

ANNALI
DI
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa

Ulisse Dini in Pisa

Giuseppe Jung in Milano

Corrado Segre in Torino

SERIE III. * TOMO XXF

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

—
1913.

ALLA MEMORIA
DI
LAGRANGE

NEL CENTENARIO
DELLA SUA MORTE

(VOLUME SECONDO)

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO XXI TOMO (SERIE III)

E. J. WILCZYŃSKI . . .	Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi . . .	pag. 1
HANS HAHN	Über die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat . . .	» 33
PAUL KOEBE	Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie	» 57
M. W. STEKLOFF	Sur une formule générale d'Analyse et ses diverses applications	» 65
A. R. FORSYTH	The range of minimal surfaces providing a minimum area.	» 121
S. PINCHERLE	Sull'operazione aggiunta di Lagrange	» 143
M. C. CARATHÉODORY . .	Sur les points singuliers du problème du Calcul des Variations dans le plan	» 153
E. E. LEVI	Sui criterii sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle Variazioni	» 173
F. SCHUR	Über die berührenden Strahlennetze einer Strahlenkongruenz	» 219
E. BOREL	Sur la théorie des résonateurs et la discontinuité des solutions de certains systèmes différentiels	» 225
C. STÉPHANOS	Sur une propriété caractéristique des déterminants	» 233
H. LAMB	On Some Cases of Wave-Motion on Deep Water	» 237
J. HADAMARD	La construction de Weierstrass et l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique	» 251
E. BORTOLOTTI	Espressioni indeterminate	» 289
G. LAURICELLA	Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2. ^a specie	» 317

Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi.

(Di E. J. WILCZYNSKI, a Chicago.)

INTRODUZIONE.

Durante l'ultimo secolo la geometria ha fatto grandi progressi, ma questi progressi hanno avuto poca influenza sulla meccanica. In questa Memoria voglio mostrare come si possano applicare certe idee della geometria moderna ad un problema speciale ma importante della meccanica: il problema dei tre corpi.

Le questioni che sorgono intorno a questo problema dal punto di vista geometrico sono numerosissime, e poche sono quelle che io ho potuto risolvere; ma i risultati ottenuti hanno un interesse speciale per noi in questa occasione perchè si legano strettamente alle notissime ricerche del LAGRANGE.

Supponiamo che il baricentro del sistema dei tre corpi sia in riposo. Si presentano naturalmente tre generi di enti per lo studio geometrico: le curve descritte da ognuno dei tre corpi, le superficie rigate descritte dalle rette che congiungono due dei tre corpi, ed il cono, involuppo del piano dei tre corpi.

Dalla considerazione di questi tre generi di enti geometrici sorgono subito alcuni problemi fondamentali. Quali sono le variabili dalle quali dipendono le proprietà più essenziali di queste curve, di queste superficie rigate e di questo cono? Se ad un dato momento le tre velocità stanno nel piano stesso dei tre corpi, le orbite saranno evidentemente curve piane e le rigate del problema coincideranno col piano comune delle tre orbite. Si possono trovare altri casi nei quali uno almeno dei tre corpi abbia come orbita una curva piana? Si possono trovare altri casi nei quali una delle rigate del problema diventa sviluppabile o si riduce ad un cono? Noi mostreremo che

quest'ultimo caso può presentarsi soltanto se due lati del triangolo dei tre corpi restano costantemente eguali. Supponiamo invece che la curva, descritta da uno dei tre corpi, sia linea asintotica sopra una delle rigate del problema. Troveremo che, anche in questo caso, due lati del triangolo devono rimanere costantemente eguali. Si presenta dunque il problema dell'esistenza o della non-esistenza di soluzioni speciali del problema dei tre corpi nelle quali il triangolo resta sempre isoscele. Volendo generalizzare le note soluzioni del LAGRANGE (*) nelle quali il triangolo dei tre corpi resta sempre equilatero, si viene allo stesso problema. Il grande matematico, però, ha esaurito le possibilità in questa direzione; dimostreremo il teorema seguente:

*Se due lati del triangolo formato dei tre corpi restano sempre eguali, e se le masse dei due corpi che stanno alla base di questo triangolo isoscele non sono eguali, il terzo lato del triangolo dev'essere eguale agli altri due, cosicchè il caso si riduce a quello del LAGRANGE. Se, invece, le due sopradette masse sono eguali, si possono trovare due classi nuove di soluzioni isosceli del problema, come ha mostrato il FRANSÈN già nel 1895 (**).*

Per dimostrare questo teorema io ho dovuto seguire una via lunga e difficile. Sono dunque molto grato al mio chiarissimo collega, il signore W. D. MAC MILLAN per il cortese permesso di riprodurre qui nel § 4, invece della mia, la sua dimostrazione più perspicua e semplice.

§ 1. Le equazioni differenziali del problema dei tre corpi.

Siano (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) , (z_1, z_2, z_3) le coordinate cartesiane dei tre corpi P_x , P_y , P_z all'epoca t . Siano f la costante d'attrazione, m_x , m_y , m_z i prodotti delle tre masse per f , e Δ_{yz} , Δ_{zx} , Δ_{xy} le tre mutue distanze, cosicchè sarà

$$\Delta_{yz}^2 = \sum_{k=1}^3 (y_k - z_k)^2, \quad \Delta_{zx}^2 = \sum_{k=1}^3 (z_k - x_k)^2, \quad \Delta_{xy}^2 = \sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2.$$

(*) LAGRANGE, *Oeuvres*, t. VI, pp. 229-331.

(**) FRANSÈN A. È., *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar*, vol. 52 (1895), pp. 783-805. Stockholm.

Allora le equazioni del problema dei tre corpi saranno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x''_k &= m_y \frac{y_k - x_k}{\Delta_{xy}^3} + m_z \frac{z_k - x_k}{\Delta_{xz}^3}, \\ y''_k &= m_x \frac{x_k - y_k}{\Delta_{xy}^3} + m_z \frac{z_k - y_k}{\Delta_{yz}^3}, \\ z''_k &= m_x \frac{x_k - z_k}{\Delta_{xz}^3} + m_y \frac{y_k - z_k}{\Delta_{yz}^3}, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1)$$

dove

$$x''_k = \frac{d^2 x_k}{dt^2}, \quad \text{ecc.}$$

Di queste equazioni si conoscono dieci integrali. Sei di questi sono equivalenti alle equazioni

$$\xi_k = \frac{m_x x_k + m_y y_k + m_z z_k}{m_x + m_y + m_z} = a_{k0} + a_{k1} t, \quad (k = 1, 2, 3)$$

che regolano il movimento del baricentro del sistema. Tre altri, gli integrali delle aree, prendono la forma

$$\left. \begin{aligned} \sum m_x (x_2 x'_3 - x_3 x'_2) &= A, & \sum m_x (x_3 x'_1 - x_1 x'_3) &= B, \\ \sum m_x (x_1 x'_2 - x_2 x'_1) &= C. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

L'ultimo, il principio delle forze vive, dà l'equazione

$$\sum m_x (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) - 2U = 2h, \quad (3)$$

ove

$$U = \frac{m_y m_z}{\Delta_{yz}} + \frac{m_z m_x}{\Delta_{zx}} + \frac{m_x m_y}{\Delta_{xy}}, \quad (4)$$

Ora supponiamo che il baricentro del sistema sia in riposo (nell'origine). Avremo

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0,$$

e quindi

$$m_x x_k + m_y y_k + m_z z_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Dalla (5), se $m_z \neq 0$, si può trarre z_k come funzione di x_k e y_k . La sostituzione di questo valore di z_k nelle (1) dà

$$\left. \begin{aligned} x''_k &= \alpha x_k + \beta y_k, \\ y''_k &= \gamma x_k + \delta y_k, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6)$$

ove le quantità

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\left(\frac{m_y}{\Delta_{xy}^3} + \frac{m_x + m_z}{-zx}\right), & \beta &= m_y \left(\frac{1}{\Delta_{xy}^3} - \frac{1}{\Delta_{zx}^3}\right), \\ \gamma &= m_x \left(\frac{1}{\Delta_{xy}^3} - \frac{1}{\Delta_{yz}^3}\right), & \delta &= -\left(\frac{m_x}{-xy} + \frac{m_y + m_z}{-yz}\right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

sono indipendenti dall'indice k e soddisfano alle relazioni

$$\left. \begin{aligned} m_x m_y (\alpha - \delta) - m_x (m_x + m_z) \beta + m_y (m_y + m_z) \gamma &= 0, \\ \alpha + \beta &= -\frac{M}{\Delta_{zx}^3}, & \gamma + \delta &= -\frac{M}{\Delta_{yz}^3}, \\ M &= m_x + m_y + m_z, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{yz}^3} &= -\frac{\gamma + \delta}{M}, & \frac{1}{\Delta_{zx}^3} &= -\frac{\alpha + \beta}{M}, \\ \frac{1}{\Delta_{xy}^3} &= \frac{-m_y \alpha + (m_x + m_y) \beta}{m_y M} = \frac{(m_y + m_z) \gamma - m_x \delta}{m_x M}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Si possono dedurre facilmente due altri sistemi d'equazioni della forma delle (6) per le coppie di funzioni (y_k, z_k) e (z_k, x_k) . Basta per ciò fare una permutazione circolare delle lettere x, y, z .

§ 2. La rigata R_{xy} descritta dal lato $P_x P_y$ del triangolo.

Si può studiare la rigata R_{xy} , descritta dalla retta congiungente P_x e P_y , dal punto di vista della geometria proiettiva, mediante un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\left. \begin{aligned} x'' + p_{11} x' + p_{12} y' + q_{11} x + q_{12} y &= 0, \\ y'' + p_{21} x' + p_{22} y' + q_{21} x + q_{22} y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

soddisfatto dalle coordinate omogenee dei due punti P_x e P_y (*). Come coor-

(*) WILCZYNSKI E. J., *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces*. Leipzig, 1906, Chapter V, §§ 1-2.

dinate omogenee di P_x scegliamo le sue coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3 e $x_4 = 1$. In modo analogo, siano y_1, y_2, y_3 e $y_4 = 1$ le coordinate omogenee di P_y . Perchè quattro coppie di funzioni (x_k, y_k) possano soddisfare ad un sistema di equazioni della forma delle (10), occorre e basta che sia

$$\begin{aligned} p_{11} x'_k + p_{12} y'_k + q_{11} x_k + q_{12} y_k &= -x''_k, \\ p_{21} x'_k + p_{22} y'_k + q_{21} x_k + q_{22} y_k &= -y''_k, \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

dalle quali equazioni possiamo trarre le espressioni dei coefficienti p_{ik} e q_{ik} come funzioni delle x_k, y_k e delle loro derivate.

Ponendo

$$D(a_k, b_k, c_k, d_k) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

si trova

$$\begin{aligned} D p_{11} &= -D(x''_k, y'_k, x_k, y_k), & D p_{12} &= -D(x'_k, x''_k, x_k, y_k), \\ D p_{21} &= -D(y''_k, y'_k, x_k, y_k), & D p_{22} &= -D(x'_k, y''_k, x_k, y_k), \\ D q_{11} &= -D(x'_k, y'_k, x''_k, y_k), & D q_{12} &= -D(x'_k, y'_k, x_k, x''_k), \\ D q_{21} &= -D(x'_k, y'_k, y''_k, y_k), & D q_{22} &= -D(x'_k, y'_k, x_k, y''_k), \end{aligned}$$

ove

$$D = D(x'_k, y'_k, x_k, y_k). \quad (11)$$

Poichè, nel nostro caso, abbiamo $x_4 = y_4 = 1$, troviamo

$$D = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & x_1 - y_1 \\ x'_2 & y'_2 & x_2 - y_2 \\ x'_3 & y'_3 & x_3 - y_3 \end{vmatrix},$$

o più semplicemente

$$D = |x_k - y_k, x'_k, y'_k|$$

se designiamo col simbolo $|a_k, b_k, c_k|$ il determinante di terzo ordine

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ponendo

$$\left. \begin{aligned} |x_k, x'_k, y'_k| &= \varepsilon, & |y_k, x'_k, y'_k| &= \zeta, \\ |x_k, y_k, x'_k| &= \eta, & |x_k, y_k, y'_k| &= \theta, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

si ha

$$D = \varepsilon - \zeta. \quad (13)$$

Derivando le espressioni (12) si trova, mediante le (6),

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= -\delta \eta + \beta \theta, & \eta' &= -\varepsilon, \\ \zeta' &= \gamma \eta - \alpha \theta, & \theta' &= -\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Per i coefficienti p_{ik} e q_{ik} del sistema (10), il quale determina le proprietà proiettive della rigata R_{xy} , si trovano i valori seguenti

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{-(\alpha + \beta) \theta}{\varepsilon - \zeta}, & p_{12} &= \frac{(x + \beta) \eta}{\varepsilon - \zeta}, \\ p_{21} &= \frac{-(\gamma + \delta) \theta}{\varepsilon - \zeta}, & p_{22} &= \frac{(\gamma + \delta) \eta}{\varepsilon - \zeta}, \\ q_{11} = -q_{12} &= -\frac{\alpha \varepsilon + \beta \zeta}{\varepsilon - \zeta}, & q_{21} = -q_{22} &= -\frac{\gamma \varepsilon + \delta \zeta}{\varepsilon - \zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ove naturalmente D o $\varepsilon - \zeta$ dev'essere diverso da zero.

Se invece $D = 0$, le due equazioni (10) si riducono ad una sola equazione di primo ordine, cioè

$$-\theta x' + \eta y' + \varepsilon(-x + y) = 0. \quad (16)$$

La rigata R_{xy} sarà, in questo caso, sviluppabile (*). Questo fatto si può facilmente dimostrare così. Se x_1, \dots, x_4 sono le coordinate omogenee di un punto P_x della curva C_x , $\lambda x_k + \mu x'_k$, ($k = 1, 2, 3, 4$) sono le coordinate omogenee di un punto della tangente della C_x al punto P_x . In modo analogo $\nu y_k + \rho y'_k$ sono le coordinate di un punto della tangente della C_y a P_y . Se il luogo delle congiungenti dei punti corrispondenti P_x e P_y è sviluppabile, queste due tangenti si segheranno per ogni valore di t . Si potrà dunque scegliere λ, μ, ν, ρ in tal modo che i punti $\lambda x_k + \mu x'_k$ e $\nu y_k + \rho y'_k$ coincidano, cioè che

$$\lambda x_k + \mu x'_k = \omega (\nu y_k + \rho y'_k) \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

(*) WILCZYNSKI E. J., l. c., p. 131.

ove ω è un fattore di proporzionalità. Devono dunque x_k, y_k, x'_k, y'_k soddisfare a quattro equazioni di questa forma; deve dunque essere nullo il determinante D . Reciprocamente se D è eguale a zero, esistono quattro equazioni di questa forma, e la superficie R_{xy} sarà sviluppabile.

Evidentemente il determinante D non può essere nullo identicamente per tutte le soluzioni del problema dei tre corpi, poichè le condizioni iniziali si possono scegliere in modo che D abbia un valore qualunque. Si tratta ora di trovare le eventuali soluzioni speciali per le quali D sia identicamente eguale a zero.

Supponiamo $D = 0$, cosicchè R_{xy} sia sviluppabile. Questa sviluppabile si riduce ad un cono se

$$\varepsilon(\eta - \theta) = 0$$

e in nessun'altro caso (*). Questa condizione si spezza in due; cioè avremo o $\varepsilon = 0$ o $\eta = \theta$. Nel primo caso avremo

$$\varepsilon = \zeta = 0,$$

giacchè $D = 0$. Osserviamo che

$$\Delta = \alpha \delta - \beta \gamma = M \left[\frac{m_x}{\Delta_{xy}^3 \Delta_{zx}^3} + \frac{m_y}{\Delta_{yz}^3 \Delta_{xy}^3} + \frac{m_z}{\Delta_{zx}^3 \Delta_{yz}^3} \right]$$

non è mai eguale a zero per valori reali delle coordinate e valori positivi delle masse. Perciò segue dalle (14) che, in questo caso, avremo

$$\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0.$$

Queste condizioni esigono l'esistenza di due terne di funzioni l_1, m_1, n_1 e l_2, m_2, n_2 , tali che sia

$$l_1 x'_k = m_1 x_k + n_1 y_k, \quad l_2 y'_k = m_2 x_k + n_2 y_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

dove le tre funzioni della stessa terna non possono essere eguali a zero. Se dunque $l_1 = n_1 = 0$ avremo $m_1 \neq 0$, e per conseguenza $x_k = 0$. Secondo le (6) avremo o $y_k = 0$ o $\beta = 0$. Nel primo caso la (5) ci dà $z_k = 0$, purchè non sia $m_z = 0$. In questo caso due almeno dei tre corpi sono permanentemente raggruppati in un punto. Il movimento si effettua in un piano fisso (anche se $m_z = 0$), ed il problema si riduce a quello dei due corpi. Se invece $\beta = 0$,

(*) WILCZYNSKI E. J., l. c., p. 131, equaz. (16).

le distanze di P_y e P_x all'origine sono eguali; ma, secondo le (5) anche m_y e m_x saranno eguali, e ci troviamo in quel caso particolare delle tre masse collineari del LAGRANGE, nel quale due delle tre masse sono eguali. Il movimento, anche in questo caso, si effettua in un piano fisso. La discussione del caso $l_1 = m_1 = 0$, $n_1 \neq 0$, naturalmente, non dà niente di nuovo.

Supponiamo ora

$$l_1 = 0, \quad m_1 \neq 0, \quad n_1 \neq 0.$$

Si può scrivere

$$y_k = \omega x_k, \quad y'_k = \omega x'_k + \omega' x_k, \quad \omega \neq 0.$$

Derivando l'ultima equazione, e sostituendo per le derivate di secondo ordine i loro valori dati dalle (6), si trova

$$(\gamma - \alpha \omega - \omega'') x_k + (\delta - \beta \omega) y_k = 2 \omega' x'_k.$$

Se ω è costante, l'origine O ed i punti P_x e P_y saranno collineari; inoltre le distanze OP_x ed OP_y manterranno un rapporto invariabile. Secondo le (5), il punto P_x starà anch'esso sulla linea $P_x P_y$ e saranno costanti i rapporti delle tre mutue distanze. Si tratta dunque della nota soluzione del LAGRANGE, nella quale tre particelle collineari si muovono in uno stesso piano fisso.

Se, invece, ω non è costante, dividiamo i due membri dell'ultima equazione per ω' , ciò che ci dà un risultato della forma

$$x'_k = \Omega x_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Saranno dunque costanti i rapporti $x_1 : x_2 : x_3$. In questo caso i tre corpi si muovono sopra una retta fissa.

Abbiamo trovato incidentalmente il risultato seguente: *Se i tre corpi restano sempre allineati, o stanno sopra una retta fissa, o sono costanti i rapporti delle loro mutue distanze.*

La discussione del caso $l_2 = 0$ non dà niente di nuovo. Supponiamo dunque $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$, ciò che ci permette di scrivere

$$x'_k = m_1 x_k + n_1 y_k, \quad y'_k = m_2 x_k + n_2 y_k, \quad (k = 1, 2, 3),$$

onde

$$x''_k = m_1 x'_k + n_1 y'_k + m'_1 x_k + n'_1 y_k, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Se $n_1 \neq 0$ troveremo un'equazione della forma

$$x''_k + P x'_k + Q x_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Quindi ci sarà una relazione lineare ed omogenea con coefficienti costanti fra x_1, x_2, x_3 , ciò che vuol dire che l'orbita di P_x deve stare in un piano che passa per il baricentro del sistema. Possiamo scegliere il sistema delle coordinate in modo che $x_3 = 0$ sia l'equazione di questo piano. Dalle equazioni

$$x'_k = m_1 x_k + n_1 y_k$$

si può dedurre che sarà anche $y_3 = 0$. Se $m_2 \neq 0$, segue dalle (5) che $z_3 = 0$. In questo caso dunque almeno due dei tre corpi si muovono in un piano fisso, e la rigata R_{xy} si riduce a questo piano.

Se $n_1 = 0$, si ha

$$x'_k = m_1 x_k;$$

P_x descrive una retta fissa passante per il baricentro del sistema: la si può scegliere come asse delle coordinate, cosicchè $x_2 = x_3 = 0$, e

$$y'_2 = n_2 y_2, \quad y'_3 = n_2 y_3.$$

Sarà dunque costante il rapporto $y_2 : y_3$; ciò vuol dire che l'orbita di P_y starà in un piano che contiene anche l'orbita (rettilinea) di P_x . La rigata R_{xy} si riduce ad un piano anche in questo caso.

In tutti i casi, dunque, quando si ha

$$\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0$$

la rigata R_{xy} si riduce o ad un piano o ad una retta.

Il secondo caso nel quale la rigata R_{xy} potrebbe ridursi ad un cono è più interessante. Esso è caratterizzato dalle condizioni

$$\zeta = \varepsilon, \quad \theta = \eta. \tag{17}$$

Derivando la seconda equazione, secondo le (14), si ottiene la prima; ma la differenziazione della prima dà la relazione nuova

$$(\alpha + \beta) \eta = (\gamma + \delta) \eta.$$

Se fosse $\eta = 0$, saremmo ricondotti al caso dianzi trattato $\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0$. Supponiamo dunque che η non sia eguale a zero; ed avremo

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Secondo le (8), l'unica soluzione reale di quest'equazione è la seguente

$$\Delta_{xx} = \Delta_{yy};$$

il triangolo, cioè, dev'essere isoscele. Il cono al quale si riduce la rigata R_{xy} ha come vertice il punto

$$-x_k + y_k \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (*)$$

Poichè $x_4 = y_4 = 1$, questo punto si trova all'infinito; il cono si riduce ad un cilindro.

Abbiamo così dimostrato il teorema seguente: *La rigata R_{xy} descritta dalla linea congiungente due dei tre corpi, P_x e P_y , è sviluppabile se*

$$D = \varepsilon - \zeta = 0$$

e soltanto in questo caso. Questa sviluppabile non può ridursi ad un cono senza diventare un cilindro. In questo caso sarà

$$\varepsilon - \zeta = 0, \quad \eta - \theta = 0;$$

due lati del triangolo dei tre corpi diventeranno eguali, e la base di questo triangolo isoscele descriverà la superficie cilindrica alla quale si riduce la rigata R_{xy} . Finalmente se

$$\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0$$

la rigata R_{xy} si riduce ad un piano o ad una linea.

È inutile aggiungere che l'esistenza delle varie classi di soluzioni menzionate in questo teorema non è stata stabilita in nessun modo, se non nei casi evidenti quando i tre corpi si muovono in uno stesso piano fisso. Parleremo non di meno di *soluzioni sviluppabili, cilindriche, isosceli*, ecc., senza volere con ciò pregiudicare la questione della loro esistenza.

Torniamo dunque al caso generale delle soluzioni sviluppabili, e cerchiamo di approfondire un po' di più la questione della loro esistenza. Si ha

$$\left. \begin{aligned} D &= \varepsilon - \zeta, \\ D' &= (\alpha + \beta) \theta - (\gamma + \delta) \eta, \\ D'' &= (\gamma + \delta) \varepsilon - (\alpha + \beta) \zeta - (\gamma' + \delta') \eta + (\alpha' + \beta') \theta, \\ D''' &= 2(\gamma' + \delta') \varepsilon - 2(\alpha' + \beta') \zeta - \mu \eta + \lambda \theta, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ove

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \alpha'' + \beta'' + (\alpha + \beta) \alpha + (\gamma + \delta) \beta, \\ \mu &= \gamma'' + \delta'' + (\alpha + \beta) \gamma + (\gamma + \delta) \delta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(*) WILCZYNSKI E. J., l. c., p. 131, equaz. (15).

Per una soluzione sviluppabile, non piana, dev'essere

$$D = D' = D'' = D''' = 0,$$

senza che $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ siano tutte nulle. Dev'essere eguale a zero, dunque, il determinante di queste quattro equazioni, cioè

$$\left. \begin{aligned} & 2(\alpha' + \beta' - \gamma' - \delta') [(\alpha' + \beta')(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)(\gamma' + \delta')] - \\ & - (\alpha + \beta - \gamma - \delta) [(x'' + \beta'')(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)(\gamma'' + \delta'')] + \\ & + (\alpha + \beta - \gamma - \delta)(x\delta - \beta\gamma) \end{aligned} \right\} = 0. \quad (20)$$

L'equazione (20) dev'essere soddisfatta da tutte le soluzioni sviluppabili, non piane. Si vede che quest'equazione contiene le derivate di primo e secondo ordine di Δ_{yz} e di Δ_{zx} , ma che le derivate di Δ_{xy} non c'entrano. Si può dunque risolverla rispetto a Δ_{xy} , se

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0,$$

cioè, se i due lati Δ_{zx} e Δ_{yz} del triangolo non sono eguali.

Postuliamo l'esistenza di ∞^n soluzioni del problema dei tre corpi soddisfacenti alla (20). Non occorre che per tutte queste soluzioni $D, D',$ ecc., siano nulli; ma poichè la (20) è equivalente all'annullarsi del determinante delle quattro equazioni (18), vi dev'essere una relazione lineare ed omogenea fra D, D', D'', D''' . Questa relazione è la seguente

$$\left. \begin{aligned} & [(\alpha' + \beta')(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)(\gamma' + \delta')] D''' - [\lambda(\gamma + \delta) - \mu(\alpha + \beta)] D'' + \\ & + [\lambda(\gamma' + \delta') - \mu(\alpha' + \beta')] D' - \\ & - \{2(\alpha' + \beta') \{(\alpha' + \beta')(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)(\gamma' + \delta')\} - \\ & - (\alpha + \beta) \{ \lambda(\gamma + \delta) - \mu(\alpha + \beta) \} \} D = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Il coefficiente di D''' non può annullarsi, come si può vedere dalla (20), se i due lati Δ_{zx} e Δ_{yz} del triangolo non sono eguali.

Consideriamo dunque una soluzione sviluppabile, ma non isoscele, del problema. Possiamo, mediante la (21), calcolare tutte le derivate di ordine superiore di D sotto la forma

$$D^{(k)} = A_k D + B_k D' + C_k D'', \quad (k = 3, 4, 5, \dots).$$

Sia $t=0$ un punto regolare della nostra soluzione, tale che per $t=0$, Δ_{zx} sia diverso da Δ_{xy} , e che per i valori di t non troppo grandi x_k e y_k siano

svilupparli in serie di potenze di t . Scegliamo le condizioni iniziali in modo che D, D', D'' si annullino per $t=0$. Avranno il valore zero per $t=0$ tutte le derivate D di ordine superiore. Sarà dunque D identicamente eguale a zero.

Dunque: *se ammettiamo l'esistenza di ∞^n soluzioni del problema dei tre corpi soddisfacenti alla relazione (20), esisteranno almeno ∞^{n-3} soluzioni sviluppabili non isosceli, cioè non cilindriche.*

Nella formulazione di questo teorema abbiamo detto *almeno ∞^{n-3}* , perchè non possiamo essere assolutamente certi che le tre condizioni $D = D' = D'' = 0$ per $t=0$ siano indipendenti fra loro e da altre relazioni che possano essere implicate dalla (20).

Nel caso di una soluzione isoscele si ha

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta,$$

ed alla (21) si deve sostituire la seguente

$$(\alpha + \beta) D'' - (\alpha' + \beta') D - (\alpha + \beta)^2 D = 0, \quad (22)$$

dove il coefficiente di D'' non s'annulla mai. Un ragionamento strettamente analogo a quello ora svolto ci insegna che *il problema dei tre corpi ammetterà almeno ∞^{m-2} soluzioni cilindriche, se ammette ∞^m soluzioni isosceli.*

§ 3 Equazioni differenziali delle orbite.

Cerchiamo l'equazione differenziale di quarto ordine

$$x^{(4)} + 4p_1 x''' + 6p_2 x'' + 4p_3 x' + p_4 x = 0 \quad (23)$$

della quale x_1, x_2, x_3 e $x_4 = 1$ costituiscano un sistema fondamentale di soluzioni. Evidentemente p_4 sarà eguale a zero, e per gli altri coefficienti avremo un sistema di tre equazioni

$$4p_1 x'''_k + 6p_2 x''_k + 4p_3 x'_k = -x_k^{(4)}, \quad (k = 1, 2, 3),$$

onde

$$\begin{aligned} 4Pp_1 &= - |x_k^{(4)}, x''_k, x'_k|, & 6Pp_2 &= - |x''_k, x_k^{(4)}, x'_k|, \\ 4Pp_3 &= - |x'''_k, x''_k, x_k^{(4)}|, & P &= |x'''_k, x''_k, x'_k|. \end{aligned}$$

Dalle (6) si ha

$$x''_k = \alpha x_k + \beta y_k, \quad x'''_k = \alpha' x_k + \beta' y_k + \alpha x'_k + \beta y'_k.$$

Sostituendo questi valori in P , si trova

$$\begin{aligned} P &= | \alpha' x_k + \beta' y_k + \alpha x'_k + \beta y'_k, \alpha x_k + \beta y_k, x'_k | = \\ &= \alpha' \beta | x_k, y_k, x'_k | + \alpha \beta' | y_k, x_k, x'_k | + \alpha \beta | y'_k, x_k, x'_k | + \beta^2 | y'_k, y_k, x'_k | \\ 0 \quad & P = (\alpha' \beta - \alpha \beta') \eta + \beta (\alpha \varepsilon + \beta \zeta). \end{aligned} \quad (24)$$

Lo stesso metodo basta per trovare le equazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} 4 P p_1 &= [\alpha \beta'' - \alpha'' \beta + (\alpha \delta - \beta \gamma)] \eta - 2 \beta' (\alpha \varepsilon + \beta \zeta), \\ 6 P p_2 &= [2 \alpha' \beta' - \beta (\alpha'' + \alpha^2 + \beta \gamma)] \varepsilon + [2 (\beta')^2 - \beta (\beta'' + \alpha \beta + \beta \delta)] \zeta + \\ &\quad + [\beta' (\alpha'' + \alpha^2 + \beta \gamma) - \alpha' (\beta'' + \alpha \beta + \beta \delta)] \eta, \\ 4 P p_3 &= 2 (\alpha \beta' - \alpha' \beta) (\alpha \varepsilon + \beta \zeta) + \\ &\quad + [2 \alpha' (\alpha \beta' - \alpha' \beta) - \alpha \{ \alpha \beta'' - \alpha'' \beta + \beta (\alpha \delta - \beta \gamma) \}] \eta + \\ &\quad + [2 \beta' (\alpha \beta' - \alpha' \beta) - \beta \{ \alpha \beta'' - \alpha'' \beta + \beta (\alpha \delta - \beta \gamma) \}] \theta. \end{aligned} \right\} (25)$$

In modo analogo si trova l'equazione differenziale dell'orbita di P_y

$$y^{(4)} + 4 q_1 y^{(3)} + 6 q_2 y'' + 4 q_3 y' = 0, \quad (26)$$

ove

$$\left. \begin{aligned} 4 Q q_1 &= [\gamma \delta'' - \gamma'' \delta - \gamma (\alpha \delta - \beta \gamma)] \theta + 2 \gamma' (\gamma \varepsilon + \delta \zeta), \\ 6 Q q_2 &= [-2 (\gamma')^2 + \gamma (\gamma'' + \alpha \gamma + \delta \gamma)] \varepsilon + [-2 \gamma' \delta' + \gamma (\delta'' + \beta \gamma + \delta^2)] \zeta + \\ &\quad + [-\gamma' (\delta'' + \beta \gamma + \delta^2) + \delta' (\gamma'' + \alpha \gamma + \delta \gamma)] \theta, \\ 4 Q q_3 &= 2 (\gamma \delta' - \gamma' \delta) (\gamma \varepsilon + \delta \zeta) + \\ &\quad + [2 \gamma' (\gamma \delta' - \gamma' \delta) - \gamma \{ \gamma \delta'' - \gamma'' \delta - \gamma (\alpha \delta - \beta \gamma) \}] \eta + \\ &\quad + [2 \delta' (\gamma \delta' - \gamma' \delta) - \delta \{ \gamma \delta'' - \gamma'' \delta - \gamma (\alpha \delta - \beta \gamma) \}] \theta, \\ Q &= (\gamma' \delta - \gamma \delta') \theta - \gamma (\gamma \varepsilon + \delta \zeta). \end{aligned} \right\} (27)$$

L'orbita di P_x è una curva piana se $P=0$ e soltanto in questo caso. La (24) dimostra che $P=0$ se $\beta=0$, cioè se $\Delta_{xy} = \Delta_{xz}$. Quindi: *se due lati del triangolo restano sempre eguali, l'orbita del corpo che è nel vertice del triangolo isoscele è una curva piana*. Si possono adoperare le (6) per dimostrare lo stesso teorema, e anche di più: *il piano di questa orbita passa per il baricentro del sistema*.

Consideriamo il caso in cui P_x descriva una curva piana senza che il triangolo sia isoscele. Avremo

$$P = 0, \quad \beta \neq 0.$$

Giacchè P deve annullarsi per ogni valore di t , anche P' dev'esser eguale a zero, onde

$$\left. \begin{aligned} P &= (\alpha' \beta - \alpha \beta') \eta + \beta (\alpha \varepsilon + \beta \zeta) = 0, \\ P' &= [\alpha'' \beta - \alpha \beta'' - (\alpha \delta - \beta \gamma) \beta] \eta + 2\beta' (\alpha \varepsilon + \beta \zeta) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Queste relazioni si possono soddisfare ponendo

$$\eta = \alpha \varepsilon + \beta \zeta = 0;$$

ma allora per $\beta \neq 0$ si trovano le condizioni

$$\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0,$$

che corrispondono al caso evidente, e già trattato, che tutte le masse non infinitesimali del sistema si muovano nello stesso piano fisso. Lasciando da parte questo caso evidente, segue dalle (28)

$$2\beta' (\alpha' \beta - \alpha \beta') - \beta [\alpha'' \beta - \alpha \beta'' - (\alpha \delta - \beta \gamma) \beta] = 0. \quad (29)$$

Se questa condizione è soddisfatta per ogni valore di t , P sarà una soluzione dell'equazione

$$2\beta' P - \beta P' = 0,$$

donde

$$P = C\beta^2$$

ove C è costante. Se, dunque, P s'annulla per $t=0$, si annullerà identicamente. *Se l'equazione (29) si può soddisfare con ∞ soluzioni del problema dei tre corpi, esisteranno ∞^{n-1} soluzioni nelle quali il punto P_x descrive una curva piana.*

È molto interessante di osservare che le due condizioni (20) e 29) sono essenzialmente identiche. Infatti, se cerchiamo le condizioni perchè la rigata R_{yz} diventi sviluppabile, troveremo fra esse una relazione che può ottenersi dalla (20) permutando le lettere x, y, z . Così si trova precisamente la (29). *Lasciando da parte i casi evidenti, le due questioni:*

- I) *se l'orbita di P_x può essere una curva piana,*
- II) *se la rigata R_{yz} può diventar sviluppabile,*

conducono allo stesso problema analitico, cioè: trovare le eventuali soluzioni del problema dei tre corpi per le quali le mutue distanze soddisfano la relazione (29).

Nel caso $P=0$, le (25) non valgono più. Poichè, in questo caso, l'orbita di P_x sarà una curva piana, x_1, \dots, x_4 devono soddisfare ad un'equazione differenziale di terzo ordine

$$x''' + 3 \pi_1 x'' + 3 \pi_2 x' + \pi_3 x = 0.$$

Naturalmente π_3 sarà eguale a zero, perchè quest'equazione deve ammettere la soluzione costante $x_k=1$. Per trovare gli altri coefficienti si hanno le condizioni

$$x'''_k + 3 \pi_1 x''_k + 3 \pi_2 x'_k + \pi_3 x_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3),$$

donde

$$3 \pi_1 = - \frac{|x''_k, x'_k, x_k|}{|x''_k, x'_k, x_k|}, \quad 3 \pi_2 = - \frac{|x''_k, x''_k, x_k|}{|x''_k, x'_k, x_k|},$$

$$\pi_3 = - \frac{|x''_k, x'_k, x''_k|}{|x''_k, x'_k, x_k|}.$$

Dalle (6) si ha

$$x''_k = \alpha x'_k + \alpha' x_k + \beta y'_k + \beta' y_k, \quad y_k = \frac{1}{\beta} (x'_k - \alpha x_k),$$

e quindi, se $\beta \neq 0$,

$$x''_k = \frac{\beta'}{\beta} x''_k + \alpha x'_k + \left(\alpha' - \alpha \frac{\beta'}{\beta} \right) x_k + \beta y'_k.$$

Si avrà dunque

$$|x''_k, x'_k, x_k| = \beta \eta, \quad |x''_k, x'_k, x_k| = \beta' \eta + \beta \eta',$$

$$|x''_k, x''_k, x_k| = \beta (\alpha \eta + \beta \theta), \quad |x''_k, x'_k, x''_k| = P = 0.$$

Se l'orbita di P_x è una curva piana, e se η e β sono diversi da zero, l'equazione differenziale, caratteristica delle proprietà proiettive di questa curva, sarà

$$x''' - \left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\eta'}{\eta} \right) x'' - \frac{\alpha \eta + \beta \theta}{\eta} x' = 0. \quad (30)$$

Nel caso $\beta = 0$, $\eta \neq 0$ si deve sostituire alla (30) la seguente

$$x''' - \frac{\alpha'}{\alpha} x'' - \alpha x' = 0. \quad (31)$$

Se $\beta = \eta = 0$, la (31) è valida ancora; ma vale anche l'equazione

$$x'' - \frac{\zeta'}{\zeta} x = 0 \quad (32)$$

ottenuta dalle (10) e (15). In questo caso l'orbita di P_x diventa rettilinea. Finalmente nel caso $\beta \neq 0$, $\eta = 0$ si ritrovano le condizioni $\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0$ che corrispondono a tre masse muovendosi nello stesso piano fisso.

Se la rigata R_{xy} non è sviluppabile, sarà

$$\varepsilon - \zeta \neq 0,$$

e la rigata sarà caratterizzata dalle equazioni (10) i cui coefficienti si calcolano per mezzo delle (15). Domandiamoci se l'orbita di P_x può essere linea asintotica sulla rigata R_{xy} . Perchè lo sia, occorre e basta che la condizione

$$p_{12} = 0 \quad (*)$$

sia soddisfatta. Poichè $\alpha + \beta$ non può annullarsi dev'essere $\eta = 0$ e quindi deve annullarsi anche ε . Secondo le (14) dev'essere di più

$$\beta = 0, \quad \zeta' = -\alpha \theta, \quad \theta \neq 0,$$

giacchè da $\theta = 0$ seguirebbe $\zeta = -\theta' = 0$, ciò che è contrario all'ipotesi che D non sia eguale a zero.

Se l'orbita di P_x è curva asintotica sopra la rigata R_{xy} , i due lati del triangolo dei tre corpi che s'incontrano in P_x devono essere eguali. L'equazione differenziale dell'orbita di P_x diventa

$$x'' - \frac{\zeta''}{\zeta'} x' = 0.$$

L'orbita di P_x sarà dunque rettilinea.

(*) WILCZYNSKI E. J., l. c., p. 142.

§ 4. Dimostrazione della non-esistenza, nel caso generale, di soluzioni isosceli diverse da quelle equilaterali del LAGRANGE.

Dalla discussione precedente risulta chiaramente che la questione dell'esistenza o della non-esistenza di soluzioni isosceli è di importanza fondamentale dal punto di vista geometrico. Nell'introduzione abbiamo già formulato la risposta, essenzialmente negativa, a questa domanda. Alla mia dimostrazione di questo mio teorema sostituisco quella molto più semplice e breve del signor MAC MILLAN.

Cominciamo colla forma delle equazioni differenziali dovuta a LAGRANGE(*). Scegliamo dunque un sistema T di tre assi ortogonali fissi, e prendendo ognuno dei tre corpi come origine, determiniamo tre sistemi di coordinate, i cui assi siano paralleli a quelli corrispondenti di T . Saranno

$$\left. \begin{aligned} X_k &= z_k - y_k && \text{le coordinate di } m_x && \text{nel sistema di } m_y, \\ Y_k &= x_k - z_k && \gg && \gg && \gg && m_x && \gg && \gg && \gg && m_x, \\ Z_k &= y_k - x_k && \gg && \gg && \gg && m_y && \gg && \gg && \gg && m_x. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Avremo dunque, invece delle (1), le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} X''_k + M \frac{X_k}{\Delta_{yz}^3} - m_x \left(\frac{X_k}{\Delta_{yz}^3} + \frac{Y_k}{\Delta_{zx}^3} + \frac{Z_k}{\Delta_{xy}^3} \right) &= 0, \\ Y''_k + M \frac{Y_k}{\Delta_{zx}^3} - m_y \left(\frac{X_k}{\Delta_{yz}^3} + \frac{Y_k}{\Delta_{zx}^3} + \frac{Z_k}{\Delta_{xy}^3} \right) &= 0, \quad (k = 1, 2, 3), \\ Z''_k + M \frac{Z_k}{\Delta_{xy}^3} - m_z \left(\frac{X_k}{\Delta_{yz}^3} + \frac{Y_k}{\Delta_{zx}^3} + \frac{Z_k}{\Delta_{xy}^3} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ove evidentemente

$$X_k + Y_k + Z_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3),$$

e dove scriveremo per maggiore semplicità

$$r^2 = \Delta_{yz}^2 = \sum X_k^2, \quad r_1^2 = \Delta_{zx}^2 = \sum Y_k^2, \quad r_2^2 = \Delta_{xy}^2 = \sum Z_k^2. \quad (34)$$

Supponiamo ora che il triangolo sia isoscele, e che sia m_x il corpo posto al

(*) LAGRANGE, *Oeuvres*, t. VI.

vertice di questo triangolo, cosicchè $r_1 = r_2$. Sarà anche vantaggioso di avere m_y e m_z riferiti ad uno stesso sistema di coordinate avente m_x per origine. Per fare questo cambiamento nelle nostre equazioni basta cambiare il segno di Y_k . Risulta il sistema nuovo

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad X''_k + \left[\frac{M}{r_1^3} + (m_y + m_z) q \right] X_k &= 0, \\ \text{(b)} \quad Y''_k + \frac{M}{r_1^3} Y_k + m_y q X_k &= 0, \quad (k = 1, 2, 3), \\ \text{(c)} \quad Z''_k + \frac{M}{r_1^3} Z_k - m_z q X_k &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ove

$$q = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}, \quad X_k - Y_k + Z_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (36)$$

Sieno ξ_1, ξ_2, ξ_3 e $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ rispettivamente le coordinate del punto medio e del baricentro della base, cosicchè

$$\xi_k = \frac{1}{2}(Y_k + Z_k), \quad \bar{x}_k = \frac{m_y Z_k + m_z Y_k}{m_y + m_z}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (37)$$

e quindi

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \xi''_k + \frac{M}{r_1^3} \xi_k + \frac{1}{2}(m_y - m_z) q X_k &= 0, \\ \text{(b)} \quad \bar{x}''_k + \frac{M}{r_1^3} \bar{x}_k &= 0, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Le (35 a) e (38 b) ammettono gli integrali delle aree

$$X_i X'_j - X_j X'_i = a_k, \quad \bar{x}_i \bar{x}'_j - \bar{x}_j \bar{x}'_i = b_k, \quad (k = 1, 2, 3),$$

onde

$$\sum a_k X_k = 0, \quad \sum b_k \bar{x}_k = 0.$$

Il movimento di m_z si effettua dunque in un piano p passante per m_y e fisso rispetto a m_y ; il baricentro della base si muove in un piano p' passante per m_x e fisso rispetto a m_x .

Si può scegliere il terzo asse delle coordinate in tal modo che a_1 e a_2 si annullino, cosicchè sarà

$$X_3 = 0.$$

Per primo asse delle coordinate scegliamo una retta parallela all'intersezione di p e p' . Fatto ciò, b si annullerà, e designando con I l'angolo dei due piani p e p' , si potrà scrivere

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -C \operatorname{sen} I, \quad b_3 = C \operatorname{cos} I,$$

e quindi

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 \bar{x}'_3 - \bar{x}_3 \bar{x}'_1 &= C \operatorname{sen} I, & \bar{x}_1 \bar{x}'_2 - \bar{x}_2 \bar{x}'_1 &= C \operatorname{cos} I, & \bar{x}_3 &= \bar{x}_2 \tan I, \\ X_1 X'_2 - X_2 X'_1 &= C_1, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

dove abbiamo scritto C_1 invece di a_3 .

Poichè $X_3 = 0$, la base del triangolo resta sempre parallela al piano dei primi due assi. Dalle (36) e (37) si ricava

$$Y_3 = Z_3 = \xi_3 = \bar{x}_3.$$

La condizione $r_1^2 = r_2^2$, la quale si può scrivere

$$\Sigma (Y_k^2 - Z_k^2) = 0,$$

si riduce dunque a

$$(Y_1 + Z_1)(Y_1 - Z_1) + (Y_2 + Z_2)(Y_2 - Z_2) = 0$$

o, secondo le (36) e (37),

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 = 0. \quad (40)$$

Derivando la (40) si vede la possibilità di definire una quantità nuova ρ , tale che sia

$$\rho = \xi'_1 X_1 + \xi'_2 X_2 = -(\xi_1 X'_1 + \xi_2 X'_2). \quad (41)$$

Combinando queste equazioni colla (40) si trovano le seguenti

$$\left. \begin{aligned} X_1 \rho &= -\xi_2 (X_1 X'_2 - X_2 X'_1) = -C_1 \xi_2, & X_2 \rho &= C_1 \xi_1, \\ \xi_2 \rho &= -X_1 (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

onde

$$X_1 \xi_2 [\rho^2 - C_1 (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1)] = 0.$$

Se $X_1 = 0$, secondo la (40) dev'essere anche $\xi_2 = 0$, poichè la soluzione $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ è evidentemente di nessuna importanza.

Avremo dunque

$$X_1 = \xi_2 = 0, \quad X_2 = 0, \quad (43)$$

e, secondo la (38),

$$(m_y - m_z) q = 0.$$

Dunque, o le due masse m_y e m_z sono eguali, o il triangolo è equilatero.

Lasciando da parte questi casi, dev'essere

$$\rho^2 = C_1 (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1). \quad (44)$$

Derivando la (41) e sostituendo alle derivate di secondo ordine i loro valori dalle (35) e (39), si trovano le equazioni

$$\rho' = \xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2 - \frac{1}{2} (m_y - m_z) q r^2,$$

$$\rho' = -(\xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2),$$

onde

$$-(\xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2) = \rho' = -\frac{1}{4} (m_y - m_z) r^2 q = \frac{1}{2} (m_y + m_z) \mu r^2 q \quad (45)$$

ove

$$\mu = \frac{m_z - m_y}{2(m_z + m_y)}.$$

Se le masse m_y e m_z sono eguali, avremo

$$\xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2 = 0.$$

Derivando questa relazione, e sostituendo alle derivate di secondo ordine i loro valori dalle (35) e (38), si trova, secondo la (41),

$$(m_y + m_z) \rho q = 0.$$

Lasciando da parte le note soluzioni equilaterali del LAGRANGE, ρ deve annullarsi. Secondo le (42) dev'essere o $C_1 = 0$ o $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Poichè nel nostro caso $m_y = m_z$, se $\xi_1 = \xi_2 = 0$ segue, secondo la (39), che C deve annullarsi. Si presentano dunque due classi di soluzioni nel caso $m_y = m_z$ corrispondenti rispettivamente alle due condizioni $C_1 = 0$ e $C = 0$. Se $C_1 = 0$ la base del triangolo isoscele resta sempre parallela ad una linea fissa (soluzione cilindrica). Nel caso $C = 0$, $C_1 \neq 0$, il punto medio della base si muove sul terzo asse e la base rimane sempre parallela al piano degli altri due. Se $C = C_1 = 0$ i due casi si combinano in modo evidente. Per qualche valore di t si deve avere $r = 0$ (*). Il caso caratterizzato dalle (43) è compreso in questa discussione,

(*) Questi casi sono stati discussi dal FRANSÈN nel suo lavoro citato nell'introduzione ed anche più recentemente dal BUCHANAN nella sua tesi presentata all'Università di Chicago e non ancora pubblicata.

poichè da quelle equazioni seguono

$$\rho = 0, \quad C_1 = 0,$$

le quali soddisfano alla (44).

Ora sia $m_1 \neq m_2$. Se escludiamo il caso che il triangolo sia equilatero, la (45) dimostra che ρ non può essere costante. Secondo le (42) e (35), C_1 sarà dunque diverso da zero. Scegliamo l'unità del tempo in modo che sia $C_1 = 1$, e l'unità delle masse in modo che sia $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) = 1$. Allora dalle (42) e (44) si trovano le equazioni

$$\rho = \frac{\xi_1}{X_2} = -\frac{\xi_2}{X_1}, \quad \rho^2 = \xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1. \quad (46)$$

Dalle definizioni delle quantità \bar{x}_k , ξ_k e X_k si ricava

$$\bar{x}_k = \xi_k + \mu X_k, \quad (k = 1, 2), \quad (47)$$

e la sostituzione di queste espressioni nella (39) dà

$$\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1 + \mu(\xi_1 X'_2 - \xi_2 X'_1 + X_1 \xi'_2 - X_2 \xi'_1) + \mu^2(X_1 X'_2 - X_2 X'_1) = C \cos I. \quad (48)$$

Dalla (46) si trovano

$$X_1 \xi'_2 - X'_1 \xi_2 = -X_1^2 \rho', \quad X_2 \xi'_1 - X'_2 \xi_1 = X_2^2 \rho', \quad \xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1 = \rho^2,$$

e quindi

$$\rho^2 - \mu r^2 \rho' = C \cos I - \mu^2. \quad (49)$$

Sostituendo il valore di ρ' dalla (45) si trova

$$\rho^2 - \mu^2 r^4 q = C \cos I - \mu^2, \quad (50)$$

una relazione integrale fra le coordinate.

Si possono introdurre coordinate polari mediante la sostituzione

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= r \cos \theta, & \bar{x}_1 &= s \cos \omega, \\ X_2 &= r \sin \theta, & \bar{x}_2 &= s \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Secondo la (46) si avrà

$$\xi_1 = p \sin \theta, \quad \xi_2 = -p \cos \theta, \quad (52)$$

e le equazioni differenziali (35 a) e (38) sono rispettivamente equivalenti a

$$r'' - \frac{1}{r^3} + \left(\frac{m_x}{r_1^3} + \frac{2}{r^3} \right) r = 0, \quad r^2 \theta' = 1, \quad (53)$$

e

$$s'' - \frac{C^2 \cos^2 I}{s^3} + \frac{2+m}{r_1^3} s = 0, \quad s^2 \omega' = C \cos I; \quad (54)$$

dove, secondo la (47),

$$r_1^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \left(\frac{1}{2} r \right)^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - 2\mu (\bar{x}_1 X_1 + \bar{x}_2 X_2) + \mu^2 r^2 + \frac{1}{4} r^2.$$

Si può scrivere

$$r_1^2 = s^2 (1 + \sin^2 \omega \tan^2 I) + \left(\frac{1}{4} - \mu^2 \right) r^2$$

giacchè dalle (40) e (47) si può ricavare

$$\bar{x}_1 X_1 + \bar{x}_2 X_2 = \mu r^2.$$

Quest'ultima relazione si può anche scrivere così:

$$s \cos(\theta - \omega) = \mu r. \quad (55)$$

Si avrà dunque

$$\left. \begin{aligned} R^2 = \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 &= \frac{1}{4} - \mu^2 + \mu^2 \sec^2 \psi (1 + \sin^2 \omega \tan^2 I) = \\ &= \frac{1}{4} + \mu^2 (\tan^2 \psi + \sec^2 \psi \sin^2 \omega \tan^2 I), \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

dove

$$\psi = \theta - \omega. \quad (57)$$

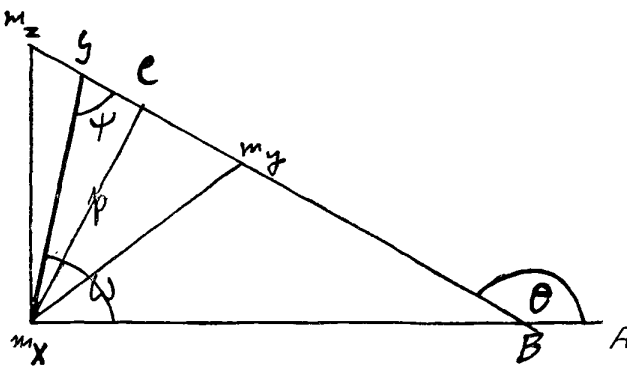


Fig. 1.

La figura rappresenta la proiezione del triangolo sul piano dei due primi assi. p e s sono le distanze dal vertice m_x alla proiezione C del punto medio ed alla proiezione G del baricentro della base. Gli angoli $A m_x G$ e $A B C$ saranno rispettivamente eguali a ω e θ , cosicchè $m_x G B$ sarà eguale a ψ .

Sarà

$$C G = \mu r,$$

e quindi

$$\frac{p}{\mu r} = \tan \psi, \quad \frac{s}{\mu r} = \sec \psi, \quad (58)$$

la quale ultima relazione coincide colla (56).

Ormai si può scrivere

$$\rho = \frac{\xi_1}{X_2} = \frac{p}{r} = \mu \tan \psi. \quad (59)$$

Poichè

$$q = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{1}{R^3} \right)$$

si avrà

$$r^4 q = r \left(1 - \frac{1}{R^3} \right).$$

La sostituzione di questi valori nella (50) dà

$$r = \left(-\frac{C \cos I}{\mu^2} + \sec^2 \psi \right) \frac{R^3}{R^3 - 1} \quad (60)$$

e

$$s = \mu r \sec \psi. \quad (61)$$

Abbiamo dunque trovato una soluzione per r e s come funzioni di ψ e ω , cioè come funzioni di θ e ω . Ma θ e ω non sono indipendenti. Infatti dalle (53) e (54) si trova

$$\frac{d\omega}{d\theta} = C \cos I \frac{r^2}{s^2} = \frac{C \cos I}{\mu^2} \cos^2 \psi$$

onde

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 1 - \frac{C \cos I}{\mu^2} \cos^2 \psi. \quad (62)$$

Questa equazione ha la soluzione costante

$$\cos^2 \psi = \frac{\mu^2}{C \cos I}$$

che corrisponde alle soluzioni equilaterali di LAGRANGE, come vedremo più

tardi. Per la discussione degli altri casi poniamo

$$\frac{C \cos I}{\mu^2} = 1 - \alpha^2. \quad (63)$$

Sarà

$$\tan \psi = \alpha \tan \alpha (\theta - \theta_0) \quad (64)$$

l'integrale di (62), dove α può essere o reale o puramente immaginario, ma non eguale a zero, e dove la costante d'integrazione θ_0 dev'essere reale in ogni caso perchè i valori reali di θ e di ψ si possano corrispondere.

Giacchè

$$\omega = \theta - \psi,$$

si avrà

$$\sin \omega \sec \psi = \sin \theta - \cos \theta \tan \psi = \sin \theta - \alpha \cos \theta \tan \alpha (\theta - \theta_0),$$

e quindi

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{4} + \mu^2 [\alpha^2 \tan^2 \alpha (\theta - \theta_0) + (\sin \theta - \alpha \cos \theta \tan \alpha (\theta - \theta_0))^2 \tan^2 I], \\ r &= \alpha^2 \sec^2 \alpha (\theta - \theta_0) \frac{R^3}{R^3 - 1}, \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

cosicchè tutte le coordinate sono date come funzioni di θ .

In tutto quest'argomento non abbiamo utilizzato la prima equazione delle (53). Ponendo $u = \frac{1}{r}$, ed introducendo θ come variabile indipendente invece di t , questa equazione diventa

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 2 + \frac{m_x}{R^3}.$$

Dalla (65) si trae

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha^2} \cos^2 \alpha (\theta - \theta_0) \left(1 - \frac{1}{R^3}\right). \quad (66)$$

L'eliminazione di R^3 fra le ultime due equazioni dà l'equazione lineare per u ,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + [1 + m_x \alpha^2 \sec^2 \alpha (\theta - \theta_0)] u = 2 + m_x. \quad (67)$$

Per dimostrare la non esistenza delle soluzioni isosceli, basta far vedere che la (66) non può soddisfare alla (67).

Le singolarità dei coefficienti di (67) sono i valori

$$\theta = \theta_0 + (2n + 1) \frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{e} \quad \infty,$$

fra i quali l'ultimo è una singolarità essenziale, mentre gli altri sono poli. Di più, questi punti sono singolarità dello stesso genere per R^2 e zeri per u . D'altra parte gli zeri di R^2 sono poli di u . Se esistono zeri di R^2 nella parte finita del piano θ , la (66) non può soddisfare alla (67) poichè la (67) è lineare e ha questi punti come punti regolari. Basta dunque dimostrare che R^2 ha degli zeri finiti.

Supponiamo prima che α sia reale, e mettiamo in evidenza le parti reale ed immaginaria di θ , mediante la sostituzione

$$\theta = u + i v, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Si ha

$$\cos(u + i v) = \cos u \cosh v - i \sin u \sinh v,$$

$$\tan(u + i v) = \frac{\tan u + i \tanh v}{1 - i \tan u \tanh v},$$

e quindi

$$\lim_{v=\infty} \tan(u + i v) = \frac{\tan u + i}{1 - i \tan u} = i,$$

$$\lim_{v=\infty} \frac{\cos(u + i v)}{\cosh v (\cos u - i \sin u)} = 1.$$

Evidentemente, dunque, si può scegliere v abbastanza grande perchè la differenza fra R^2 e la funzione

$$f = \frac{1}{4} + \mu^2 [-\alpha^2 - (1 - \alpha)^2 \tan^2 I (\cos u - i \sin u)^2 \cosh^2 v]$$

diventi minore che δ , essendo il valore assoluto di δ piccolo a piacere. Ma, se $\tan I \neq 0$, $\alpha \neq 1$, si può, per ogni valore di u , scegliere v in modo che il valore assoluto di questa funzione f superi qualunque numero finito. Gli zeri di R^2 non possono, dunque, essere all'infinito. Se α è razionale, R^2 è una funzione periodica di θ senza singolarità essenziale nella parte finita del piano. Deve dunque avere zeri in ogni striscia di larghezza P parallela all'asse immaginario, se designamo con P il suo periodo. Non avendo zeri all'infinito, R^2 deve dunque aver zeri nella parte finita del piano. Questi zeri esisteranno ancora se α è irrazionale, poichè R^2 è funzione continua di θ e α .

Si può vedere facilmente che esistono zeri anche nel caso eccezionale $\tan I = 0$. Infatti, l'equazione $R^2 = 0$, che corrisponde a questo caso, si riduce ad una equazione quadratica nella quale il coefficiente del termine quadratico non si annulla. Discuteremo più tardi il caso $\alpha^2 = 1$.

Consideriamo adesso il caso in cui α sia puramente immaginario. Ponendo $\alpha = \beta i$, l'equazione $R^2 = 0$ diventa

$$\frac{1}{4} + \mu^2 [\beta^2 \tanh^2 \beta (\theta - \theta_0) + \{\tan \theta + \beta \tanh \beta (\theta - \theta_0)\}^2 \cos^2 \theta \tan^2 I] = 0,$$

onde

$$\left[\frac{1}{4} + \mu^2 \{ \beta^2 \tanh^2 \beta (\theta - \theta_0) + \tan^2 I \} \right] \tan^2 \theta + 2\beta \mu^2 \tanh \beta (\theta - \theta_0) \tan^2 I \tan \theta + \frac{1}{4} + \beta^2 \mu^2 \sec^2 I \tanh^2 \beta (\theta - \theta_0) = 0.$$

Si ha

$$\tanh(x + iy) = \frac{\tanh x + i \tan y}{1 + i \tanh x \tan y},$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x + iy) = 1,$$

indipendentemente dal valore di y . Ponendo

$$\theta = 2k\pi + \omega$$

si può dunque prendere k tanto grande che la quantità $\tanh \beta (\theta - \theta_0)$ sia tanto vicina all'unità quanto si voglia. L'equazione $R^2 = 0$ diventerà dunque

$$\left[\frac{1}{4} + \mu^2 (\beta^2 + \tan^2 I) \right] \tan^2 \omega + 2\beta \mu^2 \tan^2 I \tan \omega + \frac{1}{4} + \beta^2 \mu^2 \sec^2 I = \lambda \quad (68)$$

dove λ si può rendere piccolo a piacere, scegliendo abbastanza grande il numero intero k . Se $\lambda = 0$ questa equazione (68) si può certamente soddisfare con due valori di $\tan \omega$. Da teoremi noti della teoria delle funzioni implicite segue che esistono soluzioni della (68) anche se λ è diverso da zero ma abbastanza piccolo.

Se $\alpha^2 = 1$, la costante $C \cos I$ si annulla. Se $\cos I \neq 0$, $C = 0$, si possono applicare le equazioni del caso generale senza modificazioni essenziali. Se, invece, $\cos I = 0$, si avrà $\tan I = \infty$ e alcune di quelle equazioni non valgono

più. Si avrà in questo caso $\omega = 0$ o $\omega = 180^\circ$, cosicchè

$$r = \sec^2 \theta \frac{R^3}{R^3 - 1}, \quad u = \cos^2 \theta \left(1 - \frac{1}{R^3}\right) \quad (69)$$

e

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} + [1 + m_x \sec^3 \theta] u = 2 + m_x. \quad (70)$$

L'espressione (65) per R^2 non vale più. Il baricentro in questo caso si muove, rispetto ad m_x , nel piano del primo e del terzo asse. Porremo dunque

$$\bar{x}_1 = \sigma \cos \varphi, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = \sigma \sin \varphi$$

ciò che dà, secondo le (39),

$$\sigma^2 \varphi' = C. \quad (71)$$

Si trova

$$\frac{r_1^2}{r^2} = R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{r^2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{4} + \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{s^2}{r^2} \tan^2 \varphi$$

o

$$R^2 = \frac{1}{4} + \mu^2 \tan^2 \theta + \mu^2 \sec^2 \theta \tan^2 \varphi. \quad (72)$$

Poichè

$$\varepsilon^2 \theta' = 1$$

si avrà

$$\frac{d \varphi}{d \theta} = C \frac{r^2}{\sigma^2} = C \frac{r^2}{s^2} \cos^2 \varphi = \frac{C}{\mu^2} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta,$$

ciò che dà

$$\tan \varphi = \frac{C}{2 \mu^2} \left[\theta + \theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2 \theta \right], \quad (73)$$

se $\cos \varphi \neq 0$; dove θ_0 , costante d'integrazione, dev'essere reale (*). Sostituendo la (73) nella (72) si trova

$$R^2 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \mu^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \mu^2 \right) \cos 2 \theta + \\ & + \frac{C^2}{16 \mu^2} \{ 2 (\theta_0 + \theta) + \sin 2 \theta \}^2 \sec^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

e resta da dimostrare che R^2 ha degli zeri finiti.

(*) Se $\cos \varphi = 0$, deve annullarsi la costante C ; caso che discuteremo più tardi.

A questo scopo poniamo

$$2\theta = u + iv.$$

L'equazione $R^2 = 0$ diventa

$$0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\mu^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\mu^2\right) (\cos u \cosh v - i \sin u \sinh v) \\ + \frac{C^2}{16\mu^2} [2\theta_0 + u + \sin u \cosh v + i\{v + \cos u \sinh v\}]^2.$$

Sia

$$\frac{16\mu^2}{C^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\mu^2\right) = \alpha^2, \quad \frac{16\mu^2}{C^2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\mu^2\right) = \beta^2,$$

cosicchè α^2 e $\beta^2 < \alpha^2$ saranno due numeri positivi.

L'equazione $R^2 = 0$ si divide in due, cioè

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \alpha^2 + \beta^2 \cos u \cosh v + (2\theta_0 + u + \sin u \cosh v)^2 - (v + \cos u \sinh v)^2, \\ 0 &= -\frac{1}{2}\beta^2 \sin u \sinh v + (2\theta_0 + u + \sin u \cosh v)(v + \cos u \sinh v). \end{aligned} \right\} (75)$$

Per ogni valore reale di θ_0 , le soluzioni reali, se esistono, delle (75) daranno uno o più punti del piano u, v . Se θ_0 varia, il luogo di questi punti sarà una curva la cui equazione si ottiene eliminando θ_0 , ciò che dà

$$\alpha^2 + \beta^2 \cos u \cosh v + \left(\frac{\frac{1}{2}\beta^2 \sin u \sinh v}{v + \cos u \sinh v}\right)^2 - (v + \cos u \sinh v)^2 = 0. \quad (76)$$

Se designamo con u, v le coordinate di un punto della (76), il valore corrispondente di θ_0 si può calcolare dall'equazione

$$2\theta_0 = -u - \sin u \cosh v + \frac{\frac{1}{2}\beta^2 \sin u \sinh v}{v + \cos u \sinh v}. \quad (77)$$

Poichè $\alpha^2 > \beta^2$, il primo membro della (76) è positivo per $v = 0$, e se $\cos u \neq 0$, esso è negativo per $v = \infty$. Per ogni valore di u per il quale $\cos u$ non si annulla, esisterà dunque almeno un valore di v soddisfacente alla (76), e per mezzo della (77) un valore reale corrispondente di θ_0 . Se $\cos u$ tende verso zero, un ramo della curva (76) si allontana verso l'infinito. Poniamo

$$y = v + \cos u \sinh v,$$

il che permette di scrivere invece della (76) la seguente

$$y^4 - \beta^2 \coth v \cdot y^3 + \left(\frac{1}{4} \beta^4 + \beta^2 v \coth v - \alpha^2 \right) y^2 - \frac{1}{2} \beta^4 v \cdot y - \frac{1}{4} \beta^4 (\sinh^2 v - v^2) = 0.$$

Per i valori molto grandi di v predomina l'ultimo termine, cosicchè $y = v + \cos u \sinh v$ tende verso $\pm \sqrt{\frac{1}{2}} \beta^2 \sin h v$, ciò che ha per conseguenza che il limite di $2\theta_0$ sia $\pm \infty$.

Si può dimostrare adesso che le (75) hanno almeno una soluzione finita e reale per ogni valore reale di θ_0 . Giacchè $2\theta_0$ ha $\pm \infty$ per limite quando $\cos u$ tende verso zero, scegliendo abbastanza grande il numero n si potrà trovare un intervallo per u , tale che i valori corrispondenti di θ_0 riempiano l'intervallo da $n\pi$ a $(n+1)\pi$; e questo fatto basta per dimostrare il nostro teorema se il dato valore di θ_0 sta in questo intervallo. In caso contrario basta l'addizione di un multiplo adatto di 2π alla quantità u per far vedere che si può sempre soddisfare alle (76) e (77) per qualunque dato valore di θ_0 .

Se fosse $\theta_0 = \infty$, sarebbe $\tan \varphi = \infty$, e secondo l'equazione

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{C}{\mu^2} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta,$$

φ dovrebbe essere costante. Giacchè si ha

$$\sigma^2 \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

C dovrebbe annullarsi. Abbiamo già fatto la discussione del caso $C=0$, $\cos I \neq 0$. Se, invece, $C = \cos I = 0$, si avrà, secondo la (71) o $\sigma = 0$ o $\varphi' = 0$. Ma, se m_y non è eguale a m_z , σ non può essere eguale a zero. Poichè abbiamo già trattato il caso $m_y = m_z$, resta soltanto la possibilità $\varphi' = 0$. Dunque φ dev'essere costante e l'espressione (72) di R^2 sarà applicabile; ma questa espressione evidentemente ha degli zeri nella parte finita del piano.

Resta a discutere il caso $\alpha = 0$, finora escluso.

In questo caso avremo

$$\tan \psi = \frac{1}{(\theta_0 - \theta)},$$

ciò che dà per R^2 , r e u le espressioni seguenti

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{4} + \mu^2 \left[\frac{1}{(\theta_0 - \theta)^2} + \left(\operatorname{sen} \theta - \frac{\cos \theta}{\theta_0 - \theta} \right)^2 \tan^2 I \right], \\ r &= \frac{1}{(\theta_0 - \theta)^2} \frac{R^3}{R^3 - 1}, \quad u = (\theta_0 - \theta)^2 \left(1 - \frac{1}{R^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

L'equazione differenziale per u diventa

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} + \left[1 + \frac{m_x}{(\theta_0 - \theta)^2} \right] u = 2 + m_x,$$

la cui unica singolarità, $\theta = \theta_0$, è uno zero di u e un polo per R^2 . Anche in questo caso R^2 ha degli zeri nella parte finita del piano, del che si può facilmente convincersi ponendo prima $\theta = u + i v$, e poi $u = k \pi$, dove k è un numero intero. L'equazione $R^2 = 0$ diventa

$$\frac{1}{4} - \mu^2 \operatorname{senh}^2 v \tan^2 I = \lambda$$

ove λ si può rendere piccolo a piacere, scegliendo abbastanza grande il numero intero k . Come sopra, si conclude che esistono soluzioni di quest'equazione se $\tan I \neq 0$. L'esistenza delle soluzioni nel caso $\tan I = 0$ è evidente.

Abbiamo ridotto la ricerca delle soluzioni isosceli del problema dei tre corpi all'equazione (62), ed abbiamo trovato una contraddizione in ogni caso nel quale la funzione ψ non sia costante. In questo ultimo caso sarà

$$\sec^2 \psi = \frac{C \cos I}{\mu^2}$$

o

$$\mu^2 \tan^2 \psi = C \cos I - \mu^2,$$

e quindi

$$\rho^2 = C \cos I - \mu^2.$$

Ma per la (50) si ha

$$\rho^2 - \mu^2 r^4 q = C \cos I - \mu^2,$$

cosicchè

$$\mu^2 r^4 q = 0.$$

Il triangolo, dunque, dev'essere equilatero.

Se tutte le masse del sistema sono diverse fra loro, le uniche soluzioni isosceli sono, dunque, le soluzioni equilaterali del LAGRANGE; e non esistono nè soluzioni cilindriche, nè soluzioni nelle quali l'orbita di uno dei corpi sia linea asintotica sopra una delle rigate del problema.

The University of Chicago,
12 Agosto, 1912.

Über die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat.

(Von HANS HAHN, in Czernowitz.)

Im Folgenden soll die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat näher studiert werden. Dass eine solche Abbildung, und zwar unkehrbar eindeutig, möglich sei, war eines der ersten Resultate von CANTORS Mengenlehre. Es wurde bald dahin ergänzt, dass eine solche eineindeutige Abbildung der Strecke aufs Quadrat nicht stetig sein kann. Wir konstruieren hier in sehr allgemeiner Weise solche Abbildungen, bei denen die Abscisse des Quadratpunktes stetig mit dem Punkte der Strecke variiert. — G. PEANO gelang es eine stetige Abbildung der Strecke aufs Quadrat anzugeben; wie schon erwähnt, kann ihre Umkehrung nicht eindeutig sein. Wir präzisieren hier diese Tatsache dahin, dass bei jeder stetigen Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat diejenigen Punkte des Quadrates, denen mindestens zwei Punkte der Strecke entsprechen, eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums bilden, und dass es eine im Quadrate überall dichtliegende Menge von Punkten gibt, denen mindestens drei Punkte der Strecke entsprechen. — Wir zeigen endlich, wie durch geringfügige Modifikation die Peano'sche Abbildung so abgeändert werden kann, dass einem Punkte des Quadrates niemals mehr als drei Punkte der Strecke entsprechen, und wie im engsten Anschluss an ein Verfahren, das nach Cantor zur Herstellung einer eineindeutigen Zuordnung von Strecke und Quadrat verwendet werden kann, sich auch eine *stetige* Abbildung der Strecke aufs Quadrat gewinnen lässt — eine Abbildung, von der H. LEBESGUE einen Spezialfall angegeben hat.

§ 1.

Seit G. CANTOR weiss man, dass eine eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten einer Strecke und den Punkten eines Quadrates möglich ist. Bezeichnet, wie üblich, c die Mächtigkeit des Linearkontinuums (d: i. die Mächtigkeit der Menge, die aus allen Punkten einer Strecke besteht), so drückt sich die angeführte Tatsache in CANTORS Mächtigkeitskalkül durch die Gleichung aus:

$$c^2 = c.$$

Diese Gleichung kann man, von einem Gedanken CANTORS Gebrauch machend bekanntlich folgendermassen beweisen. Sei e irgend eine natürliche Zahl ≥ 2 . Die Menge aller systematischen Brüche von der Grundzahl e :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{e^i} \quad (e_i \text{ eine der Zahlen } 0, 1, 2, \dots, e-1) \quad (1)$$

hat die Mächtigkeit c , da ihre Elemente, abgesehen von einer abzählbaren Teilmenge, eindeutig den reellen Zahlen von 0 bis 1 entsprechen. Daher hat die durch Multiplikation dieser Menge mit sich selbst entstehende Menge, das ist die Menge aller Paare unsrer systematischen Brüche, die Mächtigkeit c^2 . Die Zuordnung, die entsteht, indem man dem systematischen Bruche (1) das Paar:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{2i-1}}{e^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{2i}}{e^i} \right)$$

zuordnet, ist eindeutig. Damit ist der Beweis erbracht.

Wählt man für die Strecke speziell die Strecke $0 \leq t \leq 1$ einer t -Achse, für das Quadrat speziell das Quadrat $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ einer x - y -Ebene, so kann die bewiesene Tatsache auch so ausgesprochen werden: Es gibt zwei für $0 \leq t \leq 1$ eindeutig definierte Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, sodass, wenn

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (2)$$

gesetzt wird, und t die Werte $0 \leq t \leq 1$ durchläuft, der Punkt (x, y) jede Lage in unserem Quadrate ein und nur einmal annimmt.

Es ist nun eine wohlbekannte Tatsache, dass die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$

nicht beide stetig sein können. Ein besonders einfacher Beweis dieser Tatsache scheint mir der folgende zu sein.

Wären sowohl $\varphi(t)$ als $\psi(t)$ stetig, so müsste bekanntlich durch die Abbildung (2) jeder abgeschlossenen Punktmenge der t -Achse eine abgeschlossene Punktmenge im Quadrate zugeordnet sein; es würde also sowohl der Strecke (*) $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ als auch der Strecke $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ eine abgeschlossene Punktmenge des Quadrates entsprechen, und diese beiden abgeschlossenen Mengen hätten nur einen Punkt (den dem Werte $t = \frac{1}{2}$ entsprechenden) gemeinsam. Es wäre also das Quadrat zerlegt in zwei abgeschlossene Mengen, deren jede aus unendlich vielen Punkten besteht, und die nur einen Punkt gemeinsam haben. Es genügt also folgenden Satz zu beweisen:

Es ist unmöglich, das Quadrat in zwei abgeschlossene Mengen zu zerlegen, deren jede mehr als einen Punkt enthält, und die nur einen Punkt gemeinsam haben.

In der Tat, seien M_1 und M_2 diese beiden abgeschlossenen Mengen, P_0 ihr gemeinsamer Punkt. Da sowohl M_1 als M_2 noch andere Punkte als P_0 enthalten, kann stets ein Punkt P_1 in M_1 und ein Punkt P_2 in M_2 so gefunden werden, dass die Strecke $P_1 P_2$ den Punkt P_0 nicht enthält. Man teile nun die Punkte der Strecke $P_1 P_2$ durch folgenden Schnitt in zwei Klassen: in die erste Klasse nehme man alle Punkte P auf derart, dass die Strecke $P_1 P$ nur aus Punkten von M_1 besteht; es gehören ihr alle hinreichend nahe von P_1 gelegenen Punkte an, da andernfalls P_1 Häufungspunkt von M_2 wäre und mithin auch zu M_2 gehörte, entgegen der Annahme; in die zweite Klasse hat man aufzunehmen alle Punkte Q der Strecke $P_1 P_2$ derart, dass die Strecke $P_1 Q$ mindestens einen Punkt von M_2 enthält; da alle hinlänglich nahe an P_2 gelegenen Punkte zu M_2 gehören, so gehören sie zur zweiten Klasse. Sei nun P_3 der Punkt der Strecke $P_1 P_2$ der diesen Schnitt hervorruft. Er ist Häufungspunkt von M_1 und M_2 , gehört daher, da diese Mengen abgeschlossen sind, sowohl zu M_1 als zu M_2 , was der Voraussetzung widerspricht, dass P_0 der einzige gemeinsame Punkt von M_1 und M_2 ist. Damit ist der Beweis erbracht.

(*) Im Anschluss an G. KOWALEWSKI (*Grundzüge der Differential- und Integralrechnung*, S. 11) wird im Folgenden eine Strecke mit $\langle a, b \rangle$ bezeichnet, wenn ihre Endpunkte dazu gehören, mit (a, b) , bzw. $\langle a, b \rangle$ oder $(a, b \rangle$, wenn keiner bzw. nur einer ihrer Endpunkte dazu gehört.

Ist so die bekannte Tatsache erwiesen, dass $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ nicht beide stetig sein können, so entsteht die Frage, ob nicht wenigstens eine dieser beiden Funktionen stetig sein kann. Wir wollen zeigen, dass diese Frage mit ja zu beantworten ist, indem wir eine *eindeutige Beziehung* (2) zwischen der Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ der t -Axe und dem Einheitsquadrat der x - y -Ebene herstellen, bei der $\varphi(t)$ stetig ist d. h. bei der die Abszisse des Quadratpunktes stetige Funktion von t ist; die Ordinate ist dann notwendig unstetig (*).

Gehen wir aus von der Bemerkung, dass der in unserem Quadrate enthaltenen Strecke einer Geraden $x = \text{const}$ bei einer solchen Abbildung auf der t -Axe stets eine abgeschlossene Menge, natürlich von der Mächtigkeit des Kontinuums entspricht; in der Tat ist dies die Menge aller Punkte, in denen die Funktion $\varphi(t)$ einen vorgeschriebenen Wert hat, und da $\varphi(t)$ stetig sein soll, so ist diese Menge abgeschlossen.

Wir können nun offenbar unsere Aufgabe durch die folgende ersetzen: eine Funktion $\varphi(t)$ von t anzugeben, die im Intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ der t -Axe stetig ist, nur Werte annimmt, die der Ungleichung $0 \leq x \leq 1$ genügen, und zwar jeden dieser Ungleichung genügenden Wert in einer Punktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums annimmt. In der Tat brauchen wir nur den im Quadrate enthaltenen Punkten der Geraden $x = c$ *eindeutig* die Punkte der x -Axe zuzuordnen, wo $\varphi(t) = c$, deren Menge ja nach Voraussetzung die Mächtigkeit des Kontinuums hat, und haben damit die gewünschte Abbildung der Strecke auf das Quadrat.

Wir gehen also daran, die Funktion $\varphi(t)$ anzugeben: In einer beliebigen nirgends dichten perfekten Menge P erteilen wir ihr den Wert $\frac{1}{2}$. Die punktfreien Intervalle von P teilen wir in zwei Klassen, die Intervalle der einen Klasse bezeichnen wir mit d_0 , die der andern Klasse mit d_1 .

Wir nehmen nun nach Belieben eine ganz im Innern der Intervalle d_0 gelegene nirgends dichte perfekte Menge P_0 , so wie eine ganz im Innern der Intervalle d_1 gelegene nirgends dichte perfekte Menge P_1 an, so dass also P_0 und P_1 unter einander sowie mit P keinen Punkt gemein haben; daraus folgt sofort, dass nur endlich viele Intervalle d_0 bzw. d_1 Punkte von P_0 bzw. P_1 enthalten können. In den Punkten von P_0 erteilen wir $\varphi(t)$ den Wert $\frac{1}{4}$, in den Punkten von P_1 den Wert $\frac{3}{4}$.

(*) Eine solche Beziehung kann auch in einfacher Weise durch Modifikation der bekannten PEANO'schen Abbildung gewonnen werden.

Sodann teilen wir die Teilintervalle, in die die Intervalle d_0 durch die Punkte von P_0 zerlegt werden, in zwei Klassen, in die Intervalle d_{00} und die Intervalle d_{01} (*), und zwar so, dass alle an einen Punkt von P grenzenden Teilintervalle zu den Intervallen d_{01} gehören. In ähnlicher Weise werden die Teilintervalle, in die die Intervalle d_1 durch die Punkte von P_1 zerlegt werden, in die Intervalle d_{10} und d_{11} geschieden, wobei speziell die an einen Punkt von P grenzenden Teilintervalle sämtlich zu den Intervallen d_{10} gehören sollen.

Wir gehen gleich allgemein vor: Seien schon die Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ mit n Indizes 0 und 1 definiert, ebenso die Mengen $P_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$ mit $n - 1$ solchen Indizes, und zwar gemäss den folgenden Regeln:

1. Es liegt jedes Intervall $d_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}$ ($k \leq n$) in einem Intervall $d_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ (mit denselben $k - 1$ ersten Indizes).

2. Es liegt immer die Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($k < n$) im Innern der Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ und es werden durch sie diese Intervalle in die Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ und $d_{i_1 i_2 \dots i_k 1}$ zerlegt.

3. Jede Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($k < n$) ist perfekt, nirgends dicht, keine zwei dieser Mengen haben einen Punkt gemein.

4. Stösst ein Intervall $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($k \leq n$) an einen Punkt einer Menge $P_{j_1 j_2 \dots j_l}$ ($l < k$), so stimmen die Indizes $i_1 i_2 \dots i_k$ mit den k ersten Stellen einer der beiden Dualbruchentwicklungen von

$$\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \dots + \frac{j_l}{2^l} + \frac{1}{2^{l+1}}$$

überein. — Hieraus folgert man leicht, dass für ein Intervall $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($k \leq n$) nur folgende zwei Möglichkeiten bestehen: (α) seine beiden Endpunkte gehören zur selben Menge $P_{j_1 j_2 \dots j_l}$ ($l < k$); (β) einer seiner Endpunkte gehört zur Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$, der andere zu einer Menge $P_{j_1 j_2 \dots j_l}$ ($l < k - 1$). — Wir nehmen nun weiter an:

5. Es gibt für jedes $k \leq n$ nur endlich viele Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ der Art (β).

Wir definieren sodann, was unter den Mengen $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ mit n Indizes, und sodann was unter den Intervallen $d_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$ mit $n + 1$ Indizes zu verstehen ist.

Die Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ist irgend eine nirgends dichte perfekte Menge, die ganz im Inneren der Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ liegt (mithin mit keiner anderen Menge P

(*) Auch jedes Intervall d_0 , das keinen Punkt von P_0 enthält, ist entweder unter die Intervalle d_{00} oder unter die Intervalle d_{01} aufzunehmen.

mit n oder weniger Indizes einen Punkt gemein hat und daher auch nur in endlich vielen Intervallen $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ Punkte haben kann) und nur der Bedingung zu genügen hat, dass jedes Intervall $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ der Art (β) in seinem Innern wirklich einen Punkt (und mithin unendlich viele) dieser Menge enthält. In allen Punkten der Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ erteilen wir der Funktion $\varphi(t)$ den Wert:

$$\frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \dots + \frac{i_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Die Menge der Teilintervalle, in die die Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ durch die Punkte der Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ zerlegt werden, teilen wir nun in zwei Teilmengen: die Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$ und $d_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$ gemäss folgender Regel (*):

Stösst eines dieser Teilintervalle, etwa $d_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$ an einen Punkt einer Menge $P_{j_1 j_2 \dots j_l}$ ($l \leq n$), so stimmen die Indizes $i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}$ mit den $n+1$ ersten Stellen einer der beiden Dualbruchentwicklungen von

$$\frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{2^2} + \dots + \frac{j_l}{2^l} + \frac{1}{2^{l+1}} \tag{3}$$

überein. — Es sei bemerkt, dass sich diese Forderung erfüllen lässt. In der Tat kann wegen der Bedingungen 4 und 5 für ein Intervall $d_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$ wieder nur eine der zwei Möglichkeiten bestehen: (α) seine beiden Endpunkte gehören zur selben Menge $P_{j_1 j_2 \dots j_l}$ ($l \leq n$); (β) einer seiner Endpunkte gehört zur Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$, der andere zu einer Menge $P_{j_1 j_2 \dots j_l}$ ($l < n$). Jedenfalls müssen nach der oben angeführten Bedingung 4, da ja das Intervall $d_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$ ganz in einem der Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ liegt, im Falle $l < n$ die Indizes $i_1 i_2 \dots i_n$ mit den n ersten Stellen einer der beiden Dualbruchentwicklungen von (3) übereinstimmen. Für i_{n+1} ist dann eben die $(n+1)$ -te Stelle der betreffenden Dualbruchentwicklung von (3) zu wählen. Im Falle $l = n$ hingegen kann für i_{n+1} nach Belieben 0 oder 1 gewählt werden.

Endlich erkennt man ohneweiteres, dass es nur endlich viele Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}$ der Art (β) gibt, so dass alle Eigenschaften, die wir als für die Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($k \leq n$) gültig angenommen haben, auch noch für $k = n+1$ bestehen. Dieses Verfahren kann also beliebig fortgesetzt werden.

Es sind hiemit durch Induktion für irgend ein System von n Indizes 0 oder 1 die Mengen $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ definiert und es gehört mithin zu jedem zwischen

(*) Auch jedes Intervall $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$, das keinen Punkt von $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ enthält, ist unter die Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n 0}$ oder unter die Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n 1}$ aufzunehmen.

0 und 1 gelegenen Wert, der einer endlichen Dualbruchentwicklung

$$\frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \dots + \frac{i_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

fähig ist (einschliesslich des Wertes $\frac{1}{2}$, ausschliesslich der Werte 0 und 1)

eine nirgends dichte perfekte Punktmenge, die also die Mächtigkeit des Kontinuums hat, in der $\varphi(t)$ gleich diesem Werte ist.

Alle diese Mengen $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ zusammen bilden eine Menge erster Kategorie, deren Komplementärmenge also immer noch die Mächtigkeit des Kontinuums hat; in den Punkten dieser Komplementärmenge wird nun $\varphi(t)$ alle Werte, die nicht einer endlichen Dualbruchentwicklung fähig sind, anzunehmen haben. Wir gehen folgendermassen vor:

Jeder zwischen 0 und 1 gelegene Wert, der keiner endlichen Dualbruchentwicklung fähig ist, sowie jeder der Werte 0 und 1 kann auf eine und nur eine Weise in der Form geschrieben werden

$$\frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \dots + \frac{i_n}{2^n} + \dots \quad (3^a)$$

wo die $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ nur 0 oder 1 bedeuten. In allen Punkten, die sowohl einem Intervalle d_{i_1} , als auch einem Intervalle $d_{i_1 i_2}, \dots$, als auch einem Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n}, \dots$ angehören, erteilen wir der Funktion $\varphi(t)$ den Wert (3^a).

Und bemerken wir gleich, dass wir unser obiges Verfahren so einrichten können, dass die Menge aller dieser Punkte die Mächtigkeit des Kontinuums hat. In der Tat, wir wählen zwei Intervalle d_0 aus und bezeichnen sie mit $\delta_0^{(0)}$ und $\delta_0^{(1)}$, und ebenso zwei Intervalle d_1 , die wir mit $\delta_1^{(0)}$ und $\delta_1^{(1)}$ bezeichnen; wir setzen fest, dass in jedem der beiden Intervalle $\delta_0^{(0)}$ und $\delta_0^{(1)}$ die Menge P_0 , in jedem der beiden Intervalle $\delta_1^{(0)}$ und $\delta_1^{(1)}$ die Menge P_1 Punkte enthalten soll. Von den Teilintervallen, in die $\delta_{i_1}^{(k_1)}$ ($k_1, i_1 = 0, 1$) durch P_{i_1} zerlegt ist, betrachten wir zwei Intervalle $d_{i_1 0}$ und zwei Intervalle $d_{i_1 1}$, die wir mit $\delta_{i_1 0}^{(k_1 0)}$ und $\delta_{i_1 1}^{(k_1 1)}$, bzw. $\delta_{i_1 1}^{(k_1 0)}$ und $\delta_{i_1 1}^{(k_1 1)}$ bezeichnen; wieder setzen wir fest, dass in jedem dieser Intervalle $\delta_{i_1 i_2}^{(k_1 k_2)}$ die Menge $P_{i_1 i_2}$ Punkte enthalte. In dieser Weise fortfahrend gelangen wir zu Intervallen $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(k_1 k_2 \dots k_n)}$, derart dass in jedem Intervalle $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(k_1 k_2 \dots k_n)}$ die vier Intervalle $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n 0}^{(k_1 k_2 \dots k_n 0)}$, $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n 0}^{(k_1 k_2 \dots k_n 1)}$, $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n 1}^{(k_1 k_2 \dots k_n 0)}$, $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n 1}^{(k_1 k_2 \dots k_n 1)}$ liegen. Bedeutet nun $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ irgend eine unendliche Folge von Ziffern 0 und 1, so können wir die Folge der Intervalle: $\delta_{i_1}^{(k_1)}$, $\delta_{i_1 i_2}^{(k_1 k_2)}$, \dots , $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(k_1 k_2 \dots k_n)}$, \dots betrachten. Es gibt einen allen Intervallen dieser Folge gemeinsamen Punkt,

der mithin der von uns betrachteten Punktmenge angehört, in deren Punkten $\varphi(t)$ den Wert (\mathfrak{A}^a) hat. Es ist also jeder Folge $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ ein Punkt unserer Menge zugeordnet, und zwar verschiedenen Folgen verschiedene Punkte. Da aber die Menge aller Folgen $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$, die Mächtigkeit des Kontinuums hat, so hat auch die betrachtete Punktmenge die Mächtigkeit des Kontinuums, wie behauptet.

Die Funktion $\varphi(t)$ ist nun für alle Punkte des Intervalles $\langle 0, 1 \rangle$ definiert; denn ein Punkt dieses Intervalles gehört entweder einer Menge $P_{j_1 j_2 \dots j_n}$ an, und dann ist in ihm der Funktionswert $\varphi(t)$ gegeben durch (3), oder er gehört einem Intervalle d_{i_1} , einem Intervalle $d_{i_1 i_2}$, ..., einem Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ an, und dann ist in ihm der Funktionswert $\varphi(t)$ gegeben durch (\mathfrak{A}^a) ; alle Funktionswerte genügen der Ungleichung $0 \leq \varphi(t) \leq 1$ und jeder dieser Ungleichung genügende Wert wird in einer Punktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums angenommen.

Es bleibt nun einzig und allein noch die Stetigkeit der Funktion $\varphi(t)$ zu beweisen.

Sei zunächst t_0 ein Punkt des Intervalles $\langle 0, 1 \rangle$, der keiner Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ angehört. Wie eben erwähnt, liegt er dann in einem Intervalle d_{i_1} , in einem Intervalle $d_{i_1 i_2}$, etc., und es ist:

$$\varphi(t_0) = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \dots + \frac{i_n}{2^n} + \dots \quad (3^b)$$

Betrachten wir nun die Werte von $\varphi(t)$ in sämtlichen Punkten desjenigen Intervalles $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$, in dem t_0 liegt. Ein solcher Punkt gehört entweder zu einer unserer Mengen P oder zu keiner derselben. Im ersten Falle muss die betreffende Menge P , da sie einen Punkt eines Intervalles $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ enthält, mindestens n Indizes haben, und zwar müssen ihre ersten n Indizes übereinstimmen mit i_1, i_2, \dots, i_n ; also: $P_{i_1 i_2 \dots i_n j_{n+1} \dots j_{n+m}}$. Der Funktionswert $\varphi(t)$ in einem solchen Punkte ist also:

$$\varphi(t) = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \dots + \frac{i_n}{2^n} + \frac{j_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots + \frac{j_{n+m}}{2^{n+m}} + \frac{1}{2^{n+m+1}}$$

und somit, nach (3^b) :

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \frac{1}{2^n}. \quad (4)$$

Im zweiten Falle gehört der Punkt (der als Punkt eines Intervalles $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$ auch

einem Intervalle d_{i_1} einem Intervalle $d_{i_1 i_2}, \dots$, einem Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$ angehört) des weiteren einem Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n j_{n+1}}, \dots$, einem Intervalle $d_{i_1 i_2 \dots i_n j_{n+1} \dots j_{n+m}}, \dots$ an. Der Funktionswert in einem solchen Punkte ist also:

$$\varphi(t) = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \dots + \frac{i_n}{2^n} + \frac{j_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots + \frac{j_{n+m}}{2^{n+m}} + \dots$$

und aus (3^b) folgt wiederum die Ungleichung (4).

Ferner ist der Punkt t_0 , der ja keiner Menge P angehören soll, innerer Punkt des Intervalles $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$, da die Endpunkte dieses Intervalles einer Menge P angehören (*). Für jedes n gibt es also ein den Punkt t_0 im Innern enthaltendes Intervall, in dem durchwegs die Ungleichung (4) gilt. Damit ist die Stetigkeit im Punkte t_0 nachgewiesen, falls t_0 keiner der Mengen P angehört.

Gehört nun aber t_0 etwa zur Menge $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$, so haben wir:

$$\varphi(t_0) = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \dots + \frac{i_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}. \quad (5)$$

Grenzt dann t_0 auf einer Seite an ein punktfreies Intervall von $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$, so grenzt t_0 auf dieser Seite für jedes m auch an ein Intervall d mit $n+m$ Indizes. Ist $d_{j_1 j_2 \dots j_{n+m}}$ dieses Intervall, so müssen j_1, j_2, \dots, j_{n+m} , zufolge unsrer Festsetzungen übereinstimmen mit den $n+m$ ersten Stellen einer der beiden Dualbruchentwicklungen des Funktionswertes (5). Für jeden dem Intervalle $d_{j_1 j_2 \dots j_{n+m}}$ angehörenden Wert t beginnt aber, wie wir eben vorhin sahen, die Dualbruchentwicklung des Funktionswertes $\varphi(t)$ mit den Stellen j_1, j_2, \dots, j_{n+m} . Es ist daher im Ganzen Intervalle $d_{j_1 j_2 \dots j_{n+m}}$:

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \frac{1}{2^{n+m}}. \quad (4^a)$$

Häufen sich aber auf einer Seite von t_0 Punkte von $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$, so gibt es zu jedem m auf dieser Seite von t_0 eine einseitige Umgebung von t_0 , in der kein Punkt einer Menge P mit mehr als n und nicht mehr als $n+m$ Indizes enthalten ist. Alle in diese einseitige Umgebung von t_0 fallenden Intervalle $d_{j_1 j_2 \dots j_{n+m}}$ grenzen dann an zwei Punkte von $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$; es müssen also

(*) Eine Ausnahme hiervon tritt nur ein, wenn $t_0 = 0$ oder $= 1$ ist; in dem Falle ist t_0 auch Endpunkt des Intervalles $d_{i_1 i_2 \dots i_n}$. In dem Falle ist aber auch nur die rechtsseitige bzw. linksseitige Stetigkeit von $\varphi(t)$ nachzuweisen, was durch unsere Ueberlegungen geleistet ist.

die Indizes j_1, j_2, \dots, j_{n+m} übereinstimmen mit den $n+m$ ersten Stellen einer der beiden Dualbruchentwicklungen von (5), woraus man wieder entnimmt, dass in dieser einseitigen Umgebung von t_0 die Ungleichung (4^a) gilt. Es liegt also, wenn t_0 zu $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ gehört, für jedes m auf beiden Seiten von t_0 ein Intervall, in dem (4^a) gilt; damit ist auch in diesem Falle die Stetigkeit von $\varphi(t)$ nachgewiesen.

