ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*
Ulisse Dini *in Pisa*
Giuseppe Jung *in Milano*
Corrado Segre *in Torino*

SERIE III.ª – TOMO X.º

MILANO,

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

1904.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO X.° (SERIE III.ª)

PAG.

Sulle funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti.

(*Di* Guido Fubini, *a Catania.*)

Nella mia Memoria: *Sulle forme quadratiche, Hermitiane e sui sistemi di tali forme* (*), io ho indicato una classe di gruppi discontinui propriamente di movimenti in spazii a curvatura non costante, il cui elemento lineare è somma di forme differenziali quadriche a curvatura costante. E tra questi gruppi ve ne sono, come abbiamo visto, molti assai interessanti perchè sono *definibili aritmeticamente*, e di cui non solo si possono dare le trasformazioni generatrici e il corrispondente campo fondamentale, ma si possono addirittura caratterizzare in modo elementare tutte le trasformazioni. Di questi gruppi io ho allora indicato soltanto la teoria generale e le applicazioni aritmetiche, senza entrare in minuti dettagli; io voglio ora qui indicarne alcune applicazioni funzionali. Noterò soltanto che nella classe dei nostri gruppi rientrano come particolarissimi casi i gruppi iperabeliani di Picard, i gruppi, che si potrebbero dire ipermodulari di Hilbert studiati poi dal Blumenthal *(Math. Annalen, 1903).* Anzi mentre il Blumenthal studia soltanto gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti intieri in un campo algebrico e nei campi coniugati, quando tutti questi campi siano reali, nel nostro studio rientrerà anche come caso particolarissimo la generalizzazione di tali gruppi, quando tali campi algebrici siano in parte o anche tutti complessi. E di più le ricerche già svolte nella mia Memoria citata dànno un mezzo generale e che ben si presta all'intuizione geometrica per trovare i campi fondamentali dei nostri gruppi. Infine vedremo una ulteriore generalizzazione, che a mio credere, comprende

(*) *Atti dell'Accademia Gioenia* (Catania) (Serie 4.ª, Vol. 17).

tutte le funzioni invarianti per qualche gruppo discontinuo (comprese le precedenti e le iperfuchsiane di Picard) finora studiate e si vedrà anche quí che in qualche caso si possono trovare sussidii aritmetici nella teoria delle forme Hermitiane che noi abbiamo svolto nella Memoria citata.

§ 1. Riprenderò le denominazioni usate nella mia Memoria citata. Supponiamo che l'elemento lineare dello spazio ambiente S_ν sia uguale alla somma degli elementi lineari di m spazii (parziali) subordinati, indipendenti, e appartenenti allo spazio ambiente. Supponiamo che tutti questi spazii parziali $S_{n_1}^{(1)} \ldots S_{n_m}^{(m)}$ siano a due o a tre dimensioni e, per fissare le idee, supponiamo che quelli di essi che sono a tre dimensioni siano tutti iperbolici ossia che viga in essi la metrica di Lobacevskij.

Ricordiamo ora che i movimenti di uno spazio a due dimensioni a curvatura costante (piano, sfera o pseudosfera) sono tutti rappresentabili mediante trasformazioni lineari su una variabile complessa, definita da un sistema isotermo di linee tracciato sulla superficie, o, in altre parole, se la curvatura non è nulla, mediante una trasformazione lineare sulla variabile complessa definente i punti della conica-assoluto $Q=0$ della superficie in discorso.

Se poi la curvatura è negativa, si può con una trasformazione della nostra variabile far sì che tutte le nostre trasformazioni lineari risultino a coefficienti reali. Sia ora dato invece uno spazio iperbolico a tre dimensioni, di cui $Q=0$ sia la quadrica all'infinito e consideriamo un suo movimento *M di prima specie.* Noi potremo definire un tale movimento, indicando come si trasformano le generatrici di $Q=0$.

E poichè le due serie rigate di $Q=0$ sono enti geometrici di prima specie immaginarii coniugati, avremo che al movimento (reale) M corrisponde una coppia di sostituzione lineari immaginarie coniugate. Avremo perciò che a un gruppo propriamente discontinuo di tali movimenti M corrisponde un gruppo propriamente discontinuo su due variabili λ, μ di trasformazioni del tipo

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta} \qquad \mu' = \frac{\alpha_0\lambda+\beta_0}{\gamma_0\lambda+\delta_0}$$

dove α, β, γ, δ sono costanti in generale complesse, di cui α_0, β_0, γ_0, δ_0 sono le immaginarie coniugate; o, se noi vogliamo usare di un procedimento di Klein (*) corrisponde (ciò che in fondo è lo stesso) un gruppo propriamente discontinuo su due variabili $\lambda\,\mu$ di trasformazioni

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}; \qquad \mu' = \frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}.$$

(*) Cfr. Klein, *Differentialgleichungen*, 1891.

Abbiamo dunque che ai gruppi G discontinui di movimenti nei nostri spazii S_ν corrispondono dei gruppi discontinui H di sostituzioni lineari su $2i+k$ variabili complesse (se i è il numero degli spazii parziali a 3 dimensioni, k quello degli spazii a due dimensioni) $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{2i+k}$; ciascuna delle operazioni T del gruppo è prodotto di $2i+k$ trasformazioni lineari parziali $T_1 \ldots T_{2i+k}$ di cui la s^{esima} $(s=1, 2, \ldots, 2i+k)$ opera soltanto su λ_s. Un tale gruppo si dirà da noi un gruppo misto. E ne traggiamo i teoremi:

A ogni gruppo G di movimenti di uno dei nostri spazii S_ν corrisponde un gruppo misto H su $2i+k$ variabili.

Un gruppo misto su $2i+k$ variabili tale che k trasformazioni parziali (corrispondenti a una qualunque trasformazione T del gruppo) *sono a coefficienti reali, mentre le residue $2i$ sono a due a due identiche oppure immaginarie coniugate e che di più non possegga alcuna trasformazione infinitesima (ossia che nessuna trasformazione del gruppo abbia contemporaneamente infinitesime tutte le sue trasformazioni parziali) è certamente* **propriamente** *discontinuo nel campo delle $2i+k$ variabili su cui opera.*

È questo il teorema fondamentale della nostra teoria. Notiamo però, che, come del resto vedremo più tardi, non è sempre necessaria la condizione che insieme a ogni trasformazione immaginaria comparisca un'altra trasformazione o identica a essa, o immaginaria coniugata.

§ 2. Vogliamo ora indicare un metodo generale per costruire un campo fondamentale per un gruppo misto qualunque. Cominciamo dapprima a considerare il corrispondente gruppo G di movimenti per uno dei nostri spazi S_ν; per esso noi abbiamo già trovato nella Memoria citata un mezzo per la costruzione di campi fondamentali normali e abbiamo anche accennato che per la costruzione di un poliedro fondamentale si potrebbe anche ricorrere ad un ampliamento per riflesssione (quando è possibile). Passiamo ora al gruppo H. Se $i=0$ ossia se tutti gli spazii parziali di S_ν sono a due dimensioni, nulla vi ha da dire, perchè i gruppi H e G si possono considerare come identici, in quanto che ogni variabile complessa, su cui opera H si può considerare come rappresentatrice dei punti del corrispondente spazio parziale di S_ν e i gruppi H e G si possono perciò riguardare come operanti su una stessa varietà.

Sia ora qualche spazio parziale R di S_ν a tre dimensioni; in un tale spazio usiamo coordinate di Riemann x, y, z ossia lo immaginiamo rappresentato su un semispazio euclideo, in cui x, y, z siano coordinate cartesiane e $z=0$ rappresenti il piano limite. E su questo piano $z=0$ immaginiamo al solito distesa la variabile complessa $x+iy$. Per passare da G ad H noi consideravamo G operante sulle coppie di generatrici (*) dell'assoluto di R; è evidente che a questa considerazione equivale quella di considerare G come operante sulle coppie di punti del piano limite $z=0$ (**) (almeno nel caso che $2i$ trasformazioni a coefficienti complessi di H siano a due a due identiche) ossia, poichè due tali punti definiscono una geodetica di R, come operante sulle geodetiche di R. In altre parole (almeno nel caso citato) si passa dal gruppo G al gruppo H considerando G operante, anzichè sui punti, su quelle varietà V di S_v a cui corrispondono su ciascun spazio parziale a due dimensioni dei punti, e su ciascun spazio parziale a tre dimensioni una geodetica dello spazio stesso. Naturalmente G opera anche su queste varietà V in modo propriamente discontinuo. Noi vogliamo però notare espressamente che può avvenire per qualche gruppo G (che si potrebbe chiamare iperkleiniano) che esso operasse già in modo propriamente discontinuo su qualche varietà più semplice. Siano infatti $R_1 R_2 \ldots R_i$ gli i spazii parziali a tre dimensioni, di cui (x_1, y_1, z_1) $(x_2, y_2, z_2) \ldots (x_i, y_i, z_i)$ siano le coordinate Riemanniane. Consideriamo il poliedro P fondamentale di G. Può darsi che una varietà $z_1=0$, $z_2=0, \ldots z_m=0$ $(0<m\leq i)$ dello spazio totale S_v penetri nell'interno di P, ossia che G oltre che in S_v operi già in modo propriamente discontinuo in questa varietà. Non sarà allora necessario, per assicurare la discontinuità propria di H, considerare G operante sulle coppie di punti dei piani $z_1=0$, $z_2=0, \ldots, z_m=0$ di R_1, $R_2, \ldots, R_m$; basterà invece evidentemente considerare soltanto G come operante sui singoli punti dei piani stessi; e, come abbiamo già detto, invece di avere un gruppo misto H per ogni trasformazione del quale esistono $2i$ trasformazioni complesse a due a due identiche, potremo considerare un gruppo misto H', ogni trasformazione del quale risulti da k trasformazioni a coefficienti reali, m a coefficienti complessi anche distinte tra loro e $2(i-m)$ trasformazioni complesse a due a due identiche. Dal gruppo G si passa ad H', considerando G come operante su quelle varietà V', a cui nei k spazii parziali a due dimensioni corrispondono dei punti, negli m spazii parziali R_1, $R_2, \ldots R_m$ corrispondono solo dei punti dell'assoluto relativo, e nei residui $i-m$ spazii parziali a tre dimensioni corrispondono geodetiche. Il caso di $k=0$, $i=m=1$ è il ben noto caso dei gruppi su una sola variabile, a cui Poin-

(*) Una generatrice per ciascun sistema.

(**) Cfr. Klein, loc. cit.

CARÉ diede il nome di Kleiniani. Noi per ora considereremo il caso generale di $m = 0$; del resto anche se $m \neq 0$, si possono ai gruppi H' applicare tutte le seguenti considerazioni. Siano V le varietà già definite poc'anzi; e immaginiamo S_ν come generato da esse; S_ν diventa così uno spazio a un numero di dimensioni, che è il doppio del numero delle variabili su cui opera il gruppo H; lo spazio S_ν così considerato si indicherà da noi con Σ; in Σ potremo chiaramente scegliere come coordinate la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di ciascuna delle variabili, su cui opera H. Consideriamo ora in S_ν un poliedro fondamentale P; a tutte le varietà V che intersecano P (o giacciono in esso) corrisponderà in Σ una certa regione L; ora evidentemente ogni varietà V è equivalente a una varietà V intersecante P; quindi ogni punto di Σ è equivalente a un punto di L. La ricerca del campo fondamentale di H in Σ è perciò ridotta alla ricerca più semplice di spezzare L in tante regioni più piccole L' equivalenti in modo che due punti di una di queste regioni L' non siano equivalenti tra loro. Questo studio equivale naturalmente al seguente: Consideriamo una delle nostre varietà V intersecante P. Essa da P e dagli altri poliedri P' equivalenti a P ossia trasformati di P mediante G è divisa in tanti pezzi V_1, V_2, V_3,... Si tratta di vedere quali di questi pezzi possono essere tra di loro equivalenti, ricerca questa che è ben facile poichè noi conosciamo il gruppo G e i corrispondenti campi parziali; se p. es. μ di questi pezzi non sono mai equivalenti e ogni altro è equivalente a uno di essi, allora chiaramente il numero delle regioni L' è precisamente μ e la costruzione effettiva di queste μ regioni L' è eseguita senz'altro, appena si sappiano trovare i citati μ pezzi di V. Nel nostro campo generalissimo di studii è ben difficile dire qualche cosa di più preciso su queste regioni L'; io aggiungerò soltanto che, come risulta da quanto abbiamo detto, la ricerca di queste regioni presenta la più grande analogia con la ricerca dei periodi delle forme ridotte di GAUSS, quando già si immagini di conoscere il campo fondamentale del gruppo modulare. Anzi quest'ultima ricerca non è che un caso particolarissimo della nostra.

È poi ora senz'altro evidente che ognuna delle nostre regioni L' si può assumere come campo fondamentale di H, e che considerazioni perfettamente analoghe valgono per i gruppi H'.

Sia ora H un gruppo misto, Σ lo spazio su cui opera, P un suo poliedro fondamentale, P', P''... i poliedri equivalenti formanti con esso un' unica rete, ossia tali che dall'uno di essi si possa passare a un altro qualunque mediante una linea attraversante un numero finito dei poliedri stessi. Per conservare la massima semplicità, supponiamo (*Fricke Automorphe Funktionen*, Bd. II, pag. 142) che questa rete sia limitata proprio da ipersuperficie limiti, in modo tale che con convenienti trasformazioni R per raggi vettori reciproci nei piani delle singole variabili su cui opera il gruppo H, essa e le sue proiezioni sugli spazii parziali risultino a distanza finita. Noi dimostreremo con i metodi di Poincaré l'esistenza di funzioni analitiche delle variabili citate invarianti per H.

Siano ora $\xi_1 \dots \xi_\nu$ le variabili complesse in discorso, $F(\xi_1 \dots \xi_\nu)$ una funzione razionale (o anche soltanto uniforme delle stesse).

Indichiamo con $\xi'_i = \dfrac{\alpha_i \xi_i + \beta_i}{\gamma_i \xi_i + \delta_i}$ $(i = 1, 2, \dots, \nu)$ una trasformazione T generica del gruppo e così $F\left(\dfrac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}\right)$ la trasformata di F mediante T. E si construisca al modo di Poincaré-Picard la serie $\Sigma \dfrac{F\left(\dfrac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}\right)}{\prod\limits_1^n (\gamma_i \xi + \delta_i)^4}$, ogni termine, della quale corrisponde a una trasformazione del gruppo che trasporti la nostra rete in sè stessa, e viceversa.

Prendiamo un intorno σ qualsiasi a distanza finita dai punti singolari della F e dei suoi trasformati dalle succitate trasformazioni (se pur ne esistono nella nostra rete) interno alla rete stessa. Dico che in questo intorno la nostra serie converge assolutamente e in ugual grado. Infatti poichè in questo intorno i numeratori dei singoli termini della nostra serie restano inferiori a una costante assegnabile, basterà dimostrare la convergenza di

$$\Sigma \frac{1}{|\Pi (\gamma_i \xi + \delta_i)^4|}. \tag{1}$$

Ora il rapporto tra il massimo e il minimo valore di uno dei termini della (1) quando ξ varia nel nostro intorno è evidentemente finito; infatti, i punti le cui coordinate sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di $-\dfrac{\delta_i}{\gamma_i}$ sono i trasformati del punto a distanza infinita per la trasformazione inversa di quella che corrisponde al termine considerato della nostra serie.

Non solo essi ma anche le loro proiezioni sugli spazii parziali sono, per l'ipotesi fatta, tutti esterni alla nostra rete e perciò le distanze di queste proiezioni dalle proiezioni del punto (ξ) che come sappiamo sono date da $\left|\xi + \left(\dfrac{\gamma_i}{\delta_i}\right)\right|$ sono superiori a una costante finita. Di più, con pseudo inversioni convenientemente scelte potremo fare che questi punti $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ siano tutti a distanza finita e perciò $\xi + \left(\frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$ non può diventare neppure infinito; ciò che dimostra il nostro asserto. Ora i denominatori di (1) misurano il coefficiente di dilatazione della nostra trasformazione considerata in Σ. Per le precedenti considerazioni, si trova allora, con i soliti metodi di Poincaré, che il termine della nostra serie corrispondente a una trasformazione T è minore del prodotto di una costante finita per il rapporto tra l'intorno σ' (in cui T porta σ) e l'intorno iniziale σ. Basta perciò dimostrare che i volumi di tutti gli intorni, in cui T trasforma σ, hanno una somma finita. E infatti, se σ è tanto piccolo, che esso e i suoi trasformati siano a due a due esterni uno all'altro, la nostra asserzione è evidente, perchè la somma dei loro volumi è minore del volume finito della nostra rete.

La serie iniziale è perciò, come abbiamo enunciato, assolutamente e uniformemente convergente e rappresenta quindi una funzione analitica delle nostre variabili ξ, che, come il semplice sguardo dimostra, resta moltiplicata, quando si eseguisca su di essa una operazione qualunque T del nostro gruppo, per un fattore dipendente solo da T.

I metodi di Poincaré-Picard dimostrano facilmente che la nostra serie non è in generale identicamente nulla; basta perciò fare il quoziente di due tali serie, ottenute con due differenti funzioni F, per avere una funzione analitica delle nostre ξ invariante per il gruppo H.

Noi dovremmo ora studiare queste funzioni generalissime, di cui abbiamo qui accertata l'esistenza. Io però non lo farò, accontentandomi di enunciare che per esse si possono facilmente generalizzare i risultati ottenuti da Picard e Poincaré nei casi più semplici. E mi accontenterò di far rilevare che anche nel tanto più complicato problema da noi studiato, si possono ottenere dei gruppi discontinui del nostro tipo definibili in modo puramente aritmetico, come abbiamo già detto.

Noi vogliamo ora parlare di una ulteriore generalizzazione delle teorie precedenti e giungeremo così a nuove generalissime funzioni uniformi di una o più variabili invarianti per un gruppo discontinuo di operazioni. Prima di studiare il caso generale, che abbiamo in vista studiamo un ulteriore caso preliminare, in cui riprenderemo le notazioni usate nella mia Memoria citata sui sistemi di forme quadratiche ed Hermitiane. Siano date ν forme Hermitiane Q_l del solito tipo $x_1^{(l)}\xi_1^{(l)} + \cdots + x_{n_l-1}^{(l)}\xi_{n_l-1}^{(l)} - x_{n_l}\xi_{n_l}^{(l)}$ (*) $(l = 1, 2, \ldots \nu)$

(*) Analoghe considerazioni valgono per il caso di forme del tipo $\sum_{i=1}^{n_l} x_i^{(l)}\xi_i^{(l)}$.

sulle variabili $x_i^{(l)}$ e le immaginarie coniugate $\xi_i^{(l)}$; e sia dato un gruppo discontinuo le cui trasformazioni trasformino in sè il dato sistema di forme.

Posto $\frac{x_i^{(l)}}{x_{n_l}^{(l)}} = u_i^{(l)}$ $(l = 1, 2, \dots, \nu)$ $(i = 1, 2, \dots, n_l - 1)$ e indicando con una lineetta sovrapposta il valore trasformato di una variabile, sia

$$\overline{u}_i^{(l)} = \frac{a_{i1}^{(l)} u_1^{(l)} + \cdots + a_{i,n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1}^{(l)} + a_{i,n_l}}{a_{n_l1}^{(l)} u_1^{(l)} + \cdots + a_{n_l,n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1}^{(l)} + a_{n_l n_l}} \quad (l = 1, 2, \dots \nu)\ (i = 1, 2, \dots n_l - 1) \quad (2)$$

una trasformazione generica T del gruppo G in queste nuove variabili. Per un teorema dimostrato nella mia Memoria citata questo gruppo è *propriamente* discontinuo nelle variabili $u_i^{(l)}$, o con maggior precisione in una regione R, (definita nella mia Memoria) dello spazio S_k a $k = 2(n_1 - 1) + \cdots + 2(n_l - 1)$ dimensioni, le cui coordinate sono le $v_i^{(l)}$, $w_i^{(l)}$ quando sia $u_i^{(l)} = v_i^{(l)} + i\, w_i^{(l)}$ [$v_i^{(l)}$, $w_i^{(l)}$ reali]. La regione R è finita ed è definita dalle

$$\sum_{i=1}^{n_l-1} \left\{ (v_i^{(l)})^2 + (w_i^{(l)})^2 \right\} < 1 \qquad (l = 1, 2, \dots \nu).$$

Io dico che esistono funzioni uniformi analitiche delle variabili $u_i^{(l)}$ esistenti proprio nella regione R di S_k che rimangono invarianti per il nostro gruppo. Sia F una funzione o razionale delle stesse variabili o anche soltanto uniforme in R e: noi indicheremo con F_T la sua trasformata per una trasformazione T del gruppo. Costruiamo ora l'Iacobiano I delle $\overline{v}_i^{(l)}$, $\overline{w}_i^{(l)}$ rispetto alle $v_i^{(l)}$, $w_i^{(l)}$ dove le v, w siano definite dalla (2), in cui si ponga $\overline{u}_i^{(l)} = \overline{v}_i^{(l)} + i\, \overline{w}_i^{(l)}$. Esso è naturalmente uguale al prodotto dell'Iacobiano delle $\overline{u}_i^{(l)}$ rispetto alle $u_i^{(l)}$ per la quantità immaginaria coniugata: in altre parole esso si può anche ottenere così: formiamo per ogni valore particolare dell'indice l l'Iacobiano (che indicheremo con I_l) delle $\overline{u}_i^{(l)}$ rispetto alle $u_i^{(l)}$ $(i = 1, 2, \dots, n_l - 1)$ e moltiplichiamolo per la quantità coniugata I_l^0. Sarà

$$I = \prod_{l=1}^{\nu} I_l I_l^0 .$$

Costruiamo ora l'Iacobiano I_l; e poniamo

$$z_k^{(l)} = a_{k1}^{(l)} u_1 + \cdots + a_{k,n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1} + a_{kn_l} \qquad (k = 1, 2, \dots, n_l),$$

col che sarà

$$\overline{u}_i^{(l)} = \frac{z_i^{(l)}}{z_{n_l}^{(l)}} .$$

Troviamo tosto che è, indicando per brevità con z_i le $z_i^{(l)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_l)$

$$I_l = \frac{\partial(\bar{u}_1^{(l)} \ldots \bar{u}_{n_l-1}^{(l)})}{\partial(u_1^{(l)} \ldots u_{n_l-1}^{(l)})} = \left[\frac{1}{\bar{z}_{n_l}}\right]^{n_l} \left\{ z_{n_l} \frac{\partial(\bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{n_l-1})}{\partial(u_1 \ldots u_{n_l-1})} - z_1 \frac{\partial(\bar{z}_{n_l}\bar{z}_2 \ldots \bar{z}_{n_l-1})}{\partial(u_1 \ldots u_{n_l-1})} + \cdots \right\} =$$

$$= \pm \left[\frac{1}{\bar{z}_{n_l}}\right]^{n_l} \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \ldots & \bar{z}_{n_l} \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial u_1} \ldots & \frac{\partial \bar{z}_{n_l}}{\partial u_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial u_{n_l-1}} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial u_{n_l-1}} \ldots & \frac{\partial \bar{z}_{n_l}}{\partial u_{n_l-1}} \end{vmatrix} = \pm \left[\frac{1}{\bar{z}_{n_l}}\right]^{n_l} \begin{vmatrix} a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(l)} \ldots & a_{1n}^{(l)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(l)} & a_{n2}^{(l)} \ldots & a_{nn}^{(l)} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \left[\frac{1}{\bar{z}_{n_l}}\right]^{n_l}$$

supponendo il determinante della nostra proiettività uguale a 1. Quindi

$$I_l I_l^0 = \left\{ \frac{1}{[a_{n_l1}^{(l)} u_1 + \cdots + a_{n_ln_l-1} u_{n_l-1} + a_{n_l}] [a_{n_l}^{(l)} u_1 + \ldots + a_{n_l}]_0} \right\}^{n_l} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\bmod^2 [a_{n_l1}^{(l)} u_1 + \cdots + a_{n_ln_l-1}^{(l)} u_{n_l-1} + a_{n_l}^{(l)}]} \right\}^{n_l}.$$

Il prodotto di tutte queste quantità per $l = 1, 2, \ldots \nu$ ci dà il valore di $I I_0$. A ogni trasformazione T del gruppo corrisponde un valore di $I I_0$. Un tal valore sarà da noi indicato brevemente con I_T. Si costruisca allora la serie

$$\Sigma F_T I_T \tag{A}$$

di cui ogni termine corrisponde a una trasformazione del gruppo. Io dico che in un intorno posto a distanza finita dai punti singolari di F in R e dai loro trasformati per G essa è uniformemente e assolutamente convergente. Basta a tal uopo dimostrare la convergenza assoluta e in ugual grado della

$$\Sigma I_T$$

nel nostro intorno. Coi metodi di Poincaré e di Picard (*) si trova facilmente che la I_T nel nostro intorno varia fra due limiti $H\left[\frac{1}{\bmod^2 a_{n_l}^{(l)}}\right]^{n_l}$, $K\left[\frac{1}{\bmod^2 a_{n_l}^{(l)}}\right]^{n_l}$, dove

(*) Cfr. le Mem. di Picard nei primi volumi degli *Acta Mathematica.*

H, K sono due costanti finite indipendenti dalla trasformazione T considerata. Posto $I_T = A\left[\frac{1}{\bmod^2 a_{n_l}^{(l)}}\right]^{n_l}$ si ha $H \leqq A \leqq K$, dove H, K sono *costanti* finite. Consideriamo ora il nostro contorno e i suoi trasformati per G: essi sono tutti interni a R e se l'intorno iniziale è abbastanza piccolo, essi non si coprono l'un l'altro e perciò la somma dei loro volumi è finita. Se $d\tau$, $d\tau'$ sono un elemento di volume dell'intorno iniziale e del suo trasformato per T, è $\frac{d\tau'}{d\tau} = I_T = A\left[\frac{1}{\bmod^2 a_{n_l}^{(l)}}\right]^{n_l}$. Poichè $\Sigma\, d\tau'$ è finito è dunque convergente la $\sum_T\left[\frac{1}{\bmod^2 a_{n_l}^{(l)}}\right]^{n_l}$ e quindi anche per le disuguaglianze citate la $\Sigma\, I_T$. La (A) rappresenta perciò in R una funzione analitica che evidentemente per una trasformazione T di G resta moltiplicata per un fattore indipendente da F. I metodi di Poincaré dimostrano che una tal serie non è in generale identicamente nulla; il quoziente di due tali serie ci dà perciò una funzione invariante per il nostro gruppo. c. d. d.

Visto questo caso particolare, passiamo ora al caso generale che abbiamo in vista. Siano $u_i^l\,(l = 1, 2, \ldots \nu)\,(i = 1, 2, \ldots, n_l - 1)\, n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu - \nu$ variabili qualsiasi e sia G un gruppo di cui ogni trasformazione sia del tipo (2), che non contenga trasformazioni infinitesime. Se noi non sappiamo se questo gruppo lascia invariato un sistema di forme Hermitiane non possiamo dire che esso è propriamente discontinuo. E noi ci facciamo le seguenti domande: Come possiamo riconoscere se un tal gruppo è o no propriamente discontinuo? Si può far servire un tal gruppo, anche se impropriamente discontinuo, alla costruzione di funzioni uniformi in modo analogo ai precedenti?

Ad ambedue le domande si risponde con le seguenti considerazioni. Se noi ricordiamo quanto ho detto nelle prime pagine della mia Memoria citata, noi vediamo che i nostri gruppi appariranno propriamente discontinui, appena noi scegliamo qualche varietà opportuna come elemento generatore nel solito spazio S_k, anzichè i suoi punti. E noi riconosciamo tosto che se noi consideriamo S_k (invece che come luogo di punti) come luogo dei sistemi di m punti in esso contenuti (dove m è un intero abbastanza grande) il gruppo riesce propriamente discontinuo. In altre parole io voglio dire che se accanto alle $u_i^{(l)}$ consideriamo degli altri sistemi di variabili, in numero sufficientemente grande, $v_i^{(l)}$, $w_i^{(l)}$, $z_i^{(l)}, \ldots$ e se immaginiamo che G operi sulle v, sulle $w, \ldots$ in modo identico a quello, con cui opera sulle u, allora esso riuscirà propriamente discontinuo nello spazio (che indicheremo con Σ) le cui coordinate sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario delle singole variabili u, v, w,... Una trasformazione del gruppo assume così il tipo

$$\overline{u}_i^{(l)} = \frac{a_{i1}^{(l)} u_1^{(l)} + \cdots + a_{i n_l - 1}^{(l)} u_{n_l - 1}^{(l)} + a_{i n_l}^{(l)}}{a_{n_{(l)} 1}^{(l)} u_1^{(l)} + \cdots + a_{n_l n_{l-1}}^{(l)} u_{n_l - 1}^{(l)} + a_{n_l n_l}^{(l)}}$$

$$\overline{v}_i^{(l)} = \frac{a_{i1}^{(l)} v_1^{(l)} + \cdots + a_{i n_l - 1}^{(l)} v_{n_l - 1}^{(l)} + a_{i n_l}^{(l)}}{a_{n_l 1}^{(l)} v_1^{(l)} + \cdots + a_{n_l n_{l-1}}^{(l)} v_{n_l - 1}^{(l)} + a_{n_l n_l}^{(l)}}$$

. . . .

E per dimostrare il nostro asserto basta notare che una trasformazione (2) del gruppo primitivo di G è chiaramente determinata quando si dieno in G_k un numero m (*finito*) sufficiente di punti e i loro trasformati. Se dunque perciò un sistema di m punti in S_k si potesse portare in un sistema infinitamente vicino, ne verrebbe come conseguenza che il gruppo contiene trasformazioni infinitesime. *Dunque il nostro gruppo G diventa certamente propriamente discontinuo ed è perciò possibile la costruzione di funzioni invariate per tutte le sue trasformazioni, appena si pensi G operante sui sistemi di m punti di S_k, dove m è un intiero abbastanza grande, ma finito.*

Sono questi appunto i gruppi generali, cui accennavamo e di cui tutti i precedenti sono casi particolari. Se vogliamo poi vedere se il gruppo è propriamente discontinuo anche per sistemi di n punti, dove sia $n < m$, p. es. se esso è propriamente discontinuo addirittura in S_k si può procedere nel modo seguente. Si costruisca nello spazio Σ una rete di campi fondamentali per il nostro gruppo e consideriamo quella varietà subordinata che è definita dall'avere le coordinate u uguali a certe costanti e le sue trasformate per le trasformazioni di G che corrispondono ai campi della rete suddetta. Il gruppo G sarà o no propriamente discontinuo per i punti di S_k secondoche tali varietà sono o no a distanza finita l'una dall'altra.

Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo.

(Di Orazio Tedone, *a Genova.)*

MEMORIA II.

(Corpi limitati da due piani paralleli o da due sfere concentriche.)

I. Problemi in cui il corpo elastico è limitato da due piani paralleli (*).

1. *Funzioni di* Green *e funzione armonica.* Supponiamo che i due piani limitanti il corpo elastico, sieno i due piani $z=0$ e $z=h$ che indicheremo rispettivamente con σ_1 e σ_2, mentre continueremo a chiamare σ l'insieme di σ_1 e σ_2 e S la porzione di spazio da essi limitata.

Se $A \equiv (x, y, z)$ è un punto di S, cioè tale che $0 < z < h$, consideriamo le due serie indefinite di punti:

$$A_1 \equiv (x, y, -z), \; A_2 \equiv (x, y, 2h+z), \; A_3 \equiv (x, y, -2h-z), \ldots,$$
$$A_{2n} \equiv (x, y, 2nh+z), \; A_{2n+1} \equiv (x, y, -2nh-z), \ldots$$
$$A'_1 \equiv (x, y, 2h-z), \; A'_2 \equiv (x, y, -2h+z), \; A'_3 \equiv (x, y, 4h-z), \ldots,$$
$$A'_{2n-1} \equiv (x, y, 2nh-z), \; A'_{2n} \equiv (x, y, -2nh+z), \ldots$$

(*) In questa seconda Memoria sulle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo, come in quelle che ancora potranno seguirla, continueremo ad applicare i principii stabiliti nella prima Memoria. Tutte le volte che capiterà di doverci riferire ai risultati stabiliti in quella Memoria, aggiungeremo alla citazione l'indicazione (I[a]).

che sono le due serie di immagini successive del punto A rispetto ai due piani σ_1 e σ_2, situate tutte fuori di S, tranne A_1 che può cadere con A sul piano σ_1 ed A'_1 che può cadere con A nel piano σ_2. Chiamiamo:

$$r_1, \; r_2, \; r_3, \ldots, \; r_{2n}, \quad r_{2n+1}, \ldots$$
$$r'_1, \; r'_2, \; r'_3, \ldots, \; r'_{2n-1}, \; r'_{2n}, \ldots$$

le distanze relative di ciascuno di questi punti da uno stesso punto (ξ, η, ζ) di S e continuiamo a chiamare r la distanza di A dal punto (ξ, η, ζ). Quando il punto (ξ, η, ζ) cade su σ_1, avremo, dovunque sia A in S:

$$r = r_1, \; r_2 = r_3, \ldots, \; r_{2n} = r_{2n+1}, \ldots,$$
$$r'_1 = r'_2, \; r'_3 = r'_4, \ldots, \; r'_{2n-1} = r'_{2n}, \ldots,$$

mentre, quando il punto (ξ, η, ζ) cade su σ_2, avremo:

$$r_1 = r_2, \; r_3 = r_4, \ldots, \; r_{2n-1} = r_{2n}, \ldots,$$
$$r = r'_1, \; r'_2 = r'_3, \ldots, \; r'_{2n} = r'_{2n+1}, \ldots$$

Così, fissato il punto (ξ, η, ζ), dovunque in S, quando A è scelto su σ_1, si ha:

$$r = r_1, \; r_2 = r'_1, \; r_3 = r'_2, \ldots, \; r_n = r'_{n-1}, \ldots,$$

mentre, quando A è scelto su σ_2, si ha:

$$r = r'_1, \; r'_2 = r_1, \; r'_3 = r_2, \ldots, \; r'_n = r_{n-1}, \ldots$$

Nella porzione di spazio $\zeta \geqq 0$ la funzione $\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n+1}}$, considerata come dipendente da ξ, η, ζ, è armonica, si annulla all'infinito e sul piano σ_1, mentre diventa infinitamente grande e positiva quando il punto (ξ, η, ζ) cade in A_{2n} che appartiene a questa porzione di spazio. Ne viene che nel campo considerato $\zeta \geqq 0$, e quindi anche in S, è

$$\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n+1}} \geqq 0,$$

per cui la serie

$$g = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_5}\right) + \cdots = \sum_1^{\infty}{}_n \left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n+1}}\right), \tag{1}$$

considerata come dipendente da ξ, η, ζ, è una serie di funzioni armoniche, regolari in S e tutte positive, tranne sul piano σ_1 e all'infinito in cui si annullano. Su σ_1 la serie g è identicamente nulla, mentre su σ_2 si riduce a $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1}$; quindi, per i teoremi del VOLTERRA e dell'HARNACK, g è una serie convergente assolutamente ed in egual grado in S e rappresenta in questo campo, ed anche in un campo più vasto, una funzione armonica e regolare; nello stesso campo, g è derivabile termine a termine un numero qualunque di volte e le serie delle derivate sono ancora funzioni armoniche e regolari.

Di analoghe proprietà gode la serie

$$g' = \left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r'_3}\right) + \left(\frac{1}{r'_4} - \frac{1}{r'_5}\right) + \cdots = \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{1}{r'_{2n}} - \frac{1}{r'_{2n+1}}\right). \tag{2}$$

Essa si annulla identicamente su σ_2, mentre diventa eguale a $\frac{1}{r'_1}$ su σ_1.

La funzione G di GREEN relativa allo spazio S ed al punto A, interno ad S, è quindi

$$\left.\begin{aligned} G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} + g + g' = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} + \\ + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n+1}}\right) + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{1}{r'_{2n}} - \frac{1}{r'_{2n+1}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Per la derivata normale di G, avremo, su σ_1

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} &= 2\left[\frac{z}{r^3} + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{2nh+z}{r_{2n}^3} - \frac{2nh-z}{r'^3_{2n-1}}\right)\right]_{\zeta=0} = \\ &= -2\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{\partial \frac{1}{r_{2n}}}{\partial z} + \frac{\partial \frac{1}{r'_{2n-1}}}{\partial z}\right)\right]_{\zeta=0}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e su σ_2

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=h} &= 2\left[\frac{h-z}{r^3} + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{(2n+1)h-z}{r'^3_{2n}} - \frac{(2n-1)h+z}{r^3_{2n-1}}\right)\right]_{\zeta=h} = \\ &= 2\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{\partial \frac{1}{r'_{2n}}}{\partial z} + \frac{\partial \frac{1}{r_{2n-1}}}{\partial z}\right)\right]_{\zeta=h}. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Quindi, se Φ è una funzione armonica, regolare in S e che nei punti all'infinito di S si annulla di ordine maggiore a quello di $\frac{1}{r}$, e il punto A è interno ad S, il valore della funzione Φ, nel punto A, può essere rappresentato dalla formola

$$\left.\begin{aligned}
2\pi\Phi &= \int_{\sigma_1}\Phi\left[\frac{z}{r^3}+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{2nh+z}{r_{2n}^3}-\frac{2nh-z}{r'^3_{2n-1}}\right)\right]d\sigma+\\
&+\int_{\sigma_2}\Phi\left[\frac{h-z}{r^3}+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{(2n+1)h-z}{r'^3_{2n}}-\frac{(2n-1)h+z}{r^3_{2n-1}}\right)\right]d\sigma=\\
&=-\int_{\sigma_1}\Phi\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{\partial\frac{1}{r_{2n}}}{\partial z}+\frac{\partial\frac{1}{r'_{2n-1}}}{\partial z}\right)\right]d\sigma+\\
&+\int_{\sigma_2}\Phi\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{\partial\frac{1}{r'_{2n}}}{\partial z}+\frac{\partial\frac{1}{r_{2n-1}}}{\partial z}\right)\right]d\sigma.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Osservando poi che, essendo le due serie di funzioni armoniche e regolari in S:

$$\sum_1^\infty{}_n\int_{\sigma_1}\Phi\left(\frac{2nh+z}{r_{2n}^3}-\frac{2nh-z}{r'^3_{2n-1}}\right)d\sigma,$$

$$\sum_1^\infty{}_n\int_{\sigma_2}\Phi\left(\frac{(2n+1)h-z}{r'^3_{2n}}-\frac{(2n-1)h+z}{r^3_{2n-1}}\right)d\sigma,$$

convergenti in egual grado su σ_1 e σ_2 e quindi in S, è permessa la integrazione termine a termine nella (5), si può anche scrivere

$$\left.\begin{aligned}
2\pi\Phi &= \int_{\sigma_1}\Phi\frac{z}{r^3}d\sigma+\sum_1^\infty{}_n\int_{\sigma_1}\Phi\left(\frac{2nh+z}{r_{2n}^3}-\frac{2nh-z}{r'^3_{2n-1}}\right)d\sigma+\\
&+\int_{\sigma_2}\Phi\frac{h-z}{r^3}d\sigma+\sum_1^\infty{}_n\int_{\sigma_2}\Phi\left(\frac{(2n+1)h-z}{r'^3_{2n}}-\frac{(2n-1)h+z}{r^3_{2n-1}}\right)d\sigma=\\
&=-\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1}\frac{\Phi}{r}d\sigma-\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1}\frac{\Phi}{r_{2n}}d\sigma+\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1}\frac{\Phi}{r'_{2n-1}}d\sigma\right)+\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\Phi}{r}d\sigma+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\Phi}{r'_{2n}}d\sigma+\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\Phi}{r_{2n-1}}d\sigma\right).
\end{aligned}\right\}\quad(5')$$

È pure facile dimostrare, inversamente, che, qualunque siano i valori assegnati a Φ su σ_1 e σ_2, purchè formino delle funzioni finite e continue dei punti di questi due piani e siano tali che $\rho\,\Phi$, $\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, nei punti all'infinito di σ_1 e σ_2 si annulli, la (5), ovvero la (5'), definisce una funzione del punto A, armonica e regolare nell'interno di S che nei punti di σ tende ai valori assegnati. E infatti, se Φ soddisfa alle ipotesi precedenti, ciascuno dei termini della (5') è finito, dovunque sia A in S, e rappresenta una funzione armonica e regolare nell'interno di S. Le due serie:

$$\sum_1^\infty{}_n \int_{\sigma_1} \Phi \left(\frac{2\,n\,h + z}{r_{2n}^3} - \frac{2\,n\,h - z}{r'^3_{2n-1}} \right) d\,\sigma,$$

$$\sum_1^\infty{}_n \int_{\sigma_2} \Phi \left(\frac{(2\,n+1)\,h - z}{r'^3_{2n}} - \frac{(2\,n-1)\,h + z}{r_{2n-1}^3} \right) d\,\sigma$$

convergono in egual grado su σ_1 e σ_2, quindi esse e la funzione Φ definita dalla (5'), sono funzioni armoniche e regolari nell'interno di S. Se si osserva che

$$\lim_{z=0} \sum_1^\infty{}_n \int_{\sigma_1} \Phi \left(\frac{2\,n\,h + z}{r_{2n}^3} - \frac{2\,n\,h - z}{r'^3_{2n-1}} \right) d\,\sigma = 0$$

$$\lim_{z=0} \left\{ \int_{\sigma_2} \Phi \frac{h-z}{r^3}\, d\,\sigma + \sum_1^\infty{}_n \int_{\sigma_2} \Phi \left(\frac{(2\,n+1)\,h - z}{r'^3_{2n}} - \frac{(2\,n-1)\,h + z}{r_{2n-1}^3} \right) d\,\sigma \right\} = 0,$$

si ha

$$\lim_{z=0} \Phi = \frac{1}{2\,\pi} \lim_{z=0} \int_{\sigma_1} \Phi \frac{z}{r^3}\, d\,\sigma$$

e quindi Φ, nei punti di σ_1, tende ai valori assegnati. Lo stesso dicasi per i punti di σ_2. Poichè infine, le due serie:

$$\sum_1^\infty{}_n \left(\frac{2\,n\,h + z}{r_{2n}^3} - \frac{2\,n\,h - z}{r'^3_{2n-1}} \right)_{\zeta=0},$$

$$\sum_1^\infty{}_n \left(\frac{(2\,n+1)\,h - z}{r'^3_{2n}} - \frac{(2\,n-1)\,h + z}{r_{2n-1}^3} \right)_{\zeta=h},$$

considerate come dipendenti da x, y, z, sono convergenti in egual grado su σ_1 e σ_2 e quindi anche in S; poichè i loro termini, da un certo momento in poi, quando A, sempre compreso in S, è abbastanza lontano, sono positivi e minori dei termini delle rispettive serie:

$$2\,z \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{r_{2n}^3}, \qquad 2\,(h-z) \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{r'^3_{2n}}$$

e queste sono convergenti e si annullano nei punti all'infinito di σ_1 e di σ_2 almeno come $\frac{1}{\rho}$, così anche gli integrali che compaiono nella (5) sono finiti e rappresentano funzioni armoniche e regolari nell'interno di S, ed essendo permessa, nella (5), la integrazione termine a termine, la Φ può essere rappresentata anche dalla (5).

Le espressioni analitiche ottenute per Φ si sarebbero potute ricavare anche dall'applicazione del procedimento alternato di SCHWARZ. I termini che contengono integrali estesi a σ_1 sono infatti le riflessioni successive sui piani σ_1 e σ_2 della funzione armonica e regolare nella regione $\zeta \geqq 0$ che assume su σ_1 i valori assegnati a Φ su questo piano. E lo stesso dicasi dei termini che contengono integrali estesi a σ_2.

2. Come conseguenza della convergenza assoluta ed uniforme della serie g in S si deduce anche la convergenza assoluta ed uniforme della serie

$$\left.\begin{aligned}\bar{g} &= \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) - \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_5}\right) + \left(\frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_7}\right) - \cdots = \\ &= - \sum_1^\infty {}_n (-1)^n \left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n+1}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$\bar{g}$, considerata in S come dipendente da ξ, η, ζ gode di proprietà analoghe a quelle di g. Essa si annulla identicamente su σ_1, mentre su σ_2 si riduce a

$$\frac{1}{r_2} - \left(\frac{2}{r_3} - \frac{2}{r_5}\right) - \left(\frac{2}{r_7} - \frac{2}{r_9}\right) - \cdots = \frac{1}{r_2} - 2 \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{r_{4n+3}} - \frac{1}{r_{4n+5}}\right).$$

Invece la derivata normale di $\bar{g}$, su σ_1 diventa

$$\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = - 2 \sum_1^\infty {}_n (-1)^n \frac{2nh + z}{r_{2n}^3},$$

mentre su σ_2 si riduce a $-\left(\frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=h}$. Similmente, dalla convergenza assoluta ed in egual grado in S della serie

$$g' = \frac{1}{r'_2} + \left(\frac{1}{r'_4} - \frac{1}{r'_3}\right) + \left(\frac{1}{r'_6} - \frac{1}{r'_5}\right) + \cdots = \frac{1}{r'_2} + \sum_2^\infty {}_n \left(\frac{1}{r'_{2n}} - \frac{1}{r'_{2n-1}}\right)$$

si deduce la convergenza assoluta ed in egual grado della serie

$$\bar{g}' = \frac{1}{r'_2} - \sum_2^\infty {}_n (-1)^n \left(\frac{1}{r'_{2n}} - \frac{1}{r'_{2n-1}}\right). \tag{7}$$

Questa serie gode di proprietà analoghe a quelle di $\overline{g'}$ in S; su σ_1 si riduce a $\frac{1}{r'_2}$, mentre su σ_2 si riduce a

$$\left(\frac{2}{r'_2} - \frac{2}{r'_4}\right) + \left(\frac{2}{r'_6} - \frac{2}{r'_8}\right) + \cdots = 2 \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{r'_{4n+2}} - \frac{1}{r'_{4\,n+4}}\right).$$

Invece per la derivata normale di $\overline{g'}$ si ha che su σ_1 si riduce a

$$\left(\frac{\partial \overline{g'}}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = \frac{-2h+z}{r'^3_2} - 2 \sum_2^\infty {}_n (-1)^n \frac{-2nh+z}{r'^3_{2n-1}},$$

mentre su σ_2 è identicamente nulla. Ne viene che la funzione

$$\overline{G} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} - \overline{g} - \overline{g'} \tag{8}$$

si annulla identicamente su σ_1, mentre su σ_2 è la derivata normale che si annulla identicamente. $\overline{G}$ è quindi la funzione di Green che risolve il problema della funzione armonica e regolare in S e tale che acquista valori dati su σ_1, mentre la sua derivata normale acquista dati valori su σ_2. La sua espressione analitica sarà data da

$$\left.\begin{aligned}
2\pi\overline{\Phi} &= \int_{\sigma_1} \overline{\Phi}\left[\frac{z}{r^3} + \sum_1^\infty {}_n (-1)^n \frac{2nh+z}{r^3_{2n}} + \sum_1^\infty {}_n (-1)^n \frac{-2nh+z}{r'^3_{2n-1}}\right] d\sigma + \\
&+ \int_{\sigma_2} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \zeta}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{r_{4n+3}} - \frac{1}{r_{4n+5}}\right) - \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{r'_{4n+2}} - \frac{1}{r'_{4(n+1)}}\right)\right] d\sigma = \\
&= -\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1} \overline{\Phi}\frac{d\sigma}{r} - \sum_1^\infty {}_n (-1)^n \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1} \overline{\Phi}\frac{d\sigma}{r_{2n}} - \sum_1^\infty {}_n (-1)^n \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{r'_{2n-1}} + \\
&+ \int_{\sigma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{d\sigma}{r} - \int_{\sigma_2} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \zeta}\frac{d\sigma}{r_1} + \sum_0^\infty {}_n \left(\int_{\sigma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{d\sigma}{r_{4n+3}} - \int_{\sigma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{d\sigma}{r_{4n+5}} - \right. \\
&\qquad \left. - \int_{\sigma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{d\sigma}{r'_{4n+2}} + \int_{\sigma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{d\sigma}{r'_{4\,n+1}}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

3. Per determinare l'espressione analitica della funzione armonica la cui derivata normale acquista dati valori su σ_1 e σ_2, partiamo dalla formola (5)

che potremo scrivere

$$2\pi\Phi = -\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\sigma_1}\Phi\frac{d\sigma}{r} - \int\limits_{\sigma_1}\Phi\left(\sum_1^\infty{}_n\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_{2n}}\right)d\sigma - \int\limits_{\sigma_1}\Phi\left(\sum_1^\infty{}_n\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r'_{2n-1}}\right)d\sigma +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\sigma_2}\Phi\frac{d\sigma}{r} + \int\limits_{\sigma_2}\Phi\left(\sum_1^\infty{}_n\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r'_{2n}}\right)d\sigma + \int\limits_{\sigma_2}\Phi\left(\sum_1^\infty{}_n\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_{2n-1}}\right)d\sigma.$$

Nelle serie che compaiono sotto gli integrali non è lecito invertire il segno sommatorio col segno di derivazione poichè le serie $\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{r_{2n}}, \ldots$ sono divergenti. Notiamo però che, pel teorema di MITTAG-LEFFLER, esteso alle funzioni armoniche dal prof. APPELL (*), le serie:

$$\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{2nh}\right), \quad \sum_1^\infty{}_n\left(\frac{1}{r'_{2n-1}} - \frac{1}{2nh}\right),$$

$$\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{1}{r'_{2n}} - \frac{1}{2nh}\right), \quad \sum_1^\infty{}_n\left(\frac{1}{r_{2n-1}} - \frac{1}{2nh}\right)$$

sono convergenti assolutamente ed in egual grado tranne nei punti in cui si annulla qualche r, per cui, notando che nello spazio S non si annulla nessuna delle r che compaiono in queste serie, potremo scrivere

$$\sum_1^\infty{}_n\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_{2n}} = \sum_1^\infty{}_n\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{2nh}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{2nh}\right),$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned}2\pi\Phi = \frac{\partial}{\partial z}\Big\{ & -\int\limits_{\sigma_1}\Phi\frac{d\sigma}{r} - \sum_1^\infty{}_n\int\limits_{\sigma_1}\Phi\left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{2nh}\right)d\sigma - \\ & -\sum_1^\infty{}_n\int\limits_{\sigma_1}\Phi\left(\frac{1}{r'_{2n-1}} - \frac{1}{2nh}\right)d\sigma + \int\limits_{\sigma_2}\Phi\frac{d\sigma}{r} + \sum_1^\infty{}_n\int\limits_{\sigma_2}\Phi\left(\frac{1}{r'_{2n}} - \frac{1}{2nh}\right)d\sigma + \\ & + \sum_1^\infty{}_n\int\limits_{\sigma_1}\Phi\left(\frac{1}{r_{2n-1}} - \frac{1}{2nh}\right)d\sigma\Big\}.\end{aligned}\right\} \quad (5'')$$

Da questa formola si deduce che la funzione armonica e regolare

(*) *Acta Math.*, V. 4, p. 326. — Sur les fonctions de trois variables réelles...

in S

$$\left.\begin{aligned}&-\int_{\sigma_1}\Phi\frac{d\sigma}{r}-\sum_1^\infty{}_n\int_{\sigma_1}\Phi\left(\frac{1}{r_{2n}}-\frac{1}{2nh}\right)d\sigma-\sum_1^\infty{}_n\int_{\sigma_1}\Phi\left(\frac{1}{r'_{2n-1}}-\frac{1}{2nh}\right)d\sigma-\\&-\int_{\sigma_2}\Phi\frac{d\sigma}{r}-\sum_1^\infty{}_n\int_{\sigma_2}\Phi\left(\frac{1}{r'_{2n}}-\frac{1}{2nh}\right)d\sigma-\sum_1^\infty{}_n\int_{\sigma_2}\Phi\left(\frac{1}{r_{2n-1}}-\frac{1}{2nh}\right)d\sigma\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

è tale che la sua derivata normale acquista su σ_1 e σ_2 i valori dati $2\pi\Phi$.

La (10) mostra anche che una funzione armonica e regolare in S può sempre porsi sotto la forma della derivata rapporto a z di una funzione pure armonica e regolare in S.

4. Aggiungiamo ancora le considerazioni seguenti di cui faremo nel seguito uso costante. Ricordiamo cioè che una funzione qualunque, armonica e regolare nel campo $z > 0$ è rappresentabile per mezzo di una serie della forma

$$\sum{}_m\int_0^\infty e^{-\gamma z}\left[a_m(\gamma)\cos m\,\omega+b_m(\gamma)\,\text{sen}\,m\,\omega\right]J_m(\gamma\,\rho)\,d\,\gamma\ (*)\qquad(11)$$

assolutamente ed uniformemente convergente in quel campo, dove ρ, ω, z è un sistema di coordinate cilindriche; J_m la funzione di Bessel di prima specie e di ordine m; $a_m(\gamma)$, $b_m(\gamma)$ due funzioni di γ ed m un numero intero e positivo variabile da zero a $+\infty$. E viceversa, una serie qualunque come la (11) rappresenta una funzione armonica e regolare nel campo $z > 0$, che si annulla per $z = +\infty$. Abbiamo supposto che il campo sia quello determinato dalla disuguaglianza $z > 0$; ma è chiaro che lo stesso vale in un campo qualunque limitato da un piano.

Più generalmente, una funzione qualunque, armonica e regolare nel campo S, cioè $0 < z < h$, è rappresentabile per mezzo di una espressione della forma

$$\left.\begin{aligned}&\sum{}_m\int_0^\infty e^{-\gamma z}\left[a_m(\gamma)\cos m\,\omega+b_m(\gamma)\,\text{sen}\,m\,\omega\right]J_m(\gamma\,\rho)\,d\,\gamma+\\&+\sum{}_m\int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)}\left[\bar{a}_m(\gamma)\cos m\,\omega+\bar{b}_m(\gamma)\,\text{sen}\,m\,\omega\right]J_m(\gamma\,\rho)\,d\,\gamma\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

le due serie essendo assolutamente ed uniformemente convergenti in questo campo. E viceversa, come sopra.

(*) Heine, *Handb. der Kugelf.* 2.er B., S. 189.

Quest'ultimo risultato, può dedursi facilmente dalla (5) sviluppando i singoli termini secondo la formola (11) e sommando rispetto ad n.

Infine osserviamo che se una espressione come la (12) è identicamente nulla in S, le funzioni $a_m(\gamma)$, $b_m(\gamma)$; $a_m(\gamma)$, $b_m(\gamma)$ devono essere nulle.

5. *Caso in cui sui due piani limiti sono dati: u, v, w.* Supponiamo che i valori di u, v, w dati su σ sieno tali, naturalmente, che si possano applicare i risultati dei numeri precedenti e le formole (5) o (5') ed analoghe di (I^a). Chiamando allora U, V, W le funzioni armoniche e regolari in S che acquistano su σ, rispettivamente, i valori dati u, v, w, per le formole ultimamente citate, avremo:

$$\left.\begin{aligned}
u = U + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\Bigg\{ & z\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\frac{\theta}{r}\,d\sigma + \sum_1^\infty{}_n (2nh+z)\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\frac{\theta}{r_{2n}}\,d\sigma - \\
& - \sum_1^\infty{}_n (2nh-z)\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\frac{\theta}{r'_{2n-1}}\,d\sigma + (h-z)\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r}\,d\sigma + \\
& + \sum_1^\infty{}_n [(2n+1)h-z]\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r'_{2n}}\,d\sigma - \\
& - \sum_1^\infty{}_n [(2n-1)h+z]\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r_{2n-1}}\,d\sigma\Bigg\}, \\
v = V + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\Bigg\{ & z\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\frac{\theta}{r}\,d\sigma + \sum_1^\infty{}_n (2nh+z)\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\frac{\theta}{r_{2n}}\,d\sigma - \\
& - \sum_1^\infty{}_n (2nh-z)\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\frac{\theta}{r'_{2n-1}}\,d\sigma + (h-z)\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r}\,d\sigma + \\
& + \sum_1^\infty{}_n [(2n+1)h-z]\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r'_{2n}}\,d\sigma - \\
& - \sum_1^\infty{}_n [(2n-1)h+z]\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r_{2n-1}}\,d\sigma\Bigg\}, \\
w = W - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\theta + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}h\Bigg[& \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r}\,d\sigma + \\
& + \sum_1^\infty{}_n \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r'_{2n}}\,d\sigma + \sum_1^\infty{}_n \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\theta}{r_{2n-1}}\,d\sigma\Bigg].
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

E, se poniamo:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= \int_{\sigma_1} \frac{\theta}{r}\, d\sigma, \quad \varphi_n = \int_{\sigma_1} \frac{\theta}{r_{2n}}\, d\sigma, \quad \varphi_{-n} = \int_{\sigma_1} \frac{\theta}{r'_{2n-1}}\, d\sigma; \\ \varphi'_0 &= \int_{\sigma_2} \frac{\theta}{r}\, d\sigma, \quad \varphi'_n = \int_{\sigma_2} \frac{\theta}{r'_{2n}}\, d\sigma, \quad \varphi'_{-n} = \int_{\sigma_2} \frac{\theta}{r_{2n-1}}\, d\sigma,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

potremo anche scrivere più brevemente:

$$\left.\begin{aligned}u &= U + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left[(2nh+z)\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (2nh+h-z)\frac{\partial \varphi'_n}{\partial x}\right], \\ v &= V + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left[(2nh+z)\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + (2nh+h-z)\frac{\partial \varphi'_n}{\partial y}\right], \\ w &= W - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} z\theta + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu} h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\partial \varphi'_n}{\partial z}, \\ \theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\partial}{\partial z}(\varphi'_n - \varphi_n).\end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Il problema propostoci sarà, evidentemente, risoluto se riusciamo a determinare le funzioni φ in modo: 1.° che sia soddisfatta identicamente l'equazione

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{15}$$

in S; 2.° che, nella stessa regione S e su σ, le φ e le loro derivate prime sieno finite; 3.° che le φ stesse sieno armoniche e regolari in S; 4.° che, per $z = 0$, sia:

$$\varphi'_0 = \varphi'_{-1}, \quad \varphi_1 = \varphi_{-1}, \quad \varphi'_{-2} = \varphi'_1, \ldots, \quad \varphi_n = \varphi_{-n}, \quad \varphi'_{-n} = \varphi'_{n-1}, \ldots$$

mentre, per $z = h$, sia:

$$\varphi_0 = \varphi_1, \quad \varphi'_1 = \varphi'_{-1}, \quad \varphi_{-2} = \varphi_1, \ldots, \quad \varphi'_n = \varphi'_{-n}, \quad \varphi_{-n} = \varphi_{n-1}, \ldots;$$

5.° che, infine, le serie che compaiono nei secondi membri delle (13) sieno convergenti e derivabili almeno due volte in S.

Poniamo perciò, ipoteticamente:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= \sum{}_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (a_m \cos m\omega + b_m \operatorname{sen} m\omega) J_m(\gamma\rho)\, d\gamma, \\ \varphi'_0 &= \sum{}_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (a_m \cos m\omega + \bar{b}_m \operatorname{sen} m\omega) J_m(\gamma\rho)\, d\gamma\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

in cui a_m, b_m, a_m, b_m sono funzioni di γ da determinarsi. Ne viene in conseguenza:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_n &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(2nh+z)} (a_m \cos m\,\omega + b_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma, \\
\varphi_{-n} &= \sum_m \int_0^\infty e^{\gamma(2nh-z)} (a_m \cos m\,\omega + b_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma, \\
\varphi'_n &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(2nh+h-z)} (\bar{a}_m \cos m\,\omega + b_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma, \\
\varphi'_{-n} &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(2nh-h+z)} (\bar{a}_m \cos m\,\omega + b_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma.
\end{aligned}
\right\} \qquad (16')
$$

Con questi valori per le φ bisogna ora cercare di soddisfare all'equazione (15) la quale può scriversi

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\lambda + 3\,\mu}{4\,\pi\,\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\partial}{\partial z}(\varphi'_n - \varphi_n) + \\
&+ \frac{\lambda + \mu}{2\,\pi\,\mu}\, h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, n \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varphi_n + \varphi'_n) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (15')
$$

Il secondo membro di questa equazione, essendo una funzione armonica e regolare in S, si può in questa regione, rappresentare con una espressione della forma

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (\mathfrak{a}_m \cos m\,\omega + \mathfrak{b}_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma\ + \\
&+ \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\bar{\mathfrak{a}}_m \cos m\,\omega + \bar{\mathfrak{b}}_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma
\end{aligned}
\right\} \qquad (17)
$$

dove $\mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{b}_m$, $\bar{\mathfrak{a}}_m$, $\bar{\mathfrak{b}}_m$ sono funzioni di γ da ritenersi note. Sostituendo nella (15') i valori delle φ, φ' e di $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$ dati dalle (16), (16') e (17) ed eguagliando nei due membri i coefficienti di:

$$
e^{-\gamma z} \cos m\,\omega\, J_m(\gamma\,\rho), \quad e^{-\gamma z} \operatorname{sen} m\,\omega\, J_m(\gamma\,\rho), \quad e^{\gamma(h-z)} \cos m\,\omega\, J_m(\gamma\,\rho),
$$
$$
e^{-\gamma(h-z)} \operatorname{sen} m\,\omega\, J_m(\gamma\,\rho)
$$

si ottengono le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{a}_m &= \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu}\,\gamma\left[a_m\left(1+\sum_1^\infty{}_n\, e^{-2nh\gamma}\right)-\bar{a}_m\sum_1^\infty{}_n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right]+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{2\pi\mu}\,h\,\gamma^2\left[a_m\sum_1^\infty{}_n\, n\, e^{-2nh\gamma}-\bar{a}_m\sum_1^\infty{}_n\, n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right],\\
\mathfrak{b}_m &= \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu}\,\gamma\left[b_m\left(1+\sum_1^\infty{}_n\, e^{-2nh\gamma}\right)-\bar{b}_m\sum_1^\infty{}_n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right]+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{2\pi\mu}\,h\,\gamma^2\left[b_m\sum_1^\infty{}_n\, n\, e^{-2nh\gamma}-\bar{b}_m\sum_1^\infty{}_n\, n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right],\\
\bar{\mathfrak{a}}_m &= \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu}\,\gamma\left[\bar{a}_m\left(1+\sum_1^\infty{}_n\, e^{-2nh\gamma}\right)-a_m\sum_1^\infty{}_n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right]+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{2\pi\mu}\,h\,\gamma^2\left[\bar{a}_m\sum_1^\infty{}_n\, n\, e^{-2nh\gamma}-a_m\sum_1^\infty{}_n\, n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right],\\
\bar{\mathfrak{b}}_m &= \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu}\,\gamma\left[\bar{b}_m\left(1+\sum_1^\infty{}_n\, e^{-2nh\gamma}\right)-b_m\sum_1^\infty{}_n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right]+\\
&+\frac{\lambda+\mu}{2\pi\mu}\,h\,\gamma^2\left[\bar{b}_m\sum_1^\infty{}_n\, n\, e^{-2nh\gamma}-b_m\sum_1^\infty{}_n\, n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right],
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

donde successivamente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{4\pi\mu}{\gamma\, e^{h\gamma}}(1-e^{2h\gamma})^2\,\mathfrak{a}_m &= (\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)(a_m e^{h\gamma}-a_m)+\\
&+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma\, e^{h\gamma}(a_m-\bar{a}_m e^{h\gamma}),\\
-\frac{4\pi\mu}{\gamma\, e^{h\gamma}}(1-e^{2h\gamma})^2\,\bar{\mathfrak{a}}_m &= (\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)(a_m-a_m e^{h\gamma})+\\
&+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma\, e^{h\gamma}(a_m e^{h\gamma}-\bar{a}_m),
\end{aligned}\right\}\quad(18')$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\, a_m &= [(\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma]\,e^{h\gamma}\,\mathfrak{a}_m+\\
&+[(\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma\, e^{2h\gamma}]\,\mathfrak{a}_m,\\
\Delta\, \bar{a}_m &= [(\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma\, e^{2h\gamma}]\,\mathfrak{a}_m+\\
&+[(\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma]\,e^{h\gamma}\,\mathfrak{a}_m,\\
\Delta\, b_m &= [(\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma]\,e^{h\gamma}\,\mathfrak{b}_m+\\
&+[(\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma\, e^{2h\gamma}]\,\mathfrak{b}_m,\\
\Delta\, \bar{b}_m &= [(\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma\, e^{2h\gamma}]\,\mathfrak{b}_m+\\
&+[(\lambda+3\mu)(e^{2h\gamma}-1)+2(\lambda+\mu)\,h\,\gamma]\,e^{h\gamma}\,\mathfrak{b}_m,\\
\Delta &= \frac{\gamma\, e^{h\gamma}}{4\pi\mu\,(e^{2h\gamma}-1)}\left[(\lambda+3\mu)^2(e^{2h\gamma}-1)^2-4(\lambda+\mu)^2 h^2\gamma^2 e^{2h\gamma}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Le φ_0, φ'_0 e quindi anche tutte le altre φ costruite secondo le (16), (16') con questi valori delle funzioni a_m, b_m, $\overline{a}_m$, $\overline{b}_m$, sono convergenti assolutamente ed in egual grado nel campo S, in conseguenza della convergenza assoluta ed in egual grado nello stesso campo della serie (17), e di tale proprietà godono anche le serie $\sum_1^\infty \varphi_n$, $\sum_1^\infty \varphi_{-n}, \ldots$ e le altre che compaiono nel secondo membro delle (13), come si verifica facilmente. Se, inoltre, U, V, W sono finite, insieme alle derivate prime e seconde, anche su σ, di tali proprietà godranno anche le φ.

6. Con ciò il problema è risoluto. Vogliamo però ancora aggiungere gli sviluppi seguenti che servono a completare la rappresentazione analitica della soluzione. Supponiamo che in S sia:

$$\left.\begin{aligned}
U &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (\alpha_m \cos m\,\omega + \beta_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma + \\
&\quad + \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\overline{\alpha}_m \cos m\,\omega + \overline{\beta}_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma, \\
V &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (\alpha_m^{(1)} \cos m\,\omega + \beta_m^{(1)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma + \\
&\quad + \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\overline{\alpha}_m^{(1)} \cos m\,\omega + \overline{\beta}_m^{(1)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma, \\
W &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (\alpha_m^{(2)} \cos m\,\omega + \beta_m^{(2)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma + \\
&\quad + \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\overline{\alpha}_m^{(2)} \cos m\,\omega + \overline{\beta}_m^{(2)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Avremo allora, supponendo che sia $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho \operatorname{sen}\omega$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2}\cos\omega \int_0^\infty \gamma\, e^{-\gamma z}\, \alpha_0\, J_1(\gamma\rho)\, d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_m \int_0^\infty \gamma\, e^{-\gamma z} [(\alpha_{m+1} - \alpha_{m-1}) \cos m\,\omega + (\beta_{m+1} - \beta_{m-1}) \operatorname{sen} m\,\omega]\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma -$$

$$-\frac{1}{2}\cos\omega\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma(h-z)}\,\alpha_0 J_1(\gamma\rho)\,d\gamma +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_m\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma(h-z)}\left[(\bar\alpha_{m+1}-\bar\alpha_{m-1})\cos m\omega+(\beta_{m+1}-\beta_{m-1})\operatorname{sen} m\omega\right]J_m(\gamma\rho)\,d\gamma,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma z}\,\alpha_0^{(1)} J_1(\gamma\rho)\,d\gamma +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_m\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma z}\left[-(\alpha_{m+1}^{(1)}+\alpha_{m-1}^{(1)})\operatorname{sen} m\omega+(\beta_{m+1}^{(1)}+\beta_{m-1}^{(1)})\cos m\omega\right]J_m(\gamma\rho)\,d\gamma -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma(h-z)}\,\alpha_0^{(1)} J_1(\gamma\rho)\,d\gamma +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_m\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma(h-z)}\left[-(\bar\alpha_{m+1}^{(1)}+\bar\alpha_{m-1}^{(1)})\operatorname{sen} m\omega+(\bar\beta_{m+1}^{(1)}+\bar\beta_{m-1}^{(1)})\cos m\omega\right]J_m(\gamma\rho)\,d\gamma \;(*),$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}=-\sum_m\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma z}\left(\alpha_m^{(2)}\cos m\omega+\beta_m^{(2)}\operatorname{sen} m\omega\right)J_m(\gamma\rho)\,d\gamma +$$

$$+\sum_m\int_0^\infty \gamma e^{-\gamma(h-z)}\left(\bar\alpha_m^{(2)}\cos m\omega+\bar\beta_m^{(2)}\operatorname{sen} m\omega\right)J_m(\gamma\rho)\,d\gamma\,,$$

(*) Basta perciò osservare che:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\omega,\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\operatorname{sen}\omega,\quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho},\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\cos\omega}{\rho}$$

$$J'_0(\gamma\rho)=-J_1(\gamma\rho),\quad \frac{2\,m J_m(\gamma\rho)}{\gamma\rho}=J_{m-1}(\gamma\rho)+J_{m+1}(\gamma\rho),$$

$$2J'_m(\gamma\rho)=J_{m-1}(\gamma\rho)-J_{m+1}(\gamma\rho)$$

e che quindi:

$$\frac{\partial}{\partial x}J_0(\gamma\rho)=-\gamma J_1(\gamma\rho)\cos\omega,\quad \frac{\partial}{\partial y}J_0(\gamma\rho)=-\gamma J_1(\gamma\rho)\operatorname{sen}\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos m\omega\, J_m(\gamma\rho)\right]=\frac{\gamma}{2}\left[\cos(m-1)\omega\, J_{m-1}(\gamma\rho)-\cos(m+1)\omega\, J_{m+1}(\gamma\rho)\right];$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos m\omega\, J_m(\gamma\rho)\right]=-\frac{\gamma}{2}\left[\operatorname{sen}(m-1)\omega\, J_{m-1}(\gamma\rho)+\operatorname{sen}(m+1)\omega\, J_{m+1}(\gamma\rho)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{sen} m\omega\, J_m(\gamma\rho)\right]=\frac{\gamma}{2}\left[\operatorname{sen}(m-1)\omega\, J_{m-1}-\operatorname{sen}(m+1)\omega\, J_{m+1}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{sen} m\omega\, J_m(\gamma\rho)\right]=\frac{\gamma}{2}\left[\cos(m-1)\omega\, J_{m-1}+\cos(m+1)\omega\, J_{m+1}\right].$$

nelle cui sommatorie m varia sempre da zero a $+\infty$ ritenendo però nulle le β con indice zero e le α e β con indice -1.

Troviamo allora:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{a}_0 &= \frac{\gamma}{2}\,(\alpha_1 + \beta_1^{(1)} - 2\,\alpha_0^{(2)}),\\
\mathfrak{a}_1 &= \frac{\gamma}{2}\,(\alpha_2 \quad 2\,\alpha_0 + \beta_2^{(1)} + \beta_0^{(1)} - 2\,\alpha_1^{(2)}),\\
\mathfrak{b}_1 &= \frac{\gamma}{2}\,(\beta_2 - \beta_0 - \alpha_2^{(1)} - 2\,\alpha_0^{(1)} - 2\,\beta_1^{(2)}),\\
\mathfrak{a}_m &= \frac{\gamma}{2}\,(\alpha_{m+1} - \alpha_{m-1} + \beta_{m+1}^{(1)} + \beta_{m-1}^{(1)} - 2\,\alpha_m^{(2)}),\\
\mathfrak{b}_m &= \frac{\gamma}{2}\,(\beta_{m+1} - \beta_{m-1} - \alpha_{m+1}^{(1)} - \alpha_{m-1}^{(1)} - 2\,\beta_m^{(2)});
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

mentre le $\overline{\mathfrak{a}}_m$ e le $\overline{\mathfrak{b}}_m$ sono date dalle stesse formole purchè si aggiungono i tratti a tutte le α e a tutte le β e si cambino i segni agli ultimi termini.

Quando U, V, W sono dati sviluppati in serie nella forma (20), in S, e le funzioni a_m, b_m; $\overline{a}_m$, $\overline{b}_m$ s'intendono determinate per mezzo delle funzioni α e β che entrano in U, V, W, dalle (19) e (21), la soluzione del nostro problema può anche essere rappresentata dalle formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
u = U &+ \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty \gamma\, d\gamma\, \frac{2he^{2h\gamma}(e^{-\gamma z} - e^{\gamma z}) + z(e^{2h\gamma}-1)(e^{\gamma(2h-z)} + e^{\gamma z})}{(e^{2h\gamma}-1)^2} \Big\{ - a_0 \cos\omega\, J_1(\gamma\rho) +\\
&+ \sum_m [(a_{m+1} - a_{m-1}) \cos m\,\omega + (b_{m+1} - b_{m-1}) \operatorname{sen} m\,\omega]\, J_m(\gamma\rho) \Big\} +\\
&+ \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty \gamma\, e^{h\gamma}\, d\gamma\, \frac{2h(e^{\gamma z} - e^{\gamma(2h-z)}) + (h-z)(e^{2h\gamma}-1)(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z})}{(e^{2h\gamma}-1)^2} \Big\{ - a_0 \cos\omega\, J_1(\gamma\rho) +\\
&+ \sum_m [(a_{m+1} - a_{m-1}) \cos m\,\omega + (\overline{b}_{m+1} - \overline{b}_{m-1}) \operatorname{sen} m\,\omega]\, J_m(\gamma\rho) \Big\},
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
v = V &+ \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty \gamma\, d\gamma\, \frac{2he^{2h\gamma}(e^{-\gamma z}-e^{\gamma z})+z(e^{2h\gamma}-1)(e^{\gamma(2h-z)}+e^{\gamma z})}{(e^{2h\gamma}-1)^2}\Big\{ -a_0 \operatorname{sen}\omega\, J_1(\gamma\rho) + \\
&+ \sum_m \left[(b_{m+1}+b_{m-1})\cos m\omega - (a_{m+1}+a_{m-1})\operatorname{sen} m\omega\right] J_m(\gamma\rho)\Big\} + \\
&+ \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty \gamma\, e^{h\gamma}\, d\gamma\, \frac{2h(e^{\gamma z}-e^{\gamma(2h-z)})+(h-z)(e^{2h\gamma}-1)(e^{\gamma z}+e^{-\gamma z})}{(e^{2h\gamma}-1)^2}\Big\{ -\bar{a}_0 \operatorname{sen}\omega\, J_1(\gamma\rho) + \\
&+ \sum_m \left[(\bar{b}_{m+1}+\bar{b}_{m-1})\cos m\omega - (\bar{a}_{m+1}+\bar{a}_{m-1})\operatorname{sen} m\omega\right] J_m(\gamma\rho)\Big\}, \\
w = W &- \frac{\lambda+\mu}{2\mu} z\,\theta + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu} h \sum_m \int_0^\infty \frac{\gamma\, e^{h\gamma}(e^{\gamma z}-e^{-\gamma z})}{e^{2h\gamma}-1}(\bar{a}_m\cos m\omega + \\
&+ \bar{b}_m \operatorname{sen} m\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma, \\
\theta = &\frac{1}{2\pi}\sum_m \int_0^\infty \frac{\gamma\,(e^{\gamma(2h-z)}-e^{\gamma z})}{e^{2h\gamma}-1}(a_m\cos m\omega + b_m \operatorname{sen} m\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\sum_m \int_0^\infty \gamma\,\frac{e^{h\gamma}(e^{\gamma z}-e^{-\gamma z})}{e^{2h\gamma}-1}(\bar{a}_m\cos m\omega + \bar{b}_m \operatorname{sen} m\omega)\, J_m(\gamma\rho)\, d\gamma,
\end{aligned}
\right\} \quad (22)
$$

nelle quali formole bisogna supporre $b_0 = \bar{b}_0 = a_{-1} = \bar{a}_{-1} = b_{-1} = \bar{b}_{-1} = 0$.

7. *Caso in cui sui due piani limiti sono dati: L, M, N.* Questo nuovo problema si potrebbe facilmente risolverlo direttamente partendo dalle (8) della (I.ª) e facendo uso della formola che dà la funzione armonica e regolare in S per mezzo dei valori che la sua derivata normale acquista su σ che è stata costruita al n.° 3; però è forse più conveniente farlo dipendere dal problema precedente coll'osservare che le equazioni indefinite, derivate rapporto a z, ci dànno:

$$\Delta^2 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \ldots \qquad (23)$$

Scrivendo, per queste equazioni, le formole analoghe alle (13) e notando che le funzioni armoniche e regolari in S le quali su σ acquistano i valori $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial v}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial w}{\partial \zeta}$, per le condizioni in superficie, cioè:

$$\text{su } \sigma_1: \qquad L = -2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \varpi_2\right), \quad M = -2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \varpi_1\right),$$
$$N = -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

$$\text{e su } \sigma_2: \quad L = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \varpi_2\right), \quad M = 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \varpi_1\right), \quad N = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

sono identiche, rispettivamente a:

$$\frac{\mathfrak{L}}{2\mu} + \varpi_2, \quad \frac{\mathfrak{M}}{2\mu} - \varpi_1, \quad \frac{\mathfrak{N}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\theta,$$

dove $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ indicano le funzioni armoniche e regolari in S le quali acquistano su σ_1 i valori di L, M, N dati su questo piano col segno cambiato, e su σ_2 i valori di L, M, N dati su σ_2 col proprio segno, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} = {} & \frac{\mathfrak{L}}{2\mu} + \varpi_2 + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\Bigg\{ z\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r} + \sum_1^\infty{}_n(2nh+z)\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r_{2n}} - \\
& - \sum_1^\infty{}_n(2nh-z)\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r'_{2n-1}} + (h-z)\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r} + \\
& + \sum_1^\infty{}_n[(2n+1)h-z]\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r'_{2n}} - \\
& - \sum_1^\infty{}_n[(2n-1)h+z]\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r_{2n-1}}\Bigg\}, \\
\frac{\partial v}{\partial z} = {} & \frac{\mathfrak{M}}{2\mu} - \varpi_1 + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\Bigg\{ z\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r} + \sum_1^\infty{}_n(2nh+z)\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r_{2n}} - \\
& - \sum_1^\infty{}_n(2nh-z)\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r'_{2n-1}} + (h-z)\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r} + \\
& + \sum_1^\infty{}_n[(2n+1)h-z]\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r'_{2n}} - \\
& - \sum_1^\infty{}_n[(2n-1)h+z]\frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r_{2n-1}}\Bigg\}, \\
\frac{\partial w}{\partial z} = {} & \frac{\mathfrak{N}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\theta - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}h\Bigg\{\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r} + \\
& + \sum_1^\infty{}_n\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r'_{2n}} + \sum_1^\infty{}_n\frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_2}\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r_{2n-1}}\Bigg\}.
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Chiamando ψ_0, ψ'_0, ψ_n, ψ_{-n}, ψ'_n, ψ'_{-n} le espressioni analoghe alle φ del problema precedente, quando, nei rispettivi integrali, invece di θ, è posto $\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}$, le formole (24) possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\mathfrak{L}}{2\mu} + \varpi_2 + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[(2nh+z)\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + (2nh+h-z)\frac{\partial \psi'_n}{\partial x}\right],\\
\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\mathfrak{M}}{2\mu} - \varpi_1 + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[(2nh+z)\frac{\partial \psi_n}{\partial y} + (2nh+h-z)\frac{\partial \psi'_n}{\partial y}\right],\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\mathfrak{N}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\theta - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} z\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu} h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\partial \psi'_n}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Il problema è ridotto a determinare le funzioni incognite ϖ_1, ϖ_2 e le ψ in modo che sia identicamente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varpi_1}{\partial z} &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial y} -\\
&- \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(2nh\frac{\partial \psi_n}{\partial z} + \psi_n\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2nh\frac{\partial \psi'_n}{\partial z} - \psi'_n\right)\right],\\
\frac{\partial \varpi_2}{\partial z} &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}\right) + \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial x} +\\
&+ \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2nh\frac{\partial \psi_n}{\partial z} + \psi_n\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2nh\frac{\partial \psi'_n}{\partial z} - \psi'_n\right)\right].\\
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right) - \frac{h}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, n\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\psi_n + \psi'_n)
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

ed, inoltre, che le ψ soddisfino alle stesse condizioni 2.°, 3.°, 4.° e 5.° a cui soddisfano le φ del problema precedente.

Delle equazioni (25) soltanto la terza è una condizione fra le ψ. Quando queste funzioni sono determinate, le prime due delle (25) ci determinano, con quadrature, ϖ_1 e ϖ_2, ed u, v, w restano anch'esse determinate dalle (24) o (24′) per mezzo di quadrature.

Notando che

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\partial}{\partial z}(\psi'_n - \psi_n), \quad (26)$$

l'ultima delle (25) si può scrivere

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\frac{\partial}{\partial z}(\psi'_n - \psi_n) + 2h\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, n\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\psi_n + \psi'_n) = \frac{2\pi}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right) \quad (25')$$

Se ora poniamo:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (\alpha_m \cos m\,\omega + \beta_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma \,+ \\
&+ \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\bar\alpha_m \cos m\,\omega + \bar\beta_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma, \\
\mathfrak{M} &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (\alpha_m^{(1)} \cos m\,\omega + \beta_m^{(1)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma \,+ \\
&+ \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\bar\alpha_m^{(1)} \cos m\,\omega + \bar\beta_m^{(1)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma, \\
\mathfrak{N} &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (\alpha_m^{(2)} \cos m\,\omega + \beta_m^{(2)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma \,+ \\
&+ \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\bar\alpha_m^{(2)} \cos m\,\omega + \bar\beta_m^{(2)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma,
\end{aligned}
\right\} \quad (27)
$$

si troverà

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (\mathfrak{a}_m \cos m\,\omega + \mathfrak{b}_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma \,+ \\
&+ \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\bar{\mathfrak{a}}_m \cos m\,\omega + \bar{\mathfrak{b}}_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma
\end{aligned}
\right\} \quad (28)
$$

le funzioni $\mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{b}_m$; $\bar{\mathfrak{a}}_m$, $\bar{\mathfrak{b}}_m$ di γ essendo espresse per mezzo delle funzioni α e β, dalle (21). Se poniamo ancora, ipoteticamente:

$$
\left.
\begin{aligned}
\psi_0 &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma z} (a_m \cos m\,\omega + b_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma, \\
\psi'_0 &= \sum_m \int_0^\infty e^{-\gamma(h-z)} (\bar a_m \cos m\,\omega + \bar b_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma \ (*),
\end{aligned}
\right\} \quad (29)
$$

(*) Abbiamo indicato le funzioni indeterminate di γ che entrano in $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ed in ψ_0, ψ'_0, con lo stesso nome col quale abbiamo chiamato le funzioni analoghe che entrano in U, V, W ed in φ_0, φ'_0, nel problema precedente, per semplicità e perchè non c'è luogo ad alcun equivoco.

le altre ψ saranno determinate, come le corrispondenti φ, dalle (16'). Sostituendo allora, nella (25'), per le ψ_0, ψ'_0 le espressioni (29), le analoghe espressioni per le altre ψ e, per $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}$, l'espressione (28) ed uguagliando, da una parte e dall'altra, i coefficienti di:

$$e^{-\gamma z} \cos m\, \omega\, J_m(\gamma \rho), \quad e^{-\gamma z} \operatorname{sen} m\, \omega\, J_m(\gamma \rho),$$
$$e^{-\gamma(h-z)} \cos m\, \omega\, J_m(\gamma \rho), \quad e^{-\gamma(h-z)} \operatorname{sen} m\, \omega\, J_m(\gamma \rho),$$

si trovano le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\lambda+\mu}\mathfrak{a}_m &= \gamma\left[a_m\left(1+\sum_1^\infty{}_n e^{-2nh\gamma}\right) - \bar{a}_m \sum_1^\infty{}_n e^{-(2n-1)h\gamma}\right] + \\
&\quad + 2h\gamma^2\left[a_m \sum_1^\infty{}_n n\, e^{-2nh\gamma} - \bar{a}_m \sum_1^\infty{}_n n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right], \\
\frac{2\pi}{\lambda+\mu}\mathfrak{b}_m &= \gamma\left[b_m\left(1+\sum_1^\infty{}_n e^{-2nh\gamma}\right) - b_m \sum_1^\infty{}_n e^{-(2n-1)h\gamma}\right] + \\
&\quad + 2h\gamma^2\left[b_m \sum_1^\infty{}_n n\, e^{-2nh\gamma} - b_m \sum_1^\infty{}_n n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right], \\
\frac{2\pi}{\lambda+\mu}\bar{\mathfrak{a}}_m &= \gamma\left[\bar{a}_m\left(1+\sum_1^\infty{}_n e^{-2nh\gamma}\right) - a_m \sum_1^\infty{}_n e^{-(2n-1)h\gamma}\right] + \\
&\quad + 2h\gamma^2\left[a_m \sum_1^\infty{}_n n\, e^{-2nh\gamma} - a_m \sum_1^\infty{}_n n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right], \\
\frac{2\pi}{\lambda+\mu}\mathfrak{b}_m &= \gamma\left[b_m\left(1+\sum_1^\infty{}_n e^{-2nh\gamma}\right) - b_m \sum_1^\infty{}_n e^{-(2n-1)h\gamma}\right] + \\
&\quad + 2h\gamma^2\left[b_m \sum_1^\infty{}_n n\, e^{-2nh\gamma} - b_m \sum_1^\infty{}_n n\, e^{-(2n-1)h\gamma}\right],
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\, a_m &= (e^{2h\gamma} + 2h\gamma - 1)\, e^{h\gamma}\, \mathfrak{a}_m + [e^{2h\gamma}(2h\gamma+1) - 1]\, \mathfrak{a}_m, \\
\Delta\, a_m &= [e^{2h\gamma}(2h\gamma+1) - 1]\, \mathfrak{a}_m + (e^{2h\gamma} + 2h\gamma - 1)\, e^{h\gamma}\, \mathfrak{a}_m, \\
\Delta\, b_m &= (e^{2h\gamma} + 2h\gamma - 1)\, e^{h\gamma}\, \mathfrak{b}_m + [e^{2h\gamma}(2h\gamma+1) - 1]\, \mathfrak{b}_m, \\
\Delta\, b_m &= [e^{2h\gamma}(2h\gamma+1) - 1]\, \mathfrak{b}_m + (e^{2h\gamma} + 2h\gamma - 1)\, e^{h\gamma}\, \mathfrak{b}_m, \\
\Delta &= \frac{(\lambda+\mu)\gamma\, e^{h\gamma}}{2\pi(e^{2h\gamma}-1)}\left[(e^{2h\gamma}-1)^2 - 4h^2\gamma^2 e^{2h\gamma}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (30')$$

Il problema è così risoluto, salvo ad eseguire delle quadrature, e la verifica della soluzione si rende agevole, tenendo conto di quello che è stato detto pel problema precedente.

8. Per completare la rappresentazioue analitica della soluzione, poniamo:

$$
\left.
\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{L}} &= \sum_m \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma} (\alpha_m \cos m\,\omega + \beta_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\gamma + \\
&\qquad + \sum_m \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma(h-z)}}{\gamma} (\overline{\alpha}_m \cos m\,\omega + \overline{\beta}_m \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\gamma, \\
\overline{\mathfrak{M}} &= -\sum_m \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma} (\alpha_m^{(1)} \cos m\,\omega + \beta_m^{(1)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\gamma + \\
&\qquad + \sum_m \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma(h-z)}}{\gamma} (\alpha_m^{(1)} \cos m\,\omega + \beta_m^{(1)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\gamma, \\
\overline{\mathfrak{N}} &= -\sum_m \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma} (\alpha_m^{(2)} \cos m\,\omega + \beta_m^{(2)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\gamma + \\
&\qquad + \sum_m \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma(h-z)}}{\gamma} (\alpha_m^{(2)} \cos m\,\omega + \overline{\beta}_m^{(2)} \operatorname{sen} m\,\omega)\, J_m(\gamma\,\rho)\, d\gamma,
\end{aligned}
\right\} \tag{31}
$$

nelle quali formole s'intende che sia convenientemente modificato il termine corrispondente ad $m = 0$, affinchè l'integrale sia finito (*). Similmente, indichiamo con una lettera con un tratto, o con due tratti, sopra, ogni funzione armonica e regolare in S la cui derivata rapporto a z, o la cui derivata seconda rapporto a z, è la funzione armonica e regolare in S rappresentata

(*) Per costruire, senza equivoco, per es., l'espressione di $\overline{\mathfrak{L}}$, si può osservare che $\overline{\mathfrak{L}}$ rappresenta la funzione armonica in S la cui derivata normale acquista su σ i valori L e si può quindi far uso della formola (10), in cui si sia posto:

$$\int_{\sigma_1} L \left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{2\,n\,h}\right) d\,\sigma = \int_{\sigma_1} L \left(\frac{1}{r_{2n}} - \int_0^\infty e^{-2nh\gamma}\, d\,\gamma\right) d\,\sigma\,\ldots$$

Basta poi sviluppare $\frac{1}{r_{2n}}$ per funzioni di Bessel come in Heine (luogo citato) e sommare rispetto ad n.

dalla stessa lettera senza tratti. Avremo così:

$$
\left.
\begin{aligned}
u &= \frac{\overline{\mathfrak{L}}}{2\mu} + \overline{\varpi}_2 + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\Big[(2nh+z)\frac{\partial\overline{\psi}_n}{\partial x} + \\
&\qquad + (2nh+h-z)\frac{\partial\overline{\psi}'_n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(\psi_n-\psi'_n)\Big],\\
v &= \frac{\overline{\mathfrak{M}}}{2\mu} - \varpi_1 + \frac{\lambda+\mu}{2\pi\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\Big[(2nh+z)\frac{\partial\overline{\psi}_n}{\partial y} + \\
&\qquad + (2nh+h-z)\frac{\partial\overline{\psi}'_n}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(\psi_n \quad \psi'_n)\Big],\\
w &= \frac{\overline{\mathfrak{N}}}{2\mu} + \frac{1}{2}\overline{\theta} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\theta + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}h\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\psi'_n, \; (*)
\end{aligned}
\right\} \quad (24'')
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\varpi_1 &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}}{\partial y} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} - \\
&- \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[\frac{\partial}{\partial y}(2nh\psi_n+\overline{\psi}_n) + \frac{\partial}{\partial y}(2nh\psi'_n-\psi'_n)\right],\\
\varpi_2 &= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{L}}}{\partial z} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}}{\partial x}\right) + \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x} + \\
&+ \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[\frac{\partial}{\partial x}(2nh\psi_n+\overline{\psi}_n) + \frac{\partial}{\partial x}(2nh\psi'_n-\psi_n)\right],\\
\theta &= \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{L}}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}}{\partial z}\right) - \\
&- \frac{h}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n n\frac{\partial}{\partial z}(\psi_n+\psi'_n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(\psi'_n-\psi_n).
\end{aligned}
\right\} \quad (25')
$$

Queste formole, infine, sostituendo per le ψ le espressioni (29) ed analoghe ed eseguendo la sommazione rispetto ad n, possono porsi sotto la forma

---

(*) Se le ψ_n, ψ'_n sono rappresentati da integrali estesi a σ_1, o σ_2, bisogna intendere che, in queste formole, sia

$$\psi_n = \int_{\sigma_1}\theta\left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{2nh}\right)d\sigma, \quad \psi_{-n} = \int_{\sigma_2}\theta\left(\frac{1}{r'_{2n-1}} - \frac{1}{2nh}\right)d\sigma\ldots$$

seguente:

$$u = \frac{\overline{\mathfrak{L}}}{2\mu} + \overline{\varpi}_2 -$$

$$- \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty d\gamma \frac{2h\gamma e^{2h\gamma}(e^{\gamma z}+e^{-\gamma z})+(e^{2h\gamma}-1)[e^{\gamma(2h-z)}+e^{\gamma z}+z\gamma(e^{\gamma(2h-z)}-e^{\gamma z})]}{\gamma(e^{2h\gamma}-1)^2}\Big\{-a_0\cos\omega J_1(\gamma\rho)+$$

$$+\sum\nolimits_m [(a_{m+1}-a_{m-1})\cos m\omega + (b_{m+1}-b_{m-1})\operatorname{sen} m\omega] J_m(\gamma\rho)\Big\} +$$

$$+ \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty e^{h\gamma} d\gamma \frac{2h\gamma(e^{\gamma z}+e^{\gamma(2h-z)})+(e^{2h\gamma}-1)[e^{\gamma z}+e^{-\gamma z}+(h-z)\gamma(e^{\gamma z}-e^{-\gamma z})]}{\gamma(e^{2h\gamma}-1)^2}\Big\{-a_0\cos\omega J_1(\gamma\rho)+$$

$$+\sum\nolimits_m [(\overline{a}_{m+1}-\overline{a}_{m+1})\cos m\omega + (\overline{b}_{m+1}-b_m)\operatorname{sen} m\omega) J_m(\gamma\rho)\Big\},$$

$$v = \frac{\overline{\mathfrak{M}}}{2\mu} - \overline{\varpi}_1 - \qquad (24$$

$$- \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty d\gamma \frac{2h\gamma e^{2h\gamma}(e^{\gamma z}+e^{-\gamma z})+(e^{2h\gamma}-1)[e^{\gamma(2h-z)}+e^{\gamma z}+z\gamma(e^{\gamma(2h-z)}-e^{\gamma z})]}{\gamma(e^{2h\gamma}-1)^2}\Big\{-a_0\operatorname{sen}\omega J_1(\gamma\rho)+$$

$$+\sum\nolimits_m [(b_{m+1}+b_{m-1})\cos m\omega - (a_{m+1}+a_{m-1})\operatorname{sen} m\omega] J_m(\gamma\rho)\Big\} -$$

$$+ \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty e^{h\gamma} d\gamma \frac{2h\gamma(e^{\gamma z}+e^{\gamma(2h-z)})+(e^{2h\gamma}-1)[e^{\gamma z}+e^{-\gamma z}+(h-z)\gamma(e^{\gamma z}-e^{-\gamma z})]}{\gamma(e^{2h\gamma}-1)^2}\Big\{-a_0\operatorname{sen}\omega J_1(\gamma\rho)+$$

$$+\sum\nolimits_m [(\overline{b}_{m+1}+\overline{b}_{m-1})\cos m\omega - (\overline{a}_{m+1}+\overline{a}_{m-1})\operatorname{sen} m\omega] J_m(\gamma\rho)\Big\},$$

$$w = \frac{\overline{\mathfrak{N}}}{2\mu} + \frac{1}{2}\theta - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} z\vartheta +$$

$$+ \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu} h \sum\nolimits_m \int_0^\infty e^{h\gamma}\frac{e^{\gamma z}+e^{-\gamma z}}{e^{2h\gamma}-1}(\overline{a}_m\cos m\omega + b_m\operatorname{sen} m\omega) J_m(\gamma\rho)\, d\gamma.$$

$$\varpi_1 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}}{\partial y} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} -$$

$$- \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty d\gamma \frac{2h\gamma e^{2h\gamma}(e^{-\gamma z}-e^{\gamma z})+(e^{2h\gamma}-1)(e^{\gamma z}-e^{\gamma(2h-z)})}{\gamma(e^{2h\gamma}-1)^2}\Big\{-a_0\operatorname{sen}\omega J_1(\gamma\rho)+ \qquad (25'')$$

$$+\sum\nolimits_m [(b_{m+1}+b_{m-1})\cos m\omega - (a_{m+1}+a_{m-1})\operatorname{sen} m\omega] J_m(\gamma\rho)\Big\} -$$

$$-\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty e^{h\gamma}\,d\gamma\,\frac{2\,h\,\gamma\,e^{h\gamma}\left(e^{-\gamma(h-z)}-e^{\gamma(h-z)}\right)+\left(e^{2h\gamma}-1\right)\left(e^{-\gamma z}-e^{\gamma z}\right)}{\gamma\left(e^{2h\gamma}-1\right)^2}\Big\{-\bar{a}_0\operatorname{sen}\omega\,J_1(\gamma\rho)+$$

$$+\sum_m\left[\left(\bar{b}_{m+1}+b_{m-1}\right)\cos m\,\omega-\left(\bar{a}_{m+1}+\bar{a}_{m-1}\right)\operatorname{sen} m\,\omega\right]J_m(\gamma\rho)\Big\},$$

$$\varpi_2=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{L}}}{\partial z}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{N}}}{\partial x}\right)+\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}+$$

$$+\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty d\gamma\,\frac{2\,h\,\gamma\,e^{2h\gamma}\left(e^{-\gamma z}-e^{\gamma z}\right)+\left(e^{2h\gamma}-1\right)\left(e^{\gamma z}-e^{\gamma(2h-z)}\right)}{\gamma\left(e^{2h\gamma}-1\right)^2}\Big\{-a_0\cos\omega\,J_1(\gamma\rho)+$$

$$+\sum_m\left[\left(a_{m+1}-a_{m-1}\right)\cos m\,\omega+\left(b_{m+1}-b_{m-1}\right)\operatorname{sen} m\,\omega\right]J_m(\gamma\rho)\Big\}+ \qquad (25'')$$

$$+\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_0^\infty e^{h\gamma}\,d\gamma\,\frac{2\,h\,\gamma\,e^{h\gamma}\left(e^{-\gamma(h-z)}-e^{\gamma(h-z)}\right)+\left(e^{2h\gamma}-1\right)\left(e^{-\gamma z}-e^{\gamma z}\right)}{\gamma\left(e^{2h\gamma}-1\right)^2}\Big\{-(a_0\operatorname{sen}\omega\,J_1(\gamma\rho)+$$

$$+\sum_m\left[\left(\bar{a}_{m+1}-a_{m-1}\right)\cos m\,\omega+\left(b_{m+1}-b_{m-1}\right)\operatorname{sen} m\,\omega\right]J_m(\gamma\rho)\Big\},$$

$$\vartheta=-\frac{1}{2\pi}\sum_m\int_0^\infty\frac{e^{\gamma(2h-z)}+e^{\gamma z}}{e^{2h\gamma}-1}\left(a_m\cos m\,\omega+b_m\operatorname{sen} m\,\omega\right)J_m(\gamma\rho)\,d\gamma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_m\int_0^\infty\frac{e^{h\gamma}\left(e^{\gamma z}+e^{-\gamma z}\right)}{e^{2h\gamma}-1}\left(a_m\cos m\,\omega+b_m\operatorname{sen} m\,\omega\right)J_m(\gamma\rho)\,d\gamma\ (*),$$

nelle quali formole bisogna ancora supporre $b_0=\bar{b}_0=a_{-1}=\bar{a}_{-1}=b_{-1}=\bar{b}_{-1}=0$.

