ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XXVII.

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI
—
1918.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXVII.° (SERIE III.ª)

Sul modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano.

(*Di* Bordiga Giovanni, *a Padova.*)

Il prof. Severi, nello studio della *varietà che rappresenta gli spazi subordinati S_k di data dimensione immersi in uno spazio lineare S_r* (*), estende in via generale il teorema, già conosciuto per alcuni casi particolari, che la varietà $V_t\left(t=(k+1)(r-k)\right)$, da lui denominata varietà grassmanniana, di uno spazio $\left[\binom{r+1}{k+1}-1\right]$, non possiede altre varietà algebriche a $t-1$ dimensioni, all'infuori delle sue intersezioni complete con le forme di questo spazio; ed avverte che il metodo geometrico da lui indicato per dimostrare che su V_t la base minima è costituita da una sezione iperpiana « si può applicare con lievissime modificazioni a molte altre varietà, per es. alla varietà delle k-ple, ordinate o no, dei punti di uno spazio S_r ».

Lo scopo del presente studio è appunto l'applicazione di quel metodo a queste varietà e più specialmente alla varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano, della quale è caso particolare la M_4^3 dello spazio S_5, che rappresenta le coppie non ordinate dei punti di un piano e su cui la nota *superficie di Veronese* rappresenta le coppie di punti coincidenti (**).

Nella prefazione alla sua Memoria, il prof. Severi nota che, dentro la classe di tutte le trasformate birazionali di una data varietà algebrica, si possono mettere in una medesima *sottoclasse* due varietà che si corrispon-

(*) F. Severi (*Annali di Matematica*, T. XXIV, Serie III, Milano, 1915), pag. 89 e segg.

(**) Per tutto ciò che riguarda la *superficie di Veronese* e le notizie bibliografiche cfr. Bertini, *Introduzione alla Geometria degli iperspazi* (Pisa, 1907), pag. 327 e segg.

dano biunivocamente *senza eccezioni*, così come, ad es., nel campo delle superficie razionali, appartengono alla medesima sottoclasse la superficie di VERONESE e il piano, che è il modello minimo. Io mi sono proposto di costruire, nella sottoclasse delle varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano, la varietà modello, proiettivamente determinata, d'ordine minimo.

La costruzione di questo modello minimo M_{2n} (che si denominerà *d'indice n*, quando sia relativo alle n-ple) si ottiene rappresentando proiettivamente la totalità delle curve luogo d'ordine n del piano col sistema degli iperpiani di $S_N\left(N = \frac{n(n+3)}{2}\right)$; e la totalità delle curve inviluppo di classe n coi punti di S_N; per guisa che una curva luogo ed una curva inviluppo coniugate vengono rappresentate da un iperpiano e da un punto incidenti.

Alle n-ple di punti, concepite come curve inviluppo di classe n, rispondono punti del modello minimo M_{2n}; una sezione iperpiana di questo rappresenta gli n-goni coniugati alla curva f d'ordine n, corrispondente all'iperpiano col quale si fa la sezione.

Alle n-ple di punti coincidenti corrisponde la superficie Φ, tracciata su M_{2n}, che è rappresentata dal sistema lineare di tutte le curve piane d'ordine n. Viceversa, partendo dalla Φ, la M_{2n} si può costruire in modo elegante così: ad una n-pla di punti del piano, nella corrispondenza tra il piano e Φ, corrisponde una n-pla di Φ. Gli spazi osculatori a Φ, di dimensione massima, si segano in un solo punto di M_{2n}; e reciprocamente, dato un punto di M_{2n}, per esso passano soltanto n spazi osculatori massimi, i quali hanno n punti d'osculazione, ed a questi risponde una n-pla del piano.

Due piani tangenti di Φ vengono punteggiati omograficamente dagli spazi osculatori massimi. Ne deriva una generazione proiettiva di M_{2n}, analoga a quella conosciuta della varietà di VERONESE. La costruzione inversa non è facile ad ottenersi, perchè i piani, sui quali vengono stabilite le corrispondenze omografiche, non sono indipendenti; nè possono essere arbitrariamente fissate le corrispondenze stesse.

Dopo avere costruito la M_{2n} ne determino l'ordine, che è il prodotto $1 . 3 \ldots (2n-1)$ di tutti i numeri dispari da 1 a $2n-1$; più in generale, determino l'ordine della varietà rappresentatrice delle n-ple che hanno punti di assegnata multiplicità. Le formole si trasportano subito alle n-ple di punti di S_r; per $r = 1$ si giunge, mediante interpretazione geometrica, alla *formola di de Jonquières*, la quale viene così ritrovata per altra via.

Alcune difficoltà mi hanno arrestato nella ricerca delle multiplicità che hanno tra loro codeste diverse varietà situate su M_{2n}.

In seguito, indico come si può rappresentare M_{2n} su S_{2n}; e dimostro poi che le varietà algebriche a $2n-1$ dimensioni, contenute in M_{2n}, sono tutte intersezioni complete di M_{2n} con una forma di S_N. Se ne deduce che su M_{2n} la base minima, così come prevedeva il SEVERI, è costituita da una sezione iperpiana; che M_{2n} è *normale*, che è il *modello minimo* e che è proiettivamente individuata.

Sulla traccia dello stesso concetto generale, dimostro quindi che anche la varietà di SEGRE (*) è un modello minimo della varietà delle n-ple di punti tolti ad n spazi, distinti o coincidenti.

Da ultimo studio le omografie spaziali, che trasformano M_{2n} in sè medesima, e le correlazioni spaziali che fanno corrispondere agli spazi massimi osculatori di Φ, come inviluppi di iperpiani, gli spazi massimi lineari S_n di M_{2n}, come luoghi di punti. Da queste conclusioni si deducono altre omografie spaziali, per mezzo delle quali si nota l'esistenza su M_{2n} di ∞^N superficie dello stesso ordine della Φ, proiettivamente identiche fra loro e alla Φ. Con un breve cenno sui casi particolari di queste superficie si chiude così il lavoro, nello studio del quale il prof. SEVERI mi diede largo aiuto di autorevolissimi consigli; e di ciò gli sono molto grato.

1. RICHIAMI CONCERNENTI LA NOZIONE DI CURVE CONIUGATE (**). — Una curva luogo di ordine n, di un piano Ω,

$$f \equiv \Sigma a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = 0, \tag{1}$$

(ove $i_1 i_2 \ldots i_n$ è una combinazione, con ripetizione, degli indici $1 . 2 . 3$; e si conviene che siano eguali le a che portano le permutazioni degli stessi indici) ed una curva inviluppo φ, di classe n, dello stesso piano:

$$\varphi \equiv \Sigma \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_n} = 0, \tag{2}$$

(*) C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (Rendiconti Circ. Mat. Palermo, T. V, 1891), pag. 192.

(**) Per le notizie bibliografiche relative alla teoria di *coniugio* e *apolarità* vedi: L. BERZOLARI, *Allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Kurven* (Pascal Repertorium), pag. 280. — Cfr. BERTINI, loc. cit., pag. 220.

si dicono *coniugate*, se è nullo il loro invariante simultaneo:

$$(f\varphi) \equiv \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0. \tag{3}$$

Ad una curva luogo f resta così associato un sistema lineare ∞^{N-1} di inviluppi φ $\left(N = \frac{n(n+3)}{2}\right)$. Date due curve $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, è coniugata ad ambedue ogni curva φ, per la quale si abbia: $(f_1\varphi) = 0$, $(f_2\varphi) = 0$). In tal caso, le curve φ formano un sistema ∞^{N-2}. Ognuna di esse è coniugata ad una curva generica del fascio $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$. Resta così associato, al sistema ∞^1 di curve f, il sistema ∞^{N-2} di curve φ.

In generale, ad un sistema lineare Σ, ∞^h, di curve f, è associato un sistema Σ^1, ∞^{N-h-1}, di curve φ, le quali sono simultaneamente coniugate a tutte le curve di Σ. Lo stesso dicasi, scambiando Σ con Σ^1.

Se f è una retta r, considerata come n-pla,

$$f \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = \sum a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = 0, \tag{4}$$

la sua relazione di coniugio con una φ sarà:

$$\sum a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0,$$

la quale prova che le a sono proporzionali alle ξ degli stessi indici. La retta r è dunque tangente comune a tutte le curve inviluppo del sistema coniugato alla retta stessa, considerata come n-pla; e dualmente.

Data una curva f, dicesi *n-gono coniugato rispetto ad f*, o più brevemente *n-gono coniugato ad f*, ogni n-gono tale che uno qualunque dei suoi vertici giaccia sulla retta polare mista degli altri $n-1$.

Per costruire un n-gono coniugato ad f, assegnato ad arbitrio un punto $x^{(1)}$, se ne costruisca la prima polare $f^{(1)}_{n-1}$; assegnato, ad arbitrio, un punto $x^{(2)}$ come secondo vertice, se ne costruisca la prima polare $f^{(2)}_{n-2}$ rispetto ad $f^{(1)}_{n-1}$; e così via, fino all'$(n-1)^{esimo}$ vertice, del quale si costruirà la retta polare $f_1^{(n-1)}$ rispetto alla conica $f_2^{(n-2)}$. L'n^{esimo} vertice si sceglierà ad arbitrio sulla retta $f_1^{(n-1)}$.

Che effettivamente l'n-gono $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, così costruito, sia un n-gono coniugato ad f, cioè che, presi $n-1$ qualunque di quei punti, per l'n^{esimo} passi la loro retta polare mista rispetto ad f, risulta dalle considerazioni seguenti. L'equazione della retta polare mista di $n-1$ punti è:

$$f_1^{(n-1)} \equiv \Delta_{x^{(1)}} \Delta_{x^{(2)}} \ldots \Delta_{x^{(n-1)}} f(x) = 0$$

dove Δ è il solito simbolo dell'operazione di polare. Poichè nella precedente relazione, come è noto dal teorema delle polari miste, è lecito lo scambio delle Δ con indici diversi, si deduce che la retta polare mista degli $n-1$ punti è unica, qualunque sia l'ordine nel quale si considerano i punti.

Se il punto $x^{(n)}$ è situato sulla retta $f_1^{(n-1)}$, le coordinate degli n punti dovranno soddisfare alla relazione:

$$\Delta_{x^{(1)}} \Delta_{x^{(2)}} \Delta_{x^{(3)}} \ldots \Delta_{x^{(n)}} = 0,$$

cioè:

$$\sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_n}^{(n)} = 0, \tag{5}$$

la quale dimostra che ognuno degli n punti considerati giace sulla retta polare mista degli altri $n-1$.

La relazione (5) confrontata colla (2) e colla (3) dà:

$$\sum x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_n}^{(n)} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_n} = 0;$$

sicchè *un n-gono coniugato ad f, considerato come inviluppo di classe n, è un inviluppo coniugato ad f; e viceversa.*

Segue da ciò che tutti gli n-goni coniugati ad un sistema lineare Σ, ∞^k, di curve f, considerati come inviluppi di classe n, appartengono al sistema lineare Σ', ∞^{N-k-1}, coniugato a Σ.

Ogni punto della polare mista $f_{n-k}^{(k)}$ di k punti fissi, considerato come $(n-k)$-plo, costituisce, insieme a quei k punti fissi, un n-gono coniugato ad f. Non vi sono altri n-goni coniugati che passino per i k punti dati e che abbiano inoltre un punto $(n-k)$-plo, fuori di quelli così costruiti mediante la $f^{(k)}$.

2. Si supponga che f abbia un punto s-plo in O. La polare mista $f_{n-s+1}^{(s-1)}$ di $s-1$ punti di un n-gono, che siano comunque situati rispetto ad f, passa semplicemente per O. Se un s^{esimo} vertice $x^{(s)}$ coincide con O, per O passerà ancora la polare mista $f_{n-s}^{(s)}$ dei primi s vertici; e se con O coincideranno i vertici successivi $x^{(s+1)}$, $x^{(s+2)}, \ldots, x^{(n-1)}$, passerà pure per O la polare mista di tutti gli $n-1$ vertici considerati. In altre parole: *quando f ha un punto s-plo, l'n-gono formato da $n-s+1$ vertici coincidenti con O e da $s-1$ punti qualunque del piano è un n-gono coniugato ad f.*

Viceversa: *se un punto O di f, contato $n-s+1$ volte, insieme ad $s-1$ punti arbitrari del piano, dà un n-gono coniugato ad f, il punto O è s-plo* *per* f (*). Perchè si verifichi l'ipotesi bisogna infatti che la polare mista $f^{(s-1)}$ di $s-1$ punti generici rispetto ad f passi per O, senza di che non potrebbe passare per O la retta polare mista di $s-1$ punti generici e del punto O contato $n-s$ volte.

Segue da ciò che, se la f contiene una curva g contata come s-pla, tra gli n-goni coniugati ad f, vi sono tutti quelli formati da $n-s+1$ punti comunque situati su g e da $s-1$ punti qualunque.

In particolare, se f è una retta n-pla, sono suoi n-goni coniugati quelli e solo quelli che hanno almeno uno dei vertici sulla retta e gli altri $n-1$ comunque disposti. Il che segue pure direttamente ed in modo immediato dal fatto che per una retta n-pla la condizione di coniugio si riduce a:

$$(a_1 x_1^{(1)} + a_2 x_2^{(1)} + a_3 x_3^{(1)})(a_1 x_1^{(2)} + a_2 x_2^{(2)} + a_3 x_3^{(2)}) \dots \\ \dots (a_1 x_1^{(n)} + a_2 x_2^{(n)} + a_3 x_3^{(n)}) = 0,$$

la quale è soddisfatta coll'annullarsi di uno almeno dei suoi fattori.

Si potrebbe ora provare di più che *gli n-goni simultaneamente coniugati alle* $\infty^{N-\frac{i(i+3)}{2}-1}$ *curve f d'ordine n, le quali hanno in un dato O un punto $(i+1)$-plo, sono quelli e solo quelli che hanno in O un punto $(n-i)$-plo ed i punti variabili nel piano.* Questa proposizione risulterà dal seguito (n.° 5).

In particolare, per $i=n-1$, la proposizione stessa dice che *gli n-goni coniugati a tutte le ∞^n curve f, le quali hanno in O un punto n-plo, cioè che si spezzano in n rette per O, sono quelli e solo quelli che hanno in O un punto semplice.*

3. Costruzione di una varietà M_{2n}, che rappresenta birazionalmente, senza eccezioni, le n-ple del piano. — Si assumano le $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ di (2) come coordinate omogenee di punti di un S_N e le $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ di (1) come coordinate omogenee di un iperpiano dello stesso S_N. Viene posta così una corrispondenza proiettiva tra le curve luogo di ordine n del piano Ω e gli iperpiani di S_N; ed una corrispondenza proiettiva tra le curve di classe n e i punti di S_N. E la relazione (3) di coniugio tra f e φ si traduce nella relazione di incidenza tra l'iperpiano e il punto di S_N, rappresentanti rispettivamente f e φ.

(*) I teoremi suddetti rientrano in uno noto della teoria generale dell'apolarità ed è questo: la condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto contato $n-s+1$ volte sia apolare rispetto ad una data f, d'ordine n, è che esso sia s-plo per f.

Data una f, e quindi un iperpiano di S_N, i punti di questo rappresentano dunque le curve inviluppo del sistema lineare ∞^{N-1} di tutte le φ coniugate ad f. Dato un fascio di f, e quindi un S_{N-2} di S_N, i punti di questo S_{N-2} rappresentano le φ del sistema lineare ∞^{N-2} coniugate a quel fascio; e così via. In generale: *dato un S_{N-h-1}, i suoi punti rappresentano il sistema coniugato al sistema di tutte le f, le quali hanno per immagini gli ∞^h iperpiani passanti per quello S_{N-h-1}.*

Alle n-ple di punti del piano Ω, concepite come inviluppi di classe n, corrispondono in S_N i punti di una M_{2n}, evidentemente razionale, la quale rappresenta birazionalmente, *senza eccezioni*, le n-ple dei punti di Ω.

Il modello proiettivo, che abbiamo così costruito, della varietà delle n-ple dei punti del piano, come verrà in seguito provato, è di ordine minimo tra quanti altri modelli rappresentano senza eccezioni la suddetta varietà; esso è normale nello spazio S_N; ed è inoltre proiettivamente ben definito, nel senso che ogni altro modello normale dello stesso ordine, di S_N, è ad esso proiettivamente identico.

Per queste ragioni lo denomineremo fino da ora *modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti del piano*, o, più brevemente, *modello d'indice n.*

Dalla definizione deriva, in particolare, che *i punti della sezione di M_{2n} con un iperpiano rappresentano gli ∞^{2n-1} n-goni coniugati ad una data f.*

Indichiamo ora con $X_{i_1 i_2 \dots i_n}$ le coordinate omogenee di un punto di S_N, cosicchè sia:

$$\mu X_{i_1 i_2 \dots i_n} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

e teniamo conto che, per un inviluppo di classe n spezzato in n fasci $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, è:

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Sigma\, x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \dots x^{(n)}_{i_n}.$$

Si ha perciò:

$$\mu X_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Sigma\, x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \dots x^{(n)}_{i_n}, \tag{6}$$

dove, per una data combinazione con ripetizione degli indici 1 . 2 . 3, il sommatorio si intende fatto tenendo fissi gli apici e permutando gli indici distinti tra loro.

Le (6) dànno una *rappresentazione parametrica della M_{2n}.*

Si osservi che tra le X non può sussistere identicamente alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti non tutti nulli, quindi *il modello minimo appartiene ad S_N e non ad uno spazio inferiore.*

Volendo l'ordine m della varietà M_{2n}, cioè il numero dei suoi punti giacenti simultaneamente su $2n$ iperpiani generici, si osserverà che le (5) sono simmetriche rispetto alle n serie di variabili $x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(n)}$, in quanto scambiando tra loro i punti $x^{(i)}$ si ottiene sempre una n-pla coniugata alla f cui si riferisce la (5).

Prescindendo da questa simmetria, si vede facilmente che $2n$ equazioni del tipo (5) sono soddisfatte da $\frac{(2n)!}{2^n}$ n-ple $x^{(1)} \dots x^{(n)}$ (*). Ma poichè, tra queste n-ple, quelle che derivano dalle permutazioni di una medesima, a causa della simmetria della (5), non dànno soluzioni essenzialmente distinte, così le n-ple non ordinate dei punti del piano, che verificano $2n$ equazioni (5), sono in numero di

$$m = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1).$$

Si conclude dunque che *il modello minimo M_{2n} è di ordine $m = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$.*

Le considerazioni esposte permettono di enunciare il risultato anche sotto la forma seguente: *in un sistema lineare $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}-2n} = \infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ di curve luogo di ordine n, ve ne sono $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$, ciascuna spezzata in n rette.*

Questo risultato può ottenersi anche direttamente, particolareggiando il sistema per guisa che venga ad avere $2n$ punti base generici (è una effettiva particolarizzazione solo per $n > 2$) e contando in quanti modi i $2n$ punti si possono distribuire su n rette. Ma il procedimento non sarebbe in sostanza diverso dal precedente.

Osservazione. — Le cose suddette si estendono agevolmente dal piano ad un S_r. Ad esempio, per l'ordine di una M_{rn} (minima) delle n-ple non ordinate dei punti di un S_r, si ha l'espressione:

$$\frac{(rn)!}{(r!)^n \cdot n!}$$

la quale riducesi ad 1, qualunque sia n, quando sia $r = 1$. Si ha così il risultato noto che la varietà delle n-ple dei punti di una retta si può rappresentare biunivocamente, senza eccezioni, coi punti di uno spazio lineare S_n.

Analogamente a quanto si è fatto nel caso di $r = 2$, la rappresentazione dei punti di una retta coi punti di un S_n si ottiene riferendo proiettivamente

(*) C. Segre, l. c.

la totalità dei gruppi di n punti della retta al sistema degli iperpiani di S_n. Ai punti della retta, considerati come n-ple di punti coincidenti, vengono allora a corrispondere gli iperpiani di un inviluppo ∞^1 di classe n, aderente ad una curva ρ di ordine n, razionale normale in S_n; cosicchè ad ogni punto P della retta viene associato un punto di ρ, come punto di contatto dell'iperpiano osculatore corrispondente al punto n-plo P; e quindi ad ogni n-pla di punti della retta viene associato il punto comune agli n iperpiani osculatori, corrispondenti ai punti stessi, ciascuno considerato come n-plo, ecc.

4. Spazî lineari contenuti in M_{2n}. — Ricerchiamo anzitutto gli spazî lineari appartenenti al modello minimo.

Rette. — Abbiamo già veduto che, quando la curva f si riduca ad una retta a contata n volte, ogni suo n-gono coniugato deve avere almeno un vertice su a. Se ora si vogliono cercare le rette di M_{2n}, basta cercare quelle sue linee che sono tagliate in un punto dalle sezioni iperpiane corrispondenti a curve luogo degenerate in rette n-ple. Basta considerare queste, perchè tali sezioni iperpiane formano un sistema ∞^2, non avente su M_{2n} punti base.

Nel piano Ω si ha dunque, come immagine di una retta di M_{2n}, una serie ∞^1 di n-ple tali che ve ne ha una sola con un punto su di una data retta a di Ω. E, viceversa, ogni tale serie è rappresentata da una retta di M_{2n}.

Ora se m punti ($m < n$) della n-pla variabile nella serie ∞^1 sono fissi e gli altri $n-m$ sono variabili, la curva (a priori anche riducibile) descritta da questi $n-m$ punti deve essere incontrata in un sol punto da una retta generica di Ω, ed è quindi una retta b. Di più la serie ∞^1 d'ordine $n-m$ su questa retta deve essere tale che per un punto generico di b, concepito come comune a b ed alla retta generica a, passi un solo gruppo della serie. Dunque: *le rette di M_{2n} sono quelle e quelle soltanto che rappresentano le n-ple aventi m punti fissi ($n > m > 0$) ed $n-m$ punti variabili in una g^1_{n-m} rettilinea.*

Segue da ciò che due punti di M_{2n} sono su di una retta di M_{2n} se le loro corrispondenti n-ple hanno $n-k$ punti in comune e se i due gruppi residui di k punti sono su una medesima retta.

Piani. — Vogliasi ora cercare i piani di M_{2n}. Supposto che δ sia uno di questi, si consideri un suo punto O' ed una sua retta r', non passante per O'; sia P' un punto generico di r' e $p' \equiv O'P'$. La retta p' di M_{2n} rappresenta una serie γ di ∞^1 n-ple, la quale, al variare di P' su r', non potrà che muoversi con continuità su Ω. Ne deriva che, se γ possiede $n-k$ punti fissi in corrispondenza alla posizione iniziale di P', quegli $n-k$ punti, poichè debbono appartenere alla n-pla fissa omologa di O', non potranno che restar fissi al variare di P' su r'.

Quanto alla g_k^1 che, insieme agli $n-k$ fissi, dà γ, pur variando col variare di P', deve sempre contenere il gruppo dei k punti invariabili che, cogli $n-k$ suddetti, dànno l'n-pla omologa di O'; cosicchè, appena che sia $k>1$, la retta p che contiene quella g_k^1 non potrà variare al muoversi di P'.

Dunque, se $k>1$, ai punti di δ corrispondono n-ple formate da $n-k$ punti fissi e da gruppi di k punti variabili in una serie ∞^2 sovra la retta p.

Risulta poi subito che questa serie ∞^2 è una g_k^2, perchè due gruppi G_1, G_2 della serie stessa, insieme agli $n-k$ punti fissi, dànno due n-ple omologhe di due punti di δ; e la retta di δ, individuata da questi due punti, non può che coincidere con quella che rappresenta le n-ple formate dagli $n-k$ punti fissi e dai gruppi della g_k^1 individuata da G_1 e G_2 su p; donde segue che i gruppi di questa g_k^1 fanno parte della serie ∞^2 prima ottenuta e che quindi questa serie è lineare.

Quando poi sia $k=1$, la retta p non è più vincolata a restar fissa; ma allora è chiaro che, se si vuol ottenere una ∞^2 di n-ple, bisogna che l'unico punto rimasto variabile descriva tutto il piano.

Viceversa: la serie delle ∞^2 n-ple formate da $n-k$ punti fissi $(1<k<n)$ e da k punti variabili entro una g_k^2 su una data retta p, o da $n-1$ punti fissi e da un punto mobile in Ω, ha per immagine un piano δ di M_{2n}; perchè quella ∞^2 ha in comune colla varietà degli n-goni, coniugati rispetto ad una retta n-pla, una di quelle serie ∞^1 di n-ple, che sono rappresentate da rette di M_{2n}. Cosicchè la superficie δ è segata da un iperpiano lungo una retta, cioè è un piano.

Spazi lineari ad i dimensioni. — Il ragionamento esposto si estende subito, col processo di indùzione, da $i-1$ ad i, e si conclude: *gli spazi lineari ad i dimensioni, contenuti nel modello minimo, sono quelli e quelli soltanto che rappresentano le n-ple formate da k punti variabili in una* g_k^i $(n>k>i)$ *sopra una retta e da* $n-k$ *punti fissi. Per* $i=2$ *si debbono aggiungere i piani, ognuno dei quali rappresenta le n-ple formate da* $n-1$ *punti fissi e da un punto variabile.*

Ne segue che *la massima dimensione degli spazi lineari contenuti in* M_{2n} *è n. Ognuno di questi rappresenta una* g_n^n *rettilinea.*

Si deduce pure dalle considerazioni precedenti che in M_{2n} esistono $n-i+1$ sistemi irriducibili di spazi S_i, ognuno dei quali rappresenta tutte le n-ple che associano $n-i-k$ punti fissi ad una g^i_{i+k} rettilinea $(n-i>k>0)$. Gli spazi S_i possono essere quindi di $n-i+1$ specie, quanti sono i valori che può assumere k (li denomineremo perciò *spazi lineari S_i di specie k*); salvo il caso di $i=2$ in cui, come abbiamo veduto più sopra, si ha un ulteriore sistema oltre gli $n-1$ ottenuti nel modo precedente.

La determinazione della infinità degli $S_i\,(i>2)$ di specie k si fa ovviamente osservando che un S_i di specie k individua il corrispondente gruppo di $n-i-k$ punti fissi, la retta a e la relativa g^i_{i+k}; cosicchè quello S_i dipende da

$$2(n-i-k)+2+k(i+1)=2n+(i-1)(k-2)$$

parametri.

Per $i=2$, oltre ai piani di specie $0.1.2\ldots(n-2)$, i quali formano sistemi aventi le dimensioni rispettive $2n-2,\ 2n-1,\ 2n,\ldots,3n-4$, si ha un ulteriore sistema contenente ∞^{2n-2} piani.

Si può osservare che non ognuno di quei sistemi di spazi riempie, come totalità di punti, tutta la M_{2n}.

Nel caso dei piani, la M_{2n} è riempiuta dal sistema eccezionale (corrispondente ad $n-1$ punti fissi ed uno variabile sul piano) e da quello corrispondente ad $i=2,\ k=0$.

Per gli altri sistemi si può chiedere quale sia la dimensione della varietà di punti riempita dagli S_i per un dato k; a valutare questa dimensione bisogna cercare quanti sono gli S_i di quella specie che passano per un punto di uno di essi. Essendo S_i generico entro al proprio sistema, gli $n-k-i$ punti fissi corrispondenti sono indipendenti tra loro e dalla retta. Un punto generico di quello S_i è rappresentato dagli $n-i-k$ punti fissi e da $i+k$ punti della retta, indipendenti dai precedenti e giacenti nella relativa g^i_{i+k}. Sicchè basta determinare quante sono le g^i_{i+k} di una retta alla quale appartiene un dato gruppo di $i+k$ punti; esse sono ∞^{ik}. Ne deriva che la nostra varietà di punti ha la dimensione

$$2n+(i-1)(k-2)+i-ik=2(n+1)-(k+i),$$

cioè: *gli spazi lineari di dimensione data i, contenuti in M_{2n}, si distribuiscono in $n-i+1$ sistemi algebrici distinti, di specie* $0,\ 1,\ 2\ldots\ (n-i)$.

Quelli di specie k dipendono da $2n+(i-1)(k-2)$ parametri e riempiono una varietà di punti, subordinata ad M_{2n}, di dimensione $2(n+1)-(k+i)$.

Nel caso di $i=2$ si deve aggiungere un altro sistema di ∞^{2n-2} piani che riempiono tutta la M_{2n}.

5. Superficie delle n-ple coincidenti. — Spazî ad essa osculatori. — Alle n-ple di punti coincidenti corrispondono in S_N i punti di una superficie Φ, evidentemente razionale. Tenendo conto che, come mostra la (5), gli n vertici di un n-gono coniugato ad f non possono coincidere senza che il loro punto di coincidenza appartenga ad f e, viceversa, che un punto di f, contato n volte, dà un n-gono coniugato ad f, se ne trae che i punti comuni a Φ e ad un iperpiano generico, immagine di una curva f, sono alla lor volta le immagini delle n-ple coincidenti con i punti di f. Insomma, nella corrispondenza, *senza eccezioni*, tra i punti di Φ e quelli di Ω, alle sezioni iperpiane di Φ corrispondono su Ω curve luogo di ordine n; e, viceversa, ogni curva luogo di ordine n è immagine di una sezione iperpiana di Φ. La Φ è dunque *la superficie razionale, rappresentata dal sistema lineare di tutte le curve di ordine n del piano Ω. Il suo ordine è pertanto n^2* (*).

Alle n-ple coincidenti nei punti di una retta, corrisponde in Φ una curva ρ, sulla quale gli iperpiani di S_N staccano una serie lineare che, nella corrispondenza tra Φ ed Ω, ha per immagine la g_n^n segnata su una retta r dalle curve di ordine n del piano Ω. Dunque ρ *è una curva razionale normale di un S_n.*

Dall'osservazione che gli S_n di M_{2n} sono tutti e solo quelli che rappresentano le g_n^n rettilinee (n.° preced.) risulta subito che *lo spazio S_n di appartenenza di una curva ρ è uno degli spazi lineari massimi contenuti in M_{2n}; è, viceversa, che ogni spazio lineare massimo S_n, contenuto in M_{2n}, sega Φ secondo una ρ.*

Poichè r contata n volte dà una f, esiste un iperpiano ben determinato Σ', che non sega Φ fuori di ρ.

In ogni suo punto P' la Φ possiede un piano tangente $S_2^{(1)}$ e gli spazi osculatori $S^{(i)}_{\frac{i(i+3)}{2}}$ $(i=2;\ 3\ldots(n-1))$ (**). Com'è noto, gli iperpiani generici

(*) Veronese, *La superficie omoloide normale, ecc.* (Memoria Acc. Lincei, Vol. XIX), pagina 344.

(**) Lo spazio osculatore $S^{(i)}$ è quello cui appartiene la varietà riempita dagli spazi S^i osculatori ai rami tracciati su Φ, coll'origine in P'. In *ogni* punto la Φ possiede effettiva-che passano per $S^{(i)}$ tagliano Φ secondo curve un punto $(i+1)$-plo in P'; ed inversamente una sezione iperpiana di Φ, che abbia un punto $(i+1)$-plo in P', è la sezione di un iperpiano passante per $S^{(i)}$ di P'.

La rappresentazione, senza eccezioni, di Φ su Ω fa corrispondere, alle sezioni iperpiane con punto $(i+1)$-plo in P', le curve f con punto $(i+1)$-plo in P, dove coincidono tutti i punti della n-pla corrispondente a P'. E viceversa.

In base ad una proprietà già notata al principio del n.° 3, i punti dell'$S^{(i)}$, osculatore a Φ in P', rappresentano le curve inviluppo φ del sistema coniugato al sistema lineare delle f che hanno in P un punto $(i+1)$-plo; e la sezione di M_{2n} con quello $S^{(i)}$ rappresenta le curve φ degenerate in n-goni coniugati alle f. In particolare, tra i punti della sezione suddetta, vi sono quelli che rappresentano gli ∞^{2i} n-goni coniugati costituiti dal punto $(n-i)$-plo, e da i punti qualunque del piano (n.° 2).

Si vede dunque che la varietà M_{2i}, rappresentatrice delle n-ple col punto $(n-i)$-plo P e con i punti comunque variabili, sta nello $S^{(i)}$ osculatore a Φ in P'. Ma non è perciò detto che questo $S^{(i)}$ sia proprio lo *spazio di appartenenza* di M_{2i}, cioè lo spazio di dimensione minima cui appartiene M_{2i}.

Che effettivamente sia così si prova mediante le considerazioni analitiche seguenti, dalle quali risulta anzi di più, che M_{2i} è un modello minimo della varietà delle i-ple di punti del piano.

Si assuma il punto P come un vertice del triangolo fondamentale della rappresentazione e si faccia ad es.:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = \cdots = x_1^{(n-i)} = 0; \qquad x_2^{(1)} = x_2^{(2)} = \cdots = x_2^{(n-i)} = 0;$$
$$x_3^{(1)} = x_3^{(2)} = \cdots = x_3^{(n-i)} = 1.$$

Allora, per le (6), poichè le $x_1^{(l)}$, $x_2^{(l)}$, $x_3^{(l)}$ $(l=(n-i+1),\ldots, n)$ sono *arbitrarie*, si annullano identicamente solo quelle $X_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ di cui tutti i termini contengono almeno una x coll'indice 1 o 2 e coll'apice eguale ad uno degli interi 1, 2,..., $(n-i)$. Indicheremo queste coordinate con X_k. Quindi non

mente un solo piano tangente, un solo spazio $S^{(2)}$, un solo $S^{(3)}$, ecc., osculatori, perchè ciò vale per il punto generico; e d'altronde la Φ ammette un gruppo continuo transitivo di ∞^8 omografie, immagini delle ∞^8 omografie piane.

Per quel che concerne gli spazi osculatori di una superficie, cfr. P. Del Pezzo, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni* (Rend. Acc. Scienze Fisiche e Matematiche. Napoli, Anno XXV), pag. 176.

si annullano identicamente quelle X, e solo quelle, che contengono $n-i$ coordinate eguali rispettivamente ad $x_3^{(1)}\dots x_3^{(n-i)}$, cioè ad 1, le altre i coordinate spettando ai punti variabili $x^{(l)}$ $(l=(n-i+1),\dots, n)$. Queste ultime X sono in tutte $\frac{i(i+3)}{2}+1$ e si esprimono con la formola

$$\mu X_{i_{n-i+1}\dots i_n} = \sum x^{(n-i+1)}_{i_{n-i+1}} x^{(n-i+2)}_{i_{n-i+2}} \dots x^{(n)}_{i_n} \tag{7}$$

le quali non sono altro che le (6) per $n=i$.

Tutto ciò indica che lo spazio dato dalle $N-\frac{i(i+3)}{2}$ equazioni $X_k=0$, cioè lo spazio $\left[\frac{i(i+3)}{2}\right]$, nel quale si tagliano gli spazi $X_k=0$, è lo spazio di appartenenza dei punti corrispondenti alle n-ple formate con il punto $(n-i)$-plo e con altri i punti qualunque di Ω.

In generale dunque si conclude: *lo spazio d'appartenenza di quei punti di M_{2n} che rappresentano le n-ple costituite da un punto comune P come $(n-i)$-plo e da altri i punti qualunque, è lo spazio $S^{(i)}_{\frac{i(i+3)}{2}}$, osculatore a Φ nel punto P', che rappresenta l'n-pla dei punti coincidenti in P.*

Ma si deduce di più, dalla forma delle (7), l'altra importante proprietà, che *entro il modello minimo della varietà delle n-ple, la varietà rappresentatrice delle n-ple che hanno un punto fisso $(n-i)$-plo è un modello minimo della varietà delle i-ple.*

E poichè la varietà modello minimo delle i-ple si costruisce in $S^{(i)}$ come M_{2n} in S_N (n. 3), così *i punti dello spazio $S^{(i)}$ rappresentano gli inviluppi di classe n spezzati ciascuno nel fascio $(n-i)$-plo di centro P e in un inviluppo di classe i.*

Ogni punto comune ad $S^{(i)}$ e ad M_{2n}, in quanto appartiene ad M_{2n}, deve rappresentare un inviluppo di classe n spezzato in n fasci; in quanto appartiene ad $S^{(i)}$, un inviluppo di classe n contenente il fascio $(n-i)$-plo P. Dunque:

La completa intersezione della M_{2n} con uno spazio $S^{(i)}$ osculatore a Φ nel punto P', è costituita dalle immagini delle n-ple che hanno il punto P come $(n-i)$-plo.

Ricordando che gli iperpiani per $S^{(i)}$ sono immagini di curve luogo f aventi il punto $(i+1)$-plo P, ne segue senz'altro il teorema enunciato alla fine del n.° 2.

È corollario immediato delle considerazioni precedenti che le ∞^1 n-ple costituite da $n - i$ punti fissi e da un punto i-plo variabile su una retta, sono rappresentate dai punti di una curva razionale normale d'ordine i; perchè le n-ple con $n - i$ punti fissi sono rappresentate da un modello minimo di indice i; e su tal modello le i-ple di punti coincidenti e allineate su una retta sono rappresentate dai punti di una curva razionale normale d'ordine i.

6. Intersezione degli spazi osculatori. — Si consideri una n-pla generica del piano Ω. A due suoi punti A e B corrispondono rispettivamente, nel senso specificato nel numero precedente, due spazi osculatori a Φ in A' e B', di dimensione massima $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$, i quali hanno in comune lo spazio $\left[\frac{(n-2)(n+1)}{2}\right]$ che è lo spazio d'appartenenza della varietà $M_{2(n-2)}$ rappresentatrice delle n-ple che hanno due punti fissi, A e B.

Oltre allo $\left[\frac{(n-2)(n+1)}{2}\right]$ i due spazi osculatori suddetti non possono tagliarsi in uno spazio di dimensione maggiore. Perchè, se si tagliassero, ad es., in un $S_l\left(l = \frac{(n-2)(n+1)}{2} + 1\right)$ il loro spazio di appartenenza sarebbe di dimensione:

$$\frac{2(n-1)(n+2)}{2} - \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+3n}{2} - 2 = N - 2.$$

Ne conseguirebbe che tutti gli spazi osculatori $S^{(n-1)}$, o dovrebbero appartenere ad un medesimo S_{N-2}, o tutti passare per un medesimo S_l e quindi formare un cono. Ambo le conclusioni sono assurde (*).

D'altronde il fatto che due spazi osculatori massimi si taglino lungo un $\left[\frac{(n-2)(n+1)}{2}\right]$, porta già un legame di dipendenza tra essi, perchè in $\left[\frac{n(n+3)}{2}\right]$ due $\left[\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right]$ si segano, in generale, secondo un $\left[\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1\right]$.

(*) Bertini, l. c., pag. 12.

Si conclude che: *gli spazi osculatori massimi a* Φ *sono a due a due dipendenti, cioè si tagliano a coppie secondo spazi* $\left[\frac{(n-2)(n+1)}{2}\right]$.

Questa proprietà di Φ *estende quella nota della superficie di Veronese, di avere i piani tangenti che si tagliano a due a due.*

Ricordando l'osservazione alla fine del numero precedente si conclude subito che *la varietà* $M_{2(n-2)}$, *rappresentatrice delle* n*-ple con due punti fissi* A *e* B, *costituisce la completa intersezione della* M_{2n} *delle* n*-ple collo spazio* $\left[\frac{(n-2)(n+1)}{2}\right]$ *comune agli spazi osculatori massimi a* Φ *nei punti* A', B', *omologhi di* A, B.

Tre spazi osculatori massimi S', S'', S''' corrispondenti ai punti A_1, A_2, A_3 di Ω, hanno in comune lo spazio e solo lo spazio $\left[\frac{n(n-3)}{2}\right]$ cui appartiene la varietà $M_{2(n-3)}$ rappresentatrice delle n-ple coi tre punti fissi A_1, A_2, A_3. Ciò risulta dal fatto che in uno dei tre spazi dati, ad es. nell'S', le sue due intersezioni con S'' ed S''' si comportano come due spazi osculatori massimi della varietà d'indice $n-1$ contenuta in S'; e quindi, per quello che fu dimostrato precedentemente, le due intersezioni medesime si debbono tagliare in uno spazio e soltanto in uno spazio $\left[\frac{n(n-3)}{2}\right]$, il quale è perciò la totale intersezione dei tre spazi S', S'', S''' con M_{2n}.

In generale: $k\,(\leq n)$ *spazi osculatori massimi di* Φ *si segano in uno* $\left[\frac{(n-k)(n-k+3)}{2}\right]$, *il quale taglia* M_{2n} *secondo una varietà modello minimo d'indice* $n-k$.

Per $k=n$ si ha che: n *spazi* $S^{(n-1)}$ *osculatori massimi di* Φ *nei punti* A'_1, A'_2, $A'_3, \ldots, A'_n$, *si tagliano in uno ed in un solo punto di* M_{2n}, che è l'immagine della n-pla A_1, $A_2 \ldots, A_n$ dei punti omologhi ad A'_1, $A'_2, \ldots, A'_n$ nella corrispondenza tra Φ ed Ω.

La proprietà inversa che *per un punto* P *generico di* M_{2n} *passano soltanto* n *spazi osculatori massimi* $S^{(n-1)}$, i quali toccano Φ nei punti $A'_1 \ldots A'_n$, omologhi dei punti $A_1 \ldots A_n$ di Ω, costituenti la n-pla rappresentata da P, è pure vera. Basta, per dimostrarla, osservare che un punto di M_{2n} è immagine di una n-pla, la quale si può concepire in n modi diversi come appartenente ad una varietà di n-ple con un punto fisso. Sicchè per un punto di M_{2n} passano di certo n spazi osculatori massimi; ma non ne può passare alcun altro; perchè se, ad es., ne passasse uno di più, allora gli $n+1$ punti d'osculazione potrebbero essere distinti o no. Se distinti, in virtù della proposizione diretta, il punto considerato rappresenterebbe non più una, ma $\binom{n+1}{n}=n+1$ n-ple; il che è assurdo perchè la corrispondenza tra i punti di M_{2n} e le n-ple è biunivoca senza eccezioni. Se due dei supposti $n+1$ punti d'osculazione fossero coincidenti, poichè in ogni punto la superficie Φ ammette un solo $S^{(n-1)}$ osculatore, dovrebbero coincidere anche i relativi $S^{(n-1)}$ osculatori; e ciò è assurdo trattandosi di un punto generico di M_{2n}, non appartenente dunque all'inviluppo di quel sistema di spazi osculatori.

Da quel che siamo venuti esponendo si deduce la seguente *genesi geometrica del modello minimo M_{2n} della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano.*

Si assuma in $S_N\left(N=\dfrac{n(n+3)}{2}\right)$ la superficie Φ rappresentata dal sistema di tutte le curve d'ordine n del piano; ad n punti del piano rispondono n punti di Φ; gli n spazi osculatori in questi punti a Φ, di dimensione massima $(N-n-1)$, si intersecano in un punto che, variando la n-pla considerata, descrive M_{2n}.

I ragionamenti precedenti possono estendersi a più spazi osculatori di diversa dimensione. Cominciamo a dimostrare che *uno spazio osculatore massimo ed un piano tangente a Φ od hanno in comune un sol punto, oppure l'uno è situato nell'altro.*

Invero si considerino su Ω due punti distinti A e B. Avremo così fissati: il piano $S^{(1)}$, tangente a Φ nel punto A', che rappresenta l'n-pla di punti coincidenti in A; e lo spazio massimo $S^{(n-1)}$ osculatore a Φ nel punto B', che rappresenta l'n-pla di punti coincidenti in B. Poichè tutti i punti di $S^{(1)}$ sono su M_{2n}, è evidente che un punto C' comune ad $S^{(1)}$ e ad $S^{(n-1)}$ è imagine di una n-pla avente il punto semplice B e il punto $(n-1)$-plo A. Ma poichè, se A è distinto da B, di n-ple siffatte ce n'è una sola, vuol dire che c'è un sol punto comune ad $S^{(1)}$ e ad $S^{(n-1)}$. Chè se A coincidesse con B, allora tutto $S^{(1)}$ starebbe dentro $S^{(n-1)}$.

Se si suppone che il punto B stia fisso nel piano Ω ed il punto A descriva una retta a, allora rimane fisso lo spazio osculatore $S^{(n-1)}$, mentre il piano tangente $S^{(1)}$ si muove in modo che il suo punto di contatto A' su Φ descrive la curva normale ρ^n, luogo dei punti che rappresentano le n-ple coincidenti nei punti di a, ed il suo punto C' d'intersezione con $S^{(n-1)}$ descrive la curva normale ρ^{n-1}, luogo dei punti che rappresentano le n-ple costituite dal punto semplice B e dal punto $(n-1)$-plo A variabile su a. In altre parole: *i piani tangenti a Φ, lungo i punti di una curva razionale normale ρ^n, segano uno spazio osculatore massimo, lungo i punti di una curva razionale normale ρ^{n-1}.*

Se invece si suppone che stia fisso A e che il punto B si muova descrivendo una retta b, si trova analogamente che: *gli spazi osculatori massimi a Φ, lungo i punti di una curva razionale normale ρ^n, segano un piano tangente a Φ nei punti di una retta.*

Ora vediamo come si comportano tra di loro due spazi osculatori di diversa dimensione. Per brevità di discorso prendiamo il caso di $n=4$ e consideriamo due spazi osculatori massimi distinti S'_9 ed S''_9 ed uno spazio osculatore S_5 che non giaccia in alcuno degli altri due. Siano B_1 e B_2 i punti del piano Ω che individuano rispettivamente S'_9 ed S''_9 e sia C il punto che individua S_5. Un S_9 ed un S_5 hanno di certo in comune il piano che rappresenta le n-ple costituite dal punto semplice B_1, ovvero B_2, dal punto doppio C e da un punto qualunque; ma non possono avere in comune uno spazio di dimensione maggiore. Infatti se si tagliassero ad es. in uno spazio ordinario, le intersezioni dei due S_9 con S_5 avrebbero in comune una retta, perchè in una retta si tagliano di certo due spazi ordinari di S_5; ora si noti che nell'S_5 le intersezioni dei due S_9 si comportano come due piani tangenti di quella M_4^3 rappresentatrice delle ∞^4 quadruple del piano che hanno un punto doppio fisso in C; e questi due piani non possono tagliarsi in una retta senza coincidere.

Il ragionamento si può estendere, col metodo d'induzione da n ad $n+1$, al caso generale di due spazi osculatori, di diversa dimensione, di Φ; ed è lecito inferire in generale che *k spazi osculatori $S^{(i_1)} S^{(i_2)} \dots S^{(i_k)}$ $(i_1+i_2+\cdots+i_k \leq n)$ si tagliano in generale in uno spazio $\left[\frac{(n-\Sigma i)\,(n-\Sigma i+3)}{2}\right]$ il quale sega M_{2n} in una varietà modello minimo di indice $n-\Sigma i$.*

7. Spazi tangenti alla M_{2n}. — Sia P' un punto generico di M_{2n}. Passano per esso n spazi osculatori massimi; uno qualunque di questi è tagliato dagli altri secondo $n-1$ spazi passanti per P' e che si comportano in $S^{(n-1)}$ come spazi osculatori massimi relativi alla varietà modello d'indice $(n-1)$ contenuta in $S^{(n-1)}$. A sua volta uno qualunque di questi $n-1$ spazi $S^{(n-2)}$ contenuti in $S^{(n-1)}$ è tagliato dagli altri $n-2$ secondo spazi osculatori

massimi $S^{(n-3)}$ relativi alla varietà modello d'indice $(n-2)$ contenuta in quello $S^{(n-2)}$. E così via.

Ciò premesso, si osservi che gli n spazi osculatori massimi passanti per P' si tagliano ad $n-1$ ad $n-1$ secondo n piani situati su M_{2n}. Uno tra questi spazi, ad es. $S^{(n-1)}$, contiene $n-1$ di quei piani; l'n^o piano ha in comune con $S^{(n-1)}$ soltanto il punto P'; perchè se avesse in comune anche un altro punto, gli n spazi osculatori massimi si taglierebbero secondo una retta, il che è assurdo.

Si deduce da ciò che la dimensione dello spazio d'appartenenza degli n piani vale la dimensione d'appartenenza di $n-1$ fra essi, aumentata di 2.

Per le osservazioni precedenti, gli $n-1$ piani situati dentro l'$S^{(n-1)}$ testè considerato si comportano come i piani in cui si intersecano, ad $n-2$ ad $n-2$, gli $n-1$ spazi osculatori massimi della varietà d'indice $(n-1)$ situata in $S^{(n-1)}$. Sicchè la dimensione dello spazio di appartenenza di quegli $n-1$ piani vale la dimensione dello spazio di appartenenza di $n-2$ fra essi, aumentata di 2.

Così via continuando si conclude che lo spazio di appartenenza degli n piani è a $2n$ dimensioni. Esso è lo *spazio* T_{2n} *tangente in* P' alla varietà M_{2n}.

8. Generazione proiettiva di M_{2n}. — Si considerino: uno spazio $S_a^{(n-1)}$ osculatore massimo di Φ in un punto A' (che rappresenta l'n-pla di punti coincidenti in A); un punto B'_a della sua intersezione con M_{2n}, che rappresenti l'n-pla (A_{n-1}, B) formata dal punto $(n-1)$-plo A e da un punto semplice B; ed infine lo spazio $S_b^{(n-1)}$ massimo osculatore a Φ nel punto B', che rappresenta l'n-pla di punti coincidenti in B. Si tenga fisso A su Ω e quindi anche $S_a^{(n-1)}$ nello spazio. Se B descrive tutto il piano Ω, il punto B'_a descrive il piano fisso $\alpha \equiv S_a^{(1)}$ tangente a Φ in A' e può considerarsi come la traccia variabile dello spazio mobile $S_b^{(n-1)}$ su α. Poichè per un punto B'_a di α, per ciò che fu detto al numero precedente, passa un solo spazio osculatore distinto da $S_a^{(n-1)}$ e, viceversa, un punto B di Ω determina una sola n-pla $(A_{n-1}\, B)$ e quindi un solo punto B'_a di α, ne segue che tra i punti B'_a di α e i punti B di Ω è stabilita una corrispondenza biunivoca. Se il punto B descrive una retta qualsivoglia di Ω, le ∞^1 n-ple $(A_{n-1}\, B)$ che si generano sono rappresentate su M_{2n} dai punti di una retta del piano α. E viceversa: se il punto B'_a descrive una retta su α, il punto B descrive una retta su Ω. La corrispondenza biunivoca suddetta è dunque omografica.

Quest'ultima affermazione può essere altrimenti dimostrata provando soltanto che la corrispondenza, la quale già si sa che è algebrica biunivoca, cioè birazionale, è biunivoca senza eccezioni (*). Ora è chiaro che mentre B si muove su Ω, B'_a è ben determinato su α come intersezione di α con un $S_b^{(n-1)}$ che non contiene α. Quando B va in A, secondo una direzione qualsiasi, lo $S_b^{(n-1)}$ tende a passare per α, ma tuttavia B'_a tende ad una posizione limite ben determinata, che è il punto di contatto di α con Φ. Non vi sono dunque elementi fondamentali della corrispondenza su Ω, nè su α, e quindi la corrispondenza è omografica.

Come naturale corollario della proprietà precedente risulta che sono omografici due piani tangenti di Φ riferiti entrambi omograficamente ad Ω e che quindi uno spazio osculatore massimo di Φ taglia tutti i piani tangenti in punti che si corrispondono omograficamente. Cioè:

La superficie Φ, rappresentata dal sistema di tutte le curve di ordine n del piano, gode della notevole proprietà che gli spazi ad essa osculatori, di dimensione massima $(N-n-1)$, punteggiano proiettivamente i suoi piani tangenti.

Se si volesse costruire la Φ mediante i suoi piani tangenti, non basterebbe scegliere ad arbitrio, nello spazio S_N, $N-n$ piani tangenti e stabilire ad arbitrio le corrispondenze omografiche tra questi. Nè quei piani possono essere tra loro indipendenti, nè indipendenti tra loro possono essere quelle corrispondenze. La determinazione di codeste dipendenze presenta anzi difficoltà che, nel caso generale, non abbiamo saputo superare.

Ci limitiamo quindi a ricordare, per un esempio, la *genesi proiettiva* della Φ nel caso di $n=2$, cioè della *superficie di* VERONESE (**). Presi tre piani di S_5, α_1, α_2, α_3, a due a due situati in un S_4, cioè a due a due incidenti tra loro, si assegneranno tre terne di punti omologhi nel modo che segue:

sul piano	α_1	i punti	A_1	B_1	C_1				
» »	α_2	»		A_2		B_2	C_2		
» »	α_3	»			A_3		B_3	C_3	

in modo cioè che siano coincidenti le coppie che, nello schema qui tracciato, sono in una medesima colonna; la quarta terna, che deve determinare le

(*) Vedi p. es. SEVERI, *Lezioni di Geometria Algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 49.
(**) BERTINI, l. c., pag. 334.

tre omografie, sarà di punti indipendenti da quelli già fissati. I piani tangenti alla superficie di VERONESE congiungeranno le terne di punti omologhi dei tre piani; il piano α_1 che contiene la terna $A_1 A_2 A_3$ è tangente a Φ; il suo punto di contatto è A_1; analogamente dicasi di α_2 ed α_3 che toccano Φ rispettivamente nei punti B_2 e C_3.

9. VARIETÀ, SITUATE SU M_{2n}, RAPPRESENTATRICI DI SISTEMI DI n-PLE CON PUNTI MULTIPLI. — Sulla M_{2n} esistono le varietà $V_{2\mu}$ rappresentatrici delle n-ple formate con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ punti, rispettivamente di multiplicità $1, 2, \ldots, k$ $\left(n = \mu_1 + 2\mu_2 + \cdots + k\mu_k = \sum_1^k i\mu_i\right.$, ove alcune delle μ_i possono essere anche nulle; indicheremo con μ la somma $\left.\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k\right)$.

La M_{2n} contiene tante diverse varietà $V_{2\mu}$ quanti sono i modi diversi nei quali n si scompone in una somma di interi positivi.

Si consideri la n-pla rappresentata da un punto generico P' di $V_{2\mu}$; e sia A un punto di multiplicità i dell'n-pla stessa. Tutte le n-ple del piano con punto i-plo in A, come si sa (fine del n.° 5), sono rappresentate dai punti della sezione di M_{2n} collo spazio $S^{(n-i)}$, osculatore a Φ nel punto che rappresenta l'n-pla di punti coincidenti con A. La sezione suddetta passa per P'; perchè tra le n-ple con punto i-plo in A vi è anche la n-pla data.

Vi è dunque luogo a considerare: μ_1 spazi osculatori $S^{(n-1)}$, μ_2 spazi osculatori $S^{(n-2)}, \ldots$, μ_k spazi osculatori $S^{(n-k)}$, corrispondenti rispettivamente ai μ_1 punti semplici, μ_2 punti doppi, ..., μ_k punti k-pli dell'n-pla data. I punti di osculazione di codesti spazi rappresentano le n-ple di punti coincidenti in ognuno dei μ punti dell'n-pla medesima.

Per il teorema enunciato in generale alla fine del n.° 6, tutti questi spazi osculatori si tagliano in un punto, che è il punto P' della $V_{2\mu}$. Inversamente: dato un punto generico P' della $V_{2\mu}$, resta individuata sul piano Ω una n-pla con μ_1 punti semplici, μ_2 doppi, ..., μ_k k-pli; e quindi restano determinati μ_1 spazi osculatori distinti $S^{(n-1)}$, $\mu_2 S^{(n-2)}, \ldots, \mu_k S^{(n-k)}$ e soltanto questi. Si inferisce, supponendo applicato il ragionamento fatto nel caso delle n-ple di punti semplici, che *tutte le varietà $V_{2\mu}$, situate su M_{2n}, sono luoghi dei punti d'intersezione di μ spazi osculatori a Φ, di vario indice.*

10. ORDINE DELLA VARIETÀ $V_{2\mu}$. — L'ordine di una $V_{2\mu}$ è dato dal numero delle soluzioni comuni a 2μ equazioni del tipo (5), nelle quali però

vi siano μ_1 serie di variabili $x^{(1)} \dots x^{(\mu_1)}$ distinte tra loro; poi $2\mu_2$ serie di variabili $x^{(\mu_1+1)}\,x^{(\mu_1+1)}$, $x^{(\mu_1+2)}\,x^{(\mu_1+2)}, \dots, x^{(\mu_1+\mu_2)}\,x^{(\mu_1+\mu_2)}$, a coppie coincidenti tra loro; poi $3\mu_3$ serie di variabili a terne coincidenti; e così via; talchè insomma le equazioni su cui si deve operare sono *lineari* in ciascuna delle serie di variabili $x^{(1)} \dots x^{(\mu_1)}$, *quadratiche* nelle $x^{(\mu_1+1)} \dots x^{(\mu_1+\mu_2)}$ e, via via, di *grado* k, nelle variabili $x^{(\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_{k-1}+1)} \dots x^{(\mu)}$. Esse inoltre non si alterano scambiando tra loro le serie di variabili collo stesso grado.

Prescindiamo per ora da quest'ultima proprietà particolare delle equazioni considerate e cerchiamo di determinare il grado del loro sistema, come se si trattasse di equazioni vincolate soltanto alla condizione di essere omogenee e dei gradi sovraindicati nelle diverse serie di variabili.

Facendo variare con continuità i coefficienti, finchè le forme considerate si spezzino ciascuna in μ_1 forme lineari nelle $x^{(1)} \dots x^{(\mu_1)}$, in μ_2 forme quadratiche nelle $x^{(\mu_1+1)} \dots x^{(\mu_1+\mu_2)}$, ecc., si vede subito che il sistema ha

$$\frac{(2\mu)!}{2^\mu} \prod_1^k i^{2\mu_i}$$

soluzioni, poichè tra i 2μ fattori, che di volta in volta si estraggono dalle 2μ equazioni per avere soluzioni, ve ne sono $2\mu_1$ lineari, $2\mu_2$ quadratiche, ecc.; cosicchè ogni volta si hanno $\prod_1^k i^{2\mu_i}$ soluzioni.

La formola scritta dà il numero delle soluzioni quando le equazioni sono generiche. Se ora i coefficienti delle equazioni di un sistema generico variano con continuità fino a che riescano soddisfatte le condizioni di simmetria, dalle quali si è fatta astrazione, vi saranno $\mu_1!$ soluzioni che verranno a coincidere tra loro per la simmetria rispetto alla serie di variabili $x^{(1)} \dots x^{(\mu_1)}$; $\mu_2!$ soluzioni che verranno a coincidere per la simmetria rispetto alle $x^{(\mu_1+1)} \dots x^{(\mu_1+\mu_2)}$; ecc.

Il numero delle soluzioni distinte si riduce pertanto a:

$$m = \frac{(2\mu)!}{2^\mu \cdot \mu_1!\,\mu_2! \dots \mu_k!} \prod_1^k i^{2\mu_i}\,. \tag{8}$$

La varietà $V_{2\mu}$ *delle n-ple formate da* μ_1 *punti semplici,* μ_2 *punti doppi,...,* μ_k *punti k-pli ha l'ordine dato dalla* (8).

Per $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 1$ la (8) coincide colla (7); per $\mu = 1$ $\mu_k = 1$, la (8) dà l'ordine n^2 della superficie Φ.

OSSERVAZIONE. — Il risultato si estende subito ad un S_r e si ha la formola:

$$\frac{(r\,\mu)\,!}{(r\,!)^{\mu}\,.\,\mu_1\,!\,\mu_2\,!\ldots\mu_k\,!}\prod_1^k i^{r\mu_i} \tag{9}$$

che esprime l'ordine della $V_{r\mu}$ delle r-ple con μ_1 punti semplici, μ_2 doppi, ecc.

11. NUOVA DIMOSTRAZIONE DELLA FORMOLA DI DE JONQUIÈRES PER LE CURVE RAZIONALI. — Fermiamoci un momento in modo particolare sul caso di $r=1$ nel quale, come abbiamo detto (n. 3 oss.), il modello minimo della varietà delle n-ple dei punti della retta data a è uno spazio lineare S_n, dove è tracciata una curva razionale normale ρ, luogo dei punti immagini delle n-ple di a, costituite ciascuna da n punti coincidenti.

Alle n-ple di punti formate con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ punti, rispettivamente cogli ordini di multiplicità 1, 2, ..., k, vengono a corrispondere i punti di S_n, nei quali si tagliano μ_1 spazi osculatori S_{n-1}, μ_2 spazi osculatori $S_{n-2}, \ldots, \mu_k$ spazi osculatori S_{n-k} della curva ρ; e la formola precedente dà l'ordine della varietà V_μ di dimensione $\mu=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k$, luogo dei punti in cui si tagliano i suddetti spazi osculatori a ρ.

Effettivamente, comunque si scelgano μ_1 iperpiani osculatori, $\mu_2\, S_{n-2}$ osculatori, ..., $\mu_k\, S_{n-k}$ osculatori, colla condizione $n=\sum i\,\mu_i$, essi si tagliano sempre in un punto ben determinato di S_n, il quale è associato alla n-pla con elementi multipli costituita dai punti di osculazione di quegli spazi.

L'ordine di V_μ è il numero dei punti, ciascuno dei quali è comune ad uno dei suddetti gruppi di spazi osculatori, che giacciono in un generico $S_{n-\mu}$ di S_n.

Mediante la legge di dualità in S_n, ai punti ed agli iperpiani osculatori di ρ corrispondono rispettivamente gli iperpiani osculatori ed i punti di una curva razionale normale σ; agli S_{n-2} osculatori di ρ, le rette tangenti di σ; agli S_{n-3} osculatori di ρ, i piani tangenti di σ; ecc., ecc.

All'ordine di V_μ corrisponde dunque, per dualità, il numero degli iperpiani, appartenenti ad un generico sistema $\infty^{n-\mu}$ (cioè passante per un generico $S_{\mu-1}$), ciascuno dei quali incontra σ in μ_1 punti e contiene μ_2 tangenti, μ_3 piani osculatori, ..., $\mu_k\, S_{k-1}$ osculatori di σ. Insomma all'ordine di V_μ corrisponde, per dualità, il numero di quei gruppi della serie $g_n^{n-\mu}$, staccata su σ dagli iperpiani di un sistema $\infty^{n-\mu}$, i quali sono dotati di μ_1 punti semplici, μ_2 doppi, ..., μ_k k-pli.

La formola (9) per $r=1$ riducesi dunque alla nota *formola di de Jonquières* relativa alle curve razionali (*), la quale viene così ritrovata per una via completamente nuova.

Introducendo le notazioni del citato lavoro del TORELLI, si riduce subito la nostra formola all'aspetto sotto cui di solito si presenta quella di DE JONQUIÈRES. Si indichi infatti con J il numero dei gruppi di una g_n^r sopra una curva razionale, ciascuno dei quali contiene α_1 punti k_1-pli, α_2 punti k_2-pli, ..., α_ρ punti k_ρ-pli, ove le k sono tutte diverse tra loro e maggiori di 1; e sia $t = \sum \alpha_i$; si avrà intanto, affinchè i gruppi richiesti siano in numero finito:

$$\sum \alpha_i k_i = r + t;$$

sarà inoltre $n \geqq \sum \alpha_i k_i$, cioè $n \geqq r + t$, perchè la differenza $n - \sum \alpha_i k_i$ denota il numero dei punti semplici che appartengono ad uno dei gruppi richiesti.

Raffrontando queste colle notazioni precedenti si ha:

$$t = \mu - \mu_1, \quad r + t = \sum_2^k i\mu_i = n - \mu_1$$

$$r = n - \mu, \quad \mu_1 = n - r - t,$$

e quindi la nostra formola,

$$J = \frac{\mu!}{\mu_1!\,\mu_2!\dots\mu_k!} \prod_1^k i^{\mu_i},$$

diviene:

$$J = \frac{(n-r)!}{(n-r-t)!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_\rho!} k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_\rho^{\alpha_\rho};$$

cioè

$$J = \frac{k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_\rho^{\alpha_\rho}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_\rho!} (n-r)(n-r-1)\dots(n-r-t-1),$$

che è l'aspetto consueto della formola di DE JONQUIÈRES per le curve di genere zero.

12. SPAZI TANGENTI A $V_{2\mu}$. — Data una $V_{2\mu}$, si consideri un suo punto generico, e quindi semplice, P', che rappresenta una n-pla di Ω, la quale abbia in A un punto di multiplicità i. Se si suppone che, fissi tutti gli altri $\mu - 1$

(*) Vedi ad es. RUGGIERO TORELLI, *Dimostrazione di una formola di de Jonquières e suo significato geometrico* (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XXI), pag. 58 e segg. Ivi trovasi la formola stessa per qualunque genere p.

punti distinti dell'n-pla, il punto i-plo A rimanente descriva il piano, allora P' descrive su $V_{2\mu}$ la superficie Φ^{i^2} di un modello minimo V_{2i} di indice i, situato in un $\left[\frac{i(i+3)}{2}\right]$. Questo modello minimo V_{2i} rappresenta le n-ple formate dal gruppo dei $\mu - 1$ punti fissi, ognuno colla debita multiplicità, e da i punti qualunque. La superficie Φ^{i^2} passa per P' ed ha quivi per piano tangente il piano α, luogo dei punti che rappresentano le n-ple formate cogli stessi $\mu - 1$ punti fissi, con un punto $(i-1)$-plo in A e con un punto semplice qualunque. Allorchè sia $i = 1$, la superficie Φ^{i^2} riducesi addirittura ad un piano α, che è evidentemente contenuto in $V_{2\mu}$ e sta pertanto nello spazio tangente $T_{2\mu}$ a $V_{2\mu}$ in P'. Quando invece sia $i > 1$, nessuna delle n-ple, formate con quegli stessi $\mu - 1$ punti fissi, col punto $(i-1)$-plo in A e con un punto semplice qualunque, è rappresentata su $V_{2\mu}$, eccettuata quella in cui il punto semplice variabile coincide con A; quindi, in questo caso, il piano α ha comune con $V_{2\mu}$ il solo punto P'. Ma comunque, α sta ancora sullo spazio tangente $T_{2\mu}$ a $V_{2\mu}$ in P', perchè tocca in P' la superficie Φ^{i^2} tracciata su $V_{2\mu}$.

Per un punto generico P' di $V_{2\mu}$ passano dunque $\mu - \mu_1$ piani tangenti come α; uno per ognuno di quei punti dell'n-pla rappresentata da P', che hanno multiplicità > 1; ed altri μ_1 piani, i quali sono situati su $V_{2\mu}$. Per distinguerli dai precedenti, indicheremo questi ultimi con α'. Tanto gli α quanto gli α' stanno tutti in $T_{2\mu}$.

Due qualunque dei piani α od α' non si tagliano fuori di P'; ciò risulta dal fatto che tutti i punti di un α' sono su $V_{2\mu}$ mentre un α ha comune con $V_{2\mu}$ il solo P'; quindi nessun α può tagliare un α' fuori di P'; ed anche due α, siano ad es. α_1 ed α_2, non possono tagliarsi fuori di P'; perchè dato che A sia il punto di multiplicità i che ha originato le n-ple rappresentate da α_1 e che B sia il punto di multiplicità r che ha originato le n-ple rappresentate da α_2, ogni n-pla comune alle due varietà ∞^2 corrispondenti ai due piani, in quanto sta sulla varietà rappresentata da α_1, deve avere in B un punto r-plo, ed in quanto sta sulla varietà rappresentata da α_2, deve avere in A un punto i-plo; cosicchè quella n-pla coincide coll'unica che è rappresentata da P'.

Infine si osservi che se, data l'n-pla rappresentata da P', si libera da ognuno dei suoi μ punti un punto semplice, i μ punti semplici così liberati, insieme agli altri punti dell'n-pla, che si tengono fissi, dànno luogo ad un sistema di n-ple che sono rappresentate su M_{2n} da una varietà modello minimo di indice μ, passante per P'.

Ora abbiamo già veduto (n.° 7) che una varietà M_{2n} possiede in un suo punto generico, immagine di una data n-pla, uno spazio tangente T_{2n} determinato dagli n piani, i quali rappresentano gli n sistemi di ∞^2 n-ple formate con $n-1$ di quei punti fissi e con un punto qualunque. Per la nostra varietà d'indice μ, i μ piani coincidono coi piani α ed α' sopra costruiti. Si conclude quindi che lo spazio d'appartenenza di tutti i piani α ed α' che passano per P' è uno spazio $T_{2\mu}$ tangente alla varietà $V_{2\mu}$ in P'.

13. Rappresentazione di $M_{2\mu}$ su un S_n. — Riprendiamo a considerare le

$$\mu\, X_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum x^{(1)}_{i_1}\, x^{(2)}_{i_2} \ldots x^{(n)}_{i_n}$$

che dànno le coordinate omogenee, a meno di un fattore di proporzionalità μ, di quei punti di S_N che appartengono ad M_{2n}, e dove $i_1\, i_2 \ldots i_n$ è una combinazione ad n ad n con ripetizione degli indici 1, 2, 3, ed il sommatorio si intende fatto con fissi gli apici e permutando gli indici tra loro distinti.

Si ponga

$$x^{(1)}_3 = x^{(2)}_3 = \cdots = x^{(n)}_3 = 1\,;$$

e si assuma $X_{33\ldots3} = 1$, con che resta fissato anche il valore 1 per il fattore μ di proporzionalità.

Si assumano le restanti coordinate X, così semplificate, come coordinate non omogenee di S_N.

Si considerino, tra le N coordinate non omogenee X, le n che sono lineari rispetto alle $x^{(i)}_1$, cioè che contengono un solo indice eguale ad 1, indicando rispettivamente con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ quelle di grado 0, 1, 2 ... $(n-1)$ rispetto alle x_2. Indi si considerino le altre n coordinate non omogenee X, che contengono soltanto le x_2 e cioè che sono somme di tutte le $x^{(i)}_2$, o somma di tutti i loro prodotti a due a due, a tre a tre, ecc., fino alla n^{esima} che è il prodotto di tutte le $x^{(i)}_2$, e si indichino rispettivamente con $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{2n}$. Infine siano $\lambda_{2n+1}, \lambda_{2n+2}, \ldots, \lambda_N$ le restanti coordinate non omogenee X.

Si assumano ora come coordinate non omogenee di un S_n le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$; le quali sono lineari rispetto alle $x^{(i)}_1$.

Vediamo anzitutto come si esprimano le $x^{(i)}_1$ per mezzo delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ad abbreviare il discorso sviluppiamo il calcolo in un caso particolare; accenneremo poi al risultato in generale. Per $n = 3$, si ha:

$$
\begin{aligned}
X_{133} &= \lambda_1 &&= x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} \\
X_{123} &= \lambda_2 &&= x_1^{(1)} x_2^{(2)} + x_1^{(2)} x_2^{(1)} + x_1^{(2)} x_2^{(3)} + x_1^{(3)} x_2^{(2)} + x_1^{(3)} x_2^{(1)} + x_1^{(1)} x_2^{(3)} \\
X_{122} &= \lambda_3 &&= x_1^{(1)} x_2^{(2)} x_2^{(3)} + x_2^{(1)} x_1^{(2)} x_2^{(3)} + x_2^{(1)} x_2^{(2)} x_1^{(3)} \\
X_{233} &= \lambda_4 &&= x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} \\
X_{223} &= \lambda_5 &&= x_2^{(1)} x_2^{(2)} + x_2^{(2)} x_2^{(3)} + x_2^{(3)} x_2^{(1)} \\
X_{222} &= \lambda_6 &&= x_2^{(1)} x_2^{(2)} x_2^{(3)} \\
X_{112} &= \lambda_7 &&= x_1^{(1)} x_1^{(2)} x_2^{(3)} + x_1^{(1)} x_2^{(2)} x_1^{(3)} + x_2^{(1)} x_1^{(2)} x_1^{(3)} \\
X_{113} &= \lambda_8 &&= x_1^{(1)} x_1^{(2)} + x_1^{(2)} x_1^{(3)} + x_1^{(3)} x_1^{(1)} \\
X_{111} &= \lambda_9 &&= x_1^{(1)} x_1^{(2)} x_1^{(3)} \\
X_{333} &= \lambda_{10} &&= 1.
\end{aligned}
$$

Dalle prime tre di queste equazioni si ricavano i valori di $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$, $x_1^{(3)}$. Il loro denominatore comune è

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
x_2^{(2)} + x_2^{(3)} & x_2^{(3)} + x_2^{(1)} & x_2^{(1)} + x_2^{(2)} \\
x_2^{(2)} x_2^{(3)} & x_2^{(3)} x_2^{(1)} & x_2^{(1)} x_2^{(2)}
\end{vmatrix}
= (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})\,(x_2^{(1)} - x_2^{(3)})\,(x_2^{(3)} - x_2^{(2)}).
$$

Il numeratore di $x_1^{(1)}$ è:

$$
\begin{vmatrix}
\lambda_1 & 1 & 1 \\
\lambda_2 & x_2^{(3)} + x_2^{(1)} & x_2^{(1)} + x_2^{(2)} \\
\lambda_3 & x_2^{(3)} x_2^{(1)} & x_2^{(1)} x_2^{(2)}
\end{vmatrix}
= (x_2^{(3)} - x_2^{(2)})
\begin{vmatrix}
\lambda_1 & 0 & 1 \\
\lambda_2 & 1 & x_2^{(1)} + x_2^{(2)} \\
\lambda_3 & x_2^{(1)} & x_2^{(1)} x_2^{(2)}
\end{vmatrix}
=
$$

$$
= (x_2^{(3)} - x_2^{(2)})\,(\lambda_1 x_2^{(1)} - \lambda_2 x_2^{(1)} + \lambda_3).
$$

Risulta così:

$$
x_1^{(1)} = \frac{\lambda_1 x_2^{(1)^2} - \lambda_2 x_2^{(1)} + \lambda_3}{(x_2^{(1)} - x_2^{(2)})\,(x_2^{(1)} - x_2^{(3)})}
$$

e analogamente per $x_1^{(2)}$ ed $x_1^{(3)}$.

Osserviamo che le λ_4, λ_5, λ_6 sono funzioni simmetriche elementari delle x_2; e che le λ_7, λ_8, λ_9 sono funzioni intere simmetriche delle x_1 ed x_2. Sostituite in queste ultime al posto delle $x_1^{(i)}$ le espressioni più sopra ottenute, esse si trasformano in funzioni razionali delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$.

Nel caso generale i valori di $x_1^{(i)}$ saranno dati dalla formola:

$$x_1^{(i)} = \frac{\lambda_1 x_2^{(i)^{n-1}} - \lambda_2 x_2^{(i)^{n-2}} + \cdots \pm \lambda_{n-1} x_2^{(i)} \mp \lambda_n}{\Pi\,(x_2^{(i)} - x_2^{(k)})} \tag{10}$$

dove k assume tutti i valori da 1 ad n, escluso i.

Le $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{2n}$ sono funzioni simmetriche elementari delle $x_2^{(i)}$; le $\lambda_{2n+1}, \lambda_{2n+2}, \ldots, \lambda_N$ funzioni intere simmetriche dei punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Se dunque in queste ultime λ si faranno le sostituzioni delle $x_1^{(i)}$ con le espressioni or ora ricavate, esse risulteranno funzioni razionali simmetriche delle $x_2^{(1)} \ldots x_2^{(n)}$ a coefficienti che saranno funzioni razionali intere delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; e perciò potranno esprimersi mediante le funzioni simmetriche elementari delle $x_2^{(i)}$. Alla fine quindi le $\lambda_{2n+1}, \lambda_{2n+2}, \ldots, \lambda_N$ potranno trasformarsi in funzioni razionali delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e delle $\lambda_{n+1} \ldots \lambda_{2n}$.

Sicchè, data una n-pla di punti $x^{(1)} \ldots x^{(n)}$ del piano Ω, resta individuato un sistema di valori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$, cioè un punto di S_{2n}; viceversa: dato un punto di S_{2n}, resta individuato un sistema di valori di $X_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ e, conseguentemente, una n-pla del piano.

Viene posta così una corrispondenza birazionale tra i punti di M_{2n} e i punti di S_{2n}.

Se si torna alle coordinate omogenee in S_N e si introduce l'omogeneità delle coordinate in S_{2n}, le X divengono proporzionali a forme dello stesso ordine delle $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ (coordinate omogenee di S_{2n}):

$$\left.\begin{array}{l} \mu\, X_{33\cdots3} = \lambda_0^\nu;\ \mu\, X_{133\cdots3} = \lambda_0^{\nu-1}\lambda_1;\ \mu\, X_{1233\cdots3} = \lambda_0^{\nu-1}\lambda_2; \ldots;\ \mu\, X_{122\cdots2} = \lambda_0^{\nu-1}\lambda_n \\ \mu\, X_{23\cdots3} = \lambda_0^{\nu-1}\lambda_{n+1};\ \mu\, X_{2233\cdots3} = \lambda_0^{\nu-1}\lambda_{n+2}; \ldots;\ \mu\, X_{22\cdots2} = \lambda_0^{\nu-1}\lambda_{2n} \\ \mu\, X_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) \end{array}\right\} \tag{11}$$

ove le Φ sono funzioni d'ordine ν e le $X_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ sono le altre $N - 2n$ coordinate X.

Allora ai punti di una sezione iperpiana di S_{2n}:

$$\sum_0^{2n} a_i \lambda_i = 0$$

corrispondono i punti di M_{2n} che sono sull'iperpiano:

$$a_0 X_{33\cdots3} + a_1 X_{13\cdots3} + a_2 X_{123\cdots3} + \cdots + a_n X_{122\cdots2} + a_{n+1} X_{23\cdots3} +$$
$$+ a_{n+2} X_{223\cdots3} + \cdots + a_{2n} X_{22\cdots2} = 0,$$

il quale passa per lo spazio $\left[\frac{n(n-1)}{2}-1=N-2n-1\right]$ dato dalle equazioni:

$$\mu\, X_{i_1 i_2 \ldots i_n}=0$$

dove le $X_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ sono le $N-2n$ coordinate X più sopra distinte.

Questo spazio è una faccia $[N-2n-1]$-dimensionale della piramide fondamentale; *nello spazio S_N esistono dunque spazi* $\left[\frac{n(n-1)}{2}-1\right]$ *tali che, da uno di essi, la M_{2n} è proiettata univocamente su uno spazio S_{2n}.*

Osservazione. — Eliminando tra le (11) i parametri omogenei λ, ovvero tra le (6) i parametri x, si hanno $N-2n$ relazioni algebriche omogenee nelle X, funzionalmente indipendenti.

Qui nasce la questione di sapere se tali relazioni tra le X, le quali rappresentano le equazioni di altrettante forme algebriche passanti per M_{2n}, siano sufficienti per costruire la base del modulo di tutte le forme passanti per M_{2n}. Si tratta però di un problema che presenta difficoltà non lievi (*).

Esempio. — Per meglio chiarire con un esempio i ragionamenti e le formole precedenti, applichiamoli al caso di $n=2$. Si ponga adunque:

$$X_{13}=x_1^{(1)}x_3^{(2)}+x_3^{(1)}x_1^{(2)}=\lambda_1\,;\quad X_{12}=x_1^{(1)}x_2^{(2)}+x_2^{(1)}x_1^{(2)}=\lambda_2\,;$$

$$X_{23}=x_2^{(1)}x_3^{(2)}+x_3^{(1)}x_2^{(2)}=\lambda_3\,;$$

$$X_{22}=x_2^{(1)}x_2^{(2)}=\lambda_4\,;\quad X_{11}=x_1^{(1)}x_1^{(2)}=\lambda_5\,;\quad X_{33}=x_3^{(1)}x_3^{(2)}=\lambda_6\,.$$

Si assumano, come coordinate omogenee di S_4, le $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$. Si ottiene:

$$\lambda_5=\frac{\lambda_1^2\lambda_4+\lambda_2^2\lambda_6-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{4\lambda_4\lambda_6-\lambda_3^2}\,,$$

ossia una relazione omogenea cubica tra le X, che è poi la equazione della M_4^3 nello S_5. In tal caso la base del modulo è formata da questa sola equazione.

La M_4^3 è proiettata univocamente su S_4 dal vertice della piramide fondamentale opposta alla faccia $X_{11}=0$.

(*) Vedi, per il problema analogo per le grassmanniane, l'ultima parte della Memoria del Severi.

14. La M_{2n} è il modello minimo tra quelli che rappresentano senza eccezioni le n-ple del piano. — Avendosi una varietà algebrica irriducibile (od anche riducibile, ma costituita in quest'ultimo caso da parti di dimensione $2n-1$ e non minore) di ∞^{2n-1} n-ple di punti, cioè una V_{2n-1} di M_{2n}, si dice *grado* di quella varietà (o di V) l'ordine della curva algebrica riempita dal punto variabile delle n-ple di V che hanno $n-1$ punti fissi.

Si indichi con Σ il sistema degli $\infty^{2(n-1)}$ piani situati su M_{2n}, ciascuno dei quali rappresenta le n-ple con $n-1$ punti fissi (n.° 4). Il grado di V è l'ordine delle curve in cui V è segata da un piano di Σ, dato che evidentemente il sistema degli $\infty^{2(n-1)}$ piani suddetti non ha punti base su M_{2n}.

Anzitutto si osservi che *non esistono su M_{2n} varietà algebriche di grado zero*, cioè sistemi algebrici di ∞^{2n-1} n-ple, tra le quali non ve ne sia alcuna contenente $n-1$ punti generici del piano.

Per $n=2$ l'affermazione è resa evidente dalla considerazione che, se vi fosse un punto generico del piano che non appartenesse ad una delle ∞^3 coppie del sistema, le coppie di questo sistema non invaderebbero tutto il piano; starebbero perciò su di una curva, e sarebbero quindi ∞^2, contro il supposto.

Poichè la proprietà è vera per $n=2$, estendiamola al caso generale col processo di induzione, supponendola dimostrata per le varietà a $2n-3$ dimensioni, che appartengono al modello minimo d'indice $n-1$.

Osserviamo anzitutto che nel nostro sistema algebrico $V\infty^{2n-1}$ di n-ple, ve ne sono di certo alcune (e quindi ∞^{2n-3}) che contengono un punto generico P di Ω, perchè altrimenti le ∞^{2n-1} n-ple non invaderebbero tutto il piano e starebbero sopra una curva; il che è assurdo, dacchè su una curva vi sono soltanto ∞^n n-ple ed è $n<2n-1$.

