscrit, car il est evident qu'ayant supposé ces polygones d'une infinité de côtés;

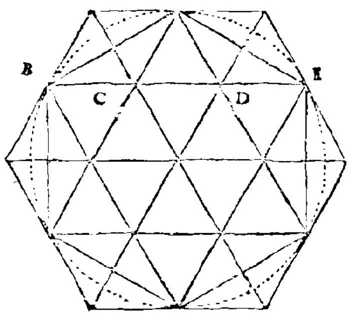
ſi on pouvoit trouver la raiſon exacte de l'un à l'autre, comme on ſçait que la ſurface du cercle eſt plus grande que celle de l'inſcrit, & plus petite que celle du circonſcrit, on



connoîtroit aſſez préciſement qu'elle peut être la ſurface du cercle, mais il eſt difficile de connoître la raiſon de la ſurface de ces deux polygones. Quand ils ont peu de côté cela ſe connoit, car comme vous le voyés



dans la figure, un triangle circonſcrit eſt à l'inſcrit comme 4 à 1. Le quarré circōſcrit eſt le double de l'inſcrit. L'exagone circonſcrit eſt à l'inſcrit, comme 4 à 3. Remarqués icy en paſſant que pour couper geometriquement une ligne, comme BE en trois parties égales, il faut faire

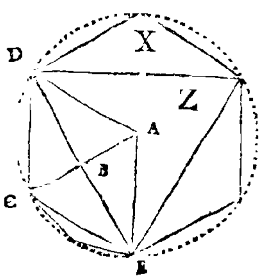


qu'elle ſoit le côté d'un triangle equilateral inſcrit dans un cercle, aprés ayant fait l'exagone & coupé les côtez de l'exagone par des perpendiculaires, vous trouverez que les perpendiculaires couperõt BE en trois parties BC, CD, DE.

Mais quand on avance, on trouve des barrieres. Les raiſons qu'on découvre ſont ſourdes. Voila un Theorême general qui donne une connoiſſance fort étenduë de ce qu'on peut ſçavoir de cette matiere. On appelle *Apotême* la partie du rayon qui eſt entre le côté d'un polygone inſcrit, & le centre du cercle.

Quand de deux polygones inſcrits l'un a deux fois plus de côtez que l'autre, le plus grand eſt au plus petit comme le rayon du cercle eſt à l'apotême du plus petit.

Z eſt un polygone dont l'apotême eſt AB, & X un polygone qui a deux fois plus de côtez. La ſurface de Z eſt égale à autant de fois le triangle DAE que Z a de côtez, & il eſt clair qu'ajoûtant à chacun de ces triangles, le triangle DCE on aura la ſurface de X qui eſt à celle de Z,



comme le romboïde AECD eſt au triangle DAE : or ces deux figures ſont l'une à l'autre comme le rayon AC eſt à AB, qui eſt l'apotême de Z, car les ſurfaces des deux triangles DAE & DCE, qui ont même baſe, ſont comme leur hauteur AB & BC, ainſi de tous autres polygones dont l'un aura deux fois plus de côtez que l'autre.

Si on diviſe le polygone X pour en faire un qui ait deux fois plus de côtez, que je nomme Y ; il en ſera de même, & il eſt bon de remarquer que Z le premier polygone ſera à ce troiſiéme Y comme le plan de l'apotême du premier & du ſecond eſt au quarré du diametre, ce que je démontre ainſi; ſoit l'apotême du premier nommé m, celuy du ſecond n, & le rayon k, ſelon ce qui a été démontré.

$$\begin{cases} Z, \; X :: m, \; k, \\ X, \; Y, :: n, \; k. \end{cases}$$

Et en multipliant les antecedans par les antecedans, & les conſequans par les conſequans.

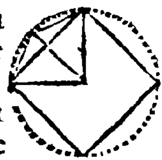
$$ZX, \quad XY :: mn, \; kk.$$

Or ZX, XY :: Z, Y, donc Z, Y :: mn kk. le premier polygone Z ſera au troiſiéme polygone Y comme mn plan de l'apotême du premier & du ſecond eſt à kk quarré du rayon,

Par cette methode on démontre que

le premier Polygone eſt au quatriéme comme la ſolide fait de l'apotême du premier, du ſecond & du troiſiéme eſt au cube du rayon du cercle, ainſi de ſuite à l'infini.