8. *Casi in cui sui due piani limiti sono date altre condizioni.* Con metodi analoghi ai precedenti si possono facilmente risolvere tutti gli altri problemi in cui su σ sono dati parte degli spostamenti e parte delle tensioni. Fra questi problemi vi sono i quattro in cui tanto su σ_1 che su σ_2 sono dati: 1.° u, v, N; 2.° L, v, w, ovvero u, M, w; 3.° u, M, N, ovvero L, v, N; 4.° L, M, w. Per ottenere la soluzione di essi basta combinare in modo opportuno le (13), o (13'), derivate rapporto a z, e le (24), o (24'), e tener presente che date φ_0 e φ'_0 sviluppate in serie, come dalle (16), gli sviluppi in

(*) In queste formole bisogna tener presente che le a_m, b_m, $\bar{a}_m$, $\bar{b}_m$, hanno un fattore γ.

serie analoghi di ψ_0 e ψ'_0 sono:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_0 &= \sum_m \int_0^\infty \frac{\gamma\, e^{-\gamma z}}{e^{2h\gamma} - 1} \Big\{ [-(e^{2h\gamma} + 1)\, a_m + 2\, e^{h\gamma}\, a_m] \cos m\,\omega \; + \\
&\qquad + [-(e^{2h\gamma} + 1)\, b_m + 2\, e^{h\gamma}\, b_m] \operatorname{sen} m\,\omega \Big\} J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma, \\
\psi'_0 &= \sum_m \int_0^\infty \frac{\gamma\, e^{-\gamma(h-z)}}{e^{2h\gamma} - 1} \Big\{ [-2\, e^{h\gamma}\, a_m + (e^{2h\gamma} + 1)\, a_m] \cos m\,\omega \; + \\
&\qquad + [-2\, e^{h\gamma}\, b_m + (e^{2h\gamma} + 1)\, \bar{b}_m) \operatorname{sen} m\,\omega \Big\} J_m(\gamma\,\rho)\, d\,\gamma,
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Questi valori di ψ_0 e ψ'_0 si esprimono facilmente con serie di derivate delle φ_0 rapporto a z e possono ottenersi eguagliando i coefficienti nelle due parti dell'eguaglianza

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varphi'_n - \varphi_n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\partial}{\partial z} (\psi'_n - \psi_n).$$

Oltre ai quattro problemi precedenti, altri venti problemi si possono risolvere con uguale facilità, e cioè quelli in cui su uno dei piani, p. es. su σ_1, sono dati: u, v, w, o L, M, N, ovvero una delle altre sei combinazioni sopra enumerate, mentre su σ_2 sono date altre condizioni, prese sempre fra queste combinazioni, ma non identiche a quelle date su σ_1. Per risolvere questi altri problemi bisogna anche servirsi della formola che dà la funzione armonica in S per mezzo dei valori che questa funzione acquista su uno dei piani e dei valori che la sua derivata normale acquista sull'altro piano, e della funzione di Green corrispondente, di cui abbiamo discorso al n.º 2.

Fra tutti questi problemi sono degni di speciale menzione i tre in cui su ognuno dei piani sia data la componente normale della tensione e le componenti tangenziali degli spostamenti, o viceversa, perchè per la loro soluzione, non è necessario ricorrere a sviluppi in serie di funzioni speciali. Servendoci, infatti, di una proprietà delle equazioni della elasticità, rilevata dal prof. Somigliana (*), si possono costruire, partendo dalle soluzioni dei problemi analoghi, date alla pag. 13 di (I.ª), e relative al caso in cui il corpo

(*) Sul principio delle immagini di Lord Kelwin e le equazioni dell'Elasticità. *Rend. dell'Acc. dei Lincei.* V. XI, 1.º sem., s. 5.ª, fasc. 4.º, elastico è limitato da un solo piano, infinite soluzioni del problema dell'elasticità, con riflessioni successive, nel senso del prof. Somigliana, rispetto ai piani σ_1 e σ_2, e con queste infinite soluzioni si possono, con metodo alternato, costruire le soluzioni dei nostri problemi.

II. Problemi in cui il corpo elastico è limitato da due sfere concentriche.

1. *Funzione di* Green *e funzione armonica.* Su questo notissimo argomento diremo quanto basta per procedere sicuramente nei nostri calcoli. Supponiamo che le due sfere, limitanti il corpo elastico, abbiano per centro comune l'origine delle coordinate, e indichiamo con σ_1 e σ_2 le loro superficie, con R_1, R_2 i loro raggi rispettivi, e sia $R_1 < R_2$; mentre indichiamo sempre con σ l'insieme di σ_1 e σ_2 e con S la porzione di spazio da esse limitato.

Se $A \equiv (x, y, z)$ è un punto interno ad S e (ξ, η, ζ) un altro punto qualunque di S, poniamo:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$l \rho \cos \omega = x \xi + y \eta + z \zeta, \quad r = \sqrt{l^2 + \rho^2 - 2 l \rho \cos \omega}$$

che sono le notazioni già altra volta adottate. Insieme al punto A, consideriamo la serie infinita di punti: $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ che si ottengono prendendo successivamente i reciproci di A prima rispetto a σ_1 e poi rispetto a σ_2 e che cadranno alternativamente all'interno di σ_1 ed all'esterno di σ_2. Similmente, consideriamo la serie infinita di punti: $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, \ldots$ che si ottengono prendendo successivamente i reciproci di A prima rispetto a σ_2 e poi rispetto a σ_1 e che cadranno alternativamente all'esterno di σ_2 e all'interno di σ_1. Tutti questi punti, com'è noto, sono situati sul raggio vettore che va al punto A. Chiamiamo poi l_i ed r_i le distanze di A_i dall'origine e dal punto (ξ, η, ζ) e con l'_i, r'_i le distanze di A'_i dagli stessi due punti.

Avremo evidentemente:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{R_1^2}{l}, \; l_2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 l, \ldots, \; l_{2n} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} l, \; l_{2n+1} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} \frac{R_1^2}{l}, \ldots \\ l'_1 &= \frac{R_2^2}{l}, \; l'_2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 l, \ldots, \; l'_{2n} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} l, \; l'_{2n+1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \frac{R_2^2}{l}, \ldots \\ r_i &= \sqrt{\rho^2 + l_i^2 - 2\, l_i \rho \cos\omega}, \quad r'_i = \sqrt{l'^2_i + \rho^2 - 2\, l'_i \rho \cos\omega}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Per note proprietà dell'inversione, quando il punto (ξ, η, ζ) è su σ_1, si ha:

$$\frac{1}{r} = \frac{R_1}{l}\frac{1}{r_1}, \ldots, \quad \frac{1}{r_{2n}} = \frac{R_1}{l_{2n}}\frac{1}{r_{2n+1}}, \ldots;$$

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{R_1}{l'_1}\frac{1}{r'_2}, \ldots, \quad \frac{1}{r'_{2n-1}} = \frac{R_1}{l'_{2n-1}}\frac{1}{r'_{2n}}, \ldots;$$

mentre, se il punto (ξ, η, ζ) si trova su σ_2, si ha:

$$\frac{1}{r} = \frac{R_2}{l}\frac{1}{r'_1}, \ldots, \quad \frac{1}{r'_{2n}} = \frac{R_2}{l'_{2n}}\frac{1}{r'_{2n+1}}, \ldots;$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{R_2}{l_1}\frac{1}{r_2}, \ldots, \quad \frac{1}{r_{2n-1}} = \frac{R_2}{l_{2n-1}}\frac{1}{r_{2n}}, \ldots$$

Se poi, scelto comunque il punto (ξ, η, ζ) in S, è A che cade su σ_1 e quindi $l = R_1$, si ha:

$$l = l_1, \quad l_2 = l'_1, \ldots, \quad l_i = l'_{i-1}, \ldots;$$

$$r = r_1, \quad r_2 = r'_1, \ldots, \quad r_i = r'_{i-1}, \ldots;$$

mentre se A cade su σ_2 e quindi $l = R_2$, si ha:

$$l = l'_1, \quad l'_2 = l_1, \ldots, \quad l'_i = l_{i-1}, \ldots;$$

$$r = r'_1, \quad r'_2 = r_1, \ldots, \quad r'_i = r_{i-1}, \ldots$$

La serie

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{R_1}{l}\frac{1}{r_1} - \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{R_1}{l_2}\frac{1}{r_3}\right) - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\left(\frac{1}{r_4} - \frac{R_1}{l_4}\frac{1}{r_5}\right) - \cdots = \\ &= \frac{R_1}{l}\frac{1}{r_1} - \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{R_1}{l_{2n}}\frac{1}{r_{2n+1}}\right) = \\ &= \frac{R_1}{l}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{R_2}{l_1}\frac{1}{r_2} + \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{R_2}{l_3}\frac{1}{r_4}\right) + \cdots\right] = \\ &= \frac{R_1}{l}\sum_1^\infty{}_n \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{r_{2n-1}} - \frac{R_2}{l_{2n-1}}\frac{1}{r_{2n}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

è tale che i suoi termini, considerati in S come funzioni di ξ, η, ζ, sono tutti dello stesso segno e sono funzioni armoniche e regolari. Per quello che è stato notato, su σ_1 si riduce a $\frac{1}{r}$, mentre su σ_2 si annulla identicamente. Essa stessa quindi rappresenta una funzione armonica e regolare in S derivabile termine a termine un numero qualunque di volte. Di analoghe proprietà gode la serie

$$\left.\begin{aligned} g' &- \frac{R_2}{l}\frac{1}{r'_1} - \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1}{r'_2} - \frac{R_2}{l'_2}\frac{1}{r'_3}\right) - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(\frac{1}{r'_4} - \frac{R_2}{l'_4}\frac{1}{r'_5}\right) - \cdots \\ &- \frac{R_2}{l}\frac{1}{r'_1} - \sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\left(\frac{1}{r'_{2n}} - \frac{R_2}{l'_{2n}}\frac{1}{r'_{2n+1}}\right) = \\ &= \frac{R_2}{l}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{r'_{2n-1}} - \frac{R_1}{l'_{2n-1}}\frac{1}{r'_{2n}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

g' si annulla identicamente su σ_1, mentre su σ_2 diventa eguale a $\frac{1}{r}$. Ne viene che la funzione di Green relativa al punto A ed allo spazio S, nella forma più comoda per i nostri calcoli, sarà

$$G = \frac{1}{r} - g - g'. \tag{36}$$

Per la derivata normale di G_γ si avrà, su σ_1:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{\rho=R_1} = -\frac{1}{R_1}\Bigg[&\frac{R_1^2 - l^2}{r^3} + \sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n\frac{R_1^2 - l_{2n}^2}{r_{2n}^3} - \\ &- \frac{R_2}{l}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n-1}\frac{R_1^2 - l'^2_{2n-1}}{r'^3_{2n-1}}\Bigg]_{\rho=R_1}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

e su σ_2:

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{\rho=R_2} = \frac{1}{R_2}\Bigg[&\frac{R_2^2 - l^2}{r^3} + \sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\frac{R_2^2 - l'^2_{2n}}{r'^3_{2n}} - \\ &- \frac{R_1}{l}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-1}\frac{R_2^2 - l_{2n-1}^2}{r_{2n-1}^3}\Bigg]_{\rho=R_2}. \end{aligned}\right\} \tag{37'}$$

La funzione Φ armonica e regolare in S che acquista valori dati su σ

sarà quindi rappresentata dalla formola

$$
\left.
\begin{aligned}
4\pi\Phi = & -\frac{1}{R_1}\left[(R_1^2-l^2)\int_{\sigma_1}\Phi\frac{d\sigma}{r^3}+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n(R_1^2-l_{2n}^2)\int_{\sigma_1}\Phi\frac{d\sigma}{r_{2n}^3}-\right.\\
& \left.-\frac{R_2}{l}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n-1}(R_1^2-l_{2n-1}^2)\int_{\sigma_1}\Phi\frac{d\sigma}{r'^3_{2n-1}}\right]+\\
& +\frac{1}{R_2}\left[(R_2^2-l^2)\int_{\sigma_2}\Phi\frac{d\sigma}{r^3}+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n(R_2^2-l_{2n}^2)\int_{\sigma_2}\Phi\frac{d\sigma}{r'^3_{2n}}-\right.\\
& \left.-\frac{R_1}{l}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-1}(R_2^2-l_{2n-1}^2)\int_{\sigma_2}\Phi\frac{d\sigma}{r_{2n-1}^3}\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (38)
$$

2. Notando che, se Φ è una funzione armonica, tale è pure $l\dfrac{\partial\Phi}{\partial l}$, risulta subito che per costruire la funzione armonica e regolare in S la cui derivata normale acquista su σ valori assegnati, basta costruire la funzione armonica e regolare in S che acquista su σ_1 i valori dati per la derivata normale su questa superficie moltiplicati per R_1 e su σ_2 i valori dati su σ_2 per la derivata normale moltiplicati per $-R_2$; dalla funzione così costruita si dedurrà la funzione cercata con una quadratura. Abbiamo intanto:

$$
\begin{aligned}
4\pi l\frac{\partial\Phi}{\partial l} = & -(R_1^2-l^2)\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r^3}-\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n(R_1^2-l_{2n}^2)\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r_{2n}^3}+\\
& +\frac{R_2}{l}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n-1}(R_1^2-l'^2_{2n-1})\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r'^3_{2n-1}}-\\
& -(R_2^2-l^2)\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r^3}-\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n(R_2^2-l_{2n}^2)\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r'^3_{2n}}+\\
& +\frac{R_1}{l}\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-1}(R_2^2-l_{2n-1}^2)\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r_{2n-1}^3}
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\left.
\begin{aligned}
4\pi\Phi = \text{cost.} & - \int_{+\infty}^{l} \frac{dl}{l}\left[(R_1^2 - l^2)\int_{\sigma_1} \frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r^3} + \right. \\
& + \sum_1^\infty n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n (R_1^2 - l_{2n}^2)\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r_{2n}^3} - \\
& \left. - \frac{R_1}{l}\sum_1^\infty n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-1}(R_2^2 - l_{2n-1}^2)\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r_{2n-1}^3}\right] - \\
- \int_0^l \frac{dl}{l} & \left[(R_2^2 - l^2)\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r^3} + \sum_1^\infty n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n (R_2^2 - l'^2_{n})\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r'^3_{2n}} - \right. \\
& \left. - \frac{R_2}{l}\sum_1^\infty n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n-1}(R_1^2 - l'^2_{2n-1})\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r'^3_{2n-1}}\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (39)
$$

Il primo degli integrali che compaiono in questa formola è certamente finito; per mostrare che tale è anche il secondo, notiamo che:

$$
\lim_{l=0}\left[(R_2^2 - l^2)\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r^3} + \sum_1^\infty n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n (R_2^2 - l'^2_{2n})\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r'^3_{2n}}\right] =
$$

$$
= \frac{1}{R_2}\left[1 + \sum_1^\infty n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\right]\int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}d\sigma,
$$

$$
-\lim_{l=0}\frac{R_2}{l}\sum_1^\infty n\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n-1}(R_1^2 - l'^2_{2n-1})\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}\frac{d\sigma}{r'^3_{2n-1}} =
$$

$$
= \frac{1}{R_2}\left[\sum_1^\infty n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-1}\right]\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}d\sigma = \frac{1}{R_2}\left[1 + \sum_1^\infty n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\right]\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}d\sigma
$$

e che, per l'esistenza della funzione cercata, bisogna supporre

$$
\int_{\sigma_1}\frac{d\Phi}{dn}d\sigma + \int_{\sigma_2}\frac{d\Phi}{dn}d\sigma = 0.
$$

3. Per maggior chiarezza dei calcoli futuri aggiungiamo le osservazioni seguenti.

Intanto:

$$(R_1^2 - l_{2n}^2)\int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{r_{2n}^3} =$$

$$= \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2 - l^2\right]\int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2 + l^2 - 2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} R_1\, l \cos\omega}^{\,3}} =$$

$$= \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2 - l^2\right]\int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{\mathbf{r}_{2n}^3},$$

$$\frac{R_2}{l}(R_1^2 - l'^2_{2n-1})\int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{r'^3_{2n-1}} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1}\left[l^2 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2\right]\int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 + l^2 - 2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} R_1\, l \cos\omega}^{\,3}} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1}\left[l^2 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2\right]\int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'^3_{2n-1}},$$

$$(R_2^2 - l'^2_{2n})\int_{\sigma_2} \Phi \frac{d\sigma}{r'^3_{2n}} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n}\left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_2^2 - l^2\right]\int_{\sigma_2} \Phi \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'^3_{2n}},$$

$$\frac{R_1}{l}(R_2^2 - l^2_{2n-1})\int_{\sigma_2} \Phi \frac{d\sigma}{r^3_{2n-1}} = \frac{R_1}{R_2}\left[l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_2^2\right]\int_{\sigma_2} \Phi \frac{d\sigma}{\mathbf{r}^3_{2n-1}},$$

dove abbiamo posto:

$$\mathbf{r}_{2n} = \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2 + l^2 - 2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} R_1\, l \cos\omega},$$

$$\mathbf{r}'_{2n-1} = \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 + l^2 - 2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} R_1\, l \cos\omega},$$

$$\mathbf{r}'_{2n} = \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_2^2 + l^2 - 2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} R_2\, l \cos\omega},$$

$$\mathbf{r}_{2n-1} = \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_2^2 + l^2 - 2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} R_2\, l \cos\omega}.$$

Con queste posizioni la (38) può scriversi

$$
\left.
\begin{aligned}
\Phi = \frac{1}{4\pi R_1} \Bigg\{ & (l^2 - R_1^2) \int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{r^3} + \sum_1^\infty {}_n \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \left[l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2 \right] \int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{\mathbf{r}_{2n}^3} - \\
& - \sum_1^\infty {}_n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 - l^2 \right] \int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'^3_{2n-1}} \Bigg\} + \\
+ \frac{1}{4\pi R_2} \Bigg\{ & (R_2^2 - l^2) \int_{\sigma_2} \Phi \frac{d\sigma}{r^3} + \sum_1^\infty {}_n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_2^2 - l^2 \right] \int_{\sigma_2} \Phi \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'^3_{2n}} - \\
& - \sum_1^\infty {}_n \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \left[l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_2^2 \right] \int_{\sigma_2} \Phi \frac{d\sigma}{\mathbf{r}^3_{2n-1}} \Bigg\}.
\end{aligned}
\right\} \quad (38')
$$

In secondo luogo ricordiamo che ogni funzione armonica e regolare all'interno di una sfera avente il centro nell'origine può rappresentarsi con una serie convergente assolutamente ed in egual grado nell'interno della sfera, della forma

$$\sum_0^\infty {}_m X_m (x, y, z)$$

dove $X_m (x, y, z)$ è una funzione armonica, omogenea in x, y, z di grado intero e positivo m; che, similmente, ogni funzione armonica e regolare all'esterno di una sfera avente il centro nell'origine può rappresentarsi con una serie della forma

$$\sum_0^\infty {}_m X_{-(m+1)} (x, y, z)$$

dove $X_{-(m+1)} (x, y, z)$ è una funzione armonica, omogenea in x, y, z di grado intero e negativo $-(m+1)$; che, infine, ogni funzione armonica e regolare nello spazio compreso fra due sfere concentriche aventi il centro comune nell'origine delle coordinate si può rappresentare con la somma delle due serie

$$\sum_0^\infty {}_m X_m (x, y, z) + \sum_0^\infty {}_m X_{-(m+1)} (x, y, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m X_m (x, y, z)$$

dove X_m e X_{-m} conservano il precedente significato. Se, anzi, poniamo:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{l^2 - R_1^2}{4\pi R_1} \int_{\sigma_1} \Phi \frac{d\sigma}{r^3} &= \sum_0^\infty {}_m X_{-(m+1)} (x, y, z), \\
\frac{R_2^2 - l^2}{4\pi R_2} \int_{\sigma_2} \Phi \frac{d\sigma}{r^3} &= \sum_0^\infty {}_m X_m (x, y, z),
\end{aligned}
\right\} \quad (40)
$$

la funzione Φ data dalla (38′) sarà anche rappresentata dalla formola

$$\Phi = \sum_0^\infty {}_m \frac{R_2^{2m+1} - l^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} X_{-(m+1)} + \sum_0^\infty {}_m \frac{R_2^{2m+1}}{l^{2m+1}} \frac{l^{2m+1} - R_1^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} X_m. \quad (38'')$$

Osserviamo, infine, che la funzione $l \frac{\partial \Phi}{\partial l}$ si può costruire direttamente per mezzo dei valori che questa funzione assume su σ, ovvero si può ricavare eseguendo sulla (38′), o (38″), l'operazione $l \frac{\partial}{\partial l}$. Paragonando gli sviluppi in serie di $l \frac{\partial \Phi}{\partial l}$ che così si ottengono, si trova subito:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l^2 - R_1^2}{4\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{d\sigma}{r^3} = \\ &= \sum_0^\infty {}_m \frac{(2m+1)(R_1 R_2)^{2m+1} l^{-2m+1} X_m - [(m+1) R_2^{2m+1} + m R_1^{2m+1}] X_{-m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}, \\ &\frac{R_2^2 - l^2}{4\pi} \int_{\sigma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{d\sigma}{r^3} = \\ &= \sum_0^\infty {}_m \frac{[(m+1) R_1^{2m+1} + m R_2^{2m+1}] X_m - (2m+1) l^{2m+1} X_{-m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

le X che entrano in queste formole essendo sempre quelle che compaiono nelle (40). E con l'aiuto delle (40) e (41) è facile trovare delle espressioni analitiche per la funzione armonica in S che acquista su una delle superficie sferiche dati valori, mentre sull'altra acquista dati valori la derivata normale.

4. *Caso in cui sulle due sfere limiti sono dati:* u, v, w. Chiamiamo U, V, W le funzioni armoniche e regolari in S che acquistano su σ i rispettivi valori u, v, w e osserviamo che:

$$\left.\begin{aligned} &(l^2 - R_1^2) \int_{\sigma_1} \xi\, \theta \frac{d\sigma}{r^3} = x (l^2 - R_1^2) \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{r^3} + (l^2 - R_1^2) \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{r}, \\ &\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} \left[l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2\right] \int_{\sigma_1} \xi\, \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}_{2n}^3} = x \left[l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2\right] \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}_{2n}^3} + \\ &\qquad + \left[l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2\right] \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}_{2n}}, \\ &\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2n} \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 - l^2\right] \int_{\sigma_1} \xi\, \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'^3_{2n-1}} = x \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 - l^2\right] \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'^3_{2n-1}} + \\ &\qquad + \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 - l^2\right] \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'_{2n-1}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

dove le formole non scritte sono relative agli integrali analoghi estesi a σ_2 e a quelli in cui ξ si muta successivamente in η e ζ. Se, per brevità, poniamo poi:

$$
\left.\begin{aligned}
&4\pi R_1 \theta_0 = (l^2 - R_1^2)\int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{r^3}, \quad 4\pi R_1 \theta_n = \left[l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2\right]\int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}_{2n}^3}, \\
&4\pi R_1 \theta_{-n} = \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 - l^2\right]\int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'^3_{2n-1}}, \\
&4\pi R_2 \theta'_0 = (R_2^2 - l^2)\int_{\sigma_2} \theta \frac{d\sigma}{r'^3}, \quad 4\pi R_2 \theta'_n = \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 - l^2\right]\int_{\sigma_2} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'^3_{2n}}, \\
&4\pi R_2 \theta'_{-n} = \left[l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_2^2\right]\int_{\sigma_2} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}^3_{2n-1}}, \\
&4\pi R_1 \varphi_0 = \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{r}, \quad 4\pi R_1 \varphi_n = \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}_{2n}}, \quad 4\pi R_1 \varphi_{-n} = \int_{\sigma_1} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'_{2n-1}}, \\
&4\pi R_2 \varphi'_0 = \int_{\sigma_2} \theta \frac{d\sigma}{r'}, \quad 4\pi R_2 \varphi'_n = \int_{\sigma_2} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}'_{2n}}, \quad 4\pi R_1 \varphi'_{-n} = \int_{\sigma_2} \theta \frac{d\sigma}{\mathbf{r}_{2n-1}}
\end{aligned}\right\} \quad (43)
$$

le solite formole (5) ed analoghe di (I^a), nel caso presente, ci daranno:

$$
\left.\begin{aligned}
u = U - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\theta + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\Big\{ & x\theta + (l^2 - R_1^2)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \\
& + \sum_1^\infty {}^n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \left[x\theta_n + [l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_1^2]\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right] - \\
& - \sum_1^\infty {}^n \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \left[x\theta_{-n} + [\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{4n} R_1^2 - l^2]\frac{\partial \varphi_{-n}}{\partial x}\right] + \\
& + x\theta'_0 + (R_2^2 - l^2)\frac{\partial \varphi'_0}{\partial x} + \sum_1^\infty {}^n \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \left[x\theta'_n + [\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n} R_2^2 - l^2]\frac{\partial \varphi'_n}{\partial x}\right] - \\
& - \sum_1^\infty {}^n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \left[x\theta'_{-n} + [l^2 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{4n} R_2^2]\frac{\partial \varphi'_{-n}}{\partial x}\right]\Big\} \; (*). \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (44)
$$

(*) È utile pel seguito tener presente che la quantità in parentesi { } è una espressione della funzione armonica e regolare in S che acquista su σ i valori $x\theta$.

Le altre due formole non scritte si ottengono da quella scritta con lo scambio di u, U, x, in v, V, y e in w, W, z.

Bisogna ora cercare di determinare le funzioni incognite θ_0, θ_n, θ_{-n}; θ'_0, θ'_n, θ'_{-n}; $\varphi_0,\ldots$ in modo: 1.° che le serie che compaiono nei secondi membri delle (44) sieno convergenti in S e tendano su σ a valori finiti; 2.° che ciascuna di queste serie sia armonica e regolare in S; 3.° che fra le θ con i varii indici e le corrispondenti φ passino le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} -\theta_0 = 2l\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial l}+\varphi_0, \quad -\theta_n = 2l\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial l}+\varphi_n, \quad \theta_{-n} = 2l\dfrac{\partial\varphi_{-n}}{\partial l}+\varphi_{-n}, \\ \theta'_0 = 2l\dfrac{\partial\varphi'_0}{\partial l}+\varphi'_0, \quad \theta'_n = 2l\dfrac{\partial\varphi'_n}{\partial l}+\varphi'_n, \quad -\theta'_{-n} = 2l\dfrac{\partial\varphi'_{-n}}{\partial l}+\varphi'_{-n}, \end{array}\right\} \quad (45)$$

4.° che le φ e φ' con indici diversi da zero sieno legati alle $\varphi_0(x, y, z)$ e $\varphi'_0(x, y, z)$ dalle seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_n(x, y, z) = \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{2n}\varphi_0\left[\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{2n}x, \ \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{2n}y, \ \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{2n}z\right], \\ \varphi_{-n} = \dfrac{R_1}{l}\varphi_0\left[\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{2n}\dfrac{R_1^2 x}{l^2}, \ \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{2n}\dfrac{R_1^2 y}{l^2}, \ \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{2n}\dfrac{R_1^2 z}{l^2}\right], \\ \varphi'_n(x, y, z) = \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\varphi'_0\left[\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2n}x, \ \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2n}y, \ \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2n}z\right], \\ \varphi'_{-n} = \dfrac{R_2}{l}\varphi'_0\left[\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\dfrac{R_2^2 x}{l^2}, \ \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\dfrac{R_2^2 y}{l^2}, \ \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\dfrac{R_2^2 z}{l^2}\right], \end{array}\right\} \quad (45)$$

5.° che, infine, risulti identicamente soddisfatta l'equazione

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial W}{\partial z} = \dfrac{3\lambda+5\mu}{2\mu}\theta + \dfrac{\lambda+\mu}{2\mu}l\dfrac{\partial\theta}{\partial l} - \\ -\dfrac{\lambda+\mu}{2\mu}\Bigg\{3\theta_0 + l\dfrac{\partial\theta_0}{\partial l} + 2l\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial l} + \sum_1^\infty{}_n\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^n\left(3\theta_n + l\dfrac{\partial\theta_n}{\partial l} + 2l\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial l}\right) - \\ \qquad - \sum_1^\infty{}_n\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^n\left(3\theta_{-n} + l\dfrac{\partial\theta_{-n}}{\partial l} - 2l\dfrac{\partial\varphi_{-n}}{\partial l}\right) + \\ + 3\theta'_0 + l\dfrac{\partial\theta'_0}{\partial l} - 2l\dfrac{\partial\varphi'_0}{\partial l} + \sum_1^\infty{}_n\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^n\left(3\theta'_n + l\dfrac{\partial\theta'_n}{\partial l} - 2l\dfrac{\partial\varphi'_n}{\partial l}\right) - \\ \qquad - \sum_1^\infty{}_n\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^n\left(3\theta'_{-n} + l\dfrac{\partial\theta'_{-n}}{\partial l} + 2l\dfrac{\partial\varphi'_{-n}}{\partial l}\right)\Bigg\}. \end{array}\right\} \quad (46)$$

Si verifica facilmente che, sotto queste condizioni, le (44) rappresentano la soluzione del nostro problema.

Per raggiungere il nostro scopo osserviamo che, dovendo essere φ_0 una funzione armonica e regolare all'esterno della sfera di raggio R_1, si può sempre rappresentare con una serie della forma

$$\varphi_0 = \sum_0^\infty {}_m X_{-(m+1)}, \tag{47}$$

mentre, dovendo φ'_0 essere armonica e regolare nell'interno della sfera di raggio R_2 si può rappresentare con una serie della forma

$$\varphi'_0 = \sum_0^\infty {}_m X_m, \tag{47'}$$

essendo le $X_{-(m+1)}$ e le X_m funzioni sferiche, solide, armoniche, le prime di ordine negativo $-(m+1)$ e le seconde di ordine positivo m da determinarsi in modo che sieno soddisfatte le precedenti condizioni. Avremo allora:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_n = \sum_0^\infty {}_m \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2nm} X_{-(m+1)}, \quad \varphi_{-n} = \sum_0^\infty {}_m \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n(m+1)} \left(\frac{l}{R_1}\right)^{2m+1} X_{-(m+1)},\\
&\varphi'_n = \sum_0^\infty {}_m \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n(m+1)} X_m, \quad \varphi'_{-n} = \sum_0^\infty {}_m \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2nm} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} X_m;\\
&\theta_0 = \sum_0^\infty {}_m (2m+1) X_{-(m+1)}, \quad \theta_n = \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2nm} X_{-(m+1)},\\
&\theta_{-n} = \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n(m+1)} \left(\frac{l}{R_1}\right)^{2m+1} X_{-(m+1)};\\
&\theta'_0 = \sum_0^\infty {}_m (2m+1) X_m, \quad \theta'_n = \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n(m+1)} X_m,\\
&\theta'_{-n} = \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2nm} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} X_m,
\end{aligned}\right\} \tag{47''}$$

ed anche, notando che

$$\frac{\partial}{\partial x}(l X_{-1}) = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial X_{-1}}{\partial x} = -\frac{x}{l^2} X_{-1},$$

per cui i termini che contengono X_{-1} in $x\,\theta_n + l^2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$ ed in $\frac{\partial \varphi_{-n}}{\partial x}$ sono nulli:

$$
\left.\begin{aligned}
u = U &- \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\theta + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\Big\{ x \frac{R_2^3 - l^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{R_1}{l}\right)^2 X_{-1} + \\
&+ x \sum_1^\infty m(2m+1) \frac{R_2^{2m-1} - l^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} X_{-(m+1)} + \\
&+ \sum_1^\infty m \left[l^2 \frac{R_2^{2m-1} - l^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} - R_1^2 \frac{R_2^{2m+3} - l^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}} \right] \frac{\partial X_{-(m+1)}}{\partial x} + \\
&+ x \sum_0^\infty m(2m+1) \frac{l^{2m+3} - R_1^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+3} X_m + \\
&+ \sum_1^\infty m \left[l^2 \frac{l^{2m-1} - R_1^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} - R_2^2 \frac{l^{2m+3} - R_1^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}} \right] \left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} \frac{\partial X_m}{\partial x} \Big\}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta = &\sum_0^\infty m(2m+1) \frac{R_2^{2m+1} - l^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} X_{-(m+1)} + \\
&+ \sum_0^\infty m(2m+1) \frac{l^{2m+1} - R_1^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} X_m,
\end{aligned}\right\} \quad (48)
$$

in cui, ancora, le due formole relative a v e w, non scritte, si deducono da quella relativa ad u con lo scambio di u, U, x in v, V, y e in w, W, z.

Poniamo ora:

$$
\left.\begin{aligned}
U &= \sum_0^\infty m\, U_m + \sum_0^\infty m\, U_{-(m+1)}, \\
V &= \sum_0^\infty m\, V_m + \sum_0^\infty m\, V_{-(m+1)}, \\
W &= \sum_0^\infty m\, W_m + \sum_0^\infty m\, W_{-(m+1)},
\end{aligned}\right\} \quad (49)
$$

dove le U_m, $U_{-(m+1)}, \ldots$ si possono ritenere note; sostituiamo nella (46) i valori precedenti di U, V, W e i valori delle θ e φ dati dalle (47), (47') e (47'') ed eguagliamo nella (46) i termini di grado m e quelli di grado $-(m+1)$. Ponendo anche:

$$
\Theta_m = \frac{\partial U_{m+1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{m+1}}{\partial y} + \frac{\partial W_{m+1}}{\partial z}, \quad \Theta_{-(m+1)} = \frac{\partial U_{-m}}{\partial x} + \frac{\partial U_{-m}}{\partial y} + \frac{\partial W_{-m}}{\partial z},
$$

avremo le equazioni:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Theta_0 = X_0, \quad X_{-1} = \frac{R_1}{l} X_0, \\
&2\mu\Theta_m = \\
&= l^{2m+1} X_{-(m+1)} \left\{ \frac{(m+1)(2m+3)R_1^2(\lambda+\mu)}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}} - \frac{(2m+1)[(m+3)\lambda+(m+5)\mu]}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}} \right\} - \\
&- R_2^{2m+1} X_m \left\{ \frac{(m+1)(2m+3)R_2^2(\lambda+\mu)}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}} - \frac{(2m+1)[(m+3)\lambda+(m+5)\mu]}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}} \right\}, \\
&2\mu\left(\frac{l}{R_2}\right)^{2m+1} \Theta_{-(m+1)} = \\
&= l^{2m+1} X_{-(m+1)} \left\{ \frac{m(2m-1)(\lambda+\mu)}{R_2^2(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})} - \frac{(2m+1)[(m-2)\lambda+(m-4)\mu]}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}} \right\} - \\
&- R_1^{2m+1} X_m \left\{ \frac{m(2m-1)(\lambda+\mu)}{R_1^2(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})} - \frac{(2m+1)[(m-2)\lambda+(m-4)\mu]}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}} \right\},
\end{aligned}
\right\} \tag{50}
$$

nelle quali l'indice m varia da 1 ad ∞. Risolvendo le equazioni precedenti rispetto ad $X_{-(m+1)}$ e ad X_m, si trova:

$$
\left.
\begin{aligned}
&X_0 = \Theta_0, \quad X_{-1} = \frac{R_1}{l}\Theta_0 \\
&\Delta X_{-(m+1)} = \\
&= 2\mu \left\{ \frac{m(2m-1)(\lambda+\mu)}{R_1^2(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})} - \frac{(2m+1)[(m-2)\lambda+(m-4)\mu]}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}} \right\} \left(\frac{R_1}{l}\right)^{2m+1} \Theta_m - \\
&- 2\mu \left\{ \frac{(m+1)(2m+3)R_2^2(\lambda+\mu)}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}} - \frac{(2m+1)[(m+3)\lambda+(m+5)\mu]}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}} \right\} \Theta_{-(m+1)}, \\
&\Delta X_m = 2\mu \left\{ \frac{m(2m-1)(\lambda+\mu)}{R_2^2(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})} - \frac{(2m+1)[(m-2)\lambda+(m-4)\mu]}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}} \right\} \Theta_m - \\
&- 2\mu \left\{ \frac{(m+1)(2m+3)R_1^2(\lambda+\mu)}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}} - \frac{(2m+1)[(m+3)\lambda+(m+5)\mu]}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}} \right\} \left(\frac{l}{R_2}\right)^{2m+1} \Theta_{-(m+1)}, \\
&\Delta = (R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}) \left\{ - \frac{m(m+1)(2m-1)(2m+3)(\lambda+\mu)^2}{(R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3})(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})} + \right. \\
&\left. + \frac{(2m+1)^2[m(m+1)(\lambda+\mu)^2+4\mu(\lambda+2\mu)]}{(R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1})^2} \right\}.
\end{aligned}
\right\} \tag{51}
$$

Per essere $\mu(\lambda + 2\mu) > 0$, Δ non si annulla mai per nessun valore intero e positivo di m e per nessun valore di R_1 tale che $0 < R_1 < R_2$ (*). Ciò mostra che il problema ha sempre una soluzione ed una sola. Per assicurarsi della convergenza delle serie che compaiono nelle nostre formole, nel campo S, basta paragonarle alle serie:

$$\sum_0^\infty{}_m \left(\frac{R_1}{l}\right)^{2m+1} \Theta_m, \qquad \sum_0^\infty{}_m \Theta_{-(m+1)}$$

(*) La dimostrazione di quest'asserto è alquanto faticosa. Si può pervenire allo scopo ragionando come segue.

Per mostrare che Δ non si annulla mai, sotto le condizioni indicate, basta mostrare che di questa proprietà gode l'espressione

$$\left.\begin{aligned} -(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})^2\, m\,(m+1)\,(2\,m-1)\,(2\,m+3)\,(\lambda+\mu)^2 + \\ +(2\,m+1)^2\,[m(m+1)\,(\lambda+\mu)^2 + 4\,\mu\,(\lambda+2\,\mu)]\,(R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3})\,(R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}). \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Ora l'espressione (a) per $R_1 = R_2$ si annulla, mentre per $R_1 = 0$ è maggiore di zero. Basta quindi dimostrare che l'espressione (a) diminuisce continuamente al crescere di R_1 da 0 ad R_2, ossia che la derivata rispetto ad R_1 è sempre negativa qualunque sia m e per $0 < R_1 < R_2$. Questa derivata è data da

$$\left.\begin{aligned} (2\,m+1)\,R_1^{2m-2}\,\{2\,R_1^2\,(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\,m\,(m+1)\,(2\,m-1)\,(2\,m+3)\,(\lambda+\mu)^2 - \\ -(2\,m+1)\,[m\,(m+1)\,(\lambda+\mu)^2 + \\ +4\,\mu\,(\lambda+2\,\mu)]\,[(2\,m+3)\,R_1^4\,(R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}) + (2\,m-1)\,(R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3})\}. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

La quantità in parentesi $\{\ \}$, ponendo $R_2 = R_1\, e^{\varpi}$, a meno del fattore R_1^{2m+3}, si può scrivere

$$\begin{aligned} 2\,(e^{(2m+1)\varpi} - 1)\,m\,(m+1)(2m-1)\,(2\,m+3)\,(\lambda+\mu)^2 - (2\,m+1)\,[m\,(m+1)\,(\lambda+\mu)^2 + \\ + 4\,\mu\,(\lambda+2\,\mu)]\,[(2\,m+3)\,(e^{(2m-1)\varpi} - 1) + (2\,m-1)\,(e^{(2m+3)\varpi} - 1)] \end{aligned}$$

e, sviluppando in serie gli esponenziali, a meno del fattore $(2\,m-1)\,(2\,m+1)\,(2\,m+3)$, si può anche scrivere

$$\begin{aligned} -\sum_1^\infty{}_\nu \frac{\varpi^\nu}{\underline{|\nu}}\,\{m\,(m+1)\,(\lambda+\mu)^2\,[(2\,m+3)^{\nu-1} + (2\,m-1)^{\nu-1} - 2\,(2\,m+1)^{\nu-1}] + \\ + 4\,\mu\,(\lambda+2\,\mu)\,[(2\,m+3)^{\nu-1} + (2\,m-1)^{\nu-1}]\}. \end{aligned}$$

Questa formola, osservando che

$$\begin{aligned} (2\,m+3)^{\nu-1} + (2\,m-1)^{\nu-1} - 2\,(2\,m+1)^{\nu-1} = \sum_0^{\nu-1}{}_i \binom{\nu-1}{i}\,(2\,m)^i\,[3^{\nu-1-i} + \\ + (-1)^{\nu-1-i} - 2] > 0, \end{aligned}$$

dimostra completamente il nostro asserto.

le quali convergono, per ipotesi, in modo assoluto ed uniforme fra $l > R_1$, o alle serie

$$\sum_0^\infty m\,\Theta_m, \qquad \sum_0^\infty m\left(\frac{l}{R_2}\right)^{2m+1}\Theta_{m(m+1)}$$

le quali convergono in modo assoluto ed uniforme per $l < R_2$ e questo paragone si fa senza difficoltà. Infine, i vari termini dei secondi membri delle (44) e (48), convergeranno su σ a limiti finiti se di tale proprietà godranno le derivate seconde delle serie (49), il che certamente si consegue supponendo che i valori di u, v, w, dati su σ ammettano le derivate del prim'ordine almeno, rispetto a due parametri che individuano i punti di σ.

5. *Caso in cui sulle due sfere limiti sono dati:* L, M, N. Partiamo dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^2\left(l\frac{\partial u}{\partial l}\right)+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(l\frac{\partial\theta}{\partial l}+\theta\right)=0,\dots\\ &l\frac{\partial\theta}{\partial l}+\theta=\frac{\partial}{\partial x}\left(l\frac{\partial u}{\partial l}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(l\frac{\partial v}{\partial l}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(l\frac{\partial w}{\partial l}\right)\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

e scriviamo, per queste equazioni, le solite formole fondamentali, conservando, ancora per un momento, la funzione G di GREEN:

$$\left.\begin{aligned}l\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{R_1}{4\pi}\int_{\sigma_1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{dG}{dn}d\sigma+\frac{R_2}{4\pi}\int_{\sigma_2}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{dG}{dn}d\sigma-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\left(l\frac{\partial\theta}{\partial l}+\theta\right)+\\ +\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma\xi\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+\theta\right)\frac{dG}{dn}d\sigma,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

Se ricordiamo che le condizioni in superficie, ora sono:

$$\left.\begin{aligned}&\text{su }\sigma_1\qquad -L=\lambda\theta\frac{x}{R_1}+2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial l}+\varpi_3\frac{y}{R_1}-\varpi_2\frac{z}{R_1}\right),\dots\\ &\text{su }\sigma_2\qquad L=\lambda\theta\frac{x}{R_2}+2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial l}+\varpi_3\frac{y}{R_2}-\varpi_2\frac{z}{R_2}\right),\dots\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

e chiamiamo $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ le funzioni armoniche e regolari in S le quali acquistano su σ_1 i valori di L, M, N, dati su questa superficie, moltiplicati per $-R_1$ e su σ_2 i valori di L, M, N, dati su σ_2, moltiplicati per R_2, le (53) potranno scriversi:

$$
\left.\begin{aligned}
l\frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\varrho}{2\mu} - \frac{1}{8\pi\mu}\int_\sigma [\lambda\,\theta\,\xi + 2\,\mu\,(\varpi_3\,\eta - \varpi_2\,\zeta)]\,\frac{d\,G}{d\,n}\,d\,\sigma - \\
&- \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,x\left(l\frac{\partial\theta}{\partial l} + \theta\right) + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \theta\right)\frac{d\,G}{d\,n}\,d\,\sigma,
\end{aligned}\right\} \quad (53)
$$

. . . .

e si tratta dapprima di determinare ϑ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 in modo che sieno soddisfatte identicamente le equazioni:

$$
\left.\begin{aligned}
l\frac{\partial\theta}{\partial l} + \vartheta &= \frac{\partial}{\partial x}\left(l\frac{\partial u}{\partial l}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(l\frac{\partial v}{\partial l}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(l\frac{\partial w}{\partial l}\right); \\
2\left(l\frac{\partial\varpi_1}{\partial l} + \varpi_1\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(l\frac{\partial w}{\partial l}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(l\frac{\partial v}{\partial l}\right), \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (55)
$$

Poniamo perciò:

$$
\left.\begin{aligned}
\theta &= \sum_0^\infty{}_m (2\,m+1)\,\frac{R_2^{2m+1} - l^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\,X_{-(m+1)} + \\
&+ \sum_0^\infty{}_m (2\,m+1)\,\frac{l^{2m+1} - R_1^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} X_m, \\
\varpi_i &= \sum_0^\infty{}_m (2\,m+1)\,\frac{R_2^{2m+1} - l^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\,Y_{i,\,(m+1)} + \\
&+ \sum_0^\infty{}_m (2\,m+1)\,\frac{l^{2m+1} - R_1^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} Y_{i,m} \qquad i = 1,\ 2,\ 3.
\end{aligned}\right\} \quad (56)
$$

Avremo allora, per i risultati del n.º prec.:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_0 [\lambda\,\vartheta\,\xi + 2\,\mu\,(\varpi_3\,\eta - \varpi_2\,\zeta)]\,\frac{d\,G}{d\,n}\,d\,\sigma = \\
&= \frac{R_2^3 - l^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{R_1}{l}\right)^2 [\lambda\,x\,X_{-1} + 2\,\mu\,(y\,Y_{3,-1} - z\,Y_{2,-1})] + \\
&+ \sum_1^\infty{}_m (2\,m+1)\,\frac{R_2^{2m-1} - l^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}}\,[\lambda\,x\,X_{-(m+1)} + 2\,\mu\,(y\,Y_{3,-(m+1)} - z\,Y_{2,-(m+1)})] + \\
&+ \sum_1^\infty{}_m \left[l^2\,\frac{R_2^{2m-1} - l^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} - R_1^2\,\frac{R_2^{2m+3} - l^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\right]\left[\lambda\,\frac{\partial X_{-(m+1)}}{\partial x} + \right. \\
&\left. + 2\,\mu\left(\frac{\partial Y_{3,-(m+1)}}{\partial y} - \frac{\partial Y_{2,-(m+1)}}{\partial z}\right)\right] +
\end{aligned}\right\} \quad (57)
$$

$$\left.\begin{aligned}&+\sum_0^\infty{}_m (2\,m+1)\,\frac{l^{2m+3}-R_1^{2m+3}}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+3}[\lambda\,x\,X_m+2\,\mu\,(y\,Y_{3,m}-z\,Y_{2,m})]+\\&+\sum_1^\infty{}_m\left[l^2\,\frac{l^{2m-1}-R_1^{2m-1}}{R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1}}-R_2^2\,\frac{l^{2m+3}-R_1^{2m+3}}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}}\right]\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1}\left[\lambda\,\frac{\partial X_m}{\partial x}+\right.\\&\left.\qquad+2\,\mu\left(\frac{\partial Y_{3,m}}{\partial y}-\frac{\partial Y_{2,m}}{\partial z}\right)\right].\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

Ricordiamo poi che, dovendo essere:

$$(\lambda+2\,\mu)\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,x}+2\,\mu\left(\frac{\partial\,\varpi_2}{\partial\,z}-\frac{\partial\,\varpi_3}{\partial\,y}\right)=0\,,\ldots$$

sussisteranno le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}&2\,\mu\,R_1\,(zY_{2,0}-y\,Y_{3,0})-2\,\mu\,l\,(zY_{2,-1}-y\,Y_{3,-1})=\\&=(\lambda+2\,\mu)\,x\,(l\,X_{-1}-R_1\,X_0)\,;\quad\frac{\partial Y_{i,-1}}{\partial\,x}=-\frac{x}{l^2}\,Y_{i,-1}\,,\quad i=1,2,3\\&(R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1})\left[\lambda\,\frac{\partial X_{-(m+1)}}{\partial\,x}+2\,\mu\left(\frac{\partial Y_{3,-(m+1)}}{\partial\,y}-\frac{\partial Y_{2,-(m+1)}}{\partial\,z}\right)\right]=\\&\qquad=2\,(\lambda+\mu)\left[(R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1})\,\frac{\partial X_{-(m+1)}}{\partial\,x}+\right.\\&\qquad\left.+(2\,m+1)\left(\frac{R_1}{l}\right)^{2m+1}\frac{x}{l^2}\,(R_2^{2m+1}\,X_m-l^{2m+1}\,X_{-(m+1)})\right]-\\&\qquad-(2\,m+1)\,\frac{(R_1\,R_2)^{2m+1}}{l^{2m+3}}\,[\lambda\,x\,X_m+2\,\mu\,(y\,Y_{3,m}-z\,Y_{2,m})]+\\&\qquad+(2\,m+1)\,\frac{R_1^{2m+1}}{l^2}\,[\lambda\,x\,X_{-(m+1)}+2\,\mu\,(y\,Y_{3,-(m+1)}-z\,Y_{2,-(m+1)})]\,,\\&(R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1})\left[\lambda\,\frac{\partial X_m}{\partial\,x}+2\,\mu\left(\frac{\partial Y_{3,m}}{\partial\,y}-\frac{\partial Y_{2,m}}{\partial\,z}\right)\right]=\\&\qquad=2\,(\lambda+\mu)\left[(R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1})\,\frac{\partial X_m}{\partial\,x}+\right.\\&\qquad\left.+(2\,m+1)\,\frac{x}{l^2}\,(R_1^{2m+1}\,X_m-l^{2m+1}\,X_{-(m+1)})\right]-\\&\qquad-(2\,m+1)\,\frac{R_1^{2m+1}}{l^2}\,[\lambda\,x\,X_m+2\,\mu\,(y\,Y_{3,m}-z\,Y_{2,m})]+\\&\qquad+(2\,m+1)\,l^{2m-1}\,[\lambda\,xX_{-(m+1)}+2\,\mu\,(yY_{3,-(m+1)}-zY_{2,-(m+1)})],\\&\qquad\qquad m=1,\,2,\ldots,\,\infty\end{aligned}\right\}\tag{58}$$

e le altre che si ottengono da queste con permutazioni circolari di x, y, z e degli indici 1, 2, 3. Per mezzo di queste relazioni, l'espressione (57) si pone, facilmente, sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma [\lambda\,\theta\,\xi + 2\,\mu\,(\varpi_3\,\eta - \varpi_2\,\zeta)]\,\frac{d\,G}{d\,n}\,d\,\sigma = \lambda\,\theta\,x + 2\,\mu\,(\varpi_3\,y - \varpi_2\,z) + \\
&+ 2\,(\lambda+\mu)\,\frac{x}{R_1}\left[\frac{l^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{R_2}{l}\right)^2 - \frac{l - R_1}{R_2 - R_1}\right]\frac{R_2}{l}\,(-\,l\,X_{-1} + R_1\,X_0) + \\
&\qquad + 2\,(\lambda+\mu)\sum_1^\infty{}_m\,\frac{1}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\left[l^2\,\frac{R_2^{2m-1} - l^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} - \right.\\
&\qquad \left. - R_1^2\,\frac{R_2^{2m+3} - l^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\right]\left[(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\,\frac{\partial X_{-(m+1)}}{\partial x} + \right.\\
&\qquad \left. + (2\,m+1)\,x\,\frac{R_1^{2m+1}}{l^{2m+3}}\,(R_2^{2m+1}\,X_m - l^{2m+1}\,X_{-(m+1)})\right] + \\
&\qquad + 2\,(\lambda+\mu)\sum_1^\infty{}_m\,\frac{R_2^{2m+1}}{(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\,l^{2m+1}}\left[l^2\,\frac{l^{2m-1} - R_1^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} - \right.\\
&\qquad \left. - R_2^2\,\frac{l^{2m+3} - R_1^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\right]\left[(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\,\frac{\partial X_m}{\partial x} + \right.\\
&\qquad \left. + (2\,m+1)\,\frac{x}{l^2}\,(R_1^{2m+1}\,X_m - l^{2m+1}\,X_{-(m+1)})\right],
\end{aligned}\right\}\ (57)$$

ed altre due relazioni analoghe si ottengono permutando circolarmente: ξ, η, ζ; x, y, z; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3.

Gli ultimi termini delle (53') si costruiscono anche facilmente, osservando che dall'identità

$$\left.\begin{aligned}
&l\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,l} + \theta = -\sum_0^\infty{}_m\,(2\,m+1)\,\frac{m\,R_2^{2m+1} + (m+1)\,l^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\,X_{-(m+1)} + \\
&\qquad + \sum_0^\infty{}_m\,(2\,m+1)\,\frac{(m+1)\,l^{2m+1} + m\,R_1^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} X_m - \\
&\qquad = \sum_0^\infty{}_m\,(2\,m+1)\,\frac{R_2^{2m+1} - l^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\,X'_{-(m+1)} + \\
&\qquad + \sum_0^\infty{}_m\,(2\,m+1)\,\frac{l^{2m+1} - R_1^{2m+1}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} X'_m,
\end{aligned}\right\}\ (59)$$

risulta:

$$\left.\begin{aligned}
&(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\, X'_{-(m+1)} = \\
&= -[m\, R_2^{2m+1} + (m+1)\, R_1^{2m+1}]\, X_{-(m+1)} + (2m+1)\left(\frac{R_1 R_2}{l}\right)^{2m+1} X_m, \\
&(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\, X'_m = -(2m+1)\, l^{2m+1}\, X_{-(m+1)} + \\
&\qquad + [m\, R_1^{2m+1} + (m+1)\, R_2^{2m+1}]\, X_m .
\end{aligned}\right\} \qquad (59')$$

Applicando quindi i risultati del n.° prec. agli integrali:

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \xi\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \theta\right)\frac{dG}{dn}\, d\sigma, \ldots$$

e sostituendo poi nelle (53') le espressioni relative alla (57') ed analoghe, si trova:

$$\left.\begin{aligned}
l\frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\mathfrak{L}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\theta x - \varpi_3 y + \varpi_2 z - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\left(l\frac{\partial\theta}{\partial l} + \theta\right) + \\
&+ \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x \frac{-l X_{-1} + R_2 X_0}{R_2 - R_1} - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{x}{R_1}\left[\frac{l^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{R_2}{l}\right)^2 - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{l - R_1}{R_2 - R_1}\right]\frac{R_2}{l}(-l X_{-1} + R_1 X_0) + \\
&+ \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x \sum_1^\infty{}_m (2m+1)\left[\frac{R_2^{2m-1} - l^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} X'_{-(m+1)} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{l^{2m+3} - R_1^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+3} X'_m\right] + \\
&+ \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\sum_1^\infty{}_m \left[l^2\frac{R_2^{2m-1} - l^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} - R_1^2\frac{R_2^{2m+3} - l^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\right]\left[\frac{\partial X'_{-(m+1)}}{\partial x} - \right. \\
&\left. - 2\frac{\partial X_{-(m+1)}}{\partial x} - 2\frac{(2m+1) R_1^{2m+1} x}{(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\, l^{2m+3}}(R_2^{2m+1} X_m - l^{2m+1} X_{-(m+1)})\right] + \\
&+ \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\sum_1^\infty{}_m \left[l^2\frac{l^{2m-1} - R_1^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} - R_2^2\frac{l^{2m+3} - R_1^{2m+3}}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\right]\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1}\left[\frac{\partial X'_m}{\partial x} - \right. \\
&\left. - 2\frac{\partial X_m}{\partial x} - 2\frac{(2m+1)\, x}{(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\, l^2}(R_1^{2m+1} X_m - l^{2m+1} X_{-(m+1)})\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (53'')$$

. . . .

Le altre due formole relative a v e w si deducono da quella relativa ad u scambiando ciclicamente $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3; x, y, z.

Sostituendo ora le (53 ') nella prima delle (55) e facendo uso delle citate relazioni fra θ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, si trova:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = (\lambda + \mu)\, l \frac{\partial}{\partial l}\left(l \frac{\partial \theta}{\partial l} + \theta\right) + \\
&+ 3(\lambda + \mu)\left(l \frac{\partial \theta}{\partial l} + \theta\right) + (3\lambda + 2\mu)\theta + \\
&+ (\lambda + \mu)\left[\frac{6 R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{9 l - 4 R_1}{(R_2 - R_1)\, l}\right] R_2\, X_0 - \\
&- (\lambda + \mu)\left[\frac{6 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{3(2 R_2 + R_1)\, l - 4 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)\, l}\right] \frac{l}{R_1}\, X_{-1} + \\
&+ (\lambda + \mu) \sum_1^\infty {}_m \left\{\left[\frac{m(2m-1) R_2^{2m-1}}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}} + \frac{(m+1)(2m+3) R_1^2}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\, l^{2m+1}\right] X'_{-(m+1)} - \right.\\
&\left. - \left[\frac{m(2m-1) R_1^{2m-1}}{(R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1})\, l^{2m+1}} + \frac{(m+1)(2m+3) R_2^2}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\right] R_2^{2m+1} X'_m \right\} - \\
&- 2(\lambda + \mu) \sum_1^\infty {}_m \frac{X_{-(m+1)}}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} \left\{ R_2^{2m-1}\left[2(m+1) R_2^2 + \right.\right.\\
&\left. + \frac{m(2m-1) R_1^{2m-1} (R_2^2 - R_1^2)}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}}\right] - l^{2m+1}\left.\left[2m + \frac{(m+1)(2m+3) R_2^{2m+1} (R_2^2 - R_1^2)}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\right]\right\} + \\
&+ 2(\lambda + \mu) \sum_1^\infty {}_m \frac{X_m}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} \left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} \left\{ R_1^{2m-1}\left[2(m+1) R_1^2 + \right.\right.\\
&\left. + \frac{m(2m-1) R_2^{2m-1} (R_2^2 - R_1^2)}{R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}}\right] - l^{2m+1}\left.\left[2m + \frac{(m+1)(2m+3) R_1^{2m+1} (R_2^2 - R_1^2)}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}\right\}\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (60)
$$

Se poniamo quindi:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathfrak{L} = \sum_0^\infty {}_m \mathfrak{L}_m + \sum_1^\infty {}_m \mathfrak{L}_{-(m+1)}, \quad \mathfrak{M} = \sum_1^\infty {}_m \mathfrak{M}_m + \sum_0^\infty {}_m \mathfrak{M}_{-(m+1)}, \\
&\mathfrak{N} = \sum_0^\infty {}_m \mathfrak{N}_m + \sum_0^\infty {}_m \mathfrak{N}_{-(m+1)}, \\
&\Theta_m = \frac{\partial \mathfrak{L}_{m+1}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{m+1}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}_{m+1}}{\partial z}, \\
&\Theta_{-(m+1)} = \frac{\partial \mathfrak{L}_{-m}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{-m}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}_{-m}}{\partial z}
\end{aligned}
\right\} \quad (61)
$$

ed eguagliamo, nell'equazione (60), i termini di grado m e quelli di grado $-(m+1)$, si ottiene:

$$
\left.\begin{aligned}
\Theta_0 &= (6\lambda + 5\mu)\frac{-lX_{-1} + R_2 X_0}{R_2 - R_1} + \\
&+ 3(\lambda+\mu)\left(\frac{2R_2^2}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{3}{R_2 - R_1}\right) R_2 X_0 - \\
&- 3(\lambda+\mu)\left(\frac{2R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{2R_2 + R_1}{R_2 - R_1}\right)\frac{l}{R_1} X_{-1}, \\
0 &= (\lambda + 2\mu)\frac{R_2}{(R_2 - R_1)\, l}(R_1 X_0 - l X_{-1}), \\
(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\,\Theta_m &= -[2m(m-1)(\lambda+\mu) + \\
&+ (2m+1)(3\lambda + 2\mu)]\,(l^{2m+1} X_{-(m+1)} - R_2^{2m+1} X_m) + \\
&+ (\lambda+\mu)\frac{(m+1)(m+2)(2m+3) R_2^{2m+1}(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3}}(l^{2m+1} X_{-(m+1)} - R_1^{2m+1} X_m), \\
(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})\left(\frac{l}{R_2}\right)^{2m+1}\Theta_{-(m+1)} &= [-2(m+1)(m+2)(\lambda+\mu) + \\
&+ (2m+1)(3\lambda + 2\mu)]\,(l^{2m+1} X_{-(m+1)} - R_1^{2m+1} X_m) + \\
&+ (\lambda+\mu)\frac{m(m-1)(2m-1) R_1^{2m-1}(R_2^2 - R_1^2)}{(R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1}) R_2^2}(l^{2m+1} X_{-(m+1)} - R_2^{2m+1} X_m).
\end{aligned}\right\} \quad (62)
$$

La seconda di queste equazioni richiede che sia

$$R_1 X_0 - l X_{-1} = 0$$

ed allora dalla prima ed analoghe delle (58) risulta anche

$$R_1 Y_{i,0} - l Y_{i,-1} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Questo risultato mostra che i termini di grado -1 in θ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sono identicamente nulli.

Inoltre la prima delle (62) ci dà

$$X_0 = \frac{\Theta_0}{3\lambda + 2\mu}. \qquad (63)$$

Infine le ultime due delle (62) ci dànno:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta X_m = &\Big[2(m+1)(m+2)(\lambda+\mu)-(2m+1)(3\lambda+2\mu)-\\
&-(\lambda+\mu)\frac{m(m-1)(2m-1)R_1^{2m-1}(R_2^2-R_1^2)}{(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})R_2^2}\Big]\Theta_m\\
&-\Big[2m(m-1)(\lambda+\mu)+(2m+1)(3\lambda+2\mu)-\\
&-(\lambda+\mu)\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)R_2^{2m+1}(R_2^2-R_1^2)}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}}\Big]\left(\frac{l}{R_2}\right)^{2m+1}\Theta_{(m+1)},\\
\Delta X_{-(m+1)} = &\Big[2(m+1)(m+2)(\lambda+\mu)-(2m+1)(3\lambda+2\mu)-\\
&(\lambda+\mu)\frac{m(m-1)(2m-1)R_2^{2m-1}(R_2^2-R_1^2)}{(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})R_1^2}\Big]\left(\frac{R_1}{l}\right)^{2m+1}\Theta_m\\
&-\Big[2m(m-1)(\lambda+\mu)+(2m+1)(3\lambda+2\mu)-\\
&-(\lambda+\mu)\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)R_1^{2m+1}(R_2^2-R_1^2)}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}}\Big]\Theta_{-(m+1)},
\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

dove

$$\left.\begin{aligned}
\Delta = &(2m+1)^2(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)+\\
&+m(m-1)(m+1)(m+2)(\lambda+\mu)^2\left[4-\frac{(2m-1)(2m+3)(R_1R_2)^{2m-1}(R_2^2-R_1^2)^2}{(R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3})(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(64')$$

Come nel caso precedente, si dimostra che Δ è diverso da zero, per qualunque valore intero e positivo di m, per essere $3\lambda+2\mu>0, \mu>0$. Basta evidentemente limitarsi a dimostrare che di questa proprietà gode l'espressione

$$4-\frac{(2m-1)(2m+3)(R_1R_2)^{2m-1}(R_2^2-R_1^2)^2}{(R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3})(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})}.$$

Determinate così X_m e $X_{-(m+1)}$, resta deteminata θ dalla prima delle (56).

Per determinare ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, si sostituiscano le (53') nelle ultime relazioni (55). Tenendo conto della relazione $\frac{\partial\varpi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varpi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varpi_3}{\partial z}=0$, si trova intanto:

$$\left.\begin{aligned}
2\mu l \frac{\partial \varpi_1}{\partial l} &= \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} + \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\Big\{ \lambda\theta + (\lambda+\mu)\left(l\frac{\partial \theta}{\partial l} + \theta\right) - \\
&-(\lambda+\mu)\sum_1^\infty {}_m \frac{1}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1}\left[\frac{(m+2)(2m+3)(R_2^2-R_1^2)l^{2m+1}}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}} + 2m^2 - m - 4\right](R_1^{2m+1}X_m - \\
&-l^{2m+1}X_{-(m+1)}) + (\lambda+\mu)\sum_1^\infty {}_m \frac{1}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}}\left[\frac{(m-1)(2m-1)(R_1R_2)^{2m-1}(R_2^2-R_1^2)}{(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})l^{2m+1}} + \right. \\
&\left. -2m^2 - 5m + 1\right](R_2^{2m+1}X_m - l^{2m+1}X_{-(m+1)})\Big\}.
\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Le altre due formole, relative a ϖ_2 e ϖ_3, si deducono da quella scritta per disteso, al solito, permutando circolarmente $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$; x, y, z. Dividendo quindi per l, integrando, col notare che la funzione arbitraria introdotta dalla integrazione, dovendo essere armonica e regolare in S ed indipendente da l, si riduce ad una costante, che, per essere

$$-\frac{1}{R_1}\int_{\sigma_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right)d\sigma + \frac{1}{R_2}\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right)d\sigma = \int_\sigma (zM - yN)\, d\sigma = 0\ (*),$$

i termini di grado zero in ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sono nulli e quindi esiste una funzione armonica e regolare, a meno di una costante arbitraria, in S, della forma

$$\int \frac{dl}{l}\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right)\ (**),$$

(*) Basta perciò osservare che

$$\int_\sigma (zM - yN)\, d\sigma = \int_\sigma (\mathfrak{M}\cos nz - \mathfrak{N}\cos ny)\, d\sigma =$$

$$= -\int_S \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y}\right)dS = -\Sigma_i \int_S \left(\frac{\partial \mathfrak{M}_i}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}_i}{\partial y}\right)dS$$

ed eseguire la integrazione rispetto a ρ, tenendo conto, che, in virtù del teorema di reciprocità delle funzioni sferiche, un solo termine è diverso da zero.

(**) Nel caso contrario, come risulta considerando lo sviluppo in serie di funzioni sferiche di una qualunque funzione armonica in S, con l'integrazione si introduce un termine della forma $\int \frac{dl}{l} = \log l$, che non è armonico.

si può scrivere:

$$
\left.\begin{aligned}
2\mu\varpi_1 = & \int\frac{dl}{l}\left(\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z}\right)+\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\Big\{(2\lambda+\mu)\int\frac{dl}{l}\theta+(\lambda+\mu)\theta- \\
& -(\lambda+\mu)\sum_1^\infty m\frac{1}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1}\left[\frac{(m+2)(2m+3)(R_2^2-R_1^2)l^{2m+1}}{m(R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3})}+\right. \\
& \left.-\frac{2m^2-m-4}{m+1}\right](R_2^{2m+1}X_m-l^{2m+1}X_{(m+1)})+ \\
& -(\lambda+\mu)\sum_1^\infty m\frac{1}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}}\left[\frac{(m-1)(2m-1)(R_1R_2)^{2m-1}(R_2^2-R_1^2)}{(m+1)(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})l^{2m+1}}-\right. \\
& \left.+\frac{2m^2+5m-1}{m}\right](R_2^{2m+1}X_m-l^{2m+1}X_{-(m+1)})\Big\}+h_1,
\end{aligned}\right\} \quad (65)
$$

. . . .

indicando con h_1, h_2, h_3 tre costanti arbitrarie. Osserviamo ancora che, nelle formole precedenti, possiamo supporre nulli i termini di grado zero in θ, poichè θ, nelle (65), comparisce soltanto sotto segni di derivazione. Possiamo quindi ritenere che anche $\int\frac{dl}{l}\theta$ rappresenti una funzione armonica e regolare, ben definita, in S.

Restano ancora da determinare u, v, w. Possiamo perciò cominciare a notare che le (53″) si possono scrivere:

$$
\left.\begin{aligned}
l\frac{\partial u}{\partial l} = & \frac{\mathfrak{L}}{2\mu}-\frac{\lambda}{2\mu}\theta x-\varpi_3 y+\varpi_2 z-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\left(l\frac{\partial\theta}{\partial l}+\theta\right)+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}xX_0+ \\
& +\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\sum_1^\infty m\frac{(m+1)(2m+1)}{R_2^{2m-1}-R_1^{2m+1}}(R_2^{2m+1}X_m-l^{2m+1}X_{-(m+1)})+ \\
& +\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\sum_1^\infty m\frac{2m+1}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}}\Big\{-2+ \\
& +\frac{(m+2)[(R_1R_2)^2(R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1})+l^{2m+3}(R_2^2-R_1^2)]}{(R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3})l^2}\Big\}\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1}(R_1^{2m+1}X_m-l^{2m+1}X_{-(m+1)})+ \\
& +\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\sum_2^\infty m\frac{m-1}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}}\Big[-l^2+ \\
& +\frac{l^{2m+1}(R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1})-l^2(R_1R_2)^{2m-1}(R_2^2-R_1^2)}{(R_2^{2m-1}-R_1^{2m-1})l^{2m+1}}\Big]\frac{\partial}{\partial x}(R_2^{2m+1}X_m-l^{2m+1}X_{-(m+1)})+ \\
& +\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\sum_1^\infty m\frac{m+2}{R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1}}\Big[l^2- \\
& -\frac{(R_1R_2)^2(R_2^{2m+1}-R_1^{2m+1})+l^{2m+3}(R_2^2-R_1^2)}{R_2^{2m+3}-R_1^{2m+3}}\Big]\left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1}\frac{\partial}{\partial x}(R_1^{2m+1}X_m-l^{2m+1}X_{-(m+1)}).
\end{aligned}\right\} \quad (53''')
$$

. . . .

donde, dividendo per l ed integrando, si ricava:

$$\left.\begin{aligned}
2\mu u = & \int \frac{dl}{l}\,\varrho - \lambda \frac{x}{l}\int \theta\, dl - 2\mu\left(\frac{y}{l}\int \varpi_3\, dl - \frac{z}{l}\int \varpi_2\, dl\right) - \\
& - (\lambda+\mu)\, x\,\theta + (\lambda+\mu)\, x\, X_0 + \\
& + (\lambda+\mu)\, x \sum_1^\infty{}_m \frac{2m+1}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} \left(R_2^{2m+1} X_m - l^{2m+1} X_{-(m+1)}\right) + \\
& + (\lambda+\mu)\, x \sum_1^\infty{}_m \frac{2m+1}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} \left[\frac{2}{m} + \right. \\
& \left. + \frac{(m+2)\, l^{2m+3}(R_2^2 - R_1^2) - (m+1)(R_1 R_2)^2 (R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1})}{(m+1)(R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3})\, l^2}\right] \left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} (R_1^{2m+1} X_m - \\
& - l^{2m+1} X_{-(m+1)}) + (\lambda+\mu) \sum_2^\infty{}_m \frac{m-1}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} \left[-\frac{l^2}{m+1} + \right. \\
& \left. + \frac{m\, l^{2m+1}(R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}) + (m-1)\, l^2 (R_1 R_2)^{2m-1} (R_2^2 - R_1^2)}{m(m-1)(R_2^{2m-1} - R_1^{2m-1})\, l^{2m+1}}\right] \frac{\partial}{\partial x}(R_2^{2m+1} X_m - \\
& - l^{2m+1} X_{-(m+1)}) + (\lambda+\mu) \sum_1^\infty{}_m \frac{m+2}{R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}} \left[-\frac{l^2}{m} + \right. \\
& \left. + \frac{(m+1)(R_1 R_2)^2 (R_2^{2m+1} - R_1^{2m+1}) - (m+2)\, l^{2m+3}(R_2^2 - R_1^2)}{(m+1)(m+2)(R_2^{2m+3} - R_1^{2m+3})}\right] \left(\frac{R_2}{l}\right)^{2m+1} \frac{\partial}{\partial x}(R_1^{2m+1} X_m - \\
& - l^{2m+1} X_{-(m+1)}) + k_1,
\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

. . . .

Su queste formole facciamo ancora le osservazioni seguenti. Poichè

$$-\frac{1}{R_1}\int_{\sigma_1} \varrho\, d\sigma + \frac{1}{R_2}\int_{\sigma_2} \varrho\, d\sigma = \int_\sigma L\, d\sigma = 0$$

possiamo ritenere che $\int \frac{dl}{l}\,\varrho$ rappresenti una funzione armonica e regolare in S e ben determinata; poichè i termini di grado -1 in θ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sono nulli, le espressioni $\frac{1}{l}\int \theta\, dl$; $\frac{1}{l}\int \varpi_1\, dl, \ldots$ rappresenteranno delle funzioni armoniche come sopra; in ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 son contenute le costanti arbitrarie h_1, h_2, h_3; finalmente, k_1, k_2, k_3 come funzioni biarmoniche e regolari in S e indipendenti da l sono costanti arbitrarie.

6. *Casi in cui sulle due sfere limiti sono date altre condizioni.* Servendoci, opportunamente, delle formole (48) e (66) potremmo risolvere, senza grande difficoltà, i problemi in cui, sulle due superficie sferiche, sono date le

componenti degli spostamenti secondo uno degli assi coordinati e le componenti delle tensioni secondo gli altri due assi coordinati, ovvero le componenti degli spostamenti secondo due assi coordinati e le componenti delle tensioni secondo l'altro asse coordinato. Ci potrebbe perciò giovare il tener presente quello che abbiamo fatto in (I[a]) per risolvere gli analoghi problemi per la sfera piena.

Con procedimenti analoghi ai precedenti si potrebbero risolvere anche tutti quei problemi nei quali sulle due superficie sferiche si danno condizioni differenti, ed analoghe a quelle già accennate pel caso del corpo limitato da da due piani paralleli. Bisognerebbe allora far uso della funzione armonica che su una superficie sferica assume dati valori, mentre, sull'altra superficie sferica, è la derivata normale che assume valori assegnati (*).

Ed infine accenniamo anche ai problemi in cui sulle due superficie sferiche sono dati gli spostamenti normali e le tensioni tangenziali, o viceversa, le tensioni normali e gli spostamenti tangenziali, od anche su una superficie sferica gli spostamenti normali e le tensioni tangenziali e sull'altra le tensioni normali e gli spostamenti tangenziali, che si possono risolvere tenendo presente il procedimento da noi seguito per trattare gli analoghi problemi per la sfera piena, nell' ultimo paragrafo di una Memoria del Circ. mat. di Palermo (t. XVII, 1903).

(*) Oppure, ancora più semplicemente, si potrebbe partire sempre dalle (48) e seguire il metodo generale tenuto dal Thomson, che consiste nell' applicare metodicamente l'osservazione evidente che qualunque funzione biarmonica e regolore in S è la somma di una funzione armonica che in superficie acquista gli stessi valori della funzione biarmonica e di una funzione biarmonica che si annulla in superficie. Se, p. es., sono dati i valori degli spostamenti su σ_1 e quelli delle tensioni su σ_2, i valori di U_m, V_m, W_m sono soltanto in parte determinati. La loro determinazione completa si otterrà sottoponendo le funzioni biarmoniche $\lambda\,\theta\,x + 2\,\mu\left(l\dfrac{\partial U}{\partial l} + \varpi_3\,y - \varpi_2\,z\right), \ldots$ ad assumere dati valori su σ_2. Per soddisfare a queste condizioni si costruiranno le funzioni biarmoniche precedenti e si trascureranno i termini che si annullano in superficie fino ad avere una funzione armonica. Il problema allora sarà semplificato e facilmente risoluto.

Sopra le serie di funzioni analitiche.

(*Di* Giuseppe Vitali, *a Voghera.*)

Un problema molto interessante dell'analisi è quello di determinare le condizioni che si richiedono perchè una serie di funzioni analitiche, convergente in un campo connesso, sia in tutto il campo una funzione analitica.

Dopo il classico teorema di Weierstrass su questo argomento, altri contributi notevoli troviamo nei lavori dell'Arzelà (*) e dell'Osgood (**). Un teorema dell'Osgood (***) ha ricevuto una nuova dimostrazione dall'Arzelà (****) ed io (*****) basandomi su questa dimostrazione ho potuto facilmente renderlo più generale.

In questa Memoria io dò nuovi risultati sulle serie di funzioni analitiche che mi sembrano abbastanza interessanti e siccome una delle basi principali è costituita dal teorema di Osgood da me generalizzato, ne riproduco la dimostrazione completa, premettendo anche i concetti fondamentali sui quali si appoggia la dimostrazione e che sono dovuti al prof. Arzelà.

(*) V. C. Arzelà, *Sulle serie di funzioni*, Parte 2.ª, § 18. (Memoria letta alla R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna nella sessione del 27 Maggio 1900.)

(**) V. Osgood, *Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic' of a complex variable*, ecc., § 1, Theor. I. *Annals of Mathématics*, Second séries, N.ro 1, October, 1901.

(***) Ibidem.

(****) Arzelà, *Sulle serie di funzioni analitiche.* Nota letta alla R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna nell'Adunanza del 30 Novembre 1902.

(*****) G. Vitali, *Sulle serie di funzioni analitiche.* Rendiconti del R. Istituto lombardo 1903.

CAPITOLO PRIMO.

Sulle varietà di funzioni di variabile reale (*).

§ 1.° Sia

$$G = \{ u(x) \}$$

una varietà di funzioni $u(x)$ definite in un intervallo finito (a, b), tutte comprese fra due numeri finiti l ed L. Sia inoltre $v(x)$ un'altra funzione soddisfacente alla stessa condizione. Se per qualsiasi quantità δ positiva piccola a piacere esisteranno infinite funzioni $u(x)$ della G per cui

$$v(x) - \delta < u(x) < v(x) + \delta$$

si dirà che la $v(x)$ è una *funzione limite della varietà.*

§ 2.° Supponiamo che la G ammetta una funzione limite $v(x)$ continua in tutto l'intervallo (a, b). Allora, prefissata una grandezza positiva σ piccola a piacere, si potrà determinare un segmento ε tale che in ogni tratto d'ampiezza ε dell'intervallo (a, b) la $v(x)$ faccia un'oscillazione minore di $\frac{\sigma}{3}$. Le infinite funzioni $u(x)$ per cui

$$v(x) - \frac{\sigma}{3} < u(x) < v(x) + \frac{\sigma}{3},$$

faranno in ogni tratto di ampiezza ε un'oscillazione minore di σ. Possiamo concludere facilmente che « se la G ha una funzione limite continua e

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$$

sono delle quantità positive tendenti a zero, esisteranno dei segmenti

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$$

e delle sottovarietà di G

$$G_1, G_2, G_3 \ldots$$

ciascuna sottovarietà della precedente, tali che una funzione di G_n fa in un tratto di ampiezza ε_n una oscillazione minore di σ_n ».

(*) V. Arzelà, m. c. *Sulle serie di funzioni*, Parte 1.ª, III, § 2.

§ 3.° Supponiamo ora che siano verificate tali condizioni e dimostriamo che se le funzioni di G sono comprese fra due limiti finiti l ed L esiste una funzione limite continua di G.

Sia $u_1(x)$ una funzione di G_1 e supponiamo che non tutte le funzioni di G_1 cadono nell'intervallo

$$[u_1(x) - 3\sigma_1, \quad u_1(x) + 3\sigma_1].$$

Sia $u_2(x)$ una funzione che non soddisfa a questa condizione. Supponiamo poi che esista una funzione $u_3(x)$ che non cada completamente in nessuno degli intervalli

$$[u_1(x) - 3\sigma_1, \quad u_1(x) + 3\sigma_1]$$
$$[u_2(x) - 3\sigma_1, \quad u_2(x) + 3\sigma_1]$$

e così via di seguito.

Sarà impossibile ottenere in questo modo infinite funzioni.

Supponiamo che se ne ottengano infinite e indichiamo con $x_{r,s}$ un punto in cui le $u_r(x)$ $u_s(x)$ differiscono fra loro per più di $3\sigma_1$. Sia X_0 un punto limite dei punti

$$x_{1,1},\ x_{1,2},\ x_{1,3}\ldots$$

Nell'intervallo

$$\left(X_0 - \frac{\varepsilon_1}{4}, \quad X_0 + \frac{\varepsilon_1}{4}\right)$$

cadranno infiniti di tali punti. Siano dessi

$$x_{1,s_1},\ x_{1,s_2},\ x_{1,s_3}\ldots \qquad (s_1 < s_2 < s_3\ldots).$$

Indichiamo con $\overline{G}_1$ la varietà

$$u_1,\ u_{s_1},\ u_{s_2},\ u_{s_3}\ldots$$

Sia X_1 un punto limite di

$$x_{s_1,s_2},\ x_{s_1,s_3},\ x_{s_1,s_4}\ldots$$

Nell'intervallo

$$\left(X_1 - \frac{\varepsilon_1}{4}, \quad X_1 + \frac{\varepsilon_1}{4}\right)$$

cadranno infiniti di tali punti. Siano dessi

$$x_{s_1,r_1},\ x_{s_1,r_2},\ x_{s_1,r_3}\ldots \qquad (r_1 < r_2 < r_3\ldots).$$

Indichiamo con $\overline{G}_{s_1}$ la varietà

$$u_{s_1},\ u_{r_1},\ u_{r_2},\ u_{r_3} \ldots$$

Sia X_{s_1} un punto limite di

$$x_{r_1 r_2},\ x_{r_1 r_3},\ x_{r_1 r_4} \ldots$$

e così via di seguito.

I punti

$$X_0,\ X_1,\ X_{s_1} \ldots$$

ammetteranno certo un punto limite X. Nell'intervallo

$$\left(X - \frac{\varepsilon_1}{4},\quad X + \frac{\varepsilon_1}{4}\right)$$

cadranno infiniti di tali punti. Siano essi

$$X_{\nu_1},\ X_{\nu_2},\ X_{\nu_3} \ldots \qquad (\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \ldots).$$

Nell'intervallo

$$\left(X - \frac{\varepsilon_1}{2},\quad X + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \tag{1}$$

cadranno adunque completamente tutti gli intervalli

$$\left(X_{\nu_i} - \frac{\varepsilon_1}{4},\quad X_{\nu_i} + \frac{\varepsilon_1}{4}\right) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3 \ldots).$$

Le varietà

$$\overline{G}_{\nu_1}\ \overline{G}_{\nu_2}\ \overline{G}_{\nu_3} \ldots$$

sono ciascuna sottovarietà della precedente e segue perciò subito che le funzioni

$$u_{\nu_1},\ u_{\nu_2},\ u_{\nu_3} \ldots$$

sono tali che per ogni coppia di esse esiste in (1) un punto in cui differiscono per più di $3\sigma_1$. Ma allora in tutto l'intervallo (1), che è di ampiezza ε_1 esse differiranno fra loro *a due a due* per più di σ_1, il che non può accadere restando esse comprese fra i limiti finiti l ed L.

Dobbiamo dunque concludere che ciascuna delle funzioni di G_1 cade completamente dentro uno degli intervalli

$$(u_i - 3\sigma_1,\ u_i + 3\sigma_1)$$

$(i = 1,\ 2,\ 3 \ldots n)$,

$$u_1\ u_2\ u_3 \ldots,\ u_n$$

essendo un numero finito di funzioni convenientemente scelte di G_1. In uno almeno di tali intervalli cadranno infinite funzioni di ogni G_n.

Sia tale l'intervallo

$$(u_1 - 3\,\sigma_1, \quad u_1 + 3\,\sigma_1). \tag{2}$$

Sia G'_2 la varietà delle funzioni di G_2 che cadono completamente in esso. A questo G'_2 apparterrà una funzione u_2 tale che l'intervallo

$$(\bar{u}_2 - 3\,\sigma_2, \quad u_2 + 3\,\sigma_2),$$

e più precisamente nella parte comune ad esso ed all'intervallo (2), cadono infinite funzioni di ogni G_n.

Sia G'_3 la varietà delle funzioni di G_3 che cadono completamente in esso ed $\bar{u}_3$ una funzione di G'_3 tale che in

$$(\bar{u}_3 - 3\,\sigma_3, \quad \bar{u}_3 + 3\,\sigma_3)$$

cadono infinite funzioni di ogni G_n, ecc., ecc.

La successione delle funzioni

$$u_1, \ \bar{u}_2, \ \bar{u}_3, \ldots$$

converge manifestamente *in ugual grado* verso una funzione $v(x)$ che sarà una funzione limite della varietà.

Ora poichè

$$| v(x) - \bar{u}_n | < 3\,\sigma_n$$

e poichè in un tratto d'ampiezza ε_n la u_n fa un'oscillazione minore di σ_n, la $v(x)$ farà in un tratto d'ampiezza ε_n un'oscillazione minore di $7\,\sigma_n$, ossia la funzione $v(x)$ è in tutto l'intervallo (a, b) una funzione continua.

Dunque:

" **Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà G di funzioni com-**
" **prese fra due limiti finiti, ammetta una funzione limite continua è che corrispon-**
" **dentemente a certe quantità positive tendenti a zero**

" $$\sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3 \ldots$$

" **esistano dei segmenti**

" $$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3 \ldots$$

" **e delle sottovarietà di G**

" $$G_1, \ G_2, \ G_3 \ldots$$

" **ciascuna sottovarietà delle precedenti, tali che una funzione di G_n faccia in un**
" **tratto d'ampiezza ε_n un'oscillazione minore di σ_n.** "

§ 4. Se le funzioni di una varietà G sono tali che per ogni σ piccolo a piacere esista un tratto ε tale che tutte le funzioni di G facciano in un tratto d'ampiezza ε un'oscillazione minore di σ, si dirà che la varietà G è *ugualmente continua.*

È manifesto che una varietà G egualmente continua di funzioni comprese fra limiti finiti l ed L ammette una funzione limite continua.

§ 5. « Una varietà di funzioni sarà ugualmente continua se i rapporti « incrementali di tutte le sue funzioni sono compresi fra due numeri finiti « l e L. »

Invero se $u(x)$ è una funzione della varietà, se $x_1 \, x_2$ sono due punti dell'intervallo e se inoltre, p. es., $|L| \geqq |l|$, sarà

$$\left| \frac{u(x_1) - u(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqq |L|,$$

ossia

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqq |x_1 - x_2| \, |L|.$$

Il che dimostra appunto che, se noi prefissiamo un σ piccolo a piacere, in ogni intervallo di ampiezza $\frac{\sigma}{2|L|}$ le funzioni delle varietà G hanno tutte una oscillazione minore di σ.

§ 6. Se G è una varietà di funzioni continue che in un intervallo (a, b) hanno sempre la derivata compresa fra limiti finiti l ed L, essa è ugualmente continua, poichè certamente i rapporti incrementali in (a, b) delle sue funzioni sono compresi fra i limiti l ed L. Se inoltre le derivate sono continue le funzioni di G sono esse pure comprese fra limiti finiti purchè ognuna di esse sia in qualche punto compresa fra due limiti finiti fissi. Basta infatti pensare che le funzioni di G sono gli integrali delle loro derivate e che un integrale non può fare in un intervallo una oscillazione superiore al prodotto del massimo modulo della funzione che si integra per l'ampiezza dell'intervallo. Concludiamo che

" Se G è una varietà di funzioni derivabili le cui derivate sono continue e " comprese fra limiti finiti l ed L, ammetterà una funzione limite continua, purchè " ciascuna delle funzioni di G sia in qualche punto compresa fra due limiti finiti " fissi. "

§ 7. Questi risultati si possono estendere facilmente alla varietà di funzioni di due variabili. Così noi potremo anche dire che

" Se G è una varietà di funzioni reali di due variabili le cui derivate rispetto " a ciascuna delle variabili sono continue e comprese fra limiti finiti l ed L, inoltre " se ciascuna di dette funzioni è in qualche punto compresa fra due limiti finiti " fissi, allora la varietà G ammette una funzione limite continua. "

CAPITOLO SECONDO.

Applicazione delle proprietà precedenti alla dimostrazione del teorema di Osgood ampliato (*).

§ 1. Sia

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \ldots\ \varphi_n(z),\ \ldots \qquad (\alpha)$$

una successione di funzioni analitiche convergenti in un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ di un campo connesso C nel quale esse sono monodrome ed hanno i moduli delle derivate minori tutti di una grandezza M.

Indichiamo con

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n,\ \ldots \qquad (1)$$

le parti reali e con

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_n,\ \ldots$$

i coefficienti dell'immaginario delle predette funzioni analitiche.

Le (1), convergendo nel punto (x_0, y_0), restano ivi comprese fra limiti finiti, inoltre in tutto C hanno le derivate rispetto alle due variabili che sono continue e comprese fra $-M$ ed M.

Dunque le (1) ammettono una funzione limite continua $u\,(x,\ y$.

Sia

$$u_{r_1},\ u_{r_2},\ \ldots\ u_{r_n},\ \ldots$$

una successione di funzioni (1) che converge in ugual grado verso $u\,(x,\ y)$.

Le corrispondenti funzioni

$$v_{r_1},\ v_{r_2},\ \ldots\ v_{r_n},\ \ldots \qquad (2)$$

(*) Arzelà n. c., *Sulla serie di funzioni analitiche* e Vitali n. c.

ammetteranno una funzione limite $v(x, y)$. Sia

$$v_{s_1},\ v_{s_2}, \dots\ v_{s_n}, \dots$$

una successione di funzioni (2) convergente in ugual grado verso $v(x, y)$. Le funzioni

$$\varphi_{s_1} = u_{s_1} + i\, v_{s_1},\ \ \varphi_{s_2} = u_{s_2} + i\, v_{s_2}, \dots$$

convergeranno in ugual grado verso la funzione $u(x\, y) + i\, v(x\, y)$.

Dunque nelle condizioni poste esiste nella successione (α) una successione parziale convergente in ugual grado verso una funzione analitica monodroma in tutto C.

§ 2. Siano ora

$$\psi_1(z),\ \psi_2(z), \dots\ \psi_n(z), \dots$$

delle funzioni analitiche monodrome in tutto un campo connesso C nel quale restano in valore assoluto minori di una quantità fissa M.

