HYDRODYNAMIQUE

ÉLASTICITÉ, ACOUSTIQUE

COURS PROFESSÉ EN 1890-1891

Par P. DUHEM, chargé d'un cours complémentaire

TOME PREMIER

THÉORÈMES GÉNÉRAUX, CORPS FLUIDES

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE ET DE CRISTALLOGRAPHIE

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

HYDRODYNAMIQUE

ÉLASTICITÉ, ACOUSTIQUE

COURS PROFESSÉ EN 1890-1891

Par P. DUHEM, chargé d'un cours complémentaire

TOME PREMIER

THÉORÈMES GÉNÉRAUX, CORPS FLUIDES

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

8, Rue de la Sorbonne, 8

1891

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE II

Les corps fluides.

Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.

Cours de Physique Mathématique et de Cristallographie
de la Faculté des Sciences de Lille.

Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique

Leçons professées en 1890-1891, par P. Duhem,
chargé d'un Cours complémentaire.

Introduction

Ce cours n'a pas la prétention de constituer un traité complet d'Hydrodynamique et d'Elasticité; nous n'avons pas le désir de pousser très loin l'étude de ces sciences; nous voudrions au contraire offrir à ceux qui désirent commencer cette étude un exposé aussi clair et aussi rigoureux que possible des principes fondamentaux qui régissent l'équilibre et le mouvement des corps solides ou fluides. Pour bien faire saisir la portée de ces principes fondamentaux; il est utile de les appliquer à quelques problèmes. Nous avons choisi exclusivement les problèmes qui se rapportent au mouvement vibratoire et qui intéressent l'Acoustique.

Ce cours se divisera naturellement en cinq livres:

Le premier livre sera consacré aux Principes Généraux. _ Nous y rappellerons brièvement les principes de Mécanique et de Thermodynamique qui doivent nous servir de guides. Nous y exposerons ensuite la théorie due à Cauchy, des déformations infiniment petites d'un corps, et les théorèmes dus à Poisson, Cauchy et Lamé, qui régissent la distribution des pressions à l'intérieur d'un corps quelconque.

Le second livre sera consacré à l'Etude des fluides. _ Nous y donnerons les lois de leur équilibre et de leur mouvement; nous exposerons les propositions fondamentales qui régissent leurs mouvements tourbillonnaires; puis celles qui régissent leurs petits mouvements; enfin nous étudierons la vitesse du son dans un fluide et nous examinerons en détail la théorie due à M. H. von Helmholtz, des tuyaux sonores et de la résonnance.

Le troisième livre traitera de l'équilibre et du mouvement des cordes et des membranes.

Le quatrième livre exposera les propriétés des solides élastiques qu'ils soient étendus en toute dimension, ou bien réduits à l'état de lames ou de verges.

Enfin le cinquième livre renfermera l'Acoustique proprement dite. Il fera l'application des résultats contenus dans les quatre premiers livres à l'analyse des sensations sonores et à l'explication de ces sensations. Nous y étudierons successivement : Le timbre des sons, les battements, les sons résultants, enfin le caractère musical des sensations sonores.

Ce dernier livre sera un commentaire de l'ouvrage fondamental publié par Helmholtz sous le titre de : Théorie physiologique de la Musique.

Dans les quatre premiers nous chercherons à nous inspirer des méthodes employées par Lagrange dans la Section de la Mécanique Analytique consacrée à l'Hydrostatique. Toutes les fois qu'à l'imitation de Poisson, on a voulu s'écarter de ces méthodes, on est tombé dans l'erreur. Pour chasser l'erreur il a toujours été nécessaire de revenir aux idées de Lagrange.

Livre I.

Théorèmes Généraux.

Chapitre 1er.

Rappel de quelques principes de Mécanique et de Thermodynamique.

I. Énoncé du principe des vitesses virtuelles.

Nous allons, dans ce chapitre, rappeler brièvement quelques unes des notions de Mécanique dont nous aurons à faire un fréquent usage dans la suite de ces Leçons.

Nous commencerons par retracer l'énoncé du principe des vitesses virtuelles, qui, ainsi que l'a montré Lagrange, domine la Statique tout entière.

Considérons un système matériel et, pour fixer les idées, supposons-le formé d'un nombre fini de points matériels, séparés les uns des autres par des distances finies. Soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ... $M_n(x_n, y_n, z_n)$ ces points.

Ce système est soumis à certaines liaisons ; ces liaisons sont de deux sortes.

Les unes s'expriment par une égalité ou plusieurs égalités entre les coordonnées d'un ou de plusieurs points du système. Telle est, par exemple, pour un point la condition de demeurer sur une surface ou sur une courbe. Nous les nommerons liaisons bilatérales.

Les autres ne sont point susceptibles de s'exprimer par une ou plusieurs égalités. Supposons, par exemple, que le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ soit assujetti à demeurer, soit en dehors d'un certain corps, soit à sa surface, sans pouvoir pénétrer à son intérieur. Soit :

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la surface de ce corps ; supposons qu'à l'intérieur de ce corps on ait :

$$f(x, y, z) < 0,$$

et à l'extérieur :

$$f(x, y, z) > 0,$$

La liaison imposée au point M_1 s'exprime alors de la manière suivante :

$$f(x_1, y_1, z_1) \geqq 0,$$

Une telle liaison, dans ce qui va suivre, sera nommée liaison unilatérale.

Supposons qu'entre les points du système il existe p liaisons bilatérales.

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) = 0, \end{cases}$$

et q liaisons unilatérales.

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) \geqq 0, \\ \varphi_2(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_q(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots) \geqq 0, \end{cases}$$

Supposons que les quantités :

$$\begin{array}{l} x_1, y_1, z_1, \\ x_2, y_2, z_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ x_n, y_n, z_n, \end{array}$$

vérifient les conditions (1) et (2) ; supposons que l'on choisisse les quantités infiniment petites

$$\begin{array}{l} \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \\ \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n, \end{array}$$

de telle façon que les quantités

$$\begin{array}{l} x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \\ x_2 + \delta x_2, y_2 + \delta y_2, z_2 + \delta z_2, \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ x_n + \delta x_n, y_n + \delta y_n, z_n + \delta z_n, \end{array}$$

vérifient aussi les conditions (1) et (2)

$$\begin{array}{l} \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \\ \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n, \end{array}$$

constituent les composantes du mouvement des divers points dans un déplacement virtuel du système ; ou, plus brièvement, constituent un déplacement virtuel du système.

Un déplacement virtuel $\delta x_1, \delta y_1, \ldots$ sera renversable si $-\delta x_1, -\delta y_1, \ldots$ est aussi un déplacement virtuel du système.

Si toutes les liaisons auxquelles le système est assujetti sont des liaisons bilatérales, tous les déplacements virtuels du système sont des déplacements renversables. En effet, dans le cas où le système n'est soumis qu'à des liaisons bilatérales pour que $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1; \delta x_2 \ldots$ constituent un déplacement virtuel, il est nécessaire et suffisant que ces qualités vérifient les relations :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\delta z_n = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n}\delta z_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_p}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_p}{\partial z_n}\delta z_n = 0,$$

et ces relations sont évidemment vérifiées aussi par le système de quantités

$$-\delta x_1, \; -\delta y_1, \; -\delta z_1, \; -\delta x_2 \ldots$$

Soient X_1, Y_1, Z_1, les composantes de la force explicitement donnée qui agit sur le point M_1 ; X_2, Y_2, Z_2, les composantes de la force explicitement donnée qui agit sur le point M_2 ; ..... Par définition dans tout déplacement virtuel $\delta x_1, \delta y_1, \ldots$ la première force effectue un travail virtuel

$$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 ;$$

la deuxième force effectue un travail virtuel

$$X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2 ;$$

etc, ...

Le principe des travaux virtuels, nommé souvent aussi principe des vitesses virtuelles peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Pour qu'un système soit en équilibre il est nécessaire et suffisant que, dans tout déplacement virtuel du système, la somme des travaux virtuels des forces données appliquées à ses divers points soit nulle ou négative.

En d'autres termes, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système matériel s'obtiennent en écrivant que, pour tous les systèmes de valeurs de $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots$ qui constituent un déplacement virtuel, on doit avoir

(3) $$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + \ldots + Z_n \delta z_n \leqq 0.$$

Si tous les déplacements virtuels dont le système est susceptible sont renversables, ce principe s'exprime simplement par l'égalité :

(4) $$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + \ldots + Z_n \delta z_n = 0.$$

C'est sous cette dernière forme que le principe des travaux virtuels a été, pour la première fois, énoncé par Jacques Bernouilli (1); c'est aussi sous cette forme que Lagrange, dans la Mécanique analytique, en a fait le fondement de la Statique tout entière. La forme plus complète exprimée par l'égalité (3) est due à Gauss (2); elle a été exposée avec grand soin par Cauchy (3), par Clausius (4) et par M. Carl Neumann (5). Sauf le Traité de Sturm, aucun Traité de Mécanique français ne mentionne cette forme complète du principe des travaux virtuels.

2. – Énoncé du principe de d'Alembert. Formule fondamentale de la Dynamique.

Le principe des vitesses virtuelles, qui sert de fondement à toute la Statique, peut aussi servir à établir tous les théorèmes de la Dynamique moyennant une modification qui se déduit du Principe de d'Alembert.

Considérons un système formé de n points en mouvement, $M_1, M_2, \ldots, M_n$. A un certain instant t, les coordonnées de ces points sont :

$$\begin{array}{l} x_1,\ y_1,\ z_1,\ \text{pour } M_1, \\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \text{pour } M_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n,\ y_n,\ z_n,\ \text{pour } M_n \end{array}$$

Ce système est soumis à certaines liaisons. Ces liaisons peuvent être bilatérales, comme il arrive si un point est assujetti à se mouvoir à la surface d'un certain corps, ou unilatérales, comme il arrive si un point est assujetti seulement à ne point pénétrer à l'intérieur d'un certain corps. Nous laisserons de côté le cas des liaisons unilatérales, dont l'étude se fait dans la théorie des percussions et nous supposerons que le système soit exclusivement assujetti à des liaisons bilatérales, exprimables à chaque instant par des égalités entre les coordonnées des divers points du système à cet instant.

Deux cas peuvent se présenter pour chacune de ces égalités : ou bien la forme de la relation qui lie les coordonnées des divers points du système et exprime une liaison

---

(1) Lettre citée dans Varignon, Nouvelle Mécanique.

(2) Gauss, Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik (Crelle's Journal, t. 4; 1829. Gauss Werke Bd. V, p. 27, en note). – Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. (Nouveaux Mémoires de Goettingue, vol. VII; 1830. Gauss Werke, Bd. V. p. 35) – Lettre de Gauss à Moebius citée par M. Carl Neumann.

(3) Cauchy: Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions de liaison du système sont exprimées par des inégalités. (Férussac. Bulletin des Sciences Mathématiques. T. VIII. p. 165. – 1827)

(4) Clausius, De la fonction potentielle et du potentiel. trad. Folie; Paris 1870.

(5) C. Neumann, Ueber das Princip der virtuellen oder facultativen Verrückungen.

bilatérale demeure la même à tout instant ; c'est ce qui arrive par exemple si un point est assujetti à demeurer sur un surface qui demeure fixe pendant le mouvement du système : ou bien la forme de cette égalité varie d'un moment à l'autre ; c'est ce qui arrive, par exemple, si un point est assujetti à demeurer sur une surface qui se meut en même temps que le système.

Dans le premier cas, la liaison considérée peut s'exprimer, pour toute la durée du mouvement, par une relation entre les seules coordonnées des divers points du système :

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots\ldots) = 0$$

Dans le second cas, la liaison considérée peut s'exprimer, pour toute la durée du mouvement, par une relation entre les coordonnées des divers points du système et le temps

Les équations de liaison peuvent donc contenir explicitement le temps.

Considérons un système formé de n points matériels $M_1, M_2 \ldots\ldots M_n$ dont les coordonnées à l'instant t sont $x_1, y_1, z_1 ; x_2, \ldots\ldots z_n$. Ce système est soumis à p liaisons bilatérales exprimées par des équations qui peuvent dépendre explicitement du temps :

$$(5) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, t) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots\ldots t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots\ldots t) = 0, \end{cases}$$

Donnons à t dans ces équations une certaine valeur constante t_0 et posons.

$$(6) \qquad \begin{cases} F_1 \ (x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots, z_n) = f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots z_n, t_0); \\ F_2 \ (x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots\ldots, z_n) = f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots z_n, t_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p \ (x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots\ldots, z_n) = f_p(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots z_n, t_0), \end{cases}$$

Soient $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ les masses des n points $M_1, M_2 \ldots\ldots M_n$, soient X_1, Y_1, Z_1, les composantes de la force explicitement donnée qui, à l'instant t_0 agit sur le point M_1, soient $\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2y_1}{dt^2}, \frac{d^2z_1}{dt^2}$, les composantes, au même instant, de l'accélération de ce point ; adoptons des notations analogues pour les points $M_2, \ldots, M_n$, et nous pourrons énoncer le principe de d'Alembert de la manière suivante :

Quel que soit, dans la durée du mouvement, l'instant t_0 que l'on considère, si l'on prenait un système formé des n points $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$ placés sans vitesse initiale dans les positions qu'ils occupent à l'instant t_0 ; si l'on soumettait le point M_1 à une force dont les composantes seraient :

$$X_1 - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad Y_1 - m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad Z_1 - m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}$$

le point M_2 à une force dont les composantes seraient

$$X_2 - m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}, \quad Y_2 - m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2}, \quad Z_2 - m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2}$$

etc.....; si enfin on assujettissait le système ainsi constitué aux liaisons

$$(7)\quad \begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_n) = 0, \\ F_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_n) = 0, \end{cases}$$

le système ainsi constitué serait en équilibre.

Tel est le principe de d'Alembert qui ramène ainsi tout problème de Dynamique à un problème de Statique.

Ce principe conduit, avec l'aide du principe des travaux virtuels à une formule dont on peut déduire la mise en équation de tout problème de Dynamique.

Voici comment on peut obtenir cette formule.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système fictif que nous venons de considérer sont exprimées par le principe des vitesses virtuelles ; si donc $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1; \delta x_2 \ldots,$ désigne un des mouvements virtuels compatibles avec les liaisons (7) qui sont toutes bilatérales, on doit avoir :

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{q=1}^{q=n} \Big[\Big(X_q - m_q \frac{d^2 x_q}{dt^2}\Big) \delta x_q + \Big(Y_q - m_q \frac{d^2 y_q}{dt^2}\Big) \delta y_q \\ \qquad\qquad + \Big(Z_q - m_q \frac{d^2 z_q}{dt^2}\Big) \delta z_q \Big] = 0, \end{cases}$$

Cette formule (8) résume, comme nous l'avons dit, la mise en équation de tout problème de Dynamique. On lui donne le nom de formule fondamentale de la Dynamique. Elle est due à Lagrange qui en a fait le fondement de toute l'étude de la Dynamique dans sa Mécanique analytique.

3. Remarques diverses sur les liaisons.

L'égalité (8) doit avoir lieu pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons (7) ; en d'autres termes elle doit avoir lieu pour tout système de valeurs de $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots,$ qui vérifie les égalités :

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_p}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F_p}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial F_p}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots\ldots = 0. \end{cases}$$

Les $(p+1)$ équations linéaires et homogènes (8) et (9) doivent être vérifiées par tout système de valeurs de $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots$ qui vérifient les équations (9) –

L'équation (8) doit donc être une conséquence des équations (9). La théorie des équations linéaires nous apprend qu'il faut et il suffit pour cela que l'on puisse trouver p facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ indépendants de $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2 \ldots$ tels qu'en multipliant par λ_1 le premier membre de la première égalité (9) par λ_2 le premier membre de la seconde, par λ_p le premier membre de la dernière, et en ajoutant les résultats obtenus au premier membre de l'égalité (8), on obtienne une somme identiquement nulle.

Il doit donc exister p facteurs :

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p,$$

dépendant seulement de $x_1, z_1; x_2, \ldots, z_n$, tels que l'on ait quel que soient $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1; \delta z_2 \ldots \delta z_n$, l'égalité

$$\sum_{q=1}^{q=n} \left[\left(X_q + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_q} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_q} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_q} - m_q \frac{d^2 x_q}{dt^2}\right) \delta x_q \right.$$
$$+ \left(Y_q + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_q} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_q} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial y_q} - m_q \frac{\partial^2 y_q}{\partial t^2}\right) \delta y_q$$
$$\left. + \left(Z_q + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_q} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_q} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial z_q} - m_q \frac{d^2 z_q}{dt^2}\right) \delta z_q \right] = 0.$$

ce qui exige que l'on ait les $3n$ égalités :

$$X_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_1} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2},$$
$$Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial y_1} = m_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2},$$
$$Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial z_1} = m_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

Ces égalités nous montrent que le point M_1, par exemple, se meut comme si, sans être assujetti à aucune liaison, il était soumis non seulement à la force explicitement donnée dont les composantes sont X_1, Y_1, Z_1 mais encore à une force dont les composantes seraient :

$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_1},$$
$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial y_1},$$
$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial z_1},$$

Cette force fictive porte le nom de force de liaison appliquée au point M_1. Les p fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ des $3n$ variables $x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots z_n$ portent le nom de multiplicateurs de Lagrange.

Faisons encore au sujet des liaisons auxquelles un système peut être assujetti une remarque fondamentale.

Tout déplacement virtuel $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots \delta z_n$ du système est assujetti aux liaisons (6). Il doit donc vérifier les égalités (9) qui deviennent en vertu de la définition des fonctions $F_1, F_2, \ldots F_p$, donnée par les égalités (6).

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}\delta z_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_p}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial f_p}{\partial z_1}\delta z_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_p}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \end{cases}$$

t ayant dans $f_1, f_2 \ldots, f_p$ la valeur t_0 ; on obtient tous les déplacements virtuels à l'instant t_0 en prenant tous les systèmes de valeurs de $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots \delta z_n$ qui vérifient ces égalités (10)

Pendant le temps qui s'écoule entre les instants t_0 et $t_0 + dt$, le système en mouvement éprouve un déplacement réel dont les composantes sont :

$$dx_1, dy_1, dz_1, \ldots, dz_n.$$

Ce déplacement est assujetti aux liaisons exprimées par les égalités (5), qui renferment la variable t. On a donc

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}dz_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n}dz_n + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}dt = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}dz_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n}dz_n + \dfrac{\partial f_2}{dt}dt = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_p}{\partial y_1}dy_1 + \dfrac{\partial f_p}{\partial z_1}dz_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_p}{\partial z_n}dz_n + \dfrac{\partial f_p}{dt}dt = 0 \end{cases}$$

La comparaison des égalités (10 et (11) conduit alors au résultat suivant :

Pour que le déplacement réel du système à l'instant t_0 coïncide avec un des déplacements virtuels du système au même instant il faut et il suffit que les égalités

$$(12)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_p}{dt} = 0$$

soient vérifiées à l'instant t_0. Par conséquent pour qu'à tout instant le déplacement réel du système coïncide avec un des déplacements virtuels du système au même instant, il faut et il suffit que les équations de liaison ne dépendent pas explicitement du temps.

4. Théorème des forces vives.

C'est à ce cas particulier où les liaisons ne dépendent pas du temps que nous allons maintenant nous limiter. Nous considérerons un système formé de n points et assujetti à p liaisons bilatérales dont aucune ne dépend explicitement du temps ; dans ce cas le déplacement réel $dx_1, dy_1, dz_1, \ldots dz_n$ que le système éprouve pendant le temps dt est l'un des déplacements virtuels $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots \delta z_n$. L'égalité (8) doit donc être vérifiée en particulier si l'on remplace $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots, \delta z_n$ par $dx_1, dy_1, dz_1, \ldots, dz_n$; elle devient alors :

$$\sum_{q=1}^{q=n}\Big[\Big(X_q - m_q\frac{d^2x_q}{dt^2}\Big)dx_q + \Big(Y_q - m_q\frac{d^2y_q}{dt^2}\Big)dy_q + \Big(Z_q - m_q\frac{d^2z_q}{dt^2}\Big)dz_q\Big] = 0$$

Mais on a

$$dx_q = \frac{dx_q}{dt} dt,$$

$$dy_q = \frac{dy_q}{dt} dt,$$

$$dz_q = \frac{dz_q}{dt} dt,$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q\, dx_q + Y_q\, dy_q + Z_q\, dz_q)$$

$$= \sum_{q=1}^{q=n} m_q \left(\frac{dx_q}{dt} \frac{d^2x_q}{dt^2} + \frac{dy_q}{dt} \frac{d^2y_q}{dt^2} + \frac{dz_q}{dt} \frac{d^2z_q}{dt^2} \right)$$

D'ailleurs :

$$2 \left(\frac{dx_q}{dt} \frac{d^2x_q}{dt^2} + \frac{dy_q}{dt} \frac{d^2y_q}{dt^2} + \frac{dz_q}{dt} \frac{d^2z_q}{dt^2} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx_q}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_q}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_q}{dt}\right)^2 \right] ;$$

En outre si l'on désigne par v_q la vitesse du mouvement du point q à l'instant t, on a

$$v_q^2 = \left(\frac{dx_q}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_q}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_q}{dt}\right)^2$$

On a donc, finalement,

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q\, dx_q + Y_q\, dy_q + Z_q\, dz_q) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2} \right) dt \tag{13}$$

Le premier membre est, par définition le travail effectué pendant le temps dt par les forces qui agissent sur les divers points du système.

La quantité $\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}$ est, par définition, la $\frac{1}{2}$ force vive du système à l'instant t; elle ne diffère que par la présence du facteur $\frac{1}{2}$ de la quantité à laquelle Leibnitz donne le même nom. D'après ces définitions, l'égalité (13) peut s'énoncer ainsi :

Le travail effectué pendant un temps infiniment court par toutes les forces explicitement données qui agissent sur un système est égal à la variation que subit pendant le même temps la force vive du système.

Cette proposition suppose, nous l'avons vu le système uniquement soumis à des liaisons bilatérales dont aucune ne dépend explicitement du temps. On donne à cette proposition le nom de Principe des forces vives.

5.- Du potentiel.

L'étude de l'égalité (13) va nous conduire à une nouvelle notion qui joue, en Mécanique un rôle fondamental, la notion de Potentiel.

Pour chacun des éléments de temps dt compris entre les instants T et T' écrivons les égalités analogues à l'égalité (13) et ajoutons-les membre à membre.

Le second membre du résultat a une valeur facile à trouver. Si v_q désigne la vitesse du point M_q à l'instant T et v'_q la vitesse du même point à l'instant T', ce second membre aura pour valeur

$$\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v'^2_q}{2} - \sum_{q=1}^{q=2} \frac{m_q v^2_q}{2}$$

On voit que, pour connaître ce second membre, il suffit de connaître les vitesses dont sont animés les différents points aux deux instants extrêmes que l'on considère sans avoir besoin de savoir par quels états a passé le système entre ces deux instants.

Il n'en est pas de même du premier membre.

Dans le cas le plus général X_q, Y_q, Z_q sont des fonctions de

$$x_1, y_1, z_1, \ldots z_n$$
$$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \ldots, \frac{dz_n}{dt}$$

et de t.

Si l'on connaît le mouvement que chacun des points du système a subi entre les instants T et T', on peut évaluer les coordonnées des divers points et les composantes de leur vitesse en fonction de la seule variable t. Le premier membre de l'équation (13) devient alors une quantité de la forme

$$\Phi(t)\,dt,$$

et en ajoutant membre à membre toutes les équations, telles que l'équation (13) on obtient une égalité dont le premier membre a pour valeur

$$\int_T^{T'} \Phi(t)\,dt$$

On voit que le calcul de ce premier membre suppose, en général, la connaissance complète du mouvement pris par le système entre les instants T et T'.

Il est cependant un cas où il n'en est point ainsi ; ce cas, particulier en apparence, est en réalité celui que l'on rencontre le plus généralement dans les applications.

Commençons par supposer que X_q, Y_q, Z_q dépendent seulement des coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots z_n$ des divers points du système et point de $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \ldots, \frac{dz_n}{dt}, t$.

Le système est soumis aux p liaisons ne dépendant point explicitement du temps :

$$f_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) = 0$$
$$f_2(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(x_1, y_1, z_1, \ldots z_n) = 0$$

Ces p relations permettent d'exprimer les $3n$ coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n$

en fonction de $k = 3n - p$ variables indépendantes convenablement choisies $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. En remplaçant les coordonnées par leurs expressions en fonction de ces variables, on transformera la quantité

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q dx_q + Y_q dy_q + Z_q dz_q)$$

en

$$P_1 d\alpha_1 + P_2 d\alpha_2 + \ldots P_k d\alpha_k,$$

et l'équation (13) deviendra

$$(14) \qquad P_1 d\alpha_1 + P_2 d\alpha_2 + \ldots + P_k d\alpha_k = \frac{d}{dt}\left(\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}\right) dt.$$

Chacune des quantités $P_1 P_2, \ldots, P_k$ est une fonction des variables $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$.

La quantité $P_1 d\alpha_1 + P_2 d\alpha_2 + \ldots + P_k d\alpha_k$.

n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction uniforme des variables indépendantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Mais il se trouve que cette condition exceptionnelle est réalisée dans la plupart des applications ; en d'autres termes, dans la plupart des cas qui intéressent le physicien il existe une fonction uniforme de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$

$$U(\alpha_1 \alpha_2, \ldots \alpha_k)$$

telle que l'on ait $\quad P_1 d\alpha_1 + P_2 d\alpha_2 + \ldots + P_k d\alpha_k = -dU(\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \alpha_k.)$

Dans ce cas, l'équation (14) devient simplement

$$dU(\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \alpha_k) + \frac{d}{dt}\left(\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}\right) dt = 0$$

Si l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ à l'instant T et par $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ les valeurs des mêmes variables à l'instant T', en ajoutant membre à membre les équations analogues à la précédente, que l'on peut écrire pour tous les instants dt compris entre T et T', on trouvera

$$(15) \qquad U(a_1, a_2 \ldots, \ldots a_k) + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2} = U(a'_1, a'_2 \ldots, a'_k) + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v'^2_q}{2}$$

Ainsi, dans ce cas l'équation des forces vives s'intègre lorsque l'on connait les positions initiale et finale et les vitesses initiales et finales des divers points du système, sans qu'il soit nécessaire de connaître la suite des états par lesquels le système a passé entre les deux instants que l'on considère.

La quantité

$$\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v'^2_q}{2}$$

est une combinaison homogène du second degré de

$$\frac{da'_1}{dt}, \frac{da'_2}{dt}, \ldots, \frac{da'_k}{dt},$$

L'équation (15) est donc une équation différentielle du premier ordre entre les k variables $a_1, a_2, \ldots, a_4$, dont les valeurs à chaque instant déterminent la position du système. L'équation des forces vives fournit donc, dans le cas qui nous occupe une intégrale première des équations du mouvement du système.

La fonction $U(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ est ce que nous nommerons le potentiel des forces $X_1, Y_1, Z_1; \dots,$ Ce nom est dû à Gauss. Lagrange, qui a le premier insisté sur l'importance de cette fonction, dans sa Mécanique analytique ne lui a point donné ce nom particulier. Hamilton et Jacobi ont donné à la fonction $(-U)$ le nom de fonction des forces; W. Thomson et Rankine ont nommé la fonction U l'énergie potentielle et Clausius l'ergiel.

Si la quantité

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q dx_q + Y_q dy_q + Z_q dz_q)$$

est, quels que soient dx_q, dy_q, dz_q la différentielle totale d'une fonction uniforme des quantités x_q, y_q, z_q, la quantité

$$P_1 d\alpha_1 + P_2 d\alpha_2 + \dots + P_k d\alpha_k$$

sera a fortiori la différentielle totale d'une fonction uniforme de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. On dit alors que le système admet de lui-même un potentiel.

Mais il peut arriver que la quantité

$$P_1 d\alpha_1 + P_2 d\alpha_2 + \dots + P_k d\alpha_k.$$

soit la différentielle totale d'une fonction uniforme de $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_k$ sans que la quantité

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q dx_q + Y_q dy_q + Z_q dz_q.)$$

soit la différentielle totale d'une fonction uniforme des quantités x_q, y_q, z_q, laissées indépendantes. On dit alors que le système admet un potentiel en vertu des liaisons qui lui sont imposées.

Dans le cas où les forces agissantes admettent un potentiel soit d'elles-mêmes, soit en vertu de liaisons imposées au système, le principe des vitesses virtuelles peut être mis sous une forme nouvelle.

Dans ce cas en effet, on a

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q \delta x_q + Y_q \delta y_q + Z_q \delta z_q) = P_1 \delta\alpha_1 + P_2 \delta\alpha_2 + \dots P_k \delta\alpha_k.$$

$\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\alpha_k$ n'étant lié par aucune relation et de plus en désignant par U le potentiel

$$P_1 = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_2}, \quad \dots, \quad P_k = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_k},$$

en sorte que le principe des vitesses virtuelles peut s'énoncer ainsi:

Pour qu'un système dont les forces agissantes admettent un potentiel soit en équilibre dans un état donné il faut et il suffit que dans cet état, on ait :

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial U}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial \alpha_k}\delta\alpha_k = 0$$

quel que soient $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\alpha_k$; en d'autres termes il faut et il suffit que l'on ait

$$(16) \qquad \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = 0 \dots, \frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 0$$

On voit donc que, pour rechercher les états d'équilibre d'un système qui admet un potentiel, on est amené à écrire les mêmes égalités que si l'on voulait chercher les maxima et les minima du potentiel.

6.– Criterium de la stabilité de l'équilibre.

Cette remarque se trouve complétée par le théorème suivant :

Si, pour un état donné du système, le potentiel est minimum, cet état est un état d'équilibre stable.

Commençons par définir exactement ce qu'on doit entendre par ce dernier mot.

Nous pouvons toujours supposer que les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ soient égaux à 0 pour l'état du système que nous considérons ; car s'ils étaient égaux respectivement à $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$, il suffirait de prendre pour nouveaux paramètres propres à définir l'état du système les paramètres

$$\alpha_1 - \mathcal{A}_1, \alpha_2 - \mathcal{A}_2, \dots, \alpha_k - \mathcal{A}_k,$$

pour que la condition dont il s'agit se trouvât vérifiée.

Supposons donc qu'un système soit en équilibre pour

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_k = 0,$$

Supposons en outre que les quantités $x_1, y_1, z_1, \dots z_n$ s'expriment par des fonctions continues de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Nous dirons que la position d'équilibre du système est stable si elle réalise les conditions suivantes :

Soient $A_1, A_2, \dots, A_k$, k quantités positives quelconques. On peut toujours trouver des quantités positives $a_1, a_2, \dots, a_k \dots, u_q \dots$, assez petites pour que l'on ait (1)

$$|\alpha_1(t)| \leq A_1 \quad |\alpha_2(t)| \leq A_2, \quad \dots\dots \quad |\alpha_k(t)| \leq A_k$$

à tout instant t postérieur à t_0, si l'on a à l'instant t_0 :

$$|\alpha_1(t_0)| < a_1, \ |\alpha_2(t_0)| < a_2, \quad \dots \quad |\alpha_k(t_0)| < a_k,$$
$$\dots\dots\dots\dots |u_q(t_0)| < u_q, \dots\dots\dots$$

Cette définition précise étant posée, arrivons à la démonstration du théorème que nous avons énoncé.

Nous remarquerons, en premier lieu que le potentiel étant déterminé seulement à une constante arbitraire près, nous pouvons choisir cette constante arbitraire de manière

(1) Le symbole $|A|$, dû à M. Weierstrass, signifie valeur absolue de A.

que l'on ait $$U(0,0,\dots,0)=0,$$
ou, en d'autres termes, que, pour la position d'équilibre considéré le potentiel soit à la fois minimum et nul. Dans ce cas, pour des valeurs assez voisines de 0 de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, U sera évidemment positif et aussi voisin de 0 que l'on voudra.