L'apotême d'un qu'arré inſcrit eſt la moitié d'un des côtez, ainſi un quarré eſt à un octogone comme la moitié d'un de ſes côtez eſt au rayon du cercle où il eſt inſcrit ; ou ce qui eſt la même choſe comme un de ſes côtez eſt au diametre du cercle. C'eſt pourquoy on a droit de conclure qu'un quarré dans



un cercle eſt à un polygone qu'on a fait d'une infinité de côtez en doublant toujours les côtez, c'eſt à dire, d'un quarré faiſant un octogone, d'un octogone un polygone de ſeze côtez, ainſi de ſuite, lequel polygone peut être conſideré comme un cercle. On peut, dis-je, conclurre que le quarré eſt au cercle comme une grandeur faite de la multiplication de tous les apotêmes de ces polygones, à la plus haute puiſſance du rayon du cercle : mais ce n'eſt preſque rien ſçavoir ; car outre qu'on rencontre des raiſons ſourdes ; le rayon & le diametre ſont diviſibles à l'infini, ainſi on ne peut point comprendre le nombre de tous ces apotêmes. Il eſt donc impoſſible d'arriver par cette voye enfin à un polygone égal à un cercle. Cette figure est ainsi incomprehensible, quoy qu'elle soit la plus simple de toutes les figures de Geometrie.

Neanmoins, quoy que l'on ne puisse pas trouver precisément la raison de la circonference d'un cercle avec le diametre, on le peut à peu pres. La raison du circuit de l'exagone, au diametre du cercle où il est inscrit, est comme 3 à 1, chaque côté étant égal au rayon du cercle, & par consequent puisque le circuit est plus petit que la circonference du cercle, il faut que la raison du diametre du cercle à la circonference soit plus petite que celle de 1 à 3, ou de 7 à 22. Archimede trouve aussi qu'elle est plus grande que celle de 7 à 22. Pour cela il considere un poligone de 96 côtés, dont le circuit est au diametre du cercle où il est inscrit, comme 223 à 71, laquelle raison est moindre que celle de la circonference au diametre, puisque ce poligone inscrit est plus petit que le cercle.

Le même Archimede a trouvé que la raison du circuit d'un poligone de 96 côtés circonscrits avec le diametre étoit comme 22 à 7. laquelle est plus grande que celle de la circonference du cercle avec le diametre, puisque ce polygone circonscrit est plus grand que le cercle. On à donc deux raisons, dont l'une est plus petite, & l'autre plus grande, que la veritable qu'on cherche. Donnons par le Cor. 2. prop. 3 l. 5 Gr. un même consequent à ces deux raisons, sçavoir 223. à 71 & 22. à 7. on les reduit à celles-cy.

$$\left.\begin{matrix} 1561. \\ 1562. \end{matrix}\right\} 497.$$

Ayant ainsi supposé le diametre de 497 parties, la circonference du cercle sera plus grande que 1561, & plus petite que celle de 1562. Divisons l'unité qui est la difference de ces deux nombres par 497. le quotient $\frac{1}{497}$ fera voir que la difference dont l'un & l'autre nombre differe de la veritable grandeur de la circonference, est moindre que la $\frac{1}{497}$ partie du diametre; ce qui est peu de chose. Ceux qui ont pris des polygones plus grands que de 96 côtés on trouvé une raison plus exacte. Metius là met comme de 355 à 113.

Ludolphe l'exprime par deux nombres, chacun de 21 chifres, selon son calcul, la circonference plus grande que la veritable ne differe d'avec celle qui est moindre que la veritable, que d'une seule unité; de sorte que leur difference avec la veritable est moindre qu'une partie du diametre, divisé en un nombre de parties exprimé par 21 chiffres; ce qui au regard du diametre eſt moins qu'un grain de ſable au regard de toute la terre.

Suivant cette raiſon d'Archimede qu'on ſuit dans la pratique de 22 à 7, ou de 44 à 14, ou de 66 à 21, qui eſt la même, la ſurface du cercle eſt au quarré de ſon diametre ; comme 11 à 14. ſoit nommé m, la circonference du cercle & n le diametre. Multipliant m & n par n, alors mn, $nn :: m\ n$, & puiſque m; $n :: 44$; 14, donc mn; $nn :: 44$, 14, donc $\frac{mn}{4}$. $nn :: \frac{44}{4}$ (ou 11) 14. Or $\frac{mn}{4}$ par le corol. du Th. 10 l. 2. §. 4. eſt la ſurface du cercle, donc cette ſurface eſt à nn quarré du diametre comme 11 à 14.