Sia z_0 un punto di C e si ponga

$$\varphi_1(z) = \int_{z_0}^{z} \psi_1(z)\, d\, z,\quad \varphi_2(z) = \int_{z_0}^{z} \psi_2(z)\, d\, z; \dots$$

Le

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \dots$$

si trovano manifestamente nelle condizioni delle (α) del precedente paragrafo e perciò esiste una funzione analitica $\varphi(z)$ verso la quale converge in ugual grado una successione estratta da esse

$$\varphi_{s_1}(z),\ \varphi_{s_2}(z), \dots$$

Allora la successione

$$\varphi'_{s_1}(z) = \psi_{s_1}(z),\ \varphi'_{s_2}(z) = \psi_{s_2}(z), \dots$$

converge in ugual grado verso la funzione analitica $\varphi'(z)$.

Si può adunque dire che

« Se

« $$\psi_1(z),\ \psi_2(z), \dots$$

« sono delle funzioni analitiche monodrome in tutto un campo connesso C, « nel quale restano in valore assoluto minori di una quantità fissa M, esiste

« una funzione analitica $\psi(z)$ verso la quale converge in ugual grado una « conveniente successione di quelle funzioni. »

§ 3. Siano ancora

$$\psi_1(z), \ \psi_2(z), \ldots \tag{I}$$

delle funzioni analitiche in tutto un campo connesso C, nel quale restano in valore assoluto minori di una quantità fissa M. Inoltre supponiamo che la successione (I) converga in infiniti punti di C aventi un punto limite nell'interno di C.

Manifestamente esiste una sola funzione analitica $\psi(z)$ verso cui convergono in ugual grado successioni estratte dalla (I), perchè due funzioni di tal fatta dovrebbero coincidere in tutti i punti di convergenza della (I) e quindi completamente. Ma io dico di più che la (I) *converge in ugual grado* verso tal funzione analitica.

Diffatti se ciò non fosse esisterebbero per un ε abbastanza piccolo infinite funzioni (I) che in qualche punto di C differiscono da $\psi(z)$ in valore assoluto per più di ε. Tali funzioni soddisfano a tutte le condizioni delle (I) e per esse esiste quindi una funzione limite $\theta(z)$ verso la quale una successione di esse converge in ugual grado. Siccome le funzioni di tale successione differiscono ciascuna in qualche punto dalla $\psi(z)$ in valore assoluto per più di ε, la $\theta(z)$ non può coincidere con $\psi(z)$. Ciò è contrario a quanto abbiamo prima concluso.

Dunque *la* (I) *converge in ugual grado verso* $\psi(z)$.

§ 4. Segue dai precedenti risultati che
se la serie

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots, \tag{1}$$

i cui termini sono funzioni analitiche e uniformi in una regione C del piano complesso, soddisfa alla condizione che per tutti i punti di C e per tutti i valori di n si abbia

$$|f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)| \leq M,$$

M **essendo una costante fissa, allora esiste una o più funzioni analitiche verso le quali convergono in egual grado successioni estratte dalla successione**

$$\left. \begin{array}{l} S_1(z) = f_1(z), \ S_2(z) = f_1(z) + f_2(z), \ldots \\ S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z); \ldots \end{array} \right\} \tag{2}$$

La condizione che noi abbiamo ora supposto soddisfatta dalla (1) figura anche nell'enunciato del teorema di Osgood già citato e noi potremo chiamarla *condizione di* Osgood.

Questa condizione di per se sola porta l'esistenza delle funzioni analitiche limiti della successione (2), secondo che è stabilito nella citata Nota dell'Arzelà sulle serie di funzioni analitiche.

Se la (1), oltrechè soddisfare alla condizione di Osgood, converge in infiniti punti aventi per punto limite un punto interno a C, allora la (2) ha una sola funzione limite verso la quale la (1) converge in ugual grado.

L'Osgood per arrivare alla medesima conclusione fa delle ipotesi più ampie e cioè suppone che la (1) converga in un gruppo di punti uniformemente denso in C.

CAPITOLO TERZO.

Le serie convergenti di funzioni analitiche.

§ 1. Teorema: « *Se in un campo T di uno spazio S_m ad m dimen-*
« *sioni sono definite infinite funzioni continue*

« $$u_1\ u_2 \ldots \qquad (1)$$

« *e per ogni punto di T esiste un numero M tale che in quel punto tutte le*
« *funzioni* (1) *restino in valore assoluto minori di M, esiste in ogni porzione*
« *di T un campo parziale C pel quale esiste un numero positivo K tale che*
« *in ogni punto di C le* (1) *restano in valore assoluto minori di K.* »

Dimostrazione.

Siano

$$A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots$$

infinite quantità positive crescenti e tendenti all'infinito.

Se i moduli delle (1) non resteranno in tutto T minori o tutt'al più uguali ad A_1, potrò trovare una prima funzione u_{n_1} la quale in un punto almeno di T ha il modulo maggiore di A_1. Essendo u_{n_1} continua, vi sarà un intorno di quel punto in tutto il quale è $|u_{n_1}| > A_1$. Sia T_1 questo intorno. In esso la $|u_{n_1}|$ avrà un limite superiore finito e si potrà quindi trovare un A_{r_1} per cui in tutto T_1 sia $|u_{n_1}| < A_{r_1}$. Se in T_1 non tutte le $|u_n|$ sono

$\leq A_{r_1}$, potrò trovare una prima u_{n_2} per cui in un punto di T_1, e quindi in un campo T_2 interno a T_1, è $|u_{n_2}| > A_{r_1}$. Sarà $n_2 > n_1$. Ma io potrò trovare un A_{r_2} per cui in tutto T_2 sia $|u_{n_2}| < A_{r_2}$, e se non tutte le $|u_n|$ sono $\leq A_{r_2}$ in tutto T_2 avrò una prima $u_{n_3} (n_3 > n_2)$ per cui in un campo T_3 interno a T_2 è $|u_{n_3}| > A_{r_2}$ e così via di seguito. Questo processo non si potrà prolungare indefinitamente perchè altrimenti gli infiniti campi

$$T', \; T_1, \; T_2, \ldots$$

avrebbero almeno un punto comune P, nel quale le u_n assumono dei valori assoluti grandi quanto si vuole. Bisogna dunque concludere che in T vi è un campo parziale C in cui tutte le u_n restano in valore assoluto minori di una medesima quantità finita.

Invece di prendere le mosse dal campo T sarei potuto partire da una qualsiasi regione parziale di T. Resta così dimostrato il nostro teorema.

§ 2. Siano

$$u_1, \; u_2, \ldots \tag{1}$$

delle funzioni analitiche ed uniformi in una regione finita T del piano complesso e per ogni punto di T esista un numero positivo M tale che in quel punto tutte le funzioni suddette restino in valore assoluto minori di M. In virtù del teorema precedente esiste in ogni porzione di T un campo C in ogni punto del quale tutte le u_n restano in valore assoluto minori di una conveniente quantità positiva K. In particolare ciò avviene se in ogni punto di T esiste un limite finito u_∞ delle u_n col tendere di n all'infinito. In tali condizioni, pel § 4 del capitolo 2.°, la funzione u_∞ è analitica nel campo C e in tutto C la successione (1) converge in ugual grado verso u_∞. Segue che

" Se una serie di funzioni analitiche ed uniformi esistenti in un campo T converge in ogni punto di T, esiste in ogni porzione di T un campo parziale C nel quale la serie rappresenta una funzione analitica verso cui converge in ugual grado. " (*)

§ 3. Sia C una porzione connessa del campo T, alla quale corrisponda un numero positivo K tale che in C tutte le (1) restino in valore assoluto minori di K. Se K_1 è una grandezza positiva maggiore di K, è certo che in tutto C le (1) sono in valore assoluto minori di K_1; ma può darsi che

(*) Questo teorema non è che il teorema II della citata Memoria di Osgood.

esista addirittura un campo C_1 comprendente C e più grande di C in tutto il quale è ogni funzione (1) in valore assoluto non superiore a K_1. Se

$$K_1\ K_2 \ldots K_r \ldots$$

sono grandezze positive tendenti all'infinito e

$$C_1\ C_2 \ldots C_r \ldots$$

sono i massimi campi connessi comprendenti C e nei quali nessuna delle (1) supera in valore assoluto rispettivamente

$$K_1\ K_2 \ldots K_r \ldots,$$

il luogo di tutti i punti appartenenti a qualcuno dei campi

$$C_1\ C_2 \ldots C_r \ldots$$

costituirà un campo connesso $\overline{C}$ contenuto in T dentro al quale le (1) convergono verso una funzione analitica. In ogni campo interno a $\overline{C}$ le (1) *convergono poi in ugual grado.*

Può darsi che il campo $\overline{C}$ così ottenuto sia costituito da tutto il campo T. Se ciò non succede si potrà formare in T un altro campo $\overline{C}_1$ formato come $\overline{C}$, ed esso sarà completamente esterno a $\overline{C}$.

Se dei campi della specie di $\overline{C}$ ne esistono infiniti in T essi formeranno un gruppo *numerabile* appunto perchè sono uno esterno all'altro. Essi si addenseranno poi dovunque in T, ossia o un punto di T appartiene ad un campo $\overline{C}$ oppure vicino quanto si vuole ad esso vi saranno punti di un campo $\overline{C}$.

§ 4. Che esistono successioni convergenti di funzioni analitiche uniformi che ammettono in una regione del piano un gruppo numerabile di campi $\overline{C}$ lo proverò ora con un facile esempio che io ho potuto costruire facendo tesoro delle considerazioni del Runge contenute nelle sue Note: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* e *Zur Theorie der analytischen Functionen* (*).

Consideriamo il tratto (0, 1) dell'asse reale sul piano della variabile complessa. Indichiamo con $x_{1,1}$ il suo punto di mezzo e asportiamo dal tratto (0, 1)

(*) *Acta Mathematica*, tomo 6.

un segmento di lunghezza $\delta_1 = \frac{1}{2}$ che abbia il suo punto di mezzo in x_{11}. Indichiamo con x_{21}, x_{22} i punti di mezzo dei due segmenti che restano ed asportiamo due segmenti ciascuno di lunghezza δ_2 uguale alla metà di uno dei segmenti restati e che abbiano i loro punti di mezzo rispettivamente nei punti $x_{2,1}$ $x_{2,2}$. Indichiamo con $x_{3,1}$, $x_{3,2}$, $x_{3,3}$, $x_{3,4}$ i punti di mezzo dei 4 segmenti restati e asportiamo da ciascuno di essi un segmento di lunghezza δ_3 uguale alla sua metà e che abbia il suo punto di mezzo rispettivamente nel punto di mezzo del segmento da cui si asporta e così via di seguito.

Consideriamo poi le funzioni

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{\varphi_1 \delta_1}{z - x_{11}}, \qquad v_2 = \dfrac{\varphi_2 \delta_2}{2}\left(\dfrac{1}{z - x_{21}} + \dfrac{1}{z - x_{22}}\right), \\ v_3 = \left(\dfrac{1}{z - x_{31}} + \dfrac{1}{z - x_{3,2}} + \dfrac{1}{z - x_{33}} + \dfrac{1}{z - x_{34}}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (\omega)$$

dove

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

è una successione di quantità costanti tendenti a zero.

Io dico che queste funzioni tendono a zero in tutto il piano complesso. Invero se z_0 è un punto fuori dell'intervallo $(0 \ldots 1)$ o più in generale se z_0 non è un punto limite del gruppo di punti

$$x_{11};\ x_{21},\ x_{22};\ x_{31},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{3,4};\ \ldots \qquad (\mathrm{I})$$

le differenze

$$z_0 - x_{11};\ z_0 - x_{21},\ z_0 - x_{22};\ \ldots$$

resteranno in valore assoluto sempre maggiori di una quantità finita e non nulla σ determinabile. Quindi l'n^a delle funzioni che noi consideriamo sarà in valore assoluto minore di $|\varphi_n| \dfrac{\delta_n}{\sigma}$. E siccome col tendere di n all'infinito le δ_n e le φ_n tendono a zero, la successione delle (ω) tende a zero in ogni punto che non sia punto limite del gruppo (I).

E in un punto limite di (I) come si comporta la successione (ω)? Intanto se z_0 è un tal punto esso non sarà certo interno a nessuno dei tratti che abbiamo asportati nella costruzione dei punti (I).

Ma i punti $x_{r,s}$ sono punti di mezzo di segmenti asportati di ampiezza δ_r, quindi

$$|z_0 - x_{rs}| \geq \frac{\delta_r}{2}$$

$$\left|\frac{1}{z_0 - x_{rs}}\right| \leq \frac{2}{\delta_r}.$$

Si ha dunque l'r^a delle funzioni (ω) sarà in valore assoluto non superiore a $|\varphi_r| \delta_r \cdot \frac{2}{\delta_r}$ cioè a $2|\varphi_r|$. Ma φ_r col tendere di r all'infinito tende a zero e quindi le (ω) tendono a zero in ogni punto del piano complesso.

Costruiamo ora intorno ai punti

$$x_{r,1}\ x_{r,2}\ x_{r,3}, \ldots$$

dei cerchi con centro in essi e raggio ε_r minore di $\frac{\delta_r}{2}$ e scegliamo ε_r così piccolo che sui contorni di tutti questi cerchi sia $|v_r| > 1$, il che è manifestamente possibile. Facciamo scorrere questi cerchi sul piano in guisa che i loro centri si muovano parallelamente all'asse immaginario nel senso positivo fino all'infinito ed asportiamo le striscie da essi descritte.

Poi dalla parte restante asportiamo tutto ciò che è fuori dal cerchio che ha centro in x_{11} e raggio r.

Indichiamo con A_r il campo semplicemente connesso che resta. Noi possiamo costruire una funzione razionale intera $g_r(z)$ che in tutto A_r compreso il contorno differisca da v_r per meno di $\frac{1}{r}$ (*). La successione di funzioni

$$g_1(z),\ g_2(z), \ldots$$

converge manifestamente verso lo zero in ogni punto del piano complesso. Essa però non converge in ugual grado in ogni porzione finita del piano. Converge in ugual grado in quelle porzioni del piano complesso che non sono attraversate nè toccate da alcuna delle semirette del semipiano positivo parallele all'asse immaginario che escono dai punti limiti del gruppo (I). Non converge in ugual grado nelle porzioni del piano che non soddisfano a queste condizioni.

Così pure la successione di funzioni

$$g_1(1-z),\ g_2(1-z),\ g_3(1-z), \ldots$$

(*) V. Runge, m. c., pag. 238.

converge verso zero in tutto il piano e converge in ugual grado in tutte e sole quelle porzioni del piano complesso che non sono attraversate nè toccate da alcuna delle semirette del semipiano negativo parallele all'asse immaginario che escono dai punti limiti di (I).

La successione di funzioni

$$G_1(z) = g_1(z) + g_1(1-z), \quad G_2(z) = g_2(z) + g_2(1-z), \ldots,$$

converge verso zero in tutto il piano e ammette come campi $\overline{C}$ le striscie di piano comprese fra le parallele all'asse immaginario condotte per le coppie di punti

$$x_{r,s} - \frac{\delta_r}{2}, \quad x_{r,s} + \frac{\delta_r}{2}.$$

Queste striscie sono esterne l'una all'altra e costituiscono un gruppo numerabile.

§ 5. Nell'esempio or ora considerato le funzioni analitiche definite dalla successione nei diversi campi $\overline{C}$ sono i prolungamenti l'una dell'altra. Noi però non siamo in grado di affermare se ciò avviene sempre o no.

CAPITOLO QUARTO.

Condizioni sufficienti perchè una serie convergente di funzioni analitiche definisca una funzione analitica.

§ 1. Supponiamo che

$$u_1, \ u_2, \ldots \tag{1}$$

sia una successione di funzioni analitiche finite e monodrome convergenti in un gruppo infinito di punti aventi un punto limite nell'interno di un campo connesso C. Supponiamo inoltre che le funzioni (1) non assumano in alcun punto di C nessuno dei valori di un certo intorno D fisso di un punto A.

Sia δ la più piccola distanza di A dai punti del contorno di D. Manifestamente i moduli delle funzioni analitiche

$$\frac{1}{u_1 - A}, \quad \frac{1}{u_2 - A}, \ldots \tag{2}$$

non superano mai il valore $\frac{1}{\delta}$; inoltre esse costituiscono una successione convergente in infiniti punti aventi un punto limite nell'interno di C.

La successione (2) converge adunque (v. Cap. 2.°, § 4) in tutto C verso una funzione analitica w. Questa funzione w non può essere identicamente nulla perchè nei punti in cui la (1) converge non è certo nulla. Perciò sarà in tutto C.

$$\lim_{n=\infty} u_n = A + \frac{1}{w} \cdot$$

Questa funzione potrà non essere sempre finita, ma in un campo qualsiasi interno a C non può avere che un numero finito di singolarità polari che corrisponderanno agli eventuali zeri di w.

§ 2. Sia $u(z)$ una funzione analitica finita e monodroma in un campo C *semplicemente connesso.* È manifesto che se la $u(z)$ non assume in alcun punto di C nè il valore 0, nè il valore 1, e se $\tau(I)$ è la nota funzione modulare, *invariante assoluto*, la funzione $\tau(u(z))$ sarà monodroma in tutto C.

§ 3. Siano

$$u_1, \; u_2, \dots \qquad (1)$$

delle funzioni analitiche finite e monodrome in un campo C semplicemente connesso. Per ogni punto di C esista un limite finito di u_n per $n = \infty$ e supponiamo inoltre che le u_n non assumano mai in C i valori 0 e 1.

La successione (1) converge, per quanto si è concluso al Cap. 2.°, § 4, *in egual grado* in un certo campo C_1 interno a C. Sia z_0 un punto interno a C_1.

Consideriamo le

$$\tau(u_1), \; \tau(u_2), \dots \qquad (2)$$

determinate in modo che il valore di τ in z_0 cada nello stesso campo fondamentale della rete modulare qualunque sia n.

Manifestamente la successione (2) converge per ogni punto di C_1. Inoltre i valori delle $\tau(u_n)$ cadono tutti nel semipiano positivo.

Vi sarà dunque una funzione analitica monodroma $w(z)$ per cui

$$\lim_{n-\infty} \tau(u_n) = w(z).$$

Sia ora $I(\tau)$ la funzioue inversa di $\tau(I)$.

$I(\tau)$ è, come si sa, funzione monodroma esistente in tutto il semipiano positivo della variabile.

$I(w(z))$ riuscirà adunque una funzione analitica monodroma di z in tutto C.

Nei punti in cui $w(z)$ non è reale nè infinita è certamente

$$J(w(z)) = \lim_{n=\infty} u_n .$$

Ma siccome i valori di $w(z)$ giacciono sempre nel semipiano positivo e siccome $w(z)$ è monodroma in C ne segue che $w(z)$ può essere infinita o reale solo nel contorno di C e quindi la successione

$$u_1, u_2, \ldots$$

converge dentro C verso una funzione analitica finita e monodroma.

Dobbiamo dunque concludere che

“ **Se**

“ $$u_1 \; u_2 \ldots$$

“ **è una successione di funzioni analitiche finite e monodrome convergente in ogni**
“ **punto di un campo semplicemente connesso C, e se inoltre le funzioni suddette**
“ **non assumono mai i valori 0 ed 1 la successione converge verso una funzione**
“ **analitica finita e monodroma in C.** »

§ 4. Si può facilmente togliere la condizione che il campo C sia semplicemente connesso. Se C è più volte connesso si può arrivare alla stessa conclusione spezzandolo in parti semplicemente connesse.

§ 5. Invece di supporre che le funzioni

$$u_1 \, u_2, \ldots$$

non assumano mai i due valori 0 e 1 si poteva supporre che non assumessero mai due valori qualunque fissi p_0 e p_1. Le funzioni

$$\frac{u_1 - p_0}{p_1 - p_0}, \quad \frac{u_2 - p_0}{p_1 - p_0}, \ldots$$

non assumono allora nè il valore 1 nè il valore 0 ed inoltre conservano le altre proprietà delle

$$u_1, u_2, \ldots$$

Esse costituiscono dunque una successione convergente verso una funzione v analitica finita e monodroma. La successione

$$u_1, u_2, \ldots$$

convergerà verso

$$p_0 + (p_1 - p_0)\, v.$$

§ 6. Si possono ancora rendere meno restrittive le condizioni delle funzioni u_n.

Invece di supporre che non assumano mai due valori fissi p_0 e p_1, si può supporre che non assumano mai due valori p_n q_n variabili con n e tendenti a due limiti finiti e distinti p e q. Le funzioni

$$\frac{u_1 - p_1}{q_1 - p_1},\ \frac{u_2 - p_2}{q_2 - p_2}, \ldots$$

non assumono mai i valori 0 e 1 e quindi convergono verso una funzione analitica finita e monodroma v.

Sarà poi

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} p_n + v \lim_{n=\infty} (q_n - p_n) = p + v\,(q - p).$$

Bologna, 16 Luglio 1903.

Su un'equazione a radici reali.

(*Di* Onorato Niccoletti, *a Pisa.*)

In una Memoria, recentemente pubblicata in questi *Annali* (*), ho considerato una particolare equazione algebrica, che ha molte analogie coll'equazione secolare, e ne ho assegnate alcune semplici proprietà. Torno ora sull'argomento, per comunicare alcuni altri teoremi relativi alla stessa equazione, che mettono ancora in più chiara luce la sua analogia coll'equazione secolare, e che ho trovati solo dopo la stampa della Memoria ora ricordata.

1. Siano

$$A(x,\bar{x}) = \Sigma_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu; \quad B = \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu; \quad C = \Sigma_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n) \tag{1}$$

tre forme di Hermite di prima specie (M, n.° 1) in n variabili $x_1 \ldots x_n$, e si consideri l'equazione (che ammettiamo non essere identicamente soddisfatta):

$$E(\omega) = |a_{\mu\nu} + 2\, b_{\mu\nu}\, \omega + c_{\mu\nu}\, \omega^2| = |e_{\mu\nu}(\omega)| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n) \tag{2}$$

che si ha annullando il discriminante della forma:

$$E_\omega(x, \bar{x}) = A(x, \bar{x}) + 2\, B(x, \bar{x})\, \omega + C(x, \bar{x})\, \omega^2 = \Sigma_{\mu\nu}\, e_{\mu\nu}(\omega)\, x_\mu\, \bar{x}_\nu \tag{3}$$

con ω variabile arbitraria.

Se ω_1 è una soluzione della (2), il sistema di equazioni lineari omogenee:

$$\Sigma_\mu\, e_{\mu\nu}(\omega_1)\, x_\mu = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n) \tag{4}$$

(*) Niccoletti, *Su una classe di equazioni a radici reali* — (questi *Annali*, Tomo IX, pag. 93 e ss.). Nei frequenti richiami a questa Memoria l'indicherò colla lettera *M.*

avrà soluzioni non tutte nulle. Sia $x_1 \dots x_n$ una tal soluzione, si moltiplichi la (4) per x_ν e si sommi quindi rispetto a ν da 1 ad n; otteniamo così la relazione fondamentale:

$$E_{\omega_1}(x, x) - A(x, \bar{x}) + 2\,B(x, x)\,\omega_1 + C(x, x)\,\omega_1^2 - 0. \qquad (3^*)$$

Ammettiamo ora che:

a) le tre forme A, B, C non si annullino mai insieme, per valori non tutti nulli delle x; (cioè se $A = B = C = 0$, si abbia necessariamente $x_1 = x_2 - \dots = x_n = 0$) (*).

b) qualunque sistema di valori si dia alle $x_1 \dots x_n$, l'equazione di 2.° grado in ω che si ha annullando la (3) abbia *sempre* radici reali; sia cioè, qualunque siano le x_1, $x_2, \dots x_n$:

$$B^2 - A\,C \geqq 0. \qquad (5)$$

In queste ipotesi, dalla (3*) si ha che ω_1 è necessariamente reale; donde il teorema (Cf. M, n.° 21, *a*):

L'equazione $E(\omega) = 0$ ha, nelle ipotesi superiori, tutte le radici reali.

2. Non è facile discutere con tutta generalità la disuguaglianza (5); noi ci limiteremo a studiare alcuni casi particolari, che portano a risultati interessanti.

a) Due consecutive tra le forme A, B, C sian definite; la condizione *a*) del n.° 1 è certamente soddisfatta; inoltre, cambiando al più ω in $-\omega$, o in $\pm \frac{1}{\omega}$, possiamo supporre, senza ledere la generalità, che siano esse le B e C ed abbiano ugual segno; è subito visto allora che la disuguaglianza (5) può scriversi al modo seguente

$$\frac{A}{B} \leqq \frac{B}{C}, \qquad (5^*)$$

ed, osservando che il rapporto $\frac{B}{C}$ ha sempre un valore positivo, sarà certamente verificata, quando le x sian tali, che il rapporto $\frac{A}{B}$ sia negativo o

(*) Perciò ad es. è sufficiente che la rete di forme $\lambda A + \mu B + \nu C$, con λ, μ, ν parametri reali arbitrarî, contenga una forma definita.

nullo. Se poi il rapporto $\frac{A}{B}$ ha un valore positivo, consideriamo le due equazioni:

$$\Delta(\lambda) - |a_{\mu\nu} - \lambda b_{\mu\nu}| = 0; \qquad (6)$$

$$D(\tau) = |b_{\mu\nu} - \tau c_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n); \qquad (6'')$$

esse hanno, nelle nostre ipotesi, tutte le radici reali e la seconda inoltre tutte positive (*); inoltre tutti i possibili valori del rapporto $\frac{A}{B}$ $\left(\text{e } \frac{B}{C}\right)$ sono sempre compresi tra la minima e massima radice della equazione

$$\Delta(\lambda) = 0 \; (D(\tau) = 0);$$

(cf. M, n.° 12); ne segue, indicando con L la *massima* radice della $\Delta(\lambda) = 0$, con t la *minima* della $D(\tau) = 0$, che la (5*) varrà sicuramente, quando si abbia la disuguaglianza

$$L \leqq t. \qquad (7)$$

b) Siano invece definite le due forme estreme A e C ed abbian segno contrario; sarà allora sempre $A\,C < 0$; e quindi valgono certamente le *a*), *b*) del n.° 1.

c) Consideriamo infine un terzo caso; le tre forme A, B, C sian tutte tre semidefinite, e le due estreme abbian segno contrario (per fissare le idee, siano la A negativa, le B e C positive), inoltre i due determinanti $\Delta(\lambda)$, $D(\tau)$ non siano identicamente nulli; varranno ancora le *a*), *b*) del n.° 1. Diamo infatti a $\lambda\,(\tau)$ un valore positivo (negativo) che non annulli il determinante $\Delta(\lambda)$ $(D(\tau))$; la forma corrispondente $A - \lambda B$ $(B - \tau c)$ è allora ancora non indefinita e, poichè non è degenere, è definita negativa (positiva), donde è chiaro che è soddisfatta la *a*) del n.° 1, e quindi anche, per le ipotesi fatte, la (5); ne segue anche che l'equazione $\Delta(\lambda) = 0$ ha radici tutte (reali) negative o nulle, la $D(\tau) = 0$ tutte (reali) positive o nulle.

In ciascuno di questi tre casi adunque: *l'equazione* (2) *ha tutte le radici reali:* quando inoltre si aggiungano alcune condizioni complementari, si può affermare insieme che:

Una radice multipla di ordine ρ *dell'equazione* (2) *rende il determinante* $E(\omega)$ *di caratteristica* $n - \rho$.

(*) Infatti per τ negativo arbitrario la forma $B - \tau C$ è ancora evidentemente definita e quindi il suo discriminante è diverso da zero.

3. Per dimostrare questo teorema, cominciamo dall'osservare che, per la regola di derivazione dei determinanti, la derivata di ordine s (s 1,2...) della $E(\omega)$ è una combinazione lineare omogenea dei minori del determinante $E(\omega)$, che hanno un ordine maggiore od uguale ad $n - s$ (*). Ciò posto, è evidente che il teorema vale per $\rho = 1$ (cfr. M, n.º 6); procederemo quindi ancora per induzione ed ammessane la verità per le radici multiple fino all'ordine ρ, lo dimostreremo per quelle dell'ordine $\rho + 1$.

Sia allora ω_1 una radice multipla della (2) dell'ordine $\rho + 1$ e quindi anche dell'ordine ρ; il determinante $E(\omega_1)$ avrà una caratteristica non maggiore di $n - \rho$, ed il suo determinante associato di rango $n - \rho$, che con notazioni evidenti scriviamo (cf. M, n.i 6, 19):

$$| E_{i_1 \cdots i_\rho ; k_1 \cdots k_\rho} (\omega_1) |$$

ove non sia identicamente nullo, avrà la caratteristica *uno*; quindi, osservando che due minori coniugati di $E(\omega)$ hanno, per ω reale, valori complessi coniugati, potremo scrivere in ogni caso:

$$E_{i_1 \cdots i_\rho ; k_1 \cdots k_\rho} (\omega) = \pm\, p_{i_1 \cdots i_\rho} \cdot \overline{p}_{k_1 \cdots k_\rho}, \tag{8}$$

essendo le $p_{i_1 \cdots i_\rho} \binom{n}{\rho}$ opportune costanti, che dimostreremo esser tutte nulle.

Poichè inoltre ω_1 è multipla dell'ordine $\rho + 1$ ed $E(\omega_1)$ ha, per ipotesi, una caratteristica non maggiore di $n - \rho$, sarà per $\omega = \omega_1$:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{d^\rho E(\omega)}{d\omega^\rho} \right\}_{\omega = \omega_1} &= 2^\rho \sum_{(i_1 \ldots i_\rho ; k_1 \ldots k_\rho)} d_{i_1 \cdots i_\rho ; k_1 \cdots k_\rho}\, E_{i_1 \cdots i_\rho ; k_1 \cdots k_\rho} (\omega_1) = \\ &= \pm\, 2^\rho \,.\, D^{(\rho)} (p, \overline{p}) = 0, \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

dove abbiam posto:

$$d_{ik} = b_{ik} + \omega_1 c_{ik}, \tag{10}$$

$d_{i_1 \cdots i_\rho ; k \cdots k_\rho}$ è il minore di ordine ρ del determinante $| d_{ik} |$, formate dalle righe $i_1 \ldots i_\rho$, dalle colonne $k_1 \ldots k_\rho$ e $D^{(\rho)}$ è la forma associata di rango ρ della forma di Hermite

$$D = B + \omega_1 C. \tag{10*}$$

Insieme coll'equazione data consideriamo anche la reciproca $\left(\text{ponendo } \omega = \frac{1}{\theta}\right)$:

$$\theta^{2n} E\left(\frac{1}{\theta}\right) = F(\theta) = | a_{\mu\nu} \theta^2 + 2\, b_{\mu\nu} \theta + c_{\mu\nu} | = 0; \tag{11}$$

(*) Di qui segue che se una radice $\omega = \omega_1$ rende il determinante $E(\omega)$ di caratteristica $n - \rho$ essa è multipla dell'ordine ρ almeno.

varranno per essa considerazioni affatto analoghe a quelle svolte per la $E(\omega)$; in particolare una radice ω_1 della data, multipla dell'ordine $\rho + 1$, ne darà una θ_1 (che sarà infinita, ove sia ω_1 0) multipla dello stesso ordine per la $F(\theta) = 0$ e che quindi, nelle nostre ipotesi, renderà il determinante $F(\theta)$ di una caratteristica non maggiore di $n - \rho$; e si avranno le formule, analoghe alle antecedenti:

$$F_{i_1\ldots i_\rho;k_1\ldots k_\rho}(\theta_1) = \pm\, q_{i_1\ldots i_\rho} \cdot q_{k_1\ldots k_\rho} \tag{8'}$$

$$\left.\begin{aligned} \left\{\frac{d^\rho F(\theta)}{d\theta^\rho}\right\}_{\theta=\theta_1} &= 2^\rho \sum_{(i_1\ldots i_\rho;k_1\ldots k_\rho)} g_{i_1\ldots i_\rho;k_1\ldots k_\rho} F_{i_1\ldots i_\rho;k_1\ldots k_\rho}(\theta_1) = \\ &= \pm\, 2^\rho\, G^{(\rho)}(q,\, q) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dove:

$$g_{ik} = a_{ik}\,\theta_1 + b_{ik} = \theta_1\,(a_{ik} + b_{ik}\,\omega_1) \tag{10'}$$

e

$$G = A\,\theta_1 + B = \theta_1\,(A + B\,\omega_1). \tag{10*'}$$

4. Conviene ora trattar separatamente i tre casi *a*), *b*), *c*) del n.° 2.

a) Poichè la forma C è definita la forma

$$B - \tau\, C$$

dove τ è un parametro arbitrario, in forza di un noto teorema di Weierstrass (cf. M, n.° 16, *b*)) è definita per tutti i valori di τ esterni all'intervallo compreso tra la massima e minima radice della equazione $D(\tau) = 0$, in particolare per tutti i valori di τ algebricamente minori della *minima* radice t di essa equazione, o maggiori della *massima* T. Ponendo adunque $\tau = -\omega_1$, quando $-\omega_1$ cada nell'intervallo $(-\infty\; t)$, o in quello $(T\,\infty)$, la forma (10*) e quindi anche la sua associata $D^{(\rho)}$ è definita; dalla (9) segue allora subito che tutte le $p_{i_1\ldots i_\rho}$ sono identicamente nulle e quindi, per la (8), il determinante $E(\omega_1)$ ha una caratteristica non maggiore di $n - \rho$ 1, e se ω_1 ha una moltiplicità non maggiore di $\rho + 1$, uguale ad $n - \rho$ 1; ciò che dimostra in questo primo caso il teorema enunciato.

In modo affatto analogo si ha dalla (10*') che il teorema vale anche per qualunque radice ω_1, tale che $-\omega_1$ sia esterna all'intervallo tra la minima l e la massima L delle radici della $\Delta(\lambda) = 0$, cada cioè in uno dei due intervalli $(-\infty,\, l)$, $(L,\, +\infty)$. Ma teniamo ora conto della (7); quando in essa valga il segno di disuguaglianza, oppure, quando avendosi $L = t$, non è $L - - t = \omega_1$ una radice della $E(\omega) = 0$, i due intervalli $(-\infty, t)$; $(L, +\infty)$ dànno tutto l'asse reale; di guisa che in questo caso il teorema vale per qualunque radice della $E(\omega) = 0$.

Esaminiamo il caso escluso che si abbia $L = t = -\omega_1$, essendo ω_1 una radice della $E(\omega) = 0$ (questo accadrà solo in casi particolarissimi ed allora ω_1 si potrà determinare razionalmente) multipla dell'ordine $\rho + 1$ (ammettiamo, si ricordi, il teorema vero *sempre* fino all'ordine ρ). Se $-\omega_1 = t$ è multipla per $D(\tau) = 0$ dell'ordine k, la forma $B + \omega_1 C = B - t C$ è semidefinita e riducibile mediante una sostituzione lineare sulle x (e la coniugata sulle $\bar{x}$) ad una forma definita in $n - k$ variabili. Supponiamo già eseguita sulle $x_1 \ldots x_n$ una tale sostituzione (che lascia evidentemente immutate le radici della $E(\omega) = 0$), e la $B + \omega_1 C$ sia definita nelle $x_1 x_2 \ldots x_{n-k}$. Dalla (9) si ha che son nulle tutte le $p_{i_1 \ldots i_\rho}$, per le quali gli indici $i_1 \ldots i_\rho$ son presi in un modo qualunque tra i numeri $1, 2 \ldots n - k$; ne segue, per le (8) che son nulli tutti i minori di ordine $n - \rho$ del determinante $E(\omega_1)$, i quali contengono un qualunque minore di ordine k, tratto dalla matrice delle ultime k righe (o colonne). Ma la matrice di queste ultime k righe si riduce, per $\omega = \omega_1$, alla corrispondente del determinante $|a_{\mu\nu}|$, ed è certamente diversa da zero, quando si aggiunga la condizione supplementare che il determinante

$$| a_{\mu\nu} + \sigma (b_{\mu\nu} - t\, c_{\mu\nu}) |$$

non sia identicamente nullo; e di qui, per un noto teorema di Kronecker, (cf. M, n.° 6) si deduce ancora che il determinante $E(\omega_1)$ ha la caratteristica $n - \rho - 1$. Ad una conclusione affatto identica si perviene, quando il determinante

$$| a_{\mu\nu} - L\, b_{\mu\nu} + \sigma\, c_{\mu\nu} |$$

(dove ancora σ è un parametro arbitrario) non sia identicamente nullo.

Il ragionamento che precede, suppone, come è evidente, $\rho \leq n - k$; ma, si vede subito, non può essere $\rho > n - k$; infatti dovrebbe allora la caratteristica di $E(\omega_1)$ non superare certamente k e la considerazione della derivata $E^{(n-k)}(\omega_1)$ porterebbe l'annullarsi di tutti i minori della matrice delle ultime k righe e colonne, il che abbiamo escluso.

Scrivendo l'equazione $E(\omega) = 0$ sotto forma omogenea, la discussione che precede può riassumersi nel teorema:

Nel determinante

$$E(\omega_1, \omega_2) = | a_{\mu\nu}\, \omega_1^2 + 2\, b_{\mu\nu}\, \omega_1 \omega_2 + c_{\mu\nu}\, \omega_2^2 | \qquad (11)$$

si supponga:

a) *che le due forme* B *e* C *sian definite ed abbiano il medesimo segno;*

b) *che, indicando con* L, t *(rispettivamente) la massima e minima radice delle equazioni*

$$\Delta(\lambda) = |a_{\mu\nu} - \lambda b_{\mu\nu}| = 0, \quad D(\tau) = |b_{\mu\nu} - \tau c_{\mu\nu}| = 0,$$

si abbia $L \leqq t$;

c) *che quando sia* $-L = -t = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ *una radice di* $E(\omega_1 \omega_2) = 0$, *uno almeno dei due determinanti*

$$|a_{\mu\nu} + \sigma(b_{\mu\nu} - t c_{\mu\nu})| \qquad |a_{\mu\nu} - L b_{\mu\nu} + \sigma c_{\mu\nu}| \tag{12}$$

in cui σ *è un parametro arbitrario, non sia identicamente nullo.*

In queste ipotesi, il determinante $E(\omega_1 \omega_2)$ *ha tutti i suoi divisori elementari reali e lineari.*

5 *b*). Quando le due forme estreme A e C sono definite ed hanno segno contrario, la discussione è affatto simile. La forma $B - \tau C$, con τ arbitrario, rimane allora definita, finchè τ è *esterno* all'intervallo tra la minima e la massima tra le radici della $D(\tau) = 0$; la $A - B\lambda$ finchè λ è *compreso* tra le due radici, positiva e negativa, della $\Delta(\lambda) = 0$, che hanno il minimo valore assoluto, o, se questa equazione ha radici tutte di uno stesso segno, finchè λ cade in quello dei due segmenti infiniti dell'asse reale, determinati dalla radice della $\Delta(\lambda) = 0$ che ha il minimo valore assoluto, che non contiene le altre radici. Il teorema da dimostrare, vale dunque, per le (10^*), $(10'^*)$, finchè $-\omega_1$ è nell'uno o nell'altro dei due intervalli indicati; varrà quindi per *qualunque* radice, quando questi due intervalli diano insieme tutto l'asse reale. Questo accade, se la $\Delta(\lambda) = 0$ ha radici positive e negative, quando esse sian tutte esterne all'intervallo tra la minima e massima radice della $D(\tau) = 0$; se poi la $\Delta(\lambda) = 0$ ha radici tutte di un medesimo segno, ad es.: tutte positive, questo porta che anche la forma B non è indefinita ed ha lo stesso segno della A (*) (cf. M, n.° 12); la B e C avranno allora segno contrario e perciò la $D(\tau) = 0$ avrà tutte radici negative o nulle; ed è chiaro che ancora in questo caso i due intervalli considerati contengono tutto l'asse

(*) L'asserzione del testo si dimostra subito supponendo le A, B ridotte simultaneamente a forma ortogonale (cf. ad es. Ricci. *Algebra*, pag. 444).

reale. Può infine accadere, quando la $\Delta(\lambda) = 0$ ha radici positive e negative, che la massima e la minima radice (od ambedue) della $D(\tau) = 0$ coincidano (rispettivamente) colle due radici positiva e negativa della $\Delta(\lambda) = 0$ che hanno il minimo valore assoluto, e con un valore $-\omega_1$, dove ω_1 soddisfi alla $E(\omega) = 0$; ma in tal caso un ragionamento affatto identico a quello del n.° 4, dimostra la validità del teorema, quando non tutti due i determinanti (12) siano identicamente nulli. Abbiamo così il teorema:

Il determinante $E(\omega_1 \omega_2)$ ha ancora tutti i divisori elementari reali e lineari, quando si ammetta che:

a) le due forme estreme A e C sian definite ed abbian segno contrario;

b) se la forma intermedia è indefinita, tutte le radici della equazione $\Delta(\lambda) = 0$ siano esterne all'intervallo tra la minima e massima radice della equazione $D(\tau) = 0$.

6. *c*) Nel terzo caso infine, quando tutte tre le forme A, B, C sono non indefinite, e ad es.: la A negativa, le B e C positive (e i due determinanti $\Delta(\lambda)$, $D(\tau)$ non sono identicamente nulli) basta osservare che la $B - \tau C$ è definita per τ negativo, la $A - \lambda B$ per λ positivo, affatto arbitrarî, per dedurne che il teorema da dimostrare vale per qualunque radice ω_1, positiva o negativa, della $E(\omega_1) = 0$. Per $\omega_1 = 0$, od ∞, il teorema vale ancora, e si dimostra con ragionamento identico a quello fatto sopra al n.° 5 nel caso eccezionale, in quanto i due determinanti $\Delta(\lambda)$, $D(\tau)$ non sono identicamente nulli. Adunque:

Il determinante $E(\omega_1 \omega_2)$ ha ancora tutti i suoi divisori elementari reali e lineari, quando:

a) le tre forme A, B, C sono semidefinite e le due estreme hanno segno contrario;

b) i due determinanti $\Delta(\lambda)$, $D(\tau)$ non sono identicamente nulli.

7. Torniamo all'equazione non omogenea; una radice ω_1 multipla dell'ordine ρ sarà (nei tre casi considerati) multipla dell'ordine $\rho - 1$ almeno per qualunque minore dell'ordine $n - 1$; ed, eseguendo al più una conveniente sostituzione lineare sulle x, (e la coniugata sulle $\bar{x}$) si può trovare un minore principale $E_k(\omega_1)$, *regolare* rispetto ad ω_1, che ha cioè ω_1 come radice multipla di un ordine uguale a $\rho - 1$ (*). Se ora ω_1 è tale che la forma

(*) Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*. S. 120.

$B + \omega_1 C$ sia definita, indicando con h un numero convenientemente piccolo in valore assoluto, dalle (9) e (10) si ha (cf. M, n.° 8, *b*))

$$E(\omega_1 + h) = \pm\, 2^\rho D^{(\rho)}(p, \bar{p}) \frac{h^\rho}{\rho} + \cdots \quad (\text{con } D^{(\rho)}(p, \bar{p}) \neq 0);$$

affatto analogamente sarà

$$E_k(\omega_1 + h) = \pm\, 2^{\rho-1} D_k^{(\rho-1)}(p, \bar{p}) \frac{h^{\rho-1}}{(\rho-1)!} + \cdots \quad (\text{con } D_k^{(\rho-1)}(p, \bar{p}) \neq 0),$$

e quindi, *nell'intorno di* $h = 0$

$$\frac{E(\omega_1 + h)}{E_k(\omega_1 + h)} = 2\,\frac{h}{\rho}\,\frac{D^{(\rho)}(p, \bar{p})}{D_k^{(\rho-1)}(p, \bar{p})} + \cdots \tag{13}$$

e quindi il rapporto stesso ha il segno di h o il segno contrario, secondochè la $B + \omega_1 C$ è positiva o negativa. Un risultato affatto analogo si ha evidentemente (per la $F(\theta) = 0$) quando la ω_1 sia tale che la forma $A + \omega_1 B$ sia invece essa definita.

Diciamo ora che due radici ω_1, ω_2 della $E(\omega) = 0$ appartengono alla *prima* (*seconda*) *specie*, quando ambedue le forme $B + \omega_1 C$, $B + \omega_2 C$ (o le altre due $A + \omega_1 B$, $A + \omega_2 B$) siano definite, o almeno non indefinite, e del medesimo segno. Dalla (13) si ha allora immediatamente:

a) *Tra due radici consecutive della stessa specie cade un numero dispari di radici reali di un qualunque minore principale* $E_k(\omega) = 0$; e se, come accadrà in generale, il grado della $E_k(\omega) = 0$ non supera quello della $E(\omega) = 0$, *le radici di queste due equazioni si separano a vicenda.*

Diciamo anche che un intervallo $(\alpha\, \beta)$ è della *prima* (*seconda*) *specie*, quando in esso la $B + \mu C$ ($A + \mu B$) è definita; allora dalle (13) e dall'identità della teoria dei determinanti (Cf. M, n.° 19):

$$\left.\begin{aligned} E_{i_1\cdots i_k}(\omega)\, E_{i_1\cdots i_k i_{k+1} i_{k+2}}(\omega) &= E_{i_1\cdots i_k i_{k+1}}(\omega)\, E_{i_1\cdots i_k i_{k+2}}(\omega) - \\ &- E_{i_1\cdots i_k i_{k+1};\, i_1\cdots i_k i_{k+2}}(\omega)\, E_{i_1\cdots i_k i_{k+2};\, i_1\cdots i_k i_{k+1}}(\omega) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

vediamo (come in M, n.^{i} 7, 8, 20 *c*)) che è possibile costruire dai minori principali del determinante $E(\omega)$ una successione di Sturm per qualunque intervallo della prima specie, dai minori di $F(\theta)$ (e quindi anche di $E(\omega)$) una analoga per ogni intervallo della seconda specie. Per proprietà note delle successioni di Sturm, (o anche come in M, n.° 8 *a*)) indicando con $E_{i_1\cdots i_k}(\omega)$ un qualunque minore principale dell'ordine $n - k$, si ha poi:

b) *L'equazione* $E_{i_1 \dots i_k}(\omega) = 0$ *ha tutte le sue radici reali*; valgono inoltre per essa equazione proprietà affatto simili a quelle delle $E(\omega) = 0$.

Supponiamo infine che le tre forme A, B, C sian tutte tre *definite* (la A negativa, le B, C positive); è possibile allora assegnare delle limitazioni per le radici della $E(\omega) = 0$.

Sia ad es.: ω_1 una radice positiva; dalla (3^*) abbiamo:

$$A(x, x) + 2B(x, \bar{x})\,\omega_1 = -C\,\omega_1^2 < 0$$

e quindi

$$\omega_1 < -\frac{A}{2B};$$

donde: *c*) *Indicando con* $-l$ *la minima tra le radici (tutte negative) della equazione* $\Delta(\lambda) = 0$, *una radice positiva della* $E(\omega) = 0$ *è sempre minore di* $\frac{l}{2}$.

Sia invece ω_2 una radice negativa; sarà per essa:

$$C\,\omega_2^2 + 2B\,\omega_2 = -A > 0; \qquad C\,\omega_2 + 2B < 0;$$

$$\omega_2 < -\frac{2B}{C}; \qquad |\omega_2| > 2 \cdot \frac{B}{C}$$

cioè: *d*) *Indicando con* t *la minima tra le radici (tutte positive) dell'equazione* $D(\tau) = 0$, *una radice negativa della* $E(\omega) = 0$ *è sempre minore di* $-2t$;

Si ha quindi un limite superiore per le radici positive, ed uno per le negative, dell'equazione $E(\omega) = 0$.

8. Ci sia permessa ancora un'osservazione.

Il principio che ci ha servito a dimostrare, sotto le condizioni *a*) *b*) del n.° 1, la realità delle radici della $E(\omega) = 0$ può enunciarsi sotto la forma generale seguente:

Siano A, B, $C \dots L$ $k+1$ forme di Hermite di prima specie, ed indicando ω una variabile arbitraria, si ponga

$$E(\omega) = \Sigma_{\mu\nu}\, e_{\mu\nu}(\omega)\, x_\mu \bar{x}_\nu = A + B\,\omega + C\,\omega^2 + \cdots + L\,\omega^k \quad (\mu, \nu = 1, 2 \dots n) \tag{15}$$

e si consideri l'equazione (di grado non maggiore di $n\,k$)

$$F(\omega) = |\,e_{\mu\nu}(\omega)\,| = 0. \tag{16}$$

Ad una radice ω_1 delle (16) corrisponde una soluzione almeno, non identicamente nulla, del sistema di equazioni lineari omogenee:

$$\Sigma_\mu \, e_{\mu\nu}(\omega_1)\, x_\mu = 0 \quad (\mu,\ \nu = 1,2\ldots n)$$

donde, procedendo come al n.° 1, si ha per i valori antecedenti delle x (e i coniugati delle $\bar{x}$)

$$E(\omega_1) = A(x,\ x) + B(x,\ x)\,\omega_1 + \ldots + L(x,\ \bar{x})\,\omega_1^k = 0. \qquad (17)$$

Si consideri ora l'equazione che si ha annullando la (15), ove però ora le x siano *affatto arbitrarie.*

Se le forme A, $B\ldots L$ *sono tali che essa equazione non diviene mai identica ed ha sempre tutte le sue radici reali*, tale sarà, per la (17), anche la ω_1, cioè una qualunque radice della $F(\omega) = 0$; *anche questa equazione avrà dunque tutte le sue radici reali.* Si ottiene in tal guisa un certo « Uebertragungsprincip » un *principio di trasporto*, per cui dalla realità delle radici della $E(\omega) = 0$, per valori arbitrarî delle $x_1 \ldots x_n$, si trae una conclusione analoga per quelle dell'altra equazione (16). Su questo principio riposa una delle dimostrazioni della realità delle radici della equazione secolare nei casi ben noti (*); affatto in generale poi osserviamo che, se non è facile costruire *direttamente* delle equazioni, come la $E(\omega) = 0$, che abbiano, rimanendo le x affatto arbitrarie, tutte le radici reali, è però possibile da una *nota* tra esse, dedurne in guisa molto semplice infinite altre, che hanno ancora la stessa proprietà.

Così, ad es. si ha il teorema seguente (di Fouret) (**):

Se $\varphi(x)$ è un polinomio intero di grado n, i cui fattori lineari sono tutti reali, ed $f(x)$ è di grado maggiore od uguale ad n, ed α è un numero reale qualunque, ma non compreso tra -1 e $-(2n+1)$, l'equazione

$$F(x) = \sum_0^n {}_i \frac{f^{(i)}(x)\,\varphi^{(n-i)}(x)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+i)(n-i)!} = 0$$

ha almeno tante radici reali quante la $f(x) = 0$; e se ne ha di più, l'eccesso è un numero pari.

(*) Cfr. ad es. Capelli, *Analisi algebrica*, 3.ª edizione, pag. 684.

(**) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* Vol. 106, pag. 1220, 1888.

Ciò posto, nelle a), b) del n.° 1, poniamo:

$$\left\{\begin{aligned} &H(\omega) = A + 2B\omega + C\omega^2 \\ &f(\omega) = g(\omega)\,.\,H(\omega); \quad F(\omega) = \sum_0^m \frac{f^{(i)}(\omega)\,\varphi^{(m-i)}(\omega)}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+i)\,.\,(m-i)!} \end{aligned}\right.$$

essendo $\varphi(\omega)$ una funzione razionale intera in ω del grado m, $g(\omega)$ una di un grado maggiore od uguale ad $m-2$, i cui fattori lineari sian tutti reali, ed α un numero reale qualsiasi, non compreso tra -1 e $-(2m+1)$; in virtù del teorema di Fouret ora ricordato, l'equazione $F(\omega) = 0$ avrà tutte le sue radici reali. Ora si osservi che è:

$$f^{(i)}(\omega) = A\,g^{(i)}(\omega) + 2B\,\{\omega g(\omega)\}^{(i)} + C\,\{\omega^2 g(\omega)\}^{(i)},$$

e quindi sarà anche:

$$F(\omega) = A\,\psi_1(\omega) + 2B\,\psi_2(\omega) + C\,\psi_3(\omega)$$

essendo:

$$\left\{\begin{aligned} \psi_1(\omega) &= \sum_0^m{}_i \frac{g^{(i)}(\omega)\,\varphi^{(m-i)}(\omega)}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+i)\,(m-i)!} \\ \psi_2(\omega) &= \sum_0^m{}_i \frac{\{\omega g(\omega)\}^{(i)}\,\varphi^{(m-i)}(\omega)}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+i)\,(m-i)!} \\ \psi_3(\omega) &= \sum_0^m{}_i \frac{\{\omega^2 g(\omega)\}^{(i)}\,\varphi^{(m-i)}(\omega)}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+i)\,(m-i)!}\,. \end{aligned}\right.$$

Ne segue, pel principio superiore che anche l'equazione in ω

$$|\,a_{\mu\nu}\,\psi_1(\omega) + 2\,b_{\mu\nu}\,\psi_2(\omega) + c_{\mu\nu}\,\psi_3(\omega)\,| = 0$$

ha, nelle ipotesi a), b) del n.° 1, tutte le sue radici reali; un teorema, che non sembra facile dimostrare in altro modo. Teoremi analoghi si avrebbero da teoremi di Hermite, Laguerre (*) simili al teorema di Fouret già ricordato.

Pisa, li 15 Gennaio 1904.

(*) Cfr. ad es. Netto, *Algebra*. Bd. I, S. 211, ss.; ed anche Laguerre, *Oeuvres*, Vol. 1.°, pag. 140.

Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazî di curvatura costante (*).

(Di Luigi Bianchi, *a Pisa.)*

PREFAZIONE.

Nella presente Memoria raccolgo alcune ricerche di geometria infinitesimale non-euclidea, relative alle congruenze rettilinee. Supposte reali le superficie focali, definisco la congruenza coll'assegnare la prima falda S della superficie focale ed in ogni punto di questa la direzione del raggio della congruenza. Ricerco quindi gli elementi della seconda falda $\overline{S}$ e stabilisco un sistema di formole generali relative ai due casi che la S sia riferita alle sue linee di curvatura (§§ 1, 2), ovvero alle sue linee assintotiche (§§ 14, 15). Le formole così ottenute, come le loro corrispondenti in geometria euclidea, sembrano le più appropriate in questo genere di ricerche.

Qui applico le formole trovate allo studio di tre classi particolari di congruenze nello spazio ellittico ed iperbolico, che generalizzano note classi di congruenze dell'ordinario spazio euclideo.

La prima classe studiata è quella delle *congruenze di* Guichard, nelle quali le sviluppabili della congruenza tagliano le due falde focali secondo le loro linee di curvatura (Vol. I, pag. 325). Nello spazio Euclideo la ricerca di queste particolari congruenze si collega alla teoria delle superficie pseudosferiche ordinarie e precisamente a quella delle loro deformazioni infinitesime

(*) Riferendomi spesso, nel corso di queste ricerche, al mio libro: *Lezioni di geometria differenziale* (2.ª edizione in due volumi. Pisa, Spörri, 1902-1903), lo farò citando semplicemente il volume e la pagina.

(Vol. II, pag. 21). Anche le congruenze di Guichard negli spazî di curvatura costante vedremo dipendere dalle ordinarie superficie pseudosferiche dello spazio Euclideo, ossia dalle soluzioni della equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \operatorname{sen} \theta.$$

Per lo spazio ellittico due soluzioni finite *arbitrariamente scelte* di questa equazione individuano una congruenza di Guichard, e viceversa; in altre parole: ad una coppia di superficie pseudosferiche ordinarie, arbitrariamente prese, corrisponde una congruenza di Guichard dello spazio ellittico. Se si fa tendere verso zero la curvatura di questo spazio, le due superficie pseudosferiche diventano infinitamente vicine e si ottiene, al limite, il caso euclideo.

Ancora più singolare è il risultato per lo spazio iperbolico. Allora sono le soluzioni *complesse* della equazione scritta che individuano le congruenze di Guichard per questo spazio. Così anche le superficie pseudosferiche *immaginarie* vengono a ricevere, nello spazio iperbolico, una rappresentazione reale, a ciascuna di esse corrispondendo una congruenza *reale* di Guichard ed inversamente.

La seconda parte della Memoria tratta delle *congruenze di* Thybaut, che hanno due superficie ad area minima per falde focali, corrispondendosi inoltre le due falde in rappresentazione conforme, che conserva le linee assintotiche e le linee di curvatura. Dimostro che anche negli spazî di curvatura costante qualsiasi esistono siffatte congruenze, nello stesso grado di generalità, e più precisamente che ogni superficie d'area minima è falda focale di ∞^3 congruenze di Thybaut. L'analogia si spinge più oltre; alle relazioni delle ordinarie congruenze di Thybaut colle deformate del paraboloide di rotazione. Si sa che delle due falde focali ad area minima di una tale congruenza prendendo le superficie coniugate in applicabilità, queste, convenientemente collocate nello spazio, coincidono colle due superficie minime che il primo teorema di Guichard (Vol. II, pag. 99) associa ad ogni deformata del paraboloide di rotazione. Appoggiandomi sui risultati di una mia Memoria precedente in questi *Annali* (*), ove ho esteso i teoremi di Guichard agli spazî di curvatura costante, dimostro che una relazione perfettamente simile sussiste ancora

(*) *Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazî di curvatura costante.* (Annali, Tomo IV, Serie 3.^{a}, 1900.)

qui fra le congruenze di Thybaut e le deformate dei paraboloidi di rotazione nello spazio ellittico od iperbolico.

La terza classe di congruenze studiata nella presente Memoria è quella delle congruenze sulle cui falde focali si corrispondono le linee assintotiche (congruenze W), e per le quali inoltre le due falde focali hanno in punti corrispondenti eguale curvatura. Limitandomi, come nel caso Euclideo (Vol. II, pag. 74), al caso di linee assintotiche reali (u, v), dimostro che per le due falde focali di una tale congruenza, detti r_1, r_2 i raggi principali (ridotti) di curvatura e posto $\rho = \sqrt{-r_1 r_2}$, si deve avere necessariamente nel caso ellittico

$$\rho = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{1 + \varphi(u)\psi(v)},$$

e nel caso iperbolico

$$\rho = \frac{\varphi(u) - \psi(v)}{1 + \varphi(u)\psi(v)},$$

dove $\varphi(u)$ indica una funzione della sola u e $\psi(v)$ della sola v. Viceversa ogni superficie S della classe superiore è falda focale di ∞^2 congruenze W della specie richiesta. Come nel caso euclideo, sono notevoli i seguenti casi particolari: 1.° il caso di $\varphi(u)$, $\psi(v)$ costanti, ove la superficie S è a curvatura costante e le conseguenti trasformazioni sono quelle di Bäcklund; 2.° il caso che una sola delle funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ sia costante; le superficie S corrispondenti sono caratterizzate dal fatto che le linee lungo le quali è costante la curvatura della superficie sono linee assintotiche di un sistema. Si potrebbe ancora dimostrare che per le ottenute trasformazioni delle nostre classi di superficie vale un *teorema di permutabilità* come nello spazio Euclideo (Vol. II, pag. 80), onde nella successiva applicazione del metodo di trasformazione vengono risparmiate le quadrature.

È appena necessario di avvertire che i risultati di geometria non-euclidea qui brevemente riassunti hanno un corrispondente significato nell'ordinaria geometria euclidea, che sarebbe facile ritrovare servendosi delle note rappresentazioni degli spazî di curvatura costante sullo spazio euclideo.

§ 1.

Formole per le congruenze in geometria ellittica.

Consideriamo una congruenza rettilinea nello spazio ellittico, la cui curvatura K_0 supponiamo per semplicità $= +1$. Supponiamo inoltre che la superficie focale della congruenza sia reale ed indichiamone con S la prima falda, che riferiamo dapprima alle sue linee di curvatura (u, v). Servendoci delle usuali notazioni, indichiamo con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di Weierstrass (legate dall'identità $\Sigma x^2 = 1$) di un punto F mobile sopra S, con ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 i coseni di direzione della normale, in fine con

$$\eta_0, \ \eta_1, \ \eta_2, \ \eta_3$$

$$\zeta_0, \ \zeta_1, \ \zeta_2, \ \zeta_3$$

quelli delle tangenti alle linee coordinate (di curvatura) $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, rispettivamente. Se denotiamo poi con

$$d s^2 = E\, d u^2 + G\, d v^2$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie e con r_1, r_2 i raggi principali (ridotti) di curvatura relativi alle linee u, v, avremo le formole fondamentali (Vol. I, pag. 498):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,.\,\eta\,, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r_2}\cdot\eta\,,\\
&\frac{\partial \eta}{\partial u} = -\sqrt{E}\,.\,x - \frac{\sqrt{E}}{r_2}\cdot\xi - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\zeta\,, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\eta\\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,.\,\zeta\,, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1}\cdot\zeta\,, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\zeta\,,\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial v} = -\sqrt{G}\,.\,x - \frac{\sqrt{G}}{r_1}\cdot\xi - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\eta\,,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

che valgono per le funzioni x_ν, ξ_ν, η_ν, ζ_ν per i quattro valori dell'indice $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Ricordiamo poi ancora che le equazioni di CODAZZI assumono qui la forma

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\tag{2}$$

mentre l'equazione di GAUSS si scrive

$$\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)-\sqrt{EG}.\tag{3}$$

Ciò premesso, definiamo ora la nostra congruenza di tangenti alla superficie S per mezzo dell'angolo $\varphi=\varphi(u, v)$ che in ogni punto (x) della superficie il raggio che vi passa forma colla direzione della linea $v=\text{cost.}$ Indichiamo in fine con $\tau=\tau(u, v)$ l'ampiezza del segmento focale $F\overline{F}$ e con $\sigma=\sigma(u, v)$ l'angolo dei due piani focali, cioè l'angolo dei due piani tangenti in F, $\overline{F}$ rispettivamente alle due falde S, $\overline{S}$ della superficie focale. Se $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ sono le coordinate di WEIERSTRASS del secondo fuoco $\overline{F}$ e $\overline{\xi}_0$, $\overline{\xi}_1$, $\overline{\xi}_2$, $\overline{\xi}_3$ i coseni di direzione della normale in $\overline{F}$ alla seconda falda focale $\overline{S}$, avremo le formole:

$$\overline{x}=x\cos\tau+(\eta\cos\varphi+\zeta\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\tau\tag{4}$$

$$\overline{\xi}=\xi\cos\sigma+(\eta\,\mathrm{sen}\,\varphi-\zeta\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\sigma.\tag{5}$$

Per esprimere che la direzione $(\overline{\xi})$ è quella della normale alla $\overline{S}$ luogo del punto $(\overline{x})$, abbiamo le due equazioni di condizione

$$\Sigma\,\overline{\xi}\,\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}=0,\qquad \Sigma\,\overline{\xi}\,\frac{\partial\overline{x}}{\partial v},$$

le quali, sostituendo i valori (4), (5) e per le derivate ponendo i valori (1), si traducono con facile calcolo nelle due equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}&=\sqrt{E}\cot\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\cos\varphi\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}&=-\sqrt{G}\cot\tau\cos\varphi-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cot\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Queste, ove sia dato φ in funzione di u, v servono effettivamente a determinare $\cot\tau$, $\cot\sigma$ (cioè τ, σ a meno di multipli di π) salvo quando si annullasse il determinante

$$\sqrt{EG}\left(\frac{\cos^2\varphi}{r_2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r_1}\right).$$

Ma noi escludiamo questo caso ove i raggi della congruenza sarebbero le tangenti delle linee assintotiche di un sistema e la seconda falda focale $\bar{S}$ coinciderebbe colla prima S.

Tenendo ora presenti le (1) e le (6), deriviamo le (4), (5) rapporto ad u, v e troveremo le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= -\operatorname{sen}\tau\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\varphi\right).x-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\tau\cos\varphi\,.\,\xi+\\
&+\left\{\cos\tau\cos\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\varphi\right)+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right\}.\eta+\\
&+\left\{\cos\tau\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\varphi\right)-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\operatorname{sen}\tau\cos^2\varphi\right\}.\zeta\\
\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -\operatorname{sen}\tau\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}+\sqrt{G}\,.\operatorname{sen}\varphi\right).x-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\varphi\,.\,\xi+\\
&+\left\{\cos\tau\cos\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)+\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cot\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}^2\varphi\right\}.\eta+\\
&+\left\{\cos\tau\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cot\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right\}.\zeta
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} &= -\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,.\,x-\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\varphi\right).\xi+\\
&+\left\{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\varphi\right)+\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\cot\tau\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right\}.\eta+\\
&+\left\{-\cos\sigma\cos\varphi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\varphi\right)+\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\cot\tau\operatorname{sen}^2\varphi\right\}.\zeta\\
\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} &= \sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,.\,x-\operatorname{sen}\sigma\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\varphi\right).\xi+\\
&+\left\{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\varphi\right)-\sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\cot\tau\cos^2\varphi\right\}.\eta-\\
&-\left\{\cos\sigma\cos\varphi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\varphi\right)+\sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\cot\tau\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right\}.\zeta.
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Ed ora, con queste formole, possiamo facilmente calcolare i coefficienti

$$\overline{E},\ \overline{F},\ \overline{G};\ \overline{D},\ \overline{D}',\ \overline{D}''$$

delle due forme quadratiche fondamentali

$$\Sigma\, d\,\overline{x}^2, \quad -\Sigma\, d\,\overline{x}\, d\,\overline{\xi}$$

della seconda falda focale $\overline{S}$, secondo le loro formole di definizione

$$\overline{E}=\Sigma\left(\frac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,u}\right)^2,\quad \overline{F}=\Sigma\frac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,u}\frac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,v},\quad \overline{G}=\Sigma\left(\frac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,v}\right)^2,$$

$$-\overline{D}=\Sigma\frac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,u}\frac{\partial\,\overline{\xi}}{\partial\,u},\quad -\overline{D}'=\Sigma\frac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,u}\frac{\partial\,\overline{\xi}}{\partial\,v}=\Sigma\frac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,v}\frac{\partial\,\overline{\xi}}{\partial\,u},\quad -\overline{D}''=\Sigma\frac{\partial\,\overline{x}}{\partial\,v}\frac{\partial\,\overline{\xi}}{\partial\,v}.$$

Osservando le (7) (8) e le identità

$$\Sigma\, x^2=\Sigma\,\xi^2=\Sigma\,\eta^2=\Sigma\,\zeta^2=1$$

$$\Sigma\, x\,\xi=\Sigma\, x\,\eta=\Sigma\, x\,\zeta=\Sigma\,\xi\,\eta=\Sigma\,\xi\,\zeta=\Sigma\,\eta\,\zeta=0,$$

troviamo le formole domandate:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E}&=\left(\frac{\partial\,\tau}{\partial\,u}+\sqrt{E}\cos\varphi\right)^2+\frac{E}{r_2^2}\,\frac{\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\cos^2\varphi\\
\overline{F}&=\left(\frac{\partial\,\tau}{\partial\,u}+\sqrt{E}\cos\varphi\right)\left(\frac{\partial\,\tau}{\partial\,v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)+\frac{\sqrt{EG}}{r_1\,r_2}\,\frac{\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\\
\overline{G}&=\left(\frac{\partial\,\tau}{\partial\,v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)^2+\frac{G}{r_1^2}\,\frac{\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\operatorname{sen}^2\varphi
\end{aligned}\right\}\quad\text{(A)}$$

$$\left.\begin{aligned}
-\overline{D}&=\sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\,\tau}{\partial\,u}+\sqrt{E}\cos\varphi\right)+\\
&\qquad+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\varphi\left(\frac{\partial\,\sigma}{\partial\,u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\varphi\right)\\
-\overline{D}'&=-\sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\cos\varphi\left(\frac{\partial\,\tau}{\partial\,u}+\sqrt{E}\cos\varphi\right)+\\
&\qquad+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\varphi\left(\frac{\partial\,\sigma}{\partial\,v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\varphi\right)
\end{aligned}\right\}\quad\text{(B)}$$

$$\left.\begin{aligned}
-\overline{D}' &= \sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)+\\
&\qquad+\frac{\sqrt{G}}{r_1}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\varphi\right)\\
-\overline{D}'' &= -\sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\cos\varphi\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)+\\
&\qquad+\frac{\sqrt{G}}{r_1}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\varphi\right).
\end{aligned}\right\}\quad (B)$$

È importante osservare che l'eguaglianza dei due valori di $\overline{D}'$ dati dalle (B) intermedie segue anche dalle (6) derivando la prima rispetto a v; la seconda rapporto ad u e sottraendo col tener conto delle formole di Codazzi e di Gauss (2) e (3). Così la relazione data dall'eguagliare i due valori di $\overline{D}'$ nelle (B) appare anche come *condizione d'integrabilità* per le (C).

Notiamo ancora che dalle (A) segue la formola

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E}\,\overline{G}-\overline{F}^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\Bigg\{&\frac{\sqrt{G}}{r_1}\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\varphi\right)\operatorname{sen}\varphi-\\
&-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)\cos\varphi\Bigg\}^2
\end{aligned}\right\}\quad (C)$$

§ 2.

Formole per le congruenze nello spazio iperbolico.

Per lo spazio iperbolico, la cui curvatura K_0 porremo $=-1$, possiamo stabilire un sistema di formole del tutto simili alle precedenti. Basterà scrivere queste formole, ove converrà tener presente che le coordinate (x) di Weierstrass di punto sono allora legate dall'identità

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2=-1,$$

e quelle (ξ), (η), (ζ) di piano dalle altre

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-\xi_0^2=1$$

e dalle analoghe, mentre l'ortogonalità p. e. delle direzioni (ξ), (η) è espressa da

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3-\xi_0\eta_0=0.$$

Nel caso attuale alle formole (1) si sostituiscono le altre:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\,\eta,\quad \frac{\partial\xi}{\partial u}=\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cdot\eta,\quad \frac{\partial\eta}{\partial u}=\sqrt{E}\,.\,x-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\xi-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\zeta,\\
&\qquad\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\eta\\
&\frac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{G}\,\zeta,\quad \frac{\partial\xi}{\partial v}=\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cdot\zeta,\quad \frac{\partial\eta}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\zeta,\\
&\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial v}=\sqrt{G}\,x-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\,\xi-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,\eta,
\end{aligned}\right\}\quad(1^*)$$

mentre le equazioni (2) di Codazzi rimangono invariate:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\qquad(2^*)$$

e quella (3) di Gauss diventa

$$\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)+\sqrt{EG}.\qquad(3^*)$$

Ciò posto, avendo φ, τ, σ il medesimo significato loro attribuito nel caso ellittico, la (4) verrà sostituita dalla

$$\bar{x}=x\cosh\tau+(\eta\cos\varphi+\zeta\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{senh}\,\tau,\qquad(4^*)$$

e la (5) conserverà la medesima forma

$$\bar{\xi}=\xi\cos\sigma+(\eta\,\mathrm{sen}\,\varphi-\zeta\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\sigma.\qquad(5^*)$$

Le condizioni

$$\sum_{i=1}^{i=3}\bar{\xi}_i\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial u}-\bar{\xi}_0\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}=0,\quad \sum_{i=1}^{i=3}\bar{\xi}_i\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial v}-\bar{\xi}_0\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}=0$$

dànno qui le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\sqrt{E}\coth\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\cos\varphi\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=-\sqrt{G}\coth\tau\cos\varphi-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\cot\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi.
\end{aligned}\right\}\quad(6^*)$$

Basterà ora scrivere le formole che danno i coefficienti $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$; $\overline{D}$, $\overline{D}'$, $\overline{D}''$ delle due forme quadratiche fondamentali della seconda falda focale $\overline{S}$, formole che si trovano con calcolo del tutto simile a quello eseguito nel paragrafo precedente. Esse sono date da:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E}\cos\varphi\right)^2 + \frac{E}{r_2^2}\,\frac{\operatorname{senh}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\cos^2\varphi \\
\overline{F} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E}\cos\varphi\right)\left(\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right) + \frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}\,\frac{\operatorname{senh}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\
\overline{G} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)^2 + \frac{G}{r_1^2}\,\frac{\operatorname{senh}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\operatorname{sen}^2\varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (A^*)$$

$$\left.\begin{aligned}
-\overline{D} &= \sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{senh}\tau}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E}\cos\varphi\right) + \\
&\qquad + \frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\frac{\operatorname{senh}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\varphi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\varphi\right) \\
-\overline{D}' &= -\sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{senh}\tau}\cos\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E}\cos\varphi\right) + \\
&\qquad + \frac{\sqrt{E}}{r_2}\,\frac{\operatorname{senh}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\varphi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\varphi\right) \\
-\overline{D}' &= \sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{senh}\tau}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right) + \\
&\qquad + \frac{\sqrt{G}}{r_1}\,\frac{\operatorname{senh}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{r_3}\operatorname{sen}\varphi\right) \\
-\overline{D}'' &= -\sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{senh}\tau}\cos\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right) + \\
&\qquad + \frac{\sqrt{G}}{r_1}\,\frac{\operatorname{senh}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1}\cos\varphi\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (B^*)$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2 = \frac{\operatorname{senh}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\Bigg\{ &\frac{\sqrt{G}}{r_1}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E}\cos\varphi\right) - \\
&- \frac{\sqrt{E}}{r_2}\cos\varphi\left(\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi\right)\Bigg\}^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (C^*)$$

Anche qui è da osservarsi che l'eguaglianza dei due valori di $\overline{D}'$ sta anche ad esprimere la condizione d'integrabilità delle (6*).

§ 3.

La trasformazione di Bäcklund.

Facciamo una prima applicazione delle nostre formole generali alla ricerca di quelle congruenze rettilinee degli spazî di curvatura costante nelle quali è costante tanto la distanza τ dei fuochi quanto l'angolo σ dei piani focali. L'eguaglianza dei due valori di $\overline{D'}$ nelle (B) dà subito pel caso ellittico la relazione

$$\frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 \tau},$$

ed analogamente le (B*) dànno nel caso iperbolico

$$\frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{senh}^2 \tau}.$$

In queste formole si legge il teorema: *Le due falde focali di una congruenza di questa specie sono superficie colla medesima curvatura costante e precisamente la loro curvatura è negativa (assintotiche reali).*

Ma le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti dimostrano di più l'effettiva esistenza di tali congruenze e ne dànno il grado di arbitrarietà. Presa infatti nello spazio di curvatura costante una qualunque superficie S di curvatura relativa h costante negativa $= -\frac{1}{a^2}$, basterà prendere le *costanti* τ, σ legate dalla relazione $\operatorname{sen} \tau = a \operatorname{sen} \sigma$ nel caso ellittico, o $\operatorname{senh} \tau = a \operatorname{sen} \sigma$ nel caso iperbolico, e per l'osservazione alla fine del § 1 le equazioni simultanee (6) o (6*) per φ costituiranno un sistema illimitatamente integrabile.

Così dunque: *Ogni tale superficie S è falda focale di ∞^2 congruenze, nelle quali è costante la distanza τ dei fuochi e l'angolo σ dei piani focali; la seconda falda focale è ogni volta una superficie colla stessa curvatura costante.*

Le trasformazioni che così si ottengono per le superficie di curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica non sono altro che le trasformazioni di Bäcklund, delle quali già dimostrai l'esistenza in una Memoria del 1887 (*)) e che furono poi particolarmente studiate dal Fibbi (**).

Notevole è il caso della trasformazione complementare nella quale l'angolo σ è un angolo retto, cioè la congruenza è normale. Nello spazio iperbolico qualunque superficie a curvatura relativa costante negativa ammette ∞^1 trasformate complementari, nell'ellittico solo quando $a < 1$ cioè quando, insieme alla relativa, è negativa anche la curvatura assoluta $K = h + 1$.

I risultati che qui abbiamo nuovamente stabilito non sono del resto che un caso particolare di quelli che stabiliremo nell'ultima parte della Memoria (Cf. § 18).

§ 4.

Congruenze di Guichard nello spazio ellittico.

Proponiamoci ora di studiare quelle congruenze dello spazio ellittico le cui sviluppabili tagliano le due falde della superficie focale secondo le linee di curvatura (congruenze di Guichard). I raggi della congruenza saranno le tangenti alle linee di curvatura di un sistema della prima falda focale S, poniamo p. e. alle linee $v = \text{cost}$. Dovremo dunque fare nelle nostre formole generali $\varphi = 0$; e per esprimere che anche sulla seconda falda $\bar{S}$ le linee (u, v) sono quelle di curvatura basterà scrivere che si ha $\bar{F} = 0$. Intanto le (6), postovi $\varphi = 0$, dànno

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma, \quad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\cot\tau, \tag{7}$$

mentre la $\bar{F} = 0$ ci dà per la seconda delle (A),

$$\frac{\partial\tau}{\partial v}\left(\frac{\partial\tau}{\partial u} + \sqrt{E}\right) = 0,$$

(*) *Sui sistemi di* Weingarten *negli spazî di curvatura costante.* (Memorie della R. Accademia dei Lincei. Serie 4.ª, Vol. IV.)

(**) *I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazî di curvatura costante.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. VII, 1895.)

e quindi dovrà essere o $\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0$, o $\frac{\partial \tau}{\partial u} = -\sqrt{E}$. La prima ipotesi è da escludersi, perchè per la (C) si annullerebbe il binomio $\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2$ e la seconda falda $\overline{S}$ si ridurrebbe ad una curva, caso che naturalmente scartiamo perchè perderebbe ogni significato la questione da noi qui trattata. Alla medesima conclusione conduce la seconda delle (7), la quale dimostra che $\cot\tau$ eguaglia la curvatura delle linee $u = \text{cost}$; queste adunque, se fosse $\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0$, avrebbero costante la curvatura geodetica. Ciascuna di esse sarebbe allora tracciata sopra una sfera ortogonale alla superficie S e la seconda falda focale si ridurrebbe al luogo dei centri di queste sfere.

Così per la congruenza di Guichard si avrà necessariamente

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = -\sqrt{E}. \tag{8}$$

Dopo ciò la seconda della (7) si scrive

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \cot\tau \frac{\partial \tau}{\partial u}$$

e integrata dà

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \operatorname{sen} \tau.$$

dove $\varphi(v)$ è una funzione della sola v che, prendendo convenientemente il parametro v, può farsi $= 1$ e quindi semplicemente

$$\sqrt{G} = \operatorname{sen} \tau. \tag{9}$$

Ora poichè si deve avere anche $\overline{D}' = 0$ ed è $\varphi = 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial u} = -\sqrt{E}$, la seconda delle (B) ci dà

$$\frac{\sqrt{G}}{r_1} = \frac{\partial \sigma}{\partial v}. \tag{10}$$

Dalla prima delle (7), combinata colla equazione (2) di Codazzi, risulta

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cot\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial v},$$

da cui integrando viene

$$\frac{\sqrt{E}}{r_2} = \psi(u) \operatorname{sen} \sigma,$$

con $\varphi(u)$ funzione della sola u. Disponendo del parametro u si può fare

$$\varphi(u) = 1$$

e per ciò

$$\frac{\sqrt{E}}{r_2} = \operatorname{sen} \sigma, \tag{11}$$

Così tutti gli elementi della nostra superficie S vengono espressi per le due funzioni τ, σ, le quali debbono poi soddisfare le due equazioni simultanee che risultano dalle formole (2) di Codazzi, cioè alle due seguenti

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \, \partial v} + \operatorname{sen} \tau \cos \sigma = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \, \partial v} + \cos \tau \operatorname{sen} \sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Quanto alla equazione (3) di Gauss si vede subito che coi valori scritti di $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$, $\frac{\sqrt{E}}{r_2}$, $\frac{\sqrt{G}}{r_1}$, soddisfacendo τ, σ alle (12), è identicamente verificata. Risulta così inversamente dal nostro calcolo che se (τ, σ) è una coppia qualunque di soluzioni delle (12), l'elemento lineare

$$d s^2 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 d u^2 + \operatorname{sen}^2 \tau \, d v^2 \tag{13}$$

apparterrà ad una superficie S dello spazio ellittico di cui saranno u, v le linee di curvatura, mentre i raggi principali (ridotti) di curvatura sono dati dalle formole

$$r_1 = \frac{\operatorname{sen} \tau}{\frac{\partial \sigma}{\partial v}}, \qquad r_2 = -\frac{\frac{\partial \tau}{\partial u}}{\operatorname{sen} \sigma}, \tag{14}$$

e le tangenti alle linee di curvatura $v = \text{cost.}$ della S formeranno una congruenza di Guichard.

§ 5.

Relazione colle superficie pseudosferiche dello spazio Euclideo.

Completiamo dapprima il risultato ottenuto colle osservazioni seguenti. In primo luogo è chiaro che la seconda falda focale $\overline{S}$ della congruenza sarà una superficie della medesima specie, i raggi della congruenza essendo le tangenti alle sue linee di curvatura $u = \text{cost}$. Le nostre formole (A), (B) § 1 confermano la cosa, dimostrando che si ha

$$\overline{E} = \operatorname{sen}^2 \tau, \quad \overline{F} = 0, \quad \overline{G} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2$$

$$D = -\operatorname{sen} \tau \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \quad \overline{D}' = 0, \quad \overline{D}'' = \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \tau}{\partial v}.$$

Dunque per la seconda falda focale $\overline{S}$, riferita alle linee di curvatura (u, v), si avranno le formole

$$d s^2 = \operatorname{sen}^2 \tau \, d u^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 d v^2, \tag{15}$$

$$\overline{r}_1 = -\frac{\frac{\partial \tau}{\partial v}}{\operatorname{sen} \sigma}, \quad \overline{r}_2 = \frac{\operatorname{sen} \tau}{\frac{\partial \sigma}{\partial u}}. \tag{16}$$

Queste sono le formole stesse (13), (14), scambiatovi u con v. La simmetria delle (12) rispetto ad u, v rendono a priori ragione del risultato.

Osserviamo poi che da una congruenza di Guichard se ne deduce subito, nello spazio ellittico, una seconda prendendo la *polare* della primitiva, e questa seconda congruenza avrà per falde focali le due superficie polari S', $\overline{S}'$ di S, $\overline{S}$ rispettivamente. Le formole corrispondenti alle (13), (14); (15), (16) per la seconda congruenza di GUICHARD sono le seguenti (*):

$$d s'^2 = \operatorname{sen}^2 \sigma \, d u^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)^2 d v^2 \tag{13*}$$

$$r'_1 = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\operatorname{sen} \tau}, \quad r'_2 = -\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\frac{\partial \tau}{\partial u}} \tag{14*}$$

$$\overline{d} s'^2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)^2 d u^2 + \operatorname{sen}^2 \sigma \, d v^2 \tag{15*}$$

$$\overline{r}'_1 = -\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\frac{\partial \tau}{\partial v}}, \quad \overline{r}'_2 = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}}{\operatorname{sen} \tau}. \tag{16*}$$

Si osserverà che queste formole si deducono da quelle primitive scambiando τ con σ, come è naturale se si pensa che appunto nel passaggio da una congruenza alla sua polare si scambiano fra loro la distanza τ dei fuochi e l'angolo σ dei piani focali.

Dopo queste osservazioni possiamo dire che: *Ogni coppia di soluzione τ, σ delle equazioni* (12) *individua nello spazio ellittico una congruenza di* GUICHARD *e la sua polare, per le cui falde focali hanno luogo le formole sopra scritte.*

Ma ora, se si pone

$$\tau + \sigma = \theta_1, \quad \tau - \sigma = \theta_2,$$

le (12) diventano semplicemente

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \, \partial v} + \operatorname{sen} \theta_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial u \, \partial v} + \operatorname{sen} \theta_2 = 0;$$

(*) Qui occorre ricordare che la polare S' della S è la superficie parallela alla S e da questa distante di un quadrante, e si hanno le formule

$$d s'^2 = \frac{E}{r_2^2} d u^2 + \frac{G}{r_1^2} d v^2$$

$$r'_1 = \frac{1}{r_1}, \quad r'_2 = \frac{1}{r_2},$$

onde le formule del testo.

e viceversa se θ_2, θ_2 sono due soluzioni qualunque dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} + \operatorname{sen} \theta = 0, \tag{I}$$

ponendo $\tau = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, $\sigma = \frac{\theta_\lambda - \theta_2}{2}$ si ha una coppia (τ, σ) di soluzioni delle (12).

Ricordando ora come a ciascuna soluzione di questa equazione a derivate parziali (I) corrisponde una superficie pseudosferica dello spazio ordinario ed inversamente, possiamo enunciare il risultato finale:

Una coppia di superficie pseudosferiche dello spazio euclideo, arbitrariamente scelte, individua una congruenza di Guichard *nello spazio ellittico (e la sua polare) ed inversamente.*

§ 6.

Esami di tre casi particolari.

La coppia di superficie pseudosferiche ordinarie sopra indicata può prendersi, come si è detto, ad arbitrio. Vogliamo ora considerare tre casi particolari notevoli.

1.° Supponiamo che le due superficie pseudosferiche siano trasformate l'una dell'altra per trasformazione di Bäcklund e vediamo quale particolarità verrà ad offrire la congruenza di Guichard nello spazio ellittico, la quale verrà così a corrispondere alla congruenza pseudosferica ordinaria formata dalle tangenti comuni alle due superficie pseudosferiche. Dalle formole della trasformazione di Bäcklund si vede subito che nel caso attuale le funzioni τ, σ saranno legate dalle relazioni

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} = - k \operatorname{sen} \sigma, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{1}{k} \operatorname{sen} \tau, \tag{17}$$

dove k indica una costante del resto arbitraria. Le formole (15), (16) per la seconda falda focale $\overline{S}$ della congruenza di Guichard diventano

$$\left.\begin{aligned} d s^2 &= \operatorname{seu}^2 \tau \, d u^2 + k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma \, d v^2 \\ \overline{r}_1 &= \overline{r}_2 = k, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

e dimostrano che la $\overline{S}$ è una sfera di raggio (ridotto) $= k$. Viceversa se la seconda falda $\overline{S}$ è una sfera, sussistono necessariamente formole del tipo (17), onde vediamo: *Ad una coppia di superficie pseudosferiche dello spazio euclideo, trasformate di* Bäcklund *l'una dell'altra, corrisponde nello spazio ellittico una congruenza di* Guichard *con una falda focale sferica, e viceversa.*

Volendo ulteriormente precisare il modo di generazione delle attuali congruenze di Guichard, basta caratterizzare le linee sferiche ortogonali (u, v) che dànno all'elemento lineare sferico la forma (18). Per ciò basta osservare che essendo qui $\sqrt{E} = \operatorname{sen} \tau$, $\sqrt{G} = k \operatorname{sen} \sigma$, le due funzioni

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)$$

sono per le (17) nel rapporto costante k^2. Dai risultati contenuti in altra mia Memoria pubblicata in questi *Annali* (*) segue che la proprietà *caratteristica* del sistema sferico ortogonale (18) è la seguente:

Il doppio sistema di traiettorie isogonali, sotto l'angolo $\operatorname{arctg} k$, delle linee $u = \text{cost.}$, divide la sfera in parallelogrammi infinitesimi d'area costante.

È facile di qui formulare una costruzione geometrica per le congruenze di Guichard ora considerata. Nel caso particolare più semplice $k = 1$, corrispondente alla trasformazione complementare la costruzione è la seguente:

Sopra una sfera di raggio (sferico) $= \frac{\pi}{4}$ nello spazio ellittico si consideri un qualunque doppio sistema ortogonale che dia all'elemento lineare la forma $d s^2 = E d u^2 + \frac{d v^2}{E}$ (**); le tangenti alle bisettrici dell'uno o dell'altro sistema delle linee (u, v) formano la congruenza di Guichard *richiesta.*

2.° Supponiamo ora che per una delle due soluzioni θ_1, θ_2 della (I), p. e. per θ_2, si assuma lo zero; allora è $\tau = \sigma$ e le formole del § 6 dimostrano che la seconda falda focale $\overline{S}$ ha le stesse due forme quadratiche fondamentali della polare S' della prima falda. Ne risulta che la S' può sovrapporsi con un movimento alla $\overline{S}$; e siccome ogni punto di S' dista dal suo corri-

---

(*) *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (Annali, Serie 2.ª, Tomo XVIII, 1900), cf. specialmente n.ⁱ 32, 33.

(**) Per la costruzione di questi sistemi (u, v) dalle congruenze pseudosferiche veggasi la Memoria sopra citata (n.° 35).

spondente di S per un quadrante, il movimento in questione non può essere che uno *scorrimento* d'ampiezza $=\frac{\pi}{2}\cdot$ In altre parole le rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti (x'), $(\overline{x})$ delle S', $\overline{S}$ sono parallele nel senso di CLIFFORD. Ciò si conferma facilmente col calcolo dei parametri B, C, D di scorrimento destrorso di queste rette (Vol. I, pag. 451). Tenendo conto delle formole (1) del § 1 applicate al caso attuale e delle relazioni fra i minori di 2.° ordine nel determinante ortogonale destrorso $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$, si trova che le derivate di B, C, D rapporto ad u, v sono identicamente nulle.

3.° Come terzo caso particolare adduciamo quello in cui le due soluzioni θ_1, θ_2 si assumano coincidenti e quindi $\sigma = 0$. Le formole del paragrafo precedente dimostrano che in tal caso le superficie S, $\overline{S}$ si riducono ad un medesimo piano della geometria ellittica, riferito a due sistemi doppi ortogonali di linee (u, v) che dànno ai rispettivi elementi lineari la forma

$$d\,s^2 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 d\,u^2 + \operatorname{sen}^2 \tau\, d\,v^2, \qquad d\,\overline{s}^2 = \operatorname{sen}^2 \tau\, d\,u^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 d\,v^2,$$

soddisfacendo τ all'equazione $\frac{\partial^2 \tau}{\partial u\, \partial v} = -\operatorname{sen} \tau$. È facile vedere che la proprietà geometrica caratteristica di questa rappresentazione del piano ellittico sopra sè stesso è la seguente: *Le curve u del secondo sistema ortogonale sono le evolute delle u del primo sistema ed inversamente le v del primo sistema le evolute delle v del secondo.*

Osserviamo poi che il piano ellittico potendo anche riguardarsi come un'ordinaria sfera euclidea di raggio $=1$, possiamo riguardare le forme superiori del $d\,s^2$, $d\,\overline{s}^2$ come appartenenti a questa sfera. Per quanto è dimostrato nella prima edizione del mio libro a pag. 419, i corrispondenti sistemi sferici ortogonali (u, v) si ottengono nel modo seguente. Presa la superficie pseudosferica il cui elemento lineare, riferito alle assintotiche (u, v) è

$$d\,s^2 = d\,u^2 - 2 \cos \tau\, d\,u\, d\,v + d\,v^2,$$

si consideri la congruenza formata dalle tangenti alle assintotiche v od alle u rispettivamente, e se ne faccia l'immagine sferica. Le linee sferiche corrispondenti alle u, v dànno i due sistemi ortogonali in discorso.

§ 7.

Le congruenze di Guichard nello spazio iperbolico.

La trattazione delle congruenze di Guichard per lo spazio iperbolico procede in modo così analogo a quello svolto pel caso ellittico che basterà indicarla. Se nelle formole generali del § 2 facciamo $\varphi = 0$, otteniamo in primo luogo dalle (6*)

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\sqrt{G}\cot\tau, \tag{19}$$

e dalla $\overline{F} = 0$ abbiamo

$$\frac{\partial\tau}{\partial v}\left(\frac{\partial\tau}{\partial u} + \sqrt{E}\right) = 0,$$

onde, escludendo per la medesima ragione che nello spazio ellittico (§ 4) il caso $\frac{\partial\tau}{\partial v} = 0$, avremo ancora

$$\frac{\partial\tau}{\partial u} = -\sqrt{E}\ .$$

Sostituendo questo valore di $\sqrt{E}$ nella seconda (19) e integrando, col disporre del parametro v, si può fare

$$\sqrt{G} = \operatorname{senh}\tau.$$

Scrivendo ora che $\overline{D'} = 0$, si ha dalla seconda delle (B*)

$$\frac{\sqrt{G}}{r_1} = \frac{\partial\sigma}{\partial v},$$

e combinando colla seconda equazione di Codazzi

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{\sqrt{E}}{r_2}\cot\sigma\,\frac{\partial\sigma}{\partial v},$$

Di qui integrando e disponendo del parametro u, otteniamo

$$\frac{\sqrt{E}}{r_2} = \operatorname{sen}\sigma.$$

Gli elementi fondamentali della prima falda focale S rimangono così espressi per le funzioni τ, σ colle formole

$$\left.\begin{aligned} d s^2 &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 d u^2 + \operatorname{senh}^2 \tau \, d v^2 \\ r_1 &= \frac{\operatorname{senh} \tau}{\frac{\partial \sigma}{\partial v}}, \quad r_2 = -\frac{\frac{\partial \tau}{\partial u}}{\operatorname{sen} \sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Le equazioni di Codazzi si traducono poi per le funzioni τ, σ nelle relazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \, \partial v} + \operatorname{senh} \tau \cos \sigma = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \, \partial v} + \cosh \tau \operatorname{sen} \sigma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

soddisfatte le quali è pure soddisfatta l'equazione di Gauss (3*) § 2.