§ 2.

Von einem gänzlich neuen Gesichtspunkte aus wurde die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat durch Herrn G. PEANO betrachtet. Während, wie wir gesehen haben, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten einer Strecke und eines Quadrates notwendig unstetig ist, gelang es Herrn PEANO, unter Verzichtleistung auf die Eindeutigkeit der Umkehrung eine eindeutige und *stetige* Abbildung der Strecke auf das Quadrat anzugeben. Sein Resultat kann so ausgesprochen werden: Es gibt zwei für $0 \leq t \leq 1$ eindeutig definierte und stetige Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, sodass, wenn:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{6}$$

gesetzt wird, und t die Werte $0 \leq t \leq 1$ durchläuft, der Punkt (x, y) jede Lage im Quadrate $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ mindestens einmal annimmt.

Dabei ist es, weil, wie erwähnt, die Umkehrung der Abbildung (6) nicht eindeutig sein kann, ganz unmöglich, dass jede Lage nur ein einzigesmal angenommen wird; es muss vielmehr mindestens eine Lage öfters als einmal angenommen werden. Geometrisch gesprochen: die stetige Kurve (6) muss durch mindestens einen Punkt des Quadrates mindestens zweimal hindurch gehen. Diesen Satz nun wollen wir im Folgenden wesentlich präzisieren. Wir wollen nämlich zeigen:

Sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ im Intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ stetig, und geht die Kurve (6) durch jeden Punkt des Quadrates $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ hindurch, so gibt es eine in diesem Quadrate überall dicht liegende Menge von Punkten, durch deren jeden die Kurve (6) mindestens dreimal hindurch geht.

Bemerken wir zunächst, dass wegen der Stetigkeit der beiden Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ jeder abgeschlossenen Menge der Strecke auch eine abgeschlos-

sene Menge des Quadrates entspricht; sucht man umgekehrt zu einer abgeschlossenen Menge M des Quadrates die Gesamtheit aller Punkte der Strecke, die durch (6) auf einen Punkt von M abgebildet werden, so bildet auch diese Gesamtheit eine abgeschlossene Menge.

Betrachten wir auf der Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ der t -Axe ein beliebiges Intervall $\langle p, q \rangle$. Die den Punkten von (*) $\langle p, q \rangle$ entsprechende abgeschlossene Punktmenge des Quadrates werde mit M_0 bezeichnet. Die den Punkten von $\langle 0, p \rangle$ und $\langle q, 1 \rangle$ entsprechende abgeschlossene Punktmenge des Quadrates heisse M_1 .

Es kann sich zunächst der Fall ereignen, dass sämtliche am Umfange des Quadrates liegende Punkte ($x = 0, 0 \leq y \leq 1$; $x = 1, 0 \leq y \leq 1$; $0 \leq x \leq 1, y = 0$; $0 \leq x \leq 1, y = 1$) sowohl zu M_0 als zu M_1 gehören. Bis auf höchstens zwei Punkte, nämlich die etwa den beiden Punkten p und q der Strecke entsprechenden, sind dies dann durchwegs Punkte, durch deren jeden die Kurve (6) mindestens zweimal hindurchgeht, erstens für einen Wert von t , der der Strecke (p, q) angehört, zweitens für einen Wert von t , der einer der beiden Strecken $\langle 0, p \rangle$ und $\langle q, 1 \rangle$ angehört.

Wir wählen auf dem Quadratumfang eine Strecke S , die weder den dem Punkte p , noch den dem Punkte q entsprechenden Punkt enthält; sie besteht dann aus lauter Punkten, durch die die Kurve (6) mindestens zweimal hindurchgeht. Suchen wir nun auf der t -Axe die Gesamtheit der Punkte, die durch (6) auf die Punkte von S abgebildet werden, so erhalten wir eine in der Strecke (p, q) enthaltene abgeschlossene Menge N_0 und eine in den beiden Strecken $\langle 0, p \rangle$ und $\langle q, 1 \rangle$ enthaltene abgeschlossene Menge N_1 . Wir behaupten: es kann sich nicht jede der beiden Mengen N_0 und N_1 auf eine Strecke reduzieren. In der Tat, sei p_0 ein Punkt von S . Wir betrachten eine Folge von inneren Punkten des Quadrates: $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ die gegen p_0 konvergieren. Zu jedem Punkt p_i dieser Folge suchen wir auf der t -Axe die Menge aller Punkte, die durch (6) auf p_i abgebildet werden; diese Menge werde mit P_i bezeichnet, die Vereinigungsmengen aller Mengen P_i mit Q . Ein Punkt der t -Axe in dessen Umgebung, möge sie auch noch so klein gewählt sein, Punkte aus unendlich vielen verschiedenen Mengen P_i liegen (solche Punkte sind sicher vorhanden und sind Häufungspunkte von Q), muss wegen der Stetigkeit der Abbildung (6) auf den Punkt p_0 abgebildet werden, und

(*) Ist $p = 0$ bzw. $q = 1$, so ist hier wie im Folgenden $\langle 0, p \rangle$, bzw. $\langle q, 1 \rangle$ wegzulassen.

mithin entweder der Menge N_0 oder der Menge N_1 angehören. Da andererseits alle Punkte p_i innere Punkte des Quadrates waren, also nicht der Strecke S angehören, so gehören die Punkte von Q weder zu N_0 noch zu N_1 . Häufungspunkte von Q , die auch zu N_0 oder N_1 gehören, können also, wenn sowohl N_0 als N_1 sich auf je eine Strecke reduzieren, nur die Endpunkte dieser Strecken sein. Das aber ist ein Widerspruch, da, wie wir eben gesehen haben, dann sämtliche Punkte von S bei der Abbildung (6) aus einem der vier Endpunkte von N_0 und N_1 entstehen müssten.

Mindestens eine der beiden abgeschlossenen Mengen N_0 und N_1 reduziert sich also nicht auf eine Strecke; sei dies etwa N_0 . Dann kann aber N_0 in zwei abgeschlossene Menge N'_0 und N''_0 gespalten werden, die keinen Punkt gemeinsam haben. Die Menge N_0 wird durch die Abbildung (6) in die Strecke S übergeführt; dabei mögen die Teilmengen N'_0 und N''_0 in die — wie wir wissen — abgeschlossenen Menge S' und S'' übergeführt werden, die zusammen die ganze Menge S ergeben müssen. Nun kann aber S , als Strecke, nicht in zwei abgeschlossene Mengen ohne gemeinsamen Punkt zerspalten werden; also müssen S' und S'' einen Punkt gemeinsam haben; er heisse p_0 . *Durch diesen Punkt p_0 nun geht die Kurve (6) mindestens dreimal hindurch, nämlich, wie wir eben gesehn haben, für einen der Menge N'_0 und für einen der Menge N''_0 angehörenden Wert von t , und, wie wir von vornherein wussten, für einen der Menge N_1 angehörenden Wert von t .*

Falls also alle Punkte des Quadratumfanges sowohl zu M_0 als zu M_1 gehören, enthält die Strecke $\langle p, q \rangle$ gewiss einen Wert t , der einen mindestens dreifachen Punkt der Kurve (6) liefert.

Wir kommen nun zum Falle, dass nicht sämtliche Punkte des Quadratumfanges sowohl zu M_0 als zu M_1 gehören, und zwar nehmen wir zunächst an, es gebe auf dem Umfange einen nicht zu M_0 gehörigen Punkt.

Wir teilen das Quadrat durch die Geraden $x = \frac{k}{2^n}$ ($k=1, 2, \dots, 2^n - 1$), $y = \frac{k}{2^n}$ ($k=1, 2, \dots, 2^n - 1$) in 2^{2n} Teil-Quadrate von denen wir diejenigen betrachten, die wenigstens einen Punkt von M_0 enthalten (im Innern oder am Rande). Alle diese Quadrate zusammen genommen bedecken eine zusammenhängende Polygonfläche u_n , von der wir nur das äussere Begrenzungspolygon weiter betrachten wollen. Da wir angenommen haben, dass nicht der gesammte Umfang des Quadrates zu M_0 gehört, und da M_0 abgeschlossen ist, sieht man sofort, dass für hinlänglich grosse n dieses äussere Begren-

zungspolygon nicht ganz mit dem Umfange des Quadrates zusammenfallen kann, dass vielmehr einzelne seiner Strecken ins Innere des Quadrates eintreten müssen. Die Gesamtheit der Punkte auf den das Innere des Quadrates durchziehenden Seiten unseres äusseren Begrenzungspolygons wollen wir mit R_n bezeichnen; R_n ist also eine abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge (*).

Nun bezeichnen wir mit R die Grenzmenge aller Mengen R_n , die folgender Massen definiert ist (**): ein Punkt π gehört zu R , wenn bei beliebigem positiven r und beliebigem Index N in dem mit dem Radius r um π beschriebenen Kreise ein Punkt einer Menge R_n liegt, deren Index $\geq N$ ist. Die Menge R ist dann offenbar abgeschlossen, wir wollen beweisen, dass sie auch zusammenhängend ist.

Zu dem Zwecke berufen wir uns auf folgenden, von L. ZORETTI bewiesenen Satz (**): Die Grenzmenge R einer Folge abgeschlossener zusammenhängender Mengen R_n ist, falls sie sich nicht auf einen einzigen Punkt reduziert, selbst zusammenhängend, wenn es einen Punkt π von folgender Eigenschaft gibt: zu jedem positiven r gehört ein Index N , so dass für $n \geq N$ sämtliche Mengen R_n in dem mit dem Radius r um π beschriebenen Kreise Punkte besitzen.

Wir haben also, um sicher sein zu können, dass R zusammenhängend ist, nur nachzuweisen, dass es einen Punkt π der eben genannten Eigenschaft gibt. Nun war R_n jener Teil des äusseren Begrenzungspolygones von Π_n , der nicht mit dem Umfange unseres Quadrates zusammenfällt, und Π_n setzte sich aus denjenigen, bei Teilung unseres Quadrates in 2^{2n} kongruente Teilquadrate entstehenden Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{2^n}$ zusammen, die mindestens einen Punkt von M_0 enthalten; diejenigen dieser Quadrate, von denen mindestens eine Seite zu R_n gehört, wollen wir die Quadrate q_n nennen. Man erkennt leicht: jedes Quadrat q_n enthält mindestens ein Quadrat q_{n+1} . In der Tat, zunächst ist klar, dass jedes bei der n -ten Teilung (***) auftre-

(*) Bekanntlich heisst eine Punktmenge M zusammenhängend, wenn sie folgender Bedingung genügt: sind π' und π'' zwei beliebige Punkte von M und ε eine beliebige positive Zahl, so lassen sich in M endlich viele Punkte $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ so auffinden, dass jede der Distanzen $\pi' \pi_0, \pi_{i-1} \pi_i (i=1, 2, \dots, k), \pi_k \pi''$ kleiner als ε ist.

(**) Vgl. etwa *Encycl. des sc. math.*, Tome II, vol. 1, p. 145.

(***) L. ZORETTI, *Journ. de math.*, Serie 6, Bd. I, S. 8.

(****) Als die n -te Teilung bezeichnen wir kurz die Teilung des Quadrates in 2^{2n} kongruente Teilquadrate.

tende Teilquadrat, das nicht zu Π_n gehört, bei der $(n+1)$ -ten Teilung in vier Quadrate zerfällt deren keines zu Π_{n+1} gehört, während jedes zu Π_n gehörende Teilquadrat bei der $(n+1)$ -ten Teilung in vier Quadrate zerfällt von denen mindestens eines zu Π_{n+1} gehört. Nun sind zwei Fälle möglich: ein Quadrat q_n kann bei der $(n+1)$ -ten Teilung in vier Teilquadrate zerfallen, die sämtlich zu Π_{n+1} gehören; dann gehört jene Seite des Quadrates q_n , die zu R_n gehörte, auch zu R_{n+1} , und q_n enthält also mindestens zwei Quadrate q_{n+1} — oder ein Quadrat q_n zerfällt in Teilquadrate, die teils zu Π_{n+1} gehören, teils nicht zu Π_{n+1} gehören; dann aber durchzieht R_{n+1} das Innere von q_n und grenzt daher an mindestens eines der vier Teilquadrate, das dann wieder ein Quadrat q_{n+1} ist. Jedenfalls sehen wir, dass tatsächlich, wie behauptet, mindestens eines der vier Teilquadrate, in die ein Quadrat q_n bei der $(n+1)$ -ten Teilung zerfällt, ein Quadrat q_{n+1} ist. Gehen wir also aus von irgend einem Quadrat q_n ; es enthält ein Quadrat q_{n+1} , dieses ein Quadrat q_{n+2} , dieses ein Quadrat q_{n+3} u. s. f. Der allen diesen Quadraten gemeinsame Punkt π hat nun offenbar die im Satze von ZORETTI geforderte Eigenschaft, da jedes Quadrat q_n auf seinem Rande Punkte von R_n enthält.

Nach dem Satze von ZORETTI ist also die Menge R zusammenhängend, falls sie sich nicht auf einen einzigen Punkt reduziert. Dass aber die Menge R mindestens zwei Punkte enthält ist offenkundig, da ja für genügend grosses n offenbar sich zwei Quadrate q_n finden lassen, die keinen Punkt gemeinsam haben, und deren jedes noch dem eben Bewiesenen, einen Punkt von R enthält.

Zufolge der Definition der Mengen R_n und der Menge R ist jeder Punkt von R Häufungspunkt sowohl von Punkten der Menge M_0 als auch von Punkten, die nicht zur Menge M_0 , mithin sicher zur Menge M_1 , gehören. Da aber sowohl M_0 als M_1 abgeschlossen sind, gehört also jeder Punkt von R sowohl zu M_0 als auch zu M_1 . Beachten wir weiter, dass M_0 das Abbild der Strecke $\langle p, q \rangle$, M_1 das Abbild der Strecken $\langle 0, p \rangle$ und $\langle q, 1 \rangle$ der t -Axe war, so sehen wir: Bis auf höchstens zwei Punkte (nämlich die etwa den Punkten p und q der t -Axe entsprechenden Punkte) besteht die abgeschlossene zusammenhängende Menge R aus lauter Punkten, durch die die Kurve (6) mindestens zweimal hindurchgeht, einmal für einen Wert von t , der der Strecke (p, q) angehört, einmal für einen Wert von t , der einer der Strecken $\langle 0, p \rangle$ oder $\langle q, 1 \rangle$ angehört.

Falls der dem Punkte p oder dem Punkte q der t -Axe entsprechende Punkt des Quadrates der Menge R angehören sollte, so schliessen wir ihn

durch einen kleinen Kreis aus. Der nicht innerhalb dieses kleinen Kreises liegende Teil von R , den wir mit \bar{R} bezeichnen, enthält dann sicherlich noch eine gleichfalls abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge, wie folgende Ueberlegung zeigt.

Nach ZORETTI heisst eine Menge M *überall unstetig*, wenn für irgend zwei ihrer Punkte π_0 und π_1 folgendes gilt: es gibt nicht zu jedem positiven ε in M eine endliche Folge von Punkten, deren jeder vom vorhergehenden, deren erster von π_0 , deren letzter von π_1 einen Abstand $< \varepsilon$ hat. Für abgeschlossene überall unstetige Mengen hat ZORETTI folgenden Satz bewiesen (*): Legt man um einen Punkt π_0 einer solchen Menge M einen beliebig kleinen Kreis, so gibt es in diesem Kreise eine geschlossene, den Punkt π_0 im Innern enthaltende Kurve C , deren kein Punkt zu M gehört.

Nun erkennen wir leicht, dass der Teil \bar{R} von R nicht überall unstetig sein kann. \bar{R} entstand ja aus R durch Weglassen aller Punkte von R , die innerhalb höchstens zweier kleiner Kreise K liegen. Sei π_0 ein ausserhalb dieser Kreise gelegener Punkt von R , der somit auch zu \bar{R} gehört. Um π_0 legen wir einen Kreis K_0 so klein, dass er ganz ausserhalb der Kreise K verbleibt; innerhalb K_0 stimmen dann \bar{R} und R überein. Angenommen nun, es wäre \bar{R} überall unstetig, so legen wir auf Grund des eben angeführten Satzes von ZORETTI innerhalb von K_0 um π_0 eine geschlossene Kurve C , die keinen Punkt von \bar{R} , und mithin auch keinen Punkt von R enthält. Durch diese Kurve C wird R in zwei Teile gespalten, den Teil R' ausserhalb C und den Teil R'' innerhalb C . Da R abgeschlossen ist und keinen Punkt von C enthält, bleibt der Abstand der Punkte von R von den Punkten der Kurve C oberhalb einer positiven Zahl ε . Erst recht bleibt dann der Abstand der Punkte der Menge R' von den Punkten der Menge R'' oberhalb ε , so dass R nicht zusammenhängend wäre. Damit ist die Annahme, \bar{R} wäre überall unstetig, *ab absurdum* geführt.

Da nun \bar{R} nicht überall unstetig ist, können in \bar{R} zwei Punkte π_0 und π_1 gefunden werden von folgender Eigenschaft: zu jeder beliebigen natürlichen Zahl n gibt es in \bar{R} eine endliche Folge von Punkten, sie heisse F_n , in der jeder Punkt vom vorhergehenden, der erste von π_0 , der letzte von π_1 einen Abstand $< \frac{1}{n}$ hat. Bezeichnen wir mit F die Menge aller Punkte π von folgender Eigenschaft: ein Punkt π gehört zu F , wenn in jedem noch so kleinen

(*) *Journ. de math.*, Serie 6, Bd. 1, S. 10.

um π gelegten Kreise sich Punkte aus Mengen F_n , mit beliebig grossem Index n finden.

Die Menge F ist offenbar eine abgeschlossene Teilmenge von \bar{R} . Sie ist aber auch zusammenhängend. Um das einzusehen, betrachte man für jedes n den Streckenzug, der in π_0 beginnend und in π_1 endigend die Punkte von F_n zu Eckpunkten hat; er werde mit S_n bezeichnet. Dann kann die Menge F auch so definiert werden: ein Punkt π gehört zu F , wenn in jedem noch so kleinen um π gelegten Kreise sich Punkte von Streckenzügen S_n mit beliebig grossem Index n finden. D. h. die Menge F ist die Grenzmenge der abgeschlossenen zusammenhängenden Mengen S_n . Dass nun F zusammenhängend ist, folgt wieder aus dem schon oben benützten Satze von ZORETTI. Es ist nur wieder zu zeigen, dass es einen Punkt π von folgender Beschaffenheit gibt: zu jedem positiven r gehört ein N , sodass für $n \geq N$ jedes S_n in dem mit dem Radius r um π beschriebenen Kreise Punkte besitzt. Hier nun leistet jeder der Punkte π_0 und π_1 das verlangte, da jeder dieser Punkte *allen* S_n angehört. Und da überdies die Grenzmenge F sich nicht auf einen einzigen Punkt reduzieren kann, da sie die zwei Punkte π_0 und π_1 enthält, ist sie als zusammenhängend nachgewiesen.

Wir fassen zusammen: *Es gibt im Quadrate eine abgeschlossene zusammenhängende (*) Menge von Punkten, sie heisse R_0 , durch deren jeden die Kurve (6) mindestens zweimal hindurchgeht*, und zwar für einen Wert von t , der der Strecke (p, q) angehört, und für einen Wert von t , der einer der beiden Strecken $< 0, p)$ und $(q, 1 >$ angehört.

Suchen wir nun auf der t -Axe die Menge aller Punkte, die durch (6) auf einen Punkt von R_0 abgebildet werden, so erhalten wir eine der Strecke (p, q) angehörende abgeschlossene Menge N_0 und eine den beiden Strecken $< 0, p)$ und $(q, 1 >$ angehörende abgeschlossene Menge N_1 .

Die Menge N_1 kann nicht aus einer einzigen Strecke bestehen. Denn jeder Punkt von R , und mithin auch jeder Punkt der Teilmenge R_0 von R , ist, wie schon oben erwähnt, Häufungspunkt von Punkten die nicht zu M_0 , mithin auch nicht zu R , aber sicher zu M_1 gehören. Also muss N_1 unendlich viele Punkte enthalten, die Häufungspunkte sind von nicht zu N_1 gehörigen Punkten der t -Axe.

(*) Bekanntlich ist eine abgeschlossene, zusammenhängende Punktmenge stets perfekt, hat also immer die Mächtigkeit des Kontinuums. Wir sehen also, *dass es im Quadrate eine Menge von Punkten von der Mächtigkeit des Kontinuums gibt, durch deren jeden die Kurve (6) mindestens zweimal hindurchgeht*.

Da also die abgeschlossene Menge N_1 sich nicht auf eine einzige Strecke reduziert, kann sie zerlegt werden in zwei abgeschlossene Mengen N'_1 und N''_1 , ohne gemeinsamen Punkt. Durch die Abbildung (6) werden nun N'_1 und N''_1 abgebildet auf je zwei abgeschlossene Mengen S' und S'' des Quadrates, die zusammen die abgeschlossene, zusammenhängende Menge R_0 ergeben müssen. Nun kann aber bekanntlich eine abgeschlossene zusammenhängende Menge nicht zerlegt werden in zwei abgeschlossene Teilmengen ohne gemeinsamen Punkt, also müssen S' und S'' mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Durch diesen Punkt geht aber die Kurve (6) mindestens dreimal hindurch: einmal für einen Wert von t , der der Strecke (p, q) angehört, sodann für zwei Werte von t , die einer der beiden Strecken $\langle 0, p \rangle$ oder $\langle q, 1 \rangle$ angehören, und von denen einer zu N'_1 , der andere zu N''_1 gehört.

Auch in dem jetzt betrachteten Falle enthält also die Strecke $\langle p, q \rangle$ mindestens einen Wert von t , dem ein mindestens dreifacher Punkt der Kurve (6) entspricht.

Nachdem wir hiemit auch den Fall erledigt haben, dass es auf dem Quadratumfang Punkte gibt, die nicht zu M_0 gehören bleibt noch der Fall zu erledigen, dass es auf dem Quadratumfang Punkte gibt, die nicht zu M_1 gehören. Der Beweis wird in diesem Falle genau so geführt, wie in dem eben behandelten Falle, nur dass die beiden Mengen M_0 und M_1 ihre Rollen zu vertauschen haben. Man hat dabei zu beachten, dass, während M_0 sicher zusammenhängend war, M_1 möglicher Weise in zwei Teile zerfallen kann, deren jeder zusammenhängend ist. In dem Falle ist es am einfachsten, statt an M_1 selbst, an einem dieser Teile zu argumentieren.

Wir sind also zum Resultate gelangt: *Jedes beliebige Intervall $\langle p, q \rangle$ der Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ der t -Axe enthält mindestens einen Wert von t , dem ein mindestens dreifacher Punkt der Kurve (6) entspricht.*

Damit ist aber der angekündigte Satz bewiesen. In der Tat, die Parameterwerte t , die mindestens dreifache Punkte der Kurve (6) liefern, liegen auf der Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ der t -Axe überall dicht. Aus der Stetigkeit der Abbildung (6) folgt nun sofort, dass die ihnen entsprechenden Punkte des Quadrates — das sind die mindestens dreifachen Punkte der Kurve (6) — gleichfalls überall dicht liegen müssen: denn bliebe etwa eine im Quadrate enthaltene Kreisfläche von ihnen frei, so müsste diese Kreisfläche überhaupt von Punkten der Kurve (6) freibleiben, was unmöglich ist, da die Kurve (6) durch jeden Punkt des Quadrates hindurchgeht.

Damit ist unsere Behauptung ihrem vollen Inhalte nach bewiesen. Aus

dem Gange des Beweises konnten wir überdies entnehmen *dass die Menge derjenigen Punkte des Quadrates, durch die die Kurve (6) mindestens zweimal hindurchgeht, die Mächtigkeit des Kontinuums hat.*

§ 3.

Wir haben nun gezeigt, dass, wenn durch die stetigen Funktionen (6) die Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ der t -Axe auf das Einheitsquadrat der x - y -Ebene abgebildet wird, es im Quadrate notwendig überall dicht liegende Punkte gibt, auf die mindestens drei verschiedene Punkte der t -Axe abgebildet werden, oder was dasselbe heisst, dass überall dicht mindestens dreifache Punkte der Kurve (6) liegen.

Bekanntlich liefert die von D. HILBERT gegebene stetige Abbildung der Strecke aufs Quadrat ein Beispiel, wo niemals mehr als drei verschiedene Punkte der Strecke auf einen und denselben Punkt des Quadrates abgebildet werden, während bei der Peano'schen Abbildung im Quadrate überall dicht Punkte liegen, denen auf der Strecke vier verschiedene Punkte entsprechen. Es sei zunächst gezeigt, wie auch das Peano'sche Verfahren durch eine ganz geringfügige Abänderung so modifiziert werden kann, dass niemals mehr als drei verschiedene Punkte der Strecke auf denselben Punkt des Quadrates abgebildet werden. An Stelle der Peano'schen Kurve tritt dann eine ihr sehr ähnliche, die aber keinen vierfachen, sondern nur mehr dreifache und zweifache Punkte enthält.

Wir teilen das Quadrat durch zwei horizontale Gerade in drei Teile, jeden dieser drei Teile durch je zwei vertikale Strecken wieder in drei Teile, wobei für zweierlei Sorge getragen werde: 1. sollen sämtliche entstehenden 9 Teilrechtecke Seitenlängen haben, die kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, 2. sollen in einem Punkte nicht mehr als drei Teilrechtecke zusammenstossen. Jedes dieser Teilrechtecke teile man wieder durch zwei Horizontale in drei Teile, jeden dieser drei Teile durch Ziehen von je zwei vertikalen Strecken in drei Teile, wobei man dafür Sorge trage 1. dass sämtliche entstehenden 81 Teilrechtecke Seitenlängen haben, die kleiner sind als $\frac{1}{2^2}$, 2. dass in einem Punkte nicht mehr als drei Teilrechtecke zusammenstossen. Diese Teilung führe man

so fort, dass nach dem n -ten Schritte alle auftretenden Seitenlängen kleiner als $\frac{1}{2^n}$ geworden sind, und bei keinem Schritte mehr als drei Teilrechtecke an einander stossen.

Unter Benützung dieser successiven Teilung des Quadrates in 3^{2n} Teilrechtecke kann man genau so, wie es gewöhnlich durch Teilung in Teilquadrate geschieht (*), eine der PEANO'schen analoge stetige Abbildung der Strecke auf das Quadrat definieren. Aus der Tatsache, dass bei jedem Schritte höchstens drei Teilrechtecke zusammenstossen, ein Punkt des Quadrates also bei jeder einzelnen Teilung höchstens drei verschiedenen Teilrechtecken angehören kann, ergibt sich ohne weiteres, dass dabei auf einen und denselben Punkt des Quadrates höchstens drei verschiedene Punkte der Strecke abgebildet werden.

Sei zum Schlusse noch auf die bisher wenig beachtete Tatsache hingewiesen, dass man durch geringe Modifikation des in § 1 im Anschlusse an G. CANTOR vorgebrachten Nachweises der Beziehung $c^2 = c$ eine eindeutige und stetige Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat erhalten kann.

Sei die abzubildende Strecke das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ der u -Axe. Wir wählen auf ihr irgend eine, die beiden Punkte 0 und 1 enthaltende nirgends dichte perfekte Menge P . Bekanntlich lässt sich dann die Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ der u -Axe durch eine stetige Funktion $t = f(u)$ so auf die Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ einer t -Axe abbilden, dass aus $u' > u''$ folgt: $f(u') \geq f(u'')$, dass verschiedenen Punkten der u -Axe, die nicht einem und demselben punktfreien Intervalle der Menge P angehören (sei es als innere, sei es als Randpunkte) verschiedene Punkte der t -Axe entsprechen, allen Punkten eines punktfreien Intervalles von P hingegen ein und derselbe Punkt der t -Axe, und zwar so, dass die sämtlichen punktfreien Intervalle von P gerade auf die sämtlichen von 0 und 1 verschiedenen Punkte der t -Axe abgebildet werden, die einer Darstellung durch einen endlichen systematischen Bruch von der Grundzahl e fähig sind (**).

(*) Vgl. etwa SCHOENFLIES, *Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Bd. 1, S. 121.

(**) Der Vorgang zur Herstellung der Funktion $f(u)$ ist bekanntlich folgender: diejenigen Zahlen des Intervalles $(0, 1)$, die durch einen endlichen systematischen Bruch der Grundzahl e darstellbar sind einerseits, die punktfreien Intervalle der perfekten Menge P andererseits bilden je eine einfachgeordnete abzählbare Menge von dichtem Ordnungstypus, ohne erstes und letztes Element, und können daher nach G. CANTOR auf einander eineindeutig und ähnlich

Sei nun u ein Punkt, der Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ der u -Axe, der keinem punktfreien Intervalle der Menge P angehört, weder als innerer noch als Randpunkt; durch $t=f(u)$ wird ihm ein Punkt t der Strecke $\langle 0, 1 \rangle$ der t -Axe zugeordnet, der nur einer einzigen Darstellung der Form:

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{e^i} \quad (e_i \text{ eine der Zahlen } 0, 1, 2, \dots, e-1)$$

fähig ist. Wir ordnen ihm den Punkt des Quadrates zu, dessen Koordinaten sind:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{2i-1}}{e^i}, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{2i}}{e^i}. \quad (7)$$

Sei sodann u linker Endpunkt eines punktfreien Intervalles von P , und sei $\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{e^i}$ ($e_n \neq 0$) der diesem punktfreien Intervalle zugeordnete Wert von t (der ja ein von 0 und 1 verschiedener endlicher systematischer Bruch der Grundzahl e sein sollte).

Dann ist:

$$\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{e^i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e_i}{e^i} + \frac{e_n - 1}{e^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{e-1}{e^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{e^i} \quad (8)$$

wo also:

$$f_i = e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \quad f_n = e_n - 1; \quad f_i = e - 1 \quad (i = n+1, n+2, \dots). \quad (9)$$

Wir ordnen nun unsrem Punkte u den Punkt des Quadrates zu, dessen Koordinaten sind:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{2i-1}}{e^i}, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{2i}}{e^i}. \quad (10)$$

Sei ferner u rechter Endpunkt des eben betrachteten punktfreien Intervalles, so setzen wir:

$$g_i = e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad g_i = 0 \quad (i = n+1, n+2, \dots) \quad (11)$$

abgebildet werden. Der Funktionswert von $f(u)$ in einem punktfreien Intervalle von P sei der bei der genannten Abbildung diesem punktfreien Intervalle zugeordnete systematische Bruch. Durch die blosse Forderung der Stetigkeit wird dann die Definition von $f(u)$ auf alle Punkte von P ausgedehnt.

und ordnen dem Punkte u den Punkt des Quadrates zu, dessen Koordinaten sind:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{2i-1}}{e^i}, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{2i}}{e^i}. \quad (12)$$

Nun ist bereits, jedem Punkte der Menge P ein Punkt des Quadrates zugeordnet, und diese Zuordnung ist für die Punkte von P stetig. Sei zum Beweise u_0 irgend ein Punkt von P . Ist zunächst u_0 nicht Endpunkt eines punktfreien Intervalles, so gilt für den zugeordneten Wert t_0 von t eine Entwicklung:

$$t_0 = f(u_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{e^i},$$

wo nicht alle e_i von einem bestimmten an sämtlich 0 oder sämtlich $e-1$ sind. Sei nun $u_1, u_2, \dots, u_\nu, \dots$ irgend eine Folge von Punkten der Menge P mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = u_0$. Wegen der Stetigkeit der die u -Axe auf die t -Axe abbildenden Funktion $f(u)$ folgt für die entsprechenden Punkte der t -Axe: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(u_\nu) = f(u_0)$; schreiben wir nun t_ν als systematischen Bruch der Grundzahl e :

$$t_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i^{(\nu)}}{e^i}, \quad (13)$$

so folgt nun aus $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = t_0$ bekanntlich (*):

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} e_i^{(\nu)} = e_i. \quad (14)$$

Bildet man nun nach Formel (7) den dem Punkte u_0 zugeordneten Quadratpunkt (x_0, y_0) und nach der jeweils in Betracht kommenden der Formeln (7), (10), (12) den dem Punkte u_ν zugeordneten Quadratpunkt (x_ν, y_ν) , so folgt aus (14) sofort:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} y_\nu = y_0,$$

das aber ist die Stetigkeit der Abbildung im Punkte u_0 .

Ist sodann u_0 linker Endpunkt eines punktfreien Intervalles von P , so

(*) Und zwar gilt dies, falls t_ν durch zwei verschiedene systematische Brüche der Grundzahl e darstellbar ist, welcher dieser beiden systematischen Brüche auch der Ausdruck (13) sein mag.

schreiben wir den ihm zugeordneten Wert $t_0 = f(u_0)$ von t in der Form (8), wo die f_i die Bedeutung (9) haben. Nun ist u_0 nur linksseitiger Grenzpunkt von P . Seien also $u_1, u_2, \dots, u_\nu, \dots$ Punkte von P mit $\lim_{\nu=\infty} u_\nu = u_0$ und $u_\nu < u_0$. Dann ist auch: $\lim_{\nu=\infty} t_\nu = \lim_{\nu=\infty} f(u_\nu) = f(u_0) = t_0$ und $t_\nu < t_0$. Schreiben wir t_ν wieder in der Form (13), so folgt hieraus bei Berücksichtigung von $t_\nu < t_0$:

$$\lim_{\nu=\infty} e_i^{(\nu)} = f_i$$

und somit wie oben die Stetigkeit der Abbildung im Punkte u_0 .

Ganz ähnlich verläuft der Beweis, wenn u_0 rechter Endpunkt eines punktfreien Intervalles und somit nur rechtsseitiger Grenzpunkt von P ist. Wir schreiben in dem Falle $t_0 = f(u_0)$ in der Form $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{e^i}$, wo die g_i die Bedeutung (11) haben. Ist nun $\lim_{\nu=\infty} u_\nu = u_0$, so kann man stets annehmen: $u_\nu > u_0$, daher auch: $t_\nu = f(u_\nu) > f(u_0)$, sodass bei der Schreibweise (13) für t_ν folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} e_i^{(\nu)} = g_i,$$

woraus wieder die Stetigkeit der Abbildung im Punkte u_0 folgt.

Die Abbildung ist bisher nur für die Punkte der Menge P definiert und als stetig bezüglich der Menge P nachgewiesen. Es hat keinerlei Schwierigkeit, die Definition dieser Abbildung so auf die ganze Strecke $<0, 1>$ der u -Axe auszudehnen, dass sie überall stetig wird; etwa in folgender Weise: sei $<u', u''>$ ein punktfreies Intervall der Menge P ; u' und u'' gehören dann zu P ; seien (x', y') und (x'', y'') die — bereits definierten — ihnen entsprechenden Punkte des Quadrates; man braucht nur das Intervall $<u', u''>$ der u -Axe stetig auf die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte des Quadrates so abzubilden, dass u' auf (x', y') und u'' auf (x'', y'') abgebildet wird, und unser Zweck ist erreicht.

So gelingt es also, im Anschlusse an den in § 1 ausgeführten Beweis, dass die Menge der Punkte einer Strecke und eines Quadrates gleiche Mächtigkeit haben, eine stetige Abbildung der Strecke auf das Quadrat herzustellen. Ein Spezialfall dieser Abbildung wurde in etwas anderer Form von H. LEBESGUE angegeben (*), der Spezialfall nämlich, den man erhält, indem

(*) *Leçons sur l'intégration*, S. 44.

man für P die Menge aller jener Zahlen des Intervalles $\langle 0, 1 \rangle$ wählt, die einer Darstellung durch einen systematischen Bruch von der Grundzahl 3 ohne Verwendung der Ziffer 1 fähig sind, und für die Grundzahl e der in den obigen Ausführungen auftretenden systematischen Brüche die Zahl 2 wählt. LEBESGUE knüpft daran die auch für unsere allgemeineren Ausführungen gültige Bemerkung (*), dass man auf analogem Wege auch ohne weiteres eine Abbildung einer Strecke auf ein Gebiet des Raumes von n Dimensionen, ja sogar des Raumes von abzählbar unendlich vielen Dimensionen erhält.

(*) *Journ. de math.*, Serie 6, Bd. I, S. 210.

Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie.

(Von PAUL KOEBE, in Leipzig.)

Das allgemeine Uniformisierungstheorem, welches 1907 gleichzeitig durch H. POINCARÉ (*) und P. KOEBE (**) begründet worden ist, lässt sich folgendermassen formulieren.

*Allgemeines zentrales Uniformisierungstheorem (***)*: 1. Es bezeichne $y(x)$ eine beliebige analytische Funktion, (x, y) das betreffende analytische Gebilde, enthaltend alle und nur diejenigen Stellen, an welchen die Funktion $y(x)$ und damit zugleich auch die inverse Funktion $x(y)$ den Charakter einer algebraischen Funktion besitzt; es sei ferner F die Riemannsche Fläche der Funktion $y(x)$, welche, entsprechend der erwähnten Auffassung des analytischen Gebildes (x, y) , durch ihre Punkte eine eindeutige Repräsentation aller Stellen algebraischen Charakters der Funktion $y(x)$ liefert und also nur

(*) H. POINCARÉ, *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*, Acta math., t. XXXI, 1907.

(**) P. KOEBE, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, erste und zweite Mitteilung, Nachrichten der Kgl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, 1907; s. auch die seitdem erschienenen zahlreichen weiteren Abhandlungen des Verfassers in den *Gött. Nachr.*, *Math. Ann.*, *Crelles Journal*, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung.

(***) Die Bezeichnung als *zentrales Uniformisierungstheorem* ist gewählt im Hinblick darauf, dass es ausser der in diesem Theorem definierten wichtigsten Uniformisierungstranscendenten der Kurve (x, y) noch andere Uniformisierungstranscendenten für dieselbe Kurve gibt, welche in ihrer Gesamtheit durch ein von KOEBE 1908 aufgestelltes *allgemeines Uniformisierungsprinzip* umfasst werden; vgl. dessen *Römischen Vortrag* (1908) « Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip », erschienen in den *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici* (Roma, Lincei, 1909). Das Uniformisierungsproblem bzw. die damit zusammenhängenden allgemeinen Abbildungsprobleme sind seit 1907 Gegenstand ausgedehnterer Entwicklungen geworden, welche von der Deutschen Mathematiker Vereinigung (D. M. V.) 1911 auf der Jahresversammlung in Karlsruhe zum Mittelpunkt einer besonderen Verhandlung gemacht wurden; vgl. hierüber den Bericht im Jahresbericht der D. M. V., 1912, pag. 153/166, insbes. das Referat von P. KOEBE auf pag. 157/163.

von inneren Punkten gebildet zu denken ist. Alsdann lässt sich auf der Riemannschen Fläche F eine relativ zu F unverzweigte und im Innern von F überall den Charakter einer algebraischen Funktion von x besitzende Funktion $t(x, y)$ ermitteln, welche so beschaffen ist, dass $x(t)$ und $y(t)$ zwei simultan eindeutige Funktionen von t sind mit dem Charakter rationaler Funktionen von t , deren genauer simultaner Existenzbereich T , das ist der Bereich aller derjenigen durch die analytische Fortsetzung sich ergebenden Stellen, an welchen diese beiden Funktionen gleichzeitig den Charakter rationaler Funktionen von t behalten, entweder durch das Innere (exklusive Peripherie) des Einheitskreises oder durch die ganze Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes oder durch die ganze Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes gebildet wird. — 2. Welcher der genannten drei Fälle eintritt, ist in jedem einzelnen Falle durch die Problemstellung selbst mitentschieden und kann nicht vorgeschrieben werden. Der dritte Fall tritt dann und nur dann ein, wenn (x, y) eine algebraische Kurve vom Geschlecht 0 ist, also F eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche; der zweite Fall tritt nur dann ein, wenn (x, y) entweder eine algebraische Kurve vom Geschlecht 1 ist, also F eine geschlossene dreifach zusammenhängende Fläche oder, wenn (x, y) eine transcendente analytische Kurve ist von der Art, dass die zugehörige Riemannsche Fläche F entweder eine ungeschlossene einfach zusammenhängende Fläche ist, welche vermöge einer umkehrbar eindeutigen konformen Abbildung auf die ganze Ebene (excl. ∞) abgebildet werden kann, oder aber eine zweifach zusammenhängende Fläche, welche umkehrbar eindeutig konform auf die ganze Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes und des Nullpunktes abgebildet werden kann. — 3. Die Grösse $t(x, y)$ ist in jedem Falle durch ihre genannten Eigenschaften vollständig bestimmt bis auf eine lineare Transformation, welche je nach dem vorliegenden Falle entweder das Innere des Einheitskreises oder die ganze Ebene inklusive oder die ganze Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes in sich transformiert. — 4. Die Funktion $t(x, y)$ ist relativ zu F stets unendlich-vieldeutig, sofern nicht der Fall vorliegt, dass F eine geschlossene oder ungeschlossene einfach zusammenhängende Fläche ist, in welchem Falle die Funktion $t(x, y)$ relativ zu F eindeutig ist. Die verschiedenen relativen Zweige der Funktion $t(x, y)$ sind durch lineare Substitutionen mit einander verknüpft, deren einzelne eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des jeweiligen Gebietes T in sich vermittelt und innerhalb T keine Fixpunkte hat. Die Gesamtheit der auf diese Weise erklärten linearen Substitutionen bildet eine im Gebiete T eigentlich

diskontinuierliche Gruppe (T -Gruppe) welche, jenachdem der Zusammenhang von F endlich oder unendlich gross ist, aus endlich oder unendlich vielen Erzeugenden entspringt.

Zu der Funktion $t(x, y)$ gehört eine Riemannsche Fläche Φ , welche man sich über F ausgebreitet zu denken hat und welche daher als eine *Ueberlagerungsfläche* der Fläche F bezeichnet wird. Auf dieser Fläche Φ ist die Funktion $t(x, y)$ eindeutig, und es wird durch die Funktion $t(x, y)$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche Φ auf den Bereich T vermittelt. Der Beweis des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems zerfiel dementsprechend in zwei Aufgaben, nämlich eine Analysis-situs-Aufgabe, die Aufgabe der Konstruktion der einfach zusammenhängenden Fläche Φ über F , und eine Abbildungsaufgabe, die Aufgabe der konformen Abbildung der Fläche Φ auf den Bereich T . Insbesondere das letztere Problem stellte den Kardinalpunkt der Poincaréschen und der Koebeschen Beweisführung dar. Die Erledigung dieses Problems gelang den genannten Autoren durch die Aufstellung und Begründung eines allgemeinen Abbildungssatzes der einfachzusammenhängenden Bereiche, welcher als eine in gewissem Sinne abschliessende Erweiterung des von RIEMANN selbst in seiner Dissertation aufgestellten Abbildungssatzes der berandeten einfach zusammenhängenden Bereiche zu betrachten ist.

Allgemeiner Abbildungssatz der einfach zusammenhängenden Bereiche. Jeder als Riemannsche Fläche über der Ebene ausgebreitete einfach zusammenhängende Bereich, welcher endlich- oder unendlich-vielblättrig sein kann und von welchem nur die inneren Punkte (als solche kommen nur gewöhnliche Punkte und Windungspunkte endlicher Ordnung in Betracht, die jedoch auch im Unendlichen liegen können), als zum Bereiche gehörig betrachtet werden, lässt sich umkehrbar eindeutig und konform entweder auf das ganze Innere des Einheitskreises oder auf die ganze Ebene exklusive oder auf die ganze Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes abbilden. Die Funktion, welche die Abbildung leistet, ist bis auf eine lineare Substitution bestimmt (*).

(*) Der Riemannsche Abbildungssatz kennt seiner Beschränkung entsprechend nur den ersten Fall. Die durch den dritten Fall gelieferte Ergänzung zum Riemannschen Satze wurde schon 1870 von H. A. SCHWARZ gegeben, welcher auch den ersten exakten Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes erbrachte. (Berliner Monatsberichte, 1870.)

Nicht unerwähnt bleiben möge an dieser Stelle, dass LAGRANGE es ist, bei welchem die Keime des für die Entwicklung der modernen Mathematik so fruchtbaren Gedankens der konformen Abbildung zu finden sind. Vgl. die Schriften von LAGRANGE: *Sur la construction des cartes géographiques, premier et deuxième Mémoire*; 1779, Oeuvres, t. IV, pag. 637-699,

Allgemeiner kann an Stelle einer eigentlichen Riemannschen Fläche auch eine beliebige einfach zusammenhängende « Riemannsche Mannigfaltigkeit » als abzubildender Bereich gegeben sein.

Die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems für die Uniformisierungstheorie als solche. Die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems lässt sich nach verschiedenen Seiten charakterisieren, nämlich nach seiten der Uniformisierungstheorie als solcher, ferner nach seiten der Riemannschen Funktionentheorie überhaupt, sowie schliesslich nach seiten der BOLYAI-LOBATSCHESKI'schen Geometrie bezw. der RIEMANN-HELMHOLTZschen Raumtheorie.

Fassen wir zunächst die erste Seite der Bedeutung unseres Theorems ins Auge. Wir bemerken die Tatsache, dass nicht nur die Grössen x und y eindeutige analytische Funktionen der in T veränderlich zu denkenden Grösse t sind, sondern jede relativ zum Gebilde (x, y) überall mit dem Charakter einer algebraischen Funktion erklärte Funktion $f(x, y)$, welche relativ zum Gebilde nicht verzweigt ist. Eine solche Grösse f wird in der Tat, aufgefasst als Funktion von t , eine im Gebiete T unverzweigte analytische Funktion $f(t)$ sein, welche in diesem Gebiete überall den Charakter rationaler Funktionen darbietet und folglich wegen des einfachen Zusammenhanges des Bereichs T in diesem Bereiche eindeutig ist. Die Funktion $f(x, y)$ kann insbesondere ihrerseits eine Uniformisierungstrascendente für das Gebilde (x, y) sein, d. h. eine Grösse von der Art, dass $x(f)$ und $y(f)$ zwei simultan eindeutige Funktionen werden, deren Existenzbereich dann allgemein zu reden unendlichvielfach zusammenhängend ist; es wird dann wiederum f in T eine eindeutige Funktion von t sein. Insofern nimmt die in dem zentralen Uniformisierungstheorem definierte Uniformisierungstrascendente in der Tat eine zentrale Stellung unter den überhaupt möglichen Uniformisierungstrascendenten ein.

Die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems für die Riemannsche Funktionentheorie überhaupt. Um nunmehr die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems nach seiten der Riemannschen Funktionentheorie überhaupt zu schildern, gehen wir von dem Allgemeinbegriff der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit aus. Zur Definition einer solchen Mannigfaltigkeit stellen wir mit RIEMANN (*) die Forderung an die Spitze, dass es möglich sein soll, die Umgebung jeder einzelnen Stelle der

(*) RIEMANN, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*. Habilitationsrede, abgedr. in Ges. Werke, pag. 272 ff.

Mannigfaltigkeit eineindeutig und stetig auf ein schlichtes Kreisflächenstück abzubilden und vermöge dieser Abbildung aufzufassen. Die ganze Mannigfaltigkeit kann dabei endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängend, einseitig oder zweiseitig sein. Von diesem allgemeinen rein topologischen Begriff der Mannigfaltigkeit gelangen wir zu dem spezielleren Begriff der *allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeit*, wie wir solche Mannigfaltigkeiten in Erweiterung einer von KLEIN (Ann. 21, 1883) eingeführten Terminologie nennen wollen, indem wir für jeden einzelnen Punkt der Mannigfaltigkeit und dessen Umgebung die Möglichkeit einer Winkelbestimmung postulieren in der Gestalt, dass es möglich sein soll, eine Umgebung jedes einzelnen Punktes der Mannigfaltigkeit nun nicht mehr nur *stetig* eineindeutig, sondern *konform* eineindeutig auf ein schlichtes Kreisflächenstück abzubilden, wobei natürlich, sofern nun ein Stück der Mannigfaltigkeit als Teil von Umgebungen zweier verschiedener Stellen der Mannigfaltigkeit betrachtet wird, welche beide voraussetzungsgemäss eineindeutig konform auf je ein schlichtes Kreisflächenstück abgebildet sind, die dem erwähnten Stücke vermöge der genannten beiden Abbildungen zukommende Winkeldefinition dieselbe sein muss, was darauf hinauskommt zu verlangen, dass die genannten beiden Abbildungen des betrachteten Stückes der Mannigfaltigkeit auf einander im gewöhnlichen Sinne konform bezogen sein sollen. Ausser den genannten Voraussetzungen haben wir noch die Forderung der Zweiseitigkeit der Mannigfaltigkeit hinzuzufügen, um den Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit in der zweckentsprechendsten Form zu haben.

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit kann auf diese Weise in verschiedener Form definiert sein, insbesondere 1. als *natürliche Fläche* im Raume eventuell mit Kanten und Ecken bzw. vermöge definiter quadratischer Differentialformen (ideale Fläche), 2. als *Riemannsche Fläche*, 3. als analytische Funktion bzw. *analytisches Gebilde*, 4. als *eigentlich diskontinuierliche Gruppe* linearer Substitutionen, insbesondere als eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe der drei oben beim zentralen Uniformisierungstheorem betrachteten Kategorien (*T-Gruppe*), welche auch vermöge einer von KLEIN und POINCARÉ eingeführten geometrischen Deutung als *Bewegungsgruppen der nichteuklidischen Geometrie* interpretiert werden können (vgl. weiter unten).

Neben den Begriff der allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeit stellen wir nun in Erweiterung des von RIEMANN für die algebraischen Funktionen aufgestellten Klassenbegriffs den *Klassenbegriff* der allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Wir rechnen zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten

zu einer und derselben Klasse, wenn es möglich ist, beide Mannigfaltigkeiten durch eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung auf einander zu beziehen, wobei wir daran erinnern, dass gemäss unserm Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit nur die inneren Punkte der Mannigfaltigkeit, nicht auch etwa vorhandene Rand- oder Grenzpunkte in Berücksichtigung kommen. Wir formulieren nun das *Haupttheorem der Riemannschen Mannigfaltigkeiten* in folgender Weise: In jeder Klasse von Riemannschen Mannigfaltigkeiten finden sich Repräsentanten jeder der oben bezeichneten Kategorien, d. h.: Es kann jede in irgend einer Form definierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (ihrer ganzen Ausdehnung nach) in der Form 1. als natürliche oder ideale Fläche (sogar konstanten Krümmungsmasses), 2. als Riemannsche Fläche, 3. als analytisches Gebilde, 4. als eigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen, insbesondere als eigentlich diskontinuierliche T -Gruppe dargestellt werden. Die letztgenannte Repräsentation durch eine T -Gruppe ist dabei für jede Klasse einzig in ihrer Art, wenn man Gruppen, die vermöge einer linearen Transformation des betreffenden Gebietes T in sich in einander übergeführt werden können, nicht als verschieden betrachtet.

Bemerkt man, dass das Problem der Aequivalenz Riemannscher Flächen vermöge konformer Abbildung, welches im Gebiete der algebraischen Funktionen als Problem der Klassenmoduln erscheint für das Verständnis der Riemannschen Ideengänge einen Hauptgesichtspunkt geben mag, so erkennt man nunmehr, dass mit der Lösung des Uniformisierungsproblems in dieser Richtung ein Gipfelpunkt der Riemannschen Funktionentheorie erreicht ist, indem dieses Theorem selbst wie eine tiefste Offenbarung Riemannschen Geistes erscheint. Umsomehr mag man dieser Bewertung Raum geben, wenn man bedenkt, dass unser Uniformisierungstheorem überhaupt das einzige wirklich allgemeine Theorem der Funktionentheorie ist, welches zugleich aufs engste mit dem Wesen der analytischen Fortsetzung und dem Begriff des vollständigen analytischen Gebildes verknüpft ist.

Die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems für die Bolyai-Lobatschefski'schen Geometrie bezw. Riemann-Helmholtz'sche Raumtheorie. Die Berechtigung der soeben vorgetragenen Beurteilung mag in noch helleres Licht gesetzt werden, wenn man auch die Bedeutung unseres allgemeinen Uniformisierungstheorems für die nichteuklidische Geometrie betrachtet. Auf diese Seite des Theorems wird man geführt, wenn man in bekannter Weise das Innere des Einheitskreises nichteuklidisch misst vermöge der Formel für das Linienelement $d\sigma = \frac{ds}{1-r^2}$, wobei ds das in

der Ebene des Einheitskreises euklidisch gemessene Linienelement ist, während r der Abstand des Elements ds vom Mittelpunkt bezeichnet. Im Falle der ganzen Ebene exklusive des unendlich fernen Punktes hat man $d\sigma = ds$, im Falle der ganzen Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes $d\sigma = \frac{ds}{1+r^2}$ zu setzen. Vermöge dieses absoluten Messungsverfahrens können nun zunächst die genannten bei der Uniformisierung auftretenden diskontinuierlichen T -Gruppen als diskontinuierliche Bewegungsgruppen der absoluten Geometrie gedeutet werden und wir erkennen, dass überhaupt die *diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der absoluten Geometrie* sozusagen als die *Urbilder* (« Platonische Ideen ») der *Riemannschen Mannigfaltigkeiten* aufgefasst werden können, indem jeder Klasse Riemannscher Mannigfaltigkeiten eine und nur eine solche Bewegungsgruppe entspricht und umgekehrt aus jeder derartigen Bewegungsgruppe eine Klasse Riemannscher Mannigfaltigkeiten entspringt. In diesem Zusammenhange sei auch der Satz erwähnt, dass es möglich ist, alle diese Bewegungsgruppen, sowohl die mit endlich vielen als auch die mit unendlich vielen Erzeugenden, aus independenten Bestimmungsstücken zu konstruieren und explicite in Evidenz zu setzen.

Noch eine andere Seite der Beziehung zwischen Uniformisierung und nichteuklidischer Geometrie sei hier genannt. Man kann sich das in der T -Ebene konstruierte Linienelement $d\sigma$ auf eine in irgend welcher Form vorgelegte Riemannsche Mannigfaltigkeit M überpflanzt denken vermöge der Abbildungsbeziehung, welche durch die Uniformisierung zwischen der Mannigfaltigkeit und der T -Ebene geschaffen ist. Auf diese Weise wird in der Mannigfaltigkeit M die zu M gehörende absolute Massbestimmung definiert, vermöge deren die Mannigfaltigkeit gemäss den Forderungen des RIEMANN-HELMHOLTZ'schen Raumproblems die freie Beweglichkeit in sich erhält, wenn auch nicht als Ganzes so doch im Sinne der freien Beweglichkeit der hinreichend klein gewählten Stücke (« nichteuklidische Raumformen ») (*), wobei bei der Bewegung auch die Winkel erhalten bleiben. Es sind nun die axiomatischen Bedingungen aufzustellen, durch welche das in M erklärte absolute Linienelement $d\sigma$ vollständig und rein geometrisch definiert werden kann. Dadurch wird das *Uniformisierungsproblem* geradezu als ein *Problem der nichteukli-*

(*) Diese allgemeinen hier definierten nichteuklidischen Raumformen fallen, wenn die Mannigfaltigkeit M geschlossen und daher endlichvielfach zusammenhängend vorausgesetzt wird, mit den sogenannten CLIFFORD-KLEINSchen Raumformen zusammen.

schen Geometrie interpretiert, nämlich als das Problem, eine beliebig vorgelegte Riemannsche Mannigfaltigkeit M als nichteuklidische Raumform zu charakterisieren. Diese Bedingungen sind, wenn wir für die Umgebung jeder einzelnen Stelle der Mannigfaltigkeit die vorausgesetzte konforme Hilfsabbildung auf die schlichte Ebene in Berücksichtigung nehmen, die folgenden: 1. Es soll in der ganzen Mannigfaltigkeit ein durchweg reguläres unverzweigtes Linienelement $d\sigma$ ausgebreitet werden, so dass den Bedingungen der freien Beweglichkeit der kleinen Teile im Sinne der Festhaltung der Winkel und Massbestimmung genügt ist. 2. Es sollen für diese Massbestimmung die kürzesten Linien (nichteuklidische Geraden) nach beiden Seiten unendliche Länge besitzen, sofern sie nicht in sich zurücklaufen. Die Bedingung 2, welche gewissermassen als Grenzbedingung aufzufassen ist, ist wesentlich, um das Problem zu einem bestimmten zu machen. Sie kann dann und nur dann fortgelassen werden, wenn die Mannigfaltigkeit M geschlossen ist (Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion). Nicht erforderlich ist es zu verlangen, dass das Linienelement $d\sigma$ der Bedingung der Eindeutigkeit in M genüge. Die Eindeutigkeit des Elements $d\sigma$ ist vielmehr bereits eine Folge der übrigen gestellten Bedingungen.

Das Problem kann auch so formuliert werden: Es soll in der Mannigfaltigkeit M in ihrer ganzen Ausdehnung eine relativ unverzweigte, auf die Mannigfaltigkeit M durchweg konform bezogene Mannigfaltigkeit konstanten Krümmungsmasses erklärt werden, auf welcher jede geodätische Linie nach beiden Seiten unendliche Länge besitzt, sofern sie nicht in sich zurückläuft.

Der Beweis der hiermit aufgestellten Behauptung ergibt sich unter Benutzung des Uniformisierungstheorems durch Betrachtung des auf die T -Ebene überpflanzt zu denkenden Elementes $d\sigma$, wenn man beachtet, dass die für M vorausgesetzte freie Beweglichkeit der hinreichend kleinen Teile in dem einfach zusammenhängenden T -Gebiet sich zur freien Beweglichkeit im Ganzen ausgestaltet, eine Beweglichkeit, welche dann nur noch durch lineare Transformationen vermittelt sein kann (*).

(*) Ausführlicher beabsichtige ich auf den hier besprochenen Gegenstand im demnächst zu veröffentlichenden dritten Teile meiner Abhandlung: *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven* zurückzukommen; Crelles, *Journal für Mathematik*, erster Teil erschienen in Bd. 138 (1910), zweiter Teil in Bd. 139 (1911).

Sur une formule générale d'Analyse et ses diverses applications.

(Par M. W. STEKLOFF, à St. Pétersbourg.)

I.

1. Je vais, dans ce qui va suivre, attirer l'attention sur une formule générale, remarquable par sa concision et susceptible de plusieurs applications importantes.

La portée de cette formule consiste surtout dans ce qu'elle peut être considérée comme l'origine commune de plusieurs formules, en partie nouvelles, contenant comme des cas particuliers la plupart des formules fondamentales dans l'Analyse, devenues classiques depuis LAGRANGE, EULER, CAUCHY, POISSON, FOURIER, GAUSS et d'autres.

Les applications de la formule en question, sur laquelle on ne paraît pas avoir attiré, jusqu'à présent, toute l'attention qu'elle mérite, sont si nombreuses, qu'il est impossible de les épuiser toutes dans un petit Article, de sorte que je serai obligé de me borner souvent aux remarques sommaires et aux exemples les plus simples et les plus importants dont la partie ne sera pas entièrement nouvelle.

Néanmoins j'espère qu'on me pardonnera d'avoir entrepris de traiter un tel sujet en mémoire de l'illustre LAGRANGE, car, conformément à l'opinion de ce grand savant, « c'est toujours contribuer à l'avancement des Mathématiques que de montrer comment on peut résoudre les mêmes questions et parvenir aux mêmes résultats par des voies très différentes: les méthodes se prêtent par ce moyen un jour mutuel et en acquièrent souvent un plus grand degré d'évidence et de généralité » (*).

(*) LAGRANGE, *Oeuvres*, Paris, MDCCCLXIX, T. III, *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation, etc.*, p. 580.

2. Nous allons donner trois démonstrations différentes de la formule en question, car chacune d'elles présente un certain intérêt sous divers points de vue.

D'abord, ne m'écartant pas loin du champ d'idées de LAGRANGE, je supposerai que la fonction $f(x)$, qui figure dans la formule, admette les dérivées de divers ordres (au moins les dérivées de deux premiers ordres). Dans ce cas, suffisant pour la plupart des applications, la démonstration devient fort simple et n'exige que des considérations élémentaires compréhensibles pour tout lecteur n'ayant que des connaissances des notions premières du Calcul infinitésimal.

Je vais montrer ensuite que la formule, dont il s'agit, résulte comme une application très particulière de la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales que j'ai développée récemment dans mon Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg le 4 mai 1911 (*).

Cette deuxième démonstration établit la formule sous certaines conditions assez générales par rapport à la fonction $f(x)$ et met en évidence une propriété intéressante de la série infinie qui figure dans le second membre de la formule en question.

Enfin, la troisième démonstration sera fondée sur un théorème général indiqué par M. JORDAN dans son *Cours d'Analyse* (T. II, Paris, 1894, p. 220).

Cette dernière démonstration permet d'étendre la formule en question à une classe de fonctions très générales, à savoir à toutes les fonctions qui portent aujourd'hui le nom des fonctions à variation bornée.

3. Première démonstration. Désignons par

$$f(\alpha)$$

une fonction de la variable réelle α admettant les dérivées au moins de deux premiers ordres dans un intervalle $(x, x+h)$, x et h étant deux nombres quelconques que nous allons supposer, pour plus de simplicité, positifs.

Considérons la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n \int_x^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-\alpha)}{h} d\alpha, \quad (1)$$

n étant un entier quelconque.

(*) W. STEKLOFF, *Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables*. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, VIII.^e série, Vol. XXX, N. 4.

Voir aussi *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg*, VI.^e série, 1 juin, 1911, N. 10 (le même titre, en russe).

L'intégration par parties nous donne

$$\int_x^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha = -\frac{h}{\pi} \int_x^{x+h} f'(\alpha) \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h}}{2k+1} d\alpha.$$

Posons

$$\sigma_n(\alpha-x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h}}{2k+1}. \quad (2)$$

La formule (1) s'écrira

$$S_n = -\frac{h}{\pi} \int_x^{x+h} f'(\alpha) \sigma_n(\alpha-x) d\alpha. \quad (3)$$

Désignons par ε et ε_1 deux nombres positifs arbitraires, plus petits que h , et écrivons l'intégrale (3) sous la forme

$$\int_x^{x+h} = \int_x^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{x+h-\varepsilon_1} + \int_{x+h-\varepsilon_1}^{x+h} = K_1 + K_2 + K_3. \quad (4)$$

Considérons l'intégrale K_1 .

Posons, en général,

$$\tau_n(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi\xi}{h}}{(2k+1)^2}. \quad (5)$$

On trouve, en intégrant par parties,

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \int_x^{x+\varepsilon} f'(\alpha) \sigma_n(\alpha-x) d\alpha = \\ &= -\frac{h}{\pi} \left(f'(x+\varepsilon) \tau_n(\varepsilon) - f'(x) \tau_n(0) \right) + \frac{h}{\pi} \int_x^{x+\varepsilon} f''(\alpha) \tau_n(\alpha-x) d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La fonction $f'(\alpha)$ étant, par l'hypothèse, continue dans $(x, x+h)$, on aura

$$f'(x+\varepsilon) - f'(x) = \Theta(x), \quad (7)$$

où

$$|\Theta(x)| < \delta, \quad (7_1)$$

δ étant un nombre positif s'annulant en même temps que ε .

On peut donc écrire, en tenant compte de (7),

$$f'(x + \varepsilon) \tau_n(\varepsilon) - f'(x) \tau_n(0) = f'(x) (\tau_n(\varepsilon) - \tau_n(0)) + \Theta(x) \tau_n(\varepsilon). \quad (8)$$

Or, il est évident que

$$0 < \tau_n(0) - \tau_n(\varepsilon) = 2 \sum_{k=0}^n \frac{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi\varepsilon}{h}}{(2k+1)^2} < 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi\varepsilon}{h}}{(2k+1)^2}. \quad (9)$$

La série

$$s(\varepsilon) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi\varepsilon}{h}}{(2k+1)^2} < 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

converge uniformément, quelle que soit la valeur de ε .

On peut donc trouver un entier ν tel qu'on ait

$$|s(\varepsilon) - s_\nu(\varepsilon)| < \frac{\delta}{2}. \quad (10)$$

Or,

$$s_\nu(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi\varepsilon}{h}}{(2k+1)^2} < \frac{\pi^2}{h^2} \varepsilon^2 (\nu + 1).$$

L'entier ν étant choisi de la manière tout à l'heure indiquée, on peut toujours choisir le nombre ε de façon qu'on ait

$$s_\nu(\varepsilon) < \frac{\delta}{2};$$

pour cela, il suffit de poser

$$\varepsilon < \frac{h\sqrt{\delta}}{\pi\sqrt{2(\nu+1)}}.$$

On aura alors, en ayant égard à (10),

$$s(\varepsilon) < \delta$$

et à *fortiori*, en vertu de (9),

$$|\tau_n(0) - \tau_n(\varepsilon)| < 2\delta. \quad (11)$$

Donc, le nombre positif δ étant donné à l'avance, il existe toujours un nombre positif ε tel que les inégalités (7.) et (11) soient satisfaites à la fois.

Désignant maintenant par M_1 le maximum du module de la fonction $f'(x)$, où elle reste continue, et en remarquant que

$$\tau_n(\xi) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = A, \quad (12)$$

A étant un nombre fixe ne dépendant ni de n , ni de ξ , on s'assure, en tenant compte de (8), (7.) et (11), qu'on peut toujours choisir le nombre ε de façon qu'on ait

$$|f'(x + \varepsilon) \tau_n(\varepsilon) - f'(x) \tau_n(0)| < (2M_1 + A) \delta = \eta, \quad (13)$$

η étant un nombre positif donné à l'avance.

D'autre part, désignons par M_2 le maximum de

$$|f''(x)|$$

dans l'intervalle où cette fonction reste continue.

On trouve, en tenant compte de (12),

$$\left| \int_x^{x+\varepsilon} f''(\alpha) \tau_n(\alpha - x) d\alpha \right| < A M_2 \varepsilon. \quad (14)$$

Les inégalités (13) et (14) et l'égalité (6) conduisent à l'inégalité suivante

$$|K_1| < \frac{h}{\pi} (\eta + A M_2 \varepsilon) = \eta', \quad (15)$$

où η' est évidemment un nombre qu'on peut rendre si petit qu'on le veut en choisissant convenablement le nombre arbitraire ε .

Les mêmes raisonnements s'appliquent textuellement à l'intégrale

$$K_3 = \int_{x+h-\varepsilon_1}^{x+h} f'(\alpha) \sigma_n(\alpha - x) d\alpha$$

et conduisent à l'inégalité

$$|K_3| < \eta'', \quad (16)$$

η'' étant un nombre qu'on peut rendre si petit qu'on le veut en choisissant convenablement le nombre arbitraire ε_1 .

4. Les nombres ε et ε_1 étant fixés de la manière tout à l'heure indi-

quée, considérons l'intégrale

$$K_2 = \int_{x+\varepsilon}^{x+h-\varepsilon_1} f'(\alpha) \sigma_n(\alpha - x) d\alpha,$$

qui peut s'écrire

$$K_2 = \int_{x+\varepsilon}^{x+h-\varepsilon_1} f'(\alpha) \left(\sigma_n(\alpha - x) - \frac{\pi}{4} \right) d\alpha + \frac{\pi}{4} \left(f(x+h-\varepsilon_1) - f(x+\varepsilon) \right). \quad (17)$$

Posons

$$f(x+h-\varepsilon_1) - f(x+\varepsilon) = f(x+h) - f(x) + \Theta_1(x). \quad (18)$$

En tenant compte de l'hypothèse faite au sujet de la fonction $f(x)$, on s'assure que, pour ε et ε_1 assez petits,

$$|\Theta_1(x)| < \delta, \quad (19)$$

δ étant une quantité s'annulant en même temps que ε et ε_1 .

Rappelons maintenant cette proposition élémentaire de l'Analyse:

La série

$$\sigma(\alpha - x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi(\alpha - x)}{h}}{2k+1}$$

converge uniformément pour toutes les valeurs de α , comprises dans l'intervalle $(x+\varepsilon, x+h-\varepsilon_1)$, et la somme

$$\sigma_n(\alpha - x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi(\alpha - x)}{h}}{2k+1}$$

tend, pour $n = \infty$, uniformément vers $\frac{\pi}{4}$ pour toutes les valeurs considérées de α .

Il importe de remarquer que ce théorème se démontre d'une manière élémentaire et sans rien emprunter à la théorie des séries trigonométriques (*).

(*) Voir, par exemple: GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*. Paris, 1905, T. II, n.° 274, p. 40.

Comparer aussi: M. S. FRANEL, *Sur la formule sommatoire d'Euler*. Mathémat. Annalen, Bd. 47, 1895, pp. 433-436.

Il s'ensuit qu'il existe un entier $n = n_0$ tel qu'on ait

$$\left| \sigma_n(\alpha - x) - \frac{\pi}{4} \right| < \delta \quad \text{pour } n \geq n_0 \quad (20)$$

et pour toutes les valeurs de α , comprises entre $x + \varepsilon$ et $x + h - \varepsilon_1$, ε et ε_1 étant des nombres assez petits fixés de la manière indiquée plus haut.

Moyennant l'inégalité (20), on trouve

$$|I| = \left| \int_{x+\varepsilon}^{x+h-\varepsilon_1} f'(x) \left(\sigma_n(\alpha - x) - \frac{\pi}{4} \right) d\alpha \right| < M_1 (h - \varepsilon_1 - \varepsilon) \delta$$

et, puis, en vertu de (17), (18) et (19),

$$K_2 - \frac{\pi}{4} \left(f(x+h) - f(x) \right) = I + \frac{\pi}{4} \Theta_1(x),$$

où

$$|I| < M_1 h \delta, \quad |\Theta_1(x)| < \delta. \quad (21)$$

5. Écrivons maintenant l'égalité (3) sous la forme

$$S_n - \frac{h}{4} \left(f(x) - f(x+h) \right) = -\frac{h}{\pi} (K_1 + K_3) - \\ - \frac{h}{\pi} \left(K_2 - \frac{\pi}{4} \left(f(x+h) - f(x) \right) \right).$$

Choisissant d'abord convenablement les nombres ε et ε_1 , on aura, en vertu de (15) et (16),

$$\left| \frac{h}{\pi} (K_1 + K_3) \right| < \frac{h}{\pi} (n' + n''),$$

$$|K_2 - \frac{\pi}{4} \left(f(x+h) - f(x) \right)| < |I| + \frac{\pi}{4} \delta.$$

Les nombres ε et ε_1 étant ainsi fixés, choisissons convenablement l'entier $n = n_0$.

On aura, en vertu de (21),

$$|I| < M_1 h \delta$$

et, par conséquent, pour $n \geq n_0$,

$$\left| S_n - \frac{h}{4} (f(x) - f(x+h)) \right| < \frac{h}{\pi} (n' + n'') + \left(\frac{h^2}{\pi} M_1 + \frac{h}{4} \right) \delta = \delta',$$

δ' étant un nombre ne dépendant pas de n et si petit qu'on le veut.

Cette inégalité conduit à la formule suivante

$$f(x) - f(x+h) = \frac{4}{h} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{x+h} f(x) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-x)}{h} d\alpha. \quad (A)$$

C'est précisément la formule que nous voulions établir.

6. Deuxième démonstration.

Désignons par

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots \quad (21)$$

une suite de fonctions, définies dans un intervalle (a, b) ($b > a > 0$) par les équations

$$\varphi_k''(x) + \lambda_k p(x) \varphi_k(x) = 0 \quad \text{pour } a < x < b, \quad (22)$$

$$\varphi_k'(a) - h \varphi_k(a) = 0, \quad \varphi_k'(b) + H \varphi_k(b) = 0, \quad (23)$$

$$\int_a^b p(x) \varphi_k^2(x) dx = 1, \quad (24)$$

où h et H sont des constantes données positives, $p(x)$ est une fonction donnée positive dans l'intervalle (a, b) .

On sait qu'il existe une infinité de nombres positifs λ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) (nombres caractéristiques) et de fonctions correspondantes $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) (fonctions fondamentales de STOURM-LIOUVILLE) vérifiant les équations (22), (23) et (24).

J'ai démontré autrefois que la suite (21) est fermée, c'est-à-dire l'équation de fermeture

$$\int_a^{\beta} p(x) f(x) \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k, \quad (25)$$

$$A_k = \int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x) dx, \quad B_k = \int_a^{\beta} p(x) \varphi(x) \varphi_k(x) dx, \quad (26)$$

α et β étant des nombres quelconques compris entre a et b , subsiste pour toutes les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ assujetties à la seule condition d'être intégrables dans l'intervalle (a, b) .

Ce théorème reste aussi vrai pour les cas limites de

$$h = H = 0$$

et

$$h = H = \infty \text{ (*)}.$$

Posons, dans (25) et (26), $\beta = \alpha$ en entendant par α une valeur quelconque de la variable x prise dans l'intervalle (a, b) , par α un nombre fixe ($a \leq \alpha < b$).

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k$$

présente alors une fonction de x et converge absolument et uniformément dans l'intervalle (a, b) , comme cela résulte des travaux que je viens de citer (voir aussi mon Mémoire: *Théorie générale des fonctions fondamentales*. Annales de Toulouse, 1905).

7. Appliquons ces théorèmes généraux au cas le plus simple

$$h = H = \infty, \quad p(x) = 1.$$

On trouve aisément, vérifiant toutes les conditions (22), (23) et (24),

$$\varphi_k(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \sin \frac{k\pi(x-a)}{b-a} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (27)$$

Substituons cette expression de $\varphi_k(x)$ dans (25), en y faisant

$$\alpha = a, \quad \beta = x, \quad h = b - a, \quad f(x) = 1.$$

On obtient la formule

$$\int_a^x \varphi(x) dx = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{a+h} \varphi(x) \sin \frac{k\pi(x-a)}{h} dx \cdot \int_a^x \sin \frac{k\pi(x-a)}{h} dx, \quad (28)$$

(*) Voir à ce sujet mes Mémoires: *Problème de refroidissement d'une barre hétérogène* (Annales de Toulouse, 1901); *Sur certaines égalités générales, etc.* (Mém. de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, 1904); *Sur l'existence des fonctions fondamentales* (Memorie d. R. Accad. dei Lincei, 1910).

où $\varphi(x)$ est une fonction quelconque assujettie à la seule condition d'être intégrable dans l'intervalle (a, b) .

Rappelons maintenant cette proposition, établie pour la première fois par M. A. LIAPOUNOFF:

Si $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont des fonctions intégrables dans (a, b) et si l'on pose

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x) dx + C, \quad f_1(x) = \int_a^x \varphi_1(x) dx + C_1, \quad (29)$$

C et C_1 étant des constantes, on a toujours

$$\int_a^\beta \varphi(x) f_1(x) dx = f(\beta) f_1(\beta) - f(a) f_1(a) - \int_a^\beta \varphi_1(x) f(x) dx,$$

β étant un nombre compris entre a et b .

Appliquons cette égalité aux fonctions

$$f_1(x) = \sin \frac{k\pi(x-a)}{h}, \quad \varphi_1(x) = \frac{k\pi}{h} \cos \frac{k\pi(x-a)}{h},$$

liées par la relation

$$f_1(x) = \sin \frac{k\pi(x-a)}{h} = \frac{k\pi}{h} \int_a^x \cos \frac{k\pi(x-a)}{h} dx = \int_a^x \varphi_1(x) dx.$$

On trouve tout de suite

$$\int_a^{a+h} \varphi(x) \sin \frac{k\pi(x-a)}{h} dx = -\frac{k\pi}{h} \int_a^{a+h} f(x) \cos \frac{k\pi(x-a)}{h} dx. \quad (30)$$

Remarquant maintenant que

$$\int_a^x \sin \frac{k\pi(x-a)}{h} dx = -\frac{h}{k\pi} \left(\cos \frac{k\pi(x-a)}{h} - 1 \right),$$

on obtient, en ayant égard à (28), (29) et (30),

$$f(x) - f(a) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos \frac{k\pi(x-a)}{h} - 1 \right) \int_a^{a+h} f(x) \cos \frac{k\pi(x-a)}{h} dx.$$

Cette formule a lieu pour toute valeur de x comprise entre a et $b = a + h$.
Posant, en particulier,

$$x = b = a + h$$

et remarquant que, dans ce cas,

$$\cos \frac{k \pi (x - a)}{h} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ pair} \\ -2 & \text{pour } k \text{ impair,} \end{cases}$$

on trouve

$$f(a) - f(a + h) = \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^{a+h} f(x) \cos \frac{(2k+1) \pi (x - a)}{h} dx,$$

ou, en changeant a en x , x en $x + h$,

$$f(x) - f(x + h) = \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1) \pi (\alpha - x)}{h} d\alpha. \quad (\text{A})$$

C'est précisément la formule (A) établie au n.º 5 dans la supposition particulière que la fonction $f(x)$ admette les dérivées de deux premiers ordres, continues dans l'intervalle $(x, x + h)$.

La démonstration que nous venons d'exposer montre que cette formule reste vraie dans le cas plus général, à savoir pour toute fonction $f(x)$ susceptible de la forme

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x) dx + C, \quad (31)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction assujettie à la seule condition d'être intégrable dans l'intervalle (a, b) .

D'après ce que nous avons dit au n.º 6, la série de la formule (28) est une série absolument convergente.

La série qui figure dans la formule (A) n'est qu'une simple transformation de celle-ci.

L'analyse précédente montre encore que la série (A) converge absolument toutes les fois que la fonction $f(x)$ satisfait à la condition (31).

8. Troisième démonstration.

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ soit une fonction à variation

bornée dans l'intervalle $(x, x + h)$, x et h étant des nombres quelconques positifs.

Considérons la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n \int_x^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-\alpha)}{h} d\alpha, \quad (32)$$

n désignant un entier quelconque.

On a

$$2 \sin \xi \sum_{k=0}^n \cos (2k+1)\xi = \sin 2(n+1)\xi,$$

quelle que soit la valeur de ξ différente de $p\pi$ (p étant un entier).

On peut donc écrire

$$2 S_n = \int_x^{x+h} f(\alpha) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi(x-\alpha)}{h}}{\sin \frac{\pi(x-\alpha)}{h}} d\alpha. \quad (33)$$

Il suffit de s'arrêter au cas où

$$x < h.$$

En effet, quels que soient les nombres x et h , on peut toujours poser

$$x = ph + \xi,$$

p étant un entier (ou zéro), ξ étant un nombre positif plus petit que h .

Remplaçons, dans (33), la variable α par une nouvelle variable t en posant

$$\alpha = ph + t.$$

L'égalité (33) devient

$$2 S_n = \int_{\xi}^{\xi+h} f(t+ph) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi(\xi-t)}{h}}{\sin \frac{\pi(\xi-t)}{h}} dt. \quad (33_1)$$

C'est une intégrale de la même forme que celle de (33), mais ici ξ est plus petit que h .

Supposant donc que

$$0 < x < h,$$

écrivons l'intégrale de l'égalité (33) sous la forme

$$\int_x^{x+h} = \int_x^h + \int_h^{x+h} \quad (34)$$

et posons

$$\frac{\pi(\alpha - x)}{h} = t.$$

On trouve

$$\int_x^h f(\alpha) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi(x-\alpha)}{h}}{\sin \frac{\pi(x-\alpha)}{h}} d\alpha = \frac{h}{\pi} \int_0^{\pi-\beta} f\left(x + \frac{th}{\pi}\right) \frac{\sin 2(n+1)t}{\sin t} dt, \quad (35)$$

où, en vertu de l'hypothèse faite au sujet de h et x ,

$$\beta = \frac{\pi x}{h} < \pi.$$

Remplaçons ensuite, dans la seconde intégrale du second membre de l'égalité (34), la variable α par la variable t en posant

$$t = \frac{\alpha \pi}{h} - \pi.$$

On obtient

$$\int_h^{x+h} f(\alpha) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi(x-\alpha)}{h}}{\sin \frac{\pi(x-\alpha)}{h}} d\alpha = -\frac{h}{\pi} \int_0^\beta f\left(h + \frac{ht}{\pi}\right) \frac{\sin 2(n+1)(t-\beta)}{\sin(t-\beta)} dt. \quad (36)$$

Il est évident que chacune des intégrales (35) et (36) satisfait à toutes les conditions du théorème général, indiqué par M. JORDAN dans le T. II, n.º 221, de son *Cours d'Analyse* (Paris, 1894).

Remarquant que

$$G = \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi-\beta} \frac{\sin 2(n+1)t}{t} dt = \lim_{n=\infty} \int_0^\beta \frac{\sin 2(n+1)(t-\beta)}{t-\beta} dt = \frac{\pi}{2}$$

et appliquant au cas considéré le théorème de M. JORDAN, on s'assure que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+h} f(\alpha) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi(x-\alpha)}{h}}{\sin \frac{\pi(x-\alpha)}{h}} d\alpha = \\ &= \frac{h}{4} (f(x+0) - f(x+h-0)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f(x+0) - f(x+h-0) = \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-\alpha)}{h} d\alpha. \quad (A')$$

9. L'analyse précédente suppose que x , ou, plus généralement, ξ dans la formule (33₁) soit différent de zéro.

Mais il est aisé de s'assurer que cette restriction n'a rien d'essentiel.

Posons, en effet, dans (33₁), $\xi = 0$.

On trouve

$$2S_n = \int_0^h f(t+ph) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi t}{h}}{\sin \frac{\pi t}{h}} dt. \quad (37)$$

Écrivons cette intégrale sous la forme

$$\int_0^h = \int_0^\beta + \int_\beta^h, \quad (38)$$

β étant un nombre compris entre 0 et h .

Il est évident que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\beta f(t+ph) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi t}{h}}{\sin \frac{\pi t}{h}} dt = \frac{h}{2} f(ph+0) = f(x+0) \frac{h}{2}.$$

D'autre part la seconde intégrale du second membre de l'égalité, à l'aide de la substitution

$$t = h - \xi,$$

se réduit à

$$\int_{h-\beta}^0 f(ph+h-\zeta) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi\zeta}{h}}{\sin \frac{\pi\zeta}{h}} d\zeta = - \int_0^{h-\beta} f(ph+h-\zeta) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi\zeta}{h}}{\sin \frac{\pi\zeta}{h}} d\zeta.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\beta}^h = - \frac{h}{2} f(ph+h-0) = - \frac{h}{2} f(x+h-0).$$

Donc, en vertu de (37) et (38),

$$f(x+0) - f(x+h-0) = \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-\alpha)}{h} d\alpha.$$

C'est précisément la formule (A').

Donc, la formule (A') a lieu pour toutes les valeurs réelles et positives (zéro y compris) de x , quelle que soit la fonction $f(x)$ assujettie à la seule condition d'être à variation bornée dans l'intervalle $(x, x+h)$.

Il est évident, enfin, que la restriction que $x > 0$ n'a rien d'essentiel et que la formule (A') subsiste toujours, quelle que soit la valeur réelle de x .

II.

10. Montrons maintenant que la formule obtenue (A') présente en effet une origine commune de la plupart de formules les plus importantes de l'Analyse, parmi lesquelles je citerai, par exemple, celles d'Euler, de Poisson et de Lagrange-Fourier (concernant la théorie des séries trigonométriques).

Indiquons tout d'abord une transformation simple de la formule (A').

L'analyse précédente montre qu'il existe toujours un entier $n = n_0$ tel qu'on ait (*)

$$\left| f(x+0) - f(x+h-0) - \frac{4}{h} S_n \right| < \varepsilon \quad \text{pour } n \geq n_0, \quad (39)$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

(*) On désigne, comme précédemment, par S_n la somme

$$\sum_{k=0}^n \int_x^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-\alpha)}{h} d\alpha.$$

Remplaçons, dans cette inégalité, la fonction $f(x)$ par

$$f(x) \cos \frac{\pi(x-x)}{h},$$

ce qui est évidemment possible, car cette fonction est à variation bornée dans l'intervalle $(x, x+h)$.

L'inégalité (39) devient

$$\left| f(x+0) + f(x+h-0) - \frac{4}{h} S'_n \right| < \varepsilon \quad \text{pour } n \geq n_0, \quad (40)$$

où l'on a posé maintenant

$$S'_n = \sum_{k=0}^n \int_x^{x+h} f(x) \cos \frac{\pi(x-x)}{h} \cos \frac{(2k+1)\pi(x-x)}{h} d x.$$

En se rappelant que

$$\sum_{k=0}^n \cos \xi \cos (2k+1)\xi = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2k\xi + \cos 2(n+1)\xi,$$

on peut présenter la somme S'_n sous la forme

$$S'_n = \frac{1}{2} \int_x^{x+h} f(x) d x + \sum_{k=1}^n \int_x^{x+h} f(x) \cos \frac{2k\pi(x-x)}{h} d x + \\ + \int_x^{x+h} f(x) \cos \frac{2(n+1)\pi(x-x)}{h} d x.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$T_n = \frac{1}{2} \int_x^{x+h} f(x) d x + \sum_{k=1}^n \int_x^{x+h} f(x) \cos \frac{2k\pi(x-x)}{h} d x,$$

$$A_n = \int_x^{x+h} f(x) \cos \frac{2(n+1)\pi(x-x)}{h} d x.$$

L'inégalité (40) s'écrira

$$\left| f(x+0) + f(x+h-0) - \frac{4}{h} T_n \right| < \varepsilon + |A_n| \quad \text{pour } n \geq n_0. \quad (41)$$

Or, $f(\alpha)$ étant, par l'hypothèse, une fonction à variation bornée, on a

$$|A_n| < \frac{H}{n+1},$$

H étant un nombre fixe.

Il s'ensuit qu'il existe un entier n_0 tel qu'on ait

$$|A_n| < \varepsilon \text{ pour } n \geq n_0. \quad (42)$$

Le nombre n_0 étant choisi de la manière indiquée, on aura, en vertu de (41) et (42),

$$\left| f(x+0) + f(x+h-0) - \frac{4}{h} T_n \right| < 2\varepsilon \text{ pour } n \geq n_0,$$

ce qui conduit à l'égalité

$$\left. \begin{aligned} f(x+0) + f(x+h-0) &= \frac{2}{h} \int_x^{x+h} f(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{x+h} f(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} (B')$$

11. Supposons maintenant que $f(\alpha)$ soit une fonction à variation bornée dans l'intervalle $(x, x+nh)$, n désignant un entier quelconque.

Remplaçons dans (A') x par $x+(j-1)h$, j étant un entier plus petit ou égal à n .

Il viendra

$$\begin{aligned} f(x+(j-1)h+0) - f(x+jh-0) &= \\ &= (-1)^{j-1} \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x+(j-1)h}^{x+jh} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned}$$

Donnant à j toutes les valeurs entières à partir de $j=1$ jusqu'à $j=n$, multipliant les équations ainsi obtenues par $(-1)^{j-1}$ ($j=1, 2, \dots, n$) et additionnant les résultats, on arrive à la formule

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} (f(x+jh+0) + f(x+jh-0)) &= \\ &= f(x+0) + (-1)^{n-1} f(x+nh-0) - \\ &- \frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{x+nh} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} (A'_1)$$

Si nous supposons, en particulier, que $f(x)$ soit continue, cette formule deviendra

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} f(x+jh) &= \frac{1}{2} \left(f(x) + (-1)^n f(x+nh) \right) - \\ &\quad - \frac{2}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{x+nh} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (A_1)$$

Le même procédé, appliqué à la formule (B'), nous conduira à la suivante

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \left(f(x+jh+0) + f(x+jh-0) \right) &= \\ &= - \left(f(x+nh-0) + f(x+0) \right) + \frac{2}{h} \int_x^{x+nh} f(\alpha) d\alpha + \\ &\quad + \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{x+nh} f(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (B'_1)$$

Cette formule présente une généralisation de la formule de Poisson et se réduit à celle-ci, si nous supposons que $f(\alpha)$ soit une fonction continue, à savoir

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} f(x+jh) &= - \frac{1}{2} \left(f(x+nh) + f(x) \right) + \frac{1}{h} \int_x^{x+nh} f(\alpha) d\alpha + \\ &\quad + \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{x+nh} f(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (B_1)$$

12. Supposons que $f(x)$ soit une fonction à variation bornée pour toutes les valeurs de α et que $f(x)$ tende vers zéro pour $\alpha = \infty$ (α restant toujours positif).

Les formules (A'), (A₁), (B'₁) et (B₁) ont lieu quel que soit l'entier n . Considérons, par exemple, la formule (A').

Posons

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{x+nh} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \quad (43)$$

Faisons n tendre vers l'infini et supposons que la série

$$\frac{h}{4} f(x+0) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \left(f(x+jh+0) + f(x+jh-0) \right) \frac{h}{4}$$

converge.

Désignons par S sa somme.

On trouve, en tenant compte de (43) et de (A'),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S. \tag{44}$$

Supposons encore que la fonction $f(x)$ soit telle que l'intégrale

$$H_k = \int_x^{\infty} f(x) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-x)}{h} dx$$

ait un sens bien déterminé et qu'il existe un nombre A , assez grand, et un autre δ , assez petit, ne dépendant pas de k et tels qu'on ait

$$|H_k| < \delta \quad \text{pour } x > A. \tag{45}$$

Supposons, enfin, que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{\infty} f(x) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-x)}{h} dx$$

converge et désignons sa somme par σ .

Posons

$$\sigma_{\mu,n} = \sum_{k=0}^{\mu} \int_x^{x+nh} f(x) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-x)}{h} dx,$$

$$\sigma_{\mu} = \sum_{k=0}^{\mu} \int_x^{\infty} f(x) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-x)}{h} dx,$$

μ désignant un entier.

D'après les hypothèses faites plus haut, on peut trouver un nombre $\mu = \mu_0$ tel qu'on ait à la fois

$$|\sigma_{\mu_0} - \sigma| < \varepsilon, \quad |\sigma_{\mu_0,n} - \sigma_n| < \varepsilon, \tag{46}$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Considérons la différence

$$\sigma_{\mu_0 n} - \sigma_{\mu_0} = \sum_{k=0}^{\mu_0} \int_{x+nh}^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha.$$

En entendant par μ_0 un nombre fixe choisi de la manière que les inégalités (46) soient satisfaites à la fois, on peut toujours trouver un entier $n = n_0$, assez grand, tel qu'on ait

$$x + nh > A \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

On aura alors, en ayant égard à (45),

$$|\sigma_{\mu_0 n} - \sigma_{\mu_0}| < (\mu_0 + 1) \delta = \eta \quad \text{pour } n \geq n_0,$$

η étant un nombre positif s'annulant en même temps que δ .

Cette inégalité et celles de (46) conduisent à la suivante

$$|\sigma_n - \sigma| < 2\varepsilon + \eta \quad \text{pour } n \geq n_0,$$

d'où l'on conclut, en tenant compte de (44),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma = S,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{x+nh} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha.$$

Cette égalité étant établie, on tire de la formule (A₁), en y faisant n tendre vers l'infini et en tenant compte des hypothèses faites plus haut,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \left(f(x+jh+0) + f(x+jh-0) \right) - f(x+0) = \\ = -\frac{4}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}'_2)$$

Si $f(\alpha)$ est une fonction continue, on aura

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} f(x+jh) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{2}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \quad (\text{A}_2)$$

13. Appliquant les mêmes raisonnements à la formule (B₁), nous obtiendrons la formule suivante

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left(f(x+jh+0) + f(x+jh-0) \right) &= -f(x+0) + \frac{2}{h} \int_x^{\infty} f(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha \end{aligned} \right\} (B'_2)$$

et, si la fonction $f(\alpha)$ est continue,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} f(x+jh) &= -\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{h} \int_x^{\infty} f(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} (B_2)$$

Les formules obtenues (B₂) et (B₂') ont lieu sous les mêmes hypothèses que celles de (A₂') et (A₂).

Les formules (A₂') et (B₂') conduisent encore aux suivantes

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(f(x+(2k+1)h+0) + f(x+(2k+1)h-0) \right) &= \frac{1}{h} \int_x^{\infty} f(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha \end{aligned} \right\} (C)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(f(x+2kh+0) + f(x+2kh-0) \right) &= -f(x+0) + \frac{1}{h} \int_x^{\infty} f(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha \end{aligned} \right\} (C')$$

se réduisant à

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(x+(2k+1)h) = \frac{1}{2h} \int_x^{\infty} f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha \quad (C_1)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f(x + 2k h) = -\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2h} \int_x^{\infty} f(\alpha) d\alpha + \\ + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{\infty} f(\alpha) \cos \frac{k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (C_1)$$

si la fonction $f(\alpha)$ est continue.

Les formules, obtenues aux n.ºs 10-13 et ne présentant que des transformations simples d'une seule formule fondamentale (A'), contiennent comme des cas particuliers celles de Poisson et de Dirichlet et sont susceptibles de plusieurs applications importantes.

14. Il est aisé de comprendre maintenant que la formule (A) conduit aussi à la formule sommatoire d'Euler.

Supposant, en effet, que la fonction $f(\alpha)$ admette les dérivées de divers ordres, posons

$$\frac{d^s f(\alpha)}{d\alpha^s} = f^{(s)}(\alpha).$$

Désignons par K_s l'intégrale

$$K_s = \int_x^b f^{(s)}(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha, \quad b = x + nh.$$

On trouve

$$K_{2(m-1)} = \left(\frac{h}{2k\pi}\right)^2 \left(f^{(2m-1)}(b) - f^{(2m-1)}(x) - K_{2m}\right).$$

Moyennant cette formule récurrente on trouve

$$\begin{aligned} K_0 &= \int_x^{x+nh} f(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha = \\ &= \sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} \left(\frac{h}{2k\pi}\right)^{2s} \left(f^{(2s-1)}(b) - f^{(2s-1)}(x)\right) + (-1)^m \left(\frac{h}{2k\pi}\right)^{2m} K_{2m}. \end{aligned}$$

Substituant cette expression de K_0 dans la formule (B₁), on obtient

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} f(x+jh) = -\frac{1}{2} \left(f(x+nh) + f(x)\right) + \frac{1}{h} \int_x^{x+nh} f(\alpha) d\alpha + \\ + \frac{2}{h} \sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} A_s \left(f^{(2s-1)}(x+nh) - f^{(2s-1)}(x)\right) + R_m, \end{aligned} \right\} \quad (\varepsilon)$$

où l'on a posé

$$A_s = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}},$$

$$R_m = (-1)^m 2 h^{2m-1} \int_x^{x+nh} f^{(2m)}(\alpha) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h}}{(2k\pi)^{2m}} \right) d\alpha.$$

C'est la formule célèbre d'Euler avec l'expression du reste R_m , donnée par Poisson.