On demontrera par la même methode que la ſolidité de la ſphere eſt au cube de ſon diametre, comme 11 à 21. Car mnn, $nnn :: m$, n. Or m, $n :: 66$. 21 & $\frac{mnn}{6}$ $nnn :: \frac{66}{6}$ (ou 11) 21. Mais par le Corol. 3 du Theor. 17 l. 4. §. 4. $\frac{mnn}{6}$ eſt la ſolidité de la ſphere, donc cette ſolidité eſt au cube du diametre comme 11 à 21.

A GRENOBLE,
De l'Imprimerie d'ANTOINE FREMON, à l'entrée de l'Hôtel de Leſdiguieres.

EXTRAIT DU LIVRE DE LA GRANDEUR

DE LA QUANTITE RELATIVE DES GRANDEURS.

LIVRE TROISIE'ME.

AVERTISSEMENT.

La quantité d'une Grandeur est absoluë, ou relative. La quantité absoluë d'une Grandeur, est ce qu'elle est en elle-même : la quantité relative de cette Grandeur, est ce qu'elle est au regard d'une autre Grandeur avec laquelle on la compare, laquelle comparaison la fait appeller égale ou inégale, plus grande, ou plus petite ; ce qui se concevra clairement dans un exemple. La quantité absoluë de la grandeur *b* sera le nombre des parties de *b*, qui est, si vous voulez, 100 pieds : si je compare *b* avec *c* qui a 100 pieds, & avec *d*, qui n'est que de 50 pieds, la quantité relative de *b* est ce qu'elle eſt au regard de *c* & de *d*; elle eſt égale à *c*, elle eſt inégale avec *d*, elle eſt plus grande que *d*.

Or on ne peut comparer deux ou pluſieurs Grandeurs qu'en deux manieres, ou en conſiderant leur difference, c'eſt à dire, de combien de parties l'une eſt plus grande ou plus petite que l'autre; ou bien en conſiderant comment l'une eſt contenuë ou contient les autres avec qui elle eſt comparée. Ces deux manieres de comparer ont leurs proprietez particulieres, ainſi il les faut diſtinguer: ce que ne font pas ceux qui en parlant de la quantité relative des Grandeurs, ſe contentent de dire que c'eſt une maniere d'être au regard des autres Grandeurs avec leſquelles elle eſt comparée, & en ſuite démontrent pluſieurs proprietez de cette maniere d'être, qui cependant ne peuvent convenir qu'à l'une des deux manieres de comparer des Grandeurs; c'eſt un defaut conſiderable que nous tâcherons d'éviter.

SECTION PREMIERE.

Definition & explication des termes.

Premiere Definition.

Lors que l'on compare deux Grandeurs l'une avec l'autre, ces deux Grandeurs ſont nommées termes de cette comparaiſon. Le premier terme s'appelle antecedent, & le ſecond conſequent.

Seconde Definition.

L'excez d'une Grandeur par deſſus une autre Grandeur, s'appelle difference: l'excez de 7 par deſſus 5 eſt 2: ce nombre 2 eſt la difference de 7 & de 5.

Troiſiéme Definition.

La maniere dont une Grandeur contient ou eſt contenuë dans celle avec laquelle on la compare, ſe nomme raiſon. La maniere que 2 eſt contenu dans 6, ou de 6 à 2, que 6 contient 2, s'appelle raiſon de 2 à 6.

Quatriéme Definition.

L'égalité des raiſons ou des differences, s'appelle proportion.

Cinquiéme Definition.

Proportion arithmetique, eſt une égalité de differences. La difference de 5 avec 3 eſt la même que celle de 10 avec 8, l'égalité de ces deux differences s'appelle proportion Arithmetique.

Sixiéme Definition.

L'égalité des raiſons ſe nomme Proportion Geometrique, ou ſimplement Proportion. Les deux raiſons de 2 à 4, & de 3 à 6 étant égales, ces nombres sont en Proportion Geometrique.

Septiéme Definition.

Chaque difference & chaque raison supposant deux termes, la proportion qui dépend de l'égalité des differences & des raisons, suppose par consequent quatre termes, dont le premier est nommé premier antecedent; le second, premier consequent; le troisiéme, second antecedent; le quatriéme, second consequent. Ces Proportions se marquent de cette maniere.

Proport. Arithm. 5, 7 : 10, 12.

C'est à dire, qu'il y a méme difference entre 5 & 7 qu'entre 5 & 12. *Proportion Geometrique* 3, 6 :: 4, 8.