Per la seconda falda focale $\overline{S}$ otteniamo poi dalle (A*), (B*) § 2:

$$\overline{E} = \operatorname{senh}^2 \tau, \quad \overline{F} = 0, \quad \overline{G} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2$$

$$\overline{D} = -\frac{\partial \sigma}{\partial u} \operatorname{senh} \tau, \quad \overline{D'} = 0, \quad \overline{D''} = \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \tau}{\partial v},$$

ossia per la $\overline{S}$ riferita alle sue linee di curvatura

$$\left.\begin{aligned} \overline{d s}^2 &= \operatorname{senh}^2 \tau \, d u^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 d v^2 \\ r_1 &= -\frac{\frac{\partial \tau}{\partial v}}{\operatorname{sen} \sigma}, \quad r_2 = \frac{\operatorname{senh} \tau}{\frac{\partial \sigma}{\partial u}}. \end{aligned}\right\} \tag{20*}$$

Le coppie (σ, τ) soddisfacenti alle (D) possono anche compendiarsi per la funzione complessa $\Omega = \sigma + i \tau$ nell'unica equazione

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \, \partial v} + \operatorname{sen} \Omega = 0,$$

dalla quale appunto provengono le (D) separando il reale dall'immaginario. Questa ultima è la solita equazione da cui dipendono le ordinarie superficie pseudosferiche; ma ora sono le sue soluzioni *complesse* che conducono alle congruenze (reali) di Guichard nello spazio iperbolico. Abbiamo dunque il risultato finale: *Ogni soluzione complessa dell'equazione:* $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} + \operatorname{sen} \theta = 0$ *individua una congruenza (reale) di* Guichard *nello spazio iperbolico, ed inversamente.* Anche qui osserveremo il caso particolare in cui sia $\sigma = 0$ (Ω puramente immaginaria) e quindi τ sia una soluzione (qualunque) dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial u \, \partial v} + \operatorname{senh} \tau = 0.$$

Esso corrisponde al terzo caso del paragrafo precedente; le formole (20), (20*) dimostrano che S, $\overline{S}$ si riducono ad un medesimo piano (non-euclideo) coi due sistemi ortogonali (u, v) che dànno all'elemento lineare le rispettive forme caratteristiche

$$d\,s^2 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)^2 d\,u^2 + \operatorname{senh}^2 \tau \, d\,v^2, \qquad \overline{d}\,s^3 = \operatorname{senh}^2 \tau \, d\,u^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v}\right)^2 d\,v^2.$$

La proprietà geometrica che caratterizza questa rappresentazione del piano non-euclideo (pseudosfera ordinaria) sopra sè stesso è la medesima che abbiamo descritto alla fine del § 6 per il piano ellittico.

§ 8.

Relazione colle famiglie di Lamé a curvatura nulla.

Le superficie che si presentano come falde focali delle congruenze di Guichard negli spazî di curvatura costante si diranno, per abbreviare, superficie di Guichard. Vogliamo ora dimostrare che esse si presentano in altro problema geometrico, nella teoria dei sistemi tripli ortogonali dello spazio ellittico ed iperbolico che contengono una serie di superficie di curvatura (assoluta) nulla (*).

Sussiste infatti il teorema: *In ogni sistema triplo ortogonale dello spazio*

(*) *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica.* (Annali, Serie 2.ª, Tomo 24, 1895).

ellittico od iperbolico, con una serie (Σ) *di superficie a curvatura nulla, ciascuna superficie di una delle altre due serie è una superficie di* Guichard, *e precisamente le tangenti a quelle sue linee di curvatura che sono traiettorie ortogonali delle superficie* Σ *formano una congruenza di* Guichard.

Ogni sistema triplo ortogonale (u, v, w) dello spazio ellittico, ove le $w =$ cost siano superficie di curvatura nulla, corrisponde alla forma

$$d s^2 = \cos^2 \theta \, d u^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2$$

del $d s^2$, la funzione $\theta(u, v, w)$ essendo legata ad un' altra funzione ω ausiliaria delle relazioni caratteristiche

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} = \cos \theta \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} = \operatorname{sen} \theta \cos \omega. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Ora, se consideriamo p. e. una superficie della serie $u =$ cost, essa ha per elemento lineare riferito alle linee di curvatura (v, w)

$$d s^2 = \operatorname{sen}^2 \theta \, d v^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2 \qquad (\beta)$$

e calcolando, colle note formole, i raggi principali di curvatura r_1, r_2 relativi alle linee v, w rispettivamente si trova

$$r_1 = \frac{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}}{\operatorname{sen} \omega}, \quad r_2 = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}}. \qquad (\gamma)$$

Basta confrontare le (α), (β), (γ) colle (15), (16) § 5 per vedere che esse non ne differiscono che per le notazioni; ne risulta quindi il teorema enunciato.

Analogamente per lo spazio iperbolico un sistema triplo ortogonale della specie considerata corrisponde alla forma

$$d s^2 = \cosh^2 \theta \, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, d v^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2,$$

la funzione θ essendo legata ad un' ausiliaria ω dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = - \frac{\partial \omega}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} = \cosh \theta \operatorname{sen} \omega, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} = \operatorname{senh} \theta \cos \omega. \end{aligned}\right.$$

Per una superficie $u = \text{cost.}$ si ha quindi

$$\left\{\begin{aligned} & d s^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, d v^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 d w^2 \\ & r_1 = \frac{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}}{\operatorname{sen} \omega}, \quad r_2 = \frac{\operatorname{senh} \theta}{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}} \end{aligned}\right.$$

ed il confronto di queste formole con quelle relative alla seconda falda focale S al paragrafo precedente dimostra il teorema. È da osservarsi per altro che nel caso attuale iperbolico le tangenti alle linee di curvatura $u = \text{cost.}$ delle superficie dell'altra serie $v = \text{cost.}$ dànno una congruenza la cui seconda falda è ideale. Considerata nella metrica iperbolica del Cayley anche questa seconda falda è reale e soltanto esterna all'assoluto.

Facilmente poi si potrebbe dimostrare che qualunque superficie di Guichard di uno spazio a curvatura costante appartiene ad uno e ad un solo sistema triplo ortogonale con una serie di superficie a curvatura nulla (cfr. Vol. II, pag. 531).

Conseguentemente la trasformazione complementare e di Bäcklund pei sistemi tripli ortogonali in discorso dànno luogo a trasformazioni analoghe per le superficie (o le congruenze) di Guichard, le cui formole sarebbe facile stabilire direttamente.

§ 9.

Congruenze conformi.

Passiamo ora a trattare la seconda classe di congruenze indicata nella prefazione, quella delle congruenze di Thybaut. Per brevità diremo *conforme* una congruenza rettilinea in uno spazio di curvatura costante (o euclideo) quando, riguardando sulle due falde focali come punti corrispondenti i due fuochi sopra un medesimo raggio, la rappresentazione dell'una falda sull'altra sia conforme (conservi gli angoli).

Data una superficie S nello spazio ellittico od iperbolico, proponiamoci dapprima, in generale, di voler riconoscere se la S appartiene come prima falda focale, e qualche congruenza conforme. Riferita perciò la S alle sue linee di curvatura (u, v), non avremo che da applicare le formole dei §§ 1, 2, scrivendo che sussiste la proporzione

$$\overline{E} : F : \overline{G} = E : F : G,$$

ossia $F = 0$, $\frac{\overline{E}}{E} = \frac{\overline{G}}{G}$. Trattando in primo luogo il caso ellittico, le formole (A) § 1 dimostrano subito che dovranno aver luogo le due relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E} \cos \varphi &= \pm \frac{\sqrt{E}}{r_1} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \varphi \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi &= \mp \frac{\sqrt{G}}{r_2} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi ,\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

delle quali sarà da esaminare la compatibilità colle (6) (ibid.):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} &= \sqrt{E} \cot \tau \operatorname{sen} \varphi - \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cot \sigma \cos \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} &= -\sqrt{G} \cot \tau \cos \varphi - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi .\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

È chiaro che, senza alterare la generalità, possiamo limitarci a considerare il caso che nelle (21) si adottino i segni superiori. La questione proposta si riduce così all'altra di esaminare se possono determinarsi le *tre* funzioni φ, τ, σ in guisa da soddisfare le *quattro* equazioni che si ottengono associando alle (22) le altre:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E} \cos \varphi &= \frac{\sqrt{E}}{r_1} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \varphi \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi &= -\frac{\sqrt{G}}{r_2} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi .\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Ora formando la condizione d'integrabilità per le (22), si ottiene precisamente, come si osservò al § 1, quella relazione lineare fra le derivate di σ che proviene dall'eguagliare i due valori di $\overline{D}'$ nelle (B), osservando le (23), cioè l'equazione

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{G}}{r_1} \operatorname{sen} \varphi \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \operatorname{sen} \varphi \right) - \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cos \varphi \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \cos \varphi \right) = \\ = \sqrt{EG} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \tau} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

D'altra parte se si forma la condizione d'integrabilità delle (23) si ottiene un'altra tale relazione lineare fra $\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ che si vede subito essere distinta dalla precedente (24), quando si esclude, come sempre, il caso di una congruenza a falde focali coincidenti. Per tal modo anche le derivate $\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ vengono espresse, come quelle di φ, τ dalle (22), (23), per φ, τ, σ, u, v ed abbiamo per ciò per le funzioni incognite φ, τ, σ un sistema di equazioni ai differenziali totali, la cui *eventuale* risolubilità si discute in ogni caso concreto con metodi ben noti. Il massimo numero di costanti arbitrarie che potrà comportare la soluzione generale del problema sarà di *3* e ciò avrà luogo quando il detto sistema di equazioni ai differenziali totali è illimitatamente integrabile. Nel caso iperbolico le conclusioni sono perfettamente le stesse; soltanto alle (22), (23), (24) dovremo sostituire, secondo il § 2, le altre;

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \sqrt{E} \coth \tau \operatorname{sen} \varphi - \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cot \sigma \cos \varphi \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\sqrt{G} \coth \tau \cos \varphi - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi
\end{aligned}\right\} \tag{22*}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E} \cos \varphi = \frac{\sqrt{E}}{r_1} \frac{\operatorname{senh} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \varphi \\
&\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen} \varphi = -\frac{\sqrt{G}}{r_2} \frac{\operatorname{senh} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi
\end{aligned}\right\} \tag{23*}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{G}}{r_1} \operatorname{sen} \varphi \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cos \varphi\right) - \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cos \varphi \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \operatorname{sen} \varphi\right) = \\
&\qquad = \sqrt{E\, G} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{senh} \tau} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{24*}$$

Concludiamo intanto dalla nostra discussione: *Una superficie S di uno spazio di curvatura costante può appartenere al massimo, come falda focale, ad una tripla infinità di congruenze rettilinee conformi.*

§ 10.

Congruenze di Thybaut nello spazio ellittico.

Sappiamo che nello spazio euclideo ogni superficie d'area minima è in effetto falda focale di ∞^3 congruenze rettilinee conformi e di più la seconda falda è ancora una superficie d'area minima (Vol. II, pag. 338). La stessa cosa vogliamo ora provare aver luogo in generale in ogni spazio di curvatura costante.

Cominciamo dallo spazio ellittico e ricordiamo che se S è una superficie d'area minima, riferita alle sue linee di curvatura (u, v), si può porre (Vol. II, pag. 338):

$$d s^2 = e^{2\theta}(d u^2 + d v^2)$$

$$r_1 = e^{2\theta}, \quad r_2 = -e^{2\theta},$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta} - e^{2\theta}.$$

Introducendo queste ipotesi particolari nelle formole del paragrafo precedente e formando l'effettiva condizione d'integrabilità delle (23), troviamo per le tre funzioni incognite φ, τ, σ il seguente sistema di equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} &= e^{\theta} \cot \tau \operatorname{sen} \varphi + e^{-\theta} \cot \sigma \cos \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= -e^{\theta} \cot \tau \cos \varphi - e^{-\theta} \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= e^{-\theta} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \varphi - e^{\theta} \cos \varphi \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} &= e^{-\theta} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi - e^{\theta} \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\theta} \operatorname{sen} \varphi - e^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \tau} \cos \varphi \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= e^{-\theta} \cos \varphi - e^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \tau} \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Si osservi che queste ultime possono anche scriversi sotto la forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u}=\frac{1}{\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u},\quad \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial v}=-\frac{1}{\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\tau}{\partial v} \tag{d}$$

e dimostrano che: *nelle congruenze in discorso è costante il rapporto* $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}}$.

Ora, pel modo stesso come vennero dedotte le (c), le condizioni d'integrabilità per le (a), (b) sono identicamente soddisfatte, e quanto alla condizione d'integrabilità per le (c) risulta pure soddisfatta, come segue dal calcolo diretto o dal considerare la loro forma equivalente (d).

Abbiamo così dimostrato: *Qualunque superficie S d'area minima dello spazio ellittico appartiene, come falda focale, ad* ∞^3 *congruenze conformi.*

Per definire una tale congruenza potremo dare ad arbitrio *in un punto di S* i valori di τ, φ, σ, cioè geometricamente: 1.° *la lunghezza* τ *del segmento focale*, 2.° *l'orientazione di questo segmento nel piano tangente di S*, 3.° *l'angolo* σ *dei due piani focali.*

Ma applichiamo ora le formole (A), (B) del § 1 per riconoscere la natura della seconda falda focale $\overline{S}$; troviamo:

$$\overline{E}=\overline{G}=e^{-2\theta}\frac{\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma},\quad \overline{F}=0 \tag{25}$$

$$D=1,\quad \overline{D'}=0,\quad D''=\quad 1. \tag{26}$$

Queste formole ci dicono: *La seconda falda focale S della congruenza conforme è ancora una superficie d'area minima, che corrisponde per linee di curvatura e per linee assintotiche alla primitiva S.*

Come si vede, sono queste le proprietà stesse delle congruenze di Thybaut nello spazio euclideo.

§ 11.

Caso particolare notevole.

Evvi un caso particolare di congruenze di Thybaut nello spazio ellittico che vogliamo ora esaminare. Dalle formole generali del paragrafo precedente esso risulta supponendo $\sigma = \mp \tau$, il che riduce le (b) (c) coincidenti, ed associandole alle (a) si ha un sistema completamente integrabile, che p. e. nel caso $\sigma = \tau$ si scrive:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \cot \tau \, (e^{\theta} \operatorname{sen} \varphi + e^{-\theta} \cos \varphi) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u} &= - \cot \tau \, (e^{\theta} \cos \varphi + e^{-\theta} \operatorname{sen} \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= e^{-\theta} \operatorname{sen} \varphi - e^{\theta} \cos \varphi \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} &= e^{-\theta} \cos \varphi - e^{\theta} \operatorname{sen} \varphi . \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Essendo $\sigma = \pm \tau$ le (25) dànno

$$\overline{d s}^2 = e^{-2\theta} (d u^2 + d v^2)$$

$$\bar{r}_1 = - e^{-2\theta}, \quad r_2 = e^{-2\theta},$$

e dimostrano che la seconda falda focale $\overline{S}$ coincide di forma colla polare S' di S. Se indichiamo con M, $\overline{M}$ M' tre punti qualunque corrispondenti di S, $\overline{S}$, S', siccome M' dista da $\overline{M}$ di un quadrante, il movimento che porta S' in $\overline{S}$ sarà uno scorrimento *ortogonale*, cioè d'ampiezza $\frac{\pi}{2}$ (cfr. § 6, 2°).

Si può spiegare a priori questo risultato colla seguente osservazione geometrica generale. Consideriamo nello spazio ellittico una superficie *qualunque* S e la sua polare S', e trasportiamo con uno scorrimento ortogonale qualsiasi S in $\overline{S}$. Essendo M, M, $\overline{M}$ tre punti corrispondenti di S. S S, dimostriamo:

La congruenza rettilinea $M\overline{M}$ ha per falde focali S, $\overline{S}$ e la distanza τ dei fuochi M, $\overline{M}$ eguaglia l'angolo σ dei piani focali.

Per ciò osserviamo che le coordinate (x) di M sono altresì le coordinate del piano tangente in M' alla S', come dualmente le coordinate (ξ) del piano tangente in M alla S coincidono colle coordinate di M. Se facciamo uno scorrimento ortogonale, p. e. destrorso, coi parametri (Vol. I, pag. 445):

$$A = 0,\ B,\ C,\ D,$$

per le coordinate $(\overline{x})$ di $\overline{M}$, e per quelle $(\overline{\xi})$ del piano tangente in $\overline{M}$ alla $\overline{S}$ avremo

$$\left\{\begin{aligned} \overline{x}_0 &= -B\xi_1 - C\xi_2 - D\xi_3, \\ \overline{x}_1 &= B\xi_0 - D\xi_1 + C\xi_3, \\ \overline{x}_2 &= C\xi_0 + D\xi_1 - B\xi_3, \\ \overline{x}_3 &= D\xi_0 - C\xi_1 + B\xi_2, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \overline{\xi}_0 &= -Bx_1 - Cx_2 - Dx_3 \\ \overline{\xi}_1 &= Bx_0 - Dx_1 + Cx_3 \\ \overline{\xi}_2 &= Cx_0 + Dx_1 - Bx_3 \\ \overline{\xi}_3 &= Dx_0 - Cx_1 + Bx_2 \end{aligned}\right.$$

e le identità che ne seguono

$$\Sigma\, \overline{\xi}\, x = 0, \quad \Sigma\, \xi\, \overline{x} = 0$$

$$|\Sigma\, x\, \overline{x}| = |\Sigma\, \xi\, \overline{\xi}|$$

provano la proposizione enunciata. Osserviamo di più che: *sopra S, $\overline{S}$ si corrispondono linee di curvatura e linee assintotiche*, perchè ciò ha luogo nella corrispondenza fra la S e la sua polare S'.

Ma supponiamo ora che la S sia ad area minima; allora anche la sua polare S' è ad area minima ed è rappresentata sopra S conformemente, onde risulta che la congruenza sopra considerata sarà in tal caso una congruenza di Thybaut. È pure evidente geometricamente che avremo ∞^2 di queste congruenze speciali di Thybaut, aventi per una falda focale la superficie data S. Da queste considerazioni risulta altresì che, nota S, l'integrale generale del sistema illimitatamente integrabile (27), (28) si ottiene senza alcuna quadratura.

§ 12.

Relazione colle deformate del paraboloide.

Nello spazio euclideo le congruenze di Thybaut si collegano ai teoremi di Guichard sulle deformate del paraboloide di rotazione nel modo seguente che dimostrai in una mia Nota nei *Rendiconti dei Lincei* (*) (cf. Vol. II, pag. 334): *Le due superficie d'area minima coniugate in applicabilità delle falde focali di una congruenza di* Thybaut, *convenientemente collocate nello spazio, sono le due superficie d'area minima che il primo teorema di* Guichard *(Vol. II, pag. 100) associa ad una deformata del paraboloide di rotazione.*

I teoremi di Guichard sulle deformate delle quadriche di rotazione furono poi da me estesi agli spazî di curvatura costante in due successive memorie nei tomi IV e V (Serie 3.ª) di questi *Annali.* Ed ora dimostrerò ulteriormente, servendomi di quei risultati, che le proprietà ora ricordate delle congruenze di Thybaut si conservano nello spazio ellittico (ed iperbolico).

Suppongasi di avere una congruenza di Thybaut nello spazio ellittico, definita dalle formole del § 10, e sia S' la coniugata in applicabilità (Vol. II, pag. 339) della S, sicchè per la S' le linee (u, v) sono assintotiche e si ha

$$\left.\begin{aligned} d s'^2 &= e^{2\theta}(d u^2 + d v^2) \\ D = D'' = 0, &\quad D' = 1 \end{aligned}\right\} \text{per la } S'.$$

Con una conveniente trasformazione, di quelle considerate nella prima delle Memorie sopra citate (*Annali*, tom. IV), deduciamo dalla S' una nuova superficie ad area minima $\overline{S'}$ nel modo seguente.

Prendasi una coppia (Φ, W) di soluzioni del sistema di equazioni a derivate parziali

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - e^{2\theta}\Phi + c\, e^{2\theta} W \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + c\,\Phi - W \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - e^{2\theta}\Phi + c\, e^{2\theta} W \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

(*) *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie d'area minima.* (Agosto, 1899.)

$$\frac{\partial W}{\partial u} = e^{-2\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = e^{-2\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \tag{30}$$

$$e^{-2\theta} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \right\} + \Phi^2 + W^2 = 2\, c\, \Phi\, W, \tag{31}$$

dove c è una costante. La superficie d'area minima trasformata S' avrà per l'elemento lineare riferito alle assintotiche (u, v):

$$\overline{d} s'^2 = e^{-2\theta} \frac{\Phi^2}{W^2} (d u^2 + d v^2).$$

Per le formole (25) del § 10 sarà provato che la $\overline{S}$, convenientemente scelta, sarà la coniugata in applicabilità della seconda falda focale $\overline{S}$ della congruenza di Thybaut se dimostriamo che, scelta la costante c in modo conveniente, e presa opportunamente la coppia (Φ, W) di soluzioni delle (29), (30), (31), si può rendere

$$\frac{\Phi}{W} = \frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen} \sigma}.$$

Ponendo

$$\Phi = \lambda \operatorname{sen} \tau, \quad W = \lambda \operatorname{sen} \sigma, \tag{32}$$

dalle (30) si trae

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} &= e^{\theta} \frac{\cos \sigma}{\operatorname{sen} \tau} \cos \varphi + e^{-\theta} \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \varphi \\ \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} &= e^{\theta} \frac{\cos \sigma}{\operatorname{sen} \tau} \operatorname{sen} \varphi - e^{-\theta} \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Intanto dalle (a), (b), (c) § 10, che si suppongono soddisfatte, risulta che le equazioni simultanee (33) per la incognita λ sono compatibili, e λ ne risulta quindi determinata con una quadratura, a meno di un fattore costante.

Dalle (32), derivando, troviamo ora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \lambda\, e^{\theta} (\cos \sigma - \cos \tau) \cos \varphi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \lambda\, e^{\theta} (\cos \sigma - \cos \tau) \operatorname{sen} \varphi, \tag{34}$$

indi per le (32)

$$\frac{e^{-2\theta} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \right\} + \Phi^2 + W^2}{2\, \Phi\, W} = \frac{1 - \cos \sigma \cos \tau}{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \tau}.$$

Ma dalle (d) § 10 risulta subito che il secondo membro di questa formola è una costante; presa questa per valore di c, la (31) è adunque soddisfatta.

Ed ora, derivando nuovamente le (34), si vede facilmente che Φ, W, date dalle (32), soddisfano anche le (29). Così è provato quanto si voleva dimostrare.

§ 13.

Congruenze di Thybaut nello spazio iperbolico.

Indichiamo rapidamente i risultati analoghi pel caso iperbolico che si stabiliscono con processo affatto simile. Per una superficie d'area minima S di questo spazio riferito alle linee di curvatura si ha

$$\begin{cases} d\,s^2 = e^{2\theta}\,(d\,u^2 + d\,v^2) \\ r_1 = e^{2\theta}, \quad r_2 = -\,e^{2\theta}, \end{cases}$$

soddisfacendo θ all'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{2\theta} + e^{-2\theta}.$$

Una congruenza conforme di cui S sia una falda focale è definita dal sistema simultaneo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} &= e^{\theta} \coth \tau \operatorname{sen} \varphi + e^{-\theta} \cot \sigma \cos \varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} &= -\,e^{\theta} \coth \tau \cos \varphi - e^{-\theta} \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (a^*)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= e^{-\theta}\,\frac{\operatorname{senh} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \varphi - e^{\theta} \cos \varphi \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} &= e^{-\theta}\,\frac{\operatorname{senh} \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi - e^{\theta} \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (b^*)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\theta} \operatorname{sen} \varphi - e^{\theta}\,\frac{\cos \sigma}{\operatorname{senh} \tau} \cos \varphi \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= e^{-\theta} \cos \varphi - e^{\theta}\,\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{senh} \tau} \operatorname{sen} \varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (c^*)$$

e si osserverà anche qui che le ultime possono scriversi sotto la forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{1}{\operatorname{senh} \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma}\,\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{1}{\operatorname{senh} \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial v} \qquad (d^*)$$

onde risulta che: *in queste congruenze è costante il rapporto*

$$\frac{\operatorname{tgh}\frac{\tau}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}}.$$

Il sistema (a*), (b*), (c*) è illimitatamente integrabile a causa della equazione: $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{2\theta} + e^{-2\theta}$, cui soddisfa θ.

Per la seconda falda focale $\overline{S}$, dalle (A*), (B*) § 2 abbiamo

$$\overline{E} = \overline{G} = e^{2\theta} \frac{\operatorname{senh}^2 \tau}{\operatorname{sen}^2 \sigma}, \qquad \overline{F} = 0$$

$$\overline{D} = 1, \quad \overline{D}' = 0, \quad \overline{D}'' = -1;$$

si hanno quindi i medesimi risultati come per lo spazio ellittico.

Dimostriamo in fine che anche nel caso attuale le due coniugate in applicabilità S', $\overline{S}'$ delle S, $\overline{S}$ sono fra di loro e con una deformata del paraboloide di rotazione nella relazione del teorema di Guichard per lo spazio iperbolico. Dalla superficie d'area minima S' che riferita alle assintotiche (u, v) ha l'elemento lineare

$$d s'^2 = e^{2\theta} (d u^2 + d v^2)$$

con

$$D = D'' = 0, \qquad D' = 1$$

si passa alla trasformata $\overline{S}'$ (m. c.) secondo il teorema di Guichard nel modo seguente. Per l'elemento lineare di $\overline{S}'$ riferita alle assintotiche (u, v) si ha

$$d \overline{s}'^2 = e^{-2\theta} \frac{\Phi^2}{W^2} (d u^2 + d v^2),$$

essendo (Φ, W) una coppia di soluzioni del sistema seguente di equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + e^{2\theta}\Phi + c\, e^{2\theta} W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + c\,\Phi - W \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + e^{2\theta}\Phi + c\, e^{2\theta} W
\end{aligned}\right\} \qquad (29^*)$$

$$\frac{\partial W}{\partial u} = e^{-2\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = e^{-2\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \tag{30*}$$

$$e^{-2\theta} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \right\} - \Phi^2 + W^2 = 2\, c\, \Phi\, W, \tag{31*}$$

indicando c una costante.

Procedendo come al paragrafo precedente, basterà provare che, soddisfacendo Φ, τ, σ alle (a*), (b*), (c*), si può scegliere la costante c e la coppia di soluzioni (Φ, W) del sistema superiore in guisa che risulti

$$\frac{\Phi}{W} = \frac{\operatorname{senh} \tau}{\operatorname{sen} \sigma}.$$

Posto

$$\Phi = \lambda \operatorname{senh} \tau, \qquad W = \lambda \operatorname{sen} \sigma, \tag{32*}$$

dalle (30*) si traggono in primo luogo le equazioni compatibili in λ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} &= e^{\theta} \frac{\cos \sigma}{\operatorname{senh} \tau} \cos \varphi - e^{-\theta} \frac{\cosh \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \varphi \\ \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} &= e^{\theta} \frac{\cos \sigma}{\operatorname{senh} \tau} \operatorname{sen} \varphi - e^{-\theta} \frac{\cosh \tau}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{33*}$$

che dànno λ con una quadratura. Successivamente troviamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \lambda\, e^{\theta} (\cos \sigma - \cosh \tau) \cos \varphi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \lambda\, e^{\theta} (\cos \sigma - \cosh \tau) \operatorname{sen} \varphi \tag{34*}$$

e quindi

$$\frac{e^{-2\theta} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \right\} - \Phi^2 + W^2}{2\, \Phi\, W} = \frac{1 - \cos \sigma \cosh \tau}{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{senh} \tau}.$$

Il secondo membro, a causa delle (d*) è appunto una costante. Presa questa per la costante c, la (31*) è soddisfatta. E così, derivando le (34*), si prova che anche le (29*) sono verificate.

§ 14.

Formole relative ad una superficie riferita alle assintotiche.

Ci volgiamo ora a trattare l'ultimo degli argomenti proposti, lo studio delle congruenze W a falde focali d'egual curvatura negli spazî di curvatura costante. Come nello spazio euclideo (Vol. II, pag. 74) ci limiteremo per altro al caso in cui le linee assintotiche delle due falde focali sono reali. Converrà per prima cosa stabilire un sistema di formole fondamentali per una superficie S del nostro spazio, riferita alle assintotiche. Queste formole sono le stesse tanto nello spazio ellittico che nell'iperbolico (come nell'euclideo); indicando con K_0 la curvatura dello spazio faremo al solito per semplicità $K_0 = +1$ nel primo, $K_0 = -1$ nel secondo caso.

L'elemento lineare della S, riferita alle assintotiche (u, v), sia dato da

$$d s^2 = E\, d u^2 + 2 \cos \omega \sqrt{E G}\, d u\, d v + G\, d v^2,$$

dove dunque ω è l'angolo compreso dalle assintotiche. Indicando con

$$k = -\frac{1}{\rho^2}$$

la curvatura *relativa* della superficie, avremo pei coefficienti della seconda forma fondamentale

$$D = D'' = 0, \qquad D' = \sqrt{E G}\, \frac{\operatorname{sen} \omega}{\rho}.$$

Essendo ora x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di un punto M variabile sopra S, denotiamo con $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ i coseni di direzione della normale alla S e con

$$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3$$
$$\zeta_0, \quad \zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3$$

quelli delle tangenti alle linee di curvatura, cioè alle due bisettrici delle linee coordinate, e poniamo precisamente

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ \zeta &= \frac{1}{2 \cos \frac{\omega}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} \right). \end{aligned} \right\} \tag{35}$$

Le formole che vogliamo stabilire esprimono le derivate rapporto ad u, v degli elementi del determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

per gli elementi stessi. Per quelli della prima linea esse seguono dalle (35), per quelli della seconda dalle formole generali date nel Vol. I, pag. 493 e ivi segnate (39). Per gli elementi delle altre due righe si deducono nel modo stesso tenuto nelle *Lezioni* (Vol. I, pag 318 e ss.) per stabilire le formole relative alla sfera. Diamo nella seguente tabella le formole che così si ottengono:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= \sqrt{E}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cdot\eta+\cos\frac{\omega}{2}\cdot\zeta\right)\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= \sqrt{G}\left(-\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cdot\eta+\cos\frac{\omega}{2}\cdot\zeta\right)\cdot
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{\sqrt{E}}{\rho}\left(\cos\frac{\omega}{2}\cdot\eta-\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cdot\zeta\right),\\
\frac{\partial \xi}{\partial v} &= -\frac{\sqrt{G}}{\rho}\left(\cos\frac{\omega}{2}\cdot\eta+\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cdot\zeta\right),
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial u} &= -\sqrt{E}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cdot x-\frac{\sqrt{E}}{\rho}\cos\frac{\omega}{2}\cdot\xi-A\,.\,\zeta,\\
\frac{\partial \eta}{\partial v} &= \sqrt{G}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cdot x+\frac{\sqrt{G}}{\rho}\cos\frac{\omega}{2}\cdot\xi+B\,.\,\zeta,
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial u} &= -\sqrt{E}\cos\frac{\omega}{2}\cdot x+\frac{\sqrt{E}}{\rho}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cdot\xi+A\,.\,\eta,\\
\frac{\partial \zeta}{\partial v} &= -\sqrt{G}\cos\frac{\omega}{2}\cdot x+\frac{\sqrt{G}}{\rho}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cdot\xi-B\cdot\eta;
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

le quantità A, B vi hanno il significato seguente

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 1\end{matrix}\right\}\operatorname{sen}\omega\\
B &= \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial v}+\sqrt{\frac{G}{E}}\left\{\begin{matrix}1\ 2\\ 2\end{matrix}\right\}\operatorname{sen}\omega.
\end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Le formole (E) valgono sì nel caso ellittico che nell'iperbolico. La differenza fra i due casi appare solo in ciò che, in virtù della formola di Liouville per la curvatura, le quantità A, B date dalla (36) sono legate dall'identità

$$\frac{\partial A}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}=\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,\omega\left(\frac{1}{\rho^2}-1\right) \quad \text{nel caso ellittico,} \tag{37}$$

e invece dall'altra

$$\frac{\partial A}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}=\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,\omega\left(\frac{1}{\rho^2}+1\right) \quad \text{nel caso iperbolico.} \tag{37*}$$

Aggiungiamo che per avere dalle (E) le formole che valgono nello spazio euclideo basta sopprimere nei secondi membri per le derivate di η, ζ i primi termini, contenenti x.

§ 15.

Formole relative alle congruenze.

Abbiasi ora una congruenza rettilinea di cui sia S una delle falde focali e indichiamo la seconda con $\overline{S}$. Per fissare le idee riferiamoci prima al caso ellittico e, adoperando le notazioni stesse del § 1, scriviamo le formole per la $\overline{S}$ sotto la forma (4), (5), cioè

$$\overline{x}=x\cos\tau+(\eta\cos\varphi+\zeta\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\tau \tag{38}$$

$$\overline{\xi}=\xi\cos\sigma+(\eta\,\mathrm{sen}\,\varphi-\zeta\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\sigma. \tag{39}$$

Scrivendo le condizioni

$$\Sigma\,\overline{\xi}\,\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}=0,\quad \Sigma\,\xi\,\frac{\partial\overline{x}}{\partial v}=0,$$

avendo riguardo alle formole della tabella (E), troviamo in primo luogo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-A&=-\sqrt{E}\cos\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\cot\sigma}{\rho}+\cot\tau\right)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}+B&=\sqrt{G}\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\cot\sigma}{\rho}-\cot\tau\right)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Ed ora, derivando le (38), (39) osservando le (E) deduciamo le altre:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = -\operatorname{sen}\tau\left[\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E}\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right]\cdot x -$$

$$-\frac{\sqrt{E}}{\rho}\operatorname{sen}\tau\cos\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\cdot \xi +$$

$$+\left\{\cos\varphi\cos\tau\left[\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E}\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{E}}{\rho}\operatorname{sen}\tau\cot\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right\}\cdot\eta +$$

$$+\left\{\operatorname{sen}\varphi\cos\tau\left[\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E}\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right] -\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{E}}{\rho}\operatorname{sen}\tau\cot\sigma\cos\varphi\cos\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right\}\cdot\zeta$$

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = -\operatorname{sen}\tau\left[\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\right] x +$$

$$+\frac{\sqrt{G}}{\rho}\operatorname{sen}\tau\cos\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\xi +$$

$$+\left\{\cos\varphi\cos\tau\left[\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\right] -\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{G}}{\rho}\operatorname{sen}\tau\cot\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\right\}\cdot\eta +$$

$$+\left\{\operatorname{sen}\varphi\cos\tau\left[\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{G}}{\rho}\operatorname{sen}\tau\cot\sigma\cos\varphi\cos\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\right\}\cdot\zeta$$

$$\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial u} = \sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\cos\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\cdot x -$$

$$-\operatorname{sen}\sigma\left[\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{\rho}\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right]\xi +$$

$$+\left\{\operatorname{sen}\varphi\cos\sigma\left[\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{\rho}\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right] -\right.$$

$$\left.-\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\cot\tau\cos\varphi\cos\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right\}\cdot\eta +$$

$$+\left\{-\cos\varphi\cos\sigma\left[\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{\rho}\,\mathrm{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cot\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\right\}\cdot\zeta$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v}=\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\cdot x-$$
$$-\mathrm{sen}\,\sigma\left[\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{\rho}\,\mathrm{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]\cdot\xi+$$
$$+\left\{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\sigma\left[\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{\rho}\,\mathrm{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cot\tau\cos\varphi\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right\}\cdot\eta+$$
$$+\left\{-\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\sigma\left[\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{\rho}\,\mathrm{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cot\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right\}\cdot\zeta.$$

Servendoci delle formole scritte e costruendo i coefficienti delle due forme quadratiche fondamentali per la superficie $\overline{S}$, troviamo per le formole richieste:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E}&=\left[\frac{\partial\tau}{\partial u}+\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\right]^2+\frac{E}{\rho^2}\frac{\mathrm{sen}^2\tau}{\mathrm{sen}^2\sigma}\cos^2\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\\
\overline{F}&=\left[\frac{\partial\tau}{\partial u}+\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]-\\
&\quad-\frac{\sqrt{EG}}{\rho^2}\frac{\mathrm{sen}^2\tau}{\mathrm{sen}^2\sigma}\cos\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\\
\overline{G}&=\left[\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]^2+\frac{G}{\rho^2}\frac{\mathrm{sen}^2\tau}{\mathrm{sen}^2\sigma}\cos^2\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{F})$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{D}&=\sqrt{E}\,\frac{\mathrm{sen}\,\sigma}{\mathrm{sen}\,\tau}\cos\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\tau}{\partial u}+\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\right]-\\
&\quad-\frac{\sqrt{E}}{\rho}\frac{\mathrm{sen}\,\tau}{\mathrm{sen}\,\sigma}\cos\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{\rho}\mathrm{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{G})$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{D'} &= \sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\tau}{\partial u}+\sqrt{E}\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\right]-\\
&\qquad -\frac{\sqrt{E}}{\rho}\,\frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{\rho}\operatorname{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]\\
D' &= \sqrt{E}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]+\\
&\qquad +\frac{\sqrt{G}}{\rho}\,\frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{\rho}\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{\rho}\right)\right]\\
D'' &= \sqrt{G}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]+\\
&\qquad +\frac{\sqrt{G}}{\rho}\,\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\tau}\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{\rho}\operatorname{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right].
\end{aligned}\right\}\quad (G)$$

L'eguaglianza dei valori di $\overline{D'}$ dati dalle (G) segue anche dalle (40) formando la condizione d'integrabilità col tener conto dell'identità (37) e delle altre

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}=2\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}=2\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix}\qquad (41)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} &= \sqrt{E}\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix}+\cos\omega\sqrt{G}\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix}\\
\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} &= \sqrt{G}\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix}+\cos\omega\sqrt{E}\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix}.
\end{aligned}\right\}\qquad (42)$$

La stessa cosa può dirsi implicitamente contenuta nel risultato al § 1, giacchè le formole attuali non sono che quelle già ivi stabilite, trasformate in coordinate assintotiche.

Notiamo ancora che dalle (F) segue l'altra

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E}\,\overline{G}-\overline{F}^2 &= \frac{1}{\rho^2}\frac{\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma}\left\{\sqrt{G}\cos\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\tau}{\partial u}+\sqrt{E}\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\right]+\right.\\
&\qquad\left.+\sqrt{E}\cos\left(\varphi+\frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\varphi-\frac{\omega}{2}\right)\right]\right\}^2.
\end{aligned}\right\}\quad (H)$$

Formole affatto simili a quelle ora stabilite pel caso ellittico valgono nell'iperbolico. Senza scriverle esplicitamente basta osservare che si deducono dalle precedenti cangiando dappertutto le funzioni circolari di τ nelle iperboliche corrispondenti.

§ 16.

Le congruenze W in generale.

Supponiamo ora che la nostra congruenza sia tale che sulle due falde S, $\overline{S}$ si corrispondano le linee assintotiche (sia una congruenza W). È perciò necessario e sufficiente che si abbia insieme $D = 0$, $\overline{D}'' = 0$, ossia per le (G) che sussistano le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{\rho} \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right) &= \rho \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 \tau}\left[\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E} \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right] \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{\rho} \operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right) &= -\rho \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 \tau}\left[\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Tenendo conto di queste, il valore di $\overline{D}'$ dato dalle medie (G) diventa

$$\left.\begin{aligned} \overline{D}' = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \tau}\Big\{ & \sqrt{G} \cos\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial \tau}{\partial u} + \sqrt{E} \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\right] + \\ & + \sqrt{E} \cos\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\left[\frac{\partial \tau}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\right]\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Se ora indichiamo con $\overline{k}$ la curvatura relativa della seconda falda $\overline{S}$, abbiamo

$$\overline{k} = -\frac{\overline{D}'^2}{\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2};$$

di qui, osservando la (44) e la (H), si deduce la formola

$$\overline{k} = -\rho^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \tau}\right)^4,$$

ovvero, essendo $k = -\frac{1}{\rho^2}$ la curvatura relativa della prima falda:

$$k\,\overline{k} = \left(\frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \tau}\right)^4. \tag{45}$$

A questa formola, che vale per le congruenze W nello spazio ellittico, si sostituisce naturalmente nello spazio iperbolico l'altra

$$k\,k = \left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{senh}\tau}\right)^4. \tag{45*}$$

È chiaro che le formole ora ottenute dànno l'estensione alle congruenze W degli spazî di curvatura costante del teorema di Ribaucour per lo spazio euclideo (Vol. II, pag. 58).

Un'altra proprietà delle congruenze W dello spazio euclideo si estende alle attuali collegandole alla teoria delle deformazioni infinitesime col teorema:

Affinchè una congruenza rettilinea sia una congruenza W è necessario e sufficiente che una falda focale sia suscettibile di una deformazione infinitesima nella quale ciascun punto della superficie si sposta nella direzione normale al piano tangente dell'altra falda.

Questo, che fu già dimostrato per altra via dal Fubini (*), deduciamo dalle nostre formole nel modo seguente. Indicando con T una funzione incognita di u, v e con ε una costante infinitesima, poniamo

$$x' = x + \varepsilon\, T\,\overline{\xi} \tag{46}$$

e cerchiamo se è possibile determinare T in guisa che ne risulti identicamente

$$\Sigma\, d\,x\,.\,d(T\,\xi) = 0, \tag{47}$$

nel qual caso appunto le (46) daranno una superficie infinitamente vicina alla S ed applicabile sopra di essa. Servendoci delle formole generali § 15, troviamo che la (47) si traduce per la funzione incognita T nelle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log(T\operatorname{sen}\sigma)}{\partial u} &= -\sqrt{E}\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\cot\sigma}{\rho} + \cot\tau\right) \\ \frac{\partial \log(T\operatorname{sen}\sigma)}{\partial v} &= \sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\cot\sigma}{\rho} - \cot\tau\right). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

È dunque necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\cot\sigma}{\rho} - \cot\tau\right)\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{E}\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\cot\sigma}{\rho} + \cot\tau\right)\right] = 0;$$

(*) *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie negli spazî a curvatura costante.* (Rendiconti dei Lincei, Marzo 1899.)

ora questa sviluppata conduce ad un'equazione lineare fra le derivate di τ, σ, e combinata coll'altra che risulta dall'eguagliare i valori di D nelle (C) dà un sistema equivalente alle (43), ciò che dimostra il teorema.

§ 17.

Congruenze W a falde focali d'egual curvatura.

Veniamo ora all'oggetto proprio della nostra ricerca e supponiamo che nella nostra congruenza W le due falde focali abbiano egual curvatura e sia quindi

$$k = k = -\frac{1}{\rho^2}\,.$$

Considerando ancora il caso ellittico, la formola (45) generalizzata di Ribaucour dà fra τ, σ la relazione finita

$$\operatorname{sen}^2 \tau = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \sigma, \tag{49}$$

dopo di che le (43) si riducono semplicemente alle

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial v}. \tag{50}$$

Bisogna adunque intanto che la funzione ρ di u, v sia tale da rendere compatibili queste equazioni (50) colla (49). Ma viceversa, se ciò accade e τ, σ sono scelte in guisa da soddisfare queste tre equazioni, le osservazioni fatte ai paragrafi precedenti dimostrano che basterà poi scegliere φ in guisa da soddisfare le (40), che formeranno un sistema illimitatamente integrabile. Alla (49), senza alterare la generalità, possiamo sostituire l'altra

$$\operatorname{sen} \tau = \rho \operatorname{sen} \sigma \tag{51}$$

intendendo che ρ, $\operatorname{sen}\tau$, $\operatorname{sen}\sigma$ siano positivi. Derivando questa rapporto ad u, v e combinando colle (50), possiamo a queste sostituire le equivalenti

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\operatorname{sen} \tau}{\cos \tau - \cos \sigma}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen} \tau}{\cos \tau + \cos \sigma}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}. \tag{52}$$

Esprimendo in queste $\cos\sigma$ per τ dalle (51), non resterà altro che a scrivere la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau-\cos\sigma}\cdot\frac{\partial\log\rho}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau+\cos\sigma}\cdot\frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right)=0.$$

Questa assume dapprima la forma

$$\frac{2\operatorname{sen}\tau\cos\sigma}{\cos^2\tau-\cos^2\sigma}\,\frac{\partial^2\log\rho}{\partial u\,\partial v}+\frac{2\,\mu\operatorname{sen}\tau}{\cos^2\tau-\cos^2\sigma}\,\frac{\partial\log\rho}{\partial u}\,\frac{\partial\log\rho}{\partial v}=0, \tag{53}$$

dove si è posto

$$\mu=\frac{1+\operatorname{sen}^2\sigma-\cos\sigma\cos\tau}{\cos\tau-\cos\sigma}-\frac{1+\operatorname{sen}^2\sigma+\cos\sigma\cos\tau}{\cos\tau+\cos\sigma}.$$

Con facili riduzioni si ha

$$\mu=2\cos\sigma\,\frac{\operatorname{sen}^2\sigma+\operatorname{sen}^2\tau}{\operatorname{sen}^2\sigma-\operatorname{sen}^2\tau},$$

ossia per la (49)

$$\mu=2\cos\sigma\,\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}.$$

Così la (53) diventa

$$\frac{\partial^2\log\rho}{\partial u\,\partial v}=\frac{\rho^2+1}{\rho^2-1}\,\frac{\partial\log\rho}{\partial u}\,\frac{\partial\log\rho}{\partial v},$$

o sotto altra forma

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}=\frac{2\rho}{\rho^2-1}\,\frac{\partial\rho}{\partial u}\,\frac{\partial\rho}{\partial v}. \tag{54}$$

Di questa troviamo subito l'integrale generale sotto la forma

$$\rho=\frac{\varphi(u)+\psi(v)}{1+\varphi(u)\,.\,\psi(v)}, \tag{K}$$

essendo $\varphi(u)$, $\psi(v)$ le due funzioni arbitrarie, l'una di u, l'altra di v.

Così ρ ha necessariamente la forma (K); ma inversamente se questo accade le equazioni simultanee (52) per τ formano un sistema completamente integrabile e danno τ con una costante arbitraria.

Abbiamo eseguito i calcoli superiori pel caso ellittico. Nel caso iperbolico alle (51), (52) si sostituiscono le altre

$$\operatorname{senh}\tau = \rho \operatorname{sen}\sigma \tag{51*}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\operatorname{senh}\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\tau}{\cosh\tau + \cos\sigma}\frac{\partial \log\rho}{\partial v}, \tag{52*}$$

onde risulta per ρ l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\rho}{\rho^2+1}\frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v}, \tag{54*}$$

il cui integrale generale si scrive

$$\rho = \frac{\varphi(u) - \psi(v)}{1 + \varphi(u)\psi(v)}. \tag{K*}$$

Riassumiamo i risultati ottenuti nel teorema: *In ogni congruenza W a falde focali d'egual curvatura e a linee assintotiche* (u, v) *reali dello spazio ellittico* (*con* $K_0 = +1$) *la curvatura relativa* $k = \frac{1}{\rho^2}$ *delle due falde ha necessariamente la forma* (K)

$$\rho = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{1 + \varphi(u)\psi(v)}$$

e per lo spazio iperbolico (*con* $K_0 = -1$) *l'altra*

$$\rho = \frac{\varphi(u) - \psi(v)}{1 + \varphi(u)\psi(v)}.$$

Viceversa ogni superficie S' della classe (K) *o* (K*) *appartiene come falda focale ad* ∞^2 *tali congvuenze. Per fissar una tale congruenza si potrà dare ad arbitrio, in un punto di S', il segmento focale in grandezza ed orientazione.*

Si può ora domandare come si ottiene il caso particolare euclideo (Vol. II, pag. 75) dai risultati generali ora trovati per gli spazî di curvatura costante. Basta per ciò considerare p. e. lo spazio euclideo come limite di uno spazio a curvatura costante positiva $K_0 = +\frac{1}{R^2}$ facendo crescere R all'infinito. Ora per un tale spazio ellittico di raggio R la formola (K) diventa

$$\rho = R\,\frac{\varphi(u) + \psi(v)}{1 + \varphi(u)\psi(v)};$$

se si pone $R\varphi(u)=U$, $R\psi(v)=V$ e nella formola conseguente

$$\rho=\frac{U+V}{1+\frac{UV}{R^2}}$$

tenendo fissi U, V si fa crescere R all'infinito si ottiene appunto al limite la formola dello spazio euclideo (l. c.):

$$\rho=U+V.$$

§ 18.

Trasformazioni delle superficie della classe (K).

Da ogni superficie S della classe (K) o (K*) se ne deducono ∞^2 nuove come seconde falde focali delle ∞^2 congruenze a falde focali d'egual curvatura cui appartiene, come prima falda, la S. Per ciò occorre prima integrare le equazioni (52) o (52*) che dipendono unicamente dalla forma della funzione ρ, che si può ridurre evidentemente cangiando i parametri, u, v ai tre tipi

$$\text{a)}\ \rho=\text{cost.},\qquad \text{b)}\ \rho=u,\qquad \text{c)}\ \rho=\frac{u+v}{1+uv}\ \text{ o }\ \rho=\frac{u-v}{1+uv}\,.$$

Integrate una volta per tutte queste equazioni, rimane da integrare le equazioni simultanee (40) o quelle che da queste si ottengono cangiando $\cot\tau$ in $\coth\tau$. Prendendo per incognita $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, esse hanno la forma di un'equazione di Riccati e basta la conoscenza di una soluzione particolare perchè l'applicazione successiva del metodo di trasformazione riesca con sole quadrature.

Si potrebbe poi perfezionare ulteriormente il metodo di trasformazione dimostrando che sussiste anche qui un *teorema di permutabilità* affatto analogo a quello che sussiste nello spazio euclideo (Vol. II, pag. 80), colla qual cosa vengono risparmiate le successive quadrature.

Qui ci fermeremo soltanto a considerare due casi particolari di superficie della classe (K) o (K*), corrispondenti ai tipi a) b) sopra distinti.

Nel primo caso le superficie in discorso sono quelle a curvatura costante ed assintotiche reali. Essendo $\rho = \text{cost.}$, dalle (52), (52*) segue $\tau = \text{cost.}$ e dalle (50) ancora $\sigma = \text{cost.}$; le relative congruenze sono quelle già considerate al § 3 che conducono alle trasformazioni di Bäcklund. Avendosi qui

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\,\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\,\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0,$$

si può fare semplicemente $E = 1$, $G = 1$, indi

$$d\,s^2 = d\,u^2 + 2\cos\omega\,d\,u\,d\,v + d\,v^2,$$

dove ω è una soluzione dell'equazione a derivate generali

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{1}{\rho^2} \mp 1\right)\operatorname{sen}\omega.$$

Le (40) diventano le formole della trasformazione di Backlund

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right) &= -\left(\cot\tau + \frac{\cot\sigma}{\rho}\right)\cos\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi + \frac{\omega}{2}\right) &= \left(\frac{\cot\sigma}{\rho} - \cot\tau\right)\cos\left(\varphi - \frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Per la superficie trasformata si ha dalle (F)

$$d\,s^2 = d\,u^2 - 2\cos 2\,\varphi\,d\,u\,d\,v + d\,v^2,$$

onde risulta la proprietà della trasformazione di Bäcklund di conservare le linee di curvatura e le linee assintotiche col loro arco.

Il secondo caso particolare notevole è quello corrispondente al tipo b). Per le superficie in discorso la curvatura (assoluta o relativa) è una funzione della sola (u) e perciò: *le loro linee di egual curvatura sono le assintotiche di un sistema.* Ciò equivale a dire (pel teorema d'Enneper) che in questo sistema ciascuna assintotica è una curva di torsione costante. Essendo ora

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2\,(E\,G - F^2)} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2\,(E\,G - F^2)} = \frac{1}{2\,\rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{1}{2\,u}$$

ne risulta

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{2u}$$

e quindi $G = u V$. Cangiando il parametro v, si può fare $V = 1$ e per l'elemento lineare della superficie si ha la forma

$$d s^2 = E d u^2 + 2 F d u d v + u d v^2,$$

della quale risulta la seguente proprietà *caratteristica* delle attuali superficie: *Sulle assintotiche* (u) *a torsione costante le assintotiche* (v) *dell'altro sistema intercettano archi proporzionali.*

In fine osserviamo che essendo $\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0$, sen $\tau = \rho$ sen σ, la terza delle (F) dà $\bar{G} = G$, onde segue: *Per le superficie della classe attuale le trasformazioni considerate conservano gli archi delle assintotiche a torsione costante.*

Per ogni singola curva a torsione costante la trasformazione è la medesima come per la superficie di curvatura costante.

§ 19.

Le superficie conoidali rette.

Termineremo coll'addurre un esempio di superficie della classe (K). Questo troviamo, in analogia di quello che accade per lo spazio euclideo, nelle superficie *conoidali rette*, cioè in quelle rigate dello spazio ellittico od iperbolico che ammettono una direttrice rettilinea ortogonale a tutte le generatrici. Consideriamo particolarmente lo spazio ellittico e supponiamo che la direttrice sia la congiungente i due punti (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0). Le coordinate x_0, x_1, x_2, x_3 di un punto mobile sulla conoide retta si trovano subito date dalle formole

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \cos u \cos v, & x_1 &= \cos u \,\text{sen}\, v, \\ x_2 &= \text{sen}\, u \cos \varphi(v), & x_3 &= \text{sen}\, u \,\text{sen}\, \varphi(v), \end{aligned} \right\} \tag{55}$$

dove u è la lunghezza di generatrice $v = \text{cost.}$ contata a partire dalla direttrice ($u = 0$), v la lunghezza di quest'ultima contata da (1, 0, 0, 0), in fine $\varphi(v)$ una funzione arbitraria di v, che fissa la forma particolare della conoide. Dalle (55), derivando, si deduce per l'elemento lineare della superficie

$$d s^2 = d u^2 + (\cos^2 u + \varphi'^2 (v) \operatorname{sen}^2 u)\, d v^2 \quad \left(\varphi' = \frac{d \varphi}{d v}\right),$$

indi pei coseni di direzione della normale:

$$\xi_0 = \frac{\varphi' \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\sqrt{\cos^2 u + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 u}}, \quad \xi_1 = \frac{-\varphi' \operatorname{sen} u \cos v}{\sqrt{\cos^2 u + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 u}},$$

$$\xi_2 = \frac{-\cos^2 u \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{\cos^2 u + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 u}}, \quad \xi_3 = \frac{\cos u \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 u + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 u}}.$$

I coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale della conoide hanno quindi i valori

$$D = 0, \quad D' = \frac{\varphi'}{\sqrt{\cos^2 u + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 u}}, \quad D'' = \frac{\varphi'' \operatorname{sen} u \cos u}{\sqrt{\cos^2 u + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 u}}, \tag{56}$$

onde per la curvatura relativa k abbiamo

$$k = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \rho = \frac{\cos^2 u + \varphi'^2 \operatorname{sen}^2 u}{\varphi'}. \tag{57}$$

Le assintotiche del secondo sistema, dopo le generatrici $v = \text{cost.}$, sono le linee integrali dell'equazione differenziale

$$2 D' d u + D'' d u = 0,$$

o

$$\frac{2 d u}{\operatorname{sen} u \cos u} + \frac{\varphi''}{\varphi'} d v = 0.$$

Se si pone adunque

$$u_1 = \varphi' \operatorname{tg}^2 u,$$

le assintotiche del secondo sistema saranno le $u_1 = \text{cost.}$ Ora dalla (57) esprimendo ρ pei parametri u_1, v delle assintotiche si trae

$$\rho = \frac{1 + u_1 \varphi'}{u_1 + \varphi'} = \frac{\frac{1}{u_1} + \varphi'}{1 + \frac{1}{u_1} \cdot \varphi'},$$

che ha appunto la forma (K).

Analogamente nel caso iperbolico per la formola della conoide retta possiamo prendere:

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = \cosh u \cosh v, & x_1 = \cosh u \operatorname{senh} v, \\ x_2 = \operatorname{senh} u \cosh \varphi(v), & x_3 = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} \varphi(v), \end{array}\right\} \tag{55*}$$

da cui ricaviamo

$$d\,s^2 = d\,u^2 + (\cosh^2 u + \varphi'^2 \operatorname{senh}^2 u)\,d\,v^2,$$

indi

$$\xi_0 = \frac{\varphi' \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v}{\sqrt{\cosh^2 u + \varphi'^2 \operatorname{senh}^2 u}}, \quad \xi_1 = \frac{\varphi' \operatorname{senh} u \cosh v}{\sqrt{\cosh^2 u + \varphi'^2 \operatorname{senh}^2 u}},$$

$$\xi_2 = \frac{\cosh u \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{\cosh^2 u + \varphi'^2 \operatorname{senh}^2 u}}, \quad \xi_3 = \frac{-\cosh u \cos \varphi}{\sqrt{\cosh^2 u + \varphi'^2 \operatorname{senh}^2 u}}$$

$$D = 0, \quad D' = \frac{\varphi'}{\sqrt{\cosh^2 u + \varphi'^2 \operatorname{senh}^2 u}}, \quad D'' = \frac{\varphi'' \operatorname{senh} u \cosh u}{\sqrt{\cosh^2 u + \varphi'^2 \operatorname{senh}^2 u}},$$

$$\rho = \frac{\cosh^2 u + \varphi'^2 \operatorname{senh}^2 u}{\varphi'}.$$

Le assintotiche del secondo sistema sono le

$$u_1 = \varphi' \operatorname{tgh}^2 u = \text{cost.},$$

ed esprimendo ρ pei parametri u, v si ha

$$\rho = \frac{u_1 + \frac{1}{\varphi'}}{1 - u_1 \cdot \frac{1}{\varphi'}},$$

che è appunto la forma (K*).

Notevole in ambedue i casi è l'ipotesi $\varphi' = \text{cost.}$, ove, essendo $D'' = 0$, anche le u sono assintotiche e la superficie è ad area minima. Queste rigate ad area minima corrispondono all'elicoide rigata minima dello spazio euclideo e dànno altresì un esempio delle superficie, considerate al paragrafo precedente, nelle quali le assintotiche u sono ciascuna a torsione costante. Soltanto nel caso ellittico, quando la costante φ' ha il valore particolare $\varphi' = 1$, questa torsione è la stessa per tutte le assintotiche u e si ha la particolare superficie di Clifford a curvatura nulla e ad area minima.

Pisa, Agosto 1903.

Sur quelques transformations d'une série de puissances.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

§ 1. Formules générales.

Supposons pour un instant que la variable x soit réelle et que $0 \leqq x \leqq 1$, puis mettons dans cette intégrale indéfinie

$$J = \int \frac{f(x)}{x\sqrt{1-x^2}}\, d\,x \tag{α}$$

$x = \sin\varphi$, où φ désigne un angle réel tel que $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, une intégration par parties donnera immédiatement

$$J = f(\sin\varphi) \cdot \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi - \int f^{(1)}(\sin\varphi) \,.\, \cos\varphi \,.\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi\, d\,\varphi, \tag{β}$$

de sorte que nous aurons, à l'aide de la nouvelle transformation $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = z$, pour notre intégrale cette autre expression

$$J = f\left(\frac{2\,z}{1+z^2}\right) \log z - 2 \,.\int f^{(1)}\left(\frac{2\,z}{1+z^2}\right) \cdot \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} \cdot \log z\, d\,z. \tag{γ}$$

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ soit holomorphe aux environs du point $x = 0$ et que la série de puissances correspondante ait son rayon de convergence égal à r, nous aurons cette autre série de puissances

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \quad |x| < \rho, \tag{1}$$

où ρ désigne le plus petit des deux nombres positifs 1 et r, ce qui donnera immédiatement

$$J - a_0 \log x = \frac{a_1}{1} \cdot x + \frac{a_2}{2} \cdot x^2 + \frac{a_3}{3} \cdot x^3 + \cdots, \quad |x| < \rho. \tag{2}$$

Cela posé, il est évident que la fonction $f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)$ est holomorphe aussi aux environs du point $z = 0$, de sorte que nous aurons cette nouvelle série de puissances

$$f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) = a_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots, \quad |z| < P, \tag{1 bis}$$

ce qui donnera

$$f^{(1)}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) \cdot \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = b_1 + 2 b_2 z + 3 b_3 z^2 + \cdots, \quad |z| < P.$$

Quant au rayon de convergence P, nous aurons à donner plus tard pour cette quantité des limites supérieures et inférieures.

Appliquons maintenant ici cette formule intégrale

$$\int x^n \log x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$$

nous aurons, en vertu de (γ), cette nouvelle formule

$$J - a_0 \log z = \frac{b_1}{1} \cdot z + \frac{b_2}{2} \cdot z^2 + \frac{b_3}{3} \cdot z^3 + \cdots, \quad |z| < P. \tag{2 bis}$$

Or, remarquons que les deux variables x et z sont liées par cette identité

$$x = \frac{2z}{1+z^2},$$

les formules (2) et (2 bis) donnent, en vertu d'un théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques, une identité de cette forme

$$a_0 \log\left(\frac{2}{1+z^2}\right) + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s}{s} \cdot \left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^s = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{b_s}{s} \cdot z^s + K, \tag{δ}$$

où K désigne une constante arbitraire. Pour déterminer la valeur de cette constante mettons dans (δ) $z = 0$, ce qui est permis, nous aurons $K = \log 2$. Posons ensuite x au lieu de z, nous avons démontré ce théorème général:

I. *Définissons, à l'aide de* (1) *et* (1 bis), *les deux groupes de coefficients a_s et b_s, nous aurons cette identité:*

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s}{s} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^s - a_0 \log(1 + x^2) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{b_s}{s} \cdot x^s, \tag{3}$$

formule qui nous donnera le prolongement analytique de la série de puissances figurant au second membre et étant convergente pour des valeurs suffisamment petites de $|x|$.

Considérons encore cette autre intégrale indéfinie

$$J_1 = \int \frac{g(x)}{x(1+x^2)}\, dx\,, \tag{ε}$$

la transformation $x = \operatorname{tg}\varphi$ nous conduira, à l'aide d'une intégration par parties, à cette nouvelle expression

$$J_1 = g(\operatorname{tg}\varphi)\cdot\log\sin\varphi - \int g^{(1)}(\operatorname{tg}\varphi)\cdot\frac{\log\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\, d\varphi, \tag{ξ}$$

d'où, en posant $\sin\varphi = z$:

$$J_1 = g\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)\cdot\log z - \int g^{(1)}\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)\cdot\frac{\log z}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz\,. \tag{η}$$

Supposons ensuite que la fonction $g(x)$ soit holomorphe aux environs du point $x = 0$ et que la série de puissances correspondante ait son rayon de convergence égal à r, nous aurons ici ces deux autres séries de puissances:

$$\frac{g(x)}{1+x^2} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots, \quad |x| < \rho, \tag{4}$$

$$g\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = c_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \cdots, \quad |z| < P_1\,, \tag{4 bis}$$

où ρ désigne le plus petit des nombres positifs 1 et r, tandis que nous avons à donner bientôt des limites supérieures et inférieures de P_1.

Cela posé, nous aurons sans peine cet autre théorème général:

II. *Définissons, à l'aide de* (4) *et* (4 bis), *les deux groupes de coefficients* c_s *et* d_s, *nous aurons cette identité:*

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{c_s}{s}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^s - c_0 \log\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{d_s}{s}\cdot x^s\,, \tag{5}$$

formule qui nous donnera le prolongement analytique de la série de puissances figurant au second membre et étant convergente pour des valeurs suffisamment petites de $|x|$.

Supposons données les deux séries de puissances figurant aux seconds membres des formules (3) et (5), ou, ce qui vaut autant, les coefficients b_s

et d_s, la détermination des a_s et des b_s deviendra très compliquée, de sorte qu'il est très remarquable que la forme singulière que nous avons donnée aux formules susdites nous conduira immédiatement au but dans un nombre des cas intéressants. Or, avant d'étudier de tels cas particuliers, nous avons à déterminer les champs de convergence des séries de BURMANN qui figurent aux premiers membres de (3) et (5) et à donner des limites pour les deux rayons de convergence P et P_1, si nous supposons données les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

§ 2. SUR LES CHAMPS DE CONVERGENCE.

Quant au champ de convergence de la série de BURMANN figurant au premier membre de la formule (3), remarquons que la fonction

$$F(z) = f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)$$

est holomorphe dans tous les points du plan des z pour lesquels

$$\left|\frac{2z}{1+z^2}\right| < r; \tag{α}$$

posons maintenant $z = \xi + i\eta$, où ξ et η désignent les coordonnées rectangles du point z, l'inégalité (α) nous conduira à cette autre

$$(\xi^2+\eta^2)^2 - 2\left(\frac{2}{r^2}-1\right)\xi^2 - 2\left(\frac{2}{r^2}+1\right)\eta^2 + 1 > 0.$$

Cela posé, considérons cette courbe $C(r)$:

$$(x^2+y^2)^2 - 2ax^2 - 2(a+2)y^2 + 1 = 0, \quad a = \frac{2}{r^2} - 1 \tag{6}$$

on bien en coordonnées polaires

$$\rho^4 - 2(a + 2\sin^2\theta)\rho^2 + 1 = 0, \tag{6 bis}$$

nous verrons que $C(r)$ est une courbe fermée qui a des points doubles dans les points circulaires à l'infini.

Or, la condition (α) montre clairement que $F(z)$ est certainement holomorphe dans tous les points du plan des z que l'on peut obtenir en prenant comme point de départ $z = 0$ et en suivant un chemin fermé qui a un nombre pair de points d'intersection avec $C(r)$. Nous désignons par $\mathfrak{P}(r)$ l'ensemble de tous ces points; c'est-à-dire que $F(z)$ est certainement holomorphe dans la partie $\mathfrak{P}(r)$ du plan des z. Inversement, il est évident que $F(z)$ a toujours un point singulier au moins situé sur la courbe $C(r)$, ce qui montrera que les limites supérieures et inférieures de P seront précisément le plus grand et le plus petit rayon vecteur qui unit l'origine avec un point de $C(r)$.

Considérons maintenant l'équation (6 bis), il est évident que les valeurs maximums et minimums de ρ sont celles qui correspondent aux points d'intersection de $C(r)$ avec les axes de coordonnées. De plus, je dis que ces valeurs nous donnent aussi le maximum et le minimum *absolus* de ρ.

En effet, cherchons $\sin\theta$ de (6 bis), la condition nécessaire et suffisante pour que l'angle θ soit réel deviendra

$$0 < \rho^4 - 2\left(\frac{2}{r^2} - 1\right)\rho^2 + 1 < 4\rho^2,$$

ce qui donnera pour P ces deux limites

$$\sqrt{\frac{1}{r^2} + 1} + \frac{1}{r} \leqq P \leqq \sqrt{\frac{1}{r^2} + 1} - \frac{1}{r}, \tag{7}$$

limites qui coïncident pour $r = \infty$, c'est-à-dire $a = -1$, et dans ce cas seulement.

Cela posé, nous avons démontré cette proposition générale :

L'identité (3) *nous donne le prolongement analytique à tout le domaine* $\mathfrak{P}(\rho)$ (*ρ étant le rayon de convergence défini dans* (1)) *de la série de puissances figurant au second membre de la formule susdite et dont le rayon de convergence doit satisfaire aux conditions* (7).

Quant au théorème II, considérons la fonction

$$G(z) = g\left(\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\right),$$

nous trouvons ici cette courbe $C_1(r)$:

$$(a - 1)(x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) + a = 0, \quad a = r^4, \tag{8}$$

ou bien, en coordonnées polaires

$$(a - 1)\rho^4 - 2a\rho^2\cos 2\theta + a = 0. \tag{8 bis}$$

Supposons $r \gtrless 1$, la courbe $C_1(r)$ est fermée et a des points doubles dans les points circulaires à l'infini. Dans le cas particulier $r = 1$, au contraire, notre courbe deviendra une hyperbole équilatérale avec son axe égal à $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Le même procédé que nous venons d'appliquer nous conduira ici à ces valeurs limites :

$$\sqrt{\left|\frac{r^4 + r^2}{r^4 - 1}\right|} \geq P_1 > \sqrt{\frac{r^4 - r^2}{r^4 - 1}}, \quad r \gtrless 1, \tag{9}$$

$$\rho > \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad r = 1. \tag{9 bis}$$

Désignons ensuite par $\mathfrak{P}_1(r)$ l'ensemble des points du plan des z que l'on peut obtenir en partant de $z = 0$ et en suivant un chemin fermé qui a un nombre pair de points d'intersection avec $C_1(r)$, nous avons démontré cette autre proposition :

La formule (5) *nous donne le prolongement analytique à tout le domaine* $\mathfrak{P}_1(\rho)$ (ρ *étant le rayon de convergence défini dans* (4)) *de la série de puissances figurant au second membre de la formule susdite et dont le rayon de convergence doit satisfaire aux conditions* (9) *et* (9 bis).

§ 3. Généralisation d'une formule de M. Kapteyn.

Comme premier exemple de la transformation indiquée dans le théorème I posons $f(x) = 1$, ce qui donnera

$$\rho = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_{2s} = \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots(2s)}, \quad a_{2s+1} = 0, \quad b_s = 0,$$

de sorte que la formule (3) donnera ici ce développement particulier

$$\log(1 + x^2) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots(2s)} \cdot \frac{1}{2s} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{2s} \tag{10}$$

valable dans le domaine $\mathfrak{P}(1)$. Posons particulièrement $x = 1$, ce qui est permis, nous aurons cette formule numérique

$$\log 2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots(2s)} \cdot \frac{1}{2s}. \tag{10 bis}$$

L'hypothèse correspondante $g(x) = 1$ nous conduira, en vertu de (5), à une identité *formelle.*

Pour obtenir des applications plus générales de nos deux théorèmes généraux posons

$$\left.\begin{aligned} \frac{(\text{arc}\sin x)^n}{n!} &= \sum_{s=0}^{s=\infty} A_n^{n+2s} \cdot x^{n+2s}, \quad |x| \leq 1, \\ \frac{(\text{arc tg}\, x)^n}{n!} &= \sum_{s=0}^{s=\infty} B_n^{n+2s}\, x^{n+2s}, \quad |x| \leq 1, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

puis mettons

$$f(x) = \frac{(\text{arc}\sin x)^n}{n!},$$

nous aurons évidemment

$$f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) = \frac{2^n}{n!} \cdot (\text{arc tg}\, z)^n,$$

de sorte que les coefficients correspondants a_s et b_s se déterminent comme suit:

$$\left.\begin{aligned} &a_s = 0, \quad s < n; \quad a_{n+2s} = (n+2s+1) \,.\, A_{n+1}^{n+2s+1}; \quad a_{n+2s+1} = 0 \\ &b_s = 0, \quad s < n; \quad b_{n+2s} = 2^n \,.\, B_n^{n+2s}; \quad b_{n+2s+1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

En second lieu mettons

$$g(x) = \frac{(\text{arc tg}\, x)^n}{n!},$$

nous aurons

$$g\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{(\text{arc}\sin z)^n}{n!},$$

ce qui donnera pour les coefficients c_s et d_s ces systèmes de valeurs:

$$\left.\begin{aligned} &c_s = 0, \quad s < n; \quad c_{n+2s} = (n+2s+1) \,.\, B_{n+1}^{n+2s+1}; \quad c_{n+2s+1} = 0 \\ &d_s = 0, \quad s < n; \quad d_{n+2s} = A_n^{n+2s}; \quad d_{n+2s+1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12 bis}$$

Cela posé, une application directe des deux théorèmes généraux donnera cette proposition intéressante:

Définissons à l'aide des formules (12) *et* (12 bis) *les coefficients A et B, nous aurons ces deux formules singulières:*

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n+2s+1}{n+2s} \cdot A_{n+1}^{n+2s+1} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{n+2s} = 2^n \,.\, \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{B_n^{n+2s}}{n+2s} \cdot x^{n+2s}, \tag{13}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n+2s+1}{n+2s} \cdot B_{n+1}^{n+2s+1} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{n+2s} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_n^{n+2s}}{n+2s} \cdot x^{n+2s}, \tag{13 bis}$$

où $P = P_1 = 1$, et où les séries de Burmann *sont convergentes dans les domaines $\mathfrak{P}(1)$ et $\mathfrak{P}_1(1)$ respectivement.*

Posons particulièrement dans (13) $n = 1$, puis mettons

$$\psi(x) = \frac{x}{1^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \cdots,$$

nous aurons cette formule particulière

$$2 \cdot \psi(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2s)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2s+1)} \cdot \frac{1}{2s+1} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{2s+1}, \quad (14)$$

d'où en posant $x = 1$, cette relation numérique

$$2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)^2} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2s)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2s+1)} \cdot \frac{1}{2s+1} \quad (14\text{ bis})$$

que j'ai démontrée directement (*) autrefois, tandis que la formule plus générale (14) est due à M. W. Kapteyn (**).

§ 4. Généralisation d'une formule d'Abel.

On voit que la fonction $\psi(x)$ figurant dans (14) est intimément liée avec cette fonction célèbre

$$L_2(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \cdots, \quad |x| < 1,$$

pour laquelle Legendre (***), Abel (****) et Schaeffers (*****) ont démontré une suite de propriétés remarquables et de laquelle j'ai étudié récemment (******) des généralisations très étendues. Or, il est intéressant, ce me semble, que notre théorème II nous permet de généraliser beaucoup une formule d'Abel concernent la fonction $L_2(x)$.

(*) *Nyt Tidsskrift for Matematik*, t. 5 B, p. 24; 1894.
(**) *Nieuw Archief*, (2) t. 3, p. 225-229; 1897.
(***) *Exercices de calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 244.
(****) *Œuvres complètes*, t. II, p. 189-193.
(*****) *Journal de Crelle*, t. XXX.
(******) Ce Journal, 3e série, t. IX, p. 219-236; 1903.

En effet, désignons par ω_n^p la somme de tous les $\binom{n}{p}$ produits à p facteurs différents choisis parmi ces n nombres positifs

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n},$$

d'où particulièrement

$$\omega_n^1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad \omega_n^n = \frac{1}{n!},$$

tandis que nous posons en outre

$$\omega_n^0 = 1.$$

Cela posé, il est bien connu (*) que nous avons cette série de puissances

$$\frac{(-1)^n}{n!} \cdot (\log(1-x))^n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\omega_{n+s-1}^{n-1}}{n+s} \cdot x^{n+s}, \quad |x| < 1, \tag{α}$$

et où n désigne un positif entier.

Posons encore

$$L_{1,n}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\omega_{n+s-1}^{n-1}}{(n+s)^2} \cdot x^{n+s}, \quad |x| < 1, \tag{15}$$

nous aurons évidemment

$$L_{1,n}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int_0^1 \frac{(\log(1-tx))^n}{t} \, dt = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int_0^x \frac{(\log(1-x))^n}{x} \, dx, \tag{15 bis}$$

où il faut admettre $|x| < 1$; en particulier nous aurons de plus

$$L_{1,1}(x) = L_2(x). \tag{16}$$

Ponsons maintenant dans le théorème II

$$g(x) = \frac{1}{n!} \cdot (\log(1+x^2))^n,$$

nous aurons évidemment

$$g\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot (\log(1-z^2))^n,$$

tandis que la formule obtenue de (α) en y posant $-x^2$ au lieu de x

(*) Voir, par exemple, Schlömilch: *Compendium*, t. II, p. 13.

donnera

$$J_1 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \omega_{n+s}^n}{n+s} \cdot x^{2n+2s}, \quad |x| < 1. \tag{β}$$

Or, appliquons ces identités évidentes

$$\omega_{n+s}^n = \frac{1}{n+s} \cdot \omega_{n+s-1}^{n-1} + \omega_{n+s-1}^n, \quad s \geqq 1,$$

$$\omega_n^n = \frac{1}{n} \cdot \omega_{n-1}^{n-1},$$

nous aurons, en vertu de (α) et (β):

$$J_1 = (-1)^n L_{1,n}(-x^2) - \frac{1}{(n+1)!} \cdot (\log(1+x^2))^{n+1}, \tag{γ}$$

tandis que (4 bis) donnera, en vertu de (α), pour notre intégrale J_1 cette autre expression

$$J_1 = L_{1,n}(x^2), \tag{δ}$$

de sorte que la formule générale (5) nous conduira à cette identité intéressante

$$L_{1,n}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) - (-1)^n L_{1,n}(x^2) = -\frac{1}{(n+1)!} \cdot (\log(1-x^2))^{n+1}, \tag{17}$$

d'où, en posant $-x$ au lieu de x^2:

$$L_{1,n}\left(\frac{x}{1+x}\right) - (-1)^n L_{1,n}(-x) = -\frac{1}{(n+1)!} \cdot (\log(1+x))^{n+1}. \tag{18}$$

On voit que la formule (17) prolonge la fonction $L_{1,n}(x^2)$ dans tout le domaine $\mathfrak{P}_1(1)$, tandis que (18) prolonge $L_{1,n}(-x)$ dans le demi-plan déterminé par la condition $\Re(x) > -\frac{1}{2}$. Or, comme je viens de le démontrer (*), la fonction $L_{1,n}(x)$ n'a dans toute l'éntendue du plan des x que ces deux points critiques $x = 1$ et $x = \infty$.

Posons dans (18) particulièrement $n = 1$, nous retrouvons, en vertu de (16), une formule qui est due à Abel (**).

Copenhague, le 18 novembre 1903.

(*) Loc. cit., p. 221.
(**) Loc. cit., p. 191.

Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici.

(Di Michele Gebbia, *a Palermo.)*

MEMORIA II.ª

PREFAZIONE.

La presente Memoria fa seguito a quella pubblicata con lo stesso titolo negli *Annali di Matematica pura ed applicata* (t. VII, 1902). Qui mi propongo il problema di costruire le espressioni analitiche delle tre deformazioni tipiche per la forma più generale del potenziale d'elasticità.

Comincio da un problema preparatorio, che consiste nella costruzione della deformazione provocata in un corpo elastico indefinito da una forza concentrata in un punto, o, come dirò, della deformazione per sollecitazione elementare. Questa deformazione costituisce l'ente analogo di ciò, che nella teoria delle funzioni potenziali è la funzione $\frac{1}{r}$, dove r è la distanza di un punto variabile da un punto fisso. Basta supporre che la forza sollecitante sia applicata all'origine delle coordinate, e che la sua direzione sia quella di uno degli assi coordinati ortogonali, mentre il suo valore sia l'unità. Così, assegnando successivamente alla forza le direzioni dei tre assi, viene a richiedersi la costruzione di tre terne di funzioni, ciascuna delle quali dia le componenti dello spostamento per la corrispondente direzione assiale della forza. Dimostro poi come la costruzione di queste nove funzioni dipenda dalla ricerca di una opportuna soluzione di un'equazione lineare a derivate parziali del 6.° ordine, i coefficienti costanti della quale sono formati con quelli d'elasticità.

Dò in seguito le espressioni analitiche delle tre deformazioni tipiche per mezzo delle anzidette nove funzioni, dimostrando come esse possiedano le proprietà, che nella precedente Memoria ho dimostrato esser caratteristiche per ciascuno dei tre tipi.

Poi ritorno sul problema fondamentale di cercare la voluta soluzione della cennata equazione a derivate parziali del 6.° ordine, problema che risolvo completamente in un caso particolare, dopo aver mostrato come questo caso ne comprende tre molto importanti, cioè quello dei corpi isotropi, quello dei corpi con un asse d'elasticità e quello del mezzo elastico di GREEN.

Infine applico i risultati precedenti ai corpi isotropi (*).

(*) Giunsi ai risultati, che espongo nella presente Memoria negli anni dal 1892 al 95. Però li tenni in serbo perchè, desiderando esporre le mie ideè nell'ordine in cui si erano svolte, mi prefiggeva di cominciare con la pubblicazione della precedente Memoria, pubblicazione che circostanze varie mi fecero ritardare fino al 1902. Una conseguenza di questo lungo indugio è stata che mi ha in parte prevenuto il sig. FREDHOLM con una Memoria pubblicata negli *Acta mathematica* di Stokholm del 1900 col titolo: *Sur les èquations d'èquilibre d'un corps solide élastique.*

Il mio presente lavoro differisce da quello del sig. FREDHOLM nei seguenti punti essenziali. Anch'egli comincia con lo studio di quella, che io chiamo deformazione per sollecitazione elementare, seguendo il concetto analitico anzichè la rappresentazione meccanica, dalla quale io prendo le mosse, e scopre come me il fatto che l'espressione analitica di questa deformazione dipende da una equazione lineare a derivate parziali del 6.° ordine, alla qualé egli giunge per una via diversa da quella da me seguita. Egli ha sopra di me il vantaggio di aver trovato la soluzione utile più generale di questa equazione, mentre la mia, che qui espongo al § III, è soltanto speciale benchè importante per le applicazioni, e benchè le attinenze algebrico-geometriche le diano una fisonomia caratteristica. In séguito il sig. FREDHOLM non si affaccia alla considerazione di quegli enti analoghi alle funzioni potenziali, che io chiamo deformazioni tipiche, ma procede direttamente, applicando il teorema di BETTI, ad esprimere la deformazione di un corpo limitato per mezzo delle forze e della déformazione della superficie, il che costituisce invero lo scopo ultimo delle comuni ricerche. Io aveva mirato da tempo a questo scopo, e ne aveva trovata la via enunciando la decomponibilità della deformazione di un corpo limitato e sottoposto a forze in tre tipiche, come attesta la mia pubblicazione: *Proposizioni fondamentali della statica dei corpi elastici* (Rendic. del Circolo mat. di Palermo, t. V, 1891, pag. 320), dove si racchiude lo schema della prima parte della mia Memoria del 1902. Per questa parte quindi, come per la definizione meccanica delle deformazioni tipiche, la priorità mi spetta completa.

Son lieto di poter pubblicare in proposito la seguente lettera direttami dal chiarissimo prof. VALENTINO CERRUTI:

" Roma, 28 Maggio 1903.

" *Caro prof. Gebbia.*

" Apprendo con piacere che Ella si è finalmente risoluta di pubblicare le sue impor-
" tanti ricerche relative alle deformazioni tipiche in un mezzo elastico generale. Ricordo

§ 1. — Deformazione per sollecitazione elementare.

1. *Definizione.* Il punto di partenza per la costruzione delle espressioni analitiche delle tre deformazioni tipiche di un corpo elastico omogeneo indefinito conservativo della costituzione più generale, cioè con tutti i suoi 21 coefficienti d'elasticità indipendenti, è la costruzione delle espressioni analitiche determinanti la deformazione prodotta nello stesso corpo da una forza finita concentrata in un punto. Questa noi chiameremo *deformazione per sollecitazione elementare*, o, meno esattamente ma più brevemente, *deformazione elementare.*

Per semplicità supponghiamo che il punto d'applicazione della forza sia l'origine delle coordinate, e che la forza sia diretta secondo uno degli assi coordinati. Ottenuta questa deformazione, sarà poi facile costruire quella relativa all'ipotesi che la forza, pur essendo applicata all'origine, abbia una direzione qualunque, applicando il teorema della sovrapposizione degli effetti. Poscia una traslazione degli assi ci permetterà di estendere le formole all'ipotesi, che anche il punto d'applicazione della forza sia qualunque.

Stabiliamo come nella precedente Memoria le seguenti notazioni abbreviate. Detto Π il potenziale d'elasticità cambiato di segno o, come brevemente vogliamo dire, il *contropotenziale*, il quale è una funzione omogenea quadratica *essenzialmente positiva* delle sei componenti della deformazione, pon-

---

" sempre con piacere le comunicazioni che mi fece qui in Roma nell'estate del 1895 dei ri-
" sultati più notevoli da lei ottenuti e del metodo, che aveva seguito nelle sue indagini su
" tale soggetto. Il lavoro si poteva riguardare già fin d'allora come compiuto e fin d'allora
" io ne avrei desiderata la pubblicazione. Col ritardo la forma dell'esposizione avrà certo
" guadagnato, ma Ella n'ebbe danno essendo intanto venuta alla luce nel 1900 una Memoria
" del sig. Fredholm, dove si contiene buona parte delle conclusioni, alle quali Ella era giunto
" tanti anni prima. Malgrado ciò la stampa del suo lavoro tornerà sempre utile agli stu-
" diosi, sia per la diversità del metodo di ricerca rispetto al metodo tenuto dal Fredholm,
" sia per una parte dei risultati, i quali conservano tutta la loro novità.

" Con particolare affetto mi confermo

" *Suo*

" V. Cerruti. „

ghiamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial x_x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial x_y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial x_z}=\mathfrak{X},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial y_x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial y_y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial y_z}=\mathfrak{Y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial z_x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial z_y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial z_z}=\mathfrak{Z},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_x}\alpha+\frac{\partial \Pi}{\partial x_y}\beta+\frac{\partial \Pi}{\partial x_z}\gamma=\mathfrak{L},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_x}\alpha+\frac{\partial \Pi}{\partial y_y}\beta+\frac{\partial \Pi}{\partial y_z}\gamma=\mathfrak{M},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_x}\alpha+\frac{\partial \Pi}{\partial z_y}\beta+\frac{\partial \Pi}{\partial z_z}\gamma=\mathfrak{N}.$$

Le tre prime espressioni si riferiscono all'interno del corpo e le tre ultime alla sua superficie, per la quale α, β, γ designano i coseni direttori della normale rivolta verso l'interno. Con queste notazioni le equazioni d'equilibrio del corpo si scrivono brevemente così:

$$\mathfrak{X}+X=0,\qquad \mathfrak{Y}+Y=0,\qquad \mathfrak{Z}+Z=0,$$

$$\mathfrak{L}+L=0,\qquad \mathfrak{M}+M=0,\qquad \mathfrak{N}+N=0,$$

ove X, Y, Z denotano le componenti assiali riferite all'unità di volume delle forze agenti all'interno del corpo ed L, M, N le componenti riferite all'unità superficiale delle forze applicate alla sua superficie (*).

(*) Nella precedente Memoria sono corse alcune inesattezze di segno, le quali però non influiscono sui risultati della medesima, e che il lettore può facilmente correggere da sè. La funzione quivi denotata con P, e che qui denoto con Π, non è il potenziale, come si dice al n.° 5, ma è questo col segno cambiato, e come tale è essenzialmente positiva, e non negativa come nel citato luogo è detto. Nell'equazione ricavata dal teorema del lavoro virtuale scritta a pag. 147 deve cambiarsi il segno dell'ultimo termine. Facendo uso del potenziale col proprio segno, come potrebbe farsi, dovrebbero cambiarsi troppi segni nella precedente Memoria, ed appunto perciò preferisco come il minor male di correggere qui introducendo l'espressione di contropotenziale, sebbene non sarebbe necessaria in una riforma complessiva dei due lavori.

Le tre ultime equazioni assicurano l'equilibrio degli elementi della superficie esterna, e quindi manifestano che $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ esprimono le componenti unitarie dell'azione, che spinge questa superficie provenendo dall'interno del corpo, verso cui è rivolta la normale. Esse possono anche riferirsi ad una superficie interna al corpo, scegliendone in modo fisso la faccia, da cui si spicca la normale di coseni direttori α, β, γ, ed allora bisogna porvi ai posti di L, M, N le componenti unitarie dell'azione, che spinge la faccia opposta provenendo da quella regione del corpo, che questa faccia guarda. Ne segue che allora $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ significano le componenti unitarie dell'azione che la regione del corpo, verso cui è rivolta la normale esercita sulla superficie.

Ciò richiamato, ripigliando il nostro problema, supponghiamo che il corpo sia sollecitato da una forza finita X applicata all'origine e diretta nel verso positivo dell'asse delle x.

Pensiamo tracciate nel corpo due superficie chiuse e semplicemente connesse σ, σ' entrambe racchiudenti l'origine, e di cui la prima sia tutta interna alla seconda, e supponghiamo che per entrambe la normale di coseni direttori α, β, γ sia rivolta verso l'interno. In tutto lo spazio, ed in particolare in quello, S, compreso fra queste due superficie, sono soddisfatte evidentemente le equazioni

$$\mathfrak{X} = 0, \qquad \mathfrak{Y} = 0, \qquad \mathfrak{Z} = 0. \tag{1}$$

Ne segue che, denotando con $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ le componenti della pressione unitaria sopra un elemento di σ agenti dall'esterno verso l'interno e con $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ gli stessi elementi per σ', l'integrazione per parti ci dà

$$\int_S \mathfrak{X}\, d S = -\int_\sigma \mathfrak{L}\, d\sigma + \int_{\sigma'} \mathfrak{L}'\, d\sigma', \quad \text{etc.,}$$

cioè

$$\int_\sigma \mathfrak{L}\, d\sigma = \int_{\sigma'} \mathfrak{L}'\, d\sigma', \quad \int_\sigma \mathfrak{M}\, d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{M}'\, d\sigma', \quad \int_\sigma \mathfrak{N}\, d\sigma = \int_{\sigma'} \mathfrak{N}'\, d\sigma'. \tag{2}$$

Siccome poi le due superficie σ, σ' sono qualunque, purchè racchiudenti l'origine, segue che gl'integrali

$$\int_\sigma \mathfrak{L}\, d\sigma, \quad \int_\sigma \mathfrak{M}\, d\sigma, \quad \int_\sigma \mathfrak{N}\, d\sigma \tag{3}$$

relativi ad una superficie semplicemente connessa qualunque racchiudente l'origine hanno tre rispettivi valori costanti.

Per determinare questi valori, consideriamo la porzione di corpo limitata da σ e comprendente perciò il punto d'applicazione della forza. Le condizioni d'equilibrio di questa porzione relative alla traslazione dànno

$$\int_\sigma \mathfrak{L}\, d\sigma = X, \quad \int_\sigma \mathfrak{M}\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \mathfrak{N}\, d\sigma = 0. \tag{4}$$

Queste equazioni debbono esser soddisfatte per qualunque superficie racchiudente l'origine. Applicandole dapprima ad un sferetta con centro all'origine e di raggio infinitesimo, la prima di esse ci manifesta che $\mathfrak{L}$ in prossimità dell'origine dev'essere infinita del 2.° ordine: tali dunque debbono essere quivi le derivate prime delle componenti dello spostamento. Applicando poi le (4) alla sfera all'infinito, se ne conclude che le stesse derivate diventano all'infinito infinitesime del 2.° ordine. Da queste due proprietà si deduce, col metodo seguito al n.° 35 della precedente Memoria, che gli spostamenti stessi divengono all'origine infinite ed all'infinito infinitesime del 1.° ordine.

Il fatto che gli spostamenti diventino infiniti per un punto del corpo apparisce fisicamente paradossale, ma il paradosso svanisce se si pensa che, per poco che queste quantità oltrepassino certi limiti, ed anche estremamente piccoli, le equazioni differenziali del problema perdono la loro applicabilità, quindi, nel nostro caso, le funzioni che le sodisfano vanno riguardate come rappresentanti le componenti dello spostamento al di fuori di una sfera con centro all'origine e di raggio abbastanza grande, mentre all'interno di questa sfera debbono riguardarsi come un semplice prolungamento analitico non più rappresentante il fenomeno della deformazione elastica.

In riassunto le componenti dello spostamento per la deformazione qui definita debbono avere le seguenti proprietà:

1.° Queste tre funzioni debbono diventare infinite al punto d'applicazione della forza e nulle all'infinito e del prim'ordine; e così pure le loro derivate prime, ma del second'ordine;

2.° In tutto lo spazio, eccettuato al più il punto d'applicazione della forza debbono sodisfare le equazioni (1);

3.° Per qualunque superficie σ chiusa e semplicemente connessa racchiudente il punto d'applicazione della forza debbono sodisfare le equazioni (4).

2. Seguendo ora un ordine inverso d'idee, enunciamo il seguente teorema, il quale porta la conseguenza che le proprietà sopra riconosciute per la deformazione elementare sono caratteristiche.

Tre funzioni $u - \xi$, $v - \eta$, $w - \zeta$ reali per tutti i punti dello spazio sono necessariamente nulle quando sodisfino le seguenti condizioni: 1.° *diventino infinite in un punto singolare e nulle all'infinito e del prim'ordine; e così pure le loro derivate prime, ma del second'ordine;* 2.° *sodisfino le equazioni* (1) *in tutto lo spazio, eccettuato al più il punto singolare;* 3.° *per qualunque superficie σ chiusa e semplicemente connessa racchiudente il punto singolare annullino i primi membri delle equazioni* (4).

Ci riserbiamo di dare in seguito la dimostrazione di questo teorema. Intanto ne deduciamo che, costruite comunque tre funzioni, in cui si riconoscano le proprietà, che in virtù di esso sono caratteristiche, noi possiamo interpretarle senza equivoco come gli spostamenti provocati da una sollecitazione elementare.

3. *Forme simboliche delle equazioni generali dell'elasticità.* La prima forma simbolica delle equazioni indefinite fu data dal Mathieu (*). Noi faremo uso invece di un'altra forma, nella quale apparisce in evidenza la parte che vi ha il potenziale d'elasticità, e che può attribuirsi al Beltrami, perchè i tratti essenziali ne sono stabiliti nella nota di questo grande analista: *Sulla teoria generale delle onde piane* (**), benchè egli non abbia avuto proprio questo intendimento.

Denotiamo, secondo la notazione del Kirchhoff, con

$$x_x, \quad y_y, \quad z_z, \quad y_z, \quad z_x, \quad x_y$$

le sei componenti della deformazione. Il contropotenziale Π d'elasticità è una funzione quadratica omogenea a coefficienti costanti di queste sei quantità. Indichiamo con ξ, η, ζ risp. i simboli d'operazione $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, onde le componenti della deformazione potranno esprimersi simbolicamente per

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \xi u, & y_z &= \eta w + \zeta v, \\ y_y &= \eta v, & z_x &= \zeta u + \xi w, \\ z_z &= \zeta w, & x_y &= \xi v + \eta u. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Si ha quindi

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Pi}{\partial x_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial x_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Pi}{\partial x_z} = \xi\frac{\partial \Pi}{\partial x_x} + \eta\frac{\partial \Pi}{\partial x_y} + \zeta\frac{\partial \Pi}{\partial x_z}. \tag{6}$$

(*) E. Mathieu, *Sur la dispersion de la lumière.* Journal de Liouville, 1866.
(**) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. V.