Le ∞^{2n-3} n-ple di V, che passano per P, astrazione fatta da questo punto, dànno luogo ad un sistema algebrico ∞^{2n-3} W di $(n-1)$-ple del modello minimo $M_{2(n-1)}$ di indice $n-1$, che su M_{2n} rappresenta le n-ple col punto fisso P. Per il teorema ammesso le $(n-1)$-ple di W, contenenti $n-2$ punti generici di Ω, sono ∞^1; e poichè tali $(n-1)$-ple, associate a P, dànno n-ple di V, così ne segue, come volevasi provare, che le n-ple di V passanti per $n-1$ punti generici sono ∞^1.

Ora, seguendo il ragionamento del prof. Severi nella sua citata Memoria (*), si noti che, essendo V una ∞^{2n-1} algebrica di n-ple, irriducibile o

(*) Severi, l. c., pag. 8 e segg.

no (ma formata in ogni caso di parti della stessa dimensione), fissati i punti $x^{(1)} \dots x^{(n-1)}$ di Ω, l'ulteriore punto $x^{(n)}$, variabile nella ∞^1 di n-ple di V contenenti $x^{(1)} \dots x^{(n-1)}$, descrive una curva algebrica di ordine l eguale al grado di V:

$$\theta (x^{(n)}_1, x^{(n)}_2, x^{(n)}_3) = 0.$$

I coefficienti di θ sono funzioni algebriche ad un valore, cioè razionali, degli $n-1$ punti $x^{(1)} \dots x^{(n-1)}$. Introducendo l'omogeneità nelle coordinate degli $n-1$ punti dati e osservando, come è evidente, che la θ deve risultare simmetrica rispetto agli n punti, si ha in definitiva:

$$\theta \equiv F(x^{(1)}_1, x^{(1)}_2, x^{(1)}_3; \dots; x^{(n)}_1, x^{(n)}_2, x^{(n)}_3),$$

essendo F omogenea di grado l nelle singole serie di variabili e simmetrica di fronte allo scambio delle serie tra loro.

Ora si osservi che una F, omogenea di grado l in n serie di 3 variabili, si può esprimere mediante il prodotto simbolico:

$$\left.\begin{aligned} F \equiv (a_1 x^{(1)}_1 + a_2 x^{(1)}_2 + a_3 x^{(1)}_3)^l . (b_1 x^{(2)}_1 + b_2 x^{(2)}_2 + b_3 x^{(2)}_3)^l \dots \\ \dots (c_1 x^{(n)}_1 + c_2 x^{(n)}_2 + c_3 x^{(n)}_3)^l, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ove, nello sviluppo, al prodotto simbolico:

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} b_1^{q_1} b_2^{q_2} b_3^{q_3} \dots c_1^{r_1} c_2^{r_2} c_3^{r_3} \quad (p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + r_1 + r_2 + r_3 = l)$$

il quale, insieme ad un coefficiente numerico polinomiale, moltiplica il termine;

$$x^{(1)p_1}_1 x^{(1)p_2}_2 x^{(1)p_3}_3 . x^{(2)q_1}_1 x^{(2)q_2}_2 x^{(2)q_3}_3 \dots x^{(n)r_1}_1 x^{(n)r_2}_2 x^{(n)r_3}_3$$

si sostituisca il coefficiente

$$a_{p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3 \dots r_1 r_2 r_3} .$$

Se poi si vuole che la F sia simmetrica di fronte allo scambio delle variabili tra loro, si può assumere $a_i = b_i = \dots = c_i$, cosicchè la nostra F si può scrivere simbolicamente così:

$$F \equiv (a_1 x^{(1)}_1 + a_2 x^{(1)}_2 + a_3 x^{(1)}_3)^l . (a_1 x^{(2)}_1 + a_2 x^{(2)}_2 + a_3 x^{(2)}_3)^l \dots$$
$$\dots (a_1 x^{(n)}_1 + a_2 x^{(n)}_2 + a_3 x^{(n)}_3)^l.$$

Ed è ben chiaro che può anche scriversi:

$$F \equiv [(a_1 x_1^{(1)} + a_2 x_2^{(1)} + a_3 x_3^{(1)}) (a_1 x_1^{(2)} + a_2 x_2^{(2)} + a_3 x_3^{(2)}) \ldots$$
$$\ldots (a_1 x_1^{(n)} + a_2 x_2^{(n)} + a_3 x_3^{(n)})]^l,$$

ed effettuando il prodotto simbolico entro le parentesi quadre:

$$F \equiv [\Sigma\, \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} x_{i_3}^{(3)}]^l, \tag{13}$$

ove si è posto simbolicamente: $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} = a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, per guisa che il valore simbolico di una α è indipendente dall'ordine dei suoi indici e dipende solo dai loro valori numerici.

Nel fare il sommatorio entro la parentesi quadra, si raggruppino quei termini che corrispondono agli stessi valori degli indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$, salvo l'ordine, e si ponga in evidenza il fattore $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ che è ad essi comune. Allora, in base alla definizione di $X_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, quel gruppo di termini eguaglia $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} X_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ e la forma *n-lineare* entro parentesi si riduce pertanto ad una forma simbolica delle X.

Infine la F, essendo la potenza l-esima simbolica della precedente forma lineare, risulta una forma di grado l nelle X.

Rimane così provato che: *ogni varietà V algebrica a $2n-1$ dimensioni, appartenente al modello proiettivo M_{2n} delle n-ple di punti del piano, costruito in uno dei modi indicati ai n.ⁱ 3, 6, è intersezione completa del modello stesso con una forma algebrica di S_N e, precisamente, con una forma d'ordine l, eguale al grado di V.*

Quanto all'ordine di V in S_N è chiaro che esso è eguale ad $m\,l$, essendo m l'ordine del modello minimo.

Ne segue senz'altro, riferendo alla nostra varietà i ragionamenti svolti dal prof. Severi per le varietà grassmanniane (*), che *il modello M_{2n} è normale* (**) e che *tra tutte le varietà che rappresentano, senza eccezioni, le n-ple non ordinate dei punti del piano, il modello M_{2n} è d'ordine minimo. Ogni altra varietà rappresentatrice normale di ordine minimo è una trasformata omografica di M_{2n}.*

(*) Severi, l. c., nn. 9, 10, 11.

(**) Cioè non proiezione di un modello dello stesso ordine appartenente ad uno spazio superiore ad S_N.

15. APPLICAZIONE DEL PRECEDENTE PROCEDIMENTO ALLA VARIETÀ DI SEGRE (*). — La stessa via qui seguita per M_{2n} serve per dimostrare analogamente che *la varietà di Segre, rappresentatrice delle n-ple di punti, tolti da n spazi distinti o sovrapposti, è un modello minimo.*

Ci limiteremo, per brevità, al caso in cui gli n spazi dati sono piani. Allora la varietà di SEGRE, Q_{2n}, di dimensione $2n$, rappresentatrice delle n-ple di punti $x^{(1)} \ldots x^{(n)}$, presi rispettivamente sopra n piani $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ distinti o sovrapposti, si ottiene ponendo:

$$\mu X_{i_1 i_2 \ldots i_n} = x^{(1)}_{i_1} x^{(2)}_{i_2} \ldots x^{(n)}_{i_n}$$

ove $i_1, i_2, \ldots, i_n$ assumono ciascuno i valori 1, 2, 3, e prendendo le X come coordinate omogenee di un punto di uno spazio a $3^n - 1$ dimensioni.

Si osserverà che, quando i piani Ω siano sovrapposti, il modello M_{2n} delle n-ple non ordinate è birazionalmente equivalente ad un'involuzione di ordine $n!$ appartenente a Q_{2n}.

Si può dimostrare anzitutto che su Q_{2n} non esiste alcuna varietà algebrica V_{2n-1} di grado zero, cioè che non esiste alcun sistema algebrico ∞^{2n-1} di n-ple $x^{(1)} \ldots x^{(n)}$, tale che un punto generico di uno qualunque dei piani Ω non appartenga a nessuna di quelle n-ple. Basta all'uopo imitare il processo d'induzione già sviluppato per la M_{2n}, usufruendo dei sistemi di piani che su Q_{2n} corrispondono alle n-ple ottenute fissando $n-1$ punti su altrettanti piani Ω e lasciando variabile, nel restante piano Ω, l'ulteriore punto dell'n-pla (**).

Dopo ciò, col solito ragionamento del SEVERI, si conclude che una V_{2n-1} algebrica di Q_{2n} può rappresentarsi mediante un'equazione del tipo

$$F(x^{(1)}_1, x^{(1)}_2, x^{(1)}_3; \ldots; x^{(n)}_1, x^{(n)}_2\, x^{(n)}_3) = 0,$$

ove F è una forma di grado l nelle singole serie di variabili $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Si potrà pertanto porre simbolicamente la (12) dove però le $a, b, \ldots, c$ non abbiano alcuna relazione tra loro. Si potrà pure scrivere la (13) nella quale però si pone: $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} = a_{i_1}\ b_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$, ossia:

$$F \equiv (\Sigma\, \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} X_{i_1 i_2 \ldots i_n})^l$$

(*) SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano*, ecc., già citata.

(**) Cfr. SCORZA, *Sulla varietà di Segre* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XLV, 1910), pag. 119 e segg.

e questo prova che la V_{2n-1} può rappresentarsi coll'eguagliare a zero una forma nelle X. Dunque: *la varietà di Segre* non contiene che intersezioni complete colle forme del proprio spazio. Di qui si traggono congruenze analoghe a quelle che dalla stessa proprietà furono già enunciate per la M_{2n}.

16. Le omografie che trasformano M_{2n} in sè medesima. — Ogni omografia Π del piano Ω si rispecchia in una trasformazione birazionale Π' di M_{2n} in sè. Si vede facilmente che una tale trasformazione è subordinata da un'omografia dello spazio ambiente S_N. Basta infatti, in base ad una notissima proprietà di geometria sopra una varietà, provare che la Π' muta i punti di M_{2n}, situati su una sezione iperpiana, in punti situati su un'altra sezione iperpiana. Ora questo risulta subito dall'osservazione che su M_{2n} la base minima è formata da una sezione iperpiana, o, più elementarmente, dall'altra che i punti di una sezione iperpiana rappresentano gli n-goni coniugati rispetto ad una curva f d'ordine n del piano Ω (n.° 3) e che l'omografia Π muta la totalità di quegli n-goni nell'insieme degli n-goni coniugati alla curva d'ordine n, che è trasformata della f mediante Π.

Si ottengono così ∞^8 omografie di S_N, costituenti un gruppo continuo, che mutano M_{2n} in sè. E queste ∞^8 omografie sono le sole che lasciano invariata M_{2n}.

Per $n=2$ la proprietà è già nota (*) ed è del resto una facile conseguenza del fatto che la Φ^4 di Veronese, rappresentatrice delle coppie di punti coincidenti di Ω, abbraccia tutti i punti doppi di M_4^3. Ciò posto, un'omografia δ di S_5, che muti in sè M_4^3, non può che mutare in sè il luogo dei punti doppi di M_4^3, cioè Φ. Ma allora δ muta in sè la rete delle coniche di Φ e si rispecchia quindi in una trasformazione birazionale del piano Ω in sè, la quale muta le rette in rette, cioè in un'omografia di Ω.

Nel caso generale, $n>2$, si giunge alla conclusione in modo concettualmente anche più semplice, ricordando che in M_{2n} esiste *un solo* sistema di spazi lineari S_n di dimensione massima, che sono quelli che rappresentano le g_n^n tolte dalle rette di Ω. Ogni omografia δ di S_N, che muti M_{2n} in sè, trasforma un S_n di M_{2n} in un S_n analogo e si rispecchia quindi in una corrispondenza birazionale biunivoca senza eccezioni, fra le n-ple di punti di Ω, la quale muta n-ple allineate in n-ple allineate. Preso un punto P di Ω, ad una retta a del fascio (P), concepita come sostegno della relativa g_n^n, ri-

(*) Bertini, l. c., pag. 341.

sponde, mediante δ, una retta a' sostegno della omologa g_n^n e mentre a descrive (P), a' descrive un inviluppo ∞^1, che si riconosce facilmente essere un fascio.

Invero, la n-pla formata dal punto P contato n volte, appartiene ad ogni retta a e quindi la n-pla corrispondente appartiene ad ogni retta a'. Se dunque quest'ultima n-pla contenesse almeno due punti distinti, a' resterebbe fissa al variare di a e non si avrebbe più una corrispondenza biunivoca senza eccezioni fra le n-ple del piano Ω. Ne deriva che al punto n-plo P risponde, mediante δ, un punto n-plo P' per cui passano tutte le rette a'. Così la δ subordina una corrispondenza biunivoca senza eccezioni tra le n-ple di punti coincidenti di Ω, cioè tra i punti stessi di Ω; tanto basta per concludere (*) che la corrispondenza che si ha tra i punti di Ω è un'omografia (**).

Osservazione. — Il ragionamento esposto per $n > 2$ non è senz'altro applicabile per $n = 2$, perchè in tal caso su M_4^3 si hanno *due* sistemi distinti di piani, nè si può pertanto affermare a priori che un'omografia δ, che lasci invariata M_4^3, muti ciascuno di questi sistemi in sè. Che però così in realtà accada, segue subito da ciò: che per un punto generico di M_4^3 passa un sol piano di uno di quei sistemi (piani che rappresentano le g_2^2 rettilinee) mentre ne passano due dell'altro sistema (piani che rappresentano le coppie di punti con un punto fissati), cosicchè δ non può scambiare tra loro i due sistemi. Il resto del ragionamento corre come sopra.

Si conclude che:

Le sole omografie che mutano M_{2n} in sè sono quelle che provengono dalle ∞^8 omografie piane.

Si fissi ora in Ω un'omografia Π non omologica. Siano A_1, A_2, A_3 i tre punti uniti distinti, ed $a_1 \equiv A_2 A_3$, $a_2 \equiv A_3 A_1$; $a_3 \equiv A_1 A_2$ le tre rette unite. Nella omografia Π' di S_N saranno uniti gli spazi S_k, situati su M_{2n}, i cui punti rappresentano le n-ple formate con un punto $(n-k)$ plo A_i $(k = 1, 2, \ldots, n)$ associato ai gruppi della g_k^k su a_i. In questi spazi si trovano gli $N+1$ punti uniti. Così ad es. per $n = 4$ i *15 punti uniti* di Π' sono dati: dalle *sei* quaderne che hanno un punto semplice in uno degli A_i e un punto triplo in un altro; dalle *tre* quaderne che hanno due punti doppi in due A_i;

(*) Severi, *Lezioni di Geometria Algebrica* (citato), pag. 49.

(**) Ma del resto in tal caso si sa pure che mentre un punto descrive una retta, l'omologo descrive una retta, sicchè si può concludere, anche senza appoggiarsi al teorema citato sulle corrispondenze birazionali.

dalle *tre* quaderne che hanno un punto doppio in un A_i e un punto semplice in ognuno degli altri due; ed infine dalle *tre* quaderne che hanno un punto quadruplo in ognuno degli A_i.

Se la omografia piana Π è un'omologia generale, allora la Π' è un'omografia generale, la cui caratteristica è $(0, 1, 2, \ldots, n)$ (*).

Ad es. per $n = 4$, si supponga che l'omologia Π abbia per centro A e per asse a. Gli spazi fondamentali di Π' saranno allora: il punto A', la retta a', il piano α_2, lo spazio α_3 e lo spazio α_4 che rispettivamente rappresentano: la quaderna dei punti coincidenti in A; le ∞^1 quaderne formate con A triplo e con un punto semplice su a; le ∞^2 quaderne formate con A doppio e con una coppia di punti su a, ecc.

17. Le correlazioni spaziali in S_N e la M_{2n}. — Sia stabilita in Ω una correlazione Δ. Essa trasforma le curve-luogo f d'ordine n in curve inviluppo φ' di classe n; le coniugate φ rispetto ad una f in curve f' coniugate ad una φ'; e quindi trasforma gli n-goni coniugati ad f in n-lateri coniugati a φ'. La Δ si rispecchia perciò in una corrispondenza Δ' di S_N, la quale trasforma i punti di S_N in iperpiani di S_N. Poichè il sistema lineare ∞^{N-h-1} di φ, coniugato ad un sistema ∞^h di f, è correlativo in Δ al sistema ∞^{N-h-1} di f', coniugato ad uno ∞^h di φ', così, in S_N, la Δ' fa corrispondere ai punti di uno spazio lineare S_{N-h-1} gli iperpiani di un sistema lineare ∞^{N-h-1}; cioè Δ' è una correlazione, evidentemente non singolare perchè è biunivoca senza eccezioni.

Ai punti di M_{2n} e di Φ corrispondono rispettivamente (**) in Δ' gli iperpiani che inviluppano una M' ed una Φ'. Quelli che inviluppano M' sono gli iperpiani che segano Φ in n curve normali ρ^n, distinte in generale tra loro, e li indicheremo con Σ; quelli che inviluppano Φ' sono invece quelli che segano Φ secondo n curve normali coincidenti, e li indicheremo con Σ'. Una retta generica r del piano individua adunque un Σ'; e viceversa. La sezione di M_{2n} con un Σ' rappresenta, come si sa (n.° 2), le n-ple che hanno un punto variabile su una retta r.

Alle ∞^8 correlazioni piane vengono così a corrispondere ∞^8 correlazioni di S_N, che mutano M_{2n} in M' e Φ in Φ'. Non vi sono altre correlazioni che mutino M_{2n} in M', perchè se Δ'_0 è una correlazione qualunque che muta M_{2n} in M' e se Δ' è invece una di quelle che mutano M_{2n} in M', ma che è origi-

(*) Cfr. Bertini, l. c., pag. 65.
(**) Cfr. Bertini, l. c., pag. 333, per il caso della superficie di Veronese.

nata da una correlazione Δ di Ω, il prodotto $\Delta'_0 \Delta'^{-1}$ è un'omografia che muta M_{2n} in sè ed è quindi (numero precedente) imagine di una omografia Π del piano Ω. Cosicchè la Δ'_0 corrisponde essa pure ad una correlazione di Ω in sè: la $\Pi\Delta$.

Vediamo ora come si trasformi mediante Δ' uno spazio osculatore massimo $S^{(n-1)}$ di Φ. I punti di $S^{(n-1)}$ rappresentano (fine del numero 5) gli inviluppi di classe n spezzati in un fascio fisso di rette di centro P e in un inviluppo variabile di classe $n-1$; ad essi rispondono pertanto, mediante Δ, le curve luogo di ordine n che contengono una retta fissa p; e queste alla lor volta sono rappresentate dagli iperpiani di S_N che passano per la curva razionale normale ρ di Φ, che è imagine di p; cioè dagli iperpiani di S_N che passano per lo spazio S_n di ρ. E poichè questo S_n è uno spazio lineare massimo di M_{2n} e viceversa (n.° 5), così si conclude che *la correlazione Δ' di S_N fa corrispondere agli spazi $S^{(n-1)}$, osculatori massimi di Φ, gli spazi massimi lineari S_n di M_{2n}; e viceversa.*

Dalle proprietà precedenti segue che il cono inviluppo degli iperpiani Σ' passanti per un $S^{(n-1)}$ ha per corrispondente in Δ' una curva normale luogo ρ; e viceversa.

18. Le superficie ψ di M_{2n}, ciascuna delle quali rappresenta le n-ple di punti allineati sopra una curva piana di ordine n. — Diciamo ora ψ la superficie di M_{2n} rappresentatrice dei gruppi della g^2_n staccata sopra una curva d'ordine n — che da qui innanzi indicheremo con f_1 — dalle rette del piano Ω. Supposto anzitutto che f_1 sia irriducibile, determiniamo l'ordine di ψ. A questo scopo basta tagliare ψ con due iperpiani del tipo Σ', ossia ricercare le n-ple di punti comuni alla suddetta g^2_n ed al sistema delle $\infty^{2(n-1)}$ n-ple, le quali hanno due punti rispettivamente su due rette generiche p_1, p_2. Le n-ple richieste sono quelle e quelle soltanto che sono staccate su f_1 dalle n^2 rette congiungenti ognuno degli n punti in cui p_1 sega f_1 ad ognuno degli n punti analoghi di p_2. Dunque *la superficie ψ è di ordine n^2.*

Si vede inoltre subito che tra questa superficie Ψ e la superficie Φ, delle n-ple coincidenti, si può porre una corrispondenza birazionale, senza eccezioni. Una correlazione Δ del piano Ω muta infatti i punti di Ω in rette, e pone quindi una corrispondenza biunivoca senza eccezioni tra i punti di Ω e i gruppi della g^2_n che si ha su f_1. E poichè i punti di Ω son rappresentati biunivocamente senza eccezioni dai punti di Φ, così ne nasce una corrispondenza biunivoca Γ, senza eccezioni, tra Φ e Ψ; cioè queste due superficie appartengono alla stessa sottoclasse (nel senso di Severi) di superficie razionali.

Ne deriva che su Ψ, come su Φ, la base minima (*) si può formare con una sola curva (di ordine minimo), la quale sarà una qualsiasi curva ρ_1 trasformata, mediante Γ, di una curva ρ di Φ; ossia una curva ρ_1 rappresentatrice delle n-ple staccate su f_1 dalle rette di un fascio.

Al sistema delle sezioni iperpiane di Φ, il quale ha il grado n^2, eguale all'ordine di Φ, corrisponde su Ψ, mediante Γ, un sistema lineare di egual grado, che sarà anzi l'*unico* di grado n^2 esistente su Ψ. Ma poichè già si conosce su Ψ un sistema lineare di grado n^2, e cioè il sistema delle sezioni iperpiane di Ψ, così si conclude che la Γ muta il sistema delle sezioni iperpiane di Φ, nel sistema lineare completo individuato dalle sezioni iperpiane di Ψ. Il sistema trasformato di quello delle sezioni iperpiane di Φ coinciderà addirittura col sistema delle sezioni iperpiane di Ψ, soltanto nel caso che la Ψ sia normale come la Φ, cioè che appartenga ad un S_N e non ad uno spazio inferiore.

Insomma la Ψ sarà omografica a Φ o ad una proiezione di Φ, secondo che il suo spazio di appartenenza è S_N od uno spazio inferiore.

Un facile computo di costanti permette di indurre che, almeno fino a quando f_1 è generica, soltanto ∞^1 dei gruppi della g_n^2 che si ha su f_1 possono essere coniugati rispetto ad una f d'ordine n di Ω. Ma, a rendere pienamente rigorosa questa induzione, occorrerebbe provare che dalla genericità di f_1 consegue l'indipendenza delle equazioni che stanno alla base di quel computo. La cosa non sembra facile e ci trarrebbe forse a dilungarci soverchio sopra una questione che non ha ulteriori conseguenze nel nostro studio.

È poi chiaro come il fatto accennato equivalga ad affermare che Ψ appartiene ad S_N, giacchè se esistesse un iperpiano contenente Ψ, esso taglierebbe M_{2n} nei punti immagini degli n-goni coniugati rispetto ad una curva d'ordine n di Ω, e quindi la g_n^2 più volte considerata sarebbe costituita da n-goni siffatti.

Del resto la verità del fatto accennato, che noi ammetteremo senza ulteriore discussione, si intuisce anche per altre vie (**).

(*) Cfr. SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Annales de l'École Normale de Paris, (3), T. XXV, 1908).

(**) Così, p. es., quando $n = 2$, si vede che la Ψ è effettivamente una superficie (di VERONESE) dello spazio S_5 e non di uno spazio inferiore, perchè la M_4 irriducibile delle coppie di punti, che è del 3.° ordine, non può essere tagliata da un iperpiano lungo una superficie Ψ di 4.° ordine.

Si conclude che M_{2n} *possiede* ∞^N *superficie* Ψ *dell'ordine* n^2, *proiettivamente identiche tra loro e alla* Φ. *Il luogo delle* Ψ *è la varietà, situata su* M_{2n}, *rappresentatrice di tutte le n-ple allineate; la quale è anche la varietà di dimensione* $n+2$ *riempiuta dagli spazi lineari massimi* S_n *di* M_{2n} (n.° 4). *Ogni* Ψ *è una superficie unisecante di tutti gli* S_n.

Più generalmente, tenendo presente che, entro M_{2n}, la varietà delle n-ple che hanno $n-i$ punti fissi, è un modello minimo M_{2i} della varietà delle i-ple, e applicando quello che precede, si trova che: *sulla varietà* M_{2n} *esistono* $\infty^{\frac{i(i+3)}{2}+2(n-i)=2n+\frac{i(i-1)}{2}}$ *superficie* $\tau^{(i)}$ *dell'ordine* i^2 $(1 < i < n)$, *ognuna delle quali rappresenta le* ∞^2 *n-ple costituite da* $n-i$ *punti fissi e da* i *punti allineati su una curva generica di ordine i. Due superficie* $\tau^{(i)}$, *dello stesso ordine, sono proiettivamente identiche. Lo spazio di appartenenza di una* $\tau^{(i)}$ *è un* $\left[\frac{i\,(i+3)}{2}\right]$. Per $i=2$ le $\tau^{(i)}$ sono superficie di VERONESE.

Se la curva f_1 si spezza in una retta p_1 ed in una curva irriducibile f_{11} di ordine $n-1$, allora le n-ple di punti allineati su f_1 sono: 1.° le ∞^2 che hanno $n-1$ punti su f_{11} ed uno su p_1; tra queste si trovano le ∞^1 costituite dagli $n-1$ punti di intersezione di f_{11} con p_1 e da un punto qualunque di p_1; 2.° le ∞^n allineate su p_1, tra le quali si trovano le ∞^1 precedenti. Quelle indicate sotto il n.° 1.° sono rappresentate su M_{2n} dai punti di una superficie Ψ; quelle sotto il n.° 2.° sono rappresentate dai punti di uno spazio lineare massimo S_n di M_{2n}.

La superficie Ψ in tal caso ha dunque in comune con quella S_n una retta. L'ordine della Ψ, quando sia $n > 2$ è n^2-1, perchè questo è appunto il numero di quelle ∞^2 n-ple allineate che, pur avendo $n-1$ punti su f_{11} ed uno su p_1, hanno inoltre un punto su ognuna delle due rette q_1, q_2, scelte genericamente. Invero quelle n-ple sono date: dalle rette $((n-1)^2)$ che congiungono uno qualsiasi dei punti di intersezione di f_{11} con q_1 ad uno qualsiasi dei punti analoghi di q_2; dalle rette $(n-1)$ che congiungono il punto $p_1 q_1$ ad uno qualsiasi dei punti in cui f_{11} segà q_2; dalle $(n-1)$ rette analoghe che passano per il punto $p_2 q_2$; in totale $(n-1)^2+2(n-1)=n^2-1$.

La Ψ così trovata è situata nell'iperpiano determinato dalla retta p_1.

Per $n=2$, allorchè la conica f_1 si spezza in una coppia di rette, la superficie Ψ, corrispondente alla f_1 variabile, che è una superficie di VERONESE, si spezza: nella quadrica imagine delle coppie che hanno un punto su ognuna di quelle due rette; e nei due piani che rappresentano le coppie di punti situate su ognuna delle rette medesime.

Più generalmente si può concludere che: *se una curva f_1 dell'ordine n si scinde in k rette ($k \leq n$) ed in una curva irriducibile dell'ordine $n - k$, la Ψ è dell'ordine $n^2 - k$, possiede k rette e il suo spazio d'appartenenza è $[N - k]$.*

Combinando questo teorema col precedente si trova in particolare che: *la M_{2n} contiene le ∞^{2n} quadriche ognuna delle quali rappresenta le n-ple costituite da $n - 2$ punti fissi e da due punti rispettivamente mobili su due rette.*

Padova, Luglio 1917.

Sulla meccanica delle verghe.

(*Di* ATTILIO PALATINI, *a Padova.*)

PREFAZIONE.

Lo studio sistematico della statica delle verghe fu iniziato da KIRCHHOFF (*). Poichè le equazioni generali dell'elasticità sono applicabili soltanto per deformazioni infinitesime e le verghe invece sono corpi suscettibili di subire deformazioni finite, il KIRCHHOFF, dopo aver supposto la verga divisa in fette infinitesime (le cui dimensioni siano tutte dello stesso ordine di grandezza), introdusse il principio fondamentale che le equazioni della elasticità si possano applicare a ciascun elemento del sistema. Con questo criterio egli riesce a determinare le equazioni generali dell'equilibrio delle verghe, con le quali equazioni si possono studiare tutti i problemi statici inerenti alle verghe stesse e che furono trattati da vari autori: in particolare il problema della curva elastica piana.

Non meno che sulla statica, fu richiamata l'attenzione dei matematici sulla dinamica delle verghe in vista dell'immediata applicazione all'acustica. Furono studiate così, con metodi diversi, le varie specie di vibrazioni di una verga rettilinea e circolare (**).

Non ci consta che sia stata fatta una unificazione dei vari metodi, in modo da far dipendere la soluzione di tutti i problemi che si riferiscono alla meccanica delle verghe da un unico principio e da equazioni affatto generali.

Questa unificazione vogliamo tentare nel presente lavoro.

(*) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik* [Leipzig, Teubner, II Auflage, 1877]. Lezioni 28.ª e 29.ª.

(**) Cfr. p. es. LORD RAYLEIGH, *Theory of Sound* [London, Macmillan, II Edition, 1894], V. I; cfr. pure:

A. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity* [Cambridge, the University Press, II Edition, 1906], Cap. XXI.

Noi partiamo, con KIRCHHOFF, dall'ipotesi che la verga sia divisa in fette infinitesime, ciascuna delle quali viene poi da noi supposta rigida dal punto di vista cinematico e dotata di una certa energia potenziale. Dopo aver schematizzato così il nostro sistema deduciamo le equazioni generali della meccanica delle verghe, partendo da un unico principio: quello dei lavori virtuali.

Ritroviamo per tal via le equazioni della statica, conseguendo una maggior generalità di fronte a quelle di KIRCHHOFF, in quanto non specifichiamo la forma dell'energia potenziale.

Stabiliamo poi le equazioni generali che reggono il moto delle verghe, dalle quali equazioni deduciamo quelle relative alle vibrazioni intorno ad una configurazione di equilibrio.

Lo studio di queste equazioni nel caso generale non si presenta troppo facile dal punto di vista analitico e quindi noi ci limitiamo a ritrovare le formule che si riferiscono ai vari casi già studiati.

Sarà bene aggiungere che la stabilità dei moti considerati in prossimità di uno stato d'energia minima, è assicurata (con passaggio al limite concettualmente immediato) da teoremi generali dovuti al RAYLEIGH e completati da LEVI-CIVITA (*).

§ I.

CARATTERISTICHE CINEMATICHE E CINETICHE DEL NOSTRO SISTEMA.

1. *Definizione del sistema.* — Per discutere il problema della statica e della dinamica delle verghe elastiche (concepite come corpi di cui due dimensioni sono piccole di fronte alla terza), noi, in questo primo paragrafo, definiremo quei sistemi materiali nei quali possono farsi rientrare le verghe e ne stabiliremo, per quanto ci sarà possibile, in modo completo, tutti gli elementi che li caratterizzano.

(*) T. LEVI-CIVITA, *Sullo spostamento dell'equilibrio* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, T. LXXI, 1911, pagg. 241-249].

Cominciamo allora col supporre la verga divisa in fette infinitesime (le cui dimensioni devono ritenersi tutte dello stesso ordine di grandezza) ed associamo poi a ciascuna di esse il proprio centro di gravità P. Tutti i punti P costituiranno una curva continua, che chiameremo *direttrice* della verga.

Indicheremo con s l'arco della curva contato a partire da una delle estremità della verga: se l è la sua lunghezza, s, lungo la direttrice, andrà crescendo da o ad l.

Noi supporremo che ciascuna fetta elementare sia liberamente girevole attorno alla tangente alla direttrice nel rispettivo centro di gravità, indipendentemente dagli elementi contigui. Ogni fetta del sistema così costituito possiede evidentemente quattro gradi di libertà.

2. *Elementi che caratterizzano il nostro sistema.* — Ecco ora come si possono individuare i quattro elementi (funzioni dell'arco s) che individuano il nostro sistema.

Fissiamo in primo luogo un triedro $O(X\,Y\,Z)$ trirettangolo fisso di riferimento ed associamo poi a ciascun punto P della direttrice un triedro mobile $P(x\,y\,z)$ con l'origine in P e di cui l'asse delle z è diretto secondo la tangente in P alla direttrice, col verso positivo diretto secondo le s crescenti. La coppia $(x\,y)$ è poi scelta (nel piano normale a z in P), in modo da costituire con z una terna trirettangola sinistrorsa, congruente alla terna fissa $O(X\,Y\,Z)$.

Tanto le coordinate X, Y, Z quanto le x, y, z dei punti della direttrice devono ritenersi funzioni del parametro s.

Diremo poi *stato naturale* della verga la configurazione che compete al sistema quando son nulli tutti gli sforzi interni; *stato deformato* quello corrispondente ad uno stato generico di coazione elastica.

Ciò premesso, prendiamo a considerare un determinato elemento di verga e fissiamone la sua posizione sia in relazione allo stato naturale, sia in relazione ad un generico stato deformato della verga medesima. Siano poi ϖ_1 e ϖ_2 i piani della sezione normale passante per il centro di gravità dell'elemento nelle due diverse posizioni considerate. I piani ϖ_1 e ϖ_2, in generale, si intersecheranno secondo una retta: ed è chiaro che, fissato un verso di circolazione, vi è una sola rotazione attorno a questa retta (rotazione degenere se ϖ_1 e ϖ_2 sono paralleli tra loro) per cui i due piani vengono a sovrapporsi. Dopo questa rotazione gli assi delle z (relativi sempre alle due diverse posizioni dell'elemento) risulteranno paralleli tra loro, mentre le coppie $(x\,y)$, giacenti ora in uno stesso piano, si troveranno ruotate l'una rispetto all'altra di un certo angolo f in generale diverso da zero. Se l'elemento di verga durante la deformazione si è spostato senza subire alcuna rotazione attorno al proprio asse, allora è evidentemente $f=0$.

Fissata ora una qualunque configurazione di equilibrio, chiameremo *atorsionale* quello stato della verga che può essere raggiunto, a partire dallo stato naturale, col piegare semplicemente la verga, senza provocare alcuna torsione, o, più precisamente, quello stato della verga a cui compete la stessa linea direttrice dello stato deformato e nel quale però l'orientazione di ciascun elemento attorno al proprio asse non differisce da quello che gli compete quando la verga si trova allo stato naturale.

Chiameremo poi *angolo di deviazione* l'angolo formato tra i piani ϖ_1 e ϖ_2.

Da queste considerazioni risulta che l'angolo f prima definito è da ritenersi indipendente dalla deformazione della direttrice, pur essendo funzione dell'arco s. Ne consegue che si possono assumere per coordinate lagrangiane di ciascuna fetta del sistema: *le tre coordinate del punto P e l'angolo f.* Ovviamente le tre coordinate determinano univocamente l'ubicazione del punto P lungo la linea direttrice e quindi la posizione del corrispondente elemento di verga e l'angolo f ne determina l'orientazione attorno alla direttrice medesima.

3. *Elementi cinematici e loro espressione analitica.* — Indicheremo in seguito con $d\,s^{(n)}$ l'elemento d'arco della direttrice relativa allo stato naturale della verga e con $d\,s$ il medesimo elemento lineare corrispondente ad uno stato deformato e relativo ad una configurazione di equilibrio. È allora

$$d\,s=(1+\lambda)\,d\,s^{(n)}, \tag{1}$$

avendo indicato con λ il coefficiente di dilatazione lineare. È importante notare, con Kirchhoff, che sebbene le verghe siano dei corpi suscettibili di subire deformazioni finite, la dilatazione lineare non cessa di essere infinitamente piccola.

Denoteremo con $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ tre vettori unitari diretti rispettivamente secondo gli assi mobili Px, Py, Pz.

Indicheremo con $\mathbf{h}$ il vettore che rappresenta la rotazione subìta dagli assi mobili per uno spostamento di $d\,s$ della loro origine lungo la linea direttrice e con p, q, r le sue componenti rispetto a tali assi. È noto che p

e q rappresentano le componenti della curvatura della direttrice in P ed r la torsione.

Dovendo in seguito considerare derivate vettoriali tanto rispetto agli assi fissi, quanto rispetto agli assi mobili, usufruiremo per le prime della notazione $\frac{d'}{ds}$, riservando alle seconde il simbolismo ordinario. Tra le due derivate corre la nota relazione

$$\frac{d'}{ds} = \frac{d}{ds} + \mathbf{h} \wedge, \tag{2}$$

da cui, in particolare, essendo il generico vettore $\mathbf{n}_i$ fisso rispetto agli assi mobili, si hanno le formule di Poisson

$$\frac{d' \mathbf{n}_i}{ds} = \mathbf{h} \wedge \mathbf{n}_i, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Come è noto queste formule definiscono il vettore $\mathbf{h}$ ed offrono per le sue tre componenti p, q, r le espressioni

$$p = \mathbf{n}_3 \times \frac{d' \mathbf{n}_2}{ds}; \quad q = \mathbf{n}_1 \times \frac{d' \mathbf{n}_3}{ds}; \quad r = \mathbf{n}_2 \times \frac{d' \mathbf{n}_1}{ds}.$$

A queste formule dobbiamo aggiungere le altre:

$$\frac{d' P}{ds} = \mathbf{n}_3, \tag{4}$$

che esprimono, se si vuole, che s non è un parametro arbitrario, ma proprio un arco di curva.

4. ***Variazione degli elementi cinematici per uno spostamento virtuale del sistema.*** — Si supponga ora di attribuire al nostro sistema uno spostamento virtuale arbitrario per cui ciascun punto della direttrice relativa ad una configurazione di equilibrio, passa dalla posizione P alla posizione $P + \delta P$, dando luogo alla così detta configurazione-variata.

Indichiamo con $\mathfrak{h}$ il vettore che rappresenta la rotazione elementare atta a realizzare lo spostamento virtuale attribuito al nostro sistema. I tre vettori $\mathbf{n}_i$ (fissi rispetto agli assi mobili) subiranno, rispetto agli assi fissi, una variazione $\delta \mathbf{n}_i$ definita da

$$\delta \mathbf{n}_i = \mathfrak{h} \wedge \mathbf{n}_i,$$

che ci permette di porre $\mathfrak{h}$ sotto la forma

$$\mathfrak{h} = \mathbf{n}_3 \wedge \delta\, \mathbf{n}_3 + (\mathbf{n}_2 \times \delta\, \mathbf{n}_1)\, \mathbf{n}_3 . \tag{5}$$

Nel passaggio dalla configurazione di equilibrio alla configurazione variata, anche il vettore $\mathbf{h}$ subirà un incremento $\delta\,\mathbf{h}$ che è definito da

$$\delta\,\mathbf{h} = \frac{d'\,\mathfrak{h}}{d\,s} - \mathbf{h}\,\frac{d\,\delta\,s}{d\,s} . \tag{6}$$

Infatti, nella configurazione originaria, la rotazione elementare subìta dagli assi mobili per il passaggio del loro centro, lungo la direttrice, dalla posizione s alla posizione $s + d\,s$, è espressa da $\mathbf{h}\,d\,s$. Nella configurazione variata, fra le orientazioni degli assi mobili relativi alle due posizioni s ed $s + d\,s$ intercede un divario ulteriore di $d\,\mathfrak{h}$. Tale incremento va riferito agli assi fissi e si precisa quindi sotto la forma di $\frac{d'\,\mathfrak{h}}{d\,s}\,d\,s$. Ne consegue quindi

$$\delta\,(\mathbf{h}\,d\,s) = \frac{d'\,\mathfrak{h}}{d\,s}\,d\,s$$

e da qui immediatamente la (6) (*). c. d. d..

Determiniamo ora la variazione $\delta\,f$ subìta dall'angolo f. Si noti che $\delta\,f$ si può interpretare come la variazione dell'angolo, inizialmente retto, della coppia $(x\,y)$ per effetto dello spostamento virtuale. Ne consegue

$$\operatorname{ang}(\mathbf{n}_1\,,\ \mathbf{n}_2 + \delta\,\mathbf{n}_2) = \frac{\pi}{2} + \delta\,f,$$

da cui

$$\cos \operatorname{ang}(\mathbf{n}_1\,,\ \mathbf{n}_2 + \delta\,\mathbf{n}_2) = -\sin \delta\,f$$

e da qui e dalla definizione di prodotto scalare, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, immediatamente

$$\delta\,f = \mathbf{n}_2 \times \delta\,\mathbf{n}_1 . \tag{7}$$

Aggiungiamo ancora che dalla (1) si ricava

$$\frac{\delta\,\lambda}{1+\lambda} = \frac{d\,\delta\,s}{d\,s} \tag{8}$$

(*) Per stabilire la (6) mi sono valso di un procedimento già adottato da T. Levi-Civita, *Forma mista di equazioni del moto, ecc.* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, V. XXIV, Serie V, II Sem. 1915, pagg. 235-248], pag. 236.

e dalla (4)

$$\frac{d'\,\delta P}{d\,s} = \delta\,\mathbf{n}_3 + \frac{d\,\delta\,s}{d\,s}\,\mathbf{n}_3\,.$$

Da qui poi, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}_3$, mercè la precedente, si ha

$$\delta\,\lambda = (1+\lambda)\,\mathbf{n}_3 \times \frac{d'\,\delta P}{d\,s} \tag{9}$$

e moltiplicando invece vettorialmente a sinistra per $\mathbf{n}_3$, si ottiene

$$\mathbf{n}_3 \wedge \delta\,\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_3 \wedge \frac{d'\,\delta P}{d\,s}\,.$$

A norma di questa relazione e della (7), la (5) assume la forma

$$\mathfrak{h} = \mathbf{n}_3 \wedge \frac{d'\,\delta P}{d\,s} + \delta\,f\,\mathbf{n}_3\,. \tag{10}$$

Non sarà inutile aggiungere che per ogni valore dell'arco s si possono fissare ad arbitrio gli spostamenti $\delta\,P$ e $\delta\,f$ e che quindi, per ogni valore di s, anche $\mathfrak{h}$ può ritenersi arbitrario.

5. *Energia elastica.* — Indicheremo con e l'energia elastica riportata all'unità di lunghezza della verga deformata, di una fetta elementare di verga: e deve ritenersi una funzione a priori incognita della deformazione del sistema. Noi introdurremo l'ipotesi che e dipenda soltanto dalle caratteristiche p, q, r e dall'allungamento unitario λ (*). Con ciò l'energia elastica di deformazione è supposta indipendente dalla variazione dell'angolo di deviazione lungo la verga. Noi giustifichiamo questa ipotesi: 1.° col tener presente la schematizzazione fatta del nostro sistema (che abbiamo fatto rientrare nei sistemi con quattro gradi di libertà); 2.° col ricordare che negli studi classici intorno al nostro tema, si presuppone anzi una dipendenza quadratica dai quattro parametri anzidetti. Noi, per generalità, non specificheremo questa dipendenza.

(*) Si potrebbe supporre che l'energia elastica dipendesse anche esplicitamente dall'arco s, le quante volte fosse variabile la sezione trasversale della verga. I nostri calcoli non muterebbero sostanzialmente, ma noi supporremo, per semplicità, che questa sezione trasversale sia uniforme e che, come abbiamo specificato, e non dipenda esplicitamente dall'arco s.

Se indichiamo con E l'energia elastica dell'intera verga (la cui lunghezza abbiamo già denotato con l) sarà

$$E = \int_l e(p, q, r, \lambda)\, d s. \tag{11}$$

6. *Atto di movimento.* — Sia Q un punto generico della verga; P il baricentro della fetta cui esso appartiene. La espressione della velocità $\mathbf{v}$ di Q è, come è noto,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\Omega} \wedge (Q - P),$$

dove $\mathbf{v}_P$ è la velocità di P ed $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare del triedro mobile.

Indichiamo con $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ le componenti, secondo gli assi $P(x\,y\,z)$, del vettore $\boldsymbol{\Omega}$. Ricordato il significato dell'angolo f si ha

$$\mathfrak{R} = \frac{d f}{d t}, \tag{12}$$

per cui il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ si può ritenere definito dalla (12) e dalla formula

$$\frac{d' \mathbf{n}_3}{d t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{n}_3, \tag{13}$$

dove $\mathbf{n}_3$, anzichè dalla (4), è definito dalla

$$\mathbf{n}_3 = \frac{d' P}{d s'}, \tag{14}$$

avendo indicato con $d s'$ l'elemento d'arco della direttrice in una sua configurazione qualunque nello stato dinamico.

Le (12) e (13) dànno per $\boldsymbol{\Omega}$ la determinazione

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{n}_3 \wedge \frac{d' \mathbf{n}_3}{d t} + \frac{d f}{d t} \mathbf{n}_3 .$$

Questa equazione, assieme alla (14), permette di conoscere perfettamente, oltre $\mathfrak{R}$, anche $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$.

Si indichino ora con u, v, w le componenti del vettore $\mathbf{v}_P$ e con T la forza viva dell'elemento di verga corrispondente al punto P. Come è noto, T è una forma quadratica omogenea nelle sei caratteristiche u, v, w, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ con coefficienti costanti e deve quindi ritenersi una funzione nota in seguito alle considerazioni precedenti.

Se noi consideriamo ora ciascun elemento di verga come isolato, poichè esso è suscettibile di sole rotazioni attorno all'asse delle z, si ha $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = 0$. Se noi passiamo a calcolare l'energia cinetica dell'intero sistema, questa ipotesi non si lascia sostenere rigorosamente perchè si deve sempre tener conto del contributo dato alla forza viva dalla variazione dell'angolo di deviazione lungo la verga. Però se ci limitiamo a considerare delle vibrazioni molto piccole, potremo, in prima approssimazione, ritenere ancora valida l'ipotesi $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = 0$. Troviamo una giustificazione logica di questa ipotesi ricordando quanto si è fatto di analogo per l'energia elastica ed una giustificazione di fatto, perchè, nelle circostanze ordinarie il contributo all'energia cinetica dovuto alla variazione dell'angolo di deviazione è trascurabile di fronte a quello dovuto al moto di traslazione. Questa ipotesi poi coincide con quella che, durante il moto, sia trascurabile la *rotatory inertia*, ipotesi che fa, ad esempio, il Rayleigh (*) nello studio delle vibrazioni di una verga rettilinea.

Noi riterrèmo quindi, in via approssimativa, che sia

$$\mathfrak{P} = 0; \quad \mathfrak{Q} = 0.$$

7. *Energia cinetica.* — Ciò premesso, si ricordi che il punto P coincide col baricentro della sezione trasversale e così si avrà per T l'espressione

$$2\,T = (u^2 + v^2 + w^2 + \mathfrak{r}^2\,\mathfrak{R}^2)\,d\,m, \tag{15}$$

dove $d\,m$ è la massa del tronco elementare di verga ed $\mathfrak{r}$ il raggio di girazione della sezione trasversale rispetto al baricentro.

Poichè è

$$\frac{d\,P}{d\,t} = \mathbf{v}_P,$$

e vale inoltre la (12), si può mettere la (15) anche sotto la forma

$$2\,T = \left\{ \frac{d\,P}{d\,t} \times \frac{d\,P}{d\,t} + \mathfrak{r}^2 \left(\frac{d\,f}{d\,t}\right)^2 \right\} d\,m,$$

e chiamando con $\mathfrak{T}$ la forza viva dell'intero sistema, si avrà

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{d\,P}{d\,t} \times \frac{d\,P}{d\,t} + \mathfrak{r}^2 \left(\frac{d\,f}{d\,t}\right)^2 \right\} d\,m, \tag{16}$$

l'integrale essendo esteso all'intera verga.

(*) Loco cit. (nota **, pag. 41), pag. 260. Cfr. pure Kirchhoff, loco cit. (nota *, pag. 41), Lez. 28.ª, § 4.

§ II.

EQUAZIONI GENERALI DELLA STATICA DELLE VERGHE.

1. *Applicazione del principio dei lavori virtuali.* — Per stabilire le equazioni statiche delle verghe elastiche si può trar profitto dal principio dei lavori virtuali.

Siano $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{N}$ la risultante e il momento risultante (rispetto a P) delle forze esterne che si esercitano sopra un elemento infinitesimo, riportate, forze e momenti, all'unità di lunghezza della direttrice della verga relativa allo stato deformato. Siano poi $\boldsymbol{\Phi}$ ed $\mathbf{M}$ risultante e momento risultante (rispetto a P) degli sforzi che si esercitano sulla sezione terminale di ciascun tratto di verga da parte della porzione di verga che corrisponde a valori maggiori di s.

Ricordando le notazioni introdotte nel § I, l'applicazione del principio dei lavori virtuali offre immediatamente l'equazione

$$\delta E + \int_l \left\{ \mathbf{F} \times \delta P + \mathbf{N} \times \mathfrak{h} \right\} d s + \left[\boldsymbol{\Phi} \times \delta P + \mathbf{M} \times \mathfrak{h} \right]_l = 0, \tag{17}$$

i termini tra parentesi quadra intendendosi riferiti ai limiti della verga. È superfluo aggiungere che questa equazione deve essere identicamente soddisfatta per qualunque valore degli spostamenti δP e δf.

Ora si ha dalla (11)

$$\delta E = \int_l \left\{ \operatorname{grad} e \times \delta \mathbf{h} + \frac{\partial e}{\partial \lambda} \delta \lambda + e \frac{d \delta s}{d s} \right\} d s,$$

dove si è indicato con $\operatorname{grad} e$ il vettore, che, rispetto agli assi mobili $P(x\,y\,z)$, ha per componenti $\frac{\partial e}{\partial p}, \frac{\partial e}{\partial q}, \frac{\partial e}{\partial r}$. Questa equazione, in virtù delle (6) e (9) e mercè la posizione

$$e_1 = (1+\lambda) \frac{\partial e}{\partial \lambda} + e - \operatorname{grad} e \times \mathbf{h}, \tag{18}$$

assume l'aspetto

$$\delta E = \int_l \left\{ \operatorname{grad} e \times \frac{d' \mathfrak{h}}{d s} + e_1 \mathbf{n}_3 \times \frac{d' \delta P}{d s} \right\} d s$$

e da qui, mediante una integrazione per parti,

$$\left.\begin{aligned} \delta E = & \Big[\operatorname{grad} e \times \mathfrak{h} + e_1 \mathbf{n}_3 \times \delta P\Big]_l - \\ & - \int_l \left\{ \mathfrak{h} \times \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s} + \delta P \times \frac{d'(e_1 \mathbf{n}_3)}{d s} \right\} d s. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Posto allora

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \Big[(\boldsymbol{\Phi} + e_1 \mathbf{n}_3) \times \delta \dot{P} + (\mathbf{M} + \operatorname{grad} e) \times \mathfrak{h}\Big]_l, \\ K_1 &= \int_l \left(\mathbf{F} - \frac{d'(e_1 \mathbf{n}_3)}{d s}\right) \times \delta P \, d s, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

l'equazione (17) diventa

$$H_1 + K_1 + \int_l \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s}\right) \times \mathfrak{h} \, d s = 0. \tag{21}$$

Ma per la (10) si ha

$$\begin{aligned} \int_l \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s}\right) \times \mathfrak{h} \, d s = & \int_l \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s}\right) \times \left(\mathbf{n}_3 \wedge \frac{d' \delta P}{d s}\right) d s + \\ & + \int_l \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s}\right) \times \mathbf{n}_3 \, \delta f \, d s, \end{aligned}$$

od anche, mediante una integrazione per parti,

$$\int_l \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s}\right) \times \mathfrak{h} \, d s = H_2 + K_2 + J,$$

con le posizioni

$$\left.\begin{aligned} H_2 &= \left[\left\{\left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s}\right) \wedge \mathbf{n}_3\right\} \times \delta P\right]_l, \\ K_2 &= -\int_l \delta P \times \frac{d'}{d s}\left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s}\right) d s, \\ J &= \int_l \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d s}\right) \times \mathbf{n}_3 \, \delta f \, d s. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

L'equazione (21), di conseguenza, prende la forma

$$H_1 + H_2 + K_1 + K_2 + J = 0. \tag{23}$$

2. *Equazioni statiche generali.* — Ora ricordiamo che l'equazione (23) alla quale siamo giunti, deve essere identicamente soddisfatta qualunque sia lo spostamento virtuale considerato, il che esige che siano identicamente nulli i coefficienti di δP e δf. Ciò porta, in primo luogo, tenuto conto delle posizioni (20) e (22), alle due equazioni seguenti

$$\mathbf{F} - \frac{d'}{d\,s}\left\{ e_1\, \mathbf{n}_3 + \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d\,s}\right) \wedge \mathbf{n}_3 \right\} = 0,$$

$$\left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d\,s}\right) \times \mathbf{n}_3 = 0,$$

e per l'arbitrarietà di δP e di $\mathfrak{h}$ [v. n.° 4, § I] ai limiti della verga, alle ulteriori equazioni

$$\boldsymbol{\Phi} + e_1\, \mathbf{n}_3 + \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d\,s}\right) \wedge \mathbf{n}_3 = 0,$$

$$\mathbf{M} + \operatorname{grad} e = 0,$$

le quali si possono ritenere quali definizioni dei vettori $\boldsymbol{\Phi}$ ed $\mathbf{M}$.

Dalle equazioni ora ottenute si possono ricavare le equazioni cardinali dell'equilibrio delle verghe, le quali, come si constata immediatamente, sono le seguenti (*):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F} + \frac{d'\, \boldsymbol{\Phi}}{d\,s} &= 0, \\ \frac{d'\, \mathbf{M}}{d\,s} + \mathbf{N} + \mathbf{n}_3 \wedge \boldsymbol{\Phi} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

In seguito ci sarà utile ritenere quali equazioni della statica delle verghe le equazioni cardinali, assieme a quelle che definiscono $\boldsymbol{\Phi}$ ed $\mathbf{M}$, notando esplicitamente in particolare che

$$\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{n}_3 + e_1 = 0,$$

ossia che è

$$\Phi_z = -\, e_1,$$

come si ricava dalla espressione di $\boldsymbol{\Phi}$.

(*) Cfr. p. es. Love, l. c. (nota **, pag. 41), n. 254.

§ III.

Caso particolare in cui il sistema non è soggetto a forze esterne.

1. *Deduzione delle equazioni statiche di Kirchhoff.* — Se le forze esterne applicate al sistema sono nulle, le equazioni (24) dell'equilibrio delle verghe elastiche assumono la forma più semplice

$$\left.\begin{aligned} \frac{d' \boldsymbol{\Phi}}{d s} &= 0, \\ \frac{d' \mathbf{M}}{d s} + \mathbf{n}_3 \wedge \boldsymbol{\Phi} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

od anche, se vogliamo,

$$\frac{d' \boldsymbol{\Phi}}{d s} = 0,$$

dove (tenute presenti le deduzioni del paragrafo precedente e la (2)), $\boldsymbol{\Phi}$ è definito da

$$\left.\begin{aligned} \frac{d \operatorname{grad} e}{d s} + \mathbf{h} \wedge \operatorname{grad} e &= \mathbf{n}_3 \wedge \boldsymbol{\Phi}, \\ \Phi_z + e_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

avendo e_1 l'espressione (18).

Sotto questa forma le equazioni ottenute sono in sostanza le note equazioni stabilite da Kirchhoff (*). La coincidenza formale non è subito manifesta per la forma di e_1. Questa coincidenza apparirà tosto, qualora si osservi che l'energia elastica F di Kirchhoff è riportata all'unità di lunghezza della verga ridotta allo stato naturale e che questa inoltre non viene supposta dipendente dalle componenti p, q, r del vettore $\mathbf{h}$ definito dalle (3), bensì dalle componenti (che Kirchhoff chiama ancora p, q, r) di un vettore $\mathbf{h}'$ definito dalle

$$\frac{d' \mathbf{n}_i}{d s^{(n)}} = \mathbf{h}' \wedge \mathbf{n}_i .$$

(*) Kirchhoff, l. c. (nota *, pag. 41), lez. 28ª.

Poichè si ha evidentemente

$$\mathbf{h}(1+\lambda)=\mathbf{h}',$$
$$e(1+\lambda)=F,$$

si constaterà immediatamente che

$$\operatorname{grad} e=\operatorname{grad} F$$

e che

$$e_1=\frac{\partial F}{\partial \lambda}\cdot$$

Dopo ciò resta provato, secondo la nostra affermazione, che le equazioni ottenute sono quelle di KIRCHHOFF, con un'ulteriore differenza però, e cioè, che mentre per KIRCHHOFF F è una funzione quadratica omogenea degli argomenti da cui dipende, per noi invece e è una funzione a priori qualunque degli argomenti p, q, r e λ.

2. *Integrali primi.* — Il KIRCHHOFF ha notato che le equazioni finali da lui ottenute (dalle quali ha eliminato il parametro λ mediante l'equazione $\Phi_z=0$) sono analoghe a quelle che reggono il moto di un corpo pesante attorno ad un centro fisso.

L'analogia formale non è più conservata se manteniamo ad e la sua generalità, se non specifichiamo cioè la sua dipendenza da p, q, r e λ e non eliminiamo dalla sua espressione il λ. Per questa generalità alla prima equazione (vettoriale) delle (26) devesi sempre tener unita la seconda delle (26) stesse.

Pur non facendo alcuna ipotesi, noi ora vogliamo dimostrare che il sistema di equazioni (26) ammette quattro integrali primi, precisamente quanti ne ammette il sistema che regge il moto citato (i tre integrali delle aree e l'integrale delle forze vive).

Denotiamo a tal uopo con $\mathbf{M}_0$ il momento risultante degli sforzi rispetto al punto O (centro degli assi fissi) e ricordiamo che $\mathbf{M}$ è l'analogo momento rispetto al punto P. Fra $\mathbf{M}_0$ ed $\mathbf{M}$ corre la nota relazione

$$\mathbf{M}_0=\mathbf{M}+(P-O)\wedge\Phi.$$

Di qui con l'aiuto della (4) e della prima delle (25)

$$\frac{d'\mathbf{M}_0}{ds}=\frac{d'\mathbf{M}}{ds}+\mathbf{n}_3\wedge\Phi=0.$$

Ne consegue che, rispetto agli assi fissi, è $\mathbf{M}_0 = \text{cost.}$, ossia

$$\mathbf{M} + (P - O) \wedge \Phi = \text{cost.}$$

Ma $\mathbf{M} = -\operatorname{grad} e$, per cui abbiamo questi primi tre integrali

$$\operatorname{grad} e + (O - P) \wedge \Phi = \text{cost.}$$

Per ottenere il quarto integrale, ricorreremo al principio dei lavori virtuali, particolarizzando in modo opportuno gli spostamenti, supponendo precisamente che questi siano nulli agli estremi della verga e che inoltre sia

$$\delta P = K \mathbf{n}_3 ,$$

$$\delta f = K r,$$

con K affatto arbitrario. Per questa specificazione dalla (10) risulta

$$\mathfrak{h} = K \mathbf{h}$$

e (ricordando che son nulle le forze esterne), dalla (19)

$$\int_l K \left\{ \mathbf{h} \times \frac{d \operatorname{grad} e}{d s} + \mathbf{n}_3 \times \frac{d (e_1 \mathbf{n}_3)}{d s} \right\} d s = 0$$

e da qui, per l'arbitrarietà di K,

$$\mathbf{h} \times \frac{d \operatorname{grad} e}{d s} + \frac{d e_1}{d s} = 0.$$

Ricordando l'espressione (18) di e_1, questa equazione si può mutare nell'altra

$$\frac{d}{d s} (1 + \lambda)^2 \frac{\partial e}{\partial \lambda} = 0,$$

dalla quale il quarto integrale cercato

$$(1 + \lambda)^2 \frac{\partial e}{\partial \lambda} = \text{cost.} \tag{27}$$

Questo integrale naturalmente si deve poter ottenere anche dalle equazioni generali (26) e ciò riesce eliminando tra loro Φ.

È importante notare che se e si presenta come somma di due termini di cui uno dipende da p, q, r e il secondo da λ quest'ultimo integrale ottenuto si presta a questa interpretazione fisica: L'allungamento unitario di una verga in una configurazione di equilibrio è uniforme lungo tutta la verga.

3. *Curva elastica piana.* — Studiamo ora in particolare lo stato di equilibrio di una verga la cui linea direttrice appartiene tutta ad un piano ϖ. A questo piano apparterrà naturalmente l'asse delle z del sistema mobile e se noi scegliamo l'asse delle y pure appartenente a ϖ sarà

$$q = 0, \quad r = 0$$

ed e risulterà funzione soltanto dei due argomenti p e λ.

Le equazioni dell'equilibrio si riducono allora alle seguenti

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,\Phi_y}{d\,s} - p\,\Phi_z = 0, \\ \frac{d\,\Phi_z}{d\,s} + p\,\Phi_y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

con

$$\left.\begin{aligned} \Phi_y &= -\frac{d}{d\,s}\frac{\partial e}{\partial p}, \\ \Phi_z &= -e_1\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Si ha inoltre

$$M_x = -\frac{\partial e}{\partial p}; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0.$$

Nella ordinaria trattazione di questo problema classico si suppone che la verga sia soggetta alle estremità ad un momento flettente M_x proporzionale alla variazione della curvatura tra lo stato di equilibrio e quello naturale, cioè del tipo

$$M_x = A\,(p - p_n),$$

dove con p_n denotiamo la curvatura della verga allo stato naturale. A è un coefficiente che dipende dalla natura e forma della verga, che è precisamente eguale al modulo di Young moltiplicato per il momento d'inerzia della sezione trasversale e che quindi deve ritenersi costante se la verga è omogenea e la sua sezione trasversale è uniforme.

Normalmente si fa l'ipotesi ulteriore che la verga sia retta allo stato naturale. Noi supporremo che sia $p_n = c = \text{cost.}$ (che ridà il caso classico se $c = 0$), il che presuppone che la direttrice della verga nel suo stato naturale sia atteggiata secondo un arco di circonferenza (o, in particolare, secondo una retta).

Prima di procedere si ricordi [cfr. la prima delle (25)] che è $\Phi = \text{cost.}$ (rispetto agli assi fissi), quindi indicando con ϑ l'angolo che la tangente alla curva forma con la linea d'azione del vettore Φ, è

$$p = \frac{d\,\vartheta}{d\,s},$$

$$\Phi_y = \Phi \sin \vartheta; \qquad \Phi_z = \Phi \cos \vartheta,$$

con Φ costante.

Ora, in virtù delle ipotesi prima specificate, la prima delle (29) dà

$$\Phi_y = A\,\frac{d\,p}{d\,s}, \tag{30}$$

la quale equazione, per le osservazioni fatte sopra, si muta nella seguente

$$A\,\frac{d^2\,\vartheta}{d\,s^2} - \Phi \sin \vartheta = 0. \tag{31}$$

Ritroviamo così la formula classica, che determina la forma di equilibrio dell'elastica piana, formula che così viene estesa anche ad una verga che allo stato naturale è atteggiata secondo un arco di circonferenza.

Dalla (31) si deduce in modo ovvio il noto integrale primo

$$\frac{1}{2}\,A\left(\frac{d\,\vartheta}{d\,s}\right)^2 + \Phi \cos \vartheta = a, \qquad (a \text{ costante di integrazione})$$

che, volendo, si può anche scrivere sotto la forma

$$\frac{1}{2}\,A\,p^2 + \Phi_z = a. \tag{32}$$

Facciamo ora queste ulteriori osservazioni.

Nella posizione di equilibrio sia $p = 0$. Allora dalla (30) si ricava $\Phi_y = 0$ e dalle (28) $\Phi_z = \text{cost.}$ Ne concludiamo che una verga può essere mantenuta rettilinea in posizione di equilibrio soltanto da forze puramente tangenziali. E reciprocamente se la verga nella configurazione di equilibrio è soggetta a sole forze tangenziali (non nulle) dalle (28) si ricava $p = 0$, ossia la verga è necessariamente atteggiata secondo una retta.

Nella configurazione di equilibrio sia $p = \text{cost.}$ (diversa da zero). Dalla (30) si ha $\Phi_y = 0$ e dalla prima delle (28) $\Phi_z = 0$. Poichè per definizione lo stato naturale della verga è quello che le compete quando son nulli gli sforzi interni, ne concludiamo che una verga — in presenza di sole forze terminali — non può trovarsi atteggiata secondo un arco di circonferenza, in una configurazione di equilibrio, se non lo è già nel suo stato naturale.

§ IV.

Equazioni che reggono il moto di una verga elastica.

Per ottenere le equazioni che reggono il moto delle verghe elastiche ci varremo del principio di Hamilton, espresso, come è noto, dalla equazione

$$\int_{t_1}^{t_2} d\,t\,(\delta\,\mathfrak{T} + \delta\,E + U) = 0, \tag{33}$$

dove $\delta\,\mathfrak{T}$ e $\delta\,E$ sono le variazioni subìte dalla forza viva e dall'energia elastica del sistema ed U è il lavoro fatto, per uno spostamento virtuale del sistema, dalle forze esterne e dagli sforzi che agiscono sulle estremità della verga.

È quasi superfluo aggiungere che la (33) deve essere soddisfatta identicamente, cioè per uno spostamento virtuale arbitrario, purchè nullo agli estremi dell'intervallo di tempo (t_1, t_2).

Ora, ricordando l'espressione di $\mathfrak{T}$ ricavata nel § I [form. (16)], si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\,\mathfrak{T}\,d\,t = \int_{t_1}^{t_2} d\,t \int \left\{ \frac{d\,\delta\,P}{d\,t} \times \frac{d\,P}{d\,t} + \mathfrak{r}^2\,\frac{d\,\delta\,f}{d\,t}\,\frac{d\,f}{d\,t} \right\} d\,m,$$

od anche, mediante una integrazione per parti,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\,\mathfrak{T}\,d\,t = -\int_{t_1}^{t_2} d\,t \int \left\{ \frac{d^2\,P}{d\,t^2} \times \delta\,P + \mathfrak{r}^2\,\frac{d^2\,f}{d\,t^2}\,\delta\,f \right\} d\,m.$$

Indichiamo ora con $\varkappa$ la densità lineare della verga allo stato deformato e ricordiamo che con $d\,s'$ abbiamo denotato l'elemento d'arco della direttrice in uno stato qualunque di moto; si avrà

$$d\,m = \varkappa\, d\,s'$$

e di conseguenza

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\, \mathfrak{T}\, d\,t = -\int_{t_1}^{t_2} d\,t \int_l \varkappa \left\{ \frac{d^2 P}{d\,t^2} \times \delta\, P + \mathbf{r}^2 \frac{d^2 f}{d\,t^2}\, \delta\, f \right\} d\,s'.$$

Ed ora per ottenere le equazioni generali della dinamica delle verghe, basterà esprimere che sono nulli i coefficienti di $\delta\, P$ e $\delta\, f$ nella (33). Per scriverle in modo rapido basta fare il confronto della (33) con la (17) che determina le equazioni della statica: l'unica differenza sta qui nella presenza dell'energia cinetica, la cui variazione abbiamo testè calcolato, con l'avvertenza però che al $d\,s$ va dappertutto sostituito il $d\,s'$.

Otteniamo così le equazioni seguenti:

$$\mathbf{F} - \frac{d'}{d\,s'} \left\{ e_1\, \mathbf{n}_3 + \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d\,s'} \right) \wedge \mathbf{n}_3 \right\} = \varkappa \frac{d^2 P}{d\,t^2},$$

$$\left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d\,s'} \right) \times \mathbf{n}_3 = \varkappa\, \mathbf{r}^2 \frac{d^2 f}{d\,t^2},$$

con le due equazioni che definiscono $\boldsymbol{\Phi}$ ed $\mathbf{M}$

$$\boldsymbol{\Phi} + e_1\, \mathbf{n}_3 + \left(\mathbf{N} - \frac{d' \operatorname{grad} e}{d\,s'} \right) \wedge \mathbf{n}_3 = 0,$$

$$\mathbf{M} + \operatorname{grad} e = 0.$$

Nel caso che siano nulle le forze esterne, si ha più semplicemente

$$\frac{d'\, \boldsymbol{\Phi}}{d\,s'} = \varkappa \frac{d^2 P}{d\,t^2}, \tag{34}$$

$$-\frac{d' \operatorname{grad} e}{d\,s'} \times \mathbf{n}_3 = \varkappa\, \mathbf{r}^2 \frac{d^2 f}{d\,t^2}, \tag{35}$$

dove $\boldsymbol{\Phi}$ ha l'espressione

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{d' \operatorname{grad} e}{d\,s'} \wedge \mathbf{n}_3 - e_1\, \mathbf{n}_3. \tag{36}$$

§ V.

Vibrazioni intorno ad una configurazione di equilibrio.

1. *Specificazione del problema.* — Vogliamo ora occuparci di stabilire le equazioni che determinano le piccole vibrazioni delle verghe elastiche intorno ad una loro configurazione di equilibrio stabile, in assenza di forze esterne.

Ciascuna caratteristica del fenomeno si potrà allora presentare come somma di due termini di cui il primo rappresenta la determinazione che le compete nella posizione di equilibrio ed il secondo si può interpretare come l'alterazione subìta dalla stessa caratteristica per effetto del moto a partire dalla configurazione di equilibrio.

Poichè noi ci proponiamo di studiare le piccole vibrazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile, questo secondo addendo deve ritenersi infinitesimo. Se ci limitiamo quindi a studiare il fenomeno in prima approssimazione, potremo, nello stabilirne le equazioni, trascurare tutti i termini che contengono infinitesimi di ordine superiore al primo e le equazioni finali risulteranno in tal modo lineari ed omogenee nelle varie incognite.

La determinazione che compete ad una generica caratteristica del sistema in una configurazione di equilibrio sarà contrassegnata con l'indice 0. Ogni lettera munita dell'indice 0 dovrà di conseguenza ritenersi indipendente dal tempo e conosciuta in quanto corrispondente a soluzioni delle equazioni statiche stabilite nei paragrafi precedenti.

2. *Orientazione della terna mobile, rispetto alla terna statica.* — Fissata una generica configurazione di equilibrio della verga, resterà individuata per ogni suo punto P_0 la solita terna, che deve ritenersi variabile da punto a punto, ma fissa al variare del tempo. Indicheremo questa terna con $P_0\,(x\,y\,z)$ e con $P\,(x'\,y'\,z')$ la corrispondente terna vibrante assieme alla verga: mettiamo in evidenza la loro reciproca orientazione.

Poniamo

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i^{(0)} + \boldsymbol{\nu}_i, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{37}$$

e indichiamo con α_i, β_i, γ_i le componenti del vettore $\boldsymbol{\nu}_i$ rispetto agli assi

$P_0(x\,y\,z)$. Notiamo in primo luogo che α_1, β_2, γ_3, in prima approssimazione, si possono ritenere nulli. Infatti i coseni di direzione — componenti — ad esempio del vettore $\mathbf{n}_1$ sono $1+\alpha_1$, β_1, γ_1, per cui si ha la relazione

$$(1+\alpha_1)^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1,$$

cioè

$$-2\,\alpha_1=\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2.$$

Da qui apparisce che α_1 è infinitesimo di secondo ordine e quindi trascurabile per le nostre ipotesi.

Analogamente si dimostra che sono da ritenersi nulli β_2 e γ_3.

I nove coseni di direzione della terna x', y', z' rispetto alla terna x, y, z sono dati allora dal quadro seguente

	x	y	z
x'	1	β_1	γ_1
y'	α_2	1	γ_2
z'	α_3	β_3	1

. (38)

Dalle note proprietà del determinante formato dai nove coseni di direzione di due terne trirettangole sinistrorse, si ricava poi

$$\beta_1=-\alpha_2;\qquad \gamma_1=-\alpha_3;\qquad \gamma_2=-\beta_3.$$

Se si pone ora

$$f=f_0+\varphi, \tag{39}$$

è facile dimostrare che è

$$\beta_1=\varphi.$$

Infatti si prenda a considerare la (7) e si supponga che la variazione virtuale dell'angolo f, che là comparisce, coincida con la sua alterazione dinamica φ: con ciò sarà anche $\delta\,\mathbf{n}_1=\boldsymbol{\nu}_1$ e risulterà

$$\varphi=\mathbf{n}_2\times\boldsymbol{\nu}_1,$$

ossia, a meno di infinitesimi di secondo ordine

$$\varphi = \mathbf{n}_2^{(0)} \times \boldsymbol{\nu}_1 = \beta_1 . \qquad \text{c. d. d.}$$

Dalle considerazioni fatte qui sopra, il quadro (38), scrivendo, per brevità, α e β in luogo di α_3 e β_3, risulta precisato come segue

	x	y	z
x'	1	φ	$-\alpha$
y'	$-\varphi$	1	$-\beta$
z'	α	β	1

e le componenti dei vettori $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$, $\boldsymbol{\nu}_3$ risulteranno rispettivamente eguali a

$$\left.\begin{matrix} 0, & \varphi, & -\alpha, \\ -\varphi, & 0, & -\beta, \\ \alpha, & \beta, & 0. \end{matrix}\right\} \tag{40}$$

3. *Determinazione completa degli elementi cinematici.* — Assieme alle (37) e (39) poniamo

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \omega; \qquad \lambda = \lambda_0 + \lambda'; \\ P = P_0 + \sigma; \end{matrix}\right\} \tag{41}$$

con ciò σ è il vettore che realizza lo spostamento dinamico subìto dal punto P_0.

Indicheremo con p_0, q_0, r_0 e rispettivamente con π, χ, ρ le componenti dei vettori $\mathbf{h}_0$ ed ω *rispetto alla terna* $P_0(x\,y\,z)$. Si noti allora che, per le deduzioni del numero precedente, le componenti p, q, r del vettore $\mathbf{h}$ rispetto alla terna $P(x'\,y'\,z')$ si precisano come segue

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 + q_0\,\varphi - r_0\,\alpha + \pi = p_0 + \pi^*, \\ q &= q_0 - p_0\,\varphi - r_0\,\beta + \chi = q_0 + \chi^*, \\ r &= r_0 + p_0\,\alpha + q_0\,\beta + \rho = r_0 + \rho^*, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

con ovvio significato delle ausiliarie π^*, χ^*, ρ^*.

Poichè abbiamo posto $\lambda = \lambda_0 + \lambda'$, a meno di infinitesimi di secondo ordine, sarà

$$d s' = (1 + \lambda') d s, \tag{43}$$

dove, è bene non dimenticarlo, $d s$ denota l'elemento d'arco della direttrice della verga, quando questa si trova nella configurazione di equilibrio.

Le derivate vettoriali con referenza alla terna $P_0 (x y z)$ (per le quali adoperiamo il simbolismo ordinario) saranno legate alle derivate assolute dalla relazione

$$\frac{d'}{d s'} = \frac{d}{d s'} + \mathbf{h}_0 \wedge,$$

od anche, se i vettori da derivarsi sono infinitesimi, dalla relazione

$$\frac{d'}{d s} = \frac{d}{d s} + \mathbf{h}_0 \wedge. \tag{44}$$

Ora prima di procedere alla determinazione delle equazioni del moto, vogliamo precisare le espressioni di π, χ, ρ. A tal uopo partiamo dalle relazioni cinematiche

$$p = \mathbf{n}_3 \times \frac{d' \mathbf{n}_2}{d s'}; \quad q = \mathbf{n}_1 \times \frac{d' \mathbf{n}_3}{d s'}; \quad r = \mathbf{n}_2 \times \frac{d' \mathbf{n}_1}{d s'}.$$

Per le posizioni fatte sopra dalla prima di queste si ha

$$p_0 + \pi^* = \mathbf{n}_3^{(0)} \times \frac{d' \mathbf{n}_2^{(0)}}{d s} \cdot \frac{1}{1 + \lambda'} + \boldsymbol{\nu}_3 \times \frac{d' \mathbf{n}_2^{(0)}}{d s} + \mathbf{n}_3^{(0)} \times \frac{d' \boldsymbol{\nu}_2}{d s}$$

e da qui, applicando all'ultimo termine la (44), ed essendo

$$p_0 = \mathbf{n}_3^{(0)} \times \frac{d' \mathbf{n}_2^{(0)}}{d s}; \quad \frac{d' \mathbf{n}_2^{(0)}}{d s} = \mathbf{h}_0 \wedge \mathbf{n}_2^{(0)},$$

si ottiene

$$\pi^* = - p_0 \lambda' + \boldsymbol{\nu}_3 \times (\mathbf{h}_0 \wedge \mathbf{n}_2^{(0)}) + \mathbf{n}_3^{(0)} \times \left(\frac{d \boldsymbol{\nu}_2}{d s} + \mathbf{h}_0 \wedge \boldsymbol{\nu}_2 \right).$$

Tenuto presente il significato di π^* [v. form. (42)] e lo schema (40), da qui segue:

$$\pi = - p_0 \lambda' - \frac{d \beta}{d s}. \tag{45}$$

Operando in modo perfettamente analogo sulle espressioni di q ed r, si trova in definitiva (ripetendo la (45))

$$\left.\begin{aligned} \pi &= -p_0\lambda' - \frac{d\dot\beta}{ds}, \\ \chi &= -q_0\lambda' + \frac{d\alpha}{ds}, \\ \rho &= -r_0\lambda' + \frac{d\varphi}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Vediamo ora come si muti la relazione

$$\frac{d'P}{ds'} = \mathbf{n}_3 .$$

Per la (41) si ha

$$\frac{d'P_0}{ds} + \frac{d'\sigma}{ds} = (1+\lambda')(\mathbf{n}_3^{(0)} + \boldsymbol{\nu}_3),$$

da cui, essendo $\dfrac{d'P_0}{ds} = \mathbf{n}_3^{(0)}$, ed applicando la (44),

$$\frac{d\sigma}{ds} + \mathbf{h}_0 \wedge \sigma = \boldsymbol{\nu}_3 + \mathbf{n}_3^{(0)}\lambda'. \tag{47}$$

4. *Equazioni delle vibrazioni.* — Veniamo finalmente alla determinazione delle equazioni che reggono il moto di una verga elastica intorno ad una sua configurazione di equilibrio.

Indichiamo con $\mathfrak{D}$ l'omografia vettoriale che ha per coefficienti le derivate seconde di e rispetto a p, q, r, prese nella configurazione di equilibrio e poniamo

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{g} &= \left(\operatorname{grad}\frac{\partial e}{\partial\lambda}\right)_0, \\ \varepsilon &= \mathfrak{D}\,\omega^* + \mathbf{g}\,\lambda', \\ \mu &= \omega^* \times \mathbf{g} + \left(\frac{\partial^2 e}{\partial\lambda^2}\right)_0 \lambda', \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

dove con ω^* intendiamo il vettore che ha per componenti π^*, χ^*, ρ^* [vedi form. (42)].

Se sviluppiamo allora grad e in serie di Taylor nell'intorno di una configurazione di equilibrio, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, si ha

$$\operatorname{grad} e = \operatorname{grad} e_0 + \varepsilon$$

ed analogamente

$$\frac{\partial e}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial e}{\partial \lambda}\right)_0 + \mu$$

e quindi

$$e_1 = e_1^{(0)} + \tau,$$

con

$$\tau = 2\left(\frac{\partial e}{\partial \lambda}\right)_0 \lambda' + (1 + \lambda_0)\,\mu - \varepsilon \times \mathbf{h}_0 .$$

Per l'ultima delle (48) si ha pure

$$\tau = \left\{ 2\left(\frac{\partial e}{\partial \lambda}\right)_0 + (1 + \lambda_0)\left(\frac{\partial^2 e}{\partial \lambda^2}\right)_0 \right\} \lambda' + (1 + \lambda_0)\,\omega^* \times \mathbf{g} - \varepsilon \times \mathbf{h}_0 ,$$

od anche, posto

$$L = -\left\{ 2\left(\frac{\partial e}{\partial \lambda}\right)_0 + (1 + \lambda_0)\left(\frac{\partial^2 e}{\partial \lambda^2}\right)_0 \right\}$$

e ricordando che anche λ_0 è infinitesimo,

$$\tau = \omega^* \times \mathbf{g} - \varepsilon \times \mathbf{h}_0 - L\,\lambda'. \tag{49}$$

Ne consegue per Φ [form. (36)] la espressione

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \psi,$$

dove $\Phi^{(0)}$ è la determinazione che compete a Φ nella posizione di equilibrio e ψ ha l'espressione seguente

$$\psi = \frac{d' \operatorname{grad} e_0}{d s} \wedge \nu_3 + \left(\frac{d' \varepsilon}{d s} - \lambda' \frac{d' \operatorname{grad} e_0}{d s}\right) \wedge \mathbf{n}_3^{(0)} - e_1^{(0)}\,\nu_3 - \tau\,\mathbf{n}_3^{(0)}.$$

Tenendo presenti la (44) e la (26) il vettore ψ si precisa nelle tre componenti che seguono

$$\left.\begin{aligned}
\psi_x &= \frac{d\,\varepsilon_y}{d s} + r_0\,\varepsilon_x - p_0\,\varepsilon_z - \Phi_x^{(0)}\,\lambda' + \Phi_z^{(0)}\,\alpha,\\
\psi_y &= -\left(\frac{d\,\varepsilon_x}{d s} + q_0\,\varepsilon_z - r_0\,\varepsilon_y\right) - \Phi_y^{(0)}\,\lambda' + \Phi_z^{(0)}\,\beta,\\
\psi_z &= -\Phi_x^{(0)}\,\alpha - \Phi_y^{(0)}\,\beta - \tau.
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Premesso tutto ciò, le equazioni (34) e (35), tenuto conto delle equazioni statiche, nel caso delle piccole vibrazioni intorno ad una configurazione di equilibrio, si mutano nelle seguenti

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{ds} + \mathbf{h}_0 \wedge \psi = \varkappa \frac{d^2\sigma}{dt^2}, \\ &\mathbf{n}_3^{(0)} \times \frac{d'\varepsilon}{ds} + \nu_3 \times \frac{d' \operatorname{grad} e_0}{ds} = -\varkappa\, \mathfrak{r}^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

dove ψ è definito dalle (50).