C'est à dire, que la raison de 3 à 6 est égale à celle de 4 à 8, que 3 est contenu deux fois en 6, comme 4 est contenu deux fois en 8.

Huitiéme Definition.

Le premier & le dernier terme d'une Proportion, s'appellent les extrêmes de cette Proportion, & le 2 & le 3 ceux du milieu, ou les moyens,

Neufiéme Definition.

Vn même terme peut servir de premier consequent au premier antecedent, & de second antecedent au second consequent, ainsi ces trois suffisent pour faire une Proportion. Pour lors cette Proportion est dite continuë, & la Grandeur qui fait l'office de deux termes, est appellée moyenne proportionnelle.

Proport. Arithm. continuë, 5, 7, :: 7, 9.
Propert. Geomet. 2 | 4 :: 4 | 8

Pour abreger on exprime cette proportion en cette maniere.

÷ 5, 7, 9. *Proportion Arithm. continuë.*
∺ 2, 4, 8. *Proportion Geom. continuë.*

Dixiéme Definition.

Si une proportion continuë a plus de trois termes, elle s'appelle progression.

÷ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, &c. *Prog ar.*
∺ 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. *Prog. Geom.*

SECTION II.

Avertissement.

REmarquez que ce mot de *raison*, ne signifie proprement que la maniere d'être d'une Grandeur au regard d'une ou de plusieurs autres: Mais l'usage a appliqué ce mot à cette seconde maniere de comparaison, par laquelle on considere comment une grandeur est contenuë ou contient celles avec qui elle est comparée: de laquelle maniere nous allons parler.

Des raisons & de la proportion Geomet.

Definitions & explications des termes.

Onziéme Definition.

Raison étant la maniere qu'une grandeur est contenuë ou en contient d'autres, si cette raison se peut exprimer par un nombre, elle est appellée exacte, ou de nombre à nombre.
Par exemple, si *a* est supposé valoir 2 & *b*, valoir 3 ou 4 ou 5, ou tel autre nombre qu'on voudra, on dit que la raison de *a* à *b* est une raison exacte, ou de nombre à nombre.

Douziéme Definition.

Lors qu'une raison n'est pas de nombre à nombre, elle est appellée sourde.

Si on ne peut exprimer par nombre la raison de *b* à *c*, c'est à dire, de quelle maniere *b* est contenu dans *c*, ou contient *c*, cette raison est appellée sourde.

Treziéme Definition.

La raison exacte ou de nombre à nombre se divise premierement en raison d'égalité ou d'inégalité.

La raison d'égalité est fondée sur ce qu'une grandeur est contenuë precisément & exactement une fois dans une autre.

La raison d'inégalité se divise en celle qu'on appelle de plus grande inégalité, qui est quand on commence par le plus grand terme en le comparant au plus petit, comme 3 à 2; & celle de moindre inégalité est quand on commence par le plus petit terme en le comparant au plus grand, comme 2 à 3.

Avertissement.

Ne confondez pas ces choses, raison d'égalité, & égalité de raisons, elles sont bien differentes. Egalité de raisons est une similitude de raisons, comme la raison de 3 à 6 est égale à celle de 2 à 4: la raison d'égalité consiste dans l'égalité d'un antecedent à son consequent, comme est la raison de *b* à *b*.

Quatorziéme Definition.

Que si ce ne sont que les mêmes termes dont l'ordre est seulement renversé, l'une de ces raisons est appellée inverse au regard de l'autre.

Ainsi la raison de 3 à 6 est inverse de celle de 6 à 3.

Quinziéme Definition.

La raison exacte d'une grandeur à une autre grandeur, reçoit differens noms, selon que l'antecedent est contenu ou contient son consequent un certain nombre de fois.

La raison de deux termes s'appelle double, lors que le premier est contenu deux fois dans le second; une raison est triple lors que le premier nombre est contenu trois fois dans le second.

Seiziéme Definition.

Divisant l'un des deux termes d'une raison par l'autre terme, le quotient de cette division est appellé l'exposant de cette raisō.

Parce qu'il expose & fait connoître la maniere que l'un des deux termes contient l'autre, ou en est contenu.

Avertissement.

Les moindres nombres qu'on puisse trouver qui soient entr'eux, comme les termes d'une raison sont particulierement appellez les exposans de cette raison. Ainsi si *b* est la septiéme partie de *c* les exposans de la raison de *b* à *c* sont 1 & 7 qui sont les moindres nombres qui soient entr'eux, comme *b* à *c*.

Dix-septiéme Definition.