Nelle (5) riguardiamo per un momento ξ, η, ζ come fattori, onde se ne ricava

$$\xi = \frac{\partial x_x}{\partial u}, \qquad \eta = \frac{\partial x_y}{\partial u}, \qquad \zeta = \frac{\partial x_z}{\partial u},$$

e, sostituendo nella (6), ne viene la prima delle tre eguaglianze simboliche

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial \Pi}{\partial u}, \qquad \mathfrak{Y} = \frac{\partial \Pi}{\partial v}, \qquad \mathfrak{Z} = \frac{\partial \Pi}{\partial w}. \tag{7}$$

Ciò posto, siccome Π è una funzione omogenea quadratica della $x_x, \ldots$ $y_z, \ldots$ essa è pure una funzione omogenea di 2.° grado, tanto delle u, v, w, quanto delle ξ, η, ζ, e quindi si deduce dalle (7) che $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sono funzioni omogenee simboliche di 1.° grado delle u, v, w. Come tali, pel teorema di Eulero, esse possono svilupparsi così:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2} u + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u \partial v} v + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u \partial w} w, \\
\mathfrak{Y} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v \partial u} u + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v^2} v + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v \partial w} w, \\
\mathfrak{Z} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w \partial u} u + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w \partial v} v + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w^2} w.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

In queste i coefficieati di u, v, w sono funzioni omogenee di 2.° grado delle sole ξ, η, ζ. Questi sviluppi sono indipendenti dal significato dei simboli ξ, η, ζ epperò valgono anche quando torniamo a porre in loro vece i segni d'operazione $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$; ma allora $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ tornano ad avere il loro significato reale. Così le (8) costituiscono sviluppi di $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ove son messe in evidenza le combinazioni delle operazioni differenziali, efficienti singolarmente sulle tre funzioni u, v, w, le quali combinazioni sono date appunto dalle derivate parziali seconde dell'espressione simbolica di Π rispetto alle funzioni stesse.

In seguito porremo per brevità

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2} = D_{11}, \ldots, \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v \partial w} = D_{23}, \ldots, \tag{9}$$

tenendo presente che $D_{rs} = D_{sr}$, e quindi scriveremo le (8) così:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= D_{11} u + D_{12} v + D_{13} w \\
\mathfrak{Y} &= D_{21} u + D_{22} v + D_{23} w \\
\mathfrak{Z} &= D_{31} u + D_{32} v + D_{33} w.
\end{aligned}\right\} \tag{8$_a$}$$

4. Passiamo alle equazioni ai limiti. Per queste non mi è noto che sia stata mai data un'analoga forma simbolica, quindi espongo la seguente come nuova.

L'espressione reale di $\mathfrak{L}$ è

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_x} \alpha + \frac{\partial \Pi}{\partial x_y} \beta + \frac{\partial \Pi}{\partial x_z} \gamma,$$

ove α, β, γ denotano i coseni direttori della normale all'elemento superficiale, su cui si esercita la pressione di componenti unitarie $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, rivolta dalla parte, da cui proviene questa pressione.

Torniamo a considerare il contropotenziale Π e ponghiamo

$$\Pi' = \frac{\partial \Pi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \Pi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \Pi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \Pi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \Pi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x_y} x'_y, \tag{10}$$

ove $x'_x, \ldots y'_z, \ldots$ sono sei nuovi simboli, a cui diamo i valori

$$\left.\begin{aligned} x'_x &= \alpha u', & y'_z &= \beta w' + \gamma v', \\ y'_y &= \beta v', & z'_x &= \gamma u' + \alpha w', \\ z'_z &= \gamma w', & x'_y &= \alpha v' + \beta u', \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ed u', v', w' sono tre simboli affatto qualunque. Dalla (10) si ricava

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_x} = \frac{\partial \Pi'}{\partial x'_x}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x_y} = \frac{\partial \Pi'}{\partial x'_y}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x_z} = \frac{\partial \Pi'}{\partial x'_z}, \tag{12}$$

onde l'epressione di $\mathfrak{L}$ può scriversi

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial \Pi'}{\partial x'_x} \alpha + \frac{\partial \Pi'}{\partial x'_y} \beta + \frac{\partial \Pi'}{\partial x'_z} \gamma.$$

Se qui facciamo in Π' le sostituzioni (5), (11) ed osserviamo che dalle (11) si ricava

$$\alpha = \frac{\partial x'_x}{\partial u'}, \qquad \beta = \frac{\partial x'_y}{\partial u'}, \qquad \gamma = \frac{\partial x'_z}{\partial u'},$$

risulta la prima delle eguaglianze simboliche seguenti

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial \Pi'}{\partial u'}, \qquad \mathfrak{M} = \frac{\partial \Pi'}{\partial v'}, \qquad \mathfrak{N} = \frac{\partial \Pi'}{\partial w'}.$$

Ora Π' è una funzione omogenea lineare delle u', v', w', e quindi le precedenti derivate parziali non contengono più queste variabili. Essa è però una funzione lineare omogenea anche delle u, v, w, e tali sono pure le sue derivate rispetto ad u', v', w'. Si ha quindi pel teorema di EULERO

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial u\,\partial u'}\,u + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial v\,\partial u'}\,v + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial w\,\partial u'}\,w,\\
\mathfrak{M} &= \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial u\,\partial v'}\,u + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial v\,\partial v'}\,v + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial w\,\partial v'}\,w,\\
\mathfrak{N} &= \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial u\,\partial w'}\,u + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial v\,\partial w'}\,v + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial w\,\partial w'}\,w.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

In queste i coefficienti simbolici di u, v, w sono funzioni lineari di α, β, γ da una parte e di ξ, η, ζ dall'altra. Questi sviluppi valgono, qualunque sia il significato di questi tre ultimi simboli, epperò valgono benanche quando torniamo a dare ad essi il significato dei segni d'operazione $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$. Allora essi rappresentano in forma simbolica i primi membri delle equazioni ai limiti.

Noi porremo per brevità

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial u\,\partial u'} = E_{11}, \quad && \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial v\,\partial u'} = E_{12}, \quad && \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial w\,\partial u'} = E_{13},\\
&\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial u\,\partial v'} = E_{21}, && \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial v\,\partial v'} = E_{22}, && \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial w\,\partial v'} = E_{23},\\
&\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial u\,\partial w'} = E_{31}, && \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial v\,\partial w'} = E_{32}, && \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial w\,\partial w'} = E_{33},
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

e terremo presente che non è $E_{rs} = E_{sr}$; quindi scriveremo le precedenti equazioni simboliche così

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= E_{11}\,u + E_{12}\,v + E_{13}\,w\\
\mathfrak{M} &= E_{21}\,u + E_{22}\,v + E_{23}\,w\\
\mathfrak{N} &= E_{31}\,u + E_{32}\,v + E_{33}\,w.
\end{aligned}\right\} \tag{13$_a$}$$

5. Ricaviamo due altre formole, che ci serviranno. Si deduce dalla (10) e per le (11)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi'}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \Pi}{\partial x_x}\,u' + \frac{\partial \Pi}{\partial x_y}\,v' + \frac{\partial \Pi}{\partial x_z}\,w',\\
\frac{\partial \Pi'}{\partial \beta} &= \frac{\partial \Pi}{\partial y_x}\,u' + \frac{\partial \Pi}{\partial y_y}\,v' + \frac{\partial \Pi}{\partial y_z}\,w',\\
\frac{\partial \Pi'}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \Pi}{\partial z_x}\,u' + \frac{\partial \Pi}{\partial z_y}\,v' + \frac{\partial \Pi}{\partial z_z}\,w',
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \alpha \, \partial u'} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_x}, \qquad \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \beta \, \partial w'} = \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \gamma \, \partial v'} = \frac{\partial \Pi}{\partial y_z},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \beta \, \partial v'} = \frac{\partial \Pi}{\partial y_y}, \qquad \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \gamma \, \partial u'} = \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \alpha \, \partial w'} = \frac{\partial \Pi}{\partial z_x},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \gamma \, \partial w'} = \frac{\partial \Pi}{\partial z_z}, \qquad \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \alpha \, \partial v'} = \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \beta \, \partial u'} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_y},$$

e, da queste,

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \eta \frac{\partial}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) \frac{\partial \Pi'}{\partial u'} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_x} \xi + \frac{\partial \Pi}{\partial x_y} \eta + \frac{\partial \Pi}{\partial x_z} \zeta =$$

$$= \frac{\partial \Pi}{\partial x_x} \frac{\partial x_x}{\partial u} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_y} \frac{\partial x_y}{\partial u} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_z} \frac{\partial x_z}{\partial u} = \frac{\partial \Pi}{\partial u}.$$

Abbiamo dunque le tre eguaglianze

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \eta \frac{\partial}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) \frac{\partial \Pi'}{\partial u'} = \frac{\partial \Pi}{\partial u},$$

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \eta \frac{\partial}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) \frac{\partial \Pi'}{\partial v'} = \frac{\partial \Pi}{\partial v},$$

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \eta \frac{\partial}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) \frac{\partial \Pi'}{\partial w'} = \frac{\partial \Pi}{\partial w}.$$

Derivando la prima rispetto ad u, o a v, o a w, ed osservando le (9), si ottengono le seguenti:

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \eta \frac{\partial}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) E_{11} = D_{11},$$

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \eta \frac{\partial}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) E_{12} = D_{12},$$

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \eta \frac{\partial}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) E_{13} = D_{13},$$

ed operando analogamente, si ottiene in generale

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \eta \frac{\partial}{\partial \beta} + \zeta \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) E_{rs} = D_{rs}, \tag{15}$$

ch'è la prima delle due eguaglianze che volevamo stabilire. La seconda si ricava immediatamente dal teorema di Eulero, ed è

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) E_{rs} = E_{rs} . \tag{16}$$

6. *Metodo generale, con cui si ottengono le espressioni analitiche per la deformazione elementare.* — Vogliamo determinare le componenti ξ_1, η_1, ζ_1 dello spostamento per la deformazione prodotta dalla forza X applicata all'origine e diretta nel verso positivo dell'asse delle x. Esse debbono sodisfare in tutto lo spazio le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= D_{11}\,\xi_1 + D_{12}\,\eta_1 + D_{13}\,\zeta_1 = 0, \\ \mathfrak{Y} &= D_{21}\,\xi_1 + D_{22}\,\eta_1 + D_{23}\,\zeta_1 = 0, \\ \mathfrak{Z} &= D_{31}\,\xi_1 + D_{32}\,\eta_1 + D_{33}\,\zeta_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Debbono inoltre le loro derivate prime diventare all'origine infinite del 2.° ordine ed in modo, che per una superficie qualunque σ chiusa e semplicemente connessa circondante l'origine, si abbia

$$\int_\sigma \mathfrak{L}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\sigma = X, \quad \int_\sigma \mathfrak{M}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0, \quad \int_\sigma \mathfrak{N}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0. \tag{18}$$

Se assumiamo

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} D_{22} & D_{23} \\ D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} R, \qquad \eta_1 = \begin{vmatrix} D_{23} & D_{21} \\ D_{33} & D_{31} \end{vmatrix} R, \qquad \zeta_1 = \begin{vmatrix} D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{vmatrix} R, \tag{19}$$

ove R è una funzione di x, y, z per ora qualunque, e i determinanti sono combinazioni lineari di derivazioni parziali del 4.° ordine efficienti su questa funzione, le due ultime equazioni (17) sono sodisfatte identicamente. Sostituendo questi valori nella prima delle (17), si ottiene per determinare R l'equazione a derivate parziali del 6.° ordine lineare

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} R = 0. \tag{20}$$

Se in qualunque modo si sia trovata una soluzione $R = \rho$ di questa equazione, tale, che le sue derivate quarte diventino all'origine infinite ed all'infinito infinitesime del prim'ordine, mentre le sue derivate quinte diventino all'origine infinite ed all'infinito infinitesime del second'ordine, allora le espressioni (19) di ξ_1, η_1, ζ_1, in cui si ponga $R=\rho$, dànno la soluzione del problema, e questa in virtù del teorema del n.° 2 è l'unica possibile. Infatti esse rispondono naturalmente alle condizioni 1.ª e 2.ª enunciate al n.° 1. Dimostreremo subito che rispondono ben anche alla 3.ª condizione, cioè che sodisfano le equazioni (4), purchè si moltiplichino per un'opportuna costante, il che non nuoce alle due condizioni precedenti.

Cominciamo dalle due ultime di queste equazioni, e precisamente dalla seconda, mentre alla terza la dimostrazione si potrà estendere per analogia. In virtù delle (19) e delle $(13)_a$ si può scrivere simbolicamente

$$\mathfrak{M}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \begin{vmatrix} E_{21} & D_{21} & D_{31} \\ E_{22} & D_{22} & D_{32} \\ E_{23} & D_{23} & D_{33} \end{vmatrix} \rho.$$

Sviluppiamo la prima colonna con la formola (16) e la seconda con la (15), mentre lasceremo intatta la terza colonna. Ponghiamo ancora per brevità

$$\frac{\partial E_{2i}}{\partial \alpha} = A_i, \qquad \frac{\partial E_{2i}}{\partial \beta} = B_i, \qquad \frac{\partial E_{2i}}{\partial \gamma} = C_i,$$

$$D_{31} = D_1, \qquad D_{32} = D_2, \qquad D_{33} = D_3,$$

sicchè il nostro determinante potrà scriversi

$$\begin{vmatrix} A_1 \alpha + B_1 \beta + C_1 \gamma, & A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta, & D_1 \\ A_2 \alpha + B_2 \beta + C_2 \gamma, & A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \zeta, & D_2 \\ A_3 \alpha + B_3 \beta + C_3 \gamma, & A_3 \xi + B_3 \eta + C_3 \zeta, & D_3 \end{vmatrix}$$

Ora è noto che, se i determinanti di 3.° ordine

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

si indicano brevemente con $(A\,B\,C)$, $(A\,B\,D)$, etc., si hanno le identità

$$A_1(B\,C\,D) + B_1(C\,A\,D) + C_1(A\,B\,D) - D_1(A\,B\,C)$$
$$A_2(B\,C\,D) + B_2(C\,A\,D) + C_2(A\,B\,D) = D_2(A\,B\,C)$$
$$A_3(B\,C\,D) + B_3(C\,A\,D) + C_3(A\,B\,D) = D_3(A\,B\,C).$$

In virtù di queste il nostro determinante può scriversi

$$\frac{1}{(ABC)}\begin{vmatrix} A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma, & A_1\xi+B_1\eta+C_1\zeta, & A_1(BCD)+B_1(CAD)+C_1(ABD) \\ A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma, & A_2\xi+B_2\eta+C_2\zeta, & A_2(BCD)+B_2(CAD)+C_2(ABD) \\ A_3\alpha+B_3\beta+C_3\gamma, & A_3\xi+B_3\eta+C_3\zeta, & A_3(BCD)+B_3(CAD)+C_3(ABD) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(ABC)}\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \xi, & \eta, & \zeta \\ (BCD), & (CAD), & (ABD) \end{vmatrix}$$

$$=[\eta(ABD)-\zeta(CAD)]\alpha+[\zeta(BCD)-\xi(ABD)]\beta+[\xi(CAD)-\eta(BCD)]\gamma.$$

Da quest'ultima espressione, ricordando che ξ, η, ζ sono i tre segni di derivazione $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, si riconosce che l'integrale

$$\int_\sigma \mathfrak{M}\, d\sigma$$

ha la forma degl'integrali di Stokes, e quindi è riducibile ad un integrale di linea esteso al contorno della superficie; ma siccome questa nel nostro caso è chiusa e semplicemente connessa, esso è nullo, come volevasi dimostrare.

In quanto alla prima equazione (4), l'integrale primo membro prenderà un valore l, che pel teorema del n.° 2 sarà diverso da zero. Ne segue che, prendendo $\frac{X}{l}\rho$ invece di ρ, si otterrà una nuova soluzione dell'equazione (20), e quindi tre nuovi valori $\frac{X}{l}\xi_1$, $\frac{X}{l}\eta_1$, $\frac{X}{l}\zeta_1$ invece dei primitivi ξ_1, η_1, ζ_1, i quali sodisferanno la prima delle (18), e perciò risponderanno a tutte le condizioni del problema.

Si vede dunque che la risoluzione del problema dipende dalla ricerca di un'opportuna soluzione della (20).

7. Noi supponiamo adesso $X=1$, cioè consideriamo la deformazione provocata da una forza $=1$ applicata all'origine e diretta nel senso positivo dell'asse delle x, e denoteremo ancora con

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1$$

le componenti dello spostamento, che vi corrispondono, supponendo in esse compenetrato il fattore $\frac{1}{l}$.

Analogamente si potranno determinare le funzioni

$$\xi_2, \quad \eta_2, \quad \zeta_2,$$

$$\xi_3, \quad \eta_3, \quad \zeta_3,$$

che esprimono le componenti dello spostamento per la deformazione provocata da una forza -1 applicata all'origine e diretta nel verso positivo dell'asse delle y, o, rispettivamente, dell'asse delle z. L'equazione (20) è la stessa per tutte e tre queste terne di funzioni.

8. Però è importante notare che anche la soluzione di questa equazione, che bisogna adottare per ottenere le tre serie di funzioni, è la stessa. Per dimostrare ciò basta evidentemente dimostrare che, se $R = \rho$ è una soluzione della (20) godente le sapute proprietà, e con questa si formano le tre terne di funzioni $\xi_1, \ldots \zeta_3$, il valore sopra denotato con l è lo stesso per ciascuna terna, o in altri termini, che si ha

$$\int_\sigma \mathfrak{L}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{M}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, d\sigma = \int_\sigma \mathfrak{N}(\xi_3, \eta_3, \zeta_3)\, d\sigma.$$

Infatti, per dimostrare l'eguaglianza dei due primi integrali, ricordiamo che sono simbolicamente

$$\mathfrak{L}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \begin{vmatrix} E_{11}, & D_{21}, & D_{31} \\ E_{12}, & D_{22}, & D_{32} \\ E_{13}, & D_{23}, & D_{33} \end{vmatrix} \rho, \quad \mathfrak{M}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = \begin{vmatrix} D_{11}, & E_{21}, & D_{31} \\ D_{12}, & E_{22}, & D_{32} \\ D_{13}, & E_{23}, & D_{33} \end{vmatrix} \rho.$$

Trasformiamo queste espressioni mediante le (15), (16), ponendo per brevità

$$\frac{\partial E_{rs}}{\partial \alpha} = A_{rs}, \qquad \frac{\partial E_{rs}}{\partial \beta} = B_{rs}, \qquad \frac{\partial E_{rs}}{\partial \gamma} = C_{rs},$$

$$D_{11} = D_1, \qquad D_{22} = D_2, \qquad D_{33} = D_3,$$

ed ottenghiamo

$$\mathfrak{L}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \begin{vmatrix} A_{11}\alpha + B_{11}\beta + C_{11}\gamma, & A_{12}\xi + B_{12}\eta + C_{12}\zeta, & D_1 \\ A_{12}\alpha + B_{12}\beta + C_{12}\gamma, & A_{22}\xi + B_{22}\eta + C_{22}\zeta, & D_2 \\ A_{13}\alpha + B_{13}\beta + C_{13}\gamma, & A_{32}\xi + B_{32}\eta + C_{32}\zeta, & D_3 \end{vmatrix} \rho$$

$$\mathfrak{M}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = \begin{vmatrix} A_{11}\xi + B_{11}\eta + C_{11}\zeta, & A_{12}\alpha + B_{12}\beta + C_{12}\gamma, & D_1 \\ A_{12}\xi + B_{12}\eta + C_{12}\zeta, & A_{22}\alpha + B_{22}\beta + C_{22}\gamma, & D_2 \\ A_{13}\xi + B_{13}\eta + C_{13}\zeta, & A_{32}\alpha + B_{32}\beta + C_{32}\gamma, & D_3 \end{vmatrix} \rho.$$

Allora formiamo la differenza

$$\mathfrak{L}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) - \mathfrak{M}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2),$$

ed ordiniamo la differenza dei due determinanti per D_1, D_2, D_3. Fatto il calcolo, si vedrà che i termini in $\alpha\,\xi$, $\beta\,\eta$, $\gamma\,\zeta$ si distruggono, ed il coefficiente di D_1, per esempio, può mettersi nella forma

$$\begin{vmatrix} \Lambda & \xi & \alpha \\ \mathrm{M} & \eta & \beta \\ \mathrm{N} & \zeta & \gamma \end{vmatrix},$$

ove Λ, M, N hanno i valori

$$\begin{vmatrix} C_{12}, & B_{22} \\ C_{13}, & B_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_{12}, & C_{22} \\ B_{13}, & C_{23} \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{M} = \begin{vmatrix} A_{12}, & C_{22} \\ A_{13}, & C_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} C_{12}, & A_{22} \\ C_{13}, & A_{23} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{N} = \begin{vmatrix} B_{12}, & A_{22} \\ B_{13}, & A_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{12}, & B_{22} \\ A_{13}, & B_{23} \end{vmatrix}$$

Da ciò s'inferisce che il termine in D_1 moltiplicato per ρ e sottoposto al segno d'integrazione per σ, dà luogo ad un integrale di Stokes, il quale, per la ragione sopra cennata, è nullo. Alla stessa conclusione si perviene pei termini in D_2 e D_3, ed il teorema è dimostrato.

9. Dal precedente teorema sorge evidentemente che si ha

$$\xi_2 = \eta_1, \qquad \xi_3 = \zeta_1, \qquad \eta_3 = \zeta_2, \tag{21}$$

cioè che il quadro delle $\xi_1, \ldots, \zeta_3$ è simmetrico.

Noi porremo in seguito brevemente

$$\mathfrak{L}(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i) = \mathfrak{L}(i),\quad \mathfrak{M}(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i) = \mathfrak{M}(i),\quad \mathfrak{N}(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i) = \mathfrak{N}(i). \tag{22}$$

Notiamo ancora che per le (21) si ha

$$\mathfrak{L}(2) = \mathfrak{M}(1),\qquad \mathfrak{L}(3) = \mathfrak{N}(1),\qquad \mathfrak{M}(3) = \mathfrak{N}(2), \tag{23}$$

sicchè anche il quadro delle $\mathfrak{L}(i)$, $\mathfrak{M}(i)$, $\mathfrak{N}(i)$ è simmetrico.

Infine mettiamo insieme le seguenti eguaglianze già dimostrate:

$$\left.\begin{array}{lll}
\int_\sigma \mathfrak{L}(1)\,d\sigma = 1, & \int_\sigma \mathfrak{L}(2)\,d\sigma = 0, & \int_\sigma \mathfrak{L}(3)\,d\sigma = 0, \\
\int_\sigma \mathfrak{M}(1)\,d\sigma = 0, & \int_\sigma \mathfrak{M}(2)\,d\sigma = 1, & \int_\sigma \mathfrak{M}(3)\,d\sigma = 0, \\
\int_\sigma \mathfrak{N}(1)\,d\sigma = 0, & \int_\sigma \mathfrak{N}(2)\,d\sigma = 0, & \int_\sigma \mathfrak{N}(3)\,d\sigma = 1,
\end{array}\right\} \tag{24}$$

§ II. — Espressioni analitiche delle deformazioni tipiche.

10. Determinate le deformazioni per sollecitazione elementare assiale, sarà facile costruire le formole, che dànno le componenti dello spostamento per le tre deformazioni tipiche. Premettiamo, in riguardo alla deformazione per sollecitazione elementare che, se il centro di sollecitazione, invece di essere l'origine, è il punto di coordinate x', y', z', basta evidentemente porre nelle espressioni di $\xi_1, \ldots \zeta_3$ in luogo di x, y, z le differenze $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$. Senza cambiare la notazione, noi supporremo in questo paragrafo di aver fatto queste sostituzioni.

Deformazione del 1.º tipo. — Ogni elemento $d\,S'$ dello spazio S occupato dai punti d'applicazione delle forze è sollecitato da una forza di componenti $X'\,d\,S'$, $Y'\,d\,S'$, $Z'\,d\,S'$. Pel teorema della sovrapposizione degli effetti la prima componente produce una deformazione, per cui le componenti dello spostamento hanno le espressioni

$$\xi_1\,X'\,d\,S',\qquad \eta_1\,X'\,d\,S',\qquad \zeta_1\,X'\,d\,S',$$

ed analogamente le altre due componenti provocano deformazioni di spostamenti

$$\xi_2 Y' d S', \qquad \eta_2 Y' d S', \qquad \zeta_2 Z' d S',$$
$$\xi_3 Z' d S', \qquad \eta_3 Z' d S', \qquad \zeta_3 Z' d S'.$$

Allora, pel predetto teorema, sommando gli spostamenti relativi a ciascun asse ed integrando le tre somme rispetto ad x', y', z' per tutto lo spazio S, si ha

$$\left.\begin{aligned} u &= \int_S (\xi_1 X' + \xi_2 Y' + \xi_3 Z')\, d S' \\ v &= \int_S (\eta_1 X' + \eta_2 Y' + \eta_3 Z')\, d S' \\ w &= \int_S (\zeta_1 X' + \zeta_2 Y' + \zeta_3 Z')\, d S' \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

esprimenti la deformazione del 1.° tipo.

11. Il metodo precedente, benchè inspirato all'intuizione meccanica, non è fornito di tutto il rigore analitico desiderabile. Procederemo più rigorosamente dimostrando, che le espressioni precedenti di u, v, w possiedono tutte le proprietà, che nella precedente Memoria furono dimostrate caratteristiche per la deformazione del 1.° tipo.

Anzitutto, poichè le funzioni $\xi_1, \ldots, \zeta_3$ diventano infinite del 1.° ordine e le loro derivate prime infinite del 2.° ordine per $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, mentre si comportano nel saputo modo all'infinito, è facile dimostrare che:

1.° Le funzioni u, v, w sono finite e continue in tutto lo spazio, sia interno che esterno alla regione S, ed all'infinito diventano nulle del 1.° ordine.

2.° Le loro derivate prime, e quindi le componenti della deformazione e della pressione, sono dappertutto finite e continue, ed all'infinito diventano nulle del 2.° ordine.

Le dimostrazioni sarebbero analoghe a quelle, che si usano per dimostrare le analoghe proprietà della funzione potenziale di un corpo, e noi le omettiamo.

Resta a dimostrare che in tutto il campo di sollecitazione S si ha

$$\mathfrak{X}(u, v, w) = -X, \qquad \mathfrak{Y}(u, v, w) = -Y, \qquad \mathfrak{Z}(u, v, w) = -Z, \tag{26}$$

ed all'esterno di questo campo

$$\mathfrak{X}(u, v, w) = 0, \qquad \mathfrak{Y}(u, v, w) = 0, \qquad \mathfrak{Z}(u, v, w) = 0. \tag{27}$$

Convenghiamo di distinguere (in questo e nei successivi numeri) gli elementi degl'integrali con l'apice $'$ quando le variabili d'integrazione sono x', y', z' e di lasciarli senz'apice quando sono x, y, z. La stessa distinzione applichiamo ai segni d'operazione.

Detta s la superficie, che limita il campo di sollecitazione, si ha

$$\int_s \mathfrak{P}(u,\ v,\ w)\, d\,s = -\int_S \mathfrak{X}(u,\ v,\ w)\, d\,S. \tag{28}$$

D'altra parte, osservando le (25), si ottiene facilmente

$$\mathfrak{P}(u,\ v,\ w)\, d\,s = \int_S [X'\,\mathfrak{P}(1) + Y'\,\mathfrak{P}(2) + Z'\,\mathfrak{P}(3)]\, d\,S',$$

quindi, integrando per tutta s ed invertendo le integrazioni relative a $d\,s$ e $d\,S'$, si ha

$$\int_s \mathfrak{P}(u, v, w)\, d\,s = \int_S X'\, d\,S' \int_s \mathfrak{P}(1)\, d\,s + \int_S Y'\, d\,S' \int_s \mathfrak{P}(2)\, d\,s +$$
$$+ \int_S Z'\, d\,S' \int_s \mathfrak{P}(3)\, d\,s,$$

ovvero, per le (24),

$$\int_s \mathfrak{P}(u,\ v,\ w)\, d\,s = \int_S X'\, d\,S'. \tag{29}$$

Confrontando le (28), (29), ed osservando che in quest'ultima può scriversi ora $X\,d\,S$ invece di $X'\,d\,S'$, si ottiene

$$\int_S [\mathfrak{X}(u,\ v,\ w) + X]\, d\,S = 0.$$

Ora questa equazione, dovendo sussistere evidentemente per qualunque parte, piccola quanto si voglia, di S, fornisce appunto la prima delle (26).

D'altra parte, se si considera un punto $(x,\ y,\ z)$ esterno al campo di sollecitazione, gl'integrali (25) racchiudendo funzioni sempre finite e continue nel campo d'integrazione insieme alle loro derivate prime, ne è lecita la doppia derivazione sotto il segno, e si ha

$$\mathfrak{X}(u,\ v,\ w) = \int_S [X'\,\mathfrak{X}(1) + Y'\,\mathfrak{X}(2) + Z'\,\mathfrak{X}(3)]\, d\,S',$$

espressione nulla in virtù delle equazioni

$$\mathfrak{X}(1) = \mathfrak{X}(2) = \mathfrak{X}(3) = 0.$$

Così è dimostrata la prima delle (27).

12. *Dimostrazione del teorema enunciato al* n.° 2. — Ora siamo in grado di dimostrare questo teorema. Infatti, se esso non sussistesse, le nove funzioni $\xi_1, \ldots, \zeta_3$ non sarebbero univocamente determinate, ma vi si potrebbero aggiungere ordinatamente nove altre funzioni $\xi_1^{(0)}, \ldots, \zeta_3^{(0)}$ dotate della proprietà di annullare i tre integrali

$$\int_\sigma \mathfrak{L}\, d\sigma, \qquad \int_\sigma \mathfrak{M}\, d\sigma, \qquad \int_\sigma \mathfrak{N}\, d\sigma.$$

Ma, se così fosse, alle espressioni (25) si aggiungerebbero i termini

$$u_0 = \int_S (\xi_1^{(0)} X' + \xi_2^{(0)} Y' + \xi_3^{(0)} Z')\, d S',$$

$$v_0 = \int_S (\eta_1^{(0)} X' + \eta_2^{(0)} Y + \eta_3^{(0)} Z')\, d S',$$

$$w_0 = \int_S (\zeta_1^{(0)} X' + \zeta_2^{(0)} Y' + \zeta_3^{(0)} Z')\, d S'.$$

Ora u_0, v_0, w_0 sono nulli, perchè la deformazione del 1.° tipo è determinata univocamente dalle funzioni X', Y', Z', onde son nulli i tre integrali a destra. Ma siccome questo ragionamento varrebbe, per quanto piccolo fosse il campo di sollecitazione, segue che le quantità sotto i segni integrali sono nulle. Inoltre anche le funzioni X', Y', Z possono assegnarsi arbitrariamente; quindi è necessario che le nove funzioni $\xi_1^{(0)}, \ldots, \zeta_3^{(0)}$ siano nulle, come si voleva dimostrare.

13. *Deformazione del 2.° tipo.* — Ad ogni elemento $d\sigma'$ della superficie sollecitata, σ, è applicata una forza di componenti $L'\, d\sigma'$, $M'\, d\sigma'$, $N'\, d\sigma'$. Queste tre forze producono tre deformazioni elementari assiali di spostamenti rispettivi

$$\begin{array}{lll} \xi_1 L'\, d\sigma', & \eta_1 L'\, d\sigma', & \zeta_1 L'\, d\sigma', \\ \xi_2 M'\, d\sigma', & \eta_2 M'\, d\sigma', & \zeta_2 M'\, d\sigma, \\ \xi_3 N'\, d\sigma', & \eta_3 N'\, d\sigma', & \zeta_3 N\, d\sigma', \end{array}$$

e, pel teorema di sovrapposizione, la deformazione risultante consiste negli spostamenti

$$\left.\begin{aligned} u &= \int_\sigma (\xi_1 L' + \xi_2 M' + \xi_3 N')\, d\sigma', \\ v &= \int_\sigma (\eta_1 L' + \eta_2 M' + \eta_3 N')\, d\sigma', \\ w &= \int_\sigma (\zeta_1 L' + \zeta_2 M' + \zeta_3 N')\, d\sigma'. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

14. Non è difficile dimostrare con metodi analoghi a quelli, che si adoperano per la funzione potenziale di una superficie, che le u, v, w sono finite e continue in tutto lo spazio, ed all'infinito divengono nulle del 1.° ordine; che inoltre le loro derivate prime restano finite e continue, quando non si attraversa la superficie sollecitante, ed all'infinito divengono nulle del 2.° ordine. Omettiamo qui queste dimostrazioni.

D'altra parte per punti non giacenti sulla superficie sollecitata si ha

$$\mathfrak{X}(u, v, w) = 0, \qquad \mathfrak{Y}(u, v, w) = 0, \qquad \mathfrak{Z}(u, v, w) = 0, \tag{31}$$

come facilmente si dimostra con la doppia derivazione rispetto ad x, y, z sotto il segno, la quale nella predetta ipotesi è lecita.

Dimostriamo che, quando il punto (x, y, z) attraversa la superficie sollecitata, le derivate prime di u, v, w subiscono discontinuità sodisfacenti le equazioni

$$\mathcal{P}\,\mathfrak{L}(u, v, w) = -L, \quad \mathcal{P}\,\mathfrak{M}(u, v, w) = -M, \quad \mathcal{P}\,\mathfrak{N}(u, v, w) = -N. \tag{32}$$

Supponghiamo dapprima la superficie sollecitata σ aperta, e pensiamo un'altra superficie s chiusa e semplicemente connessa, e tanto ampia da involgere completamente σ. Chiamando S lo spazio racchiuso da s, e pensandolo limitato da s e dalle due faccie di σ, si ha

$$\int_S \mathfrak{X}(u, v, w)\, dS = -\int_\sigma \mathcal{P}\,\mathfrak{L}(u, v, w)\, d\sigma - \int_s \mathfrak{L}(u, v, w)\, ds,$$

e, poichè il primo membro è nullo per le (31),

$$\int_s \mathfrak{L}(u, v, w)\, ds = -\int_\sigma \mathcal{P}\,\mathfrak{L}(u, v, w)\, d\sigma. \tag{33}$$

Se la superficie σ è chiusa, chiamiamo S_i lo spazio in essa compreso;

pensiamo ancora una superficie chiusa e semplicemente connessa s tanto ampia, da involgerla completamente, e chiamiamo S_e lo spazio compreso fra σ ed s. Nei due spazii S_i, S_e sono rispettivamente soddisfatte le equazioni

$$0 = \int_{S_i} \mathfrak{X}(u, v, w)\, d S = -\int_{\sigma} \wp_i(u, v, w)\, d\sigma$$

$$0 = \int_{S_e} \mathfrak{X}(u, v, w)\, d S = \int_{\sigma} \wp_e(u, v, w)\, d\sigma - \int_{s} \wp(u, v, w)\, d s,$$

ove $\wp_i$, $\wp_e$ denotano le componenti secondo l'asse x della pressione che si esercita sulla faccia interna ed esterna di σ rispettivamente. Sommando queste eguaglianze ed osservando che $\wp_i - \wp_e = \mathcal{D}\wp$, si ricade nella (33), la quale perciò sussiste in tutti i casi.

D'altra parte possiamo dare un'altra espressione al primo membro della (33) adoperando le (30), che dànno

$$\wp_s(u, v, w) = \int_{\sigma} [L' \wp(1) + M' \wp(2) + N' \wp(3)]\, d\sigma',$$

ove le $\wp$ dentro l'integrale sono relative ad s; quindi, integrando per tutta s ed invertendo al secondo membro le integrazioni relative a $d s$ e $d\sigma'$, si ha

$$\int_s \wp(u, v, w)\, d s = \int_{\sigma'} L'\, d\sigma' \int_s \wp(1)\, d s + \int_{\sigma'} M'\, d\sigma' \int_s \wp(2)\, d s + \\ + \int_{\sigma'} N'\, d\sigma' \int_s \wp(3)\, d s,$$

ovvero, per le (24),

$$\int_s \wp(u, v, w)\, d s = \int_{\sigma} L'\, d\sigma'.$$

Ponendo nel secondo membro $L\, d\sigma$ invece di $L'\, d\sigma'$, il che non porta diversità, e confrontando questa equazione con la (33), si ottiene

$$\int_{\sigma} [\mathcal{D}\wp(u, v, w) + L]\, d\sigma = 0. \tag{34}$$

Se ora consideriamo una porzione σ_0 della superficie σ, e supponghiamo agenti le sole forze L', M', N' ad essa applicate, ne risulta una deformazione di spostamenti u_0, v_0, w_0, e, riferendo a questa la (34), avremo

$$\int_{\sigma_0} [\mathcal{D}\wp(u_0, v_0, w_0) + L]\, d\sigma_0 = 0.$$

Ora $u_0 = u - (u - u_0)$, etc., e la deformazione di spostamenti $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$ può riguardarsi come provocata dalle forze L', M', N' agenti nella rimanente porzione $\sigma - \sigma_0$ di σ. Quest'ultima deformazione dà luogo a pressioni, per le quali $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sono continue attraverso σ_0, perchè questa superficie non fa parte del campo di sollecitazione, e così

$$\mathcal{D}\,\mathfrak{L}(u_0, v_0, w_0) = \mathcal{D}\,\mathfrak{L}(u, v, w) - \mathcal{D}\,\mathfrak{L}(u - u_0, v - v_0, w - w_0) =$$
$$= \mathcal{D}\,\mathfrak{L}(u, v, w);$$

dunque l'eguaglianza precedente può scriversi

$$\int_{\sigma_0} [\mathcal{D}\,\mathfrak{L}(u, v, w) + L]\, d\sigma_0 = 0,$$

la quale non è altro, che la (34) stessa, ove l'integrazione si limiti alla sola porzione σ_0 di σ. Dunque questa equazione sussiste, non solo per l'intera superficie σ, ma per qualunque porzione di essa piccola quanto si voglia, epperò dovrà essere per ogni punto di σ

$$\mathcal{D}\,\mathfrak{L}(u, v, w)\, d\sigma + L = 0,$$

e così è dimostrata la prima delle (32).

15. *Deformazione del 3.° tipo.* — Ponghiamo per brevità

$$\mathfrak{L}'(i) = \pi_i, \qquad \mathfrak{M}'(i) = \varkappa_i, \qquad \mathfrak{N}'(i) = \rho_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{35}$$

Le componenti dello spostamento per la deformazione del 3.° tipo, per la quale $\bar{u}$, $\bar{v}$, w siano le discontinuità caratteristiche, hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned} u &= \int_\sigma (\pi_1 \bar{u} + \varkappa_1 \bar{v} + \rho_1 \bar{w})\, d\sigma' \\ v &= \int_\sigma (\pi_2 \bar{u} + \varkappa_2 \bar{v} + \rho_2 w)\, d\sigma' \\ w &= \int_\sigma (\pi_3 \bar{u} + \varkappa_3 \bar{v} + \rho_3 \bar{w})\, d\sigma'. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Basterà provare che queste funzioni possiedono tutte le proprietà, che nella precedente Memoria furono dimostrate caratteristiche della deformazione del 3.° tipo.

In quanto alle condizioni di continuità di queste funzioni e delle loro derivate prime in tutti i punti non giacenti su σ, come ancora al loro comportamento all'infinito, omettiamo di imitare le dimostrazioni, che sogliono darsi per l'analoga funzione potenziale di un doppio strato. Riguardiamo pure come evidenti le proprietà

$$\mathfrak{X}(u, v, w) = 0, \qquad \mathfrak{Y}(u, v, w) = 0, \qquad \mathfrak{Z}(u, v, w) = 0,$$

che valgono per tutti i punti non giacenti sulla superficie singolare. Verifichiamo piuttosto le proprietà relative alle discontinuità di queste funzioni e delle loro derivate prime attraverso la superficie singolare.

16. Per un determinato punto m_0 di σ pensiamo condotta la normale positiva e su questa preso un altro punto m di coordinate (x, y, z), e riguardiamo m come un punto, di cui si considera lo spostamento, mentre m_0 è uno dei punti (x', y', z'), a cui si estendono le integrazioni. Tracciamo su σ una curva chiusa C circondante il punto m_0, e segniamo con σ_0 la porzione di σ racchiusa da questa curva. L'integrale, che dà il valore di u, può scindersi in due: uno, u_0, esteso a σ_0, e l'altro, u_1, esteso alla rimanente parte di σ, sicchè

$$u = u_0 + u_1 .$$

Ora u_1 si mantiene evidentemente continua quando il punto m, muovendosi sulla normale, attraversa la superficie in m_0, sicchè la discontinuità, che allora subisce u, si riduce a quella di u_0.

Ricordando le notazioni delle componenti della pressione $X_x, \ldots, Y_z, \ldots$ di Kirchhoff, osserviamo che

$$\pi_1 = X'_x(1)\,\alpha' + X'_y(1)\,\beta' + X'_z(1)\,\gamma',$$

$$\varkappa_1 = Y'_x(1)\,\alpha' + Y'_y(1)\,\beta' + Y'_z(1)\,\gamma',$$

$$\rho_1 = Z'_x(1)\,\alpha' + Z'_y(1)\,\beta' + Z'_z(1)\,\gamma',$$

quindi, segnando con $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ i coseni direttori della normale positiva in m_0, possiamo scrivere

$$\left.\begin{aligned} u_0 = &\int_{\sigma_0} \{[X'_x(1)\,\bar{u} + Y'_x(1)\,\bar{v} + Z'_x(1)\,\bar{w}]\,\alpha_0 + \cdots\}\,d\sigma' \\ &+ \int_{\sigma_0} \{[X'_x(1)\,\bar{u} + Y'_x(1)\,\bar{v} + Z'_x(1)\,\bar{w}]\,(\alpha' - \alpha_0) + \cdots\}\,d\sigma'. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Ragioniamo separatamente su questi due integrali. Il primo può trasformarsi per le eguaglianze

$$X'_x(1) = -X_x(1), \ldots Y'_z(1) = -Y_z(1), \ldots,$$

ove nei secondi membri le derivate delle ξ_1, η_1, ζ_1, invece che esser prese rispetto ad x', y', z' (come indica l'apice $'$), s'intendono prese rispetto ad x, y, z, coordinate dal punto m. Così il primo integrale diventa

$$-\int_{\sigma_0} \{[X_x(1)\alpha_0 + X_y(1)\beta_0 + X_z(1)\gamma_0]\bar{u} + [Y_x(1)\alpha_0 + \cdots]\bar{v} + [Z_x(1)\alpha_0 + \cdots]\bar{w}\} d\sigma'.$$

Quando il punto m, muovendosi sulla normale, si approssima indefinitamente ad m_0, questa espressione ha per limite

$$-\int_{\sigma_0} [\mathfrak{L}(1)\bar{u} + \mathfrak{M}(1)\bar{v} + \mathfrak{N}(1)\bar{w}]\, d\sigma'.$$

Diamo un'altra espressione di questo limite. A tal uopo consideriamo la deformazione del 2.° tipo di spostamenti

$$u_2 = \int_{\sigma_0} (\xi_1 \bar{u} + \xi_2 \bar{v} + \xi_3 \bar{w})\, d\sigma',$$

$$v_2 = \int_{\sigma_0} (\eta_1 \bar{u} + \eta_2 \bar{v} + \eta_3 \bar{w})\, d\sigma',$$

$$w_2 = \int_{\sigma_0} (\zeta_1 \bar{u} + \zeta_2 \bar{v} + \zeta_3 \bar{w})\, d\sigma',$$

e per essa calcoliamo la componente $\mathfrak{L}$ della pressione unitaria sulla faccia positiva di σ_0 in m_0. Essa è

$$\mathfrak{L}(u_2, v_2, w_2) = \int_{\sigma_0} [\mathfrak{L}(1)\bar{u} + \mathfrak{L}(2)\bar{v} + \mathfrak{L}(3)\bar{w}]\, d\sigma'.$$

Così, a cagione delle eguaglianze (24), il limite in esame ha pure l'espressione

$$-\mathfrak{L}(u_2, v_2, w_2).$$

Dunque la discontinuità che il primo integrale subisce, quando il punto m attraversa la superficie in m_0, è $= -\mathcal{D}\,\mathfrak{L}(u_2, v_2, w_2)$, cioè $= \bar{u}$.

In quanto al secondo integrale (37), facciamo uso di un sistema particolare di assi coordinati con l'origine in m_0 e l'asse delle z rivolto verso la normale positiva, onde avremo

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \qquad \gamma_0 = 1.$$

Ponendo inoltre per un punto qualunque di σ_0

$$x' = t \cos \theta, \qquad y' = t \operatorname{sen} \theta,$$

sarà

$$d\sigma' \cos(z\,n) = t\,d\,t\,d\,\theta,$$

ove n denota la direzione della normale positiva nel punto qualunque (x', y', z') di σ_0.

Chiamando r la distanza fra questo punto qualunque ed il punto m, si ha

$$r^2 = t^2 + (z' - z)^2.$$

Ora stacchiamo dal nostro integrale la parte

$$\int_{\sigma_0} X'_x(1)\,\overline{u}\,(\alpha' - \alpha_0)\,d\sigma',$$

che con questo particolare riferimento diventa

$$\int_{\sigma_0} X'_x(1)\,\overline{u}\,\alpha'\,d\sigma'$$

e può anche scriversi

$$\int_{\sigma_0} \frac{r^2 X'_x(1)}{\cos(z\,n)}\,\frac{\alpha'}{t}\,\frac{d\,t\,d\,\theta}{1 + \left(\frac{z' - z}{t}\right)^2}.$$

Riduciamo m in m_0, e poi facciamo restringere indefinitamente la curva C. Quando questa è divenuta abbastanza stretta, $\cos(z\,n)$ non è mai più nullo in σ_0. Le quantità r, t, $z' - z$ tendono a zero in qualunque direzione, ma il rapporto $\frac{z' - z}{t}$ tende sempre ad un limite finito. Inoltre, se la superficie ha una curvatura ordinaria in m_0, come supponghiamo, il rapporto $\frac{\alpha'}{t}$ tende pure ad un limite finito in qualunque direzione. Infine, per le proprietà delle funzioni ξ_1, η_1, ζ_1, anche il prodotto $r^2 X'_x(1)$ tende ad un limite finito. Dunque la quantità sottoposta al segno integrale si mantiene sempre finita, epperò, decrescendo indefinitamente il campo d'integrazione, il limite dell'integrale è zero.

Alla stessa conclusione si arriva per le altre parti, che costituiscono il secondo integrale, sicchè questo non può dare discontinuità per u_0.

In conclusione si ha

$$\mathscr{D}\, u = \bar{u}.$$

come si voleva dimostrare.

17. Dimostriamo adesso che le funzioni

$$\mathfrak{L}(u,\ v,\ w), \qquad \mathfrak{M}(u,\ v,\ w), \qquad \mathfrak{N}(u,\ v,\ w)$$

restano continue quando si passa dalla faccia positiva alla negativa di σ. Cominciamo dallo stabilire, con procedimento identico a quello seguito al n.° 14, l'eguaglianza simile alla (33)

$$\int_s \mathfrak{L}(u,\ v,\ w)\, d\, s = -\int_\sigma \mathscr{D}\, \mathfrak{L}(u,\ v,\ \dot{w})\, d\, \sigma, \tag{33$_a$}$$

che sussiste in entrambi i casi che σ sia chiusa o aperta, e dove s è una superficie chiusa e connessa involgente σ, e l'operazione $\mathfrak{L}$ si riferisce alla faccia interna di s. D'altra parte, adoperando le (36), si ottiene

$$\int_s \mathfrak{L}(u, v, w)\, d\, s = \int_s d\, s \int_\sigma [\bar{u}\, \mathfrak{L}(\pi_1, \pi_2, \pi_3) + \bar{v}\, \mathfrak{L}(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3) + \bar{w}\, \mathfrak{L}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)]\, d\, \sigma'.$$

Ma, osservando le (35) e sviluppando con le equazioni simboliche $(13)_a$, si ricava

$$\mathfrak{L}(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3) =$$

$$-E_{11}(E_{11}\xi_1 + E_{12}\eta_1 + E_{13}\zeta_1) + E_{12}(E'_{11}\xi_2 + E_{12}\eta_2 + E'_{13}\zeta_2) + E_{13}(E'_{11}\xi_3 + E_{12}\eta_3 + E'_{13}\zeta_3)$$

$$= E'_{11}(E_{11}\,\xi_1 + E_{12}\,\eta_1 + E_{13}\,\zeta_1) + E_{12}(E_{11}\,\xi_2 + E_{12}\,\eta_2 + E_{13}\,\zeta_2) + E_{13}(E_{11}\,\xi_3 + E_{12}\,\eta_3 + E_{13}\,\zeta_3),$$

dove per l'ultimo passaggio si è fatto uso delle (21); ovvero

$$\mathfrak{L}(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3) = E'_{11}\, \mathfrak{L}(1) + E'_{12}\, \mathfrak{L}(2) + E_{13}\, \mathfrak{L}(3).$$

Similmente:

$$\mathfrak{L}(\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_2) =$$

$$= E_{11}(E'_{21}\xi_1 + E_{22}\eta_1 + E_{23}\zeta_1) + E_{12}(E_{21}\xi_2 + E_{22}\eta_2 + E'_{23}\zeta_2) + E_{13}(E_{21}\xi_3 + E'_{22}\eta_3 + E'_{23}\zeta_3)$$

$$= E'_{21}(E_{11}\,\xi_1 + E_{12}\,\eta_1 + E_{13}\,\zeta_1) + E_{22}(E_{11}\,\xi_2 + E_{12}\,\eta_2 + E_{13}\,\zeta_2) + E_{23}(E_{11}\,\xi_3 + E_{12}\,\eta_3 + E_{13}\,\zeta_3),$$

cioè

$$\wp(\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_3) = E'_{21}\,\wp(1) + E'_{22}\,\wp(2) + E'_{33}\,\wp(3).$$

Si trova infine nel modo stesso

$$\wp(\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3) = E'_{31}\,\wp(1) + E'_{32}\,\wp(2) + E'_{33}\,\wp(3).$$

Sostituendo queste tre espressioni ed invertendo le integrazioni relative a $d\,s$ e $d\,\sigma'$, ottenghiamo

$$\int_s \wp(u,\ v,\ w)\,d\,s =$$

$$= \int_\sigma(\bar{u}E'_{11} + vE'_{21} + \bar{w}E'_{31})d\sigma' \int_s \wp(1)ds + \int_\sigma(uE'_{12} + vE'_{22} + \bar{w}E'_{32})d\sigma' \int_s \wp(2)ds$$

$$+ \int_\sigma(\bar{u}E'_{13} + \bar{v}E'_{23} + wE'_{33})d\sigma' \int_s \wp(3)ds\,;$$

ma questa espressione è nulla, perchè gl'integrali estesi ad s sono costanti in virtù delle (24), qualunque sia il punto $(x',\ y',\ z')$ sempre interno ad s, quindi le operazioni di derivazione rispetto ad x', y', z', a cui sono sottoposti, dànno per risultato zero.

Si ha dunque

$$\int_s \wp(u,\ v,\ w)\,d\,s = 0.$$

Così, confrontando con la $(33)_a$, si trova

$$\int_\sigma \mathcal{P}\,\wp(u,\ v,\ w)\,d\,\sigma = 0.$$

Col metodo seguito in fine del n.º 14 si può poi dedurre che questa eguaglianza sussiste pure per qualunque porzione di σ piccola quanto si voglia. Dunque dovrà essere

$$\mathcal{P}\,\wp(u,\ v,\ w) = 0$$

come si volea dimostrare.

§ III. — Espressioni analitiche per la deformazione elememtare in un caso particolare.

18. Abbiamo veduto al n.° 6 che la costruzione delle espressioni analitiche per la deformazione elementare dipende dalla ricerca di un'opportuna soluzione dell'equazione a derivate parziali del 6.° ordine lineare

$$(D) \equiv \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} R = 0,$$

dove $$D_{11} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2}, \qquad D_{12} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u \, \partial v}, \ldots, \; D_{33} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w^2},$$

e Π è l'espressione simbolica, che si ottiene ponendo nel contropotenziale d'elasticità in luogo di $x_x, \ldots \; y_z, \ldots$ le espressioni simboliche $x_x = \xi u, \ldots,$ $y_z = \eta w + \zeta v, \ldots,$ di guisa che le D_{rs}, non contenendo più le u, v, w ma invece le sole ξ, η, ζ equivalenti alle operazioni differenziali $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, sono simboli di operazioni differenziali con coefficienti costanti, i quali non sono altro che combinazioni dei coefficienti d'elasticità del corpo.

Per giovarci dell'intuizione geometrica riguardiamo ausiliarmente ξ, η, ζ come coordinate proiettive di un punto del piano, ed allora la $(D) = 0$ sarà l'equazione di una curva piana del 6.° ordine, che vogliamo chiamare la *sestica associata* alla costituzione elastica del corpo.

Qui procediamo alla ricerca della voluta soluzione dell'equazione a derivate parziali nel caso, in cui la sestica associata si spezza in tre coniche. Ma prima vogliamo mostrare come questo caso comprende tre forme importanti del potenziale d'elasticità, cioè: 1.° il caso dei corpi isotropi; 2.° quello dei corpi con un'asse d'elasticità; 3.° quello del mezzo elastico immaginato da Green per ispiegare il fenomeno della doppia refrazione della luce.

19. *Corpi isotropi.* — Adottando per le costanti d'isotropia la notazione di Green, diamo al contropotenziale la forma

$$\Pi = \frac{1}{2}(A - 2B)(x_x + y_y + z_z)^2 + \\ + B\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} y_z^2 + \frac{1}{2} z_x^2 + \frac{1}{2} x_y^2\right),$$

da cui, introducendo i simboli, si ottiene

$$\Pi = \frac{1}{2}(A - 2B)(\xi u + \eta v + \zeta w)^2$$

$$+ B\left[\xi^2 u^2 + \eta^2 v^2 + \zeta^2 w^2 + \frac{1}{2}(\eta w + \zeta v)^2 + \frac{1}{2}(\zeta u + \xi w)^2 + \frac{1}{2}(\xi v + \eta u)^2\right],$$

e da questa:

$$D_{11} = (A - B)\xi^2 + B(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \qquad D_{23} = (A - B)\eta\zeta,$$

$$D_{22} = (A - B)\eta^2 + B(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \qquad D_{31} = (A - B)\zeta\xi,$$

$$D_{33} = (A - B)\zeta^2 + B(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \qquad D_{12} = (A - B)\xi\eta.$$

Mettendo queste espressioni in (D) ed eseguendo i calcoli, si ottiene

$$(D) = A B^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^3.$$

Dunque la sestica associata si riduce ad una conica tripla, la quale, supponendo che le coordinate siano cartesiane omogenee, è un cerchio immaginario di raggio $\sqrt{-1}$. L'equazione a derivate parziali si riduce a

$$\Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 R = 0,$$

ove Δ^2 è il simbolo di Laplace (*).

20. *Corpi con un asse d'elasticità.* — Assumiamo l'asse d'elasticità nella direzione delle z, e ponghiamo il contropotenziale nella forma (**)

$$\Pi = \frac{1}{2} A (x_x + y_y)^2 + B(x_x + y_y) z_z + \frac{1}{2} C z_z^2$$

$$+ D\left(\frac{1}{2} x_y^2 - 2 x_x y_y\right) + \frac{1}{2} E (y_z^2 + z_x^2),$$

(*) Il Ch.mo Prof. Cerruti, ha avuto la gentilezza di comunicarmi che fin dal 1896 egli conosce questa equazione da lui dedotta con procedimento generale, che espose in un corso svolto quell'anno nell'Università di Roma.

(**) Adotto la forma, che trovasi nelle *Note fisico-matematiche* del Beltrami (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III), ponendovi $2D$, $2E$ invece di D, E.

sicchè, introducendo i simboli,

$$\Pi = \frac{1}{2} A (\xi u + \eta v)^2 + B (\xi u + \eta v) \zeta w + \frac{1}{2} C \zeta^2 w^2$$

$$+ D \left[\frac{1}{2} (\xi v + \eta u)^2 - 2 \xi \eta u v \right] + \frac{1}{2} E [(\eta w + \zeta v)^2 + (\zeta u + \xi w)^2].$$

Così si ottiene

$$(D) = \begin{vmatrix} A \xi^2 + D \eta^2 + E \zeta^2 & (A - D) \xi \eta & (B + E) \xi \zeta \\ (A - D) \eta \xi & D \xi^2 + A \eta^2 + E \zeta^2 & (B + E) \eta \zeta \\ (B + E) \zeta \xi & (B + E) \zeta \eta & E (\xi^2 + \eta^2) + C \zeta^2 \end{vmatrix}$$

e, sviluppando per gli elementi dell'ultima orizzontale, si perviene al risultato

$$(D) = [E \zeta^2 + D (\xi^2 + \eta^2)] [E C \zeta^4 + (A C - 2 B E - B^2) \zeta^2 (\xi^2 + \eta^2) + A E (\xi^2 + \eta^2)^2].$$

Ponendo dunque

$$h_1 = - \frac{D}{E}$$

e chiamando h_2, h_3 le radici dell'equazione in h

$$E C h^2 + (A C - 2 B E - B^2) h + A E = 0,$$

l'equazione della sestica associata può scriversi

$$[\zeta^2 - h_1 (\xi^2 + \eta^2)] [\zeta^2 - h_2 (\xi^2 + \eta^2)] [\zeta^2 - h_3 (\xi^2 + \eta^2)] = 0,$$

quindi questa curva si spezza in tre coniche aventi un triangolo polare comune, a cui sono riferite. L'equazione a derivate parziali può scriversi

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - h_1 \nabla R \right) \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - h_2 \nabla R \right) \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - h_3 \nabla R \right) = 0 ,$$

dove

$$\nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

21. *Mezzo elastico di* Green. — Si ha (*):

$$2 \Pi = a_0 (x_x + y_y + z_z)^2$$
$$+ a^2 (y_z^2 - 4 y_y z_z) + b^2 (z_x^2 - 4 z_z x_x) + c^2 (x_y^2 - 4 x_x y_y)$$

(*) Kirchhoff, *Vorles. über math. Physik.* Mathematische Optik, Leipzig, 1891, pagina 198 e segg.

e, introducendo i simboli,

$$2\,\Pi = a_0(\xi u + \eta v + \zeta w)^2 + a^2[(\eta w + \zeta v)^2 - 4\eta\zeta v w]$$
$$+ b^2[(\zeta u + \xi w)^2 - 4\zeta\xi w u] + c^2[(\xi v + \eta u)^2 - 4\xi\eta u v].$$

Da questa si ricava

$$(D) = \begin{vmatrix} a_0\xi^2 + b^2\zeta^2 + c^2\eta^2 & (a_0 - c^2)\xi\eta & (a_0 - b^2)\xi\zeta \\ (a_0 - c^2)\eta\xi & a_0\eta^2 + c^2\xi^2 + a^2\zeta^2 & (a_0 - a^2)\eta\zeta \\ (a_0 - b^2)\zeta\xi & (a_0 - a^2)\zeta\eta & a_0\zeta^2 + a^2\eta^2 + b^2\xi^2 \end{vmatrix}.$$

Per isviluppare questo determinante, converrà ridurlo ad elementi binomii, di cui i primi termini siano quelli contenenti a_0, e poscia ordinare per le potenze di a_0. Così si vedrà che il solo coefficiente che non si annulla è quello della prima potenza di a_0, e si otterrà

$$(D) = a_0(b^2c^2\xi^2 + c^2a^2\eta^2 + a^2b^2\zeta^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2.$$

Dunque l'equazione della sestica associata sarà

$$(b^2c^2\xi^2 + c^2a^2\eta^2 + a^2b^2\zeta^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = 0$$

e questa curva si decompone in una conica semplice ed una doppia (circolo di raggio $\sqrt{-1}$, se le coordinate sono cartesiane) entrambe riferite al triangolo polare comune. L'equazione a derivate parziali sarà

$$\Delta^2\Delta^2\left(b^2c^2\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + c^2a^2\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + a^2b^2\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right) = 0,$$

ove Δ^2 è il simbolo di Laplace.

22. Per poter dare la soluzione del problema nel caso che le tre coniche, in cui si scompone la sestica associata, siano affatto qualunque, occorre premettere alcune formole, che richiederebbero calcoli algebrici molto complicati; ma noi li semplificheremo estremamente ricorrendo al calcolo simbolico delle forme ternarie.

Siano due forme ternarie quadratiche in notazione simbolica

$$a_x^2 = a'^2_x = \cdots = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = \sum a_{ik}x_ix_k,$$
$$b_x^2 = b'^2_x = \cdots = (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 = \sum b_{ik}x_ix_k,$$

e richiamiamo pure in notazione simbolica le loro forme invariantive seguenti

$$a_\alpha^2 = (a\,a'\,a'')^2 \qquad u_\alpha^2 = u_{\alpha'}^2 = \cdots = (a\,a'\,u)^2$$

$$b_\alpha^2 = a_\gamma^2 = (a\,a'\,b)^2 \qquad u_\gamma^2 = u_{\gamma'}^2 = \cdots = (a\,b\,u)^2$$

$$a_\beta^2 = b_\gamma^2 = (a\,b\,b')^2 \qquad u_\beta^2 = u_{\beta'}^2 = \cdots = (b\,b'\,u)^2.$$

$$b_\beta^2 = (b\,b'\,b'')^2$$

Segniamo con Δ_b l'operazione differenziale, che si ottiene da b_x^2 quando vi si pone $x_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, ed applichiamo questa operazione alla funzione φ^m, ove

$$\varphi = u_\alpha^2 \tag{38}$$

ed m è un numero qualunque. Si ha

$$\frac{\partial(\varphi^m)}{\partial u_i} = 2\,m\,\varphi^{m-1}\,.\,u_\alpha\,\alpha_i,$$

$$\frac{\partial^2(\varphi^m)}{\partial u_i\,\partial u_k} = 2\,m\,\varphi^{m-1}\,.\,\alpha_i\,\alpha_k + 4\,m\,(m-1)\,\varphi^{m-2}\,u_\alpha\,\alpha_i\,u_{\alpha'}\,\alpha'_k$$

con la quale ultima, si ottiene

$$\Delta_b(\varphi^m) = 2\,m\,\varphi^{m-1}\,b_\alpha^2 + 4\,m\,(m-1)\,\varphi^{m-2}\,.\,u_\alpha\,b_\alpha\,u_{\alpha'}\,b_{\alpha'}\,.$$

Ora è noto (*) che

$$u_\alpha\,b_\alpha\,u_{\alpha'}\,b_{\alpha'} = b_\alpha^2\,u_\alpha^2 - \frac{2}{3}\,a_\alpha^2\,u_\tau^2,$$

(*) Si ha

$$(u_\alpha\,b_{\alpha'} - u_{\alpha'}\,b_\alpha)^2 = 2\,u_\alpha^2\,b_\alpha^2 - 2\,u_\alpha\,b_\alpha\,u_{\alpha'}\,b_{\alpha'}$$

e d'altra parte

$$(u_\alpha\,b_{\alpha'} - u_{\alpha'}\,b_\alpha)^2 = [(u\,b)\,\alpha\,\alpha']^2,$$

e siccome

$$(\alpha\,\alpha'\,x)^2 = \frac{4}{3}\,a_\alpha^2\,a_x^2,$$

ponendo $x = (u\,b)$, si ottiene

$$[(u\,b)\,\alpha\,\alpha']^2 = \frac{4}{3}\,a_\alpha^2\,u_\tau^2;$$

eguagliando i due valori, viene

$$u_\alpha\,b_\alpha\,u_{\alpha'}\,b_{\alpha'} = b_\alpha^2\,u_\alpha^2 - \frac{2}{3}\,a_\alpha^2\,u_\tau^2.$$

quindi viene

$$\Delta_b(\varphi^m) = 2\,m\,(2\,m - 1)\,\varphi^{m-1}\,b_\alpha^2 - \frac{8}{3}\,m\,(m-1)\,\varphi^{m-2}\,a_\alpha^2\,u_\tau^2. \tag{39}$$

Poniamo in questa $b = a$, cioè supponiamo che la forma b_x^2 sia identica alla a_x^2. Allora si ha

$$b_\alpha^2 = a_\alpha^2, \qquad u_\tau^2 = u_\alpha^2 - \varphi,$$

quindi si ottiene

$$\Delta_a(\varphi^m) = \frac{2\,m\,(2\,m+1)}{3}\,\varphi^{m-1}\,a_\alpha^2. \tag{40}$$

C'importano i due casi particolari della (39) relativi ad $m = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, cioè

$$\Delta_b(\varphi\sqrt{\varphi}) = 6\sqrt{\varphi}\,b_\alpha^2 - 2\,\frac{a_\alpha^2\,u_\tau^2}{\sqrt{\varphi}}, \tag{41}$$

$$\Delta_b(\sqrt{\varphi}) = \frac{2}{3}\,\frac{a_\alpha^2\,u_\tau^2}{\varphi\sqrt{\varphi}}. \tag{42}$$

C'importa ancora il caso particolare della (40) per $m = -\frac{1}{2}$, cioè (*)

$$\Delta_a\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right) = 0. \tag{43}$$

23. Riprendiamo le (41), (42) ponendo al posto di a_x^2 la forma

$$a_x^2 + \lambda\,b_x^2,$$

ove λ è un parametro qualunque. Notiamo con Q il discriminante e con Φ il controvariante di questa forma, tenendone presenti gli sviluppi

$$\Phi = u_\alpha^2 + 2\,\lambda\,u_\tau^2 + \lambda^2\,u_\beta^2,$$

$$Q = a_\alpha^2 + 3\,\lambda\,b_\alpha^2 + 3\,\lambda^2\,a_\beta^2 + \lambda^3\,b_\beta^2.$$

(*) Questa formola è ben nota quando φ è posta nella forma canonica, e si usa nella teoria della propagazione del calore nei mezzi anisotropi (v. E. Mathieu, *Théorie du Potentiel*, Paris, Gautier-Villars, 1885).

Allora nelle (41), (42) bisogna porre:

al posto di a_α^2: Q,

» » » b_α^2: $b_\alpha^2 + 2\lambda a_\beta^2 + \lambda^2 b_\beta^2 = \frac{1}{3}\frac{dQ}{d\lambda}$,

» » » u_γ^2: $u_\gamma^2 + \lambda u_\beta^2 = \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{d\lambda}$,

e si ottiene

$$\Delta_b(\Phi\sqrt{\Phi}) = 2\sqrt{\Phi}\frac{dQ}{d\lambda} - 2Q\frac{\frac{d\Phi}{d\lambda}}{2\sqrt{\Phi}},$$

$$\Delta_b(\sqrt{\Phi}) = \frac{2}{3}Q\frac{\frac{d\Phi}{d\lambda}}{2\Phi\sqrt{\Phi}},$$

che scriveremo definitivamente così:

$$\Delta_b(\Phi\sqrt{\Phi}) = -2Q^2\frac{d}{d\lambda}\frac{\sqrt{\Phi}}{Q}, \tag{44}$$

$$\Delta_b(\sqrt{\Phi}) = -\frac{2}{3}Q\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\sqrt{\Phi}}. \tag{45}$$

24. Siano ora tre forme a_x^2, b_x^2, c_x^2, e segniamo con Δ_a, Δ_b, Δ_c le operazioni, che rispettivamente se ne ottengono ponendovi $x_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$. D'altra parte consideriamo la forma

$$a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2$$

e denotiamo con F il suo controvariante e con P il suo discriminante. Possiamo evidentemente applicare a questa forma la (44) ponendovi

ai posti di Δ_b, λ, Q, Φ

rispettivamente Δ_c, μ, P, F,

ed otteniamo

$$\Delta_c(F\sqrt{F}) = -2P^2\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\sqrt{F}}{P},$$

da cui, operando sui due membri con Δ_b, si ricava

$$\Delta_b \Delta_c (F \sqrt{F}) = -2 P^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\Delta_b (\sqrt{F})}{P},$$

ed applicando nel secondo membro la (45) con le analoghe sostituzioni, risulta

$$\Delta_b \Delta_c (F \sqrt{F}) = \frac{4}{3} P^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{1}{\sqrt{F}},$$

che scriveremo così:

$$\Delta_b \Delta_c \left(\frac{F \sqrt{F}}{P^2} \right) = \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{1}{\sqrt{F}}. \tag{46}$$

È questa la formola fondamentale, a cui volevamo pervenire.

25. Integriamo doppiamente i due membri di questa equazione rispetto a λ fra i limiti O e Λ e rispetto a μ fra i limiti O e M per valori reali e positivi di queste variabili. Essendo allora certamente lecita l'inversione del segno $\Delta_b \Delta_c$ con quello di doppia integrazione, si ha

$$\Delta_b \Delta_c \int_0^{\Lambda} \int_0^{M} \frac{F \sqrt{F}}{P^2} d\lambda \, d\mu =$$

$$= \frac{4}{3} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right)_{\substack{\lambda = \Lambda \\ \mu = M}} - \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right)_{\substack{\lambda = \Lambda \\ \mu = 0}} - \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right)_{\substack{\lambda = 0 \\ \mu = M}} + \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right)_{\substack{\lambda = 0 \\ \mu = 0}} \right].$$

Ora, facendo crescere indefinitamente Λ e M, i tre primi termini del secondo membro tendono a zero, mentre il quarto termine tende ad $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$, dove φ denota, come al n.° 22 il controvariante u_α^2. Si ha quindi

$$\Delta_b \Delta_c \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F \sqrt{F}}{P^2} d\lambda \, d\mu = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\varphi}}.$$

Finalmente, applicando ai due membri di questa equazione l'operazione Δ_a ed avendo riguardo alla (43), si ottiene

$$\Delta_a \Delta_b \Delta_c \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F \sqrt{F}}{P^2} d\lambda \, d\mu = 0.$$

Dunque *la funzione*

$$\rho = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F\sqrt{F}}{P^2}\, d\lambda\, d\mu \tag{47}$$

è una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\Delta_a \Delta_b \Delta_c = 0.$$

26. Per applicare il risultato precedente al problema che ci occupa, basta mettere ai posti delle u_1, u_2, u_3 le coordinate x, y, z e supporre che $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ siano le equazioni simboliche delle tre coniche, in cui si spezza la sestica associata.

Per esser certi poi che questa soluzione sodisfa alle altre condizioni richieste, bisogna dimostrare che le derivate quarte di ρ diventano all'origine infinite ed all'infinito infinitesime del 1.° ordine, e che le sue derivate quinte acquistano quivi analoghi valori del 2.° ordine. Evidentemente basta dimostrare siffatte proprietà per la funzione $F\sqrt{F}$. A tal uopo occorre procedere a calcoli alquanto penosi, ed è preferibile svolgerli prima per F^m, ove m sia un numero qualunque, al quale poscia si darà il valore $\frac{3}{2}$ · Conviene inoltre tenere, come più comode, le notazioni u_1, u_2, u_3 invece delle x, y, z.

Per poter notare compendiosamente i risultati di questi calcoli, (nei quali si terrà presente che F è del 2.° grado nelle u, e quindi le sue derivate sono nulle dal 3.° ordine in poi), ponghiamo brevemente

$$a_1 = m(m-1), \qquad a_2 = m(m-1)(m-2), \ldots a_4 = m \ldots (m-4),$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = F_i, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \, \partial u_j} = F_{ij}.$$

Allora, se i, j, h, k, l sono cinque numeri della terna 1, 2, 3, si ha

$$\frac{\partial^4 (F^m)}{\partial u_i \, \partial u_j \, \partial u_h \, \partial u_k} = a_1 F^{m-2} \sum F_{ij} F_{hk} + a_2 F^{m-3} \sum F_{ij} F_h F_k + \\ + a_3 F^{m-4} F_i F_j F_h F_k,$$

$$\frac{\partial^5 (F^m)}{\partial u_i \, \partial u_j \, \partial u_h \, \partial u_k \, \partial u_l} = a_2 F^{m-3} \sum F_{ij} F_{hk} F_l + a_3 F^{m-4} \sum F_{ij} F_h F_k F_l + \\ + a_4 F^{m-5} F_i F_j F_h F_k F_l,$$

dove i sommatori si riferiscono a tutte le combinazioni possibili dello stesso tipo degl'indici.

Ponendovi

$$m = \frac{3}{2}, \quad m - 2 = -\frac{1}{2}, \quad m - 3 = -\frac{3}{2}, \quad m - 4 = -\frac{5}{2},$$

$$m - 5 = -\frac{7}{2},$$

se ne ricava

$$\frac{\partial^4 (F\sqrt{F})}{\partial u_i\, \partial u_j\, \partial u_h\, \partial u_k} = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[a_1 \sum F_{ij} F_{hk} + \frac{a_2}{F} \sum F_{ij} F_h F_k + \frac{a_3}{F^2} F_i F_j F_h F_k \right]$$

$$\frac{\partial^5 (F\sqrt{F})}{\partial u_i\, \partial u_j\, \partial u_h\, \partial u_k\, \partial u_l} = \frac{1}{F} \left[\frac{a_2}{\sqrt{F}} \sum F_{ij} F_{hk} F_l + \frac{a_3}{F\sqrt{F}} \sum F_{ij} F_h F_k F_l + \right.$$

$$\left. + \frac{a_4}{F^2\sqrt{F}} F_i F_j F_h F_k F_l \right].$$

Se ora riflettiamo che, per essere F del 2.° grado nelle u, le F con un solo indice sono del 1.° grado e quelle con due indici sono costanti, ne inferiamo facilmente che le quantità dentro parentesi restano finite tanto all'origine che all'infinito. Quivi dunque le derivate quarte si comportano come $\frac{1}{\sqrt{F}}$ e le quinte come $\frac{1}{F}$. Or queste due funzioni vi hanno appunto il comportamento che si vuole dimostrare.

Ci resta a dover dimostrare un'ultima proprietà, cioè che l'espressione (47) della funzione ρ è reale per tutti i valori reali di x, y, z. Ciò è di un'importanza essenziale per due ragioni. La prima, la più naturale, consiste nella necessità che le funzioni, che debbono dedursi negl'indicati modi dalla ρ, ammettano la rappresentazione meccanica. La seconda risiede nel fatto che, mancando la realtà delle funzioni, che son chiamate ad esprimere le componenti dello spostamento per la deformazione elementare, verrebbe meno la validità del teorema enunciato al n.° 2 e quindi la conferma, che esse sono le sole che convengono al fenomeno meccanico. Infatti la dimostrazione di questo teorema data al n.° 12 si fonda sull'altro, che una forma quadratica essenzialmente positiva (il contropotenziale) non può annullarsi che per valori nulli delle variabili, e questo teorema è circoscritto ai valori reali delle variabili stesse (*).

(*) Cfr. il n.° 40 della precedente Memoria, che si richiama al n.° 12 della presente.

Dimostreremo dunque che *l'integrale* (47) *è sempre reale.* A tal uopo bisogna osservare che le tre coniche, in cui si spezzi la sestica associata possono avere i coefficienti reali o anche complessi. La dimostrazione del teorema sarà diversa nei due casi.

Se le tre forme a_x^2, b_x^2, c_x^2 hanno i coefficienti reali, tenghiamo presente che Π è una forma quadratica essenzialmente positiva fra le sei variabili x_x, y_y, $z_z, \ldots x_y$. Facendovi le sostituzioni (5) del n.° 3, essa diventa una forma quadratica essenzialmente positiva rispetto alle sei espressioni ξu, ηv, $\zeta w, \ldots$ $\xi v + \eta u$ od anche rispetto alle due terne di variabili ξ, η, ζ; u, v, w. Dunque la forma quadratica fra le variabili u, v, w

$$2\,\Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2} u^2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v \, \partial w} v\, w + \cdots$$

è essenzialmente positiva qualunque siano i valori delle variabili ξ, η, ζ, che entrano nei suoi coefficienti. Ciò implica, com'è noto, le condizioni necessarie e sufficienti, che, con le notazioni introdotte al n.° 3, possiamo scrivere così:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad D_{11} > 0. \end{array}\right\} \qquad (a)$$

La prima di queste ineguaglianze ci dice che il primo membro ($= 0$) dell'equazione della sestica associata è essenzialmente positivo, cioè che questa curva è immaginaria. Che cosa avviene quando esso si scompone in tre fattori quadratici a_x^2, b_x^2, c_x^2? Per questo esame bisogna distinguere il caso che queste tre forme siano a coefficienti reali da quello che non lo siano.

Nel primo caso è necessario evidentemente che tutte e tre queste forme siano essenzialmente positive, e quindi sarà pure tale la forma

$$a_x^2 + \lambda\, b_x^2 + \mu\, c_x^2$$

pei valori positivi di λ, μ. Ne segue che il controvariante F di questa è pure una forma quadratica essenzialmente positiva per λ, μ positivi, perchè per essa sussistono le ineguaglianze analoghe alle (a), come può facilmente verificarsi ricorrendo alle proprietà dei determinanti reciproci. Deriva da ciò che il differenziale

$$\frac{F\sqrt{F}}{P^2}\, d\lambda\, d\mu$$

è sempre reale per valori positivi di λ, μ, e quindi ρ è reale.

Passando al secondo caso, supponghiamo che la forma del 6.° ordine si scomponga in tre forme quadratiche con coefficienti complessi. Allora occorre distinguere se queste siano a loro volta irreduttibili o no. In generale, poichè la forma primitiva ha i coefficienti reali, è evidente che, se essa si scompone in un certo modo in fattori irreduttibili, si scomporrà pure nei loro coniugati (intendendo per questi le espressioni, che se ne ottengono cambiando i coefficienti nei loro coniugati). Siccome intanto la scomposizione non può avvenire che in un sol modo (*), i fattori coniugati dovranno coincidere coi primitivi diversamente ordinati, onde segue che questi fattori saranno due a due coniugati e, se sono in numero dispari, ve ne sarà uno reale.

Ciò premesso, sono possibili i seguenti casi:

a) Se i fattori quadratici a_x^2, b_x^2, c_x^2 sono *tutti e tre irreduttibili*, uno di essi sarà reale e gli altri due complessi coniugati. Formando l'integrale ρ, assumiamo come a_x^2 il fattore reale, sicchè b_x^2, c_x^2 saranno coniugati. Allora alla forma

$$a_x^2 + \lambda_1 b_x^2 + \mu_1 c_x^2$$

ottenuta dando a λ, μ i valori positivi particolari $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, corrisponde come sua coniugata la forma

$$a_x^2 + \mu_1 b_x^2 + \lambda_1 c_x^2$$

ottenuta con gli altri valori positivi particolari $\lambda = \mu_1$, $\mu = \lambda_1$. Anche i controvarianti come pure i discriminanti di queste due forme saranno evidentemente coniugati, e perciò ben pure le relative espressioni di $\frac{F\sqrt{F}}{P^2}$. Dunque nel campo d'integrazione (ch'è quello di tutti i valori positivi di λ, μ), ad ogni punto ne corrisponde uno ed un solo, ove l'elemento dell'integrale prende il valore coniugato. Ne segue che ρ è reale.

b) Se fra le tre forme quadratiche ve n'è *una sola riduttibile* a due fattori lineari, questi da una parte e i due fattori quadratici irreduttibili dall'altra dovranno essere coniugati. Dunque il fattore quadratico riduttibile è reale, e la dimostrazione può procedere come nel caso *a*).

c) Se fra le tre forme quadratiche ve ne sono *due sole riduttibili*, la terza, dovendo essere coniugata di sè stessa, sarà reale. I quattro, fattori li-

(*) E. Netto. *Vorlesungen über Algebra*, § 312.

neari, dovendo essere coniugati a coppie, il loro prodotto si può ridurre a due fattori quadratici reali. Dunque la decomposizione della sestica può anche farsi in tre fattori quadratici reali, e si ricade nel primo caso.

d) Se infine i tre fattori quadratici sono *tutti riduttibili*, i sei fattori lineari sono due a due coniugati, e, così accoppiandoli, si ottiene una scomposizione della sestica in tre fattori quadratici reali, ricadendo pure nel primo caso.

Così il teorema è dimostrato.

§ IV. — Applicazione ai corpi isotropi.

28. Abbiamo veduto che per questi corpi l'equazione della sestica associata è

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^3 = 0.$$

Si ha quindi

$$a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

e dobbiamo prendere il controvariante ed il discriminante della forma

$$(1 + \lambda + \mu)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Essi sono:

$$F' = (1 + \lambda + \mu)^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

$$D = (1 + \lambda + \mu)^3,$$

e questi forniscono la soluzione dell'equazione a derivate parziali $(D) = 0$:

$$\rho = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\lambda\, d\mu}{(1 + \lambda + \mu)^3} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Tornando a scrivere x, y, z invece di u_1, u_2, u_3 ed omettendo il fattore $\frac{1}{2}$, possiamo assumere

$$\rho = r^3,$$

ove r denota la distanza fra il punto (x, y, z) e l'origine.

Per ottenere le ξ_1, η_1, ζ_1, richiamiamo le espressioni delle D_{rs} calcolate al n.° (19), e con queste otteniamo

$$\begin{vmatrix} D_{22} & D_{23} \\ D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} = B\,[A\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (A - B)\,\xi^2]\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,,$$

$$\begin{vmatrix} D_{23} & D_{21} \\ D_{33} & D_{31} \end{vmatrix} = - B\,(A - B)\,\xi\,\eta\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

$$\begin{vmatrix} D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{vmatrix} = - B\,(A - B)\,\xi\,\zeta\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

da cui, ponendo per ξ, η, ζ i segni di derivazione, rammentando le eguaglianze

$$\frac{\partial^2 r^3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r^3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r^3}{\partial z^2} = 12\,r, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$$

e tralasciando il fattore comune $12\,B$, otteniamo

$$\xi_1 = \frac{2\,A}{r} - (A - B)\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \qquad \eta_1 = - (A - B)\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y},$$

$$\zeta_1 = - (A - B)\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\,.$$

Richiamiamo l'espressione

$$\varrho\,(1) = (A - 2\,B)\,\Theta\,\alpha + 2\,B\,\frac{d\,\xi_1}{d\,n} + B\,(T_3\,\beta - T_2\,\gamma)$$

ove

$$\Theta = \frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\zeta_1}{\partial\,z}\,,$$

$$T_1 = \frac{\partial\,\zeta_1}{\partial\,y} - \frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,z}\,, \qquad T_2 = \frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,z} - \frac{\partial\,\zeta_1}{\partial\,x}\,, \qquad T_3 = \frac{\partial\,\eta_1}{\partial\,x} - \frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,y}$$

ed α, β, γ sono i coseni direttori della normale n rivolta verso quella parte del corpo, da cui proviene la pressione che si considera. Riferiamo questa espressione di ϱ alla pressione, che si esercita sulla superficie della sfera σ di raggio r con centro all'origine, proveniente dal suo interno, sicchè per la normale n dobbiamo prendere $-r$, e per α, β, γ i valori

$$\alpha = - \frac{x}{r}\,, \qquad \beta = - \frac{y}{r}\,, \qquad \gamma = - \frac{z}{r}\,.$$

Abbiamo inoltre

$$\Theta = 2\,A\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - (A - B)\,\frac{\partial \frac{2}{r}}{\partial x} = -2\,B\,\frac{x}{r^3}$$

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = 2\,A\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -2\,A\,\frac{z}{r^3}, \qquad T_3 = -2\,A\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = 2\,A\,\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{d\,\xi_1}{d\,n} = -\frac{d\,\xi_1}{d\,r} = -2\,A\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} + (A - B)\left[\frac{\partial^3 r}{\partial x^3}\,\frac{x}{r} + \frac{\partial^3 r}{\partial x^2\,\partial y}\,\frac{y}{r} + \frac{\partial^3 r}{\partial x^2\,\partial z}\,\frac{z}{r}\right]$$

e, svolti i calcoli, viene

$$\frac{d\,\xi_1}{d\,n} = \frac{A + B}{r^2} + (A - B)\,\frac{x^2}{r^4}\,.$$

Sostituendo, si ha

$$\varrho\,(1) = 2\,B\,(A - 2\,B)\,\frac{x^2}{r^4} + 2\,B\left[\frac{A + B}{r^2} + (A - B)\,\frac{x^2}{r^4}\right] - 2\,A\,B\,\frac{y^2 + z^2}{r^4} =$$

$$= \frac{2\,B}{r^2}\left[B + 3\,(A - B)\,\frac{x^2}{r^2}\right].$$

Dovendo integrare questa espressione per tutta la superficie della sfera, poniamo

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\,, \qquad d\,\sigma = r^2 \operatorname{sen}\theta\,d\,\theta\,d\,\varphi$$

ed otteniamo

$$\int_\sigma \varrho\,(1)\,d\,\sigma = 2\,B\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [B + 3\,(A - B) \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\varphi] \operatorname{sen}\theta\,d\,\theta\,d\,\varphi\,;$$

quindi, per le eguaglianze

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\,\theta\,d\,\varphi = 4\,\pi\,, \qquad \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\,d\,\theta = \frac{4}{3}\,, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\,\varphi = \pi\,,$$

viene

$$\int_\sigma \varrho\,(1)\,d\,\sigma = 2\,B\,[4\,\pi\,B + 4\,(A - B)\,\pi] = 8\,\pi\,A\,B.$$

Questo integrale dà il valore della forza sollecitante applicata all'origine e diretta nel senso positivo dell'asse delle x. Siccome vogliamo che questa forza sia l'unità, dobbiamo dividere le precedenti espressioni di ξ_1, η_1, ζ_1 per $8\pi A B$ e, ciò fatto, seguiteremo a denotarle con gli stessi segni. Le $\xi_2, \ldots \zeta_3$ si possono ottenere per analogia. Così si perviene alle formole, che esprimono la deformazione elementare, cioè

$$4\pi B\,\xi_1 = \frac{1}{r} - \frac{A-B}{2A}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \qquad 4\pi B\,\eta_3 = 4\pi B\,\zeta_2 = -\frac{A-B}{2A}\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z},$$

$$4\pi B\,\eta_2 = \frac{1}{r} - \frac{A-B}{2A}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \qquad 4\pi B\,\zeta_1 = 4\pi B\,\xi_3 = -\frac{A-B}{2A}\frac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial x},$$

$$4\pi B\,\zeta_3 = \frac{1}{r} - \frac{A-B}{2A}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}, \qquad 4\pi B\,\xi_2 = 4\pi B\,\eta_1 = -\frac{A-B}{2A}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}.$$

Sostituendo questi valori nelle formole generali per le tre deformazioni tipiche qui date al § 11, si giunge alle stesse espressioni per le deformazioni tipiche dei corpi isotropi, che abbiamo ottenuto con altro metodo nella Parte terza della precedente Memoria.

Palermo, Agosto 1903.

Mémoire sur les congruences linéaires aux différences finies.

(Par ALF GULDBERG, *à Christiania.)*

Dans un mémoire important (*) M. S. PINCHERLE a exposé les bases d'une théorie des formes linéaires aux différences finies toute analogue à la théorie des formes algébriques.

Nous nous proposons dans la présente communication de donner un petit supplément aux résultats de M. PINCHERLE en établisant des bases d'une théorie des congruences linéaires aux différences finies toute analogue à la théorie des congruences algébriques.

Dans un premier chapitre nous montrons d'abord qu'une forme linéaire aux différences finies à coefficients entiers suivant un module prémier est subie aux mêmes lois qu'un nombre entier.

En particulier il existe pour les formes linéaires aux différences finies, suivant un module premier, un algorithme tout à fait analogue à l'algorithme d'EUCLIDE pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés.

Dans le second chapitre, nous définissons ce qu'on comprend par une congruence linéaire aux différences finies, suivant un double module; de cette définition découle immédiatement les propositions les plus élémentaires d'une telle congruence.

Puis nous introduissons les notions d'un « système complet de restes » suivant un double module et de la « solution » d'une congruence linéaire aux différences finies du n^{ieme} degré et nous finissons par donner une généralisation du théorème de FERMAT.

(*) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, S. V, t. V, p. 87.

CHAPITRE I.

I. Soit donnée la forme linéaire aux différences finies à coefficients entiers

$$F\,y_x = a_n\,y_{x+n} + a_{n-1}\,y_{x+n-1} + \cdots + a_1\,y_{x+1} + a_0\,y_x\,.$$

En écrivant avec CASORATI (*) symboliquement $\theta\,y_x$ pour y_{x+1}, $\theta^2\,y_x$ pour y_{x+2} etc., nous pouvons écrire la forme linéaire $F\,y_x$ sous la forme

$$F\,y_x = (a_n\,\theta^n + a_{n-1}\,\theta^{n-1} + \cdots + a_1\,\theta + a_0)\,y_x = \sum_0^n{}_i\,a_i\,\theta^i\,y_x\,.$$

Nous comprenons avec M. PINCHERLE par le produit de deux formes linéaires $F\,y_x = \sum_0^n{}_i\,a_i\,\theta^i\,y_x$ et $G\,y_x = \sum_0^m{}_i\,b_i\,\theta^i\,y_x$ une nouvelle forme linéaire $H\,y_x$ définit par l'équation:

$$F\,y_x\,.\,G\,y_x = \sum_0^n{}_i\,a_i\,\theta^i\,y_x\,.\,\sum_0^m{}_i\,b_i\,\theta^i\,y_x = \sum_0^n{}_i\,a_i\,\theta^i\,.\,\sum_0^m{}_i\,b_i\,\theta^i\,y_x = H\,y_x\,.$$

Nous aurons de plus

$$a_n\,\theta^n + a_{n-1}\,\theta^{n-1} + \cdots + a_1\,\theta + a_0 = a_n\,(\theta - m_1)\,(\theta - m_2)\ldots(\theta - m_n),$$

ou les m sont les n racines de l'équation algébrique

$$m^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\,m^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\,m^{n-2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\,m + \frac{a_0}{a_n} = 0.$$

II. Considérons une forme linéaire à coefficients entiers

$$F\,y_x = \sum_0^n{}_i\,a_i\,\theta^i\,y_x$$

et examinons les propriétés d'une telle forme linéaire suivant un module premier p.

Nous disons que deux formes linéaires

$$F\,y_x = \sum_0^n{}_i\,a_i\,\theta^i\,y_x \quad \text{et} \quad G\,y_x = \sum_0^m b_i\,\theta^i\,y_x$$

(*) *Ann. di Matematica,* S. II, T. IX, pag. 10.

sont congrus suivant le module premier p, lorsque dans la différence $F y_x - G y_x$ tous les coefficients de y_x, $y_{x+1}, \ldots y_{x+r}$ (r étant le plus grand des deux nombres n et m) sont divisibles par p; c'est à dire lorsqu'on a

$$F y_x - G y_x = p \,.\, \sum_0^r {}_i \, c_i \, \theta^i \, y_x ,$$

équation que nous exprimons par la formule

$$F y_x \equiv G y_x \pmod{p}.$$

De cette définition d'une congruence linéaire il s'ensuit que les propositions de la théorie des congruences arithmétiques se retrouvent immédiatement. Si dans la forme linéaire $F y_x$ n est l'ordre de la valeur successive la plus haute, dont le coefficient a_n ne soit pas divisible par p, on dit que $F y_x$ est de l'ordre n.

D'après cette définition, deux formes linéaires, qui sont congrues suivant le module p, ont le même ordre, à supposer qu'elles ne sont pas congrues à zero suivant le module p.

Soit n_1 l'ordre de la forme linéaire $F y_x$ et n_2 l'ordre de la forme linéaire $G y_x$, l'ordre du produit $F y_x \,.\, G y_x$ sera $n_1 + n_2$. Il suit de là que, si l'on a

$$F y_x \,.\, G y_x \equiv 0 \pmod{p}$$

il faudra que

$$F y_x \equiv 0 \pmod{p}, \quad \text{ou} \quad G y_x \equiv 0 \pmod{p}.$$

Soit

$$F y_x \,.\, G y_x \equiv F_1 y_x \,.\, G_1 y_x \pmod{p}$$

et

$$F y_x \equiv F_1 y_x \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

On aura :

$$G y_x \equiv G_1 y_x \pmod{p}.$$

III. Parmi le nombre infini de formes linéaires $F y_x = \sum_0^n {}_i \, a_i \, \theta^i \, y_x$ d'ordre n, il y a un nombre fini de formes qui sont *incongrus* suivant le module p. Ce nombre se déduit par la remarque, que les coefficients a_0, $a_1, \ldots a_{n-1}$ dans la forme $F y_x \pmod{p}$ passent par les p nombres 0, 1, 2,... $p-1$, le coefficient a_n seulement par les $p-1$ nombres 1, 2,... $p-1$.

Le nombre des formes linéaires d'ordre n incongrues suivant le module p est $p^n(p-1)$.

Si les trois formes linéaires $F y_x$, $G y_x$, $H y_x$ satisfont à la congruence

$$F y_x \equiv G y_x \,.\, H y_x \pmod{p}$$

nous disons que les formes $G y_x$ et $H y_x$ sont *diviseurs* ou *facteurs*, suivant le module p, de la forme $F y_x$, ou que la forme $F y_x$ est *divisible*, suivant le module p, par les formes $G y_x$ et $H y_x$.

En particulier, on voit que toute forme $F y_x$ est divisible par les $p-1$ nombres $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ d'un système complet de restes premiers avec p. Car on peut toujours trouver un nombre x tel que la congruence

$$a_i x \equiv 1 \pmod{p}$$

soit satisfait. On aura donc pour toute forme linéaire $F y_x$

$$F y_x \equiv a_i x \,.\, F y_x \pmod{p}.$$

Nous considérons les $p-1$ nombres $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ comme des *unités*. Entre un système des formes linéaires *associées*

$$a_1 F y_x, \; a_2 F y_x, \ldots a_{p-1} F y_x$$

on appelle *principale* la forme, dans laquelle le coefficient de la valeur successive la plus haute est congru à 1 suivant le module p.

IV. L'analogie de l'algorithme d'Euclide pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés se retrouve facilement.