La formule (ε) contient les nombres définis par les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2s}} \tag{47}$$

et les fonctions de ξ définies par les séries infinies

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k\pi\xi}{h}}{(2k\pi)^{2s}}. \tag{48}$$

On sait, depuis EULER, que les nombres (47) sont des nombres rationnels et que les séries (48) sont égales aux polynomes en ξ .

Nous verrons plus loin que ces propositions classiques résultent immédiatement de la même formule fondamentale (A) qui nous a conduit à la formule (ε) d'Euler.

15. Si nous appliquons les transformations du n.º précédent à la formule (A_1), nous obtiendrons une autre formule, analogue à celle d'EULER, à savoir

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} f(x+jh) &= \frac{1}{2} \left(f(x) + (-1)^{n-1} f(x+nh) \right) - \\ &- \frac{2}{h} \sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} A'_s \left(f^{(2s-1)}(x+nh) - f^{(2s-1)}(x) \right) + R'_m, \end{aligned} \right\} \tag{\varepsilon'}$$

où l'on a posé

$$A'_s = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{2s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2s}},$$

$$R'_m = (-1)^{m+1} 2 h^{2m-1} \int_x^{x+nh} f^{(2m)}(\alpha) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h}}{[(2k+1)\pi]^{2m}} \right) d\alpha.$$

La formule (ε') peut avoir certaines applications intéressantes analogues à celles de la formule d'Euler.

Les nombres A'_k , et les fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1) \frac{\pi \xi}{h}}{[(2k+1)\pi]^{2m}}$$

sont de même rationnels, ce qui résulte immédiatement de la formule fondamentale (A_1) qui nous a conduit à la formule (ε).

On pourrait obtenir d'autres formules analogues à celles de (ε) et (ε'), mais nous n'insistons pas sur ce point.

16. Montrons maintenant que la théorie générale des séries trigonométriques, créée par LAGRANGE (*) et FOURIER, résulte aussi comme une application de la formule fondamentale (A') [ou (B')].

Soit $f(x)$ une fonction à variation bornée, complètement déterminée dans un intervalle donné $(0, h)$ ($\lambda > 0$).

Formons la fonction $\varphi(x)$ définie dans l'intervalle $(0, 2h)$ par les conditions

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= f(x), \\ \varphi(x+h) &= f(x). \end{aligned} \right\} 0 < x < h \quad (49)$$

Écrivons l'intégrale

$$H_k = \int_x^{x+h} \varphi(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha \quad (50)$$

sous la forme

$$\begin{aligned} H_k &= \int_x^h + \int_h^{x+h} = \int_x^h \varphi(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha + \\ &+ \int_0^x \varphi(\alpha+h) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned}$$

On trouve, en ayant égard à (49),

$$H_k = \int_0^h f(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \quad (51)$$

(*) *Mécanique Analytique*, T. II.

Appliquons maintenant la formule (B') à la fonction $\varphi(\alpha)$, en entendant par x une valeur de α comprise entre 0 et h .

En remarquant que, en vertu de (49),

$$\varphi(x+h-0) = \varphi(x-0), \quad \varphi(x+0) = f(x+0)$$

et

$$\int_x^{x+h} \varphi(\alpha) d\alpha = \int_x^h + \int_h^{x+h} = \int_0^h f(\alpha) d\alpha,$$

on obtient, en ayant égard à (50) et (51),

$$f(x+0) + f(x-0) = \frac{2}{h} \int_0^h f(\alpha) d\alpha + \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^h f(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha$$

ou

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi x}{h} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{h} \right), \quad (52)$$

où l'on a posé

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{h} \int_0^h f(\alpha) d\alpha, & a_k &= \frac{2}{h} \int_0^h f(\alpha) \cos \frac{2k\pi\alpha}{h} d\alpha, \\ b_k &= \frac{2}{h} \int_0^h f(\alpha) \sin \frac{2k\pi\alpha}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

On retrouve ainsi le théorème classique sur le développement d'une fonction arbitraire en série de FOURIER (LAGRANGE) sous la forme générale indiquée par M. JORDAN.

La formule (52) serait en défaut, si x était égal à l'une des limites 0 ou h .

Mais il est aisé de calculer la somme de la série (52) dans ces cas limites moyennant la même formule (B'), qui donne

$$\begin{aligned} \varphi(x+h-0) + \varphi(x+0) &= \frac{2}{h} \int_x^{x+h} \varphi(\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{x+h} \varphi(\alpha) \cos \frac{2k\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned}$$

Cette formule reste vraie, comme nous l'avons montré plus haut, pour toutes les valeurs réelles de x .

Il suffit de poser dans l'égalité précédente $x = 0$, pour arriver, à l'aide de (49), à la formule

$$\frac{f(h-0) + f(0+0)}{2} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Or, le second membre de cette égalité représente la valeur de la série (52) pour $x = 0$ qui est ainsi déterminée.

On arrivera de la même manière au même résultat pour $x = h$.

Si nous supposons, en particulier, que $f(x)$ soit une fonction continue, la formule (52) deviendra

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi x}{h} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{h} \right).$$

Dans ce cas la série du second membre de cette égalité converge *uniformément* dans l'intervalle $(0, h)$.

17. Nous avons obtenu le résultat précédent en prenant pour le point de départ la formule (B').

Nous arriverons à un autre développement, qui présente aussi un certain intérêt, si nous transformons de la manière analogue à la précédente la formule fondamentale (A').

La fonction à variation bornée $f(x)$ étant déterminée dans l'intervalle $(0, h)$, formons la fonction $\varphi(x)$ définie dans l'intervalle $(0, 2h)$ par les conditions

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= f(x), \\ \varphi(x+h) &= -f(x). \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < h \quad (54)$$

Considérons l'intégrale

$$G_k = \int_x^{x+h} \varphi(x) \cos \frac{(2k+1)\pi(x-x)}{h} d\alpha.$$

On trouve, en tenant compte de (54),

$$\left. \begin{aligned} G_k &= \int_x^h + \int_h^{x+h} = \int_x^h f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha - \\ &\quad - \int_0^x f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha+h-x)}{h} d\alpha = \\ &= \int_0^h f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi(\alpha-x)}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Appliquons maintenant la formule (A') à la fonction $\varphi(\alpha)$ qui est évidemment une fonction à variation bornée.

On trouve tout de suite, en vertu de (54) et (55),

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{h} + \beta_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{h} \right), \quad (56)$$

où l'on a posé

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2}{h} \int_0^h f(\alpha) \cos \frac{(2k+1)\pi \alpha}{h} d\alpha, \\ \beta_k &= \frac{2}{h} \int_0^h f(\alpha) \sin \frac{(2k+1)\pi \alpha}{h} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

On arrive ainsi à une nouvelle forme du développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques.

La formule (56) reste vraie pour toute valeur de x , comprise entre 0 et h , mais devient, en général, illusoire pour les valeurs limites de $x=0$ et de $x=h$.

Or, la somme de la série (56) se détermine aisément pour ces dernières valeurs de x à l'aide de la formule (A') appliquée à la fonction $\varphi(\alpha)$, si l'on y fait $x=0$ ou $x=h$.

On trouve, par exemple, pour $x=0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = f(0+0) - f(h-0).$$

Or, le premier membre de cette égalité représente évidemment la valeur de la série (56) pour $x=0$ qui se trouve ainsi déterminée.

Nous obtiendrons de la même manière le même résultat pour $x=h$.

18. Le développement (56) mérite une attention particulière. Il présente une transformation de la série qui figure dans le second membre de l'égalité (A') et telle qui ne change pas la loi de sa convergence.

Donc, toutes les fois que la série (A') converge absolument, il en sera de même de la série (56).

Or, nous avons dit au n.º 7 que la série de la formule (A') converge *absolument*, si la fonction continue $f(\alpha)$ satisfait à la condition (31).

On arrive ainsi à cette proposition :

Toute fonction $f(x)$ susceptible de la forme

$$f(x) = \int_0^x \varphi(\xi) d\xi + C,$$

$\varphi(\xi)$ étant une fonction quelconque intégrable dans l'intervalle $(0, h)$, C étant une constante, se développe, dans l'intervalle $(0, h)$, en série trigonométrique de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{h} + \beta_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{h} \right)$$

qui converge non seulement uniformément mais encore absolument.

19. Remarquons, enfin, que la formule célèbre de Fourier

$$\frac{\pi}{2} \left(f(x+0) + f(x-0) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_0^{\infty} f(\alpha) \cos t(\alpha-x) dt, \quad (58)$$

qui s'en déduit d'ordinaire du développement de la fonction $f(x)$ en série trigonométrique, trouve aussi son origine dans la formule (A').

En effet, écrivons la formule (A') sous la forme

$$f(x+0) - f(x+h-0) = \frac{2}{h} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{x+h} f(\alpha) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi(\alpha-x)}{h}}{\sin \frac{\pi(\alpha-x)}{h}} d\alpha. \quad (59)$$

En remplaçant $x+h$ par x , on trouve encore

$$f(x-0) - f(x-h+0) = \frac{2}{h} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-h}^x f(\alpha) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi(\alpha-x)}{h}}{\sin \frac{\pi(\alpha-x)}{h}} d\alpha. \quad (59_1)$$

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ soit définie pour toutes les valeurs réelles de x et qu'elle satisfasse à toutes les conditions connues, suffisantes pour l'exactitude de la formule (58) de FOURIER (Voir à cet égard C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, T. II, Paris, 1894).

Supposant que h et n tendent vers l'infini et en appliquant à l'intégrale

$$\frac{2}{h} \int_x^{x+h} f(\alpha) \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi(\alpha-x)}{h}}{\sin \frac{\pi(\alpha-x)}{h}} d\alpha$$

les transformations usuelles (Voir C. JORDAN, loc. cit.), on arrive à la formule

$$\pi f(x+0) = 2 \int_x^\infty d\alpha \int_0^\infty f(\alpha) \cos t(\alpha-x) dt. \quad (60)$$

Les mêmes transformations de la formule (59,) conduisent à l'égalité de la forme

$$\pi f(x-0) = 2 \int_{-\infty}^x d\alpha \int_0^\infty f(\alpha) \cos t(\alpha-x) dt. \quad (61)$$

La formule (A') conduit ainsi à deux formules (60) et (61) qui déterminent séparément les expressions

$$f(x+0) \text{ et } f(x-0)$$

sous la forme des intégrales définies doubles.

La formule (58) de Fourier n'est que la somme de celles-ci.

20. Il est aisé de comprendre que les formules (52) et (56), soumises aux transformations analogues aux précédentes, conduisent aux formules analogues à celle de FOURIER.

On obtient, par exemple, à l'aide de (52),

$$\pi \left(f(x+0) + f(x-0) \right) = 2 \int_0^\infty f(\alpha) d\alpha \int_0^\infty \cos t(\alpha-x) dt, \quad (62)$$

la formule qui subsiste pour toutes les valeurs positives de x , sauf pour $x=0$.

Si $f(x)$ est une fonction continue, les formules (60), (61) et (62), convenablement combinées, conduisent aux autres représentations de la fonction $f(x)$ à l'aide des intégrales définies, parmi lesquelles nous signalons, sans entrer en des détails, les suivantes

$$\begin{aligned} \pi f(x) &= \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty f(\alpha) \cos t(\alpha-x) dt = 2 \int_0^x d\alpha \int_0^\infty f(\alpha) \cos t(\alpha-x) d\alpha = \\ &= 2 \int_x^\infty d\alpha \int_0^\infty f(\alpha) \cos t(\alpha-x) dt. \end{aligned}$$

Ces relations subsistent pour les valeurs positives de x , différentes de zéro.

III.

21. Nous avons montré que les diverses formules sommatoires, analogues à celles de POISSON-DIRICHLET, d'EULER-MACLAURIN, la théorie des séries trigonométriques, la formule de FOURIER et les autres formules que nous avons indiquées plus haut, ont leur origine commune dans une seule formule générale (A').

Passons aux autres applications de cette formule, en faisant diverses suppositions particulières au sujet de la fonction $f(x)$ qui restait jusqu'à présent arbitraire.

Ces applications, peut-être non moins intéressantes, sont, comme nous l'avons déjà dit, très nombreuses.

Ne croyant pas possible d'augmenter considérablement les dimensions de ce travail, nous nous contentons, dans ce dernier Chapitre, d'indiquer brièvement quelques résultats sans reproduire l'analyse détaillée.

22. Appliquons tout d'abord la formule (B₂) à la fonction

$$f(x) = \frac{\cos \beta x}{\xi^2 + x^2},$$

ξ et β étant des paramètres, en y faisant $x = 0$, $h = 1$.

On arrive aisément à la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta k}{\xi^2 + k^2} = \frac{\pi}{2\xi} \frac{e^{\xi(\beta-\pi)} + e^{-\xi(\beta-\pi)}}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}} - \frac{1}{2\xi^2} \quad (63)$$

pour $0 < \beta < 2\pi$, ou, plus généralement,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta k}{\xi^2 + k^2} = \frac{\pi}{2\xi} \frac{e^{\xi(\beta-\pi)} + e^{-\xi(\beta-\pi)}}{e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}} - \frac{1}{2\xi^2} + \frac{\pi}{2\xi} \sum_{k=1}^m (e^{-(\beta-2k\pi)\xi} - e^{(\beta-2k\pi)\xi}) \quad (63_1)$$

pour

$$2\pi m < \beta < 2(m+1)\pi,$$

m étant un entier quelconque.

Remplaçant ξ^2 par ξ , on déduit de (63) par différentiation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta k}{(\xi + k^2)^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{d\xi^{p-1}} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\xi}} \frac{e^{(\beta-\pi)\sqrt{\xi}} + e^{-(\beta-\pi)\sqrt{\xi}}}{e^{\pi\sqrt{\xi}} - e^{-\pi\sqrt{\xi}}} - \frac{1}{2\xi} \right). \quad (64)$$

En intégrant (63) par rapport à β et en différentiant ensuite le résultat par rapport à ξ , on trouve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \beta}{k (\xi + k^2)^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{d\xi^{p-1}} \left(\frac{\pi}{2\xi} \frac{e^{(\beta-\pi)\sqrt{\xi}} - e^{-(\beta-\pi)\sqrt{\xi}}}{e^{\pi\sqrt{\xi}} - e^{-\pi\sqrt{\xi}}} - \frac{\beta - \pi}{2\xi} \right). \quad (64_1)$$

Nous avons ici une démonstration simple, ne dépendant pas de la théorie des séries trigonométriques, des formules générales (64) et (64₁) qui, dans le cas particulier de $\xi = 0$, se réduisent aux formules usuelles qu'on déduit ordinairement d'une manière beaucoup plus compliquée de la théorie des séries de FOURIER (Voir, par exemple, KRONECKER: *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale*, Leipzig, 1894, pp. 104-110).

Les propriétés fondamentales des nombres définis par les séries infinies

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2p}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2p+1}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2p}}$$

et des polynomes de Bernoulli

$$B_{2p}(\beta) \quad \text{et} \quad B_{2p+1}(\beta),$$

auxquels se ramènent les fonctions (64) et (64₁) pour $\xi = 0$, découlent sans peine des formules (64) et (64₁).

On pourrait déduire de ces formules un grand nombre des autres formules classiques, dûes principalement à EULER et CAUCHY, mais nous croyons inutile de nous en arrêter.

23. Si l'on fait, dans la même formule (B₂),

$$f(\alpha) = e^{-\xi\alpha} \cos \beta \alpha, \quad \xi > 0, \quad (65)$$

on arrive tout de suite à la formule

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\xi k} \cos k \beta &= -\frac{1}{2} + \frac{\xi}{\xi^2 + \beta^2} + \\ &+ \xi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi^2 + (\beta + 2k\pi)^2} + \frac{1}{\xi^2 + (\beta - 2k\pi)^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Faisant ensuite, dans (B₂),

$$f(\alpha) = e^{-\xi\alpha} \sin \beta \alpha, \quad (65_1)$$

on obtient de la même manière

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\xi k} \sin k \beta = \frac{\beta}{\xi^2 + \beta^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k\pi + \beta}{\xi^2 + (2k\pi + \beta)^2} - \frac{2k\pi - \beta}{\xi^2 + (2k\pi - \beta)^2} \right). \quad (67)$$

Nous avons, dans ces formules bien connues, *un exemple de transformation d'une série infinie en une autre à l'aide de la formule (B₂)*.

24. Si nous appliquons aux fonctions (65) et (65₁) la formule fondamentale (A), nous obtiendrons, après quelques transformations simples, les formules

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1 - e^{-2\xi}}{1 + 2e^{-\xi} \cos \beta + e^{-2\xi}} = \\ & = 2\xi \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi^2 + \left((2k+1)\pi + \beta \right)^2} + \frac{1}{\xi^2 + \left((2k+1)\pi - \beta \right)^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

et

$$\left. \begin{aligned} & \frac{e^{-\xi} \sin \beta}{1 + 2e^{-\xi} \cos \beta + e^{-2\xi}} = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(2k+1)\pi - \beta}{\xi^2 + \left((2k+1)\pi - \beta \right)^2} - \frac{(2k+1)\pi + \beta}{\xi^2 + \left((2k+1)\pi + \beta \right)^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

dont la première se rencontre presque dans tous les traités du Calcul infinitésimal, la seconde est moins usuelle, mais non moins importante.

Ces formules conduisent à un grand nombre d'autres formules souvent employées dans l'Analyse, mais nous ne pouvons pas entrer ici dans ces détails.

Remarquons seulement, pour un exemple, qu'elles se transforment d'une manière fort simple en suivantes

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{m\beta} - e^{-m\beta}}{e^{\pi m} - e^{-\pi m}} \cos m \xi \, d m = \frac{\sin \beta}{e^{\xi} + e^{-\xi} + 2 \cos \beta},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{m\beta} + e^{-m\beta}}{e^{\pi m} - e^{-\pi m}} \sin m \xi \, d m = \frac{1}{2} \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi} + 2 \cos \beta}.$$

D'autre part, si nous multiplions les mêmes formules respectivement par $\cos m \xi \, d \xi$ et $\sin m \xi \, d \xi$

et intégrons les résultats entre les limites 0 et $+\infty$, nous obtiendrons

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos m \xi}{e^{\xi} + e^{-\xi} + 2 \cos \beta} \, d \xi = \frac{\pi}{2 \sin \beta} \frac{e^{m\beta} - e^{-m\beta}}{e^{\pi m} - e^{-\pi m}},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi} + 2 \cos \beta} \sin m \xi \, d \xi = \pi \frac{e^{m\beta} + e^{-m\beta}}{e^{\pi m} - e^{-\pi m}}.$$

25. Appliquons encore la formule (B₁) (n.^o 11) à la fonction

$$f(x) = e^{-bx} \left(\frac{1}{2} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax} - 2 \cos \beta} - \frac{a x}{a^2 x^2 + \beta^2} \right), \quad (\alpha)$$

a et b étant des constantes positives, β étant une quantité comprise entre 0 et 2π .

Si

$$a > 0, \quad b > 0, \quad 0 \leq \beta < 2\pi,$$

nous arriverons à la formule

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k \beta}{e^{b+ka} - 1} &= \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{e^{b+ax} - 1} dx + \\ &+ \frac{1}{2(e^b - 1)} + \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^b + e^{-b} - 2 \cos ax} \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{e^{2\pi x} - 1} dx. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Si

$$\beta > 0,$$

nous aurons

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k \beta}{e^{b+ka} - 1} = \frac{1}{2(e^b - 1)} + \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^b + e^{-b} - 2 \cos ax} \frac{e^{(\beta-\pi)x} + e^{-(\beta-\pi)x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx. \quad (71)$$

Les formules (70) et (71) présentent les nouveaux exemples de la transformation des séries infinies en intégrales définies et inversement.

La série

$$P(a, b, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k \beta}{e^{b+ka} - 1}$$

représente une *généralisation de la série célèbre de Lambert* jouissant un rôle important dans la théorie des nombres et se réduit à celle-ci, si l'on pose

$$b = a, \quad \beta = 0.$$

Dans ce cas on arrive à cette expression de la série de LAMBERT à l'aide de l'intégrale définie

$$\begin{aligned} P(a, a, 0) = P(a) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ka} - 1} = \frac{1}{2(e^a - 1)} - \frac{1}{a} \log(1 - e^{-a}) + \\ &+ 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^a + e^{-a} - 2 \cos ax} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1}. \end{aligned}$$

Remarquons que la formule connue de Schlämilch et Stieltjes

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ja} - 1} = \frac{1}{a} (C - \log a) + \frac{1}{4} + I_{\infty},$$

où

$$I_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (1 - \cos a n x) \left(\cotg \frac{ax}{2} - \frac{2}{ax} \right) \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1},$$

C est la constante d'EULER (MACHERONI), résulte aussi comme une simple transformation de la formule (B₁) appliquée à la fonction (z).

26. Si nous appliquons la formule (B₁) à la fonction α en y faisant

$$\beta = \pi,$$

nous arriverons, après quelques transformations élémentaires, à la formule

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{e^{ja} + 1} = \frac{1}{a} \log 2 - \frac{1}{a} \log (1 - e^{-an}) - \frac{1}{4} \frac{1 - e^{-na}}{1 + e^{-na}} - I'_n,$$

où

$$I'_n = \int_0^{\infty} (1 - \cos a n x) \left(\cotg \frac{ax}{2} - \frac{2}{ax} \right) \frac{dx}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}.$$

C'est une formule analogue à celle de Stieltjes concernant la série de Lambert.

Elle conduit, entre autres, à ce développement semi-convergent de seconde espèce

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^{ja} + 1} = \frac{1}{a} \log 2 - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{B_k^2 (2^{2k-1} - 1)}{2^j (2j)!} a^{2j-1} + R_n,$$

analogue au développement connu de la série de LAMBERT, dû par SCHLÖMILCH et STIELTJES (B_k étant les nombres de BERNOULLI).

27. Les formules (70) et (71) peuvent conduire aux autres développements des séries, qui figurent dans les premiers membres de ces égalités, à savoir à leurs développements en séries semi-convergentes de première espèce (analogues à la série de STIRLING) qui peuvent servir avec succès du calcul approché des séries en question pour les valeurs données de a , b et β .

Moyennant les formules, indiquées aux nos précédents, il est aisé d'établir, par exemple, la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} \frac{\sin ax}{e^b + e^{-b} - 2 \cos ax} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{B_j D_j}{(2j)!} a^{2j-1} + \frac{1}{2} R_n, \quad (72)$$

où

$$\frac{1}{2} R_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} (ka)^{2n+1} e^{-bk} \int_0^{\infty} \frac{x^{2n+1} \cos \theta k a x}{e^{2\pi x} - 1} dx, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$D_j = -\frac{d^{2j-1}}{db^{2j-1}} \left(\frac{1}{e^b - 1} \right).$$

Les D_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) sont les polynomes en

$$\xi = \frac{1}{e^b - 1}$$

de degré $2j$ de la forme

$$D_j = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_{2j} \xi^{2j},$$

où a_s ($s = 1, 2, \dots, 2j$) sont les nombres dont l'expression générale a été donnée par MALMSTEN (*Grunert's Archiv*, Bd. VI, p. 45).

Le calcul de D_j , pour chaque valeur donnée de b , ne présente pas de grandes difficultés, au moins pour les valeurs de j pas assez grandes.

Les formules (72) et (70) conduisent à une formule qui peut servir avec succès de calcul approché de la série

$$P(a, b, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{b+ka} - 1}, \quad (73)$$

surtout pour les valeurs de a assez petites et de celles de b assez grandes, car il est aisé de s'assurer que l'erreur commise, en faisant usage de la formule (72) pour calcul de la série (73), est toujours moindre en valeur absolue que le premier des termes négligés et cette erreur, pour les valeurs de n , ne surpassant pas une certaine limite σ , a le même signe que celui du terme négligé.

Cette formule s'applique au calcul approché de la série de Lambert; pour cela il suffit de poser

$$b = ma,$$

m étant un entier.

Si l'on pose, par exemple,

$$e^a = 16, \quad m = 10, \quad n = 1,$$

nous obtiendrons la valeur approchée de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{(m+k)a} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^{10+k} - 1} \quad (74)$$

avec une erreur moindre que

$$28 \cdot 10^{-14}.$$

Si l'on fait

$$e^a = 2, \quad n = 4,$$

l'erreur commise sera moindre que

$$122 \cdot 10^{-16}.$$

La somme de la série (74) étant ainsi calculée, il ne nous reste qu'à calculer avec l'approximation convenable la somme

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{e^{ka} - 1}$$

pour obtenir la somme de la série de LAMBERT avec approximation voulue.

Nous avons indiqué un exemple de l'application de la formule (70), mais il est aisé d'en déduire des autres en donnant diverses valeurs particulières à β .

De cette manière on arrive, par exemple, au *développement*

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-jb}}{e^{ja} + 1} = -\frac{1}{2(e^b - 1)} + \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{2^{2j} - 1}{(2j)!} B_j D_j a^{2j-1} + R'_n$$

ayant les mêmes propriétés que le développement précédent.

28. Appliquons la formule (A₁) à la fonction

$$f(\alpha) = e^{-x\alpha} \cos y \alpha \Phi\left(\frac{2\pi\alpha}{n}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{2\pi\alpha}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos \frac{2\pi j \alpha}{n}.$$

On arrive, après quelques transformations, aux formules

$$n \frac{e^{xn} - e^{-xn}}{e^{xn} - (-1)^n 2 \cos y n + e^{-xn}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 2 \cos\left(y + \frac{2\pi j}{n}\right) + e^{-x}}, \quad (75)$$

$$(-1)^{n+1} n \frac{\sin y n}{e^{xn} - (-1)^n 2 \cos y n + e^{-xn}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin\left(y + \frac{2\pi j}{n}\right)}{e^x + 2 \cos\left(y + \frac{2\pi j}{n}\right) + e^{-x}}. \quad (75_1)$$

Posons

$$F_1(x, y) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 2 \cos y}, \quad F_2(x, y) = \frac{\sin y}{e^x + e^{-x} + 2 \cos y}. \quad (76)$$

Les formules (75) et (75₁) conduisent tout de suite aux théorèmes de multiplication par un entier n des arguments x et y des fonctions (76), à savoir

$$n F_1(n x, n y) = \sum_{j=0}^{n-1} F_1\left(x, \pi - y + \frac{2j+1}{n} \pi\right), \quad (77)$$

$$- n F_2(n x, n y) = \sum_{j=0}^{n-1} F_2\left(x, \pi - y + \frac{2j+1}{n} \pi\right). \quad (77_1)$$

Ces formules sont susceptibles de plusieurs applications intéressantes et contiennent, comme des cas particuliers, diverses formules simples jouissant un rôle important dans l'Analyse.

Indiquons, comme un des exemples, les formules suivantes

$$\psi_1(n x, n y) = \prod_{j=0}^{n-1} \psi_1\left(x, y + \frac{2j}{n} \pi\right), \quad (78)$$

$$\psi_2(n x, n y) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\psi_2\left(x, y + \frac{2j}{n} \pi\right)}{\psi_2\left(x, \frac{2j}{n} \pi\right)}, \quad (78_1)$$

où

$$\psi_1(x, y) = \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos y}{2(1 - \cos y)},$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos y}{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}.$$

De ces formules résultent, comme des cas limites (pour $x = \infty$), les relations

$$\cos y n = 2^{n-1} \prod_{j=1}^n \sin\left(y + \frac{2j-1}{n} \pi\right),$$

$$\sin y n = 2^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} \sin\left(y + \frac{j}{n} \pi\right),$$

$$\cos y n = 2^{n-1} \prod_{j=1}^n \cos\left(y + \frac{2j}{n} \pi\right) \quad \text{pour } n \text{ impair,}$$

dont la dernière joue un rôle important dans la théorie de la division des angles et dans la théorie des résidus quadratiques.

29. Indiquons encore une application de la formule fondamentale (A) à la sommation de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^m k \beta}{k^n},$$

où m et n sont des entiers satisfaisant aux conditions

$$n \leq m, \quad m+n \text{ est un nombre pair.} \quad (\beta)$$

Posons dans la formule (C') (n.º 13),

$$x = 0, \quad h = 1, \quad f(x) = \frac{\sin^m \beta x}{x^n}.$$

Moyennant les formules

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2s x \cdot \sin^m x}{x^n} dx = 0, \quad \text{si } s > \frac{m}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2s x \cdot \sin^m x}{x^n} dx = (-1)^{\frac{m-n}{2}} \frac{\pi}{2^m \Gamma(n)} S_{n-1}, \quad \text{si } s < \frac{m}{2},$$

où

$$S_{n-1} = (m+2s)^{n-1} - \frac{m}{1} (m+2s-2)^{n-1} + \frac{m(m-1)}{2} (m+2s-4)^{n-1} - \dots, \quad (*)$$

nous obtiendrons ces formules:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^m k \beta}{k^n} = (-1)^{\frac{m-n}{2}} \frac{\pi}{2^{m-1} (n-1)!} \left(\frac{1}{2} P_{n-1}^{(m)}(\beta, 0) + \sum_{k=1}^{k_0} P_{n-1}^{(m)}(\beta, 2k\pi) \right), \quad (79)$$

si $n < m$, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^m k \beta}{k^n} = \frac{\pi}{2^{m-1} (m-1)!} \left(\frac{1}{2} P_{m-1}^{(m)}(\beta, 0) + \sum_{k=1}^{k_0} P_{m-1}^{(m)}(\beta, 2k\pi) \right) - \frac{\beta^m}{2}, \quad (79_1)$$

si $n = m$, où l'on a posé, en général,

$$P_{n-1}^{(m)}(x, y) = x^{n-1} \left(\left(m + \frac{y}{x} \right)^{n-1} - \frac{m}{1} \left(m - 2 + \frac{y}{x} \right)^{n-1} + \dots \right),$$

(*) Dans le second membre de cette égalité il faut conserver seulement les termes ne contenant que les puissances des quantités positives.

et k_0 désigne le plus grand entier contenu dans le nombre

$$\frac{m x}{2 \pi}.$$

Les formules (79) et (79₁) montrent que la série infinie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^m k \beta}{k^n}$$

représente toujours un polynôme en β de degré $n - 1$, si $n < m$, et ce de degré m , si $n = m$, quels que soient les nombres n et m satisfaisant aux conditions (β).

Ces formules générales sont susceptibles à plusieurs applications intéressantes.

Si nous supposons, par exemple, que $m = n$ et que m et n soient des nombres pairs et $\beta = 0$, nous obtiendrons la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^n}$$

et, puis, après quelques transformations simples, cette expression pour nombre de Bernoulli B_p

$$B_p = \frac{2^p}{2^{2p} (2^{2p} - 1)} \left(2 K(p, 2p - 1) + 4 \sum_{k=1}^{k_0} K(p + 2k, 2p - 1) - (2p - 1)! \right),$$

où, en général,

$$K(x, n) = x^n - (n + 1)(x - 1)^n + \frac{(n + 1)n}{2!}(x - 2)^n - \dots (*).$$

Les nombres entiers

$$K(p, 2p - 1), \quad K(p + 2k, 2p - 1),$$

qui figurent dans le second membre de l'égalité précédente, sont analogues à ceux de BRINKLEY.

Donnant les autres valeurs particulières à β , nous obtiendrons diverses formules de la sommation de différentes séries numériques, par exemple, des séries

$$S_r^{(m)} = 1 + \frac{1}{2^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m} - \dots$$

(*) La série, x étant un entier, doit être prolongée seulement jusqu'au dernier des termes qui renferment des puissances des quantités positives.

et

$$S_2^{(m)} = 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} - \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} - \frac{1}{8^m} + \dots$$

et de plusieurs autres.

Si l'on pose, par exemple, $m = 3$, on aura

$$S_1^{(3)} = \pi^3 \frac{5}{3^4 \sqrt{3}}, \quad S_2^{(3)} = \pi^3 \frac{4}{3^4 \sqrt{3}}.$$

La demi-somme des séries

$$S_1^{(m)} \quad \text{et} \quad S_2^{(m)}$$

donnera la somme de la série célèbre d'Euler

$$1 - \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} - \frac{1}{11^m} + \frac{1}{13^m} - \dots$$

c'est-à-dire la somme de l'expression

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{5^m}\right) \left(1 - \frac{1}{7^m}\right) \left(1 - \frac{1}{11^m}\right) \dots}$$

qui joue un rôle important dans la théorie des nombres.

On aura, par exemple,

$$1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \dots = \frac{\pi^3}{2} \frac{1}{9 \sqrt{3}}.$$

30. *La théorie des fonctions Gamma d'Euler peut être déduite comme une application particulière des formules (A₁) et (B₁) du n.º 11, ou, ce qui revient au même, de la formule fondamentale (A).*

Pour cela il suffit de poser, dans (A₁) et (B₁),

$$f(x) = \log(\xi + x), \quad x = 0, \quad h = 1, \quad \xi > 0.$$

Dans ce cas on arrive sans peine aux formules suivantes

$$\left. \begin{aligned} \log \xi (\xi + 1) (\xi + 2) \dots (\xi + n) &= \left(n + \xi + \frac{1}{2}\right) \log(n + \xi) - \\ &\quad - \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \log \xi - n + \varphi(n + \xi) - \varphi(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

où

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi z}}{z} \left(\frac{1}{2} \frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} \right) dz, \quad (81)$$

et

$$2 \log \frac{(\xi+1)(\xi+3)\dots(\xi+2n-1)}{(\xi+2)(\xi+4)\dots(\xi+2n-2)} = \log \xi(\xi+2n) + \omega(\xi) - \omega(\xi+2n), \quad (80_1)$$

où

$$\omega(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi z} (1-e^{-z})}{z(1+e^{-z})} dz. \quad (81_1)$$

Remarquons que la seconde de ces formules peut être considérée comme une simple transformation de la première.

Donc la théorie des fonctions Gamma n'est qu'une conséquence d'une seule formule (80), fondamentale dans cette théorie.

La formule (80₁) conduit tout de suite à la formule de WALLIS; il suffit d'y poser $\xi = 1$, pour en déduire

$$\log \frac{[2 \cdot 4 \dots 2n]^2}{[3 \cdot 5 \dots (2n-1)]^2 (2n+1)} = \log \frac{\pi}{2} - \omega(2n+1),$$

en remarquant que

$$\omega(1) = \log \frac{\pi}{2}.$$

On obtient la formule de Wallis avec un terme complémentaire sous la forme d'une intégrale définie $\omega(2n+1)$ [voir (81₁)].

Si l'on fait, dans (80), $\xi = 1$, nous obtiendrons la formule

$$1 - \varphi(1) = \frac{1}{2} \log 2\pi,$$

c'est-à-dire la formule de Raabe.

Moyennant ces formules et en posant

$$\log \Gamma(\xi) = \varphi(\xi) - \xi + \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \log \xi + \frac{1}{2} \log 2\pi, \quad (82)$$

il est aisé de transformer la formule fondamentale (80) en la suivante

$$\log \Gamma(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{e^{-(n-1)} n^{n+\xi-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{\xi(\xi+1)\dots(\xi+n-1)}. \quad (83)$$

On arrive ainsi aux formules de Goudermann et de Gauss (83) et à la formule de Binet (82).

Nous avons supposé que $\xi > 0$ (ou que la partie réelle de ξ soit positive), mais il est aisé d'étendre la notion de la fonction $\varphi(\xi)$ ou, ce qui revient au même, de la fonction $\Gamma(\xi)$ à toutes les valeurs réelles ou complexes de la variable ξ .

Pour cela peut servir la même formule (80) qu'on peut prendre pour la définition de la fonction $\varphi(\xi)$, en donnant une définition déterminée pour logarithme et une valeur convenable à l'entier arbitraire n qui entre dans l'intégrale $\varphi(n + \xi)$.

La formule (83) peut être remplacée par la suivante

$$\log \Gamma(\xi) = \log \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot n^{n-1}}{\xi(\xi+1) \dots (\xi+n-1)} + R_n(\xi-1), \quad (84)$$

ou

$$R_n(\xi-1) = 1 - \xi + \left(n + \xi - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 - \frac{\xi-1}{n}\right) + \varphi(\xi-1+n) - \varphi(n). \quad (84_1)$$

On obtient la formule de Gauss, avec le terme complémentaire $R_n(\xi-1)$, comme une simple conséquence de la formule fondamentale (80).

Ces remarques suffisent pour faire comprendre que *tous les détails de la théorie générale de la fonction Gamma découlent en effet d'une seule formule (80) qui, de son côté, ne présente qu'une application particulière de la formule générale (A).*

31. Sans pouvoir reproduire ici toutes les conséquences de la formule (84), (84₁), je vais signaler seulement les développements semi-convergeants pour les parties réelle et imaginaire de la fonction

$$\log \Gamma(b + ia)$$

qui résultent de la formule dont il s'agit.

Si l'on pose

$$\log \Gamma(b + ia) = R(b, a) e^{i\theta(b, a)},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \log R(b, a) = & \frac{1}{2} \log 2\pi - (n+b) + \frac{1}{2} \left(n+b + \frac{1}{2}\right) \log \left(a^2 + (b+n)^2\right) - \\ & - a \cdot \operatorname{artg} \frac{a}{b+n} - \frac{1}{2} \log \theta_{n-1}(b, a) + \int_0^\infty e^{-(b+n)z} \cos az \cdot f(z) dz, \end{aligned}$$

$$\Theta(b, a) = \varepsilon \frac{\pi}{2} - a + \frac{a}{2} \log(a^2 + (b+n)^2) + \left(n + b + \frac{1}{2}\right) \operatorname{artg} \frac{a}{b+n} - \\ - \operatorname{artg} \frac{a}{b} - \operatorname{artg} \frac{a}{b+1} - \dots - \operatorname{artg} \frac{a}{b+n} - \int_0^\infty e^{-(b+n)z} \sin az \cdot f(z) dz,$$

où

$$\theta_n(b, a) = (a^2 + b^2)(a^2 + (b+1)^2) \dots (a^2 + (b+n-1)^2),$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{2} \frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} \right),$$

$$\varepsilon = 0, \text{ si } b > 0 \text{ et } \varepsilon = 1, \text{ si } b < 0.$$

Pour le cas de $b=0$ ces formules se réduisent à celles de Stieltjes (Annales de l'École Normale, 1886).

Dans le cas général on obtient les développements semi-convergents de la nature de la série de Stirling, à savoir

$$\log R(b, a) = \frac{1}{2} \log 2\pi - \lambda + \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \log(a^2 + \lambda^2) - a \cdot \operatorname{artg} \frac{a}{\lambda} - \\ - \frac{1}{2} \log \Theta_{n+1}(b, a) + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1) 2k (a^2 + \lambda^2)^{\frac{2k-1}{2}}} S_{2k-1}(x) + R_m, \quad (85)$$

$$\Theta(b, a) = \varepsilon \frac{\pi}{2} - a + \frac{a}{2} \log(a^2 + \lambda^2) + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \operatorname{artg} \frac{a}{\lambda} - \operatorname{artg} \frac{a}{b} - \\ - \operatorname{artg} \frac{a}{b+1} - \dots - \operatorname{artg} \frac{a}{\lambda} - \\ - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_k}{(2k-1) 2k (a^2 + \lambda^2)^{\frac{2k-1}{2}}} S_{2k-1}(y) - R'_m, \quad (85_1)$$

où

$$x = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}, \quad y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}, \quad \lambda = b + n,$$

$S_{2k-1}(x)$ sont des polynomes appartenant aux polynomes de TCHÉBICHEFF, à

savoir les polynomes de JACOBI dont les nombres caractéristiques α et β sont égales à $\frac{1}{2}$ et qui se déduisent de la formule d'EULER-LAGRANGE

$$\cos 2k\varphi = (-1)^k \left(1 - \frac{2^2 k \cdot k}{2!} \cos^2 \varphi + \frac{2^4 k(k+1)k(k-1)}{4!} \cos^4 \varphi - \dots \right. \\ \left. + (-1)^k 2^{2k-1} \cos^{2k} \varphi \right).$$

Les restes R_m et R'_m ont les expressions suivantes

$$R_m = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \theta_m z^{2m-2} \cos a z dz,$$

$$R'_m = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \theta_m z^{2m-2} \sin a z dz.$$

Les formules (85) et (85₁) fournissent un moyen commode du calcul approché de $\log R(b, a)$ et $\Theta(b, a)$ pour les valeurs données de b et de a (*).

32. La formule (80) conduit aussi à la théorie des fonctions Gamma d'ordre supérieur, c'est-à-dire des fonctions qui portent aujourd'hui le nom des fonctions de Kinkelin.

Il suffit d'intégrer successivement la formule (80) par rapport à ξ entre les limites 1 et ξ , pour en déduire une suite de formules analogues qui jouissent par rapport aux fonctions

$$\Gamma_1(\xi), \Gamma_2(\xi), \dots, \Gamma_\lambda(\xi)$$

le même rôle que la formule primitive (80) par rapport à la fonction Gamma d'EULER qui peut être appelée *fonction Gamma de l'ordre zéro* [$\Gamma_0(\xi)$].

On peut aussi déduire ces formules directement des formules générales (A₁) et (B₁) en y faisant

$$f(x) = (\xi + \alpha)^\lambda \log(\xi + \alpha),$$

λ étant un entier.

Nous obtiendrons ainsi les formules tout à fait analogues à celles de (80) et (80₁) jouissant le même rôle dans la théorie des fonctions $\Gamma_\lambda(\xi)$ que les formules (80) et (80₁) dans la théorie des fonctions Euleriennes.

(*) On peut supposer d'ailleurs que $b < 1$, $a > 0$.

Toutes les propriétés des fonctions $\Gamma_\lambda(\xi)$ se déduisent de ces formules à l'aide de transformations identiques à celles que nous venons d'appliquer aux formules (80) et (80₁) pour en déduire la théorie des fonctions $\Gamma_0(\xi)$, et l'analogie complète entre les fonctions $\Gamma_\lambda(\xi)$ et les fonctions Euleriennes se manifeste dans toute la clarté.

Les dimensions de ce Mémoire ne nous permettent pas de développer l'analyse correspondante et nous nous bornerons ici par les remarques sommaires que nous venons de faire.

33. Comme une autre application de la formule (80), nous indiquerons les formules d'interpolation du produit

$$\prod_{k=0}^n (\xi + k)$$

pour les valeurs assez grandes de n .

On obtient aisément, moyennant quelques formules indiquées plus haut, les inégalités

$$\prod_{k=0}^n (\xi + k) < \frac{\sqrt{2\pi} (\xi + n)^{\xi+n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\xi) e^{\xi+n}} e^{\frac{1}{12(\xi+n)}},$$

$$\prod_{k=0}^n (\xi + k) > \frac{\sqrt{2\pi} (\xi + n)^{\xi+n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\xi) e^{\xi+n}} e^{\frac{1}{12(\xi+n)} - \frac{1}{360(\xi+n)^3}},$$

analogues mais beaucoup plus commodes que celles qui ont été établies dans un de mes travaux antérieurs par un procédé plus compliqué (Voir aussi I. IVANOFF, *Communications de la Société Mathém. de Kharkov*, 1889).

34. Remarquons enfin que la différentiation de l'égalité (80) peut conduire à la théorie des fonctions analogues à la fonction $\xi(p)$ de Riemann ainsi qu'à la théorie de cette dernière fonction, mais nous n'aborderons pas ici cette question en nous bornant à la remarque faite.

35. Faisons dans la formule (B_2) (n.º 13)

$$f(\alpha) = \frac{e^{-u\alpha} \cos v\alpha}{(\xi + \alpha)^p},$$

supposant d'abord que

$$v \geq 0, \text{ la partie réelle de } u \geq 0, \xi > 0,$$

et que la partie réelle de $p > 0$, si au moins l'une des quantités u et v est différente de zéro, et que la partie réelle de $p > 1$, si $u = v = 0$.

Dans ce cas toutes les conditions du n.º 12 sont satisfaites et la formule (B_2) conduit, après quelques transformations simples, à la suivante

$$F(u, v, \xi, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-uk} \cos vk}{(\xi + k)^p} = -\frac{1}{2\xi^p} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-u\alpha} \cos v\alpha}{(\xi + \alpha)^p} d\alpha + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-\xi z} z^{p-1} \left(\frac{1}{2} \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} - \frac{t}{t^2 + v^2} \right) dz, \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

où

$$t = u + z.$$

Cette formule est susceptible de plusieurs applications dont nous allons indiquer brièvement quelques-unes les plus intéressantes.

Faisant, dans (86), $u = v = 0$, on trouve

$$\zeta(\xi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi + k)^p} = \frac{1}{2\xi^p} + \frac{1}{(p-1)\xi^{p-1}} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-\xi z} z^p f(z) dz, \quad (87)$$

d'où l'on tire ensuite

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(\xi + k)^p} = \frac{(n + \xi)^{1-p} - \xi^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{2(n + \xi)^p} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2\xi^p} + \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\psi_1(\xi) - \psi_p(n + \xi) \right), \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

$$\psi_p(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi z} z^{p-2} \left(\frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} - 1 \right) dz,$$

n étant un entier arbitraire.

La formule (87) peut être considérée comme un cas limite de (88) pour $n = \infty$ et peut s'écrire

$$\zeta(\xi, p) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(\xi + k)^p} + \frac{1}{(p-1)(n + \xi)^{p-1}} - \frac{1}{2(n + \xi)^p} - \frac{1}{\Gamma(p)} \psi_p(\xi + n). \quad (89)$$

Cette formule subsiste pour toutes les valeurs positives de p .

La formule (87) se transforme aisément en la suivante

$$\zeta(\xi, p) = \frac{1}{2\xi^p} + \frac{1}{(p-1)\xi^{p-1}} + 2 \int_0^{\infty} (x^2 + \xi^2)^{-\frac{p}{2}} \sin \left(p \operatorname{arctg} \frac{x}{\xi} \right) \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1}. \quad (90)$$

L'intégrale du second membre de cette égalité représente une fonction de p uniforme dans tout le plan de la variable p , si l'on suppose au moins que ξ soit réel et positif, n'ayant qu'un seul point critique $p = 1$ qui est un pôle simple.

La fonction $\zeta(\xi, p)$, définie ainsi par l'équation (90), représente une généralisation de la fonction $\zeta(p)$ de Riemann et se réduit à celle-ci pour $\xi = 1$.

Les formules (87), (88), (89) et (90) permettent de démontrer plusieurs propriétés importantes de la fonction $\zeta(\xi, p)$ et, en particulier, de la fonction $\zeta(p)$ de Riemann.

La formule (90) se ramène, pour $\xi = 1$, à la formule déduite par M. E. LINDELÖF par un procédé tout à fait différent dans son Mémoire *Sur une formule sommatoire générale* (Acta societatis scienciarum Fennicae, T. XXXI, N. 3).

La formule (89) conduit aisément à ce développement de $\zeta(\xi, p)$ en série semi-convergente ayant toutes les propriétés de la série de Stirling

$$\zeta(\xi, p) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(\xi+k)^p} + \frac{1}{(p-1)(\xi+n)^{p-1}} - \frac{1}{2(\xi+n)^p} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(p+2k-1)}{\Gamma(p)\Gamma(2k-1)} \frac{B_k}{(\xi+n)^{p+2k-1}} + R_m,$$

où

$$R_m = (-1)^m \frac{B_m}{\Gamma(p)\Gamma(2m-1)} \int_0^{\infty} \theta_m e^{-(\xi+n)z} z^{p+2m-2} dz.$$

Pour $p > 1$ cette formule coïncide avec celle qui se trouve dans l'Ouvrage de M. A. MARKOFF: *Calcul des différences finies* (Odessa, 1911, en russe).

Pour $\xi = 1$ on retrouve le développement de la fonction de Riemann $\zeta(p)$ obtenu par M. Lindelöf dans son Mémoire cité plus haut par un procédé différent.

Quelques applications intéressantes de cette série au calcul numérique des valeurs de la fonction $\zeta(p)$ pour

$$p = \frac{1}{2} + ia$$

le lecteur trouvera dans le Mémoire de M. LINDELÖF tout à l'heure cité.

La formule (88) ne perd pas son sens même pour $p = 1$ et conduit aux

formules

$$C(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\xi + k} - \log(n + \xi) \right) = \int_0^{\infty} e^{-\xi z} \left(\frac{1}{1 - e^{-z}} - \frac{e^{-(1-\xi)z}}{z} \right) dz,$$

$$C(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\xi + k} - \log(n + \xi) - \frac{1}{2(n + \xi)} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2k(\xi + n)^{2k}} + R_m(\xi),$$

$$R_m(\xi) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!} \int_0^{\infty} \theta_m e^{-(\xi+n)z} z^{2m-1} dz, \quad 0 < \theta_m < 1.$$

Faisant $\xi = 1$, on retrouve l'expression de la constante d'Euler sous la forme de l'intégrale définie et le développement de cette constante en série de Stirling.

36. Considérons encore le cas particulier où

$$v = 0, \quad u > 0, \quad p = 1.$$

La formule (86) peut alors être transformée en la suivante

$$li e^{-x} = \log \left(1 - e^{-\frac{x}{n}} \right) + e^{-\frac{x}{n}} + \frac{e^{-2\frac{x}{n}}}{2} + \dots + \frac{e^{-(n-1)\frac{x}{n}}}{n-1} + \frac{e^{-x}}{2n} + \rho_n,$$

$$\rho_n = e^{-x} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2k \cdot n^{2k}} (e^x)_{2k-1} + e^{-x} R_m,$$

$$R_m = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!} \int_0^{\infty} e^{-\xi z} \theta_m (u+z)^{2m-1} dz, \quad (e^x)_{2k-1} = \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{x^j}{j!},$$

où l'on désigne par $li e^{-x}$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{-x} \frac{e^x}{x} dx.$$

De cette formule on peut déduire sans difficulté le développement connu

$$li e^{-x} = C + \log x + \sum_{s=1}^{\infty} (-1) \frac{s x^s}{s \cdot s!} \quad (91)$$

dû à Euler.

D'autre part, elle représente un développement de la fonction $li e^{-x}$ en série semi-convergente de même nature que celle de Stirling.

Elle peut s'écrire aussi

$$\int_0^q \frac{dt}{\log t} = \log(1 - \sqrt[n]{q}) + \sqrt[n]{q} + \frac{(\sqrt[n]{q})^2}{2} + \dots + \frac{(\sqrt[n]{q})^{n-1}}{n-1} + \frac{q}{2n} + \left. \begin{aligned} &+ q \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2k \cdot n^{2k}} (e^{-\log q})_{2k-1} + R'_m, \quad q = e^{-\frac{x}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

et peut servir avec succès du calcul approché de l'intégrale

$$\int_0^q \frac{dt}{\log t}.$$

Si l'on pose, par exemple,

$$q = e^{-5}, \quad \text{c'est-à-dire } x = 5,$$

il faudrait calculer non moins que vingt-cinq termes de la série (91) pour arriver au même degré d'exactitude que fournit la formule (92) pour

$$n = 10 \quad \text{et} \quad m = 7.$$

Faisant, pour un autre exemple,

$$q = 2^{-10}, \quad m = 3, \quad n = 10$$

on arrive sans de grandes difficultés à cette formule approchée

$$\int_0^{2^{-10}} \frac{dt}{\log t} = 0,024826402 \dots$$

avec huit décimales exactes.

37. Pour une autre application de la formule (86) considérons le cas de $u = 0, v > 0$.

Désignant par $B_k(v)$ l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{2k-1} \frac{e^{(\pi-v)x} + e^{-(\pi-v)x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx$$

on arrive, après quelques transformations élémentaires, au développement

$$F(0, v, \xi, p) = -\frac{1}{2\xi^p} + \frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(p+2k-1)}{\Gamma(2k)} \frac{B_k(v)}{\xi^{2k+p-1}} + R_m$$

qui a toutes les propriétés de série de Stirling et fournit un moyen commode de calcul numérique de la série (86) pour les valeurs données de v , p et ξ ($\xi > 1$).

Si l'on fait, en particulier, $v = \pi$, $p = 1$, nous obtiendrons le développement de $\log 2$; pour $v = \frac{\pi}{2}$, $p = 1$, on arrive au développement de $\frac{\pi}{4}$; ces développements, contenant une constante arbitraire ξ , sont très commodes pour calcul numérique de $\frac{\pi}{4}$ et $\log 2$.

Donnant des autres valeurs à v et p , on déduit de la formule précédente plusieurs autres séries semi-convergentes qui peuvent servir avec succès de calcul numérique de plusieurs séries infinies.

Si l'on fait, par exemple, $v = \pi$, $p = 3$, il suffit de poser $m = 4$, $\xi = 10$ pour en déduire

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots = 0,901542677\dots$$

avec neuf décimales exactes.

Faisant ensuite $p = \frac{1}{2}$, $\xi = 4$, $m = 3$, nous trouverons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+4}} = -0,23464625\dots$$

avec huit décimales exactes, et ainsi de suite.

Dans le cas général, où u et v sont tous les deux différents de zéro, la formule (86) conduit à la suivante

$$F(u, v, \xi, p) = -\frac{1}{2\xi^p} + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{B_k(v)}{\xi^{p+2k-1}} E_{2k-1}(u\xi) + R_m,$$

où

$$E_{2k-1}(u\xi) = \sum_{s=0}^{2k-1} \frac{p(p+1)\dots(p+2k-s-2)(u\xi)^s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2k-s-1) s!},$$

contenant comme des cas particuliers les développements indiqués plus haut.

38. Les résultats analogues s'obtiennent, si nous appliquons la for-

mule (B₂) à la fonction

$$f(\alpha) = \frac{e^{-u\alpha} \sin v\alpha}{(\xi + \alpha)^2}.$$

On arrive ainsi à la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\alpha} \sin kv}{(\xi + k)^2} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{C_{2k}(v)}{\xi^{v+2k}} E_{2k}(u\xi) + R_m,$$

où

$$C_{2k}(v) = \int_0^{\infty} x^{2k} \frac{e^{(\pi-v)x} - e^{-(\pi-v)x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx,$$

ayant les mêmes applications que la formule analogue du n.^o précédent.

39. Remarquons, en passant, que l'étude de ces divers développements et des intégrales définies, qui y entrent, nous conduit, entre autres, à ces formules

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \log(1 - 2x \cos v + x^2) &= -x \cos v - \frac{x^2 \cos 2v}{2} - \dots - \\ &- \frac{x^{n-1} \cos v (n-1)}{n-1} + x^n \int_0^{\infty} e^{-nz} \frac{\cos v n + x e^{-z} \cos v (n-1)}{1 - 2x e^{-z} \cos v + x^2 e^{-2z}} dz, \end{aligned} \right\} (93)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{x \sin v}{1 - x \cos v} &= x \sin v + \frac{x^2 \sin 2v}{2} + \dots + \frac{x^{n-1} \sin v (n-1)}{n-1} + \\ &+ x^n \int_0^{\infty} e^{-nz} \frac{\sin v n - x e^{-z} \sin v (n-1)}{1 - 2x e^{-z} \cos v + x^2 e^{-2z}} dz, \end{aligned} \right\} (93_1)$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de x .

Pour $|x| \leq 1$, on retrouve ainsi les développements connus avec les termes complémentaires sous la forme des intégrales définies qui figurent dans les seconds membres des égalités précédentes.

Ces intégrales peuvent être développées en séries semi-convergentes de même nature que celle de Stirling: les formules (93) et (93₁) se ramènent alors aux formules très commodes pour calcul approché de fonctions, qui figurent dans leurs premiers membres, pour les valeurs données de x et de v .

Ne pouvant pas entrer dans des détails, je me bornerai à un exemple particulier le plus simple.

Si l'on fait $v = \frac{n}{2}$, $n = 2m - 1$, on arrive à la formule

$$\begin{aligned} \operatorname{artg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m-3}}{2m-3} + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m-1}}{2(2m-1)} + \\ + (-1)^{m+1} x^{2m-1} \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} (2^{2k} - 1) B_k}{2k(2m-1)^{2k}} (e^{u(2m-1)})_{2k-1} + R_p, \end{aligned}$$

qui fournit un moyen commode de calcul de $\operatorname{artg} x$ pour les valeurs assez voisines de 1, lorsque la série de MACLAURIN converge peu rapidement.

Posant, par exemple,

$$x = \frac{5}{6}, \quad m = 10, \quad p = 4,$$

on obtient, en effectuant le calcul,

$$\operatorname{artg} \frac{5}{6} = 0,68887336 \dots$$

avec au moins sept décimales exactes.

Pour arriver au même résultat à l'aide du développement de $\operatorname{artg} \frac{5}{6}$ en série de MACLAURIN, il faudrait prendre non moins que 35 premiers termes de ce développement.

40. Pour expliquer mieux la variété des applications de nos formules générales, j'indiquerai une conséquence d'une autre espèce de la formule (86).

Écrivons-la sous la forme

$$F(u, v, \xi, p) = -\frac{1}{2\xi^p} + \frac{1}{2\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-\xi z} z^{p-1} \Phi_1(u+z, v) dz,$$

où

$$\Phi_1(u+z, v) = \frac{e^{u+z} - e^{-(u+z)}}{e^{u+z} + e^{-(u+z)} - 2 \cos v}.$$

Si nous remplaçons maintenant $u+z$ et v respectivement par $n(u+z)$ et nv , n étant un entier, et tenons compte des formules établies au n.º 28, nous obtiendrons, après quelques transformations simples,

$$F(nu, nv, \xi, p) = n^{p-1} \sum_{j=0}^{n-1} F\left(u, v + \frac{2\pi j}{n}, \xi n, p\right),$$

c'est-à-dire le théorème de multiplication par un entier n des arguments u et v de la fonction définie par la série infinie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ku} \cos kv}{(\xi + k)^p}.$$

Si l'on pose, en particulier, $\xi = 0$, $u = 0$, on aura

$$F(0, nv, 0, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos knv}{k^p} = n^{p-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k \left(v + \frac{2\pi j}{n} \right)}{k^p}.$$

Si nous supposons encore que p soit un entier pair et remarquons que la fonction $F(0, v, 0, p)$ se ramène alors au polynôme B_{2p} de BERNOULLI, nous obtiendrons la formule

$$B_{2p}(nv) = n^{p-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_{2p} \left(v + \frac{2\pi j}{n} \right)$$

qui représente sous une forme nouvelle le théorème de multiplication par un entier de l'argument de la fonction de Bernoulli de l'ordre pair, établi pour la première fois par RAABE par un procédé tout à fait différent.

Si nous appliquons les mêmes transformations à la formule analogue à celle de (86) et correspondante à la fonction

$$f(x) = \frac{e^{-u\alpha} \sin v\alpha}{(\xi + \alpha)^p},$$

nous obtiendrons l'équation suivante

$$\Phi(nu, nv, \xi, p) = n^{p-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi \left(u, v + \frac{2\pi j}{n}, n\xi, p \right).$$

Si l'on pose, comme précédemment, $\xi = 0$, $u = 0$ et l'on suppose que p soit un entier impair, on aura

$$B_{2p-1}(v) = n^{p-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_{2p-1} \left(v + \frac{2\pi j}{n} \right),$$

c'est-à-dire le théorème de multiplication par un entier n de l'argument de la fonction de Bernoulli de l'ordre impair.

41. Posons maintenant, dans la formule (A_2) du n.º 12,

$$f(\alpha) = e^{-u\alpha^2} \cos v\alpha, \quad u > 0.$$

On arrive alors à ces formules

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-uk^2} \cos kv = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{[(2k+1)\pi+v]^2}{4u}} + e^{-\frac{[(2k+1)\pi-v]^2}{4u}} \right),$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-uk^2} \cos kv = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}} e^{-\frac{v^2}{u}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{[2k\pi+v]^2}{4u}} + e^{-\frac{[2k\pi-v]^2}{4u}} \right),$$

qui ont une connexion intime avec la théorie des fonctions elliptiques.

Pour $v = 0$, on trouve les formules

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-k^2 u} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4u}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 u} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k \pi^2}{u}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{u}},$$

dont la dernière présente la formule célèbre de Cauchy. Toutes ces formules peuvent avoir diverses applications importantes et conduisent, en particulier, à certaines expressions asymptotiques pour les séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} x^{(2k+1)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k^2}, \quad \text{etc.}$$

pour les valeurs de x assez voisines de l'unité.

On trouve, par exemple,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \sqrt{\pi(1-x)} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\log \frac{1}{x}}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{\log \frac{1}{x}}} + \theta,$$

θ étant une quantité assez petite (Comparez CÉSARO, *Lehrbuch der algebraischen Analysis*, etc. Leipzig, 1904, pag. 283).

Pour les valeurs de x très voisines de l'unité, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} \equiv -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}.$$

On s'assurera de même que la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k^2}$$

diffère très peu de $\frac{1}{2}$ pour les valeurs de x très voisines de l'unité.

On pourrait, moyennant les formules de ce n.º, déduire l'expression asymptotique de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-hk^2}}{hk},$$

dûe à M. N. SONINE, et de plusieurs autres, mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

42. Pour terminer, je vais indiquer encore *une application de nos formules générales à la sommation de certaines séries finies et, en particulier, à la sommation des séries célèbres de Gauss* qui jouent un rôle important dans la théorie des nombres.

Faisons, dans la formule (A) (n.º 11),

$$f(\alpha) = e^{i\alpha^2 \frac{2\pi}{n}}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad x = 0, \quad h = 1.$$

On trouve, pour n pair,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} e^{ik^2 \frac{2\pi}{n}} = 1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^n e^{i\alpha^2 \frac{2\pi}{n}} \cos(2k+1)\pi\alpha \, d\alpha$$

et, pour n impair,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} e^{ik^2 \frac{2\pi}{n}} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^n e^{i\alpha^2 \frac{2\pi}{n}} \cos(2k+1)\pi\alpha \, d\alpha.$$

Or, moyennant certaines formules de DIRICHLET on trouve

$$\int_0^n e^{i\alpha^2 \frac{2\pi}{n}} \cos 2(k+\xi)\pi\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} e^{-i \frac{(k+\xi)^2 n\pi}{2}} \int_{\frac{n}{2}-(k+\xi-2)}^{\frac{n}{2}-(k+\xi+2)} e^{i\alpha^2 \frac{2\pi}{n}} \, d\alpha,$$

quel que soit le nombre ξ .

A l'aide de cette formule, en y faisant $\xi = \frac{1}{2}$, on s'assure que, pour $n = 2m$,

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^n e^{i\alpha^2 \frac{2\pi}{n}} \cos(2k+1)\pi\alpha \, d\alpha = (1+i) \sqrt{2m} e^{-i \frac{\pi m}{4}}.$$

On arrive ainsi à cette équation

$$S = \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k e^{ik^2 \frac{\pi}{m}} = \sqrt{2m} (1+i) e^{-i \frac{\pi m}{4}}.$$

On en tire, par exemple,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \cos k^2 \frac{\pi}{m} = (-1)^\mu \sqrt{2m}, & \text{si } m &= 4\mu, \\ S_1 &= (-1)^\mu 2\sqrt{m}, & \text{si } m &= 4\mu + 1, \\ S_1 &= (-1)^\mu \sqrt{2m}, & \text{si } m &= 4\mu + 2, \\ S_1 &= 0, & \text{si } m &= 4\mu + 3, \end{aligned}$$

et les formules analogues pour la somme de la série

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^{k-1} \sin k^2 \frac{\pi}{m}.$$

Si nous supposons que $n = 2m + 1$ (impair), nous parviendrons de la même manière aux formules

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} \cos k^2 \frac{\pi}{2m+1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} \sin k^2 \frac{\pi}{2m+1} = 0.$$

Si nous prenons, au lieu de la formule (A₁), la formule (B₁), nous obtiendrons, de la manière tout à fait analogue à la précédente, les formules connues de la sommation des séries de Gauss

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos k^2 \frac{2\pi}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \sin k^2 \frac{2\pi}{n}.$$

43. Bien qu'il s'en faut de beaucoup que les exemples indiqués puissent épuiser le vaste champ de diverses applications de la formule fondamentale (A), établie dans le premier Chapitre, je me permets cependant de terminer ces recherches en croyant que ces exemples, déjà assez nombreux, sont suffisants pour faire comprendre la généralité et la portée de la formule en question et que le but principal de nos recherches est, en quelque sorte, atteint.

St. Pétersbourg, le 12 septembre 1912.

The range of minimal surfaces providing a minimum area.

(By Professor A. R. FORSYTH, à London.)

1. In an appendix to a Memoir that was published in the second volume of the *Miscellanea Taurinensia* a century and a half ago, LAGRANGE established the earliest fundamental result relating to minimal surfaces. He approached the problem through his calculus of variations; and he obtained the equation (*)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0,$$

the symbols having their customary significance for a surface with Cartesian coordinates. This equation, in its expanded form

$$(1+q^2)r - 2pq s + (1+p^2)t = 0,$$

is an analytical expression of the geometrical property characteristic of all minimal surfaces — that the mean measure of curvature is zero. LAGRANGE adds the constructive suggestion

... la solution générale doit être telle que le périmètre de la surface puisse être déterminé à volonté.

A full account of the development of the theory of minimal surfaces, which thus owes its analytical beginning to LAGRANGE, belongs to the history of mathematics; an interesting outline is given by DARBOUX (**). The most general form of the integral equations of minimal surfaces is due to WEIERSTRASS. The determination of minimal surfaces, in accordance with the LA-

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. I, p. 356.

(**) *Théorie générale des surfaces*, t. I, pp. 267-280.

GRANGE requirement just quoted, and including an added condition as to the position of the surface along the perimeter, has been effected by SCHWARZ. All such results centre round the characteristic zero value of the mean measure of curvature.

2. In the case of every geodesic curve upon any surface whatever, the geodesic property — that the principal normal of the curve coincides with the normal to the surface — is possessed, no matter how far the curve may be prolonged geodesically. But a question as to the continued prolongation arises, if the curve is required to provide an actual minimum distance between two points on its course; and tests, originating with JACOBI, have been devised which determine the limit (if any) to be imposed upon the range. Other tests, demanded by the calculus of variations, have to be satisfied; all of them are satisfied in fact, without further restrictions on the curve.

So also in the case of minimal surfaces, tests are required by the calculus of variations. One of them is the LAGRANGE equation, or its equivalent in any form; it is completely satisfied by the WEIERSTRASS equations for the general surface, and by the special equation or equations for any particular surface. The test through the excess-function (*) is satisfied for all minimal surfaces.

The remaining tests are concerned with the second variation of the integral representing the area. All of them, save one, are satisfied for all real minimal surfaces. That last test imposes a possible limit upon the position of a final boundary up to which a minimal surface, passing through an assigned initial boundary, may extend if it is to provide an actual minimum area in space between the two boundaries. So far as I am aware, this detail of the subject has received little consideration (**); the object of the present note is to determine a limit for the range of the surface (if any such limit exists) that is conjugate to any assigned perimeter on a minimal surface.

(*) Expressions for all the tests, concerned with a quite general double integral, are given in a Memoir by КОВВ, *Acta Math.*, t. XVI (1893), pp. 65-140. The tests are not developed for minimal surfaces in particular.

In this matter, reference may be made to my *Lectures on differential geometry* (1912), p. 272.

(**) A brief indication is given in §§ 167 and 188 of the *Lectures*, just quoted.

Further, an assigned « perimeter » may be a closed curve upon the surface; and then the conception of a conjugate is simple. But when an assigned « perimeter » is not a closed curve (as is the fact when we have a plane line of curvature on an algebraic surface of odd order), the conception of a conjugate is less simple; indeed, it is conceivable that only a portion of any such initial perimeter would be admissible as a boundary for an actual minimum area. This last question will, however, not be discussed in this note.

3. For the immediate purpose an elementary method, sketched in outline by DARBOUX (*), will be used and amplified.

Let a surface be referred to any parametric curves, having p and q for their parametric variables. Denote the direction-cosines of the normal by X , Y , Z ; the fundamental magnitudes of the first order by E , F , G , and those of the second order by L , M , N ; and the principal radii of curvature by α and β . Then the mean measure of curvature H , and the GAUSS measure of curvature K , at any point on the surface are given by the relations

$$H = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{V^2} (EN - 2FM + GL),$$

$$K = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{V^2} (LN - M^2),$$

where

$$V = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}.$$

It is convenient, temporarily, to choose the lines of curvature on the surface as parametric curves; as soon as they have served this temporary use, the surviving equations will be given in their quite general form. We therefore take $F=0$, $M=0$, in the initial analysis.

Let an arbitrary variable length l (supposed a regular function of p and q) be measured along the positive direction of the normal to the surface, which is supposed free from singularities in the vicinity. For the surface, derived as the locus of the extremity of this length l , denote by \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} , \bar{L} , \bar{M} , \bar{N} , with \bar{V} , the fundamental magnitudes of the first order and the second order.

(*) *Théorie générale des surfaces*, t. I, §§ 184-185.

Then (**) whatever be the length of l , we have

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \left(\frac{l-\beta}{\beta}\right)^2 E + l_1^2, \\ \bar{F} &= l_1 l_2, \\ \bar{G} &= \left(\frac{l-\alpha}{\alpha}\right)^2 G + l_2^2, \\ \bar{V}^2 &= \frac{E G}{\alpha^2 \beta^2} (l-\alpha)^2 (l-\beta)^2 + l_1^2 \left(\frac{l-\alpha}{\alpha}\right)^2 G + l_2^2 \left(\frac{l-\beta}{\beta}\right)^2 E, \\ \bar{V}\bar{L} &= l_{11} \frac{V}{\alpha \beta} (l-\alpha)(l-\beta) - l_1^2 \frac{V}{\alpha \beta} (2l-2\alpha) - \frac{E V}{\alpha \beta^3} (l-\alpha)(l-\beta)^2 \\ &\quad + l_1 \left(\frac{l \beta_1}{\beta^2} - \frac{E_1}{2E} \frac{l-\beta}{\beta}\right) \frac{l-\alpha}{\alpha} V + l_2 \left(\frac{l-\beta}{\beta}\right)^2 \frac{V E_2}{2G}, \\ \bar{V}\bar{M} &= l_{12} \frac{V}{\alpha \beta} (l-\alpha)(l-\beta) - l_1 l_2 \frac{V}{\alpha \beta} (2l-\alpha-\beta) \\ &\quad - l_1 \left(\frac{l-\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{V E_2}{2E} - l_2 \left(\frac{l-\beta}{\beta}\right)^2 \frac{V G_1}{2G}, \\ \bar{V}\bar{N} &= l_{22} \frac{V}{\alpha \beta} (l-\alpha)(l-\beta) - l_2^2 \frac{V}{\alpha \beta} (2l-2\beta) - \frac{G V}{\alpha^3 \beta} (l-\alpha)^2 (l-\beta) \\ &\quad + l_1 \left(\frac{l-\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{V G_1}{2E} + l_2 \left(\frac{l \alpha_2}{\alpha^2} - \frac{G_2}{2G} \frac{l-\alpha}{\alpha}\right) \frac{l-\beta}{\alpha} V. \end{aligned}$$

These expressions are used for two distinct aims, that ultimately coalesce; for both of them, the quantity l is regarded as small, so that we neglect all powers higher than those which are most significant in the various combinations of the magnitudes.

4. In the first place, consider the difference between the area of the original surface bounded by two curves represented by two distinct equations involving p and q , and the area of the derived surface bounded by two curves represented by the same equations. The value of the first area is $\iint V dp dq$, and the value of the second area is $\iint \bar{V} dp dq$, both double integrals extending over the indicated range of values of p and q ; hence the

(*) *Lectures*, § 85; the symbols l_1 and l_2 denote $\frac{\partial l}{\partial p}$ and $\frac{\partial l}{\partial q}$, and similarly for other magnitudes.

increment of area is

$$\iint (\bar{V} - V) d p d q.$$

Now, keeping l small, and retaining only the most significant powers of small quantities, we have

$$\begin{aligned} \bar{V}^2 &= V^2 \left\{ 1 - 2l \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + l^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{4}{\alpha\beta} \right) + \frac{l_1^2}{E} + \frac{l_2^2}{G} \right\} \\ &= V^2 \left\{ 1 - 2lH + l^2 (H^2 + 2K) + \frac{l_1^2}{E} + \frac{l_2^2}{G} \right\}, \end{aligned}$$

and therefore, to the same order, of small quantities,

$$\bar{V} = V \left\{ 1 - lH + \frac{1}{2} \left(2Kl^2 + \frac{l_1^2}{E} + \frac{l_2^2}{G} \right) \right\}.$$

Thus the increment of area is

$$- \iint l H V d p d q + \frac{1}{2} \iint \left(2Kl^2 + \frac{l_1^2}{E} + \frac{l_2^2}{G} \right) V d p d q.$$

Now suppose that the original surface is minimal, in the sense that, when small variations of any kind are effected subject to the limitations of boundary, the increment of area of the modified surface over the original surface is always positive. The quantity l is arbitrary, and the preceding expression is to be positive for non-vanishing values of l . Hence, by the usual argument in the calculus of variations, the « first variation » must vanish and the « second variation » must always be positive. In order that the first variation may vanish for all assumed values of l , we must have

$$H = 0,$$

everywhere on the original surface. This equation is equivalent to the LAGRANGE equation; it expresses the characteristic property of minimal surfaces, that the mean measure of curvature is zero. Thus $\alpha + \beta = 0$, so that $k, = -1/\alpha^2$, is negative; and so, denoting the second variation by S , we have

$$2S = \iint \left(-2 \frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{l_1^2}{E} + \frac{l_2^2}{G} \right) V d p d q.$$

5. In the second place, suppose that the original surface is minimal, so that $\alpha + \beta = 0$. Let λ denote the value of the small length l , when the derived surface also is minimal, so that we thus obtain a consecutive minimal surface; the necessary and sufficient condition is

$$\bar{E} \bar{N} - 2 \bar{F} \bar{M} + \bar{G} \bar{L} = 0.$$

For the derived surface, the expressions for E, F, G, L, \bar{M}, N (up to the most important powers) are

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E \left(1 - 2 \frac{\lambda}{\beta} \right), \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = G \left(1 - 2 \frac{\lambda}{\alpha} \right), \\ \bar{L} &= \frac{E V}{\beta} \left(1 - \frac{\lambda}{\beta} \right) + V \left(\lambda_{11} - \lambda_1 \frac{E_1}{2 E} + \lambda_2 \frac{E_2}{2 G} \right), \\ \bar{M} &= V \left(\lambda_{12} - \lambda_1 \frac{E_2}{2 E} - \lambda_2 \frac{G_1}{2 G} \right), \\ \bar{N} &= \frac{G V}{\alpha} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha} \right) + V \left(\lambda_{22} + \lambda_1 \frac{G_1}{2 E} - \lambda_2 \frac{G_2}{2 G} \right). \end{aligned}$$

In order that the derived surface may be minimal, the foregoing relation must be satisfied when these values are substituted. Retaining only the most important terms, we find that λ must satisfy the equation

$$E \lambda_{22} + G \lambda_{11} + \lambda_1 \left(\frac{1}{2} G_1 - \frac{1}{2} E_1 \right) + \lambda_2 \left(\frac{1}{2} E_2 - \frac{1}{2} G_2 \right) + 2 \frac{V^2}{\alpha^2} \lambda = 0,$$

in order that the derived surface may be minimal.

6. Now we return to the use of quite general parametric curves, no longer imposing the restriction that they are lines of curvature. The characteristic equation becomes

$$E N - 2 F M + G L = 0.$$

The expression for the second variation of the area of the original surface, now supposed minimal, becomes

$$2 S = \iint \left\{ 2 K l^2 + \frac{1}{V^2} (E l_2^2 - 2 F l_1 l_2 + G l_1^2) \right\} V d p d q.$$

The equation to be satisfied by the quantity λ , so that the consecutive sur-

face derived from the original minimal surface may itself be minimal, becomes

$$E \lambda_{22} - 2 F \lambda_{12} + G \lambda_{11} \\ - (E \Gamma'' - 2 F \Gamma' + G \Gamma) \lambda_1 - (E \Delta'' - 2 F \Delta' + G \Delta) \lambda_2 + 2 \frac{V^2}{\alpha^2} \lambda = 0,$$

where the quantities $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Delta, \Delta', \Delta''$ are given by the relations

$$E \Gamma + F \Delta = \frac{1}{2} E_1, \quad F \Gamma + G \Delta = F_1 - \frac{1}{2} E_2, \\ E \Gamma' + F \Delta' = \frac{1}{2} E_2, \quad F \Gamma' + G \Delta' = \frac{1}{2} G_1, \\ E \Gamma'' + F \Delta'' = F_2 - \frac{1}{2} G_1, \quad F \Gamma'' + G \Delta'' = \frac{1}{2} G_2.$$

We proceed to deal with these two equations relating to S and λ .

To simplify the discussion, we shall assume that the minimal surface is required to pass through some initial assigned perimeter (which, by the theory of partial differential equations, must not be a nul line) and that it is required to touch an assigned developable surface along that perimeter. It is known that these requirements determine a minimal surface uniquely. Also for simplicity, we assume that, on the surface thus determined, some other fixed curve is taken at will as the final perimeter. Hence, when we take small variations of the surface of any kind whatever, subject to the limiting conditions, the quantity l must vanish along the initial perimeter and along the final perimeter. Moreover, we need only consider weak variations, that is, values of l such that l_1 and l_2 are of the same order of small quantity as l ; the excess-function, which governs strong variations, is (as already stated) positive, so that its particular test is always satisfied.

7. Consider the second variation of the area of the minimal surface. To discuss whether, and how, it can be always positive, we shall find it convenient to modify the expression for S . The value of the double integral

$$\iint \left\{ \frac{\partial}{\partial p} (A l^2) + \frac{\partial}{\partial q} (B l^2) \right\} d p d q,$$

taken over the same range of the variables as in the area of the minimal surface, is zero because l vanishes along each of the boundaries; it being

assumed that the functions A and B have no singularities along either of the boundaries, and that otherwise they are at our disposal. Adding this double integral to the double integral for $2S$, we have

$$2S = \iint \bar{U} \, d p \, d q,$$

where

$$\bar{U} = \frac{1}{\bar{V}} (E l_2^2 - 2 F l_1 l_2 + G l_1^2) + l^2 \left(A_1 + B_2 - 2 \frac{V}{\alpha^2} \right) + 2 A U_1 + 2 B U_2.$$

This quantity \bar{U} can be expressed in the form

$$\bar{U} = \frac{1}{\bar{V}} \left\{ E \left(l_2 - \frac{\mu_2}{\mu} l \right)^2 - 2 F \left(l_1 - \frac{\mu_1}{\mu} l \right) \left(l_2 - \frac{\mu_2}{\mu} l \right) + G \left(l_1 - \frac{\mu_1}{\mu} l \right)^2 \right\},$$

provided the disposable quantities μ , A , B satisfy the relations

$$A = \frac{F}{\bar{V}} \frac{\mu^2}{\mu} - \frac{G}{\bar{V}} \frac{\mu_1}{\mu},$$

$$B = -\frac{E}{\bar{V}} \frac{\mu^2}{\mu} + \frac{F}{\bar{V}} \frac{\mu_1}{\mu},$$

$$A_1 + B_2 - 2 \frac{V}{\alpha^2} = \frac{E}{\bar{V}} \frac{\mu_2^2}{\mu^2} - 2 \frac{F}{\bar{V}} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu^2} + \frac{G}{\bar{V}} \frac{\mu_1^2}{\mu^2}.$$

Manifestly A and B can be regarded as known when μ is known. To determine μ , we eliminate A and B between the three relations; and we find the equation for μ in the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{F}{\bar{V}} \frac{\mu^2}{\mu} - \frac{G}{\bar{V}} \frac{\mu_1}{\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{E}{\bar{V}} \frac{\mu^2}{\mu} + \frac{F}{\bar{V}} \frac{\mu_1}{\mu} \right) - 2 \frac{V}{\alpha^2} \\ = \frac{E}{\bar{V}} \frac{\mu_2^2}{\mu^2} - 2 F \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu^2} + G \frac{\mu_1^2}{\mu^2}, \end{aligned}$$

that is,

$$\begin{aligned} E \mu_{22} - 2 F \mu_{12} + G \mu_{11} \\ - (E \Gamma'' - 2 F \Gamma' + G \Gamma) \mu_1 - (E \Delta'' - 2 F \Delta' + G \Delta) \mu_2 + 2 \frac{V^2}{\alpha^2} \mu = 0. \end{aligned}$$

This partial differential equation of the second order for μ is precisely

the same as the equation for λ , the short distance measured along the normal to the minimal surface so as to derive a consecutive minimal surface. Accordingly, we can write $\mu = \lambda$; and then we have

$$2S = \iint \left\{ E \left(l_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda} l \right)^2 - 2F \left(l_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} l \right) \left(l_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda} l \right) + G \left(l_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} l \right)^2 \right\} \frac{dp dq}{V}.$$

Because $E > 0$, $G > 0$, $V = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} > 0$, the subject of integration is always positive for real surfaces, unless it should be possible that the quantities

$$l_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} l, \quad l_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda} l,$$

should vanish everywhere in the considered range, that is, unless it should be possible that the relation

$$l = c \lambda$$

(where c is a pure constant) should hold everywhere in the considered range. The relation certainly holds at the initial boundary, because both l and λ vanish there. If, therefore, after the initial boundary, and either at or before the final boundary, the quantity λ could again vanish, we could take

$$l = c \lambda$$

over the range between the initial boundary and the next curve where λ vanishes; and then, for the remainder of the range, we could take both l and λ zero. In that event, we could have a zero value for S ; the second variation would vanish. Putting aside the rare possibility that, for such values of l , the neglected third variation also would vanish and that the fourth variation would be positive, we can declare generally that, in the case supposed, the integral representing the area of the minimal surface does not provide an actual minimum in the adopted sense of the term.

Accordingly, we have the following result:

Through the assigned initial boundary C_0 of the minimal surface, let a consecutive minimal surface be drawn; and let it intersect the original minimal surface (if at all) in another curve C_1 , this being the earliest intersection after C_0 . The range of the original surface, beginning at C_0 , cannot extend so far as C_1 , if a minimum area in space between the two curves is to be provided by the minimal surface.

After the analogy of the corresponding result for single integrals in general, and for geodesics in particular, it is convenient to call a curve C_1 the *conjugate* of a curve C_0 .

Hence the range of a minimal surface, reckoned from any initial curve, must not extend so far as the conjugate of the curve, if the surface is to provide a minimum area in space; but, of course, the surface can be extended over any range if we only require the descriptive property that, throughout, the mean measure of curvature is zero.

8. Thus the determination of the minimum range of a minimal surface depends (in this method of proceeding) upon a knowledge of the quantity λ . As defined, λ satisfies an equation of the second order; and we require the primitive of the equation, subject to the condition that the minimal surface and the consecutive minimal surface are made to correspond point by point along the normals to the original minimal surface. There is some analogy with the JACOBI problem of finding the variational conjugate of a point on a curve; that is, if the curve is given by a completely general equation, the construction of the range is given by analysis which only involves differentiations, while if the curve is special, the construction of the range require the integration of an ordinary equation of the second order. The analogy, however, is not complete for our purpose, for the general equations are not quite so useful; happily, the theorem of SCHWARZ, which enables us to construct the forms of the arbitrary functions in the WEIERSTRASS equations so that the surface shall satisfy assigned initial conditions, enables us also to determine the value of λ and therefore to obtain the conjugate of the assigned initial perimeter.

9. Our remaining concern therefore rests upon the determination of λ .

We now refer the minimal surface to its nul lines as the parametric curves; and then the WEIERSTRASS equations are

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (1 - u^2) f''(u) + u f'(u) - f(u) \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 - v^2) g''(v) + v g'(v) - g(v), \\ y &= \frac{1}{2} i (1 + u^2) f''(u) - i u f'(u) + i f(u) \\ &\quad - \frac{1}{2} i (1 + v^2) g''(v) + i v g'(v) - i g(v), \\ z &= u f''(u) - f'(u) + v g''(v) - g'(v), \end{aligned}$$

where u and v are the conjugate variables of the nul lines, and $f(u)$ and $g(v)$ are arbitrary functions to be used in order that assigned initial conditions may be satisfied. The fundamental magnitudes of the surface are

$$E = 0, \quad F = \frac{1}{2} (1 + uv)^2 f'' g'', \quad G = 0,$$

$$L = -f''', \quad M = 0, \quad N = -g''';$$

also

$$\Gamma = \frac{2v}{1+uv} + \frac{f''''}{f'''}, \quad \Gamma' = 0, \quad \Gamma'' = 0,$$

$$\Delta'' = \frac{2u}{1+uv} + \frac{g''''}{g'''}, \quad \Delta' = 0, \quad \Delta = 0.$$

Thus

$$K = \frac{1}{\alpha\beta} = -\frac{1}{\alpha^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

and

$$V^2 = EG - F^2;$$

hence, in the present form, we have

$$\frac{V^2}{\alpha^2} = -f'' g''.$$

The equation, which λ must satisfy, therefore becomes

$$\lambda_{12} + \frac{2}{(1+uv)^2} \lambda = 0,$$

a LAPLACE equation having equal invariants — a type of equations of the second order that is recurrent in the theory of minimal surfaces. The primitive of the equation is

$$\lambda = \varepsilon' \left(\Phi' - \frac{2v}{1+uv} \Phi \right) + \eta' \left(\Psi' - \frac{2u}{1+uv} \Psi \right),$$

where the constant small complex quantities ε' and η' are inserted to keep in evidence the fact that λ is a small quantity, Φ and Ψ being arbitrary functions of u and of v respectively.

When λ is thus obtained, it would be necessary to determine Φ and Ψ , so that the derived minimal surface should pass through the initial perimeter and be consecutive to the original surface.

10. But, as already has been indicated, the value of λ (together with the explicit expressions of the function Φ and Ψ) can be obtained by using the SCHWARZ formula for the determination of the functions in the WEIERSTRASS equations. The original surface is required to pass through a given curve, so that x, y, z along the curve are known functions of a single parameter, say t ; it is required to touch a given developable surface along that curve, so that X, Y, Z along the curve are known functions of the same parameter t . The SCHWARZ formulae require the integrals

$$\begin{aligned} x - i \int (Y dz - Z dy) &= 2A(t), & x + i \int (Y dz - Z dy) &= 2A'(t), \\ y - i \int (Z dx - X dz) &= 2B(t), & y + i \int (Z dx - X dz) &= 2B'(t), \\ z - i \int (X dy - Y dx) &= 2C(t), & z + i \int (X dy - Y dx) &= 2C'(t), \end{aligned}$$

which are to be taken along the curve. When the integrals are evaluated, the form of the functions A, A', B, B', C, C' are determinate, save as to negligible additive constants. We introduce two parameters p and q , which are conjugate complex variables for real surfaces; then the required minimal surface is given by the equations

$$x = A(p) + A'(q), \quad y = B(p) + B'(q), \quad z = C(p) + C'(q),$$

that is, by the equation

$$\begin{aligned} 2x &= x(p) + x(q) - i \int_q^p (Y dz - Z dy), \\ 2y &= y(p) + y(q) - i \int_q^p (Z dx - X dz), \\ 2z &= z(p) + z(q) - i \int_q^p (X dy - Y dx). \end{aligned}$$

These parameters p and q are not, in general, the variables u and v of the WEIERSTRASS equations; p is a function of u only and q of v only, given by the relations

$$-u \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + i \frac{\partial y}{\partial p}, \quad -v \frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} - i \frac{\partial y}{\partial q}.$$

And then the functions f and g in the WEIERSTRASS equations are obtainable, by comparing the two sets of expressions for the coordinates x, y, z of the current point on the minimal surface.

11. In the consecutive minimal surface, the variations of x, y, z from the values for the original surface will be small. Each such variation will consist of two parts. One part consists in the small variation of the functions f and g ; let these parts be denoted by $\delta x, \delta y, \delta z$. The other part consists in the small variation of the variables u and v for two points which correspond to one another along the normal; let these variations be denoted by \bar{U} and \bar{V} , so that the variation of x is $x_1 \bar{U} + x_2 \bar{V}$, and similarly for the variations of y and of z . As the coordinates of the corresponding point on the consecutive minimal surface are $x + \lambda X, y + \lambda Y, z + \lambda Z$, we have

$$\begin{aligned} x + \lambda X &= x + \delta x + x_1 \bar{U} + x_2 \bar{V}, \\ y + \lambda Y &= y + \delta y + y_1 \bar{U} + y_2 \bar{V}, \\ z + \lambda Z &= z + \delta z + z_1 \bar{U} + z_2 \bar{V}. \end{aligned}$$

Multiplying by X, Y, Z , adding, and remembering that

$$X x_1 + Y y_1 + Z z_1 = 0, \quad X x_2 + Y y_2 + Z z_2 = 0,$$

we have

$$\lambda = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

Accordingly, λ will be known as soon as $\delta x, \delta y, \delta z$ are known.

Every consecutive minimal surface is drawn through the same initial curve as the original surface and touches a slightly varied developable surface along that curve. Let the values of X, Y, Z for a consecutive minimal surface along the initial perimeter be denoted by $X + \delta X, Y + \delta Y, Z + \delta Z$; then

$$2 \delta A(t) = -i \int (\delta Y dz - \delta Z dy), \quad 2 \delta A'(t) = i \int (\delta Y dz - \delta Z dy),$$

and therefore

$$\delta x = \delta A(p') + \delta A'(q'),$$

where the difference between p' and p is small and likewise the difference between q' and q is small. But δA and $\delta A'$ themselves are small; hence keeping only the small quantities of the first order as has been done throughout, we shall have the necessary value of δx by taking $p' = p, q' = q$.

Consequently

$$2 \delta x = 2 \delta A(p) + 2 \delta A'(q) = -i \int_q^p (\delta Y dz - \delta Z dy);$$

and similarly

$$2 \delta y = 2 \delta B(p) + 2 \delta B'(q) = -i \int_q^p (\delta Z dx - \delta X dz),$$

$$2 \delta z = 2 \delta C(p) + 2 \delta C'(q) = -i \int_q^p (\delta X dy - \delta Y dx).$$

Thus when the variations δX , δY , δZ are assigned, mere quadratures will determine δx , δy , δz ; and then λ is known. Along the initial curve we have $p = q$, so that δx , δy , δz vanish along that curve, and therefore also λ vanishes along the curve, as is to be expected from the construction and the condition.

12. We thus have the following process for obtaining a conjugate of an assigned curve on a given minimal surface:

(I) construct the SCHWARZ equations for x , y , z , and from them determine p and q in terms of u and v ;

(II) assign small variations δX , δY , δZ to X , Y , Z , the values of which, being

$$X = \frac{u+v}{uv+1}, \quad Y = i \frac{v-u}{uv+1}, \quad Z = \frac{uv-1}{uv+1},$$

are expressible in terms of p and q ;

(III) obtain the values of δx , δy , δz , and thence of λ , in terms of p and q and afterwards in terms of u and v ;

(IV) when λ is equated to zero, the initial curve is given; the next curve on the surface, for which λ vanishes, is a conjugate of the initial curve.

13. The assignment of the small variations δX , δY , δZ remains, the assignment being along the initial perimeter. Because that perimeter lies on the original surface, we have

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

along its course; and because it lies on the consecutive surface, we have

$$(X + \delta X) dx + (Y + \delta Y) dy + (Z + \delta Z) dz = 0$$

also along its course. Thus along the perimeter, the small variations δX , δY , δZ are subject to the relation

$$\delta X dx + \delta Y dy + \delta Z dz = 0.$$

At any point on the curve, let θ and ψ denote the direction-angles of the normal to the surface, so that

$$X = \sin \theta \cos \psi, \quad Y = \sin \theta \sin \psi, \quad Z = \cos \theta;$$

and at that point, let $\theta + \varepsilon$ and $\psi + \eta$ denote the direction-angles of the normal to the consecutive surface. Then

$$\begin{aligned} \delta X &= \varepsilon \cos \theta \cos \psi - \eta Y, \\ \delta Y &= \varepsilon \cos \theta \sin \psi + \eta X, \\ \delta Z &= -\varepsilon \sin \theta; \end{aligned}$$

and therefore the small quantities ε and η , which may vary from point to point of the perimeter, are such that

$$\varepsilon (\cos \theta \cos \psi dx + \cos \theta \sin \psi dy - \sin \theta dz) + \eta (X dy - Y dx) = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos \psi &= \frac{uv - 1}{uv + 1} \frac{u + v}{2(uv)^{\frac{1}{2}}}, \\ \cos \theta \sin \psi &= i \frac{uv - 1}{uv + 1} \frac{v - u}{2(uv)^{\frac{1}{2}}}, \\ \sin \theta &= \frac{2(uv)^{\frac{1}{2}}}{uv + 1}, \end{aligned}$$

the parameters u and v being connected, for the present calculation, by the relation which defines the assigned perimeter.

It follows that, when ε is assumed at a point of the curve, η is determinate there. Thus we could take ε constant, subject to the condition that $X dy - Y dx$ does not vanish, and then η would, in general, be a small variable magnitude. But it is preferable, at this stage, not to assume any general assignment of ε or of η .

14. By way of illustration, these general formula will be applied to two particular minimal surfaces; — the catenoid, which is the only minimal surface of revolution, and the ENNEPER surface (*). The result obtained for the catenoid is an established theorem.

To deduce the catenoid from the WEIERSTRASS equations, we take

$$f''(u) = \frac{1}{u^2}, \quad g''(v) = \frac{1}{v^2};$$

with an assignment of origin, we then have

$$x = -\frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) - \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right),$$

$$y = \frac{1}{2} i \left(u - \frac{1}{u} \right) - \frac{1}{2} i \left(v - \frac{1}{v} \right), \quad z = \log u + \log v.$$

Also, as always,

$$X = \frac{u+v}{uv+1}, \quad Y = i \frac{v-u}{uv+1}, \quad Z = \frac{uv-1}{uv+1}.$$

Let

$$u = c e^{\Phi i}, \quad v = c e^{-\Phi i};$$

then

$$x = -\left(c + \frac{1}{c}\right) \cos \Phi, \quad y = -\left(c + \frac{1}{c}\right) \sin \Phi, \quad z = 2 \log c,$$

so that the surface is

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cosh \frac{1}{2} z,$$

and

$$X = \frac{2c \cos \Phi}{c^2 + 1}, \quad Y = \frac{2c \sin \Phi}{c^2 + 1}, \quad Z = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}.$$

In order to obtain the functions A, A', B, B', C, C' , and to express the assumed conjugate variables p and q in terms of u and v , we take a parallel $uv = a^2$ as the initial perimeter; then, along that parallel, we find (by quite simple calculations) that

$$\int (Y dz - Z dy) = \left(a - \frac{1}{a}\right) \sin \Phi,$$

$$\int (Z dx - X dz) = -\left(a - \frac{1}{a}\right) \cos \Phi,$$

$$\int (X dy - Y dx) = -2 \Phi.$$

(*) *Zeitschrift f. Math. u. Physik*, Bd. IX (1864), p. 108.