Le equazioni (51) sono in numero di quattro ed involgono in sostanza 10 incognite e cioè le tre componenti dei vettori ω e σ e le quantità scalari α, β, φ e λ'. Le equazioni (46) e (47) del numero precedente completano il sistema.

§ VI.

Vibrazioni della curva elastica piana.

1. *Caso generale.* — Veniamo ora a studiare particolarmente le equazioni (51) per le vibrazioni di una curva elastica piana, i cui elementi, nella configurazione di equilibrio, sono determinati dalle equazioni del § III, n. 3.

In questo caso si ha $q_0 = r_0 = 0$ e, se indichiamo con ξ, η, ζ le componenti del vettore σ rispetto agli assi $P_0(x\,y\,z)$, le equazioni (51) si semplificano nelle seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi_x}{ds} = \varkappa \frac{d^2\xi}{dt^2}, \\ &\frac{d\psi_y}{ds} - p_0\,\psi_z = \varkappa \frac{d^2\eta}{dt^2}, \\ &\frac{d\psi_z}{ds} + p_0\,\psi_y = \varkappa \frac{d^2\zeta}{dt^2}, \\ &\frac{d\varepsilon_z}{ds} + p_0\,\varepsilon_y - \Phi_y^{(0)}\alpha = -\varkappa\,\mathfrak{r}^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

nelle quali equazioni, le componenti del vettore ψ hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned} \psi_x &= \frac{d\,\varepsilon_y}{d\,s} - p_0\,\varepsilon_z + \Phi_z^{(0)}\,\alpha, \\ \psi_y &= -\frac{d\,\varepsilon_x}{d\,s} - \Phi_y^{(0)}\,\lambda' + \Phi_x^{(0)}\,\beta, \\ \psi_z &= -\Phi_y^{(0)}\,\beta - \tau. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Completiamo il sistema delle (52) e (53) con le (46) e (47), che nel caso presente si semplificano come segue

$$\left.\begin{aligned} \pi &= -\frac{d\,\beta}{d\,s} - p_0\,\lambda', \\ \chi &= \frac{d\,\alpha}{d\,s}, \\ \rho &= \frac{d\,\varphi}{d\,s}, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\,\xi}{d\,s} = \alpha, \\ &\frac{d\,\eta}{d\,s} - p_0\,\zeta = \beta, \\ &\frac{d\,\zeta}{d\,s} + p_0\,\eta = \lambda'. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Conveniamo di chiamare *oblique* le vibrazioni della verga, che avvengono fuori del suo piano di equilibrio statico e *piane* quelle che avvengono in questo piano. Si noti ora che se noi non specifichiamo la forma dell'energia elastica, il sistema di equazioni (52, 53, 54, 55) è un sistema simultaneo e non si possono quindi studiare separatamente le vibrazioni piane dalle vibrazioni oblique. Nel numero seguente vedremo che ciò riesce se noi attribuiamo ad e una forma conveniente,

2. *Specificazione della forma dell'energia elastica.* — Facciamo ora l'ipotesi che la verga allo stato naturale sia rettilinea o atteggiata secondo un arco di circonferenza e che l'energia elastica e sia della forma

$$e = -\frac{1}{2}\left\{ A\,(p-c)^2 + B\,q^2 + C\,r^2 \right\} + \Lambda\,(\lambda);$$

con c denotiamo la curvatura (costante, in particolare, eguale a zero) della verga allo stato naturale e con $\Lambda(\lambda)$ una funzione della sola λ. A e B sono eguali al modulo di Young moltiplicato per il momento d'inerzia della sezione trasversale, rispettivamente secondo l'asse delle x ed y; C invece è la rigidità torsionale ed è eguale alla rigidità del materiale moltiplicata per una quantità di quarto grado nelle dimensioni lineari della sezione trasversale. I tre coefficienti A, B, C devono ritenersi costanti se, come noi supporremo, il materiale della verga è omogeneo e la sua sezione trasversale uniforme.

Risulterà in questo caso [v. form. (48)]

$$\mathfrak{g} = 0$$

ed i coefficienti dell'omografia vettoriale $\mathfrak{D}$ saranno tutti nulli, eccetto i tre seguenti

$$\left(\frac{\partial^2 e}{\partial p^2}\right)_0 = -A; \quad \left(\frac{\partial^2 e}{\partial q^2}\right)_0 = -B; \quad \left(\frac{\partial^2 e}{\partial r^2}\right)_0 = -C.$$

Conseguentemente il vettore ε avrà per componenti

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -A\,\pi^* = -A\,\pi, \\ \varepsilon_y &= -B\,\chi^* = -B\,(\chi - p_0\,\varphi), \\ \varepsilon_z &= -C\,\rho^* = -C\,(\rho + p_0\,\alpha), \end{aligned}$$

e sarà inoltre [v. form. (49)]

$$\tau = A\,p_0\,\pi - L\,\lambda'.$$

Con ciò le (53) assumono la forma

$$\left.\begin{aligned} \psi_x &= -B\frac{d}{d s}(\chi - p_0\,\varphi) + C\,p_0\,(\rho + p_0\,\alpha) + \Phi_z^{(0)}\,\alpha, \\ \psi_y &= A\frac{d\pi}{d s} - \Phi_y^{(0)}\,\lambda' + \Phi_z^{(0)}\,\beta, \\ \psi_z &= -\Phi_y^{(0)}\,\beta - A\,p_0\,\pi + L\,\lambda'. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Non mutano naturalmente le (54) e (55) e le prime tre delle (52), mentre la quarta di queste prende la forma

$$C\frac{d}{d s}(\rho + p_0\,\alpha) + B\,p_0\,(\chi - p_0\,\varphi) + \Phi_y^{(0)}\,\alpha = \varkappa\,\mathfrak{r}^2\,\frac{d^2\varphi}{d t^2}. \tag{57}$$

Una semplice ispezione delle formule ottenute in questo numero ci permette di scindere il problema generale delle vibrazioni di un'elastica piana in due, si possono cioè studiare separatamente le vibrazioni piane da quelle oblique, come avevamo affermato nel numero precedente.

È noto che gli elementi (in particolare p_0) che determinano la configurazione di equilibrio di una curva elastica si esprimono mediante funzioni ellittiche. Da ciò scende la difficoltà analitica di affrontare il problema delle vibrazioni nella sua generalità. Noi quindi ci limiteremo a constatare che dalle nostre equazioni generali scendono tutte quelle relative ai vari tipi di vibrazioni studiati.

3. *Vibrazioni di una verga retta allo stato naturale.* — In questo caso è da ritenersi $p_0 = 0$, $\Phi_y^{(0)} = \Phi_z^{(0)} = 0$ e così scendono dai numeri precedenti:

1.° per le *vibrazioni piane* le equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\psi_y}{ds} = \varkappa \frac{d^2\eta}{dt^2}; \quad \frac{d\psi_z}{ds} = \varkappa \frac{d^2\zeta}{dt^2};\\
&\psi_y = A\frac{d\pi}{ds}; \quad \psi_z = L\lambda';\\
&\pi = -\frac{d\beta}{ds}; \quad \frac{d\eta}{ds} = \beta; \quad \frac{d\zeta}{ds} = \lambda'.
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Da qui poi, separatamente, le equazioni classiche (*)

per le *vibrazioni trasversali* $\qquad A\dfrac{d^4\eta}{ds^4} = -\varkappa\dfrac{d^2\eta}{dt^2};$

per le *vibrazioni longitudinali* $\qquad L\dfrac{d^2\zeta}{ds^2} = \varkappa\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}.$

Si noti che dalla espressione di ψ_z (essendo λ' un numero puro) si deduce che L ha le dimensioni di una forza e che quindi $L/\varkappa$ ha le dimensioni del quadrato di una velocità, come effettivamente deve essere.

2.° per le *vibrazioni oblique* le equazioni

$$C\frac{d\rho}{ds} = \varkappa \mathfrak{r}^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}; \qquad \rho = \frac{d\varphi}{ds}.$$

(*) Cfr. ad es. Lord Rayleigh (l. c.), pag. 242 e seguenti.

Non consideriamo le vibrazioni normali al piano di equilibrio della verga, che sono ovviamente identiche alle vibrazioni piane trasversali ed abbiamo così per le *vibrazioni torsionali* la nota equazione

$$C\frac{d^2\varphi}{d s^2}=\varkappa\, \mathfrak{r}^2\frac{d^2\varphi}{d t^2}\,.$$

4. *Vibrazioni di una verga retta soggetta a tensione longitudinale.* — Nel caso presente deve ancora ritenersi $p_0=0$ e $\Phi_y^{(0)}=0$, mentre sarà $\Phi_z^{(0)}$ diverso da zero e di più costante per le conclusioni del n.° 3, § III.

Le equazioni che determinano le vibrazioni piane in questo caso sono ancora le (58) dove però è

$$\psi_y=A\frac{d\pi}{d s}+\Phi_z^{(0)}\beta\,;\qquad \psi_z=L\lambda'.$$

Si ottiene così per le vibrazioni trasversali l'equazione conosciuta (*)

$$A\frac{d^4\eta}{d s^4}-\Phi_z^{(0)}\frac{d^2\eta}{d s^2}+\varkappa\frac{d^2\eta}{d t^2}=0,$$

mentre non muta l'equazione delle vibrazioni longitudinali, rispetto a quella considerata nel numero precedente.

Del pari non mutano le vibrazioni oblique.

5. *Vibrazioni di una verga circolare.* — Se la verga si trova atteggiata ad arco di circonferenza, essa, come abbiamo visto al § III, n.° 3, deve necessariamente trovarsi allo stato naturale e quindi non soggetta ad alcun sforzo terminale. In tal caso sarà $\Phi_z^{(0)}=\Phi_y^{(0)}=0$ e $p_0=c$. Con ciò le equazioni che reggono il moto della nostra verga sono le seguenti:

1.° *Vibrazioni piane.*

$$\frac{d\psi_y}{d s}-c\,\psi_z=\varkappa\frac{d^2\eta}{d t^2}\,;\qquad \frac{d\psi_z}{d s}+c\,\psi_y=\varkappa\frac{d^2\xi}{d t^2}\,;\tag{59}$$

con

$$\psi_y=A\frac{d\pi}{d s}\,;\qquad \psi_z=L\lambda'-A\,c\,\pi\,;$$

(*) Cfr. Lord Rayleigh (l. c.), pag. 296.

alle quali equazioni dobbiamo aggiungere le seguenti:

$$\pi = -\frac{d\beta}{ds} - c\lambda';$$

$$\beta = \frac{d\eta}{ds} - c\zeta;$$

$$\lambda' = \frac{d\zeta}{ds} + c\eta.$$

Tratteremo ora distintamente i due casi:

a) *Vibrazioni di una verga circolare inestendibile.*

Per esaminare questa questione è necessario fare un passo indietro.

Le vibrazioni di un anello circolare furono studiate la prima volta da HOPPE (*) e poi nuovamente dal RAYLEIGH (**), il quale tratta la questione partendo, come noi, dal principio della conservazione dell'energia. Egli suppone però che la linea direttrice sia inestendibile, il che porta ad ammettere che l'energia del sistema sia indipendente da λ. Noi non possiamo quindi ritrovare, dalle nostre formule così come stanno, le vibrazioni di HOPPE, perchè abbiamo sempre rispecchiata l'ipotesi della estendibilità della linea direttrice. Però si può notare che, riprendendo la questione fino dall'inizio, l'ipotesi della inestendibilità, o, se si vuole, l'ipotesi della indipendenza da λ dell'energia elastica, si traduce nel fatto che lo sforzo tangenziale Φ_z rimane indeterminato. Infatti se la linea direttrice è inestendibile, alla equazione (9), va sostituita la seguente

$$\mathbf{n}_3 \times \frac{d' \delta P}{ds} = 0,$$

la quale ci avverte che le componenti dello spostamento δP non sono indipendenti tra loro. Se si indica allora con Γ un moltiplicatore di LAGRANGE e si ripetono i calcoli del § II, si constata che alla equazione $\Phi_z + e_1 = 0$ deve sostituirsi la seguente

$$\Phi_z = \Gamma,$$

la quale sta appunto a giustificare l'affermazione fatta più sopra.

(*) R. HOPPE, *Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1871, Bd. 73, pagg. 158-170].

(**) LORD RAYLEIGH (l. c.), pag. 383 e segg.

Per ritrovare le vibrazioni di Hoppe è quindi necessario eliminare tra le (59), come ci suggerisce il Love (*), la ψ_z e supporre inoltre $\lambda' = 0$. Eseguendo le operazioni indicate si ottiene l'equazione

$$A\left(\frac{1}{c}\frac{d^6\zeta}{d s^6} + 2c\frac{d^4\zeta}{d s^4} + c^3\frac{d^2\zeta}{d s^2}\right) = \varkappa\frac{d^2}{d t^2}\left(c\zeta - \frac{1}{c}\frac{d^2\zeta}{d s^2}\right),$$

oppure, indicando con $d\vartheta$ l'angolo al centro corrispondente all'arco $d s$, con che

$$c\, d s = d\vartheta, \tag{60}$$

l'equazione

$$A c^4\left(\frac{d^6\zeta}{d\vartheta^6} + 2\frac{d^4\zeta}{d\vartheta^4} + \frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2}\right) = \varkappa\frac{d^2}{d t^2}\left(\zeta - \frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2}\right). \tag{61}$$

Se la verga costituisce un anello completo si può supporre che ζ dipenda sinusoidalmente dal tempo e dall'angolo ϑ, cioè sia della forma

$$\zeta = a\, e^{i(kt+n\vartheta)} \qquad (a = \text{costante})$$

e allora l'equazione (61) fornisce la relazione che corre tra la costante di frequenza k ed n sotto la forma (**)

$$k^2 = \frac{A c^4 (n^2-1)^2 n^2}{\varkappa(n^2+1)}.$$

b) *Vibrazioni di una verga circolare estendibile.*

Se abbandoniamo l'ipotesi della inestendibilità della linea direttrice, le equazioni delle vibrazioni piane della verga circolare sono le due seguenti:

$$A c^4\left(\frac{d^4\eta}{d\vartheta^4} + 2\frac{d^2\eta}{d\vartheta^2} + \eta\right) + c^2 L\left(\frac{d\zeta}{d\vartheta} + \eta\right) = -\varkappa\frac{d^2\eta}{d t^2},$$

$$c^2 L\left(\frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2} + \frac{d\eta}{d\vartheta}\right) = \varkappa\frac{d^2\zeta}{d t^2},$$

nello scrivere le quali abbiamo tenuto conto della posizione (60).

Abbiamo già notato che L ha le dimensioni di una forza: aggiungiamo ora che A invece [cfr. n.° 2 di questo paragrafo] ha le dimensioni di una

(*) Love (l. c. a pag. 41), pag. 431.

(**) Cfr. Love (l. c.), pag. 431, oppure Rayleigh, l. c. a pag. 71.

forza per il quadrato di una lunghezza. Se noi immaginiamo (come del resto è nella natura delle verghe) che il raggio di girazione della sezione trasversale sia piccolo di fronte al raggio $1:c$ della circonferenza a cui appartiene la direttrice della verga, nella prima delle equazioni scritte possiamo trascurare il termine che contiene A per coefficiente, e vediamo così che le vibrazioni in questione sono rette dalle equazioni

$$c^2 L\left(\frac{d\zeta}{d\vartheta}+\eta\right)=-\varkappa\frac{d^2\eta}{dt^2}; \qquad c^2 L\left(\frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2}+\frac{d\eta}{d\vartheta}\right)=\varkappa\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Se l'anello è completo possiamo porre

$$\eta = a\, e^{i(kt+n\vartheta)}, \qquad \zeta = b\, e^{i(kt+n\vartheta)}, \qquad (a \text{ e } b \text{ costanti})$$

e troviamo così che deve essere

$$a\,n\,i+b-0$$

e che tra k ed n corre la relazione (*)

$$k^2=\frac{c^2 L}{\varkappa}(1+n^2).$$

2.° *Vibrazioni oblique.*

$$\frac{d\psi_x}{ds}=\varkappa\frac{d^2\xi}{dt^2}; \qquad \psi_x=-B\left(\frac{d\chi}{ds}-c\frac{d\varphi}{ds}\right)+c\,C(\rho+c\,\alpha);$$

$$C\left(\frac{d\rho}{ds}+c\frac{d\alpha}{ds}\right)+B\,c(\chi-c\,\varphi)=\varkappa\,\mathfrak{r}^2\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

con

$$\chi=\frac{d\alpha}{ds}; \qquad \rho=\frac{d\varphi}{ds}; \qquad \alpha=\frac{d\xi}{ds}.$$

Queste equazioni si riassumono nelle uniche due

$$\left.\begin{aligned} &c^3(B+C)\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}-B\,c^4\frac{d^4\xi}{d\vartheta^4}+C\,c^4\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2}=\varkappa\frac{d^2\xi}{dt^2}, \\ &c^2 C\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}-c^2 B\,\varphi+c^3(B+C)\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2}=\varkappa\,\mathfrak{r}^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

(*) Cfr. Love (l. c.), pag. 433.

le quali permettono di studiare separatamente le vibrazioni normali al piano di equilibrio della verga e quelle torsionali.

a) *Vibrazioni normali al piano della verga circolare.*

Supponendo, come fa il LOVE (*), che sia trascurabile l'accelerazione angolare $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ e che la verga costituisca un anello completo, possiamo supporre ξ e φ della forma

$$\xi = a\, e^{i(kt+n\vartheta)}, \qquad \varphi = b\, e^{i(kt+n\vartheta)}, \qquad (a \text{ e } b \text{ costanti})$$

e allora si trova tra la costante di frequenza k ed n la relazione

$$k^2 = \frac{B\,C\,c^4\,n^2\,(n^2-1)^2}{\varkappa\,(C\,n^2+B)}\,.$$

b) *Vibrazioni torsionali.*

Se supponiamo ξ piccolo di fronte a $\varphi : c$, la (62) si semplica nella (**)

$$c^2\left(C\frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2} - B\,\varphi\right) = \varkappa\,\mathfrak{r}^2\frac{d^2\varphi}{d\,t^2}\,,$$

da cui, se la verga costituisce un anello completo ed è φ della forma

$$\varphi = b\, e^{i(kt+n\vartheta)}, \qquad (b \text{ costante})$$

la relazione

$$k^2 = \frac{c^2\,(C\,n^2+B)}{\varkappa\,\mathfrak{r}^2}\,.$$

Padova, Luglio 1917.

(*) Cfr. LOVE (l. c.), pag. 432.
(**) Cfr. LOVE (l. c.), pag. 432.

Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni. [1]

(*Di* Corrado Segre, *a Torino.*)

Premesse. Rappresentazione dei piani di S_5 su una V_9 di S_{19}. Il sistema nullo $\mathcal{N}$.

1. I piani dello S_5 si rappresentano colle note coordinate di Grassmann, p_{hkl}, determinanti estratti dalla matrice delle coordinate (omogenee) di tre punti indipendenti del piano, prendendone le colonne $h\,k\,l$. Basterà assumere, per gl'indici, delle *combinazioni* ternarie di $1\,2\ldots 6$. Perciò le coordinate distinte sono 20.

Talvolta ci converrà anche d'indicare quelle coordinate con p_i, ove l'indice unico i, variabile da 1 a 20, starà per rappresentare una *terna* $h\,k\,l$.

I piani sono ∞^9.

La condizione d'incidenza di due piani p, p' [2] è

$$(p,\ p') \equiv p_{123}\, p'_{456} + \cdots = 0, \tag{1}$$

ove s'intende, nella somma, che si assumano come indici delle p 20 combinazioni ternarie distinte di $1\,2\ldots 6$, e si moltiplichi ciascuna p per quella p' che ha per indici i tre numeri residui, disposti in modo che i sei indici della p e della p' costituiscano una permutazione pari. — E qui si osservi subito, e sarà essenziale in seguito, che se indichiamo con i e j rispettivamente due *terne* d'indici (non due indici) *complementari* in quel senso, cioè

---

(1) V. alla fine un indice particolareggiato, che può dare una prima idea del contenuto di questo scritto.

(2) Sarà sottinteso, ogni volta che non si dica espressamente il contrario, che lo spazio ambiente è S_5.

tali che $i\,j$ costituisca una permutazione pari di $1\,2\ldots 6$, scambiandole fra loro si avrà invece in $j\,i$ una permutazione dispari. In conseguenza nella (1) insieme al termine $p_i\,p'_j$ figurerà un termine che potremo scrivere: $-p_j\,p'_i$. Così vi sarà il termine: $-p_{456}\,p'_{123}$; ecc. La relazione bilineare (1) è, cioè, *alternata,* non simmetrica come risulta invece l'analoga condizione d'incidenza per due rette di S_3 (cfr. la nota ([6]) al n.° 4). Coi simboli $1, 2, \ldots, 20$ per indicare le venti combinazioni ternarie di $1\,2\ldots 6$, la (1) si potrà scrivere:

$$(p_1\,p'_2 - p_2\,p'_1) + (p_3\,p'_4 - p_4\,p'_3) + \cdots + (p_{19}\,p'_{20} - p_{20}\,p'_{19}) = 0. \qquad (2)$$

2. Un *complesso lineare di piani* è l'insieme di quei piani le cui coordinate verificano una data equazione lineare (omogenea).

Mettendo in evidenza tre punti $x\,y\,z$ di un piano p di un complesso lineare Γ, cioè ponendo le coordinate $p_{hkl} = (x\,y\,z)_{hkl}$, e assumendo come dati due di quei punti, od uno, l'equazione di Γ mostra subito quanto segue.

I piani di Γ passanti per una data retta riempiono, in generale, coi loro punti un iperpiano (contenente la retta).

I piani di Γ passanti per un dato punto x sono quelli che projettano da x le rette di un complesso lineare di rette, pel quale x è punto *singolare*, nel senso che tutte le rette passanti per x stanno nel complesso.

Dualmente: i piani di Γ giacenti in un S_3 formano, in generale, un'ordinaria stella di piani; i piani di Γ giacenti in un dato S_4 formano, entro questo, un complesso lineare di piani, ossia il duale, entro S_4, di un complesso lineare di rette. —

I coefficienti dell'equazione dei complessi lineari di piani, in S_5, sono 20; perciò questi complessi sono ∞^{19}.

Un esempio, molto particolare, di complesso lineare di piani è dato dall'insieme di quei piani che incontrano un piano fisso α. Se a_{hkl} sono le coordinate di questo, l'equazione del complesso sarà (n. 1): $(a, p) = 0$. Ne indicheremo talvolta il 1.° membro, anche più brevemente, con (a). E diremo che il complesso lineare è *nucleato*, e che il piano α è il suo *nucleo.*

3. Si considerino, in uno spazio di dimensione 19, i punti le cui 20 coordinate omogenee sono le p_{hkl} dei vari piani di S_5. Questi punti formeranno una V_9, che verrà così a dare la più opportuna rappresentazione dell'insieme dei piani di S_5: allo stesso modo come le rette dello spazio ordinario si rappresentano convenientemente sui punti di una V_4^2 di S_5.

Le sezioni della V_9 (3) cogl'iperpiani di S_{19} saranno le imagini dei complessi lineari di piani di S_5 (4).

In particolare vi saranno ∞^9 sezioni iperpiane particolari, corrispondenti ai complessi lineari nucleati. Riconosceremo più avanti (n. 41) la singolarità di queste sezioni.

L'ordine della V_9, ossia il numero delle intersezioni di 9 sue sezioni iperpiane, cioè il numero dei piani di S_5 comuni a 9 complessi lineari, sarà uguale in particolare al numero dei piani di S_5 che ne incontrano 9 dati, ossia (per una formola di H. SCHUBERT) a 42 (5). Del resto, non avremo occasione di servirci di questo numero.

4. Nello spazio S_{19} avremo da considerare quel sistema nullo, ovvero complesso lineare di rette, che è rappresentato dalla relazione bilineare alternata (1) o (2), quando i due gruppi di 20 variabili p e p' che vi compajono s'interpretino come coordinate di punti *qualunque* in quello spazio. Indicheremo con $\mathcal{N}$ tanto il sistema nullo quanto il complesso lineare di rette (6).

Dal n. 1 segue che è lo stesso dire che due punti della V_9 sono imagini di due piani incidenti di S_5, o dire che i due punti sono *coniugati* rispetto

---

(3) Nel seguito, dicendo «*la* V_9» s'intenderà sempre quella ora definita.

(4) F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare* (Annali di mat., 3.ª ser., t. 24, 1915, p. 89), dimostra un teorema generale, da cui segue che sulla nostra V_9 ogni V_8 (algebrica) è la completa intersezione della V_9 con una forma (cioè V_{18} di S_{19}): sicchè un complesso algebrico di piani dello S_5 tale che in un fascio di piani generico ve ne siano n si potrà sempre rappresentare con un'equazione di grado n fra le coordinate di piano. In particolare i *complessi lineari di piani* si potranno definire come varietà algebriche irriducibili di piani tali che in un fascio generico di piani ve n'è uno.

(5) Per le citazioni su questo enunciato, come su altre cose, mi sia permesso rinviare il lettore al mio articolo « *Mehrdimensionale Räume* », a p. 769 e seg.¹ del 2.° volume di Geometria dell'*Encyklopädie der math. Wissenschaften.* — Gli sviluppi su quei fatti che riguardiamo come noti si potranno trovare, ad esempio, in E. BERTINI: *Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi*, Pisa, 1907.

(6) Nella geometria degli spazi autoduali S_q di uno spazio di dimensione impari $2q+1$ si presenta la condizione d'incidenza di due S_q, analoga alla (1), con una forma bilineare *simmetrica*, oppure *alternata*, secondo che q è impari o pari. Per conseguenza, a seconda di questa imparità o parità di q, vi è da considerare, nello spazio rappresentativo degli S_q, una forma quadrica (ossia polarità ordinaria), oppure un complesso lineare di rette (ossia sistema nullo).

ad $\mathcal{N}$ (cioè situati su una retta del complesso $\mathcal{N}$, ossia tali che ognuno giace nell'iperpiano polare dell'altro rispetto al sistema nullo $\mathcal{N}$).

Abbiamo visto (n. 3) che un complesso lineare di piani di S_5

$$\sum c_{hkl}\, p_{hkl} = 0 \tag{3}$$

si può rappresentare in S_{19} per mezzo dell'iperpiano che ha ivi quest'equazione (le p essendo coordinate di punto variabile). Orbene ci converrà anche di adoperare come imagine di quel complesso quel punto di S_{19} la cui coordinata d'indici 123 è c_{456}, e così via: ciò vuol dire il punto che è polo di quell'iperpiano rispetto ad $\mathcal{N}$.

L'equazione (2) di $\mathcal{N}$ si presenta sotto la forma canonica per le equazioni bilineari alternate, ossia per le equazioni di complessi lineari di rette e sistemi nulli negli spazi di dimensione impari. Si riconosce subito che il suo discriminante non è nullo: $\mathcal{N}$ non è degenere.

Introduzione delle trilinearità tra forme di 1.ª specie.

5. Per il seguito sarà utile che facciamo fin d'ora un cenno di un legame tra i complessi lineari di piani di S_5 e le trilinearità tra forme di 1.ª specie ([7]).

Date tre rette m n p *linearmente indipendenti* (cioè aventi per spazio congiungente l'S_5), *i piani appoggiati ad esse, che stanno in un dato complesso lineare, segnano in generale su* m n p *le terne di una determinata trilinearità.*

In fatti, assumiamo rispettivamente su quelle tre rette le coppie di punti fondamentali per le coordinate: 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6; sicchè tre punti qualunque di $m\ n\ p$ avranno per coordinate:

$$\left.\begin{matrix} u & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 & 1. \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

([7]) Intorno alle *trilinearità*, o *corrispondenze trilineari* tra forme di 1.ª specie, cfr. ad esempio R. Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*. Bd. I. Leipzig, 1908, p. 319 e segg., ove si troveranno anche altre citazioni.

Il piano che congiunge questi punti avrà 8 coordinate espresse così:

$$\left.\begin{array}{llll} p_{123} = u\,v\,w, & p_{234} = v\,w, & p_{315} = w\,u, & p_{126} = u\,v \\ p_{156} = u, & p_{264} = v, & p_{345} = w, & p_{456} = 1 \end{array}\right\} \quad (5)$$

e le 12 coordinate rimanenti uguali a zero. Scrivendo che il piano sta in un dato complesso lineare, di equazione (3), non si porrà alcun legame fra i tre punti, se in quell'equazione mancano precisamente i termini contenenti le prime 8 p_{hkl}. *Vi sono dunque* ∞^{11} *complessi lineari che contengono tutti i piani incidenti ad* m n p. Invece se il complesso lineare è generico, sostituendo i detti valori delle p_{hkl} nella sua equazione, otteniamo:

$$\left.\begin{array}{l} c_{123}\,u\,v\,w + c_{234}\,v\,w + c_{315}\,w\,u + c_{126}\,u\,v + \\ \qquad + c_{156}\,u + c_{264}\,v + c_{345}\,w + c_{456} = 0, \end{array}\right\} \quad (6)$$

equazione di una corrispondenza trilineare fra i tre punti u v w di m n p.

Viceversa, data una trilinearità fra le tre rette m n p, possiamo rappresentarla coll'equazione (6). Quindi essa proverrà nel modo indicato da ∞^{12} complessi lineari di piani (3), pei quali sono gli stessi (o proporzionali) gli 8 coefficienti c_{hkl} che figurano nella (6), e diversi invece i rimanenti 12.

6. La rappresentazione, per mezzo dei parametri variabili u v w, dei piani incidenti a m n p, che è data dalle (5) unite all'annullamento delle rimanenti coordinate, prova che i punti imagini di quei piani nello S_{19} (n. 3) stanno tutti in un S_7 (quello degli otto punti fondamentali 123, 456, 234, 156, 315, 264, 126, 345); e formano una varietà V_3^6 (contenuta nella V_9) luogo di tre sistemi ∞^2 di rette, ecc., costituente una rappresentazione biunivoca opportuna per le terne di punti di m n p [8]. Le sezioni iperpiane di questa V_3^6 sono imagini delle trilinearità fra queste tre rette, ecc.

L'S_7 considerato non è *totale* pel complesso lineare di rette $\mathcal{N}$ di S_{19}: non ha cioè in $\mathcal{N}$ tutte le sue rette. Se nell'equazione (1) o (2) di $\mathcal{N}$, in cui scriveremo simboli c invece delle p, poniamo nulle quelle coordinate c o c' di punto di S_{19}, il cui annullarsi caratterizza l'S_7, otteniamo:

$$\left.\begin{array}{l} c_{123}\,c'_{456} - c_{456}\,c'_{123} + c_{156}\,c'_{234} - c_{234}\,c'_{156} + \\ + c_{264}\,c'_{315} - c_{315}\,c'_{264} + c_{345}\,c'_{126} - c_{126}\,c'_{345} = 0: \end{array}\right\} \quad (7)$$

[8] Si tratta cioè di una di quelle varietà a cui è dedicata la mia Nota: *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 5, 1891, p. 192.

equazione di un complesso lineare di rette, o sistema nullo, non degenere, di S_7, che occorre nello studio delle trilinearità fra tre rette date, e che nel seguito indicheremo con $\mathcal{N}_1$.

Piani legati linearmente. Spazi contenuti nella V_9.

7. Due o più piani $\alpha, \beta, \ldots$ di S_5 si dicono *legati linearmente* se le loro coordinate $a_i, b_i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, 20)$ verificano, per ogni i, relazioni della forma

$$\lambda a_i + \mu b_i + \cdots = 0, \tag{8}$$

ove $\lambda, \mu, \ldots$ non sono tutte nulle. Ciò è come dire che i punti $a, b, \ldots$ della V_9 di S_{19}, imagini di $\alpha, \beta, \ldots$, sono legati linearmente.

Due piani legati linearmente sono due piani coincidenti.

Se k piani $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots$, distinti, sono legati linearmente, ciò è come dire che uno di essi (avente nella (8) un coefficiente λ, o $\mu, \ldots$ non nullo), per esempio α, si può riguardare come combinazione lineare dei rimanenti $\beta, \gamma, \ldots$ Allora ogni complesso lineare che contenga questi ultimi contiene anche quello. In particolare ogni piano incidente a $\beta, \gamma, \ldots$ sarà pure incidente ad α. — Ciò varrà, *comunque* si prenda α fra i k piani $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots$, quando si sappia che $k-1$ di questi sono *sempre* linearmente indipendenti.

Se una retta r è incidente a $k-1$ piani $\beta\ \gamma \ldots$, sarà pure incidente ad un piano α che sia combinazione lineare di quelli. In fatti, ogni piano per r, incontrando $\beta\ \gamma \ldots$, dovrà pure incontrare α: ora se r ed α non fossero incidenti e quindi determinassero un S_4, un piano tirato per r, non giacente in questo spazio, non incontrerebbe α.

Se i k piani $\alpha\ \beta \ldots \gamma\ \delta$ sono legati linearmente, senza che siano così legati una parte di essi, una retta r incidente ai primi $k-2$ fra essi sarà tale che ogni piano per essa incidente a γ è pure incidente a δ, e viceversa; onde r incontrerà anche γ e δ, o se no, γ e δ staranno in uno stesso S_4 (con r).

8. Siano $\alpha\ \beta\ \gamma$ tre piani distinti legati linearmente. Ogni retta tirata da un punto A di α ad incontrare β, incontrerà pure γ (n. 7), e viceversa: onde l'S_3 che unisce A a β coincide con quello che unisce A a γ. Nè questo

S_3, contenente β e γ, potrà mutare se A varia su α. Dunque α β γ sono in un S_3. Se poi per un qualunque punto D della retta comune ad α e β tiriamo un piano che incontri quell'S_3 solo in D, esso incontrando α e β dovrà incontrare anche γ, il che non può avvenire che in D stesso: onde γ passerà per D. *Tre piani legati linearmente sono tre piani di un fascio.*

Possiamo anche dire che: affinchè due piani ammettano una combinazione lineare, che sia un piano distinto da essi, occorre e basta che stiano in un S_3; o, ciò che è lo stesso, che passino per una stessa retta. Allora ogni combinazione lineare dei due piani sarà un piano del loro fascio: perchè se α e β si rappresentano come congiungenti gli stessi due punti x, y ad altri due z, t, rispettivamente, cioè se $a_i = (x\, y\, z)_i$, $b_i = (x\, y\, t)_i$, ne deriva $\lambda\, a_i + \mu\, b_i = (x, y, \lambda\, z + \mu\, t)_i$. — *Le varietà lineari* ∞^1 *di piani sono i fasci.*

Traducendo il risultato sulla V_9, abbiamo che le rette giacenti in questa sono le imagini dei fasci di piani di S_5; e che la V_9 non ammette altre *trisecanti* che le rette in essa giacenti.

9. Trovate le varietà lineari ∞^1 di piani, per ottenere i sistemi lineari di maggior dimensione basterà applicare la nota costruzione ricorrente degli spazi delle varie dimensioni.

Anzi tutto si prenderà un fascio di piani $\alpha\,\beta$, e, fuori di questo, un piano γ atto a determinare un fascio con ognuno di quelli. Dovrà dunque (n. 8) γ incontrare in una retta ciascun piano del fascio $\alpha\,\beta$. Se questa retta è fissa al variare di questo piano, vuol dire che γ passa per la retta $\alpha\,\beta$; se invece è variabile, γ dovrà stare nello S_3 di α e β. Giungiamo così a due specie, fra loro duali, di sistemi lineari ∞^2 di piani: i piani di un'ordinaria stella, cioè giacenti in un S_3 e passanti per un punto di questo; e i piani che passano per una retta fissa e stanno in un S_4 di questa.

Dopo ciò, indicando con Σ il sistema lineare ∞^2 di piani così determinato mediante α β γ, si cerchi un piano δ esterno a Σ, ma tale che con ogni piano di Σ determini un fascio, cioè tale che incontri in una retta ogni piano di Σ. Se Σ è un'ordinaria stella, δ deve tagliare i piani di questa in rette, che non possono tutte coincidere: dunque δ starà nello S_3 della stella; e questa è anche condizione sufficiente. Allora α β γ δ determineranno un sistema lineare ∞^3 composto di tutti i piani di un S_3. Ed è chiaro che non si potrà poi trovare, fuori dello S_3, un nuovo piano che incontri in rette tutti i piani dell'S_3: quindi la costruzione dei sistemi lineari di piani ha termine. — Dualmente, se Σ si componeva dei piani di un S_4 passanti per una retta fissa, δ dovrà passare per questa retta; e si ottiene come sistema lineare ∞^3 di piani quello composto di tutti i piani passanti per una data retta.

Concludiamo: *I sistemi lineari di piani della massima dimensione, in S_5, sono di due specie, fra loro duali: sistema degli ∞^3 piani di un S_3, e sistema degli ∞^3 piani passanti per una retta* ([9]). *Un sistema lineare di piani ∞^2 sta necessariamente in un determinato sistema lineare ∞^3 dell'una o dell'altra specie; ed è, a seconda dei casi, un'ordinaria stella di piani, o l'ente duale.*

10. Il risultato precedente si può enunciare così: gli spazi di massima dimensione contenuti nella V_9 (nei quali poi stanno gli spazi minori) sono due schiere ∞^8 di S_3, nettamente separate, imagini rispettivamente dei sistemi dei piani contenuti in uno spazio ordinario e dei sistemi dei piani passanti per una retta. — Ogni retta della V_9 sta in un S_3 di ciascuna delle due schiere. Due S_3 della V_9 non hanno in generale alcun punto a comune; se sono della stessa schiera possono avere al più un punto comune; se sono di schiera diversa ed hanno comune un punto, avranno comune una retta. Ecc. ecc.

Qui possiamo accennare alle *collineazioni di S_{19} che mutano in sè la V_9*. Ve ne sono di due specie: quelle che mutano in sè ognuna delle due schiere di S_3 della V_9, e quelle che scambiano fra loro queste schiere. È evidente che una collineazione, od una reciprocità, dello S_5 determina tra i piani di questo spazio una corrispondenza che si riflette sulla V_9 rispettivamente in una collineazione di 1.ª, o di 2.ª specie. Ma è anche vero il fatto inverso. Invero una collineazione di 1.ª specie della V_9 rappresenterà una corrispondenza algebrica fra i piani di S_5, tale da indurre anche una corrispondenza tra le rette di S_5 come sostegni di piani (ossia imagini degli S_3 di una schiera della V_9); a tutte le rette passanti per un punto, e quindi aventi a due a due un piano (variabile) in comune, corrisponderanno rette così fatte, cioè passanti per un punto: si tratta dunque di una corrispondenza algebrica fra i punti di S_5, che muta punti allineati in punti allineati, ossia di una collineazione di S_5. Similmente si vede che una collineazione di 2.ª specie della V_9 rappresenta una reciprocità di S_5.

([9]) Cfr. la proposizione generale sulle varietà lineari di spazi S_k nella nota ([85]) a pag. 794 del mio articolo citato qui in ([5]).

LE VARIETÀ ∞^1 DI PIANI, IRRIDUCIBILI, DEL 2.° E DEL 3.° ORDINE.

11. Prima di procedere a ricercare gli ulteriori legami lineari fra piani di S_5, conviene che accenniamo qualcosa su alcune varietà di 2.° e 3.° ordine.

Anzi tutto gli ∞^4 piani che passano per un punto dato A e stanno in un dato S_4 (contenente A) costituiscono una varietà quadratica, come quella (PLÜCKER-KLEIN) delle rette tracce di quei piani su un S_3 (non passante per A) dell'S_4. Dette a_h le coordinate di A, x_k e y_l quelle di due punti ulteriori di quei piani, variabili in un S_3 che possiamo supporre sia $x_5 = x_6 = 0$, le coordinate $(a\,x\,y)_{hkl}$ dei piani risultano forme lineari delle 6 quantità variabili $(x\,y)_{kl}$, legate dalla nota relazione quadratica. Onde i punti della V_9, imagini di tali piani, staranno tutti in un S_5, e più precisamente in una V_4^2 irriducibile.

Mutando in S_5 il punto A e l'iperpiano per esso, otteniamo così sulla V_9 ∞^9 V_4^2.

Due punti qualunque di una stessa V_4^2, essendo imagini di piani di S_5 incidenti, saranno coniugati rispetto ad $\mathcal{N}$ (n. 4). Viceversa per due punti di V_9 coniugati rispetto ad $\mathcal{N}$ passa in generale una V_4^2 ben determinata. Fa solo eccezione il caso che i due punti stiano su una retta di V_9, ossia che i due piani s'incontrino in una retta e quindi giacciano in uno stesso S_3. In tal caso il punto A si può prendere ad arbitrio su questa retta, e l'iperpiano ad arbitrio fra quelli passanti per l'S_3. Pei due punti di V_9 (e per la loro retta) passano allora ∞^2 V_4^2.

12. In S_5 una ∞^1 di piani del 2.° ordine, irriducibile, dà, come luogo dei suoi punti, una V_3^2, che, com'è ben noto, è necessariamente un cono ed appartiene a un S_4. Essa si compone dei piani che da un punto fisso A projettano un *regolo* (schiera di generatrici rettilinee di una quadrica ordinaria), il cui S_3 non passa per A.

La curva imagine di una tale ∞^1 di piani, sulla V_9, sarà una conica irriducibile; e viceversa ogni conica irriducibile della V_9 rappresenta una ∞^1 di piani del 2.° ordine, irriducibile.

Poichè questa ∞^1 di piani è contenuta nel sistema dei piani passanti per un punto A e giacenti in un S_4, segue che una conica della V_9 (sott. irriducibile) sta in una determinata V_4^2 di questa, fra quelle ottenute al n. 11 (cfr. n. 13).

Quattro punti di una conica della V_9, come punti complanari, sono legati linearmente. Dunque, in S_5, quattro piani di una stessa ∞^1 irriducibile di 2.° ordine sono legati linearmente.

13. A complemento del n. 11 possiamo ora aggiungere che sulla V_9 non esistono altre V_4^2 che le ∞^9 là ottenute. In fatti, data nella V_9 una V_4^2 qualsiasi (necessariamente irriducibile, perchè la V_9 non contiene spazi S_4: v. n. 10), si fissino su essa due punti a, b non congiunti da una sua retta. Per essi e per ogni ulteriore punto c della V_4^2 passerà una conica di questa. Ne segue (n. 12) che, se $\alpha\ \beta\ \gamma$ sono i piani di S_5 aventi $a\ b\ c$ per imagini, γ passerà sempre pel punto $\alpha\beta$ e starà sempre nell'S_4 di α e β: ossia γ varierà in un sistema di ∞^4 piani, quale appunto s'era considerato al n. 11, giungendo a quelle ∞^9 V_4^2.

14. Passiamo ora alle varietà di ∞^1 piani *del 3.° ordine*, irriducibili, immerse nello S_5, e non coni. Esse hanno, nella Geometria projettiva di S_5, un'importanza speciale, analoga a quella che hanno le coniche e i regoli nella Geometria projettiva del piano e dello S_3, e sono generabili in modo altrettanto elementare.

Ricordiamo alcune proprietà ovvie e ben note della V_3^3 luogo di una tale ∞^1 di piani. Essa contiene, fuori di quei piani (*generatori*), ∞^2 rette (*generatrici*) tali che per ogni punto della varietà ne passa una. Queste rette punteggiano gli ∞^1 piani collinearmente; e vengono punteggiate projettivamente fra loro dai piani. La V_3^3 può definirsi come il luogo degli ∞^1 piani incidenti a 4 rette generiche, o congiungenti i punti omologhi di 3 rette punteggiate projettivamente; od anche come il luogo delle ∞^2 rette incidenti a tre piani generici, o congiungenti i punti omologhi di due piani collineari.

Sulla V_9 l'imagine della V_3^3 *come* ∞^1 *di piani* (così riguarderemo sempre le V_3^3, salvo avviso contrario) sarà una cubica sghemba [10]. E poichè tre piani generici individuano quella ∞^1 di piani, così avremo che per tre punti generici della V_9 passa una cubica di questa.

Cinque punti di una cubica irriducibile giacciono in un S_3, e quindi sono legati linearmente. Dunque, in S_5, cinque piani generatori di una V_3^3 irriducibile sono sempre legati linearmente.

---

[10] Se fosse una cubica piana, poichè tutte le rette del suo piano sarebbero trisecanti della V_9, per la proposizione finale del n. 8 il piano giacerebbe in questa varietà; onde (n. 9) la V_3^3 giacerebbe in un S_3, o sarebbe un cono avente una retta per vertice.

Legame lineare fra 4, 5, 6 piani.

15. Siano α β γ δ quattro piani di S_5 legati linearmente, senza che tre di essi, comunque scelti, siano linearmente legati, cioè stiano in uno stesso fascio.

Se ogni retta r incidente ad α e β incontra pure γ, e quindi (n. 7) δ, ragionando come in principio del n. 8 si vede che α e β staranno in uno stesso S_3 con γ e δ. Se quell'ipotesi non si verifica, l'ultima osservazione del n. 7 ci dà che γ e δ dovranno stare in un S_4 con r; se γ e δ non stanno in un S_3, quell'S_4 sarà fisso al variare di r, e quindi conterrà α e β.

Così *i quattro piani* α β γ δ *stanno in uno stesso* S_4. Sembrerebbe, da quanto ora s'è detto, che si debba aggiungere anche il caso che essi stiano a due a due in un S_3, ossia che si taglino in rette. Ma anche in questa ipotesi si ritorna alla stessa conclusione: perchè, segandosi ad esempio α β γ a due a due secondo rette, staranno certo in un S_4 (od in infiniti); e ogni piano di questo spazio, essendo incidente ad α β γ, dovrà pure (pel legame lineare supposto) incontrare δ: onde δ dovrà giacere in quell'S_4.

Dualmente possiamo dire subito che: α β γ δ *passeranno per uno stesso punto.*

Se escludiamo, per un momento, che i quattro piani stiano in un S_3 (passando per uno stesso punto), o che passino per una stessa retta (giacendo in un S_4), e li seghiamo con un S_3 del loro S_4, non passante pel loro punto comune; avremo nello S_3 quattro rette tali che ogni retta incidente a tre è pure incidente alla quarta (in causa del legame lineare tra α β γ δ: v. n. 7): dunque 4 rette di un regolo. I piani α β γ δ projettano da uno stesso punto queste 4 rette, e quindi saranno piani generatori di una stessa schiera di un cono V_3^2 di S_4. Viceversa quattro tali piani sono (v. fine del n. 12) legati linearmente. — Aggiungendo i due casi più speciali, dianzi esclusi, nei quali i 4 piani vengono a stare (pel n. 9) in sistemi lineari ∞^2, e quindi sono, senz'altro, legati linearmente, concludiamo:

Quattro piani legati linearmente, senza che tre fra essi siano così legati, possono presentare solo i tre casi seguenti: 1.°) stanno in un'ordinaria stella di piani; 2.°) (duale del precedente) stanno in un S_4 *passando per una retta di questo; 3.°) stanno in un* S_4, *passano per uno stesso punto, e appartengono a una stessa schiera di piani di un cono quadrico* V_3^2.

16. Esamineremo ancora il legame lineare fra 5 e 6 piani, senza però esaurire tutti i casi *speciali* che si possono presentare.

Siano 5 piani distinti $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ legati linearmente. Ogni retta incidente a quattro di essi dovrà pure (n. 7) incontrare il quinto. Supponiamo anzi tutto che una retta r incidente a tre, per esempio ad $\alpha\ \beta\ \gamma$, non incontri nè δ nè ε. Allora (fine del n. 7) δ ed ε staranno in un S_4 con r. Se δ ed ε non sono in un S_3, ogni retta r incidente ad $\alpha\ \beta\ \gamma$ giacerà nell'S_4 di δ ed ε; e poichè per ogni punto di uno dei primi tre piani passa almeno una retta incidente a tutti tre, anche $\alpha\ \beta\ \gamma$ staranno in quell'S_4: ossia i cinque piani dati staranno in uno stesso S_4. Se invece δ ed ε stessero in un S_3, l'equazione che esprime il legame lineare tra i cinque piani, supposto che non consista in un legame fra i soli $\alpha\ \beta\ \gamma$, darebbe che una combinazione lineare di δ ed ε, vale a dire, nel caso attuale, un piano η del loro fascio, è legato linearmente ad $\alpha\ \beta\ \gamma$: onde (n. 15) $\alpha\ \beta\ \gamma\ \eta$ starebbero in un S_4, passando per uno stesso punto ([11]).

Se dunque escludiamo, sia che i 5 piani stiano in uno stesso S_4, sia che tre stiano in uno stesso S_4 e che i due rimanenti si taglino in una retta di questo spazio, accadrà che ogni retta incidente tre dei cinque piani incontra pure gli altri due. Ne deriva, applicando il n. 14, e semplificando: *Cinque piani legati linearmente, fra i quali almeno tre siano a due a due sghembi* (cioè non incidenti), *sono cinque piani generatori di una* V_3^3.

17. Siano infine 6 piani $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \eta$ legati linearmente, e a due a due sghembi. Esistono tre rette appoggiate ad $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$: le 3 generatrici della V_3^3 $\alpha\ \beta\ \gamma$ che incontrano δ. Se una di esse non incontrasse ε, e quindi nemmeno η, ε ed η starebbero (fine del n. 7) in un S_4, contrariamente all'ipotesi che siano sghembi. Dunque le tre rette incidenti ad $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ sono pure incidenti ad ε ed η.

Se sei piani, sghembi a due a due, sono legati linearmente, esistono in generale tre rette incontrate da tutti quei piani.

Questa condizione non è però sufficiente perchè vi sia legame lineare. Essa prova che i sei piani hanno per imagini sulla V_9 sei punti di una V_3^6 di S_7, del n. 6. Devono essere, non sei punti qualunque, ma le intersezioni

---

([11]) Viceversa, presi 4 piani $\alpha\ \beta\ \gamma\ \eta$ legati linearmente (secondo il n. 15), si rappresenti η come combinazione lineare di altri due piani $\delta\ \varepsilon$ (presi ad arbitrio in un fascio contenente η). Si otterranno così vari casi di quintuple di piani $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ legati linearmente.

di questa varietà con un S_4 dell'S_7. — Possiamo anche esprimere quel legame lineare dei 6 piani, sostituendo ai complessi lineari di piani le trilinearità che, secondo il n. 5, i piani di questi complessi, incidenti alle tre rette considerate (chiamiamole di nuovo $m\ n\ p$), segnano su queste. Abbiamo su $m\ n\ p$ 6 terne di punti tracce rispettivamente dei 6 piani dati. Dire che tutti i complessi lineari che contengono 5 di questi piani devono contenere il 6.°, sarà come dire che tutte le trilinearità fra $m\ n\ p$ contenenti 5 delle 6 terne contengono anche la 6.ª *Sei piani legati linearmente sono, in generale, sei piani che segano tre rette secondo 6 terne di punti « associate » rispetto alle trilinearità fra quelle rette: ossia le 6 terne comuni a tre trilinearità linearmente indipendenti, vale a dire comuni alle ∞^2 trilinearità contenenti 5 date terne.*

I DUE PIANI, CARDINI DI UN COMPLESSO LINEARE.

18. Le proposizioni sui legami lineari fra piani ci permetteranno di risolvere facilmente i problemi di *rappresentazione di un complesso lineare di piani come combinazione lineare di due o più complessi lineari nucleati.*

Ricorriamo alla rappresentazione dei complessi lineari coi punti di S_{19}: quelli nucleati sono dati dai punti della V_9. Dato un complesso lineare qualunque, ossia un punto P di S_{19}, dire che quello è combinazione lineare di 2, o di 3,..., complessi nucleati, è come dire che per P passa una retta contenente 2 punti della V_9, od un piano contenente 3 punti di questa varietà, ecc. —

Anzi tutto: le corde della V_9 sono ∞^{18}; e i loro punti sono ∞^{19}, cioè tutti i punti di S_{19}, se escludiamo che un punto, pel solo fatto di stare su una corda, stia di conseguenza su infinite. Occorre dunque vedere quali siano i punti esterni a V_9, per cui passano due corde.

Sia P un tal punto. I 4 punti d'appoggio delle due corde saranno legati linearmente; e non potendo stare in un piano della V_9, perchè P s'è supposto esterno a questa, saranno (fine del n. 15) imagini di 4 piani passanti per uno stesso punto e giacenti in uno stesso S_4: ossia (n. 11) staranno su una V_4^2 della V_9; e P cadrà nell'S_5 di questa V_4^2. — Sono dunque i punti degli S_5 contenenti le V_4^2 della V_9 i soli punti di S_{19}, da ognuno dei quali passa più che una corda della V_9.

Qual'è la dimensione della varietà luogo di tali punti? Osserviamo che in generale un punto P esterno a V_9 non può stare che in *uno* dei detti S_5. Perchè se stesse in due, due rette tirate per P in modo generico, una entro l'un spazio e l'altra entro l'altro, segnerebbero sulle due V_4^2 di quegli S_5 due coppie di punti, imagini, come dianzi, di 4 piani passanti per uno stesso punto e giacenti in un S_4: la varietà dei piani di questo S_4 passanti per quel punto sarebbe rappresentata da ambe le V_4^2; onde queste coincidono. *Gli ∞^9 S_5 delle V_4^2 giacenti nella V_9 sono tali che non s'incontrano altrove che sulla V_9. Riempiono, dunque, semplicemente, una V_{14}.*

(V. in seguito, nella ([43]), altri spazi contenuti in questa V_{14}).

19. Consideriamo d'altra parte gli ∞^{24} S_3 delle cubiche sghembe C^3 di V_9 (n. 14).

Due punti di una C^3 generica rappresentano piani non incidenti. Quindi per un punto P del suo S_3, esterno alla V_9 (ossia alla curva), oltre alla corda della C^3 non può passare un'altra corda della V_9 (n. 18). Ne deriva che gli S_3 di cubiche della V_9, i quali passano per P, saranno soltanto quelli delle ∞^8 C_3 della V_9 condotte per i due punti d'appoggio di quell'unica corda di questa varietà, che esce da P.

Così un punto P, non di V_9, che stia su uno degli ∞^{24} S_3 considerati, starà precisamente su ∞^8 tali spazi. Potremo dunque, imponendo 8 condizioni, staccare una ∞^{16} di quegli S_3 tale che i punti di questi risultino ∞^{19}, ossia tutti i punti di S_{19}.

20. Dopo ciò, alla questione posta al n. 18: se cioè un punto che stia su una corda della V_9 sta di conseguenza su infinite corde, possiamo ora rispondere negativamente. Anzi, potremo dire che *per un punto generico P di S_{19} passa una ed una sola corda di V_9*; e che eccezione si ha, solo se P sta sulla V_9, oppure se sta sulla V_{14} del n. 18: nei quali casi le corde passanti per P sono ∞^8 e ∞^4. Anche va aggiunto che una corda può, al limite, ridursi a una tangente della V_9.

Rifacendoci al principio del n. 18, deduciamo che: *un complesso lineare di piani dell'S_5 appartiene in generale ad uno ed un solo fascio di complessi lineari contenente due complessi nucleati;* si può cioè, in generale, rappresentare, in modo unico, come combinazione lineare di due complessi nucleati.

I due piani nuclei di questi due complessi sono strettamente legati al complesso dato: li diremo *cardini* di esso ([12]).

21. Si può, in base al n. 5, collegare l'ultima proposizione ad una nota proprietà delle corrispondenze trilineari.

Ammettiamo il fatto, su cui poi ritorneremo (n. 26) che, dato un complesso lineare generale di piani Γ, esistono infinite rette (*totali* per Γ), ognuna delle quali è tale che *tutti* i suoi piani stanno in Γ; e che di tali rette se ne possono trovare tre non situate in un S_4. Su tre rette siffatte $m\ n\ p$ assumiamo rispettivamente i punti fondamentali 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6, come al n. 5. Un piano passante per m avrà nulle tutte le coordinate tranne le p_{14l}. Quindi se Γ è rappresentato dall'equazione (3) (n. 4), la condizione imposta ad m in relazione con Γ si tradurrà nell'annullarsi dei coefficienti c_{14l}. Similmente saranno nulle le c_{25l} e c_{36l}. Restano dunque soltanto precisamente quegli 8 coefficienti c_{hkl} che figurano nell'equazione (6) della trilinearità segnata su $m\ n\ p$ dai piani di Γ.

Ora si sa (v. ad es. STURM cit. in ([7]), p. 322) che la trilinearità ha in generale due gruppi di 3 punti (rispettivamente di $m\ n\ p$) *singolari o neutri* $M'\,N'\,P'$, $M''\,N''\,P''$, tali cioè che ad esempio la coppia $M'\,N''$ è *neutra*, ossia forma terna della trilinearità con ciascun punto di p, ecc. Se si assumono M' e M'', N' e N'', P' e P'' come punti fondamentali delle coordinate 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6, si riconosce subito che l'equazione della trilinearità si riduce alla forma

$$\lambda\, u\, v\, w + \mu = 0$$

(nota forma *normale* per le trilinearità generali). Dunque nella (6) dovranno allora annullarsi anche i 6 coefficienti c_{hkl} intermedi. Resta Γ con soli due coefficienti non nulli: c_{123} e c_{456}; Γ si può scrivere così:

$$\lambda\, p_{123} + \mu\, p_{456} = 0,$$

il che prova di nuovo il teorema del numero precedente.

([12]) Daremo in seguito (n. 27) le citazioni relative al risultato precedente.

Se si ha un complesso lineare Γ e i suoi cardini α, β, si potranno costruire gli altri complessi lineari aventi gli stessi cardini (complessi *sizigetici* di Γ) nel seguente modo, che deriva subito dalla rappresentazione analitica, o geometrica, del fascio di complessi. In ogni fascio di piani si prendano quel piano che sta in Γ ed i due che sono incidenti rispettivamente ad α, β; e si costruisca un 4.° piano che faccia con quei tre un dato birapporto ρ. Il luogo di questo 4.° piano sarà appunto uno dei complessi sizigetici a Γ, e variando ρ si otterranno tutti.

Distinzione dei complessi lineari in specie.

22. Un complesso lineare può presentare anzi tutto questa singolarità: che i due cardini coincidano. Sarà rappresentato allora in S_{19} da un punto di una tangente della V_9. Diremo il complesso *singolare:* in generale *semplicemente singolare.*

Doppiamente singolare, o *conico* [v. nel seguito la nota ([15])], diremo il complesso lineare, quando ammette infinite coppie di cardini. Risulta dal n. 18 che ciò avviene, solo quando il punto imagine P sta nella V_{14} ivi considerata: cosicchè si tratta di una condizione *quintupla.* P sta allora nell'S_5 di una V_4^2 contenuta nella V_9. Ora pensiamo che i punti di questa V_4^2 sono imagini di uno *stelloide* (così dirò per brevità) di piani, cioè dei piani passanti per un punto O e giacenti in un S_4 Ω; e pensiamo ancora che, quando una V_4^2 si riguarda come rappresentazione delle rette di un S_3, le coppie di punti della V_4^2 allineate con un punto fisso P sono le imagini delle coppie di rette coniugate rispetto ad un ordinario sistema nullo. Qui, al posto di un S_3 rigato, abbiamo lo stelloide $O\,\Omega$: entro questo sarà definito un *sistema nullo* (che risulta, projettando da O un ordinario sistema nullo di un S_3 giacente in Ω). *Il complesso lineare doppiamente singolare ammette ∞^4 coppie di cardini: sono cardini tutti i piani di uno stelloide (ossia piani per un punto entro un S_4); sono cardini coniugati (cioè di una coppia) due piani quando sono coniugati rispetto a un determinato sistema nullo dello stelloide.*

Più singolare ancora (diciamo: *triplamente singolare*) è un complesso nucleato. Fungono da cardini coniugati per esso il suo nucleo insieme con un piano arbitrario di S_5; od anche due piani qualunque che stiano in un fascio col nucleo. —

Nel seguito chiameremo *piano singolare* di un complesso lineare, di cui il punto P sia l'imagine in S_{19}, ogni piano rappresentato sulla V_9 da un punto di contatto di questa con una tangente passante per P: il limite dunque di due cardini coniugati infinitamente vicini. Un complesso semplicemente singolare ha un solo piano singolare; un complesso conico, o nucleato, ne ha infiniti. Vedremo poi (n. 44) che *un piano singolare si può anche definire come un piano tale che ogni piano che lo incontra secondo una retta sta nel dato complesso.*

23. Cerchiamo delle equazioni normali per le quattro specie di complessi.

Pel complesso nucleato si può assumere, ad esempio,

$$p_{123} = 0. \tag{9}$$

Ancora in modo semplicissimo rappresentiamo subito ogni altro complesso che ammetta due cardini *distinti*. Se il complesso è generale, e quindi questi due piani non sono incidenti, si possono prendere su essi rispettivamente i punti fondamentali delle coordinate 1 2 3, 4 5 6; sicchè le equazioni dei complessi che hanno quei piani per nuclei saranno risp.: $p_{456} = 0$, $p_{123} = 0$ (come alla fine del n. 21). Scelto convenientemente il punto unità, l'equazione del dato complesso, che per ipotesi è nel loro fascio, e non è nucleato, si potrà scrivere:

$$p_{123} + p_{456} = 0. \tag{10}$$

Se invece il dato complesso lineare è doppiamente singolare, il che è come dire che ammette due piani incidenti in un sol punto come cardini coniugati, prendiamo quei due piani, ad esempio, come piani 4 5 6, 2 3 6: allora l'equazione del complesso potrà scriversi così:

$$p_{123} + p_{145} = 0. \tag{11}$$

24. Meno immediata riesce la rappresentazione di un complesso semplicemente singolare, cioè dotato di un solo cardine ([18]).

Consideriamo il fascio determinato dal complesso lineare che ha per nucleo il piano 1 2 3, ossia per equazione $p_{456} = 0$, e da un altro complesso lineare nucleato $(q, p) = 0$, il cui piano nucleo q si avvicini indefinitamente a quello: congiunga cioè tre punti $x\ y\ z$, i quali si muovano insieme, tendendo rispettivamente ai punti 1 2 3. Siano $x\ y\ z$ funzioni di un parametro t, che per $t = 0$ si riducano ai punti 1 2 3; e le loro trajettorie ammettano in questi punti le tangenti, sulle quali risp. supporremo presi i punti fondamentali 4 5 6. Potremo assumere per le coordinate di $x\ y\ z$ (scrivendo

([18]) V. al n. 49 un'altra deduzione, senza considerazione di limiti. — Si potrebbe anche giungere alla seguente equazione (12), basandosi su una rappresentazione normale delle trilinearità *singolari* (cioè a terne singolari coincidenti); come al n. 21 avevamo dedotto l'equazione normale del complesso generale da quella delle trilinearità generali.

solo i termini principali, rispetto a t, che si dovrà poi prendere infinitesimo):

$$x_1 = y_2 = z_3 = 1 ;$$

$$x_4 = a\,t + \cdots, \qquad y_5 = b\,t + \cdots, \qquad z_6 = c\,t + \cdots ;$$

e le rimanenti coordinate aventi come termine principale un termine in t^2, o più elevato.

Le coordinate q_{hkl} del piano variabile sono i determinanti $(x\,y\,z)_{hkl}$; sicchè risultano: $q_{123} = 1 +$ termini in t^4,

$$q_{234} = a\,t + \cdots, \qquad q_{315} = b\,t + \cdots, \qquad q_{126} = c\,t + \cdots,$$

e le rimanenti con un primo termine in t^2.

In conseguenza, nel fascio determinato dai due suddetti complessi nucleati, il complesso

$$\frac{1}{t}\,[(q,\,p) - p_{456}] = 0,$$

quando t tende a zero, ossia quando il 2.° complesso nucleato tende al 1.°, ha per limite

$$a\,p_{156} + b\,p_{264} + c\,p_{345} = 0 \ \text{([14])}. \tag{12}$$

Se le costanti a b c sono tutte tre diverse da zero, una conveniente scelta del punto unità permette di scrivere quell'equazione così:

$$p_{156} + p_{264} + p_{345} = 0. \tag{13}$$

Sarà questa l'equazione normale del complesso semplicemente singolare.

Se invece una o due di quelle costanti sono nulle, la (12) ci riporta alle forme di equazioni prima ottenute pei complessi conici, o nucleati.

Le equazioni normali (9), (10), (11), (13) mettono in evidenza che: *le quattro specie di complessi lineari, ossia quella generale e le tre specie singolari, sono tali che due complessi della stessa specie sono sempre projettivamente equivalenti.*

([14]) Il complesso così ottenuto è il limite di *uno* dei complessi del fascio determinato dai due nucleati infinitamente vicini: e precisamente, possiamo dire, di quello che resta fissato dalla condizione (che è lecito porre) di contenere il piano 4 5 6. Un complesso *qualunque* soddisfacente alle condizioni primitive, ossia un complesso qualunque del fascio limite, avrà per equazione:

$$a\,p_{156} + b\,p_{264} + c\,p_{345} + d\,p_{456} = 0.$$

In altri termini, in S_{19}, rispetto al gruppo projettivo che muta in sè la V_9 (n. 10), sono *equivalenti* (deducibili con trasformazioni del gruppo): 1.°) i punti della V_9; 2.°) i punti della V_{14} non situati sulla V_9; 3.°) i punti, non sulla V_{14}, della V_{18} luogo delle tangenti a V_9 (della quale tratteremo ai n.i 38 e segg.); 4.°) i punti di S_{19} non situati su questa V_{18}. (Sono i punti imagini risp. dei complessi: nucleati, conici, semplicemente singolari, generali).

Punti, rette, spazi totali per complessi lineari. Notizie bibliografiche.

25. Diciamo che un punto, o una retta, è *totale* per un complesso lineare di piani Γ, se *tutti* i piani passanti pel punto o per la retta sono piani di Γ. Dualmente un S_4, o un S_3, si dirà *totale* per Γ se tutti i piani in esso contenuti sono piani di Γ.

Se Γ è doppiamente singolare, ossia ammette come cardini coniugati due piani α β, distinti, incidenti in un punto O, e quindi giacenti in un S_4 Ω, ogni piano per O, oppure di Ω; sta nel fascio di complessi determinato dai due nucleati (α), (β); e però starà in Γ. Così Γ ammette O come punto totale, Ω come iperpiano totale.

Viceversa, supponiamo che un complesso lineare Γ ammetta un punto totale O. Un piano qualunque di Γ non passante per O sarà congiunto a questo punto da un S_3, in cui, oltre alla stella O di piani di Γ vi è quel tal piano del complesso: sicchè (n. 2) tutti i piani di questo S_3 saranno in Γ (l'S_3 è totale per Γ). Così Γ si compone di spazi ordinari solcati da piani, passanti per O ([15]). Esso si può dunque ottenere projettando da O mediante spàzi S_3 il complesso lineare di piani secondo cui (n. 2) Γ è *segato* da un iperpiano non passante per O. Si sa che un tal complesso dell'S_4 ammette un S_3 totale, nel quale sta un ordinario complesso lineare L di rette, così che il complesso di piani è composto di quei piani dell'S_4 che passano per le rette di L. L'iperpiano Ω che projetta da O quell'S_3 sarà dunque totale per Γ: sicchè risulta intanto che in S_5, se un complesso lineare di piani ha un punto totale, avrà pure un S_4 totale passante pel punto. Inoltre otteniamo,

([15]) Appunto perchè sono così composti, abbiamo chiamato anche *complessi conici* i complessi lineari doppiamente singolari (n. 22).

in questo caso, una generazione semplicissima del complesso Γ. Si ha in un S_3 un ordinario complesso lineare di rette L; da un punto O, esterno a quello spazio, si conducono gli ∞^3 piani projettanti le rette di L: Γ si comporrà di tutti i piani che incontrano secondo rette (ossia stanno in S_3 con) i vari piani di quella ∞^3.

Si può rappresentare L come combinazione lineare di due complessi lineari speciali di rette del suo S_3, i quali abbiano per assi due rette coniugate rispetto ad L. Se ne trae subito che Γ si può rappresentare come combinazione lineare dei due complessi lineari di piani dell'S_5, che hanno per nuclei i piani che vanno da O a due tali rette. Γ è dunque doppiamente singolare; e ritroviamo ciò che s'è visto al n. 22 sulle coppie di cardini coniugati di Γ ([16]). Gli ∞^3 piani dianzi considerati saranno i piani singolari di Γ: e per essi risulta verificata la proprietà con cui finiva quel n.° 22.

26. Un complesso lineare di piani Γ non ammette dunque, in generale, nè punti, nè iperpiani totali.

Ammette però sempre *rette* e *spazi* ordinari totali. Come già s'è notato al n. 2, i piani di Γ passanti per un punto x sono quelli che congiungono x alle rette di un complesso lineare C di rette di S_5, pel quale x è punto singolare. Per un noto teorema, C avrà in generale una retta singolare r (passante per x), sì che tutte le rette appoggiate ad r sono rette di C. Ciò è come dire che tutti i piani passanti per r stanno in Γ: r è retta totale per questo. Viceversa per x non passa in generale altra retta totale di Γ.

Farebbe eccezione a questo ragionamento il caso che C avesse non solo una retta singolare, ma un S_3 singolare (passante per x). Allora C si comporrebbe delle rette appoggiate all'S_3, e i piani di Γ passanti per x sarebbero quelli incidenti in rette l'S_3.

Se Γ ammette due cardini distinti α β, ogni retta incidente a questi

([16]) Aggiungiamo che dalla nota generazione del complesso lineare di rette L per mezzo di un'involuzione entro una schiera rigata, si trae: *Un complesso lineare di piani doppiamente singolare si può generare come l'insieme dei piani incidenti alle coppie di piani coniugati in un'involuzione posta fra i piani di una schiera di un cono quadrico V_3^2 in un S_4.* — Se, più in particolare, si genera L colle rette incidenti le rette omologhe di due fasci projettivi dotati di retta unita, si ha: *Per generare un complesso lineare di piani doppiamente singolare, si ponga fra due ordinari fasci di piani, aventi un piano comune (dunque ad assi incidenti), una tale projettività che per essa quel piano sia unito: il complesso si comporrà dei piani incidenti a coppie di elementi omologhi dei due fasci.*

è retta totale pei complessi nucleati (α), (β), e quindi anche per ogni complesso del loro fascio, in particolare per Γ. Un punto generico sta precisamente su *una* retta incidente ad α e β. Viceversa, *se* Γ *non è singolare*, una retta r totale per Γ deve appoggiarsi ad α e β; perchè ogni piano per essa che incontri α, appartenendo a Γ e ad (α), starà pure in (β), e quindi incontra β; e viceversa ogni piano per r incidente a β incontrerà α; onde, se r non fosse incidente ad ambi i piani α β, dovrebbero questi (cfr. n. 7) stare (con r) in uno stesso S_4, e Γ sarebbe doppiamente singolare, contro l'ipotesi. — Se invece Γ è doppiamente singolare, si riconosce subito che le sue rette totali sono quelle che escono dal punto totale O e inoltre le ∞^5 rette che stanno in quegli ∞^3 piani (singolari per Γ) dello stelloide $O\,\Omega$, di cui s'è detto al n. 25.

27. Qui sia posta una breve digressione bibliografica sulle cose precedenti.

Sono ben quattro gli Autori che, indipendentemente l'uno dall'altro, e in conseguenza senza citarsi fra loro, hanno ottenuto alcuni più essenziali fra i risultati esposti negli ultimi paragrafi ([17]).

Primo è stato O. LANDSBERG. A pag. 41 e segg. della sua dissertazione egli tratta (cogli ordinari mezzi analitici) il complesso lineare Γ di piani dell'S_5. Dall'equazione di Γ giunge alle equazioni di un'omografia involutoria di quello spazio, per la quale le rette singolari dei complessi lineari di rette C provenienti dai singoli punti, ossia (n. 26) le rette totali di Γ, sono rette unite. I punti uniti di questa collineazione involutoria formano due piani (che sono i nostri *cardini* di Γ) a cui si appoggiano tutte quelle rette. Essi coincidono, se si annulla un certo invariante di 4.° grado nei coefficienti di Γ. Il LANDSBERG rileva pure il caso del complesso doppiamente singolare e quello del complesso nucleato; e ne dà le condizioni analitiche.

Le stesse cose ritrova, molti anni dopo, con calcolo simbolico per forme alternate ([18]), W. REICHEL; nel cui lavoro sono pur da rilevare le equazioni

([17]) O. LANDSBERG, *Untersuchungen ü. die Gruppen einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit.* Inaug. Dissertation, Breslau, 1889. — W. REICHEL, *Ueber trilineare alternierende Formen in sechs und sieben Veränderlichen und die durch sie definierten geometrischen Gebilde.* Inaug. Dissertation Greifswald, Leipzig, 1907. — R. WEITZENBÖCK, *Komplex-Symbolik,* Leipzig, 1908. — E. VENERONI, *Sui connessi bilineari fra punti e rette negli iperspazi,* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 26, $(1908)_2$, p. 387.

([18]) Come quello usato da E. STUDY, *Geometrie der Dynamen,* Leipzig, 1903, ad es. a p. 135.

normali del complesso nei quattro diversi casi ([19]). — Anche col calcolo simbolico studia il complesso lineare di piani di S_5 R. WEITZENBÖCK, a pag. 134 e segg. del suo libro; e giunge, ancora per la via su indicata di O. LANDSBERG, ai due piani cardini; ottiene l'invariante biquadratico che caratterizza i complessi semplicemente singolari; e fa pur cenno del complesso doppiamente singolare (che egli chiama *polare*). — Simultaneo a quest'autore, E. VENERONI, nella sua Nota essenzialmente geometrica, fa un cenno in generale sulle rette totali (singolari) di un complesso lineare di piani in uno spazio qualunque e dimostra in particolare che nel caso di S_5 quelle rette si appoggiano in generale a due piani fissi. Con questi e con un piano generico del complesso questo risulta determinato ([20]).

TERNE DI PIANI CONIUGATI. GENERAZIONI DEL COMPLESSO LINEARE.

28. Diciamo *terna di piani coniugati* (o brevemente *terna coniugata*) rispetto ad un complesso lineare generale Γ una terna di piani $\gamma\ \delta\ \varepsilon$ tale che Γ si possa riguardare come combinazione lineare dei complessi che hanno per nuclei $\gamma\ \delta\ \varepsilon$.

Se $\alpha\ \beta$ sono i cardini di Γ, distinti e non incidenti, avremo che una combinazione lineare dei complessi nucleati (α), (β) coincide con una combinazione lineare di (γ), (δ), (ε). I cinque piani sono legati linearmente. Dunque (n. 16) essi stanno in una stessa V_3^3. *Ogni terna di piani coniugati sta in una stessa V_3^3 coi due piani cardini.*

Viceversa si dia una V_3^3 generica passante per $\alpha\ \beta$. Si fissino in essa due piani $\gamma\ \delta$; se ε è un altro suo piano *mobile*, esiste un legame lineare tra $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$. Nella relazione che così si ha fra le coordinate di questi piani, non può essere che i coefficienti di $\alpha\ \beta$ conservino un rapporto fisso al variare

([19]) Si avverta però che da una citazione di STUDY, loc. cit. p. 247, risulta che l'equazione normale pel caso generale era già stata ottenuta da F. ENGEL; quella del complesso semplicemente singolare è data ivi da STUDY.

([20]) S. KANTOR nella sua *Theorie der linearen Strahlenkomplexe im Raume von r Dimensionen*, Journ. f. Mat., 118, 1897, p. 74, comincia con varie osservazioni generali sui complessi lineari di spazi S_k entro l'S_r: ma si tratta solo di conseguenze presso che immediate delle definizioni o di teoremi noti. Non s'incontrano i risultati su cui ora ho riferito.

di ε; se no, prese due posizioni di ε, risulterebbe, sottraendo le due relazioni, che γ, δ e quei due piani ε son legati linearmente, il che (in base al n. 15) si esclude supponendo che γ e δ non s'incontrino (ossia che la V_3^3 appartenga ad S_5). Ne deriva che per una conveniente scelta di ε i coefficienti di α e β nella detta relazione saranno precisamente quelli coi quali Γ si esprime per combinazione lineare di (α), (β). E allora il legame lineare fra i cinque piani ci dirà che Γ è combinazione lineare di γ δ ε; ossia γ δ ε sono una terna di piani coniugati per Γ. *Una V_3^3 generica passante pei piani cardini di Γ contiene infinite terne di piani coniugati rispetto a Γ: potendosi prendere ad arbitrio due piani della V_3^3 per formare una tal terna.*

Per la V_9 di S_{19}, la 1.ª proposizione esposta dice che i suoi piani trisecanti passanti per un punto generico P si appoggiano ad essa in terne di punti, ognuna delle quali sta in una C^3 della V_9 contenente i due punti d'appoggio della corda tirata da P a questa varietà. — La 2.ª proposizione trovata diventa evidente, riferita ad una data C^3 della V_9 passante per i due punti d'appoggio ora nominati.

29. Colle ultime osservazioni si connetta il fatto che su una cubica sghemba irriducibile i piani del suo spazio passanti per un punto fisso P segano un'*involuzione cubica* ∞^2, o *serie lineare* g_3^2 di terne di punti (trilinearità simmetrica), per la quale i due punti d'incontro della curva colla corda uscente da P formano la *coppia neutra.* Avremo così: *Su una V_3^3 passante pei due cardini α β di Γ le terne di piani coniugati rispetto a Γ formano una g_3^2 di cui α β è la coppia neutra.*

Dalla definizione di terna coniugata γ δ ε, vale a dire dall'espressione di Γ come combinazione lineare di (γ), (δ), (ε), segue che se un piano di Γ incontra γ e δ, incontrerà pure ε. Se dunque in una V_3^3 passante pei cardini α β di Γ si prendono due piani qualunque γ δ, i piani di Γ incidenti γ e δ incontreranno pure un terzo determinato piano della V_3^3: quello che con γ δ costituisce una terna coniugata di Γ, ossia un gruppo della g_3^2 di poc'anzi. *La g_3^2 sulla V_3^3 si compone delle terne di piani di questa che incontrano i singoli piani del complesso Γ.*

Un complesso lineare generale di piani si può costruire nel seguente modo. Si scelga ad arbitrio, entro al sistema dei piani generatori di una V_3^3, una g_3^2 (21).

(21) Per segnare sulla V_3^3 una qualunque g_3^2 basterà associare tre piani sempre quando siano incidenti ad uno stesso elemento di un'ordinaria stella di piani (di un S_3).

Sono i piani di un determinato complesso lineare quelli pei quali avviene che i tre piani della V_3^3 da essi incontrati formino una terna di quella g_3^2. In fatti fra i piani che soddisfano a questa condizione quelli che fan parte di un dato fascio di piani si avranno, entro l'S_3 del fascio, considerando sulla cubica traccia della V_3^3 sull'S_3 l'involuzione ∞^2 traccia della data g_3^2 di piani; e cercando quei piani del fascio che contengono terne di quell'involuzione. Si trova così, in generale, un sol piano (perchè l'involuzione sulla cubica ha le sue terne nei piani di una stella). Dunque in S_5 i piani suddetti son tali che in un fascio generico ve n'è uno solo: formano quindi un complesso lineare ([22]).

Quando si genera in tal modo un complesso Γ, si otterranno subito i suoi cardini, come costituenti la coppia neutra della g_3^2. Aggiungasi che i tre elementi tripli della g_3^2 (costituenti la terna a cui sono armoniche, od apolari, tutte le terne di questa) non sono altro che i tre piani di Γ contenuti nella V_3^3. Invero ognuno di questi ultimi piani non incontra altri piani della V_3^3 che sè stesso: in sè dunque riunisce una terna della g_3^2. Com'è noto, la coppia neutra della g_3^2 (ossia i cardini di Γ), costituisce l'Hessiano di quella terna di elementi tripli.

Se si parte da una g_3^2 della V_3^3 che abbia la coppia neutra ridotta ad un elemento doppio (ossia g_3^2 delle terne armoniche ad una terna fissa dotata di elemento doppio), si otterrà un complesso a cardini coincidenti, ossia semplicemente singolare.

30. Se di un complesso lineare generale di piani son dati i due cardini α β e un piano π che gli appartiene (non incidente ad α β) il complesso è determinato, e si può costruire così. Si conduca per α β una V_3^3; e tra i piani di questa si consideri la g_3^2 che ha α β per coppia neutra e che contiene come una terna quella costituita dai piani della varietà incidenti a π.

([22]) Questa costruzione è analoga a quella già ricordata nella ([16]) del complesso lineare di rette di S_3 per mezzo di un'involuzione ordinaria (una g_2^1) entro una schiera rigata. Essa si estende in generale, collo stesso ragionamento precedente, così: Si consideri in S_{2q+1} una V_{q+1}^{q+1} luogo degli ∞^1 S_q congiungenti i punti omologhi di $q+1$ rette punteggiate projettivamente (od S_q che incontrano $q+2$ rette date, ecc.), ed entro a questa ∞^1 di S_q si fissi una serie lineare g_{q+1}^q. L'insieme di quegli S_q per ognuno dei quali i $q+1$ S_q ad esso incidenti di quella varietà formano un gruppo della serie lineare fissata è un complesso lineare (particolare, se $q > 2$) di S_q.

Il complesso si comporrà dei piani incidenti a terne di quella g_3^2. — In particolare si potrà prendere quella V_3^3 che passa per α β e π; e in essa la g_3^2 di cui α β è la coppia neutra e π un piano triplo.

31. La generazione precedente (n. 29) del complesso lineare si modifica facendo spezzare la V_3^3, o la cubica che ne è imagine in S_{19}: ad esempio facendo spezzare questa in tre rette, una delle quali incontra le altre due. Enunciamo senz'altro il risultato.