En second lieu, nous remarquerons qu'au lieu de s'assurer que $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_k$ sont, à tout instant, inférieurs en valeur absolue à certaines quantités $A_1, A_2, \dots, A_k$, il suffit de s'assurer que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont, à tout instant, inférieurs en valeur absolue à d'autres quantités plus petites. Nous pourrons alors choisir ces nouvelles quantités $A_1, A_2 \dots A_k$ de telle manière que, pour toutes les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ inférieures ou égales en valeur absolue à $A_1, A_2, \dots, A_k$, on ait
$$U(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) > 0,$$
sauf pour le cas particulier
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_k = 0$$

Cela posé je dis que l'on peut donner aux quantités $a_1, a_2 \dots, a_k, \dots, u_q$ des valeurs assez petites pour qu'aucune des variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ne puisse, à aucun instant t, atteindre sa limite $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Supposons en effet qu'à un certain instant t une ou plusieurs des variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ atteignent leur limite. A ce moment U aura une valeur positive qui ne peut être inférieure à une certaine limite on pourra écrire
$$U[\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0), \dots, \alpha_k(t_0)] + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}(t_0)$$
$$= U[\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_k(t)] + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}(t)$$
Le second membre sera une quantité positive qui ne peut être inférieure à une certaine limite. Au contraire on peut choisir $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, u_q, \dots$ assez petits pour que le premier membre soit plus petit qu'une quantité positive quelconque donnée d'avance, cas auquel l'égalité précédente deviendra absurde.

On voit donc bien que l'on peut imposer aux quantités $\alpha_1, a_2 \dots, \alpha_k \dots, u_q, \dots$, des valeurs si petites qu'aucune des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, a_k$ ne puisse à aucun moment atteindre sa limite, comme nous l'avons annoncé, l'équilibre est stable.

Cette importante proposition est due à Lagrange (1) la belle et rigoureuse démonstration que l'on vient de lire est de Lejeune-Dirichlet (2)

---

(1) Lagrange : Mécanique Analytique, 1re partie, Section III.

(2) Lejeune-Dirichlet. Ueber die Stabilität des Gleichgewichts. (Crelle's Journal t. XXXII p. 85 ; 1846)

§7. Du Potentiel Thermodynamique Interne.

Imaginons que, parmi les forces données appliquées à un système les unes soient regardées comme émanant d'actions extérieures, les autres comme dues aux actions des diverses parties du système les unes sur les autres. Si nous désignons par X_e, Y_e, Z_e les composantes de la force extérieure appliquée au point (x, y, z) du système et par X_i, Y_i, Z_i les composantes de la force intérieure appliquée au même point, le travail virtuel des forces données appliquées au système pourra se décomposer en deux termes selon l'égalité :

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \sum (X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z) + \sum (X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z)$$

Nous poserons

$$\delta \mathcal{T}_e = \sum (X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z)$$

la quantité $\delta\mathcal{T}_e$ étant le Travail externe qui correspond au déplacement virtuel $(\delta x, \delta y, \delta z)$

Nous admettrons d'autre part que les forces intérieures admettent un potentiel, soit d'elles-mêmes soit en vertu des liaisons imposées au système ; c'est-à-dire qu'il existe une fonction uniforme, finie et continue $\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ des k variables indépendantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ qui déterminent l'état du système, telle que l'on ait, pour tout déplacement virtuel $(\delta x, \delta y, \delta z)$

$$\sum (X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) + \delta\mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0$$

Dès lors, pour obtenir les conditions d'équilibre du système nous aurons à écrire que, dans tout déplacement virtuel du système, on a

$$\delta\mathcal{T}_e - \delta\mathcal{F} \leqq 0$$

Si les forces extérieures admettent elles aussi, un potentiel, c'est-à-dire s'il existe une fonction uniforme finie et continue $W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ telles que l'on ait, pour tout déplacement virtuel

$$\delta\mathcal{T}_e + \delta W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0$$

l'ensemble des forces appliquées au système admettra un potentiel.

$$U = \mathcal{F} + W$$

Lorsque ce potentiel sera minimum, le système sera en équilibre stable.

Pour obtenir les équations du mouvement du système, il suffira de joindre aux équations qui expriment les liaisons supposées bilatérales, les équations qui expriment que pour tout déplacement virtuel du système fictif défini au §2, on a :

$$\delta\mathcal{T}_e - \delta\mathcal{F} - \sum \left(m\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta y + m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\delta z \right) = 0$$

Tout ce que nous venons de dire s'applique seulement à un système de points matériels dont chacun est défini complètement à chaque instant par sa masse invariable et par ses coordonnées variables. Mais le physicien ne saurait se borner pour représenter les corps qu'il étudie, à la considération de systèmes aussi simples; il est amené à considérer des corps continus, et à caractériser ces corps par des paramètres autres que les coordonnées de certains points. Pour qu'un système semblable à ceux qu'il considère soit défini, il faut connaître en chaque point de ce système la densité, la température un certain nombre de paramètres caractérisant l'état physique et chimique etc ...,

Les Principes de la Mécanique ne suffisent plus à l'étude de semblables systèmes; le physicien doit demander à la Thermodynamique les règles de ses théories. (1)

La Thermodynamique nous enseigne que, moyennant certaines restrictions imposées au système, restrictions qu'il serait trop long d'énoncer ici, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système s'obtiennent en écrivant que l'on a :

$$\delta \mathcal{T}_e - \delta \mathcal{F} \geqq 0,$$

pour toute transformation isothermique virtuelle du système, ce dernier ayant, d'ailleurs, la même température en tout point.

La quantité $\delta \mathcal{T}_e$ est toujours le travail des forces extérieures appliquées au système. Quant à la quantité $\mathcal{F}$ c'est une fonction uniforme, finie et continue de l'état du système. Nous la nommerons le Potentiel Thermodynamique Interne du système.

Supposons que les forces extérieures admettent un potentiel W.

Nous donnerons à la quantité

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} + W.$$

le nom de Potentiel Thermodynamique total du système. La Thermodynamique conduit à la proposition suivante :

Lorsque le potentiel thermodynamique total d'un système dont tous les points sont à la même température est minimum, le système est en équilibre stable.

Nous étudierons seulement les systèmes dont le Potentiel Thermodynamique Interne est d'une forme particulière que nous allons préciser.

Soit (x, y, z) un point du système; soit dv un élément de volume renfermant ce point; soit T la température en ce point; soient $\alpha, \beta, \dots \lambda$, les paramètres qui définissent l'état de la matière en ce point. On a

$$\mathcal{F} = \int \varphi(T, \alpha, \beta, \dots, \lambda)\, dv,$$

φ étant une fonction uniforme, finie et continue des paramètres $T, \alpha, \beta, \dots\dots \lambda$ et l'intégration

---

(1) Sir W. Thomson a montré le premier que la Thermodynamique devait être le fondement logique de la Théorie de l'Elasticité (Thermo-elastic Properties of matter — Quarterly Journal of Mathematics. 1855. — Thomson et Tait Treatise of natural philosophy. T. II. p. 462)

s'étendant à tous les éléments de volume du système.

Il faut bien remarquer que cette forme du Potentiel Thermodynamique Interne est bien loin d'être la plus générale qui se puisse concevoir. Le Potentiel Thermodynamique Interne pourrait être de la forme

$$\mathcal{F} = \int \varphi \, dv,$$

la fonction φ dépendant non seulement des paramètres qui définissent l'état de la matière au sein de l'élément dv, mais encore des paramètres qui définissent l'état de la matière au sein des autres éléments de volume du système et de la position de ces éléments par rapport à l'élément dv; cette dernière forme plus générale n'est d'ailleurs pas un pur jeu d'esprit, c'est celle que nous aurions à considérer si nous voulions étudier la capillarité, l'électricité, le magnétisme etc...,

Toutefois nous nous limiterons au cours de ces leçons à l'étude du cas particulièrement simple que nous venons de définir.

La Thermodynamique permet de trouver les équations du mouvement d'un système dans le cas où il ne renferme que des liaisons bilatérales indépendantes du temps et où son Potentiel Thermodynamique a la forme particulière que nous venons d'indiquer.

Le système étant en mouvement, la température T peut n'être pas la même en tous les points au même instant t. Prenons le système dans l'état où il se trouve à l'instant t. Formons à cet instant la quantité

$$\int \varphi \, (T, \alpha, \beta, ... \lambda) \, dv$$

Donnons au système une modification virtuelle compatible avec les liaisons indépendantes du temps qui lui sont imposées et qui laisse constante la température au sein de chaque élément de masse. Durant cette modification les forces extérieures effectuent un travail $\delta \mathcal{T}_e$; la quantité $\int \varphi \, dv$ éprouve une variation $\delta \int \varphi \, dv$. La masse dm, dont l'accélération a pour composantes $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ éprouve un déplacement $\delta x, \delta y, \delta z$. On doit avoir pour toute modification de ce genre :

$$0 = \delta \mathcal{T}_e - \delta \int \varphi \, (T, \alpha, \beta, ... \lambda) \, dv - \int (\gamma_x \delta x + \gamma_y \delta y + \gamma_z \delta z) \, dm$$

On obtient ainsi des équations qui définissent les variations de tout les paramètres dont dépend l'état du système sauf de la température. Les variations de la température devront dans chacun des cas que nous étudierons être fixées au moyen de quelque hypothèse particulière.

Nous remarquerons en terminant ce chapitre que les hypothèses faites excluent l'existence du frottement entre les diverses parties du système.

La discussion et la démonstration des propositions énoncées dans ce dernier § exigeraient de longs développements qui ne peuvent trouver place ici. Nous allons donc sans plus ample commentaire les admettre et les appliquer.

Chapitre II.

Des Déformations infiniment petites d'un Corps.

§. 1er. Du mouvement le plus général d'un élément d'un corps.

Considérons en un corps, une certaine masse qui occupe un certain élément de de volume dv. Donnons au corps une déformation et un déplacement infiniment petits qui n'en altèrent pas la continuité. La masse qui occupait, avant cette transformation, l'élément de volume dv occupe, après cette transformation, un élément de volume dv' qui n'a, en général, ni même position ni même forme que l'élément de volume dv. Les lois qui président au déplacement et à la déformation de l'élément de volume dv ont été découvertes et énoncées sous une forme extrêmement élégante par Cauchy (1)

Considérons un point matériel de l'élément de volume dv. Il se trouve, au début du déplacement, au point géométrique $M(x, y, z)$ et, à la fin du déplacement, au point géométrique $M'(x', y', z')$ On a

$$x' = x + U,$$
$$y' = y + V,$$
$$z' = z + W,$$

Les quantités U, V, W, sont trois fonctions d'x, y, z, assujetties seulement à être uniformes, continues et infiniment petites, et à admettre des dérivées partielles du premier ordre jouissant des mêmes propriétés.

Considérons un deuxième point matériel de l'élément dv, infiniment voisin du précédent puisque l'élément dv est infiniment petit. Au début du déplacement il coïncide avec le point géométrique μ, dont les coordonnées sont $\xi\ \eta\ \zeta$. A la fin du déplacement, il coïncide avec le point géométrique μ' dont les coordonnées sont :

$$\xi' = \xi + \Phi$$
$$\eta' = \eta + \phi$$
$$\zeta' = \zeta + X'$$

Φ, ϕ, X, désignant ce que deviennent les fonctions U, V, W, d'x, y, z lorsqu'on y remplace x, y, z, par ξ, η, ζ. On a dès lors

(1) Cauchy – Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides élastiques ou non élastiques. (Bulletin de la Société Philomatique pour 1823 p. 10)

$$\begin{aligned}
\Phi &= U + \frac{\partial U}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial U}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial U}{\partial z}(\zeta - z)\\
\psi &= V + \frac{\partial V}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial V}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial V}{\partial z}(\zeta - z)\\
\chi &= W + \frac{\partial W}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial W}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial W}{\partial z}(\zeta - z)
\end{aligned}$$

en sorte que l'on peut écrire :

$$(1)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}
\xi' &= \xi + \frac{\partial U}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial U}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial U}{\partial z}(\zeta - z) + U,\\
\eta' &= \eta + \frac{\partial V}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial V}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial V}{\partial z}(\zeta - z) + V,\\
\zeta' &= \zeta + \frac{\partial W}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial W}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial W}{\partial z}(\zeta - z) + W.
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules générales qui définissent le déplacement infiniment petit de tout point de l'élément dv. On observera que les quantités

$$\begin{gathered}
x, y, z\\
U, V, W\\
\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\\
\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\\
\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}
\end{gathered}$$

ne dépendent pas de ξ, η, ζ. Ces quantités ont la même valeur pour tous les points de l'élément dv.

Il est facile de voir que les égalités (1) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(2)\ldots\left\{\begin{aligned}
\xi' - \xi &= U\\
&+ \frac{\partial U}{\partial x}(\xi - x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\eta - y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\zeta - z)\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\zeta - z) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\eta - y)\\
\eta' - \eta &= V\\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\xi - x) + \frac{\partial V}{\partial y}(\eta - y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\zeta - z)\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\xi - x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\zeta - z)\\
\zeta' - \zeta &= W.\\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{d U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\xi - x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\eta - y) + \frac{\partial W}{\partial z}(\zeta - z)\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\eta - y) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\xi - x)
\end{aligned}\right.$$

L'inspection de ces égalités nous montre que la modification considérée peut se décomposer en trois autres. Désignons de la manière suivante les positions et les coordonnées d'un même point de l'élement dv après chacune de ces modifications partielles :

	Point	Coordonnées
Début du déplacement	μ,	ξ, η, ζ,
Après la 1ère modification	μ_1,	ξ_1, η_1, ζ_1,
Après la 2ème modification	μ_2,	ξ_2, η_2, ζ_2,
Après la 3ème modification	μ',	ξ', η', ζ',

Les trois modifications partielles en lesquelles peut se décomposer le déplacement défini par les égalités (2) sont définies par les égalités suivantes :

1ère modification.

$$(3) \ldots \begin{cases} \xi_1 - \xi = \frac{\partial U}{\partial x}(\xi - x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\eta - y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\zeta - z) \\ \eta_1 - \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\xi - x) + \frac{\partial V}{\partial y}(\eta - y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\zeta - z) \\ \zeta_1 - \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\xi - x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\eta - y) + \frac{\partial W}{\partial z}(\zeta - z) \end{cases}$$

2e modification.

$$(4) \ldots \begin{cases} \xi_2 - \xi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)(\zeta - z) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\eta - y) \\ \eta_2 - \eta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\xi - x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\zeta - z) \\ \zeta_2 - \zeta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\eta - y) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\xi - x) \end{cases}$$

3e modification.

$$(5) \ldots\ldots \begin{cases} \xi' - \xi_2 = U, \\ \eta' - \eta_2 = V, \\ \zeta' - \zeta_2 = W. \end{cases}$$

Étudions successivement ces trois sortes de modifications.

§ 2 - Étude de la Translation et de la Rotation

De ces trois modifications, une seule, la troisième, fait prendre au point μ un déplacement infiniment petit du premier ordre ; les deux autres lui font prendre un déplacement infiniment petit du second ordre.

Commençons par étudier cette troisième modification.

Chacune des trois quantités U, V, W, est indépendante de ξ, η, ζ ; elle a même valeur pour tous les points de l'élément déplacé. Les égalités (5) représentent donc une translation infiniment petite, dont les composantes sont U, V, W imposée à l'ensemble de l'élément.

Étudions maintenant la seconde modification représentée par les formules (4).

D'après les égalités (3), les quantités $(\xi_1 - \xi)$, $(\eta_1 - \eta)$ $(\zeta_1 - \zeta)$ sont des quantités infiniment petites du second ordre. si donc on néglige les infiniment petits du troisième ordre, les égalités (4) peuvent s'écrire :

$$
(6) \cdots \left\{
\begin{aligned}
\xi_2 - \xi_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\zeta_1 - z) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\eta_1 - y), \\
\eta_2 - \eta_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)(\xi_1 - x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\zeta_1 - z), \\
\zeta_2 - \zeta_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)(\eta_1 - y) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)(\xi_1 - x),
\end{aligned}
\right.
$$

Chacune des dérivées partielles de U, V, W et des quantités x, y, z, a la même valeur pour tous les points de l'élément déplacé. Dès lors les formules précédentes représentent une rotation infiniment petite imposée à l'ensemble de l'élément. L'axe de rotation passe par le point (x, y, z). Les trois composantes de la rotation suivant les trois axes de coordonnées sont :

$$
(7) \cdots\cdots\cdots \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) \\
\beta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) \\
\gamma &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux résultats que nous avons déjà obtenus nous font voir clairement de quelle manière, lorsqu'un corps subit une modification quelconque, une masse élémentaire passent de l'élément de volume dv qu'elle occupe au début, à l'élément de volume dv' qu'elle occupe à la fin

En premier lieu la masse élémentaire subit une modification représentée par les égalités (3). Dans cette modification, comme on le voit aisément, elle garde un point fixe (x, y, z) et subit un changement de grandeur et de forme qui lui donne sa grandeur et sa forme finales.

En second lieu, l'ensemble de la masse ainsi déformée subit, autour d'un axe passant par le point (x, y, z) une rotation qui lui donne l'orientation qu'elle doit présenter.

En troisième lieu, une translation l'amène à la position qu'elle doit occuper finalement.

Il nous reste à étudier la déformation représentée par les formules (3).

---

§ 3. — Les ellipsoïdes de Dilatation.

Posons

$$
(8) \quad \begin{cases} M = 1 + \dfrac{\partial U}{\partial x}, \quad N = 1 + \dfrac{\partial V}{\partial y}, \quad P = 1 + \dfrac{\partial W}{\partial z}, \\ m = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\right), n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial W}{\partial x}\right), p = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) \end{cases}
$$

Ces six quantités

$$M, N, P,$$
$$m, n, p,$$

seront indépendantes de ξ, η, ζ et auront par conséquent même valeur pour tous les points de l'élément déformé.

Les égalités (3) que nous voulons étudier deviendront

$$
(9) \quad \begin{cases} (\xi_1 - x) = M(\xi - x) + p(\eta - y) + n(\zeta - z), \\ (\eta_1 - y) = p(\xi - x) + N(\eta - y) + m(\zeta - z), \\ (\zeta_1 - z) = n(\xi - x) + m(\eta - y) + P(\zeta - z), \end{cases}
$$

Le déterminant

$$
(10) \quad D = \begin{vmatrix} M & p & n \\ p & N & m \\ n & m & P \end{vmatrix}
$$

est positif, car, d'après les égalités (8), il diffère infiniment peu de 1. Les équations (9) peuvent donc aussi être résolues par rapport à $(\xi - x), (\eta - y), (\zeta - z)$, elles deviennent alors :

$$
(11) \quad \begin{cases} \xi - x = \mathcal{M}(\xi_1 - x) + \varpi(\eta_1 - y) + \nu(\zeta_1 - z), \\ \eta - y = \varpi(\xi_1 - x) + \mathcal{N}(\eta_1 - y) + \mu(\zeta_1 - z), \\ \zeta - z = \nu(\xi_1 - x) + \mu(\eta_1 - y) + \mathcal{P}(\zeta_1 - z), \end{cases}
$$

Pour étudier la déformation de notre élément infiniment petit il nous suffit d'étudier, d'une manière générale, les propriétés de la transformation représentée par les formules (9) ou (11). Nous repasserons ensuite au moyen des formules (8) au cas particulier qui nous intéresse. La transformation définie par les égalités (9) ou (11) possède quelques propriétés évidentes.

Le point (x, y, z) ne change pas dans la transformation. Un plan dans l'espace (ξ, η, ζ) se transforme en un plan dans l'espace (ξ_1, η_1, ζ_1).

Des plans parallèles se transforment en d'autres plans parallèles, des plans concourants en d'autres plans concourants ;

Une droite se transforme en une autre droite, des droites parallèles en d'autres droites parallèles ; des droites concourantes en d'autres droites concourantes ;

Un parallélipipède se transforme en un autre parallélipipède.

La sphère

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = 1,$$

qui a pour centre le point invariable (x, y, z) et pour rayon l'unité de longueur se transforme en une surface du second ordre

$$(12) \quad \begin{aligned} &[\mathcal{M}(\xi_1 - x) + \varpi(\eta_1 - y) + \nu(\zeta_1 - z)]^2 \\ &+ [\varpi(\xi_1 - x) + \mathcal{N}(\eta_1 - y) + \mu(\zeta_1 - z)]^2 \\ &+ [\nu(\xi_1 - x) + \mu(\eta_1 - y) + \mathcal{P}(\zeta_1 - z)]^2 = 1, \end{aligned}$$

qui est un ellipsoïde.

Cet ellipsoïde se nomme le premier ellipsoïde des dilatations relatif au point (x, y, z); les directions de ces axes se nomment les axes principaux de dilatation au point (x, y, z)

Comment sont déterminées les directions de ces axes principaux ?

Par le point (x, y, z), centre de l'ellipsoïde, menons un demi-diamètre de cet ellipsoïde ; soient α, β, γ, les cosinus directeurs de ce diamètre liés par la relation :

$$(13) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Le plan diamétral conjugué de ce demi-diamètre est représentée par l'équation

$$\begin{aligned} &(\mathcal{M}A + \varpi B + \nu C)(\xi_1 - x) \\ &+ (\varpi A + \mathcal{N}B + \mu C)(\eta_1 - y) \\ &+ (\nu A + \mu B + \mathcal{P}C)(\zeta_1 - z) = 0. \end{aligned}$$

équation dans laquelle

$$(14) \quad \begin{cases} A = \mathcal{M}\alpha + \varpi\beta + \nu\gamma, \\ B = \varpi\alpha + \mathcal{N}\beta + \mu\gamma, \\ C = \nu\alpha + \mu\beta + \mathcal{P}\gamma, \end{cases}$$

Ce plan sera perpendiculaire à son diamètre conjugué s'il existe une quantité σ telle que l'on puisse écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}A + \varpi B + \nu C &= \sigma\alpha, \\ \varpi A + \mathcal{N}B + \mu C &= \sigma\beta, \\ \nu A + \mu B + \mathcal{P}C &= \sigma\gamma, \end{aligned}$$

D'après la signification des quantités A, B, C, donnée par les égalités (14), pour que les égalités précédentes soient vérifiées il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(15) \quad \begin{cases} A = \mathcal{S}\alpha \\ B = \mathcal{S}\beta \\ C = \mathcal{S}\gamma \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \sigma^{\frac{1}{2}}$$

égalités qui peuvent encore s'écrire

$$(16) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} (\mathcal{M} - S)\alpha + \varpi\beta + \nu\gamma = 0, \\ \varpi\alpha + (\mathcal{N} - S)\beta + \mu\gamma = 0, \\ \nu\alpha + \mu\beta + (\mathcal{P} - S)\gamma = 0, \end{cases}$$

Pour qu'un système de valeurs de α, β, γ, différentes de 0, vérifie les égalités (16), il faut que S vérifie l'égalité :

$$(17) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{vmatrix} \mathcal{M} - S & \varpi & \nu \\ \varpi & \mathcal{N} - S & \mu \\ \nu & \mu & \mathcal{P} - S \end{vmatrix} = 0,$$

Cette équation bien connue est étudiée dans tous les cours de Mathématiques spéciales. On sait qu'elle admet trois racines réelles, S_1, S_2, S_3.

Si l'on reporte successivement ces trois racines dans les égalités (16) ces dernières, jointes à l'égalité (13), fourniront les trois systèmes de valeurs :

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;$$
$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2;$$
$$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3;$$

qui sont les cosinus directeurs des trois systèmes d'axes

La longueur Δ_1 du demi-axe dont les cosinus directeurs sont $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sera, d'après l'équation (12), donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_1^2} = & (\mathcal{M}\alpha_1 + \varpi\beta_1 + \nu\gamma_1)^2 \\ & + (\varpi\alpha_1 + \mathcal{N}\beta_1 + \mu\gamma_1)^2 \\ & + (\nu\alpha_1 + \mu\beta_1 + \mathcal{P}\gamma_1)^2 \end{aligned}$$

qui devient, d'après les égalités (13) et (15)

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{S_1^2},$$

Les longueurs des deux autres demi axes sont de même données par les égalités :

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{S_2^2}$$
$$\Delta_3^2 = \frac{1}{S_3^2}$$

Prenons pour nouveaux axes de coordonnées des axes Mx', My', Mz' passant par le centre du premier ellipsoïde et coïncidant avec les axes principaux de dilatation. Rapportée à ce nouveau système d'axes l'équation de cet ellipsoïde deviendra :

$$\frac{\xi_1'^2}{\Delta_1^2} + \frac{\eta_1'^2}{\Delta_2^2} + \frac{\zeta_1'^2}{\Delta_3^2} = 1$$

ou bien

$$S_1^2\,\xi_1'^2 + S_2^2\,\eta_1'^2 + S_3^2\,\zeta_1'^2 = 1,$$

La comparaison de cette équation à l'équation générale (12) montre que par rapport à ce nouveau système d'axes, on aura

$$(18) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} M'^2 = S_1^2 & N'^2 = S_2^2, & P'^2 = S_3^2, \\ \mu' = 0, & \nu' = 0, & \varpi' = 0, \end{cases}$$

Considérons la surface du second ordre

$$(19) \ldots\ldots\ldots M(\xi_1 - x)^2 + N(\eta_1 - y)^2 + P(\zeta_1 - z)^2, \\ + 2\mu(\eta_1 - y)(\zeta_1 - z) + 2\nu(\zeta_1 - z)(\xi_1 - x) + 2\varpi(\xi_1 - x)(\eta_1 - y) = 1,$$

Il est facile de voir que les directions des axes principaux de cette surface seront données par les équations (13), (16) et (17) qui déterminent les directions des axes principaux de dilatation. Cette surface a donc encore pour axes les axes principaux de dilatation.

Cherchons la longueur δ_1 du demi-axe de cette surface qui correspond à la racine S_1 de l'équation (17). Nous aurons:

$$M\alpha_1^2 + N\beta_1^2 + P\gamma_1^2 + 2\mu\beta_1\gamma_1 + 2\nu\gamma_1\alpha_1 + 2\varpi\alpha_1\beta_1 = \frac{1}{\delta_1^2}$$

ou bien d'après les égalités (15).

$$S_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) = \frac{1}{\delta_1^2}$$

Les longueurs des demi-axes de cette surface sont donc :

$$(20) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \delta_1 = \dfrac{1}{S_1} = \sqrt{\Delta_1} \\ \delta_2 = \dfrac{1}{S_2} = \sqrt{\Delta_2} \\ \delta_3 = \dfrac{1}{S_3} = \sqrt{\Delta_3} \end{cases}$$

Ce sont les racines carrées des longueurs des demi-axes du premier ellipsoïde.

D'après la théorie des formes homogènes du second degré le Discriminant

$$\begin{vmatrix} M & \varpi & \nu \\ \varpi & N & \mu \\ \nu & \mu & P \end{vmatrix}$$

de cette surface a le même signe que le déterminant D. Il est donc positif, et la surface représentée par l'équation (19) est un ellipsoïde que l'on nomme le second ellipsoïde de dilatation (1)

---

(1) Cauchy a considéré seulement le second ellipsoïde de dilatation (loc. cit.) La considération du premier ellipsoïde est due à Lamé. (Lamé – Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps solides) Ce savant a introduit la considération de cet ellipsoïde dans la théorie des pressions que nous exposerons au prochain Chapitre et qui a d'étroites analogies avec la théorie dont nous nous occupons en ce moment.

§. 4. La Déformation étudiée se décompose en trois dilatations rectangulaires.—

Prenons pour axes de coordonnées les axes Mx', My', Mz', du premier ellipsoïde de dilatation. Les coëfficients

$$\begin{matrix} \mathcal{M}', & \mathcal{N}', & \mathcal{P}' \\ \mu', & \nu', & \varpi' \end{matrix}$$

vérifient alors les équations (18)

L'expression générale des cœfficients

$$\begin{matrix} M & N & P \\ m & n & p \end{matrix}$$

en fonction des coëfficients

$$\begin{matrix} \mathcal{M} & \mathcal{N} & \mathcal{P} \\ \mu & \nu & \varpi \end{matrix}$$

montre sans peine que l'on a

$$(21) \ldots\ldots \begin{cases} M' = \frac{1}{\mathcal{S}_1}, & N' = \frac{1}{\mathcal{S}_2}, & P' = \frac{1}{\mathcal{S}_3} \\ m' = 0 & n' = 0 & p' = 0 \end{cases}$$

Les égalités (9) qui définissent la déformation que nous voulons étudier prennent alors la forme simple

$$(22) \ldots\ldots \begin{cases} \xi'_1 = \frac{1}{\mathcal{S}_1}\, \xi', \\ \eta'_1 = \frac{1}{\mathcal{S}_2}\, \eta', \\ \zeta'_1 = \frac{1}{\mathcal{S}_3}\, \zeta', \end{cases}$$

La déformation représentée par ces équations se décompose évidemment en trois déformations analogues entre elles dont la première est représentée par les trois equations

$$(23) \ldots\ldots \xi'_1 = \frac{\xi'}{\mathcal{S}_1}, \quad \eta'_1 = 0, \quad \zeta'_1 = 0$$

Etudions les propriétés d'une semblable déformation.

Dans une semblable déformation tout point du plan $y'Mz'$ demeure immobile.

Tout point non situé sur le plan $y'Mz'$ se déplace parallèlement à $0x'$.

La distance d'un point au plan $y'Mz'$ subit un accroissement proportionnel à cette distance même en vertu de l'équation

$$\xi'_1 - \xi' = \frac{1 - \mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_1}\, \xi',$$

le rapport de proportionnalité a pour valeur $\frac{1-\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_1}$ ou, d'après les égalités (21), $(M'-1)$

On énonce ces faits en disant que la déformation définie par les égalités (23) constitue une dilatation dans la direction Mx' et que la grandeur de la dilatation est $(M'-1)$

Dès lors on voit que la déformation que nous étudions peut être regardée comme résultant de trois dilatations suivant trois axes rectangulaires qui sont les trois axes principaux de dilatation ; les grandeurs respectives de ces trois dilatations sont :

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \lambda_1 = M' - 1, \\ \lambda_2 = N' - 1, \\ \lambda_3 = P' - 1, \end{cases}$$

Si nous nous reportons au cas particulier de l'élément dv, nous voyons que si l'on prend pour axes de coordonnées des parallèles Ox', Oy', Oz' aux axes principaux de dilatation de cet élément, on aura d'après les formules (8) (21) et (24).

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U'}{\partial x'} = \lambda_1 \qquad \dfrac{\partial V'}{\partial y'} = \lambda_2, \qquad \dfrac{\partial W'}{\partial z'} = \lambda_3, \\ \dfrac{\partial V'}{\partial z'} + \dfrac{\partial W'}{\partial y'} = 0 \\ \dfrac{\partial W'}{\partial x'} + \dfrac{\partial U'}{\partial z'} = 0 \\ \dfrac{\partial U'}{\partial y'} + \dfrac{\partial V'}{\partial x'} = 0 \end{cases}$$

Nous voyons par ce qui précède qu'il existe trois directions rectangulaires entre elles issues du point M, telles que tout point matériel qui se trouvait sur une de ces directions avant la déformation s'y trouve encore après la déformation. Ces trois directions sont les trois axes principaux de dilatation.

Existe-t-il d'autres directions issues du point M possédant la même propriété ?

Imaginons pour un instant que la direction $M\mu$ possède cette propriété. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point μ avant la déformation et ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du point μ_1 où vient le point μ après cette déformation. D'après les égalités (11) nous aurons :

$$\begin{aligned} \xi - x &= M(\xi_1 - x) + \varpi(\eta_1 - y) + \nu(\zeta_1 - z) \\ \eta - y &= \varpi(\xi_1 - x) + N(\eta_1 - y) + \mu(\zeta_1 - z) \\ \zeta - z &= \nu(\xi_1 - x) + \mu(\eta_1 - y) + P(\zeta_1 - z) \end{aligned}$$

Nous supposons que les deux directions $M\mu$, $M\mu_1$, coïncident c'est supposer qu'il existe une quantité S telle que l'on ait :

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \xi - x = S(\xi_1 - x) \\ \eta - y = S(\eta_1 - y) \\ \zeta - z = S(\zeta_1 - z) \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (M - S)(\xi_1 - x) + \varpi(\eta_1 - y) + \nu(\zeta_1 - z) &= 0, \\ \varpi(\xi_1 - x) + (N - S)(\eta_1 - y) + \mu(\zeta_1 - z) &= 0, \\ \nu(\xi_1 - x) + \mu(\eta_1 - y) + (P - S)(\zeta_1 - z) &= 0, \end{aligned}$$

On voit que la quantité S doit être une des trois racines de l'équation (17) les équations (26) expriment donc que la direction $M\mu_1$, ou ce qui revient au même, la direction $M\mu$ coïncide avec l'un des axes principaux de dilatation. Sauf le cas particulier où l'ellipsoïde de dilatation se réduirait à une sphère ou a un ellipsoïde de révolution, il n'existe que trois directions, issues du point M, qui demeurent invariables dans la déformation définie par les égalités (9)

§ 5. – Déterminer la position d'un point matériel après le déplacement lorsqu'on connait sa position avant le déplacement, et inversement.