Hence

$$\begin{aligned} 2x &= -\left(a + \frac{1}{a}\right)(\cos p + \cos q) - i\left(a - \frac{1}{a}\right)(\sin p - \sin q) \\ &= -\left(a e^{pi} + \frac{1}{a} e^{-pi}\right) - \left(a e^{-qi} + \frac{1}{a} e^{qi}\right), \\ 2y &= -\left(a + \frac{1}{a}\right)(\sin p + \sin q) + i\left(a - \frac{1}{a}\right)(\cos p - \cos q) \\ &= i\left(a e^{pi} - \frac{1}{a} e^{-pi}\right) - i\left(a e^{-qi} - \frac{1}{a} e^{qi}\right), \\ 2z &= 4 \log a + 2i(p - q); \end{aligned}$$

consequently the relations, between the conjugate pair of variables u, v and the conjugate pair p, q are

$$u = a e^{pi}, \quad v = a e^{-qi}.$$

Now consider a consecutive minimal surface through the initial parallel. We have (along that parallel)

$$\begin{aligned} \delta X &= \varepsilon \cos \theta \cos \psi - \eta Y = \varepsilon \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cos \Phi - \eta \frac{2a}{a^2 + 1} \sin \Phi, \\ \delta Y &= \varepsilon \cos \theta \sin \psi + \eta X = \varepsilon \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \sin \Phi + \eta \frac{2c}{c^2 + 1} \cos \Phi, \\ \delta Z &= -\varepsilon \sin \theta = -\varepsilon \frac{2a}{a^2 + 1}; \end{aligned}$$

also (along that parallel)

$$dx = \left(a + \frac{1}{a}\right) \sin \varphi d\varphi, \quad dy = -\left(a + \frac{1}{a}\right) \cos \varphi = 0, \quad dz = 0.$$

The critical condition along the curve, viz

$$\delta X dx + \delta Y dy + \delta Z dz = 0,$$

becomes

$$\eta = 0,$$

on substitution for the variable quantities; that is, we have

$$\delta X = \varepsilon \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cos \Phi, \quad \delta Y = \varepsilon \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \sin \Phi, \quad \delta Z = -\varepsilon \frac{2a}{a^2 + 1}.$$

When the consecutive minimal surface through the assigned parallel also is a catenoid necessarily having the same axis of revolution, the parallel is a plane line of curvature on both surfaces; hence ε is constant. Conversely, when ε is a small constant (which manifestly is the simplest analytical value assignable to ε), the consecutive minimal surface is a coaxial catenoid. Then

$$\begin{aligned} 2 \delta A &= -i \int (\delta Y dz - \delta Z dy) = 2i\varepsilon \sin \Phi, \\ 2 \delta B &= -i \int (\delta Z dx - \delta X dz) = -2i\varepsilon \cos \Phi, \\ 2 \delta C &= -i \int (\delta X dy - \delta Y dx) = i\varepsilon \left(a - \frac{1}{a} \right) \Phi; \end{aligned}$$

and consequently

$$\begin{aligned} \delta x &= i\varepsilon (\sin p - \sin q) \\ &= \frac{\varepsilon}{2a} \frac{uv - a^2}{uv} (u + v), \\ \delta y &= i\varepsilon (\cos q - p) \\ &= -\frac{i\varepsilon}{2a} \frac{uv - a^2}{uv} (u - v), \\ \delta z &= \frac{1}{2} i\varepsilon \left(a - \frac{1}{a} \right) (p - q) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon \left(a - \frac{1}{a} \right) \log \frac{uv}{a^2}. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} \lambda (uv + 1) &= (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) (uv + 1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{a} \left\{ 4(uv - a^2) + (a^2 - 1)(uv - 1) \log \left(\frac{uv}{a^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Manifestly λ vanishes, as it ought to vanish, along the initial perimeter $uv = a^2$. Whenever λ vanishes, we must have a parallel; let the parallel next to the initial curve for which λ vanishes be given by

$$uv = r^2.$$

Then the conjugate of the initial parallel is given by a value of r satisfying

the equation

$$2 \frac{r^2 - a^2}{(a^2 - 1)(r^2 - 1)} + \log \frac{r}{a} = 0,$$

that is,

$$\frac{2}{r^2 - 1} - \log r = \frac{2}{a^2 - 1} - \log a.$$

This equation expresses the property that, if from a point in the initial parallel $uv = a^2$ a tangent be drawn to the meridian catenary through P cutting the directrix in T , and if from T another tangent be drawn to the meridian catenary meeting it in Q , the parallel through Q is given by $uv = r^2$.

Thus, for small variations arising through consecutive catenoids, the conjugate of the initial parallel is this deduced parallel. The result is known.

It is easy to verify that the value of λ for the present example is a special form of the general value of λ as given in § 9, when we take

$$\epsilon' = \eta' = \epsilon,$$

$$F = -\frac{1}{2a} \left\{ (a^2 - 1) u \log \left(\frac{u}{a} \right) + (a^2 + 1) u \right\},$$

$$G = -\frac{1}{2a} \left\{ (a^2 - 1) v \log \left(\frac{v}{a} \right) + (a^2 + 1) v \right\}.$$

15. For the ENNEPER surface, the WEIERSTRASS equations are

$$x = 3u - u^3 + 3v - v^3, \quad y = i(3u + u^3) - i(3v + v^3), \quad z = 3(u^2 + v^2).$$

When we take

$$u = \alpha + i\beta, \quad v = \alpha - i\beta,$$

where α and β are real, x and β are the parameters of the (plane) lines of curvature; and then

$$x = 6\alpha + 6\alpha\beta^2 - 2\alpha^3, \quad y = -6\beta - 6\alpha^2\beta + 2\beta^3, \quad z = 6\alpha^2 - 6\beta^2.$$

Also

$$X = \frac{2z}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \quad Y = \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \quad Z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}.$$

Now suppose that a line of curvature, represented by $\alpha = \text{constant}$ so that β is its current variable, is constituted the initial perimeter. Then,

along that line of curvature, we find

$$\begin{aligned}\int(Y dz - Z dy) &= 6\alpha^2\beta - 6\beta - 2\beta^3, \\ \int(Z dx - X dz) &= 6\alpha\beta^2, \\ \int(X dy - Y dx) &= -12\alpha\beta;\end{aligned}$$

and so a point on the surface is given by

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \left\{ x(p) + x(q) \right\} - \frac{1}{2} i \int_q^p (Y dz - Z dy) \\ &= 6\alpha - 2\alpha^3 - 3i(\alpha^2 - 1)(p - q) + 3\alpha(p^2 + q^2) + i(p^3 - q^3), \\ y &= -3(\alpha^2 + 1)(p + q) - 3i\alpha(p^2 - q^2) + p^3 + q^3, \\ z &= 6\alpha^2 + 6i\alpha(p - q) - 3(p^2 + q^2).\end{aligned}$$

The initial perimeter is, as usual, given by $p = q$; and the variables p and q are connected with the WEIERSTRASS variables by the relations

$$u = \alpha + ip, \quad v = \alpha - iq.$$

Next, we have

$$\begin{aligned}\delta X &= \varepsilon \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} - \eta \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\ \delta Y &= \varepsilon \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} + \eta \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\ \delta Z &= -\varepsilon \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}.\end{aligned}$$

When these values are substituted in the critical relation

$$\delta X dx + \delta Y dy + \delta Z dz = 0,$$

which holds along the initial perimeter, it gives

$$\frac{\varepsilon\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\eta\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}.$$

We thus have one relation between ε and n , so that one of these quantities remains at our disposal.

Again, if γ be the small angle between the original surface and the consecutive surface at any point, being the angle between their normals, we have

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= (X \delta Y - Y \delta X)^2 + (Y \delta Z - Z \delta Y)^2 + (Z \delta X - X \delta Z)^2 \\ &= \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right), \end{aligned}$$

on reduction. Accordingly, let the consecutive surface be drawn making a small constant angle γ with the original surface; the initial perimeter is a plane line of curvature on the original surface, and so it is a plané line of curvature on the consecutive surface thus drawn. We therefore have

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \gamma,$$

where α and γ are constant along the curve.

Further, along the perimeter, we have

$$\delta Y dz - \delta Z dy = -12 \varepsilon (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} d\beta = -12 \alpha \gamma d\beta,$$

$$\delta Z dx - \delta X dz = -12 \varepsilon \frac{\beta}{\alpha} (\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} d\beta = -12 \alpha \gamma d\beta,$$

$$\begin{aligned} \delta X dy - \delta Y dx &= -6 \frac{\varepsilon}{\alpha} (\alpha^2 + \beta^2 - 1) (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} d\beta \\ &= -6 (\alpha^2 + \beta^2 - 1) d\beta, \end{aligned}$$

and therefore

$$\delta x = -\frac{1}{2} i \int_q^p (\delta Y dz - \delta Z dy) = 6 i \alpha \gamma (p - q) = 6 \gamma \alpha (u + v - 2\alpha),$$

$$\begin{aligned} \delta y &= -\frac{1}{2} i \int_q^p (\delta Z dx - \delta X dz) = 3 i \gamma (p^2 - q^2) \\ &= 3 i \gamma (v - u) (u + v - 2\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta z &= -\frac{1}{2} i \int_q^p (\delta X dy - \delta Y dx) = i \left\{ (3\alpha^2 - 1) (p - q) + p^3 - q^3 \right\} \\ &= -(u + v - 2\alpha) (u^2 + uv + v^2 - ux - vx + 1). \end{aligned}$$

Hence, as

$$\lambda = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z,$$

we have

$$-\lambda \frac{uv + 1}{u + v - 2\alpha} = (u^2 + uv + v^2 - u\alpha - v\alpha + 1)(uv - 1) \\ + 3(u - v)^2 - 6\alpha(u + v).$$

Let the right-hand side of this equation be denoted by $T(u, v)$. Then the conjugate of the initial perimeter, which is represented by the equation

$$u + v - 2\alpha = 0,$$

is the curve (or the portion of the curve nearest the initial perimeter) satisfying the equation

$$T(u, v) = 0.$$

It happens that the initial perimeter, for general values of α , cuts this conjugate curve; thus there can be a limit, not merely to the range of the surface but also to the extent of the perimeter when a minimum range is to be provided. The example consequently furnishes, indirectly, an illustration of the remark at the end of § 2; its direct purpose is to illustrate the process of constructing the conjugate of an assigned initial perimeter of a minimal surface.

18 Hanover Terrace, London. N. W.
29 February 1912.

Sull'operazione aggiunta di Lagrange.

(Di SALVATORE PINCHERLE, a Bologna.)

È ben noto come, nello studio elementare delle equazioni differenziali lineari, la conoscenza di certe funzioni, dette moltiplicatori, permetta, mediante quadrature, di ridurre una tale equazione ad altre di grado inferiore, e come questi moltiplicatori siano gl'integrali di un'equazione differenziale lineare dello stesso ordine della proposta, i cui coefficienti dipendono in modo semplice dai coefficienti di questa, di cui viene detta « equazione aggiunta » od anche « aggiunta di LAGRANGE », perchè venne considerata per primo dal sommo analista di cui il presente volume intende di onorare il ricordo.

Fra un'equazione differenziale lineare e la sua aggiunta, o meglio fra le operazioni funzionali (forme differenziali lineari) rappresentate dai primi membri delle due equazioni, passano notevoli relazioni, di carattere involutorio. Ma, dal punto di vista generale della teoria delle operazioni, queste relazioni non sono che una conseguenza di una dipendenza assai generale, quella stessa che nella geometria analitica delle varietà lineari in uno spazio ad n dimensioni lega le trasformazioni lineari sullo spazio di punti a quello sullo spazio degli iperpiani. Per questa dipendenza, ad ogni operazione lineare si può farne corrispondere un'altra, detta *aggiunta* (anzi *aggiunta* di LAGRANGE, per l'esempio tipico che ne ha dato il nostro grande analista nella teoria delle forme differenziali lineari) della prima, le cui proprietà sono legate in modo assai semplice con quelle dell'operazione primitiva, la quale è alla sua volta l'aggiunta della propria aggiunta; e la semplicità della dipendenza stessa viene intuita dal fatto che per le operazioni lineari esprimibili mediante una matrice ad un numero finito od infinito di elementi, l'aggiunta non è altro che l'operazione espressa dalla matrice ottenuta ruotando la prima di 180° intorno alla propria diagonale principale. Dell'operazione aggiunta di una data operazione lineare mi sono già occupato da tempo (*); mi propongo qui di

(*) *Sull'operazione aggiunta*. Rendic. della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 1898; PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive*, Cap. IX, Bologna, 1901.

introdurre il concetto nel modo più generale e di indicarne qualche applicazione.

1. Un insieme S di elementi, pei quali siano definite, ed ammettano le usuali proprietà, l'uguaglianza, la somma, la moltiplicazione per un numero, e l'elemento zero, e tali che ogni combinazione lineare di codesti elementi appartenga all'insieme stesso, dicesi spazio lineare. Giova all'intuizione assimilare gli elementi di cotesto spazio a vettori. Più elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ di cui una combinazione lineare dia l'elemento zero, si dicono linearmente dipendenti; linearmente indipendenti nel caso contrario. Se esiste un intero m tale che m elementi di S siano di necessità linearmente dipendenti, lo spazio è ad un numero finito di dimensioni; ad un numero infinito di dimensioni nel caso contrario.

2. Consideriamo due tali spazi, S e S' , dei quali non si esclude la coincidenza; indichiamo colle minuscole in carattere grassetto gli elementi del primo, colle minuscole greche quelli del secondo, colle minuscole corsive i numeri reali, colle maiuscole i simboli operatorî. Data una coppia di elementi, l'uno \mathbf{a} in S , l'altro α in S' , sia definita un'operazione P che, applicata alla coppia, dia luogo ad un elemento di un nuovo spazio S'' , che può anche ridursi allo spazio — ad una dimensione — dei numeri reali. L'elemento ottenuto dall'applicazione di P alla coppia \mathbf{a}, α , venga indicato con (\mathbf{a}, α) . Per l'operazione P si ammettano le seguenti proprietà:

a) Essa sia a risultato unico per ogni coppia \mathbf{a}, α .

b) Sia distributiva tanto negli elementi di S quanto in quelli di S' ; talchè si abbia:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \alpha) = (\mathbf{a}, \alpha) + (\mathbf{b}, \alpha), \quad (c \mathbf{a}, \alpha) = c (\mathbf{a}, \alpha);$$

$$(\mathbf{a}, \alpha + \beta) = (\mathbf{a}, \alpha) + (\mathbf{a}, \beta), \quad (\mathbf{a}, c \alpha) = c (\mathbf{a}, \alpha).$$

c) Se si ha per un elemento determinato \mathbf{a}_1 di S e per ogni elemento arbitrario α in S'

$$(\mathbf{a}_1, \alpha) = 0,$$

ne consegua $\mathbf{a}_1 = 0$, e se si ha per un elemento \mathbf{a} arbitrario in S e per un elemento determinato α_1 di S'

$$(\mathbf{a}, \alpha_1) = 0,$$

ne consegua $\alpha_1 = 0$.

Risulta dalle ipotesi precedenti che se è $\mathbf{a} = 0$, od $\alpha = 0$, è zero il risultato di P . Ciò per l'unicità del risultato stesso.

3. Due elementi \mathbf{a} , α si diranno *ortogonali* rispetto a P , quando sia $(\mathbf{a}, \alpha) = 0$. Se più elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sono ortogonali ad un medesimo α_1 è ortogonale ad \mathbf{a} ogni loro combinazione lineare. L'ipotesi c) del n.º precedente si può enunciare dicendo che un elemento di S non può essere ortogonale ad ogni elemento di S' senza essere identicamente nullo. Poichè tutti gli elementi di S' non possono essere ortogonali ad un elemento \mathbf{a}_1 di S se \mathbf{a}_1 non è zero, questi elementi ortogonali formeranno una parte di S' , sottospazio S'_1 evidentemente lineare, e che si dirà *ortogonale* ad \mathbf{a}_1 . Se poi S'_1 è ortogonale a più elementi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ di S , sarà ortogonale ad ogni loro combinazione lineare, cioè ad un sottospazio S_1 di S ; i due sottospazi S_1, S'_1 si diranno pure ortogonali fra loro. Non sarebbe privo d'interesse sviluppare le proprietà dell'ortogonalità al punto di vista dell'algoritmia generale; in particolare considerare il caso degli spazi S, S' sovrapposti; come pure darebbe luogo ad esame interessante lo studio dell'operazione P , in particolare nel caso degli spazi sovrapposti, e quello dell'operazione (\mathbf{a}, \mathbf{a}) che si deduce da P e che è il caso forse più semplice di un'operazione non distributiva; ma tralasciando per ora queste considerazioni, veniamo alla definizione della operazione aggiunta di un'operazione data.

4. Sia A un'operazione lineare, univoca, che applicata ad elementi dello spazio S riproduca elementi di questo spazio; sarà allora

$$(A(\mathbf{a}), \alpha)$$

un elemento di S'' . Ora, sia possibile di porre questo elemento sotto la forma (\mathbf{a}, β) , per modo che

$$(A(\mathbf{a}), \alpha) = (\mathbf{a}, \beta);$$

la β dipenderà da α , e si potrà dire ottenuta da α mediante un'operazione che indicheremo con $\bar{A}(\alpha)$, per modo che si avrà

$$(A(\mathbf{a}), \alpha) = (\mathbf{a}, \bar{A}(\alpha)).$$

a) L'operazione \bar{A} è univoca. Ciò per l'univocità di P e la proprietà c del n.º 2.

b) Essa è lineare. Infatti, se è

$$\left(A(\mathbf{a}), \alpha \right) = (\mathbf{a}, \beta), \quad \left(A(\mathbf{a}), \alpha' \right) = (\mathbf{a}, \beta')$$

ne segue (n.º 2 b)

$$\left(A(\mathbf{a}), \alpha + \alpha' \right) = (\mathbf{a}, \beta + \beta'),$$

onde

$$\bar{A}(\alpha + \alpha') = \bar{A}(\alpha) + \bar{A}(\alpha'),$$

e si verifica pure subito che è

$$\bar{A}(c\alpha) = c\bar{A}(\alpha).$$

L'operazione \bar{A} si dirà *aggiunta di A rispetto a P* ; quando, in una data questione, sia fissata la P in modo che non si possa dare luogo ad ambiguità, la \bar{A} si dirà semplicemente *aggiunta di A* .

Si hanno ancora le seguenti proprietà:

c) L'aggiunta di una somma è uguale alle somme delle aggiunte; l'aggiunta di una funzione lineare omogenea di più operatori è uguale alla stessa funzione lineare omogenea delle aggiunte degli operatori medesimi.

5. Siano A, B due operazioni lineari su S , \bar{A}, \bar{B} le rispettive aggiunte rispetto ad una P . È per definizione:

$$\left(AB(\mathbf{a}), \alpha \right) = \left(B(\mathbf{a}), \bar{A}(\alpha) \right),$$

e ancora

$$\left(B(\mathbf{a}), \bar{A}(\alpha) \right) = \left(\mathbf{a}, \bar{B}\bar{A}(\alpha) \right),$$

onde

$$\left(AB(\mathbf{a}), \alpha \right) = \left(\mathbf{a}, \bar{B}\bar{A}(\alpha) \right),$$

che dà

$$\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$$

o, in parole: «l'aggiunta di un prodotto di due operatori lineari è uguale al prodotto degli operatori aggiunti presi in ordine invertito».

In generale, per un prodotto di un numero qualunque di fattori, si ha:

$$\overline{A B C \dots L} = \bar{L} \dots \bar{C} \bar{B} \bar{A}.$$

6. Ricordiamo che per le operazioni lineari si possono dare i seguenti casi:

a) A non ammette radici, e applicata ad S riproduce l'intero spazio S . In questo caso essa ammette una operazione inversa univoca.

b) A ammette radici. In tale caso l'operazione inversa è plurivoca.

c) A , applicata ad S , produce solo una parte S_1 di S ; in tale caso la operazione inversa di A non ha senso per gli elementi di S non appartenenti ad S_1 .

Il caso a) esclude naturalmente gli altri. Per gli spazi ad un numero finito di dimensioni, i due casi b) e c) si presentano sempre uniti; per gli spazi ad un numero infinito di dimensioni, possono presentarsi separatamente e si denominano rispettivamente « degenerescenza di prima e di seconda specie ».

Ciò posto, sia A nel primo caso. Sostituendo allora, nella relazione

$$\left(A(\mathbf{a}), \alpha \right) = \left(\mathbf{a}, \bar{A}(\alpha) \right),$$

per \mathbf{a} la $A^{-1}(\mathbf{a})$, viene

$$\left(\mathbf{a}, \alpha \right) = \left(A^{-1}(\mathbf{a}), \bar{A}(\alpha) \right);$$

relazione che appare come la generalizzazione della proprietà caratteristica delle variabili controgredienti. Sia ora (A^{-1}) l'aggiunta di A^{-1} ; verrà dalla precedente che essa è l'inversa di \bar{A} , tanto a destra che a sinistra e quindi anche \bar{A} ha operazione inversa univoca.

Sia A nel secondo caso. Se ω è radice di A_1 viene

$$\left(\omega, \bar{A}(\alpha) \right) = 0$$

qualunque sia α ; l'operazione \bar{A} trasforma dunque S' in una sua parte, e precisamente in un sottospazio di S' ortogonale ad ω , e si trova dunque nel terzo caso. Sia infine A nel terzo caso: sia S_1 il sottospazio lineare in cui S è trasformato da A . Sia B un'operazione lineare univoca di cui S_1 sia spazio radice, \bar{B} la sua aggiunta; sarà per ogni \mathbf{a} di S :

$$0 = \left(B A(\mathbf{a}), \alpha \right) = \left(\mathbf{a}, \bar{A} \bar{B}(\alpha) \right),$$

onde (n.º 2, c) per essere α arbitrario in S , è $A\bar{B}(\alpha) = 0$; \bar{A} ammette dunque come radice lo spazio $B(\alpha)$, e quindi si trova nel secondo caso.

7. Se gli spazi S ed S' coincidono, e l'operazione P è simmetrica, il carattere involutorio dell'operazione aggiunta rispetto all'operazione primitiva è evidente; cioè se \bar{A} è l'aggiunta di A , viceversa A è l'aggiunta di \bar{A} .

8. Passiamo ora ad indicare alcuni casi particolari. Accenniamo al più ovvio, quello in cui S, S' siano coincidenti in uno spazio ad un numero finito n di dimensioni: caso in cui un elemento α di A è dato in funzione lineare omogenea di un sistema fondamentale $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ di vettori di S

$$\alpha = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_n \eta_n;$$

c_1, c_2, \dots, c_n sono le coordinate di α . Come operazione P su due vettori $\alpha(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ed $\alpha'(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$ si prenda il loro prodotto scalare $c_1 c'_1 + c_2 c'_2 + \dots + c_n c'_n$; se allora una operazione lineare A (omografia di S) è definita da

$$A(\eta_i) = a_{i1} \eta_1 + a_{i2} \eta_2 + \dots + a_{in} \eta_n,$$

cioè dalla matrice

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{array}$$

l'operazione aggiunta \bar{A} è definita dalla matrice

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}, \end{array}$$

ottenuta dall'inversione delle linee in colonne nella prima.

Allo stesso risultato si giunge anche nel caso di uno spazio ad un numero infinito (numerabile) di dimensioni, supponendo l'operazione A definita da una matrice *limitata* (beschränkt) nel senso di HILBERT.

8. Lo spazio S , coincidente ancora con S' , sia ora l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale, date nell'intervallo $0 \dots 1$, ed ivi integrabili (*) insieme ai loro quadrati.

Come operazione P applicata a due funzioni α, β dell'insieme si assuma la

$$(\alpha, \beta) = \int_0^1 \alpha(x) \beta(x) dx. \quad (1)$$

Un'operazione funzionale lineare in S si assuma sotto forma di operazione integrale

$$A(x) = \int_0^1 K(x, y) \alpha(y) dy$$

a nucleo integrabile insieme al suo quadrato nel quadrato $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, ammessa inoltre l'invertibilità delle integrazioni. Si ha allora

$$(A(x), \beta) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \alpha(y) \beta(x) dy dx,$$

che per inversione diviene

$$\int_0^1 \int_0^1 \alpha(y) K(x, y) \beta(x) dx dy = (\alpha, \bar{A}(\beta))$$

dove è

$$\bar{A}(\beta) = \int_0^1 K(x, y) \beta(x) dx.$$

Si ha così che «l'aggiunta di un'operazione integrale è quell'operazione « integrale del medesimo nucleo in cui la variabile parametrica è scambiata « con quella d'integrazione ».

9. Supponendo che le funzioni prese in considerazione siano derivabili, si ha

$$\int_0^1 \frac{d\alpha(x)}{dx} \beta(x) dx = \left(\alpha(x) \beta(x) \right)_0^1 - \int_0^1 \alpha(x) \frac{d\beta(x)}{dx} dx;$$

(*) Nel senso di LEBESGUE.

cioè, essendo $C_{\alpha, \beta}$ una costante dipendente da α , β e lineare in entrambe e pertanto risultante da un'operazione del tipo P , si ha, D indicando l'operazione di derivazione:

$$(D \alpha, \beta) = C_{\alpha, \beta} - (\alpha, D \beta).$$

In particolare, se le funzioni riprendono i medesimi valori ai limiti dell'integrazione (*), si ha

$$(D \alpha, \beta) = -(\alpha, D \beta),$$

cioè l'operazione aggiunta di D è $-D$.

L'operazione aggiunta della moltiplicazione per una funzione μ è la moltiplicazione per lo stesso moltiplicatore

$$(\mu \alpha, \beta) = (\alpha, \mu \beta),$$

onde segue, tenuto conto del risultato del n.º 5, che l'aggiunta di una forma differenziale lineare

$$\alpha_0 \varphi + \alpha_1 D \varphi + \dots + \alpha_n D^n \varphi$$

è la forma differenziale lineare

$$\alpha_0 \varphi - D(\alpha_1 \varphi) + D^2(\alpha_2 \varphi) - \dots + (-1)^n D^n(\alpha_n \varphi),$$

cioè appunto la classica aggiunta di LAGRANGE.

10. Sia F una forma differenziale lineare, \bar{F} la sua aggiunta; sia μ un moltiplicatore di F , cioè una funzione tale che μF sia differenziale esatto di una forma differenziale lineare d'ordine inferiore: $\mu F = D G$. Prendendo le aggiunte si avrà $\bar{F} \mu = -\bar{G} D$, e quindi se si applica l'operatore dell'uno e dell'altro membro ad 1, si ottiene $\bar{F}(\mu) = 0$; μ è dunque integrale di \bar{F} ; questa è la nota proprietà fondamentale dell'equazione aggiunta di LAGRANGE.

Per le equazioni differenziali lineari, la relazione del n.º 5 è il teorema noto sotto il nome di principio di reciprocità di THOMÉ e FROBENIUS.

11. Nelle ricerche sulle equazioni lineari alle differenze si è presentata frequentemente (**), accanto ad una data equazione, un'altra che è colla prima

(*) Restrizione senza importanza, potendosi sostituire all'operazione P data da (1) l'operazione stessa aumentata di una costante dipendente da α e β opportunamente scelta.

(**) V. la mia Memoria, *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche*. Mem. Acc. Bologna, S. 4, T. 10 (1890), pag. 513, dove l'equazione aggiunta è designata sotto il nome di « equazione inversa ». V. anche BORTOLOTTI, *Rend. Acc. Lincei*, S. 5, T. 5 (1896), pag. 254; WALLENBERG, *Theorie der lin. Differenzengleich.*, Leipzig (1911), p. 81.

in una dipendenza analoga a quella che passa fra un'equazione differenziale lineare e la sua aggiunta di LAGRANGE. Difatti, il primo membro della seconda dà un'operazione che è l'*aggiunta*, nel senso definito nel presente lavoro, dell'operazione rappresentata dal primo membro della prima equazione rispetto ad una conveniente operazione P . L'operazione P rispetto alla quale si prende l'aggiunta può essere scelta in vario modo; per esempio, si può considerare come spazio S l'insieme delle funzioni reali di variabile reale integrabili da $-\infty$ ad ∞ , insieme al loro quadrato (nel senso di LEBESGUE) e, α , β essendo due elementi di S , porre

$$(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \beta(x) dx.$$

Viene allora che, detta θ^α l'operazione di accrescimento finito -- quella che muta $f(x)$ in $f(x + \alpha)$ -- la sua aggiunta è $\theta^{-\alpha}$, e quindi l'aggiunta di

$$F = \alpha_0(x) f(x + n) + \alpha_1(x) f(x + n - 1) + \dots \\ \dots + \alpha_{n-1}(x) f(x + 1) + \alpha_n(x) f(x)$$

è, per i principî dei n.º 4-5:

$$F = \alpha_0(x - n) f(x - n) + \alpha_1(x - n + 1) f(x - n + 1) + \dots \\ \dots + \alpha_{n-1}(x - 1) f(x - 1) + \alpha_n(x) f(x).$$

Le proprietà dell'equazione alle differenze aggiunta di un'equazione data, che si trovano sviluppate nei lavori testè citati, non sono che semplici conseguenze delle proprietà generali dell'operazione aggiunta di una data operazione lineare, quali risultano dal capitolo di Algoritmia che abbiamo tentato di abbozzare nel presente saggio.

L'operazione θ , o di sostituzione di x con $x + 1$, è un caso particolare dell'operazione S_ω di sostituzione, che consiste nel sostituire, nella funzione generica $f(x)$, ad x la funzione data $\omega(x)$. Si trova con ciò che la proposizione « l'aggiunta di θ è θ^{-1} » è caso particolare dell'altra: « l'aggiunta di S_ω è $\frac{1}{\omega'(x)} S_\omega^{-1}$ », posto $\omega'(x) = \frac{d\omega}{dx}$ ed essendo S^{-1} l'inversa di S : l'operazione P essendo sempre data dall'integrazione del prodotto fra limiti convenienti.

Sur les points singuliers du problème du Calcul des Variations dans le plan.

(Par M. C. CARATHÉODORY, à Göttingen.)

INTRODUCTION.

1. **L'**une des premières découvertes de LAGRANGE et celle peut-être qui a le plus influé sur l'ensemble de ses recherches est celle de l'algorithme du Calcul des Variations (*). Les méthodes si ingénieuses dont les BERNOULLI et même EULER s'étaient servies auparavant n'apparaissent plus aujourd'hui que comme des outils à peine ébauchés devant cet instrument de précision qu'un siècle et demi d'usage n'est pas parvenu à perfectionner.

On a même longtemps cru que LAGRANGE avait épuisé la question, et ce n'est que peu à peu qu'on s'est aperçu grâce aux recherches de LEGENDRE, de JACOBI et de WEIERSTRASS (pour ne nommer que les principales) que les solutions des équations différentielles auxquelles conduit la méthode de LAGRANGE ne donnent pas toutes et pas toujours la réponse au problème qu'on s'était posé.

Un des résultats les plus inattendus dans cet ordre d'idées consiste dans le fait qu'on ne peut s'empêcher d'introduire à côté des solutions analytiques, des *polygones curvilignes* ou comme on les appelle des *solutions discontinues*. Ce phénomène est tout à fait général: si l'on ne veut pas se borner au cas fort restreint où l'indicatrice du problème est une courbe convexe, les solutions « fortes » (c. à d. les seules qui peuvent fournir un minimum absolu) présentent en général toutes sans exception des points anguleux pourvu qu'on les prolonge suffisamment.

(*) Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales définies. *Oeuvres*, T. I, p. 333.

L'étude du faisceau d'extrémales fortes passant par un point est, comme je l'ai montré dans un mémoire antérieur (*), fort aisée à faire pourvu que les deux invariants que j'avais désignés alors par $\Psi(x, y)$ et $\Omega(x, y)$ soient différents de zéro. J'avais proposé en conséquence de nommer points réguliers du problème tous les points pour lesquels on a simultanément

$$\Psi(x, y) \neq 0 \quad \Omega(x, y) \neq 0.$$

L'étude des points singuliers pour lesquels on a $\Psi(x, y) = 0$ comporte d'assez sérieuses difficultés qui demandent un examen à part. L'équation différentielle de Lagrange cesse en effet dans ce cas d'être régulière partout le long de chaque extrémale forte et tous les théorèmes d'existence doivent être repris avec beaucoup de soins.

Nous verrons au contraire dans les pages qui suivent, qu'il suffit de modifier légèrement les raisonnements de mon travail cité plus haut pour faire une étude complète des points singuliers du problème pour lesquels $\Omega(x, y) = 0$.

Les principaux changements qui ont permis cette généralisation sont d'une part le théorème du N.º 7 et d'autre part la formule (34) qui permet une discussion approfondie.

Je me suis permis, pour ne pas avoir à renvoyer constamment aux traités de MM. BOLZA et HADAMARD (**), de résumer dans les premiers N.ºs toutes les formules dont nous aurons besoin.

§ 1. Résultats généraux.

2. Le problème le plus général du Calcul des Variations dans le plan ne diffère pas, comme on sait, du problème des brachistochrones généralisé. Soit T une région connexe du plan; nous adjoindrons à chaque élément dirigé linéaire situé à l'intérieur de T et caractérisé par ses coordonnées x, y et par l'angle ϑ que fait cet élément avec la partie positive de l'axe des x une fonction positive $V(x, y, \vartheta)$. Nous supposons pour plus de simplicité

(*) *Mathematische Annalen*, T. 62, p. 449.

(**) O. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Leipzig, Teubner, 1909). — J. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des Variations* (Paris, Hermann, 1910).

que V est une fonction *analytique* de ses trois variables et périodique en ϑ avec la période 2π .

Soit d'autre part

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (1)$$

un arc de courbe *rectifiable* situé à l'intérieur de T et joignant deux points donnés P_1 et P_2 de cette région. D'après les résultats de M. LEBESGUE (*) cette courbe possède en chacun de ses points (sauf peut-être pour un ensemble de valeurs du paramètre t de mesure nulle) une tangente bien déterminée. L'intégrale de LEBESGUE

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{V(x, y; \vartheta)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \vartheta = \left\{ \begin{array}{l} \text{arc cos } \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ \text{arc sin } \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \end{array} \right. \quad (2)$$

aura donc une valeur parfaitement définie; elle représente le temps mis par un mobile pour passer de P_1 en P_2 le long de la courbe (1) avec la vitesse V qui correspond à l'élément linéaire qu'il parcourt en cet instant.

On demande de déterminer la courbe rectifiable située dans T et joignant P_1 à P_2 pour laquelle le temps du parcours est le plus petit possible.

3. On pose d'ordinaire avec WEIERSTRASS

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{V(x, y, \vartheta)} = F(x, y; x', y'). \quad (3)$$

On voit par cette définition même que la fonction F doit satisfaire pour toutes les valeurs de x et de y qui ne sont pas nulles à la fois à la condition d'homogénéité

$$F(x, y; kx', ky') = k F(x, y; x', y') \quad k > 0. \quad (4)$$

De cette condition d'homogénéité on déduit des relations entre les dé-

(*) *Intégrale, longueur, aire* [Annali di Matematica (3), 7 (1902), p. 231-359]. — V. aussi: CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse infinitésimale* (2^e ed.), T. I, p. 269.

rivées secondes $F_{x'x'}$, $F_{x'y'}$ et $F_{y'y'}$ qui s'écrivent dans la notation de WEIERSTRASS

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = F_1(x, y; x', y'). \tag{5}$$

Il est souvent commode de prendre pour paramètre la longueur s de la courbe (1) à partir de l'un de ses points; nous aurons alors

$$x' = \frac{dx}{ds} = \cos \vartheta \quad y' = \frac{dy}{ds} = \sin \vartheta. \tag{6}$$

Nous désignerons dans ce cas les fonctions F et F_1 ainsi que leurs dérivées partielles par rapport à x, y, x', y' par les notations abrégées:

$$\begin{aligned} F(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) &= F(x, y; \vartheta) = F(\vartheta) \\ F_1(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) &= F_1(x, y; \vartheta) = F_1(\vartheta) \\ F_{x'}(x, y; \cos \vartheta, \sin \vartheta) &= F_{x'}(x, y; \vartheta) = F_{x'}(\vartheta) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Les équations (5) livrent en particulier les relations

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{x'}(\vartheta)}{\partial \vartheta} &= -F_{x'x'}(\vartheta) \sin \vartheta + F_{x'y'}(\vartheta) \cos \vartheta = -F_1(\vartheta) \sin \vartheta, \\ \frac{\partial F_{y'}(\vartheta)}{\partial \vartheta} &= -F_{x'y'}(\vartheta) \sin \vartheta + F_{y'y'}(\vartheta) \cos \vartheta = F_1(\vartheta) \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

qu'il est très utile de noter.

4. Le résultat principal d'EULER et de LAGRANGE consiste en ce que les courbes qui donnent la solution de notre problème (s'il y en a) doivent satisfaire à l'intérieur de T et *partout où elles possèdent une tangente continue* à une certaine équation différentielle du second ordre. Cette équation peut se mettre — à cause de la condition d'homogénéité (4) — sous trois formes différentes qui ne diffèrent entr'elles que par la notation :

$$\frac{d F_{x'}(x, y; x', y')}{dt} = F_x(x, y; x', y'), \tag{8}$$

$$\frac{d F_{y'}(x, y; x', y')}{dt} = F_y(x, y; x', y'), \tag{9}$$

$$F_1(\vartheta) \frac{d \vartheta}{ds} = F_{yx'}(\vartheta) - F_{xy'}(\vartheta). \tag{10}$$

La dernière équation permet de calculer \mathcal{S} en fonction du paramètre s lorsqu'on lui adjoint les équations (6). Les courbes qui satisfont aux équations différentielles (8), (9), (10) sont appelées les *extrémales* du problème.

5. La réciproque du théorème de LAGRANGE n'est pas exacte: on peut trouver, si certaines conditions complémentaires ne sont pas satisfaites, des courbes extrémales joignant les points P_1 et P_2 et pour lesquelles l'intégrale (2) n'a pas la valeur minimum exigée.

L'une de ces conditions consiste en ce que, lorsqu'on considère une extrémale fixe e passant par le point P_1 et qu'on fait varier le point P_2 le long de cette extrémale, il peut arriver qu'à partir d'un certain point ce n'est plus l'extrémale e pour laquelle le minimum absolu est atteint, mais une autre extrémale e_1 , qui passe également par P_1 et qui fait en ce point avec e un angle fini et différent de zéro (*). *Il faut donc en général arrêter chacune des extrémales passant par P_1 à un certain point.*

Une seconde condition a été établie par WEIERSTRASS; elle diffère essentiellement de la première parce qu'elle doit être vérifiée en *chaque* point. Il faut que tout le long de l'arc de courbe e considéré, \mathcal{S} étant l'angle que fait cette courbe en l'un quelconque de ses points avec l'axe des x et $\bar{\mathcal{S}}$ étant un nombre réel quelconque, la fonction de WEIERSTRASS

$$E(x, y; \mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}) = F(\bar{\mathcal{S}}) - F_x(\bar{\mathcal{S}}) \cos \bar{\mathcal{S}} - F_y(\bar{\mathcal{S}}) \sin \bar{\mathcal{S}} \quad (11)$$

ne soit pas négative; on dit que l'extrémale est *forte* lorsque cette condition est vérifiée.

On peut donner à la fonction E la forme plus symétrique

$$E(x, y; \mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}) = \left(F_x(\bar{\mathcal{S}}) - F_x(\mathcal{S}) \right) \cos \bar{\mathcal{S}} + \left(F_y(\bar{\mathcal{S}}) - F_y(\mathcal{S}) \right) \sin \mathcal{S}, \quad (12)$$

ou encore (en se servant des équations (7))

$$E(x, y; \mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}) = \int_{\mathcal{S}}^{\bar{\mathcal{S}}} F_1(u) \sin(\bar{\mathcal{S}} - u) \, du; \quad (13)$$

cette dernière formule est due à M. SCHWARZ qui la développe depuis longtemps dans son cours.

(*) DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des Surfaces*. Livre XI, Ch. V. — BOLZA, l. c., p. 438.

§ 2. L'indicatrice et la condition de Weierstrass.

6. Il convient de donner à la condition de WEIERSTRASS une forme géométrique. Considérons notre problème sous sa forme initiale et traçons dans un plan auxiliaire l'hodographe des vitesses c. à d. le lieu des extrémités des vecteurs passant par l'origine et parallèles aux vitesses $V(x, y; \mathfrak{S})$ qui correspondent à un point fixe x, y . Cette courbe fermée qui varie avec le point x, y est celle que j'ai nommée autrefois l'*indicatrice* du problème; M. HADAMARD la désigne dans son livre sous le nom de *figurative* (*).

Si nous appelons ξ, η les coordonnées rectangulaires d'un point de l'indicatrice on aura par définition

$$\left. \begin{aligned} \xi &= V \cos \mathfrak{S} = \frac{\cos \mathfrak{S}}{F(\mathfrak{S})} \\ \eta &= V \sin \mathfrak{S} = \frac{\sin \mathfrak{S}}{F(\mathfrak{S})} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

et par suite à cause de (3)

$$F(x, y; \xi, \eta) = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{V} = 1. \quad (15)$$

Appelons O l'origine des coordonnées du plan auxiliaire des ξ, η et soient P et Q deux points de l'indicatrice correspondant aux points \mathfrak{S} et $\bar{\mathfrak{S}}$ du paramètre. Les coordonnées du point Q sont d'après les formules (14)

$$\bar{\xi} = \frac{\cos \bar{\mathfrak{S}}}{F(\bar{\mathfrak{S}})} \quad \bar{\eta} = \frac{\sin \bar{\mathfrak{S}}}{F(\bar{\mathfrak{S}})}. \quad (16)$$

La tangente PR de l'indicatrice en P satisfera d'autre part à l'équation

$$F_x(\mathfrak{S})(X - \xi) + F_y(\mathfrak{S})(Y - \eta) = 0$$

que l'on déduit immédiatement de (15) et dans laquelle X et Y désignent les coordonnées courantes. À cause de la condition d'homogénéité (4) on pourra

(*) L. c., p. 90.

écrire au lieu de cette équation

$$1 - F_x'(\mathcal{S}) X - F_y'(\mathcal{S}) Y = 0. \quad (17)$$

Menons par Q une parallèle à la droite \overrightarrow{OP} et considérons le segment dirigé \overrightarrow{QR} situé sur cette droite entre le point Q et notre tangente PR ; on aura en vertu de (17)

$$\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{OP}} = 1 - F_x'(\mathcal{S}) \bar{\xi} - F_y'(\mathcal{S}) \bar{\eta}$$

ce qui pourra s'écrire au moyen des relations (16) et (11)

$$\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{OP}} = \frac{E(x, y; \mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}})}{F(\bar{\mathcal{S}})}.$$

On voit que la fonction E de WEIERSTRASS change de signe lorsqu'il y a des points de l'indicatrice de part et d'autre de la tangente PR .

La condition de Weierstrass s'exprime donc dans notre interprétation géométrique en disant que la tangente PR doit être droite extrême (droite d'appui) de l'indicatrice.

7. Considérons l'ensemble des droites extrêmes de notre indicatrice; elles recouvriront tout le plan à l'exception d'un domaine convexe K , qui contient l'indicatrice à son intérieur ou sur sa frontière et qui est limité d'une part par certaines portions de cette courbe et d'autre part par un certain nombre de tangentes multiples de notre indicatrice.

A chaque point de l'indicatrice se trouvant sur la frontière du domaine convexe K correspond une direction \mathcal{S} pour laquelle la condition de WEIERSTRASS se trouve vérifiée. A chaque point I de l'indicatrice se trouvant à l'intérieur de K correspond au contraire une direction \mathcal{S} pour laquelle la condition de WEIERSTRASS n'est pas satisfaite; en effet la tangente à l'indicatrice en I ne peut pas être droite extrême à cause de notre construction.

On peut aisément remplacer cette condition géométrique par une *condition analytique*. Joignons à cet effet le point O origine des coordonnées $\xi \eta$ à notre point I et prolongeons \overrightarrow{OI} jusqu'à son point de rencontre C avec la frontière du domaine convexe; le point C doit nécessairement se trouver

sur une des tangentes multiples de l'indicatrice et à l'intérieur d'un segment AB dont les extrémités sont deux des points de contact de cette tangente.

Le point I est donc un point à l'intérieur du triangle OAB ; d'autre part, à cause de la formule (17), la tangente à l'indicatrice en I ne peut contenir le point O et elle doit nécessairement séparer le point O de l'un au moins des deux autres sommets A et B de ce triangle.

On voit donc en se rapportant aux résultats du n.º 6, que si l'on désigne par θ et $\bar{\theta}$ les angles correspondant aux directions OA et OB l'une au moins des deux fonctions $E(\vartheta, \theta)$ et $E(\vartheta, \bar{\theta})$ sera négative.

En général nous aurons le résultat suivant: Désignons par $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ les angles qui correspondent aux points de contact des tangentes multiples de l'indicatrice et qui sont en même temps droites extrêmes; ces points sont nécessairement en nombre fini puisque d'après nos hypothèses l'indicatrice est analytique.

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une extrémale faisant au point x, y considéré l'angle ϑ avec l'axe des x soit forte, consiste en ce que les m inégalités*

$$E(x, y; \vartheta, \theta_k) \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

soient vérifiées.

Ce résultat est, comme nous le verrons, fort utile; il permet en effet de remplacer dans la condition de WEIERSTRASS, la fonction de deux variables $E(\vartheta, \vartheta)$ par un nombre fini de fonctions de la seule variable ϑ puisque $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ sont fixes pour le point considéré.

8. Pour calculer les directions $\theta_1, \theta_2, \dots$ qui correspondent aux points de contact des tangentes multiples de l'indicatrice qui sont en même temps droites extrêmes, on déterminera d'abord toutes les tangentes multiples sans exception.

Soient θ et $\bar{\theta}$ deux directions qui correspondent à deux points de contact différents de la même tangente multiple. Le premier membre de l'équation (17) doit rester invariant lorsqu'on remplace successivement ϑ par θ et $\bar{\theta}$ et on tire de cette condition

$$\left. \begin{aligned} F_{x'}(\theta) &= F_{x'}(\bar{\theta}), \\ F_{y'}(\theta) &= F_{y'}(\bar{\theta}); \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ces dernières formules sont connues sous le nom de conditions d'ERDMANN.

Les équations (19) permettent de calculer analytiquement les valeurs des angles qui correspondent aux tangentes multiples de l'indicatrice. Désignons ces grandeurs par $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{m+p}$ et formons le tableau

$$E(x, y; \theta'_j, \theta'_k) \quad (j, k = 1, 2, \dots, (m+p)); \quad (20)$$

les angles θ'_j pour lesquels aucune des quantités (20) n'est négative lorsqu'on pose $k = 1, 2, \dots, (m+p)$ correspondront aux points de contact des droites d'appui multiples et nous les désignerons comme précédemment par $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$.

Nous supposons dans la suite qu'aucune de ces droites d'appui n'a plus de deux points de contact avec l'indicatrice; le cas où certaines de ces droites possèdent trois points de contact ou plus ne présente pas de difficultés spéciales et n'est qu'un peu plus compliqué au point de vue de la notation.

9. La formule (13) permet de développer aisément la fonction $E(x, y; \mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}})$ en série de TAYLOR procédant suivant les puissances de $(\bar{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S})$; on trouve en effet en posant $\bar{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S} = h$

$$E(x, y; \mathfrak{S}, \mathfrak{S} + h) = \int_0^h F_1(\mathfrak{S} + u) \sin(h - u) du$$

$$\frac{dE}{dh} = \int_0^h F_1(\mathfrak{S} + u) \cos(h - u) du$$

$$\frac{d^2E}{dh^2} = F_1(\mathfrak{S} + h) - E$$

d'où l'on déduira facilement les dérivées suivantes.

On obtient de cette façon la formule

$$E(x, y; \mathfrak{S}, \bar{\mathfrak{S}}) = \frac{F_1(\mathfrak{S})}{2!} (\bar{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S})^2 + \frac{F'_1(\mathfrak{S})}{3!} (\bar{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S})^3 + \left. \begin{aligned} &+ \frac{F''_1(\mathfrak{S}) - F_1(\mathfrak{S})}{4!} (\bar{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S})^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

où les accents indiquent des dérivées partielles par rapport à \mathfrak{S} .

Le premier terme non nul de la série (21) doit avoir, lorsque la condition de WEIERSTRASS est vérifiée par la direction \mathfrak{S} , un exposant pair et un

coefficient positif. Si donc $F_1(\mathfrak{S})$ s'annule en l'un de ces points il faudra nécessairement que $F'_1(\mathfrak{S}) = 0$.

Nous supposons dans la suite que les quantités $F_1(x, y; \mathfrak{S})$ et $\frac{\partial F_1(x, y; \mathfrak{S})}{\partial \mathfrak{S}}$ ne s'annulent jamais en même temps lorsque le point xy parcourt le domaine T et évitons ainsi la singularité $\Psi = 0$ dont nous avons parlé dans l'introduction.

Il suit de notre dernière hypothèse que $F_1(\mathfrak{S}) \neq 0$ dès que la condition de WEIERSTRASS est vérifiée; le système d'équations différentielles (6) et (11) pouvant dès lors être mis sous forme normale on voit que chaque extrémale forte située à l'intérieur du domaine T est une courbe analytique régulière.

§ 3. Les extrémales fortes.

10. Le problème principal qui se pose maintenant est la détermination des arcs d'extrémale le long desquels la condition de WEIERSTRASS est vérifiée.

Remarquons à cet effet que, si $\theta_1, \theta_2, \dots$, désignent les directions correspondantes aux points de contact des droites d'appui doubles de l'indicatrice pour le point xy du domaine T , tous les nombres $F_1(\theta_1), F_2(\theta_2), \dots$, seront positifs et différents de zéro. On déduit aisément de ce fait que le déterminant fonctionnel des équations (19) auxquelles ces quantités doivent satisfaire deux à deux est différent de zéro (*).

Les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots$, seront par conséquent des fonctions analytiques de x et y

$$\theta_1 = \theta_1(x, y), \quad \theta_2 = \theta_2(x, y), \dots \quad (22)$$

que l'on déterminera au moyen des équations (19).

Soit

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad (23)$$

un système d'équations représentant une extrémale donnée, la longueur de cette courbe à partir d'un certain point étant choisie comme paramètre. On pourra alors poser

$$x'(s) = \cos \mathfrak{S} \quad y'(s) = \sin \mathfrak{S}$$

(*) *Math. Ann.*, 62, p. 467. — HADAMARD, l. c., p. 442.

et déterminer au moyen de ces dernières équations une fonction

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(s) \tag{24}$$

qui jointe aux équations (23) satisfait identiquement à l'équation différentielle (11).

Les équations (22) et (23) permettent de déterminer les valeurs $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$, ..., que prennent les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots$, le long de notre extrémale en fonction du paramètre s .

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'extrémale (23) soit forte pour une valeur donnée de s s'expriment par les inégalités

$$E_k(s) = E\left(x(s), y(s); \mathfrak{S}(s), \theta_k(s)\right) \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots \tag{25}$$

Les quantités $E_k(s)$ étant des fonctions analytiques du paramètre, on voit que, si pour une valeur donnée de s , tous ces nombres sont positifs et différents de zéro, il en sera de même tout le long d'un arc assez petit de notre extrémale qui contient le point considéré à son intérieur. L'extrémale (23) sera donc forte aux environs du point considéré.

Les extrémités des parties fortes de l'extrémale (23) coïncident par conséquent avec les points pour lesquels l'une au moins des quantités $E_k(s)$ s'annule, et ceci ne peut avoir lieu que si la direction \mathfrak{S} de l'extrémale coïncide avec l'une des directions $\theta_1, \theta_2, \dots$, définies par les équations (22).

Nous nous sommes placés dans l'hypothèse où chacune de ces directions correspond à une droite extrême *double*; on voit en se rapportant au n.º 6 qu'il y a dans ce cas toujours *exactement deux* des quantités (25) qui s'annulent. Choisissons l'origine des s de façon que ceci ait lieu pour $s=0$ et appelons θ et $\bar{\theta}$ ceux des nombres $\theta_1, \theta_2, \dots$, pour lesquels

$$E(\mathfrak{S}, \theta)_{s=0} = 0 \quad E(\mathfrak{S}, \bar{\theta})_{s=0} = 0$$

sont vérifiés simultanément. Les quantités $E(\mathfrak{S}, \theta_k)_{s=0}$ étant positives et différentes de zéro pour tous les $\theta_1, \theta_2, \dots$, qui diffèrent de θ et $\bar{\theta}$ il suffira d'examiner d'après le Théorème du n.º 7 les deux fonctions de s

$$E(s) = E\left(x(s), y(s); \mathfrak{S}(s), \theta(s)\right) \tag{26}$$

$$\bar{E}(s) = E\left(x(s), y(s); \mathfrak{S}(s), \bar{\theta}(s)\right) \tag{27}$$

pour savoir comment l'extrémale (23) se comporte aux environs du point $s=0$ par rapport à la condition de WEIERSTRASS.

Les quantités θ et $\bar{\theta}$ n'étant déterminées qu'à un multiple de 2π près et désignant deux directions qui ne sont ni parallèles ni antiparallèles on peut s'arranger pour que les inégalités

$$0 < \bar{\theta} - \theta < \pi$$

soient vérifiées.

12. Désignons par $x_0, y_0, \vartheta_0, \theta_0, \bar{\theta}_0$ les valeurs des fonctions $x(s), y(s), \dots$, pour $s=0$; d'après nos hypothèses ϑ_0 devra être égale soit à θ_0 soit à $\bar{\theta}_0$. Examinons pour commencer le cas où $\vartheta_0 = \theta_0$; la différence $[\theta(s) - \vartheta(s)]$ développée aux environs du point $s=0$ en série de MACLAURIN (ce qui sera toujours possible puisque les fonctions dont il s'agit sont régulières) donne une formule de la forme (*)

$$\left(\theta(s) - \vartheta(s)\right) = c_k s^k + c_{k+1} s^{k+1} + \dots \quad k \geq 1. \quad (28)$$

Si l'on développe d'autre part la fonction (26) au moyen de la formule (21) on trouve

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{F_1(\vartheta)}{2!} (\theta - \vartheta)^2 + \dots \\ &= \frac{F_1(\vartheta_0)}{2!} c_k^2 s^{2k} + \dots \end{aligned}$$

Le terme de moindre degré en s ayant ici un coefficient positif et un exposant pair, on aura aux environs du point $s=0$

$$E(s) \geq 0.$$

Considérons en second lieu la fonction $\bar{E}(s)$; la formule (12) nous donne

$$\bar{E}(s) = \left(F_x'(\bar{\theta}) - F_x'(\vartheta)\right) \cos \bar{\theta} + \left(F_y'(\bar{\theta}) - F_y'(\vartheta)\right) \sin \bar{\theta}$$

et les égalités (19) nous permettent d'écrire

$$\bar{E}(s) = \left(F_x'(\theta) - F_x'(\vartheta)\right) \cos \bar{\theta} + \left(F_y'(\theta) - F_y'(\vartheta)\right) \sin \theta.$$

De cette dernière équation nous tirons au moyen des formules (7)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{E}(s)}{\bar{\theta} - \vartheta} = F_1(\theta_0) \sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0)$$

(*) Nous supposons ici et dans la suite que la quantité $(\theta(s) - \vartheta(s))$ n'est pas identiquement nulle. Le lecteur traitera facilement ce cas; il verra que la formule (34) établie plus loin est tout à fait générale et en déduira $\Omega(s) = 0$.

ce qui nous permet de poser

$$\bar{E}(s) = (\theta - \vartheta) \left\{ F_1(\theta_0) \sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) + sL(s) \right\} \quad (29)$$

la fonction $L(s)$ étant analytique au point $s=0$. Le premier terme de la quantité entre parenthèse est positif et différent de zéro; pour des valeurs suffisamment petites de $|s|$ la fonction $\bar{E}(s)$ aura donc le même signe que $(\theta - \vartheta)$ et l'extrémale (23) sera forte ou faible suivant que $(\theta - \vartheta)$ est positif ou non. Tout dépend donc du premier terme $c_k s^k$ de la série (28); nous allons le calculer.

13. Les formules (19) dérivées par rapport à s donnent :

$$F_{xx'}(\theta) \cos \vartheta + F_{yx'}(\theta) \sin \vartheta - F_1(\theta) \sin \theta \frac{d\theta}{ds} = F_{xx'}(\bar{\theta}) \cos \vartheta + F_{yx'}(\bar{\theta}) \sin \vartheta - F_1(\bar{\theta}) \sin \bar{\theta} \frac{d\bar{\theta}}{ds}$$

$$F_{xy'}(\theta) \cos \vartheta + F_{yy'}(\theta) \sin \vartheta + F_1(\theta) \cos \theta \frac{d\theta}{ds} = F_{xy'}(\bar{\theta}) \cos \vartheta + F_{yy'}(\bar{\theta}) \sin \vartheta + F_1(\bar{\theta}) \cos \bar{\theta} \frac{d\bar{\theta}}{ds}.$$

Multiplions la première de ces égalités par $\cos \bar{\theta}$, la seconde par $\sin \bar{\theta}$ et ajoutons; il vient après quelques simplifications,

$$\left. \begin{aligned} F_1(\theta) \sin(\bar{\theta} - \theta) \frac{d\theta}{ds} &= F_x(\bar{\theta}) \cos \vartheta + F_y(\bar{\theta}) \sin \vartheta - \\ &- F_{xx'}(\theta) \cos \bar{\theta} \cos \vartheta - F_{xy'}(\theta) \sin \bar{\theta} \cos \vartheta - \\ &- F_{yx'}(\theta) \cos \bar{\theta} \sin \vartheta - F_{yy'}(\theta) \sin \bar{\theta} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Or on peut écrire cette dernière formule en remplaçant partout ϑ par θ et tenant compte de l'erreur commise :

$$\left. \begin{aligned} F_1(\theta) \sin(\bar{\theta} - \theta) \frac{d\theta}{ds} &= F_x(\bar{\theta}) \cos \theta + F_y(\bar{\theta}) \sin \theta - \\ &- F_{xx'}(\theta) \cos \theta \cos \bar{\theta} - F_{xy'}(\theta) \cos \theta \sin \bar{\theta} - \\ &- F_{yx'}(\theta) \sin \theta \cos \bar{\theta} - F_{yy'}(\theta) \sin \theta \sin \bar{\theta} + \\ &+ (\theta - \vartheta) \alpha(s) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

la fonction $\alpha(s)$ restant analytique au point $s=0$,

Nous déduisons de même de la formule (10)

$$\begin{aligned}
 F_1(\theta) \sin(\bar{\theta} - \theta) \frac{d\bar{\theta}}{ds} &= \frac{F_1(\theta)}{F_1(\bar{\theta})} \left\{ F_{yx'}(\bar{\theta}) - F_{xy'}(\bar{\theta}) \right\} \sin(\theta - \bar{\theta}) = \\
 &= \left\{ F_{yx'}(\theta) - F_{xy'}(\theta) \right\} \sin(\bar{\theta} - \theta) + \\
 &+ (\theta - \bar{\theta}) \beta(s)
 \end{aligned} \tag{32}$$

la fonction $\beta(s)$ restant analytique au point $s = 0$.

Retranchons (32) de (31); il vient après certains calculs faciles et après avoir introduit la notation

$$\Omega(x, y) = F_x(\bar{\theta}) \cos \theta + F_y(\bar{\theta}) \sin \theta - F_x(\theta) \cos \bar{\theta} - F_y(\theta) \sin \bar{\theta} \tag{33}$$

et posé $\alpha(s) - \beta(s) = M(s)$

$$F_1(\theta) \sin(\bar{\theta} - \theta) \frac{d(\theta - \bar{\theta})}{ds} = \Omega(x, y) + (\theta - \bar{\theta}) M(s). \tag{34}$$

La fonction $\Omega(x, y)$ est une fonction analytique de x et y puisque $\theta(x, y)$ et $\bar{\theta}(x, y)$ ont cette propriété.

Le long de la courbe (23) on aura

$$\begin{aligned}
 \Omega(s) &= \Omega(x(s), y(s)) \\
 &= C s^n + C_1 s^{n+1} + \dots \quad C \neq 0 \quad n \geq 0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Introduisons les séries (28) et (35) dans l'équation (34) et égalons les termes de moindre degré en s des deux membres de cette identité; on trouve en faisant la remarque qu'aucun terme de $(\theta - \bar{\theta}) M(s)$ ne peut être comparé au terme de moindre degré en s du premier membre, puisque $F_1(\theta_0) \sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0)$ n'est pas nul:

$$F_1(\theta_0) \sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) \cdot k \cdot c_k s^{k-1} \equiv C s^n. \tag{36}$$

Cette dernière identité montre que $k = n + 1$ et que c_k a le signe de C .

On peut donc dans tous les cas calculer le signe de $[\theta(s) - \bar{\theta}(s)]$ aux environs du point $s = 0$, pourvu qu'on connaisse l'allure de $\Omega(x, y)$ le long de l'extrémale aux environs de ce point.

On déduit immédiatement de nos résultats que dans la formule

$$\frac{d(\theta - \vartheta)}{ds} = \Omega(s) \cdot \psi(s) \quad (37)$$

la fonction $\psi(s)$ est régulière aux environs de $s=0$; cette remarque nous sera utile plus tard.

14. M. DRESDEN a montré dans sa dissertation (*) que la fonction $E(x(s), y(s); \vartheta(s), \bar{\vartheta})$ considérée comme fonction des deux variables s et ϑ et développée en série de TAYLOR aux environs du point $s=0$ $\vartheta = \bar{\vartheta}_0$ donne

$$\left(\frac{\partial E}{\partial s} \right)_{\substack{s=0 \\ \vartheta=\bar{\vartheta}_0}} = \Omega(s)_{s=0}. \quad (38)$$

Nous avons vu qu'il y a intérêt à considérer au lieu de la fonction de M. DRESDEN la fonction (27) qui dépend de s seulement; cette fonction fournit d'ailleurs une formule tout à fait analogue à (38). Le résultat que nous avons en vue est une conséquence directe de (29) et (34), mais il est préférable de le calculer directement.

Différentions à cet effet

$$\bar{E}(s) = F(\bar{\theta}) - F_x'(\vartheta) \cos \bar{\theta} - F_y'(\vartheta) \sin \bar{\theta}$$

par rapport à s , il vient:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{E}}{ds} &= F_x(\bar{\theta}) \cos \vartheta + F_y(\bar{\theta}) \sin \vartheta - \\ &- \left\{ F_x'(\bar{\theta}) \sin \bar{\theta} - F_y'(\bar{\theta}) \cos \bar{\theta} \right\} \frac{d\bar{\theta}}{ds} - \\ &- \frac{d}{ds} F_x'(\vartheta) \cdot \cos \bar{\theta} - \frac{d}{ds} F_y'(\vartheta) \cdot \sin \bar{\theta} + \\ &+ \left\{ F_x'(\vartheta) \sin \bar{\theta} - F_y'(\vartheta) \cos \bar{\theta} \right\} \frac{d\bar{\theta}}{ds} \end{aligned}$$

ou à cause des formules (8), (9) et (19)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{E}}{ds} &= F_x(\bar{\theta}) \cos \vartheta + F_y(\bar{\theta}) \sin \vartheta - F_x(\vartheta) \cos \bar{\theta} - F_y(\vartheta) \sin \bar{\theta} - \\ &- \left\{ \left(F_x'(\bar{\theta}) - F_x'(\vartheta) \right) \sin \bar{\theta} - \left(F_y'(\bar{\theta}) - F_y'(\vartheta) \right) \cos \bar{\theta} \right\} \frac{d\bar{\theta}}{ds}. \end{aligned}$$

(*) *Trans. of the Amer. Mathem. Soc.*, V. IX (1908), p. 485.

On peut donc écrire en se servant de la notation (33) et en raisonnant comme précédemment:

$$\frac{d\bar{E}}{ds} = \Omega(s) + (\theta - \vartheta) N(s); \quad (39)$$

la fonction $N(s)$ reste continue et analytique aux environs de $s = 0$.

Nous avons vu au n.^o précédent que $(\theta - \vartheta)$ est toujours infiniment petit par rapport à $\Omega(s)$ lorsque s tend vers zéro. Il s'ensuit que les développements en série de $\frac{d\bar{E}}{ds}$ et de $\Omega(s)$ commencent par le même terme.

15. Il n'est pas nécessaire de calculer $\Omega(s)$ le long de l'extrémale (23) et par suite d'intégrer l'équation différentielle de LAGRANGE pour arriver à nos fins. Il suffit, comme nous allons voir, de connaître les valeurs que prend $\Omega(x, y)$ le long des courbes déterminées par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta(x, y) \quad (40)$$

où $\theta(x, y)$ a la même valeur que précédemment.

Considérons celle des courbes (40) qui passe par le point x_0, y_0 et soient $X(s), Y(s)$ les fonctions qui fournissent sa représentation paramétrique (la longueur à partir du point x_0, y_0 étant de nouveau choisie comme paramètre); désignons enfin par $\tau(s)$ l'angle que fait notre courbe avec l'axe des x .

Nous tirons de (40)

$$\tau(s) = \theta(X(s), Y(s));$$

un calcul identique à celui qui nous a donné la formule (30) montre qu'on obtient $\frac{d\tau}{ds}$ en remplaçant dans cette formule $x, y, \theta(x, y), \bar{\theta}(x, y)$ par $X, Y, \theta(X, Y), \bar{\theta}(X, Y)$ et ϑ par τ . Nous pourrions donc écrire en nous servant du théorème de la moyenne

$$\frac{d(\tau - \theta)}{ds} = (X - x) \alpha(s) + (Y - y) \beta(s) + (\tau - \vartheta) \gamma(s)$$

les fonctions α, β, γ restant régulières aux environs de $s = 0$. Cette dernière équation ajoutée membre à membre à (37) donne

$$\frac{d(\tau - \vartheta)}{ds} = \Omega(s) \cdot \psi(s) + (X - x) \alpha(s) + (Y - y) \beta(s) + (\tau - \vartheta) \gamma(s). \quad (41)$$

Comparons d'autre part les équations

$$\frac{dX}{ds} = \cos \tau \quad \frac{dx}{ds} = \cos \vartheta;$$

nous en tirons

$$\frac{d(X-x)}{ds} = (\tau - \vartheta) \lambda(s) \tag{42}$$

et nous obtenons de même

$$\frac{d(Y-y)}{ds} = (\tau - \vartheta) \mu(s) \tag{43}$$

les fonctions $\lambda(s)$ et $\mu(s)$ étant régulières pour $s=0$.

Les identités (42) et (43) montrent que le plus petit exposant de s dans les séries $(X-x)$ et $(Y-y)$ est supérieur d'un degré au moins au plus petit exposant de s dans $(\tau - \vartheta)$. Ce résultat appliqué à l'équation (41) montre en second lieu, si nous reprenons les notations de la formule (35), que le plus petit exposant de s dans la série $(\tau - \vartheta)$ est au moins égal à $(n+1)$. Les séries $(X-x)$ et $(Y-y)$ commencent donc par un terme dont le degré est au moins égal à $(n+2)$.

Appelons $\Omega^*(s)$ la valeur de l'invariant $\Omega(x, y)$ le long de la courbe $X(s), Y(s)$; nous avons

$$\begin{aligned} \Omega^*(s) &= \Omega(X, Y) = \\ &= \Omega(s) + (X-x)\alpha(s) + (Y-y)\beta(s) \end{aligned}$$

les fonctions $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ étant régulières au point $s=0$.

Ceci nous montre que l'on peut écrire

$$\Omega^*(s) = Cs^n + C_1 s^{n+1} + \dots \tag{44}$$

les deux premiers termes de la série étant les mêmes que dans la formule (35).

Nous voyons de même qu'on peut écrire au lieu des formules (34) e (39)

$$F_1(\theta) \sin(\bar{\theta} - \theta) \frac{d(\theta - \vartheta)}{ds} = \Omega^*(s) + (\theta - \vartheta) M^*(s) \tag{45}$$

$$\frac{d\bar{E}}{ds} = \Omega^*(s) + (\theta - \vartheta) N^*(s) \tag{46}$$

les fonctions M^* et N^* restant continues aux environs de $s=0$.

16. Considérons en second lieu l'extrémale

$$x = \bar{x}(s) \quad y = \bar{y}(s) \quad (47)$$

qui pour $s = 0$ passe par le point x_0, y_0 et qui fait en ce point l'angle $\bar{\theta}$ avec la partie positive de l'axe des x . Appelons $\bar{\varphi}(s)$ l'angle que fait la courbe (47) avec la même droite. Désignons par $\bar{X}(s), Y(s)$ les fonctions qui livrent la représentation paramétrique de la courbe passant par x_0, y_0 et qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d y}{d x} = \operatorname{tg} \bar{\theta}(x, y), \quad (48)$$

la longueur de cette courbe parcourue dans le sens positif à partir du point x_0, y_0 étant choisie comme paramètre. Posons enfin

$$\bar{\Omega}^*(s) = \Omega(\bar{X}(s), Y(s))$$

et remarquons que la fonction Ω change simplement de signe lorsqu'on permuté θ avec $\bar{\theta}$ dans la formule (33).

Un calcul tout à fait analogue au précédent nous montre alors:

1.° que la fonction $\bar{E}[\bar{x}(s), \bar{y}(s); \bar{\varphi}(s), \bar{\theta}(s)]$ n'est pas négative aux environs de $s = 0$ tandis que le signe de $E(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\varphi}, \theta)$ coïncide pour des valeurs suffisamment petites de s avec celui de $(\bar{\varphi} - \theta)$.

2.° qu'on peut écrire les formules suivantes

$$F_1(\bar{\theta}) \sin(\bar{\theta} - \theta) \frac{d(\bar{\varphi} - \theta)}{d s} = -\bar{\Omega}^*(s) - (\bar{\varphi} - \theta) M^*(s) \quad (49)$$

$$\frac{d E(\bar{x}, \bar{y}; \bar{\varphi}, \theta)}{d s} = -\Omega^*(s) - (\bar{\varphi} - \bar{\theta}) \bar{N}^*(s) \quad (50)$$

les fonctions \bar{M}^* et \bar{N}^* restant continues aux environs de $s = 0$.

§ 4. Conclusion.

17. Les résultats précédents joints à la théorie des solutions discontinues permettent de faire l'étude systématique de la distribution des extrémales fortes aux environs d'un point singulier du problème pour lequel $\Omega = 0$

et de compléter ainsi les résultats auxquels j'étais arrivé en 1906. De même la théorie des points conjugués peut être étendue aux solutions continues ou discontinues qui contiennent de tels points singuliers. Cette théorie que j'avais esquissée dans ma dissertation a été développée depuis par MM. BOLZA et DRESDEN, mais seulement pour le cas où $\Omega \neq 0$ (*).

Enfin on peut compléter également la théorie générale de WEIERSTRASS de la façon suivante: Soit e une extrémale quelconque joignant deux points A et B . WEIERSTRASS a montré qu'il est *nécessaire* pour qu'un minimum fort soit atteint par cet arc de courbe

1.° que la fonction $E(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}) \geq 0$ tout le long de la courbe

2.° que le point B ne se trouve pas au delà du point conjugué de JACOBI A' qui correspond au point A .

Pour obtenir des conditions suffisantes il fallait au contraire jusqu'à présent supposer que $E(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}})$ n'était pas nul lorsque $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

La théorie des points singuliers du problème montre que la condition $E(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}) \geq 0$ est non seulement nécessaire mais encore suffisante pourvu qu'on remplace le point singulier A' de JACOBI par un point A^* qui est un peu plus difficile à calculer et qui coïncide avec A' lorsque $E(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}) > 0$ pour $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

Toutes ces propositions ne sont nullement difficiles à établir, mais il y a un grand nombre de cas à examiner. Pour les points simples de la courbe $\Omega(x, y) = 0$ la façon dont se comportent les extrémales du problème dépend essentiellement de la direction de la tangente à la courbe $\Omega = 0$ au point considéré; il faut étudier en outre les points multiples de $\Omega = 0$.

On facilite un peu la discussion en soumettant le plan à une transformation ponctuelle par laquelle les familles de courbes (40) et (48) se transforment en parallèles aux axes des coordonnées. Les fonctions F_1 , E et Ω qui entrent dans les formules étant des invariants peuvent être calculées aisément pour le problème transformé. Je compte revenir plus tard sur ce sujet.

Le 7 Novembre 1912.

(*) V. BOLZA, l. c., p. 372.

Sui criterii sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle Variazioni.

(Di EUGENIO ELIA LEVI, a Genova.)

INTRODUZIONE.

1. Nella storia del calcolo delle variazioni, il periodo che principia con WEIERSTRASS e con DARBOUX ha carattere affatto diverso dal periodo precedente. LAGRANGE invero, — che per il primo diede forma analitica rigorosa, indipendente da considerazioni geometriche, ai principii del calcolo delle variazioni, — sviluppa il pensiero di applicare a tali problemi i metodi del Calcolo Infinitesimale: egli si preoccupa di scindere la variazione totale dell'integrale in parti di diverso ordine infinitesimale, e tale spezzamento ottiene col considerare le variazioni prima, seconda, terza, ecc.: posto questo fondamento, LAGRANGE stesso ed i matematici che lo seguono, in speciale modo LEGENDRE e JACOBI, non fanno che studiare con convenienti trasformazioni queste diverse parti della variazione totale. Ma l'osservazione di WEIERSTRASS sulle variazioni forti delle funzioni rese evidente che lo spezzamento della variazione totale nelle variazioni degli ordini successivi, non è sufficiente allo scopo: ed i metodi di WEIERSTRASS, sia nella loro forma primitiva, sia in quella di HILBERT-BELTRAMI, sia nella veste geometrica di DARBOUX e KNESER, consistono nel trasformare direttamente, e con artifici elegantissimi, la variazione totale.

Però mi pare indubbio che il concetto direttivo dei matematici anteriori a WEIERSTRASS, come quello che più direttamente si connette colla concezione infinitesimale, rivesta un carattere più generale: l'obbiezione di WEIERSTRASS richiama solo la nostra attenzione sul fatto che lo spezzamento della variazione totale nelle variazioni dei successivi ordini non è il più adeguato per scinderla in parti che *siano di diverso comportamento infinitesimale quando si faccia tendere a zero soltanto la massima distanza dei punti della curva*

variata dalla curva che si considera, e non si faccia contemporaneamente tendere a zero l'angolo delle tangenti. Onde — pur facendo astrazione dai numerosi casi in cui il concetto di campo di estremali, che è fondamento della trasformazione di WEIERSTRASS, non può applicarsi — mi pare che lo sforzo di ritornare al concetto direttivo di LAGRANGE possa essere stimato utile: specialmente poi quando si voglia, come pare tendenza dei contemporanei (*), considerare il Calcolo delle Variazioni come un capitolo di un futuro Calcolo Funzionale.

In alcune Note (***) ho mostrato appunto come, modificando leggermente lo spezzamento della variazione totale, e mediante trasformazioni sostanzialmente identiche a quelle usate da LAGRANGE, LEGENDRE e JACOBI per la variazione seconda, si possa provare la sufficienza delle ordinarie condizioni di minimo dell'integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \quad (1)$$

senza far uso del campo di estremali: già in quel luogo avvertivo che la mia dimostrazione si prestava a trattare molti casi in cui il metodo di WEIERSTRASS è in difetto. Mi propongo di riprendere quello studio in questa Memoria.

Nel Capitolo I riespongo la dimostrazione per l'integrale (1), semplifico i calcoli usati in quei lavori rendendoli insieme più facilmente generalizzabili; inoltre completo la dimostrazione sopra un punto assai importante che poteva sollevare difficoltà. Aggiungo brevemente come si debba modificare il procedimento quando uno od entrambi gli estremi sono variabili.

Nel Capitolo II studio delle condizioni sufficienti per il minimo (o per il massimo) di un integrale della forma

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \dots, y^{(p)}) dx \quad (p > 1). \quad (2)$$

È noto (***) che questo problema è uno dei più semplici tra quelli che sfuggono alla teoria di WEIERSTRASS. Invero la teoria di WEIERSTRASS, al-

(*) Cfr. ad es. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des Variations*.

(**) *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle Variazioni*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. 4 Note nel vol. XX (2.º sem. 1911) e XXI (1.º sem. 1912).

(***) Cfr. ZERMELO, *Untersuchungen über Variationsrechnung*. Dissertazione di Berlino, 1894. HADAMARD, loc. cit., Cap. V del libro III, pag. 458 e ss. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*. Cap. VI, pag. 193 e ss.

meno allo stato attuale, serve a trovare quando l'estremale \mathcal{C} di equazione $y = \eta(x)$ dà all'integrale (2) il valore minimo rispetto alle curve \mathcal{L} di equazione $y = y(x)$, che per un valore convenientemente piccolo del numero r soddisfanno alle disuguaglianze

$$|y - \eta| \leq r, \quad |y' - \eta'| \leq r, \dots, \quad |y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)}| \leq r; \quad (3)$$

e non già — come si dovrebbe fare ove si volesse il caso veramente analogo al minimo forte dell'ordinaria teoria — quando per le \mathcal{L} si ammetta soltanto di potere imporre di soddisfare alla prima delle precedenti disuguaglianze. Riservandomi di distinguere più precisamente nel n.º 1 del Cap. II i vari tipi di minimo possibili per l'integrale (2), dirò qui soltanto che la nuova dimostrazione permette di spingere la ricerca alquanto più avanti, e di trovare condizioni sufficienti perchè \mathcal{C} dia il minimo rispetto alle curve \mathcal{L} che soddisfanno alle limitazioni

$$|y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)}| \leq \rho_{p-1} \quad (4)$$

$$|y - \eta| < r, \quad (5)$$

dove r è un numero convenientemente piccolo e ρ_{p-1} è un numero finito *prefissato* anche arbitrariamente grande. Non mi è riuscito di togliere la condizione (4): nell'ultimo numero mostro su esempi come qui si presenti una difficoltà di natura in certo modo nuova: e precisamente come, quando per le curve variate \mathcal{L} si voglia togliere la condizione (4), occorra certamente introdurre per \mathcal{C} delle condizioni di tipo diverso da quelle che sono ordinariamente note quali condizioni sufficienti.

CAPITOLO I.

L'integrale $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$.

1. *Posizione del problema.* Sia assegnato l'integrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \quad (1)$$

e si supponga che in una certa regione R del piano xy e per tutti i valori

finiti di y' la funzione $f(x, y, y')$ sia, colle denominazioni di BOLZA (*), di classe C''' : fissati in R i due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ si indichi con \mathfrak{C} l'estremale che congiunge P_1 con P_2 : sia

$$y = \eta(x) \quad (2)$$

la sua equazione, e si supponga che \mathfrak{C} cada in R . Indicheremo colle lettere greche $\varphi(x)$, $\varphi'_x(x)$, $\varphi'_y(x)$, ... i valori di f , f'_x , f'_y , ... calcolati quando per y e y' si mettano $\eta(x)$ ed $\eta'(x)$: la η soddisfa l'equazione di EULERO, che con tale notazione si scrive:

$$\frac{d}{dx} \varphi'_{y'} - \varphi'_{y'} \equiv \varphi''_{y^2} \eta'' + \varphi''_{yy'} \eta' + \varphi''_{xy'} - \varphi'_{y'} = 0; \quad (3)$$

onde segue che qualunque sia la funzione $\zeta(x)$ di classe C' si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} (\varphi'_{y'} \zeta + \varphi'_{y'} \zeta') dx = \zeta(x_2) \varphi'_{y'}(x_2) - \zeta(x_1) \varphi'_{y'}(x_1); \quad (4)$$

che se ζ si annulla negli estremi diviene

$$\int_{x_1}^{x_2} (\varphi'_{y'} \zeta + \varphi'_{y'} \zeta') dx = 0. \quad (5)$$

Indicheremo con \mathfrak{L} una curva variata qualunque che cada in R e passi per P_1 e P_2 , sia

$$y = y(x) = \eta(x) + z(x) \quad \text{con} \quad z(x_1) = z(x_2) = 0 \quad (6)$$

la sua equazione: sappiamo che, volendo studiare se \mathfrak{C} dà ad I il minimo valore rispetto alle curve di classe D' , ci si può limitare a considerare il caso che \mathfrak{L} sia di classe C'' od anche sia analitica (**): così noi faremo nel seguito per maggior semplicità, sebbene nessuna difficoltà essenziale porterebbe l'adottare senz'altro ipotesi più larghe.

2. *Trasformazione e partizione della variazione totale.* Indichi $u(x)$ una soluzione dell'equazione di JACOBI:

$$\Psi(u) \equiv \left(\varphi''_{y^2} - \frac{d\varphi''_{yy'}}{dx} \right) u - \frac{d}{dx} (\varphi''_{y^2} u') = 0; \quad (7)$$

(*) BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Pag. 13 e ss.

(**) BOLZA, l. c., pag. 85 e ss.; HADAMARD, l. c., pag. 51 e ss.

e si supponga \mathfrak{L} tale che si abbia

$$z(x) = u(x) z_1(x), \tag{8}$$

$z_1(x)$ essendo una funzione di classe C'' nel tratto (x_1, x_2) : ciò avverrà sempre, qualunque sia \mathfrak{L} , quando l'estremale \mathfrak{L} soddisfaccia alla *condizione di Jacobi* nel tratto (x_1, x_2) , poichè allora esiste una soluzione di (7) sempre $\neq 0$ in (x_1, x_2) ; e basta prendere per $u(x)$ tale soluzione, e porre $z_1(x) = \frac{z(x)}{u(x)}$.

È noto che si ha per (7), qualunque sia ζ , l'identità

$$\left. \begin{aligned} \varphi''_{y^2} (\zeta u)^2 + 2 \varphi''_{yy'} \zeta u \frac{d(\zeta u)}{dx} + \varphi''_{y'^2} (2 \zeta \zeta' u u' + \zeta^2 u'^2) = \\ = \frac{d}{dx} \left[\zeta^2 u (\varphi''_{yy'} u + \varphi''_{y'^2} u') \right] (*) \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

da cui, ponendo $\zeta = z_1$, e ricordando che $z_1 u = z$ si annulla negli estremi x_1 ed x_2 , si avrà, integrando tra x_1 e x_2 ,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\varphi''_{y^2} z^2 + 2 \varphi''_{yy'} z z' + \varphi''_{y'^2} (2 z_1 z'_1 u u' + z_1^2 u'^2) \right] dx = 0. \tag{10}$$

È possibile, ciò posto, dare per la variazione totale uno spezzamento in parti di diverso comportamento infinitesimale che sarà fondamentale per il seguito. Poniamo come al solito

$$E(x, y; \bar{y}', y') = f(x, y, y') - f(x, y, \bar{y}') - (y' - \bar{y}') f'_{y'}(x, y, \bar{y}'). \tag{11}$$

Per (6) e (8) avremo subito l'identità

$$\left. \begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x, y, y') - \varphi \right] dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y') dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x, y, \eta' + z_1 u') - \varphi + z'_1 u f'_{y'}(x, y, \eta' + z_1 u') \right] dx. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

(*) Cfr. BOLZA, l. c., pag. 64, formula (16) (in nota). Questa non è altro che la formula fondamentale per la forma data da JACOBI alla trasformazione di LEGENDRE della variazione seconda.

Ma per la formula di TAYLOR si ha

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, n' + z_1 u') - \varphi &= (\varphi'_y z + \varphi'_{y'} z_1 u') + \\ &+ \frac{1}{2} (\varphi''_{y^2} z^2 + 2 \varphi''_{yy'} z z_1 u' + \varphi''_{y'^2} z_1^2 u'^2) + \lambda_1 z_1^3 \\ f'_{y'}(x, y, n' + z_1 u') &= \varphi'_{y'} + (\varphi''_{yy'} z + \varphi''_{y'^2} z_1 u') + \lambda_2 z_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

con

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{3!} \left[f'''_{y^3} u^3 + 3 \bar{f}'''_{y^2 y'} u^2 u' + 3 f'''_{yy'^2} u u'^2 + f'''_{y'^3} u'^3 \right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2!} \left[\bar{f}'''_{y^2 y'} u^2 + 2 \bar{f}'''_{yy'^2} u u' + \bar{f}'''_{y'^3} u'^2 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

in queste formule le \bar{f}''' e le $\bar{\bar{f}}'''$ indicano valori delle derivate terze di f calcolati in convenienti punti della forma

$$(x, n + \bar{\theta} z_1 u, n' + \bar{\theta} z_1 u') \quad (x, n + \bar{\bar{\theta}} z_1 u, n' + \bar{\bar{\theta}} z_1 u') \quad (15)$$

con $0 < \bar{\theta} < 1$, $0 < \bar{\bar{\theta}} < 1$.

Sostituiamo le (13) in (12), e ordiniamo per le potenze di z_1 e z'_1 ; è facile vedere che i due integrali che portano sui termini di primo e di secondo grado, sono identici rispettivamente all'integrale (5) ove si ponga $\zeta = z$, e all'integrale (10): onde sono identicamente nulli. Cosicchè infine si avrà:

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; n' + z_1 u', y') dx + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 z_1^3 + \lambda_2 u z_1^2 z'_1) dx. \quad (16)$$

È questa la formula cercata: mostreremo nei numeri che seguono, come, almeno sotto certe condizioni, il primo integrale diviene infinitesimo di ordine inferiore al secondo al tendere a 0 del massimo di z : onde esso rappresenta la parte principale di ΔI (*).

(*) Può interessare il confrontare la (16) collo spezzamento di ΔI cui porterebbe il metodo delle variazioni: per esso si avrebbe

$$\Delta I = \delta^2 I + \mathbf{P} \quad \text{dove} \quad \delta^2 I = \int_{x_1}^{x_2} \delta^2 f dx, \quad \mathbf{P} = \int_{x_1}^{x_2} (\Lambda_1 z_1^3 + \Lambda_2 z_1^2 z'_1 + \Lambda_3 z_1 z_1'^2 + \Lambda_4 z_1'^3) dx.$$

L'osservazione di WEIERSTRASS consiste essenzialmente nel far notare che tale partizione è inadeguata, perchè in \mathbf{P} entrano perfino termini in z'_1 che non è affatto detto che tendano a zero quando tende a zero z_1 e non z'_1 . Analoga alla precedente è la (16); ma nel primo integrale di questa compare la funzione E in luogo della $\delta^2 f$: chi confronti la funzione E colla $\delta^2 f$, si persuaderà facilmente che ciò equivale ad aggiungere a $\delta^2 I$, nel formare la parte principale di ΔI , la parte di \mathbf{P} dipendente da $z_1 z_1'^2$ e $z_1'^3$.

3. *Primo teorema sulle condizioni sufficienti: la y' delle curve variate resta in un campo finito.* Incominceremo col caso più semplice, in cui si voglia esaminare se \mathfrak{G} dà ad I il minimo valore rispetto alle curve \mathfrak{L} per cui

$$|y' - \eta'| \leq \rho_1. \quad (17)$$

È facile mostrare che se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1.° è $\varphi''_{y'^2} = f''_{y'^2}(x, \eta(x), \eta'(x)) > 0$ (condizione di Legendre),

2.° è $E(x, \eta; \eta', y') > 0$ per $x_1 \leq x \leq x_2$, $0 < |y' - \eta'| \leq \rho_1$ (condizione di Weierstrass),

3.° il punto x'_1 coniugato a destra di x_1 segue x_2 (condizione di Jacobi), si può trovare un r tale che \mathfrak{G} dà ad I il minimo valore rispetto alle curve variate \mathfrak{L} per P_1 e P_2 , per cui

$$|z| = |y - \eta| \leq r \quad |z'| = |y' - \eta'| \leq \rho_1 (*).$$

Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA I. Se $\zeta(x)$ è una funzione nulla in a o in b , a derivata limitata (**), in (a, b) ($a \leq b$), si ha

$$\int_a^b \zeta^2 dx \leq K \int_a^b \zeta'^2 dx \quad K = \frac{(b-a)^2}{2}. \quad (18)$$

Infatti, supposto per es.: $\zeta(a) = 0$ si ha per la formula di SCHWARZ: $\zeta^2(x) = \left(\int_a^x \zeta'(x) dx\right)^2 \leq (x-a) \int_a^x \zeta'^2 dx$; e quindi per la formula di DIRICHLET (***)

$$\begin{aligned} \int_a^b \zeta^2 dx &\leq \int_a^b (x-a) dx \int_a^x \zeta'^2(\xi) d\xi = \int_a^b \zeta'^2(\xi) d\xi \int_\xi^b (x-a) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b [(b-a)^2 - (x-a)^2] \zeta'^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b \zeta'^2 dx \quad \text{c. v. d.} \end{aligned}$$

(*) È noto che queste condizioni sono pure necessarie, almeno prese in senso largo. Cfr. BOLZA, l. cit., pag. 126. LINDBERG, *Math. Annalen*, Bd. 69 (1904), pag. 334.

(**) E quindi integrabile insieme col suo quadrato almeno nel senso di LEBESGUE.

(***) La formula di DIRICHLET consiste essenzialmente nella formula della riduzione di un integrale doppio ad integrali semplici: e quindi qui vale, poichè esiste l'integrale doppio della funzione $(x-a)\zeta'^2(\xi)$.

LEMMA II. Nelle stesse ipotesi si ha

$$\int_a^b |\zeta \zeta'| dx \leq K_1 \int_a^b \zeta'^2 dx \quad K_1 = \frac{(b-a)^2 + 2}{4}. \quad (19)$$

Basta osservare che $|\zeta \zeta'| \leq \frac{1}{2} (\zeta^2 + \zeta'^2)$, e applicare la (18).

LEMMA III. Se $\zeta(x)$ è una funzione a derivata limitata in (x_1, x_2) , nulla in x_1 e in x_2 , e si suppone ad es.: $x_1 \leq x_2$ si ha

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \zeta^2 dx &\leq K' \int_{x_1}^{x_2} \zeta'^2 dx \quad (*) \\ \int_{x_1}^{x_2} |\zeta \zeta'| dx &\leq K'_1 \int_{x_1}^{x_2} \zeta'^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$K' = \frac{(x_1 - x_2)^2}{8} \quad K'_1 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + 8}{16}.$$

Sia x_3 il punto medio di (x_1, x_2) : e si applichino alla funzione ζ i lemmi I e II, prendendo come intervallo (ab) prima (x_1, x_3) , e poi (x_3, x_2) : si ottengono subito le (20).

Ciò posto, veniamo al nostro teorema. Per 3.^o esiste una soluzione $u(x)$ dell'equazione (7) finita e continua e $\neq 0$ in (x_1, x_2) : possiamo supporre $u > 0$, e precisamente

$$0 < m_1 \leq u \leq m_2, \quad |u'| \leq m_3. \quad (21)$$

Come si osservò, si può allora, qualunque sia la curva variata \mathfrak{L} , fare la posizione (8), e dare alla variazione totale la forma (16). D'altra parte, se poniamo

$$\left. \begin{aligned} E_1(x, y; \bar{y}', y') &= \frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{(\bar{y}' - y')^2} \quad \text{per } \bar{y}' \neq y' \\ E_1(x, y; \bar{y}', \bar{y}') &= \frac{1}{2} f''_{y'^2}(x, y, \bar{y}'), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

è noto che la funzione $E_1(x, y; \bar{y}', y')$ risulta definita come funzione continua di x, y, \bar{y}', y' , almeno finchè x, y è in R e \bar{y}', y' sono finite. Le ipotesi 1.^o e 2.^o ci dicono che $E_1(x, \eta; \eta', y') > 0$ per $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y' - \eta'| \leq \rho_1$; per la continuità si può dunque trovare tre numeri positivi r_1, r_2, μ tali che per

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad |y - \eta| \leq r_1, \quad |\bar{y}' - \eta'| \leq r_2, \quad |y' - \eta'| \leq \rho_1,$$

(*) Questa prima formula è di HADAMARD (l. cit., pag. 334-335) il quale dà anzi per K' il valore $\frac{(x_1 - x_2)^2}{\pi^2}$, che è minore del precedente, e che può esser realmente raggiunto. Ho riprodotto qui, dalle mie citate Note Lincee, la presente dimostrazione elementare, perchè dei ragionamenti qui tenuti faremo uso più oltre al n. 6.

sia sempre

$$E_1(x, y; \bar{y}', y') \cong \mu. \quad (23)$$

Se quindi, indicando con r un'indeterminata $\leq r_1$ e $\leq \frac{m_1 r_2}{m_3}$, supponiamo $|z| < r$ e quindi $|z_1| < \frac{r}{m_1} \leq \frac{r_2}{m_3}$, avremo per le (21) e (22),

$$E(x, y; \bar{y}' + z_1 u', y') = E_1(x, y; \bar{y}' + z_1 u', y') z_1'^2 u^2 \cong \mu m_1^2 z_1'^2;$$

e quindi

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \bar{y}' + z_1 u', y') dx \cong \mu m_1^2 \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2 dx. \quad (24)$$

D'altra parte, se chiamiamo M il massimo delle derivate terze di $f(x, y, y')$ per $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \bar{y}| \leq r_1$, $|y' - \bar{y}'| < r_2$, i coefficienti \bar{f}''', \bar{f}'' delle λ_1 e λ_2 , date da (14), (15), saranno se $|z| < r$, inferiori a M : e quindi per (21) si avrà

$$|\lambda_1| < \frac{1}{3!} M (m_2 + m_3)^3, \quad |\lambda_2| < \frac{1}{2!} M (m_2 + m_3)^2.$$

Onde per le (20), (21) avremo

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} \lambda_1 z_1^3 dx \right| &< \frac{M}{6} (m_2 + m_3)^3 \frac{r}{m_1} \int_{x_1}^{x_2} z_1^2 dx \leq \frac{M}{6 m_1} (m_2 + m_3)^3 K' r \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2 dx \\ \left| \int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 u z_1^2 z_1' dx \right| &\leq \int_{x_1}^{x_2} |\lambda_2 z z_1 z_1'| dx \leq \frac{M}{2} (m_2 + m_3)^2 r \int_{x_1}^{x_2} |z_1 z_1'| dx \leq \\ &\leq \frac{M}{2} (m_2 + m_3)^2 K' r \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2 dx. \end{aligned} \right\} (25)$$

Le (24), (25) dimostrano che, nelle ipotesi del nostro teorema, effettivamente, come si era detto, il secondo integrale di (16) diventa infinitesimo di ordine superiore al primo quando r tende a zero: e poichè il primo è positivo, tale sarà pure ΔI per r sufficientemente piccolo. Precisamente da (16), (24) e (25) si ha

$$\left. \begin{aligned} \Delta I &> (\mu m_1^2 - r H'_1) \int_{x_1}^{x_2} z_1'^2 dx \\ H'_1 &= \frac{M (m_2 + m_3)^2}{6 m_1} \left[(m_2 + m_3) K' + 3 K'_1 m_1 \right]. \end{aligned} \right\} (26)$$

Onde basta supporre che, oltre alle disuguaglianze $r \leq r_1$, $r \leq \frac{m_1 r_2}{m_3}$, r soddisfi pure alle $r < \frac{\mu m_1^2}{H_1}$ perchè sia $\Delta I > 0$; e ciò dimostra il teorema.