Sia dato un complesso lineare di piani Γ, avente i piani α β per cardini. Si prendano su questi due rette a b, e sia c una loro trasversale arbitraria. Consideriamo i tre fasci di piani determinati dalle coppie di piani (α, $a\,c$), ($a\,c$, $b\,c$), ($b\,c$, β); e poniamo fra essi una trilinearità avente queste coppie di elementi neutri: il piano $a\,c$ comune ai primi due fasci, considerato in entrambi; il piano $b\,c$ comune al 2.° e al 3.° fascio, considerato in entrambi; infine α e β nel 1.° e nel 3.° fascio ([23]). I piani che incontrano tre elementi dei tre fasci formanti terna nella trilinearità (tolti però i piani generici incidenti all'uno o all'altro piano doppio neutro $a\,c$, $b\,c$) formeranno un complesso lineare: perchè, cercando quelli fra essi che stanno in un S_3 generico, si viene ad avere in questo spazio tre rette, di cui la 2.ª è incidente alla 1.ª e alla 3.ª, e fra queste rette una trilinearità, per la quale quei due punti di incidenza son punti neutri doppi; onde i piani congiungenti le terne di punti della trilinearità, i quali in generale invilupperebbero una superficie di 3.ª classe (AUGUST), ora che da questa si staccano due stelle di piani, formeranno una residua stella di piani. E poichè α β costituiscono una coppia neutra, ogni piano incidente ad essi starà nel complesso: sicchè α e β sono i cardini di questo. Si può poi ottenere che il complesso considerato coincida con quello dato Γ, determinando la trilinearità fra i tre fasci di piani coll'ulteriore condizione che formino una terna di essa i piani incidenti ad un dato piano π di Γ.

32. Quattro piani α β γ δ devono soddisfare ad una condizione, perchè esista un complesso lineare con α β per cardini, contenente γ e δ. Dovrà accadere che per uno stesso valore di $\lambda:\mu$ siano verificate le due equazioni

$$\lambda\,(\alpha\,\gamma)+\mu\,(\beta\,\gamma)=0$$
$$\lambda\,(\alpha\,\delta)+\mu\,(\beta\,\delta)=0;$$

([23]) S'intende cioè che è indeterminato, ad es., l'elemento del 2.° fascio che forma terna con α del 1.° e β del 3.°; e così via.

sicchè la condizione è:

$$(\alpha\gamma)(\beta\delta)-(\alpha\delta)(\beta\gamma)=0. \tag{14}$$

È dunque simmetrica rispetto alle due coppie di piani $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ (come anche risulterebbe dalla rappresentazione in S_{19}, considerando il sistema nullo $\mathfrak{N}$).

La si può esprimere semplicemente in forma geometrica, considerando le tre rette $m\ n\ p$ appoggiate ai quattro piani. Presi come punti fondamentali delle coordinate 1 2 3 le intersezioni di quelle rette con α, e come punti 4 5 6 le loro intersezioni con β, la sola coordinata non nulla di α sarà la p_{123}, e così per β sarà la p_{456}. Le possiamo assumere $=1$. Se poi γ congiunge i punti che su $m\ n\ p$ hanno le coordinate $(u, 1)$, $(v, 1)$ $(w, 1)$, e δ quelli di coordinate $(u', 1)$, $(v', 1)$, $(w', 1)$, la condizione precedente diverrà, in base alle (5) del n. 5:

$$u\,v\,w = u'\,v'\,w', \tag{15}$$

che si può esprimere così: *I tre birapporti delle quaterne di punti che i piani* $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ *segnano sulle tre rette ad essi incidenti hanno per prodotto l'unità* (24).

Gli spazi tangenti alla V_9.

33. Conviene, per varie deduzioni, che ci procuriamo una semplice rappresentazione analitica dell'S_9 tangente alla V_9 di S_{19} in un suo punto.

Come punto di contatto prendiamo quello, che dirò O, che rappresenta il piano ω dei punti fondamentali 1 2 3 di S_5. L'S_9 tangente in O conterrà tutte le rette della V_9 passanti per O. I punti di queste rette sono imagini (n. 8) dei piani di S_5 che incontrano ω secondo rette. Un tal piano π si determina con due punti $x\ y$ di ω e un terzo punto z generico. Le sue coordinate sono dunque i determinanti del 3.° ordine estratti dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{Vmatrix}.$$

(24) L'equazione normale delle trilinearità, a cui ci siamo riferiti al n. 21, esprime un'analoga conosciuta relazione di birapporti per le trilinearità, che in base a quel n. 21 si può riguardare come equivalente a quella ora ottenuta.

Indichiamo con $u_1\, u_2\, u_3$ le tre coordinate della retta $x\, y$ *entro* al piano ω, cioè rispettivamente i determinanti $(x\,y)_{23}$, $(x\,y)_{31}$, $(x\,y)_{12}$. Le 20 coordinate del nostro piano π risultano espresse nel modo seguente, ove gli indici $a\ b\ c$ prendono solo i valori 1 2 3, costituiscono anzi una permutazione pari di 1 2 3, mentre $l\ m$ prendono solo i valori 4 5 6 (*convenzione che adotteremo anche in seguito*):

$$p_{123} = \sum z_a u_a, \quad p_{abl} = z_l u_c \tag{16}$$

$$p_{456} = 0, \quad p_{alm} = 0 \qquad \begin{pmatrix} a = 1,\ 2,\ 3 \\ l,\ m = 4,\ 5,\ 6 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Sono le (16) e (17) due gruppi, ognuno di dieci formole, le quali, interpretando le p come coordinate di punti in S_{19}, rappresenteranno il cono composto di tutte le rette della V_9 passanti per O. Risulta che questo cono sta nell'S_9 rappresentato dalle (17). Esso è segato dall'iperpiano $p_{123} = 0$ (che non passa pel vertice O) secondo una V_4 rappresentata, per mezzo delle due terne di parametri omogenei $u_1\ u_2\ u_3$, $z_4\ z_5\ z_6$, dalle formole $z_l u_c$. È questa una V_4^6 ([25]) che non sta in uno spazio inferiore a S_8 (non essendovi identità lineari tra quei nove prodotti $z_l u_c$). Dunque il nostro cono è di 6.° ordine, V_5^6, e non sta in uno spazio inferiore all'S_9 rappresentato da (17) ([26]). D'altronde le sue generatrici devono stare (come s'è detto in principio) nell'S_9 tangente in O alla V_9. Dunque *l'S_9 tangente a V_9 in O è quello, Ω, rappresentato dalle equazioni* (17).

34. Lo spazio Ω_9 tangente a V_9 in un punto O incontra questa varietà soltanto lungo il cono V_5^6 del numero precedente. Ossia: un punto della V_9 giacente in Ω è imagine di un piano segante ω in una retta.

In fatti, se un punto di S_{19} rappresenta un piano sghembo con ω, possiamo (ω restando sempre il piano 1 2 3) assumere quel piano come piano fondamentale 4 5 6; e se invece il punto rappresenta un piano incidente a ω

([25]) Studiata diffusamente nella Nota citata in ([6]), come varietà che rappresenta le coppie di punti di due dati piani.

([26]) Risulta che quel cono contiene due sistemi ∞^2 di S_3 passanti per O. Questi si potevano anche ottenere geometricamente, come gli S_3 che entro la V_9 rappresentano (nel senso del n. 10) rispettivamente le rette di ω e gli spazi ordinari passanti per ω. E dalle relazioni reciproche, che così si vedono, fra quei due sistemi di S_3 della V_9, si poteva di nuovo trarre, per via geometrica, che il cono da essi costituito è del 6.° ordine, projettante una V_4^6 della specie indicata.

in un sol punto, possiamo prendere questo piano come 1 4 5. Nel 1.° caso il punto di S_{19} ha per unica coordinata non nulla la p_{456}, nel 2.° la p_{145}. Un tal punto non soddisfa le (17), e quindi non può stare in Ω.

Possiamo anche dire così: *Una retta tangente alla V_9 in un punto non può incontrare altrove questa varietà senza giacervi per intero* (Cfr. la proposizione del n. 8 sulla mancanza di trisecanti).

35. Come le (17) rappresentano l'S_9 tangente alla V_9 nel punto imagine del piano 1 2 3, così si scrivono le equazioni rappresentanti l'S_9 tangente nel punto imagine di un altro piano fondamentale delle coordinate: risulterà un *altro* S_9. Se ne deduce che *non può uno stesso S_9 essere tangente alla V_9 in due diversi punti.*

Due S_9 tangenti alla V_9 si tagliano solo se i loro punti di contatto rappresentano due piani incidenti. In fatti, se son dati due piani *non incidenti,* possiamo prenderli come piani fondamentali 1 2 3, 4 5 6. L'S_9 tangente nel punto imagine di 1 2 3 è dato dalle (17). Per quello tangente nel punto imagine di 4 5 6 i punti soddisferanno alle equazioni analoghe alle (17), cioè avranno nulle precisamente quelle 10 coordinate che son diverse da quelle nulle in causa delle (17). Non esiste dunque un punto comune ai due S_9.

Consideriamo invece due piani incidenti. Se sono incidenti secondo una retta, prendiamoli come piani fondamentali 1 2 3, 1 2 4. Rappresentati gli S_9 tangenti nei punti corrispondenti della V_9 colle (17) e analoghe, vediamo che quei due spazi hanno comuni i punti per cui son nulle tutte le coordinate aventi per indici due almeno dei numeri 4 5 6, oppure almeno due dei numeri 3 5 6. Sono quattordici queste coordinate; quindi quei punti comuni formano un S_5. Se invece i due piani s'incontrano solo in un punto, assumendoli ad esempio come piani 1 2 3, 1 4 5, troviamo similmente che i due S_9 tangenti si tagliano secondo un S_3.

Si vede anche direttamente come l'uno e l'altro fatto avvengano. Se due piani ω e τ si tagliano in una retta, i piani che li incontrano entrambi secondo rette sono: quelli dell'S_3 che unisce ω e τ, e quelli che passano per la retta comune a ω e τ. Questi due sistemi ∞^3 di piani sono rappresentati sulla V_9 da due S_3 di diverso sistema, aventi una retta in comune, e quindi congiunti da un S_5; e questo dovrà stare sugli S_9 tangenti nei due punti O, T corrispondenti ad ω, τ. Anzi, poichè quei due sistemi ∞^3 di piani incontrano in rette anche gli altri piani del fascio di ω e τ, così quell'S_5 starà sugli ∞^1 S_9 tangenti alla V_9 nei punti della retta $O\,T$: sarà uno spazio tangente alla V_9 lungo quella retta.

Se invece i due piani ω τ s'incontrano in un sol punto, i piani che sono incidenti ad essi secondo rette, sono solo ∞^2. Nella rappresentazione del n. 11 dei piani di un S_4 passanti per un punto per mezzo dei punti di una V_4^2, rappresentazione in cui sostituivamo tali piani colle rette loro tracce su uno spazio ordinario dell'S_4, i piani che ora dobbiamo considerare corrispondono alle rette appoggiate a due rette fisse: sono dunque rappresentati dai punti di una quadrica ordinaria. In conseguenza i due S_9 tangenti alla V_9 avranno in comune l'S_3 di questa quadrica.

36. Se una tangente e una corda della V_9 s'incontrano in un punto che non è su questa varietà, i piani rappresentati dai tre punti d'appoggio della tangente e della corda passano per uno stesso punto e stanno in un S_4; in altre parole, i tre punti d'appoggio sono su una V_4^2 della V_9 ([27]).

Per dimostrare ciò, prendiamo l'S_9 tangente a V_9 nel punto imagine del piano fondamentale $1\,2\,3 \equiv \omega$. Gli altri due piani nominati siano α β. In S_{19} l'ipotesi sarà che la retta dei due punti imagini di quei due piani — li indicheremo anche con α β, — incontri l'S_9 rappresentato dalle (17). Il punto d'incontro (o *un* punto d'incontro, se fossero infiniti), combinazione lineare di α β, diverso sì da α che da β, si potrà rappresentare, alterando con un fattore conveniente le coordinate, con $\alpha - \beta$. Quindi le condizioni (17) citate diverranno:

$$\alpha_{456} = \beta_{456}, \quad \alpha_{alm} = \beta_{alm} \qquad \begin{pmatrix} a = 1,\ 2,\ 3 \\ l,\ m = 4,\ 5,\ 6 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Le coordinate dei piani α β di S_5 verificano le note relazioni quadratiche, come questa:

$$\alpha_{412}\,\alpha_{456} + \alpha_{415}\,\alpha_{462} + \alpha_{416}\,\alpha_{425} = 0 \tag{19}$$

e l'analoga (19'), ottenuta scrivendo β al posto di α. Ma, valendosi delle (18) per sostituire dove si può le α alle β, la (19') diventa

$$\beta_{412}\,\alpha_{456} + \alpha_{415}\,\alpha_{462} + \alpha_{416}\,\alpha_{425} = 0.$$

Dal confronto colla (19) segue

$$\alpha_{456}\,(\alpha_{412} - \beta_{412}) = 0.$$

([27]) Questo teorema è un'estensione del n. 15 al caso che due dei quattro piani là considerati diventino infinitamente vicini.

Se fosse α_{456} non nullo, avremmo così che sono uguali (come α_{412} e β_{412}) tutte le coppie di coordinate omologhe di α β con due indici fra 1 2 3 ed uno fra 4 5 6. Ciò, insieme colle (18), vorrebbe dire che i piani α β differiscono solo per la coordinata d'indici 1 2 3; sicchè le $\alpha_i - \beta_i$ risultano le coordinate di ω; α e β formano fascio con ω.

Se invece è $\alpha_{456} = 0$, ciò significa che il piano α incontra ω. Dicendo x_1 x_2 x_3 0 0 0 le coordinate del punto d'incontro, si ha subito (per $l, m = 4, 5, 6$)

$$\alpha_{1lm} : \alpha_{2lm} : \alpha_{3lm} = x_1 : x_2 : x_3 .$$

Quindi, in base alle (18), il piano β incontrerà ω in quello stesso punto. — Similmente, se indichiamo con 0 0 0 ξ_4 ξ_5 ξ_6 le coordinate dell'S_4 che unisce α ad ω, si ha (per $a = 1, 2, 3$)

$$\alpha_{a56} : \alpha_{a64} : \alpha_{a45} = \xi_4 : \xi_5 : \xi_6 ,$$

onde, per le (18), lo stesso S_4 unirà β ad ω.

37. *Per un punto, non situato sulla V_9, comune a due S_9 tangenti di questa, passano precisamente ∞^3 S_9 tangenti. I loro punti di contatto formano una V_3^2; stanno quindi in un S_4.*

Sia P il punto, comune agli S_9 tangenti nei punti A B di V_9. Secondo il n. 35 dovranno A B rappresentare due piani di S_5 fra loro incidenti. Siano anzi tutto incidenti in un sol punto. Allora (n. 11) A B stanno in una determinata V_4^2 della V_9; e nell'S_5 di quella sta (v. la fine del n. 35) l'S_8 in cui si tagliano gli S_9 tangenti a V_9 in A B; in particolare dunque vi sta il punto P. Gli ∞^3 S_4 tangenti alla V_4^2 tirati per P, — i cui punti di contatto formeranno una V_3^2, — staranno negli S_9 tangenti in questi punti alla V_9. Così per P passano ∞^3 S_9 tangenti di questa. Nè può passare per P un altro S_9 tangente, ossia l'S_9 tangente a V_9 in un punto X di questa esterno alla V_4^2. In fatti, chiamando M N una coppia generica di punti della V_4^2 allineati con P, il teorema del n. 36 dice che quel punto X dovrebbe stare con M N in una stessa V_4^2 della V_9: dunque sulla V_4^2 considerata.

Se i piani α β di S_5 rappresentati da A B s'incontrano in una retta, possiamo ancora ridurci al caso precedente. Invero, in quella ipotesi, gli S_9 tangenti in A B si tagliano (n. 35) secondo un S_5, che incontra la V_9 secondo due S_3, la cui intersezione è una retta. Questi S_3 rappresentano coi loro punti rispettivamente i piani dello spazio congiungente α β e i piani passanti per la retta $\alpha\beta$. Pel punto P del detto S_5 passano infinite rette seganti i due S_3 in due punti distinti. Siano C D i due punti d'incontro di una di queste rette; i piani γ δ che essi rappresentano sono l'uno nello spazio ordinario $\alpha\beta$, l'altro passante per la retta $\alpha\beta$, ma nessuno dei due soddisfa ad entrambe queste condizioni. Per conseguenza γ δ sono incidenti in un sol punto. P essendo sulla retta CD, sta nello S_5 della V_4^2 unica passante per C e D. Da esso si possono tirare, come nel caso precedente, gli ∞^3 S_4 tangenti a quella V_4^2, e si otterranno, come prima, ∞^3 S_9 tangenti della V_9.

La varietà W_{18}^4 degli S_9 tangenti alla V_9.

38. Proseguendo nello studio degli S_9 tangenti alla V_9, osserviamo che la varietà W da essi costituita sarà di dimensione 18, perchè gli S_9 sono ∞^9, come i punti della V_9 (ognuno essendo tangente in un sol punto: n. 35), e un punto *generico* di uno di essi non sta su altri. W è dunque una *forma*, o *ipersuperficie*, di S_{19}.

Il suo ordine si trova subito $= 4$, segandola con una retta particolare, per esempio una retta r giacente nell'S_3 di una cubica generica della V_9 [28]. Sono punti d'incontro di r con W i 4 punti in cui r è incontrata da tangenti della C^3, perchè queste sono in spazi S_9 tangenti della V_9. Nè vi può essere su r un ulteriore punto P d'incontro con altro S_9 tangente della V_9; perchè per P passerebbe una retta appoggiata alla C^3 in due punti distinti M N, e l'ipotesi che per P passi anche un S_9 tangente della V_9 trarrebbe (n. 36) che M N rappresenterebbero piani di S_5 incidenti fra loro: mentre i punti della cubica generica rappresentano piani tutti sghembi tra loro.

39. *Gli S_9 tangenti della V_9 sono spazi totali pel complesso lineare $\mathcal{N}$* (n. 4) [29], *ossia sono autopolari nel sistema nullo $\mathcal{N}$.*

Prendiamo in fatti lo spazio Ω_9 tangente alla V_9 nel punto O imagine del piano fondamentale 1 2 3 di S_5. I suoi punti verificano le equazioni (17). D'altra parte l'equazione del complesso lineare $\mathcal{N}$, ossia la relazione fra due

[28] Si ritroverà quest'ordine, senza far uso della conservazione del numero, al n. 54. Il 1.° membro dell'equazione di W dà quell'invariante di 4.° grado dei complessi lineari di piani, di cui s'è detto al n. 27.

[29] Cioè spazi di cui tutte le rette stanno in quel complesso.

punti p, q di S_{19} congiunti da una retta del complesso, si può scrivere così:

$$p_{123}\,q_{456} - p_{456}\,q_{123} + \Sigma\,(p_{alm}\,q_{bcn} - p_{bcn}\,q_{alm}) = 0,$$

ove, nella somma, abc è una permutazione di 123, lmn una di 456, colla condizione che $almbcn$ sia una permutazione pari di 123456 (onde 18 binomi nella somma). Evidentemente quest'equazione è soddisfatta se tanto il punto p quanto il punto q verificano le (17) citate. Dunque ogni retta di Ω_9 sta in $\mathcal{N}$. Il teorema è dimostrato.

40. Consideriamo cogli ∞^9 punti della V_9 gli ∞^9 iperpiani che ad essi corrispondono rispetto a $\mathcal{N}$. Questo sistema nullo farà corrispondere alle rette tangenti della V_9 gli spazi limiti dell'intersezione di due infinitamente vicini di quegl'iperpiani; e all'S_9 *tangente*, cioè luogo delle tangenti alla V_9 in un punto x, un S_9 *caratteristico* per la ∞^9 d'iperpiani, cioè comune ad un iperpiano fisso ξ e a tutti i suoi infinitamente vicini nella ∞^9. Quindi, pel teorema precedente, questo S_9 caratteristico di ξ coinciderà sempre coll'S_9 tangente in x. La ∞^9 degli S_9 tangenti di V_9 è in pari tempo la ∞^9 degli S_9 caratteristici della ∞^9 d'iperpiani ξ. Ne segue [30] che la W luogo di questi S_9 è toccata da ogni iperpiano ξ lungo il corrispondente S_9. *L'iperpiano tangente a W è lo stesso per tutti i punti di un suo S_9 generatore.*

41. Tutte le tangenti di V_9 stanno in $\mathcal{N}$. Così stanno in $\mathcal{N}$ le tangenti a una V_4^2 di V_9; e siccome esse non possono stare in un complesso lineare di rette dell'S_5 che contiene la V_4^2, tutte le rette di questo spazio saranno rette di $\mathcal{N}$; ossia l'S_5 è *totale* per $\mathcal{N}$.

Consideriamo invece una curva della V_9, per esempio la sezione fatta in questa varietà da un S_{11} generico. Tale curva, avendo per tangenti rette di $\mathcal{N}$, apparterrà al complesso lineare di rette sezione di $\mathcal{N}$ coll'S_{11} della curva considerata. Per ogni punto O di questa, il fascio di rette di centro O giacente nel piano osculatore alla curva si compone, com'è ben noto, di rette di quel complesso lineare. Dunque, poichè queste rette sono anche in $\mathcal{N}$, quel piano osculatore starà nell'iperpiano Π_{18} che corrisponde a O nel sistema nullo $\mathcal{N}$. Così Π, contenendo il piano osculatore in O alla curva, avrà in O incontro tripunto con questa. Applicando ciò ad ogni S_{11} passante per O,

---

[30] V. il n. 16 dei miei *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rendic. Circ. mat. di Palermo, 30, 1910_2, p. 87.

col quale, e con Π, seghiamo la V_9, vediamo che la varietà V_8 traccia di Π su V_9 è segata da ogni S_{11} passante per O in un gruppo di punti, dei quali tre cadono in O. Ossia: *L'iperpiano che nel sistema nullo $\mathfrak{N}$ corrisponde ad un punto della V_9 sega questa secondo una V_8 per la quale quel punto è triplo* ([31]).

Diremo che un tale iperpiano è *osculatore* alla V_9.

Pei complessi lineari di piani, in base al n. 4, la proposizione precedente si traduce così: *In S_5 un complesso lineare di piani nucleato contiene il proprio nucleo come elemento triplo.*

42. *La W_{18}^4 ammette come varietà doppia la V_{14}, considerata alla fine del* n. 18, *luogo degli S_5 contenenti le V_4^2 della V_9*: poichè dal n. 37 risulta che appunto questa V_{14} è costituita da tutti i punti per cui passano due, e quindi infiniti S_9 (tangenti della V_9, cioè) generatori di W ([32]).

Consideriamo, come al numero precedente, un punto O di V_9 e l'iperpiano Π_{18} che gli corrisponde rispetto ad $\mathfrak{N}$; ed anche lo spazio Ω_9 tangente in O a V_9. La V_8 sezione di V_9 con Π, ossia luogo dei punti di V_9 coniugati di O rispetto a $\mathfrak{N}$, si compone delle V_4^2 di V_9 passanti per O: perchè i punti di queste, come i punti di quella V_8, rappresentano tutti i piani di S_5 incidenti al piano ω imagine di O. Le tangenti a quella V_8 nel punto triplo O (n. 41) formano in Ω un cono cubico, che sarà dunque altresì il luogo delle tangenti in O alle V_4^2 di V_9 passanti per O; e, per conseguenza, anche il luogo dei punti di Ω situati sulla V_{14} di cui s'è detto dianzi. Ossia: *Su un S_9 tangente a V_9 in un punto O i punti d'incontro cogli altri S_9 tangenti, cioè i punti d'incontro colla V_{14} doppia di W, formano un cono cubico V_8^3 di vertice O, di dimensione 8, che è anche il cono tangente in O alla intersezione di V_9 coll'iperpiano osculatore in questo punto.*

([31]) È questa un'importante particolarità della V_9. Gli ∞^9 iperpiani passanti per l'S_9 tangente in un punto O della V_9 segano questa in generale secondo V_8 con O doppio. I coni quadrici tangenti a queste V_8 in O stanno nell'S_9 e formano un sistema lineare passante pel cono V_5^6 (n. 33) di rette della V_9 uscente da O. L'esservi, fra gli ∞^9 iperpiani, uno che dà per sezione una V_8 con punto triplo si potrebbe anche derivare da ciò che quel sistema lineare di coni quadrici è solo ∞^8 (come risulta dalla rappresentazione analitica del cono V_5^6 colle formole $z_l u_c$ del n. 33).

([32]) A sua volta *la V_{14} ammette come doppia la varietà V_9*: perchè, mentre per un suo punto generico passa uno solo dei detti S_5 che la generano (n. 18), eccezione a ciò si ha quando il punto è sulla V_9, chè allora ne passano infiniti.

Per O passa anche (n. 33), in Ω, un cono V_5^6 composto di rette di V_9: con esso si definisce semplicemente il nuovo cono V_8^3. Se in fatti per una tangente in O ad una V_4^2 (della V_9) conduciamo un piano che la unisca ad una retta di questa varietà uscente da O, il piano segherà la V_4^2 in un'altra retta passante per O. D'altronde due rette di V_9 passanti per O stanno sempre in una stessa V_4^2 della V_9, come mostra subito la rappresentazione coi piani di S_5; sicchè ogni retta del loro fascio è tangente in O alla V_4^2, e quindi è generatrice di V_8^3. Concludiamo: *il cono cubico* V_8^3, *di cui all'enunciato precedente, è composto dei piani che congiungono a due a due le rette della* V_9 *passanti per* O (costituenti cioè il cono V_5^6).

Segando con un iperpiano e applicando il n. 5 della Nota citata in (8) alla V_4^6, che rappresentavamo al n. 33 colle formole $p_{abl} = z_l u_c$, si trae che: il cono V_8^3 è quello che riesce definito dall'avere come varietà doppia il cono V_5^6, e che si rappresenta nelle notazioni di quel n. 33, entro Ω_9, annullando il determinante delle coordinate di punto p_{abl}.

43. Per un punto P della V_{14}, non situato su V_9, passano ∞^3 S_9 tangenti di questa. L'iperpiano omologo di P in $\mathcal{N}$ conterrà questi S_9 (perchè spazi autopolari), e sarà dunque tangente a V_9 nei punti di contatto di essi. *Esistono* ∞^{14} *iperpiani che toccano* V_9 (in due punti e per conseguenza) *lungo una* V_3^2. *Gli* S_9 *tangenti a* V_9 *nei punti di quella concorrono in un punto.*

Se invece prendiamo un punto O su V_9, per esso passeranno ∞^5 S_9 tangenti, cioè tutti quelli tangenti a V_9 nei punti del cono V_5^6 di rette di V_9 uscente da O; ed essi staranno ancora sull'iperpiano polare di O rispetto ad $\mathcal{N}$, che è ora l'iperpiano osculatore a V_9 in O. Dunque: *L'iperpiano osculatore a* V_9 *in un punto* O *le è tangente in* ∞^5 *punti costituenti il cono* V_5^6 *uscente da* O.

Sui complessi lineari singolari di piani, e su una loro generazione.

44. Un complesso lineare Γ di piani di S_5 ammetta un piano singolare ω. Il complesso sarà rappresentato in S_{19} da un punto P situato sullo spazio Ω_9 tangente a V_9 nel punto O imagine di ω; od anche dall'iperpiano ξ polare di P rispetto ad $\mathcal{N}$, iperpiano che conterrà Ω (autopolare per $\mathcal{N}$). Stanno in Γ i piani che hanno per imagini i punti di V_9 situati su ξ, in

particolare quelli posti su Ω: dunque Γ contiene tutti i piani che segano ω secondo rette [33]. Viceversa, se un complesso lineare di piani Γ è in questa relazione con un piano ω, sarà ω singolare per Γ: giacchè l'ipotesi equivale a dire che l'iperpiano ξ imagine di Γ contiene il cono delle rette di V_9 passanti per O (imagine di ω), e quindi (n. 33) contiene l'S_9 tangente in O alla V_9. *Un piano singolare di un complesso lineare di piani è caratterizzato da ciò che tutti i piani passanti per le sue rette sono piani del complesso* (tutte le sue rette sono *totali*).

45. La generazione dei complessi singolari, di cui ora vogliamo parlare, trae la sua origine dalla seguente osservazione: *se un complesso lineare di piani di S_5 ammette un piano singolare ω, esso contiene i piani di ogni V_3^3 irriducibile congiungente ω ad altri due piani qualunque del complesso.*

In fatti il complesso è rappresentato in S_{19} dalla sezione che un iperpiano ξ tangente alla V_9 in un punto O fa su questa varietà. La V_3^3 poi corrisponde ad una cubica di V_9 passante per O e per altri due punti di ξ. Poichè la curva passa per O, sarà ivi tangente all'S_9 tangente in O alla V_9, e quindi anche a ξ; e siccome essa taglia questo iperpiano in altri due punti, ed è irriducibile, giacerà in ξ.

Da questa proposizione deriva che, se fissiamo, oltre al piano singolare ω, un altro piano qualunque δ di un complesso lineare Γ, questo si potrà riguardare come costituito da ∞^7 V_3^3 passanti per ω e δ. Si tratterà ora di caratterizzare convenientemente queste ∞^7 V_3^3, fra le ∞^8 che passano per ω e δ.

46. Ogni V_3^3 passante per ω e δ è luogo di ∞^2 rette generatrici che segano su quei due piani una ben determinata collineazione. E viceversa da ogni collineazione fra ω e δ è determinata una V_3^3 passante per questi piani.

Così la questione posta dianzi si può trasformare nel seguente modo: di che natura è il sistema delle ∞^7 collineazioni tra ω e δ che provengono dalle ∞^7 V_3^3 passanti per ω e δ e contenute in Γ?

47. Assumiamo i due piani fissi ω e δ, sghembi fra loro, rispettivamente come piani fondamentali 1 2 3 e 4 5 6. Sia π un piano qualunque con-

[33] Ciò risulterebbe anche riguardando ω come limite di due cardini coniugati di Γ, infinitamente vicini.

giungente i tre punti di coordinate q_i, r_i, s_i ($i = 1 \ldots 6$). Detti x e y due punti rispettivamente di ω e δ allineati con uno stesso punto ($\lambda q_i + \mu r_i + \nu s_i$) di π, sarà

$$\left.\begin{array}{l} \rho x_1 = \lambda q_1 + \mu r_1 + \nu s_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \rho x_3 = \lambda q_3 + \mu r_3 + \nu s_3 \end{array}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma y_4 = \lambda q_4 + \mu r_4 + \nu s_4 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma y_6 = \lambda q_6 + \mu r_6 + \nu s_6 . \end{array}\right\} \tag{21}$$

Diciamo $u_1\ u_2\ u_3$ le coordinate, entro al piano ω, di una retta passante per x, sicchè $\sum x_a u_a = 0$ ($a = 1, 2, 3$), ossia, per le (20):

$$\lambda \sum q_a u_a + \mu \sum r_a u_a + \nu \sum s_a u_a = 0. \tag{22}$$

Dalle (21), indicando per un momento con Q_l, R_l, S_l ($l = 4, 5, 6$) i complementi algebrici di q_l, r_l, s_l nel determinante di queste 9 quantità, si trae:

$$\lambda : \mu : \nu = \sum Q_l y_l : \sum R_l y_l : \sum S_l y_l ;$$

e sostituendo in (22):

$$\sum_{a,l} u_a y_l (q_a Q_l + r_a R_l + s_a S_l) = 0. \tag{23}$$

Ora il trinomio fra parentesi, se $l\ m\ n$ indica una permutazione pari di 4 5 6, non è altro che il determinante

$$\begin{vmatrix} q_a & r_a & s_a \\ q_m & r_m & s_m \\ q_n & r_n & s_n \end{vmatrix}$$

ossia la coordinata p_{amn} del piano π. Dunque la relazione (23) si può scrivere così:

$$\sum p_{amn} u_a y_l = 0. \tag{24}$$

Quest'equazione bilineare fra le coordinate $u_1\ u_2\ u_3$ di retta del piano $\omega \equiv 1\,2\,3$ e le coordinate $y_4\ y_5\ y_6$ di punto del piano $\delta \equiv 4\,5\,6$, rappresenta una collineazione, e precisamente quella che è segnata sui due piani dalle rette appoggiate ad essi e al piano π di coordinate p_{123}, ecc. (ossia dalle generatrici della V_8^3 di $\omega\ \delta\ \pi$).

48. Supponiamo ora che π vari in un complesso lineare singolare Γ contenente ω e δ, ed avente ω per piano singolare. L'equazione di Γ dovendo essere soddisfatta dalle (17) del n. 33 [perchè l'iperpiano di S_{19} corrispondente a Γ deve contenere l'S_9 tangente in O a V_9, che è appunto rappresentato dalle (17)], non conterrà termini in p_{123} nè nelle p_{abl} ([34]). Nè vi sarà il termine in p_{456}, in causa dell'ipotesi che Γ passi per δ. Quell'equazione si riduce dunque ad un'equazione lineare nelle sole 9 coordinate p_{amn}: ossia appunto in quelle 9 che compajono come coefficienti nell'equazione bilineare (24) della collineazione.

In conseguenza il dire che π descrive Γ equivale a dire che quella collineazione varia in un *sistema lineare* ∞^7.

Un complesso lineare di piani con un piano singolare ω si può generare così. Si fissi un altro suo piano δ sghembo con ω. Da un piano qualunque π, projettando l'uno sull'altro quei due piani fissi, nasce fra essi una collineazione. Il complesso lineare si compone di quei piani π, pei quali le collineazioni così definite costituiscono un sistema lineare ∞^7.

Si avverta però subito che la locuzione « *sistema lineare ∞^7 di collineazioni fra ω e δ* » ha due distinti significati, a seconda che una collineazione si considera come connesso di rette di ω e punti di δ, e quindi si pone un'equazione lineare tra i coefficienti di quel connesso: oppure invece si considera come connesso di punti di ω e rette di δ. Risulta che è nel primo significato che va presa quella locuzione, nel teorema enunciato.

49. Le collineazioni tra ω e δ di un sistema lineare ∞^7 sono quelle *armoniche* od *apolari* ad una collineazione fissa, riguardata (a differenza di quelle) come connesso di punti di ω e rette di δ ([35]). Se l'equazione di Γ è (n. 48):

$$\sum c_{amn}\, p_{amn} = 0, \tag{25}$$

essa esprime appunto che la collineazione (24), prodotta dal piano variabile π di Γ fra ω e δ, è apolare alla collineazione fissa C:

$$\sum c_{amn}\, x_a\, v_l = 0 \tag{26}$$

(sempre designando $l\ m\ n$ una permutazione pari di 4 5 6).

([34]) È sempre inteso (dal n. 33) che $a\ b\ c$ prendono solo i valori 1 2 3, e $l\ m\ n$ i valori 4 5 6.

([35]) V. ad esempio Sturm cit. in ([7]), Bd. II, p. 290 e segg.

Quale significato avrà questa collineazione C pel complesso di piani Γ? Un punto x di ω e una retta v di δ sono coniugati in essa (cioè v passa pel punto omologo di x), quando fra le ∞^7 collineazioni ve n'è una che, come connesso, si spezza nel fascio di rette di centro x e nella retta punteggiata v: ossia una che ha per punti singolari x e tutti i punti di v. Questa collineazione degenere è segnata su ω e δ dalle rette incidenti a questi ed al piano congiungente x con v: perciò questo piano sta in Γ. Lo stesso fatto risulta notando che le coordinate p_{amn} del piano di x e v valgono precisamente $x_a v_l$, e rendono quindi equivalenti le (25) e (26). Ne deriva che la retta r congiungente due punti x e y, di ω e δ, omologhi in C, sta in un fascio di piani di Γ, giacente nell'S_3 che unisce x a δ. D'altronde r sta pure in un altro fascio di piani di Γ: quello che giace nell'S_3 congiungente y a ω: giacchè questi piani, incontrando ω secondo rette, stanno appunto (n. 44) in Γ. I due fasci di piani non sono in un S_4; e quindi i piani di Γ passanti per r non possono avere come luogo un S_4. *Tutti* i piani per r staranno in Γ: ossia r è retta totale per Γ.

D'altra parte anche ogni retta di ω è una retta totale per Γ. Una retta qualunque g passante per x e giacente nell'S_3 che unisce y a ω sta in un fascio colla retta $r \equiv xy$ e con una determinata retta s di ω. Un piano qualunque tirato per g si potrà in infiniti modi riguardare come appartenente ad un fascio con due piani passanti rispettivamente per r ed s, ossia con due piani di Γ: sarà dunque esso stesso in Γ. Ossia g è retta totale per Γ. Tutte le rette totali si otterranno in questo modo, perchè (n. 26) per un punto generico ne passa una sola.

Le rette totali di un complesso lineare di piani Γ avente un piano singolare ω si ottengono così. Esiste una determinata collineazione fra il piano ω punteggiato e la rete degli spazi ordinari passanti per ω. Sono rette totali di Γ quelle che passando per un punto di ω giacciono nell'S_3 corrispondente [86].

Segando la rete di spazi con un altro piano δ di Γ, nasce fra ω e δ una collineazione, che è quella armonica a tutte le ∞^7 collineazioni fra ω e δ determinate dagli ∞^8 piani del complesso, ossia dalle ∞^7 V_3^3 contenute in Γ e passanti per ω e δ.

---

(86) Se Γ si considera come limite di un complesso generale, i cui due cardini α β s'avvicinano indefinitamente, il sistema che sopra s'è ottenuto delle rette totali di Γ è il limite dell'insieme delle rette incidenti ad α β. È questo l'analogo del fatto che si ha in S_3, quando l'insieme delle rette appoggiate a due rette sghembe infinitamente vicine conduce ad una projettività fra la serie dei punti e quella dei piani di una stessa retta.

50. La considerazione dell'omografia C ci permette di semplificare ulteriormente l'equazione (25) del complesso Γ. Avevamo assunto ω e δ risp. come piani fondamentali delle coordinate 1 2 3, 4 5 6. Ma prendiamo precisamente le coppie di punti fondamentali 1 4, 2 5, 3 6 in coppie di punti omologhi di C. Allora l'equazione (26) di C dovrà ridursi alla forma

$$\alpha x_1 v_4 + \beta x_2 v_5 + \gamma x_3 v_6 = 0,$$

e quindi la (25) diverrà:

$$\alpha p_{156} + \beta p_{264} + \gamma p_{345} = 0.$$

Così dunque si può rappresentare un complesso lineare singolare. È la forma d'equazione già trovata al n. 24.

Per ottenere un complesso doppiamente singolare, basterà assumere la collineazione C degenere, per esempio $\alpha = 0$. C si riduce allora ad una projettività tra il fascio di rette di centro 1 nel piano ω e la punteggiata 56 nel piano δ. Le ∞^7 collineazioni sono quelle, per le quali le rette e punti coniugati, appartenenti rispettivamente a quel fascio e a quella punteggiata, si corrispondono in projettività armoniche a quella projettività fissa. Si ritrovano facilmente le proprietà del complesso doppiamente singolare. Suo punto totale (n. 25) sarà il punto fondamentale 1, suo S_4 totale quello fondamentale opposto al punto fondamentale 4.

Fasci di complessi lineari di piani.

51. Combinando linearmente le equazioni di due complessi lineari di piani in S_5, si ottiene l'equazione di un *fascio* di tali complessi. I piani comuni a due complessi del fascio sono comuni a tutti; ecc. Prendendo come imagini dei complessi i punti di S_{19}, oppure gl'iperpiani, l'imagine del fascio sarà una retta (punteggiata), oppure un fascio d'iperpiani.

Siano α β i cardini di un complesso Γ del fascio, α_1 β_1 quelli di un altro Γ_1. Le rette incidenti a questi 4 piani saranno totali per quei due complessi, e quindi anche per tutti i complessi del fascio. Se Γ e Γ_1 sono in posizione generica, quelle rette saranno *tre*, m n p; e ad esse si appoggeranno dunque le coppie di cardini di tutti i complessi del fascio ([37]). Ma se, ad esempio, $\alpha\ \beta\ \alpha_1\ \beta_1$ sono quattro piani generatori di una stessa V_3^3, le ∞^2 rette generatrici di questa saranno rette totali per tutto il fascio, e quindi i cardini di tutti i complessi di questo saranno piani generatori di quella V_3^3.

Se il fascio è generale, conterrà 4 complessi semplicemente singolari: perchè la sua retta imagine in S_{19} incontra in 4 punti la varietà W. Non conterrà invece alcun complesso conico.

52. Vogliamo ricercare i caratteri della varietà costituita, nel caso generale, dai cardini dei complessi del fascio.

Entro questa varietà la corrispondenza fra le coppie di piani, che sono cardini di uno stessó complesso del fascio, è involutoria e biunivoca: in fatti se un piano fosse cardine per due complessi, esisterebbero infinite rette incidenti alle due coppie di cardini di questi complessi, ossia infinite rette totali comuni a tutto il fascio, contro l'ipotesi che siamo nel caso generale. Le coppie di cardini sono in corrispondenza biunivoca coi complessi del fascio. Dunque formano, nella varietà di piani considerata, una serie lineare g_2^1; e questa ha 4 elementi doppi, perchè nel fascio stanno 4 complessi a cardini coincidenti (fine del numero precedente). Ne segue che la varietà degli ∞^1 piani cardini dei complessi di un fascio è ellittica.

Sia g la retta che nell'S_{19} rappresenta coi suoi punti i complessi del fascio. Da ogni suo punto si tiri la corda di V_9: queste corde formeranno una rigata razionale, e i loro punti d'appoggio costituiranno la curva D imagine della nostra varietà dei piani cardini. L'ordine di quella rigata risulta subito $=4$. Per vederlo basta assumere g nell'S_3 di una cubica di V_9, sicchè si tratterà allora delle corde di questa C^3 incidenti a g (poichè per un punto di g, — punto generico di S_{19} — non passa altra corda di V_9 che la corda della C^3: n. 18): nè questa assunzione particolare può produrre una modificazione nell'ordine che la rigata avrebbe nel caso generale. Invece viene modificato l'ordine della curva D, la quale in questa ipotesi speciale si riduce alla C^3: poichè ogni punto di questa va contato due volte come punto di D, essendo esso su due corde incidenti a g ([38]).

([37]) Dualmente, i complessi del fascio han comuni tre S_3 totali: che sono precisamente gli S_3 che congiungono a due a due $m\ n\ p$.

([38]) Ciò corrisponde al fatto che, nel caso speciale di fascio, accennato verso la fine del n. 51, in cui si presentava una V_3^3 come luogo dei cardini, ogni piano di questa è cardine per *due* complessi del fascio; sicchè la V_3^3 va contata 2 volte per dare la varietà degli ∞^1 cardini.

Dal fatto che la rigata è del 4.° ordine segue che D è in generale del 6.° ordine: perchè un iperpiano per g conterrà 3 generatrici della rigata e su esse 6 punti di D; oppure anche per una nota formola sulle curve di una rigata.

L'ordine di D, determinato segandola con un iperpiano osculatore a V_9, risulta essere il numero dei piani della nostra ∞^1 incidenti ad un piano dato. Concludiamo dunque: *In un fascio generale di complessi lineari di piani dell'S_5 le coppie di cardini sono i piani di una semplice infinità ellittica del 6.° ordine, V_3^6.*

D, come curva d'ordine 6 e genere 1, starà (insieme colla retta g) in un S_5, ossia in ogni iperpiano che ne contenga 6 punti generici. Ne segue che: quella V_3^6 di S_5 è tale che ogni complesso lineare di piani contenente 6 generici fra i suoi piani, li contiene tutti.

53. Preso un punto generico sulla curva D, l'iperpiano osculatore in esso a V_9 andrà ad incontrare ulteriormente la curva in altri 3 punti. Ossia, in S_5, un piano della ∞^1 considerata ne incontra in generale altri 3. È facile vedere che tali punti d'incontro di due piani della ∞^1, ossia punti doppi della V_3^6, costituiscono le tre rette totali m n p (n. 51) del fascio di complessi.

Invero un punto siffatto non può stare sui due cardini di uno stesso complesso del fascio (v. fine del n. 51). Sarà su un cardine di un complesso e su un cardine di un altro. Per conseguenza, se da esso si tira la retta che va ad incontrare i due ulteriori cardini risp. di quei due complessi, si otterrà una retta totale comune a questi, ossia appunto una delle m n p.

Viceversa ogni punto M di una, m, di queste rette sta su cardini di due complessi del fascio. Per veder ciò direttamente, si considerino, per ciascun complesso del fascio, i piani passanti per M. Le rette di questi piani formeranno i complessi lineari di rette di un fascio: complessi di rette pei quali (n. 26) m è retta singolare, e che quindi si possono ottenere projettando da m un fascio di ordinari complessi lineari di rette di un S_3 sghembo con m. Dall'esistenza, in quest'ultimo fascio, di due complessi speciali, segue l'esistenza nel fascio di complessi di rette di S_5 di due complessi composti rispettivamente delle rette incidenti a due S_3 passanti per m. Ognuno di essi proverrà da un complesso di piani del primitivo fascio, contenente ogni piano che passa per M e che incontra secondo una retta un S_3 fisso passante per m; il complesso di piani avrà cioè come rette totali la stella di rette di centro M giacente in quell'S_3: sicchè M sarà su un cardine del complesso (e l'S_3 passerà per l'altro cardine).

La V_3^6, luogo degl'infiniti cardini dei complessi lineari di piani di un fascio, ammette in generale 3 rette direttrici doppie, che sono le 3 rette totali comuni ai complessi del fascio.

54. Da quest'ultimo risultato si può trarre, con un nuovo procedimento, l'esistenza, nel fascio di complessi di piani, di 4 complessi singolari (ossia l'ordine 4 di W ottenuto al n. 38). Basta considerare, ad esempio, su m la corrispondenza fra i punti che sono tracce dei due cardini di uno stesso complesso del fascio. La corrispondenza sarà $(2, 2)$; e i 4 punti uniti non potranno provenire che dalla coincidenza dei cardini di uno stesso complesso.

Anche l'ordine 6 della varietà dei piani cardini si ritrova, considerando i piani stessi come congiungenti di terne di punti omologhi delle tre rette $m\ n\ p$, così riferite tra loro che ad ogni punto, per esempio M dell'una m, corrispondono sulle altre $n\ p$ due coppie di punti NP, $N_1 P_1$; ecc. (Si comportano cioè $m\ n\ p$ come tre linee di 2.° ordine in corrispondenza univoca fra loro). Il principio di corrispondenza prova, in modo noto, che la varietà dei piani congiungenti le terne di punti omologhi è del 6.° ordine.

55. Secondo il n. 5, per ciascun complesso del fascio, i piani suoi appoggiati ad $m\ n\ p$ stabiliscono fra i punti di queste rette una trilinearità. E l'equazione (6) di questa mostra che dal fascio di complessi nasce così un *fascio di trilinearità*. Dal n. 21 poi risulta che le ∞^1 coppie di cardini dei complessi segnano su $m\ n\ p$ le ∞^1 coppie di terne singolari per le trilinearità del fascio. Così i 4 complessi singolari (ossia a cardini coincidenti) rispondono alle 4 trilinearità *singolari* (ossia a terne singolari coincidenti) del fascio di trilinearità ([39]).

Il fatto rilevato alla fine del n. 52 si può ora enunciare così: *Dato un fascio di trilinearità fra tre rette, l'insieme delle terne di elementi singolari delle varie trilinearità è una ∞^1 ellittica, costituita dalle terne comuni ad altre due trilinearità; e quindi a tutte le trilinearità di un altro fascio.*

Anzi, *si può sempre riguardare la ∞^1 delle terne comuni a due trilinea-*

([39]) Sono appunto 4 queste trilinearità, perchè è di 4.° grado l'invariante di una trilinearità; il cui annullarsi esprime che essa è singolare (STURM, cit. in (7), fine della p. 322).

rità, e quindi ad un fascio, come composta delle terne di elementi singolari delle trilinearità di un altro fascio; e ciò in 9 modi diversi, ossia con 9 accoppiamenti involutori delle ∞^1 terne. In fatti la data ∞^1 di terne è rappresentata nell'S_7 del n. 6 dalla sezione della V_3^6 con due iperpiani, cioè con un S_5: dunque da una curva del 6.° ordine C^6, che si riconosce subito essere ellittica. Ora si sa ([40]) che su una tale C^6 esistono 9 serie lineari g_2^1, tali che per ognuna la rigata delle congiungenti le coppie di punti ha una retta direttrice. I punti di questa retta rappresentano le trilinearità di un fascio, le cui coppie di terne singolari saranno rappresentate dalle coppie della g_2^1 (come le coppie di cardini dei complessi di un fascio provenivano dai punti d'appoggio delle corde della C^6 uscenti dai punti della retta g imagine del fascio: n. 52).

Complessi lineari armonici od apolari.

56. Diciamo *armonici* od *apolari* due complessi lineari di piani di S_5

$$\sum c_{hkl}\, p_{hkl} = 0, \qquad \sum c'_{hkl}\, p_{hkl} = 0, \tag{27}$$

quando s'annulla il loro invariante bilineare $c_{123}\, c'_{456} + \cdots$ (a 20 termini, composti com'è detto al n. 1, sicchè risulta una forma bilineare alternata).

In particolare un complesso qualunque ed uno nucleato sono armonici se il 1.° contiene il nucleo del 2.°

Se un dato complesso è combinazione lineare di k complessi nucleati, un complesso lineare ad esso armonico, il quale contenga i nuclei di $k-1$ fra quelli, conterrà pure il nucleo del rimanente: e viceversa un complesso passante pei k nuclei sarà armonico al complesso dato.

Così: *Se due complessi lineari di piani di S_5 sono tali che l'uno contiene una terna di piani coniugati dell'altro (n. 28), oppure i cardini di questo, i due complessi sono armonici. — Se due complessi sono armonici, ciascuno di essi segherà ogni V_3^3 (luogo di terne di piani coniugati dell'altro, ossia) passante pei due cardini dell'altro secondo una terna di piani coniugati di questo.*

([40]) C. Segre, *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes.* Math. Annalen, 27 (1886), p. 296: v. il teorema alla p. 302.

— *Se un complesso armonico ad un altro passa per un cardine di questo, ne conterrà pure il secondo cardine.*

Due complessi lineari armonici sono rappresentati in S_{19} da due punti, o da due iperpiani, coniugati rispetto al sistema nullo $\mathcal{N}$: vale a dire da due punti situati su una retta del complesso $\mathcal{N}$.

57. Se due complessi lineari sono armonici, saranno armonici fra loro due complessi qualunque del loro fascio. Ciò è evidente dalla definizione analitica, tenuto conto che sempre $c_{123}\,c_{456} + \cdots = 0$; come anche dalla rappresentazione in S_{19}, ove il fascio risulta avere per imagine una retta di $\mathcal{N}$.

Di qui e dal numero precedente segue che condizione necessaria e sufficiente perchè due complessi lineari di piani Γ, Γ' siano armonici è che nel loro fascio stia un complesso contenente ambo i cardini di uno di essi.

Accadrà allora che ogni complesso del fascio di Γ, Γ' sega la V_3^6 luogo dei cardini di tutti i complessi del fascio secondo 6 piani, che si distribuiscono nelle 3 coppie di cardini di 3 complessi del fascio.

58. Anche l'armonia od apolarità fra complessi lineari di piani di S_5 si può collegare ad una corrispondente relazione fra due trilinearità.

Dicesi che due trilinearità fra tre punteggiate, rappresentate da

$$a_x\, b_y\, c_z \equiv \sum a_{rst}\, x_r\, y_s\, z_t = 0$$

$$a'_x\, b'_y\, c'_z \equiv \sum a'_{rst}\, x_r\, y_s\, z_t = 0,$$

(ove gl'indici $r\ s\ t$ prendono i valori 1 e 2) sono *armoniche* od *apolari*, quando è nullo il loro invariante bilineare (alternato) $(a\,a')\,(b\,b')\,(c\,c')$, ossia quando:

$$a_{111}\,a'_{222} - a_{222}\,a'_{111} + a_{122}\,a'_{211} - a_{211}\,a'_{122} + \cdots = 0; \tag{28}$$

od anche, geometricamente, quando si presenta il seguente fatto. Si chiamino omologhi due punti della 1.ª punteggiata quando le due projettività, che essi, mediante le due trilinearità, rispettivamente, subordinano fra le altre due punteggiate, sono armoniche. Si ha così, entro la 1.ª punteggiata, una projettività: la quale è un'involuzione appunto quando le due trilinearità sono armoniche ([41]).

([41]) R. De Paolis, *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1.ª specie.* Mem. Accad. Torino (2), 42, 1892, p. 495: v. ivi n. 84 e segg. — Cfr. anche p. 304

Ciò premesso, fissiamo tre rette $m\ n\ p$, su cui assumeremo rispettivamente le coppie di punti fondamentali 1 4, 2 5, 3 6, come al n. 5; e consideriamo le trilinearità che su esse sono segnate dai piani incidenti ad esse di due complessi lineari Γ, Γ', aventi per equazioni le (27) del n. 56. Le equazioni di queste trilinearità saranno la (6) del n. 5 e l'analoga colle c' in luogo delle c. La condizione (28) di armonia di queste trilinearità diventa quindi precisamente la (7) del n. 6. Essa coincide colla condizione (n. 56) di armonia dei complessi Γ, Γ', se uno di questi, per esempio Γ, ha nulli tutti i coefficienti che non compaiono in quell'equazione (7), ossia (n. 21) se il complesso Γ ha $m\ n\ p$ come rette totali. Dunque: *L'essere due complessi lineari di piani di S_5 armonici equivale a questo fatto: su tre rette qualunque linearmente indipendenti, totali per un complesso o per entrambi, i piani dei due complessi che si appoggiano ad esse segnano due trilinearità mutuamente armoniche.*

I FASCI DI COMPLESSI CON DATA QUATERNA DI PIANI SINGOLARI.

59. Dovendo considerare i complessi lineari che hanno come rette totali le tre rette $m\ n\ p$ linearmente indipendenti, ricordiamo di nuovo che (n. 21) quei complessi sono gli ∞^7 i cui coefficienti non necessariamente nulli sono gli 8 che compaiono, ad esempio, nelle equazioni (6), (7). I punti che ne sono imagini in S_{19} formano un S_7, di cui già s'è parlato al n. 6. Ivi si è pur considerata la V_3^6, che nell'S_7 è traccia della V_9 di S_{19}; come anche il sistema nullo, o complesso lineare di rette, $\mathcal{N}_1$, sezione di $\mathcal{N}$ coll'S_7. Conviene aggiungere che gli S_3 tangenti di V_3^6 saranno totali per $\mathcal{N}_1$, perchè giacciono in spazi S_9 tangenti di V_9, i quali sono totali per $\mathcal{N}$.

60. Siano dati, in S_5, 4 piani $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ in posizione generica. Domandiamo i fasci di complessi *non singolari* (ossia fasci nei quali un complesso *generico* non è singolare) per cui quei piani sono i 4 piani singolari (n. 51).

---

e segg. di H. Wiener, *Geometrische Invariantentheorie der binären Formen*, Jahresb. Deutsch. Math. Ver., 17, 1908, p. 291.

Valgono per le trilinearità armoniche proposizioni analoghe ad alcune dei n.i 56, 57 relative a complessi armonici. Così, da una di esse risulta subito che due fasci di trilinearità, legati com'è detto negli enunciati corsivi del n. 55, si compongono di trilinearità mutuamente armoniche.

Pensiamo le tre rette $m\ n\ p$ che incontrano $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Saranno (n. 51) le re rette totali comuni a tutti i complessi del fascio cercato. Questi complessi saranno dunque rappresentati da punti dell'S_7 ricordato al numero precedente. In particolare i 4 complessi singolari del fascio saranno rappresentati da punti comuni ad S_7 e agli S_9 tangenti a V_9 nei punti $A\ B\ C\ D$ imagini di $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Questi $A\ B\ C\ D$ stanno sulla V_3^6 di S_7 (perchè $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ sono incidenti ad $m\ n\ p$); sicchè quei primi punti staranno sugli S_3 tangenti a V_3^6 in $A\ B\ C\ D$.

Così il problema dato diventa questo: entro S_7 trovare una retta incidente agli S_3 che toccano V_3^6 in $A\ B\ C\ D$.

In generale, se in S_{2q+1} sono dati 4 S_q, le rette incidenti a questi sono, com'è noto, $q+1$: i loro punti d'incontro con uno di quegli S_q si determinano, ad esempio, come i $q+1$ punti uniti della collineazione che su questo S_q nasce projettando su esso un altro S_q dai due rimanenti.

Sono dunque 4 in generale le rette di S_7 incidenti ai quattro S_3. Ma, poichè questi sono autopolari rispetto al sistema nullo $\mathcal{N}_1$, possiamo aggiungere che quelle 4 rette $e\ f\ g\ h$ formeranno in generale, cioè se sono ben determinate e distinte, una *quaterna coniugata* rispetto a $\mathcal{N}_1$; ossia che due punti qualunque risp. di due di quelle rette sono sempre coniugati rispetto a $\mathcal{N}_1$, vale a dire che ognuna delle 4 rette ha per S_5 polare rispetto a $\mathcal{N}_1$ lo S_5 delle tre rette rimanenti. In fatti, se così non fosse, due di quelle rette, per es. $e\ f$, risulterebbero riferite projettivamente, chiamando omologhi su esse due punti coniugati rispetto a $\mathcal{N}_1$; e in questa projettività si corrisponderebbero le tracce su $e\ f$ di ognuno dei 4 S_3 dati (autopolari rispetto a $\mathcal{N}_1$). Le rette congiungenti i punti omologhi di $e\ f$ formerebbero un *regolo* a cui apparterrebbero 4 rette di quei 4 S_3; onde il regolo incidente a quello si comporrebbe di infinite rette incidenti ai 4 S_3 dati. Se dunque siamo nel caso generale, che le rette incidenti a questi spazi sono solo 4, la proposizione è vera.

61. Ora, tenuto conto che l'essere due punti coniugati rispetto ad $\mathcal{N}_1$, e quindi ad $\mathcal{N}$, significa (fine del n. 56) che i corrispondenti complessi lineari di piani sono armonici, possiamo rispondere nel modo seguente al quesito posto a principio del n. 60:

Dati in S_5 quattro piani in posizione generica, sono quattro quei fasci di complessi lineari di piani (i cui complessi generici non sono singolari), per ognuno dei quali i 4 complessi singolari in esso contenuti hanno per piani *singolari appunto i 4 piani dati. Questi quattro fasci di complessi sono così legati fra loro, che due complessi di fasci diversi son sempre armonici.*

Merita forse di essere rilevata anche la proposizione corrispondente per trilinearità binarie. Essa segue, senz'altro, o dalla corrispondenza del n. 5 fra complessi di piani e trilinearità, o dal ragionamento diretto che abbiamo fatto nello S_7 (senza più pensare a S_{19}), considerando S_7 come rappresentativo delle trilinearità tra forme di 1.ª specie.

Date in tre forme fondamentali semplici quattro terne di elementi generiche, esistono quattro fasci di trilinearità fra quelle forme, ognun dei quali contiene 4 trilinearità singolari aventi rispettivamente quelle 4 terne come terne singolari. I 4 fasci godono della proprietà che due trilinearità di fasci diversi sono sempre armoniche (42).

62. Può sorgere un dubbio riguardo al procedimento seguíto al n. 60 per giungere alla 1.ª proposizione del n. 61. Se, invece di operare in S_7, avessimo ragionato in modo analogo in S_{19}, cercando *qui* le rette imagini dei fasci di complessi lineari dell'S_5 che risolvono il dato problema, si sarebbe trattato di trovare in S_{19} le rette che incontrano 4 dati S_9, tangenti della V_9 (anzi che 4 dati S_3 di S_7). Il numero di tali rette è in generale 10 (n. 60, per $q=9$): si sarebbero dunque trovati 10 fasci, non solo 4.

La contraddizione scompare se si bada che noi, espressamente, avevamo chiesto quei fasci, soddisfacenti alle condizioni imposte relative ad $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, nei quali un complesso generico non è singolare. Tali fasci sono veramente 4. Gli altri, che risulterebbero dall'ultima considerazione (e che non avranno più $m\ n\ p$ come rette totali comuni), saranno composti di complessi singolari. D'altronde essi non saranno nel numero di 6, che, colle 4 soluzioni di prima, darebbe il n. 10; bensì saranno infiniti. Così, si fissi nello S_3 di $n\ p$ un ordinario complesso lineare L di rette passante per la congruenza lineare di cui $n\ p$ sono direttrici. I complessi lineari di piani, conici, col punto totale variabile su m, e aventi le rette di L come rette totali (deducibili quindi da L com'è detto al n. 25), formeranno un fascio, che conterrà 4 complessi aventi come piani singolari rispettivamente $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ (i 4 complessi che hanno

(42) Quest'ultimo teorema ricorda una nota proprietà dei 2 fasci di forme binarie cubiche che hanno una stessa forma biquadratica come Jacobiana. V. anche la citazione (44).

per punti totali risp. le tracce di quei 4 piani su m). Di tali fasci, mutando L, se ne avranno appunto infiniti ([43]).

63. Se un fascio di complessi di piani di S_5 si compone di complessi mutuamente armonici (n. 57), i 4 piani singolari per complessi del fascio presenteranno in generale questa particolarità: che, dei 4 fasci di complessi che li hanno per piani singolari (n. 61), due coincidono nel fascio dato.

Di fatti in tal caso la retta g di S_7, imagine del dato fascio di complessi, sta in $\mathcal{N}_1$, ossia nel proprio S_5 polare rispetto a $\mathcal{N}_1$; e quindi la quaterna $e\ f\ g\ h$ di rette coniugate rispetto a $\mathcal{N}_1$, che, secondo il n. 60, rappresentano i 4 fasci di complessi or ora nominati, sarà tale che 2 rette di essa coincidono in g. Ciò appare anche così. Nelle ipotesi attuali, l'S_5 polare di g segherà i 4 S_3 tangenti di V_3^6 secondo 4 piani: e questi sono incidenti a sole *tre* rette (inclusa g), non a 4. Gli è che, appunto, delle 4 rette incidenti ai 4 S_3 due coincidono in g.

Una proposizione corrispondente si avrà, in relazione colla fine del n. 61, pei fasci di trilinearità apolari; ossia: un tal fascio conta due volte tra i quattro fasci che hanno le stesse 4 terne singolari ([44]).

([43]) Colle solite notazioni, l'equazione

$$p_{125} + \lambda p_{136} + \mu p_{425} + \lambda \mu p_{436} = 0$$

rappresenta un complesso lineare di piani, che ha per iperpiano totale $x_1 + \mu x_4 = 0$, e per punto totale la traccia di questo sulla retta fondamentale 14 (ossia m). Fissando λ, e lasciando variare μ, il complesso descrive un fascio, di quelli indicati nel testo. —

Aggiungiamo qui, facendo una breve digressione, che anche due complessi lineari di piani aventi uno stesso punto totale, o uno stesso iperpiano totale, determinano evidentemente un fascio di complessi dotati dello stesso elemento totale. Ne deriva che gli ∞^9 complessi con un dato punto, o iperpiano, totale hanno per imagini in S_{19} i punti di uno spazio S_9 della V_{14}. Nascono così sulla V_{14} due distinti sistemi ∞^5 di spazi S_9, corrispondenti in certo senso, rispettivamente, agli ∞^5 punti e agli ∞^5 iperpiani di S_5. Ognuno degli $\infty^9\ S_5$ con cui da prima (fine del n. 18) eravamo giunti alla V_{14} sta in *un* S_9 di ciascuno dei due sistemi. Ecc., ecc.

([44]) C. Stéphanos, *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne*. Mém. prés. p. divers savants à l'Acad. des sciences (2), 27, 1883 (v. i n.[i] 26 e 27 a pagg. 50 e 51), ha, per forme binarie d'ordine n, questa proposizione analoga alla precedente. Se due tali forme appartengono rispettivamente a due fasci aventi la stessa Jacobiana (pel che basta che s'annulli un loro invariante simultaneo, di grado $n-2$ nei coefficienti di ciascuna, l'analogo del nostro invariante bilineare di due trilinearità), il fascio che congiunge le due forme conta 2 volte tra i fasci di forme d'ordine n aventi la stessa Jacobiana.

INDICE

Nuovi studî sulle superficie rigate.

(*Di* PIETRO TORTORICI, *Zona di guerra.*)

PREFAZIONE.

Altra volta ([1]) mi sono occupato di quelle superficie rigate (rigate Γ) con due asintotiche curvilinee a torsione costante ed eguale e fin da allora ho annunziato che, con altro metodo, avrei determinato ancora la classe completa di queste superficie. Riprendo qui adunque taluni studî sulle superficie rigate e, mettendomi da un punto di vista alquanto generale, mi propongo di studiare le rigate gobbe con due asintotiche curvilinee a torsione costante (uguale o no): tralascio lo studio delle rigate con una sola asintotica a torsione costante perchè, come ho già osservato, qualunque superficie rigata può flettersi in guisa da renderla tale.

Il lettore vedrà che, col nuovo metodo qui adoperato, in modo assai rapido, si riesce a classificare completamente le nostre superficie le quali, come risulterà nel corso della Memoria, possono essere di due soli tipi:

a) superficie rigate di cui tutte le asintotiche curvilinee sono a torsione costante (elicoidi rigate d'area minima),

b) superficie rigate con due sole asintotiche a torsione costante;

altri casi non sono possibili.

Tutte le superficie del tipo *b*) si suddividono poi in due classi a seconda che le due asintotiche a torsione costante abbiano o no la medesima torsione; io studio nell'ultima parte della Memoria le rigate Γ e stabilisco talune nuove loro proprietà.

Altrove forse studierò la classe delle superficie con due asintotiche a torsione costante e diversa.

§ 1.

Le formule di Lelieuvre e le formule di Goursat.

1. Per intraprendere il nostro studio conviene richiamare i seguenti teoremi dovuti a Lelieuvre [2]:

Se si considera una superficie a curvatura totale negativa, e a sistema coordinato u, v su essa assumesi quello delle asintotiche, se per la curvatura totale K ponesi:

$$K = -\frac{1}{\rho^2}$$

e se, essendo X, Y, Z i coseni direttori della normale alle superficie nel suo punto generico $P \equiv (x, y, z)$ ponesi ancora:

$$\sqrt{\rho}\, X = \xi, \qquad \sqrt{\rho}\, Y = \eta, \qquad \sqrt{\rho}\, Z = \zeta$$

si hanno le formule:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = +\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

e le analoghe circolando per y, z; e ξ, η, ζ sono tre soluzioni particolari della equazione:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M \vartheta, \qquad M = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \sqrt{\rho} - f.$$

2. Ciò premesso occorre ricordare talune formole di Goursat relative alle superficie rigate.

Per ritrovare tale formula seguiamo il procedimento adoperato dal signor Tzitzeica nella Memoria che citiamo [3], perchè vogliamo considerare esplicitamente un caso ($M = 0$), il quale, benchè sia semplicissimo, ha pel nostro studio una certa importanza.

Supponiamo adunque che la superficie che si considera sia rigata e sia riferita alle sue asintotiche u, v; inoltre le generatrici rettilinee siano le linee:

$$u = \text{costante}.$$

Ciò porta che debba essere:

$$\frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} : \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} : \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} : \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} .$$

Ora evidentemente può porsi:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = A \frac{\partial \xi}{\partial u} + B \frac{\partial \xi}{\partial v} + C \xi$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = A \frac{\partial \eta}{\partial u} + B \frac{\partial \eta}{\partial v} + C \eta$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = A \frac{\partial \zeta}{\partial u} + B \frac{\partial \zeta}{\partial v} + C \zeta,$$

ove A, B, C sono opportune funzioni di u, v e ciò perchè si ha sempre

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} & \xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \eta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \zeta \end{vmatrix} = 0;$$

inoltre, poichè dalle formule di LELIEUVRE [1] deducesi p. es.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \eta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} - \zeta \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2},$$

sostituendo ottiensi:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = A \left(\eta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) + B \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v} \right)$$

ovvero:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v}$$

con le analoghe per y e z.

Queste ultime formule confrontate con le proporzioni avanti scritte dànno

$$A = 0$$

e perciò concludesi che le funzioni ξ, η, ζ devono essere integrali comuni alle due equazioni:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} = M \vartheta \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = B \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + C \vartheta.$$

3. Scriviamo le condizioni di integrabilità del sistema costituito dalle due precedenti equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2}\right);$$

cioè sviluppando e tenendo presenti le equazioni medesime:

$$M \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v} \vartheta = B M \vartheta + \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial u} \vartheta + C \frac{\partial \vartheta}{\partial u}.$$

A tale relazione necessariamente soddisfano ξ, η, ζ e non potendo essere, come si è osservato,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} & \xi \\[2ex] \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} & \eta \\[2ex] \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} & \zeta \end{vmatrix} = 0$$

deducesi subito:

$$C = 0$$

e quindi se $M \neq 0$ successivamente

$$\frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial v} = B, \qquad M = \frac{\partial B}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 \log M}{\partial u \, \partial v} = M$$

mentre che se $M = 0$ ottiensi soltanto:

$$\frac{\partial B}{\partial u} = 0.$$

4. Il caso $M=0$ si tratta facilmente, perchè soddisfatta la relazione:

$$\frac{\partial B}{\partial u}=0,$$

cioè posto:

$$B=\lambda(v)$$

λ essendo una certa funzione della sola v, per quanto precede (cfr. n. 2) si ha da integrare l'equazione

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2}=\lambda\frac{\partial \vartheta}{\partial v}.$$

Posto:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v}=e^{\mu(u,v)}$$

tale equazione scrivesi:

$$\frac{\partial}{\partial v}\mu(u,v)=\lambda(v)$$

onde deducesi:

$$\mu(u;v)=\varphi_1(v)+\psi_1(u)$$

essendo $\varphi_1(v)$ una certa funzione di v e $\psi_1(u)$ una funzione arbitraria di u. Segue da ciò che la funzione $\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ è del tipo:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v}=\varphi_2(v)\psi_2(u);$$

ma ora la condizione:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial v}=0$$

ne fornisce:

$$\psi_2(u)=k=\text{costante}$$

e quindi

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v}=k\,\varphi_2(v)$$

e

$$\vartheta=k\,\varphi(v)+\psi(u)$$

ove è sempre $\varphi(v)$ una certa funzione di v, $\psi(u)$ una funzione arbitraria di u e k una costante.

Concludiamo dicendo:

Perchè tre soluzioni ξ, η, ζ linearmente indipendenti della equazione:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0$$

definiscano, mediante le formule di Lelieuvre, *una superficie rigata su cui le generatrici rettilinee siano le linee $u = cost.$, occorre e basta che esse siano del tipo:*

$$\xi = k_1 \varphi(v) + \psi_1(u)$$
$$\eta = k_2 \varphi(v) + \psi_2(u)$$
$$\zeta = k_3 \varphi(v) + \psi_3(u)$$

ove k_1, k_2, k_3 sono tre costanti, ψ_1, ψ_2, ψ_3 tre funzioni arbitrarie di u e $\psi(v)$ una funzione di v.

Ad es. posto:

$$k_1 = 0 \quad \psi_1(u) = u, \qquad k_2 = 0 \quad \psi_2(u) = \psi(u)$$
$$k_3 = 1 \quad \varphi(v) = v, \qquad \psi_3 = 0$$

ottiensi:

$$\xi = u, \qquad \eta = \psi(u), \qquad \zeta = v$$

e si definisce in tal modo la più generale conoide retta.

5. Nel caso in cui

$$M \neq 0$$

si ha da integrare l'equazione di Liouville:

$$\frac{\partial^2 \log M}{\partial u \partial v} = M.$$

Cambiando convenientemente i parametri u, v, Liouville ha trovato:

$$M = \frac{2}{(u+v)^2}$$

e quindi per le precedenti si ha:

$$B = \frac{-2}{u+v},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = -\frac{2}{u+v} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

onde segue:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \frac{2}{(u+v)^2} U$$

essendo U una funzione arbitraria della sola u. Allora derivando rispetto ad u si ha:

$$\frac{2}{(u+v)^2} \vartheta = \frac{2}{(u+v)^2} \frac{dU}{du} - \frac{4}{(u+v)^3} U$$

cioè

$$\vartheta = \frac{dU}{du} - \frac{2U}{u+v}.$$

Volendo anche in questo caso scrivere le formule di LELIEUVRE ([5]) indicheremo con U, V, W tre funzioni arbitrarie della sola u e indicando con apici le loro derivate rispetto ad u porremo:

$$\xi = U' - \frac{2U}{u+v}, \quad \eta = V' - \frac{2V}{u+v}, \quad \zeta = W' - \frac{2W}{u+v}$$

e le formule di LELIEUVRE dànno:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = W'V'' - V'W'' - (WV'' - VW'')\frac{2}{u+v} + (WV' - VW')\frac{2}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (VW' - WV')\frac{2}{(u+v)^2}$$

e le analoghe circolando. Da queste deduconsi le formule di GOURSAT ([6]) che volevamo ricordare:

$$x = (VW' - WV')\frac{2}{u+v} - \int (V'W'' - W'V'')\,du$$

$$y = (WU' - UW')\frac{2}{u+v} - \int (W'U'' - U'W'')\,du$$

$$z = (UV' - VU')\frac{2}{u+v} - \int (U'V'' - V'U'')\,du$$

di cui ci serviremo fra poco.

§ 2.

L'equazione differenziale per lo studio delle rigate con asintotiche curvilinee a torsione costante.

6. Se $\varepsilon \frac{1}{\rho}$, $(\varepsilon = \pm 1)$ è la torsione di una asintotica curvilinea di una superficie [*rigata o no*] lungo di essa si ha, conforme al teorema di Enneper:

$$K = -\frac{1}{\rho^2} = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}$$

designando con K la curvatura totale della superficie. Allora, se l'asintotica $v = v_0$ che si considera è a torsione costante, deve aversi lungo di essa:

$$\rho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{costante}.$$

Il primo membro di questa equazione mantenendosi costante per $v = v_0$ deve avere nulla la derivata rispetto ad u; cioè per $v = v_0$ deve essere:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\left[\xi \frac{\partial \xi}{\partial u} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial u} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right]_{v=v_0} = 0.$$

Questa è l'equazione differenziale che noi esamineremo per studiare, nel modo più generale possibile, le superficie rigate con asintotiche curvilinee a torsione costante.

Noi passiamo a costruire ed a studiare tale equazione nei due soli casi possibili esaminati al paragrafo precedente:

$$M = 0; \qquad M = \frac{2}{(u+v)^2}.$$

e poichè non vogliamo qui occuparci delle superficie rigate con una sola asintotica curvilinea a torsione costante studieremo quando detta equazione possa essere soddisfatta per due diversi valori costanti di v:

$$v = v_0, \qquad v = v_1.$$

§ 3.

Il caso $M = 0$: l'elicoide rigata d'area minima.

7. Per condurre la ricerca nel caso $M = 0$, senza supporre, per ora, che la superficie sia rigata, siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; ψ_1, ψ_2, ψ_3 due terne di funzioni arbitrarie rispettivamente della sola v e della sola u e consideriamo le funzioni:

$$\xi = \varphi_1 + \psi_1, \qquad \eta = \varphi_2 + \psi_2, \qquad \zeta = \varphi_3 + \psi_3$$

le quali costituiscono evidentemente tre soluzioni della equazione:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

Sia S la superficie che tali tre soluzioni definiscono mediante le formule di Lelieuvre; se vogliamo esprimere che una asintotica $v = v_0$ di S è a torsione costante, dobbiamo scrivere precisamente che lungo di essa è:

$$\xi \frac{\partial \xi}{\partial u} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial u} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0$$

ovvero:

$$\Big[(\varphi_1 + \psi_1)\psi'_1 + (\varphi_2 + \psi_2)\psi'_2 + (\varphi_3 + \psi_3)\psi'_3\Big]_{v=v_0} = 0.$$

Osservisi ora che, per le formule stesse di Lelieuvre, è:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \quad (\varphi_3 + \psi_3)\varphi'_2 - (\varphi_2 + \psi_2)\varphi'_3$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -(\varphi_3 + \psi_3)\psi'_2 + (\varphi_2 + \psi_2)\psi'_3\,;$$

e tenendo presenti tali formule, costruiscasi l'espressione del secondo coefficiente F della prima forma quadratica differenziale della superficie.

Si ha successivamente:

$$F = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = S\Big[\big\{(\varphi_3+\psi_3)\varphi'_2-(\varphi_2+\psi_2)\varphi'_3\big\}.\big\{-(\varphi_3+\psi_3)\psi'_2+(\varphi_2+\psi_2)\psi'_3\big\}\Big] =$$

$$= S\Big[\Big\{\zeta\frac{\partial \eta}{\partial u}-\eta\frac{\partial \zeta}{\partial u}\Big\}.\Big\{-\zeta\frac{\partial \eta}{\partial v}+\eta\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big\}\Big] =$$

$$= S\zeta\eta\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}+\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right) - S\left[\zeta^2\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}+\eta^2\frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right].$$

Se si sviluppano le somme indicate e si aggruppano convenientemente i termini si può anche scrivere:

$$F = S\left[\xi\frac{\partial \xi}{\partial v}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}S\xi^2-\xi^2\right)\right]+S\left[\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}(S\xi^2-\xi^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u}S\xi\frac{\partial \xi}{\partial v}+\rho S\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Allora, siccome per $v = v_0$ è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

lungo tale linea si ha:

$$F_{v=v_0} = \rho S\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Noi ci proponiamo di dimostrare che se la superficie è rigata ed ha più di una asintotica a torsione costante è anche, lungo tali asintotiche:

$$S\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$$

e questa circostanza ci farà trarre una conclusione abbastanza interessante per il nostro studio.

8. Invero, se la superficie è rigata, in ordine a quanto avanti si è dimostrato, le tre funzioni ξ, η, ζ sono rispettivamente del tipo:

$$\xi = k_1\varphi+\psi_1 \qquad (k_1,\ k_2,\ k_3 = \text{costanti})$$

$$\eta = k_2\varphi+\psi_2 \qquad \varphi = \varphi(v)$$

$$\zeta = k_3\varphi+\psi_3; \qquad \psi_1 = \psi_1(u),\quad \psi_2 = \psi_2(u),\quad \psi_3 = \psi_3(u),$$

onde l'equazione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

scrivesi:

$$S(k_1 \varphi + \psi_1) \psi'_1 = 0$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\varphi S k_1 \psi'_1 + S k_1 \psi_1 \psi'_1 = 0.$$

Se ora supponesi che la superficie rigata che si considera ammetta due asintotiche curvilinee a torsione costante:

$$v = v_1, \qquad v = v_2$$

l'ultima equazione scritta deve essere soddisfatta, qualunque sia u, per tali valori di v, onde si avrà:

$$\varphi(v_1) S k_1 \psi'_1 + S k_1 \psi_1 \psi'_1 = 0$$

$$\varphi(v_2) S k_1 \psi'_1 + S k_1 \psi_1 \psi'_1 = 0$$

e da queste relazioni deducesi per sottrazione l'altra:

$$\left\{ \varphi(v_1) - \varphi(v_2) \right\} S k_1 \psi'_1 = 0$$

per cui dovrà essere

$$\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$$

oppure

$$S k_1 \psi'_1 = 0.$$

Ora non è possibile che sia:

$$\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$$

perchè in tal caso le espressioni di ξ, η, ζ mostrano che lungo una generatrice generica, per es. lungo la $u = u_2$, nei punti $v = v_1$, $v = v_2$ le normali alle superficie sono parallele, cosa manifestamente assurda per una superficie rigata gobba. Sarà dunque:

$$S k_1 \psi'_1 = 0.$$

Ora nel caso in esame è:

$$S \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} = S \varphi' k_1 \psi'_1 = \varphi' S k_1 \psi'_1 = 0. \qquad \text{c. d. d.}$$

Ciò porta a concludere che lungo le due asintotiche a torsione costante che si ammette esistano sulle superficie è costantemente:

$$F = 0;$$

cioè queste asintotiche sono trajettorie ortogonali delle generatrici le quali sono perciò le loro normali principali. Tali linee, in ordine a teoremi noti, sono allora due curve di Bertrand (7) le quali, essendo a torsione costante (uguale o no), saranno pure a flessione costante, saranno cioè due eliche circolari e pertanto concludesi ora che l'unica superficie rigata con due asintotiche a torsione costante che fornisce il caso $M = 0$ è l'elicoide rigata d'area minima.

§ 4.

Il caso $M = \dfrac{2}{(u+v)^2}$

9. Al n. 5 abbiamo visto che in questo caso è:

$$\xi = U' - \frac{2\,U}{u+v}, \qquad \eta = V' - \frac{2\,V}{u+v}, \qquad \zeta = W' - \frac{2W}{u+v}$$

e quindi:

$$\rho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 =$$
$$= (U'^2 + V'^2 + W'^2) + 4\,\frac{(U^2 + V^2 + W^2)}{(u+v)^2} - 4\,\frac{U\,U' + V\,V' + W\,W'}{u+v}$$

onde se ponesi:

$$S\,U^2 = U^2 + V^2 + W^2 = \varphi(u)$$
$$S\,U'^2 = U'^2 + V'^2 + W'^2 = \psi(u)$$

si ha:

$$\rho = \psi + \frac{4\,\varphi}{(u+v)^2} - \frac{2\,\varphi'}{u+v} \tag{2}$$

e l'equazione fondamentale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0$$

scrivesi in questo caso:

$$\psi' + \frac{4\varphi'}{(u+v)^2} - \frac{8\varphi}{(u+v)^3} + \frac{2\varphi'}{(u+v)^2} - \frac{2\varphi''}{(u+v)} = 0$$

od anche:

$$\psi'(u+v)^3 - 2\varphi''(u+v)^2 + 6\varphi'(u+v) - 8\varphi = 0,$$

equazione che noi vogliamo studiare.

Avendo una equazione di tale tipo nella incognita v può presentarsi soltanto uno dei seguenti cinque casi:

1.°) Le tre radici sono tutte funzioni di u: non esiste allora sulla superficie rigata alcuna asintotica curvilinea a torsione costante.

2.°) Una delle tre radici è costante, le altre due sono funzioni di u: sulla rigata esiste una asintotica curvilinea a torsione costante.

3.°) Due delle radici sono costanti, la terza è funzione di u: la superficie ammette due asintotiche curvilinee a torsione costante.

4.°) Le tre radici sono tutte costanti: la rigata ammette tre asintotiche curvilinee a torsione costante.

5.°) L'equazione è una identità: tutte le asintotiche curvilinee della rigata sono a torsione costante.

Noi passiamo ad esaminare i singoli casi e mostreremo che l'unico da considerare è il caso 3.°), gli altri non offrendo interesse alcuno dal punto di vista da cui questo studio è condotto.