Prenons pour axes de coordonnées les axes principaux de dilatation issus du point M. Les formules de déformation sont alors les formules (22) que nous pouvons écrire en supprimant les accents,

(27) . . . . $\xi_1 = \dfrac{\xi}{S_1}$ $\qquad \eta_1 = \dfrac{\eta}{S_2}$ $\qquad \zeta_1 = \dfrac{\zeta}{S_3}$

Soit ρ la distance $M\mu_1$ définie par l'égalité :

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

D'après les formules (27) cette égalité peut s'écrire :

$$S_1^2\,\xi_1^2 + S_2^2\,\eta_1^2 + S_3^2\,\zeta_1^2 = \rho^2$$

Cette nouvelle égalité exprime que le point $\mu_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ est à la surface d'un ellipsoïde homothétique du premier ellipsoïde de dilatation :

$$S_1^2 x^2 + S_2^2 y^2 + S_3^2 z^2 = 1,$$

le rapport d'homothétie étant ρ.

Cherchons quelle position il occupe sur cet ellipsoïde.

La droite $M\mu_1$, a des cosinus directeurs proportionnels à

$$\xi_1, \ \eta_1, \ \zeta_1.$$

Le plan diamétral conjugué à cette droite dans le second ellipsoïde de dilatation représenté par l'équation

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + S_3 z^2 = 1$$

a pour équation

$$S_1\,\xi_1 x + S_2\,\eta_1 y + S_3\,\zeta_1 z = 0$$

ou bien en vertu des égalités (27)

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

Il est donc normal à la droite $M\mu$ dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{\xi}{\rho}, \ \frac{\eta}{\rho}, \ \frac{\zeta}{\rho}.$$

On arrive ainsi à l'énoncé suivant :

Connaissant la position μ d'un point matériel avant la déformation, pour trouver sa position μ_1 après la déformation on applique la règle suivante : On mène, par le point M, un plan normal à la droite $M\mu$; on prend, dans le second ellipsoïde de dilatation le demi-diamètre conjugué à ce plan en ayant soin de mener ce diamètre du côté du plan marqué par la demi-normale $M\mu$; ce demi-diamètre rencontre en un certain point un ellipsoïde homothétique du premier ellipsoïde de dilatation, le rapport d'homothétie étant égal à $M\mu$; ce point de rencontre est le point μ_1.

On renversera aisément cette règle de manière qu'elle fasse connaître le point μ lorsqu'on se donnera le point μ_1.

§.6. Formules relatives aux dilatations infiniment petites.

Nous venons d'étudier d'une manière générale la déformation définie par les égalités (9) sans imposer aux coëfficients :

$$M, \; N, \; P,$$
$$m \quad n \quad p,$$

aucune restriction, si ce n'est que le déterminant D défini par l'égalité (10) soit positif.

Revenons maintenant au cas particulier qui nous intéresse, à la déformation infiniment petite d'un élément de masse d'un corps. Dans ce cas d'après les égalités (8) les trois quantités M, N, P diffèrent infiniment peu de 1 et les trois quantités m, n, p, diffèrent infiniment peu de 0. On peut alors établir une série de propositions, vraies seulement pour ce cas particulier et que l'on peut joindre aux propositions générales obtenues dans ce qui précède.

Imaginons que l'on considère un parallélépipède rectangle infiniment petit dont trois arêtes MA, MB, MC sont parallèles aux axes de coordonnées Ox, Oy, Oz.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point A.
ξ', η', ζ', les coordonnées du point B.
ξ'', η'', ζ'', les coordonnées du point C.

Nous aurons évidemment

$$(28) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \xi = MA + x, & \eta = y, \quad \zeta = z, \\ \xi' = x, & \eta' = MB + y, \quad \zeta' = z, \\ \xi'' = x, & \eta'' = y, \quad \zeta'' = MC + z. \end{cases}$$

Après la déformation, le point M n'a pas changé. Les points A, B, C sont venus en A_1, B_1, C_1.

Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du point A_1.
$\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ les coordonnées du point B_1.
$\xi''_1, \eta''_1, \zeta''_1$. les coordonnées du point C_1.

D'après les égalités (3) et (28) nous aurons

$$(29a) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 - x &= \left(1 + \frac{\partial U}{\partial y}\right) MA, \\ \eta_1 - y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right) MA, \\ \zeta_1 - z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) MA, \end{aligned} \right.$$

$$(29b) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1' - x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) MB, \\ \eta_1' - y &= \left(1 + \frac{\partial V}{\partial y}\right) MB, \\ \zeta_1' - z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) MB, \end{aligned} \right.$$

$$(29c) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1'' - x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) MC, \\ \eta_1'' - x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right) MC, \\ \zeta_1'' - z &= \left(1 + \frac{\partial W}{\partial z}\right) MC, \end{aligned} \right.$$

Ces neuf relations définissent complètement le parallélipipède généralement oblique en lequel notre parallélipipède rectangle s'est transformé.

Cherchons d'abord la variation subie par la longueur des arêtes. Nous avons

$$\overline{MA}_1^2 = (\xi_1 - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 + (\zeta_1 - z)^2$$

ou bien d'après les égalités (29)

$$\overline{MA}_1^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] \overline{MA}^2$$

Si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, cette égalité donne la première des trois relations

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} MA_1 - MA &= \frac{\partial U}{\partial x} MA. \\ MB_1 - MB &= \frac{\partial V}{\partial y} MB. \\ MC_1 - MC &= \frac{\partial W}{\partial z} MC \end{aligned} \right.$$

Les deux autres relations se démontrent de même. Les trois arêtes issues d'un même sommet du parallélipipède ont donc subi respectivement des dilatations

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z}.$$

De là les noms de dilatation au point M dans la direction Ox, dilatation au point M dans la direction Oy, dilatation au point M dans la direction Oz, donnés respectivement à ces quantités.

Les trois angles

$$BMC, \quad CMA, \quad AMB,$$

sont droits. Ils se transforment en trois angles

$$B_1MC_1, \quad C_1MA_1, \quad A_1MB_1,$$

dont les cosinus ont des expressions très simples.

Les égalités (29) donnent en effet

$$\cos(MB_1, x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{MB}{MB_1},$$

$$\cos(MB_1, y) = \left(1 + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{MB}{MB_1},$$

$$\cos(MB_1, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{MB}{MB_1},$$

ou bien en vertu des égalités (30)

$$\left(1 + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(MB_1, x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\left(1 + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(MB_1, y) = \left(1 + \frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

$$\left(1 + \frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(MB_1, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

On a de même

$$\left(1 + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\cos(MC_1, x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right),$$

$$\left(1 + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\cos(MC_1, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right),$$

$$\left(1 + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\cos(MC_1, z) = \left(1 + \frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

D'autre part, on a

$$\cos \widehat{B_1CM_1} = \cos(MB_1, x)\cos(MC_1, x) + \cos(MB_1, y)\cos(MC_1, y) + \cos(MB_1, z)\cos(MC_1, z)$$

D'après les égalités précédentes, cette formule devient, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, la première des trois égalités

$$(31) \quad \left\{\begin{aligned} \cos \widehat{B_1MC_1} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \cos \widehat{C_1MA_1} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \cos \widehat{A_1MB_1} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules ont fait donner aux quantités $\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}$, le nom de glissements au point M.

§. 7. Expression de la Dilatation en volume.

La masse élémentaire qui, avant un déplacement quelconque d'un corps occupait le volume dv, occupe, après le déplacement le volume

$$dv' = dv + \delta\, dv$$

la quantité

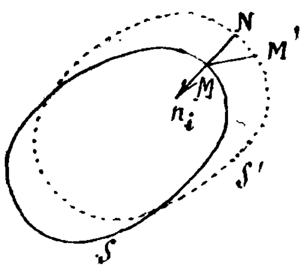
(32) .... $\theta = \dfrac{\delta\, dv}{dv}$

est ce que l'on nomme la dilatation en volume ou dilatation cubique.

Cette dilatation peut s'exprimer au moyen d'une formule très remarquable et très importante que nous allons établir.

Considérons, à l'intérieur du corps, une masse finie quelconque ; elle est, au début du déplacement, limitée par une surface S et occupe un volume v ; à la fin du déplacement elle occupe une surface S' infiniment voisine de la surface S (fig. I.) et occupe un volume v'.

Fig. I.



On a évidemment, d'après l'égalité (32),

(33) .... $v' - v = \int \theta\, dv$,

l'intégration s'étendant à tous les éléments compris à l'intérieur de la surface S.

$v' - v$ est susceptible d'une autre expression.

Soit M un point de la surface S; soit dS un élément de la surface S contenant le point M; par le point M élevons une normale à la surface S; elle rencontre en N la surface S' soit ε une grandeur dont la valeur absolue est la longueur MN, qui est positive si le point N est extérieur au volume v et négative si le point N est intérieur au volume v; il est facile de voir que l'on a

(34) .... $v' - v = \int \varepsilon\, dS$

la sommation s'étendant à tous les éléments de la surface S.

Le déplacement a amené en M' le point qui était primitivement en M. Le segment MM' a pour composantes U, V, W.

Soit n_i la normale à la surface S au point M, vers l'intérieur du volume v. La direction n_i est la direction que doit avoir le segment MN pour que ε soit négatif. On a donc :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -MM' \cos(MM', n_i) \\ &= -MM' \cos(MM', x) \cos(n_i, x) \\ &\quad - MM' \cos(MM', y) \cos(n_i, y) \\ &\quad - MM' \cos(MM', z) \cos(n_i, z)\end{aligned}$$

D'ailleurs :

$$U = MM' \cos(MM', x)$$
$$V = MM' \cos(MM', y)$$
$$W = MM' \cos(MM', z)$$

On a donc

(35) .... $\varepsilon = -\left[U \cos(n_i\, x) + V \cos(n_i\, y) + W \cos(n_i\, z)\right]$

Les égalités (34) et (35) donnent

(36) .... $v' - v = -\int \left[U \cos(n_i\, x) + V \cos(n_i\, y) + W \cos(n_i\, z)\right] dS$

Pour transformer de nouveau cette égalité (36) considérons l'intégrale

$$J = \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

étendue à tous les éléments du volume v.

Soit, de nouveau, M un point de la surface S (fig. 2)

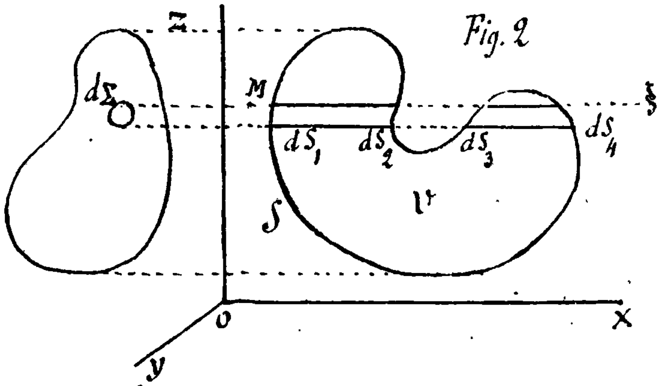


Fig. 2

Menons au point M, une parallèle $M\xi$ à la direction positive de l'axe des x. Si au point M, cette parallèle pénètre à l'intérieur de l'espace v l'angle $(n_i\, x)$ est aigu. Il est obtus si cette parallèle sort de l'espace v.

Menons un plan perpendiculaire à l'axe des x laissant l'espace considéré entièrement du côté des x positifs. Soit, pour fixer les idées, le plan ZOY. Tous les points du volume v se projettent sur ce plan à l'intérieur d'une certaine courbe fermée à connexité simple ou multiple, qui est le contour apparent de ce volume. Divisons l'aire intérieure à cette courbe fermée en éléments superficiels.

Soit $d\Sigma$ un de ces éléments. Par tous les points du contour de l'élément $d\Sigma$, menons des parallèles à l'axe des x. Nous obtiendrons ainsi un cylindre infiniment délié qui découpera sur la surface S un nombre pair d'éléments. Nous désignerons ces éléments dans l'ordre où ils sont rencontrés quand on s'avance parallèlement à OX par les indices $1, 2, \dots 2n$. Leurs surfaces seront $dS_1, dS_2, \dots, dS_{2n}$. En un point d'un élément de rang impair une parallèle à OX pénètre à l'intérieur du volume v ; l'angle (n_i, x) est aigu. Au contraire en un point d'un élément de rang pair, une parallèle à OX sort du volume v ; l'angle (n_i, x) est obtus. On peut donc écrire :

(37) .... $d\Sigma = dS_1 \cos(n_i, x)_1 = -dS_2 \cos(n_i, x)_2$

$$= dS_3 \cos(n_i, x)_3 = \dots\dots = -dS_{2n} \cos(n_i\, x)_{2n}$$

Soient : x_1 l'abscisse d'un point de l'élément dS_1 ; x_2 l'abscisse d'un point de l'élément dS_2 ; ... x_{2n} l'abscisse d'un point de l'élément dS_{2n}. Nous aurons évidemment :

$$J = \int d\Sigma \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \dots + \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} \frac{\partial U}{\partial x} dx \right),$$

Le signe $\int$ indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments $d\Sigma$ compris à l'intérieur du contour apparent de l'espace considéré.

La fonction U étant continue à l'intérieur de cet espace si l'on désigne par U_1 sa valeur en un point de l'élément dS_1, par U_2 sa valeur en un point de l'élément dS_2, par U_{2n} sa valeur en un point de l'élément dS_{2n} l'égalité précédente pourra s'écrire

$$J = -\int (U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots - U_{2n-1} + U_{2n}) \, d\Sigma$$

ou bien en vertu des égalités (37)

$$J = -\int \Big[U_1 \cos(n_i, x)_1 \, dS_1 + U_2 \cos(n_i, x)_2 \, dS_2 + U_3 \cos(n_i, x)_3 \, dS_3 + \dots + U_{2n} \cos(n_i, x)_{2n} \, dS_{2n} \Big]$$

ou enfin

$$J = -\int U \cos(n_i, x) \, dS,$$

la sommation s'étendant à tous les éléments de la surface S on a donc

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dv = -\int U \cos(n_i, x) \, dS$$

et de même

$$\int \frac{\partial V}{\partial y} dv = -\int V \cos(n_i, y) \, dS$$

$$\int \frac{\partial W}{\partial z} dv = -\int W \cos(n_i, z) \, dS$$

d'où cette identité, dont nous aurons à faire un constant usage :

(38) .... $$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dv$$

$$= -\int \Big[U \cos(n_i, x) + V \cos(n_i, y) + W \cos(n_i, z) \Big] dS$$

Faisons immédiatement l'application de cette identité à l'égalité (36) qui devient

(39) $$v' - v = \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dv$$

La comparaison des égalités (33) et (39) conduit au résultat suivant : L'intégrale

$$\int \left[\theta - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] dv$$

étendue à un domaine quelconque tracé à l'intérieur du corps considéré est égale à 0.

Il en résulte que l'on doit avoir, en tout point intérieur au corps

$$\theta - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0$$

Supposons, en effet, que cette quantité soit différente de 0 en un certain point M et qu'elle y soit, par exemple, positive : Comme les quatre quantités

$$\theta \qquad \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{\partial W}{\partial z}$$

sont supposées fonctions continues d'x, y, z, on pourrait entourer le point M d'un domaine D en tout point duquel la quantité considérée serait positive. Dès lors l'intégrale :

$$\int \left[\theta - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] dv ,$$

étendue au domaine D, ne pourrait être égale à 0. Ainsi lorsqu'un corps subit une modification infiniment petite quelconque, la dilatation en volume est donné en chaque point par la relation :

(40) .... $\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$

Elle est la somme des dilatations suivant trois directions rectangulaires quelconques.

Chapitre III.

De la Pression à l'Intérieur d'un Corps quelconque.

§.1 _ Conditions nécessaires pour l'équilibre de tout Corps.

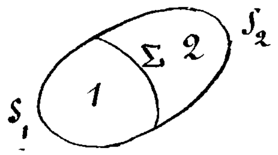
En général les liaisons auxquelles un corps est assujetti n'imposent pas aux diverses masses élémentaires qui le composent d'avoir un volume, une forme, un état invariables, elles n'imposent même pas toujours au corps de demeurer continu dans ses déplacements. Supposer que dans les déplacements virtuels auxquels il est soumis, le corps demeure continu ; que ses différentes masses élémentaires gardent leur volume, leur forme, leur état, c'est en général, ajouter de nouvelles liaisons à celles qui définissent le corps.

Il n'est pas malaisé de déduire du Principe des vitesses virtuelles et de la généralisation thermodynamique de ce principe la conséquence suivante :

Si un système est en équilibre lorsqu'il est assujetti à de certaines liaisons, il demeurera en équilibre lorsqu'on l'assujettira non seulement à ces liaisons, mais encore à de nouvelles liaisons compatibles avec les premières.

On voit donc que si nous considérons un système qui doit demeurer continu dans ses déplacements, dont les diverses masses élémentaires doivent garder un volume, une forme un état invariable ; si nous déterminons les conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un semblable système, ces conditions seront toujours nécessaires, mais en général ne seront plus suffisantes, pour l'équilibre d'un système quelconque.

Fig. 3

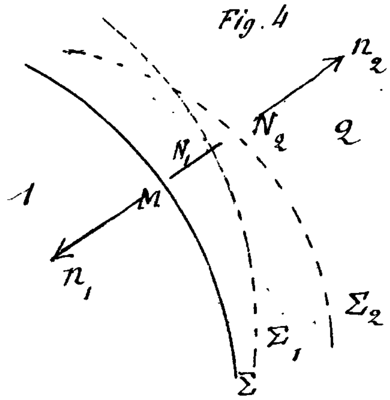


Considérons donc un système formé d'un certain nombre de masses, deux par exemple, les masses 1 et 2 (fig. 3) dont chacune est assujettie à demeurer continue dans ses déplacements virtuels

Si u_1, v_1, w_1 désignent les composantes, dans une modification virtuelle, du déplacement du point $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ du corps 1 ; si u_2, v_2, w_2 désignent les composantes, dans le même déplacement du point $M_2 (x_2, y_2, z_2)$ du corps 2, les quantités u_1, v_1, w_1, seront des fonctions continues de x_1, y_1, z_1, et les quantités $u_2\, v_2, w_2$ des fonctions continues de x_2, y_2, z_2.

Nous supposerons les deux corps assujettis à demeurer en contact. Cherchons à exprimer cette condition.

Fig. 4



Soit Σ la surface de contact (fig. 4) au début du déplacement. A la fin du déplacement la surface qui limite le corps 1 est en Σ_1. Soit M un point de la surface S. Soient Mn_1, Mn_2 les demi-normales à la surface Σ en ce point menées respectivement vers l'intérieur des corps 1 et 2. Soit ε_1 la distance des surfaces Σ, Σ_1 comptée positivement lorsque la surface Σ_1 est extérieure au volume 1. Soit ε_2 la distance des surfaces $\Sigma\, \Sigma_2$, comptée positivement lorsque la surface Σ_2 est extérieure au volume 2. Nous avons [Chapitre II. Égalité (35)]

$$\varepsilon_1 = -\left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \right]$$
$$\varepsilon_2 = -\left[u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) \right]$$

Si les deux corps 1 et 2 sont encore en contact après le déplacement, les deux surfaces $\Sigma_1\, \Sigma_2$ sont identiques ; on a donc

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$$

en tout point de la surface Σ, ou bien, d'après les égalités précédentes

(1) .... $u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)$
$+ u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) = 0.$

Chaque masse élémentaire du corps 1 doit garder dans le déplacement une forme invariable ; il faut et il suffit pour cela qu'en chaque point du corps 1 on ait les égalités :

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0 \qquad \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial w_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} = 0 \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} = 0. \end{cases}$$

On doit de même avoir, en tout point du corps 2 :

$$(2^{bis}) \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \qquad \dfrac{\partial v_2}{\partial y_2} = 0. \qquad \dfrac{\partial w_2}{\partial z_2} = 0. \\[2ex] \dfrac{\partial w_2}{\partial y_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial z_2} = 0 \qquad \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2} + \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2} = 0 \qquad \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} = 0. \end{cases}$$

Les égalités (1) (2) et (2 bis) représentent les restrictions auxquelles sont soumis les déplacements virtuels que nous imposerons à notre corps.

Ce corps sera soumis à deux sortes de forces extérieures.

Les unes seront appliquées à ses divers éléments de volume. Si dv est le volume d'un de ces éléments ; si ρ est la densité en un point de l'élément dv, les composantes de la force appliquée à cet élément seront

$$\rho X\, dv, \quad \rho Y\, dv, \quad \rho Z\, dv,$$

X, Y, Z, étant trois fonctions uniformes finies et continues des coordonnées x, y, z d'un point de l'élément dv.

Les autres sont appliquées aux divers éléments des surfaces S_1, S_2, qui le limitent. Si dS_1 est un élément de la surface S_1 nous désignerons par $P_1\, dS_1$ la valeur absolue de la force qui agit sur cet élément : P_1 est, par définition, la grandeur de la pression en un point de l'élément dS_1. La direction de la force qui agit sur l'élément dS_1 est par définition la direction de la pression en un point de l'élément dS_1 ; nous la représenterons souvent par le symbole P_1. Nous supposerons que, si la surface S_1 ne présente pas de singularité, la grandeur et la direction de la pression varient d'une manière continue. Les modifications virtuelles que nous considérons, laissent invariables le volume, la forme, l'état de chaque masse élémentaire. Elles laissent donc invariable le Potentiel Thermodynamique Interne du système. Comme, d'ailleurs elles sont essentiellement renversables, on obtiendra les conditions d'équilibre que nous cherchons en exprimant que le travail virtuel des forces extérieures est égal à 0.

Cette égalité est facile à écrire.

Le travail virtuel de la force appliquée à l'élément dv, est :

$$\rho\,(Xu + Yv + Zw)\, dv.$$

Le travail virtuel de la force appliquée à l'élément dS_1 est

$$P_1\left[u_1 \cos(P_1, x) + v_1 \cos(P_1, y) + w_1 \cos(P_1, z)\right] dS_1$$

L'égalité à 0 de la somme des travaux virtuels des forces extérieures s'écrit donc

$$\begin{aligned}&\int \rho_1 (X u_1 + Y v_1 + Z w_1)\, dv_1\\ &+\int \rho_2 (X u_2 + Y v_2 + Z w_2)\, dv_2\\ &+\int P_1\left[u_1 \cos(P_1, x) + v_1 \cos(P_1, y) + w_1 \cos(P_1, z)\right] dS_1\\ &+\int P_2\left[u_2 \cos(P_2, x) + v_2 \cos(P_2, y) + w_2 \cos(P_2, z)\right] dS_2 = 0\end{aligned}$$

Cette égalité ne doit pas avoir lieu quels que soient

$$u_1,\ v_1,\ w_1,$$
$$u_2,\ v_2,\ w_2,$$

elle doit seulement avoir lieu pour les valeurs de ces six fonctions qui sont assujetties aux restrictions (1) (2) et (2 bis). Les principes du calcul des variations donnent alors les propositions suivantes :

Il doit exister 1° Six fonctions continues des coordonnées x_1, y_1, z_1, d'un point du corps 1 :

$$(N_1)_1, (N_2)_1, (N_3)_1, (T_1)_1, (T_2)_1, (T_3)_1;$$

2° Six fonctions continues des coordonnées x_2, y_2, z_2 d'un point du corps 2

$$(N_1)_2 (N_2)_2\ (N_3)_2, (T_1)_2, (T_2)_2, (T_3)_2,$$

3° Une quantité λ, variable d'une manière continue le long de la surface Σ ; telles que l'on ait, quelles que soient les quantités

$$u_1,\ v_1,\ w_1,$$
$$u_2,\ v_2,\ w_2,$$

l'égalité

(3) .... $$\begin{aligned}&\int \rho_1 (X u_1 + Y v_1 + Z w_1)\, dv_1\\ &+\int \rho_2 (X u_2 + Y v_2 + Z w_2)\, dv_2\\ &+\int P_1\left[u_1 \cos(P_1, x) + v_1 \cos(P_1, y) + w_1 \cos(P_1, z)\right] dS_1\\ &+\int P_2\left[u_2 \cos(P_2, x) + v_2 \cos(P_2, y) + w_2 \cos(P_2, z)\right] dS_2\\ &+\int\Big[(N_1)_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + (N_2)_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + (N_3)_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}\\ &\quad + (T_1)_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) + (T_2)_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) + (T_3)_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\Big] dv_1\\ &+\int\Big[(N_1)_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + (N_2)_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + (N_3)_2 \frac{\partial w_2}{\partial z}\\ &\quad + (T_1)_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + (T_2)_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) + (T_3)_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\Big] dv_2\end{aligned}$$

$$+\int \lambda \Big[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) \Big] d\Sigma = 0$$

Cette égalité peut se transformer. Si l'on observe que

$$N_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(N_1 u_1) - u_1 \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

on aura

$$\int (N_1)_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} dv_1 = \int \frac{\partial}{\partial x}\big[(N_1)_1 u_1\big] dv_1 - \int u_1 \frac{\partial (N_1)_1}{\partial x} dv_1$$

D'ailleurs, d'après l'égalité (38) du Chapitre II.

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\big[(N_1)_1 u_1\big] dv_1 = -\int (N_1)_1 u_1 \cos(n_i, x)\, dS - \int (N_1)_1 u_1 \cos(n_1, x)\, d\Sigma,$$

On a donc

$$\int (N_1)_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} dv_1 = -\int u_1 \frac{\partial (N_1)_1}{\partial x} dv_1 - \int (N_1)_1 u_1 \cos(n_i, x)\, dS_1 - \int (N_1)_1 u_1 \cos(n_1, x)\, d\Sigma$$

Par des transformations de ce genre, l'égalité (3) deviendra :

$$
\begin{aligned}
(4) \ldots\ldots \quad & \int \Big[\rho_1 X - \frac{\partial (N_1)_1}{\partial x} - \frac{\partial (T_3)_1}{\partial y} - \frac{\partial (T_2)_1}{\partial z} \Big] u_1\, dv_1 \\
+ & \int \Big[\rho_1 Y - \frac{\partial (T_3)_1}{\partial x} - \frac{\partial (N_2)_1}{\partial y} - \frac{\partial (T_1)_1}{\partial z} \Big] v_1\, dv_1 \\
+ & \int \Big[\rho_1 Z - \frac{\partial (T_2)_1}{\partial x} - \frac{\partial (T_1)_1}{\partial y} - \frac{\partial (N_3)_1}{\partial z} \Big] w_1\, dv_1 \\
+ & \int \Big[\rho_2 X - \frac{\partial (N_1)_2}{\partial x} - \frac{\partial (T_3)_2}{\partial y} - \frac{\partial (T_2)_2}{\partial z} \Big] u_2\, dv_2 \\
+ & \int \Big[\rho_2 Y - \frac{\partial (T_3)_2}{\partial x} - \frac{\partial (N_2)_2}{\partial y} - \frac{\partial (T_1)_2}{\partial z} \Big] v_2\, dv_2 \\
+ & \int \Big[\rho_2 Z - \frac{\partial (T_2)_2}{\partial x} - \frac{\partial (T_1)_2}{\partial y} - \frac{\partial (N_3)_2}{\partial z} \Big] w_2\, dv_2 \\
+ & \int \Big[P_1 \cos(P_1, x) - (N_1)_1 \cos(n_i, x) - (T_3)_1 \cos(n_i, y) - (T_2)_1 \cos(n_i, z) \Big] u_1\, dS_1 \\
+ & \int \Big[P_1 \cos(P_1, y) - (T_3)_1 \cos(n_i, x) - (N_2)_1 \cos(n_i, y) - (T_1)_1 \cos(n_i, z) \Big] v_1\, dS_1 \\
+ & \int \Big[P_1 \cos(P_1, z) - (T_2)_1 \cos(n_i, x) - (T_1)_1 \cos(n_i, y) - (N_3)_1 \cos(n_i, z) \Big] w_1\, dS_1 \\
+ & \int \Big[P_2 \cos(P_2, x) - (N_1)_2 \cos(n_i, x) - (T_3)_2 \cos(n_i, y) - (T_2)_2 \cos(n_i, z) \Big] u_2\, dS_2 \\
+ & \int \Big[P_2 \cos(P_2, y) - (T_3)_2 \cos(n_i, x) - (N_2)_2 \cos(n_i, y) - (T_1)_2 \cos(n_i, z) \Big] v_2\, dS_2 \\
+ & \int \Big[P_2 \cos(P_2, z) - (T_2)_2 \cos(n_i, x) - (T_1)_2 \cos(n_i, y) - (N_3)_2 \cos(n_i, z) \Big] w_2\, dS_2 \\
+ & \int \Big\{ \big[\lambda - (N_1)_1\big] \cos(n_1, x) - (T_3)_1 \cos(n_1, y) - (T_2)_1 \cos(n_1, z) \Big\} u_1\, d\Sigma \\
+ & \int \Big\{ -(T_3)_1 \cos(n_1, x) + \big[\lambda - (N_2)_1\big] \cos(n_1, y) - (T_1)_1 \cos(n_1, z) \Big\} v_1\, d\Sigma \\
+ & \int \Big\{ -(T_2)_1 \cos(n_1, x) - (T_1)_1 \cos(n_1, y) + \big[\lambda - (N_3)_1\big] \cos(n_1, z) \Big\} w_1\, d\Sigma
\end{aligned}
$$

$$+\int\left\{\left[\lambda-(N_1)_2\right]\cos(n_2,x)-(T_3)_2\cos(n_2,y)-(T_2)_2\cos(n_2,z)\right\}u_2\,d\Sigma$$
$$+\int\left\{-(T_3)_2\cos(n_2,x)+\left[\lambda-(N_2)_2\right]\cos(n_2,y)-(T_1)_2\cos(n_2,z)\right\}v_2\,d\Sigma$$
$$+\int\left\{-(T_2)_2\cos(n_2,x)-(T_1)_2\cos(n_2,y)+\left[\lambda-(N_3)_2\right]\cos(n_2,z)\right\}w_2\,d\Sigma=0$$
$$=0$$

Dans cette égalité, les fonctions u_1, v_1, w_1 sont simplement assujetties à être des fonctions continues d'x_1, y_1, z_1; les fonctions u_2, v_2, w_2 sont simplement assujetties à être des fonctions continues d'$x_2\, y_2\, z_2$.

Cette égalité exige, en premier lieu, qu'en tout point du corps 1 on ait :

$$\rho_1 X-\frac{\partial(N_1)_1}{\partial x}\ \frac{\partial(T_3)_1}{\partial y}-\frac{\partial(T_2)_1}{\partial z}=0$$

Supposons, en effet que le premier membre de cette égalité soit différent de 0 en un point $(x_1, y_1; z_1)$; ce premier membre variant d'une manière continue à l'intérieur du corps 1, on pourra tracer autour du point (x_1, y_1, z_1) un domaine D à l'intérieur duquel cette quantité aura un signe constant; que l'on donne alors à tous les points du domaine D un déplacement parallèle à l'axe des x, la grandeur de ce déplacement tendant graduellement vers 0 au voisinage des limites du domaine D; qu'on laisse immobiles toutes les autres parties du système; on aura alors, en tout point du domaine D,

$$u_1>0,\qquad v_1=0,\qquad w_1=0,$$

et, en tout point extérieur au domaine D,

$$u=0,\qquad v=0,\qquad w=0,$$

Le premier membre de l'égalité (4) se réduira alors a

$$\int_D\left[\rho_1 X-\frac{\partial(N_1)_1}{\partial x}-\frac{\partial(T_3)_1}{\partial y}-\frac{\partial(T_2)_1}{\partial z}\right]u_1\,dv_1$$

La quantité sous le signe $\int$ ayant un signe constant cette intégrale ne pourra être egale à 0, contrairement à l'égalité (4)

Par cette démonstration et par des démonstrations analogues on voit que l'on a :

1° En tout point du corps 1;

$$(5)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}\dfrac{\partial(N_1)_1}{\partial x}+\dfrac{\partial(T_3)_1}{\partial y}+\dfrac{\partial(T_2)_1}{\partial z}=\rho_1 X\\[2mm]\dfrac{\partial(T_3)_1}{\partial x}+\dfrac{\partial(N_2)_1}{\partial y}+\dfrac{\partial(T_1)_1}{\partial z}=\rho_1 Y\\[2mm]\dfrac{\partial(T_2)_1}{\partial x}+\dfrac{\partial(T_1)_1}{\partial y}+\dfrac{\partial(N_3)_1}{\partial z}=\rho_1 Z\end{cases}$$

2° En tout point du corps 2 :

$$(5^{bis}_1)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}\dfrac{\partial(N_1)_2}{\partial x}+\dfrac{\partial(T_3)_2}{\partial y}+\dfrac{\partial(T_2)_2}{\partial z}=\rho_2 X\\[2mm]\dfrac{\partial(T_3)_2}{\partial x}+\dfrac{\partial(N_2)_2}{\partial y}+\dfrac{\partial(T_1)_2}{\partial z}=\rho_2 Y\\[2mm]\dfrac{\partial(T_2)_2}{\partial x}+\dfrac{\partial(T_1)_2}{\partial y}+\dfrac{\partial(N_3)_2}{\partial z}=\rho_2 Z\end{cases}$$

Grâce à ces égalités (5) et (5^{bis}) on peut au premier membre de l'égalité (4) effacer les six premiers termes.