On dit que plusieurs termes sont proportionnels, lorsque comme le premier d'une part est au premier de l'autre part.

Ainsi le second d'une part est au second de l'autre part, & le troisiéme d'une part est au troisiéme de l'autre part, ainsi de suite; ce qui se marque en ces deux manieres.

Premiere maniere. 2. 5. 6 : : 4. 10. 12.

Seconde maniere. 2. 4 : : 5. 10 : : 6. 12.

Axiome ou demande premiere.

Les raisons égales ont des exposans ou des quotiens égaux.

Axiome ou demande seconde.

Les grandeurs égales ne peuvent être les denominateurs, ou exposans, ou quotiens, que de raisons qui soient égales.

Avertissement.

Les propositions suivantes sont démontrées dans le traité de la Grandeur. On peut supposer icy qu'elles n'ont pas besoin de démonstration, estant claires par elles mêmes, ce qu'on reconnoit les appliquans aux nombres.

Quinziéme Proposition.

Deux grandeurs sont égales, lors qu'elles ont même raison à une troisiéme grandeur.

Seiziéme Proposition.

Deux raisons égales à une troisiéme raison, sont égales entre elles.

Dix-septiém Proposition.

Deux grandeurs demeurent en même raison, quoy qu'on ajoûte à l'une & à l'autre, pourveu que ce qu'on ajoûte à la premiere, soit à ce qu'on ajoûte à la seconde, comme la premiere est à la seconde.

Dix-huitiéme Proposition.

Deux grandeurs demeurent en même raison, quoy qu'on retranche de l'une & de l'autre, pourveu que ce qu'on retranche de la premiere, soit à ce qu'on retranche de la seconde, comme la premiere est à la seconde.

Dix-neuviéme Proposition.

Lors que deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, elles sont en même raison estant multipliées, qu'avant que d'estre multipliées.

Soient 4 & 6 multipliez par 3, les produits 12 & 18 seront entr'eux comme 4 est à 6.

Vingtiéme Proposition.

Divisant deux grandeurs par une troisiéme, les quotiens de ces divisions seront en même raison que ces grandeurs.

Divisant 12 & 18 par 3, les quotiens 4 & 6 seront entr'eux comme 12 & 18.

Vingt-uniême Proposition.

Lors que quatre grandeurs sont en proportion Geometrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens,

3, 6 : : 5, 10, le produit de 3 & de 10 qui est 30 est égal à celuy de 6 & de 5, qui est aussi 30.

Corollaire.

Trois grandeurs étant en proportion continuë, le terme moyẽ multiplié par soy-même ou le quarré de ce terme est égal au produit ou plan fait des deux extremes.

Vingt-deuxiême Proposition.

Lors que quatre grandeurs sont tellement disposées que le produit des extrêmes est égal à celuy des moyens, ces quatre grandeurs sont proportionnelles.

Vingt-troisiéme Proposition.

Lors que quatre termes sont proportionnels, ils le seront encore aprés ces cinq changemens qui vont être marquez.

Premier Changement.

Le premier changement se fait lors qu'on transpose les raisons, comme lors que de $b, d : : f, g$, on fait $f, g : : b, d$, les moyens deviennent les extrêmes, & les extrêmes les moyens.

Second Changement, qui eſt appellé, permutando.

Ce changement ſe fait en changeant la diſpoſition des termes de chaque raiſon, faiſant que le conſequent prenne la place de l'antecedent, & l'antecedent celle du conſequent, comme ſi de $b, d, :: f, g$, on fait $d, b, :: g, f$.

Troiſiéme Changement, qui eſt appellé, alternando.

Ce changement ſe fait en prenant les termes d'une proportion alternativement, c'eſt à dire, en comparant les antecedents enſemble, & les conſequens enſemble, ce qui s'appelle *alternando*, comme ſi de $b, d :: f, g$, on fait $b, f, :: d, g$.

QuatriémeChangement, qui eſt nommé componẽdo.

Ce changement ſe fait en comparant chaque antecedent plus ſon conſequent avec ſon conſequent, ce qu'on appelle *componendo*, comme ſi de $b, d, :: f, g$, on fait $b+d.\ d :: f,+g, g$.

Cinquiéme Changement, qu'on appelle dividendo.

Ce changement ſe fait en comparant chaque antecedent moins ſon conſequent, avec ſon conſequent, ce qu'on appelle *dividendo*, comme ſi de $b, d, :: f\ g$ on fait $b-d, d, :: f-g, g$.

DE LA QVANTITE' RELATIVE COMPOSEE.