4. *Osservazioni sull'estensione al caso generale.* Il precedente ragionamento non si può senz'altro applicare al caso generale in cui la curva variata abbia inclinazione qualunque per la seguente ragione: dalle ipotesi 1.^o e 2.^o seguirà ancora che $E_1(x, \eta; \eta', y') > 0$, ma potendo ora variare y' da $-\infty$ a $+\infty$, non si potrà più dedurre la (23); e tale disuguaglianza non si può neppure dedurre ove l'ipotesi 2.^o fosse, come si usa, sostituita dall'altra $E(x, y; \bar{y}', y') > 0$ per tutti i valori di y e \bar{y}' sufficientemente prossimi a η ed η' . Perchè quindi si possa trarre dal precedente ragionamento qualche conclusione, converrà proprio portare la (23) tra le ipotesi del teorema: si avrà così che:

Se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1.^o esistono tre numeri positivi r_1, r_2, μ tali che per $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|\bar{y}' - \eta'| \leq r_2$ sia $E_1(x, y; \bar{y}', y') \geq \mu$,

2.^o il punto x'_1 coniugato di x_1 a destra segue x_2 ,
si può trovare un $r \leq r_1$ tale che \mathcal{L} dia ad I il minimo rispetto alle curve \mathcal{L} passanti per P_1 e P_2 per cui $|y - \eta| \leq r$.

E alla 1.^o si può anche sostituire l'altra, apparentemente meno restrittiva, che esistano due numeri positivi r_1 e μ_1 tali che per $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$ sia $E_1(x, y; \eta', y') \geq \mu_1$ (*).

(*) Invero proviamo che da questa condizione segue che si può determinare un r_2 tale che valga la 1.^o. Fissato arbitrariamente un r_3 , sia M_1 il massimo valore di $f''_{y^2}(x, y, y')$ per (x, y) in R , $|\bar{y}' - \eta'| \leq r_3$. Si consideri ora $E_1(x, y; y', y')$: e si distinguano due casi secondo che è $|y' - \eta'| \leq 3r_3$ o $|y' - \eta'| > 3r_3$. Nel caso in cui $|y' - \eta'| \leq 3r_3$ si può ragionare come nel numero precedente: E_1 essendo funzione continua, e le variabili variando in un campo finito, da $E_1(x, y; \eta', y') \geq \mu_1$ segue che, fissato un $\mu < \mu_1$: ad es.: $\mu = \frac{\mu_1}{8}$, si può determinare un r'_2 tale che, per $|\bar{y}' - \eta'| < r'_2$, $|y' - \eta'| \leq 3r_3$, sia $E_1(x, y; y', y') \geq \mu$. Se $|y' - \eta'| > 3r_3$ si chiami r'_2 un numero $< r_3$ e $< \frac{\mu_1 r_3}{3 M_1}$: poichè $\frac{\partial E}{\partial y'} = (y' - y') f''_{y^2}(x, y, y')$ si avrà

$$\begin{aligned} E_1(x, y; \bar{y}', y') &= \frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{(\bar{y}' - y')^2} = \frac{E(x, y; \bar{y}', y') - E(x, y; \eta', y')}{(y' - y')^2} + E_1(x, y; \eta', y') \left(\frac{\eta' - y'}{y' - y'} \right)^2 = \\ &= f''_{y^2}(x, y, \bar{y}') \frac{\bar{y}' - \eta'}{y' - y'} \frac{\bar{y}' - y'}{y' - y'} + E_1(x, y; \eta', y') \left(\frac{\eta' - y'}{y' - y'} \right)^2 \end{aligned}$$

Tale teorema non è però soddisfacente, perchè non serve a riconoscere che \mathcal{C} dà il minimo in buon numero di casi in cui la cosa risulta dall'ordinaria teoria. Così se $I = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$ con $G > 0$, si vede subito che E_1 tende sempre a zero col tendere di y' a ∞ : onde non risultano soddisfatte le precedenti condizioni; mentre è noto che ogni estemale dà effettivamente il minimo quando soddisfa alla condizione di JACOBI (*).

Ma pur basandosi sempre sulla (16) si può giungere a ritrovare proprio l'ordinario teorema: occorre però dimostrare innanzi tutto alcune proprietà della funzione $E(x, y; \bar{y}', y')$ quando y' tende a ∞ , e completare con nuovi lemmi quelli del n. 3.^o Ciò faremo nei n. 5 e 6.

5. *Sul comportamento di $E(x, y; \bar{y}', y')$ quando y' tende a ∞ . Dimostriamo che se in un campo finito e chiuso T di valori di x, y, \bar{y}' sono soddisfatte le condizioni seguenti*

$$1.^{\circ} f''_{y'^2}(x, y, \bar{y}') > 0,$$

$$2.^{\circ} E(x, y; \bar{y}', y') > 0 \text{ per } 0 < |y' - \bar{y}'|,$$

per ogni sistema di valori di x, y, \bar{y}' interno a T , la $E(x, y; \bar{y}', y')$ diviene infinita di primo ordine almeno per y' tendente a ∞ . O con maggior generalità e precisione diciamo che, nelle dette ipotesi, se T_1 è un campo chiuso contenuto in T , — per il quale esiste un $\delta > 0$ tale che ogni punto di T_1 sia il punto di mezzo di un segmento di lunghezza 2δ , parallelo all'asse delle \bar{y}' , e totalmente contenuto in T_1 — allora si possono determinare due numeri positivi

\bar{y}' indicando un valore tra n' e \bar{y}' ; ora per $|\bar{y}' - n'| < r''_2$ è $|\bar{y}' - y'| > 2r_3$, e $|\bar{y}' - \bar{y}'| < r''_2 < r_3$; onde:

$$\left| \frac{\bar{y}' - y'}{\bar{y}' - \bar{y}'} \right| \leq 1 + \left| \frac{\bar{y}' - \bar{y}'}{\bar{y}' - \bar{y}'} \right| < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$\left| \frac{\bar{y}' - n'}{\bar{y}' - y'} \right| < \frac{r''_2}{2r_3}; \quad \frac{n' - y'}{\bar{y}' - \bar{y}'} = 1 - \frac{\bar{y}' - n'}{\bar{y}' - \bar{y}'} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

quindi si avrà

$$E_1(x, y; \bar{y}', y') > -M_1 \frac{3r''_2}{4r_3} + \frac{\mu_1}{4} > \frac{\mu_1}{8} = \mu.$$

Basterà quindi prendere per r_2 il minore dei numeri r'_2 e r''_2 .

Nelle mie note citate è contenuta soltanto la dimostrazione di questo teorema: incorrettamente in principio della 2.^a nota è enunciato il teorema più generale (pag. 466 del Vol. XX, 2.^o sem. 1911) che invece sarà dimostrato più oltre al n.^o 7. La dimostrazione qui esposta è alquanto più semplice di quella delle note citate.

(*) BOLZA, l. c., pag. 124.

ρ_1 e μ_1 tali che se $|\bar{y}' - y'| > \rho_1$ e (x, y, \bar{y}') è in T_1 si ha

$$E(x, y; \bar{y}', y') > \mu_1 |y' - \bar{y}'| \quad (*). \quad (27)$$

Facciamo tendere anzitutto y' a $+\infty$; poichè T e quindi T_1 sono finiti, $y' - \bar{y}'$ da un certo punto in poi è positivo. Consideriamo il limite inferiore di indeterminazione di $\frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{y' - \bar{y}'}$ per $y' = +\infty$: $\lim_{y' \rightarrow +\infty} \frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{y' - \bar{y}'}$; e chiamiamo ν e ν_1 i valori di esso secondo che pensiamo (x, y, \bar{y}') variabile in T o in T_1 : per la condizione 2.^a è $\nu_1 \geq \nu \geq 0$: il nostro teorema si può enunciare dicendo che $\nu_1 > 0$: basta quindi provare che non può essere $\nu_1 = 0$.

Si ricordi sempre che T e T_1 sono campi finiti, che $f(x, y, \bar{y}')$ è finita e continua in T : si avrà uniformemente in T

$$\lim_{y' \rightarrow +\infty} \frac{y' - \bar{y}'}{y'} = 1, \quad \lim_{y' \rightarrow +\infty} \frac{f(x, y, \bar{y}')}{y' - \bar{y}'} = 0;$$

onde, per la definizione di $E(x, y; \bar{y}', y')$, si avrà l'uguaglianza

$$\lim_{y' \rightarrow +\infty} \frac{E(x, y; \bar{y}', y')}{y' - \bar{y}'} = \lim_{y' \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x, y, y')}{y'} - f'_{y'}(x, y, \bar{y}') \right]; \quad (28)$$

ν e ν_1 sono dunque i valori del secondo membro di (28) per (x, y, \bar{y}') variabile in T o T_1 rispettivamente.

Sia γ il minimo di $f''_{y^2}(x, y, \bar{y}')$ in T : per la condizione 1.^a sarà $\gamma > 0$: e se i punti x_1, y_1, \bar{y}' , per cui $\bar{y}'_1 \leq \bar{y}' \leq \bar{y}'_1 + \delta$ sono di T , si avrà la disuguaglianza

$$\left. \begin{aligned} f'_{y'}(x_1, y_1, \bar{y}'_1 + \delta) &= f'_{y'}(x_1, y_1, \bar{y}'_1) + \delta f''_{y^2}(x_1, y_1, \bar{y}'_1 + \theta \delta) > \\ &> f'_{y'}(x_1, y_1, \bar{y}'_1) + \delta \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Ciò posto, si supponga $\nu_1 = 0$: per la definizione del limite inferiore di indeterminazione, preso il numero $\frac{\gamma \delta}{2} > \nu_1 = 0$, e fissato un L arbitrariamente grande, si può trovare un sistema di valori $(x_1, y_1, \bar{y}'_1, y'_1)$ tale che

(*) Se T_1 è un punto interno a T , questo teorema si riduce al teorema enunciato sopra. Ma il secondo teorema è più generale del precedente, in quanto la condizione imposta a T_1 non porta che esso sia tutto di punti interni a T , chè anzi può contenere punti del contorno di T ; ed inoltre è più preciso in quanto equivale ad enunciare che $E(x, y; \bar{y}', y')$ diviene infinita di 1.^o ordine uniformemente al variare di (x, y, \bar{y}') in T_1 .

(x_1, y_1, \bar{y}'_1) sia di T_1 , $y'_1 > L$ e che $\frac{f(x_1, y_1, y'_1)}{y'_1} - f'_{y'}(x_1, y_1, \bar{y}'_1) < \frac{\gamma \delta}{2}$. Per le ipotesi fatte su T_1 e per (29) sarà dunque

$$\frac{f(x_1, y_1, y'_1)}{y'_1} - f'_{y'}(x_1, y_1, \bar{y}'_1 + \delta) < -\frac{\gamma \delta}{2} :$$

quindi, assegnato un L grande a piacere, si può trovare un sistema di valori $(x_1, y_1, \bar{y}'_1 + \delta, y'_1)$ tale che sia $y'_1 > R_1$, $(x_1, y_1, \bar{y}'_1 + \delta)$ in T , e che $\frac{f(x_1, y_1, y'_1)}{y'_1} - f'_{y'}(x_1, y_1, \bar{y}'_1 + \delta) < -\frac{\gamma \delta}{2}$. Ne segue $v \leq -\frac{\gamma \delta}{2} < 0$, il che, come si vede, è assurdo.

Dunque non può essere $v_1 = 0$.

Analogamente si osserva che quando y' tende a $-\infty$, il nostro teorema equivale ad asserire che il $\lim_{y' \rightarrow -\infty} \frac{E(x y; \bar{y}' y')}{\bar{y}' - y'}$ per $(x y \bar{y}')$ variabile in T_1 è un numero $v'_1 > 0$: e la dimostrazione si fa in modo perfettamente analogo al precedente. Risulta così l'asserto.

6. *Lemmi.* Andiamo ora a completare i lemmi del n.º 3.

LEMMA IV. Se $\zeta(x)$ è una funzione a derivata limitata in $(a b)$ ($a \leq b$), nulla in a o in b , si ha

$$\int_a^b |\zeta| dx \leq (b - a) \int_a^b |\zeta'| dx. \tag{30}$$

Infatti sia ad es. $\zeta(a) = 0$. Sarà $|\zeta(x)| = \left| \int_a^x \zeta'(\xi) d\xi \right| \leq \int_a^x |\zeta'(\xi)| d\xi$; da cui segue per il teorema di DIRICHLET:

$$\int_a^b |\zeta(x)| dx \leq \int_a^b dx \int_a^x |\zeta'(\xi)| d\xi \leq \int_a^b (b - x) |\zeta'(x)| dx \leq (b - a) \int_a^b |\zeta'(x)| dx$$

che è la (30). Analogamente se $\zeta(b) = 0$.

LEMMA V. Sia ζ una funzione a derivata limitata in $(a b)$ ($a \leq b$), nulla in a o in b , e sia sempre $|\zeta| < \alpha$: se dividiamo $(a b)$ in due insiemi misurabili complementari χ e χ_1 , si ha sempre

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \zeta^2 dx &\leq K \int_{\chi} \zeta^2 dx + K_2 \int_{\chi_1} |\zeta| dx \\ K &= \frac{(b - a)^2}{2} \quad K_2 = 2 \alpha (b - a). \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

Sia sempre, per fissare le idee, $\zeta(a) = 0$. Si definiscano due funzioni ζ_1 e ζ_2 colle condizioni

$$\zeta_1(a) = 0, \quad \zeta'_1 = \zeta' \text{ in } \chi, \quad \zeta_1 = 0 \text{ in } \chi_1;$$

$$\zeta_2(a) = 0, \quad \zeta'_2 = 0 \text{ in } \chi, \quad \zeta_2 = \zeta' \text{ in } \chi_1;$$

sarà $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$. Ciò posto, si ha $\zeta^2 = (\zeta_1 + \zeta_2)^2 = \zeta_1^2 + 2\zeta\zeta_2 - \zeta_2^2$, quindi

$$\int_a^b \zeta^2 dx \leq \int_a^b \zeta_1^2 dx + 2 \int_a^b \zeta \zeta_2 dx. \quad (32)$$

Ma per il lemma I si ha

$$\int_a^b \zeta_1^2 dx \leq K \int_a^b \zeta_1'^2 dx = K \int_\chi \zeta'^2 dx; \quad (33)_1$$

per il lemma IV e per l'ipotesi $|\zeta| < \alpha$ è

$$2 \left| \int_a^b \zeta \zeta_2 dx \right| \leq 2 \int_a^b |\zeta \zeta_2| dx < 2\alpha \int_a^b |\zeta_2| dx < 2\alpha(b-a) \int_a^b |\zeta'_2| dx = \left. \begin{aligned} &= K_2 \int_{\chi_1} |\zeta'| dx. \end{aligned} \right\} (33)_2$$

Da (33)₁ e (33)₂, sommando, per (32) si deduce (31).

LEMMA VI. *Nelle stesse ipotesi del lemma V si ha*

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b |\zeta \zeta'| dx &< K_1 \int_\chi \zeta'^2 dx + K_2 \int_{\chi_1} |\zeta'| dx \\ K_1 &= \frac{(b-a)^2 + 2}{4} \quad K_2 = \alpha(b-a+1). \end{aligned} \right\} (34)$$

Infatti è $|\zeta \zeta'| \leq \frac{1}{2}(\zeta^2 + \zeta'^2)$, quindi per (31)

$$\left. \begin{aligned} \int_\chi |\zeta \zeta'| dx &\leq \frac{1}{2} \left[\int_\chi \zeta^2 dx + \int_\chi \zeta'^2 dx \right] \leq \frac{1}{2} \int_a^b \zeta^2 dx + \frac{1}{2} \int_\chi \zeta'^2 dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (K+1) \int_\chi \zeta'^2 dx + \frac{1}{2} K_2 \int_{\chi_1} |\zeta'| dx. \end{aligned} \right\} (35)_1$$

D'altra parte essendo $|\zeta| < \alpha$ si ha

$$\int_{\chi_1} |\zeta \zeta'| dx < \alpha \int_{\chi_1} |\zeta'| dx. \quad (35)_2$$

Dalle (35) sommando segue (34).

LEMMA VII. Sia ζ una funzione a derivata limitata in (x_1, x_2) ($x_1 < x_2$) nulla in x_1 ed in x_2 , e sia sempre $|\zeta| < \alpha$: se si divide (x_1, x_2) in due insiemi complementari misurabili χ e χ_1 , si ha sempre

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \zeta^2 dx &\leq K' \int_{\chi} \zeta'^2 dx + K'_2 \int_{\chi_1} |\zeta'| dx \\ \int_{x_1}^{x_2} |\zeta \zeta'| dx &\leq K'_1 \int_{\chi} \zeta'^2 dx + K'_3 \int_{\chi_1} |\zeta'| dx \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

dove K' e K'_1 sono gli stessi che nel lemma III e

$$K'_2 = \alpha (x_2 - x_1) \quad K'_3 = \alpha \left(\frac{x_2 - x_1}{2} + 1 \right). \quad (37)$$

Questo lemma si deduce dai due precedenti come il lemma III dai lemmi I e II.

Aggiungiamo a questi un lemma che ci verrà utile solo assai più in là per il problema di minimo con entrambi gli estremi mobili:

LEMMA VIII. Si mantengano per ζ tutte le ipotesi dei lemmi V e VI tranne quella che ζ si annulli in a o in b : si ha allora

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \zeta^2 dx &\leq 2\zeta^2(b)(b-a) + K'' \int_{\chi} \zeta'^2 dx + K''_2 \int_{\chi_1} |\zeta'| dx \\ \int_a^b |\zeta \zeta'| dx &\leq \zeta^2(b)(b-a) + K''_1 \int_{\chi} \zeta'^2 dx + K''_3 \int_{\chi_1} |\zeta'| dx. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

dove

$$\left. \begin{aligned} K'' &= 2K = (b-a)^2 & K''_2 &= 4K_2 = 8\alpha(b-a) \\ K''_1 &= \frac{(b-a)^2 + 1}{2} & K''_3 &= \alpha [4(b-a) + 1]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Invero si ponga $\zeta_1 = \zeta - \zeta(b)$ sarà $\zeta_1(b) = 0$, $\zeta'_1 = \zeta'$ e poichè $|\zeta| < \alpha$ sarà $|\zeta_1| < 2\alpha$. A ζ_1 si può applicare il lemma V, ponendovi 2α in luogo di α : quindi osservando che $\zeta^2 = (\zeta_1 + \zeta(b))^2 \leq 2[\zeta_1^2 + \zeta^2(b)]$, avremo

$$\begin{aligned} \int_a^b \zeta^2 dx &\leq 2 \int_a^b \zeta_1^2 dx + 2\zeta^2(b)(b-a) \leq 2\zeta^2(b)(b-a) + \\ &\quad + 2K \int_{\chi} \zeta'^2 dx + 2 \cdot 4\alpha(b-a) \int_{\chi_1} |\zeta'| dx \end{aligned}$$

che equivale alla prima delle (38).

Per mostrare la seconda delle (38) si osservi che ragionando come nel lemma VI, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\chi} |\zeta \zeta'| dx &\leq \frac{1}{2} \left[\int_{\chi} \zeta^2 dx + \int_{\chi} \zeta'^2 dx \right] \leq \frac{1}{2} \int_a^b \zeta^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\chi} \zeta'^2 dx \leq \\ &\leq \zeta^2(b)(b-a) + \left(\frac{K''}{2} + \frac{1}{2} \right) \int_{\chi} \zeta'^2 dx + \frac{1}{2} K'' \int_{\chi_1} |\zeta'| dx. \end{aligned}$$

Ma vale ancora (35)₂: sommando queste disuguaglianze, si ottiene quella cercata.

OSSERVAZIONE. I lemmi V, VI, VII comprendono i lemmi I, II, III; basta fare $\chi = (a, b)$ e per χ_1 prendere l'insieme nullo; devesi però notare che quelli sono dedotti senza supporre $|\zeta| < \alpha$. Analogamente dal lemma VIII, ove per χ_1 si prenda l'insieme nullo, si ha

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \zeta^2 dx &\leq 2\zeta^2(b)(b-a) + K'' \int_a^b \zeta'^2 dx \\ \int_a^b |\zeta \zeta'| dx &\leq \zeta^2(b)(b-a) + K'' \int_a^b \zeta'^2 dx, \end{aligned} \right\} \quad (38)^{bis}$$

e tali formule restano vere anche facendo astrazione dall'ipotesi $|\zeta| < \alpha$.

7. *Secondo teorema sulle condizioni sufficienti: caso generale.* Siamo ora in grado di dimostrare assai semplicemente che se l'arco $P_1 P_2$ dell'estremale \mathfrak{L} soddisfa alle condizioni seguenti:

- 1.° $\varphi''_{y^2} = f''_{y^2}(x, y, y') > 0$ (condizione di Legendre),
- 2.° esistono due numeri r_1 e r_2 tali che per

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad |y - \eta| \leq r_1, \quad |\bar{y}' - \eta'| \leq r_2, \quad 0 < |y' - \bar{y}'|$$

è $E(x, y; \bar{y}', y') > 0$ (condizione di Weierstrass),

3.° il punto x'_1 coniugato a destra di x_1 segue x_2 (condizione di Jacobi), si può trovare un r tale che \mathfrak{L} dia ad I il minimo rispetto alle curve \mathfrak{L} di R passanti per P_1 e P_2 per cui sia $|y - \eta| \leq r$.

È questo l'ordinario teorema (*): con ciò solo che, se si introduce la nozione di campo, si può, e talvolta si usa, limitarsi a chiedere che la condizione 2.° sia soddisfatta quando a \bar{y}' si sostituisca quella funzione di x e

(*) HADAMARD, l. c., pag. 389-90.

di y che è l'inclinazione del campo (*): qui naturalmente simile cosa non si può fare.

Per dimostrarlo si osservi intanto che, prendendo nella condizione 2.^o r_1 e r_2 sufficientemente piccoli, si può per la 1.^o supporre che per $|y - \eta| \leq r_1$, $|\bar{y}' - \eta'| \leq r_2$, $x_1 \leq x \leq x_2$ sia anche $f''_{y^2}(xy\bar{y}') > 0$. Scelto allora un $\delta > 0$ e $< r_2$ arbitrario, si può prendere nel teorema del n.^o 5 il campo $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|\bar{y}' - \eta'| \leq r_2$ come campo T , il campo $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|\bar{y}' - \eta'| \leq r_2 - \delta$ come campo T_1 ; ed applicando detto teorema, trovare due numeri positivi ρ_1 e μ_1 tali che per $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|\bar{y}' - \eta'| \leq r_2 - \delta$, $|y' - \bar{y}'| > \rho_1$ sia

$$E(x, y; \bar{y}', y') > \mu_1 |y' - \bar{y}'|. \quad (40)$$

D'altra parte si può, ragionando in modo perfettamente analogo a quello tenuto nel n.^o 3, determinare un numero positivo μ tale che per $|y' - \bar{y}'| \leq \rho_1$ sia

$$\bullet E_1(x, y; \bar{y}', y') > \mu. \quad (41)$$

Applichiamo allora alla variazione totale ΔI la (16), il che è possibile per l'ipotesi 3.^o: e supponiamo inoltre che valgano sempre le (21). Indichiamo con r un'indeterminata $\leq r_1$, e $\leq \frac{r_2 - \delta}{m_3} m_1$, e supponiamo $|z| \leq r$ e quindi $|z_1| < \frac{r}{m_1} < \frac{r_2 - \delta}{m_3}$; chiamiamo χ l'insieme dei punti in cui $|z'_1 u| \leq \rho_1$, e χ_1 l'insieme complementare: avremo:

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y') dx > \mu m_1^2 \int_{\chi} z_1'^2 dx + \mu_1 m_1 \int_{\chi_1} |z'_1| dx, \quad (42)$$

che è la formula che tiene il luogo di (24). Le limitazioni trovate al n.^o 3 per λ_1 e λ_2 restano ancora vere: e quindi, applicando il lemma VII, avremo:

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} \lambda_1 z_1^3 dx \right| &\leq \frac{M}{6} (m_2 + m_3)^3 \frac{r}{m_1} \int_{x_1}^{x_2} z_1^2 dx \leq \\ &\leq \frac{M}{6 m_1} (m_2 + m_3)^3 r \left[K'_1 \int_{\chi} z_1'^2 dx + K'_2 \int_{\chi_1} |z'_1| dx \right] \\ \left| \int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 u z_1^2 z'_1 dx \right| &\leq \int_{x_1}^{x_2} |\lambda_2 z z_1 z'_1| dx \leq \frac{M}{2} (m_2 + m_3)^2 r \int_{x_1}^{x_2} |z_1 z'_1| dx \leq \\ &\leq \frac{M}{2} (m_2 + m_3)^2 r \left[K'_1 \int_{\chi} z_1'^2 dx + K'_3 \int_{\chi_1} |z'_1| dx \right] \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

dove le K' si ottengono dalle (20) e (39) ove si faccia $\alpha = \frac{r_1}{m_1}$.

(*) BOLZA, l. c., pag. 120.

Da (42) (43) si conchiude come dalle (24) (25)

$$\Delta I > (\mu m_1^2 - r H'_1) \int_{\mathcal{L}} z_1'^2 dx + (\nu m_1 - r H'_2) \int_{\mathcal{L}_1} |z_1'| dx, \quad (44)_1$$

dove H' , è sempre dato da (26) e

$$H'_2 = \frac{M}{6 m_1} (m_2 + m_3)^2 \left[K'_2 (m_2 + m_3) + 3 K'_3 m_1 \right]. \quad (44)_2$$

Basta quindi supporre che r soddisfaccia ancora alle disuguaglianze $r \leq \frac{\mu m_1^2}{H'_1}$, $r \leq \frac{\nu m_1}{H'_2}$, perchè sia $\Delta I > 0$. c. v. d.

8. *Teorema di Osgood.* Osserviamo che nelle ipotesi del numero precedente la (44) ci permette di dimostrare anche il teorema di OSGOOD, che enunceremo nel modo preciso seguente: *si può descrivere attorno all'estremale \mathcal{G} una regione tale che, presa una qualunque curva \mathcal{L} di essa passante per P_1 e P_2 e detto l il massimo segmento di ordinata compreso fra \mathcal{G} e \mathcal{L} il rapporto $\frac{\Delta I}{l^2} = \frac{I_{\mathcal{L}} - I_{\mathcal{G}}}{l^2}$ resta sempre positivo, superiore a un certo numero ν (*).*

Premettiamo anche qui un lemma che ci verrà pure utile in seguito;

LEMMA IX. *Sia $\zeta(x)$ una funzione a derivata limitata, e sia $\zeta(a) = 0$; si divida (ax) in due insiemi complementari $\mathcal{L}(x)$ e $\mathcal{L}_1(x)$ misurabili: sia inoltre $|\zeta| < \alpha$: si avrà*

$$\zeta^2(x) < |x - a| \int_{\mathcal{L}(x)} \zeta'^2 dx + 2\alpha \int_{\mathcal{L}_1(x)} |\zeta'| dx. \quad (45)$$

Infatti si ha

$$\left. \begin{aligned} \zeta^2(x) &= \left(\int_a^x \zeta' dx \right)^2 = \left(\int_{\mathcal{L}(x)} \zeta' dx + \int_{\mathcal{L}_1(x)} \zeta' dx \right)^2 = \\ &= \left(\int_{\mathcal{L}(x)} \zeta' dx \right)^2 + 2\zeta(x) \int_{\mathcal{L}_1(x)} \zeta' dx - \left(\int_{\mathcal{L}_1(x)} \zeta' dx \right)^2 < \\ &< \left(\int_{\mathcal{L}(x)} \zeta' dx \right)^2 + 2\zeta(x) \int_{\mathcal{L}_1(x)} \zeta' dx. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

(*) In questa forma è dato già da HADAMARD, l. c., pag. 479: e del resto si ricava facilmente anche dalle disuguaglianze contenute nella Memoria medesima di OSGOOD, *Transactions of the Am. Math. Society*, Vol. 2 (1901), pag. 273-295.

Ma per il teorema di SCHWARZ è $\left(\int_{\chi(x)} \zeta' dx\right)^2 \leq |x - a| \int_{\chi(x)} \zeta'^2 dx$: inoltre evidentemente è $\left|2\zeta(x) \int_{\chi_1(x)} \zeta' dx\right| < 2\alpha \int_{\chi_1(x)} |\zeta'| dx$: da (46) segue allora subito la (45).

Ciò posto, sia c l'ascissa in cui è massimo il valore assoluto della differenza $z(x)$ delle ordinate di \mathfrak{C} e di \mathfrak{L} ; sarà $l = |z(c)| = u(c) |z_1(c)|$. Supponiamo, per fissare le idee, che x_1 sia il più prossimo a c degli estremi x_1 e x_2 : sarà $c - x_1 \leq \frac{x_2 - x_1}{2}$: applicando allora il lemma IX, sempre colle notazioni del numero precedente, se $\chi(c)$ e $\chi_1(c)$ sono le parti di χ e χ_1 appartenenti a (x_1, c) si avrà

$$l^2 = z^2(c) = u^2(c) z_1^2(c) < m_2^2 \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{\chi(c)} z_1'^2 dx + 2m_2^2 \frac{r_1}{m_1} \int_{\chi_1(c)} |z_1'| dx \leq \left. \begin{aligned} & m_2^2 \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{\chi} z_1'^2 dx + 2m_2^2 \frac{r_1}{m_1} \int_{\chi_1} |z_1'| dz. \end{aligned} \right\} (47)$$

Confrontando (47) con (44), segue che, se $|z| < r$, il rapporto $\frac{\Delta l}{l^2}$ non può scendere al disotto del minore dei numeri $\frac{2\mu m_1^2 - r H'_1}{m_2^2 (x_2 - x_1)}$, $\frac{\mu_1 m_1^2 - r H'_2 m_1}{2m_2^2 r_1}$; e ciò dimostra il teorema di OSGOOD.

9. *Il caso di un estremo mobile.* È assai semplice vedere come si debbano modificare i risultati dei numeri precedenti, nell'ipotesi che gli estremi siano mobili. Cominciamo col supporre che solo l'estremo sinistro sia mobile su una curva \mathfrak{C}_1 di equazione

$$y = \eta_1(x); \tag{48}$$

supporremo che la funzione η_1 ammetta le derivate prime, seconde e terze finite, nell'intorno di $x = x_1$; e che nel punto $(x_1, y_1 = \eta_1(x_1) = \eta(x_1))$ comune a \mathfrak{C}_1 ed a \mathfrak{C} le due curve non si tocchino. Talchè esisterà allora un numero ν_1 tale che in un conveniente intorno di x_1 si ha sempre

$$\nu_1 < \left| \frac{\eta_1(x) - \eta(x)}{x - x_1} \right|. \tag{49}$$

Sia \mathcal{L} al solito la curva variata: sia $(x_1, \eta_1(x_1))$ il suo estremo sinistro: e naturalmente (x_2, η_2) il suo estremo destro: in base all'ipotesi precedente si può intanto notare che, tosto che si suppone $|z| < r$, sarà $|x_1 - x_2| < \frac{r}{v_1}$, e quindi $x_2 - x_1 < x_2 - x_1 + \frac{r}{v_1}$.

Occorre anzitutto riprendere la trasformazione della variazione totale data al n.º 2: sarà ora colle notazioni là usate:

$$\left. \begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx - \int_{x_1}^{x_2} \varphi dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y') dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x, y, \eta' + z_1 u') - \varphi - z_1 u f'_{y'}(x, y, \eta' + z_1 u') \right] dx - \int_{x_1}^{x_2} \varphi dx. \end{aligned} \right\} (50)$$

Si sviluppi il secondo integrale mediante le (13), (14): ma si osservi che i termini di primo e di secondo grado in z_1 non saranno più nulli, poichè non sarà $z(x_1) = 0$, i loro valori saranno invece per le (4) e (9) dati da

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (\varphi'_y z + \varphi'_{y'} z') dx &= - \left[\varphi'_{y'} z \right]_{x=x_1} \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[\varphi''_{y^2} z^2 + 2 \varphi''_{yy'} z z' + \varphi''_{y'^2} (2 z_1 z'_1 u u' + z_1^2 u'^2) \right] dx &= \\ &- \left[\varphi''_{yy'} z^2 + \varphi''_{y'^2} z^2 \frac{u'}{u} \right]_{x=x_1}. \end{aligned} \right\} (51)$$

D'altra parte si ha, scrivendo brevemente $\varphi_1, \varphi'_{x_1}, \dots, \eta_1, \eta'_1, \dots, u_1, u'_1, \dots$ al posto di $\varphi(x_1), \varphi'_x(x_1) \dots$:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_1} \varphi(x) dx &= \varphi_1 (x_1 - x_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\varphi'_{x_1} + \varphi'_{y_1} \eta'_1 + \varphi'_{y'_1} \eta''_1 \right] (x_1 - x_1)^2 + \lambda_3 (x_1 - x_1)^3; \\ z(x_1) = \eta_1(x_1) - \eta(x_1) &= (\eta'_{11} - \eta'_1) (x_1 - x_1) + \\ &+ \frac{1}{2} (\eta''_{11} - \eta''_{11}) (x_1 - x_1)^2 + \lambda_4 (x_1 - x_1)^3; \\ u(x_1) = u_1 + \lambda_5 (x_1 - x_1); \quad u'(x_1) &= u'_1 + \lambda_6 (x_1 - x_1); \\ \varphi'_{y'}(x_1) = \varphi'_{y'_1} + (\varphi''_{y'x_1} + \varphi''_{y'y_1} \eta'_1 + \varphi''_{y'^2} \eta''_1) &(x_1 - x_1) + \lambda_7 (x_1 - x_1)^2; \\ \varphi''_{yy'}(x_1) = \varphi''_{yy'_1} + \lambda_8 (x_1 - x_1); \quad \varphi''_{y'^2}(x_1) &= \varphi''_{y'^2_1} + \lambda_9 (x_1 - x_1). \end{aligned} \right\} (52)$$

Onde, sostituendo in (50) i valori che successivamente si hanno delle (13), (14), (51) e (52), si otterrà :

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y') dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 u z_1^2 z' \right] dx - \left. \begin{aligned} & - (x_1 - x_1) \left[\varphi'_{y'1} (\eta'_{11} - \eta'_1) + \varphi_1 \right] - \\ & - \frac{1}{2} (x_1 - x_1)^2 \left\{ \varphi'_{x_1} + \varphi'_{y'1} \eta'_1 + \varphi'_{y'1} \eta''_{11} + \right. \\ & \quad + 2 (\varphi''_{y'x_1} + \varphi''_{y'y_1} \eta'_1 + \varphi''_{y'^2_1} \eta''_1) (\eta'_{11} - \eta'_1) + \\ & \quad \left. + \varphi''_{y'y_1} (\eta'_{11} - \eta'_1)^2 + \varphi''_{y'^2_1} (\eta'_{11} - \eta'_1)^2 \frac{u'_1}{u_1} \right\} + \\ & + \Lambda_1 (x_1 - x_1)^3; \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Λ_1 è una quantità formata colle λ delle (52), e quindi limitata in funzione del massimo modulo delle $\varphi(x)$, $\eta_1(x)$, $\eta(x)$ e delle loro derivate dei primi tre ordini, di $u(x)$ e delle sue derivate dei primi due ordini, ed infine del minimo valore di $u(x)$ nel tratto (x_1, x_2) . In base a questa nuova formula è allora facile dimostrare l'ordinario teorema delle condizioni sufficienti per il minimo :

Se \mathcal{C} è un estemale passante per P_2 , la quale soddisfa alle seguenti condizioni :

- 1.^a taglia trasversalmente in (x_1, y_1) la curva \mathcal{C}_1 ,
- 2.^a non tocca in (x_1, y_1) la curva \mathcal{C}_1 ,
- 3.^a è $\varphi''_{y'^2} = f''_{y'^2}(x, \eta, \eta') > 0$ per $x_1 \leq x \leq x_2$,
- 4.^a esistono tre numeri positivi ε , r_1 e r_2 tali che per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_1$, $|\bar{y}' - \eta'| \leq r_2$, $0 < |y' - \bar{y}'|$, sia $E(x, y; \bar{y}', y') > 0$ (*),

(*) Nei testi di calcolo delle variazioni si usa chiedere che sia $E(x, y; \bar{y}', y') > 0$ solo per $x_1 \leq x \leq x_2$, e non, come qui si dice, per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2$: cfr. ad es., HADAMARD, l. c., n.º 348 e n.º 320. Però tale enunciato non è esatto poichè realmente nella dimostrazione interviene la condizione posta nel testo; e — conforme alla ben nota obbiezione del BOLZA circa le condizioni di minimo per l'ordinario problema in forma non parametrica — dal sapere che $E(x, y; \bar{y}', y') > 0$ solo per $x_1 \leq x \leq x_2$, non segue lo sia pure per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2$.

Ecco del resto un esempio che mostra l'insufficienza della condizione $E(x, y; \bar{y}', y') > 0$, solo per $x_1 \leq x \leq x_2$. Sia $f = 1 + y' + y'^2 + x y'^4$. Il segmento (0 1) dell'asse delle x è un estemale \mathcal{C} , il quale taglia trasversalmente nell'origine la seconda bisettrice \mathcal{C}_1 degli assi; $y = -x$. Su \mathcal{C} è $f''_{y'^2} = 2 > 0$; inoltre è $E(x, y; \bar{y}', y') = (\bar{y}' - y')^2 \left\{ 1 + x \left[(y' + \bar{y}')^2 + 2 \bar{y}'^2 \right] \right\}$ onde per

5.^a il fuoco a destra x'_1 della curva \mathcal{G}_1 segue x_2 , si può trovare un r tale che \mathcal{G} dà ad I il minimo rispetto alle curve \mathcal{L} che congiungono P_2 con un punto di \mathcal{G}_1 e per cui $|y - \eta| < r$.

Invero per la condizione 1.^a in (53) è identicamente nullo il coefficiente di $x_1 - x_1$. Per la condizione 5.^a la soluzione dell'equazione di JACOBI che in x_1 soddisfa alla

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{x_1} + \varphi'_{y_1} \eta'_1 + \varphi'_{y'_1} \eta''_{11} + 2(\varphi''_{y'x_1} + \varphi''_{y'y_1} \eta'_1 + \varphi''_{y'y'_1} \eta''_1)(\eta'_{11} - \eta'_1) + \\ + \varphi''_{y'y_1}(\eta'_{11} - \eta'_1)^2 + \varphi''_{y'y'_1}(\eta'_{11} - \eta'_1)^2 \frac{u'_1}{u_1} = 0 \quad (*) \end{aligned} \right\} (54)$$

è diversa da zero in tutto l'intervallo (x_1, x_2) : se si prende ε convenientemente piccolo, potremo supporla $\neq 0$ anche nell'intervallo $(x_1 - \varepsilon, x_2)$: sia dunque

$$0 < m_1 \leq u \leq m_2, \quad |u'| < m_3, \quad |u''| < m_4 \quad \text{in} \quad x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2. \quad (55)$$

Prendendo tale soluzione quale funzione u nel fare la trasformazione (53), si avrà che anche il coefficiente di $(x_1 - x_1)^2$ in (53) è nullo.

Infine noi potremo prendere ε tanto piccolo che la condizione 3.^a sia soddisfatta anche per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2$; e quindi, se, al solito, indichiamo con r un'indeterminata, e supponiamo $|z| \leq r$, basterà, per la condizione 2.^a o per l'equivalente (49), prendere $r < \frac{\varepsilon}{v_1}$ per essere certi che anche in tutto il tratto (x_1, x_2) siano soddisfatte le condizioni 3.^a, 4.^a e le (55).

Ciò posto, avremo dunque

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y') dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 u z_1^2 z_1' \right] dx + \Lambda_1(x_1 - x_1)^3, \quad (56)$$

$0 \leq x \leq 1$ è sempre $E > 0$ quali che siano y' e \bar{y}' . Ma il detto arco di estrema non dà il minimo: invero $I_{\mathcal{G}} = 1$; mentre, se si prende quale curva variata \mathcal{L} la spezzata formata dai segmenti $(-h, h) - (0, k)$, e $(0, k) - (1, 0)$, avremo $I_{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} \left[\frac{(k-h)^4}{h^2} - 2 \frac{(k-h)^2}{h} - 2 \right] + \delta(h, k)$ dove $\delta(h, k)$ è infinitesimo con h e k ; fissato quindi arbitrariamente k , si può prendere sempre h tanto piccola che $I_{\mathcal{L}}$ risulti negativo, e quindi $< I_{\mathcal{G}}$. c. v. d.

È chiaro che, se si trattasse del minimo debole, od anche solo se, come nel n.º 3, alle curve variate si imponesse una condizione del tipo $|y' - \bar{y}'| \leq \rho_1$, le precedenti difficoltà non si presenterebbero e l'enunciato del testo si potrebbe alquanto semplificare; e che analoga semplificazione si avrà sempre per il problema in forma parametrica.

(*) È facile vedere che la presente condizione per u è, in virtù dell'equazione (3) di EULERO cui soddisfa η , perfettamente equivalente a quella data da BLISS, *Math. Ann.* 58, pag. 73, e BOLZA, *Lectures on the Calculus of Variations*, pag. 107.

Λ_1 essendo una quantità sempre inferiore ad un certo numero M_1 dipendente solo da φ , η , η_i e dalle loro derivate dei primi 3 ordini, dai numeri m_1, m_2, m_3, m_4 ed affatto indipendente da z . Ragionando come nel n.º 7 col'applicare i lemmi V e VI in luogo del lemma VII (*), si avrà anche qui, serbando quelle stesse notazioni,

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y') dx + \int_{x_1}^{x_2} [\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 u z_1^2 z_1'] dx > \\ > (\mu_1 m_1^2 - r H_1) \int_{\chi} z_1^2 dx + (\nu_1 m_1 - r H_2) \int_{\chi_1} |z_1'| dx \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

dove χ, χ_1 indicano gli insiemi di punti di (x, x_2) in cui è $|z_1' u| \leq \rho_1$ e l'insieme complementare, e H_1, H_2 sono le stesse quantità che in (26) ed in (44)₂, in cui solo alle K', K'_1, K'_2, K'_3 sono sostituite K_1, K_2, K_3, K_4 .

Ma d'altra parte per (49) è

$$|\Lambda_1(x_1 - x_1)^3| < \frac{1}{v_1^3} M_1 |\eta_1(x_1) - \eta(x_1)|^3 = \frac{M_1}{v_1^3} |z^3(x_1)| < \frac{M_1}{v_1^3} m_2^2 r z_1^2(x_1).$$

Ed applicando il lemma IX col farvi $\alpha = \frac{r_1}{m_1}$ avremo

$$|\Lambda_1(x_1 - x_1)^3| < m_2^2 \frac{M_1}{v_1^3} r \left\{ (x_2 - x_1 + \varepsilon) \int_{\chi} z_1^2 dx + 2 \frac{r_1}{m_1} \int_{\chi_1} |z_1'| dx \right\}. \quad (58)$$

Raccogliendo da (57) e (58), segue dunque

$$\left. \begin{aligned} \Delta I > (\mu_1 m_1^2 - r H_3) \int_{\chi} z_1^2 dx + (\nu_1 m_1 - r H_4) \int_{\chi_1} |z_1'| dx \\ H_3 = H_1 + \frac{M_1}{v_1^3} (x_2 - x_1 + \varepsilon) m_2^2, \quad H_4 = H_2 + 2 \frac{M_1}{v_1^3} \frac{r_1}{m_1} m_2^2; \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

la quale dimostra che per $r < \frac{\mu_1 m_1^2}{H_3}$, $r < \frac{\nu_1 m_1}{H_4}$ è $\Delta I > 0$.

E ragionando come al n.º 8 si prova anche senz'altro il teorema di OSGOOD.

10. *Il caso di entrambi gli estremi mobili.* Pel caso di entrambi gli estremi mobili occorre premettere una generalizzazione del lemma IX:

(*) Poichè z_1 si annulla in x_2 soltanto e non più in x_1 .

LEMMA X. Se $\zeta(x)$ è una funzione a derivata limitata, si divida (ax) in due parti complementari $\chi(x)$ e $\chi_1(x)$ misurabili: sia inoltre sempre $|\zeta| < \alpha$ si avrà

$$\zeta^2(x) < 2\zeta^2(a) + 2|a-x| \int_{\chi(x)} \zeta'^2 dx + 8\alpha \int_{\chi_1(x)} |\zeta'| dx. \quad (60)$$

Infatti, posto $\zeta(x) - \zeta(a) = \zeta_1(x)$, avremo $|\zeta_1| < 2\alpha$, $\zeta_1(a) = 0$, $\zeta'_1 = \zeta'$, $\zeta^2 = [\zeta_1 + \zeta(a)]^2 < 2[\zeta_1^2 + \zeta^2(a)]$: onde applicando a ζ_1 la (45) avremo la (60).

Ciò posto, sia P_2 mobile sulla curva \mathfrak{C}_2 di equazione

$$y = \eta_2(x); \quad (61)$$

perchè \mathfrak{C} dia il minimo, occorrerà aggiungere alle condizioni del teorema precedente, le altre:

6.^a \mathfrak{C} taglia trasversalmente in x_2, y_2 la \mathfrak{C}_2 ,

7.^a \mathfrak{C} non tocca \mathfrak{C}_2 in x_2, y_2 ; onde esisteranno due numeri positivi ν_2 e ν_3 tali che in un intorno sufficientemente piccolo di x_2 sia

$$\nu_2 < \left| \frac{\eta_2(x) - \eta_2(x_2)}{x - x_2} \right| < \nu_3, \quad (62)$$

8.^a il fuoco a destra x'_2 di \mathfrak{C}_2 precede il fuoco a destra x'_1 di \mathfrak{C}_1 (condizione di Bliss); o in altri termini la soluzione dell'equazione di JACOBI che soddisfa a (54) soddisfa pure, — indicando coll'indice 2 i valori delle funzioni di x calcolati in x_2 — alla disuguaglianza

$$\left. \begin{aligned} & \varphi'_{x_2} + \varphi'_{y_2} \eta'_2 + \varphi'_{y_2} \eta''_{22} + 2(\varphi''_{y'_2} + \varphi''_{y'_2} \eta'_2 + \varphi''_{y'_2} \eta''_1)(\eta'_{22} - \eta'_2) + \\ & + \varphi''_{y'_2} (\eta'_{22} - \eta'_2)^2 + \varphi''_{y'_2} (\eta'_{22} - \eta'_2)^2 \frac{u'_2}{u_2} = A > 0. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Infine la condizione 4.^a dovrà essere soddisfatta per $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_2 + \varepsilon$. Possiamo allora supporre di prendere ε tanto piccolo che la condizione 3.^a sia soddisfatta in tutto $(x_1 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$, e che in questo intervallo la funzione $u(x)$ individuata da (54) soddisfi alle (55). Supporremo poi che per la curva variata \mathfrak{L} sia $|z| < r$ con $r < \frac{\varepsilon}{\nu_1}$, $r < \frac{\varepsilon}{\nu_2}$; per le (49) e (62), detti $(x_1, \eta_1(x_1))$, $(x_2, \eta_2(x_2))$ gli estremi di \mathfrak{L} , sarà (x_1, x_2) interno a $(x_1 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$, e quindi in esso varranno la 3.^a, la 4.^a condizione e le (55).

Ragionando come nel numero precedente, si vede che in virtù della 6.^a con-

dizione e delle posizioni (62), si ha

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y') dx + \int_{x_1}^{x_2} [\lambda_1 z_1^3 + \lambda_1 u z_1^2 z_1'] dx + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2} A(x_2 - x_1)^2 + \Lambda_1(x_1 - x_1)^3 + \Lambda_2(x_2 - x_2)^3 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Λ_2 essendo funzione affatto simile a Λ_1 . Si applichino ora i ragionamenti del n.º 7, usando però del lemma VIII in luogo del lemma VII poichè qui la z_1 non si annulla più negli estremi: si avrà

$$\left. \begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta' + z_1 u', y') dx + \int_{x_1}^{x_2} [\lambda_1 z_1^3 + \lambda_1 u z_1^2 z_1'] dx > \\ &> H''_3 r z_1^2(x_2) + (\mu m_1^2 - r H''_1) \int_{\chi} z_1^2 dx + (\nu_1 m_1 - r H''_2) \int_{\chi_1} |z_1'| dx \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

dove χ e χ_1 indicano al solito l'insieme di (x_1, x_2) in cui $|z_1' u| \leq \rho_1$ e l'insieme complementare, H''_1 e H''_2 sono dati dalle (26) (44), dove alle K'_1, K'_2, \dots si sostituiscono le K''_1, K''_2, \dots ed infine

$$H''_3 = \frac{M}{6 m_1} (m_2 + m_3)^2 (x_2 - x_1 + 2 \varepsilon) \left[2 m_1 (m_2 + m_3) + 3 \right]. \quad (65)_1$$

Si avrà poi per (62):

$$|\Lambda_2(x_2 - x_1)^3| < \frac{M_1}{\nu_2} (x_2 - x_1)^2 |z(x_2)| < \frac{M_1}{\nu_2} r (x_2 - x_1)^2. \quad (66)$$

E per il lemma X, ricordando che è sempre $x_2 - x_1 \leq x_2 - x_1 + 2 \varepsilon$, si ha

$$\left. \begin{aligned} &|\Lambda_1(x_1 - x_1)^3| < \frac{M_1}{\nu_1^3} |z^3(x_1)| < \frac{M}{\nu_1^3} m_2^2 r |z_1^2(x_1)| \leq \\ &\leq r \left[2 \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^2 z_1^2(x_2) + 2 \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^2 (x_2 - x_1 + 2 \varepsilon) \int_{\chi} z_1^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + 8 \frac{M_1}{\nu_1^3} m_2^2 \frac{r_1}{m_1} \int_{\chi_1} |z_1'| dx \right]. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Onde, osservando infine che

$$z_1^2(x_2) = \frac{z^2(x_2)}{u^2(x_2)} < \frac{\nu_2^2}{m_1^2} (x_2 - x_1)^2,$$

otterremo dalle (64)...(67)

$$\Delta I > \left(\frac{1}{2} A - r H''_5 \right) (x_2 - x_1)^2 + (u m_1^2 - r H''_3) \int_{x_1}^{x_2} z_1^2 dx + (u_1 m_1 - r H''_4) \int_{x_1}^{x_2} |z_1| dx \left. \vphantom{\Delta I} \right\} \quad (68)$$

$$H''_5 = H''_3 \frac{v_3^2}{m_1^2} + 2 \frac{M_1}{v_1^3} \frac{v_3^3}{m_1^2} m_2^2 + \frac{M_1}{v_1}$$

$$H''_3 = H''_1 + 2 \frac{M_1}{v_1^3} m_2^2 (x_2 - x_1 + 2\varepsilon)$$

$$H''_4 = H''_2 + 8 \frac{M_1}{v_1^3} m_2^2 \frac{r_1}{m_1}.$$

E questa disuguaglianza dimostra senz'altro il teorema. E anche qui confrontando questa disuguaglianza col lemma X, si potrebbe ottenere subito il teorema di OSGOOD.

CAPITOLO II.

$$\mathbf{L'integrale} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \dots, y^{(p)}) dx.$$

1. *Posizione del problema. Classificazione dei vari tipi di minimo.* Sia assegnato l'integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \dots, y^{(p)}) dx, \quad (1)$$

e si supponga che la funzione f sia di classe $C^{(p+2)}$ quando (x, y) è in una certa regione R e $y', y'', \dots, y^{(p)}$ sono finiti (*). Fissati in R i punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, si cerchi una curva \mathcal{C} di equazione

$$y = \eta(x), \quad (2)$$

— η essendo di classe $C^{(p)}$ almeno — passante per P_1 e P_2 e tale che ivi le derivate dei primi $p - 1$ ordini assumano rispettivamente i valori

(*) Nel n. 6 dovremo supporre f di classe $C^{(6)}$ almeno, ciò che porta una ulteriore restrizione solo se $p = 2$.

$y'_1, y''_1, \dots, y^{(p-1)}_1; y'_2, y''_2, \dots, y^{(p-2)}_2$; e che dia ad I il minimo valore, rispetto alle curve \mathfrak{L} che soddisfanno alle stesse condizioni in P_1 e P_2 e giacciono in un conveniente intorno di \mathfrak{C} .

Indichiamo colle lettere greche $\varphi, \varphi'_x, \dots$ i valori di f, f'_x, \dots quando per $y, y', \dots, y^{(p)}$ si ponga $\eta, \eta', \dots, \eta^{(p)}$. È noto che nelle nostre ipotesi \mathfrak{C} deve essere un estremales del problema: la funzione $\eta(x)$ è quindi tale che, se $z(x)$ è nulla colle sue derivate dei primi $p-1$ ordini in P_1 e P_2 , è identicamente

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\varphi'_y z + \varphi'_{y'} z' + \dots + \varphi'_{y^{(p)}} z^{(p)} \right) dx = 0; \quad (3)$$

ciò che porta (*) che η è di classe $C^{(2p)}$ almeno e soddisfa l'equazione

$$\varphi'_y - \frac{d}{dx} \varphi'_{y'} + \dots + (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} \varphi'_{y^{(p)}} = 0. \quad (4)$$

Qualche maggior particolare occorre aggiungere sulle curve variate \mathfrak{L} con cui vorremo confrontare \mathfrak{C} . Intanto, se noi le rappresentiamo con

$$y = y(x) = \eta(x) + z(x), \quad (5)$$

la $z(x)$ è nulla colle sue derivate dei primi $p-1$ ordini in P_1 e P_2 : ma inoltre è noto che da una parte perchè il problema abbia senso, $y(x)$, e quindi $z(x)$, debbono avere finite e continue le derivate dei primi $p-1$ ordini almeno; in altri termini occorre supporle di classe $D^{(p)}$ almeno, poichè ove si considerino curve le quali abbiano pure discontinuità nelle derivate p -esime, l'integrale (1) non ammette più minimo (**): e che d'altra parte, premesso ciò, nel ricercare le condizioni perchè \mathfrak{C} dia il minimo, si può senza inconveniente supporre \mathfrak{L} di classe $C^{(2p)}$, o anche analitica (***) .

Se si impone a \mathfrak{L} di soddisfare alle disuguaglianze

$$|z| = |y - \eta| \leq \rho_0, \quad |z'| = |y' - \eta'| \leq \rho_1, \dots, \quad |z^{(q)}| = |y^{(q)} - \eta^{(q)}| \leq \rho_q, \quad (q \leq p), \quad (6)$$

mentre nessuna disuguaglianza si impone a $y^{(q+1)}, \dots, y^{(p)}$, diremo che \mathfrak{L} giace nell'intorno $\left[\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_q, \frac{\infty}{(q+1)}, \dots, \frac{\infty}{(p)} \right]$ di ordine p di \mathfrak{C} ; ρ_0, ρ_1, \dots , si diranno la prima, seconda, ... dimensione dell'intorno. Con tali denominazioni,

(*) Circa l'obbiezione di DU BOIS-REYMOND per questo problema vedi ZERMELO, *Ueber die Herleitung der Differentialgleichungen, etc.*, Math. Annalen, Vol. 58 (1904), pag. 558.

(**) ZERMELO, Dissertazione citata, pag. 44 e ss. HADAMARD, l. c., pag. 145.

(***) HADAMARD, l. c., pag. 51 e ss.

il problema che ci proponiamo si enuncerà in modo preciso così: cercare sotto quali condizioni \mathcal{Q} dà il minimo rispetto alle curve \mathcal{L} di un intorno le cui prime q_1 ($q_1 \leq p+1$) dimensioni siano sufficientemente piccole, e le residue $p+1-q_1$ siano date a priori finite o infinite. Un tale intorno lo chiameremo D_{q_1} ; e, chiamando r un'indeterminata che si sottintende debba scegliersi convenientemente piccola, noi lo indicheremo con $\left[\begin{matrix} r, & r, & \dots, & r, & p_{q_1}, & p_{q_2}, & \dots, & p_p \\ (0) & (1) & & (q_1-1) \end{matrix} \right]$, i numeri p essendo finiti o infiniti. Il problema proposto si spezzerà in tanti problemi parziali secondo i valori del numero q_1 e delle $p+1-q_1$ dimensioni prefissate. Ed è chiaro che, se \mathcal{Q} dà il minimo in un dato intorno D_q , essa dà pure in particolare il minimo in tutti gli intorni D_{q_1} con $q_1 > q$ che hanno le ultime $p+1-q_1$ dimensioni uguali o minori di quelle corrispondenti di D_q : onde è da prevedere che al diminuire di q il problema diverrà sempre più difficile, e converrà, per accertare il minimo, imporre nuove condizioni sempre più restrittive.

Convien però notare che le dimensioni di un intorno si possono pensare sempre legate da certe relazioni di disuguaglianza: le quali permettono di ridurre assai il numero dei casi, che secondo quanto precede apparirebbero possibili. Ciò risulterà da alcuni lemmi che andiamo a dimostrare.

LEMMA XI. Se nel tratto (a, b) ($a < b$) la funzione $\zeta(x)$ è di classe $C^{(i)}$ ed è sempre $\zeta^{(i)}(x) > k$, oppure è sempre $\zeta^{(i)}(x) < -k$, k indicando un numero > 0 , la funzione $\zeta(x)$ ha un'oscillazione $> k \frac{(b-a)^i}{2^{i+2}(i-1)}$.

Sia infatti $i=1$: sarà $\zeta(b) - \zeta(a) = \int_a^b \zeta'(x) dx$: essendo per ipotesi ζ' continua e $|\zeta'| > k$, segue $|\zeta(b) - \zeta(a)| > k(b-a)$: che dimostra l'enunciato per $i=1$.

Si supponga ora dimostrato il lemma per $i < \tau$, e proviamolo per $i = \tau$. Poichè si suppone che sia sempre $\zeta^{(\tau)}(x) > k$ oppure $\zeta^{(\tau)}(x) < -k$, presi due qualunque punti c_1 e c_2 di (a, b) ragionando come sopra per il caso di $\tau=1$, si avrà $|\zeta^{(\tau-1)}(c_1) - \zeta^{(\tau-1)}(c_2)| > k|c_1 - c_2|$. Ne viene che, se consideriamo i due intervalli $\left(a, a + \frac{b-a}{4}\right)$, e $\left(b - \frac{b-a}{4}, b\right)$, in uno almeno di essi $\zeta^{(\tau-1)}(x)$ non cambia segno, ed anzi è sempre in valore assoluto $> k \frac{b-a}{4}$. Poichè, se c_1 e c_2 fossero due punti, l'uno nel primo, l'altro nel secondo di detti intervalli, in cui fosse $|\zeta^{(\tau-1)}(c_1)| < k \frac{b-a}{4}$,

$|\zeta^{(\tau-1)}(c_2)| < k \frac{b-a}{4}$ sarebbe $|\zeta^{(\tau-1)}(c_1) - \zeta^{(\tau-1)}(c_2)| < k \frac{b-a}{2}$, ciò che contraddice alla precedente disuguaglianza poichè

$$c_2 - c_1 > \left(b - \frac{b-a}{4}\right) - \left(a + \frac{b-a}{4}\right) = \frac{b-a}{2}.$$

Si chiami dunque (a_1, b_1) quello dei detti intervalli in cui è sempre $\zeta^{(\tau-1)}(x) > k \frac{b-a}{4}$ o $\zeta^{(\tau-1)}(x) < -k \frac{b-a}{4}$: e si applichi — come per ipotesi è legittimo — il nostro lemma ponendo $\tau-1$ al posto di i , (a_1, b_1) al posto di (a, b) , $k \frac{b-a}{4}$ al posto di k . L'oscillazione di ζ in (a_1, b_1) sarà quindi maggiore di $k \frac{b-a}{4} \frac{(b_1 - a_1)^{\tau-1}}{2^{(\tau+1)(\tau-2)}} = k \frac{(b-a)^\tau}{2^{(\tau+2)(\tau-1)}}$; ed a fortiori ciò varrà quindi per (a, b) .

LEMMA XII. Sia ζ una funzione di classe $D^{(q)}$ in (a, b) : si supponga $|\zeta| < \rho_0$, $|\zeta^{(i)}| < \rho_i$; e, per fissare le idee, si supponga $\rho_0^{\frac{1}{q}} < \frac{b-a}{2}$ (*). Esistono q numeri positivi $\alpha_1, \dots, \alpha_q$, funzioni di ρ_i soltanto, tali che

$$|\zeta^{(i)}| < \alpha_i \rho_0^{\frac{q-i}{q}} \quad (i = 1 \dots q). \quad (7)$$

Il teorema è vero per $i = q$, poichè basta allora fare $\alpha_q = \rho_q$: noi lo supporremo dimostrato per $i > \tau$, e lo proveremo per $i = \tau$: con ciò sarà dimostrato in generale.

Sia c il punto in cui $\zeta^{(\tau)}(x)$ assume il suo massimo valore assoluto: e, per fissare le idee, sia $\zeta^{(\tau)}(c) = l > 0$. Sia c_1 un punto di (a, b) tale che $|c_1 - c| = \rho_0^{\frac{1}{q}}$: poichè si suppone $\rho_0^{\frac{1}{q}} < \frac{b-a}{2}$, un tale punto esisterà certamente. Per la formula di TAYLOR è

$$\begin{aligned} \zeta^{(\tau)}(x) = l + \zeta^{(\tau+1)}(c)(x-c) + \frac{1}{2!} \zeta^{(\tau+2)}(c)(x-c)^2 + \dots + \\ \dots + \frac{1}{(q-\tau)!} \zeta^{(q)}(\bar{x})(x-c)^{q-\tau} \end{aligned}$$

(*) Poichè in quanto segue useremo questo teorema quando ρ_0 tende a zero, questa limitazione che lega ρ_0 e $b-a$ si potrà sempre supporre soddisfatta, quindi non ci importa toglierla. Però sarebbe facile modificare il ragionamento in modo da evitare questa ipotesi: le α_i risulterebbero funzioni, oltre che di ρ_i , anche di $b-a$ e di ρ_0 , crescenti con ρ_0 .

\bar{x} indicando un numero compreso fra x e c . Quindi, ricordando che per $i > \tau$ si ammettono vere le (7), se x è un punto di (c, c) per cui quindi $|x - c| < \rho_0 \frac{1}{q}$, sarà

$$\zeta^{(\tau)}(x) > l - \rho_0 \frac{q-\tau}{q} \left[\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!} \alpha_{\tau+2} + \dots + \frac{1}{(q-\tau)!} \alpha_q \right]. \quad (8)$$

Distinguiamo due casi secondo che è

$$l \leq \rho_0 \frac{q-\tau}{q} \left[\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!} \alpha_{\tau+2} + \dots + \frac{1}{(q-\tau)!} \alpha_q \right]; \quad (9)$$

oppure è

$$l > \rho_0 \frac{q-\tau}{q} \left[\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!} \alpha_{\tau+2} + \dots + \frac{1}{(q-\tau)!} \alpha_q \right].$$

In questo secondo caso il secondo membro di (8) è positivo: quindi si può applicare a ζ ed all'intervallo (c_1, c) il lemma precedente; avremo da (8) che l'oscillazione di ζ in (c_1, c) supera

$$\left[l - \rho_0 \frac{q-\tau}{q} \left(\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!} \alpha_{\tau+2} + \dots + \frac{1}{(q-\tau)!} \alpha_q \right) \right] \frac{\rho_0 \frac{\tau}{q}}{2^{(\tau+2)(\tau+1)}}.$$

Ma l'oscillazione di ζ in (a, b) , e quindi a fortiori in (c_1, c) , non può superare $2\rho_0$: quindi si avrà

$$\left[l - \rho_0 \frac{q-\tau}{q} \left(\alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!} \alpha_{\tau+2} + \dots + \frac{1}{(q-\tau)!} \alpha_q \right) \right] \rho_0 \frac{\tau}{q} < 2^{(\tau+2)(\tau+1)+1} \rho_0,$$

e quindi pure

$$l < \left[2^{2\tau+2\tau-1} + \alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!} \alpha_{\tau+2} + \dots + \frac{1}{(q-\tau)!} \alpha_q \right] \rho_0 \frac{q-\tau}{q}. \quad (10)$$

l verifica dunque l'una o l'altra delle due disuguaglianze (9) o (10), e poichè (10) include (9), risulta senz'altro dimostrata la (7) per $i = \tau$ ove si ponga

$$\alpha_\tau = 2^{2\tau+2\tau-1} + \alpha_{\tau+1} + \frac{1}{2!} \alpha_{\tau+2} + \dots + \frac{1}{(q-\tau)!} \alpha_q. \quad (11)$$

È quindi pienamente dimostrato il lemma, e la formola (11), ove si aggiunga $\alpha_q = \rho_q$, determina per ricorrenza le α_i .

Il contenuto di questo lemma si può anche enunciare dicendo che, quando si considerano degli intorni di una data curva \mathcal{C} di cui la prima e la $(q + 1)$ esima dimensione siano ρ_0 e ρ_q , ci si può sempre, senza portare alcuna limitazione effettiva, limitare a considerare il caso in cui la i -esima dimensione con $i \leq q$ sia data da un numero $< \alpha_{i-1} \rho_0 \frac{q-i+1}{q}$. In particolare ove si considerino degli intorni del tipo D_{q_1} in cui almeno la prima dimensione ci si riserva di prendere arbitrariamente piccola, si può senz'altro supporre che anche arbitrariamente piccole si possano prendere tutte le dimensioni che precedono quella che tra le $p + 1 - q_1$ dimensioni prefissate che non sono ∞ è di ordine massimo. In altri termini dunque noi potremo, senza restringere la portata delle nostre considerazioni, limitarci a studiare le condizioni sufficienti (o necessarie) perchè \mathcal{C} dia il minimo rispetto alle curve \mathcal{L} che appartengono ad un intorno D_{q_1} di uno dei due tipi seguenti

$$\left[\underset{(0)}{r}, \underset{(1)}{r}, \dots, \underset{(q_1-1)}{r}, \rho_{q_1}, \underset{(q_1+1)}{\infty}, \underset{(q_1+2)}{\infty}, \dots, \underset{(p)}{\infty} \right], \quad (12)$$

$$\left[\underset{(0)}{r}, \underset{(1)}{r}, \dots, \underset{(q_1-1)}{r}, \underset{(q_1)}{\infty}, \underset{(q_1+1)}{\infty}, \underset{(q_1+2)}{\infty}, \dots, \underset{(p)}{\infty} \right]; \quad (13)$$

poichè la ricerca delle condizioni di minimo rispetto ad un intorno D_{q_1} del tipo $\left[\underset{(0)}{r}, \underset{(1)}{r}, \dots, \underset{(q_1-1)}{r}, \rho_{q_1}, \rho_{q_1+1}, \dots, \rho_q, \underset{(q_1+1)}{\infty}, \dots, \underset{(p)}{\infty} \right]$ per cui le $\rho_{q_1}, \rho_{q_1+1}, \dots$ fossero qualunque finite o no, ma la ρ_q fosse finita, è equivalente alla ricerca delle condizioni di minimo in un intorno D_q del tipo (12). Per brevità a seconda che \mathcal{C} darà ad I il minimo in un intorno del tipo (12) o (13), diremo che \mathcal{C} dà il minimo di ordine $q_1 - 1$ nel campo limitato od illimitato (*): la distinzione cade solo nel caso in cui $q_1 = p + 1$ perchè allora tutte le dimensioni dell'intorno sono da scegliersi arbitrariamente piccole (minimo debole).

In quanto segue noi daremo condizioni sufficienti per il minimo di ordine $p - 1$ nel campo limitato o illimitato, e di ordine $p - 2$ nel campo limitato. Mostriamo poi su esempi che quando si voglia studiare il minimo di ordine $p - 2$ nel campo illimitato, e a maggior ragione quando si voglia il minimo di ordine $q < p - 2$, si dovrà certo introdurre delle condizioni di tipo nuovo, e probabilmente assai diverso da quelle note come condizioni necessarie.

(*) Con tale terminologia i due teoremi dei nn. 3 e 7 del Capitolo precedente si dovrebbero chiamare rispettivamente teoremi delle condizioni sufficienti per il minimo di $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ di ordine 0 nel campo limitato e nel campo illimitato.

È opportuno trasformare ancora leggermente la (18): si ponga

$$Z_i = \sum z_i u_i^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \dots, p); \quad \bar{Z}_i = \sum z'_i u_i^{(i-1)}, \quad (i = 1 \dots p); \quad (19)$$

le (15) si scriveranno

$$z = Z_0, \quad z' = Z_1, \dots, \quad z^{(p-1)} = Z_{p-1}, \quad z^{(p)} = Z_p + \bar{Z}_p, \quad (20)$$

ed avranno come conseguenza le altre

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \dots = \bar{Z}_{p-1} = 0. \quad (21)$$

Infine la (18) darà luogo all'identità seguente, fondamentale per noi:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{0 \leq i, k \leq p} \varphi''_{y^{(i)}y^{(k)}} Z_i Z_k + 2 \bar{Z}_p \sum_{0 \leq i \leq p} \varphi''_{y^{(p)}y^{(i)}} Z_i \right] dx = 0. \quad (22)$$

È noto che la condizione di JACOBI — necessaria perchè \mathcal{C} dia ad I un valore massimo o minimo — si può esprimere dicendo che esiste un sistema di soluzioni associate dell'equazione di JACOBI, il cui Wronskiano è $\neq 0$ in tutto il tratto (x_1, x_2) . D'ora in poi supporremo che \mathcal{C} soddisfaccia alla condizione di JACOBI: e che u_1, u_2, \dots, u_p sia il sistema di funzioni di cui questa condizione afferma l'esistenza: indicando con $W(r, s, \dots, t)$ il Wronskiano di r, s, \dots, t , supporremo precisamente che in (x_1, x_2) sia

$$W(u_1, u_2, \dots, u_p) \geq m_1 > 0; \quad (23)$$

ed inoltre che le u_i e le loro derivate dei primi p ordini siano in modulo tutte inferiori a m_2 :

$$\left[|u_i|, |u'_i|, \dots, |u_i^{(p)}| \right] < m_2 \quad (i = 1 \dots p). \quad (24)$$

In tale ipotesi, qualunque sia la \mathcal{L} , e quindi la funzione $z(x)$ di (5), si potranno determinare le z_i in modo che siano soddisfatte le (15), poichè le (15) sono equazioni lineari nelle z_i il cui determinante è $W(u_1, u_2, \dots, u_p)$. Importa notare le relazioni che passeranno tra le $z^{(k)} = Z_k$ ($0 \leq k \leq p-1$), z_i, Z_p, \bar{Z}_p . Si avrà dalle (15)

$$z_i = \sum_0^{p-1} \alpha_{ik}(x) z^{(k)}, \quad (25)_1$$

$$Z_p = \sum_0^{p-1} \beta_k(x) z^{(k)}, \quad (25)_2$$

dove

$$\alpha_{ik}(x) = \frac{1}{W(u_1 \dots u_p)} \frac{\partial W(u_1 \dots u_p)}{\partial u_i^{(k)}},$$

$$\beta_k(x) = \sum \alpha_{ik} u_i^{(k)}.$$

Dalle (23) e (24) segue quindi che esisteranno due numeri positivi a_1 e a_2 dipendenti solo da m_1, m_2 (e da p) tali che

$$|\alpha_{ik}(x)| < a_1, \quad |\beta_k(x)| < a_2. \quad (26)$$

Inoltre per $\bar{Z}_p = \bar{\Sigma} z'_i u_i^{(p-1)}$ si potranno anche trovare altre espressioni eliminando mediante le (21) alcune delle z'_i . Ad esempio si avranno per \bar{Z}_p le nuove espressioni

$$\bar{Z}_p = \gamma_l(x) z'_l \quad (l = 1 \dots p) \quad (27)$$

con

$$\gamma_l(x) = \frac{W(u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_l, u_{l+1}, \dots, u_p)}{W(u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_{l+1}, \dots, u_p)};$$

e per le (23) e (24) si potrà trovare un numero positivo a_3 tale che

$$|\gamma_l(x)| > a_3. \quad (28)$$

3. *Trasformazione e partizione della variazione totale.* Si ponga, come al solito,

$$\left. \begin{aligned} E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) = \\ = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, y^{(p)}) - f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}) - \\ - (y^{(p)} - \bar{y}^{(p)}) f'_{y^{(p)}}(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

e si mantengano le notazioni del numero precedente. Si ha subito:

$$\left. \begin{aligned} \Delta I = \int_{x_1}^{x_2} [f(x, y, y', \dots, y^{(p)}) - \varphi] dx = \\ = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y, \dots, y^{(p-1)}; \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)}) dx + \\ + \int_{x_1}^{x_2} [f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \eta^{(p)} + Z_p) - \varphi + \\ + \bar{Z}_p f'_{y^{(p)}}(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \eta^{(p)} + Z_p)] dx. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Ma per la formola di TAYLOR, rammentando che per $i \leq p - 1$ è $y^{(i)} = \eta^{(i)} + Z_i$, si avrà

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \eta^{(p)} + Z_p) - \varphi = \\ = \sum_{0 \leq i \leq p} \varphi'_{y^{(i)}} Z_i + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i, h \leq p} \varphi''_{y^{(i)}y^{(h)}} Z_i Z_h + \lambda_1, \\ f'_{y^{(p)}}(x, y, \dots, y^{(p-1)}, \eta^{(p)} + Z_p) = \varphi'_{y^{(p)}} + \sum_{0 \leq i \leq p} \varphi''_{y^{(p)}y^{(i)}} Z_i + \lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

dove si pone

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \frac{1}{3!} \sum_{i, h, k} \bar{f}'''_{y^{(i)}y^{(h)}y^{(k)}} Z_i Z_h Z_k, \\ \lambda_2 = \frac{1}{2!} \sum_{i, h} \bar{f}'''_{y^{(p)}y^{(i)}y^{(h)}} Z_i Z_h, \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq i, h, k \leq p) \quad (32)$$

e con \bar{f}''' \bar{f}''' si indicano valori delle derivate terze di f calcolati in punti convenienti della forma

$$\left. \begin{aligned} (x, \eta + \bar{\theta} Z_0, \dots, \eta^{(p-1)} + \bar{\theta} Z_{p-1}, \eta^{(p)} + \bar{\theta} Z_p), \\ (x, \eta + \bar{\bar{\theta}} Z_0, \dots, \eta^{(p-1)} + \bar{\bar{\theta}} Z_{p-1}, \eta^{(p)} + \bar{\bar{\theta}} Z_p) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

con $0 < \bar{\theta} < 1$, $0 < \bar{\bar{\theta}} < 1$. Sostituiamo (31) nell'ultimo integrale di (30): si vede subito che gli integrali che portano su termini di primo e di secondo grado nelle Z_i , \bar{Z}_i sono nulli per le identità (3) e (22). E si otterrà pertanto

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)}) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 + \bar{Z}_p \lambda_2) dx. \quad (34)$$

È questa la formola analoga alla (16) del Cap. I.

4. *Il minimo di ordine $p - 1$ nel campo limitato o illimitato.* Partendo dalla formola precedente, è assai facile dimostrare i due teoremi seguenti relativi al minimo di ordine $p - 1$ nel campo limitato o illimitato che sono gli analoghi dei teoremi del Cap. I.

I. *Se l'estremale \mathcal{Q} soddisfa alla condizione di Jacobi e se inoltre sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

1.° $f''_{y^{(p)^2}}(x, \eta, \eta', \dots, \eta^{(p)}) > 0$,

2.° $E(x, \eta, \eta', \dots, \eta^{(p-1)}; \eta^{(p)}, y^{(p)}) > 0$ per $0 < |y^{(p)} - \eta^{(p)}| \leq \rho_p$,

si può trovare un numero r tale che \mathcal{Q} dà ad I il valore minimo rispetto a

tutte le curve \mathcal{L} che soddisfanno alle stesse condizioni che \mathcal{C} negli estremi e sono tali che

$$|y - \eta| \leq r, \quad |y^{(p)} - \eta^{(p)}| \leq \rho_p.$$

O anche, come risulta dal lemma XII, rispetto a tutte le curve \mathcal{L} che appartengono all'intorno $\left[\begin{smallmatrix} r, & r, \dots, & r, & \rho_p \\ (0) & (1) & (p-1) \end{smallmatrix} \right]$, ove r sia scelto convenientemente piccolo.

Le precedenti condizioni, quando si intendano le disuguaglianze prese in senso largo, sono pure necessarie per il minimo.

II. Se l'estremale \mathcal{C} soddisfa alla condizione di Jacobi, ed inoltre è tale che

$$1.^{\circ} f''_{y^{(p)}}(x, \eta, \eta', \dots, \eta^{(p)}) > 0,$$

2.^o esistono $p+1$ numeri $r_0, r_1, r_2, \dots, r_p$ tali che per $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - \eta| \leq r_0, \dots, |y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)}| \leq r_{p-1}, |\bar{y}^{(p)} - \eta^{(p)}| \leq r_p, 0 < |\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}|$ sia $E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > 0$,

si può trovare un numero r tale che \mathcal{C} dà il minimo rispetto a tutte le curve \mathcal{L} che soddisfanno alle stesse condizioni di \mathcal{C} negli estremi ed appartengono all'intorno $\left[\begin{smallmatrix} r, & r, \dots, & r, & \infty \\ (0) & (1) & (p-1) \end{smallmatrix} \right]$ di \mathcal{C} .

La dimostrazione di questi due teoremi è affatto simile a quella degli analoghi nel caso $p=1$. Importa richiamarne alcuni punti essenziali, per mostrare in che parti essa venga a mancare quando si parli di un minimo di ordine $\leq p-2$. Fissiamo la mente sul primo di questi teoremi. È essenziale il notare che, in conseguenza delle osservazioni finali del n.º 2, quando si abbia $|z| \leq r, |z'| \leq r, \dots, |z^{(p-1)}| \leq r$, si ha pure che $|Z_i| \leq r$ per $i \leq p-1, |Z_p| \leq a_2 r$. In base a questo si vede subito che per r convenientemente piccolo per il primo integrale di (34) si avrà una limitazione del tipo

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)}) dx > \mu \int_{x_1}^{x_2} \bar{Z}_p^2 dx,$$

che per (27) e (28) si potrà pure scrivere

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)}) dx > \frac{\mu a_2^2}{p} \sum_{i=1}^p \int_{x_1}^{x_2} z_i^2 dx. \quad (35)$$

D'altro canto, indicando con M il massimo delle derivate terze di $f(x, y, \dots, y^{(p)})$ nell'intorno $\left[\begin{smallmatrix} r, & r, \dots, & r, & a_2 r \\ (0) & (1) & (p-1) & (p) \end{smallmatrix} \right]$ di \mathcal{C} , si avrà per (32), (33)

$$\int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 + \lambda_2 \bar{Z}_p) dx \leq \frac{1}{3!} M \bar{Z}_{ihk} \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h Z_k| dx + \frac{1}{2!} M \sum_{ih} \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h \bar{Z}_p| dx. \quad (36)$$

Ma, supposto per semplicità $\alpha_2 \geq 1$, per modo che senza eccezione si possa scrivere $|Z_i| < \alpha_2 r$ ($0 \leq i \leq p$), si ha, ricordando il lemma III:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h Z_k| dx &< \alpha_2 r \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h| dx \leq \alpha_2 r m_2^2 \sum_1^p \int_{x_1}^{x_2} |z_{i_1} z_{i_2}| dx \leq \\ &\leq \frac{\alpha_2 m_2^2}{2} r \sum_1^p \int_{x_1}^{x_2} (z_{i_1}^2 + z_{i_2}^2) dx \leq \alpha_2 m_2^2 K' r \sum_1^p \int_{x_1}^{x_2} z_i'^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

E analogamente, ricordando anche (19) e (23):

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |Z_i Z_h \bar{Z}_p| dx &< \alpha_2 r \int_{x_1}^{x_2} |Z_i \bar{Z}_p| dx \leq \alpha_2 m_2^2 r \sum_1^p \int_{x_1}^{x_2} |z_{i_1} z'_{i_2}| dx \leq \\ &\leq \frac{\alpha_2 m_2^2}{2} r \sum_1^p \int_{x_1}^{x_2} (z_{i_1}^2 + z'_{i_2}{}^2) dx \leq \frac{\alpha_2 m_2^2 (K'_1 + 1)}{2} r \sum_1^p \int_{x_1}^{x_2} z_i'^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

È chiaro come sommando le (35) (36), per (37) e (38) si abbia

$$\left. \begin{aligned} \Delta I &> \left(\frac{\mu \alpha_2^2}{p} - r H_6 \right) \sum_1^p \int_{x_1}^{x_2} z_i'^2 dx \\ H_6 &= \frac{1}{3!} (p+1)^3 \alpha_2 m_2^2 K' + \frac{1}{4} (p+1)^2 \alpha_2 m_2^2 (K'_1 + 1), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

onde basta supporre $r < \frac{\mu \alpha_2^2}{p H_6}$, perchè sia $\Delta I > 0$.

Non insisterò su questa dimostrazione nè su quella del teorema II perchè questi teoremi risultano d'altra parte anche dalla ordinaria teoria (*). Notiamo invece che, ove si voglia parlare di minimo di ordine $\leq p - 2$, come faremo in seguito, il punto in cui il precedente ragionamento viene a mancare, sta nelle disuguaglianze (37) e (38). Perchè ove ad es. si voglia il minimo di ordine $p - 2$, si potrà solo imporre che $|z|, |z'|, \dots, |z^{(p-2)}|$ siano inferiori ad un numero r che resta in nostro arbitrio scegliere sufficientemente piccolo: ne verrà che $|Z_1|, |Z_2|, \dots, |Z_{p-2}|$ saranno ancora inferiori ad r ; ma nulla si potrà dire per $|Z_{p-1}|$ e $|Z_p|$. Onde non sarà possibile senz'altro dedurre le disuguaglianze (37) e (38) quando gli indici i, h, k siano tutti uguali a $p - 1$ o a p . Cosicchè per procedere noi dovremo con particolari artifici eliminare appunto questi termini. Occorre a tale scopo premettere un lemma.

(*) HADAMARD, l. c., pag. 462.

5. LEMMA XIII. Sia un integrale della forma $\int_{x_1}^{x_2} \gamma(x, z, z', \dots, z^{(p-1)}) z^{(p)} dx$; e sia γ una funzione che abbia le derivate prime. Si può determinare una funzione $\gamma_1(x, z, z', \dots, z^{(p-1)})$ tale che, se z è una funzione arbitraria che si annulli colle sue derivate di ordine $\leq p-1$ in x_1 e x_2 , sia identicamente

$$\int_{x_1}^{x_2} \gamma(x, z, z', \dots, z^{(p-1)}) z^{(p)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \gamma_1(x, z, z', \dots, z^{(p-1)}) dx. \quad (40)$$

Invero si ponga

$$\delta(x, z, z', \dots, z^{(p-2)}, z^{(p-1)}) = \int_0^{z^{(p-1)}} \gamma(x, z, z', \dots, z^{(p-2)}, \zeta) d\zeta;$$

si avrà identicamente, se z è un'arbitraria funzione di x , di classe $C^{(p)}$

$$\frac{d\delta}{dx} = \gamma(x, z, z', \dots, z^{(p-2)}, z^{(p-1)}) z^{(p)} + \int_0^{z^{(p-1)}} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \sum_1^{p-1} \frac{\partial \gamma}{\partial z^{(k-1)}} z^{(k)} \right) d\zeta.$$

D'altra parte $\delta(x, z, z', \dots, z^{(p-2)}, 0) = 0$: quindi, se z si annulla colle sue derivate dei primi $p-1$ ordini in x_1 e x_2 , sarà

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(x_2, 0, \dots, 0) - \delta(x_1, 0, \dots, 0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\delta(x, z, z', \dots, z^{(p-1)})}{dx} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x, z, \dots, z^{(p-1)}) z^{(p)} dx - \int_{x_1}^{x_2} \gamma_1(x, z, z', \dots, z^{(p-1)}) dx \end{aligned}$$

dove si ponga

$$\gamma_1(x, z, z', \dots, z^{(p-1)}) = - \int_0^{z^{(p-1)}} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \sum_1^{p-1} \frac{\partial \gamma}{\partial z^{(k-1)}} z^{(k)} \right) d\zeta. \quad (41)$$

E questa dimostra la (40).

Sulla (41) si possono fare due osservazioni.

Osservazione I. Se γ ha le derivate parziali dei primi s ordini rapporto a $z, z', \dots, z^{(p-1)}$, e se $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ ha le analoghe derivate parziali di ordine $\leq s-1$, anche γ_1 ha le derivate parziali di ordine $\leq s-1$. Se inoltre in un certo campo finito C in cui siano soddisfatte disuguaglianze della forma $|z^{(i)}| \leq \rho$, le derivate di γ e di $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ sono inferiori in modulo a un certo numero M_1 , le derivate di γ_1 in C sono inferiori a un numero della forma αM_1 , dove α è una funzione (non decrescente) delle ρ .

Osservazione II. Se per $z = z' = \dots = z^{(p-1)} = 0$, γ e quindi pure $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ hanno le derivate parziali rapporto a $z, z', \dots, z^{(p-1)}$ dei primi s_1 ordini nulle, lo stesso sarà per le derivate parziali di γ_1 di ordine $\leq s_1 + 1$. Naturalmente si suppone $s_1 \leq s - 2$, altrimenti non saremmo certi per l'osservazione I che esistessero le derivate di γ_1 di ordine $s_1 + 1$.

Applicando a γ e γ_1 la formula di TAYLOR arrestata ai primi termini non nulli nell'origine, si può dire che se γ è della forma

$$\gamma = \sum \gamma_{i_1 \dots i_{s_1}} z^{(i_1)} \dots z^{(i_{s_1})},$$

la γ_1 ha la forma:

$$\gamma_1 = \sum \gamma_{1, i_1 i_2 \dots i_{s_1+1}} z^{(i_1)} z^{(i_2)} \dots z^{(i_{s_1+1})}.$$

6. *Il minimo d'ordine $p - 2$ nel campo limitato.* Introduciamo ora l'ipotesi che f sia di classe $C^{(5)}$ per (x, y) in R e per $y' \dots y^{(p)}$ finiti; tale ipotesi è conseguenza di quelle fatte in principio del Capitolo fuorchè per $p = 2$. Avremo allora il teorema seguente: *Sia \mathcal{C} un'estremale del problema la quale soddisfaccia alla condizione di Jacobi: e, fissato un numero ρ_{p-1} , supponiamo che per*

$$|y^{(p-1)} - \eta^{(p-1)}| \leq \rho_{p-1} \tag{42}$$

$$|\bar{y}^{(p)} - \eta^{(p)}| \leq A \quad \text{dove} \quad A > a_2 \rho_{p-1} \tag{43}$$

siano soddisfatte le condizioni seguenti:

$$1.^{\circ} f''_{y^{(p)}}(x, \eta, \eta', \dots, \eta^{(p-2)}, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}) > 0,$$

2.^o esistano $p - 1$ numeri r_0, r_1, \dots, r_{p-2} tali che per $|y - \eta| \leq r_0, |y' - \eta'| \leq r_1, \dots, |y^{(p-2)} - \eta^{(p-2)}| \leq r_{p-2}, 0 < |\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}|$ sia

$$E(x, y, y', \dots, y^{(p-2)}, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > 0;$$

è possibile trovare un r tanto piccolo che \mathcal{C} dia ad I il minimo rispetto alle curve \mathcal{L} che soddisfanno alle stesse condizioni negli estremi e che giacciono nell'intorno $\left[\begin{matrix} r, & r, & \dots, & r, & \rho_{p-1}, & \infty \\ (0) & (1) & & (p-2) & & \end{matrix} \right]$ di \mathcal{C} . O anche per il lemma XII, sotto forma apparentemente più larga, è possibile trovare un r tale che \mathcal{C} dia ad I il minimo rispetto alle curve \mathcal{L} le quali soddisfanno la limitazione (42) e la

$$|y - \eta| < r.$$

Cominciamo coll'osservare che, semplicemente ricordando la definizione della funzione E , si può estendere il teorema del n.º 5 del Cap. I sul com-

portamento della funzione E per y' tendente ad ∞ , dimostrando che: se in un campo finito e chiuso T di valori di $(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)})$ sono soddisfatte le condizioni seguenti:

$$1.^{\circ} f''_{y^{(p)^2}}(x, y, y', \dots, y^{(p-2)}, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}) > 0,$$

$$2.^{\circ} E(x, y, y', \dots, y^{(p-2)}, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > 0 \text{ per } 0 < |\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}|,$$

se T_1 è un campo chiuso contenuto in T — per cui esista un $\delta > 0$ tale che ogni punto di T_1 sia il punto di mezzo di un segmento di lunghezza 2δ , parallelo all'asse delle $\bar{y}^{(p)}$ e totalmente contenuto in T , — esistono due numeri positivi σ_1 e μ_1 tali che, se $|\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}| > \sigma_1$ e $(x, y, \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)})$ è di T_1 , si ha

$$E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > \mu_1 |\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}|. \quad (44)$$

Ciò premesso, dalle condizioni poste nel nostro teorema segue evidentemente che si può prendere un r' , minore di r_0, r_1, \dots, r_{p-2} , e tale che sia

$$A > a_2 (\rho_{p-1} + (p-1)r'), \quad (45)$$

e che per valori di $x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}$ che soddisfanno a (42), (43) e alle

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad |y - \eta| \leq r', \quad |y' - \eta'| \leq r', \dots, \quad |y^{(p-2)} - \eta^{(p-2)}| \leq r', \quad (46)$$

si abbia sempre

$$f''_{y^{(p)^2}}(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}) > 0$$

$$E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > 0 \text{ per } 0 < |\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}|.$$

Prendiamo come campo T il campo dato da (42), (43), (46); come campo T_1 il campo dato da (42), (46), e

$$|\bar{y}^{(p)} - \eta^{(p)}| \leq a_2 (\rho_{p-1} + (p-1)r'), \quad (47)$$

come numero δ il numero $A - a_2 (\rho_{p-1} + (p-1)r')$ che per (45) è > 0 ; applichiamo il teorema ora enunciato: si potrà dunque determinare σ_1 e μ_1 tali che nel campo dato da (42), (46), (47), tosto che è

$$|\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}| > \sigma_1, \quad (48)$$

si abbia (44).

D'altra parte, posto al solito

$$E_1(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) = \frac{E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)})}{(\bar{y}^{(p)} - y^{(p)})^2} \text{ se } \bar{y}^{(p)} - y^{(p)} \neq 0,$$

$$E_1(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, \bar{y}^{(p)}) = \frac{1}{2} f''_{y^{(p)^2}}(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}),$$

la funzione E_1 risulta sempre continua e positiva nel campo (42), (46), (47); quindi se aggiungiamo la limitazione

$$|\bar{y}^{(p)} - y^{(p)}| \leq \sigma_1, \tag{49}$$

si può determinare un μ tale che in (42), (46), (47), (49) sia $E_1 > \mu$: sarà allora

$$E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}) > \mu (y^{(p)} - \bar{y}^{(p)})^2. \tag{50}$$

In tali condizioni veniamo all'esame di ΔI : e presa una qualunque curva \mathfrak{L} soddisfacente alle (39), (43), applichiamo (34). Incominciamo ad esaminare il primo integrale: intanto in esso per $\bar{y}^{(p)}$ compare $\eta^{(p)} + Z_p$: ma per (25)₂ e (26), $|Z_p| \leq a_2 (p_{p-1} + (p-1)r')$, cioè risulta soddisfatta la (47): si possono dunque applicare le disuguaglianze (44), (50): quindi, chiamando χ l'insieme dei punti di (x_1, x_2) in cui $|\bar{Z}_p| \leq \sigma_1$, e χ_1 l'insieme complementare, sarà

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)}) dx > \mu \int_{\chi} \bar{Z}_p^2 dx + \mu_1 \int_{\chi_1} |\bar{Z}_p| dx;$$

che per (27) e (28) possiamo pure scrivere

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} E(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}; \eta^{(p)} + Z_p, y^{(p)}) dx > \mu \frac{a_3^2}{p} \sum_1^p \int_{\chi} z_i^2 dx + \\ + \frac{\mu a_3}{p} \sum_1^p \int_{\chi_1} |z_i| dx. \end{aligned} \right\} \tag{51}$$

Più delicato è l'esame dell'altro integrale di (34). Osserviamo anzitutto che se si pone per \bar{Z}_p il suo valore $z^{(p)} - Z_p$ si ha

$$\lambda_1 + \lambda_2 \bar{Z}_p = (\lambda_1 - \lambda_2 Z_p) + \lambda_2 z^{(p)}.$$

Ma per (32) e (25)₂ si ha

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 Z_p &= \sum \bar{g}_{ihk} z^{(i)} z^{(h)} z^{(k)} \\ \bar{g}_{ihk} &= \frac{1}{3!} \bar{f}'''_{y^{(i)}y^{(h)}y^{(k)}} - \frac{1}{2!} \bar{f}''_{y^{(p)}y^{(i)}y^{(h)}} \beta_k. \end{aligned} \right\} \tag{52}$$

Se quindi M indica un numero che superi in valore assoluto i valori delle derivate terze di f nel campo (46), (47), avremo $|\bar{g}_{ihk}| < \left(\frac{1}{3!} + \frac{a_2}{2!}\right) M$.

Quanto a $\lambda_2 z^{(p)}$ si osservi che per (31) è

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= f'_{y^{(p)}}(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, \eta^{(p)} + Z^{(p)}) - \varphi'_{y^{(p)}} - \sum_0^p \varphi''_{y^{(i)}y^{(p)}} Z_i = \\ &= f'_{y^{(p)}}(x, \eta + z, \eta' + z', \dots, \eta^{(p-1)} + z^{(p-1)}, \eta^{(p)} + \sum_0^{p-1} \beta_i z^{(i)}) - \varphi'_{y^{(p)}}(x) - \\ &\quad - \sum_0^{p-1} \varphi''_{y^{(i)}y^{(p)}} z^{(i)} - \varphi''_{y^{(p)}z} \sum_0^{p-1} \beta_i z^{(i)}; \end{aligned}$$

essa è dunque una funzione che ammette le derivate parziali dei primi 4 ordini rispetto alle $z, z', \dots, z^{(p-1)}$; e $\frac{\partial \lambda_2}{\partial x}$ ammette le derivate analoghe dei primi 3 ordini; e infine per le (32) evidentemente λ_2 e le sue dette derivate parziali dei primi 2 ordini si annullano per $z = z' = \dots = z^{(p-1)} = 0$. Applicando allora il lemma XII a $\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 z^{(p)} d x$, avremo

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 z^{(p)} d x = \int_{x_1}^{x_2} \sum \bar{g}_{ihk} z^{(i)} z^{(h)} z^{(k)} d x \quad (i, h, k \leq p-1). \quad (53)$$

E per l'osservazione I del n.º 5, se M è anche maggiore dei valori delle derivate dei primi 5 ordini nel campo (46), (47), le \bar{g}_{ihk} sono tutte nel campo (46), (47) inferiori ad un numero della forma $\alpha_1 M$ dove α_1 è un numero, analogo ad α , il quale dipende solo dai massimi moduli delle $z^{(i)}$ in (46), (47), e dal massimo modulo delle η e delle loro derivate, e da α_1, α_2 .