De l'égalité restante, on déduit facilement la conséquence suivante :

La quantité :

$$P_1 \cos(P_1\, x) - (N_1)_1 \cos(n_i\, x) - (T_3)_1 \cos(n_i\, y) - (T_2)_1 \cos(n_i\, z)$$

est égale à 0 en tout point de la surface S_1.

Supposons en effet que cette quantité diffère de 0 en un point M_1 de la surface S_1 qui ne soit pas un point singulier. Cette quantité variant d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface S_1 on pourrait toujours tracer autour du point M_1 sur la surface S_1 un domaine D en tout point duquel elle aurait même signe qu'au point M_1. Supposons alors, ce qui est possible, qu'en tout point du domaine D, on ait

$$u_1 > 0, \quad v_1 = 0 \quad w_1 = 0,$$

et qu'en tout autre point des surfaces S_1, S_2, Σ on ait

$$u = 0 \quad v = 0, \quad w = 0$$

Le premier membre de l'égalité (4) se réduirait à l'intégrale :

$$\int_D \left[P_1 \cos(P_1\, x) - (N_1)_1 \cos(n_i\, x) - (T_3)_1 \cos(n_i\, y) - (T_2)_1 \cos(n_i\, z)\right] u_1\, dS,$$

dont tous les éléments seraient de même signe et qui contrairement à l'égalité (4) ne pourrait être égale à 0.

Par cette démonstration et par des démonstrations analogues, on voit que l'on a :

1° En tout point de la surface S_1 :

$$(6) \ldots\ldots \begin{cases} (N_1)_1 \cos(n_i, x) + (T_3)_1 \cos(n_i, y) + (T_2)_1 \cos(n_i z) = P_1 \cos(P_1, x) \\ (T_3)_1 \cos(n_i, x) + (N_2)_1 \cos(n_i, y) + (T_1)_1 \cos(n_i z) = P_1 \cos(P_1, y) \\ (T_2)_1 \cos(n_i, x) + (T_1)_1 \cos(n_i, y) + (N_3)_1 \cos(n_i z) = P_1 \cos(P_1 \cdot z) \end{cases}$$

2° En tout point de la surface S_2 :

$$(6^{bis}) \ldots\ldots \begin{cases} (N_1)_2 \cos(n_i, x) + (T_3)_2 \cos(n_i\, y) + (T_2)_2 \cos(n_i z) = P_2 \cos(P_2, x) \\ (T_3)_2 \cos(n_i, x) + (N_2)_2 \cos(n_i, y) + (T_1)_2 \cos(n_i z) = P_2 \cos(P_2, y) \\ (T_2)_2 \cos(n_i x) + (T_1)_2 \cos(n_i\, y) + (N_3)_2 \cos(n_i z) = P_2 \cos(P_2, z) \end{cases}$$

3° En tout point de la surface de contact Σ des corps 1 et 2 :

$$(7) \ldots\ldots \begin{cases} [(N_1)_1 - \lambda] \cos(n_1, x) + (T_3)_1 \cos(n_1, y) + (T_2)_1 \cos(n_1, z) = 0, \\ (T_3)_1 \cos(n_1, x) + [(N_2)_1 - \lambda] \cos(n_1, y) + (T_1)_1 \cos(n_1, z) = 0, \\ (T_2)_1 \cos(n_1, x) + (T_1)_1 \cos(n_1, y) + [(N_3)_1 - \lambda] \cos(n_1, z) = 0, \end{cases}$$

$$(7^{bis}) \ldots\ldots \begin{cases} [(N_1)_2 - \lambda] \cos(n_2\, x) + (T_3)_2 \cos(n_2\, y) + (T_2)_2 \cos(n_2\, z) = 0. \\ (T_3)_2 \cos(n_2, x) + [(N_2)_2 - \lambda] \cos(n_2 y) + (T_1)_2 \cos(n_2 z) = 0, \\ (T_2)_2 \cos(n_2, x) + (T_1)_2 \cos(n_2 y) + [(N_3)_2 - \lambda] \cos(n_2 z) = 0, \end{cases}$$

L'existence de treize fonctions N, T, λ, vérifiant les conditions (5), (5 bis), (6) (6 bis), (7), (7 bis) équivaut aux conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système dont les masses élémentaires sont invariables de volume, de forme et d'état ; ce sont des conditions nécessaires pour l'équilibre de tout système.

Commençons par étudier un système formé d'un seul corps ; nous discuterons, en terminant, les conditions (7) et (7 bis) relatives à la surface de contact de deux corps.

§2. Définition de la Pression à l'intérieur d'un Corps.

Un corps limité par une surface S, est en équilibre. Il existe donc six fonctions d'x, y, z.

$$N_1 \quad N_2 \,,\, N_3$$
$$T_1 \quad T_2 \quad T_3$$

uniformes, finies et continues dans toute l'étendue de ce corps, vérifiant en tout point de ce corps les relations (5) que nous écrirons simplement maintenant :

$$(8)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z} = \rho X, \\[2mm] \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z} = \rho Y, \\[2mm] \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z} = \rho Z, \end{cases}$$

et en tout point de la surface S les relations (6) que nous écrirons simplement :

$$(9)\ldots\ldots \begin{cases} N_1 \cos(n_i, x) + T_3 \cos(n_i, y) + T_2 \cos(n_i, z) = P \cos(P, x) \\ T_3 \cos(n_i, x) + N_2 \cos(n_i, y) + T_1 \cos(n_i, z) = P \cos(P, y) \\ T_2 \cos(n_i, x) + T_1 \cos(n_i, y) + N_3 \cos(n_i, z) = P \cos(P, z) \end{cases}$$

A l'intérieur du corps traçons une surface Σ circonscrivant soit seule (fig. 5) soit avec une partie S_1 de la surface S, (fig. 6)

Fig. 5.

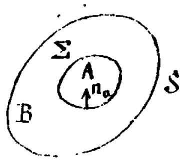
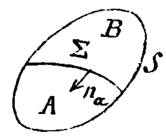


Fig. 6.



une partie A du corps. Soit B ce qui reste du corps lorsqu'on enlève la partie A

Imaginons que nous enlevions la partie B du corps ; que nous laissions le corps A soumis aux forces extérieures qui agissaient sur lui ; qu'en outre nous appliquions à la surface Σ des pressions dont la grandeur et la direction en chaque point soient définies par les égalités

$$(10) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} P\cos(P,x) = N_1\cos(n_a,x) + T_3\cos(n_a,y) + T_2\cos(n_a,z), \\ P\cos(P,y) = T_3\cos(n_a,x) + N_2\cos(n_a,y) + T_1\cos(n_a,z), \\ P\cos(P,z) = T_2\cos(n_a,x) + T_1\cos(n_a,y) + N_3\cos(n_a,z). \end{cases}$$

n_a étant la normale à la surface Σ vers l'intérieur du domaine A. Après ces opérations, le corps A sera encore en équilibre, car les six fonctions :

$$N_1, N_2, N_3,$$
$$T_1, T_2, T_3,$$

continueront à vérifier les égalités (8) en tout point du corps A et les égalités (9) en tout point de la surface qui le limite.

Nous voyons donc que l'on peut, sans troubler l'équilibre de la partie A du corps, supprimer la liaison que lui impose la présence de la partie B, pourvu que l'on applique à la surface de contact des deux parties A et B des pressions données par les égalités (10).

Nous remarquerons que pour connaître la grandeur et la direction de la pression qui doit être ainsi appliquée à un élément $d\Sigma$ de la surface Σ tracée à l'intérieur d'un corps donné soumis à des forces données, il est nécessaire et suffisant de connaître

1° Un point (x, y, z) de cet élément.

2° La grandeur $d\Sigma$ de cet élément.

3° L'orientation de cet élément, c'est-à-dire la direction de la normale n_a à cet élément menée vers l'intérieur de la partie A du corps qui est censée conservée.

Il n'est pas du tout nécessaire de connaître la forme de la surface Σ.

Peut-on de plusieurs manières différentes appliquer à la surface Σ des pressions qui maintiennent en équilibre la partie A du corps, et telles que la pression supportée par l'élément $d\Sigma$ exige seulement la connaissance de la grandeur, de la position et de l'orientation de l'élément $d\Sigma$ sans exiger la connaissance de la surface Σ?

Nous admettrons que cela ne se peut faire que d'une manière. La grandeur géométrique désignée par P sera alors entièrement déterminée lorsqu'on connaîtra un point de l'élément $d\Sigma$ et l'orientation de cet élément. Nous pourrons parler sans ambiguïté de la pression en chaque point du corps pour chaque orientation de l'élément. Nous allons étudier comment varie cette pression avec l'orientation de l'élément.

§.3 – Comment varie la pression avec l'orientation des éléments qu'on peut tracer autour d'un point.

Les égalités (8) et (9) sur lesquelles repose la définition de la pression à l'intérieur d'un corps, sont dues à Cauchy [1]; elles ont été ensuite retrouvées par Poisson [2]; les démonstrations données par ces auteurs laissent à désirer, comme l'a montré Lamé [3]; mais la démonstration même que Lamé a employée, et qui n'est qu'une modification de celle de Cauchy, n'est pas exempte de critiques; en particulier, elle suppose l'existence de la pression pour en trouver la grandeur et la direction. On évite les reproches qui peuvent être adressés à ces théories en suivant, comme nous l'avons fait, la voie employée par Lagrange pour définir la pression en Hydrostatique.

Les variations que subissent la grandeur et la direction de la pression en un point d'un élément superficiel pris à l'intérieur d'un corps lorsqu'on fait tourner cet élément autour d'un de ses points sont soumis à des théorèmes très élégants qui sont dus à Cauchy [4] à Lamé et à Clapeyron [5] Nous allons exposer ces théorèmes.

1°. — La pression change de sens avec l'orientation de l'élément.

Soit un premier élément d Σ dont l'orientation est marquée par la normale n_a. La pression P en un point de cet élément est donnée en grandeur direction et sens par les égalités (10)

$$\begin{aligned}
P\cos(P,x) &= N_1\cos(n_a,x) + T_3\cos(n_a,y) + T_2\cos(n_a,z)\\
P\cos(P,y) &= T_3\cos(n_a,x) + N_2\cos(n_a,y) + T_1\cos(n_a,z)\\
P\cos(P,z) &= T_2\cos(n_a,x) + T_1\cos(n_a,y) + N_3\cos(n_a,z)
\end{aligned}$$

Considérons un élément situé au même point du corps, mais dont l'orientation n_b soit précisément opposée à n_a. La pression P' en un point de cet élément est donnée en grandeur direction et sens par les égalités :

$$\begin{aligned}
P'\cos(P',x) &= N_1\cos(n_b,x) + T_3\cos(n_b,y) + T_2\cos(n_b,z)\\
P'\cos(P',y) &= T_3\cos(n_b,x) + N_2\cos(n_b,y) + T_1\cos(n_b,z)\\
P'\cos(P',x) &= T_2\cos(n_b,x) + T_1\cos(n_b,y) + N_3\cos(n_b,z)
\end{aligned}$$

—(1) — Cauchy. — Recherche sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides élastiques ou non élastiques. (Lu à l'académie des Sciences le 30 Sept. 1822) Bulletin de la Société Philomatique. 1823 p. 9) — Exercices de Mathématiques. T. II. 1827. T. III. 1828. — Sur les diverses méthodes à l'aide desquelles on peut établir les équations qui représentent les lois d'équilibre ou le mouvement intérieur des corps solides ou fluides. (Lu à l'académie des Sciences le 8 Mars 1830. Bulletin des Sciences Mathématiques de Ferussac T. XIII. p 169)

—(2) — Poisson Mémoire sur l'Equilibre et le mouvement des corps élastiques (Lu à l'Académie des Sciences le 14 Avril 1828. — Mémoires de l'Academie des Sciences. T. VIII p. 357)

—(3) — Lamé. Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des corps solides.

—(4) — Cauchy. — Loc. cit.

—(5) — Lamé et Clapeyron. — Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes (Mem. des Savants Etrangers

Lamé. — Leçons sur la théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps solides. Cinquième Leçon.

Les deux directions n_a, n_b, étant opposées l'une à l'autre, on a :

$$\cos(n_a\, x) + \cos(n_b, x) = 0.$$
$$\cos(n_a\, y) + \cos(n_b, y) = 0.$$
$$\cos(n_a\, z) + \cos(n_b, z) = 0.$$

Dès lors les égalités precedentes donnent :

$$P = P'$$
$$\cos(P, x) + \cos(P' x) = 0$$
$$\cos(P, y) + \cos(P' y) = 0$$
$$\cos(P, z) + \cos(P' z) = 0$$

Ainsi : lorsque l'orientation d'un élément vire cap pour cap, la pression en un point de cet élément vire cap pour cap sans changer de grandeur.

2° Interprétation des N_i, T_i.

Prenons un élément dont l'orientation soit marquée par la direction positive de l'axe des x ; cet élément $d\,\Sigma_x$ est par conséquent situé dans le plan YOZ. Nous avons, pour un semblable élément, les relations :

$$\cos(n_a, x) = -1, \quad \cos(n_a, y) = 0, \quad \cos(n_a\, z) = 0,$$

et les relations (10) donnent alors :

$$(11) \ldots\ldots \begin{cases} P\cos(P, x) = N_1, \\ P\cos(P, y) = T_3, \\ P\cos(P, z) = T_2, \end{cases}$$

De même, pour un élément $d\,\Sigma_y$ ayant pour orientation la direction positive de l'axe des y :

$$(11^{bis}) \ldots\ldots \begin{cases} P\cos(P, x) = T_3, \\ P\cos(P, y) = N_2, \\ P\cos(P, z) = T_1, \end{cases}$$

Enfin, pour un élément $d\,\Sigma_z$ ayant pour orientation la direction positive de l'axe des z :

$$(11^{ter}) \ldots\ldots \begin{cases} P\cos(P, x) = T_2, \\ P\cos(P, y) = T_1, \\ P\cos(P, z) = N_3, \end{cases}$$

Les égalités (11), (11^{bis}), (11^{ter}) fournissent une interprétation très simple des six quantités :

$$N_1 \quad N_2 \quad N_3,$$
$$T_1 \quad T_2 \quad T_3.$$

La comparaison des égalités (11) (11^{bis}) (11^{ter}), conduit aux résultats suivants:

La composante suivant OZ de la pression en un point de l'élément

$d\Sigma_y$ est égale à la composante suivant OY de la pression en un point de l'élément $d\Sigma_z$.

La composante suivant OX de la pression en un point de l'élément $d\Sigma_z$ est égale à la composante suivant OZ de la pression en un point de l'élément $d\Sigma_x$.

La composante suivant OY de la pression en un point de l'élément $d\Sigma_x$ est égale à la composante suivant OX de la pression en un point de l'élément $d\Sigma_y$

Ces trois propositions sont des cas particuliers d'un Théorème qui est dû à Cauchy et que nous allons démontrer.

3° Égalité des composantes normales réciproques.

Considérons un élément $d\Sigma$ dont l'orientation est n_a. En chaque point de cet élément la pression est définie par les égalités (10) Projetons cette pression sur une direction quelconque n'_a la projection aura pour valeur :

$$P\cos(P, n'_a) = P\left[\cos(P,x)\cos(n'_a,x)+\cos(P,y)\cos(n'_a,y)\right.$$
$$\left.+\cos(P,z)\cos(n'_a,z)\right].$$

ou bien d'après les égalités (10)

$$\begin{aligned}&N_1\cos(n_a,x)\cos(n'_a,x)+T_3\cos(n_a,y)\cos(n'_a,x)+T_2\cos(n_a,z)\cos(n'_a,x),\\ &+T_3\cos(n_a,x)\cos(n'_a,y)+N_2\cos(n_a,y)\cos(n'_a,y)+T_1\cos(n_a,z)\cos(n'_a,y),\\ &+T_2\cos(n_a,z)\cos(n'_a,z)+T_1\cos(n_a,y)\cos(n'_a,z)+N_3\cos(n_a,z)\cos(n'_a,z).\end{aligned}$$

Cette expression est symétrique par rapport aux quantités

$$\cos(n_a,x) \text{ et } \cos(n'_a,x),$$

par rapport aux quantités

$$\cos(n_a,y) \text{ et } \cos(n'_a,y),$$

par rapport aux quantités

$$\cos(n_a,z) \text{ et } \cos(n'_a,z);$$

on obtiendrait donc le même résultat si l'on menait par un point de l'élément $d\Sigma$ un élément $d\Sigma'$ ayant pour orientation n'_a et si l'on projetait la pression P' en un point de cet élément sur l'orientation n_a de l'élément $d\Sigma$; ce qu'exprime l'égalité :

$$P\cos(P, n'_a) = P'\cos(P', n_a)$$

Ainsi : Si par un point d'un corps on mène deux éléments superficiels $d\Sigma$, $d\Sigma'$ ayant respectivement pour orientation les droites n_a et n'_a; si P est la pression en un point de l'élément $d\Sigma$ et P' la pression en un point de l'élément $d\Sigma'$ la projection de la grandeur P suivant la direction n'_a est égale à la projection de la grandeur P' suivant la direction n_a.

Telle est la loi de l'égalité des composantes normales réciproque découverte, nous l'avons dit, par Cauchy.

4° Premier ellipsoïde des pressions. – Propriété de ses diamètres conjugués.

Considérons un point fixe (x, y, z) pris à l'intérieur d'un corps en équilibre ; si, par ce point, nous menons un élément $d\Sigma$, ayant une orientation n_a, la pression en un point de cet élément sera une grandeur géométrique P parfaitement déterminée, changeant de grandeur et de direction en même temps que change l'orientation n_a de l'élément.

Par l'origine O des coordonnées, menons un rayon vecteur ayant même grandeur et même direction que la pression P, l'extrémité de ce rayon vecteur sera un point M dont les coordonnées ξ, η, ζ sont données par les égalités :

$$(12) \quad \left\{\begin{array}{l} \xi = P\cos(P, x) \\ \eta = P\cos(P, y) \\ \zeta = P\cos(P, z) \end{array}\right.$$

Ces coordonnées ξ, η, ζ dépendent de l'orientation n_a. D'après les égalités (10) cette dépendance s'exprime de la manière suivante :

$$(13) \quad \left\{\begin{array}{l} \xi = N_1\cos(n_a\, x) + T_3\cos(n_a, y) + T_2\cos(n_a\, z), \\ \eta = T_3\cos(n_a\, x) + N_2\cos(n_a\, y) + T_1\cos(n_a\, z), \\ \zeta = T_2\cos(n_a\, x) + T_1\cos(n_a\, y) + N_3\cos(n_a, z), \end{array}\right.$$

Supposons que le déterminant :

$$(14) \quad D = \begin{vmatrix} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de 0. Les égalités (13) peuvent alors se résoudre par rapport à

$$\cos(n_a, x),\ \cos(n_a, y),\ \cos(n_a, z)$$

et s'écrire sous la forme suivante :

$$(15) \quad \left\{\begin{array}{l} \cos(n_a, x) = \mathcal{N}_1\xi + \mathcal{T}_3\eta + \mathcal{T}_2\zeta, \\ \cos(n_a\, y) = \mathcal{T}_3\xi + \mathcal{N}_2\eta + \mathcal{T}_1\zeta, \\ \cos(n_a\, z) = \mathcal{T}_2\xi + \mathcal{T}_1\eta + \mathcal{N}_3\zeta, \end{array}\right.$$

Lorsque l'on fait tourner l'élément $d\Sigma$ autour du point (x, y, z) de manière à lui donner toutes les orientations possibles, le point (ξ, η, ζ) varie. Il est facile de trouver l'équation du lieu décrit par ce point ; on doit avoir en effet, à tout instant :

$$\cos^2(n_a\, x) + \cos^2(n_a, y) + \cos^2(n_a\, z) = 1.$$

en sorte que les égalités (15) donnent pour équation de ce lieu

$$(16) \quad \begin{array}{l} (\mathcal{N}_1\xi + \mathcal{T}_3\eta + \mathcal{T}_2\zeta)^2 \\ + (\mathcal{T}_3\xi + \mathcal{N}_2\eta + \mathcal{T}_1\zeta)^2 \\ + (\mathcal{T}_2\xi + \mathcal{T}_1\eta + \mathcal{N}_3\zeta)^2 = 1. \end{array}$$

Cette équation est celle d'un ellipsoïde ayant pour centre l'origine des coordonnées ; on lui donne le nom de premier ellipsoïde des pressions au point

$(x\ y\ z)$. La considération de cet ellipsoïde est due à Lamé.

La forme et la position de cet ellipsoïde dans l'espace ne dépendent pas de la direction des axes de coordonnées.

D'après l'équation (16), les trois plans

$$(17) \quad \begin{cases} N_1 \xi + T_3 \eta + T_2 \zeta = 0, \\ T_3 \xi + N_2 \eta + T_1 \zeta = 0, \\ T_2 \xi + T_1 \eta + N_3 \zeta = 0, \end{cases}$$

forment un système de trois plans diamétraux conjugués de cet ellipsoïde. Les trois intersections de ces plans pris deux à deux, intersections représentées par les équations :

$$(18) \quad \begin{cases} \text{(I)} \begin{cases} T_3 \xi + N_2 \eta + T_1 \zeta = 0 \\ T_2 \xi + T_1 \eta + N_3 \zeta = 0 \end{cases} \\ \text{(II)} \begin{cases} T_2 \xi + T_1 \eta + N_3 \zeta = 0 \\ N_1 \xi + T_3 \eta + T_2 \zeta = 0 \end{cases} \\ \text{(III)} \begin{cases} N_1 \xi + T_3 \eta + T_2 \zeta = 0 \\ T_3 \xi + N_2 \eta + T_1 \zeta = 0 \end{cases} \end{cases}$$

forment un système de trois diamètres conjugués de cet ellipsoïde.

Prenons trois points sur l'ellipsoïde

$$M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$$
$$M_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$$
$$M_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$$

et cherchons à exprimer que les trois droites OM_1, OM_2, OM_3, forment trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Posons :

$$(19) \quad \begin{cases} F = F(\xi, \eta, \zeta) = N_1 \xi + T_3 \eta + T_2 \zeta, \\ G = G(\xi, \eta, \zeta) = T_3 \xi + N_1 \eta + T_1 \zeta, \\ H = H(\xi, \eta, \zeta) = T_2 \xi + T_2 \eta + N_3 \zeta, \end{cases}$$

Le plan diamétral conjugué à la direction OM_1 est représenté par l'équation:

$$(N_1 F_1 + T_3 G_1 + T_2 H_1)x$$
$$+ (T_3 F_1 + N_2 G_1 + T_1 H_1)y$$
$$+ (T_2 F_1 + T_1 G_1 + N_0 H_1) z = 0$$

Ce plan doit être identique au plan $M_2 O M_3$. Il doit donc exister une quantité λ_1 telle que l'on ait :

$$(20) \quad \begin{cases} N_1 F_1 + T_3 G_1 + T_2 H_1 = \lambda_1 (\zeta_2 \eta_3 - \eta_2 \zeta_3) \\ T_3 F_1 + N_2 G_1 + T_1 H_1 = \lambda_1 (\xi_2 \zeta_3 - \zeta_2 \xi_3) \\ T_2 F_1 + T_1 G_1 + N_3 H_1 = \lambda_1 (\eta_2 \xi_3 - \xi_2 \eta_3) \end{cases}$$

De même il existe deux quantités λ_2, λ_3 telles que l'on ait:

$$(20^{bis}) \quad \begin{cases} N_1 F_2 + T_3 G_2 + T_2 H_2 = \lambda_2 (\zeta_3 \eta_1 - \eta_3 \zeta_1) \\ T_3 F_2 + N_2 G_2 + T_1 H_2 = \lambda_2 (\xi_3 \zeta_1 - \zeta_3 \xi_1) \\ T_2 F_2 + T_1 G_2 + N_2 H_2 = \lambda_2 (\eta_3 \xi_1 - \xi_3 \eta_1) \end{cases}$$

$$(20\ ter)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} N_1 F_3 + T_3 G_3 + T_2 H_3 = \lambda_3 (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2) \\ T_3 F_3 + N_2 G_3 + T_1 H_3 = \lambda_3 (\zeta_1 \xi_2 - \xi_1 \zeta_2) \\ T_2 F_3 + T_1 G_3 + N_3 H_3 = \lambda_3 (\eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2) \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de la première équation (20 ter) par ξ_2, les deux membres de la seconde par η_2, les deux membres de la troisième par ζ_2 et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (19.) Nous trouverons la première des égalités :

$$(21)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} F_2 F_3 + G_2 G_3 + H_2 H_3 = 0 \\ F_3 F_1 + G_3 G_1 + H_3 H_1 = 0 \\ F_1 F_2 + G_1 G_2 + H_1 H_2 = 0 \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Ces formules permettent de démontrer un Théorème important dû à Lamé.

Considérons un élément ayant OX pour orientation ; pour cet élément on a :

$$\cos(n_a, x) = 1, \cos(n_a, y) = 0, \quad \cos(n_a, z) = 0.$$

D'après les égalités (15) l'extrémité de la droite qui représente en grandeur et en direction la pression en un point de cet élément a pour coordonnées ξ, η, ζ les racines des équations :

$$N_1 \xi + T_3 \eta + T_2 \zeta = 1,$$
$$T_3 \xi + N_2 \eta + T_1 \eta = 0,$$
$$T_2 \xi + T_1 \eta + N_3 \eta = 0,$$

Elle est donc dirigée suivant la droite représentée par les équations (18. I)

De même la pression en un point d'un élément ayant pour orientation OY est dirigée suivant la droite représentée par les équations (18. II) ; la pression en un point d'un élément ayant pour orientation OZ est dirigée suivant la droite représentée par les équations (18. III)

Ainsi trois éléments menés par un même point et ayant respectivement pour orientation chacun des trois axes de coordonnées sont soumis à des pressions qui forment trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde des pressions en ce point ; si si l'on observe que les trois axes de coordonnées sont trois droites rectangulaires quelconques, on arrive au théorème suivant :

Si par un point d'un corps en équilibre on mène trois éléments plans rectangulaires entre eux les pressions qui correspondent à ces trois éléments forment un système de trois diamètres conjugués du premier ellipsoïde des pressions en ce point.

Réciproquement si trois pressions forment un système de diamètres conjugués du premier ellipsoïde des pressions, les éléments superficiels auxquels elles se rapportent sont rectangulaires entre eux.

Soient OM_1, OM_2, OM_3 les trois pressions.

Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du point M_1, Soient ξ_2, η_2, ζ_2 les coordonnées du point M_2

ξ_3, η_3, ζ_3 les coordonnées du point M_3

Soient n_1 l'orientation de l'élément qui correspond à la pression OM_1 ;

n_2 l'orientation de l'élément qui correspond à la pression OM_2 ;

n_3 l'orientation de l'élément qui correspond à la pression OM_3 ;

Les égalités (15) donnent, en tenant compte des égalités (19),

$$\cos(n_1, x) = F_1, \quad \cos(n_1, y) = G_1, \quad \cos(n_1, z) = H_1$$
$$\cos(n_2, x) = F_2, \quad \cos(n_2, y) = G_2, \quad \cos(n_2, z) = H_2,$$
$$\cos(n_3, x) = F_3, \quad \cos(n_3, y) = G_3, \quad \cos(n_3, z) = H_3.$$

Alors, les égalités (21) qui expriment que les trois droites OM_1, OM_2, OM_3 forment trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde deviennent

$$\cos(n_2, x)\cos(n_3, x) + \cos(n_2, y)\cos(n_3, y) + \cos(n_2, z)\cos(n_3, z) = 0$$
$$\cos(n_3, x)\cos(n_1, x) + \cos(n_3, y)\cos(n_1, y) + \cos(n_3, z)\cos(n_1, z) = 0$$
$$\cos(n_1, x)\cos(n_2, x) + \cos(n_1, y)\cos(n_2, y) + \cos(n_1, z)\cos(n_2, z) = 0$$

ce qui démontre, conformément au Théorème énoncé, que les trois plans qui ont respectivement pour normales les directions n_1, n_2, n_3 sont rectangulaires entre eux.

Considérons maintenant les trois pressions, P_1, P_2, P_3 qui sont respectivement dirigées suivant OX, OY, OZ. Les extrémités des segments qui représentent ces pressions en grandeur et direction sont :

$$M_1 \; (\xi = P_1, \eta = 0, \zeta = 0)$$
$$M_2 \; (\xi = 0, \eta = P_2, \zeta = 0)$$
$$M_3 \; (\xi = 0, \eta = 0, \zeta = P_3)$$

La première pression correspond à un élément dont l'orientation est n_1 ; la seconde à un élément dont l'orientation est n_2 ; la troisième à un élément dont l'orientation est n_3.

Les égalités (15) donnent alors :

$$\cos(n_1, x) = N_1 P_1, \quad \cos(n_1, y) = T_3 P_1, \quad \cos(n_1, z) = T_2 P_1,$$
$$\cos(n_2, x) = T_3 P_2, \quad \cos(n_2, y) = N_2 P_2, \quad \cos(n_2, z) = T_1 P_2,$$
$$\cos(n_3, x) = T_2 P_3, \quad \cos(n_3, y) = T_1 P_3, \quad \cos(n_3, z) = N_3 P_3.$$

L'élément qui correspond à la pression P_1 est situé, dès lors, dans le plan

$$N_1 x + T_3 y + T_2 z = 0.$$

L'élément qui correspond à la pression P_2 est situé dans le plan :

$$T_3 x + N_2 y + T_1 z = 0.$$

L'élément qui correspond à la pression P_3 est situé dans le plan :

$$T_2 x + T_1 y + N_3 z = 0.$$

Ces trois plans sont trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde (16). Si l'on observe maintenant que les trois axes de coordonnées sont trois axes rectangulaires quelconques, on arrive à ce théorème analogue au Théorème de Lamé,

En un point d'un corps en équilibre, trois pressions rectangulaires correspondent à des éléments placés dans trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde des pressions.

Pour démontrer la réciproque de ce théorème, cherchons comment on exprimera que trois plans dont les normales ont respectivement pour cosinus directeurs

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,$$
$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,$$
$$\alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3,$$

forment trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde des pressions.

Le point qui a pour coordonnées

$$(22) \ldots\ldots \begin{cases} X_1 = \gamma_2\beta_3 - \beta_2\gamma_3, \\ Y_1 = \alpha_2\gamma_3 - \gamma_2\alpha_3, \\ Z_1 = \beta_2\alpha_3 - \alpha_2\beta_3, \end{cases}$$

est un point de l'intersection des deux derniers plans. Cette intersection doit avoir pour plan diamétral conjugué, dans l'ellipsoïde représenté par l'équation (16), le plan

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0.$$

Si donc nous posons

$$(23) \ldots\ldots \begin{cases} f_1 = F(X_1, Y_1, Z_1), \\ g_1 = G(X_1, Y_1, Z_1), \\ h_1 = H(X_1, Y_1, Z_1), \end{cases}$$

les fonctions F, G, H, étant définies par les égalités (19), nous trouverons qu'il doit exister une quantité λ_1 telle que l'on puisse écrire :

$$(24) \ldots\ldots \begin{cases} N_1 f_1 + T_3 g_1 + T_2 h_1 = \lambda_1 \alpha_1 \\ T_3 f_1 + N_2 g_1 + T_1 h_1 = \lambda_1 \beta_1 \\ T_2 f_1 + T_1 g_1 + N_3 g_1 = \lambda_1 \gamma_1 \end{cases}$$

On trouvera, en raisonnant de même sur les deux autres plans qu'il doit exister deux autres quantités λ_2, λ_3 telles que l'on puisse écrire :

$$(24^{bis}) \ldots\ldots \begin{cases} N_1 f_2 + T_3 g_2 + T_2 h_2 = \lambda_2 \alpha_2, \\ T_3 f_2 + N_2 g_2 + T_1 h_2 = \lambda_2 \beta_2, \\ T_2 f_2 + T_1 g_2 + N_3 h_2 = \lambda_3 \gamma_2, \end{cases}$$

$$(24^{ter}) \ldots\ldots \begin{cases} N_1 f_3 + T_3 g_3 + T_2 h_3 = \lambda_3 \alpha_3, \\ T_3 f_3 + N_2 g_3 + T_1 h_3 = \lambda_3 \beta_3, \\ T_2 f_3 + T_1 g_3 + N_3 h_3 = \lambda_3 \gamma_3. \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de la première des égalités (24^{bis}) par X_2; les deux membres de la seconde par Y_2; les deux membres de la troisième par Z_2 et, tenant compte des égalités (19) (23) et (22), ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouverons la première des égalités :

$$(25) \quad \begin{cases} f_2 f_3 + g_2 g_3 + h_2 h_3 = 0, \\ f_3 f_1 + g_3 g_1 + h_3 h_1 = 0, \\ f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2 = 0; \end{cases}$$

Les deux dernières se démontrent d'une manière analogue.