10. Intanto dimostriamo che l'ultimo caso non può mai accadere.

Invero se si ordina l'equazione trovata rispetto a v e si annullano i coefficienti ottiensi successivamente:

$$\psi' = 0, \qquad \varphi'' = 0, \qquad \varphi' = 0, \qquad \varphi = 0$$

onde dalla espressione (2) trovata di ρ trarrebbesi

$$\rho = \text{costante}$$

cosa manifestamente assurda per una superficie rigata propriamente detta. Allora ricordando quanto si è detto al § 3 possiamo concludere:

L'unica superficie rigata di cui tutte le asintotiche curvilinee siano a torsione costante è l'elicoide rigata d'area minima.

In altro lavoro noi avremo occasione di ritrovare per altra via tale risultato.

11. Mostriamo ancora che il quarto caso conduce a superficie rigate con una sola asintotica a torsione costante.

Infatti se l'equazione:

$$\psi'(u+v)^3 - 2\varphi''(u+v)^2 + 6\varphi'(u+v) - 8\varphi = 0 \tag{3}$$

o l'altra equivalente:

$$\psi' v^3 + \left\{ 3u\psi' - 2\varphi'' \right\} v^2 + \left\{ 3u^2\psi' - 4u\varphi'' + 6\varphi' \right\} v +$$
$$+ \left\{ \psi' u^3 - 2\varphi'' u^2 + 6\varphi' u - 8\varphi \right\} = 0$$

ha le sue tre radici costanti, indicando con a, b, c tre costanti deve aversi:

$$3u - 2\frac{\varphi''}{\psi'} = a$$

$$3u^2 - 4u\frac{\varphi''}{\psi'} + 6\frac{\varphi'}{\psi'} = b$$

$$u^3 - 2u^2\frac{\varphi''}{\psi'} + 6u\frac{\varphi'}{\psi'} - 8\frac{\varphi}{\psi'} = c.$$

Pongasi allora:

$$\frac{\varphi''}{\psi'} = A, \qquad \frac{\varphi'}{\psi'} = B, \qquad \frac{\varphi}{\psi'} = C$$

e si consideri il sistema lineare:

$$-2A = a - 3u$$

$$6B - 4uA = b - 3u^2$$

$$-8C + 6uB - 2u^2A = c - u^3$$

il quale fornisce:

$$A = \frac{3u - a}{2},$$

$$B = \frac{1}{6}\left\{ 3u^2 - 2ua + b \right\},$$

$$C = \frac{1}{8}\left\{ u^3 - au^2 + bu - c \right\}.$$

Deducesi allora:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{B}{C} = \frac{8\,(3\,u^2 - 2\,u\,a + b)}{6\,(u^3 - a\,u^2 + b\,u - c)}$$

talmente che posto:

$$\omega = \omega\,(u) = u^3 - a\,u^2 + b\,u - c$$

è:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{4}{3}\,\frac{\omega'}{\omega}$$

e perciò integrando ottiensi:

$$\varphi\,(u) = k\,\omega^{\frac{4}{3}} = k\,\omega\sqrt[3]{\omega} \tag{4}$$

k essendo una costante positiva.

Ma si ha ancora:

$$\frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{B}{A} = \frac{3\,u^2 - 2\,u\,a + b}{3\,(3\,u - a)}\,;$$

mentre che l'espressione ora trovata di φ fornisce:

$$\frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{\frac{4}{3}\,k\,\omega^{\frac{1}{3}}\,\omega'}{\frac{4}{9}\,k\,\omega^{-\frac{2}{3}}\,\omega'^2 + \frac{4}{3}\,k\,\omega^{\frac{1}{3}}\,\omega''} = \frac{\omega\,\omega'}{\frac{1}{3}\,\omega'^2 + \omega\,\omega''}$$

e quindi uguagliando i due valori si deduce facilmente che le costanti a, b, c devono essere vincolate dalle relazioni:

$$3\,b - a^2 = 0,$$

$$-\,9\,c + a\,b = 0,$$

$$h^2 - 3\,a\,c = 0,$$

onde posto

$$c = \alpha^3$$

si ha:

$$b = 3\,\alpha^2, \qquad a = 3\,\alpha$$

e perciò sostituendo in (4)

$$\varphi = k\,(u - \alpha)^4$$

$$\psi' = \frac{2\,\varphi''}{3\,(u - \alpha)}; \qquad \psi = 4\,k\,(u - \alpha)^2 + \text{costante}.$$

L'equazione (3) diventa allora:

$$\psi'\,(v + \alpha)^3 = 0$$

e le sue tre radici coincidono col valore $-\alpha$.

Siccome non è il caso di parlare di linee asintotiche multiple si conclude che l'ipotesi 4) conduce a rigate con una sola asintotica a torsione costante. c. d. d.

12. Tuttavia vogliamo osservare esplicitamente che questo caso è nettamente distinto da quello in cui l'equazione (3) ha una sola radice costante, perchè mentre in questa ultima ipotesi l'asintotica curvilinea a torsione costante che corrisponde a tale radice è generica, nel caso in esame invece si può dimostrare che l'asintotica curvilinea a torsione costante è la linea di stringimento della superficie.

Ricerchisi infatti il valore di v per cui lungo una linea $u =$ cost. è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Si ha l'equazione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = -8\,\varphi\,(u + v)^{-3} + 4\,\varphi'\,(u + v)^{-2} = 0$$

e ricordando l'espressione di φ subito deducesi:

$$v = -\alpha.$$

Siccome risulta che tale valore dà il minimo di ρ e quindi il massimo del valore assoluto della curvatura totale K della superficie, deducesi che lungo ogni generatrice il punto $v = -\alpha$ è il suo punto centrale e ciò prova appunto che l'asintotica a torsione costante, luogo di tali punti, è la linea di stringimento della superficie. c. d. d.

13. Il caso 1) non ha alcun interesse; il caso 2) non viene qui studiato per le ragioni addotte nella introduzione.

Rimane da esaminare il caso 3).

In tale caso le due asintotiche a torsione costante della rigata possono avere la torsione diversa ovvero uguale.

Noi dedichiamo l'ultima parte di questa Memoria alle superficie rigate con due asintotiche a torsione costante ed uguale (rigate Γ) riservandoci di tornare altrove sull'altro caso possibile.

Ritroveremo in un modo rapido molte delle proprietà che ho già fatto conoscere ed altre nuove delle rigate Γ.

§ 5.

Le rigate Γ.

14. Una superficie rigata dicesi una *rigata* Γ quando ammette due asintotiche curvilinee a torsione costante ed uguale.

Noi abbiamo già studiato altrove queste notevoli superficie; qui, col metodo esposto, le determineremo nuovamente e ritroveremo insieme ad altre nuove, talune loro proprietà.

Sostituendo ad una tale superficie rigata una superficie omotetica, potrà supporsi, senza restrizioni di sorta, che lungo la asintotica a torsione costante sia:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

ovvero, con le notazioni precedenti:

$$(\psi - 1)(u + v)^2 - 2\varphi'(u + v) + 4\varphi = 0$$

essendo:

$$\varphi = \varphi(u) = S\, U^2,$$

$$\psi = \psi(u) = S\, U'^2.$$

L'equazione precedente, risoluta rispetto a v, deve fornire due valori costanti, onde deve essere:

$$u - \frac{\varphi'}{\psi - 1} = a;$$

$$\frac{4\varphi}{\psi - 1} - \frac{2\varphi'}{\psi - 1}u + u^2 = b$$

a e b essendo due costanti.

Dalla prima di queste relazioni deducesi

$$\frac{1}{\psi - 1} = \frac{u-a}{\varphi'}$$

e quindi la seconda fornisce:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = 2\,\frac{2\,(u-a)}{u^2 - 2\,u\,a + b}\,.$$

Posto:

$$\omega = \omega\,(u) = u^2 - 2\,u\,a + b$$

si ha

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = 2\,\frac{\omega'}{\omega}$$

la quale equazione integrata dà:

$$\varphi = k\,\omega^2, \qquad k = \text{costante}.$$

Allora, per quanto precede, è anche

$$\psi = 4\,k\,\omega + 1.$$

15. Se indichiamo con v_1 e v_2 le radici della equazione:

$$v^2 + 2\,a\,v + b = \omega$$

le asintotiche C_1 e C_2 a torsione costante della nostra rigata Γ sono definite, in ordine alle formule di Goursat, dalle due seguenti terne di formule:

$$x_1 = (V\,W' - W\,V')\,\frac{2}{u+v_1} - \int (V'\,W'' - W'\,V'')\,d\,u$$

$$y_1 = (W\,U' - U\,W')\,\frac{2}{u+v_1} - \int (W'\,U'' - U'\,W'')\,d\,u$$

$$z_1 = (U\,V' - V\,U')\,\frac{2}{u+v_1} - \int (U'\,V'' - V'\,U'')\,d\,u\,;$$

$$x_2 = (V\,W' - W\,V')\,\frac{2}{u+v_2} - \int (V'\,W'' - W'\,V'')\,d\,u$$

$$y_2 = (W\,U' - U\,W')\,\frac{2}{u+v_2} - \int (W'\,U'' - U'\,W'')\,d\,u$$

$$z_2 = (U\,V' - V\,U')\,\frac{2}{u+v_2} - \int (U'\,V'' - V'\,U'')\,d\,u.$$

16. Per ritrovare una notevole proprietà calcoliamo la distanza t di due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ corrispondenti (situati sopra una medesima generatrice) sulle due asintotiche C_1 e C_2 definite dalle formule precedenti.

Si ha, per le espressioni già date di φ e ψ, ed essendo $\varepsilon = \pm 1$:

$$t^2 = S(x_2 - x_1)^2 = S \left\{ v w' - w v' \right\}^2 \frac{(v_2 - v_1)^2}{(u^2 - 2ua + b)^2} =$$

$$= \left\{ \frac{\varepsilon \sqrt{a^2 - b}}{\omega} \right\}^2 \cdot \left\{ \varphi \psi - \frac{1}{4} \varphi'^2 \right\} =$$

$$= 16(a^2 - b) \left\{ 4k^2(b - a^2) - k \right\} =$$

$$= 16k(a^2 - b) \left\{ 4k(b - a^2) - 1 \right\} = \text{costante},$$

talmente che ancora qui risulta una ben nota ed importante proprietà delle curve a torsione costante vincolate da una trasformazione asintotica.

Se si indica con D il discriminante della equazione

$$v^2 + 2av + b = 0$$

è:

$$D = 4(a^2 - b)$$

e

$$t^2 = -4kD(kD + 1).$$

Volendo che sia:

$$t^2 \geqq 0$$

bisognerà fare in modo che sia:

$$kD \leqq 0, \qquad kD + 1 \geqq 0; \qquad a^2 \geqq -\frac{1}{4k} + b.$$

Deducesi inoltre facilmente:

$$t_{m-x} = 1$$

e ciò in perfetto accordo con la teoria delle trasformazioni di Bäcklund delle curve a torsione costante.

Per quel che sarà ancora esposto non è necessario nemmeno supporre che le costanti a e b siano scelte in modo da aversi:

$$t^2 > 0,$$

le considerazioni che faremo essendo valide indifferentemente per superficie reali od immaginarie.

17. Anche col metodo attuale risulta subito il teorema, altrove dimostrato:

Si possono determinare quante si vogliano rigate Γ *dipendentemente dai valori di una funzione arbitraria di una variabile.*

Infatti le tre funzioni $U(u)$, $V(u)$, $W(u)$, arbitrarie per una superficie rigata generica, per una rigata Γ sono vincolate soltanto dalle relazioni già scritte:

$$U^2 + V^2 + W^2 = \varphi$$

$$U'^2 + V'^2 + W'^2 = \psi = 4\sqrt{\varphi} + 1$$

onde evidentemente potrà assegnarsi ad arbitrio una delle tre funzioni U, V, W, dopo di che le altre restano pienamente determinate dalle precedenti equazioni.

18. Considerisi la curva C_0 luogo del punto di mezzo $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ della congiungente due punti corrispondenti

$$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1) \quad \text{e} \quad P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$$

delle asintotiche C_1 e C_2 a torsione costante.

Si ha:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Poniamo le coordinate del punto generico di C_0 sotto la forma (1) del § 1; facilmente si trova che lungo C_0 deve essere:

$$\frac{2}{u+v} = \frac{2(u-a)}{u^2 - 2ua + b} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}$$

ovvero anche:

$$v = \frac{b - ua}{u - a}.$$

Converrà tener presente tale risultato in vista di una conseguenza che ne dedurremo; intanto ce ne serviremo per dimostrare che la curva C_0 è la linea di stringimento della superficie.

Invero, fissata una generatrice $u = \text{cost.}$, anche qui, come al n. 12, costruiscasi la condizione

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0;$$

si ottiene per v precisamente il valore

$$v = \frac{b - u\,a}{u - a},$$

e come effettivamente tale valore corrisponde ad un massimo per il valore assoluto della curvatura $K = -\frac{1}{\rho^2}$ risulta appunto che la curva C_0 è il luogo dei punti centrali delle genetratrici della rigata e quindi anche qui il teorema:

La linea di stringimento di una rigata Γ *è il luogo del punto di mezzo del segmento che le sue asintotiche a torsione costante intercettano sulle generatrici.*

Da tale risultato deducesi poi subito che

Le due asintotiche a torsione costante di una rigata Γ *si corrispondono anche per uguaglianza d'arco.*

§ 6.

Teoremi ausiliarî.
Linea flecnodale di una superficie rigata.

19. Chiamasi *punto flecnodale* di una superficie rigata un punto tale che per esso possa condursi una tangente alla superficie che abbia con questa un contatto del terzo ordine o, come dicesi, un contatto quadripunto (*tangente flecnodale*).

Il luogo dei punti flecnodali di una superficie è una linea che dicesi la *linea flecnodale* delle superficie ed il luogo delle tangenti flecnodali ad una superficie è una superficie rigata che dicesi la *rigata flecnodale* della superficie data ([8]).

Una tangente flecnodale non è, in generale, tangente della curva flecnodale, ma essa tocca manifestamente una delle asintotiche passanti per il punto flecnodale da cui parte.

Tale asintotica ha, in questo punto, indeterminato il suo piano osculatore; cioè nel punto flecnodale si verificano le proporzioni:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial u}}=\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial u}}.$$

Le tre funzioni arbitrarie U, V, W che, mediante le formule di Goursat, servono a definire una superficie rigata, soddisfano manifestamente ad una equazione del tipo:

$$\Phi'''=p\,\Phi''+q\,\Phi'+r\,\Phi$$

p, q, r essendo, come U, V, W, tre funzioni di u.

Tenendo conto di tale equazione si calcolino, per mezzo delle formule di Goursat, le derivate seconde $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$; facilmente si trova p. es.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\left(p-\frac{2}{u+v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}-\left(\frac{p}{u+v}+r\,\frac{u+v}{2}+q\right)\frac{\partial x}{\partial u}$$

ed analogamente circolando per le altre due derivate.

Le proporzioni avanti scritte dimostrano allora che in un punto flecnodale si ha:

$$\frac{p}{u+v}+r\,\frac{u+v}{2}+q=0$$

cioè:

$$r\,(u+v)^2+2\,q\,(u+v)+2\,p=0. \tag{5}$$

Questa equazione per ogni valore di u fornisce due valori di v onde concludesi:

Su ogni generatrice di una superficie rigata esistono due punti flecnodali.

La linea flecnodale di una superficie rigata componesi pertanto di due rami: diremo con Tzitzeica che sopra una superficie rigata esistono due linee flecnodali ([9]). Si osservi ancora qui che se il valore scelto di u annulla la funzione p la medesima equazione mostra che per un valore di v è

$$u+v=0$$

e allora le formule di Goursat esprimono che il corrispondente punto flecnodale è un punto improprio.

Se contemporaneamente si ha poi, per il valore scelto di u:

$$p(u) = 0 \qquad q(u) = 0$$

i due punti flecnodali sono entrambi improprî.

§ 7.

Rigate Γ speciali.

20. Nel caso che la superficie che si considera sia una rigata Γ, abbiamo visto essere:

$$\left.\begin{aligned} S\,U^2 &= \varphi(u) = k(u^2 - 2ua + b)^2 \\ S\,U'^2 &= \psi(u) = 4k(u^2 - 2ua + b) + 1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Per derivazione da queste due uguaglianze facilmente deducesi

$$U\,U''' + V\,V''' + W\,W''' = 0.$$

L'equazione:

$$\Phi''' = p\,\Phi'' + q\,\Phi' + r\,\Phi$$

di cui U, V, W sono tre integrali porta allora alla relazione

$$p\,S\,U\,U'' + q\,S\,U\,U' + 2\,S\,U^2 = 0$$

e quindi concludiamo che per ogni rigata Γ deve essere soddisfatta la relazione:

$$p(\varphi'' - 2\psi) + q\,\varphi' + 2\,r\,\varphi = 0. \tag{7}$$

21. Fra le rigate Γ ne esistono talune che meritano speciale attenzione.

Oltre alle condizioni (6) imponiamo alle funzioni U, V, W la nuova condizione:

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U' & V' & W' \\ U''' & V''' & W''' \end{vmatrix} = 0\,.$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\frac{d}{d\,u}\,\Delta = 0$$

indicando con Δ il Wronskiano delle funzioni U, V, W.

Tali funzioni restano allora pienamente determinate ed in questo caso si riconosce che è

$$p = 0$$

la quale circostanza dimostra, che per le rigate Γ che in tal modo definisconsi, una delle linee flecnodali è allontanata a distanza infinita.

Di più notisi che la relazione (7) trovata nel numero precedente scrivesi in questo caso:

$$q\,\varphi' + 2\,r\,\varphi = 0$$

ossia:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -2\,\frac{r}{q} = 2\,\frac{2\,(u - a)}{u^2 - 2\,u\,a + b}\,;$$

ora per la (5) lungo la linea flecnodale a distanza finita si ha:

$$\frac{2}{u + v} = -\,\frac{r}{q} = +\,\frac{1}{2}\,\frac{\varphi'}{\varphi}$$

e siccome lo stesso avviene (cfr. n. 18) lungo la linea di stringimento, chiamando con Γ_0 una rigata di questa classe particolare, possiamo dire che:

La linea di stringimento di una rigata Γ_0 *è anche una delle linee flecnodali,*

o altrimenti:

La superficie flecnodale di una rigata Γ_0 *è il luogo delle tangenti alle asintotiche curvilinee nei punti in cui sono secate dalla linea di stringimento.*

Osserviamo infine che la condizione

$$\frac{d}{d\,u}\,\Delta = 0$$

è caratteristica per le rigate Γ che hanno una linea flecnodale a distanza infinita (rigate Γ_0).

Zona di guerra, Luglio 1916.

NOTE

(1) Cfr. P. TORTORICI, *Intorno ad una classe di superficie rigate* [Annali di Matematica pura, tomo XXV].

(2) Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale.* 2.ª ediz. (Pisa, Spoerri, 1902-1907), Vol. I, pag. 162.

(3) Cfr. G. TZITZEICA, *Sur certaines courbes gauches.* Annales de l'École Normale Supérieure, 1907.

(4) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (2), pag. 116.

(5) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (2), pag. 165.

(6) Cfr. G. TZITZEICA, loc. cit. (3).

(7) Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (2), pag. 50.

(8) Cfr. E. J. WILCZINZKY, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces* [Teubner, Leipzig].

(9) Cfr. G. TZITZEICA, loc. cit. (3).

Sulla geometria delle schiere rigate o regoli, e in particolare sui complessi lineari di tali enti. [1]

(*Di* Corrado Segre, *a Torino.*)

Premesse. Rappresentazione dei regoli in S_5 e in S_{19}.

1. La nota considerazione delle rette di uno spazio ordinario come i *punti* di una varietà quadrica V_4^2 di S_5 (varietà che indicheremo nel seguito con R) è suscettibile ancora di molte applicazioni. Queste esigono, naturalmente, la conoscenza di proprietà relative all'S_5, che poi con quella rappresentazione si hanno da trasportare alle rette di S_3. Una parte dei risultati che in tal modo si possono ottenere derivano così immediatamente da proposizioni già note dello S_5, che si può ritenere inutile il rilevarli espressamente. Altri invece si ottengono meno facilmente, oppure esigono che si facciano prima apposite escursioni nella geometria di S_5. Appartengono a questa categoria alcune ricerche relative alle *schiere rigate*, o *regoli*, di S_3, alle quali saranno dedicati questo lavoro e qualche altro.

2. Si sa che, nella rappresentazione ricordata dell'S_3 rigato, le rette di un'ordinaria *schiera rigata* (sistema di generatrici di una quadrica) hanno per imagini i punti di una conica, sezione piana di R. Finchè le schiere rigate, che si hanno da considerare, non sono *degeneri*, la loro rappresentazione coi piani di S_5 che segano su R le corrispondenti coniche è biunivoca. Ancora rimane tale per quelle schiere rigate, che si spezzano in due fasci

(1) V. una Nota riassuntiva: *Sui complessi lineari di schiere rigate o regoli*, nei Rendic. R. Acc. Lincei (5) 26, 1917_1, p. 341.

di raggi con centri e piani distinti, e con una retta comune: esse rispondono ai piani di S_5 tangenti a R in un sol punto (il punto imagine di quella retta). Ma le schiere rigate che degenerano in coni quadrici, o in inviluppi piani di 2.ª classe, hanno per imagini coniche giacenti in piani di R. Un piano di R ha i suoi punti corrispondenti alle ∞^2 rette di una stella o di un piano rigato di S_3: esso non sarebbe più imagine di una sola, ma di ∞^5 schiere rigate, degenerate come s'è detto. — D'altra parte una schiera rigata che degeneri in un fascio di rette da contarsi doppiamente non dà in S_5 un solo piano, bensì ∞^1 piani, tangenti a R in tutti i punti di una stessa retta p (imagine di quel fascio). Vi è un S_3 (tangente a R lungo p) che sega R nei due piani di questa varietà passanti per p; e i detti ∞^1 piani costituiscono il fascio determinato da questi due.

3. Diremo *regolo* per significare l'insieme delle rette di S_3 comuni a tre complessi lineari di rette (non di un fascio), ossia ad una rete di tali complessi. Sarà come dire: l'insieme delle rette rappresentate in S_5 da tutte le intersezioni di R con un piano. Questo concetto include dunque anzi tutto quello delle schiere rigate non degeneri; poi ancora quello delle schiere rigate spezzate in due fasci con centri e piani distinti e con una retta comune; quello dei fasci di rette contati doppiamente; infine *fra i regoli staranno pure le stelle di raggi e i piani rigati.* Restano esclusi gli ordinari coni quadrici e le ordinarie coniche-inviluppi ([2]).

4. In una Memoria precedente, a cui dovrò riferirmi frequentemente nel seguito ([3]), ho avuto da valermi spesso della rappresentazione degli ∞^9 piani di S_5 coi punti di una V_9 appartenente a S_{19}. Riguardando ora quei piani come imagini (nel senso anzi detto) degli ∞^9 regoli di S_3, avremo anche per questi regoli una rappresentazione sui punti della V_9. Sarà pur questa una rappresentazione da adoperare nel presente lavoro.

([2]) Si potrebbero ottenere anche queste degenerazioni delle ordinarie schiere rigate, considerando in S_5 la traccia su R di un piano generico, che s'avvicini indefinitamente a un dato piano giacente in R. A seconda del modo con cui si fa questo passaggio al limite, si otterranno tutti gli ∞^5 coni quadrici di una stella, o tutte le ∞^5 coniche-inviluppi di un piano rigato. — Ma nel presente lavoro non ci occorrerà questa considerazione.

([3]) *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni.* Annali di mat. (3) 27, (1917), p. 75. La citeremo brevemente con (M.).

Così ricordiamo (M., n. 9) che sulla V_8 stanno due diversi sistemi di S_3 (spazi massimi) corrispondenti alle due specie di sistemi lineari ∞^3 di piani di S_5: sistema dei piani di un S_3, sistema dei piani per una retta. Nello spazio ordinario rigato essi rispondono a due sorta di ***sistemi lineari*** ∞^3 ***di regoli*** (sistemi lineari massimi di questi enti): i regoli contenuti in una stessa congruenza lineare; e i regoli che passano per due rette fisse (distinte o no). — Una retta della V_8, ossia (M., n. 8) un fascio di piani di S_5, rappresenterà in conseguenza l'insieme di quei regoli di una stessa congruenza lineare che passano per due rette fisse di questa: un *fascio di regoli.* Le quadriche contenenti questi regoli passano per un quadrilatero, di cui due lati opposti sono le direttrici della congruenza e gli altri due le rette comuni ai regoli. Esse formano un fascio-schiera. — I sistemi lineari ∞^2 di piani in S_5 sono (M., n. 9) le stelle di piani di spazi ordinari, e gli enti duali, ossia sistemi dei piani per una retta entro un S_4. Ne viene che i ***sistemi lineari*** ∞^2, o ***reti, di regoli*** sono di due sorta: reti, i cui regoli stanno tutti in una congruenza lineare; e reti composte dei regoli di un complesso lineare di rette passanti per due rette fisse di questo.

Rileviamo ancora da (M.), n. 4, il sistema nullo $\mathfrak{N}$ di S_{19}, nel quale sono coniugati due punti della V_8 quando sono imagini di due piani di S_5 fra loro incidenti, vale a dire imagini di due regoli di S_3 contenuti in uno stesso complesso lineare di rette, o, come dirò brevemente, di due regoli ***legati linearmente.***

5. A ciò va ora aggiunta, in S_{19}, una nuova considerazione essenziale, dipendente dal fatto che in S_5 abbiamo adesso un nuovo ente (che non compariva in (M.)): la varietà quadrica R.

La polarità rispetto a questa varietà fa corrispondere fra loro i piani di S_5 (in particolare ogni piano di R a sè stesso). La corrispondenza è lineare, cioè muta i complessi lineari di piani (M., n. 2) in complessi lineari. Quindi in S_{19} produrrà una trasformazione *collineare* $\mathfrak{J}$ della V_8 in sè stessa. $\mathfrak{J}$ è involutoria ed ha sulla V_8 due sistemi ∞^3, V_3, di punti uniti: quelli che sono imagini dei due sistemi ∞^3 di piani di R. Gli *assi* (luoghi di punti uniti) di $\mathfrak{J}$ contengono rispettivamente le due V_3: perchè queste non possono stare in uno stesso spazio inferiore a S_{19}; ossia non possono i due sistemi ∞^3 di piani di R stare in uno stesso complesso lineare di piani. Invero, se esistesse un tal complesso, prendendo due piani di R che si taglino in una retta, starebbero nel complesso tutti i piani del loro fascio, vale a dire tutti i piani tangenti a R lungo rette; e quindi anche starebbe nel complesso ogni piano tangente a R in un punto, perchè un tal piano si può sempre riguardare in infiniti modi come situato nel fascio di due piani tangenti a R lungo rette (passanti per quel punto). Ora i piani tangenti a R formano un complesso irriducibile di 2.° grado, non del 1.°.

Poichè i due sistemi di piani di R sono projettivamente equivalenti, i due assi di $\mathfrak{J}$, che contengono rispettivamente le due V_3, saranno della stessa dimensione: dunque due S_9. — A questi S_9 *appartengono* (vi sono *immerse*) le due V_3; perchè se no, si potrebbe tirare un iperpiano che le contenga entrambe, il che si è escluso.

6. La definizione delle due corrispondenze $\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{J}$ di S_{19} provenienti dallo S_5 mostra che ognuna di esse deve essere mutata in sè dall'altra, ossia che esse sono permutabili. Ciò risulta pure, con più precisa determinazione, nel seguente modo. Si consideri in un S_9 asse di $\mathfrak{J}$ la V_3 che rappresenta l'uno dei due sistemi ∞^3 di piani di R. Poichè i piani di questo sistema sono a due a due incidenti, i punti della V_3 sono a due a due coniugati rispetto a $\mathfrak{N}$; ossia gl'iperpiani polari rispetto a $\mathfrak{N}$ di quei punti passano per la V_3, e quindi (n. 5) per l'S_9 considerato. Ne segue che questo spazio ha per polare sè stesso rispetto a $\mathfrak{N}$. Ossia: ognuno dei due assi di $\mathfrak{J}$ è omologo di sè stesso rispetto a $\mathfrak{N}$, ossia è *spazio totale* pel complesso lineare di rette $\mathfrak{N}$.

7. Il prodotto delle due corrispondenze $\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{J}$, involutorie e permutabili, sarà una reciprocità involutoria $\mathfrak{P}$ di S_{19}. Due punti di V_9 coniugati in $\mathfrak{P}$ rappresentano due piani di S_5, l'uno dei quali è incidente al polare dell'altro rispetto a R. Perciò un punto di V_9 è autoconiugato in $\mathfrak{P}$ solo se il piano corrispondente di S_5 è tangente a R. $\mathfrak{P}$ non è dunque un sistema nullo, ma una polarità ordinaria, ossia rispetto a una V_{18}^2; e questa taglierà la V_9 nei punti che rispondono ai piani di S_5 tangenti ad R, ossia che sono imagini dei regoli di S_3 spezzati in due fasci di raggi (inclusi i regoli degenerati in stelle o in piani rigati). La V_{18}^2 conterrà i due S_9 assi di $\mathfrak{J}$.

8. Le sezioni fatte su R da due piani polari rispetto a R medesima rappresentano due *regoli incidenti*, ossia regoli tali che le rette dell'uno sono incidenti alle rette dell'altro: nel caso ordinario, le due schiere di generatrici di una stessa quadrica. Passando alla V_9 di S_{19}, avremo in conseguenza che la collineazione involutoria $\mathfrak{J}$, definita al n. 5, fa corrispondere due punti della V_9, quando sono imagini di due regoli incidenti.

Così, accanto alla nota rappresentazione delle *quadriche*, luoghi o inviluppi, coi punti di un S_9, veniamo qui a considerare la rappresentazione dei *regoli* sulla V_9: *sdoppiando* cioè ogni quadrica nei suoi due regoli. Due punti di V_9 omologhi in $\mathfrak{J}$ rispondono ad una stessa quadrica, e cioè rispettivamente ai suoi due regoli.

Ritorneremo diffusamente su ciò.

9. Quando i regoli si rappresentano nei modi esposti, si possono assumere come *coordinate dei regoli* le coordinate dei corrispondenti piani di S_5, o dei corrispondenti punti di S_{19}. Vengono ad essere, per esempio, i 20 determinanti del 3.° ordine estratti dalla matrice (3, 6) delle coordinate di 3 complessi lineari di rette di cui il regolo sia l'intersezione (n. 3).

Potrà essere utile avere le espressioni di queste coordinate nel caso di un regolo giacente su una quadrica, la cui equazione sia data sotto la forma canonica:

$$A \equiv \sum_1^4 a_{ll}\, x_l^2 \equiv \sum_1^4 a_l^2\, x_l^2 \tag{1}$$

(ove, per comodità di scrittura nel seguito, mettiamo in evidenza provvisoriamente un sistema di radici quadrate a_l dei coefficienti).

Sono rette di un tal regolo, per ogni valore di σ, le rette (posto $i = \sqrt{-1}$)

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_1 + i\, a_2 x_2 &= \sigma\,(a_3 x_3 + i\, a_4 x_4) \\ \sigma\,(a_1 x_1 - i\, a_2 x_2) &= -\, a_3 x_3 + i\, a_4 x_4 . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Le loro coordinate p_{hk} sono:

$$\begin{array}{lll} p_{12} = 2\,\sigma\, i\, a_3\, a_4 , & p_{13} = -\,(\sigma^2 + 1)\, a_4\, a_2 , & p_{14} = (1 - \sigma^2)\, i\, a_2\, a_3 , \\ p_{34} = -\,2\,\sigma\, i\, a_1\, a_2 , & p_{42} = (\sigma^2 + 1)\, a_1\, a_3 , & p_{23} = (\sigma^2 - 1)\, i\, a_1\, a_4 . \end{array}$$

Ponendo queste espressioni nell'equazione di un complesso lineare di rette

$$\sum c_{hk}\, p_{hk} = 0, \tag{3}$$

si vede che questo conterrà il regolo solo quando

$$\left.\begin{aligned} c_{12}\, a_3\, a_4 &= c_{34}\, a_1\, a_2 \\ c_{13}\, a_4\, a_2 &= c_{42}\, a_1\, a_3 \\ c_{14}\, a_2\, a_3 &= c_{23}\, a_1\, a_4 . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Notiamo che se nella (1) si muta il segno ad *una* delle a_i, con che la quadrica A non muta, il regolo (2) si cambia nell'altro regolo giacente in A (4).

10. Poichè nel nostro S_5 sono indicate con p_{hk} le 6 coordinate di punto, converrà che in conseguenza scriviamo le 20 coordinate dei piani con simboli del tipo $P_{hk,\,h'k',\,h''k''}$. La (3), interpretata in S_5, dice che l'iperpiano (c_{hk}) contiene il punto (p_{hk}), e le (4) dicono che il piano di S_5 corrispondente al nostro regolo congiunge i tre punti di S_5 che hanno le coordinate seguenti:

p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{34}	p_{42}	p_{23}
$a_3\,a_4$	0	0	$-\,a_1\,a_2$	0	0
0	$a_4\,a_2$	0	0	$-\,a_1\,a_3$	0
0	0	$a_2\,a_3$	0	0	$-\,a_1\,a_4$

Dunque le coordinate di quel piano (determinanti del 3.° ordine estratti da questa matrice) sono

$$P_{12,\,13,\,14} = a_2^2\,a_3^2\,a_4^2\,,\ \text{e tre analoghe};$$

$$P_{23,\,34,\,42} = -\,a_1^3\,a_2\,a_3\,a_4\,,\ \text{e tre analoghe};$$

le rimanenti 12 coordinate sono nulle.

Possiamo semplificare lievemente queste espressioni, dividendole per $m = a_1\,a_2\,a_3\,a_4$, che non è altro che una radice quadrata del discriminante di A, ed introducendo i coefficienti primitivi a_{ii} di A nella (1). Viene che le

(4) Se si vuole che il regolo (2) di A e un regolo di un'altra quadrica, che potremo in generale supporre rappresentata con $\Sigma\, b_i^2\, x_i^2 = 0$, stiano in uno stesso complesso lineare di rette, dovranno 6 valori delle c_{hk} non tutti nulli (coefficienti di quel complesso) verificare le (4) e le analoghe, in cui le a si sostituiscano colle b. Confrontando la prima delle (4) coll'analoga, si trae che, se c_{12} e c_{34} non sono entrambe nulle, sarà:

$$a_1\,a_2\,b_3\,b_4 - a_3\,a_4\,b_1\,b_2 = 0. \qquad (5)$$

Si giunge così al risultato che la condizione perchè i due regoli sian legati linearmente consiste nell'annullarsi di uno dei 3 binomi del tipo (5).

coordinate del nostro regolo sono:

$$P_{12,\,13,\,14} = \frac{m}{a_{11}}, \qquad P_{23,\,34,\,42} = -a_{11}, \tag{6}$$

con le analoghe; e poi 12 coordinate nulle.

Rappresentazione in S_{19} delle quadriche ordinarie, luoghi ed inviluppi.

11. Distinguiamo i due assi S_9 dell'involuzione $\mathfrak{J}$ di S_{19}, chiamandoli L_9 e Λ_9, o semplicemente L e Λ, rispettivamente, secondo che la V_3 di V_9 in essi contenuta è quella, i cui punti rappresentano le stelle di raggi di S_3, oppure i piani rigati di S_3. Possiamo dire allora, più brevemente, che i punti di quelle V_3 di L e Λ rappresentano rispettivamente i punti e i piani di S_3.

Ciò posto, cerchiamo come si rappresentano, ad esempio, su L i punti di una quadrica di S_3.

I due regoli della quadrica avranno per imagini su V_9 (n. 8) due punti α, α', omologhi in $\mathfrak{J}$, e quindi situati su una retta incidente ad L e Λ. Un punto della quadrica si può caratterizzare come centro di una stella di raggi che ha comune una retta con uno (ad arbitrio) di quei due regoli. La stella ha dunque per imagine: in S_5 un piano di R incidente al piano rappresentativo di quel regolo; e quindi in S_{19}, sulla V_3 di L, un punto coniugato rispetto ad $\mathfrak{N}$ al punto α (o α'). Così *i punti della V_3 di L imagini dei punti della quadrica di S_3 costituiscono l'intersezione di quella V_3 con un iperpiano,* ad esempio col polare di α rispetto a $\mathfrak{N}$. Gl'iperpiani polari rispetto a $\mathfrak{N}$ dei punti della retta $\alpha\alpha'$ formano un fascio, che comprende l'iperpiano polare della traccia di quella retta su L: iperpiano che contiene L (n. 6). Quegl'iperpiani segano dunque L in uno stesso S_8, che possiamo determinare, per esempio, coll'iperpiano Π che lo projetta da Λ: questo iperpiano è il polare rispetto a $\mathfrak{N}$ della traccia P della retta $\alpha\alpha'$ su Λ.

12. Diremo che Π, o P, è imagine della quadrica-luogo considerata.

Se P è un punto generico di Λ, per esso passerà sempre *una* corda $\alpha\alpha'$ di V_9 (M., n. 20), la quale avrà sè stessa per omologa in $\mathfrak{J}$: sicchè i suoi due punti d'appoggio α, α' rappresenteranno, come sopra, i due regoli di una quadrica.

Sia invece P un punto della V_3 di $\mathcal{A}$. Allora (M., n. 43) il suo iperpiano polare Π rispetto a $\mathfrak{M}$ sarà tangente a V_9 in tutti i punti delle rette di questa uscenti da P. Ora una tal retta risponde a un fascio di piani di S_5, che comprende il piano di R rappresentato da P, e che quindi contiene un piano di R dell'altro sistema, la cui imagine sarà una traccia P' di quella retta sulla V_3 di L. In S_3, i punti P e P' avranno per corrispondenti rispettivamente (un piano rigato e una stella, ossia) un piano e un punto incidenti. Quindi la citata proposizione di (M.) n. 43 ci dà che la traccia S_8 di Π su L (la quale, se P era generico in $\mathcal{A}$, segava la V_3 di L in una superficie imagine di una quadrica di S_3) è tangente alla V_3 di L lungo una superficie, i cui punti rispondono ai punti del piano di S_3, che ha P come imagine. La rappresentazione, che abbiamo assunto, delle quadriche-luoghi di S_3 coi punti di $\mathcal{A}$, fa dunque corrispondere, in particolare, ai punti della V_3 di $\mathcal{A}$ le quadriche di S_3 degenerate in piani doppi.

13. Caratterizziamo ulteriormente questa rappresentazione delle quadriche-luoghi di S_3.

Per una quadrica *generica* consideriamo la corrispondente sezione iperpiana (generica) della V_3 di L. Se la quadrica varia in un fascio, cioè passa per l'intersezione di due sue posizioni particolari (generiche), un fatto analogo dovrà accadere per quella sezione iperpiana della V_3; ossia l'S_8 ben determinato che la contiene passerà per l'intersezione di due posizioni dello spazio stesso ([5]). L'S_8 varia in un fascio: quindi anche l'iperpiano che lo projetta da $\mathcal{A}$; e il suo polo P rispetto a $\mathfrak{M}$ descriverà una retta. Viceversa ad una retta di $\mathcal{A}$ risponde su L un fascio di sezioni iperpiane della V_3, e così in S_3 un fascio di quadriche. La rappresentazione puntuale di S_3 sulla V_3 dell'S_9 L è tale che alle quadriche di S_3 rispondono *linearmente* le sezioni iperpiane della V_3. Dunque questa V_3 è la nota V_3^8 di S_9, che rappresenta linearmente il sistema ∞^9 delle quadriche-luoghi di S_3. —

Similmente la V_3 di $\mathcal{A}_9$ è una V_3^8, i cui punti rappresentano i piani di S_3, in modo che le quadriche di S_3, come inviluppi di ∞^2 piani, rispondono

([5]) Dalla fine del n. 5 segue che l'intersezione della V_3 con un S_8 di L non sta in un altro S_8. Quindi l'intersezione della V_3 con due S_8 *generici* non sta in altri S_8 che quelli del fascio di questi due.

linearmente alle sezioni che su quella V_3 fanno gl'iperpiani passanti per L, e quindi anche ai poli di quegl'iperpiani rispetto a $\mathfrak{M}$, cioè ai punti di L; e in particolare (per dualità dal n. 12) le quadriche degenerate in stelle di piani contate doppiamente rispondono ai punti della V_3 di L.

14. Facciamo una breve digressione, per dimostrare in altro modo che, se la quadrica, i cui due regoli han per imagini i punti α, α' di V_9, descrive un fascio, il punto P traccia della retta $\alpha\alpha'$ su Λ descrive una retta.

I piani di S_5, che (colle loro tracce su R) rappresentano i regoli delle quadriche del fascio, formano una V_3, il cui ordine determineremo segandola con un piano di R. Se questo piano è preso fra i piani imagini dei piani rigati di S_3, dal fatto che sono 6 i regoli del nostro sistema che hanno una retta comune col piano rigato (perchè 3 sono le quadriche del fascio tangenti a un piano) segue che l'ordine cercato è 6. Se invece prendiamo un piano π di R tra quelli che rappresentano le stelle di raggi di S_3, si premetta che, essendovi nel dato fascio di quadriche 4 coni, ciò porta ad esservi nel sistema considerato ∞^1 di piani di S_5 4 piani giacenti in R, nella classe in cui s'è preso π; π incontra quei 4 piani, e poi ancora altri 2 del sistema ∞^1, imagini dei regoli di quella quadrica del fascio che passa pel centro della stella di raggi rappresentata da π. Sicchè anche in questo 2.° modo troviamo che la V_3 è del 6.° ordine. Essa è ellittica, perchè la g_2^1 delle coppie di piani imagini delle coppie di regoli incidenti (piani polari rispetto a R) ha 4 elementi doppi, appunto nei 4 suddetti piani giacenti in R.

Passando a S_{19}, avremo che le coppie di punti $\alpha\ \alpha'$ di V_9 formano una g_2^1 su una curva ellittica del 6.° ordine C, per modo che le coppie stesse sono su rette appoggiate a L_9 e Λ_9, e che la g_2^1 ha 4 punti doppi su L. Quelle rette costituiscono una rigata con due direttrici su L e su Λ. Un iperpiano per L contiene 2 soli punti variabili di C, quindi una sola generatrice della rigata; sicchè la direttrice che sta su Λ è una retta: ciò appunto che ci eravamo proposto di ritrovare. (Invece la direttrice che è su L sarà una cubica razionale).

Per la rappresentazione di una *schiera* di quadriche vi è solo da scambiare L e Λ.

15. Ritorniamo alla considerazione di un punto P di Λ_9 col suo iperpiano polare rispetto a $\mathfrak{M}$, il quale sega L_9 in un S_8, e la V_3^8 di L secondo la superficie imagine di una quadrica-luogo di S_3. I punti dell'S_8 rappresen-

tano (fine del n. 13) le quadriche-inviluppi di un sistema lineare ∞^8, che comprende le stelle contate doppiamente aventi per imagini i punti della detta sezione iperpiana di V_3^8. Ora un sistema lineare ∞^8 di quadriche-inviluppi si compone di quelle che sono armoniche, od apolari, ad una quadrica-luogo, composta appunto dei centri delle stelle doppie del sistema. Dunque le quadriche-inviluppi rappresentate dai punti dell'S_8 sono quelle armoniche alla quadrica-luogo rappresentata da P. Ossia: *un punto di $\varLambda$ e un punto di L rappresentano rispettivamente una quadrica-luogo e una quadrica-inviluppo, le quali sono mutuamente armoniche (od apolari) quando quei due punti sono coniugati rispetto a $\mathfrak{M}$.*

16. Quando un punto P di $\varLambda_9$ si riguarda come imagine di una quadrica-luogo, i due regoli di questa si hanno (n. 12) tirando da P la corda di V_9: i punti d'appoggio α, α' di questa rappresentano quei regoli. Essi coincidono se P rappresenta un cono. Su una retta generica di $\varLambda$ stanno 4 tali posizioni di P, perchè in un fascio di quadriche vi sono 4 coni. Saranno i 4 punti d'intersezione della retta colla varietà W_{18} luogo degli spazi S_9 tangenti alla V_9.

In questo modo il fatto che quella W_{18} è del 4.° ordine (M., n. 38) viene ad equivalere al fatto che il discriminante di una quadrica-luogo di S_3 è del 4.° grado.

L'intersezione di $\varLambda_9$ colla W_{18}^4 risulta essere la varietà V_8^4 di $\varLambda_9$ luogo dei punti imagini dei coni quadrici, varietà discriminante. *La separazione dei due regoli di una quadrica* corrisponde all'assumere lo spazio $\varLambda_9$ come *spazio doppio*, con quella V_8^4 come varietà di diramazione; vale a dire ad *estrarre la radice quadrata dal discriminante della quadrica.*

17. Daremo forma algebrica evidente a quest'ultima osservazione, otterremo cioè una notevole rappresentazione dei regoli con coordinate, facendo un'opportuna trasformazione lineare delle coordinate di cui dicevamo al principio del n. 9.

In S_{19} assumiamo i punti fondamentali delle coordinate 1, 2,... 10 nello spazio $\varLambda_9$, e i punti fondamentali residui 11, 12,... 20 in L_9. Le quadriche di S_3 son riferite biunivocamente a $\varLambda$ e a L, sì che le coordinate dei punti di $\varLambda$ sono in corrispondenza lineare coi coefficienti a_{hk} dell'equazione locale della quadrica, e similmente le coordinate dei punti di L coi coefficienti A_{hk} dell'equazione tangenziale (n. 13). Pensiamo fatta in S_{19} un'ulteriore sostituzione lineare per le coordinate $X_1, \dots X_{10}$, e una per le $X_{11}, \dots X_{20}$, equivalenti a quelle due corrispondenze lineari: così che un punto di $\mathcal{A}$ imagine della quadrica $\sum a_{hk} x_h x_k = 0$ avrà le $X_1, \dots X_{10}$ uguali rispettivamente alle a_{hk}, a meno di un fattore, e un punto di L imagine della quadrica stessa, come inviluppo, $\sum A_{hk} \xi_h \xi_k = 0$, avrà $X_{11}, \dots X_{20}$ proporzionali alle A_{hk}.

Un punto della V_9, imagine di un regolo di quella quadrica, sta sulla retta congiungente i due punti considerati di $\mathcal{A}$ e di L. Ha dunque le 20 coordinate esprimibili così:

$$X_1, \dots X_{10} = \rho\, a_{hk},$$

$$X_{11}, \dots X_{20} = A_{hk},$$

ove sarà da determinare il fattore ρ.

Fissiamo che le A_{hk} siano precisamente i complementi algebrici delle a_{hk} nel discriminante A della quadrica. Le formole precedenti rappresenteranno parametricamente la V_9 per mezzo dei 10 parametri omogenei a_{hk}. Per l'omogeneità di questi, sarà ρ una loro funzione algebrica omogenea di 2.° grado. Essa è a 2 valori, in corrispondenza ai due regoli della quadrica, ossia ai 2 punti d'incontro della retta su nominata colla V_9. Questi punti sono coniugati in $\mathfrak{J}$, cioè separati armonicamente da L e $\mathcal{A}$, sicchè i due valori di ρ sono opposti. La coincidenza di questi, ossia dei due regoli, si ha solo per $A = 0$. Dunque ρ è il prodotto di $\sqrt{A}$ per una funzione razionale di grado zero delle a_{hk}; la quale anzi dovrà ridursi a una costante, appunto perchè non può ρ annullarsi (o diventare infinita) se non è $A = 0$. Facciamo un'ultima modificazione delle coordinate dividendo per quella costante le $X_1, \dots X_{10}$. Otteniamo così questo risultato: ***Con una conveniente sostituzione lineare si può rappresentare la V_9 i cui punti sono imagini dei regoli di S_3, così che le 20 coordinate dei suoi punti siano espresse da***

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \dots X_{10} = a_{hk}\sqrt{A} \\ X_{11}, \dots X_{20} = A_{hk}, \end{array}\right\} \qquad (7)$$

ove le 10 quantità a_{hk} sono gli elementi di un determinante simmetrico A, e A_{hk} è il complemento algebrico di a_{hk} in A.

Si può precisare che se è $X_i = a_{hk}\sqrt{A}$, sia $X_{i+10} = A_{hk}$. Le a_{hk} e le A_{hk} sono i coefficienti dell'equazione locale e tangenziale della quadrica contenente il regolo che si considera. I due regoli di una stessa quadrica provengono dai due valori della $\sqrt{A}$ [6].

Le formole (6), che avevamo ottenuto al n. 10, confermano questa proposizione.

18. Quando in S_{19} il sistema di coordinate è quello ora scelto, il sistema nullo $\mathfrak{N}$ sarà quello rappresentato dall'equazione

$$\sum_1^{10} (X_l\, Y_{l+10} - X_{l+10}\, Y_l) = 0. \tag{8}$$

Per dimostrare ciò, si ricordi che $\mathfrak{N}$ ha L_9 e $\mathcal{A}_9$ per spazi totali; e che un punto di $\mathcal{A}$ e un punto di L sono coniugati in $\mathfrak{N}$ se rappresentano rispettivamente una quadrica-luogo A [7] e una quadrica-inviluppo B armoniche (n. 15), cioè tali che $\sum a_{hk} B_{hk} = 0$: la qual relazione, in base alle (7), dicendo X e Y i punti imagini delle due quadriche, rispettivamente, su $\mathcal{A}$ e L, diventa

$$\sum_1^{10} X_l\, Y_{l+10} = 0.$$

D'altra parte a questa equazione si riduce appunto la (8), se la si applica a quei due punti; di cui X, essendo su $\mathcal{A}$, ha nulle le coordinate X_{l+10} (e Y, essendo su L, ha nulle le Y_l, $l = 1, \ldots 10$). Inoltre il sistema nullo rappresentato da (8) è tale che due punti qualunque di $\mathcal{A}$, come pure due punti qualunque di L, sono coniugati in esso; cioè L e $\mathcal{A}$ sono spazi totali per (8). Ora è unico, come subito si vede, in S_{19} il sistema nullo che ha L e $\mathcal{A}$ per spazi totali, e che pone fra i punti coniugati rispettivamente di L e $\mathcal{A}$ una data reciprocità. Dunque la (8) ci dà veramente $\mathfrak{N}$.

In conseguenza, se consideriamo due regoli α, β di due quadriche A, B, e vogliamo la condizione perchè siano legati linearmente, ciò sarà come dire che i punti X, Y corrispondenti sono coniugati in $\mathfrak{N}$, ossia verificano la (8).

---

(6) La rappresentazione (7) cade in difetto per i punti della V_9 situati sulla V_{18}^2 del n. 7, cioè per i punti imagini di regoli degeneri: i secondi membri delle (7) sono allora tutti quanti nulli.

(7) Nel seguito ci accadrà ripetutamente di designare collo stesso simbolo, p. e. A, una quadrica e il suo discriminante. Ciò non potrà mai dar luogo a equivoci. —

Qui s'intenda che per la quadrica B si useranno notazioni analoghe a quelle introdotte per A.

Ponendo in questa le espressioni (7), abbiamo: *Il fatto che due regoli sono legati linearmente* (*vale a dire stanno in uno stesso complesso lineare di rette*) *si esprime coi coefficienti delle equazioni delle loro quadriche così:*

$$\sqrt{A}\,\Sigma\, a_{hk}\, B_{hk} - \sqrt{B}\,\Sigma\, b_{hk}\, A_{hk} = 0. \tag{9}$$

Poichè un cambiamento di segno ai due radicali quadratici, che compajono in questa condizione, non la altera, mentre esso risponde al mutare i due regoli nei loro incidenti, avremo: *Se due regoli* α, β *sono legati linearmente, anche i regoli* α', β' *ad essi incidenti saranno così legati* [8].

Complessi lineari di regoli. Esempi particolari.

19. I piani di un *complesso lineare di piani* di S_5 (M., n. 2) segnano su R le imagini degli ∞^8 regoli di un *complesso lineare di regoli.* In altri termini, un complesso lineare di regoli è l'insieme degli ∞^8 regoli le cui 20 coordinate (n. 9) verificano una data equazione lineare omogenea. Od anche, ricordando [M., nota (4)] che un complesso lineare di piani in S_5 si può definire come un insieme algebrico irriducibile di piani tale che in un fascio generico ve n'è un solo: *un insieme algebrico irriducibile di regoli di* S_3 *si dice «complesso lineare», quando in un fascio di regoli* (n. 4) *ve n'è in generale un solo.*

---

(8) Questa proposizione [che seguiva anche dalla nota (4), cambiando, nella condizione (5) di là, il segno a una delle a e una delle b] si trova, ad es., in A. Voss, *Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades*, Math. Annalen, 10 (1876), p. 143; e precisamente in principio di p. 176. La semplice dimostrazione che ivi è data (in cui va corretta la svista tipografica di una α_x invece di a_x) si può rivestire di forma puramente geometrica. — D'altronde la proposizione stessa non è che una traduzione nell'S_8 rigato del fatto, che in S_5, se due piani (quelli che corrispondono ad α, β) sono incidenti, anche i loro piani polari rispetto ad R saranno incidenti. —

Si noti anche quest'altra conseguenza dell'equazione (9) e di quella che se ne trae mutando il segno ad *uno* solo dei due radicali quadratici: *È la stessa cosa dire che due quadriche sono armoniche* (*od apolari*) *in doppio modo, o dire che ciascun regolo dell'una è legato linearmente a ciascun regolo dell'altra.* (Elementarmente poi si trova subito che questi fatti equivalgono anche all'esistenza, in un regolo dell'una quadrica, di due rette polari fra loro rispetto all'altra quadrica. Se ciò avviene per un regolo, avverrà pure per l'altro; e si conserverà scambiando le due quadriche). Cfr. Voss, loc. cit., pp. 174, 177.

In S_{19} i complessi lineari di regoli saranno rappresentati (come i complessi lineari di piani di S_5) dalle sezioni iperpiane della V_9. Possiamo pure assumere come imagine di un complesso lineare di regoli l'iperpiano di S_{19}, od anche il polo dell'iperpiano rispetto a $\mathfrak{N}$.

I complessi lineari di regoli sono ∞^{19}.

20. Come in S_5 un esempio particolare di complessi lineari di piani è dato (M., n. 2) dall'insieme dei piani incidenti ad un piano fisso (*nucleo*); così, segando R con questi piani, si ha che un particolare complesso lineare di regoli (complesso *nucleato*) è dato dall'insieme dei regoli legati linearmente ad un regolo fisso (*nucleo* del complesso di regoli) (9).

In S_{19} i punti imagini di tali complessi lineari sono i punti della V_9.

21. Altre classi particolari di complessi lineari di regoli sono quelle rappresentate dai punti di A_9 o di L_9, cioè dagl'iperpiani passanti per A o per L. Un iperpiano passante per A sega L in punti che rappresentano, in un certo senso (nn. 12, 15), le ∞^8 quadriche-inviluppi armoniche ad una quadrica-luogo fissa; e sega la V_9 nelle coppie di punti d'appoggio delle corde di questa varietà passanti per quei punti di L (perchè tali corde incontrano pure A). Ne viene che il complesso lineare di regoli rappresentato dal detto iperpiano si compone dei regoli situati sulle ∞^8 quadriche-inviluppi nominate. *I regoli delle quadriche-inviluppi (o -luoghi) armoniche ad una quadrica-luogo (o -inviluppo) fissa formano un complesso lineare* (10).

Si vede così come il nostro concetto generale di complesso lineare di regoli viene a fondere insieme i due concetti distinti, fra loro duali: complesso lineare ∞^8 di quadriche-luoghi, e complesso lineare ∞^8 di quadriche-inviluppi. Queste due diverse classi, di ∞^9 enti, vengono a rientrare insieme fra i complessi lineari di regoli, che sono enti molto più generali, ∞^{19}.

22. In S_5, se prendiamo i piani polari rispetto a R dei piani di un complesso lineare, otterremo ancora i piani di un complesso lineare. Dunque,

---

(9) Se α è il regolo nucleo di un complesso nucleato, indicheremo talvolta il complesso col simbolo $[\alpha]$.

(10) Effettivamente in un fascio di regoli vi è un sol regolo di un tal sistema, perchè in un fascio-schiera vi è una sola quadrica-inviluppo (ad es.) armonica ad una data quadrica-luogo. —

Se f è la quadrica-luogo (o -inviluppo) fissa, ci accadrà d'indicare il complesso di regoli, di cui qui si tratta, con $[f]$.

in S_3: ***i regoli incidenti ai regoli di un complesso lineare*** Γ ***formano ancora un complesso lineare*** Γ'. — Due complessi lineari così legati hanno per imagini in S_{19} due iperpiani, oppure due punti, fra loro omologhi nell'involuzione $\mathfrak{J}$.

Da quest'ultima osservazione deduciamo subito che i due complessi lineari Γ, Γ' coincidono solo quando l'iperpiano che rappresenta uno di essi è *unito* per $\mathfrak{J}$, cioè passa per l'uno o l'altro dei due assi L, Λ. ***Le due specie particolari di complessi lineari di regoli, di cui al n. 21, sono caratterizzate da ciò: che il complesso lineare, con ogni suo regolo, contiene sempre anche il regolo incidente.***

23. *Fasci* di complessi lineari di regoli, e così *reti*, ecc., si diranno i sistemi di tali complessi rappresentati in S_{19} da fasci, reti, ecc. d'iperpiani; o, se si preferisce, dai punti di una retta, o di un piano, ecc. Non occorre che ci fermiamo su di ciò. Rileviamo solo, perchè sarà utile in seguito, che un complesso Γ può essere determinato dando un fascio di complessi di cui Γ faccia parte, ed un regolo contenuto in Γ; come pure dando due fasci di complessi tali che Γ stia in entrambi. La costruzione di Γ, in ciascun caso, si fa ovviamente ([11]).

Anche si osservi, riguardo alla proprietà caratteristica di un complesso lineare di regoli (n. 19), che se, invece di cercare *nei fasci di regoli* i regoli del complesso, cerchiamo questi ad es. fra i regoli *di un fascio di quadriche*, troveremo che ve ne sono, non *uno*, ma *sei* in generale: perchè i regoli delle quadriche di un fascio hanno per imagini in S_{19} i punti di una curva (n. 14), che è segata dall'iperpiano imagine del complesso lineare, in generale, in 6 punti. — Lo stesso, se invece che un fascio di quadriche si considera una schiera.

([11]) Nel 2.° caso siano C, D due dati complessi lineari di regoli, che determinino l'un fascio; E, F due che determinino l'altro fascio. Possiamo proporci di costruire quel regolo di Γ, che sta in un dato fascio di regoli: ossia che sta in una data congruenza lineare di rette γ e passa per due date rette m, n di questa. A tal fine si cerchino in γ quei regoli di C che passano per m: formeranno un fascio, cioè avranno comune un'altra retta p. Così pure i regoli di D appartenenti a γ e passanti per m avranno in comune un'altra retta q. Il regolo di $m\,p\,q$ sarà comune a C e D. Similmente si costruisce in γ il regolo per m comune a E e F. Questi due regoli di γ avranno comune, oltre ad m, un'altra retta r. Il regolo cercato di Γ sarà quello di $m\,n\,r$.

Le due quadriche d'appoggio di un complesso lineare di regoli.

24. Per un punto qualunque P di S_{19} passa una retta contenente un punto di L e un punto di Λ. In essa starà pure l'omologo P' di P nell'involuzione $\mathfrak{J}$. Poichè i punti di una retta di S_{19} sono imagini di un fascio di complessi lineari di regoli, ne segue (nn. 21, 22):

Dato un complesso lineare Γ di regoli, restano individuate in generale una quadrica-luogo f e una quadrica-inviluppo φ, — che diremo « gli appoggi » di Γ, — tali che Γ sta (col complesso lineare Γ' costituito dai regoli incidenti a quelli di Γ) nel fascio di complessi lineari determinato dal complesso $[f]$ dei regoli situati sulle superficie di 2.ª classe armoniche a f e dal complesso $[\varphi]$ dei regoli situati sulle superficie di 2.° ordine armoniche a φ.

In altre parole: dato un complesso lineare Γ di regoli, le quadriche di cui *ambi* i regoli (non uno solo) stanno in Γ sono le ∞^7 che, come inviluppi, sono armoniche a una stessa quadrica-luogo f, e, come luoghi, sono armoniche a una stessa quadrica-inviluppo φ. Sono f e φ i due *appoggi* di Γ.

25. Adottando come coordinate dei regoli quelle del n. 17, le loro espressioni (7) mettono in evidenza la proposizione precedente. In fatti l'equazione di un complesso lineare di regoli Γ, ossia un'equazione lineare fra quelle $X_1, \ldots X_{20}$, si potrà, per le (7), scrivere così:

$$\sqrt{M}\,\Sigma\,\varphi_{hk}\,m_{hk} + \Sigma\,f_{hk}\,M_{hk} = 0, \qquad (10)$$

ove le φ_{hk} e f_{hk} sono i 20 coefficienti costanti, mentre le m_{hk}, M_{hk}, $\sqrt{M}$, che prendono il posto delle a_{hk}, A_{hk}, $\sqrt{A}$ nelle (7), si riferiscono ad un regolo variabile di Γ. Ora quell'equazione (10) mostra che questo complesso lineare, come pure quello Γ' dei regoli incidenti, che si ottiene semplicemente col mutare il segno (a $\sqrt{M}$, oppure) ai coefficienti φ_{hk}, stanno nel fascio dei due complessi

$$\Sigma\,\varphi_{hk}\,m_{hk} = 0, \qquad \Sigma\,f_{hk}\,M_{hk} = 0. \qquad (11)$$

E questi sono appunto: il complesso $[\varphi]$ dei regoli giacenti sulle quadriche armoniche come luoghi a

$$\varphi\,(\xi) \equiv \Sigma\,\varphi_{hk}\,\xi_h\,\xi_k = 0$$

e il complesso $[f]$ dei regoli giacenti sulle quadriche armoniche come inviluppi a

$$f(x) \equiv \Sigma f_{hk} x_h x_k = 0.$$

26. Da questa rappresentazione analitica (10) appare subito che i due appoggi f e φ son legati linearmente a Γ, ossia: Se un complesso lineare Γ di regoli descrive un fascio, la quadrica-luogo f di appoggio descrive in generale un fascio, e la quadrica-inviluppo φ d'appoggio una schiera.

Ciò risulta anche geometricamente: perchè se il punto P imagine di Γ in S_{19} descrive una retta, P' descriverà la retta omologa in $\mathfrak{I}$, e la retta PP' genererà un regolo, che avrà su L e su Λ risp. due direttrici rettilinee.

Similmente, in generale, se Γ descrive una rete, ecc.

27. I due appoggi di Γ si posson anche definire: f come *luogo dei centri delle stelle che, in qualità di regoli degeneri, fanno parte di* Γ; φ dualmente, quale *inviluppo dei piani che, come regoli degenerati in piani rigati, fanno parte di* Γ. Invero, ogni regolo degenerato, ad es., in un piano rigato sta, senz'altra condizione, nel complesso $[f]$; sicchè per un tal regolo il far parte di Γ equivale allo stare in $[\varphi]$, ossia ad essere il suo piano un piano tangente di φ.

Se Γ appartiene alla 1.ª o alla 2.ª delle due specie particolari di complessi del n. 21, è completamente indeterminata l'una o l'altra delle due quadriche d'appoggio (risp. φ o f).

I due regoli cardini di un complesso lineare. Legame cogli appoggi di questo.

28. Come al n. 24 abbiamo considerato, pel punto P imagine di un complesso lineare di regoli, la retta che va da esso ad incontrare L e Λ, così ora pensiamo la retta che va da P ad incontrare in due punti la V_9. Quei due punti saranno imagini di due regoli α, β, ed anche dei complessi lineari nucleati $[\alpha]$, $[\beta]$ (n. 20). Otteniamo in tal modo la seguente proposizione:

Un complesso lineare di regoli Γ *definisce in generale una coppia di regoli* α, β, *tali che* Γ *è nel fascio di complessi determinato dal complesso* $[\alpha]$

dei regoli legati linearmente ad α *e dal complesso* [β] *di quelli legati linearmente a* β.

Diremo α e β *cardini* (fra loro *coniugati*) di Γ.

Nel seguito indicheremo sempre con A e B risp. le quadriche su cui stanno α e β.

29. Una stella di raggi, che contenga una retta di α e una di β, si può riguardare come un regolo legato linearmente sì ad α che a β. (Sta in fatti con α in un complesso lineare speciale di rette avente l'asse in una *direttrice* di α; e così per β). Essa ci dà dunque un regolo di Γ; e perciò il suo centro, che è un punto comune alle quadriche A, B, sta sulla quadrica f luogo dei centri delle stelle di Γ. *La quadrica d'appoggio f è nel fascio delle due quadriche A, B contenenti i cardini* α, β [12].

Dualmente *la* φ *sta nella schiera di quadriche determinata da A e B.*

30. Il tetraedro polare comune ad A, B sarà anche polare per f e φ. L'involuzione assiale che ha per assi due spigoli opposti del tetraedro muta in sè α, β, f, φ: e quindi anche Γ, poichè Γ si può definire come quel complesso che è comune al fascio determinato dai due complessi [α], [β] e a quello determinato da [f], [φ]. Dunque: *un complesso lineare di regoli ammette in generale il gruppo G_4 delle tre collineazioni involutorie biassiali di un tetraedro* [13].

31. Il teorema del n. 29 si può ritrovare algebricamente, rappresentando il complesso Γ di regoli (m_{hk}, M_{hk}, $\sqrt{M}$) coll'equazione (10) del n. 25, e profittando della (9) per rappresentarci i complessi nucleati. Se i nuclei di due tali complessi sono α (a_{hk}, A_{hk}, $\sqrt{A}$) e β (b_{hk}, B_{hk}, $\sqrt{B}$), i complessi stessi saranno:

$$\sqrt{M}\sum A_{hk}\, m_{hk} - \sqrt{A}\sum a_{hk}\, M_{hk} = 0$$

$$\sqrt{M}\sum B_{hk}\, m_{hk} - \sqrt{B}\sum b_{hk}\, M_{hk} = 0.$$

---

(12) Lo stesso fatto rientra nell'osservazione generale del n. 26, applicata al caso che Γ varî nel fascio dei complessi lineari aventi i dati cardini α, β: essa dà in fatti che f varierà allora nel fascio di quadriche che contiene appunto A e B.

(13) Non ammette invece le omologie armoniche del tetraedro, perchè queste mutano α nel regolo incidente α', ecc.

Il complesso Γ dato dalla (10) sarà nel fascio di questi due complessi nucleati, se esistono λ e μ tali che

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{hk} &= \lambda A_{hk} + \mu B_{hk} \\ -f_{hk} &= \lambda \sqrt{A}\, a_{hk} + \mu \sqrt{B}\, b_{hk}\,. \end{aligned}\right\} . \tag{12}$$

Queste formole mettono in evidenza appunto il teorema del n. 29. Esse hanno una speciale importanza, perchè danno in modo completo, esplicito, il legame fra i due cardini α, β e le due quadriche d'appoggio f, φ di uno stesso complesso lineare di regoli.

Dati α e β, e facendo variare $\lambda:\mu$, le (12) danno una corrispondenza biunivoca tra le quadriche f del fascio di A e B, e le quadriche φ della schiera di A e B: corrispondenza che vien posta dal fascio dei complessi lineari di regoli aventi α e β per cardini, e che nel seguito sarà ancora approfondita (v. in particolare i nn. 41, 43, ecc.).

Scrivendo che un punto x sta su f e che un piano ξ tocca φ, abbiamo dalle (12) [posto $A(\xi) \equiv \sum A_{hk}\, \xi_h\, \xi_k$, $a(x) \equiv \sum a_{hk}\, x_h\, x_k$, ecc.]:

$$\lambda A(\xi) + \mu B(\xi) = 0$$

$$\lambda \sqrt{A}\,.\, a(x) + \mu \sqrt{B}\,.\, b(x) = 0,$$

donde:

$$\sqrt{A}\,.\, a(x)\, B(\xi) - \sqrt{B}\,.\, b(x)\, A(\xi) = 0. \tag{13}$$

Quest'equazione rappresenta un connesso (2, 2) di punti e piani, legato alle due quadriche A, B, e più precisamente ai loro regoli α, β: col quale connesso si pone appunto tra il fascio di quadriche AB e la schiera AB la corrispondenza di cui s'è parlato.

Od anche, possiamo dire che la quantità

$$\frac{a(x)\,.\,\sqrt{A}}{A(\xi)},$$

dove x e ξ sono un punto e un piano, ha lo stesso valore per due diverse quadriche (più esattamente, per due regoli), quando la quadrica del loro fascio passante per x e quella della loro schiera tangente a ξ sono, colle due quadriche date, nella relazione, che stiamo considerando ([14]).

([14]) Così, se x e ξ sono il punto e il piano fondamentale 1 delle coordinate, si tratterà del rapporto $\dfrac{a_{11}\sqrt{A}}{A_{11}}$.

CENNO DI CASI PARTICOLARI.

32. Un caso particolare notevole è dato da quei fasci di complessi lineari di regoli, che sono rappresentati da rette di S_{19} congiungenti due punti della V_9 coniugati in $\mathfrak{J}$: dunque da rette che sono in pari tempo incidenti a L, $\mathcal{A}$, e corde della V_9. Sono fasci caratterizzati da una qualunque di queste due proprietà: che *le due quadriche d'appoggio f e φ sono una stessa quadrica*, riguardata rispettivamente come luogo e come inviluppo; o che *i due regoli cardini α e β sono fra loro incidenti.* Questi due regoli saranno allora quelli della detta quadrica unica. Siamo nel caso che, ad es. nelle (12), $b_{hk} = a_{hk}$, e quindi $B_{hk} = A_{hk}$, ma $\sqrt{B} = -\sqrt{A}$.

33. Si può rilevare anche il caso di un complesso lineare di regoli, del quale un cardine α degeneri in una stella di raggi. Allora lo stesso ragionamento che s'è fatto al n. 29 prova che l'altro cardine β starà su f, cioè B coincide con f. La φ è nella schiera determinata da f e dal punto (doppio) centro della stella α, ecc.

Se l'un cardine degenera in una stella O e l'altro in un piano rigato ω (indipendente da O), anche in ω e O contati doppiamente degenerano gli appoggi f e φ. Il complesso lineare di regoli Γ è allora determinato semplicemente da O, ω e da un suo regolo. Si può domandare una relazione fra O, ω e due regoli qualunque di Γ, che non esiga la considerazione dei complessi lineari di regoli.

Si ha (M., n. 32) che l'essere la stella O e il piano rigato ω i cardini per un complesso lineare di regoli che comprende due dati regoli, equivale all'essere questi ultimi i cardini di un complesso lineare di regoli contenente la stella O e il piano rigato ω. Se dunque assumiamo i due regoli dati come gli α e β del n. 31 (e preced.[i]), sicchè ne deriva la corrispondenza ivi considerata tra il fascio di quadriche e la schiera, contenenti le quadriche A e B di α e β, staranno O e ω (sui due appoggi del nuovo complesso, cioè) su una quadrica del fascio e su una della schiera, fra loro omologhe. La (13) del n. 31, in cui x e ξ siano appunto O e ω, esprimerà il legame cercato fra i due regoli dati e O, ω. I teoremi del seguito daranno semplici relazioni geometriche tra la quadrica del fascio AB passante per O e la quadrica tangente a ω della schiera AB: con che sarà risolta la questione che ci siam posta ([15]).

34. Da un altro punto di vista si hanno altri casi speciali di complessi lineari di regoli.

In (M.) sono considerati quei complessi lineari di piani di S_5, pei quali i due cardini coincidono, come pure quelli che ammettono infinite coppie di cardini coniugati. Traducendo nel nostro linguaggio attuale, abbiamo: 1.°) i complessi lineari di regoli coi due cardini α, β coincidenti (singolarità che importa una sola condizione); 2.°) quelli con infinite coppie di cardini coniugati, come α, β. Questi ultimi complessi (che diremo *doppiamente singolari*, ma la cui singolarità importa 5 condizioni) si determinano assumendo come cardini coniugati α, β due regoli legati linearmente. Diciamo una parola su essi. (Sugli altri v. nel seguito il n. 50).

In S_5 abbiamo (M., n. 25) che, se un complesso lineare di piani ammette un punto *totale* O, ammette pure un iperpiano *totale* Ω, e viceversa; e il complesso è doppiamente singolare. Ne viene questa proposizione: Se un complesso lineare Γ di regoli è tale che esista un complesso lineare di rette F, di cui *tutti* i regoli stanno in Γ, vi sarà pure un complesso lineare di rette F', involutorio o armonico ad F, tale che *tutti* i regoli incidenti a regoli di F' stanno in Γ.

I complessi lineari di rette F, F' definiscono due sistemi nulli, che indicheremo colle stesse lettere, rappresentati in S_5 dalle omologie armoniche che mutano R in sè e che hanno l'una per iperpiano d'omologia Ω, l'altra per centro d'omologia O. Da (M.) n. 25 risulta evidente che tali omologie mutano $\overline{\Gamma}$ ([16]) in sè. Dunque il complesso lineare di regoli Γ è mutato in sè dai due sistemi nulli F, F': che sono quelli relativi ai due complessi lineari di rette, di cui l'uno contiene α e β, l'altro contiene i regoli α' e β' incidenti a questi.

Ne segue che F (o F') muta l'una nell'altra le due quadriche f, φ d'appoggio di Γ. Perciò *f e φ si tagliano in questo caso in un quadrilatero* (quello delle generatrici di f, ad es., che sono unite per F).

([15]) Se nella (13) si suppongono dati $O(x)$ e $\omega(\xi)$, e il regolo $(a_{hk}, A_{hk}, \sqrt{A})$, la (13) stessa diventa l'equazione, nelle coordinate di regolo variabile $b_{hk}\sqrt{B}$, B_{hk}, del complesso lineare di regoli Γ.

([16]) Qui e nel seguito indichiamo con $\overline{\Gamma}$, $\overline{\alpha}, \ldots$ gli enti di S_5, che rappresentano gli enti Γ, $\alpha, \ldots$ di S_3.

Ulteriori proposizioni sui cardini e sugli appoggi di un complesso lineare. Legami tra il fascio e la schiera che congiungono due date quadriche.

35. Dalla (M.) n. 26 si trae un'altra definizione dei cardini di un complesso lineare di regoli.

Se del complesso Γ si vogliono quei regoli che stanno in una data congruenza lineare di rette, si trova che essi costituiscono in generale un sistema lineare ∞^2. Ma esistono congruenze lineari particolari, per ognuna delle quali avviene che *tutti* i suoi ∞^3 regoli sono regoli di Γ. Orbene queste congruenze, che diremo *totali* per Γ, sono definite dai due regoli cardini α e β così: esse sono le intersezioni dei complessi lineari di rette passanti per α coi complessi lineari di rette passanti per β. Ossia esse sono quelle congruenze lineari che contengono due rette di α e due rette di β, vale a dire che hanno per direttrici due rette appoggiate alle stesse 4 rette di α e β.

Similmente: i regoli di Γ passanti per due date rette p, q sono in generale ∞^2 e riempiono un complesso lineare di rette. Ma esistono tali coppie $p\ q$ che *tutti* i regoli che le contengono stanno in Γ. Le rette di una coppia siffatta sono le due rette comuni a una congruenza lineare di rette passante per α e ad una passante per β: ossia sono due rette appoggiate alle stesse 4 rette dei due regoli α', β' incidenti ad α, β.

36. Si è così condotti a considerare una particolare corrispondenza fra rette di S_3, determinata da due regoli dati α e β: la corrispondenza $\mathfrak{T}$, in cui si chiamano omologhe due rette quando incontrano le stesse rette di α e di β. E insieme con essa si presenta la corrispondenza analoga $\mathfrak{T}'$ definita similmente dai regoli α', β' incidenti ad α, β. In S_5 si tratta della corrispondenza fra punti di R situati sulle rette incidenti a due piani fissi, e di quella analoga definita dai piani polari di questi rispetto a R.

Si riconosce subito che $\mathfrak{T}$, ad es., è generalmente biunivoca; che esistono 3 coppie di rette omologhe in $\mathfrak{T}$, di cui una retta sta in una data stella e l'omologa in un dato piano; e 2 coppie, le cui rette stanno rispettivamente in due date stelle, o in due dati piani ([17]).

([17]) Per vedere ciò, basta considerare, fra una stella e un piano rigato, o fra due stelle, o fra due piani, la projettività in cui sono omologhi i piani e i punti che appartengono ad

Questa corrispondenza $\mathfrak{T}$, come l'insieme delle congruenze *totali*, sono comuni a tutti i complessi lineari di regoli Γ del fascio definito dai due cardini α, β.

37. Fra le congruenze lineari di rette, che sono totali per un complesso lineare di regoli Γ, consideriamo quelle *speciali*, cioè a direttrici infinitamente vicine. Queste direttrici saranno le rette unite della corrispondenza $\mathfrak{T}$ (e anche della $\mathfrak{T}'$, com'è facile vedere). Poichè una congruenza siffatta contiene due rette $a\ a_1$ di α e due rette $b\ b_1$ di β, la sua direttrice p sarà tale che i suoi 4 punti d'incontro con quelle 4 rette, e i 4 piani che la congiungono risp. alle rette stesse, formano due quaterne projettive. Viceversa ogni retta p, che, colle rette $a\ a_1$, $b\ b_1$ dei regoli α, β ad essa incidenti, soddisfi a questa condizione, è direttrice di una congruenza lineare speciale contenente $a\ a_1$ $b\ b_1$, e quindi totale per Γ.

Ora, in una Nota recente ([18]) ho fatto vedere che, dati due regoli $\alpha\ \beta$, le rette p tali che la quaterna dei punti d'incontro di p colle rette di $\alpha\ \beta$ incidenti a p sia projettiva alla quaterna dei piani che, rispettivamente, congiungono p alle rette stesse, formano un complesso quadratico (generale) di Battaglini. Dunque: *le direttrici delle congruenze lineari speciali che sono totali per* Γ (e per ogni complesso lineare di regoli avente gli stessi cardini α, β) *formano un complesso quadratico di rette del* Battaglini. Lo indicheremo con T.

Il complesso T si può definire nello stesso modo coi due regoli α', β' incidenti a α, β. Esso contiene ogni fascio di rette determinato da due rette (incidenti) di α e β; ecc., ecc. (v. la Nota citata).

38. Si prenda una congruenza lineare speciale di rette (non spezzata), nella sua rappresentazione in S_5, cioè come cono quadrico (irriducibile) di R. Supponendo che essa sia totale per Γ, si avrà, in particolare, che il piano ρ tangente a quel cono lungo una sua generatrice r sarà un piano del-com-

---

una stessa retta del regolo α, e la projettività che proviene analogamente dal regolo β. Si tratta delle 3 coppie di elementi omologhi comuni a quelle due projettività (togliendo, se le due forme geometriche sono omonime, la retta comune ad esse, nella quale coincidono appunto i due elementi di una di quelle coppie).

([18]) *Su una generazione dei complessi quadratici di rette del* Battaglini. Rendic. Circolo matem. di Palermo, 42, 1917, pag. 85.

plesso lineare di piani $\bar{\Gamma}$ (corrispondente a Γ) di S_5. Per r passano due piani di R, situati in un fascio con ρ (fine del n. 2). Se uno di essi sta pure in $\bar{\Gamma}$, tutto il fascio di piani starà in $\bar{\Gamma}$, e quindi anche il 2.° di quei due piani. Ritornando all'S_3 rigato, r ci dà un fascio di rette della nostra congruenza lineare speciale, e i due piani di R passanti per r ci danno il centro e il piano di quel fascio: elementi omologhi nella projettività intorno alla retta p, che definisce la congruenza lineare speciale. D'altronde i piani di R appartenenti al complesso $\bar{\Gamma}$ rappresentano risp. i punti di f e i piani di φ. Quindi l'osservazione precedente ci dà:

Per ogni retta p del complesso T, la projettività, che fra i suoi punti e piani è determinata dalle rette ad essa incidenti dei regoli α, β, fa corrispondere ai punti della quadrica f i piani della quadrica φ.

39. Viceversa, abbiansi un punto P di f e un piano π di φ, tra loro incidenti. Vorrà dire, in S_5, due piani del complesso $\bar{\Gamma}$ giacenti in R e passanti per una retta r (imagine del fascio di rette $P\pi$): onde tutti i piani del fascio di quei due, ossia tutti i piani tangenti a R lungo r, staranno in $\bar{\Gamma}$. Per r passa anche un S_3 che è totale per $\bar{\Gamma}$ (ossia incidente secondo rette ai piani $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$). Esso, insieme col detto fascio di piani passanti per r, starà nell'S_4 luogo dei piani di $\bar{\Gamma}$ passanti per r ([19]); e però avrà comune un piano con quel fascio. Così quell'S_3 totale di $\bar{\Gamma}$, contenendo un piano tangente a R lungo r, sarà tangente a R in un punto di r: rappresenterà cioè una congruenza lineare speciale, che è totale per Γ, e che contiene il fascio di rette $P\pi$ di cui r era imagine.

Dunque: *un punto di f e un piano di φ, tra loro incidenti, sono sempre omologhi nella projettività che, fra i punti e i piani di una retta (in generale unica) del complesso T, è determinata dalla congruenza lineare speciale inerente (per T) a questa retta.*

40. I fasci di rette col centro in f e col piano in φ si presentano nei nn. 38, 39 in un modo che va rilevato. Contati doppiamente, costituiscono regoli di Γ ([20]). Ma ciò non li caratterizza, senz'altro. Si può dire che *ogni*

([19]) Dicendo così, si esclude il caso che r sia retta totale per $\bar{\Gamma}$, cioè incidente a $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$. In tal caso il fascio di rette $P\pi$ contiene una retta del regolo α e una di β; ogni sua retta è nel complesso T e soddisfa all'enunciato finale di questo n. 39.