Soient $F_1 y_x$ et $F_2 y_x$ deux formes linéaires d'ordre n et m:

$$F_1 y_x = \sum_0^n{}_i\, a_i\, \theta^i\, y_x\,; \quad F_2 y_x = \sum_0^m{}_i\, b_i\, \theta^i\, y_x\,.$$

Exécutons sur les polynomes F_1 et F_2 l'opération par laquelle on détermine le plus grand commun diviseur, en négligeant les termes multipliés par p et en ayant soin d'ajouter à chaque reste un polynome de la forme $p\, G y_x$. Si l'on suppose, pour fixer les idées, que l'ordre de $F_1 y_x$ ne soit pas inférieur à celui de $F_2 y_x$, on aura cette suite de congruences

$$\left.\begin{array}{l} F_1 y_x \equiv F'_1 y_x \,.\, F_2 y_x + F_3 y_x \\ F_2 y_x \equiv F'_2 y_x \,.\, F_3 y_x + F_4 y_x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_{r-2} y_x \equiv F'_{r-2} y_x \,.\, F_{r-1} y_x + F_r y_x \\ F_{r-1} y_x = F'_{r-1} y_x \,.\, F_r y_x \end{array}\right\} \text{mod. } p.$$

La forme lineaire $F_r y_x$ est donc le plus grand commun diviseur suivant le module p des deux formes linéaires $F_1 y_x$ et $F_2 y_x$. En particulier, si le plus grand commun diviseur $F_r y_x$ de deux formes linéaires données $F_1 y_x$ et $F_2 y_x$ est d'ordre zéro, nous disons que $F_1 y_x$ et $F_2 y_x$ sont *premières* l'une avec l'autre ou admettent point de diviseur commun.

On démontrera facilement le théorème:

Soient les deux formes linéaires $F_1 y_x$ et $F_2 y_x$ premières l'une avec l'autre, et soit $F y_x$ une forme linéaire quelconque, la forme $F y_x$ est donc divisible par tout commun diviseur du produit $F_1 y_x \,.\, F y_x$ et $F_2 y_x$.

Corollaire: Si les formes linéaires $F_1 y_x$ et $F y_x$ n'admettent point de diviseur commun avec la forme $F_2 y_x$, le produit $F_1 y_x \,.\, F y_x$ n'admet pas non plus de diviseur commun avec la forme $F_2 y_x$.

V. Une forme linéaire $F y_x$ sera dite *irréductible* suivant le module premier p, si elle n'est pas divisible, suivant ce module, par aucune forme linéaire d'un ordre inférieur au sien, excepté les unités.

Théorème: *Si une forme linéaire principale $F y_x$, non congrue à zero suivant le module p, n'est pas irréductible, elle sera décomposable d'une seule manière en facteurs principaux irréductibles.*

La démonstration de ce théorème se fait immédiatement.

CHAPITRE II.

I. Nous avons maintenant vu une forme linéaire $F y_x$ suivant un module premier p pour les propositions élémentaires sur les nombres entiers se retrouver complétement. Nous exposerons maintenant quelques propositions sur les congruences des formes linéaires suivant un double module.

Soient données deux formes linéaires

$$F\,y_x = \sum_0^n{}_i\, a_i\,\zeta^i\,y_x \quad \text{et} \quad G\,y_x = \sum_0^m{}_i\, b_i\,\theta^i\,y_x,$$

le fait que la forme $F\,y_x$ est divisible suivant le module p par la forme $G\,y_x$ s'exprimera par la formule

$$F\,y_x \equiv 0 \ (\text{mod. } p \,.\, G\,y_x),$$

ce qui représente la congruence

$$F\,y_x \equiv F_1\,y_x \,.\, G\,y_x \ (\text{mod. } p).$$

D'une façon analogue la congruence

$$F_1\,y_x \equiv F_2\,y_x \ (\text{mod. } p \,.\, G\,y_x)$$

signifie que

$$F_1\,y_x \equiv F_3\,y_x \,.\, G\,y_x + F_3\,y_x \ (\text{mod. } p).$$

De cette définition d'une congruence linéaire suivant un double module $p \,.\, G\,y_x$ resultent immédiatement les propositions élémentaires de la théorie des congruences arithmetiques.

II. Si $F\,y_x$ est une forme linéaire quelconque et $G\,y_x$ une forme linéaire d'ordre n, on aura une cougruence

$$F\,y_x \equiv F_2\,y_x \,.\, G\,y_x + F_1\,y_x \ (\text{mod. } p)$$

où $F_1\,y_x$ est d'un ordre inférieur à celui de $G\,y_x$. La forme générale de $F_1\,y_x$ sera :

$$F_1\,y_x = a_{n-1}\,y_{x+n-1} + a_{n-2}\,y_{x+n-2} + \cdots + a_1\,y_{x+1} + a_0\,y_x$$

chacun des coefficients $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ étant susceptible de recevoir p valeurs différentes, par exemple: $0, 1, 2, \ldots, p-1$. La forme $F_1\,y_x$ peut avoir p^n valeurs distincts. Ces p^n expressions constituent un *système complet de restes* suivant le double module p, $G\,y_x$.

Lemme: Si l'on multiplie les termes d'un système complet de restes, suivant le double module p, $G\,y_x$:

$$F_1\,y_x,\ F_2\,y_x, \ldots,\ F_{p^n}\,y_x \tag{1}$$

par une forme quelconque $F y_x$ première avec $G y_x$, les produits obtenues

$$F y_x \,.\, F_1 y_x,\ F y_x \,.\, F_1 y_x, \ldots,\ F y_x \,.\, F_{p^n} y_x \tag{2}$$

constituent de nouveau un system complet de restes, suivant le double module p, $G y_x$.

En effet, si les p^n formes (2) ne constituent pas un système complet de restes, suivant le double module, on aura:

$$F y_x \,.\, F_i y_x \equiv F y_x \,.\, F_j y_x \pmod{p \,.\, G y_x}$$

puisque $F y_x$ et $G y_x$ n'admettent pas de diviseur commun, on aura:

$$F_i y_x \equiv F_j y_x \pmod{p \,.\, G y_x}$$

ce qui est impossible.

III. Soient $F_0 y_x$, $F_1 y_x, \ldots$, $F_n y_x$ des formes linéaires quelconques, et ne soit pas $F_n y_x$ divisible par $G y_x$ la formule

$$F_n y_x \,.\, [F y_x]^n + F_{n-1} y_x\, [F y_x]^{n-1} + \cdots +$$
$$+ F_1 y_x \,.\, F y_x + F_0 y_x \equiv 0 \pmod{p \,.\, G y_x}$$

s'appellera une congruence du n.*ieme* degré. On appelle solutions de cette congruence les diverses valeurs de $F y_x$ rendant le premier membre divisible par $G y_x$ suivant le module p. De cette definition suit immédiatement la proposition:

La congruence du premier degré

$$F_1 y_x \,.\, F y_x \equiv F_0 y_x \pmod{p \,.\, G y_x}$$

a toujours une solution, si $F_1 y_x$ est premier avec $G y_x$.

IV. Théorème: *Si l'on désigne par $\varphi(G y_x)$ le nombre des formes linéaires premières avec $G y_x$ parmi un système complet de restes suivant le double module p, $G y_x$, on aura:*

$$\varphi(G y_x) = p^n \left(1 - \frac{1}{p^{n_1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{n_2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^{n_q}}\right)$$

où n est l'ordre de $G y_x$, et n_1, $n_2, \ldots$, n_q sont les ordres des facteurs irréductibles principaux, suivant le module p, de la forme $G y_x$.

Soient $F_1 y_x$, $F_2 y_x, \ldots$ tous les diviseurs principaux, suivant le module p, de la forme $G y_x$:

$$G y_x \equiv F_1 y_x . G_1 y . \alpha \,(\text{mod.}\, p), \quad G y_x \equiv F_2 y_x . G_2 y_x . \alpha \,(\text{mod.}\, p) \ldots$$

Les formes $G_1 y_x$, $G_2 y_x$ désignent donc aussi tous les diviseurs principaux, suivant le module p, de la forme $G y_x$, α est une unité. Divisons toute les p^n formes $F_i y_x$, qui constituent un système complet de restes, suivant le double module p, $G y_x$, en autant de groupes qu'il y a de diviseurs principaux de $G y_x$. Mettons maintenant toutes les formes $F_i y_x$, qui avec $G y_x$ admettent $F_1 y_x$ comme plus grand diviseur, suivant le module p, dans un groupe. Ce nombre des formes $F y_x$ est évidemment $\varphi\,(G_1 y_x)$. Mettons analogue dans un second groupe toutes les formes $F y_x$, qui avec $G y_x$ admettent $F_2 y_x$ comme le plus grand commun diviseur. Ce nombre des formes $F y_x$ est $\varphi\,(G_2 y_x)$. En continuant ainsi on aura distribué toutes les formes $F y_x$ en groupes avec $\varphi\,(G_i y_x)$ formes, dans chaque groupe, on aura donc

$$\Sigma\, \varphi\,(G_i y_x) = p^n.$$

Soit $G y_x$ congru suivant le module p d'une forme $F y_x$ irréductible d'ordre n, on aura:

$$\varphi\,(1) + \varphi\,(F y_x) = p^n$$

mais

$$\varphi\,(1) = p^0 = 1.$$

On aura ainsi

$$\varphi\,(G y_x) = \varphi\,(F y_x) = p^n - 1 = p^n\left(1 - \frac{1}{p^n}\right).$$

Soit maintenant la forme $G y_x$ congru, suivant le module p, au produit de deux formes irréductibles: $F_1 y_x . F_2 y_x$ des ordres n_1 et n_2, on aura:

$$\varphi\,(1) + \varphi\,(F_1 y_x) + \varphi\,(F_2 y_x) + \varphi\,(F_1 y_x . F_2 y_x) = p^{n_1+n_2}.$$

D'après ce qui precède on a:

$$\varphi\,(1) + \varphi\,(F_1 y_x) = p^{n_1}$$

$$\varphi\,(F_2 y_x) = p^{n_2} - 1.$$

Il en résulte:

$$\varphi\,(G y_x) = \varphi\,(F_1 y_x . F_2 y_x) = p^{n_1+n_2}\left(1 - \frac{1}{p^{n_1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{n_2}}\right).$$

En continuant ainsi, on aura le théorème cité.

V. Théorème: *Soit $F y_x$ une forme linéaire, première avec $G y_x$, d'un système complet de restes, suivant le double module $p \,.\, G y_x$, on aura:*

$$F y_x^{\varphi(G y_x)} \equiv y_x \; (\text{mod. } p \,.\, G y_x).$$

Si l'on met dans le produit $F y_x \,.\, F' y_x$ pour la forme $F' y_x$ les $\varphi(G y_x)$ formes: $F_1 y_x, F_2 y_x, \ldots, F_{\varphi(G y_x)} y_x$ premières avec $G y_x$ d'un système complet de restes, suivant le double module p, $G y_x$, on aura de nouveau, $\varphi(G y_x)$ formes, premières avec $G y_x$, d'un système complet de restes, suivant le double module p, $G y_x$. Nous aurons donc

$$\left.\begin{array}{r} F y_x \,.\, F'_1 y_x \equiv F_1 y_x \\ F y_x \,.\, F'_2 y_x \equiv F_2 y_x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F y_x \,.\, F'_{\varphi(G y_x)} y_x \equiv F_{\varphi(G y_x)} y_x \end{array}\right\} \text{mod. } (p \,.\, G y_x)$$

ou les formes $F'_1 y_x, F'_2 y_x, \ldots, F'_{\varphi(G y_x)} y_x$ désignent les formes $F_1 y_x, F_2 y_x, \ldots, F_{\varphi(G y)_x} y_x$, mais dans un autre ordre. En posant le produit: $F_1 y_x \,.\, F_2 y_x, \ldots, F_{\varphi(G y_x)} y_x = P y_x$, on aura par la multiplication de cette suite de congruences:

$$F y_x^{\varphi(G y_x)} \,.\, P y_x \equiv P y_x \; (\text{mod. } p \,.\, G y_x)$$

puisque la forme $P y_x$ est première avec $G y_x$, on aura:

$$F y_x^{\varphi(G y_x)} \equiv y_x \; (\text{mod. } p \,.\, G y_x).$$

En particulier, si la forme $G y_x$ est une forme irréductible d'ordre n, on aura:

$$F y_x^{p^n - 1} \equiv y_x \; (\text{mod. } p \,.\, G y_x)$$

ce qui est la généralisation du théorème de Fermat.

VI. Dans ce qui précède nous avons éssayé d'exposer quelques propositions d'une théorie des congruences linéaires aux différences finies. En s'appuyant sur ces remarques on pourra sans grand difficulté développer les analogies ultérieures qui existent entre la théorie des congruences linéaires aux différences finies et les théories des congruences algébriques et arithmétiques.

Sopra alcune equazioni differenziali lineari riducibili.

(*Di* Carlo Bigiavi, *a Firenze.*)

---

1. *Le equazioni differenziali lineari, a coefficienti razionali ed aventi soltanto punti singolari che ammettono l'equazione determinante, sono riducibili allorquando tre soli dei loro punti singolari sono critici per gl'integrali e nell'intorno di ciascuno di questi tre punti critici si può determinare un sistema d'integrali particolari distinti i quali, girando colla variabile attorno al punto critico in modo che esso rimanga sempre alla sinistra di chi percorre il cammino, subiscono una sostituzione che per il 1.° punto critico sia eguale all'inversa di quella del 2.° moltiplicata per la sostituzione*

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon \end{Bmatrix}$$

e per il 3.° abbia la forma

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta}{\varepsilon} & 0 & \dots & \frac{1}{\varepsilon} \end{Bmatrix},$$

essendo ε, δ *due costanti finite, delle quali la prima sempre differente da zero.*

Sia

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

un'equazione differenziale lineare d'ordine n che soddisfa alle condizioni dell'enunciato, e siano a, b, c i tre punti critici, che supporremo tutti a distanza finita.

Nel caso di $\delta = 0$ il teorema è subito dimostrato, giacchè, essendo $\omega = \frac{\log \varepsilon}{2\pi i}$, possiamo cambiare nell'equazione data la funzione incognita ponendo

$$y = (x - b)^{\omega} (x - c)^{-\omega} z.$$

Si ottiene in tal modo un'equazione in z sempre a coefficienti razionali e per la quale c non è più punto critico. Quest'equazione, che possiede i due soli punti critici a, b, è di quelle dette dell'Halphen, che non solo sono riducibili, ma che si possono considerare come completamente integrabili (*).

Supponendo dunque δ differente da zero, consideriamo un punto α del piano che non sia singolare per l'equazione e un circolo C di centro α che non contenga nel suo interno alcun punto singolore dell'equazione. Essendo x un punto situato all'interno di C, si possono sempre determinare tre cammini chiusi D_a, D_b, D_c che abbiano principio e fine in x, che all'infuori di x non abbiano alcun altro punto a comune e che contengano ciascuno nel proprio interno soltanto il punto critico indicato dal rispettivo indice. Variando x con continuità all'interno di C, possiamo far variare con continuità i tre cammini D_a, D_b, D_c in modo che conservino tutte le proprietà ora enunciate. Percorrendo successivamente questi tre cammini a partire da x in modo che ciascuno dei punti a, b, c si trovi sempre alla sinistra di chi percorre il rispettivo cammino, si viene ad eseguire un giro chiuso attorno a tutti i tre punti a, b, c.

Per l'enunciato del teorema possiamo sempre determinare un sistema di n integrali particolari distinti, definiti all'interno di C da sviluppi in serie secondo le potenze intere e crescenti di $x - \alpha$, e tali che percorrendo colla variabile il cammino D_c nel senso indicato subiscano la sostitu-

(*) Vedi Jordan: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* Tome troisième, numéro 170, Gauthier-Villars et Fils, Paris 1896.

zione

$$K=\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta}{\varepsilon} & 0 & \dots & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

essendo ε, δ due costanti differenti da zero.

Denotando con H e T le due sostituzioni

$$H=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

si ha

$$K=H^{-1}\,T.$$

Per gli n integrali scelti nel modo ora indicato notiamo che, se S è la sostituzione che essi subiscono percorrendo colla variabile il cammino D_a, sarà $S'=\Sigma\, S^{-1}\,\Sigma^{-1}\,H$ quella che subiranno percorrendo il cammino D_b, essendo Σ una determinata sostituzione d'ordine n. Percorrendo successivamente colla variabile i tre cammini D_a, D_b, D_c, ossia girando attorno ai tre punti critici a, b, c, ogni integrale dell'equazione deve riprodursi. Perciò avremo

$$S\,S'\,K=S\,\Sigma\,S^{-1}\,\Sigma^{-1}\,H\,K=S\,\Sigma\,S^{-1}\,\Sigma^{-1}\,T=1$$

e quindi

$$T\,S=\Sigma\,S\,\Sigma^{-1},$$

da cui risulta che le due sostituzioni S e $T\,S$ sono trasformate l'una dell'altra.

Giunti a questo punto si può completare facilmente la dimostrazione del teorema ricorrendo al seguente lemma, di cui ho dato la dimostrazione in altro lavoro (*).

(*) Vedi BIGIAVI: *Sopra una classe di equazioni differenziali lineari riducibili.* Annali di Matematica, Serie II, Tomo XIX.

Essendo S una sostituzione lineare d'ordine n e T un'altra sostituzione d'ordine n ed espressa da

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \delta & 0 & \dots & 1 \end{Bmatrix},$$

ove δ è una costante diversa da zero, se S e TS sono trasformate l'una dell'altra, qualunque potenza di S ha eguale a zero il termine della prima linea e dell'ultima colonna.

Da esso risulta infatti che, percorrendo colla variabile il cammino D_a 1^a, 2, $3, \dots, h, \dots$ volte, l'integrale y_1 si trasforma in altre funzioni, che denoteremo con y_{11}, y_{12}, $y_{13}, \dots, y_{1h}, \dots$, che sono anch'esse integrali dell'equazione e che possono eguagliarsi ad espressioni lineari a coefficienti costanti dei soli $n-1$ integrali $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Perciò le infinite funzioni y_1, y_{11}, $y_{12}, \dots$, non sono tutte fra loro linearmente indipendenti, ma di tali ve ne può essere soltanto un numero inferiore o tutt'al più eguale ad $n-1$. Siano ad esempio le prime m, cioè y_1, y_{11}, .., y_{1m-1} fra di loro linearmente indipendenti, essendo naturalmente $m \leqq n-1$, e sia y_{1m} esprimibile mediante la relazione lineare

$$y_{1m} = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_{11} + \lambda_3 y_{12} + \dots + \lambda_m y_{1m-1},$$

in cui le λ sono costanti, delle quali la prima λ_1 deve, come si può vedere facilmente, essere differente da zero.

Denotando le funzioni y_1, y_{11}, y_{12}, .., y_{1m-1} rispettivamente con z_1, z_2, $z_3, \dots, z_m$ e con $[z_1]^a$, $[z_2]^a$, $[z_3]^a, \dots, [z_m]^a$ ciò che esse divengono dopo che la variabile ha percorso il cammino D_a, abbiamo

$$[z_1]^a = z_2,\ [z_2]^a = z_3,\ \dots,\ [z_{m-1}]^a = z_m,$$
$$[z_m]^a = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_m z_m.$$

Queste m relazioni, le quali ci fanno conoscere la sostituzione

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_m \end{Bmatrix}$$

che subiscono gl'integrali $z_1, z_2, \ldots, z_m$ quando si percorre colla variabile il cammino D_a, ci permettono di determinare con operazioni algebriche un'espressione lineare t a coefficienti costanti delle funzioni z che si riproduca, all'infuori di un fattore costante k differente da zero, quando la variabile fa il giro D_a. Una tale funzione t, che è pure un integrale dell'equazione, potendo come le z eguagliarsi ad un'espressione lineare a coefficienti costanti di $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, diviene $\frac{t}{\varepsilon}$ quando colla variabile si fa il giro D_c. Essa quindi dopo il giro D_b deve trasformarsi in $\frac{t\varepsilon}{k}$, e ciò perchè deve riprodursi quando vengono percorsi successivamente i tre cammini D_a, D_b, D_c.

La funzione $q = -\frac{t'}{t}$ è razionale e l'equazione di 1.° ordine $y' + q\,y \quad 0$ ammette per integrale la funzione t, che è pure integrale dell'equazione data, la quale è quindi riducibile. *c. d. d.*

2. Le equazioni che soddisfano alle condizioni esposte nell'enunciato del teorema che abbiamo dimostrato possono considerarsi come completamente integrabili. Infatti esse ammettono sempre un integrale che può eguagliarsi ad una espressione della forma

$$t = (x - a)^{\rho}\,(x - b)^{\sigma}\,(x - c)^{\theta}\,Q\,,$$

nella quale ρ, σ, θ sono radici, la prima dell'equazione determinante relativa ad a, la seconda di quella relativa a b e la terza di quella relativa a c e Q è una funzione razionale sempre finita e differente da zero nei punti a, b, c. Dovendo poi l'integrale t riprodursi, all'infuori di fattori costanti che hanno per prodotto l'unità, quando x percorre D_a, D_b, D_c, se ne conclude che $\rho + \sigma + \theta$ deve essere un numero reale ed intero, e ciò anche perchè t è una funzione monodroma nell'intorno del punto ∞. Con questi dati si può giungere a forza di tentativi a determinare la funzione t.

Una volta noto l'integrale t, che, trasformandosi in $\frac{t}{\varepsilon}$ quando la variabile percorre il cammino D_c, può prendersi per uno degl'integrali $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, y_i ad es., si faccia nell'equazione

$$y = y_i \int u\,d\,x.$$

Si ottiene in tal modo un'equazione d'ordine $n - 1$ in u, pure a coefficienti razionali ed aventi soltanto come quella data i tre punti critici a, b, c, che ha gli $n-1$ integrali particolari distinti dati all'interno di C dalle espressioni

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_i}\right),\ \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_i}\right),\ldots,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i-1}}{y_i}\right),\ \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i+1}}{y_i}\right),\ldots,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{y_i}\right).$$

Di questi i primi $n-2$ si riproducono quando colla variabile si fa il giro D_c, e l'ultimo viene aumentato dal 1.° moltiplicato per δ, nel caso però che sia $i>1$. Se invece è $i=1$, allora anche l'ultimo integrale è monodromo nell'intorno di c, e l'equazione è di quelle a due soli punti critici dette dell'Halphen, che si possono considerare come completamente integrabili.

Ritornando al caso di $i>1$, possiamo supporre per comodità $i=2$. Allora la sostituzione S d'ordine n che subiscono gl'integrali y_1, $y_2,\ldots$, y_n percorrendo colla variabile il cammino D_a è della forma

$$S=\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & k & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\}$$

essendo le a costanti determinate, e quella S_1 d'ordine $n-1$ che subiranno dopo il medesimo cammino gl'integrali

$$u_1=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right),\ u_2=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_2}\right),\ldots,\ u_{n-1}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_n}{y_2}\right)$$

dell'equazione in u è data da

$$S_1=\left\{\begin{matrix} \frac{a_{11}}{k} & \frac{a_{13}}{k} & \ldots & \frac{a_{1n}}{k} \\ \frac{a_{31}}{k} & \frac{a_{33}}{k} & \ldots & \frac{a_{3n}}{k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{n1}}{k} & \frac{a_{n3}}{k} & \ldots & \frac{a_{nn}}{k} \end{matrix}\right\}.$$

Similmente le sostituzioni S', S'_1 d'ordine n ed $n-1$ che subiscono rispettivamente gl'integrali y ed u quando colla variabile si fa il giro D_b saranno rispettivamente della forma

$$S' = \left\{ \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{matrix} \right\}, \qquad S'_1 = \left\{ \begin{matrix} k\,b_{11} & k\,b_{13} & \dots & k\,b_{1n} \\ k\,b_{31} & k\,b_{33} & \dots & k\,b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k\,b_{n1} & k\,b_{n3} & \dots & k\,b_{nn} \end{matrix} \right\},$$

essendo le b costanti determinate. Denotando con

$$\left\{ \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{matrix} \right\}$$

la sostituzione $S^{-1} H$, sarà evidentemente

$$S_1^{-1} = \left\{ \begin{matrix} k\,A_{11} & k\,A_{13} & \dots & k\,A_{1n} \\ k\,A_{31} & k\,A_{33} & \dots & k\,A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k\,A_{n1} & k\,A_{n3} & \dots & k\,A_{nn} \end{matrix} \right\}$$

e le sostituzioni S_1^{-1}, S'_1 d'ordine $n-1$ saranno trasformate l'una dell'altra, come lo sono le due d'ordine n $S^{-1} H$, S'.

Da tutto ciò risulta che anche l'equazione in u, che è d'ordine $n-1$, soddisfa alle condizioni del teorema. Quindi se ne può determinare un integrale, come si è fatto per quella in y, e si può costruire una terza equazione d'ordine $n-2$ della stessa natura della precedente o di quelle già citate dell'Halphen. Seguitando in questo modo, si giunge ad un'equazione del 1.° ordine, che è perfettamente integrabile. Risalendo poi dagl'integrali successivamente ottenuti a quelli dell'equazione primitiva, si vede che questi ultimi si possono sempre ottenere con quadrature. Epperò le equazioni che godono delle proprietà esposte nell'enunciato del teorema possono considerarsi come completamente integrabili.

3. Limitandoci alle sole equazioni differenziali lineari del 2.° ordine a coefficienti razionali ed avente soltanto tre punti critici per gl'integrali, e considerando una di tali equazioni, per la quale supporremo che siano soddisfatte le condizioni che si richiedono per il teorema, potremo determinare nelle vicinanze dei suoi punti critici a, b, c tre sistemi d'integrali particolari distinti y_{1a}, y_{2a}; y_{1b}, y_{2b}; y_{1c}, y_{2c} ai quali corrispondano tre sostituzioni fondamentali della forma

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & \dfrac{e_1 d_1}{d_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e_1 d_1} & 0 \\ \dfrac{\delta}{e_1 d_1} & \dfrac{1}{e_1 d_1} \end{pmatrix}$$

oppure dell'altra

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ \lambda d & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 0 \\ -\lambda e & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{d e} & 0 \\ \dfrac{\delta}{d e} & \dfrac{1}{d e} \end{pmatrix},$$

essendo nel 1.° caso d_1, d_2, e_1, δ e nel 2.° d, e, λ, δ costanti determinate. Ma, se denotiamo con ρ_1, ρ_2; σ_1, σ_2; θ_1, θ_2 le tre coppie di radici delle determinanti dei punti critici a, b, c corrispondenti rispettivamente agl'integrali y_{1a}, $y_{2a}, \ldots$, risulta dalla natura di queste sostituzioni che devono essere reali ed interi i numeri $\rho_1 + \sigma_1 + \theta_1$, $\rho_2 + \sigma_2 + \theta_2$, $\theta_1 - \theta_2$ e anche gli altri due $\rho_1 - \rho_2$, $\sigma_1 - \sigma_2$ quando le sostituzioni si presentano sotto la 2ª forma. Basta però tener conto dei soli due numeri $\rho_1 + \sigma_1 + \theta_1$, $\theta_1 - \theta_2$, essendo del tutto indifferente che si presenti per le sostituzioni o l'una o l'altra delle due forme, e risultando il numero $\rho_2 + \sigma_2 + \theta_2$ reale ed intero assieme all'altro $\rho_1 + \sigma_1 + \theta_1$ come conseguenza della proprietà generale delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali di avere reale ed intera la somma di tutte le radici delle determinanti relative ai punti critici.

Reciprocamente, se i due numeri $\rho_1 + \sigma_1 + \theta_1$, $\theta_1 - \theta_2$ sono reali ed interi, lo saranno pure gli altri due $\rho_2 + \sigma_2 + \theta_2$, $\rho_1 + \sigma_1 - (\rho_2 + \sigma_2)$, e si potranno determinare nelle vicinanze dei punti a, b, c tre sistemi d'integrali particolari distinti ai quali corrispondano sostituzioni come le precedenti, che esprimono appunto che l'equazione soddisfa alle condizioni del teorema.

Ma, tenendo conto anche di questi risultati, si può dimostrare più in generale che:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un'equazione differenziale lineare del 2.° ordine a coefficienti razionali ed avente soltanto tre punti critici per gl'integrali sia riducibile, è che sia reale ed intera la somma di tre radici delle tre determinanti, nella quale però non figurino le due radici di una stessa determinante.

Denotando con a, b, c i tre punti critici dell'equazione che si considera, supponiamo dapprima che essa sia riducibile, nel qual caso possiede, come si può vedere facilmente, un integrale della forma

$$(x-a)^{\rho}(x-b)^{\sigma}(x-c)^{\theta} Q,$$

essendo ρ, σ, θ tre radici appartenenti rispettivamente alle tre determinanti relative ad a, b, c e Q una funzione razionale finita e differente da zero nei tre punti a, b, c. Ma, dovendo quest'integrale essere monodromo nelle vicinanze del punto ∞, sarà $\rho+\sigma+\theta$ un numero reale ed intero, il che dimostra che la condizione è necessaria.

Per dimostrare che è anche sufficiente, denotando con ρ_1, ρ_2; σ_1, σ_2; θ_1, θ_2 le tre coppie di radici delle tre determinanti relative ad a, b, c, supponiamo che, essendo reale ed intero il numero $\rho_1+\sigma_1+\theta_1$ e quindi anche l'altro $\rho_2+\sigma_2+\theta_2$, non lo sia invece alcuno dei tre numeri $\rho_1-\rho_2$, $\sigma_1-\sigma_2$, $\theta_1-\theta_2$, e ciò per non rientrare nel caso già considerato, per il quale la dimostrazione è stata fatta.

Nelle vicinanze dei tre punti critici a, b, c si possono determinare tre sistemi d'integrali particolari distinti corrispondenti alle tre coppie di radici ρ_1, $\rho_2, \ldots$, i quali daranno origine rispettivamente alle tre sostituzioni fondamentali della forma

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha'\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta'\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma'\end{pmatrix},$$

essendo α, β, γ, α', β', γ' sei costanti determinate, per le quali deve essere $\alpha\beta\gamma=1$, $\alpha'\beta'\gamma'=1$. Considerando il primo di questi sistemi d'integrali, cioè quello relativo ad a, possiamo, partendo da un punto x situato nell'intorno di a, determinare due cammini chiusi D_b, D_c che contengono nel loro interno, il 1.° il punto b e il 2.° il punto c e tali che, percorrendoli successivamente dopo un giro chiuso D_a nell'intorno di a e che contenga a nel suo interno, si venga a girare colla variabile attorno ai tre punti a, b, c.

Gl'integrali considerati, che indicheremo con y_1 e y_2, subiscono col giro D_a la sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha'\end{pmatrix}$ e con gli altri due D_b, D_c due sostituzioni, che denoteremo con

$$S_b = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \qquad S_c = \begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix},$$

essendo a, b, c, d; a', b', c', d' costanti determinate, e che sono rispettivamente trasformate delle altre due $\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta'\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma'\end{pmatrix}$. Avremo

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & b\\ c' & d'\end{pmatrix} = 1$$

e sarà pure

$$a\,d - b\,c = \beta\,\beta', \qquad a + d = \beta + \beta', \qquad a'\,d' - b'\,c' = \gamma\,\gamma',$$
$$a' + d' = \gamma + \gamma'.$$

Ma la sostituzione

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\,a & \alpha\,b\\ \alpha'\,c & \alpha'\,d\end{pmatrix}$$

è l'inversa di $\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$ ed è quindi la trasformata dell'inversa di $\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma'\end{pmatrix}$, ossia è la trasformata di $\begin{pmatrix}\alpha\,\beta & 0\\ 0 & \alpha'\,\beta'\end{pmatrix}$. Per conseguenza avremo

$$\alpha\,a + \alpha'\,d = \alpha\,\beta + \alpha'\,\beta'.$$

Dalle tre relazioni

$$a + d = \beta + \beta', \qquad \alpha\,a + \alpha'\,d = \alpha\,\beta + \alpha'\,\beta', \qquad a\,d - b\,c = \beta\,\beta'$$

si ottiene $a = \beta$, $d = \beta'$, $b\,c = 0$.

Similmente, potendosi scrivere

$$\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = 1,$$

si ha che la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'\alpha & b'\alpha' \\ c'\alpha & d'\alpha' \end{pmatrix},$$

che è l'inversa di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è la trasformata di $\begin{pmatrix} \alpha\gamma & 0 \\ 0 & \alpha'\gamma' \end{pmatrix}$.

Quindi sussiste la relazione $\alpha a' + \alpha' d' = \alpha\gamma + \alpha'\gamma'$, che, associata alle altre due $a + d' = \gamma + \gamma'$, $a' d - b' c' = \gamma\gamma'$, ci dà $a' = \gamma$, $d = \gamma'$, $b' c = 0$.

Abbiamo quindi per le due sostituzioni S_b, S_c

$$S_b = \begin{pmatrix} \beta & b \\ c & \beta' \end{pmatrix}, \qquad S_c = \begin{pmatrix} \gamma & b' \\ c' & \gamma \end{pmatrix}$$

con $b c = 0$, $b' c = 0$, e per il loro prodotto $S_b S_c$, che è la sostituzione $\begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 \\ 0 & \beta'\gamma' \end{pmatrix}$ inversa di $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$, si ottiene

$$S_b S_c = \begin{pmatrix} \beta & b \\ c & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & b \\ c' & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 \\ 0 & \beta'\gamma' \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \beta\gamma + b c' & \beta b' + b \gamma \\ c\gamma + \beta' c' & c b' + \beta'\gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 \\ 0 & \beta'\gamma' \end{pmatrix},$$

da cui risultano le quattro relazioni

$$b c' = 0, \qquad c b' = 0, \qquad \beta b' + b\gamma' = 0, \qquad c\gamma + \beta c = 0,$$

che si possono soddisfare assieme alle altre due $b c = 0$, $b' c' = 0$ facendo

$$b = 0, \qquad b' = 0, \qquad c\gamma + \beta' c' = 0,$$

oppure

$$c = 0, \qquad c' = 0, \qquad \beta b' + b\gamma' = 0,$$

o anche

$$b = 0, \qquad b' = 0, \qquad c = 0, \qquad c' = 0.$$

Quindi le sostituzioni S_b, S_c possono avere una delle tre forme seguenti

$$S_b = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ c & \beta' \end{pmatrix}, \qquad S_c = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ c' & \gamma' \end{pmatrix} \text{ con } c\gamma + \beta c = 0,$$

$$S_b = \begin{pmatrix} \beta & b \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}, \qquad S_c = \begin{pmatrix} \gamma & b' \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} \text{ con } \beta b' + b \gamma' \quad 0,$$

$$S_b = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}, \qquad S_c = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix}.$$

Quando le sostituzioni S_b, S_c hanno la prima forma si ha per l'integrale y_1

$$y_1 = (x-a)^{\rho_1} (x-b)^{\sigma_1} (x-c)^{\theta_1} Q_1,$$

essendo Q_1 una funzione razionale finita e differente da zero nei tre punti a, b, c. Quando invece le S_b, S_c hanno la 2.ª forma, allora è l'integrale y_2 che può facilmente determinarsi, avendosi

$$y_2 = (x-a)^{\rho_2} (x-b)^{\sigma_2} (x-c)^{\theta_2} Q_2$$

con Q_2 funzione razionale finita e differente da zero nei tre punti a, b, c, e quando finalmente le S_b, S_c hanno la 3.ª forma, tanto y_1 quanto y_2 risultano subito determinati, potendosi eguagliare rispettivamente ad espressioni come le precedenti. Essendo ciascuna di queste due espressioni di y_1 e y_2 un integrale di un'equazione differenziale lineare del 1.º ordine a coefficienti razionali, si vede che in ogni caso l'equazione data è riducibile, e che quindi la condizione posta nell'enunciato è anche sufficiente.

4. Per fare un esempio consideriamo l'equazione ipergeometrica

$$x(x-1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - y]y' + \alpha\beta\gamma = 0,$$

nella quale α, β, γ sono costanti, che possiede i tre soli punti singolari e al tempo stesso critici per gl'integrali 0, 1, ∞. Le tre coppie di radici delle tre determinanti di questi punti sono rispettivamente

$$\rho_1 = 0, \qquad \rho_2 = 1 - \gamma; \qquad \sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = \gamma - \alpha - \beta;$$
$$\theta_1 = \alpha, \qquad \zeta_3 = \beta.$$

Considerando le otto somme di radici che si possono ottenere prendendo una radice da ogni coppia, si trova che per soddisfare la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione ipergeometrica sia riducibile basta scegliere le costanti α, β, γ in modo che sia reale ed intero uno dei quattro α, β, $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$.

Quando l'equazione ipergeometrica è riducibile risulta dalle considerazioni esposte nei paragrafi precedenti che essa possiede uno o due integrali della forma

$$t = x^{\rho} (x-1)^{\sigma} Q,$$

essendo Q una funzione razionale che, per non avere l'equazione alcun altro punto singolare all'infuori di 0, 1, ∞, si riduce ad un polinomio e ρ, σ due radici appartenenti rispettivamente alle determinanti relative ai punti 0, 1. Per il grado h di Q notiamo che esso deve avere un valore tale che l'integrale possa comportarsi a distanza infinita come $x^{-\theta}$, essendo θ una radice della determinante relativa al punto ∞. Perciò deve essere $\rho + \sigma + h = \quad \theta$, ossia $h = -(\rho + \sigma + \theta)$. Si vede dunque che ad ogni integrale della forma precedente corrisponde sempre una delle otto somme di radici già considerate, la quale deve essere intera e negativa o nulla.

Queste somme di radici, essendo

$$\rho_1 + \rho_2 + \sigma_1 + \sigma_2 + \theta_1 + \theta_2 = 1,$$

si possono distribuire in quattro coppie tali che quelle di ciascuna coppia abbiano per somma l'unità. Perciò, quando l'equazione ipergeometrica è riducibile, fra le otto somme di radici se ne trovano sempre alcune intere e negative, alle quali potranno corrispondere integrali come il precedente, dovendo in ogni caso ciò accadere sempre per una di esse.

Esaminando brevemente i vari casi che possono presentarsi, per un'equazione ipergeometrica riducibile, cominciamo coll'osservare che essa non può avere che un solo integrale come t quando nessuna delle tre differenze di radici

$$\rho_1 - \rho_2 = \gamma - 1, \qquad \sigma_1 - \sigma_2 = \alpha + \beta - \gamma, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \alpha - \beta.$$

è intera, o diversamente quando per quelle differenze che sono intere non risultano soddisfatte le relazioni algebriche corrispondenti che fanno sparire i logaritmi dagl'integrali. Nel 1.° caso infatti delle otto somme di radici due sole, che devono appartenere alla medesima coppia, sono intere e di queste due somme una soltanto è negativa o nulla e quindi atta ad avere per corrispondente un integrale della forma di t. Nel 2.° caso poi non vi può essere che un solo integrale come t, dovendo nell'integrale generale figurare i logaritmi nelle vicinanze di qualche punto critico.

Quando una sola delle tre differenze di radici $\rho_1 - \rho_2$, $\sigma_1 - \sigma_2$, $\theta_1 - \theta_2$ è intera quattro soltanto delle otto somme di radici sono intere e di queste quattro somme, che appartengono a due coppie differenti, due sole sono negative. Denotando con τ_1, τ_2 le due radici di una stessa determinante che hanno per differenza un numero intero e con r_1, r_2; s_1, s_2 quelle delle altre due determinanti, supponiamo che

$$r_1 + s_1 + \tau_1, \qquad r_2 + s_2 + \tau_2; \qquad r_1 + s_1 + \tau_2, \qquad r_2 + s_2 + \tau_1$$

siano le quattro somme intere e che i due numeri interi $r_1 + s_1 - (r_2 + s_2)$, $\tau_1 - \tau_2$ siano negativi o nulli. Delle quattro somme precedenti la prima è sempre negativa o nulla e la seconda è sempre positiva. Perciò potranno essere negative o nulle le due somme $r_1 + s_1 + \tau_1$, $r_1 + s_1 + \tau_2$ oppure le altre due $r_1 + s_1 + \tau_1$, $r_2 + s_2 + \tau_1$. Nel 1.° caso la relazione algebrica che fa sparire i logaritmi dagl'integrali nelle vicinanze del punto a cui si riferiscono le radici τ_1, τ_2 non può essere soddisfatta, perchè, se lo fosse, vi dovrebbero essere due integrali particolari distinti simili a t e corrispondenti alle due somme intere e negative $r_1 + s_1 + \tau_1$, $r_1 + s_1 + \tau_2$, il che è impossibile. Nel 2.° caso invece questa relazione deve essere soddisfatta, perchè se non lo fosse, a nessuna delle due somme negative $r_1 + s_1 + \tau_1$, $r_2 + s_2 + \tau_1$ potrebbe corrispondere un integrale simile a t, che deve sempre esistere. In questo 2.° caso dunque vi sono due integrali simili a t che corrispondono alle due somme negative precedenti.

Quando finalmente tutte le tre differenze di radici $\rho_1 - \rho_2$, $\sigma_1 - \sigma_2$, $\theta_1 - \theta_2$ sono intere, l'equazione ipergeometrica, essendo riducibile, ha le sue tre determinanti con radici intere, e si può dimostrare che uno almeno dei tre punti 0, 1, ∞ cessa di essere critico per gl'integrali. Supponendo infatti che ciò non accada, deve risultare per le radici ρ, σ, θ che figurano nell'espressione dell'integrale simile a t

$$\rho \geqq \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \qquad \sigma \geqq \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \qquad \theta \geqq \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

e quindi sommando $\rho + \sigma + \theta \geqq \frac{1}{2}$, ossia $\rho + \sigma + \theta > 0$, il che è impossibile.

Ricorrendo anche in questo caso alle notazioni r_1, r_2; s_1, s_2; τ_1, τ_2 usate precedentemente per le radici, supponiamo che sia $r_1 \leqq r_2$, $s_1 \leqq s_2$, $\tau_1 \leqq \tau_2$ e che il punto a cui si riferiscono le radici τ_1, τ_2 sia quello solo non critico.

In tal caso l'integrale simile a t, non potendo corrispondere alla somma $r_2 + s_2 + \tau_2$, che è sempre positiva, corrisponderà all'altra $r_2 + s_2 + \tau_1$, che deve quindi essere negativa o nulla. Se invece il punto non critico per gl'integrali è quello relativo alle radici r_1, r_2, dovrà l'integrale simile a t corrispondere alla somma $s_2 + \tau_2 + r_1$, che sarà quindi negativa o nulla. Ora osserviamo che non può essere contemporaneamente

$$r_2 + s_2 + \tau_1 \leqq 0, \qquad s_2 + \tau_2 + r_2 \leqq 0,$$

poichè sommando si ottiene $1 + s_2 - s_1 \leqq 0$, il che è impossibile. Quindi delle tre somme $r_2 + s_2 + \tau_1$, $s_2 + \tau_2 + r_1$, $\tau_2 + r_2 + s_1$ una sola può essere negativa o nulla, e quando ciò accade il punto corrispondente all'ultima radice di quella somma che è negativa o nulla è sicuramente non critico per gl'integrali.

Potrebbe peraltro darsi che non fossero critici neppure gli altri due punti; ma si può dimostrare facilmente che ciò non accade mai quando una delle tre somme precedenti è negativa o nulla. Difatti, se nessuno dei tre punti 0, 1, ∞ è critico vi deve essere fra le otto somme di radici almeno una somma negativa o nulla che contenga τ_2, e siccome essa non può superare $r_1 + s_1 + \tau_2$, così quest'ultima somma sarà negativa o nulla. Perciò quando i tre punti 0, 1, ∞ non sono critici le quattro somme di radici negative o nulle sono

$$r_1 + s_1 + \tau_1, \qquad r_1 + s_1 + \tau_2, \qquad s_1 + \tau_1 + r_2, \qquad \tau_1 + r_1 + s_2$$

e quindi le tre somme $r_2 + s_2 + \tau_1$, $s_2 + \tau_2 + r_1$, $\tau_2 + r_2 + s_1$ devono essere tutte positive e differenti da zero.

Dunque, riassumendo, l'equazione ipergeometrica riducibile possiede un solo integrale come t:

1.° quando nessuna delle tre differenze di radici $r_1 - r_2$, $s_1 - s_2$, $\tau_1 - \tau_2$ è intera;

2.° quando, essendo intera una sola di queste differenze, ad es.: $\tau_1 - \tau_2$, delle quattro somme di radici che devono essere intere ne risultano negative o nulle due contenenti l'una la radice τ_1 e l'altra la radice τ_2;

3.° quando, essendo intere e positive o nulle le tre differenze precedenti, risulta negativa o nulla una delle tre somme $r_2 + s_2 + \tau_1$, $s_2 + \tau_2 + r_1$, $\tau_2 + r_2 + s_1$, il che non può mai accadere contemporaneamente per due di esse. In questo caso l'integrale simile a t si riduce ad una funzione razionale.

Invece un'equazione ipergeometrica riducibile possiede due integrali particolari distinti della forma di t:

1.° quando, essendo intera una sola delle tre differenze di radici $r_1 - r_2$, $s_1 - s_2$, $\tau_1 - \tau_2$, ad es.: $\tau_1 - \tau_2$, delle quattro somme di radici che devono essere intere ne risultano negative o nulle due contenenti la minore delle due radici τ_1, τ_2.

2.° quando, essendo intere e positive o nulle le tre differenze precedenti, risultano positive e differenti da zero tutte le tre somme $r_2 + s_2 + \tau_1$, $s_2 + \tau_2 + r_1$, $\tau_2 + r_2 + s_1$. In quest'ultimo caso l'equazione ha l'integrale generale uniforme e quindi razionale, ed esistono quattro invece di due integrali simili a t corrispondenti alle quattro somme di radici che sono negative o nulle.

Sulla ricerca di un quarto integrale di 2.° grado del sistema di equazioni differenziali del moto di un corpo solido in un liquido indefinito.

(Di ENRICO LENZI, *a Napoli.)*

Le equazioni che reggono il movimento di un corpo solido in un liquido indefinito nell'assenza di qualunque forza esterna che agisca sul corpo o sul liquido, furon trovate dal KIRCHHOFF e da lui esposte in una Memoria apparsa nel *Giornale di Crelle:* (Vol. 71: « Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flussigkeit »).

Però il CLEBSCH riuscì in seguito a porre queste equazioni sotto la forma di equazioni differenziali del 1.° ordine (*Mathematische Annalen:* Vol. 3.°: « Ueber die Bewegung eines Körpes ») ed il sistema da lui considerato è

$$\frac{d x_1}{d t}=x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2}-x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3}; \qquad \frac{d y_1}{d t}=x_3 \frac{\partial T}{\partial x_2}-x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3}+y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2}-y_2 \frac{\partial T}{\partial y_3}$$

$$\frac{d x_2}{d t}=x_1 \frac{\partial T}{\partial y_3}-x_3 \frac{\partial T}{\partial y_1}; \qquad \frac{d y_2}{d t}=x_1 \frac{\partial T}{\partial x_3}-x_3 \frac{\partial T}{\partial x_1}+y_1 \frac{\partial T}{\partial y_3}-y_3 \frac{\partial T}{\partial y_1}$$

$$\frac{d x_3}{d t}=x_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}-x_1 \frac{\partial T}{\partial y_2}; \qquad \frac{d y_3}{d t}=x_2 \frac{\partial T}{\partial x_1}-x_1 \frac{\partial T}{\partial x_2}+y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}-y_1 \frac{\partial T}{\partial y_2}$$

in cui T è l'energia cinetica, funzione omogenea del 2.° grado rispetto alle variabili x_i, y_i ed è inoltre

$$x_1=\frac{\partial T}{\partial U}, \qquad x_2=\frac{\partial T}{\partial V}, \qquad x_3=\frac{\partial T}{\partial W}$$

$$y_1=\frac{\partial T}{\partial P}, \qquad y_2=\frac{\partial T}{\partial Q}, \qquad y_3=\frac{\partial T}{\partial R}.$$

essendo U, V, W le componenti della velocità dell'origine di un sistema di assi rettangolari presi nello spazio e fissi nel corpo e P, Q, R le componenti della rotazione istantanea del corpo attorno a quest'origine, riferite agli stessi assi.

Di questo sistema si conoscono già tre integrali

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{cost.} = m$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \text{cost.} = n$$

$$T = \text{cost.} = l$$

ed un moltiplicatore $\mu = 1$.

Ciò condusse il Clebsch a conchiudere (*): « poichè nelle equazioni proposte non figura esplicitamente il tempo si può trovare facilmente l'ultimo integrale mediante una quadratura; d'altra parte, facendo uso del moltiplicatore noto si può trovare il penultimo integrale e rimane così da ricercarne un quarto perchè l'integrazione sia completa. » Ed egli quindi si propose di determinare in quali condizioni esistesse questo quarto integrale di 1.° o di 2.° grado e quale ne fosse la forma; ma l'analisi ch'egli fece oltre ad essere troppo lunga per i risultati a cui si arrivava, non è nemmeno completa. Difatti lo Stekloff fece notare una lacuna a proposito del caso dell'integrale di 2.° grado, lacuna che, a suo modo di vedere era la sola che si rilevasse nel lavoro del Clebsch (*Mathematische Annalen.* Vol. 13.° « Ueber die Bewegung... »).

Un'osservazione facilissima però mostra chiaramente che l'uno e l'altro dei due citati autori àn lasciato sfuggire a la loro osservazione ancora qualche caso.

Infatti richiamando l'equazione differenziale a cui deve soddisfare qualunque integrale φ del sistema, purchè indipendente dal tempo,

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \cdot \frac{d x_h}{d t} + \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y_h} \cdot \frac{d y_h}{d t} = 0$$

(*) Opera citata.

ed osservando che nel nostro caso essa si può scrivere

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial T}{\partial y_1}, & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial T}{\partial y_2}, & x_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & \frac{\partial T}{\partial y_3}, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, & \frac{\partial T}{\partial x_1}, & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}, & \frac{\partial T}{\partial x_2}, & x_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}, & \frac{\partial T}{\partial x_3}, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, & \frac{\partial T}{\partial y_1}, & y_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}. & \frac{\partial T}{\partial y_2}, & y_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}, & \frac{\partial T}{\partial y_3}, & y_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

si scorge subito che essa rimane inalterata se si scambiano fra loro le 2 funzioni T e φ. Segue da ciò che:

se ad una determinata forma di T corrisponde per il sistema un integrale di forma φ, quando T avrà assunto la forma φ l'integrale avrà la primitiva forma di T.

Questa legge che si verifica per il nostro sistema di equazioni e che ci par propria in generale di tutti i sistemi canonici (*) porta qui ad un risultato importantissimo.

Se ricordiamo difatti i due risultati a cui era pervenuto il CLEBSCH a proposito dell'integrale di 2.° grado:

1.° se l'energia cinetica à la forma

$$2\,T = \Sigma\, a_{11}\, x_1^2 + C\, \Sigma\, y_1^2$$

risulta

$$\varphi = \Sigma\, a_{22}\, a_{33}\, x_1^2 - C\, \Sigma\, a_{11}\, y_1^2\,;$$

2.° se

$$2\,T = \sigma'\, \Sigma\, c_{22}\, c_{33}\, x_1^2 + \Sigma\, c_{11}\, y_1^2$$

sarà

$$\varphi = \sigma'\, \Sigma\, c_{11}\, x_1^2 - \Sigma\, y_1^2$$

(*) M. C. JORDAN, *Cours d'analyse.* Vol. 3.°: « Sistemi della forma

$$d\,x_i = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\, d\,t, \qquad d\,p_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, d\,t \qquad (i = 1,\, 2, \ldots\, n)$$

in cui ψ rappresenta una funzione nota delle $2n$ variabili $x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_n$, son detti sistemi canonici. I loro integrali φ, se indipendenti dal tempo, soddisfano l'equazione

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = 0\text{ »}$$

e qui si vede che le funzioni φ e ψ sono scambiabili senza che si alteri l'equazione.

e in questo secondo risultato poniamo $\sigma' = -\frac{1}{C}$ e sostituiamo ai coefficienti c_{ii} gli a_{ii} si vede subito che i due casi sono l'uno *reciproco* dell'altro.

Ed allora, poichè un terzo caso esiste, trovato da Stekloff, deve esisterne *un quarto* che sia a questo reciproco.

Dimostrata così *a priori* l'esistenza di un quarto caso, e, direi anche, la forma dell'integrale (*), io ò tentato di rifare l'analisi (**) con maggior rigore e con un po' più di speditezza limitandomi soltanto a la ricerca degl'integrali della forma

$$\varphi = \Sigma\, \alpha_{ii}\, x_i^2 + \Sigma\, \beta_{ii}\, x_i\, y_i + \Sigma\, \gamma_{ii}\, y_i^2 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Senonchè raggiunto lo scopo e comunicato il risultato al mio maestro prof. Marcolongo, questi credette opportuno informarne lo Stekloff il quale rispose inviando una sua Memoria in russo (***), per me gentilmente tradotta dal prof. Marcolongo stesso. In essa è sostanzialmente ripetuto quanto prima era stato pubblicato nella Nota dei *Mathematische Annalen* già citata, però con un'aggiunta al Cap. IV in cui si annunzia che il caso di cui io mi ero occupato era già stato trovato dal Liapunoff (****).

Per fortuna il metodo da me seguito nella ricerca è assolutamente diverso da quello usato dai matematici russi, come anche mi conferma il sullodato professore, e d'altra parte esso à anche il merito di porre in vista qualche altro risultato finora trascurato.

(*) Basterebbe nel risultato di Stekloff: se

$$2\,T = \sigma'^2\, \Sigma\, c_{11}\, (c_{22}^2 + c_{33}^2)\, x_1^2 + 2\, \sigma'\, \Sigma\, c_{22}\, c_{33}\, x_1\, y_1 + \Sigma\, c_{11}\, y_1^2$$

sarà

$$\varphi = \sigma'^2\, \Sigma\, (c_{33} - c_{22})^2\, x_1^2 - 2\, \sigma'\, \Sigma\, c_{11}\, x_1\, y_1 + \Sigma\, y_1^2$$

sostituire, come diremo in seguito, $-\frac{1}{2\,C}$ a σ' e le b_{ii} alle c_{ii}, come già per i 2 casi di Clebsch, per avere il quarto caso d'integrabilità.

(**) Di ciò è materia la mia tesi di laurea.

(***) Stekloff, *Sul movimento di un corpo solido in un liquido.* Charchow, 1893.

(****) A. M. Liapunoff, *Nuovo caso d'integrabilità delle equazioni differenziali del moto di un corpo solido in un liquido.* (Comunicazione alla Società Matematica di Charchow. T. IV, fascicoli I e II, 1893.

§ 1.

Assunta per T la forma più generale

$$2\,T = \Sigma\Sigma\, a_{ih}\, x_i\, x_h + \Sigma\Sigma\, b_{ih}\, x_i\, y_h + \Sigma\Sigma\, c_{ih}\, y_i\, y_h$$

in cui si può supporre

$$a_{ih} = a_{hi}\,, \qquad b_{ih} = b_{hi}\,, \qquad c_{ih} = c_{hi}$$

come già dimostrò il Clebsch (*), e per φ la (2), l'equazione (1) si scriverà allora:

$$\begin{vmatrix} 2\,\alpha_{11}\,x_1 + \beta_{11}\,y_1\,; & \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i1}\,x_i + \Sigma\, c_{i1}\,y_i\,; & x_1 \\ 2\,\alpha_{22}\,x_2 + \beta_{22}\,y_2\,; & \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i2}\,x_i + \Sigma\, c_{i2}\,y_i\,; & x_2 \\ 2\,\alpha_{33}\,x_3 + \beta_{33}\,y_3\,; & \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i3}\,x_i + \Sigma\, c_{i3}\,y_i\,; & x_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta_{11}\,x_1 + 2\,\gamma_{11}\,y_1\,; & \Sigma\, a_{i1}\,x_i + \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i1}\,y_i\,; & x_1 \\ \beta_{22}\,x_2 + 2\,\gamma_{22}\,y_2\,; & \Sigma\, a_{i2}\,x_i + \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i2}\,y_i\,; & x_2 \\ \beta_{33}\,x_3 + 2\,\gamma_{33}\,y_3\,; & \Sigma\, a_{i3}\,x_i + \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i3}\,y_i\,; & x_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta_{11}\,x_1 + 2\,\gamma_{11}\,y_1\,; & \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i1}\,x_i + \Sigma\, c_{i1}\,y_i\,, & y_1 \\ \beta_{22}\,x_2 + 2\,\gamma_{22}\,y_2\,; & \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i2}\,x_i + \Sigma\, c_{i2}\,y_i\,, & y_2 \\ \beta_{33}\,x_3 + 2\,\gamma_{33}\,y_3\,; & \frac{1}{2}\,\Sigma\, b_{i3}\,x_i + \Sigma\, c_{i3}\,y_i\,, & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

e perchè questa equazione sia identicamente soddisfatta è necessario che i coefficienti dei singoli termini si annullino.

(*) Opera citata.

Cominciando a considerare per ciò i termini di 3.° grado in y otterremo per i coefficienti le seguenti relazioni

$$\gamma_{11}(c_{22}-c_{33})+\gamma_{22}(c_{33}-c_{11})+\gamma_{33}(c_{11}-c_{22})=0$$

$$c_{12}(\gamma_{22}-\gamma_{33})=0 \quad ; \quad c_{12}(\gamma_{33}-\gamma_{11})=0$$

$$c_{23}(\gamma_{33}-\gamma_{11})=0 \quad ; \quad c_{23}(\gamma_{11}-\gamma_{22})=0$$

$$c_{31}(\gamma_{11}-\gamma_{22})=0 \quad ; \quad c_{31}(\gamma_{22}-\gamma_{33})=0$$

e per soddisfare ad esse, la prima esclusa, si possono fare due sole ipotesi: o si pongono i coefficienti c_{ik} $(i \neq k)$ uguali a zero o vero i coefficienti γ_{ii} uguali fra loro $(\gamma_{ii}=\nu)$; difatti a porre solamente $\gamma_{11}=\gamma_{22}\neq\gamma_{33}$ dovrebbero essere anche le $c_{ik}=0$ (*) e la condizione imposta per le γ_{ii} sarebbe quindi superflua. Di questa terza ipotesi noi quindi non terremo conto, come di qualunque altra che non imponga il minimo possibile di limitazioni per i coefficienti $a, \ldots \alpha, \ldots$: così p. es. si esclude l'ipotesi per cui debbano essere le $\gamma_{ii}=\nu$, le $c_{ik}=0$ bastando una sola di queste 2 condizioni a soddisfare le relazioni di cui è discorso.

Se adesso si passa ad osservare le relazioni derivanti dai coefficienti dei termini di 2.° grado in y

$$\left.\begin{aligned}
c_{11}(\beta_{33}-\beta_{22})+c_{33}(\beta_{22}-\beta_{11})+\gamma_{11}(b_{22}-b_{33})+\gamma_{33}(b_{11}-b_{22})=0\\
c_{22}(\beta_{11}-\beta_{33})+c_{11}(\beta_{33}-\beta_{22})+\gamma_{22}(b_{33}-b_{11})+\gamma_{11}(b_{22}-b_{33})=0\\
c_{33}(\beta_{22}-\beta_{11})+c_{22}(\beta_{11}-\beta_{33})+\gamma_{33}(b_{11}-b_{22})+\gamma_{22}(b_{33}-b_{11})=0
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
b_{12}\gamma_{11}+c_{12}(\beta_{11}-\beta_{33})=0\,; \quad b_{12}\gamma_{22}+c_{12}(\beta_{22}-\beta_{33})=0\\
b_{23}\gamma_{22}+c_{23}(\beta_{22}-\beta_{11})=0\,; \quad b_{23}\gamma_{33}+c_{23}(\beta_{33}-\beta_{11})=0\\
b_{31}\gamma_{33}+c_{31}(\beta_{33}-\beta_{22})=0\,; \quad b_{31}\gamma_{11}+c_{31}(\beta_{11}-\beta_{22})=0
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
b_{12}\gamma_{33}+b_{12}(\gamma_{33}-\gamma_{11})+c_{12}(\beta_{33}-\beta_{11})=0\,; \quad b_{12}\gamma_{33}+b_{12}(\gamma_{33}-\gamma_{22})+c_{12}(\beta_{33}-\beta_{22})=0\\
b_{23}\gamma_{11}+b_{23}(\gamma_{11}-\gamma_{22})+c_{23}(\beta_{11}-\beta_{22})=0\,; \quad b_{23}\gamma_{11}+b_{23}(\gamma_{11}-\gamma_{33})+c_{23}(\beta_{11}-\beta_{33})=0\\
b_{31}\gamma_{22}+b_{31}(\gamma_{22}-\gamma_{33})+c_{31}(\beta_{22}-\beta_{33})=0\,; \quad b_{31}\gamma_{22}+b_{31}(\gamma_{22}-\gamma_{11})+c_{31}(\beta_{22}-\beta_{11})=0
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(*) Indicheremo d'ora innanzi con a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} i coefficienti in cui sia $i \neq k$, notando per gli altri a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}.

e si voglia da prima supporre $\gamma_{ii} = \nu$, $c_{ik} \gtrless 0$; le (5) divengono

$$b_{12}\,\nu + c_{12}\,(\beta_{33} - \beta_{11}) = 0\,; \quad b_{12}\,\nu + c_{12}\,(\beta_{33} - \beta_{22}) = 0$$

$$b_{23}\,\nu + c_{23}\,(\beta_{11} - \beta_{22}) = 0\,; \quad b_{23}\,\nu + c_{23}\,(\beta_{11} - \beta_{33}) = 0$$

$$b_{31}\,\nu + c_{31}\,(\beta_{22} - \beta_{33}) = 0\,; \quad b_{31}\,\nu + c_{31}\,(\beta_{22} - \beta_{33}) = 0$$

donde segue facilmente $\beta_{ii} = \mu$. In tal caso però le (4) assumono la forma

$$b_{ik}\,\nu = 0$$

e dovrà essere quindi o $b_{ik} = 0$ o $\nu = 0$.

Supponendo invece le $c_{ik} = 0$ e le γ_{ii} diverse fra loro, le β_{ii} non subiscono alcuna limitazione e le (4) e (5) si scrivono

$$b_{12}\,\gamma_{11} = 0\,, \qquad b_{23}\,\gamma_{11} = 0\,, \qquad b_{31}\,\gamma_{11} = 0$$

$$b_{12}\,\gamma_{22} = 0\,, \qquad b_{23}\,\gamma_{22} = 0\,, \qquad b_{31}\,\gamma_{22} = 0$$

$$b_{12}\,\gamma_{33} = 0\,, \qquad b_{23}\,\gamma_{33} = 0\,, \qquad b_{31}\,\gamma_{33} = 0$$

per cui c'è da supporre le $b_{ik} = 0$. Sicchè conchiudendo

o le b_{ik} *e le* c_{ik} *son diverse da zero ed allora* $\beta_{ii} = \mu$, $\gamma_{ii} = 0$;

o le b_{ik} *sono uguali a zero senza che lo siano le* c_{ik} *ed allora* $\beta_{ii} = \mu$, $\gamma_{ii} = \nu \gtrless 0$;

o le $b_{ik} = 0$, $c_{ik} = 0$ *(e questa seconda parte porta con sè la 1.ª) e segue che le* β_{ii} *e le* γ_{ii} *sono qualunque.*

Si noti che queste 3 supposizioni sono le sole possibili quando si tenga conto dell'osservazione fatta prima.

Passiamo ora ad osservare le relazioni provenienti da i termini di 1.º grado in y

$$\left.\begin{aligned}
&2c_{11}(\alpha_{33}-\alpha_{22})+2\gamma_{11}(a_{22}-a_{33})+\frac{1}{2}\left[\beta_{11}(b_{22}-b_{33})+\beta_{22}(b_{33}-b_{11})+\beta_{33}(b_{11}-b_{22})\right]=0\\
&2c_{22}(\alpha_{11}-\alpha_{33})+2\gamma_{22}(a_{33}-a_{11})+\frac{1}{2}\left[\beta_{11}(b_{22}-b_{33})+\beta_{22}(b_{33}-b_{11})+\beta_{33}(b_{11}-b_{22})\right]=0\\
&2c_{33}(\alpha_{22}-\alpha_{11})+2\gamma_{33}(a_{11}-a_{22})+\frac{1}{2}\left[\beta_{11}(b_{22}-b_{33})+\beta_{22}(b_{33}-b_{11})+\beta_{33}(b_{11}-b_{22})\right]=0
\end{aligned}\right\} \qquad (3_{\text{bis}})$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2a_{12}\gamma_{33}+\frac{1}{2}b_{12}(\beta_{33}-\beta_{11})=0\,; & 2a_{12}\gamma_{33}+\frac{1}{2}b_{12}(\beta_{33}-\beta_{22})=0 \\ 2a_{23}\gamma_{11}+\frac{1}{2}b_{23}(\beta_{11}-\beta_{22})=0\,; & 2a_{23}\gamma_{11}+\frac{1}{2}b_{23}(\beta_{11}-\beta_{33})=0 \\ 2a_{31}\gamma_{22}+\frac{1}{2}b_{31}(\beta_{22}-\beta_{33})=0\,; & 2a_{31}\gamma_{22}+\frac{1}{2}b_{31}(\beta_{22}-\beta_{11})=0 \end{array}\right\} \quad (4_{\text{bis}})$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2a_{12}\gamma_{22}+b_{12}(\beta_{22}-\beta_{33})+2c_{12}(\alpha_{22}-\alpha_{33})=0\,; & 2a_{12}\gamma_{11}+b_{12}(\beta_{11}-\beta_{33})+2c_{12}(\alpha_{11}-\alpha_{33})=0 \\ 2a_{23}\gamma_{33}+b_{23}(\beta_{33}-\beta_{11})+2c_{23}(\alpha_{33}-\alpha_{11})=0\,; & 2a_{23}\gamma_{22}+b_{23}(\beta_{22}-\beta_{11})+2c_{23}(\alpha_{22}-\alpha_{11})=0 \\ 2a_{31}\gamma_{11}+b_{31}(\beta_{11}-\beta_{22})+2c_{31}(\alpha_{11}-\alpha_{22})=0\,; & 2a_{31}\gamma_{33}+b_{31}(\beta_{33}-\beta_{22})+2c_{31}(\alpha_{33}-\alpha_{22})=0. \end{array}\right\} \quad (5_{\text{bis}})$$

Si noti che, tenendo conto dei risultati precedenti

nell'ipotesi che le b_{ik} e c_{ik} sian diverse da zero e per conseguenza $\beta_{ii}=\mu$, $\gamma_{ii}=0$ le (4_{bis}) sono soddisfatte e le (5_{bis}) impongono $\alpha_{ii}=\lambda$; le a_{ik} potendo essere qualunque le supporremo diverse da zero;

nell'ipotesi che siano le $b_{ik}=0$, $c_{ik}\neq 0$ e quindi $\beta_{ii}=\mu$, $\gamma_{ii}=\nu\neq 0$ dalle (4_{bis}) segue che le a_{ik} *debbono essere uguali a zero* e dalle (5_{bis}) $\alpha_{ii}=\lambda$;

nell'ipotesi che $b_{ik}=c_{ik}=0$ e di conseguenza β_{ii} e γ_{ii} qualunque, da le (4_{bis}) segue $a_{ik}=0$ e le (5_{bis}) essendo così soddisfatte si possono ritenere le α_{ii} *diverse fra loro.*

Se finalmente si considerano le relazioni a cui dàn luogo i coefficienti dei termini di 3.° grado in x

$$0=\alpha_{11}(b_{22}-b_{33})+\alpha_{22}(b_{33}-b_{11})+\alpha_{33}(b_{11}-b_{22})+\beta_{11}(a_{22}-a_{33})+\beta_{22}(a_{33}-a_{11})+\beta_{33}(a_{11}-a_{22})$$

$$\begin{array}{ll} 0=a_{12}(\beta_{22}-\beta_{33})+b_{12}(\alpha_{22}-\alpha_{33})\quad ; & 0=a_{12}(\beta_{33}-\beta_{11})+b_{12}(\alpha_{33}-\alpha_{11}) \\ 0=a_{23}(\beta_{33}-\beta_{11})+b_{23}(\alpha_{33}-\alpha_{11})\quad ; & 0=a_{23}(\beta_{11}-\beta_{22})+b_{23}(\alpha_{11}-\alpha_{22}) \\ 0=a_{31}(\beta_{11}-\beta_{22})+b_{31}(\alpha_{11}-\alpha_{22})\quad ; & 0=a_{31}(\beta_{22}-\beta_{33})+b_{31}(\alpha_{22}-\alpha_{33}) \end{array}$$

si vede che esse son soddisfatte, la prima esclusa, con le supposizioni precedenti.

Nè basta, ma si può anche osservare che con la 1.ª di esse ipotesi si soddisfano anche le relazioni finora trascurate cioè la 1.ª del primo e dell'ultimo gruppo le (3) e le (3_{bis}). In tal caso però φ risulta composizione lineare d'integrali noti e quindi è privo d'interesse.

La seconda supposizione mentre soddisfa le prime dei due gruppi estremi fa divenire le (3) e le (3_{bis})

$$\nu(b_{11} - b_{22}) = 0\,, \qquad \nu(b_{22} - b_{33}) = 0\,, \qquad \nu(b_{33} - b_{11}) = 0 \qquad (3')$$

$$\nu(a_{11} - a_{22}) = 0\,, \qquad \nu(a_{22} - a_{33}) = 0\,, \qquad \nu(a_{33} - a_{11}) = 0 \qquad (3'_{bis})$$

per le quali essendosi supposto $\nu \neq 0$ è necessario porre $a_{ii} = A$, $b_{ii} = B$. La T avrebbe allora la forma

$$2\,T = A\,(x_1^2 + \cdots) + B\,(x_1\,y_1 + \cdots) + \Sigma\Sigma\, c_{ih}\, y_i\, y_h$$

e φ, per sottrazione d'integrali noti, l'altra

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \text{cost.}$$

facilmente verificabile. Difatti moltiplicando le equazioni differenziali a destra rispettivamente per y_1, y_2, y_3, sommando ed integrando si à il risultato trovato.

Rimane così da considerare il caso in cui siano contemporaneamente $a_{ik} = b_{ik} = c_{ik} = 0$ cioè quando T assume la forma

$$2\,T = \Sigma\, a_{11}\, x_1^2 + \Sigma\, b_{11}\, x_1\, y_1 + \Sigma\, c_{11}\, y_1^2$$

e ricordiamo che le relazioni a cui bisogna soddisfare ancora sono la 1.ª del 1.° gruppo, le (3), le (3_{bis}) e la 1.ª dell'ultimo gruppo.

Prima però d'inoltrarci nell'analisi di questo caso ricordiamo che, a proposito dei coefficienti della forma T, il Clebsch dimostra che gli a_{ii}, b_{ii} si posson sempre supporre diversi da zero, sicchè a noi conviene anzitutto vedere cosa avvenga nel caso che in parte o tutti i coefficienti c_{ii} si annullino; anche perchè così ci sarà facilitata l'analisi in seguito.

§ 2.

Il caso in cui tutti i coefficienti c_{ii} si annullino non offre alcun risultato notevole. Infatti si deduce facilmente che, se i coefficienti b_{ii} son fra loro uguali e lo sono parimenti gli a_{ii}, risulta

$$\varphi = \Sigma\, \alpha_{11}\, x_{11}^2 + \Sigma\, \beta_{11}\, x_1\, y_1 + \Sigma\, \gamma_{11}\, y_1^2$$

che, per essere α_{ii}, β_{ii}, γ_{ii} coefficienti indeterminati, si spezza negli altri

$$x_i = \text{cost.}, \quad y_i = \text{cost.}$$

Se invece due coefficienti a son fra loro uguali, p. es. $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$ segue

$$x_i = \text{cost.}, \quad y_3 = \text{cost.}$$

e se poi $a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33}$ risulta

$$x_i = \text{cost.}, \quad \Sigma\, a_{11}\, x_1\, y_1 = \text{cost.}$$

Se invece dei coefficienti b_{ii} due soli sono uguali fra loro, p. es. $b_{11} = b_{22} \neq b_{33}$ si ottiene

$$x_3 = \text{cost.}, \quad y_3 = \text{cost.}$$

se i coefficienti a_{ii} son fra loro uguali o due soli fra essi: $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$, e sarà soltanto

$$x_3 = \text{cost.}$$

se $a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33}$.

Chè se poi i coefficienti b_{ii} son fra loro diversi risulta sempre

$$\varphi = \Sigma\, b_{11}\, x_1^2 = \text{cost.}$$

qualunque siano gli a_{ii}. Questo risultato, come i precedenti, è facilmente verificabile mediante le equazioni differenziali ed esso è dovuto a Clebsch.

Passiamo ora a considerare il caso in cui soltanto 2 dei coefficienti c_{ii} si annullino p. es. $c_{11} = c_{22} = 0$. Facendo, come prima, un esame sommario di tutte le possibili ipotesi per i coefficienti a_{ii}, b_{ii} si osserva che:

se i coefficienti b_{ii} son fra loro uguali risulta

$$x_3 = \text{cost.}, \quad y_3 = \text{cost.}, \quad y_1^2 + y_2^2 = \text{cost.}$$

se gli a_{ii} son fra loro uguali;

$$x_3 = \text{cost.} \quad y_3 = \text{cost.}$$

se solamente $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$;

$$x_3 = \text{cost.}$$

se i coefficienti a_{ii} son fra loro diversi.

Se poi dei coefficienti b_{ii} è $b_{11} = b_{22} \neq b_{33}$ sarà

$$x_3 = \text{cost.}, \quad y_3 = \text{cost.}$$

se dei coefficienti a_{ii} tutti o due soli di essi a_{11}, a_{22} son fra loro uguali; chè se invece fosse $a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33}$ risulterebbe

$$x_3 = \text{cost.}$$

Si deduce facilmente che se i coefficienti b_{ii} son fra loro diversi non si apprende nulla di nnovo poichè in tal caso il nuovo integrale φ differisce da T per un fattore costante.

Ci rimane così da considerare il caso in cui un sol coefficiente c_{ii} si annulli, p. es. $c_{33} = 0$. La relazione del 1.° gruppo si può scrivere allora

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & 1 & c_{11} \\ \gamma_{22} & 1 & c_{22} \\ \gamma_{33} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e da essa, per un noto teorema sui determinanti, si ottiene

$$\gamma_{11} = \rho + \sigma c_{11}, \quad \gamma_{22} = \rho + \sigma c_{22}, \quad \gamma_{33} = \rho$$

in cui ρ e σ son costanti indeterminate.

Se ora $b_{11} = b_{22} = b_{33}$ da le (3) segue $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = \mu$ e con ciò è soddisfatta anche la prima dell'ultimo gruppo, e da le (3_{bis}):

se $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ risulta $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \lambda$ e per sottrazione d'integrali noti

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \text{cost.};$$

se $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$ si ottiene

$$\alpha_{11} = \alpha_{33} + \left(\frac{\rho}{c_{22}} + \sigma\right)(a_{11} - a_{33}), \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} + \left(\frac{\rho}{c_{11}} + \sigma\right)(a_{11} - a_{33})$$

e quindi, tenuto conto che ρ ed α_{33} son costanti arbitrarie

$$\varphi = (a_{11} - a_{33})\left(\frac{x_1^2}{c_{22}} + \frac{x_2^2}{c_{11}}\right) + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \text{cost.}$$

se $a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33}$ dalla 3.ª delle (3_{bis}) risulta $\rho = 0$ e quindi φ è composizione lineare d'integrali noti.

Prima di passare oltre notiamo che il 2.° di questi risultati, pur non essendo assolutamente nuovo, poichè difatti corrisponde al 2.° dei risultati di Clebsch dianzi citati, non è meno notevole essendochè esso à luogo qualunque siano a_{11} ed a_{33}, senza cioè che essi siano, come nel caso di Clebsch, proporzionali a certe combinazioni binarie $c_{22}\, c_{33}, \ldots$ Faremo vedere in seguito come esso si possa derivare da l'altro.

Se poi dei coefficienti b_{ii} due soli son fra loro uguali, p. es. $b_{11} = b_{22} \neq b_{33}$ si può osservare subito che φ continua a risultare composizione lineare d'integrali noti sempre quando i coefficienti a_{ii} sian fra loro uguali o lo siano due soli fra essi $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$. Chè se poi gli a_{ii} fossero fra loro diversi dalle (3) risulterebbe

$$\beta_{11} = \beta_{33} + \left(\frac{\rho}{c_{22}} + \sigma\right)(b_{11} - b_{33}), \qquad \beta_{22} = \beta_{33} + \left(\frac{\rho}{c_{11}} + \sigma\right)(b_{11} - b_{33})$$

β_{33} rimanendo indeterminato. Sostituendo questi valori nell'ultima delle (3_{bis}) si avrebbe

$$\rho\left[2\,(a_{11} - a_{22}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_{22}} - \frac{1}{c_{11}}\right)(b_{11} - b_{33})^2\right] = 0$$

d'onde o $\rho = 0$ e, come nei casi precedenti, risulterebbe φ composizione lineare d'integrali noti, ovvero

$$2\,(a_{11} - a_{22})\, c_{11}\, c_{22} = \frac{1}{2}\,(c_{22} - c_{11})\,(b_{11} - b_{33})^2 \tag{6}$$

ed in tal caso le 2 prime delle (3_{bis}) si scriverebbero

$$2\,(\alpha_{33} - \alpha_{22}) + 2\left(\frac{\rho}{c_{11}} + \sigma\right)(a_{22} - a_{33}) + 2\,\frac{\rho}{c_{11}}\,(a_{22} - a_{11}) = 0$$

$$2\,(\alpha_{11} - \alpha_{33}) + 2\left(\frac{\rho}{c_{22}} + \sigma\right)(a_{33} - a_{11}) + 2\,\frac{\rho}{c_{22}}\,(a_{22} - a_{11}) = 0$$

cioè

$$\alpha_{11} = \alpha_{33} + \frac{\rho}{c_{22}}\,(2\,a_{11} - a_{22} - a_{33}) + \sigma\,(a_{11} - a_{33}),$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} + \frac{\rho}{c_{11}}\,(2\,a_{22} - a_{11} - a_{33}) + \sigma\,(a_{22} - a_{33})$$

rimanendo anche qui α_{33} indeterminato. Questi valori sostituiti nella 1.ª dell'ultimo gruppo impongono che

$$\frac{a_{11} - a_{33}}{c_{22}} = \frac{a_{22} - a_{33}}{c_{11}} = k$$

ossia

$$a_{11} = a_{33} + k\,c_{22}, \quad a_{22} = a_{33} + k\,c_{11}$$

dove k è una costante; ma allora la (6) diviene

$$4\,k\,c_{11}\,c_{22} = (b_{33} - b_{11})^2, \quad b_{33} - b_{11} = 2\sqrt{k\,c_{11}\,c_{22}}$$

e quindi

$$\beta_{11} = \beta_{33} - 2\left(\frac{\rho}{c_{22}} + \sigma\right)\sqrt{k\,c_{11}\,c_{22}}, \ldots \quad \alpha_{11} = \alpha_{33} + \frac{\rho\,k}{c_{22}}(2\,c_{22} - c_{11}) + \sigma\,k\,c_{22}, \ldots$$

Sicchè se T à la forma

$$2\,T = a_{33}(x_1^2 + \cdots) + k\,c_{22}\,x_1^2 + k\,c_{11}\,x_2^2 + b_{11}(x_1\,y_1 + x_2\,y_2) + \\ + b_{33}\,x_3\,y_3 + c_{11}\,y_1^2 + c_{22}\,y_2^2$$

in cui

$$4\,k\,c_{11}\,c_{22} = (b_{33} - b_{11})^2$$

o più semplicemente

$$2\,T = k\,c_{22}\,x_1^2 + k\,c_{11}\,x_2^2 + 2\sqrt{k\,c_{11}\,c_{22}}\,x_3\,y_3 + c_{11}\,y_1^2 + c_{22}\,y_2^2$$

sarà per sottrazione d'integrali noti

$$\varphi = -k\frac{c_{11}}{c_{22}}x_1^2 - k\frac{c_{22}}{c_{11}}x_2^2 - 2\,k\,x_3^2 -$$

$$- 2\sqrt{k\,c_{11}\,c_{22}}\left(\frac{x_1\,y_1}{c_{22}} + \frac{x_2\,y_2}{c_{11}}\right) + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \text{cost.}$$

Questo risultato che, fino a poco tempo fa, io credevo assolutamente nuovo non è tale perchè rientra nel caso generale di Stekloff. Non è superfluo però averlo qui trovato e ne diremo appresso la ragione.

Se finalmente i coefficienti b_{ii} son fra loro diversi φ risulta composizione lineare d'integrali noti.

Dopo di ciò noi potremo d'ora innanzi supporre i coefficienti di T tutti diversi da zero, e seguiremo ancora la stessa via fin qui usata considerando cioè i tre casi in cui i 3 coefficienti b_{ii} sian fra loro uguali, o lo siano due soli di essi $b_{11} = b_{22} \neq b_{33}$ o che siano tutti e tre diversi.

§ 3.

Caso $b_{11} = b_{22} = b_{33} = B$.

Sommando le (3) a due a due e sottraendo la rimanente si deduce subito $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = \mu$ e così oltre alle (3) si soddisfa anche a la 1.ª dell'ultimo gruppo.

Se poi si tien conto della 1.ª del 1.° gruppo si vede che si posson fare tre ipotesi: o che i coefficienti c_{ii} sian fra loro uguali o che lo sian due di essi o che siano tutti e 3 diversi.

Consideriamo da prima il caso in cui sia $c_{11} = c_{22} = c_{33} = C$. Se anche $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ dalle (3_{bis}) segue $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \lambda$ e le γ_{ii} rimangono indeterminate. Con facili riduzioni l'integrale allora si spezza negli altri

$$y_i = \text{cost.}$$

Se invece $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$ si à $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \lambda'$, $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \nu'$ ed

$$\alpha_{33} = \lambda' + \frac{\nu'}{C}(a_{33} - a_{11}).$$

In tal caso è

$$y_3 = \text{cost.}$$

Se poi $a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33}$ le (3_{bis}) si possono scrivere

$$\frac{\alpha_{33} - \alpha_{22}}{\gamma_{11}} = \frac{a_{33} - a_{22}}{C} \cdots$$

e da qui sommando

$$\frac{\alpha_{33} - \alpha_{22}}{\gamma_{11}} + \frac{\alpha_{11} - \alpha_{33}}{\gamma_{22}} + \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{\gamma_{33}} = 0$$

donde

$$\alpha_{11} = \rho + \sigma\,\gamma_{22}\,\gamma_{33}\,, \quad \alpha_{22} = \rho + \sigma\,\gamma_{33}\,\gamma_{11}\,, \quad \alpha_{33} = \rho + \sigma\,\gamma_{11}\,\gamma_{22}$$

(ρ e σ costanti indeterminate). Le (3_{bis}) si scriveranno allora

$$\sigma(\gamma_{22} - \gamma_{33}) = \frac{a_{33} - a_{22}}{C}, \cdots$$

e da qui

$$\gamma_{11} + \frac{a_{11}}{C\sigma} = \gamma_{22} + \frac{a_{22}}{C\sigma} = \gamma_{33} + \frac{a_{33}}{C\sigma} = k$$

$$\gamma_{11} = k - \frac{a_{11}}{C\sigma}, \quad \gamma_{22} = k - \frac{a_{22}}{C\sigma}, \quad \gamma_{33} = k - \frac{a_{33}}{C\sigma}$$

ed ancora

$$\alpha_{11} = \rho' - \frac{k}{C}(a_{22} + a_{33}) + \frac{a_{22}\, a_{33}}{C^2 \sigma} \qquad (\rho' = \rho + \sigma k^2).$$

Con facili riduzioni si à allora che se

$$2\, T = \Sigma\, a_{11}\, x_1^2 + C\, \Sigma\, y_1^2$$

sarà

$$\varphi = \Sigma\, a_{22}\, a_{33}\, x_1^2 - C\, \Sigma\, a_{11}\, y_1^2 = \text{cost.}$$

e questo risultato è dovuto a CLEBSCH.

Supposto invece che sia $c_{11} = c_{22} \neq c_{33}$ da la 1.ª del 1.º gruppo segue subito $\gamma_{11} = \gamma_{22}$.

Se anche $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, come prima l'integrale si spezza in

$$y_1^2 + y_2^2 = \text{cost.} \quad y_3 = \text{cost.}$$

e allo stesso risultato si arriva se $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$. Chè se fosse $a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33}$ sommando le 2 prime delle (3_{bis}) e paragonando con la 3.ª dovrebbe essere

$$\frac{\gamma_{11}}{c_{11}} = \frac{\gamma_{22}}{c_{22}} = \frac{\gamma_{33}}{c_{33}}$$

e di questo caso parleremo appresso.

Esclusa qualunque limitazione per i coefficienti c_{ii} la 1.ª relazione del 1.º gruppo per essere soddisfatta impone che sia

$$\gamma_{ii} = \rho + \sigma\, c_{ii}$$

in cui al solito ρ e σ son costanti indeterminate che possono anche annullarsi.

Se $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ dalle (3_{bis}) segue $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}$ e quindi per sottrazione d'integrali noti

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \text{cost.}$$

Tal risultato non viene meno se $\sigma = 0$; chè se $\rho = 0$ risulterebbe φ somma d'integrali noti.

Se $a_{11} = a_{22} \neq a_{33}$ dalla 3.ª delle (3_{bis}) si avrebbe $\alpha_{11} = \sigma_{22}$ e sommando le 2 prime per essersi supposto $c_{11} \neq c_{22}$ dovrebbe essere $\alpha_{11} = \alpha_{33}$ cosa non possibile se $a_{22} \neq a_{33}$.

Sia finalmente $a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33}$: sostituendo nelle (3_{bis}) alle γ_{ii} i loro valori, sommando e riducendo si à

$$\frac{a_{33} - a_{22}}{c_{11}} + \frac{a_{22} - a_{11}}{c_{33}} + \frac{a_{11} - a_{33}}{c_{22}} = 0.$$

Tal risultato vien meno se $\rho = 0$ cioè se $\frac{\gamma_{ii}}{c_{ii}} = \sigma$ ma in questo caso dalle (3_{bis}) seguirebbe

$$\alpha_{ii} = k + \sigma\, a_{ii}$$

e φ risulterebbe composizione lineare d'integrali noti.

Da la soprascritta relazione segue al solito modo

$$a_{11} = \rho' + \sigma' c_{22} c_{33}, \quad a_{22} = \rho' + \sigma' c_{33} c_{11}, \quad a_{33} = \rho' + \sigma' c_{11} c_{22}$$

e le (3_{bis}) si possono allora scrivere

$$\alpha_{33} + (\rho + \sigma c_{11})\sigma' c_{33} = \alpha_{22} + (\rho + \sigma c_{11})\sigma' c_{22} = k'$$
$$\alpha_{22} + (\rho + \sigma c_{33})\sigma' c_{22} = \alpha_{11} + (\rho + \sigma c_{33})\sigma' c_{12} = k''$$
$$\alpha_{11} + (\rho + \sigma c_{22})\sigma' c_{11} = \alpha_{33} + (\rho + \sigma c_{22})\sigma' c_{33} = k'''$$

donde facilmente

$$\alpha_{11} = k' - \sigma\sigma'(c_{11}c_{22} + c_{11}c_{33} - c_{22}c_{33}) - \rho\sigma' c_{11}, \quad \alpha_{22} = k' - \sigma\sigma' c_{11}c_{22} - \rho\sigma' c_{22}, \quad \alpha_{33} = k' - \sigma\sigma' c_{11}c_{33} - \rho\sigma' c_{33}$$
$$\alpha_{11} = k'' - \sigma\sigma' c_{11}c_{33} \qquad - \rho\sigma' c_{11}, \; \ldots\ldots$$
$$\alpha_{11} = k''' - \sigma\sigma' c_{11}c_{22} \qquad - \rho\sigma' c_{11}, \; \ldots\ldots$$

e da qui, posto

$$2\, c_{11} c_{22} + 2\, c_{22} c_{33} + 2\, c_{33} c_{11} = 3\, \Gamma^2$$

sarà

$$\alpha_{11} = \frac{k' + k'' + k'''}{3} - \rho\,\sigma' c_{11} - \sigma\,\sigma' (\Gamma^2 - c_{22} c_{33}) \quad \text{ecc.}$$

Sicchè per facili riduzioni, mentre

$$2\, T = \sigma' \Sigma\, c_{22}\, c_{33}\, x_1^2 + \Sigma\, c_{11}\, y_1^2$$

sarà

$$\varphi = \sigma' \Sigma c_{11} x_1^2 - \Sigma y_1^2$$

ed anche questo risultato è dovuto a Clebsch (*).

§ 4.

Caso $b_{11} = b_{22} \neq b_{33}$.

Anche qui dovremmo considerare i varii casi ma i risultati che si ottengono non ànno molta importanza.

Difatti si può mostrare che se

$$2\,T = \Sigma a_{11} x_1^2 + b_{11}(x_1 y_1 + x_2 y_2) + b_{33} x_3 y_3 + \Sigma c_{11} y_1^2$$

oltre ai tre integrali già noti ce n'è un quarto

$$y_3 = \text{cost.}$$

sempre che sia $c_{11} = c_{22}$, $a_{11} = a_{22}$ senza escludere che possa anche essere $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $a_{11} = a_{22} = a_{33}$. In qualunque altro caso, che sian cioè i coefficienti a_{ii} fra loro diversi, o lo siano i c_{ii} o gli uni e gli altri φ risulta composizione lineare d'integrali noti.

Tale risultato è anche dovuto a Clebsch e di esso si è occupato l'Halphen: *Fonctions elliptiques.* T. II. *Sur le mouvement d'un corps dans un liquide indéfini.*

(*) Ponendo qui $c_{33} = 0$ e $\sigma' = \frac{a_{33} - a_{11}}{c_{11}\, c_{22}}$ si ritrova un risultato di cui questo è più generale, come prima avevamo notato.

§ 5.

Caso $b_{11} \neq b_{22} \neq b_{33}$.

Osserviamo anzitutto che sommando a due a due le (3) e sottraendo la rimanente, ad esse possiamo sostituire le altre

$$\left.\begin{aligned} 2\,c_{11}\,(\beta_{33}-\beta_{22}) = 2\,\gamma_{11}\,(b_{33}-b_{22}), \quad 2\,c_{22}\,(\beta_{11}-\beta_{33}) = 2\,\gamma_{22}\,(b_{11}-b_{33}), \\ 2\,c_{33}\,(\beta_{22}-\beta_{11}) = 2\,\gamma_{33}\,(b_{22}-b_{11}). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Dopo ciò per soddisfare la 1.ª del 1.° gruppo consideriamo prima che sia $c_{11} = c_{22} = c_{33} = C$. Dalle (7) si deduce facilmente

$$\frac{\beta_{22}-\beta_{33}}{\gamma_{11}} + \frac{\beta_{33}-\beta_{11}}{\gamma_{22}} + \frac{\beta_{11}-\beta_{22}}{\gamma_{33}} = 0$$

donde

$$\beta_{11} = \rho + \sigma\,\gamma_{22}\,\gamma_{33}, \quad \beta_{22} = \rho + \sigma\,\gamma_{33}\,\gamma_{11}, \quad \beta_{33} = \rho + \sigma\,\gamma_{11}\,\gamma_{22}$$

ma allora le (7) diventano

$$\sigma\,(\gamma_{22}-\gamma_{33}) = \frac{b_{33}-b_{22}}{C}, \quad \sigma\,(\gamma_{33}-\gamma_{11}) = \frac{b_{11}-b_{33}}{C}, \quad \sigma\,(\gamma_{11}-\gamma_{22}) = \frac{b_{22}-b_{11}}{C}$$

e da qui ancora

$$\gamma_{11} + \frac{b_{11}}{C\,\sigma} = \gamma_{22} + \frac{b_{22}}{C\,\sigma} = \gamma_{33} + \frac{b_{33}}{C\,\sigma} = k$$

$$\gamma_{11} = k - \frac{b_{11}}{C\,\sigma}, \quad \gamma_{22} = k - \frac{b_{22}}{C\,\sigma}, \quad \gamma_{33} = k - \frac{b_{33}}{C\,\sigma}$$

e quindi anche

$$\beta_{11} = \rho + \sigma\left(k - \frac{b_{22}}{C\sigma}\right)\left(k - \frac{b_{33}}{C\sigma}\right) = \rho' - \frac{k}{C}(b_{22}+b_{33}) + \frac{b_{22}\,b_{33}}{C^2\,\sigma}, \dots$$

$$(\rho' = \rho + \sigma\,k^2).$$

Sostituendo alle β_{ii} i valori così ottenuti la 1.ª dell'ultimo gruppo si può allora scrivere

$$0 = \left\{\alpha_{11} + a_{11}\left(\frac{b_{11}}{C^2\,\sigma} - \frac{k}{C}\right)\right\}(b_{22}-b_{33}) +$$

$$+ \left\{\alpha_{22} + a_{22}\left(\frac{b_{22}}{C^2\,\sigma} - \frac{k}{C}\right)\right\}(b_{33}-b_{11}) + \left\{\alpha_{33} + a_{33}\left(\frac{b_{33}}{C^2\,\sigma} - \frac{k}{C}\right)\right\}(b_{11}-b_{22})$$

per la quale dev'essere

$$\alpha_{11} = R + S\frac{b_{11}}{C} + a_{11}\left(\frac{k}{C} - \frac{b_{11}}{C^2\sigma}\right); \dots$$

in cui R ed S son costanti che per ora posson rimanere indeterminate. Sostituendo adesso nelle (3_{bis}) i valori trovati per le α_{ii}, β_{ii}, γ_{ii} si avrà

$$(4\,C^2 S\sigma - b_{22}\,b_{33})(b_{33} - b_{22}) + (4\,C\,a_{33} - b_{33}\,b_{11})(b_{11} - b_{33}) + \\ + (4\,C\,a_{22} - b_{11}\,b_{22})(b_{22} - b_{11}) = 0$$

$$(4\,C\,a_{33} - b_{22}\,b_{33})(b_{33} - b_{22}) + (4\,C^2 S\sigma - b_{33}\,b_{11})(b_{11} - b_{33}) + \\ + (4\,C\,a_{11} - b_{11}\,b_{22})(b_{22} - b_{11}) = 0$$

$$(4\,C\,a_{22} - b_{22}\,b_{33})(b_{33} - b_{22}) + (4\,C\,a_{11} - b_{33}\,b_{11})(b_{11} - b_{33}) + \\ + (4\,C^2 S\sigma - b_{11}\,b_{22})(b_{22} - b_{11}) = 0$$

e da qui per la solita considerazione, indicando con ρ', ρ'', ρ''', σ', σ'', σ''' costanti che determineremo in seguito risulta

dalla 1.ª dalla 2.ª

$$4\,C^2 S\sigma - b_{22}\,b_{33} = \rho' + \sigma'\,b_{11}; \quad 4\,C\,a_{33} - b_{22}\,b_{33} = \rho'' + \sigma''\,b_{11};$$

$$4\,C\,a_{33} - b_{33}\,b_{11} = \rho' + \sigma'\,b_{22}; \quad 4\,C^2 S\sigma - b_{33}\,b_{11} = \rho'' + \sigma''\,b_{22};$$

$$4\,C\,a_{22} - b_{11}\,b_{22} = \rho' + \sigma'\,b_{33}; \quad 4\,C\,a_{11} - b_{11}\,b_{22} = \rho'' + \sigma''\,b_{33};$$

dalla 3.ª

$$4\,C\,a_{22} - b_{22}\,b_{33} = \rho''' + \sigma'''\,b_{11}$$

$$4\,C\,a_{11} - b_{33}\,b_{11} = \rho''' + \sigma'''\,b_{22}$$

$$4\,C^2 S\sigma - b_{11}\,b_{22} = \rho''' + \sigma'''\,b_{33}$$

e da qui facilmente

$$\sigma'' + \sigma''' = 2\,b_{11}, \quad \sigma''' + \sigma' = 2\,b_{22}, \quad \sigma' + \sigma'' = 2\,b_{33}$$

ossia

$$\sigma' = -b_{11} + b_{22} + b_{33}, \quad \sigma'' = b_{11} - b_{22} + b_{33}, \quad \sigma''' = b_{11} + b_{22} - b_{33}$$

e quindi anche

$$\rho' = 4\,C^2 S\sigma - (b_{22}\,b_{33} + b_{33}\,b_{11} + b_{11}\,b_{22}) + b_{11}^2, \dots$$

Ma allora

$$4\,C\,a_{11} = 4\,C^2\,S\,\sigma + (b_{22} - b_{33})^2, \quad 4\,C\,a_{22} = 4\,C^2\,S\,\sigma + (b_{33} - b_{11})^2,$$

$$4\,C\,a_{33} = 4\,C^2\,S\,\sigma + (b_{11} - b_{22})^2$$

ed anche

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= R + \frac{S}{C}b_{11} + \left\{ CS\sigma + \frac{(b_{22}-b_{33})^2}{4C} \right\}\left(\frac{k}{C} - \frac{b_{11}}{C^2\,\sigma}\right) = U + \frac{K}{4C^2}(b_{22}-b_{33})^2 - \frac{b_{11}(b_{22}-b_{33})^2}{4C^3\sigma} \\
\alpha_{22} &= \qquad\qquad = U + \frac{K}{4C^2}(b_{33}-b_{11})^2 - \frac{b_{22}(b_{33}-b_{11})^2}{4C^3\sigma} \\
\alpha_{33} &= \qquad\qquad = U + \frac{K}{4C^2}(b_{11}-b_{22})^2 - \frac{b_{33}(b_{11}-b_{22})^2}{4C^3\sigma}\,.
\end{aligned}$$

Conchiudendo se

$$2\,T = \Sigma\,a_{11}\,x_1^2 + \Sigma\,b_{11}\,x_1\,y_1 + C\,\Sigma\,y_1^2, \qquad a_{11} = \frac{(b_{22} - b_{33})^2}{4\,C}$$

sarà con facili riduzioni

$$\varphi = \Sigma\,b_{11}\,(b_{22}^2 + b_{33}^2)\,x_1^2 - 4\,C\,\Sigma\,b_{22}\,b_{33}\,x_1\,y_1 + 4\,C^2\,\Sigma\,b_{11}\,y_1^2 = \text{cost.}$$

Questo il risultato che noi avevamo sin da prima intravisto in base alla legge di reciprocità, risultato che a nostra insaputa, ma con processo differente, aveva già trovato Liapunoff.