Cela posé, considérons un élément $d\Sigma_1$ dont l'orientation a pour cosinus directeurs $\alpha_1, \beta_1 \gamma_1$. Si OM_1 désigne la pression en un point de cet élément, les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 du point M_1 seront, d'après les égalités (15), les racines des équations

$$(26) \quad \begin{cases} N_1 \xi_1 + \mathcal{T}_3 \eta_1 + \mathcal{T}_2 \zeta_1 = \alpha_1, \\ \mathcal{T}_3 \xi_1 + N_2 \eta_1 + \mathcal{T}_1 \zeta_1 = \beta_1, \\ \mathcal{T}_2 \xi_1 + \mathcal{T}_1 \eta_1 + N_3 \zeta_1 = \gamma_1. \end{cases}$$

Soit de même un élément $d\Sigma_2$ dont l'orientation a pour cosinus directeurs $\alpha_2, \beta_2 \gamma_2$. Si OM_2 désigne la pression en un point de cet élément, les coordonnées $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ seront les racines des équations

$$(26^{bis}) \quad \begin{cases} N_1 \xi_2 + \mathcal{T}_3 \eta_2 + \mathcal{T}_2 \zeta_2 = \alpha_2, \\ \mathcal{T}_3 \xi_2 + N_2 \eta_2 + \mathcal{T}_1 \zeta_2 = \beta_2, \\ \mathcal{T}_2 \xi_2 + \mathcal{T}_1 \eta_2 + N_3 \zeta_2 = \gamma_2. \end{cases}$$

Soit enfin un élément $d\Sigma_3$ dont l'orientation a pour cosinus directeurs $\alpha_3 . \beta_3 . \gamma_3$. Si OM_3 désigne la pression en un point de cet élément, les coordonnées $\xi_3 . \eta_3 . \zeta_3$, seront les racines des équations.

$$(27^{bis}) \quad \begin{cases} N_1 \xi_3 + \mathcal{T}_3 \eta_3 + \mathcal{T}_2 \zeta_3 = \alpha_3, \\ \mathcal{T}_3 \xi_3 + N_2 \eta_3 + \mathcal{T}_1 \zeta_3 = \beta_3, \\ \mathcal{T}_2 \xi_3 + \mathcal{T}_1 \eta_3 + N_3 \zeta_3 = \gamma_3. \end{cases}$$

Supposons que les trois éléments $d\Sigma_1, d\Sigma_2, d\Sigma_3$ appartiennent à trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde des pressions. On pourra, pour ces trois plans, écrire les égalités (24) (24^{bis}) (24^{ter}) et (25)

Les égalités (24) et (26) donnent

$$\begin{aligned} N_1(f_1 - \lambda_1 \xi_1) + \mathcal{T}_3(g_1 - \lambda_1 \eta_1) + \mathcal{T}_2(h_1 - \lambda_1 \zeta_1) = 0, \\ \mathcal{T}_3(f_1 - \lambda_1 \xi_1) + N_2(g_1 - \lambda_1 \eta_1) + \mathcal{T}_1(h_1 - \lambda_1 \zeta_1) = 0, \\ \mathcal{T}_2(f_1 - \lambda_1 \xi_1) + \mathcal{T}_1(g_1 - \lambda_1 \eta_1) + N_3(h_1 - \lambda_1 \zeta_1) = 0, \end{aligned}$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} N_1 & \mathcal{T}_3 & \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_3 & N_2 & \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_1 & N_3 \end{vmatrix}$$

a même signe que le déterminant D défini par l'égalité (14) ; il est donc différent de zéro, et les égalités précédentes exigent que l'on ait :

$$f_1 = \lambda_1 \xi_1 ,\ g_1 = \lambda_1 \eta_1 ,\ h_1 = \lambda_1 \zeta_1 ;$$

De même, la comparaison des égalités (24 bis) et (26 bis) donne

$$f_2 = \lambda_2 \xi_2 ,\ g_2 = \lambda_2 \eta_2 ,\ h_2 = \lambda_2 \zeta_2 ;$$

et la comparaison des égalités (24 ter) et (26 ter) donne

$$f_3 = \lambda_3 \xi_3 ,\ g_3 = \lambda_3 \eta_3 ,\ h_3 = \lambda_3 \zeta_3 .$$

Les égalités (25) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \zeta_2 \zeta_3 &= 0 \\ \xi_3 \xi_1 + \eta_3 \eta_1 + \zeta_3 \zeta_1 &= 0, \\ \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 &= 0, \end{aligned}$$

et nous enseignent que les trois droites OM_1, OM_2, OM_3 sont rectangulaires.

Si donc, en un point d'un corps en équilibre, on trace trois éléments plans contenus dans trois plans diamétraux conjugués du premier ellipsoïde des pressions, les pressions qui correspondent à ces trois plans forment les arêtes d'un trièdre trirectangle.

C'est la réciproque du Théorème précédemment démontré.

5° Axes d'Élasticité et Pressions principales.

Nous venons d'étudier les propriétés que présente, en général un système de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde des pressions. Parmi ces systèmes, il en est un qui possède des propriétés particulières et très importantes ; c'est le système formé par les trois axes principaux de cet ellipsoïde.

On donne à ces trois axes le nom d'axes d'élasticité au point (x, y, z). Les pressions dont les demi-axes principaux du premier ellipsoïde marquent la direction et la grandeur se nomment pressions principales au point (x, y, z)

Pour déterminer les axes principaux de l'Ellipsoïde représenté par l'équation (16), il suffit de suivre la marche indiquée au Chapitre précédent pour trouver les axes principaux du premier ellipsoïde de dilatation.

Soient P_1, P_2, P_3, les longueurs des trois demi-axes.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, les cosinus directeurs du premier ;

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, les cosinus directeurs du second ;

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, les cosinus directeurs du troisième.

Soient S_1, S_2, S_3, les trois racines de l'équation.

$$(28) \quad \begin{vmatrix} N_1 - S, & \mathcal{T}_3 & \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_3 & N_2 - S & \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_1 & N_3 - S \end{vmatrix} = 0$$

Nous aurons

$$(29) \quad P_1 = \left|\frac{1}{S_1}\right|, \quad P_2 = \left|\frac{1}{S_2}\right|, \quad P_3 = \left|\frac{1}{S_3}\right|.$$

Considérons ensuite les équations

$$(30) \quad \begin{cases} (N_1 - S)\alpha + \mathcal{C}_3 \beta + \mathcal{C}_2 \gamma = 0, \\ \mathcal{C}_3 \alpha + (N_2 - S)\beta + \mathcal{C}_1 \gamma = 0, \\ \mathcal{C}_2 \alpha + \mathcal{C}_1 \beta + (N_3 - S)\gamma = 0, \end{cases}$$

$$(31) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Si dans ces équations (30) et (31), on donne à S la valeur S_1, elles admettront pour solution le système de valeurs

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1.$$

Si l'on y donne à S la valeur S_2, elles admettront pour solution le système de valeurs

$$\alpha = \alpha_2, \quad \beta = \beta_2, \quad \gamma = \gamma_2.$$

Si enfin l'on y donne à S la valeur S_3, elles admettront pour solution le système de valeurs

$$\alpha = \alpha_3, \quad \beta = \beta_3, \quad \gamma = \gamma_3.$$

Voici maintenant la remarquable propriété dont jouissent les pressions principales.

Chaque pression principale est normale au plan de l'élément auquel elle se rapporte.

Soient, en effet, ξ, η, ζ, les coordonnées de l'une des extrémités d'un demi-axe de l'ellipsoïde, ce demi-axe correspondant une pression P et à une des racines S de l'équation (28). Nous aurons :

$$\xi = \alpha P, \quad \eta = \beta P, \quad \zeta = \gamma P.$$

L'orientation n_a de l'élément auquel se rapporte cette pression sera alors déterminée par les égalités (15) qui deviennent :

$$\begin{aligned} \cos(n_a, x) &= (N_1 \alpha + \mathcal{C}_3 \beta + \mathcal{C}_2 \gamma) P, \\ \cos(n_a, y) &= (\mathcal{C}_3 \alpha + N_2 \beta + \mathcal{C}_1 \gamma) P, \\ \cos(n_a, z) &= (\mathcal{C}_2 \alpha + \mathcal{C}_1 \beta + N_3 \gamma) P. \end{aligned}$$

Ces égalités, comparées aux égalités (30), donnent :

$$(32) \quad \begin{cases} \cos(n_a, x) = \alpha\, PS \\ \cos(n_a, y) = \beta\, PS \\ \cos(n_a, z) = \gamma\, PS \end{cases}$$

ce qui démontre le Théorème énoncé.

Considérons un élément qui soit normal à la pression qui agit en un de ses points. Cette pression, dont la grandeur a figuré jusqu'ici comme ayant une valeur absolue, mais point de signe, peut être dirigée comme l'orientation de l'élément, ou bien être dirigée en sens inverse.

Dans le premier cas, on aurait

$$\alpha = \cos(n_a, x), \quad \beta = \cos(n_a, y), \quad \gamma = \cos(n_a, z);$$

dans le second cas on aurait

$$\alpha = -\cos(n_a, x), \quad \beta = -\cos(n_a, y), \quad \gamma = -\cos(n_a, z).$$

Nous allons maintenant, pour la commodité des considérations qui vont suivre, changer ces conventions ; lorsqu'une pression sera normale à l'élément sur lequel elle agit, nous la regarderons comme une grandeur susceptible de signe, mais toujours dirigée comme l'orientation de l'élément.

Si dans l'ancienne convention, la pression était dirigée suivant l'orientation de l'élément, elle aura, dans la nouvelle convention une valeur positive ; nous lui conserverons alors le nom de pression ;

Si, dans l'ancienne convention, la pression était dirigée en sens contraire de l'orientation de l'élément, elle aura, dans la nouvelle convention, une valeur négative ; nous lui donnerons alors le nom de traction.

Ce changement de convention ne change ni la grandeur, ni la direction de la demi droite que représente la pression.

Ce changement de convention n'a trait qu'à une pression normale à l'élément auquel elle se rapporte.

Cette convention posée, faisons en l'application aux pressions principales.

D'après cette convention, les égalités (32) doivent devenir :

$$\cos(n_a, x) = \alpha, \quad \cos(n_a, y) = \beta, \quad \cos(n_a, z) = \gamma,$$

cequi exige que l'on ait

$$PS = 1$$

Ainsi, moyennant la convention précédente, les égalités (29) doivent être remplacées par les suivantes :

$$P_1 = \frac{1}{S_1}, \qquad P_2 = \frac{1}{S_2}, \qquad P_3 = \frac{1}{S_3}. \tag{33}$$

Chacune des pressions principales est égale en grandeur et en signe à l'inverse d'une des racines de l'équation (28).

Les faces du trièdre qui a pour arêtes les axes d'élasticité possèdent cette propriété que chacune d'elles est normale à la pression qu'elle supporte. Ces plans sont-ils les seuls qui possèdent cette propriété ?

Supposons qu'un élément dont n_a est l'orientation supporte une pression normale dont P est la grandeur, affectée de signe conformément à la convention précédente. Les cosinus directeurs de cette pression sont, par hypothèse,

$$\cos(n_a, x), \qquad \cos(n_a, y), \qquad \cos(n_a, z).$$

L'extrémité de la demi-droite qui représente cette pression a pour coordonnées

$$\xi = P\cos(n_a, x),$$
$$\eta = P\cos(n_a, y),$$
$$\zeta = P\cos(n_a, z).$$

Moyennant ces égalités, les égalités (15) deviennent

$$(34) \ldots\ldots \begin{cases} \left(\mathcal{N}_1 - \frac{1}{P}\right)\cos(n_a, x) + \mathcal{E}_3\cos(n_a, y) + \mathcal{E}_2\cos(n_a, z) = 0, \\ \mathcal{E}_3\cos(n_a, x) + \left(\mathcal{N}_2 - \frac{1}{P}\right)\cos(n_a, y) + \mathcal{E}_1\cos(n_a, z) = 0, \\ \mathcal{E}_2\cos(n_a, x) + \mathcal{E}_1\cos(n_a, y) + \left(\mathcal{N}_3 - \frac{1}{P}\right)\cos(n_a, z) = 0. \end{cases}$$

A ces égalités il faut joindre la condition

$$(35) \ldots\ldots \cos^2(n_a, x) + \cos^2(n_a, y) + \cos^2(n_a, z) = 1$$

Ces égalités exigent que l'on ait :

$$\begin{vmatrix} \mathcal{N}_1 - \frac{1}{P} & \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{N}_2 - \frac{1}{P} & \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_1 & \mathcal{N}_3 - \frac{1}{P} \end{vmatrix} = 0.$$

P est donc l'inverse d'une des racines de l'équation (28). Dès lors, les égalités (34) et (35) deviennent identiques aux égalités (30) et (31) ce qui montre que l'orientation n_a de l'élément considéré doit coïncider avec l'un des axes d'élasticité. Ainsi, pour qu'un élément soit normal à la pression qu'il supporte, il faut qu'il soit normal à l'un des axes d'élasticité.

On arrive ainsi à ce beau théorème de Cauchy :

Par tout point d'un corps en équilibre, il passe trois éléments, formant un trièdre trirectangle, dont chacun est normal à la pression qu'il supporte ; en général, il n'en passe que trois.

6°. – Deuxième surface des pressions.

Les équations qui servent à déterminer la direction des axes principaux du premier ellipsoïde des pressions déterminent aussi les axes principaux de la surface

$$(36) \ldots\ldots \mathcal{N}_1\xi^2 + \mathcal{N}_2\eta^2 + \mathcal{N}_3\zeta^2 + 2\mathcal{E}_1\eta\zeta + 2\mathcal{E}_2\zeta\xi + 2\mathcal{E}_3\xi\eta = 1.$$

Nous nommerons cette surface, dont la considération est due à Cauchy, la seconde surface des pressions.

La seconde surface des pressions a ses axes principaux dirigés suivant les axes d'élasticité.

Soient A_1, A_2, A_3, les longueurs des demi axes de cette surface. On voit aisément que l'on aura

$$(37) \ldots\ldots A_1^2 = \frac{1}{S_1}, \qquad A_2^2 = \frac{1}{S_2}, \qquad A_3^2 = \frac{1}{S_3}.$$

ou bien

$$(37^{bis}) \ldots\ldots A_1^2 = P_1, \qquad A_2^2 = P_2, \qquad A_3^2 = P_3.$$

Dès lors, quatre cas sont à distinguer :

1°. – Les trois pressions principales sont positives ; la seconde surface des pressions est alors un ellipsoïde réel.

2°. – Une des pressions principales est négative ; la seconde surface des pressions est alors un hyperboloïde à une nappe.

3°. – Deux des pressions principales sont négatives : la seconde surface des pressions est alors un hyperboloïde à deux nappes

4°. – Les trois pressions principales sont négatives ; la seconde surface des pressions est alors un ellipsoïde imaginaire.

Prenons pour axes de coordonnées les axes d'élasticité ; la première surface des pressions, qui est toujours un ellipsoïde réel, sera représentée par l'équation

$$\frac{\xi}{P_1^2} + \frac{\eta^2}{P_2^2} + \frac{\zeta^2}{P_3^2} = 1;$$

la seconde surface des pressions sera représentée par l'équation

$$\frac{\xi^2}{P_1} + \frac{\eta^2}{P_2} + \frac{\zeta^2}{P_3} = 1.$$

En raisonnant sur ces équations comme nous avons raisonné sur les équations des deux ellipsoïdes de dilatation, on arrive aisément à la proposition suivante.

Pour trouver en grandeur et en direction la pression qui s'exerce sur un élément plan Π d'orientation donnée n_α mené par un point donné O ;

On trace les deux surfaces des pressions en leur donnant pour centre le point O ;

On mène la direction conjuguée du plan Π dans la deuxième surface des pressions,

Cette direction coupe le premier ellipsoïde des pressions en deux points M et et M', le rayon vecteur OM étant du même côté du plan Π que la demi-droite n_α, et le rayon vecteur OM' étant de l'autre côté.

Si la droite OMM' perce la seconde surface des pressions en deux points réels, la pression en un point du plan Π est représentée en grandeur et direction par le segment OM.

Si la droite MM' perce la seconde surface des pressions en deux points imaginaires, la pression en un point du plan Π est représentée en grandeur et direction par le segment OM'.

Cette proposition conduit aisément à la proposition suivante :

Pour que la pression en un point d'un élément soit tangente à cet élément, il faut et il suffit que la seconde surface des pressions soit un hyperboloïde et que l'élément soit tangent au cône asymptote de cet hyperboloïde ; la pression est alors une génératrice de ce cône.

Lorsque la seconde surface des pressions est un hyperboloïde, on donne à son cône asymptote le nom de cône de glissement

§ 4. – De la Pression au contact de deux corps.

Nous venons d'examiner en détail, au Chapitre précédent, les lois de la pression à l'intérieur d'un corps. Considérons maintenant le cas où deux corps sont en contact, mais où leurs mouvements ne sont pas solidaires, de telle façon que ces deux corps puissent glisser l'un sur l'autre.

Nous avons vu [Égalités (6) et (6 bis)] que dans ce cas, il existait une quantité λ, variable d'une manière continue le long de la surface Σ qui sépare les deux corps, et telle que l'on ait, en tout point de la surface Σ,

$$(38) \ldots\ldots \begin{cases} [(N_1)_1 - \lambda] \cos(n_1,x) + (T_3)_1 \cos(n_1,y) + (T_2)_1 \cos(n_1,z) = 0, \\ (T_3)_1 \cos(n_1,x) + [(N_2)_1 - \lambda] \cos(n_1,y) + (T_1)_1 \cos(n_1,z) = 0, \\ (T_2)_1 \cos(n_1,x) + (T_1)_1 \cos(n_1,y) + [(N_3)_1 - \lambda] \cos(n_1,z) = 0; \end{cases}$$

$$(39) \ldots\ldots \begin{cases} [(N_1)_2 - \lambda] \cos(n_2,x) + (T_3)_2 \cos(n_2,y) + (T_2)_2 \cos(n_2,z) = 0, \\ (T_3)_2 \cos(n_2,x) + [(N_2)_2 - \lambda] \cos(n_2,y) + (T_1)_2 \cos(n_2,z) = 0, \\ (T_2)_2 \cos(n_2,x) + (T_1)_2 \cos(n_2,y) + [(N_3)_2 - \lambda] \cos(n_2,z) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'interpréter cette condition.

Posons

$$(40) \ldots\ldots \lambda \cos(n_1,x) = u, \qquad \lambda \cos(n_1,y) = v, \qquad \lambda \cos(n_1,z) = w,$$

et écrivons les équations (38) sous la forme.

$$\begin{aligned} (N_1)_1 \cos(n_1,x) + (T_3)_1 \cos(n_1,y) + (T_2)_1 \cos(n_1,z) &= u, \\ (T_3)_1 \cos(n_1,x) + (N_2)_1 \cos(n_1,y) + (T_1)_1 \cos(n_1,z) &= v, \\ (T_2)_1 \cos(n_1,x) + (T_1)_1 \cos(n_1,y) + (N_3)_1 \cos(n_1,z) &= w. \end{aligned}$$

Résolvons ces équations par rapport à

$$\cos(n_1,x), \quad \cos(n_1,y), \quad \cos(n_1,z).$$

comme nous avons résolu les équations (13) pour obtenir les équations (15); nous aurons

$$\begin{aligned} \cos(n_1,x) &= (\mathcal{N}_1)_1 u + (\mathcal{C}_3)_1 v + (\mathcal{C}_2)_1 w, \\ \cos(n_1,y) &= (\mathcal{C}_3)_1 u + (\mathcal{N}_2)_1 v + (\mathcal{C}_1)_1 w, \\ \cos(n_1,z) &= (\mathcal{C}_2)_1 u + (\mathcal{C}_1)_1 v + (\mathcal{N}_3)_1 w. \end{aligned}$$

Remplaçons u, v, w par leurs valeurs (40) et posons

$$(41) \ldots\ldots \frac{1}{\lambda} = S.$$

Les équations précédentes deviendront :

$$(42) \ldots\ldots \begin{cases} [(\mathcal{N}_1)_1 - S] \cos(n_1,x) + (\mathcal{C}_3)_1 \cos(n_1,y) + (\mathcal{C}_2)_1 \cos(n_1,z) = 0, \\ (\mathcal{C}_3)_1 \cos(n_1,x) + [(\mathcal{N}_2)_1 - S] \cos(n_1,y) + (\mathcal{C}_1)_1 \cos(n_1,z) = 0, \\ (\mathcal{C}_2)_1 \cos(n_1,x) + (\mathcal{C}_1)_1 \cos(n_1,y) + [(\mathcal{N}_3)_1 - S] \cos(n_1,z) = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont équivalentes aux équations (38)

De même, aux équations (39) on peut substituer les équations équivalentes.

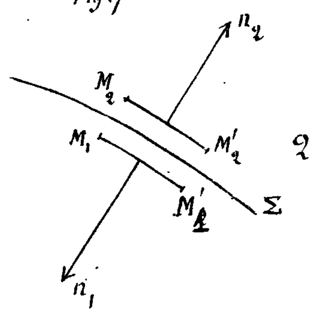
$$(43) \ldots\ldots \begin{cases} [(\mathcal{N}_1)_2 - S] \cos(n_2,x) + (\mathcal{C}_3)_2 \cos(n_2,y) + (\mathcal{C}_2)_2 \cos(n_2,z) = 0, \\ (\mathcal{C}_3)_2 \cos(n_2,x) + [(\mathcal{N}_2)_2 - S] \cos(n_2,y) + (\mathcal{C}_1)_2 \cos(n_2,z) = 0, \\ (\mathcal{C}_2)_2 \cos(n_2,x) + (\mathcal{C}_1)_2 \cos(n_2,y) + [(\mathcal{N}_3)_2 - S] \cos(n_2,z) = 0. \end{cases}$$

Ainsi la condition que nous voulons interpréter revient à celle-ci : Il existe une quantité S, variable d'une manière continue le long de la surface Σ et vérifiant en tout point de cette surface, les égalités (42) et (43)

Que signifient les égalités (42) ?

Elles signifient que la normale n_1 coïncide avec l'un des axes d'élasticité en un point du corps 1 infiniment voisin de la surface Σ. Si à l'intérieur du corps 1, (fig. 7), on trace un élément $M_1 M_1'$, infiniment voisin de la surface Σ et dont n_1 soit l'orientation, la pression en un point de cet élément lui sera normale ; si nous la comptons positivement dans le sens de la normale n_1, elle aura pour valeur $\frac{1}{S}$ ou λ.

Fig. 7



Que signifient les égalités (43) ?

Elles signifient que la normale n_2 coïncide avec l'un des axes d'élasticité en un point du corps 2, infiniment voisin de la surface Σ. Si à l'intérieur du corps 2, on trace un élément $M_2 M_2'$, infiniment voisin de la surface Σ et dont n_2 soit l'orientation, la pression en un point de cet élément lui sera normale ; si nous la comptons positivement dans le sens de la normale n_2, elle aura pour valeur $\frac{1}{S}$ ou λ.

La pression en un point d'un élément vire cap pour cap, sans changer de valeur, lorsque l'orientation de l'élément vire cap pour cap. Si donc nous considérons un élément M situé suivant $M_2 M_2'$, mais ayant la même orientation n_1 que l'élément $M_1 M_1'$ cet élément supportera une pression normale. Si nous comptons positivement cette pression suivant la normale n_1, elle aura pour valeur λ en tout point de l'élément $M_2 M_2'$

Nous arrivons donc à la proposition suivante :

De part et d'autre de la surface de contact de deux corps, nous traçons deux éléments parallèles à cette surface et infiniment voisins de cette surface ; nous leur attribuons la même orientation ou des orientations contraires ; la pression en un point de chacun de ces deux éléments est normale à chacun d'eux et a même valeur pour tous deux.

Livre II.

Les Corps fluides.

Chapitre I

De l'Equilibre des fluides.

1° Définition du Corps fluide. Condition générale de l'équilibre d'un tel corps.

Les propriétés qui définissent un corps fluide sont les suivantes :

1°. — Il est d'étendue finie en toute dimension

2°. — On peut lui imposer des déformations virtuelles qui modifient d'une manière quelconque ses divers éléments de masse. Ces déformations ne sont même pas assujetties à conserver la continuité du fluide. En une région que le fluide remplissait entièrement avant la déformation peut se trouver, après la déformation, une cavité vide de fluide. Lorsqu'il se forme ainsi des cavités à l'intérieur de la masse fluide, la modification virtuelle n'est pas renversable; elle est renversable lorsqu'il ne se forme pas de cavité

3°. — La fonction ϕ, qui représente le Potentiel Thermodynamique Interne rapporté à l'unité de volume, dépend uniquement de la densité du fluide au point considéré. Ses variations dépendent de la dilatation en volume au point considéré, mais point des autres particularités qui caractérisent la déformation autour du point considéré.

Chaque élément dv du fluide est soumis à une force extérieure dont les composantes sont:

$$\rho X\, dv, \qquad \rho Y\, dv, \qquad \rho Z\, dv,$$

ρ étant la densité du fluide, et X, Y, Z, trois fonctions uniformes finies et continues des coordonnées x, y, z, d'un point de l'élément dv.

La partie déformable de la surface S qui limite le fluide est soumise à des pressions.

$$P\cos(P,x)\, dS, \qquad P\cos(P,y)\, dS, \qquad P\cos(P,z)\, dS$$

sont les composantes de la force qui sollicite l'élément dS de la surface S.

Le fluide sera supposé formé de deux parties, 1, et 2, de nature différente, séparées l'une de l'autre par une surface Σ; ρ_1 sera la densité ~~en un~~ point du premier fluide, ρ_2 la densité en un point du second fluide; S_1 sera la partie de la surface S qui confine au premier fluide, S_2 la partie de la surface S qui confine au second.

Soient u_1, v_1, w_1 les composantes du déplacement virtuel d'un point du fluide 1; u_2, v_2, w_2 les composantes du déplacement virtuel d'un point du fluide 2.

Le travail effectué dans une modification virtuelle quelconque par les forces extérieures appliquées au système aura pour valeur

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta \mathcal{E}_e = \int \rho_1 \left(X u_1 + Y v_1 + Z w_1 \right) dv_1$$
$$+ \int \rho_2 \left(X u_2 + Y v_2 + Z w_2 \right) dv_2$$
$$+ \mathsf{S}\, P_1 \left[u_1 \cos(P_1, x) + v_1 \cos(P_1, y) + w_1 \cos(P_1, z) \right] dS_1$$
$$+ \mathsf{S}\, P_2 \left[u_2 \cos(P_2, x) + v_2 \cos(P_2, y) + w_2 \cos(P_2, z) \right] dS_2$$

La première intégration s'étend au fluide 1, la seconde au fluide 2, la troisième à la partie déformable de la surface S_1, la quatrième à la partie déformable de la surface S_2

Le Potentiel Thermodynamique Interne du fluide a pour valeur

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathcal{F} = \int \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int \varphi_2(\rho_2)\, dv_2$$

La variation de ce Potentiel est:

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta \mathcal{F} = \int \left[\frac{d\phi_1(\rho_1)}{d\rho_1} \delta\rho_1 \, dv_1 + \phi_1(\rho_1) \, \delta dv_1 \right] + \int \left[\frac{d\phi_2(\rho_2)}{d\rho_2} \delta\rho_2 \, dv_2 + \varphi_2(\rho_2) \, \delta dv_2 \right]$$

Nous avons vu [Livre I, Chapitre II] que l'on avait

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta dv_1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dv_1$$

Considérons un élément de masse dm_1; il a, avant la modification, une densité ρ_1 et occupe un volume dv_1, en sorte que:

$$dm_1 = \rho_1 \, dv_1 .$$

Après la modification, cet élément a une densité $(\rho_1 + \delta\rho_1)$ et un volume $(dv_1 + \delta dv_1)$; sa masse n'a pas varié. On a donc

$$dm_1 = (\rho_1 + \delta\rho_1)(dv_1 + \delta dv_1) .$$

La comparaison de ces deux égalités donne:

$$\rho_1 \, \delta dv_1 + dv_1 \, \delta\rho_1 = 0$$

ou bien

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta\rho_1 = - \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)$$

On a de même

$$(4^{bis}) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta dv_2 = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) dv_2 ,$$

$$(5^{bis}) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta\rho_2 = - \rho_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) .$$

Les egalités (4), (4^{bis}), (5) (5^{bis}) donnent à l'égalité (3) la forme suivante:

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta \mathcal{F} = \int \left[\phi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\phi_1(\rho_1)}{d\rho_1} \right] \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dv_1 + \int \left[\phi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\phi_2(\rho_2)}{d\rho_2} \right] \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) dv_2 .$$

Nous savons que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système s'obtiendront en écrivant que l'on a, pour toute modification virtuelle,

$$\delta \mathcal{T}_e - \delta \mathcal{F} \leqq 0 .$$

Moyennant les égalités (1) et (6), cette condition devient:

$$\begin{aligned}(7) \ldots\ldots\ldots\ldots & \int \rho_1 (X u_1 + Y v_1 + Z w_1) \, dv_1 \\ & - \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\phi_1(\rho_1)}{d\varphi} \right] \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dv_1 \\ & + S P_1 \left[u_1 \cos(P_1, x) + v_1 \cos(P_1, y) + w_1 \cos(P_1, z) \right] dS_1 \\ & + \int \rho_2 (X u_2 + Y v_2 + Z w_2) \, dv_2 \\ & - \int \left[\varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\phi_2(\rho_2)}{d\rho_2} \right] \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) dv_2 \\ & + S P_2 \left[u_2 \cos(P_2, x) + v_2 \cos(P_2, y) + w_2 \cos(P_2, z) \right] dS_2 \leqq 0 .\end{aligned}$$

Nous allons examiner les conséquences de cette condition générale d'équilibre

§ 2. — On impose au fluide une modification virtuelle renversable qui n'altère sa densité en aucun point.

Nous allons d'abord imposer au fluide une modification virtuelle qui n'altère sa densité en aucun point; nous aurons alors en tout point des fluides 1 et 2 en vertu des égalités (5) et (5 bis).

$$(8) \dots\dots\dots\dots \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial w_2}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

De plus, nous supposerons la modification renversable; cela exige qu'aucune cavité ne se creuse à l'intérieur des fluides 1 et 2; les trois quantités u_1, v_1, w_1 sont donc des fonctions continues des coordonnées x, y, z, d'un point du corps 1; de même les trois quantités u_2, v_2, w_2, sont des fonctions continues des coordonnées x, y, z, d'un point du corps 2. Cela exige aussi que les corps 1 et 2 demeurent en contact ce qui s'exprime [Livre II, Chapitre III, Égalité (1)] par l'égalité.

$$(9) \dots\dots \left.\begin{aligned} & u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \\ & + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) = 0, \end{aligned}\right\} \text{qui doit avoir lieu en tout point de la surface } \Sigma.$$

La modification étant renversable, le signe d'inégalité doit disparaître de la condition (7) qui devient, moyennant les égalités (8),

$$\begin{aligned} & \int \rho_1 (X u_1 + Y v_1 + Z w_1)\, dv_1 \\ & + S P_1 [u_1 \cos(P_1, x) + v_1 \cos(P_1, y) + w_1 \cos(P_1, z)]\, dS_1 \\ & + \int \rho_2 (X u_2 + Y v_2 + Z w_2)\, dv_2 \\ & + S P_2 [u_2 \cos(P_2, x) + v_2 \cos(P_2, y) + w_2 \cos(P_2, z)]\, dS_2 = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu non pas quels que soient $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$, mais pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons (8) et (9).