([20]) Anche se, per una retta p del complesso T, si prendono due fasci qualunque distinti di rette della congruenza lineare speciale di direttrice p, che è totale per Γ, essi costituiscono sempre un regolo degenere di Γ.

regolo degenerato in un fascio di rette da contarsi doppiamente sta in Γ. Infatti, ogni tal regolo è rappresentato in S_5 (n. 2) da tutto un fascio di piani tangenti a R lungo una retta r; e in questo fascio vi è *sempre* un piano che sta in $\bar{\Gamma}$. O, ricorrendo a S_{19}, quel regolo ha per imagini tutti i punti di una retta, e questa incontra in un punto l'iperpiano imagine di Γ.

Ma i regoli degeneri da noi incontrati, ossia fasci doppi di rette, col centro in f e piano in φ, stanno in Γ, per così dire, in un senso più completo: sono cioè quelli le cui imagini in S_5, o in S_{19}, stanno *completamente* nell'imagine di Γ (*tutti* i piani tangenti a R lungo r stanno in $\bar{\Gamma}$; o, per S_{19}, *tutta* la retta sta nell'iperpiano).

41. Dai nn. 38, 39 tragghiamo questo notevole teorema relativo alle quadriche.

Siano dati due regoli α, β, rispettivamente di due quadriche A, B. Da essi risulta determinata una corrispondenza tra le quadriche del fascio di A e B e le quadriche della schiera di A e B, nel seguente modo. Si consideri il complesso di Battaglini *T delle rette, fra i cui punti e piani si ha una projettività, nella quale sono omologhi quei punti e quei piani che appartengono rispettivamente alle stesse 4 rette di α, β. Diciamo $P\pi$ ogni coppia di punto e piano omologhi in quelle projettività: sicchè a ciascun punto P spettano (∞^1 rette di T e quindi) ∞^1 piani π, e viceversa ad ogni π ∞^1 punti P. Ciò posto, se il punto P è preso su una data quadrica f del fascio $A\,B$, π riescirà sempre tangente a una quadrica φ della schiera $A\,B$, ben determinata da f; e viceversa.* (Dato P, gli ∞^1 piani π inviluppano il cono circoscritto da P a φ; ecc.).

Due quadriche f, φ così legate sono gli appoggi di uno stesso complesso lineare di regoli, avente per cardini α e β.

Dal n. 31 risulta che le formole (12) esprimono le f e φ per mezzo di α, β: corrispondendosi f e φ che provengano dallo stesso valore di $\lambda:\mu$.

42. Dal teorema del n. 38 segue che, se sulla retta p del complesso T coincidono gl'incontri con f, coincideranno pure i piani di φ per essa. Ossia: *ogni retta di T tangente a una delle quadriche f, φ è pur tangente all'altra; il complesso T e i due complessi delle tangenti a f e a φ formano fascio.* Anche con questa proposizione si pone, adoperando il complesso T, la corrispondenza tra le f e le φ.

Possiamo profittare delle formole (12), e dell'equazione del complesso T data nella Nota citata in ([18]), per verificare l'ultima proposizione.

Prendiamo le equazioni delle quadriche A, B, come luoghi, sotto la forma canonica

$$\sum a_i x_i^2 = 0, \qquad \sum b_i x_i^2 = 0.$$

Le (12) danno allora:

$$\varphi \equiv \sum (\lambda\, a_2\, a_3\, a_4 + \mu\, b_2\, b_3\, b_4)\, \xi_1^2$$

$$-f \equiv \sum (\lambda \sqrt{A} \,.\, a_i + \mu \sqrt{B} \,.\, b_i)\, x_i^2,$$

ove $A = a_1\, a_2\, a_3\, a_4$, $B = b_1\, b_2\, b_3\, b_4$. In conseguenza il complesso delle tangenti alla quadrica f è

$$\sum (\lambda \sqrt{A} \,.\, a_1 + \mu \sqrt{B} \,.\, b_1)\, (\lambda \sqrt{A} \,.\, a_2 + \mu \sqrt{B} \,.\, b_2)\, p_{12}^2 = 0,$$

ossia

$$\sum [A\, \lambda^2\, a_1\, a_2 + \sqrt{A}\, \sqrt{B}\, \lambda\, \mu .(a_1\, b_2 + a_2\, b_1) + B\, \mu^2\, b_1\, b_2]\, p_{12}^2 = 0; \tag{14}$$

e il complesso delle tangenti a φ è

$$\sum (\lambda\, a_1\, a_2\, a_4 + \mu\, b_1\, b_2\, b_4)\, (\lambda\, a_1\, a_2\, a_3 + \mu\, b_1\, b_2\, b_3)\, p_{12}^2 = 0,$$

ossia

$$\sum [A\, \lambda^2\, a_1\, a_2 + a_1\, a_2\, b_1\, b_2\, \lambda\, \mu\, (a_3\, b_4 + a_4\, b_3) + B\, \mu^2\, b_1\, b_2]\, p_{12}^2 = 0. \tag{15}$$

Sottraendo questa dalla (14), si vede che, qualunque siano λ μ, la congruenza delle tangenti comuni a f e φ sta sempre nel complesso quadratico fisso di equazione

$$\sum [\sqrt{A}\, \sqrt{B}\, (a_1\, b_2 + a_2\, b_1) - a_1\, a_2\, b_1\, b_2\, (a_3\, b_4 + a_4\, b_3)]\, p_{12}^2 = 0,$$

che si può anche scrivere:

$$\sum \left[a_1\, b_2 + a_2\, b_1 - \sqrt{A}\, \sqrt{B} \left(\frac{1}{a_3\, b_4} + \frac{1}{a_4\, b_3}\right)\right] p_{12}^2 = 0.$$

Ora questa è appunto l'equazione del complesso quadratico T data in (4), n. 6, della citata Nota.

43. Fra le rette del complesso T vi è (come già ricordammo al n. 37) ogni retta che stia nel fascio di una retta di α e una di β. Il centro P di un tal fascio è un punto della curva $A\,B$: dunque di f. Il piano π del fascio

è un piano tangente comune ad A, B e quindi a φ. Applichiamo a una retta del fascio il fatto (n. 42) che, se essa è tangente ad f, è pure tangente a φ. Nel fascio non vi è altra tangente di f che la traccia su π del piano tangente a f in P: nè altra tangente di φ che la retta congiungente P al punto di contatto di π con φ. Troviamo dunque che queste due rette coincidono. Ossia: *Per ogni coppia di rette incidenti dei due regoli α, β, il piano tangente nel loro punto comune alla quadrica f, e il punto di contatto del loro piano con φ, si appartengono* [21].

44. Nel n.° precedente poniamo che il punto P stia su φ (sia cioè uno degli 8 punti d'intersezione di φ colla quartica comune ad A, B, f). La retta, ivi considerata, che passa per P, sta nel piano π tangente a φ, ed è tangente a φ, diverrà una generatrice rettilinea di questa quadrica. E quel teorema ci dice che essa sarà tangente (in P) a f. Dunque: *gli 8 punti $O_1, \ldots O_8$, comuni ad A, B, f, φ stanno sulle 8 generatrici di φ tangenti a f.* Ognuna di queste generatrici è poi in un fascio con una retta di α e una di β.

Dualmente gli 8 piani $\omega_1, \ldots \omega_8$, tangenti comuni ad A, B, f, φ, passano per le 8 generatrici di f tangenti a φ.

45. Questo ci darà il modo, quando sono assegnate le quadriche d'appoggió di un complesso lineare di regoli, di fissare due regoli convenienti come cardini (mentre i legami prima visti fra cardini e appoggi ci permettevano, dati i cardini, di assegnare convenientemente gli appoggi).

Invero, date le due quadriche f, φ in modo generico, ciascun regolo di φ contiene 4 tangenti di f: sicchè abbiamo 8 punti $O_1, \ldots O_8$ di contatto, che, per quanto sopra s'è visto, staranno, oltre che su f e φ, anche su A e B. Dualmente le generatrici di f tangenti a φ ci determinano gli 8 piani $\omega_1, \ldots \omega_8$ tangenti comuni a f, φ, A, B. Rispetto al tetraedro polare comune di f e φ gli 8 punti O sono *associati*, e così pure gli 8 piani ω: intendendo con ciò che quei punti, o quei piani, sono equivalenti rispetto al gruppo G_8 generato dalle 4 omologie armoniche del tetraedro. In conseguenza, fra le ∞^3 qua-

---

[21] Abbiamo così questo teorema sulle quadriche:

Fissati su due quadriche A, B risp. due regoli, se su ognuno degli ∞^1 piani tangenti comuni ad A e B si congiunge il punto P d'incontro delle due rette di quei due regoli giacenti nel piano stesso, col punto in cui questo è tangente ad una quadrica fissata φ della schiera di A e B, le ∞^1 rette così ottenute saranno tangenti ad una stessa quadrica f del fascio di A e B, rispettivamente nei detti punti P della linea AB.

driche aventi quel tetraedro polare ve ne sono ∞^1 che passano (per uno dei punti O e quindi) per gli 8 punti O e toccano (uno dei piani ω e quindi) gli 8 piani ω. Questo sistema ∞^1 di quadriche comprenderà f, φ, A, B. Si può definirlo come composto di quelle quadriche della rete definita dagli 8 punti base O che sono tangenti ad un piano ω. Ne deriva subito che i punti di contatto delle ∞^1 quadriche con questo piano formano in generale una cubica ellittica; onde quel sistema è ellittico. Inoltre le generatrici delle quadriche del sistema giacenti in un piano ω formano un inviluppo di 3.ª classe. E dualmente.

46. Ciò posto, si costruiscano, per le date quadriche f e φ, gli 8 punti O e gli 8 piani ω, e quindi il sistema ∞^1 di quadriche. Si otterranno i due cardini per un complesso di regoli avente f e φ come appoggi, così. Per uno dei punti O passa un cono cubico di generatrici del sistema ∞^1 di quadriche, cono che contiene, per ipotesi, una generatrice di φ tangente in O a f. Condotto per questa retta un piano arbitrario, che taglierà il cono cubico in altre due rette, si prendano le due quadriche A, B del sistema ∞^1 che passano per queste; anzi, i regoli α, β di A, B, contenenti risp. quelle due rette. Saranno α, β i cardini cercati. — A e B riusciranno in un fascio con f, in una schiera con φ [22].

47. Si può dimostrare che, dati in modo generico un gruppo di 8 punti O associati rispetto a un tetraedro, e un gruppo di 8 piani ω pure associati rispetto a questo, si possono trovare due quadriche f, φ, — e quindi ∞^1 complessi lineari di regoli, — per cui quei punti e piani fungano nel modo anzi detto.

Anche osserviamo che dal n. 52 di (M.) segue che in un fascio generale di complessi lineari di regoli le coppie di regoli, cardini dei vari complessi, formano una ∞^1 ellittica d'indice 6, cioè tale che un punto generico sta in una retta di ciascuno di 6 regoli, e dualmente. Se si prende, in particolare,

---

[22] Si noti che il sistema considerato ∞^1 di quadriche, comune ad una rete di quadriche e ad un *tessuto* (duale della rete), ha 3 quadriche in ogni fascio della rete, e 3 quadriche in ogni schiera del tessuto. Fissata ad arbitrio nel sistema una quadrica, le ∞^1 coppie di quadriche del sistema, che fanno fascio con questa, formano schiera con un'altra quadrica fissa del sistema, determinata dalla 1.ª (Ciò risulta subito dal fatto che quelle coppie formano una g_2^1 entro quella varietà ellittica di quadriche; e una g_2^1 è individuata da una sua coppia). Così è appunto delle ∞^1 coppie A B di sopra, rispetto a f e a φ.

il fascio di complessi determinato da due quadriche f, φ d'appoggio, esso conterrà con ogni complesso di regoli quello formato dai regoli incidenti; e quindi quella ∞^1 dei regoli cardini si comporrà di regoli a due a due incidenti; i regoli cardini staranno nelle quadriche di un sistema ∞^1 di indice, puntuale e planare, 3. E anche questo sistema di quadriche sarà ellittico, perchè le coppie di regoli incidenti che stanno su esse formano, entro la ∞^1 ellittica di regoli, un'involuzione priva (in generale) di elementi doppi, e quindi ellittica. Ne deriva pure, di nuovo, che il sistema di quadriche sta sì in una rete che in un tessuto.

Alcune costruzioni di complessi lineari di regoli.

48. Abbiamo già incontrato costruzioni per complessi lineari di regoli. Così, nella nota ([11]) al n. 23 abbiamo dato una costruzione, pel caso che si conoscano due fasci di tali complessi, aventi in comune il complesso cercato. Quella costruzione si potrà applicare, ad es., al caso che siano dati i due appoggi f, φ, e i due cardini α, β del complesso: questo essendo allora comune al fascio di complessi definito dai due appoggi, e a quello definito dai due cardini dati.

Rileviamo ora un'altra generazione generale, che segue da (M.) n. 29.

Ivi si considerano le V_3^3 razionali normali di S_5, luoghi di ∞^1 piani. Queste varietà, segate con R, danno nello spazio ordinario rigato dei sistemi ∞^1 di regoli, razionali, d'indici 3, generabili in infiniti modi come i regoli d'intersezione degli elementi omologhi di tre fasci projettivi di complessi lineari di rette ([23]). Orbene, si fissi entro un tal sistema ∞^1 di regoli una serie lineare g_3^2, ossia involuzione ∞^2 di 3.° grado; e si considerino gli ∞^8 regoli, ognun dei quali è legato linearmente a tre regoli di uno stesso gruppo dell'involuzione, ossia ognun dei quali si ottiene come intersezione di tre complessi lineari di rette condotti ad arbitrio risp. per tre regoli di uno stesso gruppo. Quegli ∞^8 regoli costituiranno un complesso lineare di regoli. I cardini di questo saranno la coppia neutra della g_3^2.

([23]) Tali sistemi ∞^1 di regoli costituiscono dunque delle *congruenze* Roccella (3, 3). V. D. Roccella, *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni de' complessi corrispondenti in due o più fasci projettivi di complessi lineari,* Piazza Armerina, 1882.

49. Da (M.) n. 32 si trae pure la costruzione seguente del complesso lineare di regoli, di cui son dati i due cardini α, β e un regolo qualunque ε. Si considerino quei fasci di complessi lineari di rette, ognun dei quali ha tre elementi passanti risp. per α, β, ε ([24]); e per ogni ulteriore complesso lineare di un tal fascio si prenda il birapporto che esso determina con quei primi tre complessi. Tre qualunque complessi lineari di rette così ottenuti (da tre arbitrari fra i detti fasci), ai quali spettino in tal modo tre birapporti, il cui prodotto sia $= 1$, si segheranno secondo un regolo, che descrive il complesso lineare cercato.

50. Avevamo accennato nel n. 34 ai complessi lineari di regoli coi due cardini α, β coincidenti. Si può ottenere questo caso, assumendo la g_3^2 del n. 48 tale che la sua coppia neutra si riduca a un elemento doppio.

Se, oltre al regolo ω in cui coincidono i due cardini, è dato un altro regolo δ del complesso, possiamo invece fare la costruzione applicando il n. 48 di (M.). A tale scopo, si osservi prima che, se nelle reti di complessi lineari di rette passanti risp. per due regoli fissi ω, δ si chiamano omologhi quei complessi che segano su un altro regolo dato π la stessa coppia di rette, si sarà posta con ciò una corrispondenza projettiva fra le due reti. Orbene, i regoli π tali che le corrispondenze projettive, da essi così definite fra le due reti passanti per ω e δ, formino un dato sistema lineare ∞^7 (sistema lineare in questo senso, che le dette projettività si considerino come connessi di complessi lineari per δ e congruenze lineari per ω), costituiscono un complesso lineare di regoli passante per ω e δ, e avente i due cardini coincidenti in ω.

51. In particolare, degenerino ω in un piano rigato, e δ in una stella di rette O. Allora le reti di complessi lineari di rette passanti risp. per ω e per δ si comporranno di complessi speciali, di cui basterà considerare gli assi. Le due reti si ridurranno così al piano rigato ω e alla stella di raggi O. La corrispondenza projettiva, che un regolo qualunque π determinava fra le due reti, diventa ora la reciprocità che si pone fra il piano ω e la stella O, quando si considerino come omologhe due loro rette, se sono incidenti alla

([24]) Si ottiene un tal fascio, conducendo ad arbitrio un complesso lineare di rette per ε: esso sega α e β in due coppie di rette, che determinano la congruenza lineare base del fascio cercato.

stessa coppia di rette del dato regolo π (vale a dire la reciprocità che fa corrispondere ogni punto di ω e ogni piano di O appartenenti ad una stessa retta di π). Una reciprocità fra ω ed O proviene in tal modo da ∞^1 regoli π (quelli dedotti da uno di essi colle omologie di centro O e piano d'omologia ω). Se poi la reciprocità varia in un sistema lineare ∞^7, ossia è armonica ad una reciprocità fissa, gli ∞^8 regoli π formano un complesso lineare di regoli, pel quale i due cardini coincidono nel piano rigato ω, oppure nella stella O, secondo che il sistema lineare di reciprocità si ha, *riguardando* queste come connessi fra rette di O e punti di ω, od invece fra piani di O e rette di ω.

Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali e il teorema generale di permutabilità.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

Nella geometria infinitesimale delle superficie le *trasformazioni di Ribaucour*, o trasformazioni per inviluppi di sfere sulle cui due falde focali si corrispondono le linee di curvatura, hanno assunto un'importanza comparabile con quella conseguita dalle trasformazioni *asintotiche* per congruenze rettilinee W (*).

Se dalle superficie passiamo alla teoria degli ordinarii sistemi tripli ortogonali, o più in generale dei sistemi n^{pli} di ipersuperficie ortogonali nello spazio a n dimensioni S_n (tanto nella ipotesi euclidea come in quella noneuclidea) troviamo che anche qui le trasformazioni di Ribaucour per inviluppi di sfere, o di ipersfere, compiono un ufficio analogo e forniscono un importante strumento di ricerca.

In questa Memoria, che fa seguito ad una serie di Note da me pubblicate in questi ultimi anni nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, stabilisco le formole generali per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali per arrivare al teorema principale di *permutabilità* per queste trasformazioni, affatto analogo al teorema che sussiste per le ricordate trasformazioni asintotiche delle superficie (**).

(*) Dall'una classe di trasformazioni si passa all'altra applicando la celebre trasformazione (immaginaria) di contatto di Lie che cangia le rette in sfere e le linee asintotiche di una superficie nelle linee di curvatura della trasformata.

(**) Cf. i §§ 247, 248, Vol. II delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, Spörri, 1902-1909). In seguito i richiami a questo libro saranno indicati con citazione del Volume e del paragrafo.

Dato un sistema n^{plo} ortogonale Σ nello spazio S_n, le sue trasformazioni di Ribaucour in altri sistemi Σ' vengono singolarmente individuate dai valori di $n+1$ funzioni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; φ, che diciamo le funzioni trasformatrici, e sono caratterizzate dal dover soddisfare ad un certo sistema di equazioni a derivate parziali, lineari ed omogenee, il sistema III § 6. La circostanza che mediante due tali sistemi di soluzioni (γ_i, φ), (γ'_i, φ') se ne può comporre linearmente, con due costanti arbitrarie (omogenee) c_1, c_2, una serie ∞^1 data da $(c_1 \gamma_i + c_2 \gamma'_i, c_1 \varphi + c_2 \varphi')$ conduce alla nozione di *fascio* di sistemi tutti trasformati di un medesimo Σ, individuato da due qualunque Σ', Σ'' fra questi, fascio che indichiamo con $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$.

Il luogo dei punti corrispondenti in tutti i sistemi di un fascio è un circolo C. Ora il teorema generale di permutabilità consiste in questo che: ogni fascio di sistemi n^{pli} ortogonali ne individua un secondo, in tale relazione col primo che due sistemi qualunque presi l'uno nel primo, l'altro nel secondo fascio, sono sempre trasformati di Ribaucour l'uno dell'altro, mentre i circoli C luoghi dei punti corrispondenti nei sistemi del secondo fascio coincidono coi circoli C del primo. È da notarsi poi che: *la determinazione del fascio coniugato ad un fascio dato richiede soltanto una quadratura.*

Ma, come nella teoria delle trasformazioni asintotiche delle superficie il teorema di permutabilità acquista la maggiore importanza quando si applica *specializzato* a certe classi particolari di superficie, quali: le superficie a curvatura costante, le deformate delle quadriche generali, ecc., così avviene anche nel caso delle trasformazioni di Ribaucour pei sistemi n^{pli} ortogonali. Esistono invero classi particolari notevoli di siffatti sistemi pei quali le trasformazioni di Ribaucour, convenientemente dirette, mutano il sistema Σ della classe in altri Σ', Σ'',... della classe stessa. Ed allora, in tutti i casi in considerazione, avviene costantemente questo fatto che, se si applica il teorema generale di permutabilità ad una terna $(\Sigma, \Sigma', \Sigma'')$ di sistemi della classe, nel fascio coniugato al fascio $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ esiste, oltre Σ, uno ed un solo altro quarto sistema $\overline{\Sigma}$ che appartiene alla classe stessa. In conseguenza questo quarto sistema $\overline{\Sigma}$ si ottiene in termini finiti, onde segue che il processo di trasformazione, indefinitamente ripetuto, si compie, dal primo passo in poi, *senza alcun calcolo d'integrazione.*

Nella presente Memoria studio tre classi particolari di sistemi n^{pli} ortogonali che ammettono per le loro trasformazioni di Ribaucour un teorema *speciale* di permutabilità (nel senso indicato) e sono: 1.° i *sistemi E* (o sistemi simmetrici) caratterizzati dalla simmetria nelle rotazioni $(\beta_{ik} \doteq \beta_{ki})$;

2.° i *sistemi Q* caratterizzati dalla proprietà di ammettere trasformazioni di RIBAUCOUR coi quadrati (γ_i^2, φ^2) delle funzioni trasformatrici legati da una identità lineare omogenea. Fra questi sistemi figurano in particolare, per $n=3$, *i sistemi tripli ortogonali di Weingarten;* 3.° i *sistemi H* di GUICHARD-DARBOUX caratterizzati dalla relazione $H_1^2+H_2^2+\cdots+H_n^2=\text{cost.}$, cui soddisfano i coefficienti H_i^2 del $d\,s^2$, e fra questi particolarmente quei sistemi *speciali* che appartengono insieme alla classe E e diciamo anche sistemi H traslatorii, perchè una traslazione rettilinea continua in direzione fissa scambia fra loro le ipersuperficie di una stessa serie, proprietà questa che non appartiene ad alcun altro sistema n^{plo} ortogonale.

La ricerca diretta dei sistemi n^{pli} ortogonali di queste classi dipende dall'integrazione di corrispondenti sistemi di equazioni a derivate parziali (*), pei quali i teoremi generali permettono bensì di stabilire l'esistenza delle soluzioni e di fissarne il grado di arbitrarietà, ma la cui integrazione diretta appare, nello stato attuale dell'analisi, un problema estremamente complicato.

Il teorema speciale di permutabilità fornisce, in tutti questi casi, dei metodi di *integrazione successiva,* affatto analoghi a quelli ben noti per l'equazione tipica

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\text{sen}\,\theta$$

della teoria delle superficie pseudosferiche.

A queste classi di sistemi n^{pli} ortogonali altre analoghe potremmo aggiungerne estendendo le ricerche alla geometria degli spazî a curvatura costante non nulla, e utilizzando la nota rappresentazione conforme di questi spazî sull'Euclideo. Qui la ricerca è limitata per brevità agli esempî addotti, che bastano già a caratterizzare il metodo ponendo in evidenza l'ufficio del teorema di permutabilità nelle questioni geometriche, ormai molto numerose, che ne consentono l'applicazione. Ulteriori applicazioni del metodo saranno date in un lavoro successivo.

(*) Sono i sistemi (V) § 14, (VII) § 17, (IX) § 23.

§ 1.

Formole fondamentali pei sistemi n^{pli} ortogonali.

Nello spazio euclideo S_n a n dimensioni denotiamo con $x, y, z, \ldots, t$ le n coordinate cartesiane ortogonali di un punto generico nello spazio, e con

$$d s^2 = S\, d x^2 = d x^2 + d y^2 + \cdots + d t^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare, dove il simbolo S, qui ed in seguito, indicherà sempre la somma di n termini simili rispetto agli assi coordinati. Se esprimiamo le n variabili $x, y, \ldots, t$ per n nuove $u_1, u_2, \ldots, u_n$, in guisa che la forma differenziale (1) si cangi in un'altra *normale*

$$d s^2 = H_1^2\, d u_1^2 + H_2^2\, d u_2^2 + \cdots + H_n^2\, d u_n^2, \tag{2}$$

ciò significa che lo spazio viene ora riferito ad un sistema n^{plo} $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di ipersuperficie ortogonali

$$u_1 = \text{cost.}, \quad u_2 = \text{cost.}, \ldots, \quad u_n = \text{cost.}$$

Questo sistema Σ è perfettamente individuato, a meno di movimenti, dalle espressioni di $H_1, H_2, \ldots, H_n$ in funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, e noi vogliamo qui dedurre brevemente le relative formole fondamentali, che si ottengono dai noti criterii per l'equivalenza delle due forme differenziali (1), (2). Le condizioni a ciò necessarie e sufficienti si traducono nell'annullarsi dei simboli Riemanniani a quattro indici $(r\,k,\ i\,h)$ costruiti per la forma (2), cioè nelle equazioni seguenti (Vol. I, § 159):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 H_l}{\partial u_i\, \partial u_k} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\frac{\partial H_l}{\partial u_i} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\frac{\partial H_l}{\partial u_k} \\ &\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\right) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{1}{H_\lambda^2}\frac{\partial H_i}{\partial u_\lambda}\frac{\partial H_k}{\partial u_\lambda} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

nelle quali formole i, k, l significano tre indici fissi qualunque, e *diversi fra loro*, presi nella serie $1, 2, \ldots, n$, mentre il simbolo sommatorio $\sum\limits_{\lambda}^{(i,k)}$ sta a denotare che l'indice variabile λ (posto in basso) deve percorrere tutta la serie 1, 2,..., n *con esclusione* dei due indici fissi i, k (*).

La determinazione dei sistemi n^{pli} ortogonali nell'S_n dipende dunque dal sistema (3) di equazioni a derivate parziali del secondo ordine per le n funzioni incognite $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Ma per lo studio delle proprietà di questo sistema, tanto per il punto di vista analitico come per l'interpretazione geometrica, riesce molto più utile scrivere col DARBOUX (**) il sistema (3) come un sistema del 1.° ordine, aumentando convenientemente il numero delle funzioni incognite. Per questo si introducano quali nuove incognite le derivate prime delle H_i che figurano nelle (3), mediante le $n(n-1)$ *rotazioni* β_{ik}, definite dalla posizione

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}: \tag{4}$$

Così il sistema (3) viene a scindersi in due, il primo dei quali contiene le sole rotazioni e si scrive:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

mentre il secondo, supposte già determinate le β_{ik}, vincola a queste le H_i mediante le equazioni lineari omogenee

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\,H_k. \tag{II}$$

Si osservi che il sistema (I) per le β_{ik} è già un sistema chiuso o *completo*, nel senso che per derivazione esso non dà luogo ad alcuna *nuova* equazione del 1.° ordine. Per provarlo bastano le due osservazioni seguenti:

1.° Se si deriva una (I) della prima linea rispetto ad una qualunque u_m, con m diverso da i, k, l, si ottiene

$$\frac{\partial^2 \beta_{ik}}{\partial u_l\,\partial u_m} = \beta_{im}\,\beta_{ml}\,\beta_{lk} + \beta_{il}\,\beta_{lm}\,\beta_{mk},$$

(*) Analogo significato si attribuirà ai simboli $\sum\limits_{\lambda}^{(i)}$, $\sum\limits_{\lambda}^{(i,k,l)}$, ... ove λ percorrerà tutti i valori eccetto i, ovvero i, k, l, ecc.

(**) DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* [2ème Édition (1910)].

il cui secondo membro non varia scambiando l con m. Per ciò la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_m}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}\right)=\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_m}\right)$$

è già contenuta nelle (I) (della prima linea).

2.° Se si deriva la (I) della seconda linea rispetto a u_l, si ottiene per le (I) stesse l'espressione seguente:

$$\Omega=\frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{il}\beta_{lk})+\frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{kl}\beta_{li})+\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{li}\beta_{lk})+\sum_{\lambda}^{(i,k,l)}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k})=$$

$$=\beta_{lk}\left\{\frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_i}+\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_l}+\beta_{li}\beta_{ik}+\sum_{\lambda}^{(i,k,l)}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}\right\}+$$

$$+\beta_{li}\left\{\frac{\partial \beta_{kl}}{\partial u_k}+\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l}+\beta_{il}\beta_{ik}+\sum_{\lambda}^{(i,k,l)}\beta_{\lambda k}\beta_{\lambda l}\right\},$$

che possiamo anche scrivere

$$\Omega=\beta_{lk}\left\{\frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_i}+\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_l}+\sum_{\lambda}^{(i,l)}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}\right\}+\beta_{li}\left\{\frac{\partial \beta_{kl}}{\partial u_k}+\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l}+\sum_{\lambda}^{(k,\lambda)}\beta_{\lambda k}\beta_{\lambda l}\right\};$$

ma i coefficienti di β_{lk}, β_{li} sono separatamente nulli, a causa delle (I) della seconda linea, e per ciò $\Omega=0$. In secondo luogo, quando già le β_{ik} abbiano tali valori da soddisfare le (I), il sistema differenziale (II) per le H_i è *completo*, le sue condizioni d'integrabilità essendo soddisfatte per le (I) della prima linea.

Queste osservazioni, fondandosi sui teoremi generali d'esistenza per le soluzioni dei sistemi completi a derivate parziali, fanno conoscere il grado di arbitrarietà dei sistemi n^{pli} ortogonali, come il Darboux ha sviluppato più particolarmente nel suo libro citato pel caso ordinario $n=3$. Ce ne serviremo più tardi per classi *particolari* di sistemi n^{pli} ortogonali, limitandoci per ora a dedurne le conseguenze per le importanti *trasformazioni di Combescure.*

§ 2.

Formole per le X_i e per le W_i.

Per il sistema n^{plo} ortogonale Σ, definito intrinsecamente dalla forma (2) che riceve il ds^2 dello spazio, abbiamo in ogni punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ una n^{pla} *ortogonale* formata dalle direzioni $(u_1), (u_2), \ldots, (u_n)$ delle linee coordinate, cioè delle linee di curvatura delle ipersuperficie di Σ. Per la i^{ma} di queste direzioni principali (u_i), costituenti *l'n-edro principale*, indichiamo con

$$X_i, \ Y_i, \ldots, \ T_i$$

i relativi coseni di direzione cogli assi coordinati, onde avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} = H_i X_i, \quad \frac{\partial y}{\partial u_i} = H_i Y_i, \ldots, \quad \frac{\partial t}{\partial u_i} = H_i T_i, \tag{5}$$

e in generale

$$S X_i X_k = \varepsilon_{ik}, \tag{5*}$$

dove, con consueta notazione, ε_{ik} indica l'unità per $i = k$ e lo zero se $i \neq k$.

Le formole di Christoffel

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} i\ k \\ \lambda \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_\lambda}$$

per l'equivalenza delle due forme differenziali (1), (2) si traducono pei coseni di direzione dell'n-edro principale nelle equazioni

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k, \quad \frac{\partial X_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} X_\lambda. \tag{6}$$

Introduciamo altresì le n distanze (algebriche)

$$W_1, \ W_2, \ldots, \ W_n$$

dell'origine delle coordinate dalle n facce dell'n-edro principale ponendo

$$W_i = S x X_i, \tag{7}$$

da cui, derivando colle (5), (6), otteniamo

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \tag{8}$$

ed ancora

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} W_\lambda = H_i . \tag{9}$$

Scrivendo le (8) per sè come equazioni in n incognite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k , \tag{II*}$$

è da osservarsi che questo sistema è completamente integrabile come il sistema (II). I sistemi (II) e (II*) si diranno *aggiunti* l'uno dell'altro per la seguente proprietà d'immediata verifica:

a) *Se* $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ *è una qualunque soluzione del sistema* (II), *e* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ *una soluzione dell'aggiunto* (II*), *l'espressione*

$$\sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda \, d u_\lambda$$

risulta un differenziale esatto, come risulta da che

$$\frac{\partial}{\partial u_k} (H_i \gamma_i) = \beta_{ki} H_k \gamma_i + \beta_{ik} H_i \gamma_k = \frac{\partial}{\partial u_i} (H_k \gamma_k).$$

In riguardo poi alle formole (9), osserviamo l'altra proprietà:

b) *Se* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ *è una soluzione delle* (II*) *le espressioni*

$$h_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda$$

dànno un sistema di soluzioni dell'aggiunto (II).

Si ha infatti

$$\frac{\partial h_i}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} \gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ki} \gamma_k) + \sum_\lambda^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{\lambda i} \gamma_\lambda) =$$

$$= \gamma_k \left\{ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} \right\} + \beta_{ki} \left\{ \beta_{ik} \gamma_i + \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda \right\} ,$$

ed essendo nullo per le (I) il coefficiente di γ_k, resta

$$\frac{\partial h_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} h_k .$$

Confrontando le due proprietà a) b), si ha come corollario la terza:

c) *Se si hanno due soluzioni qualunque* (γ_i), (γ'_i) *del sistema* (II*), *l'espressione*

$$\sum_\lambda \left\{ \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial u_\lambda} + \sum_j^{(\lambda)} \beta_{j\lambda} \gamma_j \right\} \gamma'_\lambda \, d u_\lambda$$

è un differenziale esatto.

§ 3.

Trasformazioni di Combescure e inversioni.

Nelle formole fondamentali sopra riportate pei sistemi n^{pli} ortogonali si distinguono le proprietà inerenti soltanto all'orientazione dell'n-edro principale, le quali dipendono unicamente dalle rotazioni β_{ik} (o ciò che è lo stesso dalla rappresentazione sferica delle ipersuperficie coordinate) da quelle individuali del sistema Σ in considerazione.

Se si dànno soltanto le rotazioni β_{ik} (soddisfacenti alle condizioni (I)), il sistema *ai differenziali totali* (6) per gli n^2 coseni

$$X_i, \; Y_i, \ldots, \; T_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

che fissano l'orientazione dell'n-edro principale è completamente integrabile ed *ortogonale*, e serve a fissare, a meno di movimenti (a meno di una sostituzione ortogonale), l'orientazione dell'n-edro. Ma esistono allora infiniti sistemi n^{pli} ortogonali Σ corrispondenti, dipendenti da n funzioni arbitrarie; poichè infatti il sistema (II) nelle H_i ha una soluzione generale dipendente da n funzioni arbitrarie, una per ciascuna H_i. Scelta una tale soluzione $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$, il sistema n^{plo} ortogonale corrispondente è definito per quadrature dalle (5) colle formole

$$x = \int \sum_\lambda H_\lambda X_\lambda \, d u_\lambda, \tag{10}$$

dove appunto, per la proprietà a) § 2, l'espressione sotto il segno integrale è un differenziale esatto. Un secondo modo equivalente di determinare i sistemi n^{pli} ortogonali con assegnate rotazioni si ottiene partendo invece da una soluzione $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ del sistema aggiunto (II*), nel qual caso il sistema Σ si avrà *in termini finiti* colle formole seguenti dedotte dalle (7):

$$x = \sum_\lambda W_\lambda X_\lambda . \tag{11}$$

Da queste osservazioni si raccoglie che ogni sistema n^{plo} ortogonale Σ ne determina infiniti altri, dipendenti da n funzioni arbitrarie, colle medesime rotazioni β_{ik}, cioè colla stessa orientazione dell'n-edro principale in punti corrispondenti. Tutti questi sistemi si diranno *trasformati di Combescure* l'uno dell'altro od anche talora più brevemente, col Darboux, sistemi *paralleli;* il passaggio dall'uno all'altro sistema si dirà una trasformazione di Combescure, o una trasformazione parallela. Insieme alle trasformazioni di Combescure consideriamo anche quelle più semplici ed elementari fornite dalle rappresentazioni conformi dello spazio S_n sopra sè stesso, le quali, ap punto per la loro proprietà di conservare gli angoli, cangiano ogni sistema n^{plo} ortogonale Σ in un altro tale sistema Σ'. È ben noto che, appena $n \geqq 3$ le trasformazioni conformi dello spazio S_n si riducono alle inversioni per raggi vettori reciproci, combinate con omotetie e movimenti. Ora si osservi che in ogni inversione due punti corrispondenti P, P' dello spazio sono allineati col centro O d'inversione, e le rette che seguono due direzioni corrispondenti, l'una per P l'altra per P', sono incidenti e il loro punto d'incontro equidista da P, P'. Ne segue che:

Se in due sistemi n^{pli} ortogonali Σ, Σ', dedotti per inversione l'uno dall'altro, si considerano due punti P, P' corrispondenti, nei due n-edri principali coi vertici in P, P' ogni coppia di spigoli corrispondenti consta di due rette incidenti in un punto equidistante da P, P'.

È manifesto che gli n punti d'incontro P_1 $P_2, \ldots, P_n$ degli spigoli corrispondenti determinano un iperpiano (un S_{n-1}), rispetto al quale i due n-edri principali di Σ, Σ' sono simmetrici (*). Le ipersfere coi centri nei punti P_i e passanti per P, P' toccano le ipersuperficie coordinate $u_i = \text{cost.}$ nei punti corrispondenti P, P'.

(*) L'esempio più semplice si ha quando questo iperpiano è fisso, cioè Σ, Σ' sono simmetrici rispetto all'iperpiano a cui si riduce allora la sfera d'inversione.

§ 4.

Trasformazioni di Ribaucour.

Le semplici proprietà ora osservate in due sistemi n^{pli} ortogonali inversi ci portano a ricercare in generale, dato un sistema n^{plo} ortogonale Σ, tutti gli altri sistemi Σ' che stanno con Σ nella relazione descritta, e cioè: Σ, Σ' *si corrispondono punto a punto per modo che in due n-edri principali corrispondenti di* Σ, Σ' *ogni coppia di spigoli omologhi sia composta di rette incidenti in un punto equidistante dai due vertici.*

Di due tali sistemi Σ, Σ' diremo che sono dedotti l'uno dall'altro per una *trasformazione di Ribaucour.* Vedremo che queste trasformazioni per inviluppi di ipersfere si compongono in sostanza di inversioni, combinate con trasformazioni di Combescure; però la loro considerazione diretta è importante e per le proprietà geometriche di cui godono e per le conseguenze analitiche a cui dànno luogo.

Supponiamo adunque di partire da un sistema n^{plo} ortogonale Σ noto, pel quale manteniamo tutte le notazioni usate nei paragrafi precedenti e cerchiamo il più generale sistema n^{plo} ortogonale Σ' trasformato di Ribaucour di Σ, i cui elementi si indicheranno colle stesse lettere accentate. Procediamo allora nel modo seguente (*):

Per ipotesi due spigoli omologhi dei due n-edri principali di Σ, Σ', p. e. quelli corrispondenti alle i^{me} direzioni principali, s'incontrano in un punto P_i equidistante dai due vertici P, P'. Se poniamo quindi $\overline{PP_i} = \overline{P'P_i} = R_i$, dove R_i è una conveniente funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, potremo scrivere

$$x + R_i X_i = x' + R_i X'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

quando si fissino opportunamente i segni dei coseni X'_i; avremo quindi

$$X'_i = X_i + \frac{1}{R_i}(x - x'). \tag{12}$$

(*) L'analisi applicata nel testo è quella stessa sviluppata, pel caso $n = 3$, nella nota inserita nei *Rendiconti dei Lincei* (agosto 1915).

Indicando con $\xi, \eta, \ldots, \tau$ i coseni della direzione PP', scriveremo

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n = \sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda \\ \eta &= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \cdots + \alpha_n Y_n = \sum_\lambda \alpha_\lambda Y_\lambda \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau &= \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \cdots + \alpha_n T_n = \sum_\lambda \alpha_\lambda T_\lambda , \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ saranno i coseni degli angoli che la detta direzione forma cogli spigoli del primo n-edro principale, sussistendo dunque fra le α la relazione

$$\sum_\lambda \alpha_\lambda^2 = 1. \tag{14}$$

In fine, indicando con T il valore (algebrico) del segmento PP', avremo

$$x' = x + T\xi = x + T\sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda , \qquad y' = y + T\eta = y + T\sum_\lambda \alpha_\lambda Y_\lambda , \ldots \tag{15}$$

e sostituendo nelle (12)

$$X'_i = X_i - \frac{T}{R_i}\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Ora dobbiamo avere

$$S X'^2_\lambda = 1,$$

e siccome

$$S\xi^2 = 1, \qquad S\xi X_i = \alpha_i ,$$

deduciamo dalle (16)

$$\frac{T}{R_i} = 2\alpha_i , \tag{17}$$

indi

$$X'_i = X_i - 2\alpha_i \xi = X_i - 2\alpha_i \sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda . \tag{18}$$

Si osservi subito che, inversamente, appena le quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soddisfano la (14), queste formole (18) dànno gli n^2 coseni $|X'_i, Y'_i, \ldots, T'_i|$ di un nuovo n-edro ortogonale, perchè si ha identicamente

$$\begin{aligned} S X'_i X'_k &= S\big(X_i - 2\alpha_i \sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda\big)\big(X_k - 2\alpha_k \sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda\big) = \\ &= S X_i X_k - 2\alpha_k \sum_\lambda \alpha_\lambda S X_i X_\lambda - 2\alpha_i \sum_\lambda \alpha_\lambda S X_k X_\lambda + \\ &\qquad + 4\alpha_i \alpha_k S\big(\sum_\lambda \alpha_\lambda X_\lambda\big)^2 = \\ &= \varepsilon_{ik} - 2\alpha_k \sum_\lambda \varepsilon_{i\lambda}\alpha_\lambda - 2\alpha_i \sum_\lambda \varepsilon_{k\lambda}\alpha_\lambda + 4\alpha_i\alpha_k , \end{aligned}$$

e riducendo

$$S\, X'_i X'_k = \varepsilon_{ik}.$$

In altre parole il passaggio dalle X_i alle X'_i colle (18) è sempre dato da una sostituzione ortogonale coi coefficienti

$$c_{ik} = \varepsilon_{ik} - 2\,\alpha_i\,\alpha_k,$$

e il valore del determinante della sostituzione è sempre eguale a -1, corrispondentemente alla circostanza che il nuovo n-edro è simmetrico del primitivo (*).

Il problema che ci siamo proposti consiste dunque nel determinare, nel modo più generale, le $n+1$ funzioni incognite

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n;\ T\ \left(\text{con } \sum_\lambda \alpha_\lambda^2 = 1\right),$$

in guisa che le formole (15) definiscano un nuovo sistema n^{plo} ortogonale Σ' coll'n-edro principale $(X'_i,\ Y'_i, \ldots,\ T'_i)$, $i = 1,\ 2, \ldots,\ n$. Dunque le condizioni ***necessarie e sufficienti*** cui debbono soddisfare le nostre incognite si traducono nelle equazioni

$$S\, X'_k \frac{\partial x'}{\partial u_i} = 0 \qquad \textit{per } i \neq k. \tag{19}$$

Soddisfatte queste, le formole (15) definiranno il nuovo sistema n^{plo} ortogonale Σ', trasformato di Ribaucour di Σ, e i raggi $R_1,\ R_2, \ldots,\ R_n$ delle n ipersfere inviluppanti saranno dati per la (17) da

$$R_i = \frac{T}{2\,\alpha_i}. \tag{20}$$

(*) Tuttociò è geometricamente evidente ove si consideri che le formole (18) cangiano un qualunque n-edro ortogonale $(X_i,\ Y_i, \ldots,\ T_i)$ nel suo simmetrico $(X'_i,\ Y'_i, \ldots,\ T'_i)$ rispetto all'iperpiano di equazione

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \ldots + \alpha_n t = 0.$$

§ 5.

Ricerca delle formole di trasformazione.

Abbiamo dalle (15)

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = H_i X_i + \frac{\partial T}{\partial u_i} \xi + T \frac{\partial \xi}{\partial u_i},$$

onde, per le (18), le condizioni (19) si scrivono

$$S (X_k - 2 \alpha_k \xi) \left(H_i X_i + \frac{\partial T}{\partial u_i} \xi + T \frac{\partial \xi}{\partial u_i}\right) = 0, \qquad per\ i \neq k. \tag{21}$$

Ma dalle identità

$$S \xi^2 = 1, \qquad S X_k \xi = \alpha_k,$$

derivando e tenendo conto delle (6) § 2, segue

$$S \xi \frac{\partial \xi}{\partial u_i} = 0, \qquad S X_k \frac{\partial \xi}{\partial u_i} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - S \xi \frac{\partial X_k}{\partial u_i} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki} \alpha_i, \tag{22}$$

per cui la (21) diventa

$$- \alpha_k \frac{\partial T}{\partial u_i} + T \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki} \alpha_i\right) - 2 \alpha_i \alpha_k H_i = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial u_i} + 2 H_i \alpha_i\right) = \frac{1}{\alpha_k} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} - \beta_{ki} \alpha_i\right). \tag{23}$$

Il primo membro di queste formole dipende solo dall'indice i, onde introducendo n nuove funzioni ausiliarie $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ col porre

$$\omega_i = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial u_i} + 2 H_i \alpha_i\right),$$

dovranno sussistere insieme le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial u_i} &= \omega_i T - 2 H_i \alpha_i \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial u_i} &= \omega_i \alpha_k + \beta_{ki} \alpha_i \qquad (i \neq k), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

e il nostro problema consiste nel determinare le $2n+1$ funzioni

$$\alpha_i, \quad \omega_i, \quad T \qquad (\text{con } \sum_\lambda \alpha_\lambda^2 = 1),$$

in guisa da soddisfare a queste (24). Cominciando dal paragonare due equazioni (24) della prima linea, avremo per la condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\omega_i T - 2 H_i \alpha_i) - \frac{\partial}{\partial u_i}(\omega_k T - 2 H_k \alpha_k) = 0,$$

che sviluppata colle (24) stesse e le formole (II) § 1 dà semplicemente

$$T\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial u_k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial u_i}\right) = 0,$$

e poichè $T \neq 0$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial u_k} = \frac{\partial \omega_k}{\partial u_i}.$$

Dunque intanto l'espressione $\sum_\lambda \omega_\lambda \, d u_\lambda$ deve essere un differenziale esatto, e possiamo quindi esprimere le n funzioni ω_i per un'unica funzione incognita ψ, che scegliamo ponendo

$$\omega_i = -\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial u_i}, \tag{25}$$

onde le prime (24) diventano

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\psi T) = -2 H_i \psi \alpha_i. \tag{26}$$

In fine alle n funzioni incognite α_i sostituiamo le n definitive γ_i definite da

$$\gamma_i = \psi \alpha_i, \tag{27}$$

e sarà per la (14)

$$\psi^2 = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2. \tag{28}$$

Colla sostituzione dei valori (27) nelle seconde (24), queste diventano nelle incognite γ_i

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k, \tag{29}$$

e questo è, come si vede, precisamente il sistema aggiunto (II*) § 2 del sistema differenziale (II). In fine le (26), introducendo al posto di T la nuova incognita φ definita da

$$\psi T = -2\varphi,$$

diventano

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i, \tag{30}$$

ed appunto, per la proprietà *a*) § 2, le condizioni d'integrabilità per le (30) sono identicamente soddisfatte, e la funzione φ è determinata colle γ_i, *a meno di una costante additiva*, da

$$d\varphi = \sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda \, d u_\lambda . \tag{30*}$$

Inversamente, se le $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ soddisfano al sistema aggiunto (II*) (alle (29)), e si calcola φ con una quadratura dalle (30) o (30*), basta poi prendere

$$\alpha_i = \frac{\gamma_i}{\psi} = \frac{\gamma_i}{\sqrt{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2}}, \qquad T = -\frac{2\varphi}{\sqrt{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2}},$$

e tutte le nostre condizioni sono soddisfatte.

§ 6.

Formole pel sistema trasformato Σ'.

Coll'analisi ora sviluppata la ricerca di tutte le trasformazioni di Ribaucour per un dato sistema n^{plo} ortogonale Σ è ridotta in sostanza alla integrazione del sistema aggiunto (II*), onde già vediamo analiticamente che questa ricerca equivale a quella delle trasformazioni di Combescure (§ 3), circostanza che preciseremo meglio geometricamente al § 8.

Fissiamo dunque intanto che: *si ottengono tutte le trasformazioni di Ribaucour di un dato sistema n^{plo} ortogonale Σ prendendo $n+1$ funzioni*

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n;\ \varphi$$

che soddisfino al sistema

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i \tag{III}$$

Diremo le (III) il sistema delle equazioni di trasformazione e le $n+1$ funzioni $(\gamma_i;\ \varphi)$ le funzioni *trasformatrici*, dalle quali la trasformazione risulta individuata, onde designeremo col medesimo simbolo $(\gamma_i;\ \varphi)$ la trasformazione stessa (*).

Quanto alle formole che individuano gli elementi del sistema Σ' trasformato, si scrivono immediatamente dalle (12), (15) e sono le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - \frac{2\varphi}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda \\ X'_i &= X_i - \frac{2\gamma_i}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda , \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

dove si è posto

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 . \tag{32}$$

Si noti poi che i valori degli n raggi R_i delle ipersfere inviluppanti sono dati per le (20) da

$$R_i = -\frac{\varphi}{\gamma_i} . \tag{33}$$

Andiamo ora a calcolare gli altri elementi del sistema Σ' trasformato, osservando in primo luogo che dalla derivazione delle (31) si ottiene

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = H_i X_i + \frac{2\varphi}{A^2}\frac{\partial A}{\partial u_i}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda - \frac{2\varphi}{A}\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda - \frac{2 H_i \gamma_i}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda . \tag{34}$$

D'altronde si ha dalla (32) e dalle (III)

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\gamma_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + 2\sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \gamma_i = 2\gamma_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \right\} , \tag{35}$$

e formando la derivata

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda ,$$

con riguardo alle (III) ed alle (6) § 2, si ha

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda = \frac{\partial}{\partial u_i}(\gamma_i X_i) + \sum_\lambda^{(i)} \frac{\partial}{\partial u_i}(\gamma_\lambda X_\lambda) = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} X_i - \gamma_i \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} X_\lambda +$$
$$+ \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_i X_\lambda + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda X_i ,$$

(*) Si osservi che, a causa della omogeneità, la trasformazione resta la medesima alterando le funzioni trasformatrici per un medesimo fattore costante.

indi

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda = \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda\right) X_i = \frac{1}{2\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i} X_i . \tag{36}$$

Sostituendo nelle (34) risulta

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \left(H_i - \frac{\varphi}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}\right)\left(X_i - \frac{2\gamma_i}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda\right),$$

cioè per la (34)

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \left(H_i - \frac{\varphi}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}\right) X'_i .$$

Questa ci dimostra che, indicando con H'_i i valori che pel sistema Σ' corrispondono agli H_i di Σ, abbiamo

$$H'_i = H_i - \frac{\varphi}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}, \tag{37}$$

o sotto forma equivalente per la (35):

$$H'_i = H_i - \frac{2\varphi}{A}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda\right). \tag{37*}$$

§ 7.

Le funzioni trasformatrici inverse (Γ_i, Φ).

La relazione fra i due sistemi n^{pli} ortogonali Σ, Σ' essendo perfettamente involutoria, possiamo proporci di calcolare le funzioni trasformatrici pel passaggio inverso (da Σ' a Σ), che indicheremo con

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n;\ \Phi.$$

Le formole (33) provano immediatamente che dovranno sussistere le proporzioni

$$\Gamma_1 : \Gamma_2 : \ldots : \Gamma_n : \Phi = \gamma_1 : \gamma_2 : \ldots : \gamma_n : \varphi,$$

e potremo quindi porre, indicando con M un fattore di proporzionalità

(funzione delle u_i)

$$\Gamma_i = M\gamma_i, \quad \Phi = M\varphi,$$

è la questione si riporta a calcolare M (a meno di un fattore costante di proporzionalità naturalmente indeterminato). Ora dobbiamo avere

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = H'_i \Gamma_i,$$

cioè

$$\frac{\partial M}{\partial u_i}\Phi + M H_i \gamma_i = \left(H_i - \frac{\varphi}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}\right) M\gamma_i,$$

e resta semplicemente

$$\frac{\partial \log M}{\partial u_i} = -\frac{\partial \log A}{\partial u_i},$$

onde potremo prendere

$$M = \frac{1}{A}.$$

Dunque: Le funzioni trasformatrici inverse Γ_i, Φ, nel passaggio da Σ' a Σ sono date dalle formole

$$\Gamma_i = \frac{\gamma_i}{A} = \frac{\gamma_i}{\sum\limits_\lambda \gamma_\lambda^2}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{A} = \frac{\varphi}{\sum\limits_\lambda \gamma_\lambda^2}. \tag{38}$$

Ed ora constatiamo subito, per verifica, che con questi valori delle Γ_i, Φ sussistono le formole simmetriche delle (31)

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - \frac{2\Phi}{\sum\limits_\lambda \Gamma_\lambda^2}\cdot \sum_\lambda \Gamma_\lambda X'_\lambda \\ X_i &= X'_i - \frac{2\Gamma_i}{\sum\limits_\lambda \Gamma_\lambda^2}\cdot \sum_\lambda \Gamma_\lambda X'_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Difatti abbiamo dalle (38)

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda^2 = \frac{1}{A},$$

poi dalle (31)

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda X'_\lambda = \frac{1}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda \left\{ X_\lambda - \frac{2\gamma_\lambda}{A}\sum_j \gamma_j X_j \right\} = \frac{1}{A}\left\{ \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda - \frac{2}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 \cdot \sum_j \gamma_j X_j \right\},$$

ossia

$$\sum_\lambda \Gamma_\lambda X'_\lambda = -\frac{1}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda,$$

e le formole (39) sono in effetto così identiche alle (31).

In fine possiamo ora calcolare i valori β'_{ik} delle rotazioni pel sistema trasformato Σ'. Si ha invero

$$\beta'_{ik} = \frac{1}{\Gamma_k}\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_k},$$

e sostituendo i valori (38)

$$\beta'_{ik} = \frac{A}{\gamma_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\gamma_i}{A}\right) = \frac{1}{\gamma_k}\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} - \frac{\gamma_i}{A\gamma_k}\frac{\partial A}{\partial u_k},$$

cioè

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{\gamma_i}{A\gamma_k}\frac{\partial A}{\partial u_k}, \tag{40}$$

formola che per la (35) si può scrivere

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i}{A}\left\{\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k}\gamma_\lambda\right\}. \tag{40*}$$

§ 8.

Le trasformazioni di Ribaucour composte mediante inversioni e trasformazioni di Combescure.

Si è già osservato che le equazioni (III) per le trasformazioni di Ribaucour coincidono in sostanza con quelle per le trasformazioni di Combescure, ed è ora opportuno presentare il risultato sotto miglior forma geometrica.

Per questo ricorriamo alle formole (36), le quali ci mostrano che ponendo

$$\overline{x} = \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda, \tag{41}$$

si ha

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u_i} = \overline{H}_i X_i,$$

dove

$$\overline{H}_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda . \tag{42}$$

Perciò le (41) definiscono un sistema n^{plo} ortogonale $\overline{\Sigma}$ trasformato di Combescure del sistema Σ (parallelo a Σ), coi valori (42) pei coefficienti $\overline{H}_i$ del $\overline{ds}^2$. I due sistemi Σ, $\overline{\Sigma}$ avendo a comune le rotazioni, possiamo subito trovare per $\overline{\Sigma}$ un sistema di funzioni trasformatrici come dato dalle prime n funzioni stesse

$$\gamma_1 , \gamma_2 , \ldots , \gamma_n ,$$

alle quali si associ, come $(n+1)^{ma}$ funzione, la funzione $\overline{\varphi}$ definita da

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i} = \overline{H}_i \gamma_i = \gamma_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right\} ,$$

formola che per la (35) si scrive

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial u_i} ,$$

indi integrando

$$2 \overline{\varphi} = A - C \qquad (C \text{ costante arbitraria}).$$

Applicando allora al sistema $\overline{\Sigma}$ la trasformazione $(\gamma_1 , \gamma_2 , \ldots , \gamma_n ; \overline{\varphi})$ che lo cangi in $\overline{\Sigma}'$, avremo con notazioni evidenti

$$\overline{x}' = \overline{x} - \frac{2 \overline{\varphi}}{A} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda = \overline{x} - \frac{A - C}{A} \overline{x} = \frac{C \overline{x}}{A} ,$$

$$\overline{X}'_i = X_i - \frac{2 \gamma_i}{A} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda = X'_i .$$

Ora dalle (41) risulta

$$S \overline{x}^2 = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = A,$$

e per ciò le formole per $\overline{\Sigma}'$ si scrivono

$$\overline{x}' = \frac{C \overline{x}}{S \overline{x}^2} , \quad \overline{y}' = \frac{C \overline{y}}{S \overline{x}^2} , \ldots$$

Ma queste sono le ordinarie formole d'inversione rispetto all'ipersfera col centro nell'origine e di raggio $= \sqrt{C}$, onde il risultato:

Se (Σ, Σ') è una qualunque coppia di sistemi n^{pli} ortogonali in trasformazione di Ribaucour, esistono due sistemi $(\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}')$, inversi l'uno, dell'altro, e rispettivamente trasformati di Combescure di Σ, Σ'.

Queste formole dimostrano anche che, reciprocamente, se si hanno due sistemi n^{pli} ortogonali $(\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}')$ inversi l'uno dell'altro, e del sistema $\overline{\Sigma}$ si prende un qualunque trasformato di Combescure Σ, esiste una serie ∞^1 di sistemi Σ' che sono ad un tempo trasformati di Ribaucour di Σ e trasformati di Combescure di $\overline{\Sigma}'$.

Come si vede, la trasformazione di Ribaucour da Σ a Σ' si può decomporre nei tre passaggi successivi: 1.° da Σ a $\overline{\Sigma}$ per trasformazione di Combescure, 2.° da $\overline{\Sigma}$ a $\overline{\Sigma}'$ per inversione, 3.° da $\overline{\Sigma}'$ a Σ' nuovamente per trasformazione di Combescure. Concludendo: *Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali si compongono di trasformazioni di Combescure e di inversioni.*

È infine da notare che pel modo stesso come abbiamo introdotto, al § 4, le trasformazioni di Ribaucour, le inversioni ne sono un caso particolare.

Precisamente risulta dai calcoli eseguiti che la trasformazione di Ribaucour $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$ del sistema Σ diventa un'inversione se si prendono le γ_i eguali alle distanze W_i di un punto fisso dello spazio dalle n facce dell'n-edro principale di Σ.

§ 9.

Fasci di sistemi trasformati di Ribaucour di un medesimo Σ.

Ci volgiamo ora all'argomento principale della presente Memoria: al *teorema generale di permutabilità* per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali. Partiamo dalla semplice osservazione che le equazioni (III) § 6 di trasformazione sono *lineari omogenee* rispetto alle funzioni trasformatrici $(\gamma_i; \varphi)$. Per ciò da due diverse soluzioni

$$(\gamma_i; \varphi), \quad (\gamma'_i; \varphi')$$

se ne può comporre una serie ∞^1 colle formole

$$\overline{\gamma}_i = c_1 \gamma_i + c_2 \gamma'_i, \quad \overline{\varphi} = c_1 \varphi + c_2 \varphi', \tag{43}$$

essendo c_1, c_2 due costanti arbitrarie il cui rapporto $c_1 : c_2$ è il parametro essenziale della soluzione variabile, intendendo dapprima escluso il caso particolare che le $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ siano proporzionali alle $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Le formole (43) definiscono ciò che chiamiamo un *fascio* di soluzioni delle equazioni (III), e corrispondentemente avremo una serie ∞^1 di sistemi n^{pli} ortogonali, tutti trasformati di RIBAUCOUR dell'iniziale Σ, che diremo un *fascio* e indicheremo brevemente come il fascio $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$.

Poniamo, in aggiunta alla (32):

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2, \quad B = \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda, \quad A' = \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda, \tag{44}$$

ed avremo dalle (43)

$$\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2 = A c_1^2 + 2 B c_1 c_2 + A' c_2^2. \tag{45}$$

Indicando con ξ, η, $\zeta, \ldots$ le coordinate del punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ nel sistema generico $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ del fascio, le (31) daranno

$$\xi = x - \frac{2(c_1 \varphi + c_2 \varphi')}{A c_1^2 + 2 B c_1 c_2 + A' c_2^2} \left\{ c_1 \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + c_2 \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda \right\}, \quad \text{ecc.} \tag{46}$$

Il luogo del punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ nel sistema del fascio variabile col parametro $c_1 : c_2$ sarà una linea colle equazioni parametriche (46), dalle quali sarà facile riconoscere che la linea è un circolo. Intanto se poniamo

$$l = -\frac{2 c_1 (c_1 \varphi + c_2 \varphi')}{A c_1^2 + 2 B c_1 c_2 + A' c_2^2}, \quad m = -\frac{2 c_2 (c_1 \varphi + c_2 \varphi')}{A c_1^2 + 2 B c_1 c_2 + A' c_2^2},$$

le (46) si scrivono

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x + l \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + m \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda \\ \eta = y + l \sum_\lambda \gamma_\lambda Y_\lambda + m \sum_\lambda \gamma'_\lambda Y_\lambda \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{46*}$$

e siccome, per valori fissi di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, le quantità

$$x, \; y, \ldots, \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda, \; \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda, \ldots$$

sono altrettante costanti, le formole (46*), dando le ξ, $\eta, \ldots$ come funzioni lineari intere dei due parametri l, m, definiscono un piano ordinario (un S_2), e per ciò intanto la linea descritta dal punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ è piana. Proveremo che essa è un circolo C, di cui determineremo le coordinate $(\xi_0, \eta_0, \ldots)$ del centro ed il raggio R nel modo seguente. Denotiamo con l_0, m_0 i valori da attribuirsi nelle (46*) ai parametri l, m per ottenere le coordinate del centro, onde

$$\xi_0 = x + l_0 \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + m_0 \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda, \text{ ecc.}$$

e per ciò

$$\xi - \xi_0 = (l - l_0) \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + (m - m_0) \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda. \tag{47}$$

Basterà ora esprimere che la quantità

$$R^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \cdots = S(\xi - \xi_0)^2 \tag{48}$$

è indipendente dal parametro $t = \frac{c_1}{c_2}$. Se quadriamo e sommiamo le (47), osservando che si ha per le (44)

$$S(\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda)^2 = A, \quad S(\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda)(\sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda) = B, \quad S(\sum \gamma'_\lambda X_\lambda)^2 = A',$$

ne deduciamo

$$S(\xi - \xi_0)^2 = A(l - l_0)^2 + 2B(l - l_0)(m - m_0) + A'(m - m_0)^2,$$

ed essendo per le (47)

$$l = \frac{-2t(t\varphi + \varphi')}{At^2 + 2Bt + A'}, \quad m = \frac{-2(t\varphi + \varphi')}{At^2 + 2Bt + A'},$$

la (48) si scrive

$$A \left\{ 2t(t\varphi + \varphi') + l_0(At^2 + 2Bt + A') \right\}^2 +$$
$$+ 2B \left\{ 2t(t\varphi + \varphi') + l_0(At^2 + 2Bt + A') \right\} \cdot$$
$$\cdot \left\{ 2(t\varphi + \varphi') + m_0(At^2 + 2Bt + A') \right\} +$$
$$+ A' \left\{ 2(t\varphi + \varphi') + m_0(At^2 + 2Bt + A') \right\}^2 = R^2 (At^2 + 2Bt + A')^2.$$

Sopprimendo il fattore $At^2 + 2Bt + A'$ comune ai due membri, resta da determinare l_0, m_0, R in modo che sussista in t l'identità:

$$4(t\varphi+\varphi')\left\{t\varphi+\varphi'+A\,l_0\,t+B\,(m_0\,t+l_0)+A'\,m_0\right\}+$$
$$+(A\,t^2+2\,B\,t+A')\left\{A\,l_0^2+2\,B\,l_0\,m_0+A'\,m_0^2-R^2\right\}=0.$$

Per questo occorre e basta calcolare l_0, m_0 dalle equazioni lineari:

$$A\,l_0+B\,m_0=-\varphi$$
$$B\,l_0+A'\,m_0=-\varphi'$$

e prendere poi

$$R^2=A\,l_0^2+2\,B\,l_0\,m_0+A'\,m_0^2.$$

Ne ricaviamo

$$l_0=\frac{B\,\varphi'-A'\,\varphi}{A\,A'-B^2},\quad m_0=\frac{B\,\varphi-A\,\varphi'}{A\,A'-B^2},$$

e conseguentemente

$$R^2=\frac{A'\,\varphi^2-2\,B\,\varphi\,\varphi'+A\,\varphi'^2}{A\,A'-B^2},$$

dove è da notarsi che il denominatore $A\,A'-B^2$, come quadrato della matrice $\begin{Vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n\\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \dots & \gamma'_n\end{Vmatrix}$, è certamente diverso da zero, perchè le γ'_i non sono proporzionali alle γ_i.

La linea in considerazione è dunque in effetto un circolo C; il suo centro è nel punto $(\xi_0, \eta_0, \dots)$ di coordinate

$$\xi_0=x+\frac{B\,\varphi'-A'\,\varphi}{A\,A'-B^2}\sum_\lambda\gamma_\lambda\,X_\lambda+\frac{B\,\varphi-A\,\varphi'}{A\,A'-B^2}\sum_\lambda\gamma'_\lambda\,X_\lambda, \tag{49}$$

ed il suo raggio R si calcola dalla formola

$$R=\sqrt{\frac{A'\,\varphi^2-2\,B\,\varphi\,\varphi'+A\,\varphi'^2}{A\,A'-B^2}}. \tag{50}$$

Si noti poi che il circolo C passa pel punto $(x, y, \dots)$ del sistema iniziale Σ, come si legge nelle formole (46), le quali pel valore

$$t=\frac{c_1}{c_2}=-\frac{\varphi'}{\varphi}$$

del parametro, si riducono a $\xi=x$, $\eta=y, \dots$

Concludiamo quindi: ***Due sistemi n^{pli} ortogonali Σ', Σ'', trasformati di Ribaucour di un medesimo Σ, determinano un fascio $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ di tali sistemi, tutti trasformati di Ribaucour di Σ. Il luogo dei punti corrispondenti nei sistemi del fascio è un circolo C che contiene anche il punto corrispondente del sistema primitivo Σ.***

Si è escluso il caso che le γ'_i siano proporzionali alle γ_i, ma il risultato sussiste ancora in questo caso eccezionale colla sola particolarità che i circoli C si riducono in tal caso a linee rette. Per vederlo si osservi in primo luogo che il fattore di proporzionalità per cui differiscono le γ'_i dalle γ_i è necessariamente una costante, come risulta dalle (III), e senza alterare la generalità possiamo quindi supporre

$$\gamma'_1 = \gamma_1, \quad \gamma'_2 = \gamma_2, \ldots, \quad \gamma'_n = \gamma_n,$$

indi $\varphi' = \varphi +$ costante. Le formole (31) provano allora che, variando la costante additiva in φ, il punto $(x', y', \ldots)$ descrive una retta, e si osserva di più che in questo caso tutti i sistemi del fascio sono trasformati di Combescure l'uno dell'altro (paralleli).

§ 10.

Prime formole pel teorema di permutabilità.

La nozione di fasci di sistemi n^{pli} ortogonali ci condurrà al risultato che indichiamo come il teorema generale di permutabilità, cioè a stabilire l'esistenza di un secondo fascio, che diremo coniugato del primo, i cui sistemi sono tutti trasformati di Ribaucour dei singoli sistemi dell'altro (V. § 12). La ricerca fondamentale a tale oggetto sarà la seguente. Prendiamo nuovamente due sistemi Σ', Σ'' contigui allo stesso Σ per trasformazioni di Ribaucour, e dimostriamo che esiste una serie ∞^1 di sistemi $\overline{\Sigma}$ (precisamente un fascio contenente Σ), ciascuno dei quali è contiguo a Σ' per una trasformazione di Ribaucour $(\overline{\gamma}_i; \overline{\varphi})$ *con funzioni trasformatrici della forma:*

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\gamma}_i = \Omega\gamma_i + a\gamma'_i, \quad \overline{\varphi} = \Omega\varphi + a\varphi' \\ i = 1, 2, \ldots, n, \end{array}\right\} \tag{51}$$

dove a indica una costante ed Ω una conveniente funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, da determinarsi, come si vedrà, con una quadratura.

Dobbiamo per ciò prendere l'incognita Ω in guisa che ne risultino soddisfatte per le funzioni trasformatrici (51) le condizioni *necessarie e sufficienti* (§ 6)

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik} \gamma_k, \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_k} = H'_k \overline{\gamma}_k,$$

che per le (37) e (40) si scrivono

$$\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \left(\beta_{ik} - \frac{\gamma_i}{A \gamma_k} \frac{\partial A}{\partial u_k}\right) \cdot \overline{\gamma}_k, \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_k} = \left(H_k - \frac{\varphi}{A \gamma_k} \frac{\partial A}{\partial u_k}\right) \overline{\gamma}_k.$$

Se in queste sostituiamo i valori (51), riducendo, troviamo concordemente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_k} = -\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u_k} \Omega - \frac{a \gamma'_k}{A \gamma_k} \frac{\partial A}{\partial u_k}, \tag{51*}$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(A \Omega) = -\frac{a \gamma'_k}{\gamma_k} \frac{\partial A}{\partial u_k} = -2 a \gamma'_k \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda\right). \tag{51**}$$

Ma abbiamo già osservato (§ 2, proprietà c)) che l'espressione

$$\sum_k \gamma'_k \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda\right) d u_k$$

è un differenziale esatto, onde ponendo

$$\tau = -2 \int \sum_k \gamma'_k \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda\right) d u_k, \tag{52}$$

avremo τ con una quadratura, e successivamente

$$A \Omega = c + a \tau, \tag{53}$$

indicando c una nuova costante arbitraria. Con questo valore di Ω tutte le condizioni sono soddisfatte e le formole (51) per le funzioni trasformatrici prendono la forma definitiva

$$\left.\begin{aligned} \overline{\gamma}_i &= \frac{c \gamma_i}{A} + a\left(\frac{\tau \gamma_i}{A} + \gamma'_i\right) \\ \overline{\varphi} &= \frac{c \varphi}{A} + a\left(\frac{\tau \varphi}{A} + \varphi'\right). \end{aligned}\right\} \quad (a,\ c \text{ costanti arbitrarie}). \tag{IV}$$

Queste sono le formole del teorema di permutabilità che volevamo stabilire. Siccome esse contengono linearmente i due parametri c, a, ne resta definito (§ 9) un intero *fascio* di sistemi, che indicheremo con $\overline{\Sigma}$ e chiameremo il fascio coniugato di $c_1\Sigma' + c_2\Sigma''$.

Per riconoscere le proprietà di questo fascio coniugato sono essenziali le due semplici osservazioni seguenti:

1.ª *Nel fascio* $(\overline{\Sigma})$ *è contenuto il sistema iniziale* Σ. E infatti se nelle (IV) facciamo $a = 0$, queste si riducono precisamente alle (38) § 7 che dànno le funzioni trasformatrici pel passaggio inverso da Σ' a Σ. Per ogni altro sistema $\overline{\Sigma}$ del fascio, diverso da Σ, essendo $a \neq 0$ potremo fare, come generalmente nel seguito, $a = 1$ scrivendo le (IV) così:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\gamma}_i &= \frac{c\,\gamma_i}{A} + \frac{\tau\,\gamma_i}{A} + \gamma'_i \\ \overline{\varphi} &= \frac{c\,\varphi}{A} + \frac{\tau\,\varphi}{A} + \varphi'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV*)}$$

2.ª *Il fascio coniugato* $(\overline{\Sigma})$ *non cangia se, restando fisso* Σ', *si muta* Σ'', *in un altro qualunque sistema* $c_1\Sigma' + c_2\Sigma''$ $(c_2 \neq 0)$ *del fascio primitivo.*

Difatti cangiando γ'_i, φ' rispettivamente in

$$c_1\gamma_i + c_2\gamma'_i, \quad c_1\varphi + c_2\varphi',$$

si vede che la funzione τ, a causa delle (52) e per la (35) § 6, si muta in $-c_1 A + c_2\tau$ e perciò $\overline{\gamma}_i$, $\overline{\varphi}$ rispettivamente in

$$\frac{c\gamma_i}{A} + a\,c_2\left(\frac{\tau}{A}\gamma_i + \gamma'_i\right), \quad \frac{c\,\varphi}{A} + a\,c_2\left(\frac{\tau}{A}\varphi + \varphi'\right),$$

ciò che equivale semplicemente a moltiplicare nelle (IV) la costante a per c_2.

Un'ultima osservazione da farsi è che le formole sopra stabilite valgono anche nel caso eccezionale (§ 9) in cui le γ'_i siano proporzionali alle γ_i ed i circoli C del fascio degenerano in rette; ma allora, supposto $\gamma'_i = \gamma_i$, risulta $\tau = -A$, e le (IV) dimostrano che il fascio coniugato coincide col primitivo.

§ 11.

Contiguità di Σ a Σ'' per trasformazione di Ribaucour.

Ogni sistema $\overline{\Sigma}$ del fascio coniugato $(\overline{\Sigma})$ è contiguo a Σ' per trasformazione di Ribaucour; ma fra questi l'iniziale Σ è contiguo, oltre che a Σ', anche a Σ'', per la costruzione stessa. Dimostriamo che lo stesso accade pel sistema generico $\overline{\Sigma}$ del fascio, cioè: *ogni sistema $\overline{\Sigma}$ del fascio coniugato è contiguo, per trasformazione di Ribaucour, non solo a Σ' ma anche a Σ''.*

Prendiamo per dimostrarlo le formole che definiscono Σ'' e $\overline{\Sigma}$, cioè secondo le (31) § 6 le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x - \frac{2\varphi'}{\sum\limits_\lambda \gamma'^2_\lambda} \cdot \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda \\ X''_i &= X_i - \frac{2\gamma'_i}{\sum\limits_\lambda \gamma'^2_\lambda} \cdot \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda , \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= x' - \frac{2\overline{\varphi}}{\sum\limits_\lambda \overline{\gamma}^2_\lambda} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X'_\lambda \\ \overline{X}_i &= \overline{X}'_i - \frac{2\overline{\gamma}_i}{\sum\limits_\lambda \overline{\gamma}^2_\lambda} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X'_\lambda . \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Secondo le osservazioni fondamentali al § 4, sarà dimostrata la proprietà enunciata se proviamo che per tutti i valori dell'indice $i = 1, 2, \ldots, n$ sussistono le proporzioni

$$\overline{x} - x'' : y - y'' : \ldots = X_i - X''_i : Y_i - Y''_i : \ldots ,$$

ossia che è possibile determinare n fattori di proporzionalità ρ_i (raggi delle ipersfere inviluppati) tali che sussistano le relazioni

$$\overline{x} - x'' = \rho_i (\overline{X}_i - X''_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{56}$$

colle analoghe per gli altri assi.

A queste (56) possiamo sostituire, come perfettamente equivalente, il sistema che si ottiene moltiplicandole ordinatamente per X_k, $Y_k, \ldots$, e sommando col dare poi a k i suoi n valori $1, 2, \ldots, n$ (*). Così otteniamo il sistema

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2} S(\overline{x} - x'')\, X_k = \frac{1}{2}\, \rho_i\, S(X_i - X''_i)\, X_k \\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n. \end{array}\right\} \tag{57}$$

Ora dalle (54), (55) e dalle (31) abbiamo

$$\overline{x} - x'' = -\frac{2\varphi}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + \frac{2\varphi'}{\sum_\lambda \gamma'^2_\lambda} \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda - \frac{2\overline{\varphi}}{\sum_\lambda \overline{\gamma}^2_\lambda} \sum_\lambda \gamma_\lambda X'_\lambda$$

$$\overline{X}_i - X''_i = -\frac{2\gamma_i}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + \frac{2\gamma'_i}{\sum_\lambda \gamma'^2_\lambda} \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda - \frac{2\gamma_i}{\sum_\lambda \overline{\gamma}^2_\lambda} \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X'_\lambda,$$

e per calcolare i primi ed i secondi membri delle (57) conviene in primo luogo osservare le identità

$$S X_i X_k = \varepsilon_{ik}, \quad S X'_i X_k = S X_k \left(X_i - \frac{2\gamma_i}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda \right) = \varepsilon_{ik} - \frac{2\gamma_i \gamma_k}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2}.$$

Da queste e dalle (51)

$$\overline{\gamma}_\lambda = \Omega \gamma_\lambda + a\gamma'_\lambda$$

risulta

$$\Sigma \gamma_\lambda \overline{\gamma}_\lambda = A\,\Omega + a\,B$$

e per ciò

$$S X_k \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda = \gamma_k, \quad S X_k \sum_\lambda \gamma'_\lambda X_\lambda = \gamma'_k$$

$$S X_k \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X'_\lambda = \sum_\lambda \gamma_\lambda \left(\varepsilon_{\lambda k} - \frac{2\gamma_\lambda \gamma_k}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2} \right),$$

la quale ultima si scrive

$$S X_k \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X'_\lambda = \overline{\gamma}_k - \frac{2\gamma_k}{A}(A\,\Omega + a\,B),$$

o in fine

$$S X_k \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X'_\lambda = a\gamma'_k - \Omega\,\gamma_k - \frac{2a\,B\,\gamma_k}{A}.$$

(*) Si ricordi che il determinante $|X_k,\ Y_k \ldots T_k|$ è diverso da zero ($=1$).

Con queste formole, costruendo le espressioni (57), troviamo che esse sono lineari omogenee in γ_k, γ'_k, scriviamo

$$\frac{1}{2} S(\bar{x} - x'') X_k = L \gamma_k + M \gamma'_k$$

$$\frac{1}{2} S(\bar{X}_i - X''_i) X_k = P \gamma_k + Q \gamma'_k$$

e pei coefficienti L, M, P, Q, tenendo presenti le notazioni (44), abbiamo

$$L = \frac{\bar{\varphi}}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}\left(\Omega + \frac{2aB}{A}\right) - \frac{\varphi}{A}$$

$$M = \frac{\varphi'}{A'} - \frac{a\bar{\varphi}}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}$$

$$P = \frac{\bar{\gamma}_i}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}\left(\Omega + \frac{2aB}{A}\right) - \frac{\gamma_i}{A}$$

$$Q = \frac{\gamma'_i}{A'} - \frac{a\bar{\gamma}_i}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}.$$

Ora, avendosi

$$\bar{\gamma}_\lambda = \Omega \gamma_\lambda + a \gamma'_\lambda, \quad \bar{\varphi} = \Omega \varphi + a \varphi',$$

indi

$$\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2 = A \Omega^2 + 2aB\Omega + A' a^2,$$

le espressioni superiori di L, M, P, Q si trasformano nelle seguenti

$$L = \frac{a}{A \sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}\left\{(A\Omega + 2aB)\varphi' - aA'\varphi\right\}, \quad M = \frac{\Omega}{A' \sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}\left\{(A\Omega + 2aB)\varphi' - aA'\varphi\right\}$$

$$P = \frac{a}{A \sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}\left\{(A\Omega + 2aB)\gamma'_i - aA'\gamma_i\right\}, \quad Q = \frac{\Omega}{A' \sum_\lambda \bar{\gamma}_{\lambda i}^2}\left\{(A\Omega + 2aB)\gamma'_i - aA'\gamma_i\right\}.$$

Sussistendo dunque le proporzioni

$$L : M = P : Q = aA' : A\Omega,$$

il rapporto

$$\frac{\frac{1}{2} S(\bar{x} - x'') X_k}{\frac{1}{2} S(\bar{X}_i - X''_i) X_k} = \frac{L\gamma_k + M\gamma'_k}{P\gamma_k + Q\gamma'_k}$$

è affatto indipendente dall'indice k $\left(\text{dal rapporto } \frac{\gamma_k}{\gamma'_k}\right)$ ed eguale a $\frac{L}{P}=\frac{M}{Q}$. Valgono dunque effettivamente le formole (56), ove si ponga

$$\rho_i = \frac{(A\,\Omega + 2\,a\,B)\,\varphi' - a\,A'\,\varphi}{(A\,\Omega + 2\,a\,B)\,\gamma'_i - a\,A'\,\gamma_i}, \tag{58}$$

e la nostra proposizione è dimostrata.

In fine se indichiamo con $\overline{\gamma}'_i$, $\overline{\varphi}'$ le funzioni trasformatrici nel passaggio da Σ'' a Σ, siccome per le formole (33) deve essere

$$\rho_i = \frac{\overline{\varphi}'}{\gamma'_i},$$

se ne traggono facilmente le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\gamma}'_i &= -\frac{A\,\Omega + 2\,a\,B}{A'}\,\gamma'_i + a\,\gamma_i \\ \overline{\varphi}' &= -\frac{A\,\Omega + 2\,a\,B}{A'}\,\varphi' + a\,\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

e come conferma si osserva che queste sono le formole (51) stesse § 10, scambiati i due sistemi Σ', Σ'' e cangiato Ω nell'analoga

$$\Omega' = -\frac{A\,\Omega + 2\,a\,B}{A'}. \tag{59*}$$

Infine osserviamo che nel caso eccezionale delle γ'_i proporzionali alle γ_i, ove i circoli C degenerano in rette, i risultati ora stabiliti si mantengono soltanto ove si riguardino le trasformazioni di Combescure come un caso limite di quelle di Ribaucour, trasportandosi all'infinito il punto d'incontro delle direzioni principali corrispondenti.

§ 12.

Il teorema generale di permutabilità.