Riassumendo dalle (52) e (53) abbiamo l'identità

$$\int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 + \lambda_2 \bar{Z}_p) d x = \sum \int_{x_1}^{x_2} g_{ihk} z^{(i)} z^{(h)} z^{(k)} d x \quad (54)$$

dove i, h, k sono compresi fra 0 e $p-1$, e le g_{ihk} sono quantità che soddisfanno ad una disuguaglianza del tipo

$$|g_{ihk}| < \alpha_1 M. \quad (55)$$

Ciò posto indicando con r un'indeterminata ($\leq r'$) che ci riserbiamo di fissare convenientemente, supponiamo che sia

$$|z| \leq r, \quad |z'| \leq r, \dots, |z^{(p-2)}| \leq r. \quad (56)$$

Consideriamo un termine qualunque di (52) che non sia quello in $z^{(p-1)}$ e cioè tale che uno degli indici almeno sia $< p-1$: per fissare le idee, l'in-

dice $< p - 1$ sia i . Applicando ripetutamente il lemma III si ha per $l \leq p - 1$,

$$\int_{x_1}^{x_2} z^{(l)} dx \leq K'^{p-1-l} \int_{x_1}^{x_2} z^{(p-1)l} dx,$$

quindi per (55), (56)

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} g_{ihk} z^{(i)} z^{(h)} z^{(k)} dx \right| &< a_6 M r \int_{x_1}^{x_2} |z^{(h)} z^{(k)}| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} a_6 M r \left[\int_{x_1}^{x_2} z^{(h)2} dx + \int_{x_1}^{x_2} z^{(k)2} dx \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} a_6 M r \left\{ K'^{p-1-h} + K'^{p-1-k} \right\} \int_{x_1}^{x_2} z^{(p-1)2} dx \leq \\ &\leq \frac{m_2^2}{2} a_6 M r \left\{ K'^{p-1-h} + K'^{p-1-k} \right\} \sum_{i_1 i_2}^p \int_{x_1}^{x_2} |z_{i_1} z_{i_2}| dx. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Quanto al termine in $z^{(p-1)3}$ si osservi che

$$|z^{(p-1)3}| = \frac{d [|z^{(p-1)}| z^{(p-1)} z^{(p-2)}]}{dx} - 2 z^{(p-2)} |z^{(p-1)}| z^{(p)},$$

onde

$$\left. \begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} g_{p-1p-1p-1} z^{(p-1)3} dx \right| &< a_6 M \int_{x_1}^{x_2} |z^{(p-1)3}| dx = \\ &= 2 a_6 M \int_{x_1}^{x_2} |z^{(p-2)} z^{(p-1)} z^{(p)}| dx \leq \\ &\leq 2 a_6 M r \int_{x_1}^{x_2} |z^{(p-1)} z^{(p)}| dx \leq \\ &\leq 2 m_2^2 a_6 M r \left\{ \sum_{i_1 i_2}^p \int_{x_1}^{x_2} |z_{i_1} z_{i_2}| dx + \sum_{i_1 i_2}^p \int_{x_1}^{x_2} |z_{i_1} z'_{i_2}| dx \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Ora ricordiamo che per (25)₁ e (26) è sempre

$$|z_i| < a_1 (p_{p-1} + (p-1)r'); \quad (59)$$

quindi applicando il lemma VII avremo

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |z_{i_1} z_{i_2}| dx &\leq \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (z_{i_1}^2 + z_{i_2}^2) dx \leq \frac{1}{2} K' \int_{x_1}^{x_2} (z'_{i_1}{}^2 + z'_{i_2}{}^2) dx + \\ &+ \frac{1}{2} K'_2 \int_{x_1}^{x_2} [|z'_{i_1}| + |z'_{i_2}|] dx, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

dove per (59) è $K'_2 = \alpha_1 (\rho_{p-1} + (p-1)r') (x_2 - x_1)$. Imitando poi il ragionamento del lemma VI, sarà

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |z_{i_1} z'_{i_2}| dx &\leq \int_x |z_{i_1} z'_{i_2}| dx + \alpha_1 [\rho_{p-1} + (p-1)r'] \int |z'_{i_2}| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_x z_{i_1}^2 dx + \frac{1}{2} \int_x z'_{i_2}{}^2 dx + \alpha_1 [\rho_{p-1} + (p-1)r'] \int_{x_1} |z'_{i_2}| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} K' \int_x z_{i_1}^2 dx + \frac{1}{2} \int_x z'_{i_2}{}^2 dx + \frac{1}{2} K'_2 \int_{x_1} |z'_{i_2}| dx + \\ &\quad + \alpha_1 [\rho_{p-1} + (p-1)r'] \int_{x_1} |z'_{i_2}| dx. \end{aligned} \right\} (61)$$

Onde infine raccogliendo dalle (54), (57), (58), (60) e (61), avremo

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 + \lambda_2 \bar{Z}_p) x \right| \leq r \left[H_7 \sum_1^p \int_x z_i^2 dx + H_8 \sum_1^p \int_{x_1} |z'_i| dx \right], \quad (62)$$

dove H_7 e H_8 sono numeri formati con m_2 , α_6 , M , $\alpha_1 (\rho_{p-1} + (p-1)r')$, K' , K'_2 , p , ma indipendenti da r .

Associando (62) colla (51) si avrà

$$\Delta I = \left(\mu_1 \frac{\alpha_3^2}{p} - r H_7 \right) \int_x z_i^2 dx + \left(\mu_1 \frac{\alpha_3}{p} - r H_8 \right) \int_{x_1} |z'_i| dx, \quad (63)$$

onde basterà prendere r tale che si abbia, oltrechè $r \leq r'$

$$r < \frac{\mu_1 \alpha_3^2}{p H_7}, \quad r < \frac{\mu_1 \alpha_3}{p H_8},$$

perchè sia $\Delta I > 0$. c. v. d.

7. *Osservazioni critiche: il caso regolare.* Il confronto dell'enunciato del teorema precedente coll'enunciato del teorema II del n.º 4 ci fa vedere immediatamente come in sostanza le condizioni imposte siano nei due casi di tipo affatto analogo, e differiscano per il solo fatto che le condizioni relative alle funzioni E e $f''_{y^{(p)}}$ nel teorema precedente devonsi ammettere soddisfatte per un insieme di valori di $y^{(p-1)}$, $\bar{y}^{(p)}$ più ampio che nel teorema II. Sarebbe del resto facile mostrare che le condizioni del teorema II del n.º 4 non sarebbero sufficienti nel caso presente.

Un caso assai importante in cui tutte queste condizioni sono soddisfatte

è il caso che, per analogia a quanto si usa fare se $p = 1$, diremo il caso *regolare*: un problema di minimo dicesi regolare in un certo campo R del piano xy , se in R è sempre $f''_{y^{(p)2}}(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}, y^{(p)}) > 0$, qualunque siano $y', y'', \dots, y^{(p)}$. È chiaro che soddisfatta questa condizione in un intorno di \mathcal{C} , ne risultano subito soddisfatte anche le condizioni 1.^o e 2.^o del nostro teorema; onde potremo concludere: *se il problema è regolare nell'intorno di \mathcal{C} , \mathcal{C} dà il minimo di ordine $p - 2$ nel campo limitato.*

8. *Sul minimo di ordine $p - 2$ nel campo illimitato e sui minimi di ordine $< p - 2$.* Si dovrebbe ora spingere ulteriormente l'analisi sui minimi in campi meno restrittivi: non mi è riuscito di trovare nuove condizioni sufficienti di tipo non troppo evidentemente banale. Si può però notare che per studiare tali casi occorrerà certo introdurre delle condizioni di tipo nuovo: precisamente dirò che non si possono ottenere condizioni sufficienti per questi ulteriori minimi solo coll'allargare il campo in cui si immaginano variabili le $y, y', \dots, y^{(p-1)}, \bar{y}^{(p)}, y^{(p)}$ nelle funzioni $f''_{y^{(p)2}}, E$; come avveniva invece nei tre teoremi dimostrati fin qui.

Perciò consideriamo l'integrale

$$I = \int_0^1 \left[\sqrt{1 + y''^2} - e^y \right] dx. \quad (64)$$

Se noi imponiamo che nei punti $x = 0$ e $x = 1$, y ed y' si annullino, l'estremale \mathcal{C} di (64) che soddisfa a dette condizioni è il segmento $0 \leq x \leq 1$ dell'asse delle x , e questa curva dà ad I il valore 0: ed evidentemente soddisfa la condizione di JACOBI.

D'altra parte il problema è *sempre regolare*, poichè $f''_{y''^2} = \frac{1}{(1 + y''^2)^{\frac{3}{2}}}$:

ne segue che è *sempre* $f''_{y''^2}(x, y, y', y'') > 0$, $E(x, y, y'; \bar{y}'', y'') > 0$ per $|\bar{y}'' - y''| > 0$. Per il teorema precedente quel segmento dà ad I il minimo di ordine 0 nel campo limitato; cioè fissato un numero ρ_1 arbitrario, si può determinare un $r(\rho_1)$ tale che tutte le curve per cui $|y| \leq r(\rho_1)$, $|y'| \leq \rho_1$ danno ad I un valore > 0 . Ora io dimostrerò che invece detto segmento *non dà* certo il minimo di ordine 0 nel campo illimitato: ciò che proviene dal fatto che col tendere di ρ_1 all'infinito, $r(\rho_1)$ tende necessariamente a zero.

Preso dunque un r arbitrariamente piccolo, sia \mathfrak{L} la curva data dalle formule :

$$\text{quando } 0 \leq x \leq r^2, \quad \text{sia } y = \frac{x^2}{2r^3}, \quad y' = \frac{x}{r^3}, \quad y'' = \frac{1}{r^3},$$

$$\text{quando } r^2 < x \leq 2r^2, \quad \text{sia } y = -r + \frac{2x}{r} - \frac{x^2}{2r^3}, \quad y' = \frac{2}{r} - \frac{x}{r^3}, \quad y'' = -\frac{1}{r^3},$$

quando $2r^2 < x \leq 1$, sia

$$y = r \left[3 - 2 \frac{1-x}{1-2r^2} \right] \left(\frac{1-x}{1-2r^2} \right)^2,$$

$$y' = -6r \frac{1-x}{(1-2r^2)^2} \left(1 - \frac{1-x}{1-2r^2} \right), \quad y'' = \frac{6r}{(1-2r^2)^2} \left(1 - 2 \frac{1-x}{1-2r^2} \right).$$

È chiaro che tale curva è di classe $D^{(3)}$, e quindi può essere assunta quale curva variata: inoltre y assume su di essa il massimo valore in $x = 2r^2$ e vale r : tale curva giace dunque nell'intorno assegnato.

Si calcoli il valore di I ad essa relativa: si ottiene

$$I_{\mathfrak{L}} = -2r^3 \left(e^{\frac{1}{r}} - 1 \right) + O(r),$$

dove con $O(r)$ indichiamo una quantità che quando r tende a zero diventa infinita di ordine ≤ 1 . Sarà quindi per r sufficientemente piccolo $I_{\mathfrak{L}} < 0 = I_{\mathfrak{C}}$.
c. v. d.

Über die berührenden Strahlennetze einer Strahlenkongruenz.

(Von FRIEDRICH SCHUR, in Strassburg i/E.)

Versteht man unter einem berührenden Strahlensysteme 1. Ordnung und 1. Klasse oder einem berührenden Strahlennetze einer Strahlenkongruenz ein solches, welches mit diesem die von den ersten Differentialquotienten der bestimmenden Stücke abhängigen benachbarten Strahlen gemein hat, so gibt es bekanntlich zu jedem Strahle der Kongruenz ∞^2 solcher Netze. Ihre analytische Darstellung besonders von der für viele Zwecke bequemen Annahme aus, dass die Kongruenz durch eine Stützfläche und die Richtungskosinus ihrer Strahlen gegeben sei, ist aber noch nicht mit hinreichender Einfachheit und Durchsichtigkeit erfolgt. Wir versuchen deshalb im folgenden eine solche Darstellung zu geben und verweisen wegen der Literatur über den Gegenstand auf den von ZINDLER (*) in der deutschen Mathematiker-Vereinigung gegebenen Bericht.

Wir denken uns die Strahlenkongruenz gegeben in der Form :

$$x = x + w p, \quad y = y + w q, \quad z = z + w r, \quad (1)$$

wo sowohl die Koordinaten x, y, z eines Punktes der sogenannten *Stützfläche* der Kongruenz als die Richtungskosinus p, q, r jedes zugehörigen Strahles als Funktionen zweier Parameter u, v gegeben sein mögen. Hier kann die Stützfläche durch irgend eine andre :

$$x' = x + \varphi p, \quad y' = y + \varphi q, \quad z' = z + \varphi r \quad (2)$$

ersetzt werden, wo φ eine beliebige Funktion von u und v ist. Durch die

(*) ZINDLER, *Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie*, Ber. d. D. Math.-Ver., Bd. XV, p. 197.

Gleichung $\mathfrak{F}(u, v) = 0$ wird eine aus Strahlen der Kongruenz bestehende Fläche definiert sein, und die Stellungskosinus α, β, γ der Tangentialebene in einem ihrer Punkte werden durch die Gleichungen:

$$p \alpha + q \beta + r \gamma = 0, \quad (3)$$

$$\left((x_1 + w p_1) \alpha + \dots \right) d u + \left((x_2 + w p_2) \alpha + \dots \right) d v = 0 \quad (4)$$

bestimmt sein, wo:

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{etc.}; \quad p_1 = \frac{\partial p}{\partial u}, \quad p_2 = \frac{\partial p}{\partial v}, \quad \text{etc.} \quad (5)$$

und:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} d u + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v} d v = 0. \quad (6)$$

Hierdurch ist bei gegebenen Werten von α, β, γ das w oder der Berührungspunkt bestimmt. Soll aber w unabhängig von $\frac{d v}{d u}$ sein, so müssen die Koeffizienten von $d u$ und $d v$ in Gleichung (4) einzeln verschwinden, woraus sich für w die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} p, & q, & r \\ x_1 + w p_1, & y_1 + w q_1, & z_1 + w r_1 \\ x_2 + w p_2, & y_2 + w q_2, & z_2 + w r_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

ergibt. Die so auf jedem Strahle bestimmten zwei Punkte heissen *Fokalfunkte* und können reell oder imaginär sein. Die nunmehr aus (3) und den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (x_1 + w p_1) \alpha + \dots &= 0, \\ (x_2 + w p_2) \alpha + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7^a)$$

bestimmten Stellungskosinus α, β, γ sind dann zugleich diejenigen der Normale an die *Fokalfläche*, d. h. den Ort der Fokalfunkte; denn es ist:

$$\Sigma \alpha d \mathbf{x} = d u \Sigma \alpha (x_1 + w p_1) + d v \Sigma \alpha (x_2 + w p_2) + d w \Sigma \alpha p, \quad (8)$$

wo die Summen wie im folgenden immer über die drei Koordinatenachsen

zu erstrecken sind. Aus Gleichung (7) folgt noch :

$$\left. \begin{aligned} x_1 + w p_1 &= \lambda (x_2 + w p_2) + \mu p, & y_1 + w q_1 &= \lambda (y_2 + w q_2) + \mu q, \\ z_1 + w r_1 &= \lambda (z_2 + w r_2) + \mu r, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

immer unter der Voraussetzung, dass w eine Wurzel von Gleichung (7) sei.

Fassen wir nunmehr die Aufgabe, *die berührenden Strahlennetze eines Strahles* $(x^0, y^0, z^0; p^0, q^0, r^0)$ zu finden, dahin auf, dieses Netz so zu bestimmen, dass für den betrachteten Strahl, also für $u = u_0, v = v_0$ die ersten Differentialquotienten der bestimmenden Stücke dieselben Werte $x'_1, x'_2, \text{etc.}; p'_1, p'_2, \text{etc.}$ besitzen wie bei der gegebenen Kongruenz (1), so wird diese Aufgabe in allgemeinsten Weise gelöst durch die Netze :

$$\left. \begin{aligned} x &= x^0 + x'_1 (u - u_0) + x'_2 (v - v_0) + \\ &+ \frac{w}{N} \left(p_0 + p'_1 (u - u_0) + p'_2 (v - v_0) \right), \text{ etc.,} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

wo

$$p'_1 = p_1^0 - p_0^0 \frac{\sum p_1^0 P}{\sum p_0^0 P}, \quad p'_2 = p_2^0 - p_0^0 \frac{\sum p_2^0 P}{\sum p_0^0 P}, \quad \text{etc.,} \quad (10)$$

$$N^2 = \Sigma \left(p^0 + p'_1 (u - u_0) + p'_2 (v - v_0) \right)^2 \quad (11)$$

und P, Q, R die Richtungskosinus der Normale der Stützfläche im Ausgangspunkte des Strahles bedeuten.

Hier erhalten wir offenbar ∞^2 solche Kongruenzen, wenn wir den P, Q, R alle möglichen Werte geben oder der Normalen an die Stützfläche alle möglichen Richtungen. Nehmen wir in der Tat die Stützfläche in der Form (2) an und schreiben der Funktion $\varphi(u, v)$ der Einfachheit wegen nur vor, dass sie für $u = u_0, v = v_0$ verschwinde, dass also jede Stützfläche den Ausgangspunkt (x_0, y_0, z_0) des betrachteten Strahles enthalte, so gehen $x'_1, x'_2, \text{etc.}$ über in :

$$x'_1 = x_1^0 + \varphi_1^0 p_0, \quad x'_2 = x_2^0 + \varphi_2^0 p_0, \quad \text{etc.} \quad (12)$$

Es ergibt sich daher aus :

$$\Sigma P x'_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma P x'_2 = 0, \quad (13)$$

wenn P, Q, R auch die Richtungskosinus der Normale im Ausgangspunkte

an die neue Stützfläche bedeuten, dass entsprechend den Ausdrücken (10) für p'_1, p'_2 , etc. auch:

$$x'_1 = x_1^0 - p^0 \frac{\sum x_1^0 P}{\sum p^0 P}, \quad x'_2 = x_2^0 - p^0 \frac{\sum x_2^0 P}{\sum p^0 P}, \quad \text{etc.} \quad (14)$$

ist. In den bestimmenden Stücken der Kongruenz (I) sind jetzt gerade die Grössen P, Q, R veränderlich, wenn wir die mit dem Index 0 bezeichneten Grössen auf eine bestimmte Stützfläche beziehen. In diese geht die veränderte Stützfläche über, wenn wir $P = P^0$, etc. setzen. Das sogenannte *Hauptnetz* erhalten wir, wenn $P = p$, etc. gesetzt wird.

Wir haben aber noch zu beweisen, dass die Kongruenz (I) *wirklich ein Strahlennetz ist*, d. h. durch jeden Punkt einen und nur einen Strahl schickt und in jeder Ebene einen und nur einen Strahl enthält. Soll in der Tat ein Strahl dieser Kongruenz durch (x, y, z) laufen, so erhält man zuerst für $\frac{w}{N}$ die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x - x^0 - \frac{w}{N} p^0, & x'_1 + \frac{w}{N} p^1, & x'_2 + \frac{w}{N} p^2 \\ \vdots & \dots & \dots \\ \dots & y'_2 + \frac{w}{N} q^2 \\ \dots & \dots & z'_2 + \frac{w}{N} r^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Dies ist zwar eine kubische Gleichung; multipliziert man aber die Horizontalreihen dieser Determinante der Reihe nach mit P, Q, R und addiert sie, so sondert sich von ihr der lineare Faktor:

$$\sum (x - x^0) P - \frac{w}{N} \sum p^0 P = 0 \quad (16)$$

ab, wodurch der gesuchte Strahl eindeutig bestimmt ist; denn der andere Faktor enthält x, y, z garnicht. Ebenso erhält man in jeder Ebene einen Strahl, insofern dann deren Gleichung für jeden Wert von $\frac{w}{N}$ erfüllt sein muss.

Dass aber dieses Strahlennetz ein *berührendes ist*, folgt aus:

$$\left(\frac{\partial (x^0 + x'_1 (u - u_0) + x'_2 (v - v_0))}{\partial u} \right) = x'_1, \quad \text{etc.} \quad (17)$$

und :

$$\left(\frac{\partial \left(\frac{p^0 + p'_1(u - u_0) + p'_2(v - v_0)}{N} \right)}{\partial u} \right) = p'_1 - p^0 \Sigma p^0 p'_1 = p_1, \text{ etc. ;} \quad (18)$$

denn es ist :

$$\Sigma p^0 p'_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma p^0 p'_2 = 0. \quad (19)$$

Die besonderen Beziehungen eines solchen berührenden Strahlennetzes zur Kongruenz finden wir durch Bestimmung der Leitlinien des Netzes. Soll nämlich eine Gerade durch einen Fokalfunkt $(x^0 + w_1 p^0, \dots)$ des Berührungstrahles, die parallel zur Tangentialebene an die Stützfläche ist, jeden Strahl des berührenden Netzes schneiden, soll also sein :

$$\begin{aligned} x^0 + x'_1(u - u_0) + x'_2(v - v_0) + \frac{w}{N} (p_0 + p'_1(u - u_0) + p'_2(v - v_0)) &= \left. \right\} (20) \\ &= x^0 + w_1 p^0 + \rho (x'_1 + k x'_2), \text{ etc.,} \end{aligned}$$

so muss auch für alle u und v sein :

$$\left| \begin{array}{l} x'_1(u - u_0) + x'_2(v - v_0) - w_1 p^0, \dots \\ x'_1 + k x'_2, \dots \\ p^0 + p'_1(u - u_0) + p'_2(v - v_0), \dots \end{array} \right| = 0. \quad (21)$$

Hier verschwinden in der Tat alle Koeffizienten dieser Gleichung für u und v bis auf diejenigen von $u - u_0$ und $v - v_0$, die nach einfachen Umformungen für k die Gleichungen :

$$\left| \begin{array}{l} x'_1 + w_1 p^0, \dots \\ x'_1 + k x'_2, \dots \\ p^0, \dots \end{array} \right| = 0, \quad (22)$$

und :

$$\left| \begin{array}{l} x'_2 + w_1 p^0, \dots \\ x'_1 + k x'_2, \dots \\ p^0, \dots \end{array} \right| = 0 \quad (23)$$

ergeben. Diese Gleichungen sind aber nach (9) identisch und bestimmen gerade k . Sie zeigen ausserdem nach (3) und (4^a), dass auch :

$$(x_1^0 + k x_2^0) \alpha_1 + \dots = 0 \quad (24)$$

ist, dass also jede Leitlinie des berührenden Strahlennetzes in der Tangentialebene des Fokalfpunktes an die Fokalfläche liegt.

Sind also die beiden Fokalfpunkte des Berührungsstrahles, also auch ihre Berührungsebenen an die Fokalfläche reell, so erhalten wir die Leitlinien irgend eines der berührenden Strahlennetze als irgend zwei Tangenten der beiden Fokalfpunkte an die Fokalfläche; die Tangentialebene an die zugehörige Stützfläche ist dann diesen beiden Leitlinien parallel.

Hieraus geht hervor, dass *durch irgend einen Strahl des Raumes gerade eins der berührende Netze läuft*. Dasselbe lässt sich auch unabhängig von der Reellität der Fokalfpunkte beweisen, d. h. man kann direkt zwei homogene lineare Gleichungen zur Bestimmung der Richtungskosinus P, Q, R der Normale an die zugehörige Stützfläche aufstellen. Doch gehen wir hierauf nicht ein, nachdem durch die Formeln (10) und (14) die veränderlichen Bestimmungsstücke jedes berührenden Strahlennetzes als lineare Funktionen der Richtungskosinus der Normale der veränderlichen Stützfläche dargestellt sind.

Sur la théorie des résonateurs et la discontinuité des solutions de certains systèmes différentiels.

(Par EMILE BOREL, à Paris.)

Soit un système d'équations canoniques :

$$\frac{d p_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{d q_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (1)$$

On sait que si la fonction H est une fonction analytique, non seulement des variables p et q , mais encore d'un certain nombre de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, les intégrales des équations (1) sont des fonctions analytiques des λ , et varient par suite en général d'une manière continue avec les λ . Cette continuité de la solution lorsque les données varient d'une manière continue est invoquée d'une manière plus ou moins explicite dans toutes les applications de la mécanique à l'étude des phénomènes naturels. Il est clair, en effet, que les données expérimentales ne sont jamais connues exactement, mais seulement d'une manière approchée : les équations que l'on peut déduire de l'expérience étant seulement des équations approchées, il est nécessaire, pour que l'étude de ces équations approchées n'apparaisse pas comme absolument vaine, que l'on sache — ou que l'on postule — que la solution de ces équations approchées est elle-même approchée de la solution des équations rigoureusement exactes que nous ne pourrons jamais écrire.

Cette propriété des équations de la dynamique est bien connue ; il est bien connu aussi qu'elle ne s'étend pas à tous les systèmes d'équations différentielles ; je voudrais donner ici un exemple que je crois nouveau, d'équations différentielles différant infiniment peu des équations d'un problème dynamique tout à fait classique et dont les solutions changent entièrement de nature pour des variations aussi petites que l'on veut d'un paramètre

variable. Je développerai d'abord les calculs; j'indiquerai en terminant les relations des résultats obtenus avec certaines difficultés récemment soulevées par les physiciens dans la théorie du rayonnement.

I.

Considérons l'équation différentielle qui exprime la constance de la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique d'un point matériel attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, la vitesse initiale étant dirigée vers le point fixe (*résonateur linéaire*); cette équation différentielle, par un choix convenable des unités, se met sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a^2 \quad (1)$$

et son intégrale générale

$$x = a \cos(t - t_0) \quad (2)$$

admet la période 2π .

Modifions l'équation (1) en ajoutant au second membre un terme proportionnel au temps; c'est-à-dire considérons l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a^2 + 2\lambda t. \quad (3)$$

Si le coefficient constant λ est un nombre très petit, par rapport à la constante a et aux unités choisies, l'équation (3) différera extrêmement peu de l'équation (1), pendant un temps qui pourra être très long par rapport à la période 2π ; nous pouvons par exemple supposer λ inférieur à une constante λ_0 choisie de telle manière que, pendant la durée de millions de périodes, le second membre de l'équation (3) diffère de moins d'un millionième, en valeur relative, du second membre de l'équation (1). Dans ces conditions, l'équation (1) et l'équation (3) sont physiquement identiques. Nous allons voir cependant que, quelque petit que soit λ , l'intégrale de l'équation (3) diffère d'une manière finie de l'intégrale de l'équation (1), dès la fin de la première période.

Supposons, pour fixer les idées, la constante λ positive; supposons aussi que pour $t = 0$, l'on ait $x = 0$ et $\frac{dx}{dt} = a$, constante positive. Lorsque

t croîtra à partir de zéro, le terme λt sera d'abord négligeable, x croîtra, et par suite $\frac{dx}{dt}$ décroîtra. En prenant la dérivée de (3) par rapport à t , l'on obtient .

$$\frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} + x \right) = \lambda. \quad (4)$$

Cette équation montre que $\frac{dx}{dt}$ ne peut pas s'annuler, à moins que $\frac{d^2x}{dt^2}$ ou x ne deviennent infinis; mais, d'après (3), x ne peut guère dépasser la valeur a (puisque λt est très petit) et, d'autre part, la variation de $\frac{d^2x}{dt^2}$ ne peut pas dépasser $a t$, puisque $\frac{dx}{dt}$ est inférieur en valeur absolue à la constante a . Donc $\frac{dx}{dt}$ décroîtra à partir de la valeur a , mais ne s'annulera jamais. Tant que $\frac{dx}{dt}$ n'est pas très voisin de zéro, l'équation (4) diffère infiniment peu de l'équation que l'on obtiendrait en y réduisant λ à zéro. Par suite, au bout d'un temps t égal à $\frac{\pi}{2}$, x est très voisin de a et $\frac{dx}{dt}$ très voisin de 0; le mouvement diffère infiniment peu du mouvement défini par l'équation (1) et par son intégrale (2), si λ est regardé comme infiniment petit.

Mais, à partir du moment où $\frac{dx}{dt}$ est devenu très petit de l'ordre de grandeur de λ , l'allure de l'intégrale se modifie complètement; $\frac{dx}{dt}$ ne varie que très peu et par suite $\frac{d^2x}{dt^2}$ est sensiblement nul, en tous cas négligeable par rapport à x , qui diffère très peu de a ; l'équation (4) montre alors que $\frac{dx}{dt}$ est sensiblement égal à $\frac{\lambda}{a}$. Effectivement, les formules

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \frac{\lambda}{a} t \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\lambda}{a} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

vérifieraient l'équation (3) si l'on négligeait le carré de λ . Il serait facile de pousser plus loin les calculs d'approximation, mais c'est inutile, dans le cas du moins où λt reste très petit par rapport à a^2 ; les équations (5) suffisent pour nous montrer qu'à partir de la valeur $t = \frac{\pi}{2}$, l'intégrale de (3) diffère du tout au tout de l'intégrale de (1); elle n'est plus périodique; après le premier arc de sinusoïde, elle se confond sensiblement avec une droite à peu près horizontale; cette droite peut, en supposant λ suffisamment petit, être physiquement indiscernable pendant des millions de périodes, de la droite horizontale qui est tangente aux maxima successifs de la sinusoïde intégrale de (1). Lorsque λ tend vers zéro, l'intégrale de (3) n'a donc pas pour limite l'intégrale de (1), mais une courbe entièrement différente.

II.

On arrive à des conclusions analogues en étudiant le cas plus général du même problème où la vitesse initiale n'est pas dirigée vers le centre fixe; les détails dans lesquels je suis entré me permettront d'être ici plus bref.

Les équations classiques sont, les unités étant convenablement choisies:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0 \quad (7)$$

et admettent des intégrales premières (en posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$):

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c \quad (8)$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = a^2. \quad (9)$$

Conservant l'équation (3) remplaçons l'intégrale des forces vives (9) par l'équation suivante

$$r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = a^2 + 2\lambda t, \quad (10)$$

dans laquelle λ désigne, comme précédemment, une constante très petite.

L'intégrale du système formé par les équations (8) et (10) diffère essentiellement de l'intégrale du système formé par les équations (8) et (9).

En tenant compte de (8) l'équation (10) devient

$$r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = a^2 + 2\lambda t \quad (11)$$

dont la discussion est entièrement analogue à celle de l'équation (3). Si, pour fixer les idées, nous supposons r croissant à l'origine des temps, r continue à croître jusqu'à ce que sa valeur devienne sensiblement égale à la plus grande racine positive r_1 de l'équation

$$r^2 + \frac{c^2}{r^2} = a^2 = r_0^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 + \frac{c^2}{r_0^2}, \quad (12)$$

racine évidemment supérieure à la valeur initiale r_0 . La trajectoire, pendant cette première période du mouvement, diffère infiniment peu de l'arc d'ellipse défini par les équations classiques (6) et (7). Mais, dès que le point matériel a atteint le sommet de l'ellipse (ou du moins s'en est approché infiniment près, si λ est regardé comme infiniment petit), le caractère de la trajectoire se modifie complètement; elle diffère extrêmement peu d'un cercle ayant pour rayon le demi-grand axe de l'ellipse; plus précisément, on a

$$r = r_1 + \mu t, \quad (13)$$

μ étant lié à λ par la relation

$$\left(r_1 - \frac{c^2}{r_1}\right)\mu = \lambda. \quad (14)$$

Si l'on désigne par r_2 la plus petite des racines positives de l'équation (12), c'est-à-dire le demi-petit axe de l'ellipse, l'équation (14) équivaut à la suivante

$$\mu = \frac{\lambda r_1}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{\lambda r_1}{\varphi^2}, \quad (15)$$

en désignant par 2φ la distance focale de l'ellipse.

La variation de θ est d'ailleurs définie par l'équation (8), c'est-à-dire est sensiblement linéaire si μ , comme λ , est très petit (*). Ce résultat est con-

(*) Je laisse ici de côté l'étude du cas où les conditions initiales sont telles que μ^2 soit très petit, de l'ordre de λ .

firmé par l'étude directe du système formé par les équations (8) et (13), qui donnent

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{(r_1 + \mu t)^2}$$

d'où, en supposant $\theta = 0$ pour $t = 0$:

$$\theta = \frac{c}{\mu r_1} - \frac{c}{\mu (r_1 + \mu t)} = \frac{c t}{(r_1 + \mu t) r_1}. \quad (16)$$

Lorsque λ tend vers zéro, μ tend aussi vers zéro et le mouvement défini par les équations (8) et (10) devient à la limite un mouvement circulaire uniforme, généralement incompatible avec les équations (6) et (7) (*). Ce mouvement circulaire uniforme, limite pour $\lambda = \mu = 0$ des équations (13) et (16), est défini par les équations

$$\left. \begin{aligned} r &= r_1 \\ \theta &= \frac{c}{r_1^2} t. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Sa période est $\frac{2\pi r_1^2}{c}$, tandis que tout mouvement circulaire, comme tout mouvement elliptique ou rectiligne, défini par les équations, (6) et (7), a pour période 2π . Si l'on remarque que $c = r_1 r_2$, on voit que la période est $2\pi \frac{r_1}{r_2}$; elle se trouve multipliée par le rapport des axes de l'ellipse définie par les équations (6) et (7) et les conditions initiales données.

III.

Si, dans les équations (3) ou (10), on remplace λt par une fonction $\varphi(t)$, on aboutit aux mêmes conclusions si la fonction $\varphi(t)$ satisfait aux conditions suivantes

$$\varphi(0) = 0 \quad 0 < \varphi'(t) < \lambda$$

étant bien spécifié que l'inégalité $0 < \varphi'(t)$ *exclut l'égalité*.

(*) Il faut considérer ici les équations (6) et (7) et non pas les intégrales premières (8) et (9) parce que, dans le cas du mouvement circulaire ces intégrales premières ne sont pas indépendantes, et par suite ne peuvent pas remplacer les équations (8) et (9); au contraire, les équations (8) et (10) sont évidemment indépendantes, quelque petit que soit λ . Voir EMILE BOREL, *Remarque sur les problèmes de forces centrales* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1896).

On pourrait traiter par une méthode analogue des cas plus généraux; j'en indiquerai un seul.

Supposons que dans l'équation (10), la quantité λt soit remplacée par une fonction $\varphi(t)$ dont la dérivée $\varphi'(t)$ soit, tantôt égale à une constante, tantôt égale à zéro. Plus précisément, nous considérons une suite de valeurs croissantes de t :

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \dots$$

et nous supposons que dans tous les intervalles de rang impair λ est constant, tandis que dans les intervalles de rang pair, λ est nul. En d'autres termes, on a

$$\text{pour } t_{2n} < t < t_{2n+1} \quad \varphi'(t) = \lambda_n$$

$$\text{pour } t_{2n+1} < t < t_{2n+2} \quad \varphi'(t) = 0.$$

Les constantes λ_n sont positives ou négatives, mais toutes inférieures en valeur absolue à un nombre positif λ qui satisfait aux conditions que nous avons indiquées, c'est-à-dire que le produit λt est, pour les valeurs de t que l'on considère, très petit par rapport à la constante a^2 .

Dans ces conditions, il est aisé de voir que l'allure du mouvement sera la suivante: dans les intervalles de rang pair, la trajectoire se composera d'ellipses égales entre elles, mais dont l'orientation changera en général d'un intervalle à l'autre; dans les intervalles de rang impair, si leur étendue dépasse la longueur d'une demi-période (π unités de temps), le point matériel décrira seulement un arc d'ellipse auquel succéderont des circonférences de cercle, ayant pour rayons, suivant les cas, le demi-grand axe r_1 , ou le demi-petit axe r_2 , la durée de la période étant maintenant, au lieu de 2π , égale à $2\pi \frac{r_1}{r_2}$ ou $2\pi \frac{r_2}{r_1}$.

La trajectoire se compose donc alternativement d'ellipses, de grands cercles et de petits cercles, chacune de ces courbes fermées pouvant être parcourue successivement un grand nombre de fois, si les durées $t_{k+1} - t_k$ sont grandes par rapport à la durée des périodes. Les grands cercles sont décrits pendant les périodes pour lesquelles λ_n est positif, les petits cercles pendant les périodes pour lesquels λ_n est négatif.

On passerait facilement de l'étude de ce cas à celui où l'on suppose que $\varphi'(t)$ varie d'une manière continue, en restant très petit en valeur absolue, mais en prenant alternativement des valeurs positives et négatives.

IV.

Les considérations précédentes concernent-elles des équations purement abstraites, ou ont-elles quelque rapport avec un problème réel? C'est ce qu'il est difficile de décider, dans l'ignorance où nous sommes des mécanismes par lesquels un résonateur élémentaire peut émettre ou absorber de l'énergie. Si l'on admet comme un fait expérimental l'invariance absolue des périodes propres des résonateurs élémentaires, nous pouvons conclure des résultats obtenus que l'absorption d'énergie ne peut pas être proportionnelle au temps pendant une durée dépassant celle d'une période, si faible d'ailleurs que puisse être le coefficient de proportionnalité.

On peut aussi, comme me l'a fait observer M.^r HADAMARD, se demander si la singularité des résultats obtenus ne doit pas être rattachée au fait que l'intégrale des forces vives se déduit des équations canoniques par une combinaison analytique par laquelle peuvent être introduites des solutions singulières. Dans le cas le plus simple du résonateur linéaire, l'artifice de calcul consiste à multiplier par $\frac{dx}{dt}$, et l'on peut rattacher à cette multiplication la solution que nous avons obtenue dans laquelle $\frac{dx}{dt}$ est très voisin de zéro.

Ce point de vue est assurément légitime, si l'on considère les équations canoniques comme les équations primitives et la combinaison des forces vives comme un pur artifice analytique. Si l'on considère au contraire, l'intégrale des forces vives comme l'expression directe du principe de la conservation de l'énergie, il n'y a pas lieu de se demander par quelle voie analytique cette intégrale se déduit des équations canoniques, puisque la voie naturelle consiste alors à l'écrire directement.

Il y a là deux points de vue différents: la discussion des arguments que l'on peut invoquer en faveur de chacun d'eux nous entraînerait trop loin.

Sur une propriété caractéristique des déterminants.

(Par C. STÉPHANOS, à Athènes.)

Étant donnés deux déterminants

$$|a_{ij}|, \quad |b_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

on sait, d'après le théorème très connu, que le déterminant $|c_{ij}|$ où

$$c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj} \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, m)$$

est égal au produit des deux premiers.

On peut se demander si une propriété analogue n'appartient pas à d'autres fonctions $f(x)$ des m^2 variables x_{ij} , qui seraient telles qu'en posant

$$z_{ij} = \sum x_{ik} y_{kj} \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, m)$$

on aurait l'identité

$$f(x) f(y) = f(z)$$

quelles que soient les valeurs des variables x_{ij} et y_{ij} .

Dans ce qui suit nous allons montrer que les seules fonctions $f(x)$, dérivables par rapport aux variables x_{ij} , qui jouissent de la propriété en question, sont celles de la forme

$$f(x) = |x_{ij}|^n.$$

La relation

$$f(x) f(y) = f(z),$$

où

$$z_{ij} = \sum x_{ik} y_{kj}, \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, m)$$

devant avoir lieu quelles que soient les valeurs des variables x_{ij} et y_{ij} , on doit avoir les identités, obtenues par dérivation, suivantes :

$$\left. \begin{aligned} f(y) \frac{\partial f(x)}{\partial x_{ik}} &= \sum \frac{\partial f(z)}{\partial z_{ij}} y_{kj}, \\ f(x) \frac{\partial f(y)}{\partial y_{kj}} &= \sum \frac{\partial f(z)}{\partial z_{ij}} x_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

En posant

$$X_{ij} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_{ij}}, \quad Y_{ij} = \frac{\partial f(y)}{\partial y_{ij}}, \quad Z_{ij} = \frac{\partial f(z)}{\partial z_{ij}}, \quad (2)$$

ces relations peuvent être écrites comme il suit :

$$\left. \begin{aligned} f(y) X_{ik} &= \sum Z_{ij} y_{kj}, \\ f(x) Y_{kj} &= \sum Z_{ij} x_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

De ces relations on déduit

$$f(y) \sum X_{ik} x_{ik} = f(x) \sum Y_{ij} y_{kj} = \sum Z_{ij} x_{ik} y_{kj}$$

soit

$$\frac{\sum X_{ik} x_{ik}}{f(x)} = \frac{\sum Y_{ij} y_{kj}}{f(y)} = \frac{\sum Z_{ij} x_{ik} y_{kj}}{f(x) f(y)}.$$

On reconnaît aisément que ces trois rapports égaux sont indépendants des x_{ij} et y_{ij} . On aura donc

$$\sum X_{ik} x_{ik} = f(x) e_{ki}, \quad (4)$$

$$\sum Y_{ij} y_{kj} = f(y) e_{ki}, \quad (5)$$

en désignant par e_{ki} des constantes.

La seconde de ces relations, si l'on y change les y_{ij} en x_{ij} , devient

$$\sum X_{ij} x_{kj} = f(x) e_{ki}. \quad (6)$$

Des relations (4) et (6), écrites comme il suit

$$\left. \begin{aligned} \sum X_{ij} x_{ik} &= f(x) e_{ji}, \\ \sum X_{ij} x_{kj} &= f(x) e_{ki}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

on déduit maintenant

$$\sum X_{ij} x_{ik} x_{kj} = f(x) \sum e_{jl} x_{kj} = f(x) \sum e_{ki} x_{il},$$

d'où

$$\sum_j e_{ji} x_{kj} = \sum_j e_{kj} x_{ji}. \quad (j, k, l = 1, 2, \dots, m).$$

Ces relations devant avoir lieu quelles que soient les valeurs des quantités x_{ij} , on doit avoir nécessairement

$$e_{ij} = n \theta_{ij},$$

n désignant une constante et θ_{ij} dénotant, suivant l'usage, l'unité ou zéro suivant que l'on a $i=j$ ou bien $i \neq j$.

Les relations (7) deviennent ainsi

$$\left. \begin{aligned} \sum X_{ij} x_{ii} &= n f(x) \theta_{ji}, \\ \sum X_{ij} x_{kj} &= n f(x) \theta_{ki}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

En remarquant maintenant que $|x_{ij}| \neq 0$, on déduit de ces relations

$$X_{ij} = n f(x) \frac{\text{compl. } x_{ij}}{|x_{ij}|},$$

en désignant par $\text{compl. } x_{ij}$ le coefficient de x_{ij} dans le développement du déterminant $|x_{ij}|$.

On est ainsi conduit aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_{ij}} = \frac{n f(x)}{|x_{ij}|} \frac{\partial |x_{ij}|}{\partial x_{ij}}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

soit

$$\frac{\partial \log f(x)}{\partial x_{ij}} = n \frac{\partial \log |x_{ij}|}{\partial x_{ij}},$$

d'où l'on déduit

$$f(x) = c |x_{ij}|^n,$$

c désignant une constante qui doit être ici supposée égale à l'unité.

Ainsi se trouve démontré le résultat annoncé au commencement de la présente note :

Les seules fonctions $f(x)$ de m^2 variables x_{ij} qui soient dérivables par

rapport à chacune de ces variables et qui soient telles qu'on posant

$$z_{ij} = \sum x_{ij} y_{ij}$$

on ait l'identité

$$f(x) f(y) f(z),$$

quelles que soient les valeurs des x_{ij} et y_{ij} , sont celles de la forme

$$f(x) = |x_{ij}|^n.$$

On Some Cases of Wave-Motion on Deep Water.

(By H. LAMB, *Manchester.*)

This paper treats of some problems of wave-motion on deep water. For simplicity the motion is supposed restricted to two dimensions, one vertical, the other horizontal.

The first section contains a somewhat simplified demonstration of the results of CAUCHY and POISSON relating to the waves due to a local initial disturbance of the surface. The method leads to one or two novel formulae.

The next problem is concerned with the effect of a periodic expansion (a « simple source ») at an internal point. From this we easily derive the wave-system due to a sudden explosive action.

Finally, I consider the waves produced by the motion of a submerged horizontal cylinder, advancing steadily at right angles to its length, through still water. A somewhat remarkable expression for the wave-making resistance experienced by the cylinder is deduced.

1. The Cauchy-Poisson Wave Problem.

Let the axis of x be taken horizontal, that of y vertically downwards, the origin being in the free surface. The component velocities of the fluid satisfy the conditions

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1)$$

with

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

The motion being assumed to be small, the variable part of the pressure is given by

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g y, \quad (3)$$

where ρ is the density. The surfaces of equal pressure at any instant will be, approximately, horizontal planes; and the vertical displacement upwards at any point of such a surface will be

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4)$$

to the first order. In particular, the form of the free surface is obtained by putting $y = 0$ on the right hand of this equation.

The constancy of pressure at the free surface requires that

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

for

$$y = \eta.$$

This gives

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

to be satisfied for $y = 0$, the terms neglected being of the second order.

The typical solution of the preceding equations, corresponding to a state of initial rest, is

$$\eta = \cos \sigma t \cos k x, \quad (7)$$

$$\varphi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{-ky} \cos k x, \quad (8)$$

provided

$$\sigma^2 = g k. \quad (9)$$

This represents a simple-harmonic train of standing oscillations, of wavelength $2\pi/k$.

By superposition of such trains we derive the case where the initial form of the free surface is any whatever, say

$$\eta = f(x), \quad (10)$$

for $t = 0$. In particular, if the initial elevation is confined to the immediate

neighbourhood of the origin, and is such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \tag{11}$$

we have

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{-ky} \cos kx d k \tag{12}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \sigma t e^{-\sigma^2 y/g} \cos (\sigma^2 x/g) d \sigma. \tag{13}$$

The surface-elevation at time t is then given by (4); thus

$$\eta = \lim_{y=0} \frac{2}{\pi g} \int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{-\sigma^2 y/g} \cos (\sigma^2 x/g) \sigma d \sigma. \tag{14}$$

This solution was discussed at length by CAUCHY, but the investigation can be simplified in various ways. One fairly direct method is to take advantage of the principle that, owing to the symmetry with respect to the axis Oy , the value of φ throughout the fluid is determined by its values along this axis. Now when $x = 0$ we have

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \sigma t e^{-\sigma^2 y/g} d \sigma, \tag{15}$$

or, in virtue of the formula (*),

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2bx dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{x^2} dx, \tag{16}$$

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \frac{g^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} e^{-\beta^2} \int_0^{\beta} e^z dz \tag{17}$$

if

$$\beta^2 = g t^2 / 4y. \tag{18}$$

(*) This formula occurs as a subsidiary result in the familiar process of evaluating Laplace's integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx$$

by means of a contour integration. It has of course long been known.

To find the general value of φ , we have only to write $y - ix$ for y , and take the real part, the square roots being interpreted in accordance with the requirements of continuity. In particular, to obtain the value of φ at the free surface $y = 0$, we put, for positive values of x ,

$$(-ix)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}i\pi}, \quad \beta = \omega e^{\frac{1}{4}i\pi} \quad (19)$$

where

$$\omega = \sqrt{gt^2/4x}. \quad (20)$$

Thus, from (17)

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{2g^{\frac{1}{2}}}{\pi x^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{4}i\pi} e^{-i\omega^2} \int_0^\beta e^{z^2} dz \\ &= \frac{2ig^{\frac{1}{2}}}{\pi x^{\frac{1}{2}}} e^{-i\omega^2} \int_0^\omega e^{i\rho^2} d\rho \end{aligned} \quad (21)$$

where ρ has been written for $z e^{\frac{1}{4}i\pi}$. The surface-elevation is then given by (4), viz. we find, taking the real part,

$$\eta = \frac{g^{\frac{1}{2}} t}{2\pi x^{\frac{1}{2}}} \int_0^\omega \cos(\rho^2 - \omega^2) d\rho. \quad (22)$$

This is the result obtained, in different ways, by CAUCHY and POISSON. When $gt^2/4x$ is sufficiently great, the upper limit of integration may be replaced by ∞ , and we have

$$\eta = \frac{g^{\frac{1}{2}} t}{2\pi^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} \cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right), \quad (23)$$

in virtue of the formula

$$\int_0^\infty \cos \rho^2 d\rho = \int_0^\infty \sin \rho^2 d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \quad (24)$$

The general value of φ can be expressed in a similar manner. We

write

$$y - i x = r e^{-i\theta}, \quad \beta = \omega e^{\frac{1}{2} i\theta} \tag{25}$$

where

$$\omega = \sqrt{(g t^2 / 4 r)}. \tag{26}$$

We thus find

$$\varphi = \frac{2 g^{\frac{1}{2}}}{\pi r^{\frac{1}{2}}} e^{i\theta} \cdot e^{-\omega^2 e^{i\theta}} \int_0^\omega e^{\rho^2 e^{i\theta}} d\rho, \tag{27}$$

or, taking the real part,

$$\varphi = \frac{2 g^{\frac{1}{2}}}{\pi r^{\frac{1}{2}}} \int_0^\omega e^{(\rho^2 - \omega^2) \cos \theta} \cos \left\{ (\rho^2 - \omega^2) \sin \theta + \theta \right\} d\rho. \tag{28}$$

The interpretation of the expressions (22) and (23) has been fully discussed on a former occasion (*), with special reference to the later stages of the motion, when the hypothesis of an initial concentration of an elevation of finite volume on a mathematical line of the surface begins to betray its artificial character. The indefinite increase in the amplitude of the waves passing any particular point, as time goes on, which is indicated by the above formulae, is replaced by a more or less gradual extinction when the initial elevation is diffused over a band of finite breadth.

A convenient representation of a diffused initial elevation is furnished by the assumption

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-k\alpha} \cos kx dk. \tag{29}$$

This admits of any degree of concentration, by diminishing the value of α , the integral amount being still given by (11). I wish to point out that this case is already covered by our formulae, provided these be suitably interpreted.

It was remarked by Poisson that the condition (5) of constancy of pressure for a moving particle is satisfied (in the case of infinite depth) throughout

(*) *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 2, p. 371 (1904); *Hydrodynamics*, 3rd Ed. Art. 238.

the fluid, and not merely at the surface. This is readily seen to be the case with the typical solution (8), and its truth in the case of (28) follows by superposition, the equations being linear. Let us now fix our attention on the particles which initially lie in the plane $y = \alpha$. The formula (28) will relate to these provided

$$r = \sqrt{x^2 + \alpha^2}, \quad \tan \theta = x/\alpha, \quad (30)$$

so that

$$\omega^2 = g t^2 / 4 (x^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

The vertical displacement is given by (4), or

$$\eta = \frac{\omega}{g t} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}. \quad (32)$$

Hence, differentiating (27), and taking the real part,

$$\eta = \frac{1}{\pi r} \left[\cos \theta - 2 \omega \int_0^\omega e^{(\rho^2 - \omega^2) \cos \theta} \cos \left\{ (\rho^2 - \omega^2) \sin \theta + 2 \theta \right\} d \rho \right]. \quad (33)$$

Since the pressure is constant for the particles in question, we may imagine them to form a free surface, the fluid above being annihilated. The initial elevation at this surface is got by putting $\omega = 0$, viz. it is

$$\eta = \frac{\cos \theta}{\pi r} = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}, \quad (34)$$

which is the law above referred to.

At points of the surface whose distance from the origin is large compared with α , θ is nearly equal to $\frac{1}{2} \pi$. Hence provided $\omega^2 \cos \theta$, or $g t^2 \alpha / 4 r^2$, is small, the formula (33) reduces approximately to the shape (22), which relates to the case of a concentrated elevation. Moreover, if at the same time $g t^2 / r$ be large, we have the simplified expression (23).

When, however, as t increases, $\frac{1}{4} g t^2$ becomes comparable with r^2 / α , the case is altered. To examine the limiting form which (33) assumes when $\omega^2 \cos \theta$ is large, we write

$$2 \omega e^{2i\theta} \int_0^\omega e^{(\rho^2 - \omega^2) e^{i\theta}} d \rho = a e^{i\theta} \int_0^1 e^{-as} \frac{ds}{\sqrt{1-s}}, \quad (35)$$

where

$$a = \omega^2 e^{i\theta}. \tag{36}$$

Now

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 e^{-as} \frac{ds}{\sqrt{1-s}} &= 2 - 2a \int_0^1 e^{-as} \sqrt{1-s} ds \\ &= 2 - 2a \int_0^1 e^{-as} \left(1 - \frac{1}{2}s - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}s^2 - \dots \right) ds. \end{aligned} \right\} \tag{36_a}$$

The series in brackets is uniformly convergent, and the integration can be effected term by term. The result may be written symbolically

$$2 - 2a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{da} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{d^2}{da^2} + \dots \right) \frac{1}{a} (1 - e^{-a}); \tag{36_b}$$

and the limiting form of this when a is large is

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \dots$$

Hence

$$e^{i\theta} - 2\omega e^{2i\theta} \int_0^\omega e^{(\rho^{-2} - \omega^2)e^{i\theta}} d\rho = -\frac{1}{2\omega^3}, \tag{36_c}$$

ultimately. Taking the real part, we have from (33), on taking account of (31),

$$\eta = -\frac{2}{\pi g t^2}, \tag{37}$$

as the asymptotic value of the surface-elevation.

The result is independent of x ; but this peculiarity appears to be special to the particular type of initial disturbance. In the general case the later stages of the disturbance are marked by the recurrence of *groups* of waves, of gradually diminishing amplitude, following one another at intervals.

2. Waves due to an Internal Source.

I propose now to investigate the surface waves due to a source of disturbance at any given depth (f) below the free surface. The source is supposed in the first instance to be periodic, its velocity-potential being

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \log r, e^{iat} \tag{38}$$

where r denotes distance from the point $(0, f)$, and σ is prescribed. The time-factor $e^{i\sigma t}$ is, in the sequel, temporarily omitted. We assume, for the total disturbance produced by the source,

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r_1} + \chi, \quad (39)$$

where r_1 denotes distance from the point $(0, -f)$, and χ is to be determined. Hence, at the free surface ($y=0$) we have $\varphi = \chi$, and

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{f}{\pi r^2} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-kf} \cos kx \, dk + \frac{\partial \chi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (39_a)$$

The surface-condition of constancy of pressure therefore reduces to

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{g}{\pi} \int_0^\infty e^{-kf} \cos kx \, dk, \quad (40)$$

to be fulfilled for $y=0$. This is satisfied by

$$\chi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+f)} \cos kx}{\sigma^2 - gk} \, dk, \quad (41)$$

which also satisfies (2), and fulfils the condition of zero velocity for $y = \infty$. The time-factor $e^{i\sigma t}$ is of course understood. If we put

$$\sigma^2 = g\kappa, \quad (42)$$

so that $2\pi/\kappa$ is the wave-length corresponding to the prescribed period $2\pi/\sigma$, we have

$$\chi = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+f)} \cos kx}{k - \kappa} \, dk. \quad (43)$$

This integral is of course indeterminate, but we contemplate, for a moment, its « principal value » only. Now if x be positive, the principal value of the integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+f)+ikx}}{k - \kappa} \, dk \quad (44)$$

is found by a contour integration to be

$$i\kappa e^{-\kappa(y+f)+i\kappa x} + \int_0^\infty \frac{e^{-mx-im(y+f)}}{m - i\kappa} \, dm. \quad (45)$$

Hence, taking the principal value in (43), we have

$$\chi = \pm e^{-x(y+f)} \sin x x - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{m \cos m(y+f) - x \sin m(y+f)}{m^2 + x^2} e^{\mp mx} dm, \quad (46)$$

where the upper or the lower signs are to be taken according as x is positive or negative. The last term diminishes indefinitely as x increases, and will be disregarded.

The expression (46), when multiplied by $e^{i\sigma t}$, satisfies all the mathematical conditions of the problem, but it does not fulfil the physical requirement that the surface disturbance, at a distance from the origin on either side, must consist of waves travelling outwards only. The conditions are, however, still satisfied if we superpose the value of χ corresponding to any arbitrary system of free waves; in particular we may add the term

$$i e^{-x(y+f)} \cos x x. \quad (47)$$

This makes

$$\chi = i e^{-x(y+f)} e^{i(\sigma t \mp kx)} + \text{etc.}, \quad (48)$$

and therefore

$$\eta = -\frac{\sigma}{g} e^{-x f} e^{i(\sigma t \mp kx)} + \text{etc.}, \quad (49)$$

which is in accordance with the physical principle (*).

In real form, we may say that a simple source whose velocity potential is

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \log r \cdot \cos \sigma t \quad (50)$$

will generate a wave-system whose form is given, at a distance from the origin, by

$$\eta = -\frac{\sigma}{g} e^{-x f} \cos(\sigma t \mp x x). \quad (51)$$

Since $\sigma^2 = g x$, the amplitude of this wave-system is a maximum, for a given amplitude of the source, if $2 k x = 1$; that is, when the wave-length is $4 \pi f$.

(*) The somewhat artificial procedure is avoided if we introduce slight frictional forces, as in the author's *Hydrodynamics*, Arts. 240, 241.

The case where the time-variation of the source follows any arbitrary law, say

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \log r \cdot F(t), \quad (52)$$

can be derived by Fourier's theorem. Thus in the case of an instantaneous impulse about the instant $t=0$, such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt = 1, \quad (53)$$

we have, neglecting the terms which are of least importance when x is very large,

$$\eta = -\frac{1}{g} \int_0^{\infty} e^{-\kappa r} \cos(\sigma t \mp \kappa x) \sigma d\sigma. \quad (54)$$

where $\kappa = \sigma^2/g$. It would not be difficult to transform this integral into a more intelligible shape, but as we are already committed to an approximation it may be sufficient to apply the method of approximate evaluation given by KELVIN (*). For large positive values of this gives

$$\eta = -\frac{1}{4} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} t}{x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{4} g t^2 / \kappa x^2} \cos\left(\frac{g t^2}{4 x} - \frac{1}{4} \pi\right). \quad (55)$$

The amplitude at any point diminishes indefinitely as t increases. It becomes insensible when the wave-length falls below (say) double the depth of the source.

If a cylinder whose radius a is small compared with f be placed horizontally in a liquid at a depth f , and made to oscillate horizontally at right angles to its length, with the velocity

$$U \cos \sigma t,$$

the velocity-potential in the immediate neighbourhood is given by

$$\varphi = U a^2 \frac{\partial}{\partial x} \log r \cdot \cos \sigma t, \quad (56)$$

(*) *Phil. Mag.* (6), vol. 23, 1887; *Papers*, vol. 4, p. 303. See also Rayleigh, *Phil. Mag.* (6), vol. 21, 1911. The method had been employed by Stokes (1850); see his *Papers*, vol. 2, p. 341.

approximately. It is evident that the results appropriate to this case will be obtained from the foregoing by differentiating with respect to x . Thus, for the surface elevation, we find from (51)

$$\eta = \frac{2\pi U a^2}{g} k \sigma e^{-\sigma f} \cos(\sigma t - x \sigma), \quad (57)$$

for large positive values of x . From this we could derive the case where the cylinder receives a sudden shift parallel to x , of small amount.

3. Waves due to the Motion of a Submerged Cylinder.

Finally, we may consider the disturbance produced in the flow of a uniform stream by a submerged cylindrical obstacle of small radius. The cylinder is supposed placed horizontally at right angles to the stream. This problem could be deduced from the one last-mentioned, the relative motion being the same if the cylinder be supposed to advance through the fluid, which is otherwise at rest. As independent treatment is however, here adopted, the cylinder being assumed to be at rest, and the motion « steady ».

Let c denote the general velocity of the stream in the direction of x -positive, and let us write

$$\varphi = -c x \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \chi, \quad (58)$$

$$\chi = \int_0^\infty e^{-ky} \sin kx \alpha(k) dk, \quad (59)$$

where

$$r = \sqrt{x^2 + (y - f)^2}, \quad (60)$$

the origin being in the free surface as before, and f denoting the depth of the cylinder. The function $\alpha(k)$ is yet to be determined. For the equation of the steady free surface we assume

$$\eta = \int_0^\infty \cos kx \beta(k) dk, \quad (61)$$

where η denotes elevation *above* the mean level.

The geometrical condition at the free surface is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c \frac{d \eta}{d x}, \quad (62)$$

to be satisfied for $y = 0$. Since (58) may be written in the form

$$\varphi = -c x - a^2 c \int_0^\infty e^{k(y-f)} \sin k x d k + \chi, \quad (63)$$

this condition gives

$$k a^2 c e^{-kf} + k \alpha(k) = k c \beta(k). \quad (64)$$

Again, we have, at the free surface,

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= g y - \frac{1}{2} (\text{vel.})^2 = g y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \\ &= g y + k^2 a^2 c^2 \int_0^\infty e^{k(y-f)} \cos k x d k - c \frac{\partial \chi}{\partial x} + \text{const.} \\ &= g \eta + k^2 a^2 c^2 \int_0^\infty e^{-kf} \cos k x d k - k c \int_0^\infty \cos k x \alpha(k) d k + \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

This will be independent of x , provided

$$g \beta(k) + k^2 a^2 c^2 e^{-kf} - k c \alpha(k) = 0. \quad (66)$$

Combining this with (64) we find

$$\beta(k) = \frac{2 k a^2 c^2 e^{-kf}}{k c^2 - g}, \quad (67)$$

or, if we put

$$x = g/c^2, \quad (68)$$

$$\beta(k) = 2 a^2 \frac{k e^{-kf}}{k - x}. \quad (69)$$

Hence

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 2 a^2 \int_0^\infty \frac{k e^{-kf} \cos k x}{k - x} d k \\ &= 2 a^2 \int_0^\infty e^{-kf} \cos k x d k + 2 x a^2 \int_0^\infty \frac{e^{-kf} \cos k x}{k - x} d k \\ &= \frac{2 a^2 f}{x^2 + f^2} + 2 x a^2 \int_0^\infty \frac{e^{-kf} \cos k x}{k - x} d k. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Now, if $x > 0$, the principal value of the integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kf+ikx}}{k-\alpha} dk \tag{71}$$

is

$$-i\pi e^{-\alpha f+i\alpha x} - i \int_0^\infty \frac{e^{-imf-mx}}{im-\alpha} dm. \tag{72}$$

Hence, taking the principal value in (70), we find

$$\eta = \frac{2\alpha^2 f}{\alpha^2 + f^2} + 2\pi\alpha\alpha^2 e^{-\alpha f} \sin \alpha x + \int_0^\infty \frac{(\alpha \sin mf - m \cos mf) e^{-mx}}{m^2 + \alpha^2} dm. \tag{73}$$

The last term becomes insensible for large values of α . Since the expression in (70) is an even function of α , we must have, for large negative values of α ,

$$\eta = \frac{2\alpha^2 f}{\alpha^2 + f^2} - 2\pi\alpha\alpha^2 e^{-\alpha f} \sin \alpha x + \text{etc.} \tag{74}$$

On the disturbance represented by these formulae, we can superpose any system of waves of length $2\pi/\alpha$, since these could maintain their position in space, in spite of the motion of the stream; and if we choose as our additional system

$$\eta = 2\pi\alpha\alpha^2 e^{-\alpha f} \sin \alpha x, \tag{75}$$

we obtain, finally,

$$\eta = \frac{2\alpha^2 f}{\alpha^2 + f^2} + 4\pi\alpha\alpha^2 e^{-\alpha f} \sin \alpha x + \text{etc.}, \tag{76}$$

on the downstream side ($x > 0$), and

$$\eta = \frac{2\alpha^2 f}{\alpha^2 + f^2} + \text{etc.} \tag{77}$$

on the upstream side ($x < 0$). We have now annulled the disturbance, at a distance, on the upstream side, as is required for a physical solution (*).

(*) As in the former problem, the procedure is improved, at the cost of some increased complexity in the formulae, if we introduce frictional forces.

As this is one of the few cases where the « wave-making » resistance can be calculated, it may be worth while to give the result. The mean energy, per unit area of the water-surface, of the waves represented by the second term in (76) is (*)

$$\frac{1}{4} g \rho + (4 \pi \kappa a^2 e^{-\kappa f})^2;$$

and the addition made to the area occupied by the waves, in unit time, is c , per unit length of the cylinder. Again, if R be the resistance experienced by the cylinder, the additional wave-energy is Rc per unit length. Hence

$$R = 4 \pi^2 g \rho a^4 \kappa^2 e^{-2\kappa f}. \quad (78)$$

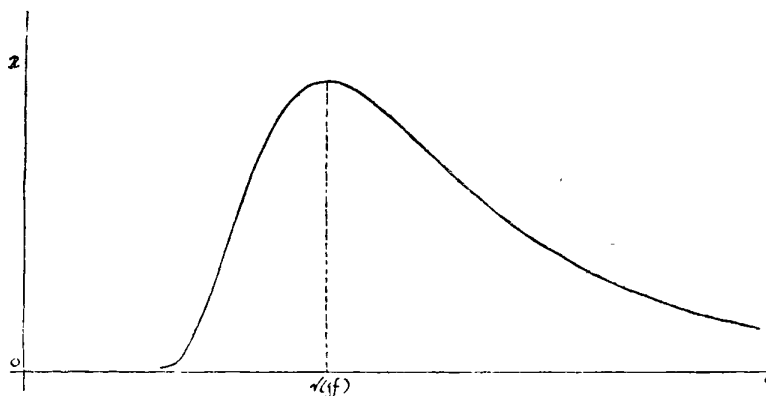
For a given depth of immersion (f), this is greatest when $\kappa f = 1$, or

$$c = \sqrt{gf}. \quad (79)$$

The formula (78) also gives, of course, the resistance when the cylinder advances with the velocity c through still water. In terms of this velocity we have

$$R = 4 \pi^2 g^3 \rho a^4 c^{-4} e^{-2gf/c^2}. \quad (80)$$

The graph of this function of the velocity is appended.



Manchester, November 18th, 1912.

(*) *Hydrodynamics*, Art. 229.

La construction de Weierstrass et l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique.

(Par JACQUES HADAMARD, à Paris.)

1. Le problème isopérimétrique (borné aux intégrales simples à une seule fonction inconnue) se distingue du problème le plus simple du Calcul des Variations en ce qu'il fait intervenir *deux* intégrales (*)

$$I = \int f\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \int f(x, y, x', y') dt$$

$$J = \int g\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \int g(x, y, x', y') dt$$

f et g étant deux fonctions « positivement homogènes » (***) en x', y' . A et B étant deux points donnés, on cherche la ligne qui, entre ces deux points, donne la plus grande ou la plus petite valeur à l'une de ces intégrales, parmi toutes celles qui donnent à l'autre une valeur donnée. Il y figure donc une équation de condition

$$I = \text{const. ou } J = \text{const.} \quad (1)$$

Si un tel extremum existe et est atteint pour une certaine forme déterminée de la ligne d'intégration, cette dernière doit vérifier les équations clas-

(*) Nous avons en vue, dans ce qui va suivre, les intégrales prises sous forme paramétrique (forme du texte). Le problème est beaucoup plus simple pour des intégrales de la forme $\int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$.

(**) Voir BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, p. 194, et nos *Leçons sur le Calcul des Variations*, t. I, p. 80.

siques (lesquelles se réduisent à une seule)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(f_{x'} - l g_{x'}) - (f_x - l g_x) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(f_{y'} - l g_{y'}) - (f_y - l g_y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

f_x, f_y, \dots désignant les dérivées partielles de f, g et l une constante arbitraire.

Il reste à savoir si l'on peut effectuer la *Construction de Weierstrass*, c'est-à-dire déterminer l et les deux constantes d'intégration de manière à satisfaire d'une part aux deux conditions qui expriment que la courbe cherchée passe en A, B , d'autre part à l'équation (1).

La question analogue — c'est-à-dire celle de l'existence d'une ligne L vérifiant toutes les conditions du problème et fournissant l'extremum cherché — est aujourd'hui élucidée, dans les cas les plus importants, en ce qui concerne les extrémales *libres* (c'est-à-dire lorsqu'on ne donne pas de condition de la forme (1)). Elle se résout soit par les méthodes bien connues de M. HILBERT, soit encore par des considérations de maxima ou de minima ordinaires, *une fois la solution préalablement obtenue dans un premier cas* : celui où A et B sont voisins l'un de l'autre.

Mais pour les problèmes isopérimétriques la difficulté est plus grande : elle commence avec l'étude même du premier cas qui vient d'être mentionné.

Dans un travail précédent (*), j'ai résumé sommairement une méthode par laquelle on en peut triompher pour une catégorie étendue d'entre eux, celle qui se présente le plus souvent dans les applications.

Cette méthode étant restée jusqu'ici (**) à ma connaissance, la seule qui ait été appliquée avec succès aux problèmes isopérimétriques, il m'a semblé utile de reprendre et de développer les indications contenues dans mon travail de 1907.

2. Les notations employées seront celles du travail en question, auxquelles j'adjoindrai les suivantes.

Je désignerai par λ l'inverse de l .

D'autre part, à l'exemple de M. LANDAU, je représenterai par a_1, a_2, \dots diverses constantes positives.

(*) *Annales Éc. Norm. Sup.*, 3^e série, t. XXIV, 1907.

(**) M. CARATHÉODORY a bien voulu m'annoncer qu'il possède sur ce point des résultats importants.

Je représenterai par k_1, k_2, \dots des quantités à chacune desquelles on peut assigner, dans la région considérée, une limite supérieure et une limite inférieure finies, positives et non nulles, de sorte qu'à toute quantité k correspondent deux constantes a telles que

$$0 < a \leq k \leq a'.$$

Bien entendu, d'après cette définition, une même quantité telle que k_1 peut, dans le cours du raisonnement, prendre différentes valeurs numériques k_1, k'_1, \dots

Enfin je représenterai par e_1, \dots diverses constantes positives qu'on peut prendre aussi petites qu'on le veut, sous la condition de ne considérer que des extrémales telles que $|\lambda| = \left| \frac{1}{l} \right|$ soit inférieur à un nombre suffisamment petit λ_1 .

I.

3. Les problèmes isopérimétriques dont je me suis occupé sont ceux pour lesquels l'intégrale J est une intégrale curviligne ordinaire

$$J = \int P dx + Q dy.$$

I , au contraire, est essentiellement de forme différente: il vérifie — dans une certaine région R à laquelle nous nous bornerons — les conditions les plus usuellement admises pour l'étude d'un minimum ordinaire (minimum libre), savoir :

- 1.° l'élément d'intégration $f(x, y, x', y')$ est toujours positif et non nul;
- 2.° la quantité E de WEIERSTRASS est également positive et ne s'annule même pas « extraordinairement ».

Géométriquement ceci s'exprime en disant que la *figurative* (*) du problème est (en tout point de la région R) une courbe fermée convexe entourant l'origine.

(*) Je substitue cette dénomination (ainsi que je l'ai fait dans mes *Leçons sur le Calcul des Variations*) à celle d'*indicatrice*, due à M. CARATHÉODORY et employée dans mon Mémoire cité plus haut. La raison de cette substitution est qu'on peut avoir à considérer l'indicatrice (au sens ordinaire du mot) de la figurative (voir *Leçons sur le Calcul des Variations*, n.° 92).

Ce signe de E est d'ailleurs celui de la quantité

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{y'^2} f_{x'^2} = -\frac{1}{x' y'} f_{x' y'} = \frac{1}{x'^2} f_{y'^2} = \\ &= \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \left[f(x, y, \cos \theta, \sin \theta) + \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right]. \end{aligned}$$

Ici, cette quantité A est nulle pour l'intégrale J et, par suite, son expression ne change pas lorsqu'on remplace l'intégrale I par $I - lJ$, quelle que soit la constante l .

4. Cette remarque suffit déjà à fournir une limite inférieure de l'arc compris entre foyers conjugués *libres* (*) sur une extrémale E_i , en désignant ainsi une extrémale relative à l'intégrale $I - lJ$.

Par un point A d'une telle extrémale, pris comme origine des arcs, soit menée une seconde extrémale voisine de la première, correspondant à la même valeur de l . Définissons un point quelconque de cette seconde courbe par sa distance normale n à la première et l'arc s compris entre le pied de cette normale et le point A . Si nous désignons par α l'angle des deux courbes en A , la quantité $\nu(s) = \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$ vérifie une équation linéaire du second ordre qui n'est autre que l'équation aux variations correspondant à l'équation différentielle (**)

$$A(x' y'' - y' x'') = \varphi(x, y, x', y') - lM(x, y) \quad (E_i)$$

des extrémales. Pour l'obtenir, il suffit de remplacer x, y par les coordonnées du point situé sur la normale à E_i à une distance n , soit

$$x + \delta x = x - n \sin \theta, \quad y + \delta y = y + n \cos \theta.$$

Si l'on prend comme variable indépendante l'arc s de E_i , on aura

$$x' + \delta x' = x' - \frac{n}{R} \cos \theta - n' \sin \theta = \cos \theta \left(1 - \frac{n}{R} \right) - n' \sin \theta,$$

$$y' + \delta y' = y' - \frac{n}{R} \sin \theta + n' \cos \theta = \sin \theta \left(1 - \frac{n}{R} \right) + n' \cos \theta$$

(*) Voir n.° 3, p. 207, du Mémoire cité des *Annales Éc. Norm. Sup.*

(**) Mémoire cité, p. 208.

(R , rayon de courbure de E_i); ceci donne

$$\theta + \delta\theta = \theta + \operatorname{arc\,tg} \frac{n'}{1 - \frac{n}{R}} = \theta + n'$$

(en négligeant les termes du second ordre par rapport à n et à ses dérivées), et, de même

$$d's + \delta \cdot ds = ds \sqrt{\left(1 - \frac{n}{R}\right)^2 + n'^2} = ds \left(1 - \frac{n}{R}\right)$$

puis

$$\begin{aligned} (x' + \delta x')(y'' + \delta y'') - (y' + \delta y')(x'' + \delta x'') &= \left(\frac{ds + \delta ds}{ds}\right)^2 \frac{d}{ds} (\theta + \delta\theta) = \\ &= \left(1 - \frac{n}{R}\right)^2 \left(\frac{d\theta}{ds} + n''\right) = \left(1 - \frac{n}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{R} + n''\right), \end{aligned}$$

de sorte qu'on reportant ces valeurs dans (E_i), on a, à des termes près d'ordre supérieur au premier par rapport à n , n' , n'' (la quantité $A(x, y, \cos \theta, \sin \theta)$ étant désignée, pour abrégé, par $A(x, y, \theta)$ et, de même, la quantité $\varphi(x, y, \cos \theta, \sin \theta)$, par $\varphi(x, y, \theta)$),

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{R} + n''\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{n}{R}\right)} A(x - n \sin \theta, y + n \cos \theta, \theta + n') = \\ &= \varphi(x - n \sin \theta, y + n \cos \theta, \theta + n') - l M(x - n \sin \theta, y + n \cos \theta) \end{aligned}$$

ou, en prenant la partie linéaire par rapport à n , n' , n'' et remplaçant n par $\frac{n}{\alpha} = v$,

$$\left. \begin{aligned} v'' + p v' + q v &= 0, & p &= \frac{1}{A} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right), \\ q &= \frac{1}{R^2} + \frac{1}{A} \left[\frac{1}{R} \left(\cos \theta \frac{\partial A}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - l \left(\cos \theta \frac{\partial M}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial M}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (\varepsilon)$$

v est d'ailleurs la solution de cette équation qui s'annule pour $s=0$ et qui est en outre (d'après la signification de α) telle que, pour cette valeur de s ,

$$v' = \frac{dv}{ds} = 1.$$

Dans les expressions de p et de q , la courbure $\frac{1}{R}$ a, en fonction de x , y , θ , l , la valeur que l'on tire de (E_i) , soit

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A(x, y, \theta)} \left[\left(\varphi(x, y, \theta) - l M(x, y) \right) \right].$$

On voit donc que p , q , ainsi exprimés en fonction de x , y , θ , l , sont, le premier un polynôme linéaire par rapport à l , le second un polynôme quadratique, les coefficients étant finis et continus dans toute la région R .

L'intervalle dans lequel une solution v ainsi définie est différente de zéro a, dans ces conditions, une limite inférieure différente de zéro pour l fini et, pour l très grand, au moins égale à $\frac{a_1}{|l|}$, a_1 étant, conformément à ce qui a été dit au n.º 2, une constante.

C'est ce que l'on pourrait voir par un calcul analogue à celui qu'a donné M. LINDBERG (*) ou à celui de mes *Leçons sur le Calcul des Variations* (**). Mais le procédé le plus simple, en pareil cas, est de recourir au théorème de STURM et aux propositions connexes, lesquelles, si H est une limite supérieure de $|Q|$ dans l'équation différentielle

$$u'' + Qu = \frac{d^2 u}{ds^2} + Q(s) \cdot u = 0,$$

donnent pour l'intégrale u telle que $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, les inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \operatorname{Sh}(s\sqrt{H}) > u > \frac{1}{\sqrt{H}} \sin(s\sqrt{H}) \quad (2)$$

dans tout l'intervalle $0 \leq s \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$.

En vertu de la transformation $v = u e^{-\frac{1}{2} \int p ds}$ qui fait disparaître le second terme de l'équation (ε), on voit que l'on devra prendre pour a une limite supérieure de la valeur absolue de la quantité

$$Q = q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} = q - \frac{1}{2} \frac{dp}{ds} - \frac{p^2}{4},$$

(*) *Math. Ann.*, t. 59, p. 340.

(**) N.º 107.

moyennant quoi, dans l'intervalle

$$0 \leq s \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

v sera différent de zéro et tel que

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \operatorname{Sh}(s\sqrt{H}) \cdot e^{-\int_0^s \frac{p}{2} ds} > v > \frac{1}{\sqrt{H}} \sin(s\sqrt{H}) \cdot e^{-\int_0^s \frac{p}{2} ds}. \quad (2')$$

Or ici Q est un polynôme du second degré en l et on peut prendre H proportionnel à l^2 si l est très grand : ce qui donne bien la conclusion annoncée.

5. Prenons maintenant les équations différentielles du problème sous la forme (Mémoire précédemment cité, p. 208),

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \cos \theta \frac{A(x, y, \theta)}{\varphi(x, y, \theta) - l M(x, y)}, \\ \frac{dy}{d\theta} &= \sin \theta \frac{A(x, y, \theta)}{\varphi(x, y, \theta) - l M(x, y)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left(M(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

θ est l'angle que fait la tangente avec l'axe des x et A a la signification ci-dessus indiquée.

En posant $\frac{1}{l} = \lambda$, on peut aussi les écrire

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\lambda \cos \theta \frac{A}{M - \lambda \varphi} \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\lambda \sin \theta \frac{A}{M - \lambda \varphi} \quad (*) \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

(*) Dans ces calculs, on ne doit pas oublier que la fonction f n'est que « positivement » homogène. $\cos \theta$, $\sin \theta$ désignent, dans les formules (3) et suivantes, les cosinus directeurs de la tangente prise dans le sens des t croissants. La courbe étant ainsi parcourue, θ est (pour λ très petit) croissant ou décroissant suivant que $-\lambda M$ est positif ou négatif.

Il suit de là que les extrémales qui correspondent à λ très petit, et qui sont sensiblement semblables entre elles, cessent de l'être, si leurs λ sont de signes différents, lorsqu'on tient compte du sens du parcours. En supposant $M < 0$, les extrémales correspondant à $\lambda > 0$ sont semblables à la figuratrice parcourue dans le sens direct, les extrémales correspondant à $\lambda < 0$, à la figuratrice parcourue dans le sens rétrograde.

Si, aux hypothèses déjà faites, nous adjoignons celle que M soit différent de zéro dans toute la région R , les seconds membres sont holomorphes en λ , pour λ suffisamment petit.

S'il sont, en outre, holomorphes en x, y, θ , les solutions sont, d'après un théorème connu de POINCARÉ, développables suivant les puissances de λ (pour $|\lambda| \leq \alpha_2$) dans toute leur région de régularité ou, plutôt, dans toute la partie de cette région qui est intérieure à R .

On arriverait à une conclusion susceptible de rendre les mêmes services dans ce qui va suivre, dans l'hypothèse où A, φ, M auraient simplement des dérivées partielles continues jusqu'à un certain ordre, par l'application de la méthode d'approximations successives de M. PICARD. En prenant tout d'abord x, y égaux, quel que soit θ , aux coordonnées x_0, y_0 du point initial A , puis faisant

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} &= x_0 - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta} \cos \theta \frac{A(x_0, y_0, \theta)}{M(x_0, y_0) - \lambda \varphi(x_0, y_0, \theta)} d\theta, \\ y^{(1)} &= y_0 - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \frac{A(x_0, y_0, \theta)}{M(x_0, y_0) - \lambda \varphi(x_0, y_0, \theta)} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

et généralement

$$\left. \begin{aligned} x^{(i+1)} &= x_0 - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta} \cos \theta \frac{A(x^{(i)}, y^{(i)}, \theta)}{M(x^{(i)}, y^{(i)}) - \lambda \varphi(x^{(i)}, y^{(i)}, \theta)} d\theta, \\ y^{(i+1)} &= y_0 - \lambda \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta \frac{A(x^{(i)}, y^{(i)}, \theta)}{M(x^{(i)}, y^{(i)}) - \lambda \varphi(x^{(i)}, y^{(i)}, \theta)} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$(i = 0, 1, \dots, +\infty),$

les différences $x^{(i+1)} - x^{(i)}, y^{(i+1)} - y^{(i)}$ contiendront λ^{i+1} en facteur. On en déduira, d'après ce qui est connu relativement à la possibilité de différentier les solutions d'un système différentiel par rapport aux constantes initiales, que x, y , solutions du système (3'), sont de la forme

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda g_1 + \lambda^2 g^2 + \dots + \lambda^{p-1} g_{p-1} + \lambda^p G \\ y &= y_0 + \lambda h_1 + \lambda^2 h^2 + \dots + \lambda^{p-1} h_{p-1} + \lambda^p H, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

où g_i, h_i sont des fonctions de $x_0, y_0, \theta_0, \theta$; — G, H , des fonctions $x_0, y_0, \theta_0, \theta, \lambda$ — continûment dérivables par rapport à toutes les variables qu'elles contiennent: ceci, tant que la courbe correspondante est régulière et ne sort pas de R , ce qui a d'ailleurs lieu dans un intervalle de variation de θ d'autant plus grand que λ est plus petit.

En particulier, les termes du premier degré

$$\lambda g_1, \quad \lambda h_1$$

des développements (5) coïncident avec ceux qu'on obtient en développant les quantités (4). Or il a été constaté, dans notre travail précédent, qu'en s'arrêtant ainsi aux termes en λ , on obtenait (*)

$$\left. \begin{aligned} x_0 + \lambda g_1 &= x_0 - \frac{\lambda}{M_0} (f_{y'} - f_{y'_0}) \\ y_0 + \lambda h_1 &= y_0 + \frac{\lambda}{M_0} (f_{x'} - f_{x'_0}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

($f_{x'}$, $f_{y'}$, $f_{x'_0}$, $f_{y'_0}$, M_0 étant calculés en remplaçant x , y , x' , y' , x'_0 , y'_0 par x_0 , y_0 , $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos \theta_0$, $\sin \theta_0$), de sorte que le lieu du point correspondant est homothétique d'une courbe connue et déterminée, que j'ai appelée, dans mes *Leçons sur le Calcul des Variations*, la *figuratrice*, et qui dérive de la figurative par polaires réciproques.

Les formules (6) ainsi obtenues représentent une extrémale E_1 à des quantités près qui, ainsi que leurs dérivées par rapport à x_0 , y_0 , θ_0 , θ , sont de l'ordre de λ^2 .

Il est à remarquer que les termes suivants g_2 , h_2 ,... des développements de x , y suivant les puissances de λ s'obtiennent par de simples quadratures effectuées le long de la figuratrice.

6. La détermination des foyers conjugués a été faite dans le travail des *Annales Éc. Norm. Sup.*: si l'on réduit $x - x_0$, $y - y_0$ à leurs premiers termes λg_1 , λh_1 , le déterminant $\frac{D(x, y)}{D(\theta, \theta_0)}$ dont l'évanouissement caractérise le foyer libre du point (x_0, y_0) , ne s'annule qu'avec $\lambda \sin(\theta - \theta_0)$.

(*) On peut établir ceci plus simplement encore, en portant des équations différentielles (E), soit, ici, en prenant θ comme variable indépendante,

$$\frac{d}{d\theta} f_{x'} - f_x - l M y' = 0, \quad \frac{d}{d\theta} f_{y'} - f_y + l M x' = 0,$$

ou

$$\frac{d}{d\theta} \left(y - \frac{\lambda}{M_0} f_{x'} \right) = -\frac{\lambda}{M} f_x - \lambda \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{M_0} \right) f_{x'}, \quad \frac{d}{d\theta} \left(x + \frac{\lambda}{M_0} f_{y'} \right) = \frac{\lambda}{M} f_y + \lambda \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{M_0} \right) f_{y'},$$

équations dont les seconds membres sont du second ordre en λ (f_x et f_y étant du premier degré en x' , y').

Soit (comparer n.º 2) e_1 une quantité positive que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut, si l'on suppose $|\lambda|$ inférieur à un nombre suffisamment petit λ_1 .

Le premier terme (terme en λ^2) du déterminant en question, étant supérieur en valeur absolue à un nombre fixe tant que θ variera entre $\theta_0 + e_1$ et $\theta_0 + \pi - e_1$, ou entre $\theta_0 + \pi + e_1$ et $\theta_0 + 2\pi - e_1$, l'emportera sur les termes suivants, pour ces valeurs de θ , dès que $|\lambda| < \lambda_1$.

Il n'y aura d'ailleurs pas de foyer libre de A pour $|\theta - \theta_0| < e_1$, en vertu (*) de la conclusion obtenue plus haut, d'après laquelle l'arc compris entre foyers conjugués est au moins égal à $\alpha_1 |\lambda|$ (et correspond, par conséquent, à $|\theta - \theta_0| > \alpha_3$).

Pour la même raison, en remplaçant, au besoin, R par une région R_1 plus restreinte (mais renfermant cependant A à son intérieur au sens strict), il n'y aura pas, pour $|\lambda| > \lambda_1$, de foyer libre de A intérieur à R_1 , ou, du moins, de foyer libre A_1 de A tel que l'arc AA_1 soit entièrement intérieur à R_1 ; et, réduisant convenablement l'étendue de R_1 , on pourra prendre λ_1 aussi petit qu'on le voudra.

Par contre, le théorème des fonctions implicites montre qu'il y aura, pour $|\lambda| < \lambda_1$, un foyer libre (unique) de A tel que $|\theta - \theta_0 - \pi| < e_1$.

La constante α_3 , mentionnée tout à l'heure peut, d'après cela, être prise égale à $\pi - e_1$.

On montrera de même, conformément à notre travail précédent, que le foyer *lié* de A est tel que $\theta - \theta_0$ est compris entre $2\pi - e_2$ et $2\pi + e_2$.

II.

7. Les considérations précédentes permettent d'effectuer la construction de WEIERSTRASS toutes les fois que les données sont telles que cette construction conduise assurément à un arc sur lequel la variation de θ soit inférieure à $2\pi - e_2$.

(*) Ce fait s'établit aussi en remarquant que le déterminant considéré $\frac{D(x, y)}{D(\theta, \theta_0)}$ est, *quel que soit* λ , divisible par $\theta - \theta_0$. On peut donc, au lieu de ce déterminant, considérer son quotient par $\theta - \theta_0$, lequel est continu et ne s'annule pas en A .

Le problème est double: on peut avoir à joindre deux points donnés A, B par une ligne sur laquelle I ait une valeur donnée, ou par une ligne sur laquelle J ait une valeur donnée. Nous dirons qu'on a affaire à la *première* ou à la *seconde* construction de WEIERSTRASS, suivant que c'est I ou J qui est donné.

L'intégrale I est essentiellement positive dans toute la région R .

Dans la région R_1 (si celle-ci a été suffisamment réduite) elle a, entre deux points donnés quelconques A, B , un minimum I_0 , atteint sur une extrémale parfaitement déterminée E_0 , et dont le rapport à la distance rectiligne \overline{AB} est compris entre deux limites positives (et non nulles) fixes α_4, α_5 ($0 < \alpha_5 < \alpha_4$).

Quant à l'intégrale J , convenons de la prendre, non pas uniquement sur la ligne arbitraire, allant de A en B , que nous considérons, mais (ce qui ne changera pas le problème posé) le long du contour fermé constitué par cette ligne et par l'extrémale E_0 revenant (*) de B en A .

On ne commettrait d'ailleurs (**) qu'une erreur du troisième ordre au moins par rapport à AB en substituant à E_0 le segment rectiligne AB .

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons, pour fixer les idées, M négatif dans la région R .

Moyennant cette hypothèse, si le contour fermé dont il vient d'être question est sans point double et décrit dans le sens direct, J est positif; il est négatif si ce contour est sans point double et décrit en sens rétrograde. On voit donc déjà (***) , pour l suffisamment grand et $|\theta - \theta_0| < 2\pi - \epsilon_2$, que J aura nécessairement le signe de l (quel que soit le signe de M , cette fois). Cette conclusion est d'ailleurs, comme on va le voir, vraie pour toutes les valeurs de l .

Nous nommerons (M étant supposé négatif) extrémales *directes*, celles qui correspondent à $l > 0$; extrémales *rétrogrades* celles qui correspondent à $l < 0$.

(*) Le sens de parcours de E_0 à l'aide duquel I est supposé calculé et l'équation différentielle écrite, reste le sens AB .

(**) On constate aisément que l'aire comprise entre un arc s de courbe et sa corde est inférieure à $\frac{1}{2} s^3 \gamma_1$, γ_1 étant le maximum de la courbure le long de l'arc en question. Or, la courbure de E_0 a une limite supérieure finie que l'on peut assigner.

(***) Voir page 257, note (*).

8. Un premier cas a été étudié dans notre travail précédent: c'est celui d'un arc E_l satisfaisant à la condition de JACOBI pour l'extremum libre. Nous avons vu en cet endroit que, si l'on suppose fixes les extrémités A, B de l'arc d'intégration, I est une fonction croissante de $|l|$ et J une fonction croissante de la valeur algébrique de l tant que $|l|$ est assez petit pour que le foyer libre de A ne soit pas sur cet arc.

Soient donc l' la valeur — positive, par exemple — de l pour laquelle A et B deviennent foyers conjugués libres l'un de l'autre; I', J' , les valeurs correspondantes de I, J . On pourra faire croître l de 0 à l' .

Or, d'après ce qui a été vu au n.º 6, $|l'|$ est au moins égal à un nombre fixe $\frac{1}{\lambda_1}$, aussi grand qu'on le veut si l'on a réduit suffisamment l'étendue de B_1 .

D'autre part, le rapport $\frac{I_s}{I_c}$ des intégrales $\int f\left(x_0, y_0, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt$ prises l'une le long d'un arc s de figuratrice tel que les tangentes en ses extrémités fassent un angle égal à π , l'autre le long de la corde c de cet arc, a un minimum (*) α_s évidemment supérieur à 1.

Il résulte de là que la première construction de WEIERSTRASS consistant à joindre A à B par un arc d'extrémale E_l (l inconnue) sur lequel I ait une valeur donnée, peut être effectuée d'une et même de deux façons, tant que $\frac{I}{I_0}$ ne dépasse pas une certaine limite $\alpha'_s (= \alpha_s - e_s) > 1$, les arcs obtenus ne contenant pas de foyer libre de A . L'un de ces arcs est direct, l'autre rétrograde.

Pour une raison toute semblable, la seconde construction de WEIERSTRASS peut être effectuée (d'une manière unique, cette fois) tant que $\left|\frac{J}{I_0}\right|$ ne dépasse en valeur absolue une limite déterminée α'_7 . L'arc obtenu est évidemment direct ou rétrograde, suivant le signe de J .

9. On peut ajouter, en vertu des résultats de M. LINDBERG (**), que E_l se déforme dans un sens constant lorsque l varie (à partir de zéro). On

(*) Ici et dans toutes les circonstances analogues, lorsque nous parlerons du minimum d'une quantité sur la figuratrice, ce minimum se rapportera, non seulement à tous les arcs d'une même figuratrice, mais à toutes les figuratrices relatives aux différents points (x_0, y_0) de B_1 .

(**) Loc. cit., p. 343.

voit donc que l'angle fait par E_i (en A ou en B) avec E_0 est une fonction croissante de $|l|$, ou encore, de I ou de $|J|$.

Cette conclusion peut même, ainsi qu'il nous sera utile pour la suite, se préciser comme nous allons le montrer.

Parmi toutes les extrémales E_i qui joignent deux points donnés A, B , considérons celles pour lesquelles $|l|$ est au plus égal à une limite positive donnée, quelconque d'ailleurs, l_1 . La quantité Q du n.º 4 est alors finie (quelles que soient les coordonnées de A et l'argument θ_0 de la tangente en ce point). Il en résulte que la quantité H considérée en cet endroit peut être prise constante et que, par conséquent, sur tout arc d'une telle extrémale ayant à partir de A une longueur déterminée (*) (savoir $\frac{\pi - h}{\sqrt{H}}$, h étant un nombre positif quelconque inférieur à π), v sera de la forme $k_1 s$, k_1 ayant la signification indiquée au n.º 2.

Envisageons maintenant la dérivée $v_1 = \frac{dn}{dl}$ (relative à une variation de l dans laquelle A et B restent fixes). Considérée comme fonction de s , v_1 vérifie l'équation

$$v_1'' + p v_1' + q v_1 = -\frac{M}{A} \quad (\varepsilon_1)$$

dont le premier membre est le même que celui de (ε) (page 255). Elle est la solution de cette équation qui s'annule au point A (que nous prenons pour origine des arcs) et au point B ($s = \sigma$).

La dérivée $v_1'(0)$ est, comme précédemment, égale à 1. La dérivée $v_1'(0)$ n'est autre que $\frac{d\theta_0}{dl}$, de sorte que cette dernière quantité est aussi la valeur de $\frac{v_1(s)}{v(s)}$ pour $s = 0$.