Dès lors, il doit exister :

1°. — Une fonction Π_1, finie, continue, uniforme en tout point du fluide 1;

2°. — Une fonction Π_2, finie, continue, uniforme en tout point du fluide 2;

3°. — Une quantité λ, variable d'une manière continue le long de la surface Σ, telles que l'on ait, pour tout déplacement virtuel imposé au fluide,

$$(10) \dots\dots \begin{aligned} & \int \rho_1 (X u_1 + Y v_1 + Z w_1)\, dv_1 \\ & + S P_1 [u_1 \cos(P_1, x) + v_1 \cos(P_1, y) + w_1 \cos(P_1, z)]\, dS_1 \\ & + \int \Pi_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dv_1 \\ & + \int \rho_2 (X u_2 + Y v_2 + Z w_2)\, dv_2 \\ & + S P_2 [u_2 \cos(P_2, x) + v_2 \cos(P_2, y) + w_2 \cos(P_2, z)]\, dS_2 \\ & + \int \Pi_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) dv_2 \\ & + S \lambda\, [u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \\ & \quad + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z)]\, d\Sigma = 0 \end{aligned}$$

Des intégrations par parties permettent de transformer cette égalité en la suivante :

$$\begin{aligned}
&\iiint\left[\left(\rho_1 X - \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\right)u_1 + \left(\rho_1 Y - \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}\right)v_1 + \left(\rho_1 Z - \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right)w_1\right] dv_1 \\
&+\iiint\left[\left(\rho_2 X - \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}\right)u_2 + \left(\rho_2 Y - \frac{\partial \Pi_2}{\partial y}\right)v_2 + \left(\rho_2 Z - \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}\right)w_2\right] dv_2 \\
&+ S\left[P_1 \cos(P_1, x) - \Pi_1 \cos(n_i, x)\right] u_1\, dS_1 \\
&+ S\left[P_1 \cos(P_1, y) - \Pi_1 \cos(n_i, y)\right] v_1\, dS_1 \\
&+ S\left[P_1 \cos(P_1, z) - \Pi_1 \cos(n_i, z)\right] w_1\, dS_1 \\
&+ S\left[P_2 \cos(P_2, x) - \Pi_2 \cos(n_i, x)\right] u_2\, dS_2 \\
&+ S\left[P_2 \cos(P_2, y) - \Pi_2 \cos(n_i, y)\right] v_2\, dS_2 \\
&+ S\left[P_2 \cos(P_2, z) - \Pi_2 \cos(n_i, z)\right] w_2\, dS_2 \\
&+ S(\lambda - \Pi_1)\left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\Sigma \\
&+ S(\lambda - \Pi_2)\left[u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z)\right] d\Sigma = 0.
\end{aligned}$$

En raisonnant comme nous l'avons fait, dans un cas analogue, au Livre I, Ch. III, § 1, nous trouverons que cette égalité entraine les conséquences suivantes :

1°. – On a, en tous les points du fluide 1

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} \rho_1 X &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \\ \rho_1 Y &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \\ \rho_1 Z &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

2°. – On a en tous les points du fluide 2,

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} \rho_2 X &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}, \\ \rho_2 Y &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial y}, \\ \rho_2 Z &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

3°. – On a en tous les points de la surface Σ,

$$(13) \qquad \Pi_1 = \Pi_2 = \lambda.$$

4°. – On a, en tout point de la partie déformable de la surface S_1,

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} P_1 \cos(P_1, x) &= \Pi_1 \cos(n_i, x), \\ P_1 \cos(P_1, y) &= \Pi_1 \cos(n_i, y), \\ P_1 \cos(P_1, z) &= \Pi_1 \cos(n_i, z). \end{aligned}\right.$$

5°. – On a, en tout point de la partie déformable de la surface S_2,

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} P_2 \cos(P_2, x) &= \Pi_2 \cos(n_i, x), \\ P_2 \cos(P_2, y) &= \Pi_2 \cos(n_i, y), \\ P_2 \cos(P_2, z) &= \Pi_2 \cos(n_i, z). \end{aligned}\right.$$

Les équations (11) et (12) entrainent les conséquences suivantes :

La quantité

$$\rho_1 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

doit être, pour que l'équilibre du fluide soit possible, la différentielle totale d'une fonction uniforme, finie, continue, des coordonnées d'un point du fluide 1; de même, la quantité

$$\rho_2 (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

doit être la différentielle totale d'une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées d'un point du fluide 2.

Ce Théorème est dû à Clairaut[1]

Pour apprécier l'importance de ce Théorème de Clairaut, il suffit de faire la remarque suivante :

Si les quantités X, Y, Z, sont des fonctions données d'x, y, z, il n'existe pas en général de fonction $\rho(x, y, z)$ telle que la quantité

$$\rho (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

soit une différentielle totale.

En effet, pour que cette expression soit une différentielle totale, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial(\rho Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y},$$
$$\frac{\partial(\rho Z)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho X)}{\partial z},$$
$$\frac{\partial(\rho X)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x},$$

égalités d'où l'on déduit la relation, indépendante de ρ,

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0$$

Ainsi une force dont les composantes sont quelconques ne peut, en général, mettre un fluide en équilibre; elle ne le peut mettre en équilibre que si ces composantes vérifient l'égalité précédente.

Nous verrons plus loin [égalités (33)] qu'elles doivent même vérifier séparément les trois relations

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

L'égalité (13) nous enseigne que la fonction Π_1 et la fonction Π_2 prennent la même valeur en un point de la surface qui sépare les deux fluides 1 et 2. Leur

---

[1] Clairaut. Théorie de la Figure de la Terre Paris 1743.

ensemble forme donc une fonction continue dans tout l'espace occupé par les deux fluides.

L'égalité (14) nous enseigne qu'en tout point de la partie déformable de la surface S_1 où la pression P_1 n'est pas égale à 0, elle est normale à la surface S_1.[2]

Jusqu'ici la quantité P_1 étant une valeur absolue non affectée de signe. Regardons maintenant P_1 comme une grandeur géométrique, susceptible de signe, et portée dans le sens de la normale n_i ; les égalités (14) deviendront simplement

$$(16) \qquad P_1 = \Pi_1 .$$

Les égalités (15) montrent de même qu'en tout point de la partie déformable de la surface S_2 où la pression P_2 n'est pas égale à 0, elle est normale à la surface S_2.

Si nous convenons de compter positivement cette pression dans le sens de la normale n_i, les égalités (15) deviennent simplement

$$(17) \qquad P_2 = \Pi_2 .$$

Telles sont les conséquences auxquelles on est conduit en imposant au fluide une modification renversable qui laisse constante sa densité en chaque point.

§ 3. — On impose au fluide une modification qui n'altère pas sa densité en chaque point, mais qui n'est pas renversable.

Nous allons maintenant imposer au fluide une modification durant laquelle des cavités peuvent se creuser soit à l'intérieur de la partie 1, soit à l'intérieur de la partie 2, soit au contact des deux parties 1 et 2. La modification n'étant plus renversable, le signe d'inégalité doit être conservé dans la condition (7).

Nous supposerons que cette modification n'altère la densité en aucun point soit du fluide 1, soit du fluide 2, en sorte que les conditions (8) demeurent vérifiées. La condition (7) devient donc

$$(18) \qquad \begin{aligned} &\int \rho_1 (X u_1 + Y v_1 + Z w_1)\, dv_1 \\ &+ \int \rho_2 (X u_2 + Y v_2 + Z w_2)\, dv_2 \\ &+ \mathbf{S}\, P_1 \left[u_1 \cos(P_1,x) + v_1 \cos(P_1,y) + w_1 \cos(P_1,z)\right] dS_1 \\ &+ \mathbf{S}\, P_2 \left[u_2 \cos(P_2,x) + v_2 \cos(P_2,y) + w_2 \cos(P_2,z)\right] dS_2 \leqq 0. \end{aligned}$$

Mais, quels que soient

$$u_1, \quad v_1, \quad w_1,$$
$$u_2, \quad v_2, \quad w_2,$$

cette condition (18) peut s'écrire, d'après les égalités (11), (12), (14) et (15),

---

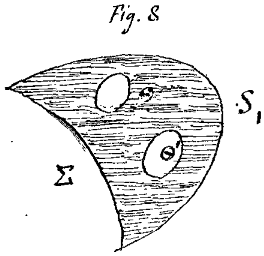
(2) Cette proposition, toujours admise à priori par les auteurs, a été pour la première fois, déduite du principe des Vitesses Virtuelles par M. J. Moutier (J. Moutier Cours de Physique. T. I)

$$(19) \ldots\ldots\ldots \int\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} w_1\right) dv_1$$
$$+ \int\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} w_2\right) dv_2$$
$$+ S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_i, x) + v_1 \cos(n_i, y) + w_1 \cos(n_i, z)\right] dS_1$$
$$+ S\,\Pi_2 \left[u_2 \cos(n_i, x) + v_2 \cos(n_i, y) + w_2 \cos(n_i, z)\right] dS_2 \leqq 0.$$

Nous allons transformer l'expression :

$$J = \int\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} w_1\right) dv_1$$
$$+ S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_i, x) + v_1 \cos(n_i, y) + w_1 \cos(n_i, z)\right] dS_1.$$

Fig. 8



Considérons une masse fluide (fig 8), limitée extérieurement par les surfaces S_1 et Σ et renfermant à son intérieur des cavités qui limitent les surfaces $\theta_1, \theta_1', \ldots\ldots$ Soit, en un point des surface S_1, $\Sigma, \theta_1, \theta_1'$, n_1 la normale menée vers l'intérieur de l'espace occupé par le fluide.

Nous aurons :

$$\int\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} w_1\right) dv_1$$
$$= - S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_i, x) + v_1 \cos(n_i, y) + w_1 \cos(n_i, z)\right] dS_1$$
$$- S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\Sigma$$
$$- S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\theta_1$$
$$- S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\theta_1'$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \int \Pi_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dv_1$$

La première des conditions (8) fait disparaître le dernier terme de cette égalité, et l'égalité (20) devient

$$J = - S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\Sigma$$
$$- S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\theta_1$$
$$- S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\theta_1'$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La cavité θ_1 qui avait un volume égal à 0 au début de la modification a, à la fin de la modification, un volume infiniment petit. Les valeurs que prend la quantité Π_1 aux divers points de la surface θ_1 diffèrent infiniment peu de la valeur A_1 que prend cette quantité en un point quelconque de l'espace limité par la surface θ_1. On peut donc écrire :

$$S\,\Pi_1 \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\theta_1$$
$$= A_1 S \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\theta_1$$

Nous avons vu précédemment [Livre I, Ch. II] que l'intégrale
$$S[u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)]\, d\theta_1$$
étendue à une surface fermée quelconque, représentait l'accroissement subi, durant la modification virtuelle, par le volume que limite cette surface. Ici la surface θ_1 limite au début de la modification un volume nul et, à la fin de la modification, un volume infiniment petit U_1. On a donc
$$S[u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)]\, d\theta_1 = U_1$$
et
$$S\Pi_1 [u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)]\, d\theta_1 = A_1\, U_1$$
Si l'on désigne de même par U'_1 le volume que limite la surface θ'_1, par A'_1 la valeur de Π_1 en un point de ce volume on aura
$$S\Pi_1 [u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)]\, d\theta'_1 = A'_1\, U'_1,$$
Ces égalités donneront
$$J = - A_1\, U_1 - A'_1\, U'_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- S\Pi_1 [u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)]\, d\Sigma .$$
Adoptons, pour le fluide 2, des notations analogues à celles dont nous avons fait usage pour le fluide 1, et l'inégalité (19) deviendra

(21) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_1\, U_1 + A'_1 U'_1 + \ldots\ldots + A_2 U_2 + A'_2\, U'_2 + \ldots\ldots$$
$$+ S\Pi_1 [u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)]\, d\Sigma$$
$$+ S\Pi_2 [u_2 \cos(n_2,x) + v_2 \cos(n_2,y) + w_2 \cos(n_2,z)]\, d\Sigma \geqq 0.$$
Mais, en tout point de la surface Σ, on a, d'après les égalités (13)
$$\Pi_1 = \Pi_2 = \lambda.$$
La surface Σ, par laquelle les deux fluides étaient en contact avant la modification a pu, dans toute son étendue, ou seulement en certaines régions, se dédoubler en deux surfaces Σ_1, Σ_2. Si nous désignons par Δ la distance normale, nulle ou positive, qui sépare ces deux surfaces, nous aurons [Livre I, Ch. III, § 1]
$$\Delta = u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)$$
$$+ u_2 \cos(n_2,x) + v_2 \cos(n_2,y) + w_2 \cos(n_2,z).$$
L'inégalité (21) peut donc s'écrire :

(22) $$\ldots\ldots\ldots\ldots A_1 U_1 + A'_1 U'_1 + \ldots + A_2 U_2 + A'_2 U'_2 + \ldots + S\lambda\,\Delta\, d\Sigma \geqq 0.$$
Voyons les conséquences de cette inégalité (22) :

Les quantités Π_1, Π_2, ne peuvent être négatives en aucun point des espaces occupés par les fluides 1, 2, ni de la surface de contact de ces fluides.

Supposons, en effet, que la quantité Π_1 ait une valeur négative A_1 en un point M_1 du fluide 1. Donnons au système un déplacement virtuel dans lequel une cavité de volume U_1 se creuse autour du point M_1, tandis que la continuité de tout le reste du système est conservée. L'inégalité précédente se réduira alors à
$$A_1\, U_1 \geqq 0.$$

Or cette inégalité sera absurde, puisque U_1 est forcément positif et que A_1, est négatif par hypothèse.

La quantité Π_1 ne peut donc être négative en aucun point du fluide 1. On démontrerait de même que la quantité Π_2 ne peut être négative en aucun point du fluide 2, et que la quantité λ ne peut être négative en aucun point de la surface Σ.

Le résultat que nous venons d'obtenir, rapproché des égalités (16) et (17), fournit le suivant :

La pression ne peut être négative en aucun point de la partie déformable de la surface qui limite le fluide.

Souvenons-nous maintenant des conventions qui règlent le signe de la pressions et nous pourrons énoncer cette proposition de la manière suivante.

Toutes pression qui n'est pas nulle est dirigée vers l'intérieur du fluide à la surface limite duquel elle est appliquée.

§4. — On impose au fluide une modification virtuelle qui fait varier sa densité.

Nous allons maintenant imposer au fluide une modification virtuelle qui fasse varier sa densité aux différents points de l'espace qu'il occupe.

Dans ce cas, nous aurons à écrire, comme conséquence du Principe des Vitesses Virtuelles, l'inégalité (7), que nous pourrons transformer en égalité, si, comme nous le ferons pour ne point trop compliquer les formules, nous supposons que le fluide ne se creuse pas de cavités.

Mais l'égalité (10) nous enseigne que, quels que soient $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$, on a

$$\begin{aligned}
&\int \rho_1 (X u_1 + Y v_1 + Z w_1)\, dv_1 \\
&+ S\, P_1 \left[u_1 \cos(n_i, x) + v_1 \cos(n_i, y) + w_1 \cos(n_i, z)\right] dS_1 \\
&+ \int \Pi_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dv_1 \\
&+ \int \rho_2 (X u_2 + Y v_2 + Z w_2)\, dv_2 \\
&+ S\, P_2 \left[u_2 \cos(n_i, x) + v_2 \cos(n_i, y) + w_2 \cos(n_i, z)\right] dS_2 \\
&+ \int \Pi_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) dv_2 \\
&+ S\, \lambda \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right. \\
&\qquad \left. + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z)\right] d\Sigma = 0.
\end{aligned}$$

Les deux masses fluides devant demeurer au contact,

on a
$$u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)$$
$$+ u_2 \cos(n_2,x) + v_2 \cos(n_2,y) + w_2 \cos(n_2,z) = 0.$$

L'égalité formée par le principe des vitesses virtuelles peut donc s'écrire :
$$\int\left[\Phi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\Phi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \Pi_1\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dv_1$$
$$+ \int\left[\Phi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\Phi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \Pi_2\right]\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) dv_2 = 0.$$

Posons
$$(23) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \Psi_1 = \Phi_1(\rho_1) - \rho_1 \dfrac{d\Phi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \Pi_1, \\ \Psi_2 = \Phi_2(\rho_2) - \rho_2 \dfrac{d\Phi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \Pi_2, \end{cases}$$

Ψ_1 étant évidemment une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées d'un point de l'espace occupé par le fluide 1 et Ψ_2 une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées d'un point de l'espace occupé par le fluide 2.

L'égalité précédente pourra s'écrire
$$\int \Psi_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dv_1$$
$$+ \int \Psi_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) dv_2 = 0,$$

ou bien
$$\int\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} v_1\right) dv_1$$
$$+ \int\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} w_2\right) dv_2$$
$$+ S\, \Psi_1 \left[u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)\right] d\Sigma$$
$$+ S\, \Psi_2 \left[u_2 \cos(n_2,x) + v_2 \cos(n_2,y) + w_2 \cos(n_2,z)\right] d\Sigma$$
$$+ S\, \Psi_1 \left[u_1 \cos(n_i,x) + v_1 \cos(n_i,y) + w_1 \cos(n_i,z)\right] dS_1$$
$$+ S\, \Psi_2 \left[u_2 \cos(n_i,x) + v_2 \cos(n_i,y) + w_2 \cos(n_i,z)\right] dS_2 = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient les fonctions continues d'x, y, z, que l'on met à la place de $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$, ces fonctions étant assujetties seulement à vérifier en tout point de la surface Σ l'égalité
$$u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)$$
$$+ u_2 \cos(n_2,x) + v_2 \cos(n_2,y) + w_2 \cos(n_2,z) = 0.$$

Il doit donc exister une quantité μ, variable d'une manière continue sur la surface Σ, telle que l'on ait, quelles que soient les fonctions continues mises à la place de $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$,
$$\int\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} w_1\right) dv_1$$
$$+ \int\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} w_2\right) dv_2$$
$$+ S\,(\Psi_1 - \mu)\left[u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)\right] d\Sigma,$$
$$+ S\,(\Psi_2 - \mu)\left[u_2 \cos(n_2,x) + v_2 \cos(n_2,y) + w_2 \cos(n_2,z)\right] d\Sigma$$
$$+ S\, \Psi_1 \left[u_1 \cos(n_i,x) + v_1 \cos(n_i,y) + w_1 \cos(n_i,z)\right] dS_1$$
$$+ S\, \Psi_2 \left[u_2 \cos(n_i,x) + v_2 \cos(n_i,y) + w_2 \cos(n_i,z)\right] dS_2 = 0$$

Par des raisonnements que nous avons souvent employés, nous déduirons de cette égalité les résultats suivants :

1°. – On a, en tout point du fluide 1,

(A) .... $\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0;$

2°. – On a, en tout point du fluide 2,

(B) .... $\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = 0;$

3°. – On a, en tout point de la surface Σ,

(C) .... $\Psi_1 = \Psi_2 = \mu;$

4°. – On a, en tout point de la surface S_1,

(D) .... $\Psi_1 = 0;$

5°. – On a, en tout point de la surface S_2,

(E) .... $\Psi_2 = 0$

D'après les égalités (A) et (B), Ψ_1 a une valeur constante à l'intérieur du fluide 1 et Ψ_2 une valeur constante à l'intérieur du fluide 2.

D'après l'égalité (C), ces deux valeurs sont les mêmes.

D'après les égalités (D) et (E) ces deux valeurs sont égales à 0. On a donc, en tout point du fluide 1,

$$\Psi_1 = 0$$

et, en tout point du fluide 2,

$$\Psi_2 = 0.$$

Si on se reporte aux égalités (23), qui définissent les deux fonctions Ψ_1, Ψ_2, on voit que l'on a, en tout point du fluide 1,

(24) .... $\Phi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\Phi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \Pi_1 = 0,$

et en tout point du fluide 2,

(24 bis) .... $\Phi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\Phi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \Pi_2 = 0.$

La densité en un point d'un fluide dépend uniquement de la valeur de la fonction Π au même point ; la forme de l'équation qui exprime cette dépendance dépend de la nature du fluide.

L'étude de la relation qui exprime cette dépendance est accessible à l'expérience, grâce à un Théorème fondamental que nous allons démontrer.

Considérons un fluide unique soumis exclusivement à l'action de pressions extérieures et non de forces extérieures appliquées à ses différents éléments de volume. A quelle condition un semblable fluide sera-t-il en équilibre ?

Pour un semblable fluide, les équations (11) deviendront

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0,$$

en sorte que la quantité Π devra avoir la même valeur dans toute l'étendue du fluide. L'égalité (16) montre alors que la pression P aura même valeur en tout point de la surface du fluide et que cette valeur sera égale à la valeur constante de Π. L'égalité (24) montre que le fluide aura même densité en tout point,

Ainsi, un fluide dont les divers éléments de volume ne sont soumis à aucune force extérieure est en équilibre lorsqu'il supporte une pression normale, uniforme et positive, qu'il est homogène et que sa densité est liée à la pression qu'il supporte par l'équation

$$(25)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Phi(\rho) - \rho\,\frac{d\,\phi(\rho)}{d\rho} + P = 0$$

Cette équation porte le nom d'équation de compressibilité du fluide. L'égalité (24) peut alors être regardée comme équivalente à la proposition suivante :

Pour obtenir la relation qui existe entre la densité et la quantité Π en tout point d'un fluide en équilibre, il suffit de remplacer la pression par la quantité Π dans l'équation de compressibilité du fluide.

Ces propositions sont généralement admises sans démonstration ni discussion par les auteurs qui traitent de l'Hydrostatique. Elles sont cependant loin d'être évidentes. Non seulement elles doivent être démontrées, mais encore elles ne sont vraies en général que pour les fluides dont le Potentiel Thermodynamique Interne est de la forme $\int \varphi\, dv$, la fonction φ dépendant uniquement de la densité de l'élément dv. Si cette fonction dépendait en outre de la position de l'élément dv par rapport aux autres éléments de volume dv', dv'', ... du système et des paramètres qui caractérisent l'état de ces divers éléments, comme il arrive dans l'étude de la capillarité, dans l'étude des propriétés des fluides magnétiques ou diélectriques, les propositions précédentes cesseraient, en général, d'être exactes.

§ 5. _ De la Pression à l'Intérieur d'un Fluide.

Nous avons obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de tout fluide ; nous allons maintenant déduire quelques conséquences qui découlent de ces conditions.

Nous commencerons par la définition de la pression à l'intérieur d'un fluide.

Fig. 9.

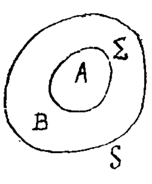
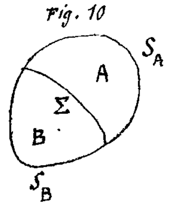


Fig. 10



Considérons une masse fluide en équilibre. Au sein de cette masse, traçons une surface Σ qui, soit seule, (fig 9), soit avec une portion S_A de la surface S (fig. 10), délimite une partie A du fluide. Soit B le reste du fluide.

Enlevons la partie B du fluide pour ne garder que la partie A. Conservons les forces extérieures qui agissent sur les éléments de volume de A et les pressions extérieures qui agissent sur les éléments de la surface S_A.

Appliquons en tout point de la surface Σ une pression normale à cette surface, dirigée vers l'intérieur du corps A, et égale à la valeur de Π en ce point, valeur qui n'est jamais négative.

Il est très-facile de voir, en passant en revue les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un fluide, que toutes ces conditions sont satisfaites pour le fluide A; et que, par conséquent, le fluide A est en équilibre.

La pression ainsi appliquée en un point d'un élément $d\Sigma$ de la surface Σ pour maintenir le corps A en équilibre est entièrement connue lorsqu'on connait un point de l'élément $d\Sigma$ et l'orientation de cet élément; il n'est pas nécessaire de connaître la forme de la surface Σ à laquelle il appartient.

Il n'existe pas d'autre manière d'appliquer à la surface Σ des pressions qui maintiennent le corps A en équilibre.

Supposons, en effet, que l'on puisse maintenir le corps A en équilibre en appliquant à la surface Σ des pressions dont les composantes en un point soient

$$p\cos(p,x), \qquad p\cos(p,y), \qquad p\cos(p,z)$$

Nous pourrions écrire pour le corps A la condition d'équilibre (7), soit que les pressions appliquées à la surface Σ fussent les pressions du premier système, soit que ces pressions fussent celles du second système. En ne retenant que les modifications virtuelles renversables pour lequelles la condition (7) se change en égalité, et en retranchant membre à membre les deux égalités obtenues, nous trouverions que l'on doit avoir, pour toute modification virtuelle du corps A,

$$\mathrm{S}\Big\{\big[\Pi\cos(n_a,x)-p\cos(p,x)\big]u + \big[\Pi\cos(n_a,y)-p\cos(p,y)\big]v + \big[\Pi\cos(n_a,z)-p\cos(p,z)\big]w\Big\}\,d\Sigma=0.$$

Les quantités u, v, w, sont, aux divers points de la surface Σ, des quantités assujetties seulement à varier d'une manière continue; on doit donc avoir en tout point de la surface Σ,

$$p\cos(p,x)=\Pi\cos(n_a,x),$$
$$p\cos(p,y)=\Pi\cos(n_a,y),$$
$$p\cos(p,z)=\Pi\cos(n_a,z),$$

égalités qui démontrent le Théorème énoncé.

La pression qu'il faut appliquer en un point M de l'élément $d\Sigma$, d'orientation n_a, pour maintenir la partie A du fluide en équilibre, étant déterminée sans ambiguité, nous la nommerons pression au point M du fluide pour l'orientation n_a de l'élément.

10 Duh.

Cette définition posée, les résultats précédemment obtenus peuvent s'énoncer ainsi:

La pression en un point d'un fluide, pour une orientation donnée de l'élément, est toujours dirigée suivant cette orientation; sa valeur, indépendante de l'orientation de l'élément, est égale à la quantité positive Π.

A cause de cette proposition, on dit simplement que la quantité $\Pi(x,y,z)$ est la pression au point (x,y,z) intérieur à la masse fluide.

Les Théorèmes établis au Livre I, Chapitre III, sont des conditions nécessaires pour l'équilibre d'un système quelconque; ils doivent donc s'appliquer en particulier à un fluide en équilibre

Ainsi, lorsqu'un système que, pour plus de simplicité, nous supposerons formé d'un seul fluide, est en équilibre, il doit exister six fonctions

$$\begin{array}{ccc} N_1, & N_2, & N_3, \\ T_1, & T_2, & T_3, \end{array}$$

uniformes, finies et continues dans l'espace occupé par ce fluide telles que l'on ait:

1°. – En tout point du fluide

$$(26) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z} = \rho X, \\ \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z} = \rho Y, \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z} = \rho Z; \end{array} \right.$$

2°. – En tout point de la surface qui le limite:

$$(27) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} N_1 \cos(n_i,x) + T_3 \cos(n_i,y) + T_2 \cos(n_i,z) = P\cos(P,x), \\ T_3 \cos(n_i,x) + N_2 \cos(n_i,y) + T_1 \cos(n_i,z) = P\cos(P,y), \\ T_2 \cos(n_i,x) + T_1 \cos(n_i,y) + N_3 \cos(n_i,z) = P\cos(P,z). \end{array} \right.$$

La pression en un point du fluide pour une orientation n_a de l'élément sera alors donnée par les égalités

$$(28) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} P\cos(P,x) = N_1 \cos(n_a,x) + T_3 \cos(n_a,y) + T_2 \cos(n_a,z), \\ P\cos(P,y) = T_3 \cos(n_a,x) + N_2 \cos(n_a,y) + T_1 \cos(n_a,z), \\ P\cos(P,z) = T_2 \cos(n_a,x) + T_1 \cos(n_a,y) + N_3 \cos(n_a,z). \end{array} \right.$$

On voit aisément que, pour mettre ces propositions d'accord avec les lois fondamentales de l'équilibre des fluides, il est nécessaire et suffisant de poser

$$\begin{array}{c} N_1 = N_2 = N_3 = \Pi, \\ T_1 = T_2 = T_3 = 0. \end{array}$$

Les équations (26) deviennent alors identiques aux équations (11), les équations (27) deviennent identiques aux équations (14); quant aux équations (28), elles redonnent pour la pression à l'intérieur d'un fluide, les lois que nous avons trouvées directement.

La grandeur Π, qui représente la pression en un point de la masse fluide, est le coefficient qu'introduit, dans l'application du calcul des variations, la condition imposée à tout point du fluide de garder une densité invariable. Cette manière de parvenir à la notion de la pression à l'intérieur d'un fluide est celle que Lagrange a adoptée [1], dans une section de la Mécanique Analytique qui sert de type aux méthodes suivies dans ce cours.

§ 6. – Forces qui peuvent maintenir un fluide en équilibre. Surfaces de niveau.

D'après l'égalité (24), la densité ρ_1 en un point du premier fluide dépend uniquement de la pression Π_1 en ce point. Écrivons abréviativement l'égalité (24)

$$\rho_1 = F_1(\Pi_1) \tag{29}$$

Moyennant cette égalité (29), les égalités (11) deviennent:

$$\left\{\begin{aligned} F_1(\Pi_1)\,X &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \\ F_1(\Pi_1)\,Y &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \\ F_1(\Pi_1)\,Z &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Désignons par V_1 une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point de l'espace occupé par le fluide 1, telle que l'on ait:

$$\frac{1}{F_1(\Pi_1)}\,d\Pi_1 + dV_1 = 0, \tag{31}$$

cette fonction V_1 étant définie à une constante près. Les égalités (30) deviendront alors

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dV_1 = 0, \tag{32}$$

En sorte que l'on aura, en tout point du fluide 1,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Écrivons de même l'égalité (24 bis) sous la forme

$$\rho_2 = F_2(\Pi_2) \tag{29 bis}$$

Désignons par V_2 une fonction uniforme finie et continue des coordonnées x_2, y_2, z_2, d'un point de l'espace occupé par le fluide 2, définie,

---

[1] Lagrange. Mécanique Analytique. 1re Partie Section VII, § 2. Voir, en particulier, N° 21.

à une constante près, par l'égalité :

$$(31^{bis}_{\,''}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{F_2(\Pi_2)}\, d\Pi_2 + dV_2 = 0$$

Nous aurons alors, en tout point du fluide 2.

$$(32^{bis}_{\,''}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dV_2 = 0,$$

en sorte que les fonctions X, Y, Z, vérifieront aussi les égalités (33) en tout point de l'espace occupé par le fluide 2.

Les fonctions X, Y, Z vérifiant les égalités (33) en tout point du système, il existe une quantité V, fonction finie et continue des coordonnées x, y, z, d'un point du système, telle que l'on ait :

$$(34) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} X + \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ Y + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ Z + \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Seulement, si l'espace occupé par le système n'est pas simplement connexe, cette fonction n'est pas forcément uniforme.

Dans l'espace occupé par le fluide 1, les deux fonctions V et V_1 ont les mêmes dérivées partielles ; elles ne diffèrent donc que par une constante ; comme V_1 n'est défini qu'à une constante près, on peut prendre

$$V_1 = V.$$

D'ailleurs, la fonction V_1 est une fonction uniforme des coordonnées d'un point du fluide 1. La fonction V doit donc varier d'une manière uni-uniforme si le point x, y, z, auquel elle se rapporte varie seulement au sein du fluide 1.

Des considérations analogues s'appliquent au fluide 2.

Lorsque les composantes d'une force vérifient les égalités (34), on dit que cette force admet une fonction potentielle et que V est cette fonction potentielle [1]

On voit alors que, pour que des forces puissent maintenir en équilibre un système formé d'un certain nombre de fluides, il faut qu'elles admettent une fonction potentielle en tout point de l'espace occupé par ces fluides. Cette fonction potentielle n'est pas forcément uniforme dans tout l'espace occupé par le système, mais elle est uniforme dans chaque espace partiel qu'occupe chacun des fluides continus qui composent le système.

On voit par conséquent que les surfaces qui limitent les divers fluides

---

[1] Nous admettons ici entre la fonction potentielle et le potentiel la distinction établie par Clausius (Clausius, la Fonction potentielle et le potentiel, traduit en Français par Folie. Paris. 1870)

continus ou les séparent les unes des autres forment autant de surfaces coupures transformant la fonction continue, mais non forcément uniforme, V en un groupe de fonctions $V_1, V_2, \ldots\ldots$ séparément uniformes mais ne se raccordant pas forcément l'une à l'autre avec continuité.