Si è visto che il sistema generico $\overline{\Sigma}$ del fascio coniugato $(\overline{\Sigma})$ è contiguo, per trasformazione di Ribaucour, tanto a Σ' che a Σ'', dalla qual cosa possiamo ora facilmente inferire che sarà pure contiguo a qualunque altro sistema $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ del fascio individuato da Σ', Σ''. Si è visto infatti, al § 10, che il fascio coniugato $(\bar{\Sigma})$ resta lo stesso cangiando Σ'' in un altro qualunque $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$. Dopo ciò è manifesto che i due fasci si trovano in relazione perfettamente involutoria, cioè: *ogni sistema dell'un fascio è contiguo, per trasformazione di Ribaucour, ad un qualunque sistema dell'altro.*

Ora è anche facile vedere che i circoli C, luogo dei punti corrispondenti nei sistemi di uno stesso fascio (§ 9), sono gli stessi pei due fasci. Si è provato infatti (§ 9) che il circolo C relativo al fascio $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ contiene il punto corrispondente del sistema iniziale Σ, e per ciò contiene anche quello del sistema generico $\bar{\Sigma}$ del fascio coniugato, essendo $\bar{\Sigma}$ contiguo, come Σ, a Σ' e Σ''.

Dopo queste ricerche possiamo enunciare nella sua forma completa il teorema di permutabilità:

Se ad un sistema n^{plo} ortogonale Σ sono contigui, per trasformazioni di Ribaucour, due sistemi Σ', Σ'', questi determinano un fascio $c_1 \Sigma' + c_2 \Sigma''$ di tali sistemi. Esiste allora un secondo fascio, coniugato al primo e in relazione involutoria con questo, tale che due sistemi qualunque, presi rispettivamente nei due fasci, sono contigui per trasformazioni di Ribaucour. Tutti i punti corrispondenti nei sistemi dei due fasci si trovano allogati sopra uno stesso circolo C.

È poi da osservare che, dato il primo fascio, *la determinazione del fascio coniugato richiede soltanto una quadratura, quella introdotta dalla formola* (52) *col calcolo di τ.*

Le formole che individuano i due fasci, i cui sistemi corrispondono individualmente ai valori del parametro (di razionalità) $\frac{c_1}{c_2}$ pel primo fascio, o $\frac{c}{a}$ pel coniugato, dimostrano subito che *i circoli C sono segati projettivamente dai sistemi in ciascun fascio.* E invero i quattro punti sopra un circolo C segnati da quattro sistemi del medesimo fascio hanno un birapporto eguale a quello dei quattro corrispondenti valori di $\frac{c_1}{c_2}$ $\left(\text{o di } \frac{c}{a}\right)$ e indipendente dal circolo C.

Consideriamo ora due sistemi del primo fascio, p. e. Σ', Σ'', e due del secondo, p. e. $\Sigma, \bar{\Sigma}$, e calcoliamo il birapporto dei quattro loro punti M', M'', M, $\bar{M}$ situati sul circolo $C \equiv (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, poniamo p. e. nell'ordine

$$\Theta = (M, \bar{M}, M', M'').$$

Per questo si consideri che le formole (55) della prima linea, ove si pensino fisse le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e variabile il parametro $t = \frac{c}{a}$ che entra nel secondo membro delle formole (IV) § 10, dànno appunto le equazioni parametriche del circolo C, sul quale t funziona come parametro di razionalità, onde Θ si calcolerà dal birapporto dei quattro corrispondenti valori di t. Ora, essendo in M $a = 0$, è ivi $t = \infty$, mentre in M ha il suo valore generico che, ponendo $a = 1$, si può scrivere per la (53) $t = A\,\Omega - \tau$. Quanto ai valori t', t'' di t in M', M'', si calcoleranno osservando che le (55) debbono allora rispettivamente ridursi a $\overline{x} = x'$ (per $t = t'$), e $x = x''$ (per $t = t''$). Nel primo caso dunque deve annullarsi $\overline{\varphi}$ e per ciò

$$t' + \tau = -\frac{A\,\varphi'}{\varphi}\,.$$

Nel secondo debbono annullarsi le espressioni

$$\frac{1}{2}\,S\,(\overline{x} - x'')\,X_k = L\,\gamma_k + M\,\gamma'_k\,,$$

ciò che accade quando si annullano simultaneamente L, M, cioè per le (57*) quando:

$$\varphi'\,(A\,\Omega + 2\,B) - A'\,\varphi = \varphi'\left\{c + \tau + 2\,B\right\} - A'\,\varphi,$$

da cui

$$t'' + \tau = \frac{A'\,\varphi - 2\,B\,\varphi'}{\varphi'}\,.$$

Abbiamo dunque rispettivamente in M, M, M', M''

$$t + \tau = \infty,\quad A\,\Omega,\quad -A\,\frac{\varphi'}{\varphi}\quad \frac{A'\,\varphi - 2\,B\,\varphi'}{\varphi}\,.$$

e quindi pel valore cercato di Θ la formola

$$\Theta = \frac{(A\,\Omega + 2\,B)\,\varphi' - A'\,\varphi}{A\,(\Omega\,\varphi + \varphi')}\;\frac{\varphi}{\varphi'}\,; \tag{60}$$

ovvero

$$1 - \Theta = \frac{A\,\varphi'^2 - 2\,B\,\varphi\,\varphi' + A'\,\varphi^2}{A\,(\Omega\,\varphi + \varphi')\,.\,\varphi'}\,. \tag{60*}$$

§ 13.

CASO ORDINARIO DEI SISTEMI TRIPLI ORTOGONALI E DELLE SUPERFICIE.

a) Fermiamoci un momento a considerare, nei risultati generali ottenuti, il caso particolare dello spazio ordinario S_3, dove si tratterà delle trasformazioni di RIBAUCOUR dei sistemi tripli ortogonali (u_1, u_2, u_3) e delle proprietà dei fasci coniugati di tali sistemi, secondo il teorema di permutabilità.

Prendiamo p. e. le superficie $u_3 = \text{cost.}$ di una delle tre serie e consideriamo, lungo uno dei circoli C, le normali a queste $u_3 = \text{cost.}$, sia nel primo che nel secondo fascio. Siccome quelle appartenenti a fasci diversi si incontrano a coppie fra loro, in un punto equidistante dai due relativi punti d'incontro con C, ne segue subito:

Le normali alle superficie d'una stessa serie, nei due fasci, lungo uno dei circoli C, sono le generatrici dei due sistemi in un medesimo iperboloide rotondo ad una falda, avente C per parallelo.

Ne segue che il triedro-principale in uno dei fasci, spostandone il vertice lungo C, ruota semplicemente attorno all'asse dell'iperboloide (asse di C), e i triedri principali dell'altro fascio sono i simmetrici dei primi rispetto ai piani per l'asse dell'iperboloide.

Colle formole del § 9 calcoliamo anche facilmente i coseni di direzione, diciamo X, Y, Z, dell'asse del circolo C come dati dalla formola

$$X = \frac{1}{\sqrt{A\,A' - B^2}} \left\{ \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} \gamma_3 & \gamma_1 \\ \gamma'_3 & \gamma'_1 \end{vmatrix} X_2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix} X_3 \right\},$$

e dalle due analoghe per Y, Z. Se denotiamo quindi con σ_1, σ_2, σ_3 gli angoli che il detto asse forma coi tre spigoli del triedro principale, abbiamo

$$\cos\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{A\,A' - B^2}} \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{vmatrix}, \quad \cos\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{A\,A' - B^2}} \begin{vmatrix} \gamma_3 & \gamma_1 \\ \gamma'_3 & \gamma'_1 \end{vmatrix},$$

$$\cos\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{A\,A' - B^2}} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix},$$

nelle quali formole si osserva, a conferma delle circostanze geometriche sopra notate, che gli angoli stessi σ_1, σ_2, σ_3 non variano spostando il vertice del triedro lungo il circolo C.

b) Passando alle trasformazioni di RIBAUCOUR per le superficie, osserviamo per ora soltanto che esse si ottengono come caso particolare da quelle pei sistemi tripli ortogonali considerando che ogni superficie S individua un sistema triplo ortogonale formato dalle sue superficie parallele e dalle sviluppabili delle normali lungo le linee di curvatura (V. più oltre § 27).

Le circostanze osservate pei sistemi tripli ortogonali si ripetono nello stesso modo per le superficie e sono le analoghe di quelle che si presentano nel teorema di permutabilità per le trasformazioni asintotiche delle superficie (*), ed anzi si può passare dall'uno all'altro teorema di permutabilità mediante la trasformazione di contatto scoperta da LIE (cfr. Prefazione).

Da ultimo osserviamo che la teoria dei sistemi ciclici, o sistemi ∞^2 normali di circoli, offre un esempio semplice e singolare del teorema di permutabilità. Le ∞^1 superficie S ortogonali ai circoli sono infatti, due a due, trasformate di RIBAUCOUR l'una dell'altra. Esse costituiscono un fascio che coincide col proprio coniugato, mentre l'iperboloide delle normali alle S lungo un circolo C si riduce alla totalità delle tangenti del circolo, e gli altri due iperboloidi (relativi alle superficie delle altre due serie) diventano coni rotondi coi vertici nei due fuochi dell'asse del circolo (**).

§ 14.

I SISTEMI n^{pli} ORTOGONALI E (SISTEMI SIMMETRICI).

Ritorniamo al caso generale dei sistemi n^{pli} ortogonali per applicare i risultati del teorema di permutabilità ad alcune classi particolari notevoli di sistemi ortogonali, pei quali il teorema stesso viene ulteriormente a precisarsi, come accade nella teoria delle trasformazioni di BÄCKLUND delle su-

(*) Per questo caso le conseguenze del teorema di permutabilità (*Lezioni*, Vol. II, §§ 247-248) vennero particolarmente sviluppate dal TORTORICI nella sua tesi di laurea: *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie e sul teorema di permutabilità* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. 35 (1913).

(**) Un altro esempio notevole di due fasci coniugati di superficie del teorema di permutabilità si ha nella teoria delle trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche. Le due serie ∞^1 di superficie pseudosferiche, dedotte da una stessa Σ per trasformazioni opposte di BÄCKLUND B_σ, $B_{-\sigma}$, formano appunto due tali fasci coniugati, nei quali si presenta la particolarità che i circoli C hanno tutti lo stesso raggio e coincidono col circolo di gola dell'iperboloide delle normali, ora invariabile di forma.

perficie pseudosferiche di fronte alle generali trasformazioni asintotiche, e permette anche qui di perfezionare notevolmente i processi di trasformazione.

Cominciamo da una classe particolare di sistemi n^{pli} ortogonali caratterizzati dalla proprietà che, per una scelta conveniente dei parametri u_1, $u_2, \dots, u_n$, si presenta la *simmetria* nelle rotazioni, cioè $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Pel caso dello spazio ordinario ($n = 3$) questi sistemi vennero studiati da diversi geometri e il DARBOUX vi ha dedicato i tre ultimi capitoli del suo libro. Li diremo *sistemi simmetrici*, od anche, colla notazione di DARBOUX, *sistemi E.*

L'esistenza ed il grado di arbitrarietà dei sistemi E, per n qualunque, si riconosce facilmente introducendo nelle equazioni generali (I) § 1 per le rotazioni l'ipotesi $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Così abbiamo nelle $\frac{n(n-1)}{2}$ funzioni incognite β_{ik} $(i < k)$ il sistema differenziale seguente:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \\ &\sum_\lambda \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

In questo sistema, per ogni incognita β_{ik} $(i < k)$ tutte le variabili sono principali, salvo la u_k che è parametrica, e le condizioni d'integrabilità, ottenute eguagliando le due espressioni delle derivate seconde doppiamente principali, sono soddisfatte in virtù delle (V) stesse. Segue dopo ciò, dai teoremi generali d'esistenza, che la soluzione generale (β_{ik}) del sistema (V) dipende da $\frac{n(n-1)}{2}$ funzioni arbitrarie, e siccome nel passaggio dalla rappresentazione sferica all'effettivo sistema E si introducono colle H_i altre n funzioni arbitrarie, vediamo che: *i sistemi n^{pli} ortogonali E nell'S_n dipendono da $\frac{n(n+1)}{2}$ funzioni arbitrarie.*

Si osservi ora che, essendo $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, segue dalle equazioni (6) § 2 che ciascuno dei coseni X_i soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$\sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial u_\lambda} = \frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_n} = 0,$$

ed è quindi una funzione delle sole differenze $u_i - u_k$. Dunque ciascuna X_i resta invariata se si aumentano tutte le variabili u di una stessa costante, onde l'n-edro principale in un sistema E conserva la medesima orientazione assoggettando le variabili u alla trasformazione continua $\overline{u}_i = u_i + \text{cost.}$, o in altre parole:

Ogni sistema E ammette un gruppo continuo G_1 ad un parametro di trasformazioni di Combescure in sè medesimo. Nelle notazioni di LIE la trasformazione infinitesima generatrice del gruppo G_1 è appunto la $XF = \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial u_\lambda}$, e lungo le trajettorie del gruppo l'n-edro principale non varia di orientazione.

Le condizioni $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ pei sistemi E si scrivono anche

$$\frac{\partial H_i^2}{\partial u_k} = \frac{\partial H_k^2}{\partial u_i},$$

e per ciò l'espressione $d\Theta = \sum_\lambda H_\lambda^2 \, du_\lambda$ è un differenziale esatto. La ricerca dei sistemi E equivale adunque all'altra di ridurre il ds^2 dello spazio S_n alla forma

$$ds^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} du_1^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial u_2} du_2^2 + \cdots + \frac{\partial \Theta}{\partial u_n} du_n^2.$$

Da ultimo osserviamo che pei sistemi E il sistema differenziale (II) per le H_i coincide col suo aggiunto (II*) per le W_i. Questa osservazione conduce subito al procedimento ricorrente di EGOROV (DARBOUX, l. c., nn. 242 s. s.) che permette di ottenere da ogni sistema E noto infiniti altri suoi trasformati di COMBESCURE. Ma ora, applicando le trasformazioni di RIBAUCOUR, proveremo che si possono anche dedurne infiniti nuovi sistemi *E con diverse rotazioni* β_{ik}, ossia che da una soluzione nota (β_{ik}) del sistema differenziale (V) si possono dedurre infinite nuove soluzioni (β'_{ik}).

§ 15.

TRASFORMAZIONI T_m DI RIBAUCOUR DEI SISTEMI E.

Dato un sistema E, proponiamoci di ricercare se esistono trasformazioni $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$ di RIBAUCOUR che lo cangino in un altro sistema E' della stessa classe, le cui rotazioni β'_{ik} soddisfino dunque nuovamente alla condizione

$$\beta'_{ik} = \beta'_{ki}.$$

Siccome si ha in generale per la (40*) § 7

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\gamma_i}{A}\left\{\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(k)} \beta_{\lambda k}\gamma_\lambda\right\},$$

ed è $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, dovremo avere

$$\frac{1}{\gamma_i}\left\{\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda\right\} = \frac{1}{\gamma_k}\left\{\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(k)} \beta_{\lambda k}\gamma_\lambda\right\},$$

ossia

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda = \mu\gamma_i,$$

essendo μ un conveniente fattore di proporzionalità.

Riconosciamo subito che deve essere μ una costante, poichè, derivando la precedente rapporto ad u_k, il calcolo stesso eseguito al § 2 sotto b) ci dà

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\mu\gamma_i) = \beta_{ki}\mu\gamma_k,$$

cioè

$$\gamma_i\frac{\partial \mu}{\partial u_k} + \mu\beta_{ik}\gamma_k = \beta_{ki}\mu\gamma_k$$

e dall'essere $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ e inoltre $\gamma_i \neq 0$ (*) segue $\frac{\partial \mu}{\partial u_k} = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Il fattore μ è dunque necessariamente una costante, che indichiamo con m, e le funzioni trasformatrici γ_i debbono quindi soddisfare al sistema differenziale:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m\gamma_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \ (m \text{ costante}), \tag{VI}$$

e viceversa, soddisfatte queste, risulta

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2m\gamma_i\gamma_k}{A}, \tag{61}$$

indi effettivamente $\beta'_{ik} = \beta'_{ki}, \ldots$ Osserviamo anche che le formole generali (37*) § 6 pei coefficienti H'_i del sistema trasformato E' dànno ora

$$H'_i = H_i - \frac{2m\gamma_i\varphi}{A}. \tag{61*}$$

(*) Escludiamo sempre per questi sistemi E, come per gli altri che trattiamo in seguito, i casi ovvii in cui si annulli qualche rotazione o qualcuna delle funzioni trasformatrici γ_i.

Il sistema (VI) è per le funzioni incognite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ un sistema ai differenziali totali *completamente integrabile,* a causa delle (V), per qualunque valore della costante m. Si escluderà per altro il valore $m = 0$, perchè allora le (VI) si ridurrebbero alle (6) § 2 pei coseni che una direzione fissa nello spazio forma colle direzioni principali, e si avrebbe il caso ovvio di un sistema E' trasformato, simmetrico del primitivo rispetto ad un iperpiano fisso.

Importa osservare che, inversamente, se un sistema n^{plo} ortogonale Σ ammette una trasformazione $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$ di Ribaucour per la quale sussistano le (VI) con $m = -0$, questo è *necessariamente un sistema E.*

Si derivi infatti la seconda delle (VI) rapporto ad u_k e, utilizzando nuovamente il calcolo del § 2 sopra ricordato, se ne dedurrà

$$m\,\gamma_k\,(\beta_{ki} - \beta_{ik}) = 0,$$

e per ciò $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, c. d. d.

Fissato il valore della costante m, ogni trasformazione di Ribaucour del sistema E che soddisfi le (VI) si dirà per abbreviare una *trasformazione T_m*. Si osservi che l'integrazione delle (VI) introduce n costanti arbitrarie ed un'altra figura nella quadratura che dà φ; ma a causa della omogeneità solo i rapporti fra queste $n+1$ costanti sono essenziali nella T_m, e per ciò: *Fissata la costante m, ogni sistema n^{plo} ortogonale simmetrico E possiede ∞^n trasformazioni diverse T_m in altri sistemi E' della stessa specie.*

Risulta ancora dalle osservazioni superiori che la trasformazione inversa da E' ad E sarà ancora una trasformazione della stessa specie, precisamente dimostriamo: *Se E' si ottiene da E per una T_m, la trasformazione inversa che cangia E' in E è una T_{-m}, col valore opposto del parametro.*

Per dimostrarlo ricorriamo alle formole (38) § 7, che definiscono le funzioni trasformatrici inverse $\Gamma_i = \frac{\gamma_i}{A}$, e calcoliamo il valore dell'espressione

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta'_{\lambda i}\,\Gamma_\lambda,$$

che, per le (40) § 8, si scrive

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\gamma_i}{A}\right) + \sum_\lambda^{(i)} \left\{\beta_{\lambda i} - \frac{\gamma_\lambda}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}\right\}\frac{\gamma_\lambda}{A},$$

e sviluppando colle (VI)

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta'_{\lambda i}\,\Gamma_\lambda = \frac{m\,\gamma_i}{A} - \frac{\gamma_i}{A^2}\frac{\partial A}{\partial u_i} - \frac{1}{A^2\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}\sum_\lambda^{(i)}\gamma_\lambda^2 =$$

$$= \frac{m\,\gamma_i}{A} - \frac{1}{A^2\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = \frac{m\,\gamma_i}{A} - \frac{1}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}.$$

Ora dalla (35) § 6 abbiamo nel caso attuale

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2 m \gamma_i^2, \tag{62}$$

e resta quindi

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta'_{\lambda i} \Gamma_\lambda = -\frac{m \gamma_i}{A} = -m \Gamma_i,$$

ciò che prova appunto la nostra asserzione.

§ 16.

Il teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni T_m dei sistemi E.

Andiamo ora a dimostrare che il teorema generale di permutabilità, applicato al gruppo dei sistemi E e delle loro trasformazioni T_m, dà luogo ad uno *speciale* teorema di permutabilità, affatto analogo a quello che sussiste per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche.

Nel caso attuale il teorema si enuncia:

Se da un sistema E sono dedotti due nuovi sistemi E', E'' per trasformazioni T_m, $T_{m'}$ non opposte ($m' = -m$), nel fascio del teorema generale di permutabilità, coniugato al fascio $c_1 E' + c_2 E''$, esiste uno ed un solo quarto sistema $\overline{E}$ legato rispettivamente ad E', E'' da due trasformazioni $T_{m'}$, T_m colle costanti m, m' invertite. Questo quarto sistema $\overline{E}$ si ha in termini finiti.

Siano $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ le prime n funzioni trasformatrici per la T_m e γ'_1, $\gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ quelle per $T_{m'}$, onde avremo per le (VI)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m \gamma_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \\ &\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma'_k, \quad \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} = m' \gamma'_i - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma'_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Se ora deriviamo rapporto ad u_i l'espressione

$$B = \sum \gamma_\lambda \gamma'_\lambda,$$

abbiamo

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = \gamma'_i\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda\right) + \gamma_i\left(\frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma'_\lambda\right),$$

indi per le (63)

$$\frac{\partial B}{\partial u_i} = (m + m')\gamma_i\gamma'_i.$$

Ma la funzione τ, che figura nelle formole (IV*) § 10 del teorema generale di permutabilità, è da calcolare dalla (52), cioè da

$$\frac{\partial \tau}{\partial u_i} = -2\gamma'_i\left\{\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda\right\} = -2m\gamma_i\gamma'_i.$$

Essendo dunque per ipotesi $m + m' \neq 0$, possiamo prendere senz'altro

$$\tau = -\frac{2m}{m+m'},\quad B = -\frac{2m}{m+m'}\sum_\lambda \gamma_\lambda\gamma'_\lambda,$$

sicchè intanto: *nel caso attuale la determinazione del fascio coniugato nel teorema generale di permutabilità si ottiene in termini finiti.*

Ora, posto secondo la (53)

$$\Omega = \frac{c+\tau}{A}, \tag{64}$$

gli ∞^1 sistemi del fascio coniugato sono dati per le (51) dalle formole

$$\overline{\gamma}_i = \Omega\gamma_i + \gamma'_i,\quad \overline{\varphi} = \Omega\varphi + \varphi', \tag{65}$$

e noi dobbiamo cercare se fra questi sistemi ve ne è uno $\overline{E}$ legato ad E' da una $T_{m'}$, pel quale si abbia cioè

$$\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta'_{\lambda i}\gamma_\lambda = m'\overline{\gamma}_i. \tag{66}$$

In generale abbiamo dalla (51*) § 10

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = -\frac{1}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i}\overline{\gamma}_i,$$

ossia nel caso nostro per la (62)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = -\frac{2m\gamma_i\overline{\gamma}_i}{A}.$$

Perciò dalla (65) abbiamo

$$\frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_i} = -\frac{2\,m\,\gamma_i^2\,\overline{\gamma}_i}{A} + \Omega\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i}$$

e sostituendo questo valore nella (66) ricordando che per la (61)

$$\beta'_{\lambda i} = \beta_{\lambda i} - \frac{2\,m\,\gamma_i\,\gamma_\lambda}{A},$$

resta

$$\frac{-2\,m\,\gamma_i^2\,\overline{\gamma}_i}{A} + \Omega\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}(\Omega\,\gamma_\lambda + \gamma'_\lambda) - \frac{2\,m\,\gamma_i}{A}\sum_\lambda^{(i)}\gamma_\lambda\,\gamma_\lambda = m'(\Omega\,\gamma_i + \gamma'_i),$$

e riducendo colle (63) e dividendo per γ_i

$$(m - m')\,\Omega - \frac{2\,m}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda\,\overline{\gamma}_\lambda = (m - m')\,\Omega - \frac{2\,m}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda(\Omega\,\gamma_\lambda + \gamma'_\lambda) = 0.$$

Rimane quindi

$$(m + m')\,\Omega = -\frac{2\,m}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda,$$

o in fine

$$\Omega = -\frac{2\,m\,B}{(m + m')\,A} = \frac{\tau}{A} \tag{67}$$

valore che combina con quello dato dalla (64) quando in questa si prenda $c = 0$. Dunque nel fascio coniugato il sistema dato da $c = 0$ è appunto un sistema $\overline{E}$ legato ad E' da una $T_{m'}$, e pel calcolo stesso eseguito esso è unico.

Resta in fine che dimostriamo come questo quarto sistema $\overline{E}$ sia legato a sua volta ad E'' da una T_m. Per questo basta ricorrere alla (59*) § 11, la quale ci dà

$$A'\,\Omega' = -(A\,\Omega + 2\,B)$$

ossia per la (67)

$$A'\,\Omega' = -\frac{2\,m'\,B}{m + m'},$$

formola che è identica alla (67) scambiati i due sistemi E', E''.

Il teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni T_m dei sistemi E è così completamente dimostrato. Quanto al caso escluso $m + m' = 0$, questo è un caso limite in cui il sistema $\overline{E}$ viene a coincidere col primitivo E, come risulta già dal calcolo eseguito (*).

Le conseguenze che si deducono da questo teorema speciale di permutabilità per l'applicazione indefinitamente ripetuta delle trasformazioni T_m ai sistemi E sono le medesime come nel caso tipico delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche. Esse si riassumono nel risultato:

Se di un sistema n^{plo} ortogonale E si conoscono tutti i contigui per trasformazioni T_m, l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione ai nuovi sistemi, ai derivati da questi, e così via, si compie senza alcun calcolo d'integrazione.

È questo in sostanza un risultato analitico in quanto riguarda l'integrazione del sistema differenziale (V) caratteristico per le rotazioni dei sistemi E. Le stesse circostanze si presenteranno senza che vi sia bisogno di insistervi, per sistemi differenziali analoghi che andremo ora a considerare, tutte le volte che sussiste un corrispondente teorema *speciale* di permutabilità.

§ 17.

I SISTEMI n^{pli} ORTOGONALI Q.

Andiamo ora a studiare una seconda classe di sistemi n^{pli} ortogonali che qui caratterizziamo, dal punto di vista delle trasformazioni di RIBAUCOUR, per la seguente proprietà: *essi ammettono trasformazioni di Ribaucour* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \varphi)$ *nelle quali le funzioni trasformatrici sono legate da una identità quadratica della forma*

$$c_1 \gamma_1^2 + c_2 \gamma_2^2 + \cdots + c_n \gamma_n^2 + b\,\varphi^2 = 0, \tag{68}$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$, b *sono costanti* (**).

(*) Questo in generale quando $m + m' = 0$ senza che si annulli $B = \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda$ (che dal calcolo nel testo risulta una costante). Se poi $B = 0$ si ha un caso eccezionale in cui *ogni* sistema nel fascio coniugato è un sistema $\overline{E}$.

(**) A questi sistemi si è anche condotti dal problema geometrico delle *rappresentazioni normali uniformi* degli spazî di curvatura costante. V. le mie due Note nei Vol. XXV e XXVI dei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (febbraio 1916 e maggio 1917).

Un sistema n^{plo} ortogonale che ammetta una tale trasformazione di Ribaucour si dirà per abbreviare un *sistema Q*. Si osservi subito che il sistema trasformato sarà ancora della medesima classe, poichè le funzioni trasformatrici inverse (Γ_i, Φ), come dimostrano le formole (38) § 7, soddisferanno alla medesima relazione quadratica (68).

Derivando la (68) rispetto ad u_i, troviamo per le (III) § 6:

$$\gamma_i \left\{ c_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + b H_i \varphi \right\} = 0,$$

indi, essendo le γ_i diverse da zero, dovranno verificarsi per un sistema Q le relazioni

$$c_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + b H_i \varphi = 0. \tag{69}$$

Derivando questa rapporto ad u_k $(k \neq i)$ si ha

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} \gamma_k) + c_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ki} \gamma_k) + \sum_\lambda^{(i,k)} c_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{\lambda i} \gamma_\lambda) + b \frac{\partial}{\partial u_k} (H_i \varphi) = 0,$$

ed eseguendo le derivazioni colle (III) e colle (I), (II) § 1, risulta

$$\gamma_k \left\{ c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + b H_i H_k \right\} +$$

$$+ \beta_{ki} \left\{ c_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + c_i \beta_{ik} \gamma_i + \sum_\lambda^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda + b H_k \varphi \right\} = 0.$$

Ma in questa il coefficiente di β_{ki} nel secondo termine è nullo per la (69) stessa, e troviamo quindi che: *in tutti i sistemi Q, con trasformazioni* (γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$; φ) *di Ribaucour soddisfacenti alla relazione quadratica* (68), *fra le rotazioni* β_{ik} *e i coefficienti* H_i *debbono sussistere, oltre le relazioni generali* (I), (II), *anche le seguenti:*

$$c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} c_\lambda \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + b H_i H_k = 0. \tag{70}$$

Dobbiamo dunque aggiungere queste ultime al sistema (I), (II) ed esaminare la compatibilità delle equazioni differenziali così ottenute. Limitiamoci per ora al caso generale in cui *le n costanti* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *si suppongano tutte diverse fra loro.* In tal caso la (70), combinata coll'ordinaria

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} = 0 \tag{I}$$

porge risolvendo

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_k - c_\lambda}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} - \frac{b H_i H_k}{c_i - c_k},$$

$$\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_i - c_\lambda}{c_k - c_i} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} - \frac{b H_i H_k}{c_k - c_i},$$

delle quali però la seconda non è che la prima scambiati gli indici i, k. Abbiamo dunque questo primo risultato: *Per ogni sistema Q che ammetta trasformazioni di Ribaucour con funzioni trasformatrici legate dall'identità quadratica* (68) (*a costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ differenti*) *le rotazioni β_{ik} ed i coefficienti H_i debbono soddisfare al sistema differenziale:*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk}, \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_k - c_\lambda}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} - \frac{b H_i H_k}{c_i - c_k}. \end{aligned}\right\} \tag{VII}$$

§ 18.

Esistenza delle soluzioni del sistema (VII).

La prima ricerca che dobbiamo ora fare riguarda la compatibilità di queste equazioni differenziali ed il grado di arbitrarietà delle sue soluzioni (β_{ik}, H_i). Si osservi subito che il sistema (VII) *non contiene derivate nei secondi membri*, ed essendo illimitatamente integrabile, come ora constateremo, ci troviamo qui nel caso più semplice che si presenta per tali sistemi, ove l'esistenza delle soluzioni è assicurata anche per dati iniziali non analitici (*).

Per ciascuna delle $n(n-1) + n = n^2$ funzioni incognite β_{ik}, H_i nelle (VII) una sola variabile è parametrica la u_i per la H_i, e per la β_{ik} $(i < k)$ la u_k, mentre le rimanenti $n - 1$ sono principali. Per dimostrare l'illimitata inte-

(*) V. Darboux, l. c., Livre III, Chap. I.

grabilità dobbiamo provare che le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\right)-\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial H_i}{\partial u_l}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial u_m}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}\right)-\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_m}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l}\right)-\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}\right)=0$$

sono conseguenze delle (VII) stesse. Le verifiche per le due prime sono già contenute nelle generali al § 1, e dobbiamo soltanto provare che l'espressione

$$\Theta=\frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{li}\beta_{lk})+\frac{1}{c_i-c_k}\cdot\frac{\partial}{\partial u_l}\sum_\lambda^{(i,k)}(c_\lambda-c_k)\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+\frac{b}{c_i-c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(H_iH_k)$$

è nulla in virtù delle (VII).

Possiamo scrivere

$$\Theta=\frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{li}\beta_{lk})+\frac{c_l-c_k}{c_i-c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{li}\beta_{lk})+\frac{1}{c_i-c_k}\sum_\lambda^{(i,k,l)}(c_\lambda-c_k)\frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k})+$$
$$+\frac{b}{c_i-c_k}\frac{\partial}{\partial u_l}(H_iH_k),$$

ed eseguendo mediante le (VII) e raccogliendo i termini, troviamo

$$\Theta=\beta_{li}\left\{\beta_{il}\beta_{ik}+\frac{c_l-c_k}{c_i-c_k}\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l}+\sum_\lambda^{(i,k,l)}\frac{c_\lambda-c_k}{c_i-c_k}\beta_{\lambda k}\beta_{\lambda l}+\frac{bH_kH_l}{c_i-c_k}\right\}+$$
$$+\beta_{lk}\left\{\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_i}+\frac{c_l-c_k}{c_i-c_k}\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_l}+\sum_\lambda^{(i,k,l)}\frac{c_\lambda-c_k}{c_i-c_k}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}+\frac{bH_iH_l}{c_i-c_k}\right\}.$$

Ora il coefficiente di β_{li} in questa espressione, sostituito per $\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_l}$ il valore tratto dalle (VII), identicamente si annulla, mentre quello di β_{lk} divent per le (VII)

$$\frac{1}{c_i-c_l}\sum_\lambda^{(i,l)}(c_l-c_\lambda)\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}-\frac{b}{c_i-c_l}H_iH_l+$$
$$+\frac{c_l-c_k}{c_i-c_k}\left\{\sum_\lambda^{(i,l)}\frac{c_i-c_\lambda}{c_l-c_i}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}-\frac{b}{c_l-c_i}H_iH_l\right\}+$$
$$+\sum_\lambda^{(i,k,l)}\frac{c_\lambda-c_k}{c_i-c_k}\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k}+\frac{b}{c_i-c_k}H_iH_l.$$

In questa espressione i tre termini contenenti $b H_i H_l$ si elidono e i rimanenti si raccolgono nella somma

$$\sum_{\lambda}^{(i,l)} \frac{\beta_{\lambda i}\beta_{\lambda l}}{(c_i - c_l)(c_i - c_k)} \Big\{ (c_l - c_\lambda)(c_i - c_k) + (c_i - c_\lambda)(c_k - c_l) +$$
$$+ (c_k - c_\lambda)(c_l - c_i) \Big\},$$

i cui singoli termini sono nulli per l'identità

$$(c_l - c_\lambda)(c_i - c_k) + (c_i - c_\lambda)(c_k - c_l) + (c_k - c_\lambda)(c_l - c_i) = 0,$$

onde si conclude: *Il sistema differenziale* (VII) *è illimitatamente integrabile.*

In ordine ai teoremi generali d'esistenza (Darboux, l. c.), la soluzione generale (β_{ik}, H_i) delle (VII) dipende da n^2 funzioni arbitrarie, delle quali però n sono soltanto apparenti e dipendono dall'arbitrarietà inerente ai parametri $u_1, u_2, \ldots, u_n$, sicchè restano $n(n-1)$ funzioni arbitrarie *essenziali.*

Riguardo all'integrazione effettiva del sistema (VII), un primo contributo è recato dall'osservare che se si costruiscono le n espressioni $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ definite da

$$\Omega_i = \sum_{\lambda}^{(i)} (c_\lambda - c_i)\beta_{\lambda i}^2 + b H^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

tutte le derivate della Ω_i, tranne la $\frac{\partial \Omega_i}{\partial u_i}$, si annullano in virtù delle (VII), come subito si verifica. Per ciò la Ω_i è una funzione della sola u_i; e siccome, cangiando il parametro u_i, le funzioni $\beta_{\lambda i}$, H_i vengono a moltiplicarsi per un medesimo fattore funzione arbitraria di u_i, possiamo disporre dei parametri u_i in guisa che le Ω_i si riducano ad altrettante costanti. Così abbiamo:

Il sistema (VII) *possiede, per una scelta conveniente dei parametri* u_i, *gli* n *integrali quadratici*

$$\sum_{\lambda}^{(i)} (c_\lambda - c_i)\beta_{\lambda i}^2 + b H_i^2 = \text{cost.}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Di queste relazioni ci potremmo servire per abbassare nel sistema (VII) di n il numero delle funzioni incognite; ma il problema d'integrazione effettiva appare sempre complicato. Acquistano per ciò maggiore interesse i metodi di *integrazione successiva* che ci verranno ora forniti dalle trasformazioni di Ribaucour, come già pei sistemi E al § 16.

§ 19.

Le trasformazioni R_m dei sistemi Q.

Abbiamo visto che per ogni sistema Q (supposte le c_i diverse fra loro) hanno luogo le equazioni (VII), ma ci rimane ancora da ricercare se, inversamente, ogni sistema n^{plo} ortogonale pel quale si verifichino le (VII), è un sistema Q, se cioè possiede trasformazioni di Ribaucour soddisfacenti alla (68). La risposta è affermativa se, in aggiunta alla ipotesi già ammessa che le costanti c_i siano tutte diseguali, supponiamo di più che *nessuna di esse si annulli.* Allora le (69), aggiunte alle altre equazioni di trasformazione, dànno il sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} &= -\frac{1}{c_i}\left\{\sum_\lambda^{(i)} c_\lambda \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + b H_i \varphi\right\} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} &= H_i \gamma_i . \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Questo è per le funzioni trasformatrici $(\gamma_i;\ \varphi)$ un sistema ai differenziali totali *completamente integrabile,* a causa delle (VII), come risulta dal calcolo stesso eseguito al § 17 per formare queste equazioni. Il sistema (71) ammette inoltre l'integrale quadratico

$$c_1\gamma_1^2 + c_2\gamma_2^2 + \cdots + c_n\gamma_n^2 + b\varphi^2 = \text{cost.},$$

e basta disporre dei valori *iniziali* delle funzioni trasformatrici per soddisfare la (68); dunque:

Ogni sistema n^{plo} ortogonale pel quale valgano le (VII) (*supposto* $c_i \neq 0$, $c_i - c_k \neq 0$) *è un sistema Q.*

Ora è importante osservare al diverso modo come figurano le $n+1$ costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$; b nelle equazioni (VII) e nella relazione quadratica (68), o nelle differenziali (71). Nelle (VII) figurano soltanto per i rapporti fra le differenze $c_i - c_k$ e la b; nella (68) invece e nelle (71) come $n+1$ costanti omogenee. Ne risulta che ad un medesimo sistema Q corrispondono ∞^1 relazioni quadratiche ammissibili e diverse (68).

Per porre meglio in evidenza tale circostanza ci conviene scrivere le costanti c_i sotto la forma

$$c_i = 1 - m\, a_i$$

dove le a_i indicheranno n costanti fisse diverse fra loro, ed m un parametro arbitrario, al quale però non dovremo attribuire nè il valore zero (che renderebbe le c_i eguali) nè un valore $\frac{1}{a_i}$ che annullerebbe la c_i; scriveremo in fine $b\, m$ al posto di b. Così le equazioni differenziali (VII) si presentano sotto la forma *indipendente dal parametro m:*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk}, \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_\lambda^{(i,k)} \frac{a_k - a_\lambda}{a_i - a_k} \beta_{\lambda i}\beta_{\lambda k} + \frac{b H_i H_k}{a_i - a_k}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII*)}$$

mentre la relazione quadratica (68) diventa

$$\sum_\lambda (1 - m\, a_\lambda)\gamma_\lambda^2 + b\, m\, \varphi^2 = 0, \qquad (72)$$

e le equazioni differenziali (71) si scrivono

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \frac{1 - m\, a_\lambda}{1 - m\, a_i} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda + \frac{b\, m}{1 - m\, a_i} H_i \varphi = 0 \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i. \end{aligned}\right\} \qquad (71^*)$$

Una trasformazione di Ribaucour del sistema Q, corrispondente a queste formole, si dirà una *trasformazione R_m*, ponendo anche qui in evidenza il parametro m che figura nella trasformazione. Come pei sistemi E (§ 15) si ha manifestamente:

Ogni sistema Q ammette ∞^n trasformazioni R_m in nuovi sistemi Q', rimanendo fisso il parametro m. E siccome le funzioni trasformatrici inverse (Γ_i, Φ) soddisfano alla medesima (68) vediamo che: *anche il passaggio inverso da un sistema Q' all'iniziale Q è dato da una R_m, col medesimo valore della costante m.*

Considerate soltanto dal punto di vista analitico, in riguardo alla integrazione del sistema differenziale (VII*) per le β_{ik}, H_i, le trasformazioni R_m servono a dedurre, mediante integrazione del sistema lineare omogeneo ai differenziali totali (71*), nuove soluzioni (β'_{ik}, H'_i) da una iniziale (β_{ik}, H_i)

supposta nota. Precisamente dalle formole (37*), (40*) §§ 6, 7 avremo

$$H'_i = H_i - \frac{2\,m\,\varphi}{A}\left\{\sum_\lambda^{(i)} \frac{a_\lambda - a_i}{1 - m\,a_i}\beta_{\lambda i}\gamma_\lambda - \frac{b\,H_i\,\varphi}{1 - m\,a_i}\right\},$$

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2\,m\,\gamma_i}{A}\left\{\sum_\lambda^{(k)} \frac{a_\lambda - a_k}{1 - m\,a_k}\beta_{\lambda k}\gamma_\lambda - \frac{b\,H_k\,\varphi}{1 - m\,a_k}\right\}.$$

§ 20.

Teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni R_m dei sistemi Q.

Andiamo ora a dimostrare che per le trasformazioni R_m dei sistemi Q sussiste, come per le trasformazioni T_m dei sistemi E (§ 16), un teorema speciale di permutabilità sotto l'analoga forma:

Se ad un sistema n^{plo} ortogonale Q sono contigui due sistemi Q', Q'' per trasformazioni R_m, $R_{m'}$ a costanti m, m' diverse, nel fascio coniugato al fascio (Q', Q'') del teorema generale di permutabilità esiste uno ed un solo quarto sistema $\overline{Q}$ legato rispettivamente a Q', Q'' da due trasformazioni $R_{m'}$, R_m colle costanti m, m' invertite.

Indichiamo con (γ_i, φ) le funzioni trasformatrici per la R_m, con (γ'_i; φ') quelle per la $R_{m'}$, onde avremo per la (72)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\lambda (1 - m\,a_\lambda)\,\gamma_\lambda^2 + b\,m\,\varphi^2 = 0 \\ &\sum_\lambda (1 - m'\,a_\lambda)\,\gamma'^2_\lambda + b\,m'\,\varphi'^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

da cui

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = m\,(\sum_\lambda a_\lambda\,\gamma_\lambda^2 - b\,\varphi^2) \\ A' &= \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda = m'\,(\sum_\lambda a_\lambda\,\gamma'^2_\lambda - b\,\varphi'^2). \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Cerchiamo ora se nel fascio coniugato a ($Q'\,Q''$) individuato dalle formole

$$\overline{\gamma}_\lambda = \Omega\,\gamma_\lambda + \gamma'_\lambda, \quad \overline{\varphi} = \Omega\,\varphi + \varphi'$$

esiste un sistema $\overline{Q}$ legato a Q' da una $R_{m'}$, per la qual cosa occorre e basta che si abbia

$$\sum_\lambda (1 - m' a_\lambda)\, \overline{\gamma}_\lambda^2 + b\, m'\, \overline{\varphi}^2 = \sum_\lambda (1 - m' a_\lambda)(\Omega\, \gamma_\lambda + \gamma'_\lambda)^2 + b\, m' (\Omega\, \varphi + \varphi')^2 = 0.$$

Questa è, per l'incognita Ω, un'equazione quadratica che scriviamo

$$R\, \Omega^2 + 2\, S\, \Omega + T = 0,$$

coi seguenti valori pei coefficienti

$$R = \sum_\lambda (1 - m' a_\lambda)\, \gamma_\lambda^2 + b\, m'\, \varphi^2$$

$$S = \sum_\lambda (1 - m' a_\lambda)\, \gamma_\lambda\, \gamma'_\lambda + b\, m'\, \varphi\, \varphi'$$

$$T = \sum_\lambda (1 - m' a_\lambda)\, \gamma'^2_\lambda + b\, m'\, \varphi'^2.$$

Ora T è nullo per la (73_2), ed il primo R per la (73_1) si scrive anche

$$R = (m - m') \left(\sum_\lambda a_\lambda \gamma_\lambda^2 - b\, \varphi^2\right) = \frac{m - m'}{m} A,$$

e ne risulta pel valore cercato di Ω

$$\Omega = \frac{2\, m}{(m' - m)\, A} S = \frac{2\, m}{(m' - m)\, A} \left\{ \sum_\lambda (1 - m' a_\lambda)\, \gamma_\lambda\, \gamma'_\lambda + b\, m' \varphi\, \varphi' \right\}. \tag{75}$$

Se proviamo che, con questo valore di Ω, risulta soddisfatta l'equazione caratteristica (51^{**}) § 10 per Ω

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(A\, \Omega) = -2\, \gamma'_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(\ )} \beta_{\lambda i}\, \gamma_\lambda \right\},$$

sarà dimostrato il teorema. Ora sostituendo in quest'ultima il valore (75) per Ω, essa diventa

$$m \frac{\partial S}{\partial u_i} + (m' - m) \gamma'_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\, \gamma_\lambda \right\} = 0, \tag{76}$$

che si tratta di verificare. Siccome

$$S = \sum_\lambda (1 - m' a_\lambda)\, \gamma_\lambda\, \gamma'_\lambda + b\, m'\, \varphi\, \varphi',$$

derivando abbiamo

$$\frac{\partial S}{\partial u_i} = \gamma_i \left\{ \sum_\lambda^{(i)} (1 - m' a_\lambda)\, \beta_{\lambda i}\, \gamma'_\lambda + (1 - m' a_i) \frac{\partial \gamma'_i}{\partial u_i} + b\, m'\, H_i\, \varphi' \right\} +$$

$$+ \gamma'_i \left\{ \sum_\lambda^{(i)} (1 - m' a_\lambda)\, \beta_{\lambda i}\, \gamma_\lambda + (1 - m' a_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + b\, m'\, H_i\, \varphi \right\};$$

ma qui il coefficiente di γ_i è nullo, come risulta derivando la (73_2) rapporto ad u_i. Sostituendo nella (76) e dividendo per γ'_i, resta da verificarsi che si ha

$$m \left\{ \sum_{\lambda}^{(i)} (1 - m' a_\lambda) \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + (1 - m' a_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + b\, m' H_i \varphi \right\} +$$

$$+ (m' - m) \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right\} =$$

$$= m' \left\{ \sum_{\lambda}^{(i)} (1 - m a_\lambda) \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda + (1 - m a_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + b\, m H_i \varphi \right\} = 0,$$

e questa è appunto un'identità, come si vede derivando la $(73'_1)$ (*). Il quarto sistema $\overline{Q}$ così determinato è dunque legato in effetto a Q' da una $R_{m'}$ e, per completare la dimostrazione del teorema enunciato, resta solo a dimostrare che $\overline{Q}$ è legato poi a Q'' da una R_m. Per questo si ricorra alla formola (59*) § 11

$$A' \Omega' = -(A \Omega + 2 B) \qquad (B = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda \gamma'_\lambda),$$

osservando che per la (75)

$$A \Omega + 2 B = \frac{2 m'}{m' - m} \left\{ \sum_{\lambda} (1 - m a_\lambda) \gamma_\lambda \gamma'_\lambda + b\, m \varphi \varphi' \right\},$$

e quindi

$$A' \Omega' = \frac{2 m'}{m - m'} \left\{ \sum_{\lambda} (1 - m a_\lambda) \gamma_\lambda \gamma'_\lambda + b\, m \varphi \varphi' \right\},$$

formola che corrisponde esattamente alla (75) scambiati i due sistemi Q', Q'', onde è provato quanto si voleva.

(*) Questo risultato dimostra che anche nel caso attuale (cf. § 16) la quadratura da eseguirsi colla (52) § 10 per calcolare τ si compie in termini finiti e si può prendere $\tau = \frac{2m}{m' - m} S$. Nel fascio del teorema generale di permutabilità il sistema $\overline{Q}$ corrisponde nuovamente al valore $c = 0$ della costante c nella formola (53).

§ 21.

I sistemi tripli ortogonali di Weingarten come sistemi Q.

Nelle ricerche precedenti, relative ai sistemi Q, sono essenziali le due ipotesi che le n costanti c_i siano diverse fra loro e tutte diverse da zero; la prima serve per assicurare l'esistenza dei sistemi Q (§ 18), la seconda quella delle loro trasformazioni R_m (§ 19). Si osservi però che, anche se queste ipotesi non sono soddisfatte, ma è nota per altra via l'esistenza di corrispondenti sistemi Q e di loro trasformazioni R_m, varrà sempre per queste R_m il teorema speciale di permutabilità, perchè la dimostrazione che ne abbiamo data al paragrafo precedente vale comunque siano le costanti c_i.

Ora se le costanti c_i sono in parte eguali, o qualcuna di esse si annulla, intervengono nuove e molteplici circostanze il cui esame richiederebbe una minuta discussione. Qui vogliamo esaminare solo un caso speciale, quello dell'ordinario spazio S_3, quando due delle costanti c_1, c_2, c_3 si suppongano eguali, p. e. le due prime, ma diverse però da zero. Allora possiamo fare $c_1 = c_2 = 1$, ossia $a_1 = a_2 = 0$, e la relazione quadratica fra γ_1, γ_2, γ_3, φ diventerà

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + (1 - m\,k)\,\gamma_3^2 + m\,b\,\varphi^2 = 0,$$

con k, l, m costanti. In tal caso la relazione (70) § 17, fattovi $i = 1$, $k = 2$, dà

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + (1 - m\,k)\,\beta_{31}\,\beta_{32} + m\,b\,H_1\,H_2 = 0,$$

e paragonata colla ordinaria

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\,\beta_{32} = 0,$$

dimostra che si deve avere

$$\frac{\beta_{31}\,\beta_{32}}{H_1\,H_2} = \frac{b}{k} = \text{cost.}$$

Ma il primo membro è l'espressione della *curvatura totale K* delle superficie $u_3 = \text{cost.}$ nel sistema triplo ortogonale, onde risulta intanto:

Se in un sistema triplo ortogonale Q le due costanti c_1, c_2 nella relazione quadratica (68) *sono eguali, le superficie della serie $u_3 = \text{cost.}$ hanno la stessa curvatura costante (positiva o negativa); il sistema Q è un sistema di Weingarten.*

Viceversa risulta da note proprietà dei sistemi di WEINGARTEN (*) che ogni tale sistema possiede ∞^1 trasformazioni di RIBAUCOUR, con funzioni trasformatrici γ_1, γ_2, γ_3, φ legate da una relazione quadratica (68) con due costanti c_i eguali, cioè: *ogni sistema di Weingarten è un sistema Q e possiede trasformazioni R_m di Ribaucour.*

L'osservazione finale del paragrafo precedente dimostra poi subito che per queste trasformazioni R_m, per inviluppi di sfere, dei sistemi tripli ortogonali di WEINGARTEN sussiste il teorema speciale di permutabilità del § 20, e queste proprietà dei sistemi di WEINGARTEN restano così subordinate alle generali pei sistemi Q.

§ 22.

FORMA DI EISENHART PER LE EQUAZIONI DI TRASFORMAZIONE.

Prima di trattare della terza classe di sistemi n^{pli} ortogonali di cui ci vogliamo occupare in questa Memoria conviene che scriviamo le equazioni generali di trasformazione (III) § 6 sotto una nuova forma che diciamo la *forma di Eisenhart* perchè data da questo geometra nel caso $n = 2$ delle trasformazioni di RIBAUCOUR delle superficie.

In questa nuova forma figurano esplicitamente i nuovi coefficienti H'_i del sistema Σ' trasformato, che si introducono come n nuove funzioni incognite insieme ad una $(n+1)^{ma}$, che denoteremo con ψ, definita dalla posizione:

$$A = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = 2\varphi\psi. \tag{77}$$

Abbiamo (§ 6)

$$H'_i = H_i - \frac{\varphi}{A\gamma_i}\frac{\partial A}{\partial u_i} = H_i - \frac{2\varphi}{A}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda\right).$$

(*) Cf. in particolare la mia Memoria negli *Annali di Matematica*, Vol. XXIV (1915).

e dalla precedente

$$\frac{\partial A}{\partial u_i} = 2\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right),$$

onde risulta

$$H'_i = H_i - \frac{1}{\gamma_i \psi}\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right) = -\frac{\varphi}{\gamma_i} \frac{\partial \log \psi}{\partial u_i}, \tag{78}$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda = (H_i - H'_i)\,\psi. \tag{79}$$

Se deriviamo quest'ultima rispetto ad u_k, osservando che si ha (§ 2 b)

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda\right) = \beta_{ki}\left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(k)} \beta_{\lambda k} \gamma_\lambda\right) = \beta_{ki}\,(H_k - H'_k)\,\psi,$$

troviamo

$$\frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \left\{ \beta_{ki} + (H'_i - H_i)\frac{\gamma_k}{\varphi} \right\} \cdot H'_k. \tag{80}$$

Riunendo queste equazioni (78), (79), (80) alle altre generali (III) § 6, otteniamo nelle $2n+2$ funzioni

$$\gamma_i, \quad H'_i, \quad \varphi, \quad \psi$$

il sistema differenziale richiesto:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = (H_i - H'_i)\,\psi - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_i} = -\frac{\gamma_i H'_i}{\varphi} \cdot \psi \\
&\frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \left\{ \beta_{ki} + (H'_i - H_i)\frac{\gamma_k}{\varphi} \right\} \cdot H'_k,
\end{aligned}\right\} \tag{VIII}$$

a cui dobbiamo aggiungere la relazione (77) in termini finiti

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = 2\,\varphi\,\psi. \tag{VIII*}$$

Le condizioni d'integrabilità del sistema (VIII) sono soddisfatte, in virtù del sistema stesso; per le incognite γ_i, φ, ψ tutte le variabili sono principali, per la H'_i tutte, tranne la u_i che è parametrica. Il sistema (VIII) possiede inoltre l'integrale quadratico

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 - 2\varphi\psi = \text{cost.},$$

perchè tutte le derivate del primo membro si annullano. Basta quindi scegliere i valori *iniziali* delle γ_i, φ, ψ in guisa che si annulli la costante del secondo membro, e sarà soddisfatta la (VIII*) per tutti i valori delle u_i.

Questa forma (VIII) delle equazioni di trasformazione riesce particolarmente utile quando si debbano studiare, come nel caso che andiamo ora a trattare, dei sistemi n^{pli} ortogonali definiti da proprietà dei coefficienti H_i.

Si osservi che per questa forma delle equazioni di trasformazione i valori (40*) § 7 per le rotazioni β'_{ik} del sistema trasformato diventano

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} + (H'_k - H_k)\frac{\gamma_i}{\varphi}\,. \tag{80*}$$

§ 23.

Sistemi H di Guichard-Darboux.

Chiamiamo sistemi ortogonali di Guichard-Darboux, e indichiamo col simbolo H, quei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio S_n, pei quali, con una scelta conveniente dei parametri $u_1, u_2, \ldots, u_n$, i coefficienti H_i^2 del ds^2 soddisfano la condizione

$$\sum_\lambda H_\lambda^2 = H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = \text{cost.} \tag{81}$$

Cominciamo dal trovare le condizioni differenziali che dobbiamo aggiungere alle generali (I), (II) § 1 per questi sistemi H. Derivando la (81) rapporto ad u_i, e dividendo per H_i, si ottiene

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda\,. \tag{82}$$

Derivando ancora rapporto ad u_k ($k \neq i$), viene

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ik} H_k) + \sum_\lambda^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{i\lambda} H_\lambda) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ki} H_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ik} H_k) + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{ik}\beta_{k\lambda} H_\lambda + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\beta_{\lambda k} H_k = 0,$$

od anche

$$H_k \left\{ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} \right\} + \beta_{ik} \left\{ \frac{\partial H_k}{\partial u_k} + \beta_{ik} H_i + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{l\lambda} H_\lambda \right\} = 0.$$

Qui il coefficiente di β_{ik} è nullo per la (82), e resta quindi

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0.$$

Concludiamo intanto: In ogni sistema H le rotazioni β_{ik} e i coefficienti H_i debbono soddisfare al sistema differenziale:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda \\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} = 0 \\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0 \ (*).
\end{aligned}\right\} \tag{IX}$$

Viceversa, se le H_i, β_{ik} soddisfano a questo sistema, la somma $\sum_\lambda H_\lambda^2$ ha nulle tutte le derivate (come lo prova il calcolo stesso eseguito) ed è quindi una costante; dunque: *le equazioni differenziali* (IX) *sono caratteristiche pei sistemi H di Guichard-Darboux.*

Per dimostrare l'esistenza e fissare il grado di arbitrarietà dei sistemi H basterà, trascurando le equazioni della prima linea per le H_i, occuparsi della compatibilità delle seguenti nelle rotazioni β_{ik}, poichè supposte soddisfatte queste, le equazioni per le H_i formano un sistema ai differenziali totali completamente integrabile.

Immaginiamo di risolvere le equazioni delle due ultime linee rispetto a quella delle due derivate $\frac{\partial}{\partial u_i}$, $\frac{\partial}{\partial u_k}$ il cui indice della variabile di derivazione è minore; così il sistema acquista la forma canonica e per ciascuna

(*) Si osservi che le ultime si ottengono dalle penultime scambiando in ogni rotazione β_{ik} i due indici.

funzione incognita β_{ik} abbiamo una sola variabile parametrica, la u_i se $i > k$, la u_k se $i < k$, mentre le rimanenti $n-1$ sono principali.

Se verifichiamo che il sistema è completamente integrabile, potremo applicare i teoremi generali di esistenza. Tenendo conto delle verifiche generali già eseguite al § 1, basterà provare che se si derivano quelle dell'ultima linea rispetto ad una qualunque u_l, *supposto l'indice l diverso da i, k*, si ottiene una relazione che rientra nelle (IX).

Poniamo infatti

$$U = \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k}\right) + \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i}\right) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{il}\beta_{lk}) + \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{kl}\beta_{li}) + \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{il}\beta_{kl}) + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \frac{\partial}{\partial u_l}(\beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda}).$$

Eseguendo colle (IX) e raccogliendo i termini, abbiamo

$$U = \beta_{il}\left\{\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{kl}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \beta_{kl}\beta_{l\lambda} + \beta_{ki}\beta_{li}\right\} +$$

$$+ \beta_{kl}\left\{\frac{\partial \beta_{li}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{il}}{\partial u_l} + \sum_{\lambda}^{(i,k,l)} \beta_{i\lambda}\beta_{l\lambda} + \beta_{ik}\beta_{lk}\right\},$$

ed in questa i coefficienti di β_{il}, β_{kl} sono nulli appunto per le ultime (IX). Dunque la condizione $U=0$ rientra nel sistema (IX), che è perciò completamente integrabile. Dai teoremi d'esistenza segue ora: *I sistemi H di Guichard-Darboux nell'S_n dipendono da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie.*

Il problema di effettiva integrazione del sistema (IX) appare ancora più complicato di quello analogo pei sistemi E, e pei sistemi Q. Però anche qui dalle trasformazioni di Ribaucour otteniamo dei metodi di integrazione successiva.

§ 24.

Trasformazioni di Ribaucour pei sistemi *H*.

Dato un sistema H di Guichard-Darboux con

$$\sum_{\lambda} H_{\lambda}^2 = c \quad (c \text{ costante}),$$

domandiamo se fra i suoi trasformati di Ribaucour esistono dei sistemi della medesima classe pei quali i nuovi coefficienti H'_λ soddisfano alla stessa relazione

$$\sum_\lambda H'^2_\lambda = c, \tag{83}$$

dove espressamente abbiamo lasciato alla costante del secondo membro lo stesso valore, essendo questa una condizione essenziale per le verifiche da eseguirsi.

Alle equazioni (VIII) di trasformazione dovremo ora aggiungere quelle che si ottengono dalla derivazione delle (83), cioè le analoghe alle (82)

$$\frac{\partial H'_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \beta'_{i\lambda} H'_\lambda,$$

dove per la (80*)

$$\beta'_{i\lambda} = \beta_{i\lambda} + (H'_\lambda - H_\lambda)\frac{\gamma_i}{\varphi}.$$

Così formiamo per le funzioni incognite

$$\gamma_i, \quad H'_i, \quad \varphi, \quad \psi$$

il sistema ai differenziali totali

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = (H_i - H'_i)\psi - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_i} = -\frac{\gamma_i H'_i}{\varphi}\psi \\
&\frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \beta'_{ki} H'_k, \quad \frac{\partial H'_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \beta'_{i\lambda} H'_\lambda,
\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

dove

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} + (H'_k - H_k)\frac{\gamma_i}{\varphi}, \tag{85}$$

al quale è ancora da aggregarsi l'equazione *in termini finiti*

$$\sum_\lambda H^2_\lambda - \sum_\lambda H'^2_\lambda = 0. \tag{84*}$$

Ci troviamo così davanti ad un sistema *misto* ai differenziali totali, di cui stabiliamo la completa integrabilità mostrando che le sue conseguenze differenziali del 1.° ordine sono già contenute nel sistema stesso. Per le equazioni che risultano dal derivare le (84) delle due prime linee e la (84*) le verifiche sono immediate. Basta quindi occuparsi di quelle che provengono dalla derivazione dell'ultima linea nelle (84), e provare che l'espressione

$$V = \frac{\partial}{\partial u_i}(\beta'_{ki} H'_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta'_{ik} H'_k) + \sum_\lambda^{(i,k)} \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta'_{i\lambda} H_\lambda)$$

si annulla avendo riguardo alle (84), (84*) stesse.

Ora, siccome $\dfrac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_l} = \beta'_{il}\beta'_{lk}$, ne risulta

$$V = H'_k \left\{ \frac{\partial \beta'_{ki}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta'_{i\lambda}\beta'_{k\lambda} \right\} +$$

$$+ \beta'_{ki}\beta'_{ik} H'_i - \beta'_{ik} \sum_\lambda^{(i)} \beta'_{i\lambda} H'_\lambda + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta'_{ik}\beta'_{i\lambda} H'_\lambda,$$

e qui gli ultimi tre termini manifestamente si elidono, e resta a provare che si annulla anche il coefficiente V' di H'_k

$$V' = \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta'_{ki}}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta'_{i\lambda}\beta'_{l\lambda}.$$

Se in questa poniamo per le β'_{ik} i loro valori (85), risulta

$$V' = \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ (H'_k - H_k)\frac{\gamma_i}{\varphi} \right\} + \frac{\partial}{\partial u_i}\left\{ (H'_i - H_i)\frac{\gamma_k}{\varphi} \right\} +$$

$$+ \sum_\lambda^{(i,k)} \left\{ \beta_{i\lambda} + (H'_\lambda - H_\lambda)\frac{\gamma_i}{\varphi} \right\} \cdot \left\{ \beta_{k\lambda} + (H'_\lambda - H_\lambda)\frac{\gamma_k}{\varphi} \right\}.$$

Ora abbiamo dalle (IX) e dalle (84)

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{i\lambda}\beta_{k\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_i} = \beta_{ki}\gamma_i$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\frac{H_k\gamma_k}{\varphi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = -\frac{H_i\gamma_i}{\varphi^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(H'_i - H_i) = \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda}(H_\lambda - H'_\lambda) + \frac{\gamma_i}{\varphi}\sum_\lambda^{(i)} H'_\lambda (H_\lambda - H'_\lambda)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(H'_k - H_k) = \sum_\lambda^{(k)} \beta_{k\lambda}(H_\lambda - H'_\lambda) + \frac{\gamma_k}{\varphi}\sum_\lambda^{(k)} H'_\lambda (H_\lambda - H'_\lambda).$$

Sostituendo nella espressione precedente di V', otteniamo, dopo semplici riduzioni

$$V' = \frac{\gamma_i \gamma_k}{\varphi^2} \Big\{ H_i^2 + H_k^2 - H_i H'_i - H_k H'_k + \sum_\lambda^{(i)} H_\lambda H'_\lambda +$$

$$+ \sum_\lambda^{(k)} H_\lambda H'_\lambda - \sum_\lambda^{(i)} H'^2_\lambda - \sum_\lambda^{(k)} H'^2_\lambda + \sum_\lambda^{(i,k)} (H'^2_\lambda + H^2_\lambda - 2 H_\lambda H'_\lambda) \Big\},$$

o in fine

$$V' = \frac{\gamma_i \gamma_k}{\varphi^2} (\sum_\lambda H^2_\lambda - \sum_\lambda H'^2_\lambda),$$

che è nulla appunto per l'equazione in termini finiti (84*). Abbiamo dunque il risultato:

Ogni sistema n^{plo} *ortogonale H nell'*S_n *ammette* ∞^{2n-1} *sistemi H derivati per trasformazioni di Ribaucour, che si ottengono integrando il sistema misto ai differenziali totali* (84), (84*).

§ 25.

Sistemi H traslatorii.

Fra i sistemi H formano una classe particolarmente notevole quelli che sono ad un tempo sistemi E, e soddisfano quindi insieme alle condizioni

$$\sum_\lambda H^2_\lambda = \text{cost.}, \quad \beta_{ik} = \beta_{ki};$$

li diremo pel momento sistemi H simmetrici. Ne stabiliamo intanto l'esistenza col teorema:

Dato un sistema E qualunque, esistono fra i suoi trasformati di Combescure ∞^{n-1} *sistemi H, che sono perciò simmetrici.*

Le rotazioni di un sistema E soddisfano al sistema (VI) § 14

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\beta_{lk}, \quad \sum_\lambda \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_\lambda} = 0 \\ (\beta_{ik} = \beta_{ki}), \end{array}\right\} \qquad \text{(V)}$$

ed un suo trasformato di Combescure sarà un sistema H quando le H_i soddisfino al sistema di equazioni ai differenziali totali

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda .$$

Ora questo è, nel caso attuale, un sistema completamente integrabile perchè le (V), essendo $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, rientrano come caso particolare nella (IX) § 23. Restano dunque arbitrarii, nell'integrazione del sistema lineare omogeneo per le H_i, i valori iniziali di queste funzioni, ciò che dà appunto (prescindendo da una costante d'omotetia) le $n-1$ costanti arbitrarie del teorema enunciato.

Ma ora dirigiamo la nostra attenzione sopra un'altra notevole proprietà di questi sistemi H simmetrici: ***esiste una direzione fissa nello spazio tale che una traslazione continua in questa direzione trasforma il sistema H in sè medesimo, scambiando fra loro le ipersuperficie di una stessa serie.***

Per dimostrarlo osserviamo che, essendo $\beta_{ki} = \beta_{ik}$, non soltanto i coseni X_i, come accade in ogni sistema E (§ 14), soddisfano all'equazione a derivate parziali $\sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial u_\lambda} = 0$, ma anche i coefficienti H_i. Questi dipendono dunque soltanto dalle differenze $u_i - u_k$, cioè sono *invarianti* del gruppo G_1 ad un parametro di trasformazioni di Combescure del sistema E in sè medesimo. Nel caso attuale il gruppo G_1 è adunque un gruppo di movimenti, anzi un gruppo traslatorio, come proviamo dimostrando che le trajettorie del gruppo sono rette parallele.

Supposto per semplicità $\sum_\lambda H_\lambda^2 = 1$, troviamo subito che i coseni di direzione $\alpha, \beta, \ldots$ delle tangenti a queste trajettorie, colle equazioni differenziali $d u_1 = d u_2 = \cdots = d u_n$, sono dati da

$$\alpha = \sum_\lambda H_\lambda X_\lambda , \quad \beta = \sum_\lambda H_\lambda Y_\lambda , \ldots$$

Ora avendosi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} &= X_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + H_i \frac{\partial X_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} H_i X_\lambda + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} H_\lambda X_i = \\ &= X_i \sum_\lambda^{(i)} (\beta_{\lambda i} - \beta_{i\lambda}) H_\lambda + H_i \sum_\lambda^{(i)} (\beta_{i\lambda} - \beta_{\lambda i}) X_\lambda , \end{aligned}\right\} \tag{85*}$$

a causa di $\beta_{i\lambda} = \beta_{\lambda i}$ risulta

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u_i} = \frac{\partial \beta}{\partial u_i} = \cdots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

cioè i coseni α, β,... sono costanti e la direzione è fissa nello spazio c. d. d.

La proprietà così dimostrata giustifica il nome di *traslatorii* che diamo a questi speciali sistemi H ed ora andiamo a dimostrare che inversamente: *Se un sistema n^{plo} ortogonale Σ ammette un gruppo traslatorio ad un parametro in sè medesimo, esso è necessariamente un sistema H traslatorio* (*).

Sia infatti $XF = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ la traslazione infinitesima supposta, generatrice del gruppo. Dovendo il sistema delle ipersuperficie $u_i =$ cost. cangiarsi per la XF in sè medesimo, il coefficiente ξ_i sarà funzione della sola u_i, e con un cangiamento di parametri possiamo supporre (**), senza alterare la generalità

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 1.$$

Il movimento infinitesimo porta il punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in

$$(u_1 + \delta t, \quad u_2 + \delta t, \ldots, \quad u_n + \delta t)$$

e la distanza δs dei due punti è data da

$$\delta s^2 = \delta t^2 \sum_\lambda H_\lambda^2,$$

che dovrà essere costante, trattandosi di una traslazione, e si ha intanto necessariamente $\sum_\lambda H_\lambda^2 =$ cost.

Valgono quindi le formole (§ 23)

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{i\lambda} H_\lambda,$$

e d'altra parte, avendosi $XH_i = 0$ perchè la traslazione trasforma il sistema H in sè stesso, avremo anche

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} H_\lambda,$$

e per ciò

$$\sum_\lambda^{(i)} (\beta_{\lambda i} - \beta_{i\lambda}) H_\lambda = 0.$$

(*) Cfr. pel caso $n = 3$ Darboux, l. c., num. 237 e segg.

(**) Supponiamo che la traslazione XF scambi le ipersuperficie $u_i =$ cost. fra loro senza lasciarle singolarmente fisse.

Ora i coseni di direzione α, β,... della traslazione debbono essere costanti e dalle formole (85*) sopra calcolate risulta quindi

$$\sum_{\lambda}^{(i)} (\beta_{i\lambda} - \beta_{\lambda i}) X_\lambda = 0, \quad \sum_{\lambda}^{(i)} (\beta_{i\lambda} - \beta_{\lambda i}) Y_\lambda = 0, \ldots$$

Se moltiplichiamo ordinatamente queste formole per X_k, Y_k,... ed eseguiamo la somma S, essendo

$$S\, X_k X_\lambda = \varepsilon_{k\lambda},$$

troviamo subito $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, sicchè siamo appunto ricondotti ai sistemi H traslatorii. c. d. d.

§ 26.

Le trasformazioni T_m dei sistemi H traslatorii.

Andiamo ora ad applicare ai sistemi H traslatorii i risultati del § 15 per le trasformazioni T_m dei generali sistemi E. Ogni sistema E ammette, secondo il § 15, ∞^n trasformazioni T_m (d'assegnato parametro m) in altri sistemi E'; ma noi ora, supponendo che il sistema iniziale E sia un sistema H (traslatorio), domandiamo se fra questi sistemi derivati E' ve ne sono di quelli che siano ancora sistemi H (traslatorii), soddisfacendo le H'_i alla condizione

$$\sum_\lambda H'^2_\lambda - \sum_\lambda H^2_\lambda = 0. \tag{86}$$

Le funzioni trasformatrici γ_i soddisfano alle (VI) § 15

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = m\gamma_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{i\lambda}\gamma_\lambda, \tag{87}$$

e pei coefficienti H'_λ valgono le (60) ibid.

$$H'_\lambda = H_\lambda - \frac{2m\gamma_\lambda \varphi}{A}.$$

Si ha quindi

$$\sum_\lambda (H'^2_\lambda - H^2_\lambda) = \sum_\lambda (H'_\lambda - H_\lambda)(H'_\lambda + H_\lambda) = -\frac{4m\varphi}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda \left(H_\lambda - \frac{m\gamma_\lambda\varphi}{A}\right) =$$

$$= -\frac{4m\varphi}{A}\left(\sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda - m\varphi\right).$$

La condizione (86) dà quindi:

$$\varphi = \frac{1}{m}\sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda, \tag{88}$$

e se dimostriamo che, con questo valore di φ, sono soddisfatte le equazioni di trasformazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i, \tag{89}$$

ne risulterà che, per raggiungere lo scopo proposto, basta aggregare alle γ_i, come $(n+1)^{ma}$ funzione trasformatrice, la φ calcolata dalla (88).

Ora abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda = \gamma_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} + H_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \frac{\partial}{\partial u_i}(H_\lambda \gamma_\lambda),$$

e per le (87), (82)

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda = \gamma_i \sum_\lambda^{(i)} (\beta_{\lambda i} - \beta_{i\lambda}) H_\lambda + H_i \sum_\lambda^{(i)} (\beta_{i\lambda} - \beta_{\lambda i})\gamma_\lambda + m H_i \gamma_i,$$

ossia, essendo $\beta_{i\lambda} = \beta_{\lambda i}$

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda = m H_i \gamma_i,$$

e per ciò la φ calcolata dalla (88) soddisfa in effetto la (89).

Aggiungiamo ancora che, nel sistema H traslatorio trasformato, la direzione della traslazione è rimasta la medesima. E infatti i coseni di direzione α', β'... della nuova traslazione saranno

$$\alpha' = \sum_\lambda H'_\lambda X'_\lambda, \quad \beta'_\lambda = \sum_\lambda H'_\lambda Y'_\lambda, \ldots,$$

e basterà provare che è nulla l'espressione

$$\sum_\lambda H'_\lambda X'_\lambda - \sum_\lambda H_\lambda X_\lambda = \sum_\lambda \left(H_\lambda - \frac{2m\gamma_\lambda\varphi}{A}\right)\left(X_\lambda - \frac{2\gamma_\lambda}{A}\sum_j \gamma_j X_j\right) - \sum_\lambda H_\lambda X_\lambda.$$

In effetto, riducendo, abbiamo

$$\sum_\lambda H'_\lambda X'_\lambda - \sum_\lambda H_\lambda X_\lambda = \frac{2}{A} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda (m\varphi - \sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda),$$

espressione che si annulla per la (88). Concludiamo quindi:

Ogni sistema H traslatorio ammette ∞^{n-1} *trasformazioni* T_m *in sistemi della medesima specie e colla stessa direzione della traslazione. Si ottengono queste trasformazioni prendendo le prime n funzioni trasformatrici* γ_i *in guisa da soddisfare alle* (87) *e calcolando poi la* $(n+1)^{ma}$ φ *dalla formola* (88).

§ 27.

Il teorema speciale di permutabilità pei sistemi H traslatorii.

Nel teorema speciale di permutabilità per le trasformazioni T_m dei sistemi E (§ 16) consideriamo ora il caso particolare che tanto il sistema iniziale E quanto i due contigui E', E'' siano sistemi H traslatorii.

Per questo, supposto $\sum_\lambda H_\lambda^2 = \text{cost.}$, basterà, per quanto si è visto sopra, che per le $(n+1)^{me}$ funzioni trasformatrici φ, φ', da aggregarsi rispettivamente alle (γ_i), (γ'_i), si assumano quelle date dalla (88)

$$\varphi = \frac{1}{m} \sum_\lambda H_\lambda \gamma_\lambda, \quad \varphi' = \frac{1}{m'} \sum_\lambda H_\lambda \gamma'_\lambda; \tag{90}$$

ed allora dimostriamo: *Il quarto sistema* $\overline{E}$ *del teorema speciale di permutabilità è nuovamente un sistema* $\overline{H}$ *traslatorio.*

Essendo $\overline{E}$ legato ad E' da una trasformazione $T_{m'}$, colle funzioni trasformatrici $(\overline{\gamma}_i, \overline{\varphi})$ calcolate al § 16, basterà provare che sussiste, colle (90), l'analoga

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{m'} \sum_\lambda H'_\lambda \overline{\gamma}_\lambda. \tag{91}$$

Ora abbiamo

$$\overline{\gamma}_i = \Omega \gamma_i + \gamma'_i, \quad \overline{\varphi} = \Omega \varphi + \varphi',$$

con Ω dato dalla (67) § 16

$$\Omega = -\frac{2mB}{(m+m')A},$$

e d'altronde per le (61) § 16

$$H'_i = H_i - \frac{2\,m\,\gamma_i\,\varphi}{A}.$$

Ne risulta

$$\sum_\lambda H'_\lambda\,\gamma_\lambda = \sum_\lambda \left(H_\lambda - \frac{2\,m\,\gamma_\lambda\,\varphi}{A}\right)\left(\gamma'_\lambda - \frac{2\,m\,B}{(m+m')\,A}\,\gamma_\lambda\right) =$$

$$= \sum_\lambda H_\lambda\,\gamma'_\lambda - \frac{2\,m\,B}{(m+m')\,A}\sum_\lambda H_\lambda\,\gamma_\lambda - \frac{2\,m\,\varphi}{A}\sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda + \frac{4\,m^2\,\varphi\,B}{(m+m')\,A^2}\sum_\lambda \gamma_\lambda^2.$$

Tenendo presenti le (90), e le formole

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = A, \qquad \sum_\lambda \gamma_\lambda\,\gamma'_\lambda = B,$$

abbiamo quindi

$$\sum_\lambda H'_\lambda\,\overline{\gamma}_\lambda = m'\,\varphi' - \frac{2\,m^2\,B}{(m+m')\,A}\,\varphi - \frac{2\,m\,B\,\varphi}{A} +$$

$$+ \frac{4\,m^2\,B}{(m+m')\,A}\,\varphi = m'\left(\varphi' - \frac{2\,m\,B}{(m+m')\,A}\,\varphi\right),$$

o in fine

$$\sum_\lambda H'_\lambda\,\overline{\gamma}_\lambda = m'\,\overline{\varphi},$$

formola che coincide precisamente colla (91).

Così abbiamo dimostrato in effetto che il teorema speciale di permutabilità del § 16, relativo alle trasformazioni T_m pei sistemi E in generale, vale in particolare se si considera soltanto il gruppo di quelli che sono al tempo stesso sistemi H (traslatorii). Valgono quindi anche le conseguenze, accennate alla fine del § 16, per l'applicazione ripetuta del processo di trasformazione, che si compie, dopo il primo passo, con soli calcoli in termini finiti.

Aggiungiamo in fine che, nel caso $n = 3$, le superficie che generano per traslazione una famiglia di Lamè vennero caratterizzate da Petot per la proprietà seguente: *La congiungente i due centri di curvatura geodetica delle linee di curvatura è ortogonale ad una direzione fissa* (*direzione della traslazione*). (Cfr. Darboux, l. c., n. 53 e Petot, *Comptes Rendus*, t. 118, pag. 1411). Manifestamente abbiamo così per queste superficie dei metodi di trasformazione (di Ribaucour) pei quali vale un teorema speciale di permutabilità.

§ 28.

Le formole del teorema di permutabilità per le superficie.

Abbiamo già indicato (§ 12 b)) che le formole per le trasformazioni di Ribaucour delle superficie, incluso il teorema di permutabilità, possono dedursi come caso particolare da quelle pei sistemi tripli ortogonali. Qui da ultimo vogliamo scrivere effettivamente queste formole, rimandando per maggiori sviluppi ad altra Memoria (*).

a) Definiamo una superficie S, riferita alle sue linee di curvatura (u, v), mediante la sua *prima* e *terza* forma quadratica fondamentale

$$d s^2 = H_1^2 \, d u^2 + H_2^2 \, d v^2$$

$$d s'^2 = h_1^2 \, d u^2 + h_2^2 \, d v^2,$$

che dànno rispettivamente il $d s^2$ della superficie e quello $d s'^2$ della sua immagine sferica. La superficie S individua un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) di cui le $u_3 = \text{cost.}$ sono le superficie parallele alla S, corrispondendo questa p. e. al valore $u_3 = 0$, mentre le $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$ sono le sviluppabili luogo delle normali lungo le linee di curvatura, i cui parametri u, v si identificheranno con $u_1 = u$, $u_2 = v$. Ora, nelle formole generali relative ai sistemi tripli ortogonali, pongasi dappertutto $u_3 = 0$ mantenendo di queste formole solo quelle in cui non figurano derivazioni rapporto ad u_3. Le 6 rotazioni del sistema triplo assumono allora, per $u_3 = 0$, i valori seguenti

$$\beta_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial u}$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial v}$$

$$\beta_{13} = \beta_{23} = 0, \quad \beta_{31} = h_1, \quad \beta_{32} = h_2,$$

(*) *Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili* (Memorie della R. Accademia dei Lincei (1918)).

e le formole fondamentali (I), (II) § 1 si riducono alle seguenti

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial H_1}{\partial v}=\beta_{21}H_2, \quad \frac{\partial H_2}{\partial u}=\beta_{12}H_1\\&\frac{\partial h_1}{\partial v}=\beta_{21}h_2, \quad \frac{\partial h_2}{\partial u}=\beta_{12}h_1\\&\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u}+\frac{\partial \beta_{21}}{\partial v}+h_1h_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

b) Una trasformazione di RIBAUCOUR della superficie S in un'altra S' sarà individuata da quattro funzioni trasformatrici $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi$, delle quali la terza γ_3, funzionando qui in modo diverso dalle prime due, si indicherà con altra lettera w. Le equazioni differenziali caratteristiche per le quattro funzioni trasformatrici

$$\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi$$

si ricavano dalle generali (III) § 6, coll'avvertenza fatta in *a*) e si scrivono

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \gamma_1}{\partial v}=\beta_{12}\gamma_2, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial u}=\beta_{21}\gamma_1\\&\frac{\partial w}{\partial u}=h_1\gamma_1, \quad \frac{\partial w}{\partial v}=h_2\gamma_2\\&\frac{\partial \varphi}{\partial u}=H_1\gamma_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}=H_2\gamma_2.\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Per gli elementi (x', X'_1, X'_2, X'_3) della superficie trasformata S' si ha dalle (31) § 6

$$x'=x-\frac{2\varphi}{A}(\gamma_1X_1+\gamma_2X_2+wX_3) \tag{94}$$

$$\left.\begin{aligned}X'_1&=X_1-\frac{2\gamma_1}{A}(\gamma_1X_1+\gamma_2X_2+wX_3)\\X'_2&=X_2-\frac{2\gamma_2}{A}(\gamma_1X_1+\gamma_2X_2+wX_3)\\X'_3&=X_3-\frac{2w}{A}(\gamma_1X_1+\gamma_2X_2+wX_3),\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

dove

$$A=\gamma_1^2+\gamma_2^2+w^2. \tag{95}$$

c) Se dalle superficie S si deducono due diverse trasformate di Ribaucour S', S'' colle rispettive trasformazioni

$$(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi), \quad (\gamma'_1, \gamma'_2, w', \varphi'),$$

vale il teorema generale di permutabilità colle relative formole (§ 10)

$$\overline{\gamma}_1 = \Omega\,\gamma_1 + \gamma'_1, \quad \overline{\gamma}_2 = \Omega\,\gamma_2 + \gamma'_2, \quad \overline{w} = \Omega\,w + w', \quad \overline{\varphi} = \Omega\,\varphi + \varphi', \tag{96}$$

che definiscono le funzioni trasformatrici

$$(\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \overline{w}, \overline{\varphi})$$

nel passaggio dalla S' alla superficie generica $\overline{S}$ del fascio coniugato al fascio (S', S''). Il moltiplicatore Ω nelle (96) si calcola dalla formola (53) § 10

$$A\,\Omega = c + \tau \quad (c \text{ costante}), \tag{97}$$

essendo τ definito con una quadratura dalle formole

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= -2\gamma'_1\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \beta_{21}\,\gamma_2 + h_1\,w\right) \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} &= -2\gamma'_2\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial v} + \beta_{12}\,\gamma_1 + h_2\,w\right). \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

§ 29.