Au lieu de v considérons, comme précédemment, la quantité $u = v e^{\frac{1}{2} \int_0^s p \bar{a} s}$, solution de l'équation

$$u'' + Q u = 0 \quad ((\varepsilon))$$

(*) On peut évidemment toujours faire que cette longueur comprenne forcément tout segment de l'extrémale en question intérieur à R_1 , soit en réduisant la valeur de l_1 , soit en réduisant les dimensions de R_1 . Nous pourrions donc supposer que cette précaution a été prise.

et soit, de même, $u_1(s)$ la quantité $v_1(s) e^{\frac{1}{2} \int_0^s p \bar{d}s}$, solution de l'équation

$$u''_1 + Q u_1 = - \frac{M}{A} e^{\int_0^s p \bar{d}s} = m(s). \quad ((\varepsilon_1))$$

La relation

$$u u'_1 - u'_1 u = \int_0^s m(s) u(s) \bar{d}s$$

donne

$$\frac{u_1(s)}{u(s)} = \frac{v_1(s)}{v(s)} = r(s) = r(0) + \int_0^s \frac{1}{u^2(s)} \bar{d}s \int_0^s m(s') u(s') \bar{d}s'. \quad (7)$$

Si, comme nous le supposons, σ est inférieur à

$$\frac{\pi - h}{\sqrt{H}}, \quad \text{on a } r(\sigma) = \frac{u_1(\sigma)}{u(\sigma)} = 0.$$

Donc

$$r(0) = \frac{d\theta_0}{d\bar{l}} = - \int_0^\sigma \frac{1}{u^2(s)} \bar{d}s \int_0^s m(s') u(s') \bar{d}s'$$

$u(s)$ étant de la forme $k_2 s$ pendant que $m = - \frac{M}{A} e^{\int_0^s p \bar{d}s}$ est (pour $0 \leq s \leq \sigma$, $|\bar{l}| \leq l_1$) de la forme k_3 , on a (*)

$$\frac{d\theta_0}{d\bar{l}} = - k_4 \sigma. \quad (8)$$

De plus, $r(0)$ étant ainsi déterminé, la relation (7) donne

$$r(s) = - \int_s^\sigma \frac{1}{u^2(s)} \bar{d}s \int_0^s m(s') u(s') \bar{d}s'$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} r(s) &= - k_4 (\sigma - s) \\ v_1(s) &= - k_5 s (\sigma - s). \end{aligned}$$

Cette même déformation de notre extrémale produit, sur les valeurs de I et de J , des altérations dont nous pouvons maintenant évaluer l'ordre de grandeur.

(*) k'_2 étant, comme il a été indiqué au n.º 2, une seconde valeur de k_2 , on a

$$k_4 = \frac{1}{2} \frac{k_2 k_3}{k_2^2}.$$

On a d'abord

$$\frac{dJ}{dl} = \int_0^\sigma M \nu_1 ds = k_6 \sigma^3 \quad (9)$$

puis

$$\frac{dI}{dl} = l \frac{dJ}{dl} = k_6 l \sigma^3.$$

Le rapport $\frac{I}{\sigma}$ est une quantité k_7 (il est compris entre le maximum et le minimum de $f(x, y, \cos \theta, \sin \theta)$). Donc on peut écrire

$$\frac{dI}{dl} = k_8 l I^3$$

et, en intégrant de 0 à l ,

$$\frac{1}{I_0^2} - \frac{1}{I^2} = k_8 l^2$$

I_0 désignant, comme précédemment, le minimum libre de I entre A et B .

On voit tout d'abord, en écrivant ceci sous la forme

$$1 - \frac{I_0^2}{I^2} = k_8 l^2 I_0^2,$$

que, si I_0 est suffisamment petit (une fois l_1 choisi), et, par conséquent, aussi si la région R_1 a été convenablement restreinte, $\frac{I}{I_0}$ est ainsi limité supérieurement (ce qui était évident *à priori*, puisque la courbure de E_i est finie pour $|l| < l_1$).

Moyennant ce fait, la formule précédente s'écrit encore

$$\frac{I - I_0}{I_0} = k_9 l^2 I_0^2 \quad (10)$$

égalité dans laquelle, au second membre, I_0 peut (moyennant un changement de coefficient k) être remplacé par la distance rectiligne AB .

Mais on a aussi, en vertu de (8),

$$\alpha = k_{10} l I_0$$

α étant l'angle de E_i avec E_0 en A ; de sorte que

$$\frac{I - I_0}{I_0} = k_{11} \alpha^2. \quad (11)$$

Quant à J , la relation (9) montre qu'il est de la forme $k_6 l \sigma^3$. Si nous tenons compte de ce que $\frac{\sigma}{I_0}$ est également une quantité de la forme k , nous voyons que

$$\frac{J}{I_0^2} = k_{12} l I_0, \quad (12)$$

c'est-à-dire que le premier membre est une nouvelle quantité du même ordre que α ou que $\sqrt{\frac{I - I_0}{I_0}}$.

10. Voici une autre conséquence des mêmes remarques. L'extrémale E_0 ayant été tracée entre A et B et donnant une valeur I_0 de l'intégrale I , soit B' un point de E_0 situé un peu en deçà de B , tel, par conséquent, que la portion de I_0 qui correspond à l'arc $B B'$ soit une petite quantité ε . Joignons A à B' par une extrémale directe E , le long de laquelle I ait la même valeur I_0 que suivant l'arc primitif $A B$. Dans l'équation (10), $I - I_0$ devra être remplacé par ε (sans modification du dénominateur I_0 , si ε est assez petit). En éliminant, dans ces conditions, l entre (10) et (12), il vient

$$J = k_{13} I_0^{3/2} \sqrt{\varepsilon}. \quad (12')$$

11. La construction étant acquise parce qu'elle précède, pour le cas où elle conduit assurément à un arc tel que $|\theta - \theta_0| < \pi - e_1$, il s'agit en second lieu, de voir si on peut l'effectuer en obtenant un arc sur lequel $|\theta - \theta_0|$ soit inférieur à $2\pi - e_2$, $|\lambda|$ étant inférieur à λ_1 . Nous pourrions supposer $\frac{I}{I_0} > a'_6$ s'il s'agit de la première construction ou $\frac{|J|}{I_0^2} > a'_7$ s'il s'agit de la seconde: ce qui entraîne, pour l'arc cherché, $|\theta - \theta_0| > \alpha_8 > 0$, l'angle $\alpha = |\theta - \omega|$ que fait cet arc (en A ou B) avec sa corde étant aussi supérieur à une constante positive α_9 .

On ramène cette étude à la démonstration des trois faits suivants:

1.^o Toute demi droite issue de A et faisant avec la direction θ_0 un angle α compris entre α_9 et $\pi - e'_4$ (où e'_4 est une constante dépendant de λ_1 , e_2 et qui tend vers zéro avec ces quantités) coupe E , en un point déterminé B tel que $|\theta - \theta_0| < 2\pi - e_2$.

2.^o θ_0 restant fixe, la longueur du rayon vecteur ainsi déterminé, nulle avec λ , augmente avec $|\lambda|$, de sorte que B prend une fois et une seule toute position située sur la demi droite considérée, entre A et celle qui correspond à $\lambda = \pm \lambda_1$.

3.° Si l'on a pu construire un arc AB d'extrémale E_i dont la tangente en A ait un argument donné θ_0 , la valeur de I ou de $|J|$ correspondant à cet arc est, lorsque θ_0 varie, une fonction croissante de l'angle $|\theta_0 - \omega| = \alpha$ que l'arc en question fait avec sa corde (*) AB .

Le premier de ces faits résulte de ce que, sur la figuratrice (celle-ci étant convexe), tout arc le long duquel la variation de θ est $2\pi - e_2$ (ou, si l'on veut, e_2) a une corde qui fait avec la courbe des angles tous deux inférieurs à un certain maximum e_4 (ou supérieurs à $\pi - e_4$), e_4 tendant vers zéro avec e_2 .

De plus, la longueur de cette corde est supérieure à a_{10} , soit $a_{10} \left| \frac{\lambda}{M_0} \right|$ après rotation de $\frac{\pi}{2}$ et homothétie dans le rapport $\frac{\lambda}{M_0}$. Or l'extrémité du segment ainsi obtenu ne doit être altérée que d'une quantité de l'ordre de λ^2 pour fournir celle de la corde correspondante de l'extrémale E_1 . L'angle de

celle-ci avec la direction de la tangente en A ne sera donc, pour $|\lambda| < \lambda_1$ et λ_1 suffisamment petit, altéré que d'une quantité arbitrairement petite: il restera supérieur à $\pi - e'_4$ (e'_4 étant une quantité très peu supérieure à e_4).

Toute direction faisant avec AB un angle compris entre α_0 et $\pi - e'_4$ (du côté de AB où est l'extrémale) coupera cette extrémale en un point B , évidemment unique par raison de convexité, tel que $|\theta - \theta_0| < 2\pi - e_2$.

En second lieu, si nous étudions le déplacement de ce point B sur son rayon vecteur lorsque λ varie (θ_0 restant fixe) nous devons écrire

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{\partial x}{\partial \theta} = \tau \frac{x}{\lambda}$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \tau \frac{y}{\lambda}$$

et la question est de savoir si $\tau > 0$. Or, en éliminant $\frac{d\theta}{d\lambda}$, on trouve

$$\tau = \frac{\lambda \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \theta)}}{x \frac{\partial y}{\partial \theta} - y \frac{\partial x}{\partial \theta}}.$$

(*) Plus exactement, de l'angle (toujours pris en valeur absolue) que fait la direction d'argument θ_0 avec l'extrémale E_0 que l'on peut mener de A à B . Mais la distinction n'importe pas du moment que l'angle α est supérieur à α_0 , l'angle que fait E_0 avec la droite AB étant infiniment petit avec AB de sorte qu'on peut le diminuer arbitrairement en rétrécissant la région R_1 .

En développant, d'après les formules (5), suivant les puissances de λ , on voit immédiatement que le numérateur et le dénominateur commencent par des termes en λ^2 dont le coefficient est le même. Mais, de plus, la valeur unique de ce coefficient, savoir $g_1 \frac{d h_1}{d \theta} - h_1 \frac{d g_1}{d \theta}$, est différente de zéro (et, par conséquent, supérieure en valeur absolue à un nombre fixe) lorsque $\theta - \theta_0$ varie (*) de α_0 à $2\pi - \epsilon_2$, θ_0 prenant, d'autre part, toutes les valeurs possibles entre 0 et 2π et (x_0, y_0) toutes les positions possibles dans R_1 .

Donc on aura $|\tau - 1| < \epsilon_3$ et $\tau > 0$.

Enfin, nous avons à calculer la variation de I ou de J lorsque θ_0 varie. Considérons, par exemple, $\frac{dJ}{d\theta_0}$ (λ et θ étant des fonctions de θ_0 telles que $dx = dy = 0$): on a

$$\frac{dJ}{d\theta_0} = \frac{D(J, x, y)}{D(\theta_0, \lambda, \theta)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \theta)}.$$

Le dividende — ou, du moins, sa partie principale — a été calculé dans notre précédent Mémoire(**) (au changement près de la variable indépendante l en λ); ce calcul montre que le coefficient du premier terme (terme en λ^3) ne s'annule pas et, par conséquent, reste supérieur en valeur absolue à un nombre positif déterminé (3) h_1 , dans les mêmes conditions que tout à l'heure (***) .

Le coefficient de λ dans $\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \theta)}$ étant, dans ces mêmes conditions, comme nous l'avons vu tout à l'heure, de la forme k_{14} , $\frac{dJ}{d\theta_0}$ est négatif et supérieur en valeur absolue à $\lambda^2 h_2$ ($h_2 = \frac{h_1}{k_{14}} - \epsilon_3$) pour $|\lambda| < \lambda_1$ suffisamment petit.

(*) Comme précédemment (voir page 260, note (*)), la restriction $(\theta - \theta_0) > \alpha_0$ est, en réalité, inutile, comme on le verrait en mettant en facteur $(\theta - \theta_0)^2$ s'il s'agit de $\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \theta)}$ ou de $x \frac{\partial y}{\partial \theta} - y \frac{\partial x}{\partial \theta}$; $(\theta - \theta_0)^2$, s'il s'agit de $\frac{D(J, x, y)}{D(\theta_0, \lambda, \theta)}$.

(**) Page 218 des *Ann. Éc. Norm. Sup.*

(***) La constante h_1 dépend de ϵ_2 . Nous ne la désignons pas par une lettre ϵ parce qu'elle doit (et non pas peut) être choisie très petite avec ϵ_2 .

Nous n'avons pas de nouveau calcul à faire en ce qui concerne $\frac{dI}{d\theta_0}$, car, lorsqu'une extrémale E_i se déforme (par variation de l) sans déplacement des extrémités, on a $dI - l dJ = 0$.

On peut ajouter, en vertu de considérations tout analogues, que, pour cette même déformation, la valeur de θ en B varie en sens inverse de θ_0 :

$$\frac{d\theta}{d\theta_0} = \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \theta_0)} : \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \theta)} < 0.$$

12. Les trois faits précédemment annoncés étant ainsi établis, considérons tous les arcs d'extrémales compris dans R_1 et correspondant à $\lambda = \pm \lambda_1$ et à $\pi - e_1 \leq |\theta - \theta_0| \leq 2\pi - e_2$. Les valeurs correspondantes de I auront un minimum I_1 et les valeurs correspondantes de $|J|$, un minimum J_1 , tous deux positifs et non nuls (*) (lesquels auront d'ailleurs évidemment lieu pour $|\theta - \theta_0| = \pi - e_1$).

Nous supposerons, s'il s'agit de la première construction, que I est plus petit que I_1 et, s'il s'agit de la seconde, que $|J|$ est plus petit que J_1 .

Nous devons d'ailleurs supposer $J > 0$ si nous voulons considérer les extrémales directes; ce que nous allons faire, pour fixer les idées.

A et B étant donnés et ayant tracé entre eux l'extrémale directe E' sur laquelle ces deux points sont foyers (libres) conjugués (extrémale qui est telle que $0 < \lambda < \lambda_1$ si la région R_1 a été convenablement restreinte), donnons à θ_0 des valeurs décroissantes (c'est-à-dire de plus en plus différentes de l'argument de la droite AB) à partir de celle qui correspond à E' .

Pour chaque valeur déterminée de θ_0 , faisons croître λ à partir de 0. Le rayon vecteur correspondant intercepté sur la demi droite AB va en augmentant. Nous ferons croître λ jusqu'à une valeur — s'il en existe une inférieure à λ_1 — telle que ce rayon vecteur devienne égal à AB .

Opérons ainsi pour des valeurs de plus en plus grandes de α (c'est-à-dire,

(*) I , développé suivant les puissances de λ , commence par un terme en λ dont le coefficient, calculé sur la figuratrice pour $\pi - e_1 \leq |\theta - \theta_0| \leq 2\pi - e_2$ (ou, plus simplement, pour $|\theta - \theta_0| = \pi - e_1$), a un minimum positif. I a donc certainement lui-même un minimum non nul lorsqu'on fait $\lambda = \lambda_1$, λ_1 étant assez petit.

La même conclusion a lieu pour J , à ceci près que le premier terme est en λ^2 . Il convient, pour la mettre en évidence, de supposer d'abord que le contour suivant lequel on calcule J se ferme par une ligne droite et non par une extrémale E_0 . Le résultat obtenu moyennant cette modification subsiste sans elle, puisque l'altération qu'elle entraîne n'est que de $k\lambda^2$, k étant fini,

ici, de $\omega - \theta$, puisque $\theta < \omega$). Nous aurons ainsi des arcs d'extrémales E_i successifs, correspondant à des valeurs de plus en plus grandes tant de I que de J .

Cette variation continue de E_i ne pourra être arrêtée que par l'une ou l'autre des deux circonstances suivantes :

a) La valeur de λ qui donne au rayon vecteur la valeur AB devient égale à λ_1 .

Nous n'aurons pas à considérer cette éventualité. La valeur I ou J que nous voulons obtenir pour l'une de nos intégrales sera nécessairement atteinte avant qu'elle ne se produise, puisque, sur une extrémale $E_{\frac{1}{\lambda_1}}$, et sur un arc (*) correspondant à $|\theta - \theta_0| \geq \pi - e_1$, on a $I \geq I_1$, $|J| \geq J_1$.

b) $\theta - \theta_0$ devient égal à $2\pi - e_2$.

Nous pourrions donc faire croître α et, par suite, I et J , jusqu'à ce que cette dernière égalité soit réalisée.

Or, sur la figuratrice, un arc tel que $|\theta - \theta_0| = 2\pi - e_2$ a une corde au plus égale à e_6 , e_6 tendant vers zéro avec e_2 . Comme I et $|J|$ ont, au contraire, des minima positifs, il est clair que tout arc d'extrémale E_i tel que $\lambda = \frac{1}{l} \leq \lambda_1$ et que $|\theta - \theta_0| = 2\pi - e_2$ est aussi tel que $\frac{I}{AB}$ et $\frac{|J|}{AB^2}$ soient supérieurs (**) à $\frac{1}{e_7}$.

Le raisonnement est valable de même pour les valeurs croissantes de θ_0 et donne alors des extrémales rétrogrades.

Donc la première construction de WEIERSTRASS est effectuée pour toutes les valeurs de I qui sont inférieures à la fois à I_1 et à $\frac{AB}{e_7}$; la seconde, pour toutes les valeurs de $|J|$ inférieures à la fois à J_1 et à $\frac{AB^2}{e_7}$.

Sous ces conditions, la première construction donne deux arcs d'extrémales (et deux seulement), l'un direct et l'autre rétrograde; la seconde, un seul, direct ou rétrograde suivant le signe de J .

13. Ces arcs correspondent à $|\theta - \theta_0| < 2\pi - e_2$ et satisfont à la condition de JACOBI pour l'extremum lié.

(*) L'inégalité $|\theta - \theta_0| > \pi - e_1$, vérifiée sur E' , l'est encore sur les arcs suivants, puisque, pendant que θ_0 décroît, θ croît.

(**) On constate aisément que e_2 , e_7 sont de l'ordre de λ (et, par conséquent, de \overline{AB}). Nous ne faisons pas ici usage de ce fait, qui est, au contraire, pris en considération dans les énoncés de notre Mémoire précédent (p. 219).

Grace à cette dernière propriété, les valeurs de θ_0 , λ , θ qui les déterminent varient continuellement avec les données du problème (coordonnées de A , de B et valeur donnée de I ou de J) en vertu du théorème des fonctions implicites.

14. Ajoutons que, sur l'un quelconque de ces arcs, l'angle α , tout en étant supérieur à $\pi - e'_4$, est inférieur à π et même à $\pi - h'_3$ ($h'_3 > 0$); ceci résultant de ce que l'angle analogue sur la figuratrice est inférieur à $\pi - h_3$ (de sorte qu'on peut prendre $h'_3 = h_3 - e_8$).

Autrement dit — puisque ceci a lieu en chacune des extrémités de l'arc — un tel arc est situé tout entier d'un seul côté par rapport à sa corde.

III.

15. Ainsi nous avons appris à effectuer la construction de WEIERSTRASS sous le hypothèses suivantes :

- I) A et B sont intérieurs à R_1 .
- II) I (première construction) $< I_1$, ou $|J|$ (deuxième construction) $< J_1$.
- III) $\frac{I}{AB} < \frac{1}{e_7}$ ou $\frac{|J|}{AB^2} < \frac{1}{e_7}$.

Nous avons le droit de maintenir les deux premières de ces hypothèses, mais nous devons nous débarrasser de la troisième; et c'est à quoi les méthodes précédentes ne suffisent plus. e_7 peut, il est vrai, être pris aussi petit qu'on le veut; mais c'est en diminuant en conséquence le domaine R_1 où le raisonnement est valable, et cette diminution devrait être indéfinie (c'est-à-dire que R_1 devrait être nul à la limite) si on voulait faire tendre e_7 vers zéro.

Par contre, nous aurons — ce qui est possible moyennant une réduction convenable de R_1 — à assujettir les nombres e_i à être plus petits que certaines quantités positives que nous allons définir.

16. A cet effet, partons de ce que $f(x, y, \cos \theta \sin \theta)$, est, par hypothèse, positif et non nul pour toutes les valeurs de θ entre 0 et 2π et pour toutes les positions de (x, y) à l'intérieur de R_1 . f , ou, ce qui revient au même

$$\cos \theta \frac{\partial f}{\partial (\cos \theta)} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial (\sin \theta)}$$

est donc, dans ces conditions, supérieur à un nombre fixe. Dès lors, on peut

aussi trouver un angle positif α_{11} , et un nombre positif α_{12} tels que

$$\cos \theta_1 \frac{\partial f}{\partial (\cos \theta)} + \sin \theta_1 \frac{\partial f}{\partial (\sin \theta)} > \alpha_{12}$$

toutes les fois que

$$|\theta_1 - \theta| \leq 3\alpha_{11}.$$

Cela posé, supposons qu'il s'agisse de la première construction (valeur de I donnée).

Nous ferons tout d'abord en sorte que l'angle désigné plus haut par e'_4 (n.º 11) soit inférieur à α_{11} .

D'autre part, par un point P de la figuratrice où la tangente a l'argument θ_0 , soit menée une demi droite faisant avec cette tangente un angle α que nous ferons varier entre 0 et $\pi - \alpha_{11}$, et considérons le rapport

$$\frac{\overline{PQ}}{I_{\text{arc}PQ}}$$

du segment PQ intercepté sur cette demi droite par la figuratrice, à l'intégrale I prise suivant l'arc sous-tendu par cette corde (celui qui est intérieur à l'angle α). Ce rapport part (pour $\alpha = 0$) de la valeur 1: $f(x, y, \cos \theta_0, \sin \theta_0)$; il est toujours différent de zéro dans les conditions indiquées, et cela, quels que soient x, y (dans la région R_1), θ_0 et α (pourvu que $0 \leq \alpha \leq \pi - \alpha_{11}$) et aussi le sens de parcours sur la courbe. Il aura, par conséquent (puisque, d'autre part, il varie continûment), un minimum positif α_{13} .

Si, au lieu d'une figuratrice, on considère un extrémale quelconque E_i telle que $\left| \frac{1}{l} \right| = |\lambda| \leq \lambda_1$, et le rapport analogue au précédent

$$\frac{\overline{AB}}{I_{\text{arc}AB}},$$

AB étant une corde de E_i faisant avec la courbe un angle α compris entre 0 et $\pi - \alpha_{11}$, et l'intégrale du dénominateur étant prise le long de l'arc AB de E_i intérieur à α , ce rapport a, dans la région R_1 , un minimum (*) positif $\alpha'_{13} = \alpha_{13} - e_9$.

(*) En effet, les quantités $\frac{\overline{AB}}{\lambda(\theta - \theta_0)}$ et $\frac{I_{\text{arc}AB}}{\lambda(\theta - \theta_0)}$ sont des fonctions continues de $x_0, y_0, \theta_0, \lambda, \theta$, lesquelles, pour $\lambda = 0$, ont les valeurs que l'on obtient en remplaçant les extrémales par la figuratrice en (x_0, y_0) .

Dès lors, inversement, toute corde de E_i telle que ce rapport soit inférieur à a'_{13} fera avec la courbe un angle supérieur à $\pi - a_{11}$.

Nous prendrons

$$e_7 < \frac{a'_{13}}{4} \sin a_{11} \quad (13)$$

ce qui entraîne évidemment

$$e_7 < \frac{a'_{13}}{2} \frac{\sin a_{11}}{1 + \sin a_{11}} \quad (13')$$

Nous pourrions également supposer que l'on a

$$e_7 < \frac{1}{2a_4} \frac{a_{11}^2 k_{11}}{1 + a_{11}^2 k_{11}} \quad (14)$$

et

$$e_7 < \frac{1}{2a_4} \sin a_{11} \quad (15)$$

a_4 étant la constante définie au n.º 7 et k_{11} la quantité introduite au n.º 9 à laquelle on donne sa valeur minima.

De plus, désignons par R_2 une région intérieure (au sens strict) à R_1 . Convenons dorénavant de prendre les extrémités données A, B intérieures à R_2 ; et, d'autre part, considérant le minimum des valeurs que peut prendre I_0 entre un point quelconque de la frontière de R_1 et un point quelconque de la frontière de R_2 ou inversement, nous assujettirons I_1 à être inférieur au double de ce minimum, et aussi à $\frac{1}{a_4 \gamma_1} a_{11} \cos \frac{a_{11}}{2}$ (en désignant par γ_1 le maximum de la courbure d'une extrémale E_0). En vertu de cette dernière inégalité, tout arc d'extrémale E_0 sur lequel l'intégrale I a une valeur au plus égale à $\frac{I_1}{2}$ fait avec sa corde des angles inférieurs à $\frac{a_{11}}{2}$.

17. Ces restrictions étant apportées à e_7 , à I_1 et A, B étant deux points quelconques de R_2 , supposons assignée à I une valeur quelconque plus petite que I_1 , mais supérieure à $\frac{\overline{AB}}{e_7}$. Supposons aussi qu'on ait en vue le maximum de J dans ces conditions: il résultera de là que nous considérerons exclusivement des extrémales *directes*.

Soit C un point quelconque de R_1 , tel que l'on ait

$$\overline{AC} > \frac{I}{2} (a'_{13} - 2e_7) \quad (C)$$

$$\overline{BC} > \frac{I}{2} (a'_{13} - 2e_7) \quad (C')$$

tel cependant (*) que le minimum I_0 de l'intégrale I entre A et C ou entre C et B soit inférieur à $\frac{I}{2}$: ce qui, en vertu de l'inégalité $I < I_1$ et de la première condition imposée à I_1 au numéro précédent, entraîne que C ne peut pas être situé sur la frontière de R_1 .

D'après l'inégalité (C), on peut tracer, de A à C , un arc d'extrémale direct E_7 donnant à l'intégrale

$$\int f\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt$$

la valeur $\frac{I}{2}$, arc ne contenant pas de foyer lié et sur lequel la variation de θ sera inférieure à $2\pi - e_2$. En vertu de (C') la même construction peut être effectuée de C à B .

Les paramètres qui caractérisent les deux arcs ainsi construits étant des fonctions continues de la position du point C , il en est de même de la valeur de J prise sur leur ensemble, soit $J_{AC} + J_{CB}$. Cette quantité aura donc un maximum lorsque C prendra, à l'intérieur de R_1 , toutes les positions compatibles avec les conditions précédemment indiquées.

Ces dernières définissent un domaine intérieur à R_1 : je dis que le maximum n'a certainement pas lieu sur la frontière de ce domaine.

18. Montrons d'abord que ce maximum ne peut pas avoir lieu en un point C tel que l'inégalité (C) soit remplacée par une égalité.

En un tel point, on a, non seulement

$$AC = \frac{I}{2} (a'_{13} - 2e_7)$$

(*) Cette condition est compatible avec la première, dès que $a'_{13} - 2e_7 < \frac{1}{\alpha_4}$ (a fortiori dès que $a'_{13} < \frac{1}{\alpha_4}$). Nous supposons que cette condition est remplie, quitte, si elle ne l'est pas, à remplacer a'_{13} par une quantité plus petite (en modifiant, bien entendu, e_7 en conséquence d'après la relation (13)).

mais (puisque, par hypothèse, $AB < I \cdot e_7$)

$$BC < AC + AB < \frac{I}{2} \alpha'_{13}.$$

En vertu de ces inégalités et de la définition de α'_{13} , les deux arcs d'extrémales AC, CB font en C , avec leurs cordes respectives, des angles inférieurs à π (n.º 14) mais supérieurs à $\pi - \alpha_{11}$. Autrement dit, les tangentes en C (prises dans les sens CA, CB) sont, à des angles inférieurs à α_{11} près, les prolongements des droites AC, BC respectivement.

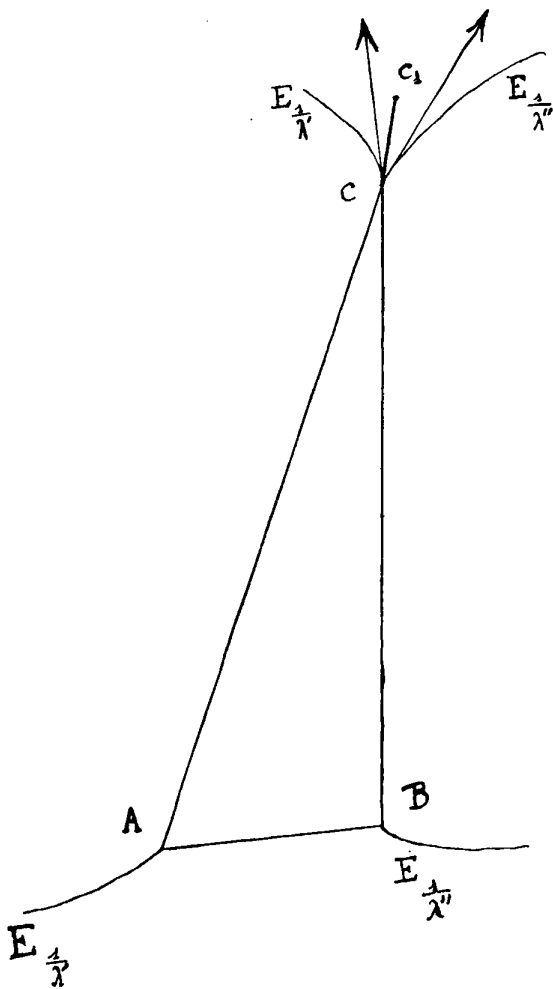
D'autre part, ces droites elles mêmes font entre elles un angle inférieur à α_{11} . Car on a

$$\sin \widehat{ACB} < \frac{AB}{AC} < \frac{e_7}{\frac{1}{2} \alpha'_{13} - e_7}$$

quantité inférieure à $\sin \alpha_{11}$, en vertu de l'inégalité (13').

Dès lors, il existe évidemment des directions (par exemple, celle de l'une des tangentes) faisant avec les cordes CA, CB des angles obtus et avec les tangentes des angles inférieurs à $3\alpha_{11}$. Soit CC_1 ($\delta x, \delta y$) un déplacement infinitésimal dont la direction satisfasse à ces conditions. Si on remplace le point C par le point C_1 , — c'est-à-dire si l'on trace les arcs d'extrémales directs $AC_1,$

C_1B sur lesquels l'intégrale $\int f\left(x, y, \frac{dx}{df}, \frac{dy}{df}\right) dt$ a la même valeur $\frac{I}{2}$ — les inégalités (C), (C') seront vérifiées (au sens strict, cette fois) puisque les distances AC et CB auront augmenté.



D'autre part, soient λ' et λ'' les valeurs de λ sur les deux arcs d'extrémales AC , CB ; I' ($= \frac{I}{2}$), J' ; I'' ($= \frac{I}{2}$), J'' les valeurs correspondantes de I et (*) de $\int P dx + Q dy$; on aura

$$\left. \begin{aligned} \lambda' \delta I' - \delta J' &= \lambda' \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right) - (P \delta x + Q \delta y), \\ \lambda'' \delta I'' - \delta J'' &= -\lambda'' \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right) + P \delta x + Q \delta y, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(en appelant x' , y' les cosinus directeurs de la tangente en C à la première extrémale, — suivie cette fois dans le sens AC — et par x' , y' les cosinus de la tangente à la seconde extrémale suivie dans le sens CB); d'où, puisque $\delta I' = \delta I'' = 0$,

$$\delta J = \delta J' + \delta J'' = -\lambda' \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right) + \lambda'' \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right). \quad (17)$$

Or, d'après ce qui précède, la direction (x', y') fait avec $(-\delta x, -\delta y)$ et la direction (x', y') avec $(\delta x, \delta y)$ des angles inférieurs à $3\alpha_{11}$. Le coefficient de $-\lambda'$ est donc négatif, le coefficient de λ'' positif et comme λ' et λ'' sont positifs (puisqu'il s'agit d'extrémales directes), J augmente.

Donc, pour une position de C correspondant au maximum de J , l'inégalité (C) est vérifiée au sens strict; et on peut-on dire autant de (C').

19. Nous allons voir de même que le maximum ne peut correspondre à un point C tel que $\frac{I}{2}$ soit égal à la valeur I'_0 de I_0 entre A et C , par exemple.

Si C est un tel point, la valeur I'' de I_0 entre C et B , c'est-à-dire le minimum libre de l'intégrale I entre ces deux points, a, avec $\frac{I}{2}$, une différence inférieure à la valeur de I_0 entre A et B , quantité inférieure à α_4 . $\overline{AB} \leq \alpha_4 \cdot e_7 I$.

(*) L'intégrale $\int P dx + Q dy$ est prise le long de l'arc d'extrémale E_1 seul pour J' , λ_1 le long de E_1 pour J'' . Nous ne nous conformons pas, ici, à la convention adoptée au n.º 7 pour la définition de J .

Donc

$$\frac{I'' - I''_0}{I''_0} = \frac{\frac{I}{2} - I''_0}{I''_0} < \frac{a_4 e_7 I}{\frac{I}{2} - a_4 e_7 I} = \frac{a_4 e_7}{\frac{1}{2} - a_4 e_7}.$$

L'intégrale I'' est prise le long d'un arc d'extrémale E'' ; l'intégrale I''_0 , le long d'un arc d'extrémale E''_0 , ayant mêmes extrémités. Ces deux arcs font donc en C (d'après le n.º 9) un angle α tel que

$$\alpha^2 = \frac{1}{k_{11}} \cdot \frac{a_4 e_7}{\frac{1}{2} - a_4 e_7}.$$

Moyennant l'inégalité (14), cet angle α sera donc inférieur à a_{11} .

D'autre part, l'angle de E''_0 avec l'arc d'extrémale E'_0 , qui fournit, entre A et C , la valeur $I_0 = \frac{I}{2}$ de I , est aussi inférieur à $2a_{11}$.

Nous savons, en effet, que chacun de ces arcs fait avec sa corde un angle inférieur à $\frac{a_{11}}{2}$. D'autre part, la distance rectiligne AC est supérieure à $\frac{I}{2a_4}$ et par conséquent, on a

$$\sin \widehat{ACB} < \frac{AB}{AC} < 2e_7 a_4 < \sin a_{11}$$

(cette dernière inégalité en vertu de (15)).

Dans ces conditions, un déplacement CC_1 (δx , δy) effectué sur E'_0 (dans le sens CA) fera avec E''_0 un angle inférieur à $3a_{11}$. Pour un tel déplacement donné à C , la valeur de I_0 diminue évidemment. Quant à celle de J , ici encore, elle augmente. La deuxième inégalité (16) subsiste, en effet, et la première est remplacée par

$$\delta J' > P \delta x + Q \delta y,$$

ceci résultant de ce que la différence des deux membres représente l'accroissement subi par l'intégrale appelée J au n.º 7, lorsque le point B , d'abord placé en C , passe de là en C_1 (accroissement qui est positif, puisque l'intégrale en question est nulle en C et positive en C_1).

Au reste, il n'est pas nécessaire de montrer que les signes des deux ac-

croissements $\delta J' - (P\delta x + Q\delta y)$, $\delta J'' + (P\delta x + Q\delta y)$ concordent. Le premier d'entre eux est, en effet, assurément prépondérant, comme étant de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$ (d'après la formule (12'), n.º 10) (*), tandis que le second est de l'ordre de ε .

20. Ainsi, il est établi que le maximum de J correspond à une position du point C pour laquelle aucune des inégalités imposée au point C n'est remplacée par une égalité, c'est-à-dire à une position intérieure, *au sens strict*, à la région définie par ces inégalités.

Dans ces conditions,

$$\delta J = \delta J' + \delta J'',$$

tel qu'il est défini par l'égalité (17), doit s'annuler quels que soient δx , δy : donc

$$\lambda'' \frac{\partial f}{\partial x'} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad \lambda'' \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Or, d'après les propriétés que nous avons supposées appartenir à la figurative et à la figuratrice, cette dernière n'est coupée qu'en un point par une demi droite quelconque issue de l'origine. Donc les égalités précédentes ne peuvent avoir lieu simultanément, λ' et λ'' ayant le même signe, que si les deux directions x' , y' et x' , \bar{y}' coïncident, ce qui entraîne d'ailleurs $\lambda' = \lambda''$.

Nos deux arcs d'extrémale sont donc le prolongement l'un de l'autre. On a ainsi démontré qu'il existe au moins un arc E_i réalisant la première construction de WEIERSTRASS.

21. La possibilité de la seconde construction peut se déduire de celle de la première par un raisonnement connu.

Soient encore A , B deux points donnés intérieurs à R_2 . Supposons d'abord $\frac{\overline{AB}}{e_\gamma}$ supérieur à la quantité I_1 précédemment définie. Comme les méthodes des n.ºs 7-14 s'appliquent pour toute valeur de J inférieure ou égale à $\frac{\overline{AB}^2}{e_\gamma}$, elles nous permettront d'effectuer notre seconde construction pour

(*) Le fait que l'accroissement $\delta J'$ ne se calcule pas par la formule (16) correspondante — et même n'est pas bien déterminé par le déplacement $(\delta x, \delta y)$ — tient évidemment à ce que la courbe E'_0 constitue une *singularité* pour le problème isopérimétrique dont la résolution conduit à tracer cette extrémale entre A et C ; ceci au sens de mes *Leçons sur le Calcul des Variations*, n.º 187.

$J \leq J_1$, si

$$J_1 \leq I_1^2 e_\tau.$$

Supposons, en second lieu, I_1 supérieur à $\frac{\overline{AB}}{e_\tau}$ et considérons les différentes valeurs de I compris entre $\frac{AB}{e_\tau}$ et I_1 . Pour chacune d'elles, construisons, comme il vient d'être expliqué, l'arc AB d'extrémale directe correspondant, lequel fournit une valeur de J , la plus grande de toutes celles qui correspondent aux différents choix possibles du point C .

Cette valeur est une fonction continue et croissante de I .

La continuité résulte de ce que J est une fonction continue de la valeur de I et de la position du point C (n.º 13). Cette circonstance, comme on sait, n'entraîne pas que la position du maximum — ou, pour employer la terminologie introduite par l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, la position *maximante* du point C — soit fonction continue de I , mais elle entraîne nécessairement cette propriété pour la valeur de ce maximum, pour le *maximé*.

Cette fonction est croissante : car si C est le point qui correspond au maximum pour une certaine valeur de I et si, sans changer ce point, nous le joignons à A et à B par des arcs d'extrémales sur lesquels notre première intégrale prenne la valeur $\frac{I+dI}{2}$ (avec $dI > 0$), la valeur de J aura ainsi augmenté (en vertu de $dI - l dJ = 0$, égalité dans laquelle $l > 0$, puisqu'il s'agit d'extrémales directes); et il en sera à *fortiori* ainsi si l'on remplace cette valeur de J par le maximum correspondant.

22. Pour $I = \frac{\overline{AB}}{e_\tau}$, J a une certaine valeur déterminée J' , et notre seconde construction s'effectue, pour toute valeur de J inférieure à J' , par les méthodes précédentes.

Pour $I = I_1$, J est supérieur à une quantité positive indépendante de la position de A et de B à l'intérieur de R_2 .

Reprenons, pour le voir, la construction du n.º 17. Nous pourrions choisir le point C de manière que AC forme avec AB un angle négatif fixe, — $\frac{\pi}{2}$ par exemple. D'après ce que nous savons sur l'angle d'un arc d'extrémale E_0 avec sa corde, l'angle des extrémales E_0 que l'on peut mener entre A et C d'une part, entre A et B de l'autre, aura également ce même sens; et, si l'on

mène également une extrémale E_0 entre B et C , le sens de parcours $A C B A$ sur le triangle curviligne T_0 ainsi déterminé est direct (*).

Les distances AC et BC étant supposées supérieures à $\frac{I_1}{2} e_7$, des extrémales directes E_i sur lesquelles $\int f\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt$ aura la même valeur $\frac{I_1}{2}$ pourront être construites l'une entre A et C , l'autre entre C et B et l'une d'elles au moins formera, avec l'extrémale E_0 de mêmes extrémités, un contour fermé le long duquel on aura $J \geq e_7 \left(\frac{I_1}{2}\right)^2$; pour la même raison que tout à l'heure. Or les deux intégrales J ainsi obtenues, ajoutées à celle qui est prise le long du triangle curviligne T_0 et qui (d'après le choix que nous avons fait du point C) est positive, donnent l'intégrale le long du chemin total constitué, entre A et B , par l'extrémale E_0 ; entre A et C , ou entre C et B , par les extrémales directes.

Donc le maximum de J , pour $I = I_1$, est toujours au moins égal à $\frac{e_7}{4} I_1^2$.

Si l'on prend $J_1 = \frac{e_7}{4} I_1^2$, toute valeur égale ou inférieure à J_1 est certainement atteinte par le maximum en question, lorsque I varie de $\frac{\overline{AB}}{e_7}$ à I_1 (ou, — si elle est inférieure à J_1 , — elle est atteinte par les méthodes des n.ºs 7-14).

Il suffira donc que la valeur donnée de J remplisse cette condition d'inégalité par que notre seconde construction soit possible.

On pourrait d'ailleurs appliquer à cette seconde construction une méthode analogue à celle qui a fourni la première.

23. D'après la manière même dont ils ont été acquis, les résultats qui viennent d'être obtenus n'ont pas la même valeur que ceux auxquels nous étions parvenus en premier lieu.

Moyennant les hypothèses designées par I, II, III au n.º 15, nous avons établi l'existence, entre A et B , de deux arcs d'extrémales directes, et de

(*) Les trois extrémales en question doivent être, au point de vue de leur mise en équation (comparer page 257, note (*)), considérées comme suivies de A à B , de A à C , de C à B .

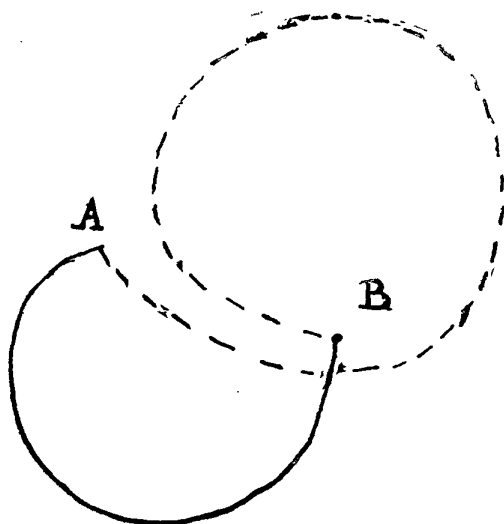
Nous rappelons que, la construction de l'extrémale E_0 entre deux points A, B de R_2 étant univoque, deux extrémales de cette sorte ne peuvent se couper en deux points (si elles sont suivies dans le même sens entre ces deux points).

deux seulement, fournissant une valeur donnée de I , et d'un seul fournissant une valeur donnée de J . Nous savons également que ces arcs varient continuellement avec les données qui ont servi à les construire.

Dans le cas actuel, nous constatons seulement qu'il existe *au moins* un arc direct vérifiant les conditions données, sans pouvoir préciser s'il en existe plus d'un, ni si leur variation est continue.

Il est à noter que cette ignorance est conforme à la nature des choses. Les propriétés de la construction de WEIERSTRASS changent en général lorsque les deux extrémités A , B deviennent très voisines. S'il s'agit, par exemple, du problème isopérimétrique ordinaire dans le plan, il existe, quand A et B sont voisins, deux arcs de cercles voisins de même longueur, situés de côtés différents de AB , tous deux cependant parcourus dans le sens direct, mais l'un un peu plus grand que la circonférence entière (de sorte qu'un petit arc AB y figure deux fois). D'une manière analogue, pour un problème analogue quelconque, il pourra y avoir et il y aura, en général, deux arcs d'extrémales AB , tous deux directs, donnant la même valeur de I et disposés de part et d'autre de AB (comme l'indique la figure ci-jointe). Dans le cas du problème isopérimétrique ordinaire, celui des deux arcs qui fournit le maximum de J est toujours celui qui est plus petit qu'une circonférence et les deux valeurs de J ne deviennent égales que quand A coïncide rigoureusement avec B . Mais on conçoit qu'il en doive être autrement dans des problèmes plus généraux, l'égalité des deux valeurs de J ayant alors lieu non pour B confondu avec A , mais pour certaines positions de B voisines de A . Pour d'autres positions de B , enfin, il pourra arriver que la plus grande valeur de J soit fournie par l'arc sur lequel la variation de θ est un peu supérieure à 2π .

Ces remarques s'appliquent évidemment de même à la seconde construction, c'est-à-dire en intervertissant les rôles de I , J .



IV.

24. Nous avons résolu la question pour le domaine infiniment petit, c'est-à-dire en restreignant (et cela autant que nous en avons besoin) la région que nous avons appelée R_2 , en assujettissant d'autre part la valeur donnée de I ou de $|J|$ à être inférieure à un nombre déterminé, que nous avons également pris aussi petit qu'il nous a été nécessaire.

Montrons que, comme dans le cas de l'extremum libre, le résultat ainsi obtenu entraîne le résultat analogue relatif au domaine fini.

Nous considérons donc maintenant tout le domaine R dans lequel la fonction $f(x, y, \theta)$ est supposée posséder les diverses propriétés qui nous ont servi de base, du moins si ce domaine est sans frontières (surface fermée ou s'étendant à l'infini).

Dans le cas contraire, nous conserverons, relativement aux données, des restrictions telles que les lignes cherchées ne puissent atteindre ces frontières. Nous prendrons les points donnés A et B intérieurs à R au sens strict et, si, — comme nous le supposerons en premier lieu, — c'est I qui est donné et J qui doit être maximum, nous admettons également que cette valeur de I , tout en étant supérieure au minimum libre de l'intégrale entre A et B , est inférieure (et non égale) au minimum libre de cette même intégrale pour les chemins qui vont de A en B en passant par un point de la frontière.

Dans ces conditions, toute ligne tracée (dans R) entre A et B et sur laquelle I prenne la valeur donnée sera intérieure non seulement à R , mais à une certaine région R' , elle même strictement intérieure à R .

25. Or, si nous considérons d'abord A comme variable dans R' , à chaque position de ce point correspondra, d'après ce qui précède, une région R_2 entourant A et telle que la première construction de WEIERSTRASS soit possible entre A et n'importe quel point de R_2 , avec n'importe quelle valeur donnée de I réalisable (*) et inférieure à une certaine limite I_1 . La région R_2 peut être, à notre point de vue, caractérisée par ce qu'on pourrait appeler son « rayon I », c'est-à-dire le minimum (libre) de I pour les chemins allant de A à la frontière de R_2 . Soit I'_1 ce rayon.

(*) C'est-à-dire supérieure au minimum libre de I entre les deux points en question.

Lorsque le point A varie arbitrairement dans R' , les quantités I_1 et I'_1 peuvent, conformément à un raisonnement connu, être regardées comme fonctions continues de la position de ce point. Comme elles ne s'annulent jamais, elles ont un minimum commun, par lequel nous les remplacerons toutes deux et que nous désignerons, en conséquence, par I_1 .

Cela posé, prenons à nouveau le point A tel qu'il nous est donné. Mettons, d'autre part, la valeur donnée de I sous la forme

$$I = i_1 + i_2 + \dots + i_q,$$

chacun des termes du second membre étant positif et inférieur à I_1 .

Ceci fait, soient marqués, dans R , $q + 1$ points P_0, P_1, \dots, P_q dont le premier P_0 coïncide avec A , le dernier P_q avec B , les intermédiaires étant arbitraires, mais sous la condition que l'intégrale I puisse prendre, entre A et P_1 , la valeur i_1 ; entre P_1 et P_2 , la valeur i_2 ; etc. D'après les hypothèses précédentes, tous ces points sont nécessairement intérieurs à R' .

D'après les mêmes hypothèses, nous sommes assurés qu'il existe: entre A et P_1 , un arc d'extrémale direct donnant à I la valeur i_1 ; entre P_1 et P_2 , un arc direct donnant à I la valeur i_2 ; entre P_{q-1} et B , un arc direct donnant à I la valeur i_q : de sorte que l'ensemble de ces arcs constitue, entre A et B , une ligne fournissant pour I la valeur donnée.

S'il existe, entre P_{r-1} et P_r ($r = 1, 2, \dots, q$), plusieurs arcs directs sur lesquels I ait la même valeur i_r , on prendra celui de tous qui donne la plus grande valeur (*) pour la portion correspondante j_r de J (c'est-à-dire à l'intégrale $\int P dx + Q dy$ prise de P_{r-1} à P_r).

La valeur totale de J , prise entre A et B , est ainsi fonction, et fonction continue (**), de la position des points P_1, P_2, \dots, P_{q-1} . Elle aura, donc, lorsque ces points varieront de toutes les manières possibles (sous les conditions restrictives qui leur sont imposées), un maximum.

Examinons, ici encore, si ce dernier peut correspondre à un système de

(*) Cette plus grande valeur existerait même si les arcs en question étaient en nombre infini, parce que J est une fonction continue de θ_0, θ, l et que cette dernière quantité, comme nous aurons occasion de le voir plus loin, ne peut recevoir ici des valeurs absolues indéfiniment croissantes.

(**) Pour la même raison qu'au n.º 21.

points P tel qu'une ou plusieurs des inégalités auxquelles sont assujettis ces points soient remplacées par des égalités.

26. Les points P ne peuvent atteindre la frontière de R .

Mais deux entre eux, — P_1 et P_2 , par exemple, — peuvent être tels que le minimum libre de I entre ces deux points soit précisément i_2 . L'arc d'extrémale correspondant n'est alors autre qu'un arc d'extrémale E_0 .

Si, dans ces conditions, l'arc $P_2 P_3$ n'est pas, lui aussi, un arc E_0 , la position ainsi obtenue de P_2 ne peut correspondre à un maximum de J .

Déplaçons en effet P_2 d'une petite quantité ε sur l'arc qui le joint à P_1 . Soient δx , δy les projections de ce déplacement. La variation δj_3 sera telle que $\delta j_3 + P \delta x + Q \delta y$ soit, s'il est négatif, de l'ordre de ε au plus. Il en sera tout d'abord ainsi si P_2 , P_3 ne sont pas foyer conjugués (liés). Car alors on pourra tracer, entre la nouvelle position de P_2 et le point P_3 , un nouvel arc direct, peu différent du premier, et tel que l'expression correspondante de δj_3 puisse se calculer par la deuxième formule (16). Si ce nouvel arc n'est pas celui qui fournit la plus grande valeur de j_3 , la conclusion annoncée est vraie à *fortiori*.

27. Si P_2 et P_3 sont foyers conjugués l'un de l'autre, l'arc $P_2 P_3$ aura été tracé, non par la méthode des n.ºs 7-14, mais par celle des n.ºs 17 et suivants, à l'aide d'un point intermédiaire C tel que les intégrales I prises suivant les arcs $P_2 C$, CP_3 soient toutes deux égales à $\frac{1}{2} i_3$. A cette subdivision de l'arc $P_2 P_3$ correspond une décomposition correspondante de j_3 en deux parties j'_3 , j''_3 . On peut appliquer à la variation de j'_3 (portion correspondante à l'arc $P_2 C$) ce que nous avons dit tout à l'heure de celle de j_3 , et voir ainsi que J ne peut diminuer que d'une quantité d'ordre égal ou inférieur à celui de ε lorsqu'on déplace le point P_2 (sans déformer encore en conséquence l'arc $P_1 P_2$), le point C restant fixe ainsi que l'arc CP_3 .

Si, ensuite, on remplace la ligne brisée $P_1 CP_3$ par un arc d'extrémale unique en déplaçant le point C conformément à notre méthode, ceci aura pour effet d'augmenter J et non de le diminuer.

Or, d'autre part, nous avons, en déplaçant P_2 vers P_1 sur l'arc d'extrémale E_0 , à déformer ce dernier de manière à restituer à la portion correspondante de I sa valeur i_2 . Cette dernière opération a pour effet d'augmenter J , et cela d'une quantité de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$: son influence est donc prépondérante et il est bien établi que la position considérée de P_2 ne peut correspondre au maximum,

28. Il en est de même si les arcs $P_1, P_2, P_2 P_3$, tout en appartenant à des extrémales E_0 , ne sont pas tangents entre eux. S'il en est ainsi, en effet, les directions transversales (relativement à I) à ces arcs en P_2 ne coïncident pas (toujours en vertu des propriétés supposées à f), et on peut donner à P_2 un déplacement ε de direction telle que le minimum libre de I diminue, par ce déplacement, tant entre P_1 et P_2 qu'entre P_2 et P_3 , la diminution étant de l'ordre de ε . Ce même déplacement n'alterera j_2 et j_3 que de quantités comparables au plus à ε . Or la déformation qu'il rend nécessaire pour que les intégrales I reprennent leurs valeurs primitives entraînera, au contraire, pour j_2 et j_3 des augmentations de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$.

29. Si donc tous les arcs partiels $P_0 P_1, P_1 P_2, \dots$ ne correspondent pas à $l=0$ et ne sont pas tangents entre eux, de manière à former par leur ensemble une extrémale libre unique, aucun d'entre eux ne peut être emprunté à une extrémale E_0 .

Dans ces conditions, le déplacement infinitésimal de chacun des points P_1, P_2, \dots est arbitraire et par conséquent, comme précédemment (sous le bénéfice de l'artifice du n.º 27), nos arcs partiels forment une extrémale E , unique, comme nous voulions le démontrer.

30. Le raisonnement précédent s'applique de lui même à la démonstration de l'existence d'extrémales *fermées* donnant à I une valeur donnée. Il suffit de ne plus supposer les points P_0, P_q donnés, mais, au contraire arbitraires, mais confondus entre eux. Toutefois, dans ces conditions, le domaine R doit être supposé sans frontières.

Il est, d'ailleurs, bien entendu que l'extrémale trouvée peut n'être autre chose que le $p^{u^{i\alpha}}$ parcours d'une extrémale fermée fournissant la valeur $\frac{I}{p}$ de notre première intégrale (que, par exemple, en cherchant, sur une surface fermée, un cercle géodésique de longueur a , on ne trouve autre chose qu'un cercle de longueur $\frac{a}{2}$ parcouru deux fois).

Toutefois, ceci n'aura jamais lieu si I est suffisamment petit. Cela tient à ce que, d'après nos calculs, lorsque λ tend vers zéro, J décroît comme I^2 .

31. D'autre part, nous pouvons maintenant (soit dans le cas des extrémités données, soit dans celui des lignes fermées) démontrer l'existence d'une extrémale fournissant le maximum absolu de J .

Soit, en effet, L une ligne quelconque tracée entre les points donnés A et B , ou une ligne fermée quelconque, sur laquelle I ait la valeur donnée

Supposons-la à courbure finie (*). Nous pourrions-la diviser en arcs $P_{r-1} P_r$, assez petits pour que, d'une part, la portion i_r de I correspondant à chacun d'eux soit toujours inférieure à I_1 ; que, de l'autre (**), le rapport de cette portion i_r au minimum libre de I entre les deux mêmes extrémités $P_{r-1} P_r$ soit aussi voisin de 1 que nous le voudrions et, en particulier, inférieur à la constante a'_8 du n.º 8, ceci ayant également lieu pour tout arc partiel compris entre deux points du premier (***)).

On pourra alors construire, par notre première méthode, un arc d'extrémale directe $P_{r-1} P_r$ sur lequel I ait la valeur i_r et satisfaisant à la condition de JACOBI libre.

En opérant ainsi, on aura augmenté J , puisque l'arc auxiliaire E , ainsi construit correspond au minimum libre de $I - lJ$ et que $l > 0$.

Donc à *fortiori*, le maximum obtenu par la méthode du n.º 25 sera supérieur à la valeur de J fournie par L . Ce maximum (qui correspond à une extrémale) sera, d'autre part, unique pour toutes les lignes L telles que la décomposition en arcs partiels sur laquelle nous venons de nous baser puisse être pratiquée avec les mêmes valeurs des quantités i_r : par conséquent aussi, pour toutes les lignes L telles que leurs courbures soient inférieures en valeur absolue à une même quantité fixe.

Or on peut se borner à des lignes remplissant cette condition.

Nous venons de voir, en effet, qu'une ligne admissible L quelconque peut, avec augmentation de J , être remplacée par une extrémale E_r . Pour prouver que cette dernière a une courbure qu'on peut limiter une fois pour toutes, il suffit de prouver que l ne peut dépasser une limite déterminée.

Or lorsque $l = \frac{1}{\lambda}$ devient très grand, il en est de même du nombre des spires (en appelant *spire* un arc le long duquel θ varie de 2π) nécessaires pour fournir la valeur donnée de I . Il en est également de même pour le rapport $\frac{I}{C}$

(*) On sait qu'on peut toujours supposer cette condition réalisée, et cela d'une part sans changer la valeur de I , de l'autre en altérant J d'aussi peu qu'on le veut.

(**) Ceci tient à ce que les extrémales E_0 sont aussi à courbure finie, les valeurs de I fourni par un arc à courbure finie et par sa corde étant, d'autre part, dans un rapport qui tend vers 1 quand l'arc tend vers zéro.

(***) Cette dernière spécification est nécessaire pour pouvoir affirmer, par l'application de la méthode de WEIERSTRASS, que l'arc d'extrémale par lequel nous remplaçons notre arc de courbe fournit bien pour $I - lJ$ une valeur plus petite que lui.

(C désignant la corde) ainsi que pour le rapport $\frac{I}{J}$ relatifs à une spire quelconque, par conséquent pour ces mêmes rapports relatifs à l'ensemble de la courbe. Le fait que ceci ne peut pas se produire résulte évidemment pour deux extrémités données distinctes, de la considération du premier des deux rapports en question et, pour deux extrémités données confondues (ou pour le cas des lignes fermées), de la considération du second rapport.

32. En dernier lieu, supposons que la valeur de J (et non plus de I) soit donnée, et qu'on cherche le minimum de I .

Ici encore, cette question se ramènera à la précédente en considérant le maximum de J pour I donné et remarquant que ce maximum est (pour les mêmes raisons que précédemment) une fonction continue et croissante de I .

J peut d'ailleurs dépasser une valeur donnée quelconque sur une ligne fermée déterminée, celle-ci étant supposée parcourue un nombre suffisant de fois ; et, à *fortiori*, par conséquent, sur une extrémale correspondante au maximum de J pour I donné.

Espressioni indeterminate.

(Di ETTORE BORTOLOTTI, a Bologna.)

Le espressioni che, seguendo l'uso degli antichi, chiameremo indeterminate, e che risultano dal confronto di due infiniti o di due infinitesimi, si presentano di continuo nella Analisi, poichè si collegano direttamente ai problemi di convergenza; ma, quantunque l'importanza loro sia riconosciuta dai geometri, i mezzi che possediamo pel calcolo di tali espressioni sono assai scarsi, poichè si riducono alla regola detta de l'HÔPITAL (*) ed a quella che, trovata dal CAUCHY, fu poi precisata ed estesa dallo STOLZ (**).

Entrambe queste regole sono manchevoli, poichè fanno dipendere il calcolo del limite del quoziente $\frac{f}{\varphi}$ di due funzioni, le quali sono in uno stesso

(*) La qual regola dovrebbe a miglior ragione essere detta di G. BERNOULLI.

(**) Per le indicazioni storiche e bibliografiche vedasi l'articolo di A. PRINGSHEIM, *Principes de la théorie des fonctions* nel tomo II, Vol. I, pag. 50-58 della *Encyclopédie des Sciences Math.* Si veda anche il *Formulario* di G. PEANO. Editio V, fascicolo I, pag. 285-287.

Aggiungerò qualche cenno su l'opera del LAGRANGE, circa questo argomento, opera che da cotesti autori non fu presa in esame. Il LAGRANGE ne tratta, nella *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, Prairial, a. V, pag. 32-41) e più estesamente nelle *Leçons sur le calcul des fonctions* (Paris, a. 1806). In quest'ultima opera egli dà due dimostrazioni della nota regola, pel caso $\frac{0}{0}$ (pag. 76-87), delle quali la seconda è sostanzialmente la medesima che anche oggi si dà nei libri di calcolo (Cf. JORDAN, *Analyse*, Tomo I (1909), pag. 273).

Dalla regola de l'HÔPITAL deduce più innanzi (pag. 315, 316) la dimostrazione della eguaglianza: $y'(x) = \frac{dy}{dx}$; cioè la identità fra il concetto di *funzione prima* (coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$) e quello di *quoziente di due differenziali*.

Notevole in fine è la considerazione di funzioni le quali, quando la variabile descrive un cammino che attraversa certi punti particolari, cambiano di forma nel passaggio per tali punti. Cotesti punti, egli dice, sono caratterizzati dal fatto che in essi la funzione assume forma indeterminata... *ce qu'il me semble qu'on n'avait pas encore remarqué* (pag. 321).

punto infinite od infinitesime, da quello dei quozienti delle derivate o delle differenze finite; mentre è noto che questi ultimi possono mancare, pur esistendo il proposto (*).

A tale difetto è, nella massima parte dei casi, posto riparo con l'uso delle formule seguenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{f_{r+1} - f_r}{\varphi_{r+1} - \varphi_r} \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a-x} \int_x^a \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx, \text{ per } a \text{ finito} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx, \text{ per } a \text{ infinito,} \end{array} \right\} \quad (II)$$

che qui si troveranno dimostrate.

Ricavo la formola (I) come conseguenza di alcuni teoremi che io stesso avevo precedentemente stabiliti per il calcolo delle serie (**).

Il passaggio dalla formola (I) alle (II) non è facile nè immediato.

Il LAGRANGE nelle sue opere ha varie volte notato le difficoltà che si riscontrano nel tradurre in calcolo differenziale le formule trovate per mezzo di considerazioni di differenze finite: « *La raison en est que, dans le passage « supposé du fini à l'infiniment petit, les fonctions changent réellement de nature, et que le $\frac{dy}{dx}$ qu'on employe dans le calcul différentiel, est essentiellement une fonction différente de la fonction y, tandis que, tant que la différence dx a une valeur quelconque, aussi petite qu'on voudra, cette quantité « n'est que la différence de deux fonctions de la même forme... » (***)*.

Per vincere tale difficoltà ho dovuto premettere alcuni lemmi relativi alla *rappresentazione asintotica di serie mediante integrali definiti*, dai quali lemmi derivano altrettanti *criteri per la integrabilità impropria*, quanti già furono da me stabiliti per la convergenza delle serie (****).

Questi criteri valgono non solo per l'*integrale di Riemann*; ma anche

(*) Si veda, p. es., l'articolo del PRINGSHEIM, citato alla nota (**) della pagina precedente.

(**) Cf. *Convergenza di algoritmi infiniti*. Mem. Acc. Modena, Serie III, Vol. VII, a. 1907.

(***) Loc. cit., pag. 304. V. anche alla pag. 312, ed in parecchi altri passi della medesima opera.

(****) *Convergenza di algoritmi finiti* al loc. cit.

per l'integrale definito superiore (*) ed, in particolare, servono al calcolo della estensione esteriore degli insiemi e della frequenza (**). Allo studio della frequenza dedico appunto il § III di questo scritto, e ciò perchè, dalla determinazione della frequenza dei punti dove il quoziente delle derivate (o quello delle differenze finite) può assumere valori arbitrari senza che quello delle funzioni cessi dall'aver limite determinato e finito, ricaverò una condizione necessaria e sufficiente perchè abbia limite il quoziente di due funzioni che in uno stesso punto sono infinite od infinitesime.

I.

1 (***) . TEOREMA 1.° *Date due variabili u_n, b_n , delle quali la prima è finita per ogni valore finito di n , la seconda è reale positiva monotona: se la media aritmetica dei rapporti di quelle variabili ha limite determinato e finito (o nullo)*

$$\lambda = \lim \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right),$$

A) *Se la serie Σb_n diverge ed esistono due numeri N, L , tali che*

$$n \geq N, \quad \frac{n b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} < L, \quad (1)$$

(*) Nel senso del DARBOUX e del VOLTERRA: Cf., p. es., DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*. Vol. II, 1.^a Parte (Pisa 1909), pag. 17. V. anche G. PEANO, *Formulario*. Editio 5^a, pag. 343.

(**) Sul concetto di frequenza v. la mia nota: *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza* (Rend. Acc. Lincei, Vol. XII, 1906).

(***) Il teorema I, A) fu dato dal CESARO (*Analisi Algebrica*, pag. 103), pel caso che la serie Σb_n sia divergente e la variabile b_n vada allo zero sempre decrescendo; si trova nella forma attuale, insieme col teorema I, B) nella Mem. *Convergenza di algoritmi infiniti*, da me pubblicata nelle Mem. Acc. di Modena, Serie III, Vol. VII, a. 1907. Quivi per altro è supposto che le variabili $\frac{n b_n}{b_1 + \dots + b_n}$, $\left| 1 - \frac{n b_n}{b_1 + \dots + b_n} \right|$ abbiano, per $n = \infty$, minimo limite diverso dallo zero; la qual condizione ho riconosciuto essere superflua. Tralascio qui le dimostrazioni, le quali sono indicate nella citata Memoria, e sono nuovamente esposte, da un punto di vista più generale, nella Memoria: E. BORTOLOTTI, *Sugli integrali definiti impropri* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXXV, (1913)], Cap. V.

si ha ancora :

$$\lambda = \lim_{n=\infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right). \quad (2)$$

B) Se la serie Σb_n converge ed esistono due numeri L_1, N_1 , tali che

$$n \geq N_1, \quad \frac{n b_{n+1}}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} < L_1, \quad (3)$$

converge anche la serie Σu_n , e si ha :

$$\lambda = \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right). \quad (4)$$

TEOREMA 2.^o Se alle ipotesi del Teorema 1.^o A) si aggiungono le altre :

$$\lim_{n=\infty} \left\{ n b_{n+1} - (b_1 + \dots + b_n) \right\} = C \text{ (finito o nullo)}$$

$$\max. \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{u_1}{b_1} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right| = M \text{ (finito o nullo),}$$

la relazione (2) ha luogo purchè esista uno dei due membri.

O, più generalmente: Se alle ipotesi del Teorema 1.^o A) aggiungiamo l'altra

$$\max. \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{u_1}{b_1} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right| = A \text{ (finito o nullo)}$$

ed è soddisfatta la relazione :

$$\lim_{n=\infty} \frac{n b_{n+1}}{b_1 + \dots + b_n} = 1,$$

la corrispondente relazione (2) del teorema 1.^o A) è soddisfatta, purchè esista uno qualsiasi dei due membri.

2. Qualunque variabile U_n della quale si voglia determinare il comportamento assintotico per $n = \infty$, può essere considerata come somma dei primi n valori della sua differenza finita,

$$U_n = U_1 + (U_2 - U_1) + \dots + (U_n - U_{n-1})$$

e, quando sia infinitesima per $n = \infty$, può anche rappresentarsi come espressione del resto della serie $\Sigma (U_n - U_{n-1})$, scrivendo

$$U_n = (U_n - U_{n+1}) + (U_{n+1} - U_{n+2}) + \dots,$$

onde, dai teoremi precedenti, si ricava :

TEOREMA 3.^o *Date due variabili U_n, B_n , delle quali la prima è determinata e finita insieme con la sua differenza $u_n = \Delta U_n = U_n - U_{n-1}$ per ogni valore finito di n ; la seconda è infinita (infinitesima) per $n = \infty$ ed ha differenza finita $b_n = \Delta B_n$ monotona; se esistono due numeri positivi N, L , tali che*

$$n \geq N, \quad \left| \frac{n \Delta B_{n+1}}{B_n} \right| < L;$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{\Delta U_r}{\Delta B_r} \quad (5)$$

purchè esista il secondo membro e, nel caso di B_n infinitesima, sia infinitesima anche U_n .

OSSERVAZIONE. Quando non esistano i limiti delle espressioni al secondo membro nelle formole (2), (4), ci si giova di relazioni relative ai *max. lim.* dei due membri le quali sussistono in ogni caso; più precisamente si ha:

Nelle ipotesi del Teorema 1.^o esistono due numeri positivi μ, μ_1 tali che, nei casi ivi considerati, si ha rispettivamente:

$$\max_{n \rightarrow \infty} \lim \left| \frac{u_1 + \dots + u_n}{b_1 + \dots + b_n} \right| < \mu \max_{n \rightarrow \infty} \lim \frac{1}{n} \left| \frac{u_1}{b_1} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right| \quad (2')$$

$$\max_{n \rightarrow \infty} \lim \left| \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} \right| < \mu_1 \max_{n \rightarrow \infty} \lim \frac{1}{n} \left| \frac{u_1}{b_1} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right|. \quad (4')$$

TEOREMA 4.^o *Se le variabili b_n, c_n sono reali e positive, se la variabile a_n è per ogni valore di n determinata e finita, e se sono soddisfatte le condizioni:*

1.^o *la b_n è monotona,*

2.^o *le serie $\sum_1^\infty a_n, \sum_1^\infty a_n c_n$ sono entrambi convergenti,*

3.^o *il quoziente $\left| \frac{a_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} c_{n+2} + \dots}{c_{n+1} + c_{n+2} + \dots} \right|$ ha limite inferiore finito,*

4.^o *assunto come infinitesimo principale per $n = \infty$ la variabile $\gamma_n = c_{n+1} + c_{n+2} + \dots$; se $\sum b_n c_n$ converge, il suo resto $b_{n+1} c_{n+1} + b_{n+2} c_{n+2} + \dots$ ha ordine finito di infinitesimo (*); se la $\sum b_n c_n$ diverge la somma $b_1 c_1 + \dots + b_n c_n$ ha ordine finito di infinito.*

(*) L'ordine di infinito o di infinitesimo di una variabile u_n rispetto ad una seconda v_n , si intende definito del comportamento assintotico del rapporto $\frac{\Delta u_n}{u_n} : \frac{\Delta v_n}{v_n}$. (Cfr. *Sugli integrali definiti impropri*, loc. cit., n.^o 30.)

I. Se la serie $\sum b_n c_n$ converge, converge anche la serie $\sum a_n b_n c_n$, e si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} c_{n+2} + \dots}{b_{n+1} c_{n+1} + b_{n+2} c_{n+2} + \dots} = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} c_{n+2} + \dots}{c_{n+1} + c_{n+2} + \dots},$$

purchè esista il secondo membro, (anche se esiste solo il primo membro e se il resto $b_{n+1} c_{n+1} + \dots$, è infinitesimo del 1.° ordine).

II. Se la serie $\sum b_n c_n$ diverge, si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n}{b_1 c_1 + \dots + b_n c_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} c_{n+1} + a_{n+2} c_{n+2} + \dots}{c_{n+1} + c_{n+2} + \dots},$$

purchè esista il secondo membro.

II.

3. LEMMA 1.° Sia $\varphi(x)$ una funzione reale della variabile reale x , che in un determinato intorno x_0 $-\infty$, dell'infinito, è monotona e derivabile; la sua derivata $\varphi'(x)$ sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo finito x_0 $-\infty$; esistano due numeri positivi x_1 , M , tali che

$$x \geq x_1, \quad \left| \frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < M; \quad (6)$$

voglio provare:

1.° che esistono altri due numeri x_1 , M_1 , tali che:

$$\text{per integrali } \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ divergenti; } x \geq x_1, \quad \left| \frac{x \varphi(x)}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} \right| < M_1, \quad (7)$$

$$\text{» » » convergenti; } x \geq x_1, \quad \left| \frac{x \varphi(x)}{\int_x^{\infty} \varphi(x) dx} \right| < M_1; \quad (8)$$

2.° che la funzione $\varphi(x)$ soddisfa la condizione:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = 1. \quad (9)$$

Per dimostrare la 1.ª parte considero che, nel caso di integrali diver-

genti, si ricava dalla (6)

$$x \geq x_0, \quad \left| x \varphi(x) - x_0 \varphi(x_0) - \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \right| < M \left| \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \right|,$$

$$|x \varphi(x)| < (1 + M) \left| \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \right| + |x_0 \varphi(x_0)|.$$

Osservando che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_0 \varphi(x_0)}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} = 0$, e dividendo per $\int_{x_0}^x \varphi(x) dx$, subito

si ricava la formula (7).

Nel caso di integrali convergenti si ha $\lim_{x \rightarrow \infty} x \varphi(x) = 0$, perciò dalla (6) si ha

$$x \geq x_0, \quad \left| x \varphi(x) + \int_x^{\infty} \varphi(x) dx \right| < M \left| \int_x^{\infty} \varphi(x) dx \right|,$$

d'onde la (8).

Per dimostrare la (9), poniamo per abbreviare scrittura $\lambda(x) = \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$, ed avremo:

$$\lambda(x) - 1 = \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x+\theta} \left\{ \frac{(x+\theta) \varphi'(x+\theta)}{\varphi(x+\theta)} \frac{\varphi(x+\theta)}{\varphi(x)} \right\}.$$

Se ora supponiamo $\varphi(x)$ non decrescente, abbiamo $\lambda(x) \geq \frac{\varphi(x+\theta)}{\varphi(x)} \geq 1$; perciò ricordando la (6):

$$x \geq x_1, \quad 0 \leq \lambda(x) - 1 \leq \frac{1}{x+\theta} M \lambda(x), \quad \text{cioè: } 1 \leq \lambda(x) < \frac{1}{1 - \frac{M}{x+\theta}},$$

la quale appunto dimostra la formula (9).

Similmente si procede nella supposizione di $\varphi(x)$ non crescente.

LEMMA 2.^o *Sia $\varphi(x)$ una funzione reale della variabile reale x , che in un determinato intorno x_0^- a sinistra del punto a , è monotona e derivabile, la sua derivata $\varphi'(x)$ sia atta alla integrazione definita in ogni intervallo $x_0^- x$, ($x < a$); esistano due numeri positivi ε , M , tali che*

$$a - x < \varepsilon, \quad (a - x) \left| \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < M; \quad (10)$$

voglio provare:

1.° Che esistono altri due numeri σ, μ , tali che :

$$\left. \begin{aligned} \text{se } a \text{ è un punto di infinito per la } \Phi(x) &= \int_{x_0}^x \varphi(x) dx, \\ \text{per } (a-x) < \sigma, \quad (a-x) \left| \frac{\varphi(x)}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} \right| &< \mu, \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{se, nel punto } a, \text{ ha valor finito la } \Phi(x) &= \int_{x_0}^x \varphi(x) dx, \\ \text{per } (a-x) < \sigma, \quad (a-x) \left| \frac{\varphi(x)}{\int_x^a \varphi(x) dx} \right| &< \mu; \end{aligned} \right\} (12)$$

2.° Che la funzione $\varphi(x)$ soddisfa la relazione :

$$a > x \geq x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi\left(a - \frac{a-x}{n+1}\right)}{\varphi\left(a - \frac{a-x}{n}\right)} = 1. \quad (13)$$

La dimostrazione delle formole (11), (12) è interamente analoga a quella fatta al lemma precedente per le (7), (8); per provare la (13), poniamo

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)}, \quad x_n = a - \frac{a-x_1}{n}, \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \frac{a-x_1}{n(n+1)}; \\ a > x_1 &\geq x_0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} (14)$$

e, per fissare le idee, supponiamo $\varphi(x)$ non decrescente, avremo :

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_n - 1 &= \frac{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}{\varphi(x_n)} = \Delta x_n \frac{\varphi'(x_n + \theta \Delta)}{\varphi(x_n + \theta \Delta)} \cdot \frac{\varphi(x_n + \theta \Delta)}{\varphi(x_n)} \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{a-x_1}{n} \cdot \frac{\varphi'(x_n + \theta \Delta)}{\varphi(x_n + \theta \Delta)} \cdot \frac{\varphi(x_n + \theta \Delta)}{\varphi(x_n)} \right\}. \end{aligned}$$

Ora si ha :

$$\frac{a-x_1}{n} = a - x_n = \left\{ a - (x_n + \theta \Delta) \right\} \left\{ \frac{a-x_n}{a - (x_n + \theta \Delta)} \right\} < \left(a - (x_n + \theta \Delta) \right) \frac{a-x_n}{a-x_{n+1}}$$

cioè :

$$\frac{a-x_1}{n} < \left(a - (x_n + \theta \Delta) \right) \frac{n+1}{n} \leq 2 \left(a - (x_n + \theta \Delta) \right).$$

Vediamo dunque che

$$a - x_n < \varepsilon; \quad 0 \leq \lambda_n - 1 < \frac{2}{n+1} M \lambda_n, \quad \text{cioè} \quad 1 \leq \lambda_n < \frac{1}{1 - \frac{2M}{n+1}},$$

dalla quale appunto si ricava la formola (13).

4. OSSERVAZIONE. Se l'ordine di infinito o di infinitesimo di una funzione $\varphi(x)$, per $x = \infty$, rispetto alla x considerata come infinito del primo ordine si definisce per mezzo del limite della espressione $\frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)}$, e si assume (quando non esista limite) dal comportamento assintotico di tale espressione (*), e se l'ordine di infinito o di infinitesimo, per $x = a$ (a distanza finita) si definisce mediante il quoziente $\frac{(a-x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; si possono brevemente riunire i due lemmi dimostrati nell'enunciato:

Se una funzione monotona $\varphi(x)$ ha ordine finito o nullo di infinito (o di infinitesimo), anche il suo integrale ha ordine finito o nullo di infinito (o di infinitesimo) ed essa soddisfa la relazione $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = 1$.

5. Si costruisca, con legge arbitraria, una successione x_n sempre crescente, la quale, nel caso in cui si tratti di applicare il *lemma* 1.º tenda all'infinito, e, nel caso del *lemma* 2.º tenda al numero finito e determinato a .

Supponiamo poi che:

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \text{sia } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_{n+1} - x_n)}{x_n} = 1 \\ \text{» } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \text{sia } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_{n+1} - x_n)}{a - x_n} = 1 \end{array} \right\} \quad (15)$$

onde per i *lemma* 1.º, 2.º, verrà:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1. \quad (16)$$

Per una funzione $\varphi(x)$ le condizioni (6), (10) dei *lemma* ricordati, si scri-

(*) Nella nota: *Sul calcolo degli infiniti*, [R. Acc. Lincei, vol. XVII, (1908) pag. 245] ho mostrato come questo modo di definire l'ordine di infinito non si discosti sostanzialmente da quello proposto dal CAUCHY e comunemente seguito, e presenti vantaggio nella pratica del calcolo degli infiniti. Ulteriori sviluppi si trovano nel Cap. III della Memoria citata, *Sugli integrali definiti impropri*.

veranno :

$$n \geq N; \quad x_n \left| \frac{\varphi'(x_n)}{\varphi(x_n)} \right| < M, \quad (a - x_n) \left| \frac{\varphi'(x_n)}{\varphi(x_n)} \right| < M,$$

le quali, sia per $\lim x_n = \infty$, sia per $\lim x_n = a$, sono riassunte nell'unica formula :

$$n \geq N; \quad n \Delta x_n \left| \frac{\varphi'(x_n)}{\varphi(x_n)} \right| < M: \quad (17)$$

mentre poi, dai ricordati lemma, ricaveremo :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1, \quad (18)$$

inoltre, per integrali divergenti,

$$n \geq N_1; \quad \left| \frac{n \Delta x_n \varphi(x_n)}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx} \right| < \mu, \quad (19)$$

e, per integrali convergenti,

$$n \geq N_1, \quad \left. \begin{array}{l} \left| \frac{n \Delta x_n \varphi(x_n)}{\int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx} \right| < \mu_1 \\ \left| \frac{n \Delta x_n \varphi(x_n)}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx} \right| < \mu_2 \end{array} \right\} \quad (20)$$

con $x_\infty = \lim x_n$.

6. Poniamo :

$$b_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x) dx = \Delta x_n \varphi(x_n + \theta \Delta x_n) \quad (21)$$

onde :

$$b_1 + \dots + b_n = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx; \quad b_{n+1} + b_{n+2} + \dots = \int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx,$$

e, dalle formule (18), (19), (20), dedurremo la esistenza di due numeri N_2 , μ_2 , tali che

$$\text{per serie } \Sigma b_n \text{ divergenti} \quad \text{e per } n \geq N_2, \quad \left| \frac{n b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \right| < \mu_2, \quad (22)$$

$$\text{» » » convergenti} \quad \text{» » »}, \quad \left| \frac{n b_{n+1}}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} \right| < \mu_2. \quad (23)$$

Quando si voglia definire l'ordine di infinito al modo ricordato avremo :

LEMMA 3.^o *Nelle condizioni supposte negli enunciati dei lemmi 1.^o, 2.^o, per*

la $\varphi(x)$, (se b_n cioè ha ordine finito di infinito o di infinitesimo) anche la variabile $B_n = b_1 + \dots + b_n$ ha ordine finito (o nullo) di infinito, o la $\beta_n = b_{n+1} + b_{n+1} + \dots$ ha ordine finito (o nullo) di infinitesimo.

7. Si vuole ora che la variabile b_n definita dalle formole (21) sia monotona.

Nel caso di $x_\infty = \infty$, basta prendere

$$x_n = x_0 + nk \quad (k \text{ costante}) \quad (24)$$

per assicurarsi che la b_n è, nello stesso tono delle $\varphi(x)$, non crescente o non decrescente.

Altrimenti avviene per $x_\infty = a$.

In questa supposizione, prendendo la successione x_n determinata dalle formole (14), abbiamo:

$$b_{n+1} = \int_{a - \frac{x_0}{n}}^{a - \frac{x_0}{n+1}} \varphi(x) dx.$$

Poniamo $a - x = \frac{1}{z}$, $dz = \frac{dx}{z^2}$, ed abbiamo

$$b_{n+1} = \int_{\frac{n}{a-x_0}}^{\frac{n+1}{a-x_0}} \varphi \left(a + \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z^2},$$

poichè gli intervalli di integrazione, al variare di n , non variano di ampiezza, per assicurare la monotonia di b_n basta la ipotesi che sia monotona la funzione sotto il segno. Da ciò:

Condizione sufficiente perchè la variabile

$$b_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi(x) dx, \quad x_n = a - \frac{a-x_0}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

sia monotona è che sia monotona, per x alla sinistra di a , la funzione

$$(a-x)^2 \varphi(x). \quad (25)$$

8. Sia data una funzione $f(x)$ della variabile reale x , determinata finita e positiva (o nulla) per tutti i valori di x di un determinato intorno x_0 \overline{A} , escluso il punto A medesimo. Questo punto potrà essere supposto a distanza

finita o nel punto dell'infinito. Sia $\varphi(x)$ una funzione reale, monotona, derivabile nei punti del medesimo intorno, che supporremo sempre positiva, la quale per $x=A$ abbia ordine finito (o nullo) di infinito o di infinitesimo: nel senso, più volte chiarito, che sia soddisfatta per essa l'una o l'altra delle:

$$x \geq x_0, \quad \left| \frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < \mu; \quad a - x < \varepsilon, \quad (a - x) \left| \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < \nu.$$

Determiniamo una successione x_n la quale tenda ad A sempre crescendo e soddisfi le relazioni (15).

Usando il simbolo \int per indicare l'integrale superiore, poniamo:

$$u_{n+1} = \int_{x_n}^{\overline{x_{n+1}}} f(x) dx, \quad b_{n+1} = \int_{x_n}^{\overline{x_{n+1}}} \varphi(x) dx = \varphi(x_n + \theta \Delta) \cdot \Delta x_n; \quad (26)$$

ed avremo:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{\overline{x_{n+1}}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx &= \frac{1}{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)} \int_{x_n}^{\overline{x_{n+1}}} f(x) dx = \frac{u_{n+1}}{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)} = \\ &= \frac{\varphi(x_n + \theta \Delta x_n)}{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)} \Delta x_n \frac{u_{n+1}}{b_{n+1}}, \end{aligned}$$

la quale, brevemente, scriveremo:

$$\int_{x_n}^{\overline{x_{n+1}}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \Delta x_n \cdot k_n \cdot a_n; \quad \text{con} \quad \frac{\varphi(x_n + \theta \Delta x_n)}{\varphi(x_n + \theta_1 \Delta x_n)} = k_n, \quad \frac{u_{n+1}}{b_{n+1}} = a_n. \quad (27)$$

9. Nel caso di $A = x_\infty = \infty$, fatto per maggior semplicità

$$x_n = x_0 + n, \quad \Delta x_n = 1, \quad (28)$$

avremo:

$$\int_{x_n}^{\overline{x_{n+1}}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = k_n a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{\overline{x_n}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 k_1 + \dots + a_n k_n}{n}. \quad (29)$$

Nel caso di $A = x_\infty = a$ (a distanza finita), supponendo la funzione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ integrabile superiormente nel tratto $x_0 \rightarrow a$, posto, come nelle (14),

$$x_n = a - \frac{a - x_0}{n}, \quad \Delta x_n = \frac{a - x_0}{n(n+1)},$$

avremo:

$$\frac{\int_{x_n}^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx}{\Delta x_n + \Delta x_{n+1} + \dots} = \frac{\alpha_{n+1} k_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} k_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_{n+2} + \dots},$$

ed avendosi $\Delta x_n + \Delta x_{n+1} + \dots = a - x_n$, sarà ancora:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a - x_n} \int_{x_n}^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_{n+1} k_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} k_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_{n+2} + \dots}, \quad (30)$$

purchè esista uno di questi limiti.

10. Si consideri ora che, per i lemma 1, 2, e per le ipotesi supposte per le $\varphi(x)$, si ha $\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1$; e che, per funzioni φ non decrescenti si ha $\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})} \leq k_n \leq \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)}$, e, per funzioni non crescenti si ha

$$\frac{\varphi(x_n)}{\varphi(x_{n+1})} \geq k_n \geq \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)},$$

onde in ogni caso si concluderà essere

$$\lim_{n=\infty} k_n = 1. \quad (31)$$

La somma $A_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, di quantità tutte positive, convergerà per $n = \infty$ verso un limite finito od infinito.

Se il limite di A_n è finito, tale sarà, per la (31) anche quello di

$$\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n,$$

onde, in tale ipotesi, sarà

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} = 0. \quad (32)$$

Se il limite di A_n è infinito avremo, per un noto teorema,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = \lim_{n=\infty} k_n = 1 \quad (33)$$

dunque, anche in questo caso:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}. \quad (34)$$

Si consideri poi che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_{n+1} k_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} k_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots}{\alpha_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots} = \lim_{n=\infty} k_n = 1.$$

Potremo dunque scrivere le (29), (30), al seguente modo:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n=\infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx &= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right) \\ \lim_{n=\infty} \frac{1}{a - x_n} \int_{x_n}^{\bar{a}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx &= \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_{n+1} \Delta x_{n+1} + \alpha_{n+2} \Delta x_{n+2} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \Delta x_{n+2} + \dots} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Determinata la successione x_n , secondo le formole (28) e preso $b_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi(x) dx$, avremo, per $x_\infty = \infty$, una successione b_n monotona, la quale soddisfa tutte le condizioni richieste per le applicazioni del Teorema 1.^o

Tenuto calcolo che

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n &= \int_{x_0}^{\bar{x}_n} f(x) dx, & b_1 + b_2 + \dots + b_n &= \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx, \\ u_{n+1} + u_{n+2} + \dots &= \int_{x_n}^{\bar{x}_\infty} f(x) dx, & b_{n+1} + b_{n+2} + \dots &= \int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

avremo dunque per $x_\infty = \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \dots + \frac{u_n}{b_n} \right) \left\{ \begin{aligned} &= \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali divergenti} \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{\int_{x_n}^{\bar{x}_\infty} f(x) dx}{\int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali convergenti} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

purchè esista il 1.^o membro.

Nel caso di $x_\infty = a$, considerando che la $\varphi_n = \varphi(x_n + \theta \Delta x_n)$ definita dalla formula (21) è funzione monotona di n e tenendo conto delle (22), (23), vediamo che sono soddisfatte tutte le condizioni richieste dall'enunciato del Teorema 4.^o, quindi avremo:

per integrali divergenti:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \Delta x_{n+1} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \dots} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \varphi_1 \Delta x_1 + \dots + a_n \varphi_n \Delta x_n}{\varphi_1 \Delta x_1 + \dots + \varphi_n \Delta x_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{b_1 + \dots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx}, \end{aligned}$$

e, per integrali convergenti:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \Delta x_{n+1} + \dots}{\Delta x_{n+1} + \dots} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \varphi_{n+1} \Delta x_{n+1} + \dots}{\varphi_{n+1} \Delta x_{n+1} + \dots} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} b_{n+1} + \dots}{b_{n+1} + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_n}^{x_\infty} f(x) dx}{\int_{x_n}^{x_\infty} \varphi(x) dx}, \end{aligned}$$

purchè esistano i primi membri.

Queste formole, le (35) e le (36) permettono di applicare ad integrali definiti le proprietà asintotiche delle serie espresse dai teoremi 1-4; infatti: per $x_\infty = \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{x_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \left\{ \begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali divergenti;} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_n}^{\infty} f(x) dx}{\int_{x_n}^{\infty} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali convergenti;} \end{aligned} \right. \quad (37)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a - x_n} \int_{x_n}^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \left\{ \begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) dx}, \text{ per integrali divergenti;} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_n}^a f(x) dx}{\int_{x_n}^a \varphi(x) dx}, \text{ per integrali convergenti.} \end{aligned} \right.$$

Ora si consideri che, per essere la funzione sotto il segno positiva,

si ha :

$$x_n \leq x < x_{n+1},$$

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \leq \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}_{n+1}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx;$$

ed è $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_0}{x_n - x_0} = 1$, dunque si ha ancora :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n - x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}_n} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx.$$

Similmente si provano le eguaglianze :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a - x_n} \int_{x_n}^{\bar{a}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a - x} \int_x^{\bar{a}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}_n} f(x) dx}{\int_{x_0}^{\bar{x}_n} \varphi(x) dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(x) dx}{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) dx},$$

e le altre analoghe, nelle quali si sostituisce la variabile continua x alla variabile discreta n .

Tutte queste eguaglianze valgono purchè esista uno dei due membri.

Rimangono così provati i seguenti teoremi :

TEOREMA 5.º *Se $f(x)$, $\varphi(x)$ sono funzioni determinate positive della variabile reale x in ogni punto a distanza finita del raggio x_0 , $-\infty$, se la $\varphi(x)$ è monotona derivabile e, relativamente ad essa esistono due numeri x_1, μ , tali che*

$$x \geq x_1, \quad \left| \frac{x \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < \mu,$$

secondo che l'integrale $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx$ è divergente o convergente ha luogo l'una o l'altra delle relazioni :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \left\{ \begin{array}{l} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} f(x) dx}{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) dx} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{\infty} f(x) dx}{\int_x^{\infty} \varphi(x) dx} \end{array} \right. \quad (38)$$

purchè esista il 1.º membro determinato e finito (o nullo).

TEOREMA 6.° Se $f(x)$, $\varphi(x)$ sono funzioni della variabile reale x determinate e positive in ogni punto dell'intorno x_0 , se la $\varphi(x)$ è monotona e derivabile, se inoltre esistono due numeri ε , ν , tali che

$$a - x < \varepsilon, \quad (a - x) \left| \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right| < \nu,$$

secondo che l'integrale $\int_{x_0}^a \varphi(x) dx$ è divergente o convergente ha luogo l'una o l'altra delle relazioni:

$$\lim_{x=a} \frac{1}{a-x} \int_x^a \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \left\{ \begin{array}{l} = \lim_{x=a} \frac{\int_{x_0}^x f(x) dx}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} \\ = \lim_{x=a} \frac{\int_x^a f(x) dx}{\int_x^a \varphi(x) dx} \end{array} \right. \quad (39)$$

purchè il primo membro sia determinato e finito (o nullo).

TEOREMA 7.° Le formole (38) del Teorema 5.° valgono purchè esista uno qualunque dei due membri, se alle ipotesi dell'enunciato si aggiungano le seguenti:

1.° L'integrale $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx$ diverge ed è soddisfatta la relazione:

$$x \geq x_1, \quad \left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \right| < \nu.$$

2.° L'integrale $\int_{x_0}^x \varphi(x) dx$ è infinito del 1.° ordine (al senso chiarito al n.° 4).

Le formole (39) del teorema 6.° valgono purchè esista uno qualunque dei due membri, se alle ipotesi dell'enunciato si aggiungano le seguenti:

1.° L'integrale $\int_{x_0}^a \varphi(x) dx$ converge ed è soddisfatta la relazione:

$$x \geq x_1, \quad \left| \frac{1}{a-x} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \right| < \nu.$$

2.° L'integrale $\int_x^a \varphi(x) dx$ è infinitesimo del 1.° ordine.

12. OSSERVAZIONE 1.^a *Le condizioni imposte al rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ possono far difetto in tutti i punti di un insieme di misura nulla, ed in tali punti quel rapporto può assumere valori dati a piacere senza che i teoremi enunciati cessino di essere validi.*

13. OSSERVAZIONE 2.^a *I teoremi trovati per l'integrale superiore valgono naturalmente anche per l'integrale di Riemann, quando si abbia che fare con funzioni $f(x)$ integrabili.*

14. Se supponiamo che le funzioni $f(x)$ $\varphi(x)$ siano entrambe continue, o generalmente continue, nell'intervallo considerato, ponendo

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx, \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \\ \text{per integrali divergenti,} \end{array} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \int_x^{\infty} f(x) dx, \quad \Phi(x) = \int_x^{\infty} \varphi(x) dx \\ \text{per integrali convergenti estesi ad intervalli infiniti,} \end{array} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \int_x^a f(x) dx, \quad \Phi(x) = \int_x^a \varphi(x) dx \\ \text{per integrali convergenti di funzioni che hanno punti di} \\ \text{infinito} \end{array} \right\} \quad (42)$$

avremo, per integrali divergenti $F' = f$, $\Phi' = \varphi$ e per integrali convergenti $F' = -f$, $\Phi' = -\varphi$; possiamo dunque concludere:

TEOREMA 8.^o *Se $F(x)$, $\Phi(x)$ sono funzioni reali della variabile reale x , finite, ad un valore e derivabili per tutti i punti dell'intorno x_0 \sqrt{a} (a finito od infinito), infinite od infinitesime entrambe per $x = a$; se in questo punto la $\Phi(x)$ ha ordine finito (o nullo) di infinito o di infinitesimo (*) e la sua*

(*) Al senso più volte chiarito. — V. p. es. al n.º 4 di questa pubblicazione.

derivata è monotona, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{\Phi(x)} \left\{ \begin{array}{l} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a-x} \int_x^a \frac{F'(x)}{\Phi'(x)} dx, \text{ per } a \text{ finito,} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \frac{F'(x)}{\Phi'(x)} dx. \text{ per } a = \infty, \end{array} \right\} \quad (43)$$

purchè esista il secondo membro.

Se poi la funzione $\varphi(x)$ per a infinito ha ordine di infinito eguale ad 1 (come per $\varphi = x \lg x$, $\varphi = x \lg x \lg Gx$, ...) e, per a finito è infinitesima del 1.º ordine, la formula (43) vale purchè esista uno dei due membri ed il rapporto delle derivate (esclusi i punti di un insieme di misura nulla) abbia limite superiore finito.

15. OSSERVAZIONE. Quando non esistano i limiti delle espressioni al 2.º membro nelle formule (38), (39), (43) ci si giova di relazioni ricavate dalle formule (2') (4') relativi ai max. lim., le quali relazioni affermano l'esistenza di un numero positivo μ tale che il max. lim. del valore assoluto del 1.º membro è minore del prodotto del max. lim. del valore assoluto del 2.º, moltiplicato per μ .

III.