Cette proposition entraine une autre conséquence importante. Considérons la quantité

(35) .... $\Omega = \int V \rho \, dv$

et cherchons quelle variation subit cette quantité lorsqu'on donne au fluide un déplacement virtuel

Si l'on désigne par dm la masse invariable $\rho \, dv$ de l'élément dv on pourra écrire

$$\Omega = \int V \, dm$$

et par conséquent,

$$\delta \Omega = \int \delta V \, dm$$

D'ailleurs

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w.$$

On a donc

(36) .... $\delta \Omega = \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w \right) dm$

$$= \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w \right) \rho \, dv$$

ou bien encore

(37) .... $\delta \Omega = - \int \rho \, (X u + Y v + Z w) \, dv.$

La quantité $\delta \Omega$ est donc égale, au signe près, au travail des forces extérieures appliquées aux différents éléments de volume du fluide, ce qui conduit au au Théorème suivant.

Les forces extérieures appliquées aux divers éléments de volume d'un fluide et susceptibles de le mettre en équilibre admettent un potentiel défini par l'égalité (35).

L'équation (31) donne :

(38) .... $V_1 = \Phi_1 (\Pi_1)$

ou, en résolvant cette équation par rapport à Π_1,

(39) .... $\Pi_1 = G_1 (V_1)$

Chacune des surfaces définies à l'intérieur du fluide 1, par l'équation

$$V_1 = Const,$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$V = Const,$$

est donc une surface d'égale pression ; elle est alors, d'après l'égalité (31), une surface d'égale densité

On donne à une semblable surface qui, à l'intérieur d'un même fluide continu, est à la fois surface d'égale pression et surface d'égale densité, le nom de surface de niveau.

Les composantes de la force qui agit en un point du fluide étant respectivement égales d'après les égalités (34), à

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z},$$

on voit que la force est en chaque point normale à la surface de niveau qui passe par ce point.

La surface de niveau

$$V = \lambda$$

sépare les régions de l'espace où V est supérieur à λ des régions de l'espace où V est inférieur à λ. En chaque point d'une surface de niveau, la force est dirigée vers la région où la fonction potentielle a une valeur moindre que sur la surface même.

Balayons l'espace par des surfaces de niveau infiniment voisines représentées par les équations

$$V = \lambda, \qquad V = \lambda - \varepsilon, \quad V = \lambda - 2\varepsilon, \ldots\ldots$$

où ε est une constante positive infiniment petite. Soient, en un point M de la première surface, N la normale dirigée vers la seconde surface et Δ la distance normale des deux surfaces. La force F au point M est dirigée comme la normale N et a pour valeur

$$F = -\frac{\partial V}{\partial N} = -\frac{(\lambda - \varepsilon) - \lambda}{\Delta} = \frac{\varepsilon}{\Delta}$$

En chaque point la grandeur de la force est inversement proportionnelle à la distance qui sépare, aux environs de ce point, deux surfaces de niveau infiniment voisines.

Le nom de surface de niveau a son origine dans l'étude des fluides à surface libre.

On nomme surface libre d'un fluide une surface déformable qui ne supporte aucune pression.

La partie continue ou non de cette surface qui confine à un même fluide continu 1 est caractérisée par ce fait que la quantité Π_1 est, en tout point de cette surface, égale à 0. Alors V_1 doit avoir en tout point de cette surface, la même valeur $\Phi_1(0)$ [Égalité (38)]

Toute portion continue ou non de surface libre qui confine dans toute son étendue avec un même fluide continu est située sur une même surface de niveau

Si la surface libre d'un système se compose de plusieurs parties dont chacune confine à des portions différentes, séparées les unes des autres par des surfaces de discontinuité, ces diverses parties peuvent appartenir à des surfaces de niveau différentes.

On donne, dans le langage vulgaire, le nom de niveau à la surface libre d'un fluide pesant ; la proposition précédente a conduit Mac Laurin et Clairaut à étendre le nom de surface de niveau à toute surface définie par l'équation

$$V = \text{Const}$$

Pour qu'un fluide puisse présenter une surface libre, il faut que sa densité ait une valeur positive et finie en tout point de cette surface ; la densité est donnée en général, en fonction de la pression par l'égalité (29) ; par conséquent, pour qu'un fluide puisse présenter une surface libre, il faut que la quantité $F_1(0)$ soit positive et finie. S'il en est ainsi, le fluide prend le nom de liquide ; sinon, il prend le nom de gaz.

En tout point de la surface de séparation de deux fluides 1 et 2, qui sont l'un et l'autre continus, on doit avoir, d'après l'égalité (13)

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

On a d'ailleurs [Egalité (39)].

$$\Pi_1 = G_1(V_1).$$

et de même

$$\Pi_2 = G_2(V_2).$$

Les deux fonctions V_1 et V_2 ne peuvent différer chacune de la fonction V que par une constante. Si donc nous désignons par C_1 et C_2 deux constantes, nous aurons :

$$V_1 = V + C_1,$$
$$V_2 = V + C_2;$$

de là nous déduirons,

$$\Pi_1 = G_1(V + C_1),$$
$$\Pi_2 = G_2(V + C_2),$$

et nous devrons avoir, en tout point de la surface de séparation des deux fluides

(40) .... $G_1(V + C_1) = G_2(V + C_2)$,

Cette équation, résolue par rapport à V, nous donne

$$V = A_1, \qquad V = A_2, \ldots\ldots$$

$A_1, A_2, \ldots\ldots$ étant des constantes ; donc toute portion continue de surface qui sépare deux fluides continus est située dans une seule et même surface de niveau.

Si la surface de séparation de deux fluides continus est formée de plusieurs parties séparées, on n'est pas assuré que ces diverses portions soient sur une même surface de niveau ; une de ces parties peut être sur la surface $V = A_1$; une autre sur la surface $V = A_2, \ldots\ldots$

Toutefois on est assuré que ces diverses parties sont sur une même surface de niveau si l'équation (40) n'admet pas plus d'une solution. Cherchons à quelle condition nous serons certains que l'équation (40) n'admet pas plus d'une solution.

Si l'équation (40) admet plus d'une solution, deux solutions consécutives seront séparées par une solution de l'équation $\quad \dfrac{dG_1(V_1)}{dV_1} - \dfrac{dG_2(V_2)}{dV_2} = 0$

qui peut s'écrire d'après l'égalité (39),

$$\frac{d\Pi_1}{dV_1} - \frac{d\Pi_2}{dV_2} = 0,$$

ou bien, d'après les égalités (29), (31), ($29^{bis}_{''}$) et ($31^{bis}_{''}$),

(41) ------------------- $\rho_1(\Pi_1) - \rho_2(\Pi_2) = 0$

avec

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

Si l'un des deux fluides est toujours plus dense que l'autre sous une même pression, l'égalité (41) ne pourra admettre de solution et la surface de séparation des deux fluides sera dans une seule et même surface de niveau

Chapitre II

Stabilité de l'Equilibre des Fluides.

§ 1. Stabilité de l'Equilibre d'un système composé de fluides soumis uniquement à des pressions extérieures.

Après avoir étudié les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système composé de fluides, nous allons discuter, dans quelques cas, la stabilité de cet équilibre.

Cette discussion reposera sur l'expression de la variation seconde du Potentiel Thermodynamique Interne du système pour une modification virtuelle quelconque.

La variation première est donnée par l'égalité (6) du Chapitre I.

$$\delta\mathcal{F} = \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\phi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dv_1$$
$$+ \int \left[\varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\phi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\right]\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) dv_2$$

Posons

$$dm_1 = \rho_1\, dv_1 \qquad dm_2 = \rho_2\, dv_2,$$

dm et dm_2 désignant deux masses élémentaires invariables appartenant l'une au fluide 1, l'autre au fluide 2. Nous pourrons écrire :

(1) .... $\delta\mathcal{F} = \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right] \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dm_1$

$$+ \int \left[\varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\right] \frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) dm_2$$

Donnons de nouveau à la particule dm_1 le déplacement (u_1, v_1, w_1) et cherchons la variation subie par la quantité

$$\int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1\right] \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} \frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dm_1$$

Nous aurons :

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta \int \frac{1}{\rho_1}\left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dm_1$$

$$= \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) \delta \left\{\frac{1}{\rho_1}\left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right]\right\} dm_1$$

$$+ \int \frac{1}{\rho_1}\left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right] \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dm_1$$

A cause de l'egalité

$$\delta \rho_1 = -\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right),$$

on a

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) \delta \left\{\frac{1}{\rho_1}\left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right]\right\} dm_1$$

$$= \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 \frac{dm_1}{\rho_1}$$

$$- \int \rho_1 \frac{d}{d\rho_1}\left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 \frac{dm_1}{\rho_1}$$

$$= \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 dv_1$$

$$+ \int \rho_1^2 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 dv_1$$

Les égalités (1), (2), (3), donnent :

$$(4) \ldots\ldots\ldots \delta^2 \mathcal{F} = \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \rho_1^2 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 dv_1$$

$$+ \int \left[\varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \rho_2^2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\right]\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)^2 dv_2$$

$$+ \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\right] \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dv_1$$

$$+ \int \left[\varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\right] \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) dv_2$$

Faisons immédiatement une application de cette formule.

Supposons que les seules forces extérieures agissant sur le système se réduisent à une pression normale, uniforme et constante P. Le travail de ces forces a pour valeur

$$P \int \left[u_1 \cos(n_i, x) + v_1 \cos(n_i, y) + w_1 \cos(n_i, z)\right] dS_1$$

$$+ P \int \left[u_2 \cos(n_i, x) + v_2 \cos(n_i, y) + w_2 \cos(n_i, z)\right] dS_2$$

Si nous supposons que le fluide ne se creuse pas de cavité, ce travail pourra s'écrire

$$-P\delta\left(\int dv_1+\int dv_2\right)=-\delta\left[P\left(\int dv_1+\int dv_2\right)\right]$$

Les forces extérieures admettent donc dans ce cas un Potentiel qui a pour valeur

$$W=P\left(\int dv_1+\int dv_2\right)$$

La variation première de ce Potentiel a pour valeur

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \delta W=\int P\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)dv_1 + \int P\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)dv_2$$

Si les deux fluides sont homogènes, et si leurs densités sont données par

$$(C)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases}\varphi_1(\rho_1)-\rho_1\dfrac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+P=0,\\ \varphi_2(\rho_2)-\rho_2\dfrac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}+P=0,\end{cases}$$

on aura, d'après les égalités (6) du Chapitre I et (5) du présent Chapitre

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \delta\mathcal{F}+\delta W=0$$

et le système sera en équilibre, résultat qui est d'accord avec celui que nous avions déjà trouvé au § 5 du Chapitre I pour le cas d'un seul fluide.

Demandons nous si cet état d'équilibre est stable.

Formons pour cela $\delta^2 W$.

L'égalité (44) peut s'écrire :

$$\delta W=P\int\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)dm_1 + P\int\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\right)dm_2$$

Si l'on observe alors que

$$\delta\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right),$$

$$\delta\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right),$$

$$\frac{dm_1}{\rho_1}=dv_1,$$

$$\frac{dm_2}{\rho_2}=dv_2,$$

on aura

$$(8)\ldots\ldots\ldots \delta^2 W=\int P\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 dv_1+\int P\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)^2 dv_2$$

$$+\int P\delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)dv_1+\int P\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)dv_2$$

En réunissant les égalités (4) et (8), nous trouvons :

$$(9) \dots\dots \delta^2(\mathcal{F}+W) = \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + P\right]\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 - \delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)\right]dv_1$$

$$+\int\left[\varphi_2(\rho_2) - \rho_2\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + P\right]\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)^2 - \delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)\right]dv_2$$

$$+\int \rho_1^2 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 dv_1$$

$$+\int \rho_2^2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)^2 dv_2$$

L'état d'équilibre défini par les égalités (6) sera stable si l'on a

$$\delta^2(\mathcal{F}+W) > 0$$

Or les égalités (6) transforment l'égalité (9) en

$$\delta^2(\mathcal{F}+W) = \rho_1^2 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 dv_1$$

$$+\rho_2^2\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\int\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)^2 dv_2$$

Pour que la quantité qui forme le second membre de cette égalité soit positive, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(10) \dots\dots \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} > 0 \qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} > 0$$

Cherchons à interpréter ces conditions

L'équation de compressibilité du fluide 1 représentée par la première des équations (6) donne :

$$\rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} d\rho_1 - dP = 0$$

La première des inégalités (10) fournit donc la première des inégalités :

$$(11) \dots\dots \frac{d\rho_1}{dP} > 0 \qquad \frac{d\rho_2}{dP} > 0$$

La seconde se démontre de même

L'équilibre d'un système fluide sous l'action d'une pression normale uniforme et constante est stable si la densité de chacun des fluide augmente avec la pression qu'il supporte.

Tous les fluides connus devenant d'autant plus denses qu'ils sont plus pressés, leur équilibre est stable dans ces conditions.

§2. Stabilité de l'Equilibre d'un système de fluides limité par des surfaces libres.

Nous avons vu que les forces extérieures qui agissent sur les divers éléments de volume d'un système composés de fluides admettent un Potentiel et que ce Potentiel est donné par l'égalité suivante : (Chapitre I, Egalité 35)

$$(12) \dots\dots \Omega = \int V_1 \rho_1 dv_1 + \int V_2 \rho_2 dv_2$$

Si les surfaces déformables qui limitent le fluide sont des surfaces libres, les pressions appliquées aux divers éléments de ces surfaces étant nulles, on voit que l'ensemble des forces extérieures qui agissent sur le système admettent un potentiel, et que ce potentiel est la quantité Ω définie par l'égalité (35). Le système admet alors un Potentiel Thermodynamique total ayant pour valeur $(\mathcal{F} + \Omega)$. Il suffit, pour que l'équilibre du système soit stable, que ce Potentiel soit minimum; par conséquent, si l'on désigne par

$$\delta(\Omega + \mathcal{F}), \qquad \delta^2(\Omega + \mathcal{F}), \ldots\ldots$$

les variations première, seconde, ... de ce potentiel, que la quantité

$$\Delta(\Omega + \mathcal{F}) = \delta(\Omega + \mathcal{F}) + \delta^2(\Omega + \mathcal{F}) + \ldots\ldots$$

soit positive.

Nous n'étudierons que des modifications virtuelles qui laissent invariable la densité en tout point de chacun des fluides qui composent le système; qui, par conséquent, vérifient les restrictions exprimées par les égalités

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0.$$

Dans ces conditions on a

$$\delta \mathcal{F} = 0, \qquad \delta^2 \mathcal{F} = 0; \ldots\ldots$$

en sorte qu'au lieu d'exprimer que la quantité $\Delta(\Omega + \mathcal{F})$ est positive, il suffit d'exprimer que la quantité

$$\Delta\,\Omega = \delta\Omega + \delta^2\Omega + \ldots\ldots$$

est positive.

Le système est supposé en équilibre; appliquons lui une déformation virtuelle qui laisse invariable la densité en chaque point; il peut arriver que cette modification creuse des cavités en des points du fluide 1 où la valeur de Π_1 est positive, ou en des points du fluide 2 où la valeur de Π_2 est positive, ou enfin en des points de la surface de contact Σ des deux fluides où la valeur commune de Π_1 et de Π_2 est positive; dans ce cas, nous savons que l'on a

$$\delta\,\Omega > 0,$$

et, par conséquent,

$$\Delta\,\Omega > 0.$$

Il nous suffit donc d'étudier les modifications qui ne creusent aucune cavité à l'intérieur du fluide ou bien qui creusent des cavités seulement aux points où la valeur de Π est égale à 0. Dans ce cas, nous avons

$$\delta\,\Omega = 0,$$

et, par conséquent, pour connaître le signe de $\Delta\,\Omega$, nous devons déterminer le signe de $\delta^2\Omega$.

Formons l'expression de $\delta^2 \Omega$

Nous avons

$$\delta \Omega = \int \rho_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z} w_1 \right) dv_1 + \int \rho_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial V_2}{\partial z} w_2 \right) dv_2,$$

et, par conséquent,

$$(13) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta^2 \Omega = \int \rho_1 \Big(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} u_1^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} u_1 v_1 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z} u_1 w_1$$
$$+ \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial x} v_1 u_1 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} v_1^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial z} v_1 w_1$$
$$+ \frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial x} w_1 u_1 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial y} w_1 v_1 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z_1^2} w_1^2 \Big) dv_1$$
$$+ \int \rho_2 \Big(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} u_2^2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial y} u_2 v_2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial z} u_2 w_2$$
$$+ \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \partial x} v_2 u_2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} v_2^2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \partial z} v_2 w_2$$
$$+ \frac{\partial^2 V_2}{\partial z \partial x} w_2 u_2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z \partial y} w_2 v_2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} w_2^2 \Big) dv_2$$

Des intégrations par parties vont nous permettre de transformer cette égalité.

Le fluide 1 confine au fluide 2 par la surface Σ. Nous le supposerons creusé de cavités que limitent les surfaces $\theta_1, \theta_1', \ldots\ldots\ldots$ (Pour simplifier les formules nous supposerons qu'il existe une seule de ces cavités)

Enfin S_1 est la surface qui le sépare de ce qui est extérieur au système.

Des intégrations par parties nous donneront

$$\int \rho_1 \Big(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} u_1^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} u_1 v_1 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z} u_1 w_1$$
$$+ \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial x} v_1 u_1 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} v_1^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial z} v_1 w_1$$
$$+ \frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial x} w_1 u_1 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z \partial y} w_1 v_1 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} w_1^2 \Big) dv_1$$
$$= -\int \Big[\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial (\rho_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial (\rho_1 u_1 v_1)}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial (\rho_1 u_1 w_1)}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial (\rho_1 v_1 u_1)}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial (\rho_1 v_1^2)}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial (\rho_1 v_1 w_1)}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial (\rho_1 w_1 u_1)}{\partial z} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial (\rho_1 w_1 v_1)}{\partial z} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial (\rho_1 w_1)^2}{\partial z} \Big] dv_1$$

$$-S\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}w_1\right)\rho_1$$
$$\times\left[u_1\cos(n_i,x)+v_1\cos(n_i,y)+w_1\cos(n_i,z)\right]dS_1$$
$$-S\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}w_1\right)\rho_1$$
$$\times\left[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)\right]d\Theta_1$$
$$-S\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}w_1\right)\rho_1$$
$$\times\left[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)\right]d\Sigma$$

Cette égalité peut encore se transformer, car l'intégrale triple qui figure au second membre peut s'écrire

$$\int\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}u_1+\frac{V_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}w_1\right)\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial \rho_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial \rho_1}{\partial z}w_1\right)dv_1$$
$$+\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}u_1+\frac{\partial V}{\partial y}v_1+\frac{\partial V}{\partial z}w_1\right)\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)dv_1$$

et le dernier terme de cette expression est égal à 0, puisque nous n'étudions que des modifications qui n'altèrent pas la densité de chaque particule matérielle.

Nous avons appris ainsi à transformer l'un des deux termes dont se compose, d'après l'égalité (13), l'expression de $\delta^2\Omega$. L'autre terme se transforme d'une manière analogue ; si nous supposons, pour éviter la complication des formules, que le fluide 2 ne se creuse d'aucune cavité, l'égalité (13) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$(14)\ldots\ldots\ \delta^2\Omega=-\int\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}w_1\right)\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial \rho_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial \rho_1}{\partial z}w_1\right)dv_1$$
$$-\int\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}u_2+\frac{\partial V_2}{\partial y}v_2+\frac{\partial V_2}{\partial z}w_2\right)\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}u_2+\frac{\partial \rho_2}{\partial y}v_2+\frac{\partial \rho_2}{\partial z}w_2\right)dv_2$$
$$-S\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}w_1\right)\rho_1$$
$$\times\left[u_1\cos(n_i,x)+v_1\cos(n_i,y)+w_1\cos(n_i,z)\right]dS_1$$
$$-S\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}u_2+\frac{\partial V_2}{\partial y}v_2+\frac{\partial V_2}{\partial z}w_2\right)\rho_2$$
$$\times\left[u_2\cos(n_i,x)+v_2\cos(n_i,y)+w_2\cos(n_i,z)\right]dS_2$$
$$-S\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}u_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}v_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}w_1\right)\rho_1$$
$$\times\left[u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)\right]d\Theta_1$$

$$- S \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z} w_1 \right) \rho_1$$
$$\times \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \right] d\Sigma$$
$$- S \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial V_2}{\partial z} w_2 \right) \rho_2$$
$$\times \left[u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) \right] d\Sigma$$

Étudions le signe des divers termes qui forment le second membre de cette expression.

Par le point (x, y, z) du fluide 1, menons la surface de niveau
$$V_1 = \text{Const.}$$

Soit N_1 la normale à cette surface dans le sens où V_1 va en croissant; soit D_1 la longueur du segment dont u_1, v_1, w_1, sont les composantes; nous aurons:
$$\frac{\partial V_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z} w_1 = D_1 \frac{\partial V_1}{\partial N_1} \cos(N_1, D_1).$$

Nous avons vu, (Chapitre I, §6) que les surfaces de niveau sont, à l'intérieur d'un même fluide continu, des surfaces d'égales densité; nous aurons donc aussi:
$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \rho_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} w_1 = D \frac{\partial \rho_1}{\partial N_1} \cos(N_1, D_1).$$

Au second membre de l'égalité (14), le premier terme peut s'écrire d'après ces égalités
$$- \int D_1^2 \frac{\partial V_1}{\partial N_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial N_1} \cos^2(N_1, D_1)\, dv_1$$

Mais les égalités (29) et (30) permettent d'écrire:
$$\frac{1}{\rho_1} d\Pi_1 + \partial V_1 = 0$$
ou bien
$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \Pi_1}{\partial N_1} + \frac{\partial V_1}{\partial N_1} = 0$$

Le terme considéré peut donc s'écrire
$$\int \frac{D_1^2}{\rho_1} \frac{\partial \Pi_1}{\partial N_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial N_1} \cos^2(N_1, D_1)\, dv_1,$$
forme sous laquelle on voit que ce terme ne peut être négatif, car ρ_1 croît en même temps que Π_1, ainsi que nous l'avons vu au Chapitre précédent et, par conséquent, les deux quantités
$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial N_1}, \frac{\partial \rho_1}{\partial N_1},$$
sont de même signe.

On démontrerait de même qu'au second membre de l'égalité (14), le second terme ne peut être négatif.

Considérons le troisième terme

La surface S_1 se divise en deux parties ; une partie de cette surface est indéformable : le fluide confine à des obstacles solides ; en tout point de cette partie, on a

$$u_1 \cos(n_i, x) + v_1 \cos(n_i, y) + w_1 \cos(n_i, z) = 0$$

Une autre partie est déformable ; nous pouvons supposer que l'intégrale considérée s'étend uniquement à cette partie.

D'ailleurs, en vertu des égalités (11) du Chapitre I, on a

$$\rho_1 \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z} w_1 \right)$$
$$= - \left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} w_1 \right)$$

La partie déformable de la surface S_1 est une surface libre, c'est à dire une surface de niveau. La quantité précédente peut donc encore s'écrire

$$-\frac{\partial \Pi_1}{\partial n_i} \cos(n_i, D_1),$$

et l'on a

$$- \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z} w_1 \right) \rho_1$$
$$\times \left[u_1 \cos(n_i, x) + v_1 \cos(n_1 \cos(n_i, y) + w_1 \cos(n_i, z) \right] dS_1$$
$$= D_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial n_i} \cos^2(n_i, D_1)\, dS_1.$$

La surface à laquelle s'étend cette intégration est une surface libre, en tout point de laquelle on a

$$\Pi_1 = 0$$

La quantité Π_1 ne pouvant être négative en aucun point du fluide 1, on aura forcément, en tout point de cette surface

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial n_i} \geqq 0.$$

La quantité dont nous venons d'écrire l'expression ne peut donc être négative.

On démontrerait de même qu'au second membre de l'égalité (14), le quatrième terme ne peut être négatif.

Le cinquième terme peut s'écrire

$$D_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial D_1} \cos(n_1, D_1)\, d\Theta_1$$

Soit M_1 le point où la surface Θ_1 venait s'évanouir avant la modification. En ce point, on avait par hypothèse

$$\Pi_1 = 0$$

D_1 est une direction quelconque issue de ce point ; Π_1 ne pouvant être négatif en aucun point du fluide 1, on a forcément

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial D_1} \geqq 0.$$

Si l'on désigne par ϖ_1 une quantité qui est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $\frac{\partial \Pi_1}{\partial D_1}$ sur la surface θ_1, et qui, par conséquent ne peut être négative, on pourra écrire la quantité considérée

$$\varpi_1 \quad D_1 \cos (n_1, D_1)\, d\theta_1,$$

ou bien

$$\varpi_1\, U_1,$$

U_1 étant le volume de la cavité qui s'est creusée dans le fluide par l'effet de la modification. On voit, sous cette forme, que cette quantité ne peut être négative.

Occupons nous enfin des deux derniers termes du second membre de l'égalité (14)

La surface Σ se partage en deux régions : une partie Σ' le long de laquelle les deux fluides demeurent en contact avant comme après la modification, et une partie Σ'' le long de laquelle ils se séparent.

Considérons d'abord la seconde région.

Soit M un point de la surface Σ''. La molécule du fluide 1 qui se trouvait au point M a subi un déplacement D_1; la molécule du fluide 2 qui se trouvait au même point a subi un déplacement D_2. Nous aurons

$$\begin{aligned}
&- \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z} w_1\right) \rho_1 \\
&\quad \times \left[u_1 \cos (n_1, x) + v_1 \cos (n_1, y) + w_1 \cos (n_1, z)\right] d\Sigma'' \\
&- \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial z} w_2\right) \rho_2 \\
&\quad \times \left[u_2 \cos (n_2, x) + v_2 \cos (n_2, y) + w_2 \cos (n_2, z)\right] d\Sigma'' \\
&= \frac{\partial \Pi_1}{\partial D_1} D_1 \cos (n_1, D_1)\, d\Sigma'' + \frac{\partial \Pi_2}{\partial D_2} D_2 \cos (n_2, D_2)\, d\Sigma''
\end{aligned}$$

Par hypothèse, au point M, les deux quantités Π_1, Π_2 sont égales à 0. D'ailleurs, comme la quantité Π_1 ne peut être négative en aucun point du fluide 1, ni la quantité Π_2 en aucun point du fluide 2, les deux quantités

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial D_1}, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial D_2},$$

ne peuvent être négatives. Si nous désignons par ϖ une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des précédentes, quantité qui ne sera assurément pas négative, l'expression que nous étudions pourra s'écrire

$$\begin{aligned}
&\varpi \quad \left[D_1 \cos (n_1, D_1) + D_2 \cos (n_2, D_2)\right] d\Sigma'' \\
&= \varpi \quad \left[u_1 \cos (n_1, x) + v_1 \cos (n_1, y) + w_1 \cos (n_1, z)\right. \\
&\qquad \left. + u_2 \cos (n_2, x) + v_2 \cos (n_2, y) + w_2 \cos (n_2, z)\right] d\Sigma'' \\
&= \varpi\, \Delta,
\end{aligned}$$

Δ désignant la distance normale, au point M, des deux surfaces Σ_1, Σ_2, en lesquelles la surface Σ s'est dédoublée; Δ étant une quantité essentiellement positive, la quantité précédente ne peut être négative.

En tout point de la surface Σ', on a

$$u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)$$
$$+ u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) = 0.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&- \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z} w_1\right) \rho_1 \\
&\quad \times \left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] d\Sigma' \\
&- \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial V_2}{\partial z} w_2\right) \rho_2 \\
&\quad \times \left[u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z)\right] d\Sigma' \\
= &- \left[\rho_1 (u_1 X + v_1 Y + w_1 Z) - \rho_2 (u_2 X + v_2 Y + w_2 Z)\right] \\
&\quad \times \left[u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z)\right] d\Sigma'.
\end{aligned}$$

La force dont X, Y, Z, sont les composantes est normale à la surface Σ', qui est une surface de niveau; supposons, pour fixer les idées, qu'elle soit dirigée du fluide 1 vers le fluide 2, comme la normale n_2. Nous aurons en désignant par F sa valeur :

$$\begin{aligned}
u_1 X + v_1 Y + w_1 Z &= -F\left[u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z)\right] \\
&= F\left[u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z)\right] \\
u_2 X + v_2 Y + w_2 Z &= F\left[u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z)\right]
\end{aligned}$$

et l'expression précédente pourra s'écrire

$$(\rho_2 - \rho_1) F \left[u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z)\right]^2 d\Sigma'$$

Si $(\rho_2 - \rho_1)$ est positif, cette quantité ne pourra être négative, il en sera de même de la quantité $\delta^2 \Omega$ dont l'expression est donnée par l'égalité (14), et l'équilibre du système sera assurément stable.

Ainsi l'équilibre d'un système de fluides est assurément stable si la direction de la force traverse toujours la surface de séparation de deux fluides en allant du fluide le moins dense au fluide le plus dense.

Chapitre III.

Les Equations de l'Hydrodynamique et la Relation Supplémentaire.

§1. – Mise en équation du Problème de l'Hydrodynamique.

Les premiers essais d'Hydrodynamique (1) sont dûs à Torricelli, qui trouva expérimentalement, dans l'étude de l'écoulement des liquides, une loi à laquelle on a conservé son nom. Cette règle fut le point de départ des recherches de Newton, de Varignon, de Daniel Bernouilli, de Mac Laurin, de Jean Bernouilli, et enfin des premiers travaux de d'Alembert. Mais ces recherches devaient forcément demeurer fort incomplètes tant que le problème même de l'Hydrostatique n'était pas mis en équation d'une manière entièrement générale et rigoureuse. L'Hydrodynamique ne pouvait donc se fonder qu'après que Clairaut eut donné, dans sa Théorie de la figure de la Terre, imprimée en 1743, les lois générales de l'équilibre des fluides soumis à des forces quelconques.

En la même année 1743, d'Alembert donnait, dans son Traité de Dynamique, un principe général permettant de déduire les équations du mouvement d'un système de corps des équations qui règlent son équilibre.

Ce Principe devait permettre de déduire les équations générales de l'Hydrodynamique des équations générales de l'Hydrostatique. Aussi, l'Académie de Berlin ayant mis au concours, en 1750, l'étude de la résistance des fluides, d'Alembert suivit cette déduction, et, en 1752, dans son Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, il donna les équations aux dérivées partielles qui régissent le mouvement des fluides compressibles ou incompressibles.

Dans un beau mémoire, inséré au volume des Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1755, Euler perfectionna la découverte de d'Alembert et donna aux équations de l'Hydrodynamique la forme sous laquelle elles sont encore employées aujourd'hui.

Enfin, dans la Mécanique Analytique, Lagrange donna un exposé cohérent des lois fondamentales de l'Hydrodynamique.

(1) Sur l'Histoire de l'Hydrodynamique, V. Lagrange, Mécanique Analytique, 2e Partie, préambule de la Xe Section.

Nous avons vu [Livre I, Ch. I, §7] que la Thermodynamique justifiait l'extension du Principe de d'Alembert aux fluides dont le Potentiel Thermodynamique Interne est de la forme :

$$\mathcal{F} = \int \varphi(\rho, T)\, dv,$$

ρ étant la densité en un point de l'élément de volume dv, T la température au même point, et l'intégration s'étendant au volume entier du fluide. C'est de cette extension du Principe de d'Alembert que nous allons nous servir pour obtenir la mise en équation du problème du mouvement des fluides.

Soient γx, γy, γz, les composantes de l'accélération au point (x, y, z) à l'instant t. Le fluide doit être en équilibre sous l'action des liaisons qui agissent sur lui à l'instant t et des forces extérieures qui lui sont appliquées et qui sont les suivantes.

1°. – Des pressions appliquées à la partie déformable de la surface qui le limite.

2°. – Des forces appliquées aux divers éléments de masse du fluide, la masse qui occupe l'élément dv étant soumise à la force qui a pour composantes

$$\rho(X - \gamma x)\, dv,$$
$$\rho(Y - \gamma y)\, dv,$$
$$\rho(Z - \gamma z)\, dv.$$

$\rho X\, dv$, $\rho Y dv$, $\rho Z\, dv$, sont comme au Chapitre précédent, les composantes de la force extérieure qui sollicite l'élément de masse $\rho\, dv$.

Dès lors, si nous nous reportons aux Principes de l'Hydrostatique, nous pouvons énoncer les conditions suivantes :

1°. – Il existe une quantité Π, variable à l'intérieur du fluide d'une manière continue et uniforme, telle que l'on ait en tout point et à tout instant

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \rho(X - \gamma x) &= \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ \rho(Y - \gamma y) &= \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ \rho(Z - \gamma z) &= \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Cette quantité Π n'est négative en aucun point.