Caso delle trasformazioni D_m delle superficie isoterme.

Applichiamo da ultimo questi risultati alla ricerca delle formole del teorema *speciale* di permutabilità per le trasformazioni D_m di Darboux delle superficie isoterme, quali furono stabilite direttamente nelle mie: *Ricerche sulle superficie isoterme* (*).

Supponendo la superficie S isoterma, introduciamo anche parametri isometrici u, v, ponendo

$$H_1 = H_2 = e^{\theta}$$

(*) *Annali di Matematica*, T. XI, Serie 3.ª (1905).

e scriviamo le formole per la D_m sotto la forma (*):

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} = m\,(e^\theta\,\sigma + e^{-\theta}\,\varphi) - h_1\,w - \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\gamma_2, \quad \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\gamma_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\gamma_1, \quad \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} = m\,(e^\theta\,\sigma - e^{-\theta}\,\varphi) - h_2\,w - \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\gamma_1 \\[2ex]
\dfrac{\partial w}{\partial u} = h_1\,\gamma_1, \quad \dfrac{\partial w}{\partial v} = h_2\,\gamma_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = e^\theta\,\gamma_1, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = e^\theta\,\gamma_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = e^{-\theta}\,\gamma_1, \quad \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = -\,e^{-\theta}\,\gamma_2,
\end{array}\right\} \tag{99}$$

dove alle quattro funzioni trasformatrici γ_1, γ_2, w, φ se ne è aggiunta una quinta σ, legata a queste, ed al *parametro m* della trasformazione D_m, dalla relazione in termini finiti

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 = 2\,m\,\varphi\,\sigma. \tag{100}$$

Suppongasi ora di considerare, insieme a questa trasformata isoterma S' della S per la D_m, una seconda S'' ottenuta con una $D_{m'}$, supposto $m' \neq m$, e siano $(\gamma'_1, \gamma'_2, w', \varphi', \sigma')$ le relative funzioni trasformatrici. Cerchiamo se nel fascio del teorema generale di permutabilità, individuato dalle (90), esiste una quarta superficie $\overline{S}$ che sia pure isoterma e legata alla S' da una $D_{m'}$ (alla S'' da una D_m). Perciò alle (96) aggiungiamo l'altra relativa alla quinta funzione trasformatrice

$$\overline{\sigma} = \Omega\,\sigma + \sigma'.$$

Dovremo avere, insieme alla (100), le altre due

$$\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + w'^2 = 2\,m'\,\varphi'\,\sigma'$$

$$\overline{\gamma}_1^2 + \overline{\gamma}_2^2 + \overline{w}^2 = 2\,m'\,\overline{\varphi}\,\overline{\sigma},$$

dal cui paragone risulta

$$\Omega^2\,(m - m')\,\varphi\,\sigma + \left\{\gamma_1\,\gamma'_1 + \gamma_2\,\gamma'_2 + w\,w' - m'\,(\varphi\,\sigma' + \varphi'\,\sigma)\right\}.\,\Omega = 0,$$

(*) Cfr. il § 51 delle sopracitate *Ricerche sulle congruenze di sfere*, ecc. (Memorie dei Lincei, 1918).

indi

$$\Omega = \frac{\gamma_1 \gamma'_1 + \gamma_2 \gamma'_2 + w w' - m'(\varphi \sigma' + \varphi' \sigma)}{(m' - m) \varphi \sigma}.$$

A causa di

$$A = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 = 2 m \varphi \sigma,$$

questa formola può anche scriversi

$$A \Omega = \frac{2m}{m' - m} \left\{ \gamma_1 \gamma'_1 + \gamma_2 \gamma'_2 + w w' - m'(\varphi \sigma' + \varphi' \sigma) \right\}, \tag{101}$$

e, tenendo conto delle equazioni differenziali (99) e delle analoghe per γ'_1, γ'_2, w', φ', σ', sarebbe ora facile constatare che il valore così ottenuto per Ω soddisfa a tutte le condizioni richieste, e ne risulta quindi individuata la quarta superficie $\overline{S}$ del teorema speciale di permutabilità. Qui ci limitiamo per brevità ad osservare che la formola trovata (101) combina, salvo le notazioni diverse, con quella stabilita nella citata Memoria degli *Annali* (T. XI).

Termineremo col dedurre dalla formola generale (60) § 12 la dimostrazione di una elegante proprietà segnalata da A. Demoulin (*) per la costruzione della quarta superficie $\overline{S}$.

Indicando con M, M', M'', $\overline{M}$ una qualunque quaderna di punti corrispondenti sulle quattro superficie S, S', S'', $\overline{S}$, sappiamo che essi sono situati sopra un circolo e formano un birapporto

$$\Theta = (M \overline{M} M' M'')$$

dato dalla (60)

$$\Theta = \frac{(A \Omega + 2B)\varphi' - A'\varphi}{A(\Omega \varphi + \varphi')} \, \frac{\varphi}{\varphi'}. \tag{102}$$

Ora, nel caso nostro, si ha

$$A = 2 m \varphi \sigma, \quad A' = 2 m' \varphi' \sigma'$$

$$B = \gamma_1 \gamma'_1 + \gamma_2 \gamma'_2 + w w',$$

e per la (101)

$$A \Omega = \frac{2m}{m' - m} \left\{ B - m'(\varphi \sigma' + \varphi' \sigma) \right\}$$

$$A \Omega + 2B = \frac{2m'}{m' - m} \left\{ B - m(\varphi \sigma' + \varphi' \sigma) \right\}.$$

(*) *Sur les systèmes et les congruences K*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (janvier 1910).

Sostituendo nella (102) troviamo

$$\Theta = \frac{m'}{m} \cdot \frac{B - m(\varphi\sigma' + \varphi'\sigma) + (m - m')\varphi\sigma'}{B - m'(\varphi\sigma' + \varphi'\sigma) + (m' - m)\varphi'\sigma} = \frac{m'}{m},$$

e possiamo formulare la costruzione seguente:

Se da una superficie isoterma S si sono dedotte due nuove superficie isoterme S', S'' colle rispettive trasformazioni di Darboux D_m, $D_{m'}$, a costanti m, m' diverse, presa una terna qualunque M, M', M'' di punti corrispondenti delle tre superficie S, S', S'', si consideri sul circolo C dei tre punti M, M', M'' il quarto punto $\overline{M}$, tale che il birapporto $(M\,\overline{M}\,M'\,M'')$ risulti costante ed eguale a $\frac{m'}{m}$. Il punto $\overline{M}$ descrive la quarta superficie isoterma $\overline{S}$ del teorema di permutabilità.

Si noti l'analogia di questo risultato coll'altro che si presenta nel teorema di permutabilità per le trasformazioni B_k delle deformate delle quadriche generali (*). È manifesto che l'analogia osservata non è casuale e la sua ragione geometrica è da ricercarsi nel legame, stabilito dalle ricerche del Darboux, fra le superficie isoterme (speciali) e le deformate delle quadriche.

(*) *Lezioni,* Vol. III, § 65.

INDICE DEI PARAGRAFI

Sulla classificazione aritmetica di Nöther dei sistemi lineari di curve algebriche piane.

(*Di* DAVIDE NENCINI, *a Palermo.*)

In una importante Nota pubblicata nei *Mathematische Annalen* (1872) M. NÖTHER ha enunciato la proposizione: *Una trasformazione birazionale si può scindere in una successione di trasformazioni quadratiche.*

Del procedimento in essa seguìto si servì il Prof. EUGENIO BERTINI in una Memoria sulle trasformazioni univoche involutorie del piano, nella quale dà i fasci e talune reti di genere 1 di ordine minimo e certi sistemi tripli di genere 2, di ordine minimo. In detto procedimento del NÖTHER, il Professore G. B. GUCCIA ha ravvisato l'applicazione, al caso delle reti omaloidiche, di un metodo di riduzione dei sistemi lineari di curve piane all'ordine minimo ed ha applicato questo metodo prima a tutti i sistemi lineari di genere 0, poi ai sistemi lineari di genere 1. Il Prof. MARTINETTI applicò poi questo metodo ai sistemi di genere 1 e a quelli sovrabbondanti di genere 2.

Il Prof. JUNG l'applicò ai sistemi generali di ordine p ed il Prof. DE FRANCHIS successivamente ai fasci di genere 2 ed ai sistemi lineari di genere 3 con dimensione > 1. Il metodo suddetto si divide in due parti. Nella prima parte, si cercano i sistemi lineari d'ordine minimo che non hanno una terna di punti base la somma delle cui multiplicità supera l'ordine; nella seconda parte, si cercano tutti gli altri sistemi d'ordine minimo. A questa seconda parte del procedimento, che è la più difficile, ha mosso una grave obbiezione il Prof. CORRADO SEGRE in una Nota pubblicata negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1901), alla fine della quale conchiudeva che non era sufficientemente provato che una trasformazione di CREMONA si può ottenere con una successione di trasformazioni quadratiche e non erano sufficientemente provati gli altri risultati, a cui erano giunti gli illustri Geometri sopra citati. La fondamentale proposizione ora menzionata fu dimostrata in modo rigoroso dal Prof. GUIDO CASTELNUOVO in un lavoro pubblicato nei detti *Atti di Torino.* In questo, Egli dimostra, prima, che: *Ogni trasformazione di Cremona è il prodotto di più trasformazioni di De Jonquières;* fa vedere, poi, che: *Ogni trasformazione di De Jonquières è il prodotto di trasformazioni quadratiche.*

Seguendo il CASTELNUOVO, il Sig. GIOVANNI FERRETTI ha trattato della riduzione dei sistemi lineari all'ordine minimo e si è occupato anche, in particolare, dei sistemi di genere 0, 1, 2. Considerazioni sullo stesso problema, che, come queste, non cadono sotto l'obbiezione del SEGRE, avevano antecedentemente fatto il SEGRE stesso, il DEL PEZZO ed il CASTELNUOVO. I metodi di ricerca di tutti questi Autori hanno però bisogno d'ipotesi più o meno restrittive o sul genere, o sulla dimensione, o sulla natura dei sistemi lineari.

Scopo del presente lavoro è di indicare un procedimento, mediante il quale, si possono classificare aritmeticamente tutti i sistemi di curve piane di qualunque dimensione e di qualsiasi genere, che hanno una terna di punti base la somma delle cui multiplicità supera l'ordine. Il metodo è qui applicato ai casi particolari di $p=0$, $p=1$, $p=2$.

Nel caso di $p=0$, pervengo subito alla dimostrazione della proposizione enunciata dal CASTELNUOVO circa la scissione di una trasformazione di CREMONA in trasformazioni di DE JONQUIÈRES, e quindi alla dimostrazione che ogni trasformazione di CREMONA è il prodotto di trasformazioni quadratiche.

La classificazione aritmetica dei sistemi lineari di genere qualunque, che non hanno una terna di punti base la somma delle cui multiplicità supera l'ordine, si fa generalizzando i procedimenti seguìti nelle prime parti dei loro lavori dai Prof.[i] NÖTHER, GUCCIA, MARTINETTI, DE FRANCHIS.

Fare l'esposizione di queste generalizzazioni e l'applicazione del metodo qui esposto ai casi di $p=3$, 4, ecc., mi è stato finora impossibile per varie ragioni che hanno grandemente ritardato la redazione del presente lavoro.

Dò qui l'elenco dei lavori da citare, nell'ordine stesso in cui vi ho alluso:

NÖTHER. — *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen*, Math. Ann. 5, 1872.

BERTINI. — *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, Annali di Mat. (2), 8, 1877.

GUCCIA. — *Generalizzazione di un teorema di Nöther*, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. I, 1886. — *Sulla riduzione dei sistemi di curve ellittiche, ecc.*, Ibid. 1887.

MARTINETTI. — *Sopra i sistemi lineari di curve piane algebriche di genere uno*, Rend. Ist. Lomb. (2), 20, 1887. — *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due*, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. I, 1887.

GIUSEPPE JUNG. — *Ricerche sui sistemi lineari di curve di genere qualunque*, Annali di Mat. pura ed appl., Serie II, Tomo XV, 1888. — *Ricerche sui sistemi di curve piane algebriche di genere p e sulla loro riduzione all'ordine minimo* (Memoria II), Ibid., Serie II, Tomo XVI, 1889.

M. DE FRANCHIS. — *Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2*, Rend. Circ. Mat. Palermo 13, 1898-1899. — *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane di genere 3 per* $k > 1$, Rend. Palermo 13, 1898-1899.

CORRADO SEGRE. — *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXVI. Adunanza del 24 Marzo 1901).

GUIDO CASTELNUOVO. — *Le trasformazioni generatrici del gruppo armonico nel piano* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXVI. Adunanza del 12 Maggio 1901).

GIOVANNI FERRETTI. — *Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p; in particolare per i valori 0, 1, 2 del genere* (Rendiconti Circ. Mat. di Palermo, t. 16.°, 1902).

C. SEGRE. — *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. I, 1887).

DEL PEZZO. — *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello* S_n, Ibid.

CASTELNUOVO. — *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono iperellittiche* (Rend. Circ. Mat., t. 4.°). — *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXV, 1890).

1. Se P è un punto di una curva C_n nel piano π e si trasforma π in π' mediante una trasformazione quadratica che ha in P un punto fondamentale, si dice che $P_1, P_2, \dots, P_m$ sono punti ***primi satelliti di P*** o ***nel primo intorno di P*** se essi sono i corrispondenti di P nella curva $C'_{n'}$.

Un punto primo satellite di un primo satellite di P si dice ***un secondo satellite*** o ***in un secondo intorno di P;*** e così di seguito. Distingueremo dunque ***parecchi*** intorni di secondo ordine, ***parecchi*** di terzo, ecc.

Se π e π' sono due piani posti in corrispondenza mediante una trasformazione birazionale, si dice che una curva C_n di π passa per un punto di π' quando $C'_{n'}$ passa per questo punto.

Se A, A_1, A_2 sono punti ***successivi*** (cioè se A_1, A_2,... giacciono in intorni successivi del punto A di una curva nel piano π) si dice che essi stanno su un ciclo di ordine α e classe s quando la più generale curva di π passante nel senso detto per A, A_1, $A_2, \dots$, ha un ciclo di ordine α e classe s, con origine in A.

Se $[C_n]$ è un sistema lineare di curve di un piano π si può, passando con successive trasformazioni quadratiche T, T', T'',... dal piano π ai piani π', π'', π''',..., arrivare ad un piano π^0 in cui il sistema $[C^0_{n^0}]$ che corrisponde al sistema $[C_n]$ ha tutti i punti base ***ordinarî e con tangenti diverse per le diverse curve.*** Queste trasformazioni quadratiche sono tali che, se, per es., $T^{(\nu)}$ è quella mediante la quale si passa da $\pi^{(\nu)}$ a $\pi^{(\nu+1)}$, $T^{(\nu)}$ ha un punto fondamentale in un punto base di $[C^{(\nu)}_{n^{(\nu)}}]$ non ordinario e con tangenti che sono comuni a tutte le curve del sistema.

In quello che segue noi supporremo che per ogni sistema lineare di curve piane $[C_n]$ si sia passati al sistema $[C^0_{n^0}]$ mediante un complesso di piani π, π', π'', π''',... e trasformazioni quadratiche T, T', T'',...

2. Dopo ciò, sia $[C_n]$ un sistema lineare di curve piane ***di ordine minimo e irriducibile.*** Sia n il suo ordine e p il suo genere, D il suo grado. Disponiamo i suoi punti base (distinti o infinitamente vicini) secondo l'ordine decrescente della loro multiplicità e chiamiamoli, posti in quest'ordine, $R, R_1, R_2, \dots, R_\nu$: chiamiamo $r, r_1, r_2, \dots, r_\nu$ le multiplicità. Allora possiamo scrivere simbolicamente:

$$[C_n] \equiv R^r R_1^{r_1} R_2^{r_2} \dots R_\nu^{r_\nu};$$

e si ha per ipotesi

$$r \geqq r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_\nu .$$

Supponiamo inoltre che tra questi punti base ce ne siano una terna la somma delle cui multiplicità superi n.

Allora è certamente $r + r_1 + r_2 > n$ e quindi $r + 2\,r_1 > n$.

Esistono dunque tra i punti $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$ punti la cui multiplicità è tale che il suo doppio aggiunto ad r dia un numero che supera n. Noi chiameremo *punti base maggiori* questi punti, *minori* tutti gli altri.

Si fa vedere facilmente che:

I. *I punti base maggiori sono tutti giacenti nei vari intorni di R.*

Infatti i punti R, R_1, R_2 sono infinitamente vicini tra loro perchè, se così non fosse, si potrebbe per essi far passare una rete di coniche, e la trasformazione quadratica che trasforma questa rete di coniche del piano di $[C_n]$ nelle rette di un altro piano, trasformerebbe $[C_n]$ in un sistema di ordine minore. Degli altri punti base maggiori, nessuno può essere fuori dei vari intorni di R perchè se così non fosse esisterebbe un punto base maggiore a distanza finita dai punti R, R_1, e, con punti fondamentali in quello e in questi, si potrebbe allora costruire una trasformazione quadratica che abbassa l'ordine di $[C_n]$.

Chiamiamo A il punto R. Un altro fatto interessante è affermato dalla proposizione seguente:

II. *In un intorno di A d'ordine superiore al primo non vi può essere più di un punto base maggiore.*

Chiamiamo $A_1, B_1, \ldots, D_1$ i punti base maggiori del primo intorno di A, ed j la multiplicità di A. Prendiamo per es. a considerare il punto A_1 e supponiamo che nel primo intorno di A_1 ci siano due punti base maggiori A_{11}, A_{12}. Se si indicano allora con i_1, i_{11}, i_{12} le multiplicità di A_1, A_{11}, A_{12}, per essere A_{11}, A_{12} punti base maggiori, si hanno le disuguaglianze:

$$j + 2\,i_{11} > n$$

$$j + 2\,i_{12} > n$$

e, per essere A_{11}, A_{12} nel primo intorno di A_1, si ha:

$$i_1 \geqq i_{11} + i_{12} .$$

Da queste tre relazioni segue che è:

$$j + i_1 > n.$$

Ma allora la retta $A A_1$ fa parte della curva C_n.

Ciò è assurdo perchè il sistema $[C_n]$ si è detto essere per ipotesi irriducibile.

Con ciò rimane dimostrato che nel primo intorno di A_1 non può esistere più di un punto base maggiore. Supponiamo che uno esista e chiamiamolo A_2. Si dimostra in maniera analoga a quella tenuta sopra che nel primo intorno di A_2 non può esistere più di un punto base maggiore. Supponiamo che in detto intorno uno di tali punti esista e chiamiamolo A_3. In maniera analoga si dimostra che nel primo intorno di A_3 non può esistere più di un punto base maggiore, ecc., ecc.

La proposizione II resta così dimostrata relativamente agli intorni di A che sono intorni di A_1. Cose analoghe si possono dire prendendo in considerazione $B_1, \ldots, D_1$ e la proposizione II resta così del tutto dimostrata.

Noi chiameremo i_1, $s_1, \ldots$, t_1 le multiplicità dei punti, base maggiori del 1.° intorno di A, A_1, $B_1, \ldots$, D_1 e supporremo (come evidentemente possiamo fare) che si abbia:

$$i_1 \geqq s_1 \geqq \cdots \geqq t_1 .$$

Chiamiamo: A_2, $A_3, \ldots$, A_a i punti base maggiori che si trovano rispettivamente nel primo, nel secondo, ..., nel $(a-1)^{\text{esimo}}$ intorno di A_1 ed i_2, $i_3, \ldots$, i_a le loro multiplicità; B_2, $B_3, \ldots$, B_b i punti base maggiori che si trovano nei successivi intorni di B_1 ed s_2, $s_3, \ldots$, s_b le loro multiplicità;... finalmente D_2, $D_3, \ldots$, D_g i punti base maggiori che si trovano nei successivi intorni di D_1 e t_2, $t_3, \ldots$, t_g le loro multiplicità. Si hanno allora le relazioni:

$$\begin{gathered} i_1 \geqq i_2 \geqq i_3 \geqq \cdots \geqq i_a \\ s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \cdots \geqq s_b \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_1 \geqq t_2 \geqq t_3 \geqq \cdots \geqq t_g . \end{gathered}$$

Dimostriamo ora che:

III. *I punti base maggiori successivi di una serie come:*
A; A_1, $A_2, \ldots$, A_h $(h \leqq a)$, compresa nella serie A, A_1, $A_2, \ldots$, A_a,
A, B_1, $B_2, \ldots$, B_k $(k \leqq b)$, compresa nella serie A, B_1, $B_2, \ldots$, $B_b, \ldots$,
A, D_1, $D_2, \ldots$, D_l $(l \leqq g)$, compresa nella serie A, D_1, $D_2, \ldots$, D_g, stanno su un ciclo di prima classe che ha origine in A (cfr. n. 1).

Dimostriamo la cosa per i punti della serie A, A_1, $A_2, \dots, A_h$.

Impiegando un ragionamento analogo ad uno fatto sopra si fa vedere che i punti consecutivi della serie A_m, A_{m+1}, A_{m+2} con $m \geqq 1$ stanno su un ciclo di primo ordine con origine in A_m. Infatti se A_m, A_{m+1}, A_{m+2} stessero su un ciclo di ordine maggiore di 1 si avrebbe evidentemente:

$$i_m \geqq i_{m+1} + i_{m+2}$$

e quindi, per essere

$$i_1 \geqq i_m :$$

$$i_1 \geqq i_{m+1} + i_{m+2} .$$

Da queste relazioni e dalle due

$$j + 2\, i_{m+1} > n$$

$$j + 2\, i_{m+2} > n$$

si otterrebbe allora:

$$j + i_1 > n$$

e la retta $A\, A_1$ apparterrebbe a C_n. Ciò sarebbe assurdo. La classe del ciclo su cui stanno A_m, A_{m+1}, A_{m+2} è $\leqq 2$.

Da quanto abbiamo detto scaturisce che A_1, $A_2, \dots, A_h$ stanno su un ciclo di primo ordine (e classe $\leqq h-1$) con origine in A_1.

Osserviamo ancora che la retta $A\, A_1$ non può passare per A_2, perchè, se così avvenisse, essendo:

$$j + i_1 + i_2 > n$$

essa apparterrebbe a C_n.

Ed allora i punti A, A_1, $A_2, \dots, A_h$ sono su un ciclo che ha origine in A di classe 1 (e ordine $\leqq h$).

Dalla proposizione III ora dimostrata derivano due proposizioni che si possono riguardare come principî fondamentali di quanto diremo appresso. Come corollario immediato di essa si ha:

IV. *Se* A, A_1, $A_2, \dots, A_{m'-1}, \dots, A_m$ *con* $m \leqq 2\,(m'-1)$ *sono* m *punti successivi* (*maggiori*) *di quelli già detti, ed essi stanno su un ciclo di 1.°, 2.°, 3.°,...,* $(m'-1)^0$ *ordine, esiste una curva di De Jonquières di ordine* m' *che ha un punto* $(m'-1)$*-plo in* A *e passa per i punti* A_1, $A_2, \dots, A_{m-1}, \dots, A_m$. *Anzi, curve come questa ne esistono* $\infty^{2m'-m}$. *Nel caso particolare in cui* m *acquisti il suo valore massimo, cioè sia* $m = 2\,(m'-1)$, *di dette curve ne esiste una rete.*

Cose analoghe valgono pure per i punti delle serie:

$$A,\ B_1,\ B_2, \ldots,\ B_{m'-1}, \ldots,\ B_m \quad \text{con} \quad m \leq 2(m'-1)$$

. . . .

$$A,\ D_1,\ D_2, \ldots,\ D_{m'-1}, \ldots,\ D_m \quad \text{con} \quad m \leq 2(m'-1).$$

Per dimostrare l'altra proposizione annunziata poniamo, secondo la possibilità:

$$a = 2(\alpha - 1) \quad \text{o} \quad a = 2(\alpha - 1) + 1$$

e consideriamo, nell'uno o nell'altro caso, la successione di punti:

$$A,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_{\alpha-1},\ A_\alpha,\ A_{\alpha-1}, \ldots,\ A_{2(\alpha-1)}.$$

Si vede subito che tra i numeri α ed n e le multiplicità di questi punti si ha la relazione:

$$\alpha n - (\alpha - 1) j - i_1 - i_2 - \cdots - i_{2(\alpha-1)} < n.$$

Supponiamo ora che detti punti si trovino su un ciclo di ordine minore di α. Allora, in base alla proposizione IV, esiste una rete di curve di De Jonquières di ordine α con un punto base $(\alpha - 1)$-plo in A e un punto base semplice in ciascuno dei punti. La trasformazione di De Jonquières che cambia questa rete nel piano di $[C_n]$ nella rete di rette di un altro piano, cambia questo sistema in uno di ordine $\alpha n - (\alpha - 1) j - i_1 - i_2 - \cdots - i_{2(\alpha-1)}$. Ma questo numero, come abbiamo detto sopra, è minore di n, dunque detta trasformazione di De Jonquières cambia $[C_n]$ in un sistema d'ordine più piccolo. Ciò è contrario all'ipotesi che $[C_n]$ sia di ordine minimo. Ma allora i punti $A,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_{\alpha-1},\ A_\alpha,\ A_{\alpha+1}, \ldots,\ A_{2(\alpha-1)}$ stanno su un ciclo d'origine A che è *almeno* di ordine α.

Dopo ciò possiamo enunciare la proposizione:

V. *Se è:*

$$a = 2(\alpha - 1) \quad \text{o} \quad = 2(\alpha - 1) + 1$$

$$b = 2(\beta - 1) \quad \text{o} \quad = 2(\beta - 1) + 1$$

. . . .

$$g = 2(\gamma - 1) \quad \text{o} \quad = 2(\gamma - 1) + 1$$

i punti delle successioni:

$$A,\ A_1,\ A_2,\dots,\ A_{\alpha-1},\ A_\alpha,\ A_{\alpha+1},\dots,\ A_{2(\alpha-1)}$$
$$A,\ B_1,\ B_2,\dots,\ B_{\beta-1},\ B_\beta,\ B_{\beta+1},\dots,\ B_{2(\beta-1)}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A,\ D_1,\ D_2,\dots,\ D_{\gamma-1},\ D_\gamma,\ D_{\gamma+1},\dots,\ D_{2(\gamma-1)}$$

stanno su cicli con origine in A che sono almeno di ordine α, $\beta,\dots,\gamma$.

L'ordine di questi cicli sarà allora un numero della forma $\alpha+\varphi$, $\beta+\psi,\dots,\gamma+\omega$ essendo φ, $\psi,\dots,\omega$ numeri interi non negativi.

Se diciamo L la somma delle multiplicità dei punti base di $[C_n]$ che sono nel primo intorno di A, oltre A_1, $B_1,\dots,D_1$, si ha, in base alla proposizione ora enunciata:

$$\left.\begin{aligned} j \geqq i_1 + i_2 + \cdots + i_\alpha + i_{\alpha+1} + \cdots + i_{\alpha+\varphi} + {} \\ + s_1 + s_2 + \cdots + s_\beta + s_{\beta+1} + \cdots + s_{\beta+\psi} + \cdots + {} \\ + t_1 + t_2 + \cdots + t_\gamma + t_{\gamma+1} + \cdots + t_{\gamma+\omega} + L. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ciò posto, supponiamo, per un momento, che sia p. es.:

$$a = 2(\alpha - 1)$$
$$b = 2(\beta - 1) + 1$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$g = 2(\gamma - 1).$$

Nella relazione (1) agli elementi:

$i_{2\varphi+3},\dots,\ i_{\alpha+\varphi}$ sostituiamo quelli minori o uguali $i_{\alpha+\varphi+1},\dots,\ i_{2(\alpha-1)}$;

agli elementi:

$s_{2\psi+2},\dots,\ s_{\beta+\psi}$ sostituiamo quelli minori o uguali $s_{\beta+\psi+1},\dots,\ s_{2(\beta-1)+1}$;

...... e finalmente agli elementi:

$t_{2\omega+3},\dots,\ t_{\gamma+\omega}$ sostituiamo quelli minori o uguali $t_{\gamma+\omega+1},\dots,\ t_{2(\gamma-1)}$.

Si ottiene allora una relazione valida a maggior forza, dalla quale si trae:

$$j-(i_1+i_2+\cdots+i_{2\varphi+2})-(s_1+s_2+\cdots+s_{2\psi+1})-\cdots-$$
$$-(t_1+t_2+\cdots+t_{2\gamma+2})-L\geq i_{\alpha+\varphi-1}+\cdots+i_{2(\alpha-1)}+$$
$$+s_{\beta+\psi+1}+\cdots+s_{2(\beta-1)+1}+\cdots+t_{\gamma+\omega+1}+\cdots+t_{2(\gamma-1)}.$$

Sommando membro a membro questa e la (1) si ottiene la relazione:

$$2j-(i_1+i_2+\cdots+i_{2\varphi+2})-(s_1+s_2+\cdots+s_{2\psi+1})-\cdots-$$
$$-(t_1+t_2+\cdots+t_{2\omega+2})-L\geq i_1+i_2+\cdots+i_{2(\alpha-1)}+$$
$$+s_1+s_2+\cdots+s_{2(\beta-1)+1}+\cdots+t_1+t_2+\cdots+t_{2(\gamma-1)}.$$

Ragionando per tutti i sistemi di forme che possono prendere i numeri $a, b, \ldots, y$, come abbiamo fatto relativamente al sistema particolare di forme $2(\alpha-1)$, $2(\beta-1)+1, \ldots, 2(\gamma-1)$, si viene alla conclusione:

Se i punti base maggiori di $[C_n]$ delle successioni

$$A,\ A_1,\ A_2,\ldots,\ A_a;$$
$$A,\ B_1,\ B_2,\ldots,\ B_b;$$
$$\cdots\cdots$$
$$A,\ D_1,\ D_2,\ldots,\ D_g;$$

stanno su cicli di ordine $\alpha+\varphi$, $\beta+\psi, \ldots, \gamma+\omega$ con origine in A, essendo $\varphi, \psi, \ldots, \omega$ numeri interi non negativi, oltre alla relazione (1), si ha questa:

$$\left.\begin{aligned}&2j-(i_1+i_2+\cdots+i_h)-(s_1+s_2+\cdots+s_k)-\cdots-\\&\quad-(t_1+t_2+\cdots+t_l)-L\geq i_1+i_2+\cdots+i_a+\\&\quad+s_1+s_2+\cdots+s_b+\cdots+t_1+t_2+\cdots+t_g\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

dove è

$$a\geq 1,\quad b\geq 0,\ldots,\quad g\geq 0$$

ed

$h=2(\varphi+1)$ o $=2(\varphi+1)-1$ secondochè a è $=2(\alpha-1)$ o $=2(\alpha-1)+1$;
$k=0$ se $b=0$; $k=2(\psi+1)$ o $=2(\psi+1)-1$ se $b>0$ e $=2(\beta-1)$ o se $b>0$ e $=2(\beta-1)+1$;

. . . .

$l=0$ se $g=0$; $l=2(\omega+1)$ o $=2(\omega+1)-1$ se $y>0$ e $=2(\gamma-1)$ o se $y>0$ e $=2(\gamma-1)+1$

ed L è la somma delle multiplicità dei punti base minori che stanno nel primo intorno di A.

Dalla relazione (2) si ha poi:

$$\left.\begin{aligned}2j - i_1 - S \geqq i_1 + i_2 + \cdots + i_a + s_1 + s_2 + \cdots + s_b + \cdots + \\ + t_1 + t_2 + \cdots + t_g\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ponendo:

$$\left.\begin{aligned}S = - i_1 + i_1 + i_2 + \cdots + i_h + s_1 + s_2 + \cdots + s_k + \\ + t_1 + t_2 + \cdots + t_l + L.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

3. Dopo ciò, consideriamo tutti i punti base di $[C_n]$ che rimangono nei vari intorni di A e fuori di questi intorni, oltre i punti base maggiori: A; $A_1, A_2, \ldots, A_a$; $B_1, B_2, \ldots, B_b$; $D_1, D_2, \ldots, D_g$. Questi saranno tutti punti base minori poichè i punti base maggiori che sono negli intorni di A sono quelli ora detti e fuori dei vari intorni di A abbiamo visto (proposizione I) che non ci sono punti base maggiori.

Questi altri punti li chiameremo $H_1, H_2, \ldots, H_m$ e le loro multiplicità $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Supponiamo inoltre che sia

$$h_1 \geqq h_2 \geqq \cdots \geqq h_m .$$

Dietro quanto abbiamo detto è:

$$j + 2h_\mu \leqq n \quad \text{con} \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Scriviamo ora le due relazioni fondamentali tra l'ordine n, il grado D, il genere p e le multiplicità dei varî punti base di $[C_n]$. Si ha:

$$j^2 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a} i_\alpha^2 + \sum_{\beta=1}^{\beta=b} s_\beta^2 + \cdots + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=g} t_\gamma^2 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} h_\mu^2 = n^2 - D$$

$$j + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a} i_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\beta=b} s_\beta + \cdots + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=g} t_\gamma + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} h_\mu = 3n - D + 2(p - 2).$$

Ora si osservi che dalla relazione $i_\alpha \leqq i_1$ segue l'altra:

$$i_\alpha^2 = u_\alpha i_1^2 \quad \text{con} \quad 0 < u_\alpha \leqq 1 \quad \text{ed} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, a.$$

Dividendo la seconda per la prima, si ottiene:

$$i_\alpha \geqq u_\alpha i_1 \quad \text{con} \quad 0 < u_\alpha \leqq 1 \quad \text{ed} \quad \alpha = 1, 2, \ldots, a \qquad \text{(Vedi NÖTHER).}$$

Analogamente si ha:

$$s_\beta^2 = v_\beta s_1^2; \quad s_\beta \geqq v_\beta s_1 \quad \text{con} \quad 0 < v_\beta \leqq 1 \quad \text{e} \quad \beta = 1, 2, \ldots, b,$$

. . . .

$$t_\gamma^2 = z_\gamma t_1^2; \quad t_\gamma \geqq z_\gamma t_1 \quad \text{con} \quad 0 < z_\gamma \leqq 1 \quad \text{e} \quad \gamma = 1, 2, \ldots, g,$$

$$h_\mu^2 = w_\mu \left(\frac{n-j}{2}\right)^2; \quad h_\mu \geqq w_\mu \frac{n-j}{2} \quad \text{con} \quad 0 < w_\mu \leqq 1 \quad \text{e} \quad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Allora possiamo scrivere:

$$j^2 + i_1^2 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a} u_\alpha + s_1^2 \sum_{\beta=1}^{\beta=b} v_\beta + \cdots + t_1^2 \sum_{\gamma=1}^{\gamma=g} z_\gamma + \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 \sum_{\mu=1}^{\mu=m} w_\mu = n^2 - D$$

$$j + i_1 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a} u_\alpha + s_1^2 \sum_{\beta=1}^{\beta=b} v_\beta + \cdots + t_1 \sum_{\gamma=1}^{\gamma=g} z_\gamma + \frac{n-j}{2} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} w_\mu \leqq 3n - D + (2p - 2).$$

Moltiplichiamo la seconda per $\frac{n-j}{2}$ e quella ottenuta sottragghiamola dalla prima. Si ha:

$$j^2 - \frac{n-j}{2} j + \left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right) i_1 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a} u_\alpha + \left(s_1 - \frac{n-j}{2}\right) s_1 \sum_{\beta=1}^{\beta=b} v_\beta + \cdots +$$

$$+ \left(t_1 - \frac{n-j}{2}\right) t_1 \sum_{\gamma=1}^{\gamma=g} z_\gamma \geqq$$

$$\geqq n^2 - D - 3n \frac{n-j}{2} + D \frac{n-j}{2} - (2p-2) \frac{n-j}{2}.$$

Osservando che è $i_1 \geqq s_1 \geqq \cdots \geqq t_1$ possiamo al posto di $s_1 - \frac{n-j}{2}; \ldots; t_1 - \frac{n-j}{2}$; porre $i_1 - \frac{n-j}{2}$ e scrivere:

$$j^2 - \frac{n-j}{2} j + \left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right) \left[i_1 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a} u_\alpha + s_1 \sum_{\beta=1}^{\beta=b} v_\beta + \cdots + t_1 \sum_{\gamma=1}^{\gamma=g} z_\gamma \right] \geqq$$

$$\geqq n^2 - D - 3n \frac{n-j}{2} + D \frac{n-j}{2} - (2p-2) \frac{n-j}{2}.$$

Ma per la relazione (3) è:

$$2j - i_1 - S \geqq i \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a} u_\alpha + s_1 \sum_{\beta=1}^{\beta=b} v_\beta + \cdots + t_1 \sum_{\gamma=1}^{\gamma=g} z_\gamma$$

dunque è:

$$j^2 - \frac{n-j}{2}j + \left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right)(2j - i_1 - S) \geqq n^2 - D - 3n\frac{n-j}{2} +$$

$$+ D\frac{n-j}{2} - (2p-2)\frac{n-j}{2}.$$

Da qui, posto:

$$n - j - i_1 = y$$

si ottiene:

$$D \geqq (2j - i_1)y + \frac{n-j}{2}\left[D - (2p-2) - y\right] + S\left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right). \tag{5}$$

Porremo anche:

$$S' = -i + i_1 + i_2 + \cdots + i_h + s_1 + s_2 + \cdots + s_k + \cdots + t_1 + t_2 + \cdots + t_l.$$

Allora si avrà:

$$S = S' + L$$

$$2j - i_1 \geqq i_1 + i_2 + \cdots + i_a + s_1 + s_2 + \cdots + s_b + \cdots +$$

$$+ t_1 + t_2 + \cdots + t_g + S' + L.$$

4. Poniamo ancora:

$$M = h + k + \cdots + l - 1$$

e supponiamo che sia:

$$M > 0.$$

Allora, pensando che, per essere $A_1, A_2, \ldots, A_a$; $B_1, B_2, \ldots, B_b$; ... ...; $D_1, D_2, \ldots, D_g$ punti base maggiori, i numeri $i_1, i_2, \ldots, i_a$; $s_1, s_2, \ldots, s_b$; ...; $t_1, t_2, \ldots, t_g$ sono tutti maggiori di $\frac{n-j}{2}$, si ha:

$$S' > M\frac{n-j}{2}$$

$$S > M\frac{n-j}{2} + L$$

$$2j - i_1 > (a + b + \cdots + g + M)\frac{n-j}{2} + L.$$

Sostituendo in (5) al posto di S e di $2j - i_1$, i secondi membri delle ultime disuguaglianze, e, pensando che è $y \geqq 0$, $i_1 - \frac{n-j}{2} > 0$, si ha:

$$D > \left[(a+b+\cdots+g+M)\frac{n-j}{2} + L\right] y + \frac{n-j}{2}\left[D-(2p-2)-y\right] +$$
$$+\left(M\frac{n-j}{2}+L\right)\left(i-\frac{n-j}{2}\right).$$

Essendo $L \geqq 0$, è $Ly \geqq 0$, $L\left(i - \frac{n-j}{2}\right) \geqq 0$; quindi si ha pure:

$$\left.\begin{aligned} D > \frac{n-j}{2}(a+b+\cdots+g+M)\,y + \frac{n-j}{2}\left[D-(2p-2)-y\right] + \\ + \frac{n-j}{2} M \frac{i_1-y}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

5. Supponiamo che sia:

$$\frac{n-j}{2} \geqq 1.$$

Allora è $D\left(\frac{n-j}{2} - 1\right) \geqq 0$ e dalla (6) si ottiene:

$$\left[2(a+b+\cdots+g-1)+M\right] y + M i_1 < 4(p-1).$$

Ma è evidentemente:

$$M \leqq a+b+\cdots+g-1,$$

dunque:

$$M(3y+i_1) < 4(p-1).$$

Pensando che è poi:

$$1 \leqq M$$

si ha allora:

$$3y + i_1 < 4(p-1).$$

Si osservi che da $i_1 > \frac{n-j}{2}$, tenendo presente che è $\frac{n-j}{2} > 1$, si ottiene

$$i_1 \geqq 2$$

e, tenendo presente che è $n - j = i_1 + y$, è:

$$i_1 > y.$$

Dalla $\frac{n-j}{2} > 1$ isolatamente si ha $n - j \geqq 3$ e quindi:

$$3 \leqq y + i_1$$

ed anche:

$$3 \leqq 3y + i_1 .$$

Riunendo questa con la relazione di sopra che ha questo secondo membro per primo, si ottiene la relazione:

$$3 \leqq 3y + i_1 < 4(p-1) \qquad (i \geqq 2,\ i_1 > y). \tag{7}$$

Mediante questa relazione, per ogni p si possono trovare tutti i possibili valori di y ed i_1.

Dalla (5), pensando che si ha:

$$S > M\frac{n-j}{2} + E \geqq \frac{n-j}{2}$$

$$i_1 - \frac{n-j}{2} > 0 .$$

e quindi:

$$S\left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right) > \frac{n-j}{2}\left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right),$$

si ottiene:

$$D > (2j - i_1)y + \frac{n-j}{2}\left[D - (2p-2) - y\right] + \frac{n-j}{2}\left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right).$$

Da qui si ricava:

$$4yj + D < \left[2(p-1) + \frac{3}{2}y - \frac{i_1}{2}\right](i_1 + y) + 2i_1 y. \tag{8}$$

Supponiamo che sia

$$y \neq 0.$$

Dalla (8), fissato un sistema di valori possibili per i_1, y, si ottengono un numero finito di valori possibili per j e D.

Ricordando che è $n = j + i_1 + y$, in corrispondenza ad uno dei sistemi di valori possibili j, i_1, y, si ottiene un valore possibile di n.

Osserviamo che, essendo

$$i_1 \geqq s_1 \geqq \cdots \geqq t_1; \quad i_1 \geqq i_2 \geqq \cdots \geqq i_a;$$

$$s_1 \geqq s_2 \geqq \cdots \geqq s_b, \ldots, \quad t_1 \geqq t_2 \geqq \cdots \geqq t_g,$$

i_1 è, dopo j, la maggiore multiplicità dei punti base di $[C_n]$.

Chiamiamo q_0 il numero dei punti base (maggiori) la cui multiplicità è uguale ad i_1, q_1 il numero dei punti base la cui multiplicità è uguale ad $i_1 - 1, \ldots, q_{i_1-1}$ il numero dei punti base la cui multiplicità è uguale ad 1.

Allora è:

$$\left.\begin{aligned} q_0 i_1^2 + q_1 (i_1 - 1)^2 + \cdots + q_{i_1-1} &= n^2 - j^2 - D \\ q_0 i_1 + q_1 (i_1 - 1) + \cdots + q_{i_1-1} &= 3n - j - D - 2(p-1). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Moltiplichiamo la seconda di queste relazioni per i_1 e sottragghiamo da quella ottenuta la prima; poichè è $i_1 \geqq 2$, è $i_1 - 1 \geqq 1$ e quindi potremo scrivere:

$$\sum_{z=1}^{z=i_1-1} q_z z (i_1 - z) + D(i_1 - 1) = 3 n i_1 - j i_1 - 2 i_1 (p-1) - n^2 + j^2. \quad (10)$$

Per mezzo di questa relazione in corrispondenza ad uno speciale sistema di valori n, j, i_1 si ottengono un numero finito di valori possibili per:

$$q_1, q_2, \ldots, q_{i_1-1}, D.$$

Di questi sistemi noi dobbiamo ritenere quelli in cui valore di D è uno di quelli dati da (8) in corrispondenza dei vari valori i_1, y.

In corrispondenza poi ad un sistema di valori particolari:

$$q_1, q_2, \ldots, q_{i_1-1}, D, n, j, i$$

da una delle (9) si ottengono un numero finito di valori per q_0.

In conclusione: se è $\frac{n-j}{2} > 1$, $M > 0$, $y > 0$ mediante le (7), (8), (9), (10) si ottengono un numero finito di valori di

$$n, j, i_1, D, q_0, q_1, \ldots, q_{i_1-1}$$

o come diremo si *determina* aritmeticamente $[C_n]$.

Supponiamo ora che sia

$$y = 0.$$

In questo caso è $n = j + i_1$ e si ha:

$$\left.\begin{aligned} q_0 i_1^2 + q_1 (i_1 - 1)^2 + \cdots + q_{i_1-1} &= i_1^2 + 2 j i_1 - D \\ q_0 i_1 + q_1 (i_1 - 1) + \cdots + q_{i_1-1} &= 2j + 3 i_1 - D + 2 (p - 1). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Da queste due si può facilmente eliminare j. Pensando che è $i_1 \geqq 2$ potremo scrivere:

$$\sum_{z=1}^{z=i_1-1} q_z z (i_1 - z) + D (i_1 - 1) = 2 i_1^2 + 2 i_1 (p - 1). \quad (12)$$

Da questa e dalla (8) in corrispondenza ad un sistema di valori i_1, y dato dalla (7) si ottengono un numero finito di valori per

$$q_1, q_2, \ldots, q_{i_1-1}, D.$$

In corrispondenza ad un sistema di questi valori restano nelle (11) incogniti q_0 ed j, ma non si può calcolare uno di questi eliminando l'altro perchè si eliminano insieme. Per calcolare j ci appoggeremo ad un fatto che faremo vedere più avanti e cioè che: nell'ipotesi di $y = 0$, è:

$$j \geqq q_0 i_1. \quad (13)$$

Tenendo conto di questa si ha dalla seconda delle (11):

$$q_1 (i_1 - 1) + \cdots + q_{i_1-1} \geqq j + 3 i_1 - D + 2 (p - 1) \quad (14)$$

ed allora in corrispondenza ad un sistema di valori $q_1, q_2, \ldots, q_{i_1-1}, D$ si hanno un numero finito di valori possibili di j.

In corrispondenza ad un sistema:

$$j, i_1, D, q_1, \ldots, q_{i_1-1}$$

si ottengono un numero finito di valori possibili di q_0 dalle (11) e da (13).

In conclusione: se è $\frac{n-j}{2} > 1$, $M > 0$, $y = 0$ si può determinare aritmeticamente $[C_n]$ mediante (7), (8), (11), (12), (13), (14).

6. La relazione (13) per $y = 0$ si ricava subito dalla proposizione che ora dimostreremo.

VI. *Se l'ordine del ciclo di origine A su cui stanno i punti*

$$A,\ A_1,\ A_2,\dots,\ A_a$$

è minore di a, esso è maggiore del numero di questi punti che hanno la molteplicità uguale a quella di A_1.

Se l'ordine di detto ciclo è uguale ad a, il numero dei punti di multiplicità uguale a quello di A_1 è manifestamente minore o uguale dell'ordine del ciclo.

Riunendo questa e la prima affermazione si può dire che il numero dei punti $A_1,\ A_2,\dots,\ A_a$ che hanno multiplicità uguale a quella del primo di essi non supera l'ordine del ciclo di origine A su cui stanno $A,\ A_1,\dots,\ A_a$.

Cose analoghe valgono relativamente alle successioni di punti:

$$A,\ B_1,\ B_2,\dots,\ B_b$$

$$\cdots\cdots$$

$$A,\ D_1,\ D_2,\dots,\ D_g.$$

Chiamiamo ν l'ordine del ciclo di origine A su cui stanno $A,\ A_1,\ A_2,\dots,\ A_a$; ω il numero massimo tale che sia $i_\omega = i_1$ e supponiamo che sia $\nu < a$.

Dico che non può essere $\nu \leq \omega$.

Infatti ammettiamo per un momento che ciò avvenga.

Dall'essere $i_\omega = i_1$, segue che è:

$$i_2 = i_3 = \cdots = i_{\omega-1} = i_\omega = i_1$$

e se $n \leq \omega$, è allora:

$$i_2 = i_3 = \cdots = i_\nu = i_1.$$

In base alla proposizione IV possiamo dire che esiste una curva di ordine $\nu+1$ che ha un punto $(\nu)^{\text{plo}}$ in A e passa per i punti $A_1,\ A_2,\dots,\ A_\nu$ ed $A_{\nu+1}$. Anzi di queste curve ne esistono $\infty^{\nu+1}$. Consideriamo una rete di queste curve: la trasformazione di De Jonquières che cambia questa rete del piano di $[C_n]$ nelle rette di un altro piano, cambia $[C_n]$ in un sistema di ordine:

$$G = (\nu+1)\,n - \nu j - i_1 - i_2 - \cdots - i_\nu - i_{\nu+1}.$$

Ma è: $n = j$; $i_1 = j + i_2 = \cdots = j + i_\nu$, dunque è:

$$G = n - i_{\nu+1}.$$

Ma allora è:

$$G < n.$$

Ciò è assurdo perchè $[C_n]$ è di ordine minimo.

7. Abbiamo visto che quando è $\frac{n-j}{2} > 1$ ed $M > 0$, C_n si può aritmeticamente determinare.

Ora, può avvenire che sia $M = 0$?

Sì, e ciò quando si verificano tutte e tre insieme le condizioni seguenti:

$$\text{d)} \qquad \left.\begin{array}{ll} 1.^a & a \text{ è dispari} \\ 2.^a & \varphi = 0 \\ 3.^a & k = \cdots = l = 0. \end{array}\right\}$$

Infatti dalla prima condizione segue che è h dispari e dato quindi da $h = 2\varphi + 1$. Da questa uguaglianza per la seconda condizione segue $h = 1$ e da questa e dalla terza condizione $h + k + \cdots + l = 1$.

Però se una soltanto delle condizioni d) non si verifica è $M - -0$.

Infatti se per es. non si verifica la prima è $h = 2\varphi + 2 \geqq 2$ e quindi $h + k + \cdots + l \geqq 2$, $M \geqq 1$.

Dunque: M è uguale a zero quando e solo quando sono verificate le condizioni d).

8. Supponiamo dunque che sia $M = 0$.

In questo caso, essendo $k = \cdots = l = 0$ si ha un solo punto base maggiore A_1 nel primo intorno di A e quindi una sola serie di punti base maggiori:

$$A, A_1, A_2, \ldots, A_a$$

ed è, perchè a è dispari:

$$a = 2(\alpha - 1) + 1.$$

Inoltre, per essere $\varphi = 0$, i punti della successione:

$$A, A_1, \ldots, A_\alpha$$

stanno su un ciclo che è di ordine α esattamente.

In base alla proposizione IV esiste allora una curva (di De Jonquières) di ordine $\alpha + 1$ che ha un punto (α)-plo in A e passa per i punti $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots, A_{2(\alpha-1)}, A_{2(\alpha-1)+1}$. Anzi di queste curve ne esistono ∞^3.

Consideriamo la rete di queste curve che passano per un punto generico del piano. La trasformazione di De Jonquières che cambia questa rete del piano di $[C_n]$ nelle rette di un altro piano, cambia $[C_n]$ in un sistema d'ordine:

$$(\alpha+1)\,n-\alpha\,j-i_1-i_2-\cdots-i_{2(\alpha-1)}-i_{2(\alpha-1)+1}\,.$$

Ma $[C_n]$ è d'ordine minimo, dunque è:

$$(\alpha+1)\,n-\alpha j-i_1-i_2-\cdots-i_{2(\alpha-1)}-i_{2(\alpha-1)+1}\geqq n.$$

Ora si osservi che da $j+i_1\leqq n$ segue $\frac{i_1}{2}\leqq\frac{n-j}{2}$.

Ma da $j+2\,i_2>n$ segue $i_2>\frac{n-j}{2}$, dunque è

$$\frac{i_1}{2}\leqq\frac{n-j}{2}<i_2\,,\quad \frac{i_1}{2}<i_2\,.$$

Analoghe relazioni si hanno per $i_3,\ i_4,\ldots,\ i_{2(\alpha-1)},\ i_{2(\alpha-1)+1}$.
Poniamo allora:

$$i_2=\frac{i_1}{2}+\sigma_2\,,\quad i_3=\frac{i_1}{2}+\sigma_3\,,\ldots,\ i_{2(\alpha-1)+1}=\frac{i_1}{2}+\sigma_{2(\alpha-1)+1}\,.$$

Allora il numero che sta a primo membro nella relazione di sopra fra $\alpha,\ n,\ j,\ i_1,\ i_2,\ldots,\ i_{2(\alpha-1)},\ i_{2(\alpha-1)+1}$ diviene:

$$(\alpha+1)\,n-\alpha\,j-\alpha\,i_1-\left[\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_{2(\alpha-1)+1}\right].$$

Questo, per essere:

$$\sigma_2\geqq\sigma_3\geqq\cdots\geqq\sigma_{\alpha+1}\,,$$

e quindi:

$$\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_{2(\alpha-1)+1}\geqq\alpha\,\sigma_{\alpha+1}\,,$$

è minore di:

$$(\alpha+1)\,n-\alpha\,j-\alpha\,i_1-\alpha\,\sigma_{\alpha+1}\,.$$

Allora si ha:

$$(\alpha+1)\,n-\alpha\,j-\alpha\,i_1-\alpha\,\sigma_{\alpha+1}\geqq n$$

da cui:

$$n-j-i_1-\sigma_{\alpha+1}\geqq 0. \tag{15}$$

È questa una interessante relazione di cui ci gioveremo per la determinazione aritmetica di $[C_n]$ nel caso in cui siamo di $M=0$.

9. Continuiamo a chiamare come prima $h_1, h_2, \dots, h_m$ la multiplicità dei punti base di $[C_n]$ oltre $A, A_1, \dots, A_{2(\alpha-1)+1}$.

Osserviamo come precedentemente che dalle relazioni: $i_q \leq i_1, h_\mu \leq \frac{n-j}{2}$, seguono le coppie di relazioni: $i_q^2 = i_1^2 u_q$; $i_q \geq i_1 u_q$ con $0 < u_q \leq 1$, $q = 1, 2, \dots, \alpha$; $h_\mu^2 = w_\mu \left(\frac{n-j}{2}\right)^2$; $h_\mu \geq w_\mu \frac{n-j}{2}$ con $0 < w_\mu \leq 1$; $\mu = 1, 2, \dots, m$.

Dalle relazioni che legano le multiplicità dei punti base e l'ordine, il genere, il grado di $[C_n)$ si ha allora:

$$j^2 + i_1^2 \sum_{q=1}^{q=\alpha} u_q + i_{\alpha+1}^2 + i_{\alpha+2}^2 + \dots + i_{2\alpha-1}^2 + \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 \sum_{\mu=1}^{\mu=m} w_\mu = n^2 - D$$

$$j + i_1 \sum_{q=1}^{q=\alpha} u_q + i_{\alpha+1} + i_{\alpha+2} + \dots + i_{2\alpha-1} + \frac{n-j}{2} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} w_\mu \leq 3n - D + (2p-2).$$

Moltiplichiamo la seconda per $\frac{n-j}{2}$ e sottragghiamo quella ottenuta dalla prima. Si ha:

$$j^2 - \frac{n-j}{2} j + \left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right) i_1 \sum_{q=1}^{q=\alpha} u_q + \left(i_{\alpha+1} - \frac{n-j}{2}\right) i_{\alpha+1} + \dots +$$

$$+ \left(i_{2\alpha-1} - \frac{n-j}{2}\right) i_{2\alpha-1} \geq$$

$$\geq n^2 - D - 3n\frac{n-j}{2} + D\frac{n-j}{2} - (2p-2)\frac{n-j}{2}.$$

Essendo $A, A_1, A_2, \dots, A_\alpha$ su un ciclo di origine A di ordine α, è

$$j \geq i_1 \sum_{q=1}^{q=\alpha} u_q,$$

quindi si ha:

$$j^2 - \frac{n-j}{2} j + \left(i_1 - \frac{n-j}{2}\right) j + \left(i_{\alpha+1} - \frac{n-j}{2}\right) i_{\alpha+1} + \dots +$$

$$+ \left(i_{2\alpha-1} - \frac{n-j}{2}\right) i_{2\alpha-1} \geq$$

$$\geq n^2 - D - 3n\frac{n-j}{2} + D\frac{n-j}{2} - (2p-2)\frac{n-j}{2}.$$

Di qui si ricava:

$$D \geqq \frac{n-j}{2}\Big[2j-n+D-(2p-2)\Big]+j(n-j-i_1)+$$

$$+\,i_{\alpha+1}\left(\frac{n-j}{2}-i_{\alpha+1}\right)+i_{\alpha+2}\left(\frac{n-j}{2}-i_{\alpha+2}\right)+\cdots+i_{2\alpha-1}\left(\frac{n-j}{2}-i_{2\alpha-1}\right).$$

Da questa, per essere

$$i_{\alpha+1} \geqq i_{\alpha+2} \geqq \cdots \geqq i_{2\alpha-1}$$

si ricava:

$$D \geqq \frac{n-j}{2}\Big[2j-n+D-(2p-2)\Big]+j(n-j-i_1)+$$

$$+\,(i_{\alpha+1}+i_{\alpha+2}+\cdots+i_{2\alpha-1})\left(\frac{n-j}{2}-i_{\alpha+1}\right).$$

Dalla relazione $j-i_1 \geqq i_2+i_3+\cdots+i_\alpha$ segue poi:

$$j-i_1 \geqq i_{\alpha+1}+i_{\alpha+2}+\cdots+i_{2\alpha-1}.$$

Ed allora, pensando che è:

$$\frac{n-j}{2}-i_{\alpha+1}<0$$

si ha, dall'ultima relazione ottenuta:

$$D \geqq \frac{n-j}{2}\Big[2j-n+D-(2p-2)\Big]+j(n-j-i_1)+$$

$$+\,(j-i_1)\left(\frac{n-j}{2}-i_{\alpha+1}\right).$$

Se al posto di $\frac{n-j}{2}$ mettiamo la quantità minore o uguale $\frac{i_1}{2}$ e poniamo poi $i_{\alpha+1}=\frac{i_1}{2}+\sigma_{\alpha+1}$, si ha:

$$D \geqq \frac{n-j}{2}\Big[2j-n+D-(2p-2)\Big]+j(n-j-i_1-\sigma_{\alpha+1})+i_1\sigma_{\alpha+1}; \qquad (16)$$

nel cui secondo membro il secondo termine è maggiore o uguale a zero per la (15).

È da osservare che quanto abbiamo detto in questo n. 9 e nel numero precedente, 8, è stato detto supponendo implicitamente $a > 1$; solo sotto questa ipotesi abbiamo potuto parlare di $i_2 = \frac{i_1}{2} + \sigma_2$, ecc., ecc.

Da $a > 1$ segue che è $\alpha > 1$.

10. Ciò posto, supponiamo che sia:

$$\frac{n-j}{2} > 1.$$

Allora dalla (16) segue:

$$0 \geq \frac{n-j}{2}\Big[2j - n - (2p-2)\Big] + j(n - j - i_1 - \sigma_{\alpha+1}) + i_1 \sigma_{\alpha+1}.$$

Si osservi ora che da:

$$j \geq i_1 + i_2 + \cdots + i_\alpha$$

ed

$$i_1 > \frac{n-j}{2}, \quad i_2 > \frac{n-j}{2}, \ldots, \quad i_\alpha > \frac{n-j}{2}$$

si ha:

$$j > \alpha \frac{n-j}{2}.$$

Nel secondo membro della relazione di sopra, al posto di j sostituiamo $\alpha \frac{n-j}{2}$, al posto di i_1, $\frac{n-j}{2}$: essendo $n - j - i - \sigma_{\alpha+1} \geq 0$ e $\sigma_{\alpha+1} > 0$, si ha allora:

$$0 > \frac{n-j}{2}\Big[2j - n - (2p-2) + \alpha(y - \sigma_{\alpha+1}) + \sigma_{\alpha+1}\Big].$$

Da questa, posto:

$$2j - n = x$$

si ha:

$$x + y + (\alpha - 1)(y - \sigma_{\alpha+1}) < 2(p-1) \qquad (\alpha > 1) \tag{17}$$

e si badi che è $x \geq 1$, $y \geq 1$.

Dalle relazioni che dànno x e y si ha:

$$j - i_1 = x + y. \tag{18}$$

Allora dalla relazione $j - i_1 > (\alpha - 1)\frac{n-j}{2}$ si ha:

$$x + y > (\alpha - 1)\frac{i_1 + y}{2}. \qquad (\alpha > 1) \tag{19}$$

Dalla relazione (17) dato un valore di p si ottengono un numero finito di valori possibili di x ed y. In corrispondenza ad una di queste coppie possibili si ottiene un numero finito di valori possibili di i_1, in corrispondenza ad una terna di valori possibili per x, y, i_1 da (18) si hanno un numero finito di valori possibili per j.

Per mezzo dell'uguaglianza $n = j + i_1 + y$ in corrispondenza ad una terna di valori possibili per j, i_1, y si ottengono un numero finito di valori possibili per n.

Così mediante le relazioni (17), (18), (19) si vengono a determinare un numero finito di valori possibili per i numeri

$$n, j, i_1.$$

Per completare la determinazione aritmetica di $[C_n]$, osserviamo che, essendo $i_1 > \frac{n-j}{2} > 1$, è $i_1 \geq 2$ e, detto q_0 il numero dei punti base di $[C_n]$ la cui multiplicità è uguale a i_1, q_1 il numero dei punti base la cui multiplicità è uguale ad $i_1 - 1, \ldots, q_{i_1-1}$ i punti base la cui multiplicità è uguale ad 1, si hanno le formole (9) e (10).

Dalle relazioni che si ottengono passando in (10) e per es. nella seconda delle (9), D a primo membro, in corrispondenza di una terna possibile n, j, i_1, si ottengono un numero finito di sistemi possibili per:

$$q_0, q_1, \ldots, q_{i_1-1}, D.$$

11. Supponiamo ora che sia $a = 1$.

In questo caso, con un procedimento leggermente diverso da quello seguìto per stabilire la (16) si può ottenere un'altra relazione alla quale si potrà dare la forma che acquista la (16) quando vi si fa $\sigma_{\alpha+1} = 0$.

Infatti, chiamando $h_1, h_2, \ldots, h_m$ i punti base minori, si possono avere le relazioni:

$$h_\mu^2 = w_\mu\left(\frac{n-j}{2}\right)^2; \quad h_\mu \geq w_\mu \frac{n-j}{2} \quad \text{con} \quad 0 < w_\mu \leq 1, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Mediante queste si hanno poi:

$$j^2 + i_1^2 + \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 \sum_{\mu=1}^{\mu=m} w_\mu = n^2 - D$$

$$j + i_1 + \frac{n-j}{2} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} w_\mu \leq 3n - D + 2(p-1).$$

Dalle quali segue la relazione annunziata:

$$D \geq \frac{n-j}{2}\left[2j - n + D - (2p - 2)\right] + j\,\frac{n-j}{2} + i_1\left(\frac{n-j}{2} - i_1\right).$$

Questa si mette subito sotto la forma descritta:

$$D \geq \frac{n-j}{2}\left[2j - n + D - (2p-2)\right] + j(n - j - i_1), \tag{16'}$$

osservando che è $\frac{n-j}{2} - i_1 < 0$ ed $j \geq 1$.

12. Dall'ipotesi iniziale che $[C_n]$ abbia almeno tre punti base, segue che, oltre A, A_1, $[C_n]$ ha altri punti base. Dall'ipotesi $a = 1$, segue poi che questi punti base sono minori. Allora, se diciamo H quello di questi che ha la più alta multiplicità h, si ha:

$$i_1 > h,$$

quindi $i_1 \geq 2$.

Dall'ipotesi che $[C_n]$ abbia una terna di punti base la somma delle cui multiplicità supera n, si ha poi:

$$j + i_1 + h > n.$$

Ma allora, o A_1 ed H sono nel primo intorno di A, oppure A_1 è nel primo intorno di A, H nel secondo ed A, A_1, H stanno su un ciclo di origine A ed ordine 2; perchè, se così non fosse, si potrebbe costruire una trasformazione quadratica che abbassa $[C_n]$. Quindi è:

$$j \geq i_1 + h. \tag{20}$$

Dopo ciò, supponiamo che sia:

$$\frac{n-j}{2} > 1.$$

Allora dalla (16') si ottiene:

$$0 \geqq \frac{n-j}{2}\left[2j-n-(2p-2)\right]+j(n-j-i_1).$$

Osservando che, essendo, per la (20), $j > i_1$, è $j > \frac{n-j}{2}$, e che è poi $n-j-i_1 \geqq 0$, si ha:

$$0 \geqq \frac{n-j}{2}\left[2j-n-(2p-2)+(n-j-i_1)\right].$$

Da questa, ponendo

$$2j-n=x$$

$$n-j-i_1=y$$

si ha

$$x+y \leqq 2(p-1) \tag{21}$$

e si badi che è qui $x \geqq 1$, ma non più $y \geqq 1$ come in (17) ma $y \geqq 0$.

Mediante questa relazione, dato p si ottengono un numero finito di valori possibili per x ed y.

In corrispondenza a queste coppie si ottengono tutti i valori possibili di $j-i_1$ dalla relazione (18).

Giunti a questo punto, non si può nel caso attuale ragionare come nel n. 10 perchè qui non è più $\alpha > 1$, e bisogna quindi fare altre considerazioni.

Possono darsi due casi:

1.° o è $\quad j-i_1 \geqq i_1$,

2.° o è $\quad i_1 > j-i_1$.

Nel primo caso, in corrispondenza ad una coppia x, y, si ottengono tutti i valori possibili di i_1 dalla relazione $i_1 \leqq x+y$.

Per determinare tutti i valori possibili di i_1 nel secondo caso, ragioniamo così:

Unendo l'ipotesi di questo secondo caso e la (20) si ha:

$$i_1 > j-i_1 \geqq h.$$

Ed allora si dica: q_0 il numero dei punti base di $[C_n]$ la cui multiplicità è uguale ad $(j-i_1)$; q_1 il numero dei punti base la cui multiplicità è uguale ad $j-i_1-1, \ldots, q_{j-i_1-1}$ il numero dei punti base di $[C_n]$ la cui multiplicità è uguale ad 1.

Dalle relazioni fondamentali tra l'ordine, il genere, il grado e la multiplicità dei punti base di $[C_n]$ si ottiene allora:

$$q_0(j-i_1)^2+q_1(j-i_1-1)^2+\cdots+q_{j-i_1-1}=y^2+2j\,i_1+2jy+2\,i_1 y-D$$
$$q_0(j-i_1)\;+q_1(j-i_1-1)^2+\cdots+q_{j-i_1-1}=2(j+i_1)+3y-D+(2p-2).$$

Moltiplichiamo la seconda per $j-i_1$ e da quella ottenuta sottragghiamo la prima. Si ha, nel caso che $j-i_1>1$,

$$\sum_{z=1}^{z=j-i_1-1} z\,q_z(j-i_1-z)=\Big[2(j-i_1)-2y\Big](j+i_1)-2j\,i_1+3y(j-i_1)-$$
$$-D(j-i_1-1)+(2p-2)(j-i_1)-y^2$$

e, nel caso che sia $j-i_1=0$, la relazione che si ottiene da questa mettendo lo zero al posto del primo membro. Allora è:

$$\Big[2(j-i_1)-2y\Big](j+i_1)-2j\,i_1+3y(j-i_1)-D(j-i_1-1)+$$
$$+(2p-2)(j-i_1)-y^2\geqq 0.$$

Da questa, pensando che è: $j-i_1=x+y$, $j=i_1+x+y$, si ottiene:

$$2(i_1-x+y)\,i_1\leqq(x+y)\Big[3y+2(p-1)+2x\Big]-y^2. \tag{22}$$

Il primo membro di questa relazione quando si fissano x ed y e non è $i_1\leqq x-y$, cresce col crescere di i_1, ed il secondo membro non dipende da i_1.

Allora, mediante la (22), si possono, in corrispondenza di una coppia x, y, avere tutti i valori possibili di i_1.

Così abbiamo imparato a trovare tutti i valori possibili di i_1 per una determinata coppia x, y in tutti e due i casi 1.° e 2.°. I valori possibili di j ed n si otterranno allora da $j=i_1+x+y$ ed $n=j+i_1+y$. Per completare la ricerca aritmetica di $[C_n]$ occorrerà vedere quali sono i valori possibili di h, e, detto q_0 il numero dei punti base (minori) di multiplicità h, q_1 il numero di punti base di multiplicità $h-1,\ldots,$ q_{h-1} il numero dei punti base di multiplicità 1, quali sono i valori possibili di $q_0, q_1,\ldots, q_{h-1}$ e quali sono i valori possibili di D.

Si osservi che, essendo H un punto base minore, è:

$$h\leqq\frac{i_1+y}{2}\,. \tag{23}$$

Da questa, insieme con quest'altra

$$h < i_1$$

se siamo nel primo caso; ed insieme con:

$$h \leq j - i_1$$

se siamo nel secondo caso; si ottengono tutti i valori possibili di H in corrispondenza ad ogni coppia i_1, y.

In tutti e due i casi, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} q_0 h^2 + q_1 (h-1)^2 + \cdots + q_{h-1} = n^2 - j^2 - i^2 - D \\ q_0 h + q_1 (h-1) + \cdots + q_{h-1} = 3n - D - 2(p-1). \end{array}\right\} \quad (24)$$

Da queste, quando è $h = 1$ e quindi $q_{h-1} = q_0$, si ottengono tutti i valori possibili di q_0 e D.

Se $h > 1$, si ha:

$$\sum_{z=1}^{z=h-1} q_z z (h-z) + D(h-1) = 3nh + 2(p-1)h - n^2 + j^2 + i_1^2. \quad (25)$$

e da queste e da una delle (24) si ottengono tutti i valori possibili di

$$q_0, q_1, \ldots, q_{h-1}, D.$$

13. Dietro quello che abbiamo visto, possiamo dire che, se è $\frac{n-j}{2} > 1$, sappiamo determinare aritmeticamente $[C_n]$.

Supponiamo ora che sia:

$$\frac{n-j}{2} \leq 1.$$

Allora è:

$$i_1 + y = 2$$

oppure

$$i_1 + y = 1.$$

Essendo $i_1 > \frac{n-j}{2}$, è sempre

$$i_1 > y.$$

Tenendo conto di questa, si vede che, nel primo caso, si ha solo:

$$y = 0, \qquad i_1 = 2$$

e nel secondo caso, solo:

$$y = 0, \qquad i_1 = 1.$$

Supponiamo che sia:

$$(y,\ i_1) = (0,\ 2).$$

In questo caso, da $n - j = 2$ segue $n = j + 2$. Se chiamiamo q_0 il numero dei punti base di $[C_n]$ di multiplicità 2, e q_1 quello dei punti base di multiplicità 1, si avrà:

$$j^2 + q_0 4 + q_1 = (j+2)^2 - D$$

$$j + q_0 2 + q_1 = 3(j+2) - D + (2p-2).$$

Da queste si ricava:

$$q_1 + D = 4(p+1). \tag{26}$$

Da questa, dato p, si ricavano un numero finito di valori possibili per q_1 e D.

Tenendo presente che è attualmente $y = 0$, si ha dalla (13)

$$2q_0 \leq j \tag{27}$$

ed allora, sostituendo nella seconda delle due relazioni scritte sopra, al posto di $q_0 2$, j e, tenendo conto di (26), si ha:

$$j \leq 2p \tag{28}$$

dalla quale si ottengono un numero finito di valori possibili per j.

Dalla (28) si ha poi:

$$q_0 \leq p \tag{29}$$

e da questa si ottengono un numero finito di valori possibili per q_0.

Il sistema $[C_n]$ resta così aritmeticamente determinato.

I punti base maggiori delle successioni

$$\begin{array}{lll} A_1, & A_2, \ldots, & A_a \\ B_1, & B_2, \ldots, & B_b \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ D_1, & D_2, \ldots, & D_g \end{array}$$

sono in questo caso doppî, e si ha:

$$a + b + \cdots + g = q_0 .$$

Per la proposizione VI il punto A e quelli di ciascuna di queste serie stanno su cicli di origine A che sono di ordine a, b, ..., g rispettivamente.

Si osservi che se $q_0 = 1$, $[C_n]$ ha certamente punti base semplici e questi sono infinitamente vicini ad A, perchè, altrimenti, $[C_n]$ si potrebbe abbassare con una trasformazione quadratica. Chiamiamo $L_1, \ldots, M_1$ i punti base che oltre A_1 si trovano nel primo intorno di A. Si vede facilmente che i punti base di $[C_n]$ nei vari intorni di A si distribuiscono in serie di punti base successivi:

$$\begin{array}{lll} A_1^2, & K_1, \ldots, & K_h \\ L_1, & L_2, \ldots, & L_l \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ M_1, & M_2, \ldots, & M_m \end{array}$$

ed i punti $A\,A_1\,K_1$ sono su un ciclo di ordine 2 con origine in A.

Dopo ciò si vede che, nel caso di $q_0 = 1$, la (27) è sostituita dalla relazione:

$$3 \leqq j. \tag{27'}$$

Supponiamo ora che sia:

$$(y,\ i) = (0,\ 1).$$

Allora è: $n = j + 1$. Chiamando q_0 il numero dei punti base semplici di $[C_n]$, si avrà:

$$\begin{aligned} j^2 + q_0 &= (j+1)^2 - D \\ j + q_0 &= 3\,(j+1) - D + 2p - 2. \end{aligned}$$

Da queste si ricava:

$$p = 0. \tag{30}$$

Essendo $y = 0$, potremo applicare la (13) e si ha allora:

$$q_0 \leqq j. \tag{31}$$

Tenendo conto di questa relazione in una delle due uguaglianze scritte sopra, si ha poi:

$$D \geqq j + 1. \tag{32}$$

Da quest'ultima segue che è $D \geqq 1$ e quindi, nel caso in cui siamo di $(y, i_1) = (0, 1)$, $[C_n]$ non può essere di grado 1; in particolare, non può essere una rete omaloidica.

In punti base semplici che, nel caso attuale, sono maggiori, si distribuiscano in serie di punti successivi:

$$\begin{array}{lll} A_1, & A_2, \ldots, & A_a \\ B_1, & B_2, \ldots, & B_b \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ D_1, & D_2, \ldots, & D_g \end{array}$$

essendo $A_1, B_1, \ldots, D_1$ nel primo intorno di A. Applicando la proposizione VI, si conchiude che il punto A e ciascuna di queste serie stanno su un ciclo di origine A rispettivamente di ordine $a, b, \ldots, g$.

14. Dopo quello che abbiamo detto, possiamo conchiudere che: *Se $[C_n]$ è un sistema lineare di curve piane che ha una terna di punti base la somma delle cui multiplicità superi n, e che è di ordine minimo rispetto alle trasformazioni cremoniane del piano, esso ha un numero finito di forme aritmetiche possibili le quali si possono trovare.*

Anzi, questa affermazione è valida quando più precisamente $[C_n]$ è di ordine minimo rispetto alle trasformazioni di De Jonquières di ordine $\leqq \theta + 1$ essendo θ il più grande dei numeri $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, u, v, \ldots, z$ se

$$\begin{array}{lll} A_1, & A_2, \ldots, & A_a \\ B_1, & B_2, \ldots, & B_b \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ D_1, & D_2, \ldots, & D_g \end{array}$$

sono i punti base maggiori di $[C_n]$

$$\begin{array}{lll} a = 2(\alpha - 1) & \text{o} & = 2(\alpha - 1) + 1 \\ b = 2(\beta - 1) & \text{o} & = 2(\beta - 1) + 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g = 2(\gamma - 1) & \text{o} & = 2(\gamma - 1) + 1 \end{array}$$

ed $u, v, \ldots, z$ sono i numeri dei punti delle serie di sopra che hanno la multiplicità uguale a quella del primo di ciascuna serie.

APPLICAZIONI.

1. Applichiamo ora le cose dette ad alcuni valori particolari di p. Supponiamo che sia:

$$p = 0.$$

Sia $\frac{n-j}{2} > 1$ e una almeno delle condizioni d) non soddisfatta.

Allora y ed i_1 soddisfano alla (7) che, per $p = 0$, diviene:

$$3 \leq 3\,y + i \leq -4.$$

Ma questa è assurda, dunque non può essere $\frac{n-j}{2} > 1$, e una almeno delle condizioni d) non soddisfatta.

Supponiamo dunque che con $\frac{n-j}{2} > 1$ siano le d) tutte e tre verificate. In questo caso ci sono da distinguere due sottocasi: $a > 1$, ed $a = 1$. Se $a > 1$, x ed y soddisferanno alla (17) la quale per $p = 0$ diviene:

$$x + y + (\alpha - 1)\,(y - \sigma_{\alpha+1}) < 2.$$

Ma questa è assurda. Se $a = 1$, x ed y soddisferanno alla (21) la quale per $p = 0$ diviene:

$$x + y \leq -2.$$

Ma anche questa è assurda.

Sia dunque $\frac{n-j}{2} \leq 1$.

Allora, per ciò che abbiamo detto al n. 13, è:

$$(y,\ i_1) = (0,\ 2) \quad \text{o} \quad (y,\ i_1) = (0,\ 1).$$

Se è $(y,\ i_1) = (0,\ 2)$ si ha dalla (28)

$$j \leq 0$$

la quale è assurda. Se è $(y,\ i_1) = (0,\ 1)$, è $j = n - 1$ ed il sistema $[C_n]$ ha un punto base $(n-1)^{\text{plo}}$ e $q_0 \leq n - 1$ punti base semplici i quali si distribuiscono in serie di punti successivi:

$$\begin{array}{l} A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_a \\ B_1, \quad B_2, \ldots, \quad B_b \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D_1, \quad D_2, \ldots, \quad D_g, \end{array}$$

il punto A e ciascuna di queste serie stanno su cicli di ordine $a, b, \ldots, g$ e di origine A. Inoltre è:

$$a + b + \cdots + g = q_0.$$

Per esprimere tutto ciò noi scriveremo simbolicamente:

$$[C_n] \equiv A^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} A_1\, A_2\, A_3 - \cdots - A_a \;(A,\; A_1, \ldots,\; A_a) \\ B_1\, B_2\, B_3 - \cdots - B_b \;(A,\; B_1, \ldots,\; B_b) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D_1\, D_2\, D_3 - \cdots - D_g \;(A,\; D_1, \ldots,\; D_g) \end{array} \right. \qquad a + b + \cdots + g \leq n - 1.$$

Da quanto abbiamo detto per $p = 0$, risulta che una rete omaloidica che ha tre punti base la somma delle cui multiplicità supera n, si può abbassare di ordine mediante trasformazioni di De Jonquières.

È dimostrato (vedi Nöther) che le reti omaloidiche di ogni altra specie possono pure essere abbassate mediante trasformazioni come quelle dette.

Ed allora possiamo dire che:

Una trasformazione di Cremona si può scomporre in una successione di trasformazioni di De Jonquières (Vedi Castelnuovo).

Se introduciamo poi la proposizione dimostrata dal Castelnuovo che ogni trasformazione di De Jonquières si scompone in una successione di trasformazioni quadratiche si ottiene il fondamentale teorema:

Ogni trasformazione di Cremona si può scomporre in una successione di trasformazioni quadratiche.

2. Sia ora:

$$p = 1.$$

E supponiamo che sia: $\frac{n - j}{2} > 1$. Allora: se una almeno delle condizioni di d) non è soddisfatta la (7) diviene la relazione assurda:

$$3 \leq 3\,y + i_1 < 0;$$

se tutte e tre le d) sono soddisfatte ed è $a > 1$, si ha la relazione assurda:

$$x + y + (\alpha - 1)(y - c_{\alpha+1}) < 0;$$

e se tutte e tre le d) sono soddisfatte ed $a = 1$, dalla (21) si ha la relazione pure assurda:

$$x + y \leq 0.$$

Si conchiude che se $p = 1$ non può essere $\frac{n-j}{2} > 1$.

Supponiamo che sia $\frac{n-j}{2} \leq 1$. Allora è: $(y, i_1) = (0, 2)$ o $(y, i_1) = (0, 1)$. Supponiamo che sia: $(y, i_1) = (0, 2)$. Allora dalla (28) si ha: $j \leq 2$; ma è $j \geq i_1 = 2$, dunque $j = 2$. Dalla (29) si ha poi $q_0 = 1$, ma allora si ha anche la (27'). Questa è in contrasto con $j = 2$, dunque non può essere $(y, i_1) = (0, 2)$. Non può nemmeno essere $(y, i_1) = (0, 1)$ perchè altrimenti sarebbe $p = 0$. Dunque se $[C_n]$ ha tre punti base la somma delle cui multiplicità supera n ed è di ordine minimo, il suo genere è diverso da 1.

3. Se $p = 2$, applicando le considerazioni generali come abbiamo fatto per $p = 0$, $p = 1$, si vede che $[C_n]$ è:

1.° Un sistema $[C_5]$ di ordine 5 che ha uno o più punti base semplici $K_1, K_2, \ldots, K_h$ successivi ad A_1, oppure una successione di punti $L_1, L_2, \ldots, L_l$ successivi ad uno L_1 nel primo intorno di A. Nel primo caso A, A_1, K_1 sono su un ciclo di ordine 2. Per esprimere queste proprietà di $[C_5]$ scriveremo

$$[C_5] \equiv A^3 A_1^2 K_1 K_2 \ldots K_h \quad h \leq 12 \quad (A, A_1, K_1)$$

$$[C_5] \equiv A^3 \left\{ \begin{array}{l} A_1^2 \\ L_1 L_2 \ldots L_l \end{array} \right. \quad l \leqq 12.$$

2.° Un sistema $[C_6]$ di ordine 6 del tipo

$$[C_6] \equiv A^4 \left\{ \begin{array}{l} A_1^2 \\ B_1^2 \end{array} \right.$$

o del tipo:

$$[C_6] \equiv A^4 A_1^2 A_2^2 \qquad (A, A_1, A_2).$$

Si ritrovano così i risultati già noti degli Autori citati in principio.

Palermo, novembre 1916.