LIVRE QVATRIE'ME.

AVERTISSEMENT.

LA Quantité relative composée, comme son nom le marque, comprend deux ou plusieurs quantitez relatives simples. On reconnoit la quantité relative d'une grandeur, par sa difference d'avec les grandeurs à qui on la compare, ou par la raison qu'elle a avec ces grandeurs ; ainsi on connoit que la quantité relative d'une grandeur est composée, lors que sa difference avec les grandeurs avec qui on la compare, renferme deux ou plusieurs differences, ou que la raison qu'elle a avec ces grandeurs, renferme plusieurs raisons. Or deux ou plusieurs differences peuvent estre renfermées dans une troisiéme difference en deux manieres, ou parce qu'étant ajoûtées ensemble elles sont égales à la troisiéme, ou parce que les unes étant multipliées par les autres, elles sont égales à la troisiéme. Quand on dit qu'une difference est composée de deux differences, on entend qu'elle renferme ces deux differences de la premiere maniere, c'est à dire, qu'elle est faite de l'addition de ces deux differences.

Deux ou plusieurs raisons peuvent aussi estre renfermées en deux manieres dans une troisiéme raison, ou parce qu'étant ajoûteés dans une somme, elles sont égales à cette troisiéme raison, ou parce qu'étant multipliées les unes par les autres, elles sont égales à cette troisiéme raison. Quand une raison est dite composée, on entend que les raisons qu'elle comprend estant multipliées les unes par les autres, elles luy soient égales ; & en parlant des raisons composées, on ne considere que

cette

cette seconde maniere de composition qui se fait par la multiplication. Nous parlerons de l'addition des raisons dans le Livre suivant.

SECTION SECONDE. des Raisons composées.

Avertissement.

NOus montrerons dans le Livre suivant, comment on peut faire toutes les operations de l'Arithmetique sur les raisons, c'est à dire, les ajoûter, ou les soustraires, les multiplier & les diviser. Maintenant pour avoir quelques idées de ces operations, il faut considerer que dans ces operations la raison d'égalité tient lieu de l'unité de laquelle le dénominateur est l'unité, & que puisque l'exposant d'une raison marque la valeur d'une raison, deux exposans de deux raisons ajoûtez ensemble, doivent faire l'exposant de la somme de ces deux raisons, & que deux ou plusieurs exposans multipliez les uns par les autres, doivent faire un produit, qui est l'exposant d'une raison faite par la multiplication des raisons dont ils sont les exposans; c'est pourquoy l'on ne peut pas refuser de nous accorder la demande suivante.

Demande.

Deux ou plusieurs raisons étant données, lors qu'on multiplie leurs exposans les uns par les autres, le produit de cette multiplication est l'exposant d'une raison faite par la multiplication des raisons données.

Ainsi 3 étant l'exposant de la raison triple, & 4 celuy de la raison quadruple, 3 multiplié par 4 fait 12, qui sera l'exposant de la raison duodecuple, qu'on peut dire par consequent estre faite par la multiplication de la raison triple & quadruple.

Deuxiéme Definition.

On dit qu'une raison est composée lors qu'elle est faite de deux ou de plusieurs raisons multipliées les unes par les autres, ou ce qui est la même chose, lors que son dénominateur est produit par la multiplication des dénominateurs de deux ou plusieurs raison multipliées les uns par les autres.

Ainsi la raison sextuple est appellée composée, lorsqu'on considere que cette raison est faite de la raison double multipliée par la raison triple, l'exposant de la raison double est 2, celuy de la raison triple est 3 ; or 3 multiplié par 2 fait 6, qui est l'exposant de la raison sextuple.

Troisiéme Definition.

On appelle raisons composantes celles dont la multiplication a produit une raison composée.

Ainsi la raison triple & la raison double sont les raisons composantes de la raison sextuple qui a esté composée par la multiplication de ces deux raisons.

Axiome ou Demande.

Les raisons composées sont égales, lors que les raisons composantes sont égales.

Cela est évident, les touts sont égaux qui ont des parties égales, des nombres égaux ajoûtez ou multipliez de la même maniere, font des sommes égales ou des produits égaux.

Avertissement.

Il y a bien de la difference entre l'addition des raisons & la composition des raisons. Par exemple, la raison double ajoûtée à la raison triple, ne fait que la raison quintuple. leurs exposans 2 & 3 ajoûtez dans une somme, ne font que 5, qui est l'exposant de la raison quintuple ; au lieu que ces deux raisons multipliées l'une par l'autre, produisent la raison sextuple qui est composée de ces deux raisons.