Consideriamo adesso il caso che sia $c_{11} = c_{22} \neq c_{33}$ per cui da la 1.ª del 1.° gruppo risulta $\gamma_{11} = \gamma_{22}$ e da le (3)

$$\frac{\gamma_{11}}{c_{11}} = \frac{\gamma_{33}}{c_{33}}$$

ma questo caso che è più particolare dell'altro $\frac{\gamma_{ii}}{c_{ii}} = \sigma$ sarà trattato appresso e si vedrà che non dà alcun risultato notevole.

Escluse le possibili limitazioni per i coefficienti c_{ii} per soddisfare la 1.ª del 1.° gruppo porremo dunque

$$\gamma_{ii} = \rho + \sigma\,c_{ii}.$$

Se $\rho = 0$ si vede subito che φ risulta combinazione lineare d'integrali noti; si può quindi supporre $\rho \neq 0$. Sostituendo nella (3) a γ_{ii} i loro valori ed operando facilmente si ottiene

$$\frac{b_{33}-b_{22}}{c_{11}}+\frac{b_{22}-b_{11}}{c_{33}}+\frac{b_{11}-b_{33}}{c_{22}}=0$$

donde al solito

$$b_{11}=\rho'+\sigma' c_{22}c_{33}, \quad b_{22}=\rho'+\sigma' c_{33}c_{11}, \quad b_{33}=\rho'+\sigma' c_{11}c_{22}.$$

Sostituiti questi valori nelle (7) queste si scriveranno

$$\beta_{33}-\beta_{22}=2\sigma'(\rho+\sigma c_{11})(c_{22}-c_{33}); \quad \beta_{22}-\beta_{11}=2\sigma'(\rho+\sigma c_{33})(c_{11}-c_{22});$$
$$\beta_{11}-\beta_{33}=2\sigma'(\rho+\sigma c_{22})(c_{33}-c_{11})$$

donde

$$\beta_{33}+2\sigma' c_{33}(\rho+\sigma c_{11})=\beta_{22}+2\sigma' c_{22}(\rho+\sigma c_{11})=k$$
$$\beta_{22}+2\sigma' c_{22}(\rho+\sigma c_{33})=\beta_{11}+2\sigma' c_{11}(\rho+\sigma c_{33})=k'$$
$$\beta_{11}+2\sigma' c_{11}(\rho+\sigma c_{22})=\beta_{33}+2\sigma' c_{33}(\rho+\sigma c_{22})=k''$$

e da qui per un procedimento altra volta usato, ponendo

$$2c_{11}c_{22}+2c_{22}c_{33}+2c_{33}c_{11}=3\Gamma^2$$

risulterà

$$\beta_{11}=\frac{k+k'+k''}{3}-2\rho\sigma' c_{11}-2\sigma\sigma'(\Gamma^2-c_{22}c_{33}), \text{ ecc.}$$

e sostituendo nella 1.ª dell'ultimo gruppo i valori di b_{ii}, β_{ii}

$$\left\{\alpha_{11}-a_{11}\left(\frac{\rho}{c_{11}}+\sigma\right)\right\}(c_{33}-c_{22})+\left\{\alpha_{22}-a_{22}\left(\frac{\rho}{c_{22}}+\sigma\right)\right\}(c_{11}-c_{33})+$$
$$+\left\{\alpha_{33}-a_{33}\left(\frac{\rho}{c_{33}}+\sigma\right)\right\}(c_{22}-c_{11})=0$$

donde

$$\alpha_{11}=r+s\,c_{11}+a_{11}\left(\frac{\rho}{c_{11}}+\sigma\right); \quad \alpha_{22}=r+s\,c_{22}+a_{22}\left(\frac{\rho}{c_{22}}+\sigma\right);$$
$$\alpha_{33}=r+s\,c_{33}+a_{33}\left(\frac{\rho}{c_{33}}+\sigma\right).$$

Le (3_{bis}) si possono allora scrivere

$$0=\left(\frac{c_{11}\,s}{\rho}-\sigma'^2\,c_{11}^2\right)(c_{22}-c_{33})+\left(\frac{a_{33}}{c_{33}}-\sigma'^2\,c_{22}^2\right)(c_{33}-c_{11})+$$
$$+\left(\frac{a_{22}}{c_{22}}-\sigma'^2\,c_{33}^2\right)(c_{11}-c_{22})$$

$$0=\left(\frac{a_{33}}{c_{33}}-\sigma'^2\,c_{11}^2\right)(c_{22}-c_{33})+\left(\frac{c_{22}\,s}{\rho}-\sigma'^2\,c_{22}^2\right)(c_{33}-c_{11})+$$
$$+\left(\frac{a_{11}}{c_{11}}-\sigma'^2\,c_{33}^2\right)(c_{11}-c_{22})$$

$$0=\left(\frac{a_{22}}{c_{22}}-\sigma'^2\,c_{11}^2\right)(c_{22}-c_{33})+\left(\frac{a_{11}}{c_{11}}-\sigma'^2\,c_{22}^2\right)(c_{33}-c_{11})+$$
$$+\left(\frac{c_{33}\,s}{\rho}-\sigma'^2\,c_{33}^2\right)(c_{11}-c_{22}).$$

E

da la 1.ª da la 2.ª

$$\frac{c_{11}\,s}{\rho}-\sigma'^2\,c_{11}^2=R'+S'\,c_{11}\,; \qquad \frac{a_{33}}{c_{33}}-\sigma'^2\,c_{11}^2=R''+S''\,c_{11}\,;$$

$$\frac{a_{33}}{c_{33}}-\sigma'^2\,c_{22}^2=R'+S'\,c_{22}\,; \qquad \frac{c_{22}\,s}{\rho}-\sigma^2\,c_{22}^2=R''+S''\,c_{22}\,;$$

$$\frac{a_{22}}{c_{22}}-\sigma'^2\,c_{33}^2=R'+S'\,c_{33}\,; \qquad \frac{a_{11}}{c_{11}}-\sigma'^2\,c_{33}^2=R''+S''\,c_{33}\,;$$

da la 3.ª

$$\frac{a_{22}}{c_{22}}-\sigma'^2\,c_{11}^2=R'''+S'''\,c_{11}$$

$$\frac{a_{11}}{c_{11}}-\sigma'^2\,c_{22}^2=R'''+S'''\,c_{22}$$

$$\frac{c_{33}\,s}{\rho}-\sigma'^2\,c_{33}^2=R'''+S'''\,c_{33}.$$

Da qui, operando come in un caso precedente

$$S'=-2\,\sigma'^2\,c_{11}+\frac{s}{\rho}\,, \quad S''=-2\,\sigma'\,c_{22}+\frac{s}{\rho}\,, \quad S'''=-2\,\sigma'^2\,c_{33}+\frac{s}{\rho}$$

$$R'=\sigma'^2\,c_{11}^2 \qquad R''=\sigma'^2\,c_{22}^2 \qquad R'''=\sigma'^2\,c_{33}$$

ma allora sostituendo e sottraendo la 3.ª della 2.ª colonna dalla 2.ª della 3.ª colonna si à

$$\frac{s}{\rho}(c_{33} - c_{22}) = 0$$

e per essere $c_{22} \gtrless c_{33}$ e $\rho \gtrless 0$ segue $s = 0$.

Dalle 9 relazioni soprascritte si ottiene allora

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sigma'^2 c_{11}(c_{33}^2 + c_{22}^2 - 2c_{22}c_{33}) = \sigma'^2 c_{11}(c_{22}^2 + c_{33}^2) - 2\sigma'^2 c_{11} c_{22} c_{33} \\ a_{22} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \sigma'^2 c_{22}(c_{33}^2 + c_{11}^2) - 2\sigma'^2 c_{11} c_{22} c_{33} \\ a_{33} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \sigma'^2 c_{33}(c_{11}^2 + c_{22}^2) - 2\sigma'^2 c_{11} c_{22} c_{33} \end{aligned}$$

e quindi

$$\alpha_{11} \doteq r + (\rho + \sigma c_{11})\sigma'^2 (c_{33}^2 + c_{22}^2) - 2(\rho + \sigma c_{11})\sigma'^2 c_{22} c_{33} \text{ ecc.}$$

Sicchè, tenendo conto degli integrali noti e riducendo se

$$2T = \Sigma a_{11} x_1^2 + 2\sigma' \Sigma c_{22} c_{33} x_1 y_1 + \Sigma c_{11} y_1^2, \quad [a_{11} = \sigma'^2 c_{11}(c_{22}^2 + c_{33}^2)]$$

sarà

$$\varphi = \Sigma \sigma'^2 (c_{33} - c_{22})^2 x_1^2 - \Sigma 2\sigma' c_{11} x_1 y_1 + \Sigma y_1^2 = \text{cost.}$$

Questo risultato è dovuto a Stekloff il quale lo presenta sotto altra forma; considerando infatti che

$$\begin{aligned} \Sigma \sigma^2 (c_{33} - c_{22})^2 x_1^2 = \Sigma \sigma'^2 [c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2 - 2c_{11}c_{22} - 2c_{22}c_{33} - \\ - 2c_{33}c_{11} - (c_{11}^2 - 2c_{11}c_{22} - 2c_{11}c_{33})]\, x_1^2 \end{aligned}$$

e che

$$\Sigma \sigma'^2 [c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2 - 2c_{11}c_{22} - 2c_{11}c_{33} - 2c_{22}c_{33}]\, x_1^2 = \text{cost.}$$

si potrà scrivere

$$\varphi = \sigma'^2 \Sigma c_{11}(c_{11} - 2c_{22} - 2c_{33})\, x_1^2 + 2\sigma' \Sigma c_{11} x_1 y_1 - \Sigma y_1^2 = \text{cost.}$$

Se però noi richiamiamo la forma di $2T$ e di φ nella prima maniera e sostituiamo alle c_{ii} le b_{ii} di stesso indice ed a σ', $-\frac{1}{2C}$ si vedrà che $2T$ assumerà la forma che aveva φ nel caso precedente e φ la forma di $2T$.

Il caso di Stekloff e l'altro che già prima di noi aveva trovato per diversa via il Liapunoff son dunque fra loro reciproci.

Così ci pare di aver completato l'analisi. Prima di terminare però notiamo che se nel risultato di Stekloff si fa $c_{33} = 0$ e $\sigma' = \sqrt{\frac{k}{c_{11}\, c_{22}}}$ si ritrova un risultato che noi abbiamo già incontrato alla fine del § 2. Ed è curioso osservare a questo proposito che mentre il risultato di Stekloff si ottiene a condizione che sia $b_{11} \neq b_{22} \neq b_{33}$, l'altro con tale limitazione non si otterrebbe più, poichè abbiamo visto che essendo $c_{33} = 0$ e $b_{11} \neq b_{22} \neq b_{33}$, φ risulta composizione lineare d'integrali noti. D'altra parte non è inutile aver trovato quel risultato speciale, perchè esso può avere qualche interesse meccanico.

Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti.

(Di Gino Fano, *a Torino.)*

In questa Memoria vengono trattate alcune questioni di carattere proiettivo riguardanti la varietà cubica generale (priva di punti doppi) dello spazio a quattro dimensioni. Fra altro, vengono completamente determinati gli spazi che sono tangenti a questa varietà in 2, 3 o 4 punti diversi, nonchè le proprietà e i caratteri di alcuni enti a cui quegli spazi danno luogo. Un procedimento per la costruzione degli spazi pluritangenti di questa stessa varietà è stato dato parecchi anni or sono dal sig. Enriques (*), il quale ne ha anche dedotta la valutazione di alcuni dei caratteri sopra accennati; lo stesso procedimento, insieme con altri, trova pure applicazione in questa Memoria, ma quei caratteri risultano ora modificati (si vegga in proposito quanto è detto in una nota al n.° 8). E, in conseguenza, risultano pure modificati alcuni caratteri delle varietà cubiche e loro Hessiane, che si trovano nell'ultima parte di un lavoro, di poco posteriore, del sig. Ascione (**).

1. Sia V^3 (o brevemente V) una varietà cubica a tre dimensioni dello spazio S_4, priva di punti doppi. Ogni punto di questo spazio avrà rispetto ad essa una certa quadrica polare; e tutte queste quadriche formeranno un sistema lineare ∞^4, privo di punti basi. Vi sarà in particolare una triplice infinità di punti le cui quadriche polari hanno un punto doppio, cioè sono

(*) *Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio a quattro dimensioni* (Giorn. di matem., vol. 31 (1893); p. 31-35).

(**) *Sulla Hessiana di una varietà nello spazio a quattro dimensioni* (ibid., p. 210-17).

coni. Il luogo di questi punti è la *varietà Hessiana* di V, la quale è del 5.° ordine, ed è anche in pari tempo il luogo dei vertici di quei coni quadrici. Anzi — analogamente a quanto avviene nel piano e nello spazio ordinario (*) — se la quadrica polare di un punto X è un cono di vertice Y, a sua volta Y avrà per quadrica polare un cono di vertice X; i due punti X e Y si diranno allora « punti corrispondenti » della varietà Hessiana, e saranno reciproci rispetto a tutte le quadriche del sistema polare (e viceversa).

La varietà Hessiana di V ha una curva doppia di ordine 20 (**), luogo dei punti le cui quadriche polari sono coni di 2.^{a} specie. Ciascuno di questi punti ha, sulla Hessiana, infiniti corrispondenti: tutti quelli della retta asse del suo cono polare; ed è perciò vertice di tutto un fascio di coni del sistema polare.

La varietà Hessiana incontra V secondo una superficie del 15.° ordine, che si può chiamare la « superficie parabolica » di V. Gli spazi S_3 tangenti a V nei punti di questa superficie hanno la proprietà caratteristica di incontrare V secondo superficie cubiche con punto doppio biplanare; e gli spazi tangenti a V nei $20 \, . \, 3 = 60$ punti comuni a questa varietà e alla curva doppia della varietà Hessiana incontrano V secondo superficie con punto doppio uniplanare.

La varietà V è di classe 24, ossia per un piano generico passano 24 spazi ad essa tangenti. I punti di contatto di questi spazi sono le intersezioni di V colla curva di 8.° ordine che è base della rete formata dalle quadriche polari dei punti del piano considerato.

Non insistiamo ulteriormente sopra queste proprietà, perchè esse possono riguardarsi come generalmente note. E ci riserviamo pure di considerare in seguito come note, quando occorra farne uso, tutte le proprietà fondamentali della polarità rispetto alla varietà V.

2. Una retta generica di S_4 è contenuta in una semplice infinità di quadriche del sistema polare determinato da V, formanti un fascio. Vi sono

(*) Cfr. ad es., SALMON-FIEDLER, *Analytische Theorie der höheren ebenen Curven*, p. 193-94; e: *Analytische Geometrie des Raumes*, II, p. 377-78.

(**) Questa curva si rappresenta analiticamente scrivendo che il determinante Hessiano di V, che è simmetrico del 5.° ordine, ha la caratteristica *tre;* e di qui segue appunto la determinazione dell'ordine della curva stessa. Per la formola generale applicabile a questo caso v. C. SEGRE: *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei vari gradi estratti da una matrice* (Rend. Lincei (5), IX, 1900).

però delle rette particolari, ciascuna delle quali appartiene a un'intera rete di queste quadriche; ad esse daremo il nome di rette « speciali » (*). Sopra una retta speciale le ∞^4 quadriche del sistema polare segheranno soltanto una semplice infinità, vale a dire un'involuzione di coppie di punti; e ciascuna di queste coppie farà parte di un gruppo G_{16} di 16 punti, base di un sistema lineare ∞^3 di quadriche contenuto nel sistema polare complessivo ∞^4. Viceversa, ogni retta la quale congiunga due punti di un tale gruppo G_{16} imporrà una sola condizione ulteriore a una delle ∞^3 quadriche passanti per questo G_{16} la quale debba contenerla per intero; essa apparterrà perciò a una doppia infinità di queste quadriche sarà dunque una retta « speciale » — e conterrà, oltre a quella prima coppia di punti, anche ∞^1 altre coppie analoghe, appartenenti a altrettanti diversi gruppi G_{16}. E poichè ogni punto di S_4 appartiene a uno e un solo gruppo G_{16}, così per quel punto passeranno precisamente 15 rette speciali (quelle che lo congiungono ai rimanenti punti del medesimo gruppo G_{16}); e le rette speciali di tutto lo spazio S_4 saranno in numero di ∞^3.

Le ∞^2 quadriche del sistema polare che passano per una retta speciale avranno a comune, oltre questa retta, una curva di 7.° ordine e genere 3 avente tale retta per trisecante. Questa curva la chiameremo brevemente la « C_3^7 residua » di quella retta.

Nello spazio S_4 (anzi in ogni spazio lineare) le rette contenute nelle ∞^2 quadriche di una rete formano un complesso cubico (**). Infatti per ogni punto dello spazio passano ∞^1 quadriche della rete, formanti un fascio; le rette contenute in queste ∞^1 quadriche sono le corde della varietà φ^4 base del fascio; e, fra queste rette, quelle che escono dal punto considerato saranno le generatrici del cono cubico che da questo medesimo punto proietta la φ^4. — Ora nel sistema polare ∞^4 determinato dalla nostra varietà cubica V sono contenute ∞^6 reti di quadriche, le quali individuano altrettanti complessi cubici di rette; e si vede immediatamente che *il sistema ∞^3 delle rette speciali è l'intersezione completa di questi ∞^6 complessi cubici* (***).

(*) Enriques, l. c. p. 32.

(**) Ossia una varietà rappresentata da un'unica equazione di 3.° grado fra le ordinarie coordinate di retta $r_{ik} = (x_i y_k)$.

(***) Qualunque sistema lineare ∞^4 di quadriche dello spazio S_4 (anche se non è precisamente il sistema delle quadriche polari rispetto a una varietà cubica) dà egualmente origine a un sistema ∞^3 di rette « speciali », contenuto in ∞^6 complessi cubici. Il sistema

Gli spazi S_3 polari dei punti di una retta speciale (rispetto alla varietà V) formano un fascio, avendo a comune l'intero piano luogo dei punti le cui quadriche polari passano per quella retta; e ogni S_3 di questo fascio è spazio polare di *due* punti di quella retta. (Invece gli S_3 polari dei punti di una retta generica hanno a comune soltanto una retta, e inviluppano un cono quadrico di 2.ª specie avente quest'ultima retta per asse).

3. I diversi gruppi G_{16} considerati al n.° prec. formano nello spazio S_4 un'involuzione I_{16}; e ciascuno di essi si compone dei poli di un medesimo spazio S_3. Quando fra questi 16 poli di uno spazio S_3 due (almeno) coincidono in un punto P, il sistema lineare ∞^3 formato dalle quadriche polari dei punti di questo S_3, per il quale quel G_{16} è gruppo base, avrà in P (almeno) una tangente fissa; e allora, imponendo come tangenti in P tre altre rette arbitrarie uscenti da questo punto, si vede che vi sarà nel detto sistema ∞^3 una quadrica avente in P un punto doppio, vale a dire un cono di vertice P: sarà dunque P un punto della varietà Hessiana di V (e viceversa).

Ora sopra ogni retta speciale r vi è un'involuzione di coppie di punti contenute rispett. in altrettanti gruppi G_{16}. Perciò ciascuno dei due punti doppi M, N di questa involuzione coinciderà con uno dei 15 suoi coniugati nella I_{16} (e le ∞^3 quadriche del sistema polare che passano per questo punto saranno tutte ivi tangenti alla retta r): sicchè i due punti M e N staranno sulla varietà Hessiana di V. E anzi, poichè questi due punti sono evidentemente reciproci rispetto a tutte le quadriche del sistema polare, essi saranno altresì « punti corrispondenti » della Hessiana (n.° 1). — Le rimanenti *tre* intersezioni di r colla varietà Hessiana (che è del 5.° ordine) saranno i tre punti comuni a r stessa e alla sua C_3^7 residua: poichè in ognuno di questi punti le ∞^2 quadriche del sistema polare passanti per r, e quindi anche per la C_3^7, hanno un piano tangente fisso (il piano determinato da r e dalla tangente alla C_3^7), e perciò tutte le ∞^3 quadriche del sistema polare che passano per quel punto vi avranno ancora una tangente fissa.

---

analogo (∞^2) di rette nello spazio ordinario (di ordine 7 e classe 3) è stato studiato dal Sig. Reye (*Geometrie der Lage*, 3te Aufl., III, p. 140 e seg.), e fu incontrato anche da me in altre ricerche (*Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3.° ordine prive di linea singolare*, Mem. Acc. Torino, ser. II, t. L, 1901; § 14).

Le cinque intersezioni di una retta speciale colla varietà Hessiana di V sono i due punti doppi dell'involuzione segata sopra questa retta dal sistema polare di quadriche, e le tre intersezioni della medesima retta colla sua C_3^7 residua.

Questi cinque punti sono in generale distinti. E la retta r sarà tangente alla varietà Hessiana in uno dei due punti M, N sopra considerati soltanto quando la sua C_3^7 residua passa per questo punto. Ci conviene però di dare a questa condizione una forma diversa.

4. Per una proprietà nota delle curve piane e superficie del terzo ordine (*), la quale si estende immediatamente alle varietà cubiche di uno spazio qualsiasi, *due punti corrispondenti della Hessiana di una varietà cubica V sono sempre tali che lo spazio tangente alla Hessiana medesima in uno di essi è polare dell'altro rispetto alla varietà V.* Ora, se la retta speciale r considerata al n.° prec. è tangente alla Hessiana p. e. nel punto M, essa dovrà stare nello spazio tangente alla Hessiana in questo medesimo punto, il quale non è altro che lo spazio polare di N rispetto a V; questo spazio passerà allora anche per il punto N, e questo punto starà perciò sulla varietà cubica V (e viceversa). La quadrica polare di N, che è un cono di vertice M, dovrà allora passare per N, ossia avrà come generatrice la retta $r \equiv MN$; e questa retta sarà perciò una tangente tripunta di V nel punto N.

Una retta speciale $r \equiv MN$ *è tangente alla varietà Hessiana in uno dei due punti M, N sempre e solo quando l'altro di questi due punti sta sulla varietà V. La retta* r *è allora tangente tripunta di V in questo secondo punto.*

Più particolarmente, perchè la retta speciale $r \equiv MN$ sia *bitangente* della Hessiana (nei due punti M, N) sarà necessario e sufficiente ch'essa sia in entrambi questi punti tangente tripunta (almeno) della V; e ciò avviene soltanto quando essa è contenuta in quest'ultima varietà.

Le (sole) rette speciali contenute nella varietà V sono bitangenti della varietà Hessiana; e la toccano precisamente nei punti doppi delle involuzioni segate su di esse dalle quadriche del sistema polare (**).

(*) Salmon-Fiedler, op. cit.,; v. rispett. p. 196 e p. 378.

(**) Questa proprietà è l'immediata estensione di quella che riguarda il comportamento delle rette contenute in una superficie cubica rispetto alla linea parabolica di questa superficie (Salmon-Fiedler, op. cit., p. 399).

Spazi bitangenti.

5. Quando una retta speciale è contenuta nella varietà V, lo spazio S_3 polare di un suo punto qualunque e che è pure polare di un secondo punto della stessa retta (coniugato del primo nell'involuzione I_{16}) sarà tangente a V in entrambi questi punti; sarà dunque uno spazio *bitangente*. E viceversa, se la varietà V è toccata da uno spazio S_3 in due diversi punti A e A', anzitutto la retta $A\,A'$ sarà una retta speciale, perchè congiunge due fra i 16 poli di quello spazio; e essa apparterrà altresì alla varietà V, essendo tangente a questa in entrambi quei punti. Gli ∞^1 spazi tangenti a V nei punti di una tale retta p saranno tutti spazi bitangenti, col secondo punto di contatto sopra questa stessa retta; essi formeranno un fascio (n.° 2), e avranno a comune un piano π che dovrà passare per p e sarà tangente a V in ogni punto di questa retta. Questo piano incontrerà V secondo la retta p contata due volte, più una retta ulteriore (che si potrà chiamare la « coniugata » di p), in generale distinta da p stessa. E poichè la varietà V ha un numero doppiamente infinito di spazi bitangenti, così le rette speciali p contenute in V saranno in numero semplicemente infinito e formeranno una rigata Σ, luogo dei punti di contatto di quegli spazi; lungo ognuna di queste ∞^1 rette p la varietà V ammetterà un piano tangente fisso π, e gli ∞^2 spazi bitangenti di V si distribuiranno negli ∞^1 fasci che hanno per assi questi piani π.

Ognuna delle ∞^1 rette speciali p avrà la proprietà di contare come due (almeno) fra le sei rette della varietà V che escono da uno qualunque dei suoi punti (poichè lo spazio S_3 tangente a V in questo punto è tangente anche in un secondo punto di quella medesima retta; e sopra una superficie cubica di S_3 con due punti doppi la retta che congiunge questi punti conta sempre come due almeno fra le sei rette della superficie che escono sia dall'uno che dall'altro di essi). Viceversa, se fra le sei rette di V che escono da un punto X due (almeno) coincidono con una certa retta x, lo spazio S_3 tangente a V in X dovrà toccare questa varietà anche in un secondo punto di quella stessa retta (in generale distinto dal primo, ma che potrebbe tuttavia essergli infinitamente vicino); quello spazio sarà perciò uno spazio bitangente, e x sarà una retta speciale. La superficie rigata Σ sarà perciò anche, in pari tempo, il luogo di quei punti di V pei quali coincidono due almeno delle sei rette di questa varietà che ne escono.

6. Dico ora che *la rigata Σ testè considerata è una sviluppabile.*

Ricordiamo perciò che nella varietà cubica generale V è contenuta una doppia infinità di rette; e a ognuna di queste ne sono infinitamente vicine, sopra V stessa, ∞^1 altre. *Una retta non speciale contenuta in V è tale che tutte quelle ad essa infinitamente vicine sono sghembe rispetto ad essa;* poichè da nessun punto di quella retta esce una seconda retta di V infinitamente vicina alla prima. — Sia invece p una retta speciale contenuta in V; e sia π il piano tangente a V lungo di essa, e P un punto qualunque di p. Si consideri poi sopra V, ma fuori della superficie Σ, un punto P' convenientemente prossimo a P; e questo punto si faccia tendere alla posizione P, muovendosi sopra V con continuità. Allora due fra le 6 rette di V uscenti dal punto P' tenderanno alla posizione p; e il fascio da esse individuato tenderà al fascio $P(\pi)$. Questo è dunque un fascio (o varietà lineare ∞^1) di rette *tangente* nell'elemento p al sistema ∞^2 formato da tutte le rette contenute in V; e poichè P è un punto arbitrario della retta p, così la varietà lineare ∞^2 di rette tangente a quel medesimo sistema nell'elemento p dovrà contenere tutti gli ∞^1 fasci $P(\pi)$, e non sarà dunque altro che il piano rigato π. Siccome le rette di questo piano sono tutte incidenti alla p, così potremo dire che *una retta speciale contenuta nella varietà V è invece incidente a tutte quelle ad essa infinitamente vicine:* queste ∞^1 rette consecutive a p sopra V appartengono ai singoli fasci $P(\pi)$, cioè escono rispett. dai singoli punti di p e stanno tutte nel piano π (*).

Ciò premesso, è chiaro che in una rigata formata da rette contenute in V una generatrice qualsiasi sarà generatrice singolare, ossia incidente alla consecutiva, sempre e solo quando essa sia retta speciale (nel senso di cui

(*) Questo fatto è d'accordo con un'osservazione fatta dal Sig. KLEIN (*Ueber Flächen 3ter Ordnung*, Math. Ann. VI, p. 566) che una superficie cubica di S_3 sulla quale due rette si facciano avvicinare indefinitamente acquista al limite, sopra queste rette, uno o due punti doppi, secondo che tali rette al limite sono sghembe, oppure incidenti. Ora lo spazio tangente alla varietà V in un punto di una retta speciale tocca quella varietà anche in un secondo punto di questa retta, e incontra perciò V secondo una superficie con due punti doppi; mentre lo spazio tangente in un punto di una retta non speciale non può mai essere tangente a V in un secondo punto di questa stessa retta.

al n.° 5). E nella rigata Σ, formata dalle rette speciali p, ogni generatrice dovrà appoggiarsi alla successiva; sicchè questa rigata sarà appunto una sviluppabile, c. s. v. d. I piani tangenti di questa sviluppabile, i quali devono toccarla lungo le singole rette p, saranno gli stessi piani π sopra considerati, che sono appunto tangenti a V lungo le medesime rette.

Le ∞^1 rette speciali contenute in una varietà cubica V formano una rigata sviluppabile; e i piani tangenti a V lungo quelle rette sono pure tangenti a questa sviluppabile. Questa sviluppabile si può anche considerare come *l'inviluppo degli ∞^2 spazi bitangenti della varietà V* (*).

7. Per determinare l'ordine della rigata sviluppabile Σ conviene premettere qualche altra considerazione intorno al sistema ∞^2 delle rette contenute in una varietà cubica generale (**). E ci proponiamo precisamente di determinare *l'ordine* e il *genere* della rigata formata da quelle rette della varietà che si appoggiano a un piano generico ξ.

Quanto all'ordine, basterà osservare che questa rigata ha la cubica intersezione del piano ξ colla varietà V come direttrice sestupla, e che ogni spazio S_3 passante per questo piano la incontra ulteriormente secondo 27 ge-

(*) Si può dimostrare facilmente anche per assurdo che la rigata Σ deve essere una sviluppabile. Infatti per ogni rigata non sviluppabile appartenente a uno spazio superiore a S_3 esiste, corrispondentemente a ogni generatrice g non singolare, un determinato spazio S_3 che deve considerarsi come congiungente questa generatrice alla consecutiva (ossia è posizione limite dello spazio S_3 che congiunge la generatrice g a un'altra, variabile, che si avvicina indefinitamente alla prima entro la rigata). In questo particolare S_3 sono contenuti i piani tangenti alla rigata proposta nei singoli punti di g, i quali formano un fascio proiettivo alla punteggiata dei loro punti di contatto. Ogni piano di questo fascio è tangente alla rigata in uno e un solo punto di g; e ogni altro S_3 passante per g non potrà contenere che uno solo di questi piani, e non potrà perciò toccare la rigata proposta che in un solo punto della generatrice g. Ora, se p è una generatrice qualunque della nostra rigata Σ, un S_3 qualsiasi passante per il corrispondente piano π sarà tangente a V, e perciò anche a Σ, in due punti, in generale distinti, di quella retta; e al variare di quello spazio S_3 nel fascio π varieranno pure questi due punti di contatto sopra p, contrariamente a quanto si è veduto che deve avvenire per ogni generatrice non singolare di una rigata sghemba.

(**) Questo sistema di rette è certo irriducibile: esso potrebbe spezzarsi in due o più altri (distinti) soltanto quando la varietà cubica su cui giace avesse qualche punto doppio. Per maggiori dettagli si veda la mia Nota: *Sulle superficie algebriche...*, negli Atti della R. Acc. di Torino, vol. 39; 1904.

neratrici (le 27 rette contenute nella superficie intersezione del medesimo S_3 colla varietà V): perciò l'ordine della nostra rigata sarà $= 3 . 6 + 27 = 45$.

Per determinarne il genere, osserveremo che su questa stessa rigata, considerata come ente algebrico ∞^1 di rette, gli spazi S_3 passanti per il piano ξ segano gruppi di 27 generatrici formanti una serie lineare g^1_{27}; e in questa serie lineare si hanno gruppi con elementi multipli, cioè due almeno delle 27 rette coincidono, soltanto quando lo spazio S_3 è tangente alla varietà V (*). Ora di questi spazi tangenti, nel fascio ξ, ve ne sono 24 (n.° 1); e in ciascuno di essi vi sono 6 rette (quelle che passano per il punto di contatto, ossia per il punto doppio della superficie sezione) che vanno contate due volte. In tutta la serie lineare vi saranno dunque $6 . 24 = 144$ elementi doppi; e il genere incognito p della nostra rigata dovrà perciò soddisfare alla relazione:

$$2(27 + p - 1) = 144$$

dalla quale si ricava $p = 46$.

Le rette di una varietà cubica generale che si appoggiano a un piano generico formano una rigata di ordine 45 e genere 46.

Questa rigata si può considerare come l'intersezione del sistema ∞^2 di rette contenuto nella varietà V col *complesso lineare singolare* formato da tutte le rette dello spazio S_4 che si appoggiano al piano dato. E, più generalmente, la rigata intersezione del medesimo sistema ∞^2 di rette con un complesso lineare affatto qualunque avrà anch'essa il medesimo ordine 45 e lo stesso genere 46. In altri termini, nello spazio lineare S_9 definito dalle dieci coordinate omogenee di retta $r_{ik} = (x_i y_k)$ $(i \neq k;\ i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$ il sistema ∞^2 delle rette contenute nella varietà cubica V si potrà considerare come una *superficie di ordine 45, a sezioni di genere 46* (**).

In particolare, se il piano dato ξ è tritangente a V, ossia incontra questa varietà secondo una terna di rette, la rigata R^{45} delle rette contenute in V e incidenti a questo piano si spezzerà in tre rigate di ordine $\frac{45}{3} = 15$. E siccome queste rigate hanno a due a due *cinque* generatrici a comune (delle

(*) Poichè in una superficie di 3.° ordine priva di punti doppi le 27 rette sono sempre tutte distinte (KLEIN, Mem. cit., *Math. Ann.*, VI, p. 566).

(**) I principali caratteri di questa superficie sono stati determinati da me in un altro lavoro (*Sul sistema ∞^2 di rette contenute in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni*; Atti della R. Acc. di Torino, vol. 39.°; 1904).

quali quattro appartengono al punto d'incontro delle loro direttrici rettilinee, e una al piano di queste direttrici), così il loro genere p' si potrà determinare valendosi della solita formola che esprime il genere di una curva composta; in questo caso:

$$3\,p' + 3 \,.\, 5 - 2 = 46$$

da cui

$$p' = 11.$$

Le rette di una varietà cubica generale che si appoggiano a una qualunque fra queste stesse rette formano una rigata di ordine 15 e genere 11.

8. L'ordine della sviluppabile Σ formata dalle rette speciali contenute in V sarà dato dal numero delle sue generatrici che si appoggiano a un piano generico, ossia dal numero di quei punti della curva di 3.° ordine χ^3, intersezione di questo piano colla varietà V, pei quali coincidono due delle sei rette di V che ne escono. Ora le ∞^1 rette di V che si appoggiano a quel piano, e quindi alla curva χ^3, formano una rigata di genere 46; e in questa rigata le sestuple di rette uscenti dai singoli punti di χ^3 formano un'involuzione ellittica I_6^1, della quale si domandano gli elementi doppi. Il numero di questi elementi è dato dalla formola di Zeuthen-Segre (*):

$$y = 2\,(p' - 1) - 2\,\mu\,(p - 1)$$

per $\mu = 6$, $p = 1$, $p' = 46$; onde $y = 90$.

La sviluppabile Σ è dunque di ordine 90 (**). E vi saranno perciò $\frac{90}{3} = 30$ sue generatrici che si appoggiano a una qualsiasi retta non speciale contenuta in V. — Nella rigata di ordine 15 e genere 11 formata da tutte

(*) Zeuthen: *Nouvelle démonstration...* (Math. Ann. III, p. 150); Segre: *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Ann. di Mat., ser. II, t. 22; n.° 40).

(**) Il Sig. Enriques nella Mem. cit. (p. 32) trova che questa superficie è di ordine 120. Ma nella corrispondenza (20, 20) da lui considerata sulla retta non speciale r sono punti uniti anche le 5 intersezioni di r colla varietà Hessiana, per ciascuna delle quali due delle rimanenti rette di V che ne escono stanno in un medesimo piano per r; e ciascuna di queste intersezioni assorbe *due* coincidenze. Perciò sono soltanto $40 - 5 \,.\, 2 = 30$ le coincidenze dovute a rette speciali che si appoggiano ad r.

le rette di V che si appoggiano a questa retta non speciale i gruppi di 5 generatrici uscenti dai singoli punti della direttrice rettilinea formano una serie lineare g_5^1, della quale quelle 30 generatrici di Σ sono precisamente i $2\,(5 + 11 - 1) = 30$ elementi doppi.

9. L'ordine della sviluppabile Σ si può determinare anche per un'altra via, la quale permette di trovarne in pari tempo il genere.

Le quadriche polari (rispetto a V) dei punti di un piano qualsiasi ξ formano una rete, e le rette contenute in tutte queste quadriche formano a lor volta un complesso cubico Γ, contenente tutte le ∞^3 rette speciali (n.° 2) e perciò anche le ∞^1 generatrici di Σ. D'altra parte una retta non speciale contenuta in V appartiene a un solo fascio di quadriche del sistema polare; e queste sono precisamente le quadriche polari dei punti della retta medesima. Perciò le rette contenute in pari tempo nella varietà V e nel complesso Γ o saranno generatrici di Σ, oppure dovranno appoggiarsi al piano ξ. E poichè queste ultime formano una rigata di ordine 45 (n.° 7), così Σ sarà di ordine $3 \,.\, 45 \quad 45 = 90$.

La rigata (sviluppabile) Σ può dunque segarsi dalla varietà ∞^2 delle rette contenute in V, e in infiniti modi, mediante un complesso cubico passante per l'intersezione della medesima varietà ∞^2 con un complesso lineare di rette. Essa appartiene dunque al sistema lineare *doppio* di quello che sulla stessa varietà ∞^2 segano i complessi lineari di rette; e siccome quest'ultimo sistema è di ordine 45 e genere 46, così il primo sarà di genere

$$2 \,.\, 46 + 45 - 1 = 136.$$

Questo stesso sarà dunque, in generale, il genere della rigata (sviluppabile) Σ; e lo sarà certo fin tanto che essa non abbia elementi doppi.

Ora una generatrice doppia di Σ non potrebbe essere (come si vede immediatamente) che una generatrice di regresso, tale quindi che per ogni suo punto non soltanto due, ma tre delle rette di V che ne escono vengano con essa a coincidere. Allora tutti gli S_3 bitangenti a V in punti di questa retta segherebbero V secondo superficie con due punti doppi biplanari (perchè in questo caso soltanto la retta che congiunge i due punti di contatto conta per ciascuno di essi come tre fra le sei che ne escono), e V ammetterebbe lungo quella retta un piano osculatore fisso (ossia un piano che l'incontra secondo tale retta soltanto, contata tre volte). E l'enumerazione delle costanti ci mostra facilmente che sopra una varietà cubica generale non esistono rette così fatte (*).

Concludiamo pertanto: *Sopra una varietà cubica generale le ∞^1 rette speciali formano una rigata sviluppabile di ordine 90 e genere 136.*

10. Si può determinare facilmente anche l'ordine della varietà a tre dimensioni formata dagli ∞^1 piani tangenti π della sviluppabile Σ. Esso è dato infatti dal numero di quei piani π che si appoggiano a una retta generica s, ossia dal numero degli spazi bitangenti che passano per questa retta. Ora gli spazi tangenti a V e passanti per la retta s hanno i loro punti di contatto sulla superficie φ^4 base del fascio formato dalle quadriche polari dei punti di s medesima; e perciò quelli fra essi che sono bitangenti a V avranno i punti di contatto nelle intersezioni di questa superficie φ^4 colla sviluppabile Σ, le quali sono in numero di $4 . 90 = 360$. Saranno dunque $\frac{360}{2} = 180$ gli spazi bitangenti che passano per s; e questo sarà pure l'ordine della varietà a tre dimensioni formata dai piani π, tangenti alla sviluppabile Σ.

Questa varietà avrà a comune con V una superficie di ordine $3 . 180 = 540$, della quale farà parte la sviluppabile Σ^{90} contata due volte, poichè essa è doppia per la varietà formata dai piani π. La parte residua, di ordine 360, sarà la rigata luogo di quelle rette di V che sono « coniugate » (cfr. n.° 5) delle rette speciali p; e questa nuova rigata non sarà in generale una sviluppabile, perchè una sua generatrice qualunque non potrà essere incidente alla consecutiva, a meno di non essere anch'essa una retta speciale (n.° 6).

11. Dello spigolo di regresso σ della sviluppabile Σ si conoscono ora *tre* caratteri: il *genere* 136; il *primo rango*, ossia l'ordine $= 90$ della rigata sviluppabile formata dalle sue tangenti; e il *secondo rango*, ossia l'ordine $= 180$

(*) Infatti l'imporre a una varietà cubica di incontrare un dato piano secondo una retta assegnata, contata tre volte, equivale a 9 condizioni lineari (come se si trattasse di una data cubica piana qualsiasi); e perciò una varietà soddisfacente a queste condizioni dipende ancora da $34 - 9 = 25$ parametri. D'altra parte la scelta di quel piano, in S_4, dipende da 6 costanti, e la scelta della retta nel piano da altre 2 costanti; sicchè, complessivamente, una varietà con piano osculatore fisso lungo una retta dipenderà soltanto da $6 + 2 + 25 = 33$ parametri, mentre le varietà cubiche di S_4 sono in numero di ∞^{34}.

della varietà formata dai suoi piani osculatori, cioè dai piani tangenti di questa sviluppabile.

Indicando pertanto con m l'ordine della linea σ, e con β il numero delle sue cuspidi, avremo le due relazioni (*):

$$2(m + 136 - 1) - \beta = 90$$

$$3(m + 2 \cdot 136 - 2) - 2\beta = 180$$

dalle quali si ricava $m = 270$, $\beta = 720$ (e questi valori risulteranno anche confermati in seguito per altre vie; cfr. n.[i] 12 e 19).

Lo spigolo di regresso σ^{270} si potrà considerare come il luogo delle intersezioni delle coppie di rette speciali p consecutive, e sarà perciò il luogo di quei punti di V pei quali non soltanto due, ma *tre* delle sei rette che ne escono sono venute a coincidere colla corrispondente p (ivi tangente a σ). E per ognuna delle 720 cuspidi di σ coincideranno colla p, che sarà la tangente cuspidale, *quattro* delle medesimo sei rette. D'altra parte una superficie cubica dello spazio ordinario la quale abbia un punto doppio tale che le 6 rette di essa uscenti da questo punto non siano tutte distinte ha anche un secondo punto doppio (che può essere infinitamente vicino al primo) sopra ognuna di queste rette la quale conti come due almeno fra le 6, e anzi, quando vi è una retta che conta come *tre* o *quattro* fra le 6, questo secondo punto doppio è un punto biplanare, rispett. del tipo B_3 o B_4 di SCHLAEFLI (**) (ossia che produce un abbassamento rispett. di tre o quattro unità nella classe della superficie). Concludiamo pertanto:

Lo spazio S_3 *tangente a* V *in un punto della curva* σ^{270} *tocca questa varietà anche in un secondo punto, appartenente alla medesima retta speciale* p, *e tale che la superficie sua intersezione con* V *ha in questo secondo*

(*) SEGRE: Mem. cit. *Introduzione alla geometria...*, n.° 42-43. La linea σ non avrà, in generale, alcun flesso; perchè la tangente ad essa in un tale punto sarebbe generatrice di regresso della sviluppabile Σ, e di queste generatrici abbiamo veduto che in generale non ve ne sono (n.° 9).

(**) *On the distribution of surfaces of the third order into Species...* (Phil. Trans. 1863, p. 193 e seg.). Le proprietà sopra enunciate si deducono tutte facilmente dall'esame dei diversi casi di superficie con punti doppi considerati nella Memoria di SCHLAEFLI, oppure anche dalla rappresentazione piana di queste superficie ottenuta mediante proiezione dal primo punto doppio.

punto un punto doppio biplanare. Più particolarmente, se il punto considerato sulla curva σ è una delle sue 720 cuspidi, questo punto doppio biplanare sarà del tipo B_4, cioè di quelli che equivalgono a una coppia di punti doppi conici infinitamente vicini (sicchè lo spazio S_3 dovrà allora considerarsi come un particolare spazio tritangente, con due punti di contatto infinitamente vicini; cfr. n.° 18).

Lo spazio S_3 tangente a V in un punto della curva σ^{270} coincide altresì collo spazio osculatore a questa curva in quel medesimo punto, perchè entrambi possono considerarsi come determinati da una coppia di piani tangenti π consecutivi della sviluppabile Σ. Tra questi S_3, quelli che passano per un punto dato qualsiasi avranno i loro punti di contatto nelle intersezioni della linea σ colla quadrica polare di questo punto, le quali sono in numero di $2 \,.\, 270 = 540$. *La curva σ è dunque di classe $n = 540$*; valore che è confermato dalla formola:

$$n = 4\,(m + 3\,p - 3) - 3\,\beta$$

dove, come già sappiamo, $m = 270$; $p = 136$; $\beta = 720$.

Gli spazi S_3 iperosculatori alla curva σ^{270} saranno elementi doppi (di regresso) della varietà ∞^1 formata dagli S_3 osculatori a questa stessa curva. Ora, perchè lo spazio S_3 osculatore a σ in un punto P conti *rispetto a ogni suo punto* come due fra i 540 spazi osculatori che ne escono, è necessario e sufficiente che per le quadriche polari di tutti i suoi punti due (almeno) delle 540 intersezioni con σ coincidano in P. Ciò avviene certamente per ognuna delle 720 cuspidi di σ; sicchè lo spazio S_3 osculatore a σ in ognuna di queste cuspidi sarà un elemento stazionario della varietà ∞^1 degli spazi osculatori medesimi (e il carattere comune di questi punti singolari sarà espresso dai numeri $i = 2$, $i_1 = 3$, $i_2 = 4$, $i_3 = 6$ (*)). All'infuori di questo caso, la condizione sopra accennata non sarà verificata se non quando quelle ∞^3 quadriche risultino tutte tangenti alla curva σ^{270} nel punto P, e abbiano perciò in questo punto una tangente fissa; sicchè questo punto dovrà appartenere alla varietà Hessiana (n.° 3). Il numero α di questi punti semplici, nei quali la linea σ ammette uno spazio iperosculatore, sarà dato dalla relazione:

$$\alpha = 5\,(m + 4\,p - 4) - 5\,\beta = 5\,(270 + 4 \,.\, 135 - 720) = 450$$

(*) Segre, Mem. cit., n.° 13.

e vedremo in seguito (n.° 13) che queste sono anche le sole intersezioni (distinte) della linea σ colla varietà Hessiana.

12. Proponiamoci ora di determinare come sia composta *la curva intersezione della sviluppabile Σ^{90} colla varietà Hessiana.*

Ricordiamo perciò che ogni generatrice p della sviluppabile Σ^{90} è tangente alla Hessiana nei due punti doppi M, N dell'involuzione segata su di essa dalle quadriche del sistema polare (n.° 4), e incontra perciò questa varietà in un solo punto ulteriore R (*). L'intersezione di Σ^{90} colla varietà Hessiana si comporrà dunque di due parti distinte: una linea di contatto μ, luogo dei punti M e N delle singole generatrici; e una linea ρ di semplice intersezione, luogo dei punti R (**).

L'ordine della linea μ si può determinare per mezzo della considerazione seguente (***). Sia l^{90} una sezione iperpiana generica della rigata Σ^{90}. Ogni punto di essa avrà sulla medesima generatrice p che lo contiene uno e un solo punto suo coniugato nell'involuzione I_{16}; e la linea l' luogo di questi nuovi punti sarà anch'essa di ordine 90, poichè le due linee l e l', coniugate fra loro punto per punto nella I_{16}, dovranno essere incontrate da ciascuna quadrica del sistema polare in un medesimo numero di punti, e avranno perciò lo stesso ordine. Segue da ciò che queste due linee avranno 90 punti a comune — le intersezioni di l' collo spazio S_3 contenente la linea l —; e questi 90 punti, che saranno punti M o N di altrettante generatrici p, saranno tutte e sole le intersezioni della curva μ collo spazio S_3 sopra accennato. *La curva μ è dunque di ordine 90.*

Ora l'intersezione complessiva della superficie Σ^{90} colla varietà Hessiana deve essere di ordine $90 . 5 = 450$; e la linea μ^{90}, essendo loro linea di contatto, va contata due volte come parte di questa intersezione. L'intersezione residua ρ sarà perciò di ordine $450 - 2 . 90 = 270$.

La sviluppabile Σ^{90} e la varietà Hessiana si toccano lungo una linea di

---

(*) Questi tre punti M, N, R sono anche le intersezioni della stessa retta p colla sua C_3^7 residua (cfr. n.i 3-4).

(**) Di questa intersezione non fa parte, in generale, nessuna generatrice p: poichè, se ciò avvenisse, tutti gli S_3 bitangenti a V in coppie di punti di questa retta incontrerebbero V secondo superficie con due punti doppi biplanari, e vi sarebbe per conseguenza lungo la stessa retta un piano osculatore fisso; il che, in generale, non avviene (n.° 9).

(***) Enriques, Mem. cit., p. 34.

ordine 90 (luogo dei punti doppi delle involuzioni che le quadriche del sistema polare segano sopra le rette p), *e si incontrano ulteriormente secondo una linea di ordine 270.*

Gli spazi S_3 tangenti a V in punti (M o N) della linea μ^{90} si potranno considerare come spazi bitangenti coi due punti di contatto infinitamente vicini sopra la corrispondente retta p; essi segheranno V secondo superficie con un punto doppio biplanare del tipo B_4, i cui due piani tangenti passeranno entrambi per la retta p. Invece lo spazio tangente in un punto R della linea ρ toccherà V in un secondo punto P, in generale distinto da R, che sarà precisamente il coniugato armonico di R rispetto ai due punti M, N della medesima generatrice p; e segherà V secondo una superficie che ha in R un punto doppio biplanare (in generale del tipo B_3) e in P un punto doppio conico. Perciò tre delle 6 rette di V che escono da questo punto P dovranno coincidere colla $p \equiv PR$, ossia il punto P starà sullo spigolo di regresso σ^{270} (n.° 11). Concludiamo pertanto:

Gli spazi S_3 tangenti a V nei singoli punti di una delle due linee ρ^{270} e σ^{270} hanno tutti un secondo punto di contatto con V sull'altra di queste due linee (e sulla medesima retta p). Queste due linee sono coniugate nell'involuzione I_{16}; ogni punto dell'una ha uno e un solo coniugato sopra l'altra, e in questi due punti coniugati la varietà V ha sempre un medesimo S_3 tangente. Lo stesso ragionamento applicato poc'anzi alle due linee l e l' permetterebbe di concludere che anche ρ e σ devono avere il medesimo ordine; e si ha in ciò una conferma dei risultati precedenti.

Le proprietà note di una superficie cubica con un punto doppio conico e un punto biplanare permettono altresì di affermare che *la retta coniugata di una retta speciale p* (n.° 5) *si appoggia a quest'ultima nel suo punto R* (ossia in quel punto che è intersezione semplice di p colla Hessiana).

13. Ogni punto K comune alla linea σ^{270} e alla varietà Hessiana di V dovrà appartenere alla curva intersezione complessiva della sviluppabile Σ^{90} con quest'ultima varietà, e perciò a una almeno delle due linee μ^{90} e ρ^{270}; anzi a entrambe queste linee, perchè sopra la retta p che contiene quel punto (facendo uso delle solite notazioni) la quaderna di punti $MNRK$ deve essere un gruppo armonico, e perciò K non può coincidere nè con R, nè con uno dei punti M o N, senza che avvengano l'una e l'altra cosa in pari tempo. Lo spazio S_3 tangente a V in uno di quei punti K incontrerà V secondo una superficie con un punto doppio biplanare del tipo B_5 (che può considerarsi

come proveniente dall'avvicinarsi indefinitamente di un punto doppio conico e di un punto biplanare del tipo B_3).

Ora le intersezioni della curva σ^{270} colla varietà Hessiana sono complessivamente in numero di $270 . 5 = 1350$. In ognuna di queste intersezioni la retta p tangente a σ^{270} è tangente tripunta della varietà Hessiana (perchè sono venute a coincidere su di essa l'intersezione R e uno dei punti di contatto M, N); e il piano π osculatore a σ è anch'esso tangente alla Hessiana, perchè contiene, oltre alla p, le tangenti nel medesimo punto alle linee μ e ρ contenute nella Hessiana (le quali tangenti sono certo distinte da p). In ciascuno di questi punti la linea σ^{270} e la varietà Hessiana avranno perciò un contatto di 2.° ordine (*); e il numero delle loro intersezioni distinte sarà soltanto $\frac{1350}{3} = 450$, ossia non vi saranno altre intersezioni all'infuori di quelle già considerate al n.° 11.

Possiamo dunque dire, riassumendo: *La curva σ^{270} ha a comune colla varietà Hessiana 450 punti (in generale distinti), in ciascuno dei quali essa*

(*) Nello spazio S_3 una linea e una superficie hanno in un punto, semplice per entrambe, un contatto che è certo di 2.° ordine (almeno) quando la tangente alla linea è tangente principale della superficie e il piano osculatore alla linea coincide col piano tangente della superficie — quando cioè, in altri termini, la linea si comporta nelle vicinanze di quel punto come un'asintotica della superficie —; avvertendo inoltre che questa condizione è bensì sufficiente perchè vi sia un contatto di 2.° ordine, ma non è certo necessaria.

Infatti, in coordinate cartesiane, una superficie passante per l'origine delle coordinate, tangente in questo punto al piano $z = 0$, e avente per tangente principale la retta $y = z = 0$, si può rappresentare, nelle vicinanze dell'origine stessa, con un'equazione del tipo:

$$z = a_1 xy + a_2 y^2 + a_3 xz + a_4 yz + a_5 z^2 + \dots$$

dove i termini non scritti sono di grado superiore al secondo. E una linea passante (semplicemente) per l'origine, ivi tangente alla retta $y = z = 0$ e osculatrice al piano $z = 0$, si può rappresentare parametricamente, nelle vicinanze dello stesso punto, colle equazioni:

$$x = \alpha\rho + \alpha_1\rho^2 + \dots \qquad y = \beta_1\rho^2 + \dots \qquad z = \gamma_2\rho^3 + \dots$$

Sostituendo ora queste espressioni nell'equazione precedente, si ottengono soltanto termini contenenti ρ ad esponente $\geqq 3$; sicchè l'origine assorbirà tre almeno delle intersezioni di questa linea colla superficie proposta, c. s. v. d.

Similmente si proverebbe che, nello spazio S_4, una linea e una varietà M_3 hanno in un punto, semplice per entrambe, un contatto almeno di 2.° ordine ogni qual volta la tangente alla linea è tangente tripunta della M_3 e in pari tempo il suo piano osculatore è tangente a questa M_3.

è osculatrice a quest'ultima varietà. Gli spazi S_3 tangenti a V in questi punti sono iperosculatori a σ, e incontrano V secondo superficie con punto doppio biplanare del tipo B_5.

Spazi tritangenti.

14. La sviluppabile Σ^{90}, già considerata ai n.[i] 6 e seg., ha una curva doppia γ, luogo delle intersezioni di coppie di generatrici p (non consecutive).

Le rette della varietà V che si appoggiano a una retta speciale p formano anch'esse (n.° 7) una rigata di ordine 15 e genere 11; però da ogni punto della direttrice rettilinea considerata escono soltanto 4 generatrici variabili di questa rigata, formanti i gruppi di una serie lineare g^1_4. Questa serie lineare avrà dunque $2(4+11-1)=28$ elementi doppi, che saranno costituiti da altrettante rette speciali p. Vale a dire: *Ogni retta speciale p contenuta nella varietà V si appoggia a 28 altre rette consimili;* ovverosia: *La sviluppabile Σ^{90} ha* (all'infuori dello spigolo di regresso) *una curva doppia che incontra ogni sua generatrice in 28 punti.*

Ora, quando da un punto X della varietà V escono due diverse rette speciali p, p', lo spazio S_3 tangente a V in quel punto dovrà toccare questa varietà anche in un secondo punto di ciascuna di queste due rette; esso sarà dunque uno spazio *tritangente*, e la congiungente di questi due ulteriori punti di contatto (in generale distinti da X) sarà una terza retta speciale p'', contenuta nel piano pp'. Perciò le 28 rette speciali incidenti a p dovranno distribuirsi a coppie in 14 piani passanti per p.

Nel fascio formato dagli spazi bitangenti a V in coppie di punti di una retta speciale p *vi sono 14 spazi tritangenti*, ciascuno dei quali tocca la varietà V anche in un terzo punto, non appartenente in generale a quella retta. Questi tre punti di contatto apparterranno sempre alla curva doppia γ della sviluppabile Σ^{90}.

15. A quest'ultimo risultato si può arrivare anche per mezzo di altre considerazioni (*), le quali ci permetteranno pure di determinare l'ordine della curva γ.

(*) Enriques, Mem. cit., p. 33.

Sia p una retta speciale contenuta nella varietà V, e π il piano tangente fisso lungo di essa comune a questa varietà e alla sviluppabile Σ^{90}. Ogni spazio S_3 del fascio π sarà bitangente a V in punti della retta p; e avrà due dei propri poli in questi suoi punti di contatto, e i rimanenti 14 sulla curva C_3^7 « residua » di p (n.° 2). Questo spazio sarà dunque tritangente a V ogni qual volta uno dei 14 suoi poli ulteriori apparterrà a V stessa — senza però cadere, in generale, sopra p —; e il numero degli spazi tritangenti contenuti nel fascio π sarà dato perciò dalle intersezioni della varietà V colla curva C_3^7 sopra accennata, escluse quelle che appartengono alla retta p.

Ora la retta p è una (anzi l'unica) trisecante di questa curva C_3^7, e l'incontra precisamente nei tre punti, in generale distinti, che essa p ha a comune colla varietà Hessiana, e che al n.° 12 abbiamo indicati colle lettere M, N, R. Ciascuno di questi sarà un punto comune alla C_3^7 e alla varietà V; e anzi in ciascuno di essi la C_3^7 è certo tangente a V. Infatti la tangente a C_3^7 in uno qualunque di questi punti è pure tangente, nel medesimo punto, alla quadrica polare di tale punto (la quale passa per C_3^7), e perciò anche alla varietà V (la quale è ivi tangente a questa quadrica). Dico ancora, di più, che nel punto R la C_3^7 ha con V un contatto di 2.° ordine. Infatti il piano π incontra la varietà V secondo una cubica composta della retta p contata due volte e di una retta ulteriore passante per R (n.° 12): perciò le quadriche polari dei punti di π incontreranno questo stesso piano secondo coniche composte della retta p come parte fissa e di una retta ulteriore, variabile, passante anche per R; esse saranno dunque tutte tangenti al piano π nel punto R, e non vi avranno fuori di questo piano altri elementi tangenti a comune (*). Di qui si trae che la tangente in R alla linea C_3^7, la quale insieme alla retta p è curva base di quella rete di quadriche, dovrà stare nel piano π, e sarà perciò una tangente tripunta della varietà V. Per assicurarsi dunque che la C_3^7 abbia in R un contatto di 2.° ordine con V, basterà far vedere (cfr. n.° 13) che il suo piano osculatore in R è contenuto nello spazio S_3 ivi tangente a V; e ciò sarà verificato analiticamente al n.° seg.

Pertanto, delle $3 . 7 = 21$ intersezioni della nostra C_3^7 colla varietà V, *tre* cadranno nel punto R e *due* in ciascuno dei punti M, N; ne rimangono dunque, fuori di questi punti, ossia fuori di p, $21 - (3 + 2 . 2) = 14$; c. s. v. d.

(*) Se no esse avrebbero tutte in R il medesimo S_3 tangente; ed è facile verificare che ciò non avviene.

16. Dalla Mem. cit. di Schlaefli (p. 216-17) risulta che all'equazione di una superficie cubica dello spazio ordinario con un punto doppio biplanare (del tipo generale B_3) e un punto doppio conico si può dare la forma:

$$x_1 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 + (a x_1 + x_2)(b x_1 + x_2)(c x_1 + x_2) = 0$$

dove a, b, c sono certe costanti, e i due punti doppi cadono rispett. nei due punti fondamentali [4] e [3].

Segue da ciò che una varietà cubica dello spazio S_4, la quale dallo spazio $x_0 = 0$ sia incontrata secondo una superficie così fatta, si potrà rappresentare coll'equazione:

$$x_0 f + x_1 x_3 x_4 + x_2^2 x_3 + \varphi = 0$$

dove $f \equiv \sum_0^4 a_{ik} x_i x_k$ è una forma quadratica, coi coefficienti a_{33} e a_{44} diversi da zero se la varietà non ha punti doppi; e φ indica per brevità il prodotto $(a x_1 + x_2)(b x_1 + x_2)(c x_1 + x_2)$. Il piano $x_0 = x_1 = 0$ è tangente alla varietà lungo l'intera retta speciale $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, e la incontra ulteriormente secondo la retta $x_0 = x_1 = x_2 + x_3 = 0$.

Designando con indici le derivazioni rispetto alle diverse variabili, si vede che le quadriche polari dei punti del piano $x_0 = x_1 = 0$:

$$x'_2 (x_0 f_2 + 2 x_2 x_3 + \varphi_2) + x'_3 (x_0 f_3 + x_1 x_4 + x_2^2) + x'_4 (x_0 f_4 + x_1 x_3) = 0 \quad (1)$$

sono tutte tangenti nel punto fondamentale [4] a questo medesimo piano; e formano una rete, la cui curva base si compone della retta $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ e della sua C_3^7 residua. Ogni spazio S_3 passante per il piano $x_0 = x_1 = 0$ incontrerà questa C_3^7 nel punto $[4] \equiv R$ da contarsi due volte almeno (perchè la C_3^7 è tangente a quel piano), nei punti M, N (n.° 12) della stessa retta speciale $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, e in generale in altri tre punti. Ma uno di questi ultimi punti verrà a coincidere con [4] ogni qual volta lo spazio suddetto conterrà il piano osculatore alla C_3^7 in [4] stesso: dico che ciò avviene precisamente per lo spazio $x_0 = 0$ tangente in [4] alla varietà proposta.

Infatti la rete di quadriche (1) viene incontrata dallo spazio $x_0 = 0$ secondo la rete determinata dalle tre quadriche:

$$2 x_2 x_3 + \varphi_2 = 0; \qquad x_1 x_4 + x_2^2 = 0; \qquad x_1 x_3 = 0 \quad (2)$$

delle quali le prime due sono coni colla generatrice $x_1 = x_2 = 0$ a comune, ma piani tangenti diversi lungo questa generatrice: essi si incontrano dunque ulteriormente secondo una cubica passante per i loro vertici e che nel vertice [4] del primo cono è tangente al piano $x_1 = 0$. Perciò dei due piani $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$ che insieme costituiscono la terza delle quadriche (2) il primo non avrà a comune colla cubica nessun punto fuori della retta $x_1 = x_2 = 0$, e il secondo ne avrà soltanto due. Dunque lo spazio $x_0 = 0$ incontrerà la C_3^7 sopra considerata, fuori della retta $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, soltanto in questi ultimi due punti; dal che segue la verità di quanto avevamo affermato.

17. Al variare della retta speciale p nella sviluppabile Σ^{90} di cui essa è generatrice, la sua C_3^7 residua descriverà una certa superficie F, luogo di tutti quei poli degli ∞^2 spazi bitangenti di V che cadono fuori dei rispettivi punti di contatto. Per determinare l'ordine x di questa superficie, basterà osservare che la sviluppabile Σ^{90} ha a comune con due quadriche generiche del sistema polare $2 \,.\, 2 \,.\, 90$ punti, i quali si ripartiscono in $2 \,.\, 90$ coppie di punti coniugati nella I_{16}; e che le stesse due quadriche dovranno avere a comune colla superficie F^x un egual numero $2 \,.\, 90$ di gruppi di 14 punti, costituenti insieme con quelle coppie altrettanti gruppi completi dell'involuzione I_{16}. Dovrà dunque essere $4x = 2 \,.\, 90 \,.\, 14$, ossia $x = 7 \,.\, 90 = 630$.

L'intersezione di questa superficie $F^{7 \cdot 90}$ colla varietà V conterrà come parti le curve μ^{90} e ρ^{270} considerate al n.° 12, luoghi rispett. dei punti M e N e dei punti R delle singole rette p (i quali appartengono alle C_3^7 residue di queste p, e perciò anche alla superficie F). L'intersezione residua di F e V sarà la curva luogo di quei poli ulteriori degli spazi bitangenti che appartengono ancora a V, ossia luogo dei punti di contatto di tutti gli spazi *tritangenti* a V. Quest'ultima curva coinciderà perciò colla curva doppia γ della sviluppabile Σ^{90}, già considerata al n.° 14.

Consideriamo pertanto la curva C_3^7 residua di una p generica, e facciamola variare insieme con questa p descrivendo l'intera superficie $F^{7 \cdot 90}$. I punti M e N di quella retta p, che sono comuni alla C_3^7 e alla varietà V, descriveranno simultaneamente la curva μ^{90}; e siccome in tutti questi punti la curva C_3^7 risulta tangente a V (e non alla μ (*)), così la superficie $F^{7 \cdot 90}$ sarà anch'essa tangente a V lungo l'intera curva μ^{90}. Similmente il punto R, altra intersezione della linea C_3^7 colla retta p e colla varietà V, descriverà la curva ρ^{270}; e poichè la C_3^7 è sempre osculatrice a V in questo punto R

(*) Infatti la tangente alla curva μ, che è contenuta nella sviluppabile Σ^{90}, deve stare nel piano π tangente a questa sviluppabile; mentre invece le tangenti alla C_3^7 nei punti M e N non stanno in questo piano.

(n.[i] 15-16) senza essere ivi tangente alla ρ (*), così la superficie F generata dalla C_3^7 risulterà osculatrice a V lungo l'intera linea ρ^{270}. Dall'intersezione complessiva della superficie $F^{7 \cdot 90}$ colla varietà V, la quale è di ordine $3 \cdot 7 \cdot 90$, si staccano dunque la curva μ^{90} contata due volte e la curva ρ^{270} contata tre volte; perciò la parte residua γ sarà di ordine:

$$3 \cdot 7 \cdot 90 - 2 \cdot 90 - 3 \cdot 270 = 10 \cdot 90 = 900.$$

La sviluppabile Σ^{90} ha una curva doppia γ di ordine 900, che è il luogo dei punti di contatto degli spazi tritangenti della varietà V (**). Ognuno di questi spazi tritangenti ha i *suoi tre punti di contatto* sulla curva γ^{900}, e le tre rette che uniscono questi punti a due a due sono rette speciali p. Ogni punto semplice della curva γ è vertice di uno e un solo di questi « triangoli di contatto »; invece ogni retta p è lato di 14 fra questi triangoli (n.° 14).

La tangente alla linea γ^{900} in un suo punto qualunque sarà l'intersezione dei due piani π tangenti alla sviluppabile Σ^{90} (e quindi anche a V) lungo le due rette p uscenti da quel punto.

(*) Poichè la linea ρ è intersezione (parziale) della sviluppabile Σ^{90} colla varietà Hessiana, la sua tangente in un punto qualunque sarà l'intersezione del piano e dello spazio S_3 ivi tangenti rispettivamente a queste due varietà. Nel sistema di coordinate di cui abbiamo già fatto uso al n.° 16, la tangente alla linea ρ nel punto $R \equiv [4]$ è rappresentata dalle equazioni $x_0 = x_1 = 3\,x_2 + x_3 = 0$; mentre la tangente nel medesimo punto alla C_3^7 residua della retta $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ ha per equazioni $x_0 = x_1 = 3\,x_2 + 2\,x_3 = 0$.

(**) L'ordine $= 900$ di questa curva γ risulta confermato dall'osservazione seguente. Una sezione iperpiana generica della sviluppabile Σ^{90} sarà una curva dello spazio S_3 di ordine 90 e di genere 136, con 270 cuspidi (nelle intersezioni dello spazio segante collo spigolo di regresso σ^{270}) e un punto doppio in ognuna delle intersezioni del medesimo spazio colla curva γ. D'altra parte la sviluppabile Σ^{90}, come superficie contenuta in una varietà cubica priva di punti doppi, deve essere l'intersezione completa di questa varietà con un'altra varietà, di ordine 30 (cfr. la mia Nota: *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni*; Atti Acc. di Torino, vol. 39, 1904); e perciò ogni sua sezione iperpiana sarà intersezione completa di due superficie rispettivamente di 3° e di 30° ordine dello spazio S_3. Ora la curva intersezione generale di una superficie cubica con una superficie di ordine n è di genere $3\binom{n}{2} + 1$, e ogni punto doppio o cuspide ne abbassa il genere di un'unità. Indicando dunque con d l'ordine della curva γ, dovrà essere:

$$136 = 3\binom{30}{2} + 1 - d - 270$$

e di qui si ricava appunto $d = 900$. Quest'osservazione toglie anche ogni dubbio sulla possibilità che le varie intersezioni e i contatti considerati al n.° prec. possano eventualmente avere multiplicità superiori a quelle indicate.

Per un punto generico di S_4 passano 600 spazi tritangenti di una data varietà cubica (ossia la sviluppabile formata dagli spazi tritangenti è di classe 600). Infatti i punti di contatto di questi spazi tritangenti saranno tutte e sole le intersezioni della curva γ^{900} colla quadrica polare del punto considerato; e perciò il numero di tali spazi sarà $= \frac{2 \cdot 900}{3} = 600$.

18. Nel sistema ∞^1 degli spazi tritangenti della varietà V vi sono alcuni spazi particolari pei quali sono infinitamente vicini due dei tre punti di contatto, oppure anche (in un certo senso) tutti tre questi punti.

Una superficie cubica di S_3 con tre punti doppi conici, nella quale due di questi punti si facciano avvicinare indefinitamente, acquista al limite un punto doppio biplanare del tipo B_4 — oltre al terzo punto doppio conico che rimane —. Siccome allora la retta che congiunge questi due punti doppi distinti conta come *quattro* fra quelle che escono dal punto conico, così — quando per una sezione iperpiana della varietà V si presenti questo caso — il punto doppio conico dovrà essere una delle 720 cuspidi della curva σ^{270}; come anche viceversa (e lo si è già osservato; cfr. n.° 11) lo spazio tangente a V in uno qualunque di questi 720 punti incontrerà V stessa secondo una superficie con un punto doppio conico e un punto biplanare del tipo B_4, e dovrà perciò considerarsi come uno spazio tritangente del quale due punti di contatto siano infinitamente vicini. La retta che congiunge i due punti doppi distinti della superficie intersezione di questo spazio con V, e la retta asse del punto doppio biplanare (cioè intersezione dei due piani tangenti alla medesima superficie in questo punto) saranno entrambe rette speciali p, p; il piano pp' di queste due rette sarà tangente alla varietà V e alla superficie sezione lungo l'intera retta p; i due punti doppi della superficie sezione apparterranno entrambi alla curva γ^{900}, la quale anzi nel punto pp' sarà tangente alla retta p'; e la retta p conterà come due fra le 28 rette speciali che si appoggiano a p' (*).

Abbiamo anche già osservato (n.° 1) che sulla varietà V vi sono 60 punti — le intersezioni colla curva doppia della varietà Hessiana — i cui S_3 tangenti incontrano V secondo superficie con punto doppio uniplanare. Le sei rette di V che escono da un punto siffatto X coincidono a due a due, e si riducono perciò a tre sole distinte, contenute in un medesimo piano; e lungo

(*) Il punto pp' è allora un punto M o N (n.° 12) per la retta p', e un punto R per la retta p. Esso appartiene quindi a entrambe le linee μ^{90} e ρ^{270}; ma appartiene alla μ come punto di p', e alla ρ come punto di p.

ciascuna di esse la varietà V ammette un piano tangente fisso. Esse sono dunque tutte tre rette speciali, generatrici della sviluppabile Σ^{90}, e formano un particolare trilatero (degenere) nel quale i tre lati concorrono in un medesimo punto; ciascuna di esse incontra, fuori di questo punto, soltanto 26 rette speciali, e appartiene perciò soltanto a 13 altri trilateri. Il punto X è triplo per la sviluppabile Σ^{90} e per la sua curva doppia γ^{900}; e sopra ognuna delle tre rette speciali che ne escono esso è uno dei punti doppi (M, N) dell'involuzione segatavi dalle quadriche del sistema polare. Lo spazio tangente a V in ognuno di questi 60 punti fa anche parte del sistema ∞^1 degli spazi tritangenti, e si può considerare come avente con V tre punti di contatto sovrapposti e appartenenti ai singoli rami della curva γ^{900} che passano per X. Questo è anche d'accordo col fatto che un punto doppio uniplanare di una superficie si può considerare come un punto doppio ordinario (conico) a cui ne siano infinitamente vicini due altri in direzioni distinte (il che porta di conseguenza, in generale, che ve ne sia anche un terzo (*).

È prevedibile altresì l'esistenza di un numero finito di spazi tritangenti, i quali incontrino V secondo superficie con un punto biplanare e due punti conici (tutti distinti). Il loro numero verrà determinato fra poco (n.° 20.

19. Il numero ($= 720$) degli spazi tritangenti con due punti di contatto infinitamente vicini, ossia il numero delle cuspidi della curva σ^{270} (del quale dal n.° 12 in poi non ci siamo mai valsi) può essere ora verificato nel modo che segue (**).

Consideriamo in S_4 un piano qualunque ξ. Ogni S_3 passante per esso incontra la curva $\gamma^{10.90}$ in 10.90 punti; e lo spazio tangente a V in uno qualunque di questi punti sarà tangente a V stessa anche in altri due punti di quella curva, formanti col primo un trilatero di rette speciali. Facendo corrispondere a quel primo S_3 del fascio ξ tutti quelli che dal medesimo piano ξ proiettano questi ulteriori $2.10.90$ punti della curva γ, nasce nel fascio ξ una corrispondenza simmetrica $(20.90,\ 20.90)$, nella quale dovranno esistere 40.90 coincidenze. E queste coincidenze saranno di tre tipi diversi, perchè due S_3 omologhi possono coincidere:

1) senza che coincidano i due punti della linea γ che essi rispett. proiettano;

(*) C. Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (Annali di Mat., ser. 2ª, vol. 25; 1895; n.° 8).

(**) Enriques, Mem. cit., p. 34-35.

2) per il fatto che questi due punti sono sovrapposti, senza essere tuttavia infinitamente vicini sulla curva γ: ossia cadono in un medesimo punto multiplo di questa curva;

3) per il fatto che vengono proprio a coincidere sulla curva γ i due punti che quegli S_3 rispett. proiettano.

Nel primo caso la congiungente dei due punti considerati sulla linea γ, la quale è una retta speciale, dovrà appoggiarsi al piano ξ. Ora a questo piano si appoggiano 90 rette speciali p (generatrici di Σ), ciascuna delle quali incontra γ in 28 punti (n.° 14); e corrispondentemente a ciascuno di questi 28 punti lo spazio proiettante $\xi \,.\, p$ ha uno dei suoi omologhi che coincide con esso. Troviamo così 90 spazi del fascio ξ, ciascuno dei quali assorbe 28 coincidenze; complessivamente dunque $28 \,.\, 90$ coincidenze.

Il secondo caso si presenta soltanto per i 60 punti tripli della curva γ considerati al n.° prec. Lo spazio del fascio ξ che proietta uno di questi punti si può considerare in *tre* modi diversi come uno spazio di cui *due* omologhi coincidono con esso; esso assorbirà perciò 6 coincidenze.

Le coincidenze residue, in numero di:

$$40 \,.\, 90 - 28 \,.\, 90 - 6 \,.\, 60 = (40 - 28 - 4) \,.\, 90 = 8 \,.\, 90 = 720$$

saranno costituite dagli spazi del fascio ξ che proiettano quei punti (semplici) di γ, ciascuno dei quali assorbe due vertici di un trilatero di rette speciali, ossia due punti di contatto (infinitamente vicini) di uno spazio tritangente. E queste sono coincidenze semplici. Sarà dunque questo stesso, ossia 720, il numero degli spazi tritangenti con due punti di contatto infinitamente vicini; come già avevamo trovato precedentemente.

20. Le intersezioni della curva $\gamma^{10 \cdot 90}$ colla varietà Hessiana di V si ripartiranno fra quei punti di contatto degli spazi tritangenti, nei quali le superficie intersezioni di questi spazi con V hanno punti doppi biplanari (o uniplanari). Ciascuno di questi punti dovrà anche trovarsi sopra una almeno delle due curve μ^{90} e ρ^{270}, che formano insieme l'intersezione della sviluppabile Σ^{90}, sulla quale sta γ, colla varietà Hessiana.

Anzitutto la superficie intersezione di V con uno spazio tritangente può acquistare un punto doppio biplanare (del tipo B_4) per il fatto che due dei tre punti di contatto di questo spazio sono infinitamente vicini. Di questi punti biplanari ve ne sono $720 = 8 \,.\, 90$, e in ciascuno di essi la curva γ è tangente alla retta asse del punto biplanare medesimo (n.° 18), la quale a sua volta è ivi tangente alla Hessiana (n.° 4). Dunque ciascuno di questi punti assorbe due delle intersezioni cercate.

Gli spazi tangenti a V nei 60 punti comuni ad essa e alla curva doppia della varietà Hessiana (sono particolari spazi tritangenti, e) incontrano V secondo superficie con punto doppio uniplanare. Ciascuno di questi punti è triplo per la curva γ (n.° 18) e doppio per la Hessiana (senza che le tangenti a quella appartengano al cono tangente di questa), e assorbirà perciò 6 intersezioni.

Tutte queste intersezioni appartengono alla linea μ^{90}.

Le intersezioni residue, in numero di:

$$5 . 10 . 90 - 2 . 8 . 90 \quad 6 . 60 = 30 . 90 = 2700$$

dovranno cadere in punti di contatto di quegli spazi tritangenti pei quali i tre punti di contatto son pur sempre distinti, ma uno di questi è per la superficie intersezione con V punto doppio biplanare (in generale del tipo B_3). Queste intersezioni, che apparterranno alla linea ρ^{270}, saranno in generale intersezioni semplici. *Vi saranno perciò, in generale, 30 . 90 = 2700 spazi tritangenti che incontrano V secondo superficie con un punto doppio biplanare e due punti doppi conici.* Questi due punti doppi conici apparterranno allo spigolo di regresso σ^{270} della sviluppabile Σ^{90}.

21. Gli ∞^1 spazi tritangenti della varietà V inviluppano un'altra superficie sviluppabile, anche proiettivamente legata a V, i cui piani tangenti e le cui generatrici saranno le intersezioni rispett. delle coppie e delle terne di spazi tritangenti consecutivi.

Uno generico Π fra questi spazi tritangenti toccherà V in tre punti, congiunti a due a due da tre rette speciali p, p', p' ; e lungo queste rette la varietà V e la sviluppabile Σ^{90} ammetteranno tre piani tangenti fissi π, π', π'', tutti contenuti nello spazio Π. Lo spazio tritangente Π_1 consecutivo a Π conterrà tre piani analoghi π_1, π'_1, π''_1, rispett. consecutivi ai precedenti; e poichè le tre rette p, p', p'', generatrici di Σ^{90}, possono considerarsi rispett. come intersezioni delle coppie di piani tangenti consecutivi $\pi\,\pi_1$, $\pi'\,\pi'_1$, $\pi''\,\pi''_1$, così il piano $\Pi\,\Pi_1$ dovrà contenere queste stesse rette, e quindi i tre punti di contatto di Π colla varietà V.

La sviluppabile inviluppata dagli ∞^1 spazi tritangenti di V ha per piani tangenti i piani determinati dalle terne di punti di contatto di questi medesimi spazi.

Similmente, per trovare le generatrici di questa nuova sviluppabile, potremo osservare che le tre rette speciali p, p', p'' dianzi considerate si appoggiano rispett. alle tre consecutive p_1, p'_1, p''_1 in altrettanti punti P, P', P'' appartenenti alla linea σ^{270}; e perciò l'intersezione del piano $p\,p'\,p''$ col piano consecutivo $p_1\,p'_1\,p''_1$ dovrà contenere questi stessi tre punti, i quali dovranno trovarsi pertanto in linea retta.

Le generatrici della stessa sviluppabile sono altrettante trisecanti della curva σ^{270}. Per ogni trilatero di rette speciali i punti di contatto dei singoli lati colla curva σ^{270} dovranno stare in linea retta; e le rette su cui stanno queste terne di punti saranno le generatrici della nuova sviluppabile (*).

22. Possiamo determinare facilmente l'ordine della nuova sviluppabile, e l'ordine della varietà dei suoi piani tangenti, considerandone le intersezioni colla varietà cubica V.

La varietà dei piani tangenti $p\,p'\,p''$ incontra V secondo la (sola) sviluppabile Σ^{90}, la quale va contata 14 volte, essendo questa la sua multiplicità per quella varietà di piani. L'ordine domandato sarà dunque

$$\frac{14\,.\,90}{3} = 14\,.\,30 = 420.$$

(*) Si può verificare direttamente che per ogni trilatero di rette speciali i punti di contatto dei lati colla curva σ^{270} stanno in linea retta. Infatti l'equazione di una varietà V della quale lo spazio $x_0 = 0$ sia uno spazio tritangente generico si può mettere sotto la forma:

$$x_0 f + x_1^3 + (x_2 + x_3 + x_4)\, x_1^2 + k\, x_2\, x_3\, x_4 = 0$$

dove k è un coefficiente numerico, e $f = \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$ (essendo i coefficienti a_{22}, a_{33}, a_{44} tutti diversi da zero, se la varietà non ha punti doppi). Lo spazio $x_0 = 0$ è allora tangente a V nei tre punti fondamentali [2], [3], [4], i quali saranno vertici di un trilatero di rette speciali (affatto generico). — Cercando le intersezioni del lato (ossia della retta speciale) $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ colla varietà Hessiana di V (a cui esso è bitangente), si trova che queste dipendono dall'equazione:

$$(x_3 + x_4)\,(a_{33}\, x_3^2 - a_{44}\, x_4^2)^2 = 0$$

di modo che sulla retta considerata sarà $x_3 + x_4 = 0$ il punto indicato con R al n.° 12, mentre i due punti M, N saranno determinati dall'equazione $a_{33}\, x_3^2 - a_{44}\, x_4^2 = 0$. Perciò il punto di contatto della medesima retta colla linea σ^{270}, che è il coniugato armonico di R rispetto alla coppia $M\,N$, sarà definito dall'equazione $a_{33}\, x_3 + a_{44}\, x_4 = 0$. Ed è chiaro che questo punto e i suoi analoghi sulle due rette $x_0 = x_1 = x_3 = 0$ e $x_0 = x_1 = x_4 = 0$ appartengono tutti alla retta:

$$x_0 = x_1 = a_{22}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + a_{44}\, x_4 = 0.$$

Quanto alla sviluppabile stessa, come superficie luogo di rette, la sua intersezione con V si compone:

1.° della curva σ^{270}, contata anche 14 volte;

2.° di un certo numero di generatrici, corrispondentemente a quei casi in cui la retta che contiene i punti di contatto di σ^{270} con un trilatero di rette speciali coincide con uno dei lati di questo stesso trilatero. Ciò avviene quando due dei tre lati toccano σ^{270} nelle loro intersezioni col terzo lato, ossia per quei 2700 spazi tritangenti (n.° 20) che incontrano V secondo superficie con un punto doppio biplanare e due punti doppi conici.

L'ordine della superficie sviluppabile di cui si tratta è dunque eguale a

$$\frac{270 \,.\, 14 + 2700}{3} - 270 \,.\, 8 = 2160.$$

La sviluppabile inviluppata dagli ∞^1 spazi tritangenti della varietà V è di ordine 2160, e i suoi piani tangenti formano una varietà di ordine 420.

Questo inviluppo ∞^1 di spazi tritangenti ha per elementi stazionari i 2700 spazi che incontrano V secondo superficie con un punto biplanare e due punti doppi conici: poichè le quadriche polari dei punti di uno di questi spazi hanno in ciascuno dei tre punti di contatto del medesimo spazio due intersezioni fisse colla curva γ^{900}. In uno di questi punti esse sono tangenti a γ, e gli altri due punti di contatto sono cuspidi di quest'ultima curva.

Di questo stesso inviluppo ∞^1 si può determinare anche il genere, con un'applicazione della *formula di* Zeuthen. Fra la sviluppabile Σ^{90} e la varietà ∞^1 dei trilateri di rette speciali contenuti nei singoli spazi tritangenti si può stabilire una corrispondenza (3, 14), facendo corrispondere a ogni generatrice di Σ^{90} i 14 trilateri a cui essa appartiene, e a ogni trilatero le 3 generatrici di Σ^{90} che sono elementi. Fra i 14 trilateri che hanno per lato una data retta speciale ve ne sono due coincidenti quando coincidono anche due dei 14 spazi tritangenti che passano per il piano π tangente lungo quella retta; e questo spazio tritangente, che va contato due volte, non può essere che uno dei 2700 spazi già sopra considerati. D'altra parte vi sono 720 trilateri con due lati coincidenti (n. 18). Segue da ciò che nella formola generale:

$$y - y' = 2\,x(p' - 1) - 2\,x'\,(p - 1)$$

si dovrà porre $x = 3$, $x' = 14$; $y = 2700$, $y' = 720$; e $p = 136$. Si ricava allora $p' = 961$; e sarà questo il genere domandato.

Tenendo conto dei diversi caratteri finora determinati e applicando le solite formole (cfr. ad es. n.° 11), si trova che l'inviluppo degli spazi tritangenti ha uno spigolo di regresso di ordine 5820, con 11400 cuspidi.

Spazi quadritangenti.

23. Dopo aver determinati gli ∞^2 spazi bitangenti della varietà V, abbiamo considerata (n.i 15-17) la superficie $F^{7.90}$ luogo di quei 14 poli di ognuno di questi spazi che sono distinti, in generale, dai due punti di contatto; e dall'intersezione di questa superficie con V, all'infuori delle linee μ^{90} e ρ^{270}, abbiamo ricavata la linea γ^{900}, luogo dei punti di contatto degli spazi tritangenti. In modo analogo potremo adesso considerare, corrispondentemente agli ∞^1 spazi tritangenti, la linea λ luogo di quei 13 loro poli che sono in generale distinti dai punti di contatto; e fra le intersezioni di questa curva colla varietà V dovranno trovarsi i punti di contatto degli spazi quadritangenti (*).

Determiniamo anzitutto l'ordine x di questa linea λ. A tal uopo basterà osservare che una quadrica qualunque del sistema polare incontra la curva $\gamma^{10.90}$ in 20.90 punti, che si ripartiscono in $\frac{20.90}{3}$ terne di punti mutuamente coniugati nell'involuzione I_{16}. E le $2x$ intersezioni della medesima quadrica colla curva λ dovranno comporsi precisamente dei $\frac{20.90}{3}$ gruppi di 13 punti che insieme con quelle terne costituiscono altrettanti gruppi completi della I_{16}. Sarà dunque:

$$2x = 13 . \frac{20.90}{3} \quad \text{ossia} \quad x = 130.30.$$

Questa curva $\lambda^{130.30}$ starà sulla superficie $F^{7.90}$ considerata al n.° 17, e ne sarà anzi *curva tripla*. Infatti ogni punto di essa, essendo polo di uno spazio tritangente, apparterà alle C_3^7 residue di tre diverse rette speciali p (formanti uno dei soliti trilateri); e al variare di quel punto sulla linea λ queste C_3^7 descriveranno tre falde della superficie $F^{7.90}$, in generale distinte, passanti tutte per λ.

(*) Enriques, Mem. cit., p. 31-35.

24. Vediamo ora come si distribuiscano le intersezioni della curva $\lambda^{130.30}$ colla varietà V. Si avranno di queste intersezioni ogni qual volta uno dei 13 poli ulteriori di uno spazio tritangente — dei quali poli la linea λ è appunto il luogo — appartiene anch'esso alla varietà V: e, quando ciò avviene, può darsi che questo polo ulteriore sia distinto dai primi tre, e allora esso sarà un quarto punto di contatto del medesimo spazio con V, e si avrà uno spazio quadritangente; ma può anche darsi che esso coincida con uno dei primi tre, ossia con uno dei tre punti di contatto dello spazio considerato, e allora questo punto di contatto, coincidendo con uno dei punti ad esso coniugati nell'involuzione I_{16}, starà sulla varietà Hessiana di V, e sarà un punto biplanare o uniplanare per la superficie intersezione di V collo spazio tritangente di cui si tratta.

Ora gli spazi tritangenti che incontrano V secondo superficie con punti doppi biplanari o uniplanari sono:

I 30 . 90 spazi che determinano come sezioni superficie con due punti doppi conici e un punto biplanare del tipo B_3 (n.° 20);

Gli 8 . 90 spazi che segano superficie con un punto doppio conico e un punto biplanare del tipo B_4 (n.° 18);

I 60 spazi che segano superficie con punto uniplanare (n.° 18).

Nel primo caso *due* dei 16 poli dello spazio di cui si tratta coincidono nel punto biplanare della superficie intersezione di questo spazio con V; e perciò la linea λ passerà anch'essa (semplicemente) per questo punto biplanare. Questo punto appartiene alla linea ρ, della quale è anzi punto doppio (poichè è punto R — cfr. n.° 12 per ognuna delle due rette speciali uscenti da esso); dunque, delle tre falde della superficie $F^{7.90}$ che passano per esso, certo due sono osculatrici a V in quel punto (che non è per esse punto singolare), e perciò la linea λ, che sta su di esse, avrà pure in quel punto un contatto di 2.° ordine con V. Ciascuno di questi 30 . 90 punti assorbirà dunque *tre* intersezioni (almeno) della linea λ colla varietà V.

Nel secondo caso si tratta di uno spazio tritangente con due punti di contatto infinitamente vicini; e in questo punto di contatto coincidono allora non soltanto due, ma *tre* fra i 16 poli di quello spazio (*). Perciò questo spazio

(*) Più generalmente anzi, ogni spazio tangente il quale incontri V secondo una superficie con un punto doppio biplanare del tipo B_4 ha tre dei suoi poli coincidenti in questo punto. Infatti questo punto X apparterrà a una retta speciale p, sulla quale sarà punto doppio dell'involuzione ivi segata dalle quadriche del sistema polare, e apparterrà conterrà anch'esso, complessivamente, quattro dei propri poli, e per il suo polo triplo passerà (semplicemente) la curva λ In questo punto due delle tre falde della superficie $F^{7 \cdot 90}$ si confondono (perchè nel triangolo dei punti di contatto sono venuti a coincidere due dei tre lati), ma la terza falda (quella che corrisponde al terzo lato del triangolo) è distinta da queste, passa semplicemente per quel punto, ed è ivi tangente a V (perchè il punto di cui si tratta appartiene alla sua linea di contatto μ con V stessa). Perciò in tutti questi 720 punti la linea λ sarà tangente (in generale semplicemente) alla varietà V.