16. Dato un insieme di punti $[\xi]$ situati nel segmento $x_0 \overline{---} x$, rappresentando con $\varphi(x)$ la sua *indicatrice di frequenza* (*), ne rappresenteremo la *estensione esteriore* mediante l'integrale (superiore)

$$\int_{x_0}^{\overline{x}} \varphi(x) dx;$$

diremo *frequenza dell'insieme* $[\xi]$ nel punto $x = \infty$, il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^{\overline{x}} \varphi(x) dx}{x - x_0}; \quad (44)$$

(*) Cioè una funzione che assume il valore 1 nei punti ξ ed il valore zero nei punti di $x_0 \overline{---} x$ non appartenenti all'insieme.

frequenza (a sinistra) nel punto a distanza finita a , il limite

$$\lim_{x=a} \frac{\int_x^a \varphi(x) dx}{a-x}; \quad (45)$$

e, quando cotesti limiti non esistano, diremo che la *frequenza è compresa fra il minimo ed il massimo limite delle espressioni considerate.*

Analogamente si definisce la *frequenza a destra* e la *frequenza ordinaria*, delle quali per altro qui non occorrerà parlare (*).

17. Sia data una funzione $y = y(x)$ che, nei punti dell'intervallo $x_0 \text{---} x$ è monotona insieme con la sua derivata e nel punto dove si vuol determinare la frequenza dell'insieme $[z]$ è infinita od infinitesima di ordine finito (al senso chiarito al n.º 4) e può anche essere determinata e finita.

Questa funzione stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'intervallo $x_0 \text{---} x$ e quelli dell'intervallo $y_0 \text{---} y$; ($y_0 = y(x_0)$, $y = y(x)$): all'insieme $[z]$ corrisponde l'insieme $[r = y(z)]$, ed a questo quello.

Vogliamo determinare la *frequenza dell'insieme $[r]$ in un dato punto, supposto nota quella dell'insieme $[z]$ nel punto corrispondente.*

Anzitutto, nella supposizione che l'intervallo $y_0 \text{---} y$ comprenda nel suo estremo superiore il punto dell'infinito, cerchiamo la *frequenza nel punto dell'infinito*, cioè, designando con $\Phi(y)$, la indicatrice di frequenza dell'insieme $[r]$, proponiamoci di calcolare

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^y \Phi(y) dy}{y - y_0}. \quad (46)$$

Il punto x , che, nella corrispondenza considerata, corrisponde al punto all'infinito delle y , può essere all'infinito oppure a distanza finita.

(*) Il concetto di *frequenza di un insieme nell'intorno di un punto assegnato*, fu da me introdotto nella nota: *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari* (Rend. Acc. Lincei, vol. XII, 1906) ed ulteriormente sviluppato nella Memoria *Convergenza di algoritmi infiniti*.

Nella prima ipotesi avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^{\bar{y}} \Phi(y) dy}{y - y_0} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) y'(x) dx}{\int_{x_0}^x y'(x) dx}$$

e, pel teorema 5.º, avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^{\bar{y}} \Phi(y) dy}{y - y_0} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) dx}{x - x_0}. \quad (47)$$

Se invece supponiamo che il punto $y = \infty$ corrisponda al punto a distanza finita $x = a$, avremo:

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^{\bar{y}} \Phi(y) dy}{y - y_0} = \lim_{x=a} \frac{\int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi(x) y'(x) dx}{\int_{x_0}^x y'(x) dx}$$

e, pel teorema 6.º,

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^{\bar{y}} \Phi(y) dy}{y - y_0} = \lim_{x=a} \frac{\int_x^a \varphi(x) dx}{a - x}. \quad (48)$$

Cerchiamo ora la *frequenza dell'insieme* $[\tau]$ nel punto a distanza finita $b = y(a)$.

Se anche il punto a che gli corrisponde è a distanza finita, abbiamo

$$\lim_{y=b} \frac{\int_y^{\bar{b}} \Phi(y) dy}{b - y} = \lim_{x=a} \frac{\int_x^{\bar{a}} \varphi(x) y'(x) dx}{\int_x^a y'(x) dx}$$

e, pel teorema 6.º,

$$\lim_{y=b} \frac{\int_y^{\bar{b}} \Phi(y) dy}{b - y} = \lim_{x=a} \frac{\int_x^{\bar{a}} \varphi(x) dx}{a - x}. \quad (49)$$

Se poi il punto $y = b$ corrisponde al punto $x = \infty$, si ha :

$$\lim_{y=b} \frac{\int_y^{\bar{b}} \Phi(y) dy}{b-y} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_x^{\infty} \varphi(x) y'(x) dx}{\int_x^{\infty} y'(x) dx},$$

e, pel teorema 5.º,

$$\lim_{y=b} \frac{\int_y^{\bar{b}} \Phi(y) dy}{b-y} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx}{x-x_0}. \quad (50)$$

Le formule (47), (48), (49), (50) mostrano che in ogni caso la frequenza dell'insieme $[\xi]$ è eguale alla frequenza dell'insieme trasformato nel punto corrispondente. D'onde:

TEOREMA 9.º *La frequenza è invariante per tutte le trasformazioni generate da funzioni monotone insieme con la loro derivata, le quali nell'intorno del punto che si considera sono finite od hanno ordine finito di infinito o di infinitesimo (inteso l'ordine al senso chiarito al n.º 4).*

Giova osservare che qui noi supponiamo sempre soddisfatte per le funzioni trasformatrici $y(x)$ tutte le condizioni di continuità, derivabilità, monotonia... che sono richieste dal problema; poichè noi non ci occupiamo che della loro *rapidità di crescita o di evanescenza*, al fine di cercare le relazioni fra queste loro proprietà e la invarianza della frequenza.

18. Si osservi che se la funzione $y = y'(x)$ ha ordine determinato ed infinito di infinito o di infinitesimo, la sua reciproca $x = y(x)$ ha nel punto corrispondente ordine nullo (*), epperò, se in un punto $y = b$ l'insieme $[\tau]$ ha, in tale ipotesi, frequenza determinata, l'insieme $[\xi]$ ha nel punto corrispondente la medesima frequenza. D'onde:

TEOREMA 10.º *Se l'insieme $[\xi]$ ha frequenza determinata nel punto $x = a$ (finito od infinito), e si fa corrispondere biunivocamente all'insieme $[\tau]$ mediante la funzione $y = y(x)$ la quale in un intorno di a soddisfa le solite condizioni di continuità, derivabilità e monotonia, e per $x = a$ ha ordine determinato (finito nullo od infinito) di infinito o di infinitesimo, l'insieme trasformato avrà nel punto corrispondente la medesima frequenza o non avrà frequenza determinata.*

(*) Cfr. la nota: *Sul calcolo degli infiniti*, al loc. cit.

19. TEOREMA 11.^o Sia $[\xi]$ un insieme di punti del raggio x, ∞ , tale che la estensione esteriore della parte di esso contenuta nel segmento $x, x+1$ diventi infinitesima per $x = \infty$.

La frequenza di un tale insieme per $x = \infty$ è evidentemente infinitesima, dico che è tale nel punto $b = y(\infty)$ corrispondente anche la frequenza di qualunque insieme trasformato di $[\xi]$ mediante una funzione $y(x)$ la cui derivata sia monotona e soddisfi la condizione seguente: esistono tre numeri positivi X, l, L , tali che

$$x \geq X, \quad l \leq \frac{y'(x+1)}{y'(x)} \leq L (*). \quad (51)$$

E, di fatto,

$$\lim_{y=\infty} \frac{\int_{y(x)}^{\overline{y(x+1)}} \Phi(y) dy}{y(x+1) - y(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_x^{\overline{x+1}} \varphi(x) y'(x) dx}{y'(x+\theta)} = \lim_{x=\infty} \frac{y'(x+\theta_1)}{y'(x+\theta)} \int_x^{\overline{x+1}} \varphi(x) dx. \quad (52)$$

Ora, per la formula (51) e per la supposta monotonia della $y'(x)$, vediamo che il fattore $\frac{y'(x+\theta_1)}{y'(x+\theta)}$ è minore certamente del maggiore dei due numeri $\frac{1}{l}, L$; il fattore $\int_x^{\overline{x+1}} \varphi(x) dx$ è per ipotesi infinitesimo, onde viene

$$\lim_{x=\infty} \frac{\int_{y(x)}^{\overline{y(x+1)}} \Phi(y) dy}{y(x+1) - y(x)} = 0;$$

ma si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{\int_{y(x_0)}^{\overline{y(x)}} \Phi(y) dy}{y(x) - y(x_0)} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{y(x)}^{\overline{y(x+1)}} \Phi(y) dy}{y(x+1) - y(x)}$$

e da ciò segue l'enunciato.

(*) Questa condizione, nel calcolo degli infiniti, equivale a supporre che la $y'(x)$ abbia ordine finito (o nullo) di infinito, rispetto all'infinito principale x . (Cfr. E. BORTOLOTTI, *Contributo alla teoria degli infiniti* nel Tomo XI della serie III degli *Annali di Matematica*, pag. 60-65).

20. Trascuriamo le facili estensioni ed applicazioni di questo teorema, e lasciamo del pari la dimostrazione del seguente:

TEOREMA 12.^o *Se il dato insieme $[\xi]$ è tale che, per qualsiasi incremento positivo, finito Δx delle x (anche variabile con x), sempre si abbia*

$$\omega = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x+\Delta} \varphi(x) dx}{\Delta x},$$

la frequenza dell'insieme dato nel punto $x = \infty$ è ω , ed essa rimane invariante qualunque sia la rapidità di crescita (o di evanescenza) della funzione trasformatrice — sempre supposte le solite condizioni di derivabilità e monotonia).

IV.

21. TEOREMA 13.^o *Siano date due funzioni reali $f(x)$, $\varphi(x)$, della variabile reale x , che in un determinato intorno del punto $x = a$ (finito od infinito) sono finite e derivabili. La funzione $\varphi(x)$ sia monotona insieme con la sua derivata ed infinita (od infinitesima) per $x = a$, di ordine finito o nullo (*). Le derivate $f'(x)$, $\varphi'(x)$ siano atte alla integrazione definita in ogni intervallo $x_0 \leftarrow x$ ($x < a$), esista un numero μ tale che la condizione $\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| \leq \mu$ sia soddisfatta in tutti i punti di un determinato intorno di a esclusi tutt'al più quelli di un insieme di misura nulla.*

Condizione sufficiente perchè il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ abbia limite λ determinato e finito per $x = a$ è che ad ogni numero positivo ε corrisponda un intorno $x_\varepsilon \leftarrow a$ tale che la condizione

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} < \lambda + \varepsilon \quad (53)$$

sia soddisfatta in tutti i punti dell'intorno, esclusi al più quelli di un insieme di frequenza infinitesima per $x = a$.

(*) Intendiamo sempre definito l'ordine di infinito al modo chiarito al n.º 4.

Se λ è diverso dallo zero sostituiremo al quoziente $\frac{f}{\varphi}$ quello $\frac{F}{\Phi} = \frac{f - \lambda \varphi}{\varphi}$, che dovrà tendere allo zero; perciò, senz'altro supporremo $\lambda = 0$.

Supponiamo, per fissare le idee, $a = \infty$ e $\varphi(x)$ infinita per $x = \infty$, e consideriamo l'integrale $\int_{x_\varepsilon}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx$.

Poichè la relazione $\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| > \mu$ non può verificarsi se non nei punti di un insieme di misura nulla, potremo, senza cambiare il valore dell'integrale considerato, sostituire in cotesti punti, al valore della funzione $\frac{f'}{\varphi'}$, lo zero.

Rappresentiamo con $\Phi(x)$ la indicatrice di frequenza dei punti nei quali è

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} > \varepsilon,$$

poichè anche in cotesti punti è sempre $\left| \frac{f'}{\varphi'} \right| < \mu$, avremo

$$\left| \int_{x_\varepsilon}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx \right| < \mu \int_{x_\varepsilon}^x \Phi(x) dx + \varepsilon(x - x_\varepsilon),$$

da cui

$$\frac{1}{x - x_\varepsilon} \left| \int_{x_\varepsilon}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx \right| < \mu \frac{\int_{x_\varepsilon}^x \Phi(x) dx}{x - x_\varepsilon} + \varepsilon. \quad (54)$$

Ma il quoziente $\frac{\int_{x_\varepsilon}^x \Phi(x) dx}{x - x_\varepsilon}$ è, per ipotesi, infinitesimo per $x = \infty$, onde vediamo che esiste un numero X tale che

$$x \geq X, \quad \frac{1}{x - x_\varepsilon} \left| \int_{x_\varepsilon}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx \right| < 2\mu\varepsilon.$$

Dalla *osservazione* fatta al n.º 15 desumiamo dunque la esistenza di un numero finito μ tale che

$$x \geq X, \quad \left| \frac{\int_{x_\varepsilon}^x f'(x) dx}{\int_{x_\varepsilon}^x \varphi'(x) dx} \right| < 2\mu\varepsilon,$$

cioè

$$x \geq X, \quad \left| \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{\varphi(x) - \varphi(x_\varepsilon)} \right| < 2\mu\varepsilon,$$

ed anche

$$x \geq X, \quad \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < 2\mu\varepsilon \cdot \left(1 - \frac{\varphi(x_\varepsilon)}{\varphi(x)} \right) + \left| \frac{f(x_\varepsilon)}{\varphi(x)} \right|,$$

ed essendo, per ipotesi, $\varphi(x)$ infinito per $x = \infty$, vediamo che ad ogni numero $\nu > 1$ può farsi corrispondere un $X_1 \geq X$ tale che

$$x \geq X_1, \quad \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < 2\mu\nu\varepsilon.$$

Dunque è

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Analoga dimostrazione si fa per funzioni $\varphi(x)$ infinitesime, e per il caso che il punto a sia a distanza finita.

22. TEOREMA 14.° *Siano $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni reali della variabile reale x , derivabili nell'intorno x_0 (a finito od infinito), la $f(x)$ sia ivi monotona e la $\varphi(x)$ sia sempre crescente (decrecente) ed infinita (infinitesima) per $x = a$. Le loro derivate sieno atte alla integrazione definita in ogni intervallo x_0 (o $x < a$), ed esistano due numeri x_1 , μ tali che la relazione*

$$\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| < \mu$$

sia soddisfatta in tutti i punti dell'intorno x_1 (o x_1), esclusi tutt'al più quelli di un insieme di misura nulla.

Condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ è che il quoziente delle derivate sia infinitesimo per $\varphi(x)$ che tende all'infinito (allo zero) percorrendo in modo arbitrario i punti di un insieme il cui complementare ha frequenza infinitesima per $\varphi(x)$ infinito (zero).

Quando x tende ad a per valori cui corrispondono punti $\varphi(x)$ dell'insieme complementare al considerato, il quoziente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ può aver limiti diversi dallo zero, ed anche diventare infinito, senza che per ciò cessi dall'essere $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

La condizione è necessaria. E di fatto: Supponiamo prima $a = \infty$, e consideriamo il caso speciale di $\varphi(x) = x$ onde $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = f'(x)$.

Essendo ε un numero positivo scelto a piacere, indichiamo con $\Phi(x)$ la indicatrice di frequenza dei punti dell'intervallo x_0, ∞ dove è $|f'(x)| > \varepsilon$, ed avremo:

$$x \geq x_0, \quad |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon \int_{x_0}^x \Phi(x) dx,$$

cioè

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| > \varepsilon \frac{\int_{x_0}^x \Phi(x) dx}{x - x_0};$$

ma è per ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

dunque deve ancora essere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x \Phi(x) dx}{x - x_0} = 0$$

e ciò dimostra l'enunciato.

Consideriamo ora in generale il quoziente di due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ soddisfacenti le condizioni dell'enunciato e sia $\varphi(x)$ infinita per $x = \infty$.

La funzione $y = \varphi(x)$ sarà atta alla inversione e, ricavato $x = \psi(y)$, avremo

$$f(x) = f(\psi(y)) = F(y).$$

Per la fatta dimostrazione abbiamo, come condizione necessaria per la evanescenza del quoziente $\frac{F(y)}{y}$, che sia infinitesima per $y = \infty$ la frequenza dei punti y dove può essere soddisfatta una relazione della forma $|F'(y)| > \varepsilon$; ma è $F'(y) = \left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right|$; $\frac{F(y)}{y} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$; e di qui il teorema.

La medesima dimostrazione serve per il quoziente di due funzioni infinite entrambe in un punto a a distanza finita.

Pel quoziente di funzioni infinitesime considereremo prima il caso di

$\varphi(x) = a - x$ (a a distanza finita), poi passeremo al caso generale con considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente (*).

La condizione è sufficiente. Per i casi di $\varphi(x) = x$, $\varphi(x) = a - x$, il teorema è conseguenza del teorema 12.^o; da questi si passa al caso generale con considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente.

23. Quando la funzione $x = \psi(y)$ abbia, al senso più volte chiarito, ordine finito o nullo di infinito o di infinitesimo, oppure quando siano soddisfatte per esso le condizioni dei teoremi 11, 12; a frequenza infinitesima per un insieme $y = \varphi(x)$ nel punto $\varphi(x)$ corrisponde frequenza infinitesima per l'insieme corrispondente dei punti x , nel punto a .

In questi casi *la condizione necessaria e sufficiente per la evanescenza del quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nel punto $x = a$ è semplicemente espressa dal richiedere che sia infinitesimo per $x = a$ l'insieme dei punti dove il quoziente delle derivate può assumere valori assoluti maggiori di un determinato numero positivo.*

Le conclusioni che abbiamo ricavate servono alla ricerca ed all'esame dei criteri di *convergenza di algoritmi infiniti*.

(*) Cfr. *Convergenza di algoritmi infiniti* al loc. cit., § IV.

Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2.^a specie.

(Memoria postuma di GIUSEPPE LAURICELLA, a Catania.)

1. Nella mia Nota: *Sopra i nuclei reiterati* (*) ho stabilita la condizione necessaria e sufficiente affinché esista una funzione (reale) simmetrica $K(x, y)$, la cui reiterata d'ordine n , $K^{(n)}(x, y)$, sia uguale ad una funzione (reale) simmetrica data $H(x, y)$; ossia la condizione necessaria e sufficiente affinché sia risolubile (mediante funzioni reali) l'equazione funzionale:

$$K^{(n)}(x, y) = H(x, y). \quad (1)$$

Nella medesima Nota ho pure data la regola per scrivere la funzione (reale) più generale che soddisfa a questa equazione. Tale regola può sostanzialmente esprimersi dicendo che le funzioni simmetriche $K(x, y)$, le quali soddisfano all'equazione (1), hanno per autovalori le radici n^{esime} reali degli autovalori della funzione $H(x, y)$ e per corrispondenti autofunzioni (normalizzate) combinazioni lineari omogenee (i cui coefficienti sono elementi di una sostituzione ortogonale) delle corrispondenti autofunzioni (normalizzate) di $H(x, y)$ appartenenti ai corrispondenti autovalori, che sono uguali fra di loro. In questo modo per n dispari si ha una soluzione solamente, mentre per n pari, se gli autovalori di $H(x, y)$ sono, come è necessario, tutti positivi, si hanno infinite soluzioni, dovute alle infinite combinazioni dei segni $+$ e $-$, che possono essere assegnati alle radici n^{esime} aritmetiche degli autovalori di $H(x, y)$. Importa osservare che queste infinite soluzioni possono aggrupparsi in coppie di funzioni due a due uguali e di segno contrario.

La questione così risolta è analoga al problema della ricerca delle radici n^{esime} reali (positive e negative) dei numeri reali, ossia al problema della

(*) *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, vol. XX, serie 5.^a, 1.^o sem. anno 1911, pp. 885-896.

ricerca delle soluzioni reali dell'equazione binomia di grado n . In virtù di tale analogia ci si può domandare: esisteranno soluzioni non reali dell'equazione (1)?

Qui mi propongo appunto di dimostrare che la condizione necessaria e sufficiente affinché la (1) ammetta soluzioni non reali, aventi autofunzioni tutte reali (*) (quelle corrispondenti all'eventuale autovalore $\lambda = \infty$ incluse), è quella stessa richiesta per l'esistenza di soluzioni reali, e che la regola per scrivere tutte le possibili soluzioni reali e immaginarie, ad autofunzioni tutte reali, dell'equazione (1) è la naturale estensione di quella trovata per il caso delle soluzioni reali. Questa regola generale può sostanzialmente esprimersi dicendo che tutte le soluzioni simmetriche (reali ed immaginarie) dell'equazione (1) hanno per autovalori le radici n^{esime} (reali ed immaginarie) degli autovalori della funzione $H(x, y)$, e per corrispondenti autofunzioni (normalizzate) tutte reali combinazioni lineari omogenee (i cui coefficienti sono elementi di una sostituzione ortogonale) delle autofunzioni (normalizzate) di $H(x, y)$ relative ai corrispondenti autovalori, che sono uguali fra di loro. In questo modo si hanno sempre infinite soluzioni dell'equazione (1), dovute alle combinazioni delle n differenti radici n^{esime} dei vari autovalori della fun-

(*) Effettivamente esistono pure soluzioni dell'equazione (1) aventi autofunzioni non reali, aventi cioè autofunzioni di cui la parte reale e la parte immaginaria, prese separatamente, non sono autofunzioni della soluzione stessa. La loro considerazione non presenta più il vantaggio di usufruire delle eleganti proprietà delle funzioni ortogonali reali e dei nuclei aventi autofunzioni tutte reali. Basterà pensare che esistono dei nuclei simmetrici non aventi autofunzioni tutte reali, i cui nuclei reiterati sono tutti identicamente nulli.

Per darne un esempio semplicissimo, si considerino due funzioni reali $\varphi(x)$, $\psi(x)$ del campo $\overline{a, b}$ normalizzate, cioè tali che si abbia:

$$\int_a^b \left\{ \varphi(x) \right\}^2 dx = 1, \quad \int_a^b \left\{ \psi(x) \right\}^2 dx = 1, \quad \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0;$$

e si costruisca il nucleo simmetrico:

$$K(x, y) = \left\{ \varphi(x) + i\psi(x) \right\} \left\{ \varphi(y) + i\psi(y) \right\}.$$

Si ha, ovviamente:

$$K_2(x, y) = \left\{ \varphi(x) + i\psi(x) \right\} \left\{ \varphi(y) + i\psi(y) \right\} \int_a^b \left\{ \varphi(\xi) + i\psi(\xi) \right\} \left\{ \varphi(\xi) + i\psi(\xi) \right\} d\xi = 0.$$

Nel presente lavoro le autofunzioni saranno supposte sempre reali, a meno che in qualche punto non risulti il contrario o non si supponga esplicitamente il contrario.

zione $H(x, y)$; e queste soluzioni possono sempre aggrupparsi in sistemi di n funzioni ciascuno, aventi la particolarità che le n funzioni di un sistema si possono ottenere da una qualunque di esse moltiplicandola successivamente per le n radici n^{esime} dell'unità. Un sistema cosiffatto di soluzioni dell'equazione (1) sarà detto *ciclico*.

Evidentemente il problema generale così risolto equivale al problema della risoluzione generale dell'equazione binomia di grado n , e la proprietà di cui godono le n funzioni di un sistema ciclico di soluzioni dell'equazione (1) è identica alla proprietà di cui godono le n soluzioni dell'equazione binomia di grado n .

2. Più in generale, nell'indirizzo della teoria algebrica delle funzioni permutabili istituita dal prof. VOLTERRA (*) e ulteriormente sviluppata dal D.^r EVANS (**), ci si può proporre la risoluzione, per mezzo di funzioni $K(x, y)$ (nuclei), aventi autofunzioni tutte reali, dell'equazione funzionale di 2.^a specie:

$${}^*a_0 \dot{K}_n(x, y) + {}^*a_1 \dot{K}_{n-1}(x, y) + \dots + {}^*a_{n-1} \dot{K}_1(x, y) + a_n(x, y) = 0, \quad (2)$$

dove, conformemente alla notazione introdotta dal prof. VOLTERRA (***), si è posto:

$${}^*a_i \dot{K}_{n-i}(x, y) = \int_a^b a_i(x, \eta) K_{n-i}(\eta, y) d\eta. \quad (3)$$

L'equazione (2) è stata risolta in un caso assai interessante dal prof. VOLTERRA (****). Volendo approfondire la questione generale della risoluzione di questa equazione nella sola ipotesi che tutte le funzioni che entrano in considerazione siano simmetriche, è necessario, secondo il concetto del D.^r EVANS, formulare le operazioni che intendiamo sostituire alle ordinarie operazioni dell'algebra (*_{*}). A tal uopo faremo le seguenti convenzioni:

(*) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIX, serie 5.^a, 1.^o sem. 1910, pp. 169-180).

(**) *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili* (Memorie della R. Acc. dei Lincei, serie 5.^a, vol. VIII, anno 1911, pp. 7-20).

(***) l. c., § 8.

(****) *Sopra le funzioni permutabili di 2.^a specie e le equazioni integrali* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XX, serie 5.^a, 1.^o sem. 1911, pp. 521-527).

(*_{*}) G. C. EVANS, l. c., § 1.

1.^o all'addizione e sottrazione si sostituiscano rispettivamente le ordinarie operazioni di addizione e sottrazione delle funzioni;

2.^o alla moltiplicazione si sostituisca l'operazione di composizione di 2.^a specie di VOLTERRA, espressa analiticamente dalla (3), ed alla proprietà commutativa della moltiplicazione si sostituisca l'altra:

$$*a* \ddot{b}(x, y) = \ddot{b} *a*(x, y),$$

ossia, secondo la nomenclatura del prof. VOLTERRA, la proprietà della permutabilità;

3.^o alla divisione si sostituisca la risoluzione dell'equazione integrale di 1.^a specie a limiti costanti;

4.^o alla risoluzione dell'equazione binomia si sostituisca la risoluzione dell'equazione (1).

Osserviamo anzitutto che, in virtù della 1.^a convenzione, alle espressioni che occorrerà considerare sono applicabili tutte le proprietà dell'addizione e della sottrazione; e si può osservare, in particolare, che la moltiplicazione di un numero intero per una quantità costante risulterà qui sostituita dalla moltiplicazione di un numero intero per una funzione.

In virtù poi della 2.^a convenzione, all'innalzamento a potenza verrà sostituita l'operazione di reiterazione delle funzioni; e, conformemente alla seconda parte di questa medesima convenzione, tutte le volte che per la risoluzione di un problema avremo determinata una certa funzione incognita, la quale si è supposta permutabile con altre funzioni, occorrerà verificare se essa soddisfa effettivamente alle presupposte condizioni di permutabilità.

In causa della 3.^a convenzione, l'operazione inversa della composizione non è sempre possibile; perchè devono ogni volta essere verificate le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle soluzioni delle equazioni integrali di 1.^a specie a limiti costanti (*). Quando queste condizioni sono verificate l'operazione si può sempre eseguire, ossia la funzione incognita può sempre scriversi, mediante la regola indicata al § 4 della mia Nota testè citata.

Similmente non è sempre possibile eseguire l'operazione da sostituire alla risoluzione delle equazioni binomie; perchè, infatti, ogni volta deve essere

(*) LAURICELLA, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1.^a specie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XX, serie 5.^a, 1.^o sem. 1911, pp. 528-536).

soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente, accennata al numero precedente, per l'esistenza di soluzioni dell'equazione (1).

Osserviamo ancora che, supposte verificate sempre le condizioni che hanno origine dalle *quattro* convenzioni testè fatte, e supposto inoltre di sostituire al sistema di soluzioni di un'equazione binomia, un qualunque sistema ciclico di soluzioni dell'equazione (1), potrà realizzarsi un'algebra perfettamente analoga all'algebra ordinaria. In particolare, per approfondire il problema della risoluzione dell'equazione funzionale (2), potrà applicarsi, senza modificazioni sostanziali, la teoria di GALOIS; e per effettuare la risoluzione della medesima equazione, nei casi in cui questa può eseguirsi operando sulle funzioni note $a_0(x, y), a_1(x, y), \dots, a_n(x, y)$ mediante le quattro operazioni precedentemente formulate, potrà similmente applicarsi la teoria delle risolventi di LAGRANGE.

Naturalmente bisognerà ogni volta, a calcoli compiuti, e possibilmente anche *a priori*, verificare se le condizioni di permutabilità e le condizioni richieste per eseguire le operazioni inverse indicate nelle convenzioni 3.^a e 4.^a sono verificate; oppure bisognerà fissare ogni volta quali condizioni devono essere verificate in proposito dalle funzioni che nel problema considerato si suppongono note. Le condizioni che in tal modo vengono a trovarsi per le funzioni note, o supposte tali, sono condizioni necessarie e sufficienti da aggiungersi a quelle che la teoria di GALOIS suggerisce per la risolubilità delle equazioni della forma (2) mediante le quattro operazioni elementari anzidette; e l'analisi per eseguire tali operazioni è da aggiungersi all'analisi che la teoria delle risolventi di LAGRANGE suggerisce per eseguire, nei casi in cui è possibile, la risoluzione dell'equazione (2).

Tutte queste considerazioni di indole generale saranno qui illustrate risolvendo l'equazione (2) nei casi di $n = 2, 3$.

Noteremo in fine che i risultati qui contenuti, oltre che per le funzioni di due variabili indipendenti, valgono senz'altro per le funzioni di un numero pari qualsiasi di variabili indipendenti.

CAPITOLO I.

Equazioni integrali binomie.

§ 1.

TEOREMI SUGLI AUTOVALORI E SULLE AUTOFUNZIONI DEI NUCLEI REITERATI.

3. Sia $K(x, y)$ un nucleo simmetrico, reale o no, definito nel campo $\overline{a b} = \{a \leq x \leq b\}$, e sia $K^{(n)}(x, y)$ il suo reiterato di ordine n . *Esistano per ipotesi una funzione $\varphi(x)$ del campo $\overline{a b}$ e una costante λ tale che sia:*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy;$$

si avrà allora:

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, y) \varphi(y) dy.$$

4. *Supponiamo che esistano una funzione $\psi(x)$ nel campo $\overline{a b}$ ed una costante reale μ tale che sia:*

$$\psi(x) = \mu^n \int_a^b K^{(n)}(x, y) \psi(y) dy.$$

Indicata con ε , una generica radice n^{esima} dell'unità e posto con SCHMIDT (*):

$$\left. \begin{aligned} n \varphi_\nu(x) = & \psi(x) + \varepsilon \int_a^b K(x, y) \psi(y) dy + \\ & + \varepsilon^2 \mu^2 \int_a^b K^2(x, y) \psi(y) dy + \dots + \varepsilon^{n-1} \mu^{n-1} \int_a^b K^{(n-1)}(x, y) \psi(y) dy, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

risulterà

$$\psi(x) = \sum_1^n \varphi_\nu(x), \quad (5)$$

(*) *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* (Math. Annalen, B. LXIII, pp. 433-476).

$$\varphi_\nu(x) = \varepsilon_\nu \mu \int_a^b K(x, y) \varphi_\nu(y) dy. \quad (6)$$

Osserviamo che non tutte le $\varphi_\nu(x)$ possono essere identicamente nulle, in virtù della (5); per cui se ne conclude che *esisteranno n funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, non tutte identicamente nulle, che si possono esprimere mediante la formola (4), le quali sono soluzioni delle equazioni (6), e sono legate alla funzione $\psi(x)$ dalla relazione (5).*

5. Siano: μ una costante, $\varepsilon = \pm 1$ una radice n^{esima} dell'unità, t_σ un numero intero positivo o nullo non superiore ad $n - 1$, e $\varphi_\sigma(x)$ una funzione tale che si abbia:

$$\varphi_\sigma(x) = \varepsilon^{t_\sigma} \mu \int_a^b K(x, y) \varphi_\sigma(y) dy. \quad (7)$$

Vogliamo dimostrare che *tra le diverse $\varphi_\sigma(x)$, corrispondenti ai possibili valori di t_σ , per cui le corrispondenti espressioni ε^{t_σ} siano tutte differenti tra di loro, non esiste alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.*

Infatti siano t_1, t_2, \dots, t_j valori di t_σ tali che $\varepsilon^{t_1}, \varepsilon^{t_2}, \dots, \varepsilon^{t_j}$ siano numeri tutti disuguali e che, per le corrispondenti $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_j(x)$, si abbia in tutto il campo \overline{ab} :

$$a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_j \varphi_j(x) = 0, \quad (8)$$

con a_1, a_2, \dots, a_j coefficienti costanti diversi da zero. Moltiplichiamo ambo i membri della (7) per $a_\sigma \varepsilon^{n-t_\sigma}$, facciamo successivamente $\sigma = 1, 2, \dots, j$, e sommiamo membro a membro le equazioni che così si ottengono. Tenendo conto dell'equazione $\varepsilon^n = 1$, risulterà:

$$\sum_1^j a_\sigma \varepsilon^{n-t_\sigma} \varphi_\sigma(x) = \mu \int_a^b K(x, y) \sum_1^j a_\sigma \varphi_\sigma(y) dy = 0. \quad (8')$$

Similmente si moltiplichino ambo i membri della (7) per $a_\sigma \varepsilon^{2(n-t_\sigma)}$, si faccia successivamente $\sigma = 1, 2, \dots, j$ e poi si sommi membro a membro. Si otterrà:

$$\sum_1^j a_\sigma \varepsilon^{2(n-t_\sigma)} \varphi_\sigma(x) = \mu \int_a^b K(x, y) \sum_1^j a_\sigma \varepsilon^{n-t_\sigma} \varphi_\sigma(y) dy = 0. \quad (8'')$$

Seguitando sempre nella stessa guisa, si avrà in tutto il campo \overline{ab} :

$$\sum_1^j a_\sigma \varphi_\sigma(x) = 0, \quad \sum_1^j a_\sigma \varepsilon^{n-t_\sigma} \varphi_\sigma(x) = 0, \dots, \quad \sum_1^j a_\sigma \varepsilon^{(j-1)(n-t_\sigma)} \varphi_\sigma(x) = 0. \quad (8''')$$

Il valore del determinante dei coefficienti di questo sistema di equazioni lineari omogenee nelle $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_j(x)$ è uguale a

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon^{n-t_1} & \varepsilon^{n-t_2} & \dots & \varepsilon^{n-t_j} \\ \varepsilon^{2(n-t_1)} & \varepsilon^{2(n-t_2)} & \dots & \varepsilon^{2(n-t_j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon^{(j-1)(n-t_1)} & \varepsilon^{(j-1)(n-t_2)} & \dots & \varepsilon^{(j-1)(n-t_j)} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \prod_{r,s} (\varepsilon^{n-t_r} - \varepsilon^{n-t_s}), \quad (r \neq s);$$

ed è diverso da zero; quindi dovrà aversi in tutto il campo $\overline{a\bar{b}}$:

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_j(x) = 0;$$

e questo dimostra appunto il teorema enunciato.

Da questo teorema risulta come corollario che, se il nucleo $K(x, y)$ ammette m_1 autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti all'autovalore μ , m_2 corrispondenti all'autovalore $\varepsilon \mu$, m_3 all'autovalore $\varepsilon^2 \mu, \dots, m_n$ all'autovalore $\varepsilon^{n-1} \mu$, queste $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ autofunzioni saranno linearmente indipendenti.

6. Indichiamo con m il numero delle autofunzioni del nucleo $K^{(n)}(x, y)$ corrispondenti all'autovalore μ^n . Poichè, come fu osservato al n.º 3, le $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo $K(x, y)$, di cui è parola nel corollario precedente, sono ancora autofunzioni del nucleo $K^{(n)}(x, y)$, dovrà aversi:

$$m \geq m_1 + m_2 + \dots + m_n. \tag{8*}$$

D'altra parte, indicando con $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$ le anzidette m autofunzioni di $K^{(n)}(x, y)$, in virtù del risultato al n.º 4, si potrà scrivere:

$$\psi_t(x) = \sum_1^n \varphi_{t\nu}(x), \quad (t = 1, 2, \dots, m), \tag{9}$$

e le $\varphi_{t\nu}(x)$ saranno autofunzioni del nucleo $K(x, y)$, corrispondenti agli autovalori della forma $\varepsilon \mu$, alcune delle quali possono eventualmente essere identicamente nulle in tutto il campo $\overline{a\bar{b}}$. Notiamo che, essendo le $m \times n$ funzioni $\varphi_{t\nu}(x)$ autofunzioni del nucleo $K^{(n)}(x, y)$ corrispondenti all'autovalore

lore μ^n , non potranno essere tutte linearmente indipendenti, ma dovranno essere legate da $n(n-1)$ relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti e linearmente indipendenti. Notiamo ancora che, all'infuori di queste relazioni, non potrà sussisterne alcun'altra della medesima natura; perchè altrimenti, in virtù delle (9), le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$ non sarebbero linearmente indipendenti, contrariamente all'ipotesi fatta. Quindi m ed m solamente delle $m \times n$ funzioni $\varphi_{tv}(x)$ saranno linearmente indipendenti; e perciò sarà:

$$m \leq m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Questa e la (8*) ci dànno finalmente:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Dalle (9) si possono poi ricavare le m funzioni $\varphi_{tv}(x)$ che sono linearmente indipendenti, espresse linearmente ed omogeneamente per le m funzioni $\psi_i(x)$.

Riassumendo, si ha il seguente teorema: *Sia $K(x, y)$ un nucleo (non necessariamente reale), il quale abbia per reiterato di ordine n la funzione $K^{(n)}(x, y)$. Se $K^{(n)}(x, y)$ ammette m autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti all'autovalore μ^n ed m solamente, il nucleo $K(x, y)$ avrà m autofunzioni linearmente indipendenti ed m solamente, corrispondenti complessivamente agli n autovalori $\varepsilon_1 \mu, \varepsilon_2 \mu, \dots, \varepsilon_n \mu$, essendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ le radici n^{esime} dell'unità; e viceversa. Le m autofunzioni del nucleo $K(x, y)$ si esprimono linearmente ed omogeneamente mediante le m autofunzioni del nucleo $K^{(n)}(x, y)$.*

È ovvio che se le autofunzioni di $K^{(n)}(x, y)$ sono normalizzate e le autofunzioni di $K(x, y)$ sono pure normalizzate, i coefficienti delle espressioni lineari, di cui è parola nel teorema precedente, costituiscono gli elementi di una sostituzione lineare.

7. Se $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione:

$$\int_a^b K(x, y) \psi(y) dy = 0, \tag{10}$$

ovvero, come può dirsi, se $\psi(x)$ è autofunzione del nucleo $K(x, y)$ corrispondente all'autovalore $\lambda = \infty$, sarà:

$$\int_a^b K^{(n)}(x, y) \psi(y) dy = 0. \tag{10'}$$

Viceversa, indichiamo con $\theta(x)$ una soluzione dell'equazione (10'), e formiamo la serie:

$$\left. \begin{aligned} \theta(x), \int_a^b K(x, y) \theta(y) dy, \dots, \int_a^b K^{(n-2)}(x, y) \theta(y) dy, \\ \int_a^b K^{(n-1)}(x, y) \theta(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Indichiamo con $\psi(x)$ la prima di queste funzioni che non sia identicamente nulla in tutto il campo \overline{ab} . Questa funzione esisterà certamente, perchè per lo meno coinciderà con la $\theta(x)$; e, come è ovvio, soddisferà all'equazione (10).

8. Vogliamo ora dimostrare che se il nucleo

$$K(x, y) = K'(x, y) + i K''(x, y)$$

è simmetrico, se le soluzioni dell'equazione (10) sono tutte reali, nel senso cioè che la parte reale e la parte immaginaria di una qualsiasi soluzione $\psi(x)$ dell'equazione (10) sono separatamente soluzioni della medesima equazione, e se $\theta(x)$ è una generica soluzione dell'equazione (10'), si avrà per $t = n - 1, n - 2, \dots, 1$:

$$\int_a^b K^{(t)}(x, y) \theta(y) dy = 0.$$

Infatti, supposto:

$$\int_a^b K^{(t+1)}(x, y) \theta(y) dy = 0,$$

e posto:

$$\int_a^b K^{(t)}(x, y) \theta(y) dy = \psi'(x) + i \psi''(x) = \psi(x), \quad (12)$$

si avrà, in virtù dell'ipotesi fatta,

$$\int_a^b K(x, y) \psi'(y) dy = 0, \quad \int_a^b K(x, y) \psi''(y) dy = 0;$$

ed a fortiori:

$$\int_a^b K^{(t)}(x, y) \psi'(y) dy = 0, \quad \int_a^b K^{(t)}(x, y) \psi''(y) dy = 0. \quad (13)$$

Da queste risulta, in virtù della supposta simmetria e della posizione (12),

$$\begin{aligned} \int_a^b \left\{ \psi(x) \right\}^2 dx &= \int_a^b \left\{ \psi'(x) \right\}^2 dx - \int_a^b \left\{ \psi''(x) \right\}^2 dx + 2i \int_a^b \psi'(x) \psi''(x) dx = \\ &= \int_a^b \int_a^b K^{(t)}(x, y) \theta(y) \psi(x) dx dy = \int_a^b \theta(y) dy \int_a^b K^{(t)}(x, y) \psi(x) dx = 0; \end{aligned}$$

e per conseguenza :

$$\int_a^b \left\{ \psi'(x) \right\}^2 dx = \int_a^b \left\{ \psi''(x) \right\}^2 dx, \quad \int_a^b \psi'(x) \psi''(x) dx = 0. \quad (14)$$

Per altro si ha, dalla (12) e dalla prima delle (13):

$$\int_a^b \psi'(x) \psi(x) dx = \int_a^b \int_a^b K^{(v)}(x, y) \theta(y) \psi'(x) dx dy = 0;$$

e quindi, tenuto conto delle (14), si avrà :

$$\int_a^b \left\{ \psi'(x) \right\}^2 dx = 0, \quad \int_a^b \left\{ \psi''(x) \right\}^2 dx = 0,$$

ossia :

$$\int_a^b K^{(v)}(x, y) \theta(y) dy = 0,$$

c. d. d.

Questo risultato e quello del numero precedente ci danno: *se il nucleo* $K(x, y) = K'(x, y) + i K''(x, y)$ *è simmetrico e se le soluzioni dell'equazione (10) sono tutte reali, nel senso dianzi spiegato, queste soluzioni coincideranno con quelle dell'equazione (10').*

§ 2.

TEOREMA GENERALE SUGLI SVILUPPI IN SERIE DI FUNZIONI ORTOGONALI.

9. Sia :

$$U_1(x, y), U_2(x, y), \dots, \quad (15)$$

una serie infinita di funzioni ortogonali reali in un campo piano finito σ di forma qualsiasi; siano cioè $U_1(x, y), U_2(x, y), \dots$ funzioni sommabili insieme ai loro quadrati e ai loro prodotti due a due, tali che si abbia :

$$\int_{\sigma} U_{\mu}(x, y) U_{\nu}(x, y) dx dy = \begin{cases} 1 & \text{per } \mu = \nu, \\ 0 & \text{per } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (16)$$

Sia ancora $K(x, y) = K_1(x, y) + i K_2(x, y)$ una funzione complessa del campo σ tale che le due funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ siano nel campo σ sommabili insieme ai loro quadrati e insieme ai prodotti di ciascuna di esse per una qualunque delle $U_t(x, y)$.

Posto :

$$\alpha_t = \int_{\sigma} K_1(x, y) U_t(x, y) dx dy,$$

$$\beta_t = \int_{\sigma} K_2(x, y) U_t(x, y) dx dy,$$

sarà :

$$\alpha_t = \int_{\sigma} K(x, y) U_t(x, y) dx dy = \alpha_t + i \beta_t,$$

$$0 \leq \int_{\sigma} \left\{ K_1(x, y) - \sum_1^m \alpha_t U_t(x, y) \right\}^2 dx dy = \int_{\sigma} \left\{ K_1(x, y) \right\}^2 dx dy - \sum_1^m \alpha_t^2,$$

$$0 \leq \int_{\sigma} \left\{ K_2(x, y) - \sum_1^m \beta_t U_t(x, y) \right\}^2 dx dy = \int_{\sigma} \left\{ K_2(x, y) \right\}^2 dx dy - \sum_1^m \beta_t^2.$$

Dalle due ultime formole risulta intanto la convergenza delle due serie $\sum_1^{\infty} \alpha_t^2$, $\sum_1^{\infty} \beta_t^2$; sicchè, posto :

$$f_p(x, y) = \sum_1^p \alpha_t U_t(x, y),$$

si avrà che la serie :

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots$$

è convergente in media nel campo σ . Allora, in virtù del teorema di WEYL, sarà possibile determinare (ed in infiniti modi) una serie di numeri, interi e positivi e crescenti indefinitamente, n_1, n_2, \dots , in modo che la serie :

$$F_1(x, y) = \sum_1^{n_1} \alpha_t U_t(x, y) + \sum_{n_1+1}^{n_2} \alpha_t U_t(x, y) + \dots \quad (17)$$

sia in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale.

Ciò premesso, si ponga :

$$V_{\tau}(x, y) = \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_{\tau}} \beta_t U_t(x, y), \quad \Phi_q(x, y) = \sum_1^q V_{\tau}(x, y).$$

Sarà, in virtù della (16),

$$\int_{\sigma} \left\{ V_{\tau}(x, y) \right\}^2 dx dy = \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_{\tau}} \beta_i^2, \quad \int_{\sigma} V_{\tau}(x, y) V_{\theta}(x, y) dx dy = 0;$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \left\{ \Phi_{q+\omega}(x, y) - \Phi_q(x, y) \right\}^2 dx dy &= \int_{\sigma} \left\{ \sum_{q+1}^{q+\omega} V_{\tau}(x, y) \right\}^2 dx dy = \\ &= \sum_{q+1}^{q+\omega} \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_{\tau}} \beta_i^2 = \sum_{n_q+1}^{n_{q+\omega}} \beta_i^2. \end{aligned}$$

Da quest'ultima uguaglianza risulta, avuto riguardo alla convergenza della serie $\sum_1^{\infty} \beta_i^2$, che la serie:

$$\Phi_1(x, y), \quad \Phi_2(x, y), \dots$$

è convergente in media nel campo σ ; quindi, in virtù del teorema di WEYL, potrà determinarsi (ed in infiniti modi) una serie di numeri, interi positivi e crescenti indefinitamente, ν_1, ν_2, \dots , in modo che la serie:

$$\begin{aligned} F_2(x, y) &= \sum_1^{\nu_1} V_{\tau}(x, y) + \sum_{\nu_1+1}^{\nu_2} V_{\tau}(x, y) + \dots = \\ &= \sum_1^{\nu_1} \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_{\tau}} \beta_i U_i(x, y) + \sum_{\nu_1+1}^{\nu_2} \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_{\tau}} \beta_i U_i(x, y) + \dots = \\ &= \sum_1^{n_{\nu_1}} \beta_i U_i(x, y) + \sum_{n_{\nu_1}+1}^{n_{\nu_2}} \beta_i U_i(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

sia in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale.

In virtù della dimostrata convergenza della serie (17) si avrà a fortiori che la serie:

$$F_1(x, y) = \sum_1^{n_{\nu_1}} \alpha_i U_i(x, y) + \sum_{n_{\nu_1}+1}^{n_{\nu_2}} \alpha_i U_i(x, y) + \dots \quad (17')$$

è in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale; e quindi, in fine, che anche la serie:

$$F(x, y) = \sum_1^{n_{\nu_1}} a_i U_i(x, y) + \sum_{n_{\nu_1}+1}^{n_{\nu_2}} a_i U_i(x, y) + \dots \quad (19)$$

è convergente uniformemente in generale in tutto il campo σ .

10. Moltiplicando ambo i membri delle (17), (18) per $U_i(x, y)$ ed integrando per serie, si ha :

$$\int_{\sigma} F_1(x, y) U_i(x, y) dx dy = \alpha_i, \quad \int_{\sigma} F_2(x, y) U_i(x, y) dx dy = \beta_i;$$

e quindi :

$$\int_{\sigma} \left\{ K_1(x, y) - F_1(x, y) \right\} U_i(x, y) dx dy = 0,$$

$$\int_{\sigma} \left\{ K_2(x, y) - F_2(x, y) \right\} U_i(x, y) dx dy = 0.$$

Di qui risulta che, se la serie (15) è chiusa, si dovrà avere :

$$K_1(x, y) = F_1(x, y), \quad K_2(x, y) = F_2(x, y);$$

e quindi ancora :

$$K(x, y) = F(x, y)$$

in tutto il campo σ , eccettuati al più i punti di un insieme di misura nulla.

Supponiamo invece che la serie (15) non sia chiusa, ossia che esista una serie finita o infinita (numerabile) (*) di funzioni ortogonali :

$$\theta_1(x, y), \quad \theta_2(x, y), \dots$$

sommabili insieme ai loro prodotti con le $U_i(x, y)$, tali che

$$\int_{\sigma} \theta_{\tau}(x, y) U_i(x, y) dx dy = 0, \quad (t = 1, 2, \dots).$$

Poichè le $U_i(x, y)$ sono funzioni reali, lo stesso avverrà, o potrà farsi in modo che avvenga, delle $\theta_1(x, y), \theta_2(x, y), \dots$

Intanto perchè sia :

$$K(x, y) = F(x, y), \tag{20}$$

è necessario, in virtù della (19), che si abbia :

$$\int_{\sigma} K(x, y) \theta_{\tau}(x, y) dx dy = 0, \quad (\tau = 1, 2, \dots); \tag{21}$$

(*) Cfr. la mia Nota: *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, ecc.* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5.^a, t. XXI, 1.^o sem. 1912).

e quindi :

$$\left. \begin{aligned} \int_{\sigma} K_1(x, y) \theta_{\tau}(x, y) dx dy = 0, \quad \int_{\sigma} K_2(x, y) \theta_{\tau}(x, y) dx dy = 0, \\ (\tau = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Viceversa, se la (21), e conseguentemente anche le (22), sono soddisfatte, sarà (*) :

$$K_1(x, y) = F_1(x, y), \quad K_2(x, y) = F_2(x, y);$$

e quindi sarà verificata la (20).

Adunque nel caso che la serie (15) non sia chiusa, condizione necessaria e sufficiente affinchè sia verificata la (20) è che la funzione $K(x, y)$ soddisfaccia alle condizioni (21). Riepilogando si ha il seguente teorema : se la funzione $K(x, y)$ ha la parte reale e la parte immaginaria separatamente sommabili, insieme ai loro quadrati e insieme ai prodotti di ciascuna di esse per una qualsiasi delle $U_i(x, y)$, in tutto il campo σ , e se, nel caso in cui la serie (15) non è chiusa, soddisfa inoltre, come è necessario, alle condizioni (21), sarà sempre possibile, ed in infiniti modi, determinare una serie di numeri, interi positivi e crescenti indefinitamente n_1, n_2, \dots , in modo tale che si abbia :

$$K(x, y) = \sum_1^{n_1} \alpha_i U_i(x, y) + \sum_{n_1+1}^{n_2} \alpha_i U_i(x, y) + \dots,$$

e che la serie al secondo membro sia in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale.

§ 3.

SVILUPPO DI UN NUCLEO IN SERIE DELLE CORRISPONDENTI AUTOFUNZIONI.

11. Premettiamo il seguente teorema : se le due serie ortogonali del campo \overline{ab} :

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots; \quad \psi_1(x), \psi_2(x), \dots \quad (23)$$

(*) Cfr. la mia citata Nota : *Sopra i nuclei reiterati*, § 2.

sono reali e chiuse, la serie :

$$u_{r,s}(x, y) = \varphi_r(x) \psi_s(y) \quad (r, s = 1, 2, \dots) \quad (24)$$

sarà nel campo $\sigma = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ pure ortogonale e chiusa.

Infatti osserviamo anzitutto che si ha ovviamente :

$$\int_a^b \int_a^b u_{r,s}(x, y) u_{r',s'}(x, y) dx dy = \begin{cases} 1 & \text{per } r = r', s = s', \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi.} \end{cases}$$

E con ciò è dimostrata l'ortogonalità della serie (24).

Per dimostrare poi che questa serie è chiusa, basterà dimostrare che qualunque funzione reale $f(x, y)$ sommabile insieme al suo quadrato nel campo σ , e sommabile nel campo \overline{ab} rispetto ad y per ogni valore di x , e rispetto ad x per ogni valore di y , la quale soddisfa alle infinite equazioni :

$$\int_a^b \int_a^b f(x, y) u_{r,s}(x, y) dx dy = 0, \quad (r, s = 1, 2, \dots), \quad (25)$$

è identicamente nulla nel campo σ , esclusi al più i punti di un insieme di misura piana nulla.

Intanto, scritta la (25) sotto la forma :

$$\int_a^b \varphi_r(x) dx \int_a^b f(x, y) \psi_s(y) dy = 0, \quad (25')$$

risulta, in virtù della chiusura della prima delle due serie (23),

$$\int_a^b f(x, y) \psi_s(y) dy = 0, \quad (s = 1, 2, \dots),$$

per tutti i valori di x del campo ab , eccezione fatta al più per i punti di un insieme di misura nulla; e quindi, in virtù della chiusura della seconda delle serie (23), sarà per ciascuno dei detti valori di x :

$$f(x, y) = 0,$$

per tutti i valori di y nel campo \overline{ab} , ogni volta escluso al più un insieme di valori di misura nulla. Allora potremo scrivere, per ciascuno dei medesimi valori di x :

$$\int_a^b \left\{ f(x, y) \right\}^2 dy = 0;$$

e quindi ancora :

$$\int_a^b \int_a^b \left\{ f(x, y) \right\}^2 dx dy = 0,$$

c. d. d.

12. Sia $K(x, y) = K'(x, y) + i K''(x, y)$ una funzione tale che $K'(x, y)$, $K''(x, y)$ siano sommabili insieme ai loro quadrati nel campo

$$\sigma = \left\{ a \leq x \leq b, a \leq y \leq b \right\},$$

ed ammetta essa come autofunzioni gli elementi di due serie di funzioni ortogonali reali e chiuse, i corrispondenti autovalori (dei quali intendiamo che eventualmente possa far parte il valore ∞) potendo essere in tutto od in parte non reali.

Siano :

$$\varphi_1(x), \psi_1(y); \quad \varphi_2(x), \psi_2(y); \dots$$

le coppie di autofunzioni corrispondenti rispettivamente agli autovalori finiti:

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + i \lambda''_1, \quad \lambda_2 = \lambda'_2 + i \lambda''_2, \dots,$$

ossia si abbia :

$$\varphi_p(x) = \lambda_p \int_a^b K(x, y) \psi_p(y) dy,$$

$$\psi_p(y) = \lambda_p \int_a^b K(x, y) \varphi_p(x) dx;$$

e siano :

$$t_1(x), t_2(x), \dots; \quad \tau_1(y), \tau_2(y), \dots$$

le eventuali autofunzioni corrispondenti all'autovalore ∞ , ossia le eventuali funzioni per le quali si abbia :

$$\int_a^b K(x, y) t_q(x) dx = 0,$$

$$\int_a^b K(x, y) \tau_q(y) dy = 0;$$

ed inoltre siano le due serie :

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, t_1(x), t_2(x), \dots;$$

$$\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \tau_1(y), \tau_2(y), \dots,$$

conformemente all'ipotesi fatta sopra, ortogonali e chiuse.

Posto :

$$u_p(x, y) = \varphi_p(x) \psi_p(y),$$

$$\theta_m(x, y) = \begin{cases} \varphi_i(x) \tau_j(y), \\ t_i(x) \psi_j(y), \\ t_i(x) \tau_i(y), \end{cases}$$

in virtù del teorema precedente, le due serie:

$$u_1(x, y), u_2(x, y), \dots; \quad \theta_1(x, y), \theta_2(x, y), \dots$$

insieme prese costituiranno nel campo σ una serie ortogonale e chiusa, e sarà :

$$\alpha_p = \int_a^b \int_a^b K(x, y) u_p(x, y) dx dy = \frac{1}{\lambda_p},$$

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y) \theta_m(x, y) dx dy = 0.$$

Di qui avremo, conformemente al risultato del n.º 10 (paragrafo precedente), che è sempre possibile ed in infiniti modi, determinare una serie di numeri, interi positivi e crescenti indefinitamente, m_1, m_2, \dots , in modo che si abbia :

$$K(x, y) = \sum_1^{m_1} \frac{\varphi_p(x) \psi_p(y)}{\lambda_p} + \sum_{m_1+1}^{m_2} \frac{\varphi_p(x) \psi_p(y)}{\lambda_p} + \dots,$$

e che la serie al secondo membro sia in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale.

13. Da questo teorema segue, come corollario: (x) due nuclei, che hanno le parti reali e le parti immaginarie sommabili insieme ai loro quadrati nel campo σ , e che hanno i medesimi autovalori reali o complessi (l'autovalore ∞ eventualmente incluso), ai quali corrispondono come autofunzioni gli elementi di due medesime serie ortogonali reali e chiuse, coincidono.

Ciò premesso, sia :

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + i \lambda''_1, \quad \lambda_2 = \lambda'_2 + i \lambda''_2, \dots$$

una serie di costanti, alcune delle quali (in numero finito) possono anche coincidere tra di loro, tale che la serie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{|\lambda_v|^2}$ sia convergente. Alla serie λ_1 ,

λ_2, \dots si faccia corrispondere una qualsiasi coppia di funzioni ortogonali:

$$\varphi_1(x), \psi_1(y); \quad \varphi_2(x), \psi_2(y); \dots \quad (26)$$

Osserviamo che, in virtù della supposta convergenza della serie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|^2}$, saranno pure convergenti le due serie:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\lambda_\nu'^2}{|\lambda_\nu|^4}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{\lambda_\nu''^2}{|\lambda_\nu|^4};$$

e quindi, in virtù del teorema dimostrato al n.º 9, abbiamo: (β) *si può determinare, ed in infiniti modi, indipendentemente dalle (26), una serie di numeri interi positivi e crescenti indefinitamente m_1, m_2, \dots , in modo tale che la*

$$f(x, y) = \sum_1^{m_1} \frac{\varphi_\nu(x) \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \sum_{m_1+1}^{m_2} \frac{\varphi_\nu(x) \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \dots$$

sia in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale; la funzione $f(x, y)$, così determinata, ha per coppie di autofunzioni ortogonali quelle della serie (26) e per corrispondenti autovalori le $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. In forza poi del precedente teorema di unicità (α), risulta che la funzione $f(x, y)$, così determinata, è la sola funzione (di cui la parte reale e la parte immaginaria siano sommabili nel campo σ insieme ai loro quadrati), la quale abbia per coppie di autofunzioni ortogonali, corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, quelle della serie (26), e per autofunzioni, corrispondenti all'autovalore $\lambda = \infty$, quelle delle eventuali due serie rispettivamente complementari alle due serie:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x), & \quad \varphi_2(x), \dots, \\ \psi_1(x), & \quad \psi_2(x), \dots \end{aligned}$$

§ 4.

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE BINOMIA.

14. Sia $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ autovalore del nucleo, in generale non simmetrico,

$$K(x, y) = K'(x, y) + iK''(x, y);$$

e siano $\varphi(x), \psi(x)$ due funzioni reali e tali che si abbia:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \psi(y) dy, \quad \psi(x) = \lambda \int_a^b K(y, x) \varphi(y) dy.$$

Queste ultime ci dànno ovviamente:

$$\varphi(x) = \lambda' \int_a^b K'(x, y) \psi(y) dy - \lambda'' \int_a^b K''(x, y) \psi(y) dy,$$

$$0 = \lambda' \int_a^b K''(x, y) \psi(y) dy + \lambda'' \int_a^b K'(x, y) \psi(y) dy,$$

$$\psi(x) = \lambda' \int_a^b K'(y, x) \varphi(y) dy - \lambda'' \int_a^b K''(y, x) \varphi(y) dy,$$

$$0 = \lambda' \int_a^b K''(y, x) \varphi(y) dy + \lambda'' \int_a^b K'(y, x) \varphi(y) dy;$$

e quindi ancora per $\lambda' \neq 0$, $\lambda'' \neq 0$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda'^2 + \lambda''^2}{\lambda'} \int_a^b K'(x, y) \psi(y) dy,$$

$$\varphi(x) = -\frac{\lambda'^2 + \lambda''^2}{\lambda''} \int_a^b K''(x, y) \psi(y) dy,$$

$$\psi(x) = \frac{\lambda'^2 + \lambda''^2}{\lambda'} \int_a^b K'(y, x) \varphi(y) dy,$$

$$\psi(x) = -\frac{\lambda'^2 + \lambda''^2}{\lambda''} \int_a^b K''(y, x) \varphi(y) dy;$$

per $\lambda' = 0$:

$$\int_a^b K'(x, y) \psi(y) dy = 0, \quad \int_a^b K'(y, x) \varphi(y) dy = 0;$$

per $\lambda'' = 0$:

$$\int_a^b K''(x, y) \psi(y) dy = 0, \quad \int_a^b K''(y, x) \varphi(y) dy = 0.$$

15. Sia $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ la serie chiusa delle autofunzioni ortogonali, per ipotesi tutte reali, del nucleo simmetrico $H(x, y)$ (quelle corrispondenti all'eventuale autovalore $\lambda = \infty$ incluse); e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ i corrispondenti autovalori finiti, alcuni dei quali, in numero finito, possano anche essere uguali fra di loro. Sia:

$$K(x, y) = K'(x, y) + i K''(x, y)$$

una soluzione, reale o no, simmetrica e con le autofunzioni tutte reali (quelle

corrispondenti all'eventuale autovalore $\lambda = \infty$ incluse), dell'equazione :

$$K_n(x, y) = H(x, y). \tag{27}$$

La funzione $K(x, y)$ ammetterà come autovalore ν_i una almeno delle n radici n^{esime} di λ_i (cfr. n.º 6, § 1); e per conseguenza, posto :

$$\sqrt[n]{\lambda_i} = \nu_i = \mu'_i + i \mu''_i, \quad |\sqrt[n]{\lambda_i}| = \rho_i,$$

saranno (cfr. numero precedente) autovalori di $K'(x, y)$ le costanti della forma $\frac{\rho_i^2}{\mu_i^2}$ ed autovalori di $K''(x, y)$ le costanti della forma $-\frac{\rho_i^2}{\mu_i^2}$; sicchè le due serie:

$$\sum_t \frac{\mu_i'^2}{\rho_i^2}, \quad \sum_t \frac{\mu_i''^2}{\rho_i^2}$$

dovranno essere convergenti, e quindi dovrà pure essere convergente la serie :

$$\sum_t \frac{1}{\rho_i^2}. \tag{28}$$

Viceversa, supponiamo che questa serie sia convergente. Si indichino con

$$\varphi_{j\nu+1}(x), \quad \varphi_{j\nu+2}(x), \dots, \quad \varphi_{j\nu+\eta}(x)$$

le η autofunzioni ortogonali del nucleo $H(x, y)$, corrispondenti agli η autovalori uguali a λ_ν : si indichino con

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\eta} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\eta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\eta 1} & a_{\eta 2} & \dots & a_{\eta \eta} \end{array}$$

gli elementi della più generale sostituzione ortogonale di ordine η , ossia il più generale sistema di numeri a_{rs} tali che si abbia:

$$\sum_1^\eta a_{rs} a_{st} = \begin{cases} 1 & \text{per } r = s, \\ 0 & \text{per } r \neq s: \end{cases}$$

e si ponga:

$$\psi_{j\nu+r}(x) = \sum_1^\eta a_{ri} \varphi_{j\nu+i}(x).$$

Le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ costituiranno un sistema di funzioni ortogonali; e, in virtù del teorema (β), si deve poter determinare, ed in infiniti modi, indipendentemente dalle $\psi_r(x)$, una serie di numeri interi, positivi e crescenti m_1, m_2, \dots , tali che la serie:

$$K(x, y) = \sum_1^{m_1} \frac{\psi_\nu(x) \psi_\nu(y)}{\sqrt[n]{\lambda_\nu}} + \sum_{m_1+1}^{m_2} \frac{\psi_\nu(x) \psi_\nu(y)}{\sqrt[n]{\lambda_\nu}} + \dots \quad (29)$$

sia convergente uniformemente in generale nel solito campo σ ; allora la funzione $K(x, y)$, così determinata, avrà per autofunzioni le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$, corrispondenti rispettivamente agli autovalori reali o no: $\sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}, \dots$.

Essendo n i valori di $\sqrt[n]{\lambda_\nu}$, se l (il valore $l = \infty$ incluso) è il numero delle diverse λ_ν , le possibili serie di autovalori delle differenti funzioni $K(x, y)$ saranno l^n . Per ogni serie di possibili autovalori si avranno poi generalmente varii nuclei $K(x, y)$, corrispondenti ai varii sistemi delle a_{rs} , che si possono considerare. È da osservare però che non tutte le $K(x, y)$ corrispondenti a due diversi sistemi di a_{rs} , saranno differenti tra di loro. Così, supposta scomposta la serie delle λ_ν in gruppi i cui elementi hanno tutti e soli il medesimo valore, nel caso, ad esempio, in cui gli autovalori di $K(x, y)$ si scelgono in modo che quelli corrispondenti agli elementi di uno dei detti gruppi abbiano lo stesso valore, si avrà sempre il medesimo nucleo $K(x, y)$, qualunque sia il sistema delle a_{rs} ; infatti, in questo caso, le autofunzioni di $K(x, y)$, relative ad un medesimo autovalore, sono sempre una combinazione lineare delle autofunzioni di $H(x, y)$ relative agli autovalori di uno stesso gruppo. Lo stesso non si può ripetere negli altri casi; benchè anche qui, in generale, il numero delle funzioni $K(x, y)$ distinte è inferiore all'ordine di arbitrarietà dei coefficienti a_{rs} .

Comunque, poichè tutti i nuclei $K(x, y)$, dati dalla formola (29), hanno per autofunzioni le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$, i loro nuclei reiterati di ordine n , mentre hanno per autovalori le $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, avranno per autofunzioni corrispondenti le $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$, ed ancora, poichè le $\psi_t(x)$, corrispondenti ad un certo gruppo g di valori delle $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ uguali tra di loro, sono espressioni lineari omogenee delle $\varphi_j(x)$ corrispondenti allo stesso gruppo g , i cui coefficienti coincidono con gli elementi di una sostituzione ortogonale, ne segue, in virtù del teorema di unicità (α), che tutti i nuclei reiterati di ordine n , dei nuclei dati dalla formola (29), coincideranno con $H(x, y)$.

Per altro è evidente, in forza dei teoremi dei n.¹ 6, 8 ed in forza ancora del teorema di unicità (α), che qualunque nucleo $K(x, y)$, avente le autofun-

zioni tutte reali ed avente per reiterato di ordine n la funzione $H(x, y)$, deve essere incluso nella formola (29).

Riepilogando si ha: *condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione integrale binomia (27), nell'ipotesi che le autofunzioni di $H(x, y)$ siano tutte reali, sia risolubile mediante funzioni simmetriche aventi le autofunzioni ortogonali tutte reali, è che la serie (28) sia convergente; quando questa condizione è soddisfatta, si hanno infinite di tali soluzioni, tutte contenute nella formola (29).*

16. Osserviamo che se $K(x, y)$ è una soluzione dell'equazione (27), ed $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ sono le radici n^{esime} dell'unità diverse da 1, saranno pure soluzione dell'equazione (27) le funzioni:

$$\varepsilon_2 K(x, y), \quad \varepsilon_3 K(x, y), \dots, \quad \varepsilon_n K(x, y).$$

Osserviamo ancora che, se questa operazione si ripete sopra una qualunque di queste funzioni, si ottiene sempre la medesima serie di soluzioni:

$$K(x, y), \quad \varepsilon_2 K(x, y), \quad \varepsilon_3 K(x, y), \dots, \quad \varepsilon_n K(x, y)$$

ordinata diversamente.

Un sistema cosiffatto di soluzioni lo diremo *ciclico*.

In virtù delle osservazioni precedenti si ha che *due soluzioni dell'equazione (27) appartenenti a due diversi sistemi ciclici non possono mai essere uguali*; perchè altrimenti, operando su queste due soluzioni uguali nel modo anzidetto, si otterrebbe lo stesso sistema, col quale dovrebbero allora coincidere i due sistemi ciclici supposti diversi.

Osserviamo in fine che *le soluzioni dell'equazione (27), date dalla formola (29), possono scindersi in sistemi ciclici di n soluzioni ciascuno*, i quali costituiranno tutte le possibili soluzioni dell'equazione (27) aventi autofunzioni tutte reali.

CAPITOLO II.

Equazioni integrali di secondo e di terzo grado.

§ 5.

TEOREMI SULLA PERMUTABILITÀ.

17. Rammentiamo anzitutto (*) che se le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ sono permutabili, saranno permutabili le loro reiterate $p^{(m)}(x, y)$, $q^{(m)}(x, y)$; ossia se si ha :

$$\begin{aligned} \ddot{p} \ddot{q}(x, y) &= \ddot{q} \ddot{p}(x, y), \\ \text{si avrà :} \quad \ddot{p}^{(m)} \ddot{q}^{(m)}(x, y) &= \ddot{q}^{(m)} \ddot{p}^{(m)}(x, y). \end{aligned}$$

Osserviamo poi che se le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ sono permutabili, varrà la formola analoga a quella del binomio di Newton :

$$\left. \begin{aligned} \left\{ p(x, y) + q(x, y) \right\}^{(m)} &= p^{(m)}(x, y) + \binom{m}{1} \ddot{p}^{(m-1)} \ddot{q}(x, y) + \\ &+ \binom{m}{2} \ddot{p}^{(m-2)} \ddot{q}^{(2)}(x, y) + \dots + q^{(m)}(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

e l'altra :

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \left\{ p^{(n-1)}(x, \eta) + \ddot{p}^{(n-2)} \ddot{q}(x, \eta) + \ddot{p}^{(n-3)} \ddot{q}^{(2)}(x, \eta) + \dots + q^{(n-1)}(x, \eta) \right\} \\ \left\{ p(\eta, y) - q(\eta, y) \right\} d\eta &= p^{(n)}(x, y) - q^{(n)}(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Rammentiamo ancora (***) che condizione necessaria e sufficiente affinché due funzioni simmetriche $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili è che la funzione :

$$f(x, y) = \int_a^b p(x, \eta) q(\eta, y) d\eta$$

(*) VOLTERRA, *Questioni generali* . . . (l. c.).

(***) LAURICELLA, *Sopra le funzioni permutabili di 2.^a specie* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, serie 5.^a, 1.^o sem. anno 1913, pp. 331-346).

risulti simmetrica; ovvero: condizione necessaria e sufficiente affinché due funzioni simmetriche $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili è che esistano quattro funzioni $p'(x, y)$, $p''(x, y)$, $q'(x, y)$, $q''(x, y)$ tali che $p'(x, y)$, $q'(x, y)$ abbiano le stesse autofunzioni, $p'(x, y)$ sia ortogonale a $p''(x, y)$; $q'(x, y)$ a $q''(x, y)$, $q'(x, y)$ a $p''(x, y)$, $p''(x, y)$ a $q''(x, y)$, e tali ancora che sia:

$$p(x, y) = p'(x, y) + p''(x, y),$$

$$q(x, y) = q'(x, y) + q''(x, y).$$

Le autofunzioni di $f(x, y)$ sono quelle comuni a $p'(x, y)$, $q'(x, y)$.

Questo teorema equivale ancora a quest'altro: condizione necessaria e sufficiente affinché due funzioni simmetriche $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili è che esista una serie Ω di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$. Le autofunzioni di $f(x, y)$ sono quelle comuni a $p(x, y)$, $q(x, y)$.

18. Converrà rammentare pure il seguente procedimento atto a determinare una serie Ω e quindi anche le funzioni $p'(x, y)$, $p''(x, y)$, $q'(x, y)$, $q''(x, y)$.

Si indichi con $f(x, y)$ il risultato della composizione di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$, con P'' l'insieme delle autofunzioni $\varphi_\lambda(x)$ di $p(x, y)$ tali che

$$\int_a^b f(x, y) \varphi_\lambda(x) dx = 0,$$

con Π'' il corrispondente insieme di autovalori, con Q'' l'insieme delle autofunzioni $\psi_\mu(x)$ di $q(x, y)$ tali che

$$\int_a^b f(x, y) \psi_\mu(x) dx = 0,$$

con X'' il corrispondente insieme di autovalori. Si formino due funzioni simmetriche aventi rispettivamente una per autofunzioni le funzioni dell'insieme P'' e per corrispondenti autovalori quelli dell'insieme Π'' , un'altra per autofunzioni le funzioni dell'insieme Q'' e per corrispondenti autovalori quelli dell'insieme X'' . Le funzioni, così formate, sono appunto le richieste funzioni $p''(x, y)$, $q''(x, y)$.

Siano $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... le autofunzioni di $p(x, y)$ non comuni a $p''(x, y)$, e p_1 , p_2 , ... i corrispondenti autovalori; e siano $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... le autofunzioni di $q(x, y)$ non comuni a $q''(x, y)$, e q_1 , q_2 , ... i corrispondenti au-

tovalori. Supponiamo, in generale, che sia :

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{t_1} = p'_1, \quad p_{t_1+1} = p_{t_1+2} = \dots = p_{t_1+t_2} = p'_2, \dots,$$

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{\tau_1} = q'_1, \quad q_{\tau_1+1} = q_{\tau_1+2} = \dots = q_{\tau_1+\tau_2} = q'_2, \dots;$$

e poniamo :

$$H_1(x, y) = \frac{1}{p'_1} \sum_1^{t_1} \varphi_\nu(x) \varphi_\mu(y), \quad H_2(x, y) = \frac{1}{p'_2} \sum_{t_1+1}^{t_1+t_2} \varphi_\mu(x) \varphi_\mu(y), \dots;$$

$$K_1(x, y) = \frac{1}{q'_1} \sum_1^{\tau_1} \psi_\mu(x) \psi_\mu(y), \quad K_2(x, y) = \frac{1}{q'_2} \sum_{\tau_1+1}^{\tau_1+\tau_2} \psi_\mu(x) \psi_\mu(y), \dots;$$

$$\ddot{H}_r, \ddot{K}_s(x, y) = f_{rs}(x, y).$$

L'insieme F delle autofunzioni di tutte le diverse $f_{rs}(x, y)$ è appunto l'insieme delle autofunzioni comuni a $p(x, y)$ e a $q(x, y)$, ovvero l'insieme delle autofunzioni appartenenti ai tre nuclei $p'(x, y)$, $q'(x, y)$, $f(x, y)$; e si avrà :

$$\Omega = F + P'' + Q''.$$

§ 6.

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE DI 2.^o GRADO.

19. Proponiamoci di risolvere l'equazione integrale di 2.^o grado :

$$K^{(2)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}(x, y) + q(x, y) = 0, \quad (32)$$

mediante nuclei simmetrici $K(x, y)$ aventi autofunzioni tutte reali, nell'ipotesi che $p(x, y)$ e $q(x, y)$ siano funzioni simmetriche ad autofunzioni tutte reali.

Supposta l'esistenza di una soluzione $K_1(x, y)$ simmetrica dell'equazione (32), ossia se si ha :

$$K_1^{(2)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}_1(x, y) + q(x, y) = 0, \quad (32')$$

si avrà :

$$\ddot{p} K_1(x, y) = -K_1^{(2)}(x, y) - q(x, y) = f(x, y),$$

con $f(x, y)$ funzione simmetrica come le funzioni $K_1^{(2)}(x, y)$ e $q(x, y)$ che la compongono, quindi si ha: *qualunque soluzione simmetrica dell'equazione (32) è permutabile con la funzione $p(x, y)$.*

In virtù della dimostrata permutabilità di $p(x, y)$ e di $K_1(x, y)$, segue che $p(x, y)$ è permutabile con la funzione

$$q(x, y) = -K_1^{(2)}(x, y) - \ddot{p} \ddot{K}_1(x, y),$$

ossia se l'equazione (32') ammette una soluzione simmetrica, $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono permutabili.

Notiamo ancora che se l'equazione (32') ammette una soluzione $K_1(x, y)$, ammetterà pure l'altra soluzione:

$$K_2(x, y) = -p(x, y) - K_1(x, y). \quad (33)$$

Infatti si ha:

$$K_2^{(2)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}_2(x, y) + q(x, y) = K_1^{(2)}(x, y) + 2\ddot{p} \ddot{K}_1(x, y) + p^{(2)}(x, y) - \\ - \ddot{p} \left\{ \ddot{p}(x, y) + K_1(x, y) \right\} + q(x, y) = K_1^{(2)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}_1(x, y) + q(x, y) = 0.$$

Due soluzioni cosiffatte $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ dell'equazione (32) saranno dette *cicliche*.

È evidente, in virtù della permutabilità di $K_1(x, y)$ e di $p(x, y)$, che *due soluzioni cicliche $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ dell'equazione (32) sono permutabili fra di loro.*

Osserviamo poi che se $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ sono soluzioni cicliche dell'equazione (32), si ha:

$$\dot{K}_1 \dot{K}_2(x, y) = q(x, y). \quad (34)$$

Infatti, valendosi della (32'), si ottiene:

$$\dot{K}_1 \dot{K}_2(x, y) = - \int_a^b K_1(x, \eta) \left\{ p(\eta, y) + K_1(\eta, y) \right\} d\eta = - \\ - K_1^{(2)}(x, y) - \ddot{p} \dot{K}_1(x, y) = q(x, y),$$

c. d. d.

Osserviamo infine che, se si suppone che le funzioni simmetriche $p(x, y)$ e $K_1(x, y)$ siano nuclei ad autofunzioni tutte reali, in virtù della loro per-

mutabilità, esisterà una serie Ω di funzioni ortogonali tutte reali, contenente le autofunzioni di $p(x, y)$ e di $K_1(x, y)$; ed allora, in forza della (33), la serie Ω conterrà pure le autofunzioni di $K_2(x, y)$, ed in forza della (34) conterrà ancora quelle della funzione $q(x, y)$. Adunque si ha: *per ogni sistema ciclico $K_1(x, y), K_2(x, y)$ di soluzioni dell'equazione (32) esiste un sistema Ω (almeno) di funzioni ortogonali, contenente le autofunzioni di $p(x, y), q(x, y), K_1(x, y), K_2(x, y)$.*

20. Volendo ora risolvere l'equazione (32) col metodo di LAGRANGE, dovremo cercare di esprimere la differenza $K_1(x, y) - K_2(x, y)$ di due soluzioni cicliche mediante gli elementi noti $p(x, y), q(x, y)$.

A tale uopo notiamo anzitutto che si ha, in forza delle (33), (34),

$$\left\{ K_1(x, y) - K_2(x, y) \right\}^2 = p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y); \quad (35)$$

e che le autofunzioni dell'espressione:

$$\Delta(x, y) = p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y),$$

che potremo chiamare *discriminante* dell'equazione (32), sono contenute certamente nella serie Ω ; e poichè l'espressione $K_1(x, y) - K_2(x, y)$ è una soluzione ad autofunzioni tutte reali dell'equazione binomia di 2.^o grado (35), indicando con $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ la serie degli autovalori del discriminante $\Delta(x, y)$, risulta dalla teoria delle equazioni integrali binomie che *la serie $\sum \frac{1}{|\Delta_v|}$ deve essere convergente.*

Da ciò che precede si può concludere: *se l'equazione (32), nella quale $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono funzioni simmetriche aventi le autofunzioni reali, ammette una soluzione simmetrica ad autofunzioni reali, le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ devono essere permutabili e la serie $\sum \frac{1}{|\Delta_v|}$, formata con gli autovalori del discriminante $p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$, deve essere convergente.*

21. Viceversa, *si supponga che $p(x, y)$ e $q(x, y)$ siano permutabili e che la serie $\sum \frac{1}{|\Delta_v|}$, formata con gli autovalori del discriminante $p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$, sia convergente.*

Osserviamo anzitutto che, essendo $p(x, y)$ e $q(x, y)$ funzioni permutabili, esisterà una serie Ω di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$; sicchè le autofunzioni di $p^2(x, y) - 4q(x, y)$ saranno

pure contenute in Ω ; e poichè la serie $\sum \frac{1}{|\Delta_\nu|}$ è convergente, l'equazione binomia :

$$H^{(2)}(x, y) = p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y) \quad (35')$$

ammetterà infinite soluzioni aventi le stesse autofunzioni del discriminante $\Delta(x, y)$, ossia aventi le autofunzioni contenute in Ω . Indicando con $H(x, y)$ una qualsiasi di tali soluzioni, e ponendo:

$$\begin{aligned} K_1(x, y) + K_2(x, y) &= -p(x, y), \\ K_1(x, y) - K_2(x, y) &= H(x, y), \end{aligned}$$

risulterà :

$$K_1(x, y) = \frac{-p(x, y) + H(x, y)}{2};$$

e la funzione $K_1(x, y)$, così determinata, soddisferà effettivamente all'equazione (32).

Infatti le funzioni $p(x, y)$, $H(x, y)$ sono permutabili, per il fatto che le loro autofunzioni sono contenute nella medesima serie Ω ; e quindi, tenendo conto della (35'), si avrà:

$$\begin{aligned} K_1^{(2)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}_1(x, y) + q(x, y) &= \frac{1}{4} \left\{ -p(x, y) + H(x, y) \right\}^{(2)} + \\ &+ \frac{1}{2} \ddot{p} \left\{ -\ddot{p}(x, y) + \ddot{H}(x, y) \right\} + q(x, y) = \\ &= \frac{1}{4} p^{(2)}(x, y) + \frac{1}{4} H^{(2)}(x, y) - \frac{1}{2} \ddot{p} \ddot{H}(x, y) - \frac{1}{2} p^{(2)}(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2} \ddot{p} \ddot{H}(x, y) + q(x, y) = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ H^{(2)}(x, y) - p^{(2)}(x, y) + 4q(x, y) \right\} = 0, \end{aligned}$$

c. d. d.

Riepilogando si ha dunque: *condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione (32) ammetta soluzioni ad autofunzioni tutte reali è che le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili e che la serie $\sum \frac{1}{|\Delta_\nu|}$, formata con gli autovalori $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ del suo discriminante $p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$, sia convergente. Le infinite soluzioni ad autofunzioni tutte reali dell'equazione (32) possono ag-*

grupparsi in coppie di soluzioni cicliche. Per ogni coppia di soluzioni cicliche dell'equazione (32) esiste un sistema almeno di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di questa coppia di soluzioni, di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$.

Da ciò che precede si ha ancora: *date ad arbitrio due funzioni simmetriche ad autofunzioni tutte reali $p(x, y)$, $q(x, y)$, condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano due funzioni simmetriche ad autofunzioni tutte reali, che abbiano per somma $p(x, y)$ e per risultato della loro composizione $q(x, y)$, è che le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili e che la serie delle inverse dei moduli degli autovalori del discriminante $p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$ sia convergente. Quando queste condizioni sono soddisfatte, esistono infinite coppie di funzioni cosiffatte.*

22. Mostriamo ora come si può procedere alla formazione delle autofunzioni e dei corrispondenti autovalori delle soluzioni dell'equazione (32).

Si applichi alle funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ il metodo rammentato al n.º 18 (§ 5) per la ricerca di una serie Ω di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$; e sia:

$$\omega_1(x, y), \quad \omega_2(x, y), \dots \quad (36)$$

una tale serie. Indichiamo con p_1, p_2, \dots la corrispondente serie di autovalori della funzione $p(x, y)$, e con q_1, q_2, \dots la corrispondente serie di autovalori della funzione $q(x, y)$, con l'avvertenza che alcune delle p_r e alcune delle q_r possono essere infinite, senza che ciò possa mai avvenire contemporaneamente per una p_r e una q_r aventi indici uguali. Allora il discriminante $\Delta(x, y) = p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$ avrà per autofunzioni le funzioni della serie (36) e per autovalori rispettivamente:

$$\frac{1}{p_1^2 - q_1}, \quad \frac{1}{p_2^2 - q_2}, \dots;$$

sicchè qualunque funzione avente per autofunzioni le funzioni della serie (36) e per autovalori rispettivamente:

$$\frac{2}{- \frac{1}{p_1} \pm \sqrt{\frac{1}{p_1^2} - \frac{4}{q_1}}}, \quad \frac{2}{- \frac{1}{p_2} \pm \sqrt{\frac{1}{p_2^2} - \frac{4}{q_2}}}, \dots \quad (37)$$

sarà soluzione dell'equazione (32).

Le infinite soluzioni simmetriche ad autovalori tutti reali dell'equazione (32)

si otterranno considerando i vari sistemi Ω di funzioni ortogonali, che il metodo rammentato ci darà, e combinando in tutti i modi possibili, per ognuno di tali sistemi, le coppie di autovalori della serie (37).

§ 7.

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE DI 3.^o GRADO.

23. Passiamo ora alla risoluzione dell'equazione integrale di 3.^o grado e, per semplicità, si consideri l'equazione:

$$K^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}(x, y) + q(x, y) = 0, \quad (38)$$

nella quale le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano simmetriche e ad autofunzioni tutte reali.

Anzitutto si può osservare, anche qui, che *qualunque soluzione simmetrica* $K_1(x, y)$ dell'equazione (38) è permutabile con la funzione $p(x, y)$; e quindi ancora che *se l'equazione (38) ammette una soluzione simmetrica, le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ devono essere permutabili.*

Ciò premesso, sia $K_1(x, y)$ una soluzione simmetrica dell'equazione (38), e sia $K_2(x, y)$ una soluzione simmetrica dell'equazione di 2.^o grado:

$$K^{(2)}(x, y) + \ddot{K}_1 \ddot{K}(x, y) + \left\{ p(x, y) + K_1^{(2)}(x, y) \right\} = 0. \quad (39)$$

La funzione $K_2(x, y)$ sarà certamente permutabile con $K_1(x, y)$; e per conseguenza, in virtù della (39) stessa, permutabile con $p(x, y)$; di modo che si può scrivere:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \ddot{K}_1 - \ddot{K}_2 \left\{ \left[\ddot{K}_2^{(2)}(x, y) + \ddot{K}_1 \ddot{K}_2(x, y) + \left\{ \ddot{p}(x, y) + \ddot{K}_1^{(2)}(x, y) \right\} \right] \right\} = \right. \\ &= K_1^{(3)}(x, y) - K_2^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \left\{ \ddot{K}_1(x, y) - \ddot{K}_2(x, y) \right\} = \\ &= K_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}_1(x, y) + q(x, y) - \\ &\quad \left. - \left[K_2^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}_2(x, y) + q(x, y) \right], \right. \end{aligned}$$

dalla quale risulta che la funzione $K_2(x, y)$ verifica l'equazione (38).

Siano $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ soluzioni cicliche dell'equazione di 2.^o grado (39); allora saranno soluzioni dell'equazione (38) le funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$, le quali saranno ancora due a due permutabili; e, in virtù della (39), si avrà :

$$\left. \begin{aligned} K_1(x, y) + K_2(x, y) + K_3(x, y) &= 0, \\ \ddot{K}_2 \ddot{K}_3(x, y) &= p(x, y) + K_1^{(2)}(x, y); \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

e quindi :

$$\ddot{K}_1 \ddot{K}_2 \ddot{K}_3(x, y) = K_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p} \ddot{K}_1(x, y) = -q(x, y). \quad (41)$$

Tre soluzioni cosiffatte $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ dell'equazione (38) si diranno soluzioni *cicliche*.

Osserviamo che, in virtù della teoria dell'equazione integrale di 2.^o grado, esisterà un sistema Ω di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ e di $p(x, y) + K_1^{(2)}(x, y)$; sicchè il sistema Ω conterrà certamente le autofunzioni di

$$p(x, y) = -K_2^{(2)}(x, y) - \ddot{K}_1 \ddot{K}_2(x, y) - K_1^{(2)}(x, y),$$

e conseguentemente conterrà pure le autofunzioni di

$$q(x, y) = -K_1^{(3)}(x, y) - \ddot{p} \ddot{K}_1(x, y).$$

Adunque *se l'equazione (38) ammette un sistema di soluzioni cicliche* $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$, *esisterà un sistema* Ω *(almeno) di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di* $p(x, y)$, $q(x, y)$, $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$.

24. Volendo risolvere l'equazione integrale (38) valendosi del metodo di LAGRANGE, indichiamo con ε una radice cubica primitiva dell'unità, e cerchiamo di esprimere le funzioni :

$$\left. \begin{aligned} H_1(x, y) &= K_1(x, y) + \varepsilon K_2(x, y) + \varepsilon^2 K_3(x, y), \\ H_2(x, y) &= K_1(x, y) + \varepsilon^2 K_2(x, y) + \varepsilon K_3(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

mediante gli elementi analitici relativi alle funzioni note $p(x, y)$, $q(x, y)$.

A tal uopo si osservi che le funzioni $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ sono permutabili e che, facendo uso delle (40), (41) ed eseguendo calcoli perfettamente analoghi a quelli noti dell'algebra, si ottiene :

$$H_1^{(3)}(x, y) + H_2^{(3)}(x, y) = -27 q(x, y), \quad (43)$$

$$\ddot{H}_1 \ddot{H}_2(x, y) = -3 p(x, y); \quad (44)$$

e per conseguenza :

$$\ddot{H}_1^{(3)} \ddot{H}_2^{(3)}(x, y) = -27 p^{(3)}(x, y). \quad (44')$$

Si osservi ancora che la serie Ω contiene, in virtù delle (42), le autofunzioni di $H_1(x, y)$ e di $H_2(x, y)$; sicchè le funzioni $H_1^{(3)}(x, y)$, $H_2^{(3)}(x, y)$ costituiscono, in forza delle (43), (44)', un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione di 2.^o grado (*risolvente di Lagrange*):

$$Z^{(2)}(x, y) + 27 \ddot{q} \ddot{Z}(x, y) - 27 p^{(3)}(x, y) = 0. \quad (45)$$

25. Ciò posto, indichiamo con

$$\Omega \equiv \omega_1(x), \quad \omega_2(x), \dots$$

una serie di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni di $p(x, y)$, $q(x, y)$, $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$, e con

$$\begin{aligned} p_1, \quad p_2, \dots, \\ q_1, \quad q_2, \dots, \\ k'_1, \quad k'_2, \dots, \\ k''_1, \quad k''_2, \dots, \\ k'''_1, \quad k'''_2, \dots \end{aligned}$$

le corrispondenti serie di autofunzioni, potendo alcune di queste autofunzioni essere infinite.

In virtù delle (42), le funzioni $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ avranno per autofunzioni le funzioni della serie Ω ; sicchè, indicando con

$$\begin{aligned} h'_1, \quad h'_2, \dots, \\ h''_1, \quad h''_2, \dots \end{aligned}$$

le corrispondenti serie di autovalori e tenendo conto delle (45), (44) e delle (40), (42), risulterà:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 h'_t} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2 q_t} \pm \sqrt{\frac{1}{4 q_t^2} + \frac{1}{27 p_t^3}}}, \quad \frac{1}{3 h''_t} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2 q_t} \mp \sqrt{\frac{1}{4 q_t^2} + \frac{1}{27 p_t^3}}}, \\ \frac{1}{k'_t} + \frac{1}{k''_t} + \frac{1}{k'''_t} = 0, \quad \frac{1}{k'_t} + \frac{\varepsilon}{k''_t} + \frac{\varepsilon^2}{k'''_t} = \frac{1}{h'_t}, \quad \frac{1}{k'_t} + \frac{\varepsilon^2}{k''_t} + \frac{\varepsilon}{k'''_t} = \frac{1}{h''_t}; \end{aligned}$$

e quindi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k'_t} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_t} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_t^2} + \frac{1}{27p_t^3}}} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_t} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_t^2} + \frac{1}{27p_t^3}}}, \\ \frac{1}{k''_t} &= \frac{\varepsilon}{1} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_t} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_t^2} + \frac{1}{27p_t^3}}} + \frac{\varepsilon^2}{1} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_t} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_t^2} + \frac{1}{27p_t^3}}}, \\ \frac{1}{k'''_t} &= \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_t} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_t^2} + \frac{1}{27p_t^3}}} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2q_t} \mp \sqrt{\frac{1}{4q_t^2} + \frac{1}{27p_t^3}}}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

In queste formole i segni \pm, \mp stanno ad indicare che se il primo termine si fa precedere dal segno $+$, il secondo dovrà farsi precedere dal segno $-$, e viceversa; i segni $\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon^2}$ stanno poi ad indicare che, se nel

l'espressione di $\frac{1}{k'_t}$ il primo termine si fa precedere da uno dei segni $1, \varepsilon, \varepsilon^2$, il secondo termine dovrà farsi precedere rispettivamente da uno dei segni $1, \varepsilon^2, \varepsilon$, il primo termine dell'espressione di $\frac{1}{k''_t}$ dovrà farsi precedere rispettivamente da uno dei segni $\varepsilon, \varepsilon^2, 1$, il secondo rispettivamente da uno dei segni $\varepsilon^2, \varepsilon, 1$, il primo termine dell'espressione di $\frac{1}{k'''_t}$ dovrà farsi precedere rispettivamente da uno dei segni $\varepsilon^2, 1, \varepsilon$, il secondo rispettivamente da uno dei segni $\varepsilon, 1, \varepsilon^2$.

Finalmente, dal fatto che le funzioni $K_1(x, y), K_2(x, y), K_3(x, y)$ sono sommabili insieme ai loro quadrati in tutto il campo

$$\sigma = \left\{ a \leq x \leq b, a \leq y \leq b \right\},$$

segue che la serie:

$$\sum_t \left(\frac{1}{|k'_t|^2} + \frac{1}{|k''_t|^2} + \frac{1}{|k'''_t|^2} \right), \quad (47)$$

formata con le espressioni (46), deve essere convergente.

Convieni osservare che la serie (47) è indipendente dalle diverse combinazioni dei segni $+$ e $-$, $1, \varepsilon$ ed ε^2 , che si possono fare nelle espressioni (46).

26. Reciprocamente, si supponga che le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili e che, costruita una serie Ω di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni di $p(x, y)$, $q(x, y)$, la serie (47), costruita con i corrispondenti autovalori di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$, sia convergente. Si può costruire, ed in infiniti modi, una terna di funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ avente per autofunzioni le funzioni $\omega_i(x)$ della serie Ω e per corrispondenti autovalori rispettivamente i valori k'_i , k''_i , k'''_i , dati dalle formole (46), accoppiate nel modo anzidetto; e si verifica facilmente che questa terna di funzioni, così ottenuta, costituisce appunto un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (38).

Adunque, riassumendo, si ha: *condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione integrale di 3.^o grado (38) abbia soluzioni cicliche, ad autofunzioni tutte reali e sommabili nel campo σ insieme ai loro quadrati, è che le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili e che, per una serie Ω di funzioni ortogonali, contenente tutte e sole le autofunzioni di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$, la corrispondente serie (47) sia convergente. Per ciascuna delle eventuali serie Ω , per le quali queste condizioni sono soddisfatte, si hanno infiniti sistemi di soluzioni cicliche dell'equazione (38), dovuti a tutte le possibili combinazioni delle terne di valori di k'_i , k''_i , k'''_i .*

(Dopo che questa Memoria era stata presentata, la Scienza ebbe a sopportare la grave perdita dell'Autore, Prof. Lauricella, morto dopo brevissima malattia nel gennajo scorso. — La revisione delle bozze di stampa fu gentilmente assunta dal sig. Prof. Lucio Silla, a Roma).