Lemme deuxiéme.

Plusieurs grandeurs étant de suite, la suivante étant plus grande que celle qui la precede, l'exposant de la raison de la premiere à la seconde, multipliant celuy de la raison de la seconde à la troisiéme, produit l'exposant de la raison de la premiere à la troisiéme, & cet exposant multipliant celuy de la raison de la troisiéme à la quatriéme, produit celuy de la raison de la premiere à la quatriéme ; ainsi de suite.

Deuxiéme Proposition.

La raison d'une grandeur à une autre grandeur, est composée des raisons des grandeurs interposées.

Quatriéme Definition.

Une raison composée de deux raisons égales, s'appelle raison doublée de chacune de ces raisons.

La raiſon de 2 à 8 eſt compoſée de deux raiſons égales de 2 à 4 & de 4 à 8, cette raiſon de 2 à 8 eſt doublée.

Cinquiéme Deſinition.

Vne raiſon compoſée de trois raiſons égales, s'appelle raiſon triplée de chacune de ces raiſons.

La raiſon de 3 à 81 eſt compoſée de trois raiſons égales, de 3 à 9, de 9 à 27, & de 27 à 81, donc elle eſt triplée. On appellera une raiſon compoſée de 4 raiſons égales, une raiſon quadruplée, ainſi des autres.

Avertiſſement.

Raiſon doublée n'eſt pas la méme choſe qu'une raiſon double, ny une raiſon triplée n'eſt pas la méme choſe qu'une raiſon triplée, &c. Ce que vous remarquerez aſſez par la lecture de la Propoſition ſuivante.

Troiſiéme Propoſition.

Dans une progreſſion geometrique, la raiſon du premier terme au ſecond eſt ſimple, du premier au troiſiéme doublée, du premier au quatriéme triplée, ainſi de ſuite. Cette Propoſition peut être conceuë en cette maniere.

Dans une progreſſion geometrique, la raiſon de deux termes entre leſquels il y a deux intervales, eſt doublée; s'il y a trois intervales triplée.

Quatriéme Propoſition.

Deux raiſons étant données, ſi on multiplie l'antecedent de l'une par l'antecedent de l'autre, & le conſequent de l'une par le conſequent de l'autre, les deux produits de ces deux multiplications ſeront l'un à l'autre en raiſon compoſée de ces raiſons.

Propoſition Sixième.

Deux grandeurs figurées qui ont quelques-unes de leurs racines égales & les autres inégales, ſont entr'elles comme les inégales.

Comme ſi 3 & 4 ſont les racines de 12, c'eſt-à-dire, les nombres qui ont produit 12 étant multipliés l'un par l'autre, & que 3 & 6 ſoient auſſi les racines de 18, alors 12 & 18 ſeront entr'eux comme 4 & 6.

Septiéme Proposition.

Les plans sont les uns aux autres en raisons composées de leurs racines.

Corollaire.

Les quarrez sont entr'eux en raison doublée de celles de leurs racines.

Huitiéme Proposition.

La raison d'un solide à un autre solide, est composée des raisons que leurs racines ont entr'elles.

Corollaire.

Les cubes sont entr'eux en raison triplée de celles de leurs racines.

Corrections.

Page 93, ligne premiere, *effacez* K partant. Page 121, lig. 4. ligne BD, *lisez* ligne CD. Pag 137. ligne 22. 10 §. *sup.* si, *lisez* 6. § 1. *sup.* Pag. 143. lig. derniere, par le Th. 13, *lisez* par le Corrol du Theo. 12. Pag. 144 lig. 32. bb, aa *lisez* bb = 3 aa. Pag. 170 lig. derniere, le point, *lisez* le plan. Pag. 206 ligne 17. de cercles, *lisez* de côtez. Pag. 231 Corrol. 2. il y a quelques fautes aux Lettres qu'il est facile de corriger. Pag. 239 Probl. 1. *lisez* Probl. 2. Pag. 243 lig. 26 §. 3. Lem 4. *lisez* §. 3. Liv. 2. Pag. 261 lig. 23, AE, *lisez* AG. Pag. 289. lig. penult. : x est *lisez* : xx est. Pag. 294 lig. 18 AD. *lisez* AE. Pag. 308 lig. 21 & BE = *lisez*, & BF = Pag. 311 ligne 7. elle même, *lisez*, elle même — b Pag. 334 ligne 17 7 a 22. *lisez*, 7 a 21.