Infine uno spazio tangente il quale incontri la varietà V secondo una superficie con punto doppio uniplanare (del tipo più generale) ha *quattro* dei suoi poli coincidenti nel punto di contatto: poichè le quadriche del sistema polare che passano per questo punto vi hanno un piano tangente fisso (lo stesso piano che è ivi tangente alla superficie cubica intersezione di V collo spazio proposto), e hanno perciò, fuori di quel punto, sole 12 intersezioni. Dunque i 60 punti di questo tipo staranno anch'essi sulla curva λ. Dico ora che questa curva ha in ognuno di essi un contatto di 2.° ordine colla varietà V. Infatti la superficie $F^{7 \cdot 90}$ passa per ognuno di questi punti con tre falde completamente distinte; e per ciascuna di queste falde vengono ivi a riunirsi il contatto con V lungo un ramo di linea μ e l'intersezione semplice con V lungo un ramo di linea γ (*). Perciò ciascuna di queste falde sarà in quel punto

pure alla C_3^7 residua di questa retta (v. la prima nota al n.° 12); perciò le ∞^3 quadriche del sistema polare che passano per esso (e che sono le polari dei punti dello spazio tangente considerato) saranno tutte ivi tangenti alla retta p, e avranno a comune, fuori di quel punto, soltanto le 13 loro intersezioni residue colla curva C_3^7. Lo spazio proposto avrà dunque soli 13 poli (tutti semplici) distinti da X, e perciò gli altri tre coincideranno con X, c. s. v. d.

(*) L'equazione di una varietà cubica tangente allo spazio $x_0 = 0$ nel punto fondamentale [4] e incontrata da questo spazio secondo una superficie con punto uniplanare del tipo più generale si può mettere sotto la forma:

$$x_0 f + (x_1 + x_2 + x_3)^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 = 0$$

dove $f = \sum_{0}^{4}{}_{ik}\, x_i\, x_k$, e $x_0 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ è il piano tangente a quest'ultima superficie nel punto uniplanare. I piani tangenti nel punto [4] alle tre falde della superficie $F^{7 \cdot 90}$ saranno allora rappresentati, nello spazio $x_0 = 0$, rispettivamente dalle equazioni:

$$x_1 = x_2 \qquad x_2 = x_3 \qquad x_3 = x_1$$

e avranno a comune la retta $x_1 = x_2 = x_3$, che sarà la tangente alla linea λ. I tre rami della linea γ saranno tangenti rispettivamente alla retta $x_1 = x_2 = 0$ e alle due analoghe; e i tre rami della linea μ alla retta $x_1 - x_2 = x_3 = 0$ e analoghe (ottenute permutando gli indici 1, 2, 3).

osculatrice alla varietà V; e lo stesso avverrà per la linea λ, comune alle tre falde.

Si osservi poi che in nessuno dei punti finora considerati la linea λ può avere con V, in generale, un contatto di ordine superiore a quello indicato, perchè ciò renderebbe il numero degli spazi quadritangenti inferiore a un limite, al di sotto del quale si potrebbe verificare — esaminando qualche caso particolare — ch'esso non può certamente discendere.

Le intersezioni residue della linea λ colla varietà V saranno (precisamente) i punti di contatto degli spazi quadritangenti a V, i quali saranno punti tripli della sviluppabile Σ^{90} e della sua curva doppia $\gamma^{10 \cdot 90}$. Il loro numero sarà:

$$3 \,.\, 130 \,.\, 30 - 3 \,.\, 30 \,.\, 90 - 2 \,.\, 8 \,.\, 90 - 3 \,.\, 60$$
$$- (130 - 90 - 16 - 2) \,.\, 90 + 22 \,.\, 90 = 1980.$$

E il numero degli spazi quadritangenti sarà la quarta parte di quest'ultimo numero, cioè $11 \,.\, 45 = 495$.

La varietà cubica generale dello spazio S_4 ha 495 spazi quadritangenti.

E riassumendo:

Le rette speciali contenute in una varietà cubica generale formano una rigata sviluppabile di ordine 90, con curva doppia di ordine 900, e 2040 (= 1980 + 60) punti tripli, che sono tali anche per la sua curva doppia.

Questa superficie sviluppabile e la sua curva doppia sono i luoghi dei punti di contatto rispett. degli spazi bitangenti e degli spazi tritangenti della varietà cubica proposta.

Fra gli spazi tritangenti ve ne sono in particolare:

2700 che incontrano la varietà secondo superficie con un punto doppio biplanare e due punti doppi conici;

720 con due punti di contatto infinitamente vicini;

60 coi tre punti di contatto riuniti in unico punto, che è punto uniplanare della superficie sezione;

495 quadritangenti (e perciò elementi quadrupli del sistema ∞^1 degli spazi tritangenti).

Queste ultime due categorie di spazi toccano la varietà nei

$$60 + 4 \,.\, 495 = 2040$$

punti che sono tripli per la sviluppabile sopra accennata e per la sua curva doppia.

25. Il numero degli spazi quadritangenti di una varietà cubica di S_4 si può verificare direttamente in qualche caso speciale; e ciò riesce particolarmente facile nel caso di una varietà con *sei* punti doppi indipendenti (e perciò generabile con tre reti proiettive di spazi S_3, in posizione generale (*)), avvertendo che dovranno allora considerarsi come quadritangenti tutti gli spazi che incontrano la varietà secondo superficie con 4 punti doppi (o casi particolari di queste), e che ogni spazio il quale contenga $h\,(\leq 4)$ punti doppi della varietà proposta e la tocchi in altri $4-h$ punti (semplici) dovrà contarsi come equivalente a 2^h spazi quadritangenti del caso generale (analogamente a ciò che avviene per le tangenti doppie delle linee piane, e i piani tritangenti delle superficie di S_3).

Cominciamo col dimostrare che una varietà cubica V con sei punti doppi indipendenti non ha spazi quadritangenti propriamente detti, ossia non ammette sezioni iperpiane con 4 punti doppi indipendenti, dei quali nessuno sia doppio anche per essa. Infatti, se vi fosse uno spazio quadritangente non passante per alcun punto doppio di V, per ognuno dei suoi 4 punti di contatto le sei rette della varietà V che ne escono (**) dovrebbero coincidere a 2 a 2; e siccome le ∞^2 rette contenute in V si ripartiscono in tre diversi sistemi, due di 1.° ordine e uno di 4.° ordine (***), così una almeno di quelle tre rette dovrebbe essere comune a due di questi sistemi. Allora ogni spazio S_3 passante per questa retta comune r incontrerà V secondo una superficie cubica, sulla quale la r conterà come 2 almeno fra le 27 rette ivi contenute; e perciò ognuna di queste ∞^2 superficie sezioni dovrà avere sopra r qualche punto doppio (****). Ora ciò non è possibile senza che la varietà V abbia anch'essa sopra r almeno un punto doppio; e lo spazio quadritangente considerato passerebbe allora per questo punto doppio, contrariamente all'ipotesi che si era fatta.

26. Ogni spazio quadritangente della varietà proposta V dovrà dunque passare per uno almeno dei sei punti doppi.

(*) C. Segre, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni....* (Mem. Acc. di Torino, ser. II, vol. 39°, 1888; n.° 13).

(**) E non è nemmeno possibile che da qualcuno di questi punti escano infinite rette contenute in V; perchè queste rette dovrebbero stare tutte nello spazio tangente in quel punto, e questo spazio non potrebbe allora incontrare V secondo una superficie con 4 punti doppi.

(***) Segre, Mem. cit., n.° 13.

(****) Klein, Math. Ann. VI, p. 566.

Ora in una varietà cubica con 6 punti doppi indipendenti il cono sestico di rette uscente da uno qualunque X di questi punti si spezza in due coni cubici aventi a comune le cinque rette che congiungono X medesimo agli altri cinque punti doppi; e proiettando la varietà dal punto doppio X sopra uno spazio $S_3 \equiv \pi$, quei due conici cubici vi determineranno come traccie due cubiche sghembe k, k' con cinque punti a comune (e contenute in una medesima quadrica). Tutte le superficie sezioni di V con spazi S_3 passanti per X si proietteranno sopra π secondo piani; e in particolare quelle superficie che oltre ad X hanno altri tre punti doppi indipendenti si proietteranno secondo piani *tritangenti* della curva complessiva formata dalle due cubiche k e k', potendo tuttavia uno o più dei tre contatti venir sostituiti dal passaggio per altrettanti fra i punti comuni alle stesse cubiche. A queste condizioni soddisfanno:

1) tutti i piani che congiungono tre dei cinque punti comuni alle cubiche k e k', e questi saranno immagini di sezioni iperpiane passanti per X e per tre altri punti doppi della varietà proposta;

2) tutti i piani che passano per uno dei punti comuni a quelle due cubiche, e sono tangenti a ciascuna di esse in un altro punto. Questi piani saranno immagini di sezioni determinate da spazi S_3 che passano per X e per un secondo punto doppio, e toccano inoltre la varietà proposta in due punti ulteriori; e per ognuno dei punti comuni alle linee k e k passeranno *quattro* di questi piani (i piani tangenti comuni dei coni quadrici che da quel punto proiettano le due cubiche).

È evidente poi che un piano tritangente della curva complessiva $k + k'$ il quale passi per due dei 5 punti doppi non può a meno di passare anche per un terzo di questi punti; e non vi sono nemmeno piani tritangenti che non passino per alcuno di questi punti doppi.

Riassumendo dunque, dovranno computarsi come spazi quadritangenti:

1) Tutti i $\binom{6}{4} = 15$ spazi che congiungono 4 fra i 6 punti doppi della varietà proposta, e ciascuno di questi sarà equivalente a 16 spazi quadritangenti propriamente detti;

2) Tutti gli spazi che passano per due di quei 6 punti doppi e toccano la varietà proposta in altri due punti (semplici), avvertendo che per ognuna delle $\binom{6}{2} = 15$ coppie di punti doppi si possono condurre 4 di tali spazi, e che ognuno di essi va contato 4 volte.

Questi spazi equivarranno complessivamente a

$$16 \,.\, 15 + 4 \,.\, 4 \,.\, 15 = 480$$

spazi quadritangenti; nè vi saranno altre sezioni iperpiane con 4 punti doppi indipendenti.

Bisogna però ancora tener conto di quelle sezioni iperpiane che sono casi particolari di superficie con 4 punti doppi, potendosi ottenere da queste col far avvicinare indefinitamente due o più dei punti doppi medesimi. In particolare, facendo avvicinare indefinitamente due di questi punti, e contemporaneamente anche gli altri due (fra loro, ma non ai primi), la superficie si riduce al limite a una rigata cubica, avente per direttrice doppia la congiungente dei due punti doppi distinti che ancora rimangono (*). Ora ogni varietà cubica con due punti doppi ammette lungo la retta che congiunge questi due punti un S_3 tangente fisso, che l'incontra precisamente secondo una rigata cubica con questa stessa retta come direttrice doppia; e di queste sezioni iperpiane ve ne sono nel nostro caso $\binom{6}{2}$, ossia 15. Nè vi sono altre sezioni iperpiane che debbano considerarsi come casi particolari di superficie con 4 punti doppi. Risulta perciò eguale a $480 + 15$, ossia 495, il numero complessivo degli spazi quadritangenti, opportunamente valutati, come si era dimostrato in generale al n.° 24.

Torino, Marzo 1904.

(*) Infatti l'equazione di una superficie cubica coi quattro punti doppi

$$x = y = z = 0, \qquad x = y = w = 0, \qquad x = z = y + k w = 0, \qquad y = w = x + k' z = 0$$

(dove k e k' sono costanti non nulle) si può mettere sotto la forma:

$$x\,(x + k' z)\,(a y + b w) + y\,(y + k w)\,(c x + d z) = 0$$

dove a, b, c, d sono le 4 costanti omogeneé che devono ancora rimanere. Facendo avvicinare indefinitamente gli ultimi due punti doppi rispettivamente ai primi due, si ha al limite $k = k' = 0$; e l'equazione assume la forma:

$$x^2\,(a y + b w) + y^2\,(c x + d z) = 0$$

che rappresenta precisamente una rigata colla direttrice doppia $x = y = 0$.

Recherches sur les polynomes et les nombres de Stirling.

(*Par* M. Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

Nous définissons les nombres de Stirling du rang $n+1$ respectivement $-(n+1)$ comme les coefficients numériques qui se présentent dans le développement en série de puissances entières et positives de x de la factorielle du rang $n+1$, savoir

$$x(x+1)\dots(x+n) \tag{α}$$

ou en série de puissances entières et négatives de x de la valeur réciproque du produit (α).

On voit que les nombres de Stirling du rang $n+1$ ne sont autre chose que les coefficients de la factorielle du rang $n+1$, savoir les nombres positifs entiers que l'on désigne ordinairement par C^r_{n+1}. Or, suivant M. Thiele, j'attache ces nombres au nom du grand analyste qui a fait usage le premier de tels nombres.

Quant aux nombres de Stirling du rang $-(n+1)$, savoir les nombres $\mathfrak{C}^r_{n+1}$, ils se déterminent, nous le verrons plus bas, en substituant simplement une autre valeur numérique dans les mêmes polynomes entiers qui représentent les C^r_{n+1}; les nombres $\mathfrak{C}^r_{n+1}$ semblent être encore plus intéressants que les C^r_{n+1} du reste.

Les définitions mêmes des nombres de Stirling rendent très désirable une connaissance avec beaucoup de détails de tels nombres; de plus, ils se présentent dans plusieurs autres questions de l'Analyse; mais une étude approfondie des nombres C^r_{n+1} et $\mathfrak{C}^r_{n+1}$ présente de très grandes difficultés.

Schläfli (*) a donné pour C^r_{n+1} une expression générale et explicite, il

(*) *Journal de Crelle*, t. 43, p. 1-22; 1852.

est vrai – but this law is a very complicated one — dit l'illustre Cayley (*) et cela avec raison, car Schläfli exprime les nombres susdits sous forme des sommes quadruples. Cependant les formules de Cayley ne disent rient concernant la *nature analytique* de C_{n+1}^r; c'est la même chose avec les déterminants de von Zeipel (**) et avec les formules obtenues par le dernier analyste qui a étudié profondement les nombres de Stirling, savoir feu M. Schlömilch (***). En effet, les formules de Schlömilch expriment C_{n+1}^r à l'aide des nombres $\mathfrak{C}_r^s$; c'est-à-dire à l'aide des nombres C_r^s eux-mêmes.

Curieusement, dans ce qui suit, nous avons plusieurs fois à détourner une difficulté analogue, parce que nos formules récursives générales contiennent des factorielles de la forme (α); c'est-à-dire précisément les nombres C_r^s, dont il s'agit d'étudier la nature analytique.

Remarquons maintenant que les zéros de la fonction entière et rationnelle (α) sont ces nombres entiers

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \ldots, \quad -n, \tag{β}$$

les formules de Newton montrent clairement que les nombres C_{n+1}^r sont intimément liés aux sommes de puissances des nombres (β); c'est-à-dire, avec une légère modification, aux polynomes de Bernoulli. C'est pourquoi il nous semble utile de commencer nos recherches en donnant un aperçu très bref de la théorie de ces polynomes célèbres, et à cause du procédé analogue qui nous conduira des nombres de Stirling aux polynomes de Stirling et à cause de notre méthode elle-même. De plus, il est digne d'être remarqué encore que les nombres de Bernoulli se présentent parmi les coefficients des polynomes de Stirling et dans des formules récursives obtenues pour de telles fonctions.

Plusieurs géomètres parmi lesquels nous nous bornerons à citer ici seulement MM. Hurwitz (****) et Mellin (*****), ont remarqué que le polynome du rang n de Bernoulli est complètement déterminé comme une intégrale particulière convenable d'une certaine équation aux différences finies.

(*) *Quarterly Journal of Mathematics*, t. 3, p. 368; 1860.
(**) *Annuaires de l'Université Lund* (suédois), 1870.
(***) *Journal de Crelle*, t. 44, pag. 344-355; 1852. *Compendium*. t. II, p. 28.
(****) *Acta Mathematica*, t. 20, p. 286; 1897.
(*****) *Acta societatis scientiarum fennicae*, t. 29, n.° 10, p. 1; 1899.

Or, une telle définition du polynome susdit doit être légèrement modifieé, ce qui est une conséquence peut-être du fait que l'on n'a pas développé la théorie susdite de ce point de vue.

I. — Polynomes de Bernoulli.

§ 1. Définitions et propriétés fondamentales.

La fonction $\varphi_n(x)$ *du rang* n *de* Bernoulli *est, pour* $n > 0$, *complètement définie comme le polynome entier de* x *qui satisfait à cette equation aux différences finies*

$$\varphi_n(x) - \varphi_n(x - 1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1}$$

pourvu que l'on admet encore ces conditions initiales

$$\varphi_{2n+1}(0) = 0, \quad \varphi_{2n}(0) = \varphi^{(1)}_{2n+1}(0), \tag{1 bis}$$

ce qui nous donnera immédiatement cette première formule fondamentale

$$\varphi^{(1)}_n(x) = \varphi_{n-1}(x). \tag{2}$$

Démontrons tout d'abord que l'équation (1) admet comme intégrale un polynome entier du dégré n par rapport à x; à cet égard posons

$$\varphi_n(x) = a_n^0 x^n + a_n^1 x^{n-1} + \cdots + a_n^r x^{n-r} + \cdots + a_n^{n-1} x + a_n^n, \tag{α}$$

puis introduisons dans (1) cette expression, nous aurons pour la détermination des coefficients inconnus a_n^r ce système d'équations algébriques linéaires

$$\left.\begin{aligned} &\binom{n-r}{1} a_n^r - \binom{n-r+1}{2} a_n^{r-1} + \cdots \\ &\cdots + (-1)^{r-1}\binom{n-1}{r} a_n^1 + (-1)^r \binom{n}{r+1} a_n^0 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où il faut admettre $r > 1$; pour $r = 0$ nous aurons au contraire

$$a_n^0 = \frac{1}{n!}; \tag{3 bis}$$

il est évident que les équations (3) nous déterminent complètement les coefficients a_n^r.

Après avoir démontré l'existence du polynome $\varphi_n(x)$ comme intégrale particulière de (1), nous avons à déduire précisement à l'aide de cette définition un nombre de propriétés remarquables des fonctions susdites.

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse $x = 0$ donnera immédiatement, en vertu de (1), ces résultats numériques

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(-1), \quad \varphi_{2n+1}(-1) = 0. \tag{4}$$

Cela posé, mettons dans (1) $-x$ au lieu de x, nous aurons

$$\varphi_n(-x-1) \quad \varphi_n(-x) = \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!},$$

ce qui donnera, en vertu de (1),

$$\Delta\, \varphi_n(-x) = (\quad 1)^n \Delta\, \varphi_n(x-1),$$

d'où, après une intégration finie,

$$\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x \quad 1) + K, \tag{β}$$

où K désigne une *constante par rapport à x*, parce que la différence de deux polynomes entiers de x ne peut pas être une fonction *périodique* de l'argument x. Pour déterminer la valeur de K mettons dans (β) $x \quad 0$, ce qui donnera, en vertu de (4), $K = 0$; c'est-à-dire que nous avons démontré cette formule remarquable

$$\varphi_n(\quad x) = (-1)^n \varphi_n(x-1), \tag{5}$$

ce qui donnera, en vertu de (1),

$$\varphi_n(x) - (-1)^n \varphi_n(-x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{5 bis}$$

d'où, en posant particulièrement $x = \frac{1}{2}$, ces autres résultats numériques

$$\varphi_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}. \tag{6}$$

Introduisons maintenant dans (5 bis) l'expression (α), nous aurons immédiatement ces résultats concernant les coefficients a_n^r:

$$a_n^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)!}; \quad a_n^{2r+1} = 0, \quad r > 0,$$

d'où, en posant généralement

$$a_n^r = \frac{\alpha_r}{(n-r)!},$$

nous aurons

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_{2r+1} = 0, \quad r > 0,$$

tandis que l'équation générale (3) s'écrira sous cette forme nouvelle

$$\frac{\alpha_r}{1!} - \frac{\alpha_{r-1}}{2!} + \frac{\alpha_{r-2}}{3!} - \dots + \frac{(-1)^r \alpha_0}{(r+1)!} = 0 \tag{7 bis}$$

ce qui montre clairement que les coefficients α_r sont *indépendants de n.*

Or, cette équation nouvelle (7 bis) nous définit précisément les nombres rationnels dits nombres de Bernoulli, savoir

$$\alpha_{2r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(2r)!} \cdot B_{2r-1}, \quad r > 0,$$

où B_{2r-1} désigne le nombre de Bernoulli du rang r, tandis que les nombres B à l'indice pair deviendront zéro.

Cela posé, nous trouverons pour nos polynomes $\varphi_n(x)$ ces expressions

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x) = x + \frac{1}{2} \\ &\varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_{2s-1}}{(2s)!} \cdot \frac{x^{n-2s}}{(n-2s)!}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

de plus, nous posons particulièrement

$$\varphi_0(x) = 1 \tag{8 bis}$$

pour rendre appliquable la formule fondamentale (2) dans le cas $n = 1$ aussi.

Appliquons maintenant les formules numériques (4) et (6), nous aurons, en vertu de (8), ces autres identités

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{2n}(x) = x^2(x+1)^2 g_{2n-4}(x) - \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot B_{2n-1}, && n > 1, \\ &\varphi_{2n+1}(x) = x(x+1)(2x+1) f_{2n-2}(x), && n > 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où les f et g désignent d'autres polynomes entiers de x d'un dégré égal à l'indice.

Revenons encore à la formule (2), elle s'écrira sous cette autre forme

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^x \varphi_{2n}(x)\,dx = \varphi_{2n+1}(x) \\ &\int_0^x \varphi_{2n-1}(x)\,dx = \varphi_{2n}(x) + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot B_{2n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

tandis que nous obtenons, en vertu de (2), cette série de Taylor:

$$\varphi_n(x+h) = \varphi_n(x) + \frac{h}{1!}\cdot\varphi_{n-1}(x) + \frac{h^2}{2!}\cdot\varphi_{n-2}(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\cdot\varphi_0(x), \tag{11}$$

d'où, en posant $h = -1$ et $n+1$ an lieu de n, puis en appliquant (1), nous obtenons ce développement en série de polynomes $\varphi_n(x)$ d'une seule puissance de x:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1!}\cdot\varphi_n(x) - \frac{1}{2!}\cdot\varphi_{n-1}(x) + \frac{1}{3!}\cdot\varphi_{n-2}(x) - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\cdot\varphi_0(x). \tag{12}$$

§ 2. $\varphi_n(x)$ et la fonction $\zeta(t, x)$.

Les formules (1) et (2) montrent clairement qu'il doit être possible de déduire le polynome $\varphi_n(x)$ directement comme cas particulier de cette fonction célèbre

$$\zeta(-t, x) = \sum_{s=1}^{s=\infty}(x+s)^t, \quad \Re(t) < -1. \tag{α}$$

Posons en effet

$$F_{t+1}(x) = -\frac{\zeta(-t, x)}{\Gamma(t+1)},$$

nous trouvons cette généralisation très étendue de (1)

$$F_{t+1}(x) - F_{t+1}(x-1) = \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} \tag{13}$$

et cette généralisation analogue de (2)

$$D_x F_{t+1}(x) = F_t(x),\quad \Re(t) < -2. \tag{14}$$

Désignons maintenant par $F_{t+1}(x)$ cette intégrale particulière de (13) qui satisfait à la condition initiale

$$F_{t+1}(0) = -\frac{\zeta(-t)}{\Gamma(t+1)}, \tag{13 bis}$$

où $\zeta(t) = \zeta(t, 0)$ désigne la fonction célèbre de RIEMANN, la formule (14) s'écrira sous cette autre forme aussi

$$\int_0^x F_t(x)\,d\,x = F_{t+1}(x) + \frac{\zeta(-t)}{\Gamma(t+1)}. \tag{14 bis}$$

Plusieurs géomètres ont donné le prolongement analytique de la fonction (α), valable dans toute l'étendue du plan des t; nous nous bornerons à citer ici MM. LIPSCHITZ (*) et HURWITZ (**) qui ont suivi une méthode analogue à celle de RIEMANN (***) et M. MELLIN (****) qui a appliqué un procédé analogue à celui de MM. PILZ (*****) et JENSEN (******) concernant la fonction $\zeta(t)$. M. LIPSCHITZ a étudié des fonctions beaucoup plus générales que $\zeta(t, x)$.

Or, un tel prolongement analytique de la fonction $\zeta(t, x)$ connu, il est évident que la fonction générale (β) satisfait toujours aux formules (13) (14), résultat qui peut être démontré directement à l'aide de la formule de RIEMANN concernant la fonction $\zeta(t)$ seulement.

En effet, supposons convergente la série (α), puis développons, à l'aide de la formule du binome, tous les termes figurant au second membre de (α), nous aurons, en vertu de (β),

$$F_{t+1}(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\zeta(-t+s)}{\Gamma(t-s+1)} \cdot \frac{x^s}{s!}, \quad |x| < 1. \tag{15}$$

Cela posé, on voit que la série figurant au second membre de (15) est convergente pour une valeur finie quelconque de t; de plus, supposons $\Re(t) < -1$, la fonction ainsi définie $F_{t+1}(x)$ est intégrale de (13); c'est-à-dire que le théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques montre, en vertu de (14 bis), que la fonction (15) satisfait toujours à (13).

(*) *Journal de Crelle*, t. 105, p. 127-156; 1889.

(**) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. 27, p. 86-101; 1882.

(***) *Monatsberichte der Berliner Akademie*, novembre 1859. Werke, p. 145-153; Leipsic, 1892.

(****) *Acta societatis scientiarum fennicae*, t. 24, n.° 10; 1899.

(*****) *Habilitationsschrift;* Jena, 1884.

(******) *Comptes rendus*, t. 104; 1887.

Posons particulièrement dans (15) $t = n$, où n désigne un positif entier, puis appliquons ces formules numériques bien connues (*) où n désigne un positif entier

$$\zeta(0) = \frac{1}{2}; \quad \zeta(-2n) = 0, \quad n > 0$$

$$\zeta(-2n-1) = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} \cdot B_{2n+1}, \quad n \geq 0$$

$$\lim_{t=+0} (t_0 \zeta(1+t)) = 1,$$

nous retrouvons précisément l'expression (8) pour $\varphi_{n+1}(x)$; c'est-à-dire que nous avons démontré cette formule intéressante

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{\zeta(-n, x)}{n!}, \tag{16}$$

qui semble avoir restée inaperçue jusqu'ici.

On voit que la formule (13) deviendra illusoire dans le cas particulier, où t désigne un négatif entier. Or, posons avec Gauss

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right),$$

où C désigne la constante d'Euler, nous aurons

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x},$$

ce qui donnera

$$\Psi^{(n-1)}(x+1) - \Psi^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

et voilà précisément une équation aux différences finies de la forme susdite.

§ 3. Sommes de puissances des nombres entiers.

Les formules que nous avons développées dans le § 1 nous permettent d'exprimer sous forme simple, à l'aide des polynomes de Bernoulli, la somme de certaines séries numériques.

(*) Voir par exemple Julius Petersen: *Vorlesungen über Funktionentheorie.*

En premier lieu, remarquons que l'application de la règle de CAUCHY à ce produit

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)(a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\cdots)$$

nous donnera pour les coefficients de la série de puissances ainsi trouvée des expressions obtenues du premier membre de (7 bis) en y mettant $(-1)^n a_n$ au lieu de α_n, de sorte que nous obtenons immédiatement ce développement en série de puissances

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}-\sum_{r=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^r}{(2r)!}\cdot B_{2r-1}\cdot x^{2r}, \quad |x|<2\pi, \tag{17}$$

formule qui est due au fond à EULER (*) et que l'on prend généralement comme définition des nombres de BERNOULLI (**).

Posons maintenant dans (17) $2x$ au lieu de x, puis $-2x$ au lieu de x, nous aurons en ajoutant les deux équations ainsi obtenues

$$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{x}-\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(-1)^r 2^{2r}}{(2r)!}\cdot B_{2r-1}\cdot x^{2r-1}, \quad |x|<\pi,$$

où ce qui vaut autant

$$\pi\cot\pi x=\frac{1}{x}-\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{(2\pi)^{2r}}{(2r)!}\cdot B_{2r-1}\cdot x^{2r-1}, \quad |x<|1. \tag{18}$$

Cela posé, la formule bien connue

$$\pi\cot\pi=\frac{1}{x}+\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1}{x-r}+\frac{1}{x+r}\right)$$

conduira à cette série de puissances

$$\pi\cot\pi x=\frac{1}{x}-2\cdot\sum_{r=1}^{r=\infty}s_{2r}\cdot x^{2r-1}, \quad |x|<1, \tag{18 bis}$$

où nous avons posé pour abréger

$$s_{2n}=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots, \tag{19}$$

de sorte qu'une comparaison des deux formules (18) et (18 bis) donnera cette formule numérique

$$s_{2n}=\frac{2^{2n-1}\cdot\pi^{2n}}{(2n)!}\cdot B_{2n-1}, \tag{19 bis}$$

(*) *Introductio in Analysin infinitorum* § 183, p. 144 de l'édition Lugduni, 1797, t. I.

(**) Voir par exemple M. A. RADICKE: *Die Recursionsformeln für die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen,* p. 3; Halle, 1880.

ce qui donnera sans peine, en vertu de (8), ces expressions asymptotiques valables pour des valeurs extrêmement grandes de n:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2n}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}.\,2}{(2\pi)^{2n}}\left(\cos(2\pi x) + \varepsilon_{2n}\right) \\ \varphi_{2n+1}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}.\,2}{(2\pi)^{2n+1}}\left(\sin(2\pi x) + \varepsilon_{2n+1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

où ε doit satisfaire à cette inégalité

$$|n^p . \varepsilon_n| < \sigma, \tag{20 bis}$$

où σ désigne une quantité finie donnée arbitrairement, tandis que p est un positif entier fini mais d'une grandeur quelconque du reste.

Les formules (20) nous permettent de donner la théorie complète des séries de polynomes $\varphi_n(x)$, comme je l'ai fait voir dans une Note récente (*).

Il est très remarquable, ce me semble, que la somme de puissances positives des nombres entiers

$$S_n^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + 4^p$$

s'exprime très simplement à l'aide des fonctions de Bernoulli aussi.

En effet, mettons dans cette identité

$$(x+1)^{p+1} - 1 = \binom{p+1}{1} x^p + \binom{p+1}{2} x^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} x$$

successivement $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, nous aurons, en ajoutant toutes les équations, ainsi obtenues, cette formule récursive

$$(n+1)^{p+1} - (n+1) = \binom{p+1}{1} S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{p} S_n^1 . \tag{α}$$

Cela posé, la conclusion ordinaire de p à $p+1$ montrera que S_n^p se présente sous forme d'un polynome entier du dégré $p+1$ de n, dont les coefficients dépendent de p seulement et dont le terme indépendant de n doit être zéro; de plus, nous aurons évidemment

$$S_n^p - S_{n-1}^p = n^p ;$$

c'est-à-dire que nous avons démontré cette formule générale

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p - \Phi_{p+1}(n), \tag{21}$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. 58.

où nous avons posé pour abréger

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{2n+1}(x) &= (2\,n)\,!\,\varphi_{2n+1}(x) \\ \Phi_{2n}(x) &= (2\,n)\,!\left(\varphi_{2n}(x) + \frac{(-1)^n}{n\,!}\cdot B_{2n}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (21 \text{ bis})$$

Quant aux polynomes $\Phi_n(x)$, nous aurons, en vertu de (5) et (9), ces formules

$$\Phi_r(-x) = (-1)^r\,\Phi_r(x-1) \qquad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{2r}(x) &= x^2(x+1)^2\,h_{2r-4}(x), \quad r > 1 \\ \Phi_{2r-1}(x) &= x(x+1)(2\,x+1)\,k_{2r-3}(x), \quad r > 0, \end{aligned}\right\} \qquad (22 \text{ bis})$$

où les h et k désignent des polynomes entiers de x et d'un dégré égal à l'indice.

Nous nous bornerons à remarquer seulement que les formules (10) nous permettent de sommer aisément à l'aide des fonctions $\varphi_n(x)$ aussi ces deux séries trigonométriques infinies

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\cos(2\,r\,\pi\,x)}{r^{2n}}, \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\sin(2\,r\,\pi\,x)}{r^{2n+1}},$$

où n désigne un positif entier; car nous aurons

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\sin(2\,r\,\pi\,x)}{r} = \frac{\pi}{2} - \pi\,x, \quad 0 < x < 1.$$

C'est précisément à l'aide de telles séries trigonométriques que RAABE (*) a introduit les fonctions $\varphi_n(x)$ de BERNOULLI. Quant à l'histoire des fonctions de BERNOULLI, on peut consulter du reste avec avantage la thèse de M. H. RENFER (**).

(*) *Journal de Crelle,* t. 42, p. 18.
(**) *Thèse de doctorat;* Berne, 1900.

II. — Nombres de Stirling.

§ 4. Formules numériques.

Après cet aperçu d'une théorie des fonction de Bernoulli revenons maintenant à la définitions des nombres de Stirling, savoir à ces deux identités

$$x(x+1)\ldots(x+n) = \sum_{s=0}^{s=n} C_{n+1}^{s} \cdot x^{n+1-s} \tag{23}$$

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \mathfrak{C}_{n+1}^{s}}{x^{n+1+s}}, \quad |x| > n, \tag{23 bis}$$

nous verrons tout d'abord la vérité de cette assertion :

Le nombre C_{n+1}^{r} est la somme de tous les $\binom{n}{r}$ produits à r facteurs différents choisis parmi les n nombres $1, 2, 3, \ldots, n$.

Quant à $\mathfrak{C}_{n+1}^{r}$, appliquons cette identité bien connue

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \cdot \frac{1}{x+s},$$

nous aurons sans peine, en vertu de (23 bis), cette expression explicite

$$\mathfrak{C}_{n+1}^{r} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^{n+r}; \tag{24}$$

prenons encore comme définition de $\mathfrak{C}_{n+1}^{-r}$, où r désigne un positif entier, la formule (24), nous aurons à l'aide des principes du calcul aux différences finies :

$$\mathfrak{C}_{n+1}^{-r} = 0, \quad 1 < r < n-1. \tag{24 bis}$$

Cela posé, nous aurons à déduire directement à l'aide des deux formules (23) une suite de propriétés remarquables des nombres de Stirling. En premier lieu, multiplions par $x+n$ la formule (23 bis) et celle obtenue de (23) en y mettant $n-1$ au lieu de n, nous aurons ces deux formules récursives

$$\left.\begin{aligned} C_{n+1}^{r} &= C_{n}^{r} + n\, C_{n}^{r-1} \\ \mathfrak{C}_{n}^{r} &= \mathfrak{C}_{n+1}^{r} - n\, \mathfrak{C}_{n+1}^{r-1}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

En second lieu multiplions par cette série de puissances négatives

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} - \frac{n}{x^2} + \frac{n^2}{x^3} - \frac{n^3}{x^4} + \cdots, \quad |x| > n,$$

la formule (23) et la formule obtenue de (23 bis) en y mettant $n-1$ au lieu de n, nous aurons respectivement ces deux formules élégantes

$$\left.\begin{aligned} &C_{n+1}^r - n\, C_{n+1}^{r-1} + n^2\, C_{n+1}^{r-2} - \cdots + (-1)^r n^r\, C_{n+1}^0 = C_n^r \\ &\mathfrak{C}_n^r \quad + n\, \mathfrak{C}_n^{r-1} + n^2\, \mathfrak{C}_n^{r-2} + \cdots + n^r\, \mathfrak{C}_{n+1}^0 = \mathfrak{C}_{n+1}^r\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Démontrons maintenant une autre formule numérique très fondamentale dans les recherches qui nous occupent ici. A cet égard mettons dans (23) $n+p$ au lieu de n, puis multiplions par (25 bis) la formule ainsi obtenue, nous retombons dans cette identité

$$\left.\begin{aligned} &(x+n+1)(x+n+2)\dots(x+n+p) = \\ &\qquad = \sum_{s=0}^{s=p-1} (x+n+1)^{p-s} \,.\, C_p^s\,. \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Ordennons maintenant selon des puissances ascendantes de x le second membre de (α), puis cherchons ici et dans la série de puissances obtenue par la multiplication susdite le coefficient de la même puissance x^{p-r}, nous trouvons cette identité numérique très générale

$$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^r\, C_{n+p+1}^{r-s} \,.\, C_{n+1}^s = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{p-s}{r-s} (n+1)^{r-s}\, C_p^s\,; \tag{27}$$

dans cette formule il faut, pour des valeurs plus grandes de r, supprimer tous les termes contenant des coefficients C_q^m pour lesquels $m > q$.

Un procédé analogue nous donnera cette autre formule générale analogue à (27)

$$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^r\, \mathfrak{C}_{n+p+1}^{r-s}\, C_{n+1}^s = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{p+r-1}{s} (n+1)^{r-s}\, \mathfrak{C}_p^{r-s}, \tag{27 bis}$$

où il faut, pour des valeurs plus grandes de r, supprimer au premier membre les mêmes termes que dans (27).

Posons par exemple dans (27) et (27 bis) $n=0$, nous aurons ces formules particulières

$$\left.\begin{aligned} &C_{p+1}^r = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{p-s}{r-s} C_p^s \\ &\mathfrak{C}_{p+1}^r = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{p+r-1}{s} \mathfrak{C}_p^{r-s}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Or, parmi les formules plus particulières qui peuvent être déduites de (27) et (27 bis), celle obtenue de (27) en y mettant $n \quad p-1$ au lieu de n et $n+q$ au lieu de r, savoir la formule

$$\sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \, C_n^{n-s-1} \cdot \mathfrak{S}_{n\ p}^{q+s-1} = 0, \tag{29}$$

est certainement la plus intéressante, nous le verrons bientôt. On voit du reste que la formule correspondante tirée de (27 bis) deviendra beaucoup plus compliquée.

On peut soumettre les définitions (23) et (23 bis) à un nombre d'autres transformations, dont nous nous bornerons à indiquer ici une seule. A cet égard, mettons dans (23) et (23 bis) $x-1$ au lieu de x, puis multiplions respectivement divisons par $x \quad 1$, nous aurons immédiatement ces deux autres formules

$$C_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n-r+s}{s} C_{n+1}^{r-s} \tag{30}$$

$$\mathfrak{S}_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n+r-1}{s} \mathfrak{S}_{n+1}^{r-s}. \tag{30 bis}$$

Éliminons ensuite de (28 bis) et de (30 bis), à l'aide de la formule récursive (25), le nombre $\mathfrak{S}_{n+1}^r$, nous aurons, après avoir posé $r+1$ au lieu de r, ces deux autres formules

$$\left.\begin{aligned} n \cdot \mathfrak{S}_{n+1}^r &= \sum_{s=0}^{s=r} \binom{r+n}{s+1} \mathfrak{S}_n^{r-s} \\ r \cdot \mathfrak{S}_{n+1}^r &= \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \binom{r+n}{s+2} \mathfrak{S}_{n+1}^{r-s-1}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Une autre formule récursive très singulière peut être obtenue de cette manière: Posons dans l'identité

$$x(x+1)\ldots(x+p-1) = C_p^0 x^p + C_p^1 x^{p-1} + \cdots + C_p^{p-1} x$$

successivement $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, puis ajoutons toutes les équations ainsi obtenues, nous aurons, à l'aide d'une formule sommatoire élémentaire très connue,

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p+1} = C_p^0 \,.\, S_n^p + C_p^1 \,.\, S_n^{p-1} + \cdots + C_p^{p-1} \,.\, S_n^1,$$

formule de laquelle Fermat a fait usage de quelques cas particuliers pour trouver les premiers des sommes S_n^r, mais sans introduire les nombres de STIRLING.

Cela posé, je dis que nous avons par là cette identité beaucoup plus générale

$$\frac{x(x+1)\dots(x+p)}{p+1} = \sum_{q=0}^{q=p-1} C_p^q \cdot \Phi_{p-q+1}(x); \tag{32}$$

en effet, il est évident que l'equation algébrique (32) du degré $p+1$ par rapport à x admet cómme racines toutes les valeurs positives entières de x.

Introduisons maintenant dans cette identité, au lieu des polynomes $\Phi_r(x)$, les expressions tirées de (21 bis) et de (8), nous aurons cette formule récursive

$$\frac{C_{p+1}^r}{p+1} = \frac{C_p^r}{p-r+1} + \frac{C_p^{r-1}}{2} - \sum_{s=1}^{<\frac{r}{2}} \frac{(-1)^s \binom{p-r+2s+1}{2s}}{p-r+2s+1} \cdot B_{2s-1} \cdot C_p^{r-2s}, \tag{33}$$

où les B_{2s-1} désignent les nombres de BERNOULLI. Dans mon premier Mémoire sur les séries de factorielles (*) j'ai démontré la formule (33) à l'aide de la célèbre série de STIRLING; le cas particulier $r=p$ appartient à M. A. RADICKE (**).

Enfin, appliquons les formules de NEWTON concernant les racines et les coefficients d'une équation algébrique, nous aurons cette autre formule numérique.

$$\left.\begin{array}{r} C_{n+1}^0 \cdot S_n^p - C_{n+1}^1 \cdot S_n^{p-1} + C_{n+1}^2 \cdot S_n^{p-2} - \cdots \\ \cdots + (-1)^{p-1} C_{n+1}^{p-1} \cdot S_n^1 + (-1)^p p \cdot C_{n+1}^p = 0. \end{array}\right\} \tag{34}$$

Cela posé, la conclusion ordinaire de p à $p+1$ donnera immédiatement, en vertu de (34) et de (31), ce résultat concernant la forme analytique des nombres C_{n+1}^r et $\mathfrak{C}_{n+1}^r$ considérés comme fonctions de n:

Les nombres C_{n+1}^r et $\mathfrak{C}_{n+1}^r$ de STIRLING *se présentent sous forme des polynomes entiers du degré $2r$ de n, dont les coefficients sont des nombres rationnels indépendants de n; de plus, les termes constants par rapport à n dans ces polynomes s'évanouiront.*

(*) *Annales de l'École Normale*, 3.e serie, t. 19, p. 442; 1902.

(**) *Die Recursionsformeln für die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*, p. 15; Halle, 1880.

§ 5. Quelques applications des nombres de Stirling.

Revenons maintenant à la formule (29), il est très facile de démontrer ce théorème:

Cherchons de ce système des équations linéaires algébriques

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_{n+1} &= C_n^0\, a_{n+1} + C_n^1\, a_n + \cdots + C_n^{n-1}\, a_2 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

les quantités a_s, *à l'aide des* b_s, *nous aurons des expressions de cette forme:*

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_{n+1} &= \mathfrak{S}_{n+1}^0\, b_{n+1} - \mathfrak{S}_n^1\, b_n + \cdots + (-1)^{n-1}\, \mathfrak{S}_2^{n-1}\, b_2 \end{aligned}\right\} \tag{35 bis}$$

et inversement.

En effet, il faut substituer simplement dans (35) les expressions (35 bis); de cette manière nous retombons dans des formules de la forme (29), où nous avons posé $q = p - n + 3$.

Appliquons ce théorème, la formule (23) donnera cette formule inverse

$$x^n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s\, \mathfrak{S}_{n-s+1}^s \,.\, x(x+1)\ldots(x+n-s-1), \tag{36}$$

tandis que la formule élémentaire de Stirling

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+s-1)}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \quad \Re(x-\alpha) > 0,$$

donnera cette inversion de (23 bis)

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{C_{s-1}^{s-n}}{x(x+1)\ldots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0. \tag{36 bis}$$

Dans la théorie des dérivées d'ordre supérieure d'une fonction de fonction nous trouvons en outre ces deux formules (*)

$$\left.\begin{aligned} D_x^n f(\log x) &= \frac{1}{x^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s\, C_n^s \,.\left(f^{(n-s)}(t)\right)_{t=\log x} \\ D_x^n f(e^x) &= \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{(n-s)x} \,.\, \mathfrak{S}_{n-s+1}^s \left(f^{(n-s)}(t)\right)_{t=e^x}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

(*) Voir par exemple Schlömilch: *Compendium*, t. II, pp. 10-12.

dont l'une est l'inverse de l'autre; à l'aide de ces formules nous trouvons sans peine ces deux séries de puissances

$$\left.\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\log(1-x)\right)^n &= \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{C_{n+s}^s}{(n+s)!} \cdot x^{n+s}, \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{n!} \cdot (1-e^{-x})^n &= \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!} \cdot \mathfrak{C}_{n+1}^s \cdot x^{n+s}, \end{aligned}\right\} \quad (37\text{ bis})$$

dont la seconde est appliquable dans toute l'étendue du plan des x.

Quant aux nombres $\mathfrak{C}_{n+1}^r$, nous avons encore à démontrer ces deux propositions intéressantes:

1.° Développons selon la formule polynomiale l'expression

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n,$$

puis désignons par $\Omega_{n,p}$ la somme des coefficients figurant dans les termes divisibles par le produit $a_1 a_2 a_3 \ldots a_p$, nous aurons généralement:

$$\Omega_{n,p} = p!\, \mathfrak{C}_{p+1}^{n-p}. \tag{38}$$

Dans le cas particulier $p = 2$, nous aurons immédiatement

$$\Omega_{n,2} = 2^n - 2 = 2 \,.\, \mathfrak{C}_3^{n-2}, \tag{α}$$

tandis que l'identité

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} a_1^s (a_2 + a_3 + \cdots + a_p)^{n-s}$$

donnera la formule récursive

$$\Omega_{n,p} = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{n}{s} \Omega_{n-s,p-1}; \tag{β}$$

appliquons ensuite (24 bis), les formules (α) et (β) nous conduiront immédiatement au but à l'aide de la conclusion de $p-1$ à p.

2.° Pour la différence d'orde supérieure d'une seule puissance nous obtenons cette expression

$$\Delta^n x^p = n! \sum_{r=n}^{s=p} \binom{r}{n} \mathfrak{C}_{n+1}^{r-n} \cdot x^{p-r}, \quad p > n, \tag{39}$$

ce qui est une conséquence immédiate de l'expression bien connue

$$\Delta^n x^p = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (x + n - s)^p.$$

§ 6. Sur une équation aux différences finies partielles.

Pour une étude plus approfondie des deux polynomes entiers du degré $2r$ de n qui représentent les nombres C^r_{n+1} et $\mathfrak{C}^r_{n+1}$ il faut introduire, au lieu du positif entier n, une variable continue. Or, il est évident que les formules récursives (25) et l'analogie du procédé qui nous a donné les polynomes de Bernoulli au lieu des sommes S^p_n nous conduisent naturellement à cette équation aux différences finies partielles:

$$F_r(x+1) = F_r(x) + (x+1) F_{r-1}(x), \tag{40}$$

où r désigne un positif entier, tandis que x est une variable complexe.

Considérons tout d'abord le cas particulier, où

$$F_0(x) = 1; \quad F_r(0) = 0 \quad \text{pour} \quad r > 0, \tag{40 bis}$$

la conclusion ordinaire de r à $r+1$ montrera clairement que le cas particulier correspondant de (40) a comme intégrale particulière un polynome entier du degré $2r$ de x et dont tous les coefficients sont des nombres rationnels.

Nous désignons par $\Psi_{2r}(x)$ *le polynome du dégré* $2r$ *de* x *qui satisfait aux conditions* (40) *et* (40 bis).

Cela posé, la définition de $\Psi_{2r}(x)$ et le résultat que nous venons de démontrer concernant la nature des deux nombres C^r_{n+1} et $\mathfrak{C}^r_{n+1}$ nous donnent évidemment ces deux formules remarquables

$$C^r_{n+1} = \Psi_{2r}(n), \quad \mathfrak{C}^r_{n+1} = \Psi_{2r}(-n-1); \tag{41}$$

c'est-à-dire que nous avons démontré cette proposition intéressante:

Les nombres de Stirling C^r_{n+1} *et* $\mathfrak{C}^r_{n+1}$ *sont connus tous les deux, si nous savons à calculer le polynome* $\Psi_{2r}(x)$.

Ce polynome $\Psi_{2r}(x)$, essentiel dans la théorie des nombres de Stirling, jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'équation (40) aussi. En effet, il est très facile de démontrer cette proposition remarquable:

Supposons connue une intégrale particulier $f_r(x)$ *de l'équation générale* (40), *où* $F_0(x)$ *est une fonction donnée, l'intégrale générale de cette même équation se présente sous cette forme*

$$F_r(x) = f_r(x) + \sum_{s=1}^{s=r} K_s(x) \,.\, \Psi_{2r-2s}(x),$$

où les coefficients $K_s(x)$ désignent des fonctions arbitraires périodiques de x avec la période additive $+1$.

Démontrons maintenant ce théorème général concernant les fonctions rationnelles et entières $\Psi_{2r}(x)$:

Supposons $r > 0$, nous aurons une identité de cette forme

$$\Psi_{2r}(x) = (x+1)\,x\,(x-1)\ldots(x-r+1)\,\psi_{r-1}(x), \tag{42}$$

où $\psi_{r-1}(x)$ désigne de nouveau un polynome entier de x et d'un dégré égal à l'indice; de plus, le polynome $\psi_{2r}(x)$ est encore divisible par $x(x+1)$.

Quant à la démonstration de (42), revenons à (40), savoir à la formule

$$\Psi_{2r}(x+1) = \Psi_{2r}(x) + (x+1)\,\Psi_{2r-2}(x),$$

puis, mettons-y $x = 0$, nous aurons, en vertu de (40 bis), $\Psi_{2r}(1) = 0$, pourvu que $r > 1$, posons ensuite $x = 1$, nous aurons $\Psi_{2r}(2) = 0$, pourvu que $r > 2$ et ainsi de suite, de sorte que la conclusion ordinaire de r à $r+1$ donnera généralement $\Psi_{2r}(s) = 0$, pourvu que $r > s$. Enfin, l'hypothèse $x = -1$ donne encore $\Psi_{2r}(0) = \Psi_{2r}(-1) = 0$, pourvu que $r > 0$, et voilà la démonstration complète de (42).

Quant à la proposition concernant le polynome $\psi_{2r}(x)$, je dis que nous avons entre les deux classes de polynomes $\Phi_n(x)$ et $\Psi_{2r}(x)$ des identités de cette forme

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{r+1}(x) - \Psi_2(x)\,.\,\Phi_r(x) + \Psi_4(x)\,.\,\Phi_{r-1}(x) - \cdots \\ &\cdots + (-1)^{r-1}\,\Psi_{2r-2}(x)\,.\,\Phi_2(x) + (-1)^r\,r\,.\,\Psi_{2r}(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

En effet, (43) est une équation algébrique du degré $2r$ de x, mais elle admet, en vertu de (34), comme racine toutes les valeurs positives entières de x; c'est-à-dire qu'elle doit être une *identité formelle,* valable pour une valeur quelconque de x.

Posons maintenant dans (43) $-(x+1)$ au lieu de x, nous aurons, en vertu de (22), cette nouvelle identité

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{r+1}(x) + \Psi_2(-x-1)\,.\,\Phi_{r-1}(x) + \cdots \\ &\cdots + \Psi_{2r-2}(-x-1)\,.\,\Phi_2(x) = r\,.\,\Psi_{2r}(-x-1), \end{aligned}\right\} \tag{43 bis}$$

d'où la formule numérique analogue à (34)

$$S_n^r + \mathfrak{S}_{n+1}^r\,.\,S_n^{r-1} + \mathfrak{S}_{n+1}^2\,.\,S_n^{r-2} + \cdots + \mathfrak{S}_{n+1}^{r-1}\,.\,S_n^1 = r\,.\,\mathfrak{S}_{n+1}^r\,. \tag{34 bis}$$

Cela posé, les formules (22 bis) concernant la divisibilité des polynomes $\Phi_r(x)$ montrent clairement, en vertu de (43) et (43 bis), que $\Psi_{4r+2}(x)$ doit être divisible par $x^2(x+1)^2$; c'est-à-dire que $\psi_{2r}(x)$ est toujours divisible par $x(x+1)$.

Remarquons encore que la formule (43) donnera, en vertu de (8) et (22 bis), ces deux résultats numériques

$$\Psi^{(1)}_{4r+2}(0) = 0, \quad \Psi^{(1)}_{4r}(0) = \frac{(-1)^r}{2r} \cdot B_{2r-1}, \quad r > 0, \tag{44}$$

tandis que nous obtenons ces formules particulières

$$\Psi_2(x) = \Psi_2(-x-1) = \Phi_2(x) - \frac{x(x+1)}{2}. \tag{45}$$

§ 7. Formules recursives pour les fonctions $\Psi_{2r}(x)$.

Quant au calcul véritable des polynomes $\Psi_{2r}(x)$, les définitions (40) et (40 bis) ne sont pas commodes; c'est pourquoi nous avons à chercher d'autres formules récursives en appliquant aux formules du § 4 la même méthode qui nous a donné les identités (32) et (43).

De cette manière les formules (24) se présentent comme des cas particuliers de cette même formule plus générale

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{2r}(x) - x\,\Psi_{2r-2}(x) + x^2\,\Psi_{2r-4}(x) - \cdots \\ &\cdots + (-1)^r x^r\,\Psi_0(x) = \Psi_{2r}(x-1). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Pour obtenir des formules récursives d'un caractère beaucoup plus général revenons aux formules (27) et (27 bis) et posons-y $n+1 = -x$, $n+p = y$, ce qui donnera $p = -x+y+1$, nous aurons cette formule générale pour l'addition des arguments dans $\Psi_{2r}(x)$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s\,\Psi_{2s}(x)\,\Psi_{2r-2s}(y) = \\ &= \sum_{s=0}^{s=r} \binom{x+y-s+1}{r-s} (-x)^{r-s}\,\Psi_{2s}(x+y), \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

formule qui nous donnera naissance à une foule d'autres obtenues en spécialisant simplement les deux variables indépendantes x et y. Ici nous avons à étudier ces trois cas particuliers de (47) seulement:

1.° Posons $x = -1$ et mettons ensuite $x+1$ au lieu de y, nous aurons, en vertu de la formule fondamentale (42),

$$\Psi_{2r}(x+1) - \Psi_{2r}(x) = \sum_{s=0}^{s=r-1} \binom{x-s+1}{r-s} \Psi_{2s}(x), \tag{48}$$

formule qui nous exprime la différence $\Delta\,\Psi_{2r}(x)$ à l'aide des fonctions Ψ aux indices inférieures; exprimons encore, à l'aide de (30), la même différence, nous aurons, en vertu de (48)

$$(x+1)\,.\,\Psi_{2r-2}(x) = \sum_{s=0}^{s=r-1} \binom{x-s+1}{r-s} \Psi_{2s}(x),$$

ou bien, après avoir uni les deux termes contenant la fonction $\Psi_{2r-2}(x)$ et puis posé $r+1$ au lieu de r, cette formule récursive très intéressante

$$r\,.\,\Psi_{2r}(x) = \sum_{s=0}^{s=r-1} \binom{x-s+1}{r-s+1} \Psi_{2s}(x). \tag{48 bis}$$

2.° Mettons dans (47) $x=1$ et posons $x-1$ au lieu de y, nous aurons cette autre expression de la différence de $\Psi_{2r}(x-1)$:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{2r}(x) - \Psi_{2r}(x-1) = \\ &= -\Psi_{2r-2}(x-1) - \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^{r-s} \binom{x-s+1}{r-s} \Psi_{2s}(x). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Soustrayons, puis additionnons les deux formules (48) et (49), nous aurons respectivement

$$\Delta^2\,\Psi_{2r}(x-1) = \Psi_{2r-2}(x-1) + 2\,.\sum_{s=1}^{<\frac{r}{2}} \binom{x-r+2s+1}{2s} \Psi_{2r-4s}(x) \tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{2r}(x+1) - \Psi_{2r}(x-1) = - \\ &-\Psi_{2r-2}(x-1) + 2\,.\sum_{s=1}^{<\frac{r-1}{2}} \binom{x-r+2s}{2s-1} \Psi_{2r-4s-2}(x). \end{aligned}\right\} \tag{50 bis}$$

3.° Posons enfin dans (47) $y=x$ et $2r+1$ au lieu de r, le premier membre de cette formule s'évanouira évidemment; posons ensuite $\frac{x}{2}$ au lieu de x, nous aurons cette formule nouvelle

$$\Psi_{4r+2}(x) = \sum_{s=0}^{s=2r} (-1)^s \binom{x-2r+s+1}{s+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{s+1} \Psi_{4r-2s}(x). \tag{51}$$

Après ces applications de la formule générale (47) revenons aux autres formules numériques développées dans le § 4. Considérons en premier lieu la formule (30), nous aurons pour la différence $\Delta\,\Psi_{2r}(x-1)$ cette nouvelle expression qui n'est pas *formellement* identique à (49):

$$\Psi_{2r}(x) - \Psi_{2r}(x-1) = \sum_{s=1}^{s=r} (-1)^{s-1} \binom{x-r+s}{s} \Psi_{2r-2s}(x); \qquad (52)$$

appliquons encore à cette formule l'équation aux différences finies (40), nous aurons cette formule nouvelle

$$(x-r) \cdot \Psi_{2r}(x) = x \cdot \Psi_{2r}(x-1) - \sum_{s=1}^{s=r-1} (-1)^s \binom{x-r+s}{s+1} \Psi_{2r-2s}(x). \qquad (52 \text{ bis})$$

En second lieu la formule (33) donnera cette formule récursive très remarquable contenant des nombres de Bernoulli :

$$\frac{\Psi_{2r}(x)}{x+1} = \frac{\Psi_{2r}(x-1)}{x-r+1} - \sum_{s=1}^{<\frac{r}{2}} \frac{(-1)^s \binom{x-r+2s+1}{2s}}{x-r+2s+1} \cdot B_{2s-1} \cdot \Psi_{2r-4s}(x+1). \quad (53)$$

Cela posé, considérons maintenant ensemble toutes les formules récursives que nous venons de développer; il est évident que ces formules ne sont guère commodes pour un calcul pratique et pour une étude approfondie de la nature analytique des fonctions $\Psi_{2r}(x)$. En premier lieu, le degré de $\Psi_{2r}(x)$ est assez élévé et, en second lieu nos formules susdites contiennent des coefficients du binome, de sorte que leur application plus générale exige de la connaissance étendue de ces coefficients ou, ce qui vaut autant, aux factorielles; c'est-à-dire aux nombres de Stirling eux-mêmes.

Introduisons maintenant au lieu des fonctions $\Psi_{2r}(x)$, dans les formules en question les expressions correspondantes (42), nous pouvons éliminer tous les coefficients du binome et abaisser beaucoup le degré des polynomes inconnus. C'est pourquoi nous laissons tomber à jamais, dans nos recherches suivantes, les polynomes $\Psi_{2r}(x)$ pour introduire les fonctions conjuguées $\psi_{r-1}(x)$, pour lesquelles nous proposons le nom : *polynomes de* Stirling comme analogie des polynomes de Bernoulli.

III. — Polynomes de Stirling.

§ 8. Propriétés fondamentales des polynomes de Stirling.

Introduisons dans (40) les expressions correspondantes obtenues de (42), puis appliquons les formules particulières (44) et (45), nous démontrerons immédiatement la vérité de cette assertion :

La fonction $\psi_r(x)$ du rang r de Stirling *est entièrement définie à l'aide de ces conditions*

$$(x+2)\,.\,\psi_r(x+1) = (x-r)\,.\,\psi_r(x) + (x+1)\,.\,\psi_{r-1}(x) \tag{54}$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}\,, \quad \psi_{2r}(0) = 0\,, \quad \psi_{2r-1}(0) = \frac{(-1)^{r-1}}{(2\,r)\,!}\cdot B_{2r-1}\,, \tag{54 bis}$$

où B_{2r-1} désigne le nombre du rang r de Bernoulli.

De plus, appliquons les formules (41) et (42), nous aurons pour les nombres de Stirling ces deux expressions générales, valables pourvu que $r > 0$:

$$\left.\begin{aligned} C^r_{n+1} &= (n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\dots(n-r+1)\,\psi_{r-1}(n) \\ \mathfrak{S}^r_{n+1} &= (-1)^{r-1}\,.\,n\,(n+1)\,(n+2)\dots(n+r)\,\psi_{r-1}(\quad n-1). \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Or, pour un calcul pratique des nombres de Stirling ces formules sont certainement beaucoup plus simples que les formules récursives (25) que l'on a appliquées ordinairement jusqu'ici; mais pour une étude approfondie de tels nombres les fonctions $\psi_r(x)$ sont entièrement nécessaires.

Nous savons que $\psi_r(x)$ est un polynome entier du degré r de x; posons

$$\psi_r(x) = \sigma^0_r\,x^r + \sigma^1_r\,x^{r-1} + \cdots + \sigma^{r-1}_r\,x + \sigma^r_r\,, \tag{56}$$

puis introduisons de telles expressions dans (54), nous trouvons des formules récursives contenant les coefficients σ, savoir

$$(2\,r-p+2)\,.\,\sigma^p_r = \sigma^{p-1}_{r-1} + \sigma^p_{r-1} - \sum_{s=0}^{s=p-1}\left[\binom{r-s}{p-s+1} + 2\binom{r-s}{p-s}\right]\cdot\sigma^s_r\,, \tag{57}$$

$$(2\,r+2)\,\sigma^0_r = \sigma^0_{r-1}\,. \tag{57 bis}$$

On voit que la formule générale (57) est très compliquée; c'est pourquoi nous avons à chercher, à l'aide des formules du § 7, d'autres formules récursives plus commodes.

Appliquons en premier lieu la formule (48 bis), éliminons à l'aide de (42) toutes les fonctions $\Psi_{2s}(x)$, puis mettons $r+1$ au lieu de r, nous aurons cette première formule récursive

$$(r+1)\,\psi_r(x) = \frac{1}{(r+2)!} + \sum_{s=1}^{s=r} \frac{x-s+1}{(r-s+2)!} \cdot \psi_{s-1}(x)\,; \tag{58}$$

la formule (49) donnera de même, en vertu de (54)

$$x\,\psi_r(x-1) = (x+1)\,.\sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \cdot \psi_{r-s}(x) - \frac{(-1)^r}{(r+2)!}, \tag{58 bis}$$

tandis que (51) donnera cette relation récursive plus particulière

$$\left.\begin{aligned} &(x-2\,r)\,\psi_{2r}(x) = -\frac{2\,r}{(2\,r+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1} + \\ &+ \sum_{s=0}^{s=2r-1} \frac{(-1)^{s-1}}{s!}(x-2\,r+s)\left(\frac{x}{2}\right)^s \psi_{2r-s}(x). \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

En second lieu, la formule récursive (53) donnera pour les polynomes de Stirling cette formule remarquable

$$\left.\begin{aligned} &(r+1)\,\psi_r(x+1) = \frac{x+r+1}{2} \cdot \psi_{r-1}(x) + \\ &+ \sum_{s=1}^{<\frac{r}{2}} \frac{(-1)^s(x-r+2\,s)}{(2\,s)!} \cdot B_{2s-1} \cdot \psi_{r-2s}(x) + \\ &+ \frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}} B_r}{(r+1)!} \cdot \sin^2\frac{r\pi}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

formule qui est moins commode à cause de l'argument $x+1$ qui figure dans le polynome de Stirling au premier membre. Éliminons maintenant à l'aide de la définition (54) la fonction $\psi_r(x+1)$, nous aurons cette formule nouvelle

$$\left.\begin{aligned} &(r+1)(x-r)\,\psi_r(x) = \frac{x(x-r+1)}{2} \cdot \psi_{r-1}(x) + \\ &+ (x+2)\,.\sum_{s=1}^{\leq\frac{r}{2}} \frac{(-1)^s(x-r+2\,s)}{(2\,s)!} \cdot B_{2s-1} \cdot \psi_{r-2s}(x) + \\ &+ \frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}}(x+2)}{(r+1)!} \cdot B_r \cdot \sin^2\frac{r\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{60 bis}$$

On voit que pour r pair le dernier terme au second membre des deux formules (60) s'évanouira.

Montrons maintenant qu'il est possible de déduire, à l'aide des formules précédentes, une suite de rélations numériques très intéressantes.

Posons par exemple dans (58 bis) $x = -1$, nous aurons immédiatement

$$\psi_r(-2) = \frac{(-1)^r}{(r+2)!}, \tag{61}$$

tandis que la définition (54) donnera pour $x = r$

$$\psi_r(r+1) = \frac{r+1}{r+2} \cdot \psi_{r-1}(r),$$

d'où, en vertu de la valeur initiale $\psi_0(x) = \frac{1}{2}$,

$$\psi_r(r+1) = \frac{1}{r+2}; \tag{62}$$

mettons encore dans (54) $x = r + 2$, nous aurons, en vertu de (62), cette formule analogue

$$\psi_r(r+2) = \frac{1}{r+3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r+2}\right). \tag{62 bis}$$

Remarquons encore que (54) donnera ces autres résultats numériques

$$\psi_{2r}(0) = \psi_{2r}(-1) = 0, \quad \psi_{2r}(1) = \frac{1}{2} \cdot \psi_{2r-1}(0) \tag{63}$$

$$\psi_{2r-1}(1) = -\frac{2r-1}{2} \cdot \psi_{2r-1}(0), \quad \psi_{2r-1}(-1) = -\frac{1}{2r} \cdot \psi_{2r-1}(0). \tag{63 bis}$$

§ 9. Formules récursives pour les coefficients σ_r^s.

On voit que toutes les difficultés concernant le calcul des nombres de Stirling sont concentrées dans la détermination des coefficients σ_r^s introduits dans la formule (56), et les formules numériques du § 8 indiquent que ces difficultés sont sans doute très pénibles.

Déterminons tout d'abord les expressions générales du premier et des derniers des coefficients σ_r^s, Quant à σ_r^0, appliquons (57 bis), puis remarquons que $\sigma_0^0 = \frac{1}{2}$, nous aurons immédiatement

$$\sigma_r^0 = \frac{1}{2^{r+1} \cdot (r+1)!}, \tag{64}$$

tandis que les conditions (54 bis) donnent pour σ_r^r ces résultats:

$$\sigma_{2r}^{2r} = 0, \quad \sigma_{2r-1}^{2r-1} = \frac{(-1)^{r-1}}{(2r)!} \cdot B_{2r-1}. \tag{64 bis}$$

Déterminons encore le coefficient σ_{2r}^{2r-1}; à cet égard introduisons dans (59) les expressions correspondantes (56), nous aurons généralement

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{2r}^{2r-p+1} - 2r\,\sigma_{2r}^{2r-p} = \sum_{s=1}^{s=p-1} \frac{(-1)^{s-1}}{s!\,2^s} \left(\sigma_{2r-s}^{2r-p-1} - (2r-s)\,\sigma_{2r-s}^{2r-p}\right) + \\ + \frac{(-1)^p (2r-p)}{2^p \cdot p!} \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

et en particulier, en vertu de (64 bis)

$$\sigma_{2r}^{2r-1} = \frac{2r-1}{4r} \cdot \frac{(-1)^{r-1}}{(2r)!} \cdot B_{2r-1}, \tag{65}$$

tandis que l'hypothèse $p = 2$ donnera, en vertu de (α), cet autre résultat numérique

$$\sigma_{2r}^{2r-2} = \frac{2r-1}{4r} \cdot \sigma_{2r-1}^{2r-2} + \frac{(-1)^r}{(2r)!\,8r^2} \cdot B_{2r-1}. \tag{65 bis}$$

Nous avons enfin à appliquer ici les formules (63), ce qui donnera, en vertu de (64 bis) et (65), ces formules élégantes

$$\sum_{s=0}^{s=r-1} \sigma_{2r}^{2s} = \sum_{s=0}^{s=r-1} \sigma_{2r}^{2s+1} = \frac{(-1)^{r-1}}{4 \cdot (2r)!} \cdot B_{2r-1} \tag{66}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=0}^{s=r-1} \sigma_{2r-1}^{2s} &= \frac{(-1)^r (2r^2 - r + 1)}{4r \cdot (2r)!} \cdot B_{2r-1} \\ \sum_{s=0}^{s=r-2} \sigma_{2r-1}^{2s+1} &= \frac{(-1)^r (r+1)(2r+1)}{4r \cdot (2r)!} \cdot B_{2r-1}. \end{aligned}\right\} \tag{66 bis}$$

Revenons maintenant aux formules générales (58) et (58 bis), nous aurons respectivement

$$(r+1)\,\sigma_r^p = \sum_{s=0}^{s=p} \frac{\sigma_{r-s-1}^{p-s}}{(s+2)!} - \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{r-s-1}{(s+2)!} \cdot \sigma_{r-s-1}^{p-s-1} \tag{67}$$

$$(2r-p+2)\,\sigma_r^p = \sigma_{r-1}^{p-1} + \sigma_{r-1}^p - \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{r-s}{p-s} \cdot \frac{r+p-2s+2}{p-s+1} \cdot \sigma_r^s . \tag{67 bis}$$

Ces deux formules sont très compliquées il est vrai et les formules récursives analogues obtenues de (60) et (60 bis) deviendront beaucoup plus compliquées encore. Néanmoins les formules (67) nous donnent un moyen pour obtenir de la connaissance générale relative à la nature analytique des coefficients σ_r^s.

A cet égard nous avons tout d'abord à éliminer des deux formules susdites le coefficient σ_{r-1}^p, ce qui donnera sans peine

$$\left.\begin{aligned} p\,\sigma_r^p = -\,r\,\sigma_{r-1}^{p-1} + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{2}{(s+2)!} \cdot \sigma_{r-s-1}^{p-s} + \\ + \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{r-s}{p-s} \cdot \frac{r+p-2s+2}{p-s+1}\sigma_r^s - \sum_{s=1}^{s=p-1} \frac{2r-2s-2}{(s+2)!} \cdot \sigma_{r-s-1}^{p-s-1} ; \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

dans le cas particulier $p=1$ il faut supprimer au second membre de (68) la dernière somme qui deviendra illusoire; nous aurons dans ce cas

$$\sigma_r^1 = -\frac{r\,(r-5)}{(r+1)!\,6\,.\,2^{r+1}} . \tag{68 bis}$$

Combinons maintenant ce résultat particulier avec celui obtenu de (64) pour σ_r^0, la conclusion ordinaire de r à $r+1$ donnera ce résultat général concernant la nature analytique du coefficient σ_r^p:

Le coefficient général σ_r^p se présente sous cette forme

$$\sigma_r^p = \frac{f_{2p}(r)}{(r+1)!\,2^{r+1}} , \tag{69}$$

où $f_{2p}(r)$ désigne un polynome entier du degré $2p$ de r et dont les coefficients sont des nombres rationnels qui dépendent de p seulement.

C'est-à-dire que nous avons à étudier maintenant les polynomes $f_{2p}(r)$.

§ 10. Sur la nature analytique des coefficients σ_r^p.

Pour étudier plus profondement la nature des coefficients σ_r^p il faut introduire dans les formules du § 9 une variable continue au lieu du positif entier r; à cet égard posons

$$\sigma_p(x) = \frac{f_{2p}(x)}{\Gamma(x+2) \cdot 2^{x+1}}, \quad f_0(x) = 1, \tag{70}$$

nous aurons, en vertu de (69), cette formule numérique

$$\sigma_p(r) = \sigma_r^p; \tag{70 bis}$$

c'est-à-dire que les formules (67) et (67 bis) donnent ici ces identités beaucoup plus générales

$$\left.\begin{aligned} (x+1)\,\sigma_p(x) &= \sum_{s=0}^{s=p} \frac{\sigma_{p-s}(x-s-1)}{(s+2)!} - \\ &- \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{x-s+1}{(s+2)!} \cdot \sigma_{p-s-1}(x-s-1) \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

$$\left.\begin{aligned} (2x-p+2)\,\sigma_p(x) &= \sigma_{p-1}(x) + \sigma_p(x-1) - \\ &- \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{x-s}{p-s} \frac{x+p-2s+2}{p-s+1} \cdot \sigma_s(x); \end{aligned}\right\} \tag{71 bis}$$

car introduisons dans ces formules les expressions (70), puis supprimons le diviseur commun $\Gamma(x+2) \cdot 2^{x+1}$, nous trouverons deux équations algébriques du degré p par rapport à x et qui ont comme racines toutes les valeurs positives entières de x.

On voit que les formules (71) contiennent des factorielles aussi; c'est-à-dire qu'il faut éliminer ces factorielles pour obtenir de l'enseignement concernent la nature générale des fonctions $\sigma_p(x)$.

Or, je dis tout d'abord que nous avons généralement

$$\sigma_p(0) = 0, \quad p > 0. \tag{72}$$

En effet, ce résultat est certainement vrai pour $p = 1$, ce qui est une conséquence immédiate de la formule (68 bis). Supposons ensuite vraies les formules correspondantes pour les indices 1, 2, 3, 4, ..., $p-1$, puis mettons dans (71) et (71 bis) $x=0$, nous aurons respectivement

$$2\sigma_p(0)=\sigma_{p-1}(-1)+\sigma_p(-1)$$

$$-(p-2)\sigma_p(0)=-\sigma_{p-1}(-1)+\sigma_p(-1),$$

ce qui donnera immédiatement ces deux résultats numériques

$$\sigma_p(0)=0,\quad \sigma_p(-1)=-\sigma_{p-1}(-1). \tag{72 bis}$$

Cela posé, il est facile de démontrer cette proposition générale:

Supposons $p>0$, la fonction $\sigma_p(x)$ se présente sous cette forme nouvelle

$$\sigma_p(x)=\frac{x(x-1)\dots(x-p+1)}{\Gamma(x+2)\,.\,2^{x+1}}\cdot s_p(x), \tag{73}$$

où $s_p(x)$ est un polynome entier du degré p de x, et dont les coefficients sont des nombres rationnels.

La démonstration de (73) peut être établie aisément par la conclusion ordinaire de $p-1$ à p, si nous remarquons que la première des formules numériques (72 bis), donnera, en vertu de (73), cette autre

$$s_p(-1)=\frac{1}{p!}\cdot \tag{74}$$

En effet, définissons à l'aide de (73) la fonction, rationnelle en tous cas, $s_p(x)$, puis introduissons dans (71) et (71 bis) des expressions correspondantes, nous aurons respectivement

$$\left.\begin{aligned} s_p(x)=&\frac{(x-p)s_p(x-1)-(x-1)s_{p-1}(x-1)}{x}+\frac{2^{p+2}}{(p+2)!}+\\ &+\sum_{r=1}^{r=p-1}\frac{2^{r+1}}{(r+2)!}\cdot\frac{(x-p)s_{p-r}(x-r-1)-(x-r-1)s_{p-r-1}(x-r-1)}{x-r}\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned}(2x-p+2)\,s_p(x)=&\frac{2(x+1)(x+p)s_p(x-1)+s_{p-1}(x+1)}{x}-\\ &-\sum_{r=0}^{r=p-1}\frac{x+p-2r+2}{(p-r+1)!}\cdot s_r(x),\end{aligned}\right\} \tag{75 bis}$$

formules dont la dernière montre clairement, en vertu de (74), que $s_p(x)$ doit être un polynome entier de x, pourvu que $s_0(x), s_1(x), \dots, s_{p-1}(x)$ le soient

Remarquons encore que le polynome $s_{2p}(x)$ est divisible par $x - 2p$, parce que nous aurons toujours $\sigma_{2p}^{2p} = 0$.

Quant au calcul successif des polynomes $s_p(x)$, il faut avant de tout éliminer entre les formules (75) la fonction $s_p(x-1)$, ce qui s'effectuera sans peine. En effet, posons pour abréger

$$y_0(x) = 1, \quad y_p(x) = \frac{(x-p+1)\, s_p(x) - x\, s_{p-1}(x)}{x+1}, \tag{76}$$

nous aurons, en vertu de (75) et (75 bis), cette formule générale

$$\left.\begin{aligned} p\, s_p(x) = -2(x+1)\, s_{p-1}(x-1) + \sum_{r=0}^{r=p-1} \frac{x+p-2r+2}{(p-r-1)!} \cdot s_r(x) + \\ + \sum_{r=0}^{r=p} \frac{2^{r+2}}{(r+2)!} \cdot y_{p-r}(x-r-1); \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

nous voyons, en vertu de (74), que la fonction $y_p(x)$ est un polynome entier du degré p de x.

Remarquons en passant que les deux formules (60) et (60 bis) nous donnent de la même manière deux formules assez compliquées qui contiennent des fonctions $y_p(x)$ aussi.

La formule (77) est une formule récursive véritable pour le calcul successif des polynomes $s_r(x)$; de plus, elle ne contiennent aucune factorielle de l'argument x; mais cette formule est extrêmement compliquée. En effet, elle ne semble pas pouvoir donner de l'enseignement général relatif aux coefficients du polynome $s_p(x)$. Pour le premier de ces coefficients nous aurons cette expression générale

$$\frac{(-1)^p}{6^p \cdot p!}.$$

§ 11. Résultats particuliers.

Appliquons la formule (77), nous obtenons pour les premiers des polynomes $s_p(x)$ ces expressions

$$s_0(x) = 1$$

$$s_1(x) = -\frac{x-5}{6}$$

$$s_2(x) = \frac{(x-2)(x-11)}{3^2 \cdot 8}$$

$$s_3(x) = -\frac{1}{6^4 \cdot 5}(5x^3 - 120x^2 + 619x - 336)$$

$$s_4(x) = \frac{x-4}{6!\,6^3} \cdot (5x^3 - 170x^2 + 1271x + 150),$$

de sorte que les premiers des coefficients σ_p^p se déterminent à l'aide de la formule (73), savoir:

$$\sigma_r^0 = \frac{1}{2^{r+1}(r+1)!}, \quad \sigma_r^p = \frac{r(r-1)\dots(r-p+1)}{(r+1)!\,2^{r+1}} \cdot s_p(r).$$

Quant aux polynomes de Stirling

$$\psi_r(x) = \sigma_r^0 x^r + \sigma_r^1 x^{r-1} + \cdots + \sigma_r^{r-1} x + \sigma_r^r,$$

les résultats précédents nous permettent de calculer les premiers de ces polynomes, parce que leurs coefficients sont connus immédiatement.

Le calcul des polynomes susdits peut être poussé plus loin encore à l'aide de la formule (60 bis) et à l'aide de cette petite table des nombres de Bernoulli (*).

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = \frac{1}{30}, \quad B_9 = \frac{5}{66}.$$

Nous aurons par exemple pour les premiers des polynomes de Stirling:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4!}(3x + 2)$$

$$\psi_2(x) = \frac{x(x+1)}{4!\,2}$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{6!\,2^3}(15x^3 + 15x^2 - 10x - 8)$$

(*) Voir J. C. Adams, dans le *Journal de Crelle*, t. 85; 1878; Adams donne les valeurs des nombres $B_1\, B_3 \dots B_{123}$.

$$\psi_4(x) = \frac{x(x+1)}{6!\,2^4}(3x^2 - x - 6)$$

$$\psi_5(x) = \frac{1}{9!\,2^3}(63x^5 - 315x^3 - 224x^2 + 140x + 96)$$

$$\psi_6(x) = \frac{x(x+1)}{9!\,2^4}(9x^4 - 18x^3 - 57x^2 + 34x + 80),$$

de sorte que les premiers des nombres C_{n+1}^r et $\mathfrak{C}_{n+1}^r$ peuvent être calculés, pour une valeur quelconque de n, à l'aide des formules (55).

Copenhague, le 5 février 1904.

Note sur quelques applications analytiques des polynomes de Stirling.

(*Par* NIELS NIELSEN, *à Copenhague.*)

Dans un Mémoire récent (*) j'ai défini le polynome du rang n de STIRLING comme le polynome entier $\psi_n(x)$ du dégré n de x qui satisfait à cette équation aux différences finies partielles

$$(x+2)\,\psi_n(x+1) = (x-n)\,\psi_n(x) + (x+1)\,\psi_{n-1}(x) \tag{1}$$

avec ces conditions ultérieures

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi_{2n}(x) = 0, \quad \psi_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\cdot B_{2n-1}, \tag{1 bis}$$

où B_{2n-1} désigne le nombre du rang n de JACQUES BERNOULLI. Dans l'équation (1) n désigne toujours un positif entier, tandis que x est un variable complexe.

Supposons connus les polynomes de STIRLING, nous obtenons pour les nombres de STIRLING (**) ces expressions générales

$$C^r_{n+1} = \frac{(n-1)!}{(n+r)!}\cdot \psi_{r-1}(n) \tag{2}$$

$$\mathfrak{C}^r_{n+1} = (-1)^{r-1}\cdot\frac{(n+r)!}{(n-1)!}\cdot\psi_{r-1}(-n-1), \tag{2 bis}$$

où n et r désignent deux positifs entiers; dans le cas particulier $r=0$ nous

(*) *Recherches sur les polynomes et les nombres de Stirling.* Cé journal, même volume; les formules susdites se trouvent, p. 309.

(**) Loc. cit., p. 309.

aurons au contraire, même pour $n=0$,

$$C^0_{n+1} = \mathfrak{C}^0_{n+1} = 1. \tag{3}$$

Le but principal de la Note que voici est à étudier quelques séries de puissances, dont les coefficients s'expriment sous simple forme à l'aide des polynomes de Stirling, recherches qui nous conduiront à une suite de formules nouvelles et intéressantes.

A cet égard nous avons à généraliser beaucoup deux formules, démontrées dans le Mémoire susdit (*), en développant ces deux séries de puissances

$$\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^{-\alpha-1} = 1 + (\alpha+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\psi_s(\alpha)\cdot x^{s+1}, \quad |x| < 2\pi, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\log(1-x)}{-x}\right)^{\alpha} = 1 + \alpha\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\psi_s(\alpha+s)\cdot x^{s+1}, \quad |x| < 1, \tag{4 bis}$$

où α désigne une quantité finie quelconque.

Quant à la démonstration des deux formules (4), remarquons tout d'abord que les coefficients des séries de puissances figurant aux seconds membres deviendront des polynomes entiers de α et des dégrés

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

De plus, les deux formules plus particulières que nous venons de citer montrent à l'aide de (2) et (2 bis) que les valeurs des coefficients susdites pour une infinité de valeurs de α coïncident avec les valeurs des polynomes de Stirling des mêmes dégrés.

On démontrera d'une autre manière les deux formules (4) et (4 bis) en différentiant par rapport à α, ce qui nous conduira immédiatement à l'équation (1).

Posons maintenant dans (5) β au lieu de α, puis multiplions d'après la règle de Cauchy les deux séries ainsi obtenues, nous aurons en mettant ensuite $\alpha = x$ et $\beta = y$, cette formule pour l'addition des arguments dans $\psi_n(x)$:

$$\left.\begin{aligned}(x+y+2)\,\psi_n(x+y+1) &= (x+1)\,\psi_n(x) + (y+1)\,\psi_n(y) + \\ &+ (x+1)(y+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\psi_s(x)\,\psi_{n-s-1}(x),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(*) Loc. cit., p. 303.

formule dont le caractère est très général. En effet, des formules analogues sont valables pour les coefficients de la série de puissances obtenues pour la fonction $\Big(F(x)\Big)^{-\alpha-1}$, où $F(x)$ et $\frac{1}{F(x)}$ sont holomorphes toutes les deux aux environs de $x=0$.

Posons ensuite dans (5) $y=0$, puis éliminons à l'aide de (1) le terme $\psi_n(. + 1)$, nous aurons cette formule récursive

$$\left.\begin{aligned}(n+1)\,\psi_n(x) &= \frac{x+1}{2}\cdot\psi_{n-1}(x)-\psi_n(0)+\\ &+(x+1)\,.\sum_{s=1}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^s}{(2\,s)!}\cdot B_{2s-1}\cdot\psi_{n-2s}(x)\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

qui est beaucoup plus simple que la formule semblable que j'ai démontrée dans mon Mémoire précedent (*). Cependant la formule (5) ne nous donne aucun moyen pour la formation indépendante et générale des coefficients du polynome $\psi_n(x)$.

Combinons maintenant la formule (6) et la formule analogue susdite, nous obtenons cette formule intéressante

$$\left.\begin{aligned}(n+1)\,\Delta\,\psi_n(x) &= \frac{n}{2}\cdot\psi_{n-1}(x)+\\ &+\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^{s-1}(n-2\,s+1)}{(2\,s)!}\cdot B_{2s-1}\,.\,\psi_{n-2s}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{ bis})$$

Posons encore dans (5) $y=-2$ et $-x$ au lieu de x, puis remarquons que la valeur de $\psi_n(-2)$ peut être tirée directement de (4), nous aurons cette formule nouvelle

$$\left.\begin{aligned}x\,.\,\psi_n(-x-1) &= (x-1)\,.\,\psi_n(-x)+\frac{(-1)^n}{(n+2)!}+\\ &+(x-1)\,.\sum_{s=1}^{s=n}\frac{(-1)^s}{(s+1)!}\cdot\psi_{n-s}(-x)\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

qui est appliquable dans la calculation directe des nombres $\mathfrak{C}^{r}_{n+1}$.

En dernier lieu mettons dans (5) $y=x$, nous aurons de même cette

(*) Loc. cit., p. 310.

identité remarquable

$$\psi_n(2x+1) = \psi_n(x) + \frac{x+1}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \psi_s(x)\,\psi_{n-s-1}(x) \tag{8}$$

qui nous deviendra utile bientôt.

Il est digne d'intérêt aussi que la formule (6) nous permet de déterminer sous une forme relativement simple les coefficients d'une série de puissances remarquable. En effet, différentiant par rapport à α les deux membres de (4 bis), puis mettons $\alpha = 0$, nous aurons évidemment

$$\log\left(\frac{\log(1-x)}{-x}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(s) \,.\, x^{s+1}, \quad |x| < 1, \tag{9}$$

où le coefficient général $\psi_n(n)$ se détermine immédiatement en mettant dans (6) $x = n$, ce qui donnera, en vertu de (2),

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(n) &= \frac{1}{2n+2} - \frac{\psi_n(0)}{n+1} + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{2s} \cdot B_{2s-1} \,.\, C_{n+1}^{n-2s+1} \end{aligned}\right\} \tag{9 bis}$$

Considérons maintenant cette série de puissances analogue à (4)

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha-1} = 1 + (\alpha+1) \,.\, \sum_{s=0}^{s=\infty} \chi_s(\alpha) \,.\, x^{2s+2}, \quad |x| < \pi, \tag{10}$$

nous verrons tout d'abord que le coefficient général $\chi_n(\alpha)$ est un polynome entier de α d'un dégré egal à l'indice; nous aurons par exemple

$$\chi_0(\alpha) = \frac{1}{3!}$$

$$\chi_1(\alpha) = \frac{5\alpha + 7}{5!\,3}$$

$$\chi_2(\alpha) = \frac{35\alpha^2 + 154\alpha + 171}{7!\,3}.$$

Différentions deux fois par rapport à x la formule (10), nous obtenons une équation aux différences partielles pour $\chi_n(\alpha)$; cependant cette équation deviendra assez compliquée.

Combinons maintenant les deux formules (4) et (10), il est évidemment très facile de déduire une suite de simples relations entres les deux groupes de polynomes $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$.

En effet, appliquons en premier lieu cette identité

$$e^{ix(\alpha+1)} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha-1} = \left(\frac{1-e^{-2xi}}{2xi}\right)^{-\alpha-1}, \tag{a}$$

nous aurons, en vertu de (4) et (10), ce premier groupe de relations

$$(-1)^n \chi_n(x) = \frac{(x+1)^{2n+1}}{(2n+2)!} - \sum_{s=0}^{s=2n+1} \frac{(-1)^s 2^{2n-s+2} \cdot (x+1)^s}{s!} \cdot \psi_{2n-s+1}(x) \tag{11}$$

$$\frac{(x+1)^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{s=0}^{s=2n} \frac{(-1)^s 2^{2n-s+1} \cdot (x+1)^s}{s!} \cdot \psi_{2n-s}(x) \tag{11 bis}$$

$$2^{n+1} \cdot \psi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=2n} \frac{(-1)^s \cdot (x+1)^{n-2s+1}}{(n-s-1)!} \cdot \chi_s(x). \tag{12}$$

On voit que la formule (11) est assez remarquable, parce que le premier membre n'est que du dégré n par rapport à x, tandis que le second membre est formellement du dégré $2n+1$ par rapport à x.

En second lieu prenons pour point de départ cette autre identité

$$\left(\frac{1-e^{-xi}}{xi}\right)^{-\alpha-1} \cdot \left(\frac{1-e^{xi}}{-xi}\right)^{-\alpha-1} = \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^{-2\alpha-2}, \tag{b}$$

nous aurons immédiatement cette première formule

$$\psi_{2n+1}(x) + \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} \cdot \chi_n(2x+1) = \frac{x+1}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=2n} (-1)^s \psi_s(x) \psi_{2n-s}(x), \tag{13}$$

formule qui est très remarquable en comparaison avec (8); ajoutons en effet ces deux formules, nous obtenons sans peine cette autre

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{2n+1}(2x+1) + \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}} \cdot \chi_n(2x+1) = \\ &= (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \psi_{2s}(x) \psi_{2n-2s}(x). \end{aligned}\right\} \tag{13 bis}$$

On pourrait obtenir des formules analogues à (13) en divisant dans (b) les deux membres par un des deux facteurs figurant au premier membre; cependant de telles formules deviendront plus compliquées.

Remarquons en passant que les formules précédentes contenant les polynomes $\psi_n(x)$ ou $\chi_n(x)$ ne sont autre chose que des généralisations très étendues des formules bien connues pour les nombres de BERNOULLI (*).

Il est digne d'être remarqué que les polynomes $\chi_p(-n-1)$, où n désigne un positif entier nous conduiront à des nombres entiers semblables aux nombres $\mathfrak{S}^p_{n+1}$ de STIRLING. En effet, prenons pour point de départ cette identité

$$(2\,i \sin x)^n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \cdot e^{(n-2s)xi},$$

où n désigne un positif entier, puis différentions $n+2p$ fois par rapport à x, nous aurons pour $x=0$

$$(-1)^p\, 2^{n-1} \left(D_x^{n+2p} (\sin x)^n\right)_{x=0} = n!\, \mathfrak{S}^{2p}_{n+1}, \tag{c}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\mathfrak{S}^{2p}_{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{<\frac{n}{2}} (-1)^n \binom{n}{s} . (n-2\,s)^{n+2p}, \tag{14}$$

ce qui donnera cette série de puissances, valable pour une valeur finie quelconque de x

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n = 1 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\, n!}{2^{n-1}(n+2\,s+2)!} \cdot \mathfrak{S}^{2s+2}_{n+1} \cdot x^{2s+2},$$

d'où en comparaison avec (10), cette formule analogue à (2 bis)

$$\mathfrak{S}^{2p}_{n+1} = (-1)^p \cdot \frac{2^{n-1}(n+2\,p)!}{(n-1)!} \cdot \chi_{p-1}(-n-1), \quad p \geq 1, \tag{14 bis}$$

formule qui nous conduira immédiatement à un résultat dû à M. SAALSCHÜTZ (**) concernant la nature analytique du nombre $\mathfrak{S}^{2p}_{n+1}$ considéré comme fonction de n.

Les nombres $\mathfrak{S}^{2p}_{n+1}$ ont été étudiés déjà par EULER (***).

(*) Voir le beau livre de M. SAALSCHÜTZ: *Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen.*

(**) *Schriften der Physikalisch-oekonomischen Gesellschaft zu Koenigsberg*, 1892, 3 novembre.

(***) *Novi Commentarii Petropolitanae*, t. 13, p. 3; 1769.

La formule (14 bis) connue, il est évident que les relations que nous venons de développer entre les polynomes $\psi_n(x)$ et $\chi_n(x)$ nous conduiront à une suite de formules contenant les nombres $\mathfrak{C}^p_{n+1}$ et $\mathfrak{S}^{2p}_{n+1}$. En effet, la formule (11) donnera immédiatement cette autre

$$\frac{\mathfrak{S}^{2p}_{n+1}}{2^{n+2p-1}} = \sum_{s=0}^{s=2p} (-1)^s \binom{n+2p}{s} \left(\frac{n}{2}\right)^s \cdot \mathfrak{C}^{2p-s}_{n+1}, \tag{15}$$

tandis que (11 bis) nous conduira à cette formule, inverse de (15)

$$2^{n+p} \cdot \mathfrak{C}^{p+1}_{n+1} = -2^{n-1} . n^p . \binom{n+p}{n+1} + \sum_{s=1}^{<\frac{p-1}{2}} (-1)^s n^{p-2s+1} . \binom{n+p}{n+2s} \mathfrak{S}^{2s}_{n+1}; \tag{15 bis}$$

de la même manière nous obtenons, à l'aide de (13 bis), cette nouvelle formule intéressante

$$\mathfrak{C}^{2p}_{2n+1} + \frac{\mathfrak{S}^{2p}_{2n+1}}{2^{2n+2p-2}} = \frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!} \cdot \sum_{s=0}^{<\frac{p-1}{2}} \binom{2n+2p}{n+2s+1} \mathfrak{C}^{2s+1}_{n+1} \cdot \mathfrak{C}^{2p-2s-1}_{n+1}. \tag{16}$$

La formule (15) montrera clairement que le nombre entier $\mathfrak{S}^{2p}_{n+1}$ est toujours divisible par 2^{n-1}, ce qui peut être déduit de la définition (c) elle-même du reste; mais de plus nous obtenons ce résultat nouveau :

Le nombre entier $\mathfrak{S}^{2p}_{2n+1}$ *est toujours divisible par* $2^{2n+2p-1}$.

On trouvera par exemple

$$\mathfrak{S}^4_7 = 2^9 . 3 . 7^2,$$

nombre qui est divisible par

$$2^{7+4-2} = 2^9.$$

La proposition susdite montrera encore que le second membre de (16) est toujours un nombre entier.

Copenhague, le 5 mai 1904.