Additions.

Ajoûtez au Theorême 10 page 97.

Corollaire.

La ſurface d'un cercle eſt égale au quart d'un rectangle, dont la hauteur eſt le diametre du cercle, & la baſe ſa circonference,

Cela eſt évident ; car 1° *par le Th.* 4 § 4, *liv.* 2, le triangle auquel la ſurface du cercle eſt égale, eſt égal à un rectangle, ou parallelogramme de même hauteur, qui n'a pour ſa baſe que la moitié de la circonference du cercle : or ce rectangle eſt le quart d'un rectangle, dont la hauteur & la baſe ſont deux fois plus grands.

Ajoûtez au Th. 17ᵉ pag. 229.

Corrollaire troiſiéme.

La ſolidité de la ſphere X eſt le tiers, d'un ſolide fait de ſa ſurface multipliée par ſon rayon.

Par le Theoréme preſent où elle eſt égale à un cone dont la baſe eſt égale à ſa ſurface, & dont la hauteur eſt égale à ſon rayon : Or par le Th. 11ᵉ *ſup.* le cone eſt le tiers d'un priſme, donc, &c.

Corrollaire quatriéme.

La ſolidité d'une ſphere eſt égale à la ſixiéme partie d'un ſolide fait de la circonference de ſon plus grand cercle multipliée par le quarré de ſon diametre.

C'eſt à dire, ſi m eſt la circonference du plus grand cercle de la ſphere X, & n ſon diametre, la ſolidité de X ſera égale à $\frac{mnn}{6}$

1° Par le Corol du Th. 10e liv. 2. §. 4. mn eſt quadruple de la ſurface du plus grand cercle de la ſphere X. ainſi mn eſt égal à la ſurface de toute la ſphere X. par le Th. 12 §. 3. *ſup*. Or par le Corol. precedant la ſolidité de cette ſphere eſt le tiers d'un ſolide fait de ſa ſurface qui eſt mn multipliée par ſon rayon, c'eſt à dire, par la moitié de n. dont elle ſera la ſixiéme partie de mn, multiplié par tout n, c'eſt à dire, qu'elle eſt la ſixiéme partie de mnn.

Extrait du Privilege du Roy.

PAr Lettres Patentes données à Versailles le premier jour de Fevrier 1685. signées par le Roy en son Conseil, IVNQVIERES; il est permis à nôtre bien amé ANDRE' PRALARD, Imprimeur & Libraire à Paris, d'imprimer, ou faire imprimer, par tel Imprimeur qu'il luy plaira choisir, un livre intitulé, *Les Elemens de Geometrie, ou de la Mesure du Corps. Qui comprennent tout ce qu'Euclide en a enseigné: Les plus belles propositions d'Archimede, & l'Analyse*; en tant de volumes & en telles marges & caractères, & autant de fois qu'il voudra; Et ce pendant le temps & espace de dix années entieres & consecutives; à commencer du jour que ledit Livre sera achevé d'imprimer la premiere fois: Avec defenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque qualité & condition qu'ils soient, d'imprimer ou debiter même des Editions Etrangeres, à peine de trois mil livres d'amande, comme il est plus au long porté par lesdites Lettres.

Regîstré sur le livre de la Communauté des Libraires à Paris le 5 Fevrier 1685. Signé ANGOT, Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le premier May 1685.

Les Exemplaires ont esté fournis.

JESUS MARIA.

Permission du R. P. Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de JESVS.

NOVS ABEL LOVIS DE SAINTE MARTHE, Prêtre Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de nôtre Seigneur IESVS CHRIST, suivant le Privilege à Nous donné par Lettres Patentes du Roy en datte du 22 Decembre 1672. Signées Noblet, par lesquelles sont faites defenses à tous Imprimeurs, Libraires & à tous autres, d'imprimer & mettre au jour aucuns des livres composez par ceux de nôtre Congregatiõ ſans nôtre expreſſe licence par écrit, ſous peine de confiſcation des exemplaires, & de mille livres d'amende. Permettons au ſieur ANDRE' PRALARD, Marchand Libraire à Paris, de faire imprimer & expoſer en vente un Livre intitulé, *Les Elemens de Geometrie, ou de la meſure du Corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide en a enſeigné : Les plus belles Propoſitions d'Archimede & d'Analyſe*, Compoſé par le P. BERNARD LAMY, Prêtre de nôtre Congregation. Fait à S. Paul aux Bois le 24 Iuin 1684. A. L. DE SAINTE MARTHE.