2°. – Si le fluide se compose de deux parties séparées par une surface de discontinuité, les fonctions Π relatives à ces deux parties sont des fonctions analytiques différentes, mais qui deviennent égales entre elles sur la surface de discontinuité.

3°. – En tout point de la surface déformable du fluide, la pression est normale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et sa grandeur satisfait à la condition.

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad P = \Pi.$$

4°. – En tout point de la masse fluide on a :

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varphi(\rho, T) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\varphi(\rho, T) + \Pi = 0$$

Telles sont les relations que nous donne le principe de d'Alembert généralisé par la Thermodynamique. Ces relations vont nous servir à discuter le problème du mouvement des fluides. Dès maintenant, appelons l'attention sur quelques unes de leurs conséquences immédiates.

Si, par une surface Σ, nous partageons le fluide en deux parties A et B et si nous supprimons la partie B en conservant la partie A, nous pourrons garder inaltéré le mouvement de cette partie en appliquant à la surface Σ des pressions convenables. La pression en chaque point de la surface Σ est normale à la surface en ce point, dirigée vers l'intérieur de la partie A, et égale en grandeur à la valeur de Π en ce point. Plusieurs auteurs, entre autre de Saint Venant, ont révoqué en doute l'exactitude de ces théorèmes pour les fluides en mouvement.

D'après l'égalité (3) la densité en un point du fluide dépend uniquement de la pression et de la température en ce point, et la relation qui exprime cette dépendance est la même à l'état de mouvement du fluide qu'à l'état de repos. Cette proposition n'est nullement évidente à priori et a été revoquée en doute par plusieurs physiciens, notamment par M. Bjerkness.

§.2. – Equations d'Euler et Equations de Lagrange.

Nous allons faire subir aux équations (1) deux transformations différentes dont l'une est due à Euler et l'autre à Lagrange.

Voyons d'abord la transformation d'Euler –

Considérons un élément de masse dont un point M a pour coordonnées x, y, z, à l'instant t. Soient u, v, w, les composantes de la vitesse de ce point à l'instant t. Les quantités u, v, w, sont des fonctions uniformes des variables x, y, z, t. Nous admettrons qu'elles sont finies, continues, et qu'elles admettent par rapport à x, y, z, t, des dérivées partielles qui sont finies.

A l'instant $(t + dt)$ le point M a pour coordonnées $(x + dx)$, $(y + dy)$, $(z + dz)$; sa vitesse a pour composantes $(u + du)$, $(v + dv)$, $(w + dw)$. On a par la définition même de l'accélération du point M,

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} du = \gamma_x \, dt, \\ dv = \gamma_y \, dt, \\ dw = \gamma_z \, dt. \end{cases}$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial t} dt, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt. \end{aligned} \right.$$

Enfin on a aussi, par la définition même de la vitesse,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= u\,dt, \\ dy &= v\,dt, \\ dz &= w\,dt. \end{aligned} \right.$$

Ces égalités (4), (5) et (6) donnent :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_x &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \gamma_y &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \gamma_z &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned} \right.$$

Ces égalités (7), comparées aux égalités (1), donnent :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} &= X, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} &= Y, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} &= Z. \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont les équations de l'Hydrodynamique données par Euler en 1755.

Lagrange[1] a mis les équations (1) sous une autre forme.

Considérons un des points matériels qui composent le fluide ; soient a, b, c, trois paramètres qui caractérisent ce point matériel, par exemple les coordonnées du point géométrique avec lequel il coïncidait à un certain instant t_0. Soient x, y, z, les coordonnées du même point matériel à l'instant t. Les quantités x, y, z, sont des fonctions de a, b, c, et de t.

Dans ces conditions on a simplement :

$$\gamma_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \gamma_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \gamma_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

La quantité Π qui est fonction d'x, y, z, devient aussi fonction de a, b, c et de t.

Multiplions les deux membres de la première égalité (1) par $\frac{\partial x}{\partial a}$, les deux membres de la seconde $\frac{\partial y}{\partial a}$, les deux membres de la troisième par $\frac{\partial z}{\partial a}$, et

---

(1) Mécanique Analytique, 2e Partie, Xe Section.

ajoutons membre à membre les résultats obtenus ; nous obtenons la première des égalités

$$(9) \dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0, \\ &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0, \\ &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0. \end{aligned} \right.$$

Telle est la forme donnée par Lagrange aux équations de l'Hydrodynamique.

Si l'on compare la forme donnée par Euler et la forme donnée par Lagrange, on voit que ces deux formes correspondent à deux manières distinctes de poser le problème du mouvement des fluides

On peut se proposer de déterminer à chaque instant la position occupée par un point matériel du fluide : ce sont les équations de Lagrange qui permettront le plus directement de suivre ce point dans son mouvement.

On peut au contraire, étant donné un point géométrique fixe, se proposer de déterminer à chaque instant l'état de mouvement du fluide en ce point. Ce sont les équations d'Euler qui permettront immédiatement d'observer les changements d'état du fluide qui passe en un point déterminé.

Ce sont les équations d'Euler qui nous serviront presque exclusivement dans ce cours.

---

§ 3. Équation de Continuité.

Aux équations (8) et (9), qui, sous deux formes différentes, traduisent les équations (1), on peut, lorsque le mouvement du fluide est continu et ne creuse aucune cavité au sein de la masse, joindre une nouvelle équation, dite de continuité. Cette équation peut se mettre sous deux formes différentes, l'une due à Euler, l'autre due à Lagrange.

Considérons une région où la densité du fluide varie d'une manière continue et où il en est de même des dérivées partielles de cette densité par rapport à x, y, z, t.

Dans cette région, traçons une surface fermée S. A l'instant t, elle renferme une masse fluide.

$$\mu = \int \rho \, dv,$$

l'intégrale s'étendant au volume que renferme la surface S. A l'instant $(t + dt)$ cette même surface renferme, s'il ne s'est creusé aucune cavité dans le fluide qu'elle contient, une masse : $\mu + d\mu = \int \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dv,$

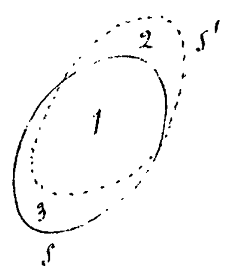
En sorte que

(10) .... $d\mu = dt \int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv.$

Cette quantité $d\mu$ peut s'évaluer d'une autre manière.

Les particules qui se trouvent à l'instant $(t + dt)$ sur la surface S se trouvaient à l'instant t sur une surface S' (fig. 11) infiniment voisine de la surface S. Les particules qui se trouvent à l'instant $(t + dt)$ à l'intérieur de la surface S, se trouvaient à l'instant t, à l'intérieur de la surface S'; les particules qui se trouvent à l'instant $(t + dt)$ à l'extérieur de la surface S, se trouvaient, à l'instant t, à l'extérieur de la surface S'

Fig. 11



Soient : 1 la région de l'espace intérieure à la fois aux surfaces S et S';

2 la région de l'espace intérieure à la surface S', mais extérieure à la surface S;

3 la région de l'espace intérieure à la surface S, mais extérieure à la surface S'.

Soit μ_1 la masse fluide que renferme l'espace 1 à l'instant t; cette masse est à l'intérieur de la surface S aussi bien à l'instant t qu'à l'instant $(t + dt)$

Soit μ_2 la masse fluide que renferme l'espace 2 à l'instant t. Cette masse, extérieure à la surface S, à l'instant t, lui est intérieure à l'instant $(t + dt)$.

Soit μ_3 la masse fluide que renferme l'espace 3 à l'instant t. Cette masse, intérieure à la surface S à l'instant t, lui est extérieure à l'instant $(t + dt)$.

Ainsi, à l'instant t, la surface S renferme une masse fluide

$$\mu = \mu_1 + \mu_3;$$

à l'instant $(t + dt)$, la surface S renferme une masse fluide

$$\mu + d\mu = \mu_1 + \mu_2.$$

On a donc

$$d\mu = \mu_2 - \mu_3$$

Soient : n_i la normale à la surface S vers l'intérieur de cette surface;
S_2 la partie de la surface S qui confine à l'espace 2;
S_3 la partie de la surface S qui confine à l'espace 3;
On voit aisément que l'on a

$$\mu_2 = dt \quad \rho\left[u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z)\right] dS_2,$$

$$\mu_3 = -dt \quad \rho\left[u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z)\right] dS_3.$$

et par conséquent

$$d\mu = \mu_2 - \mu_3$$
$$= dt \int_S \rho \left[u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z) \right] dS,$$

l'intégration s'étendant à toute la surface S.

Mais une transformation que nous avons souvent employée permet de remplacer cette égalité par la suivante :

(11) . . . . $$d\mu = - dt \iint \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dv,$$

l'intégration s'étendant à l'espace qu'enferme la surface S. La comparaison des égalités (10) et (11) montre que, pour un espace clos quelconque pris à l'intérieur d'une partie continue du fluide, on a

$$\iint \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dv = 0.$$

La quantité sous le signe $\int$ étant une fonction continue d'x, y, z, on déduit de cette égalité, par un raisonnement que nous avons souvent employé,

(12) . . . . $$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Telle est l'équation de continuité sous la forme que lui a donnée Euler.

Voyons maintenant la forme donnée par Lagrange à la précédente équation [1].

Considérons la masse μ qui, à l'instant t, est renfermée dans une certaine surface S. Cette masse est donnée par la formule

$$\mu = \iiint \rho \, dx \, dy \, dz.$$

l'intégrale triple s'étendant à l'espace compris à l'intérieur de la surface S. Chacun des points matériels qui composent cette masse est caractérisé par trois paramètres a, b, c. Substituons les variables a, b, c, aux variables x, y, z. D'après la théorie du changement de variables dans l'intégration, nous aurons

$$\mu = \iiint \rho \, D \, da \, db \, dc,$$

D étant défini par l'égalité

(13) . . . . $$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

et l'intégration s'étendant à tous les systèmes de valeurs de a, b, c, qui définissent

[1] Voir Cauchy. Mémoire sur la Théorie des Ondes, couronné par l'Académie en 1827. (Savants Étrangers et Œuvres de Cauchy. T. I)

les divers points matériels forment la masse μ.

Dans le temps dt, la valeur de ρ qui correspond à un système de valeurs données de a, b, c, varie de $\frac{\partial \rho}{\partial t}dt$; la valeur de D qui correspond au même système de valeurs de a, b, c, varie de $\frac{\partial D}{\partial t}dt$. Si l'on observe que l'ensemble des points matériels qui correspondent au même ensemble de systèmes de valeurs de a, b, c, doivent garder une masse totale μ invariable, on voit que l'on aura :

$$\iiint \frac{\partial(\rho D)}{\partial t}\,da\,db\,dc = 0,$$

l'intégration s'étendant aux systèmes de valeurs de a, b, c, relatifs à un ensemble quelconque de points matériels composant le fluide.

La quantité sous le signe d'intégration étant une fonction continue de a, b, c, on en déduit que l'on a, pour toute valeur de a, b, c et de t,

$$(14) \quad \frac{\partial(\rho D)}{\partial t} = 0$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (13), est la forme, adoptée par Lagrange, de l'équation de continuité.

§4. Conditions relatives aux Surfaces de discontinuité et aux surfaces limites.

Les équations que nous avons établies dans les deux §§ précédents ont lieu en tout point de l'un des fluides continus dont le système se compose. Il faut y joindre d'autres conditions qui sont relatives aux surfaces de discontinuité séparant les uns des autres ces divers fluides continus.

Supposons que Σ soit la surface de contact de deux fluides continus 1 et 2. Nous savons alors que nous devons avoir, en tout point de la surface Σ, les égalités

$$(15) \quad \Pi_1 = \Pi_2,$$

$$(16) \quad u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) = 0.$$

Des conditions analogues s'appliquent aux surfaces qui limitent le fluide; Soient : S une telle surface, par laquelle le fluide confine à un corps dont le mouvement est censé connu; U, V, W, les composantes de la vitesse au point (x, y, z) de ce corps et à l'instant t; n_i la normale à la surface S vers l'intérieur du fluide; n_e la normale à la surface S vers l'extérieur du fluide, nous aurons, en tout point de la surface S

$$(17) \quad u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z) + U \cos(n_e, x) + V \cos(n_e, y) + W \cos(n_e, z) = 0.$$

Si le corps auquel le fluide confine est maintenant immobile, cette relation se réduira à

(18) .... $u \cos(n_i x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z) = 0.$

Enfin, en tout point d'une surface où la pression a une valeur donnée P, on a

(19) .... $\Pi = P,$

égalité qui se réduit à

(20) .... $\Pi = 0,$

en tout point d'une surface libre.

§ 5. De la Relation supplémentaire.

Prenons les équations de l'Hydrodynamique soit sous la forme que leur a donné Euler, soit sous la forme que leur a donnée Lagrange, sous la première par exemple.

Cinq fonctions inconnues d'x, y, z, t, y figurent; ce sont les fonctions:

(21) .... $u, \quad v, \quad w \quad \rho, \quad \Pi.$

Ces cinq fonctions sont assujetties à vérifier, en tout point du fluide, les quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre (8) et (12). La connaissance de l'état initial du fluide fait connaître les valeurs initiales de ces cinq fonctions. Enfin les conditions aux limites sont fournies par les considérations développées au § 4.

On se trouverait donc en présence d'un problème d'analyse entièrement défini si l'on connaissait une nouvelle relation, soit différentielle, soit sous forme finie, entre les cinq variables (21).

Une telle relation est fournie par l'égalité (3) qui nous enseigne que l'on doit avoir en tout point du fluide,

(3) .... $\varphi(\rho, T) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho, T) + \Pi = 0$

Mais cette relation fait intervenir une nouvelle fonction inconnue des quatre variables x, y, z, t, la température absolue T. Nous trouvons ici un premier exemple de ce que nous avons annoncé en terminant le Chapitre I du Livre I; à savoir que les principes de la Thermodynamique fournissent toujours, pour un système en mouvement, une équation de moins qu'il n'y a de fonctions inconnues; il est toujours nécessaire de demander à des hypothèses étrangères à la Thermodynamique une relation entre la température absolue et les autres fonctions inconnues qui figurent dans l'étude du système.

Voyons, par exemple, comment dans le cas actuel, on pourrait obtenir une semblable relation

Considérons un élément de masse dm. Entre les instants t et $(t+dt)$, sa température absolue a passé de la valeur T à la valeur $(T+dT)$; sa densité de la valeur ρ à la valeur $(\rho+d\rho)$. Soient c sa chaleur spécifique sous volume constant ; l sa chaleur de dilatation ; dQ la quantité de chaleur qu'il dégage dans le temps dt. La Thermodynamique nous enseigne que nous aurons :

(22)................ $\left(c\,dT - \frac{1}{\rho^2} l\,d\rho\right) dm + dQ = 0.$

Écrivons des égalités analogues pour tous les éléments de masse que renferme à l'instant t une certaine surface S ; ajoutons les membre à membre, et désignons maintenant par dQ la quantité de chaleur cédée à l'extérieur, dans le temps dt, par la partie du système qu'enclôt la surface S ; nous aurons

(23) .... $\int\left(\rho c\,dT - \frac{1}{\rho} l\,d\rho\right) dv + dQ = 0.$

Nous avons d'ailleurs :

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right) dt,$$

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}u + \frac{\partial \rho}{\partial y}v + \frac{\partial \rho}{\partial z}w + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dt.$$

D'autre part, si φ, ψ, χ, sont les composantes du flux de chaleur en un point de l'élément dS de la surface S, nous aurons :

$$dQ = -dt\int\left[\varphi\cos(n_i,x) + \psi\cos(n_i,y) + \chi\cos(n_i,z)\right] dS.$$

L'égalité (23) peut donc s'écrire de la manière suivante :

(24) ....
$$\begin{aligned}
\int\Big[&\left(\rho c\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\rho} l \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) u \\
&+\left(\rho c\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\rho} l \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) v \\
&+\left(\rho c\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{\rho} l \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) w \\
&+\left(\rho c\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\rho} l \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\Big] dv
\end{aligned}$$

$$-\int\left[\varphi\cos(n_i,x) + \psi\cos(n_i,y) + \chi\cos(n_i,z)\right] dS = 0.$$

Supposons que la propagation de la chaleur au sein du milieu considéré se fasse uniquement par conductibilité. Dans ce cas, on aura

$$\varphi = -K\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\psi = -K\frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\chi = -K\frac{\partial T}{\partial z},$$

K étant le coefficient de conductibilité, qui est une fonction de ρ et de T dont la valeur doit être demandée à l'expérience. Nous aurons alors

$$\begin{aligned}&\int \Im[\varphi \cos(n_i, x) + \psi \cos(n_i, y) + \chi \cos(n_i, z)]\, dS\\ &= -\int K\left[\frac{\partial T}{\partial x}\cos(n_i, x) + \frac{\partial T}{\partial y}\cos(n_i, y) + \frac{\partial T}{\partial z}\cos(n_i, z)\right] dS\\ &= \int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] dv.\end{aligned}$$

L'égalité (24) devient donc :

$$\begin{aligned}\int\Big[&\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right)\\ &- \frac{l}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}u + \frac{\partial \rho}{\partial y}v + \frac{\partial \rho}{\partial z}w + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\\ &- \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)\Big] dv = 0.\end{aligned}$$

L'intégrale précédente s'étendant à un espace clos quelconque compris à l'intérieur du fluide, on voit que l'on doit avoir en tout point de ce fluide

$$(25)\qquad\begin{aligned}&\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right)\\ &- \frac{l}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}u + \frac{\partial \rho}{\partial y}v + \frac{\partial \rho}{\partial z}w + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\\ &- \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0.\end{aligned}$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles que l'on doit joindre aux équations de l'Hydrodynamique et à la relation (3) si l'on veut étudier le mouvement d'un fluide conducteur, mais athermane ; il faudra en outre joindre aux conditions aux limites indiquées au § précédent d'autres conditions aux limites que la théorie de la chaleur apprend à former.

L'étude d'un semblable problème présente une telle complication qu'il serait fort difficile, dans l'état actuel de l'analyse, d'obtenir par cette étude aucun résultat net et intéressant. Les analystes ont dû se borner, dans leurs travaux, à l'examen de quelques cas particulièrement simples, que la nature réalise seulement d'une manière approchée. La théorie de l'Hydrodynamique n'en est pas moins malgré ces délimitations, une des branches les plus difficiles de la Physique Mathématique.

Voyons quels sont ces cas particuliers que la théorie peut aborder.

§ 6. — Des cas particuliers qu'étudie l'Hydrodynamique.

Les cas particuliers qu'a pu aborder l'étude du mouvement des fluides se réduisent à trois :

1°. — Le premier et le plus simple est celui des fluides incompressibles; ce cas est celui où l'on néglige les variations de la densité; la relation supplémentaire qui doit être jointe aux équations aux dérivées partielles (8) et (12) pour achever la détermination des cinq fonctions inconnues (21) est la relation

(26) .... $\rho = \text{Const}.$

L'équation de continuité (12) prend alors la forme très simple

(27) .... $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Ce cas est réalisé approximativement, dans un grand nombre de circonstances, par les corps liquides.

2°. — Un second cas est celui des fluides parfaitement conducteurs pour la chaleur. On admet qu'au sein de semblables fluides la température est distribuée uniformément et garde une valeur constante. La relation (3) devient alors une relation entre les deux variables ρ et Π, qui est l'équation de compressibilité du fluide à température constante.

3°. — Enfin un troisième cas, très important, est celui où l'on peut regarder comme nuls les échanges de chaleur qui ont lieu entre les diverses parties du système. C'est ce que l'on pourra faire sensiblement si le fluide est mauvais conducteur, et si, grâce à la petitesse des mouvements dont il est le siège, la température en chaque point oscille très peu autour d'une valeur moyenne qui est la même dans toute l'étendue du fluide. Les petits mouvements des liquides et surtout des gaz, dont l'étude a, pour l'acoustique, une si grande importance, rentrent dans ce cas particulier.

Dans ce cas, l'équation (22) se réduit à

(28) .... $c\,dT - \frac{1}{\rho^2}\, l\, d\rho = 0.$

c et l étant des fonctions de ρ et de T; cette équation constitue une équation différentielle ordinaire qui est la loi de détente adiabatique du fluide. Cette loi de détente, jointe à la loi de compressibilité et de dilatation donnée par l'équation (3) fournit, avec les équations de l'Hydrodynamique, les six relations propres à déterminer les six fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad \Pi, \quad T,$$

des quatre variables

$$x, \ y, \ z, \ t.$$

Le prochain chapitre sera consacré à l'étude de la loi de détente adiabatique, qui se trouve ainsi avoir une si grande importance dans l'étude des petits mouvements des fluides.

Un caractère commun relie les trois cas que nous venons de définir:

Dans le premier cas on a à joindre aux équations de l'Hydrodynamique la relation supplémentaire $\rho = \text{Const}.$

Dans le second cas, on a à leur adjoindre la relation supplémentaire

$$\varphi(\rho, T) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho, T) + \Pi = 0,$$

où ρ est constante.

Dans le troisième cas, on a à leur adjoindre les deux relations supplémentaires

$$\varphi(\rho, T) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho, T) + \Pi = 0,$$

$$c\, dT - \frac{l}{\rho^2} d\rho = 0.$$

Dans tous les cas, on peut dire que l'on adjoint aux équations de l'Hydrodynamique une relation supplémentaire de la forme

$$\rho = F(\Pi),$$

F étant une fonction qui est donnée médiatement ou immédiatement. Ainsi les seuls problèmes d'Hydrodynamique que l'on sache traiter sont ceux où il existe une relation déterminant la densité en chaque point en fonction de la pression en ce point.

Comme nous l'avons dit, il n'en est ainsi que dans des cas extrêmement particuliers, dont certains exemples que l'observation ou l'expérience nous amènent à étudier s'approchent plus ou moins ; les Théorèmes qui nous démontrerons en admettant l'existence d'une relation entre la densité et la pression ne seront nullement, malgré l'intérêt qu'ils présentent, des Théorèmes généraux d'Hydrodynamique.

C'est Laplace qui a le premier compris la nécessité, dans l'étude du mouvement des fluides, de tenir compte des variations de température qui accompagnent ce mouvement. Nous aurons occasion, en étudiant la propagation du son, de retracer l'histoire de cette découverte, qui limite étroitement la portée des théories de l'hydrodynamique imaginées par les analystes.

Chapitre IV.

La Détente adiabatique des Fluides.

Entre la densité ρ en un point d'un fluide, la pression Π et la température T en ce point existe, quel que soit le mouvement dont le fluide est animé, la relation [Chapitre III, Égalité (3)]

(1) .... $\varphi(\rho, T) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho, T) + \Pi = 0.$

Désignons par ω le volume spécifique du fluide, défini par l'équation

$$\omega = \frac{1}{\rho},$$

et écrivons l'équation précédente sous la forme

$$(2) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathcal{F}(\Pi, \omega, T) = 0$$

C'est la loi de compressibilité et de dilatation du fluide, dont nous supposons que l'on ait demandé la connaissance à l'expérience.

Si, dans le mouvement du fluide, la température T garde une valeur uniforme et invariable T_0, l'équation.

$$\mathcal{F}(\Pi, \omega, T_0) = 0$$

sera une relation ω et Π, qui constituera la relation supplémentaire [Ch. III, §6] nécessaire pour achever la mise en équation de tout problème d'hydrodynamique.

Si, dans l'équation (2), nous maintenons successivement constante : 1° la température T ; 2° la pression Π ; 3° le volume spécifique ω, cette équation devient successivement :

1° – Une relation qui donne Π en fonction de ω ;

$$\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T$$

représente la dérivée de cette fonction.

2° – Une relation qui donne ω en fonction de T ;

$$\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_\Pi$$

représente la dérivée de cette fonction.

3° – Une relation qui donne Π en fonction de T ;

$$\left(\frac{d\Pi}{dT}\right)_\omega$$

représente la dérivée de cette fonction

Soit $\alpha(\Pi, T)$ le coefficient de dilatation du corps sous la pression constante Π, à la température T. Soit ω_0 son volume spécifique sous la pression Π à la température de la glace fondante. Nous aurons par définition,

$$(3) \quad \dots\dots\dots \quad \alpha(\Pi, T) = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_\Pi .$$

Soit $\beta(\omega, T)$ le coefficient de dilatation du corps sous le volume spécifique constant ω à la température T. Soit Π_0 la pression qu'il faut lui faire subir pour le maintenir sous le volume spécifique ω à la température de la glace fondante. Nous aurons par définition

$$(4) \quad \dots\dots\dots \quad \beta(\omega, T) = \frac{1}{\Pi_0}\left(\frac{d\Pi}{dT}\right)_\omega$$

Résolvons la relation (2) par rapport à Π, et différentions le résultat obtenu ; nous aurons :

$$d\Pi = \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T d\omega + \left(\frac{d\Pi}{dT}\right)_\omega dT .$$

Faisons

$$d\Pi = 0$$

Nous aurons alors

$$\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T \left(\frac{d\omega}{dT}\right)_\Pi,$$

et la relation précédente deviendra :

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T \left(\frac{d\omega}{dT}\right)_\Pi + \left(\frac{d\Pi}{dT}\right)_\omega = 0.$$

relation importante, dont nous allons faire usage pour étudier la loi de détente adiabatique d'un fluide.

L'état d'une masse élémentaire égale à dm du fluide considéré est défini par les deux variables ω et T ; la relation (2) permet de substituer à ces deux variables les variables Π et T, ou bien les variables ω et Π ; d'où trois expressions équivalentes pour la quantité de chaleur dégagée dans une modification élémentaire de la masse dm :

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots dQ + (c\,dT + l\,d\omega)\,dm = 0,$$

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots dQ + (C\,dT + h\,d\Pi)\,dm = 0,$$

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots dQ + (K\,d\Pi + \lambda\,d\omega)\,dm = 0.$$

La première de ces équations n'est autre que celle qui a été donnée sous le N.° 22 au Chapitre précédent.

Des six coefficients, fonctions des variables indépendantes,

$$c,\ l,\ C,\ h,\ K,\ \lambda,$$

trois seulement ont reçu des noms particuliers ;

c, se nomme chaleur spécifique sous volume constant ;

l, se nomme chaleur de dilatation ;

C, se nomme chaleur spécifique sous pression constante ;

Les six coefficients

$$c,\ l,\ C,\ h,\ K,\ \lambda,$$

ne sont pas indépendants ; ils sont liés entre eux et à la loi de compressibilité et de dilatation (2) par quatre relations que nous allons établir.

Supposons la température T maintenue constante. Nous aurons

$$d\Pi = \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right) d\omega$$

et les égalités (6), (7), (8) deviendront :

$$dQ + l\,d\omega\,dm = 0,$$

$$dQ + h\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T d\omega\,dm = 0,$$

$$dQ + K\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T d\omega\,dm + \lambda\,d\omega\,dm = 0.$$

En identifiant les trois expressions de dQ, nous trouverons :

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots l = h\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T = \lambda + K\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T$$

Supposons la pression Π maintenue constante. Nous aurons :

$$d\omega = \left(\frac{d\omega}{dT}\right)_\Pi dT$$

et les égalités (6), (7), (8) deviendront :

$$dQ + c\,dT\,dm + l\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_{\Pi} dT\,dm = 0,$$
$$dQ + C\,dT\,dm = 0,$$
$$dQ + \lambda\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_{\Pi} dT\,dm = 0.$$

En identifiant les trois expressions de dQ, nous trouverons :

(10) .... $c + l\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_{\Pi} = C = \lambda\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_{\Pi}$

Les égalités (9) et (10) donnent :

$$K\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_{\Pi} = -c,$$
$$\lambda\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_{\Pi} = C,$$

d'où :

(11) .... $\frac{\lambda}{K} = -\frac{C}{c}\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T$.

Nous avons vu que, dans certains cas la relation supplémentaire qui doit être jointe aux équations de l'hydrodynamique est la loi de détente adiabatique du fluide, c'est à dire la relation qui lie Π à ω lorsque dQ est maintenu constamment égal à 0. D'après l'égalité (8), cette relation s'obtendra en intégrant l'équation différentielle

(12) .... $K\,d\Pi + \lambda\,d\omega = 0$

Cette loi de détente adiabatique permet d'exprimer Π en fonction de ω par l'équation

$$\Pi = f(\omega).$$

Désignons la quantité $\frac{df(\omega)}{d\omega}$ par $\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_Q$. Nous aurons d'après l'égalité (12),

$$\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_Q = \frac{df(\omega)}{d\omega} = -\frac{\lambda}{K},$$

ou bien, d'après l'égalité (11),

(13) .... $\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_Q = \frac{C}{c}\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T$

Cette remarquable relation est due à Reech. Elle donne l'équation différentielle de la loi de détente adiabatique en fonction des chaleurs spécifiques et de quantités liées à la loi de détente isothermique.

Cette relation peut encore s'écrire, d'après les égalités (3) (4) et (5),

(14) .... $\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_Q = \frac{\Pi_0}{\omega}\,\frac{C}{c}\,\frac{\beta}{\alpha}$.

S'il s'agit d'un gaz pour lequel les deux coefficients de dilatation soient sensiblement indépendants de la température, on pourra écrire les égalités (3) et (4) sous la forme

$$\Pi = \Pi_0 \left[1+\beta(T-T_0)\right],$$
$$\omega = \omega_0 \left[1+\alpha(T-T_0)\right].$$

et l'égalité (14) deviendra:

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_Q = -\frac{\Pi}{\omega}\,\frac{C}{c}\,\frac{1+\alpha(T-T_0)}{1+\beta(T-T_0)}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

Cette formule est due à M. J. Moutier[1]

Enfin, s'il s'agit d'un gaz parfait, on a

$$\frac{1+\alpha(T-T_0)}{1+\beta(T-T_0)}\,\frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

$\frac{C}{c}$ est indépendant de la température, et la relation (15) réduite à

$$(16) \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_Q = -\frac{C}{c}\,\frac{\Pi}{\omega},$$

s'intègre et devient

$$(17) \ldots\ldots\ldots\ldots \Pi\,\omega^{\frac{C}{c}} = \text{Const}.$$

Cette dernière forme est due à Poisson[2]. Elle était implicitement contenue dans les résultats des recherches de Laplace[3].

---

(1) J. Moutier Thermodynamique. 1872

(2) Poisson. Sur la Vitesse du son (Annales de Chimie et de Physique. 2e Série T. XXIII. p. 5. 1823) Sur la chaleur des gaz et des vapeurs (Annales de Chimie et de Physique. 2e Série. T. XXIII. p. 337. 1823.)

(3) Laplace Mécanique céleste Livre XII.

Chapitre V.

Le Théorème de Lagrange et le Potentiel des Vitesses.

§1. – Le lemme de Sir William Thomson.

Revenons aux équations de l'Hydrodynamique prises sous la forme que leur a donnée Euler [Chapitre III, Égalités (8)]. Ces équations sont :

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Pi}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = X, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Pi}{\partial y} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = Y, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Pi}{\partial z} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = Z. \end{cases}$$

Nous avons dit en terminant le Chapitre III que les seuls cas où l'on sache traiter ces équations sont ceux où il existe entre la densité ρ en chaque point du fluide et la pression Π au même point une relation

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \rho = F(\Pi);$$

c'est à l'étude de ces cas que nous allons borner notre analyse.

Soit $\varphi(\Pi)$ une fonction de Π définie par la condition

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d\varphi(\Pi)}{d\Pi} = \frac{1}{F(\Pi)}$$

Cette fonction φ sera une fonction d'x, y, z, t.

Admettons que les forces extérieures (X, Y, Z) admettent une fonction potentielle V de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

En vertu de ces égalités (2), (3) et (4), les égalités (1) deviendront :

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi + V)}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial(\varphi + V)}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial(\varphi + V)}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w + \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Le point matériel μ qui était en $M(x, y, z)$ à l'instant t, et dont la vitesse avait pour composantes u, v, w, est, à l'instant $(t+dt)$ en un point géométrique M' dont les coordonnées sont

$$x+udt, \qquad y+vdt, \qquad z+w\,dt.$$

Si nous désignons les composantes de sa vitesse par

$$u+\frac{du}{dt}dt,$$
$$v+\frac{dv}{dt}dt,$$
$$w+\frac{dw}{dt}dt,$$

nous aurons:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w+\frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w+\frac{\partial v}{\partial t},$$
$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w+\frac{\partial w}{\partial t},$$

et les équations (5) pourront s'écrire

$$(6)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi+V)}{\partial x}+\dfrac{du}{dt}=0, \\ \dfrac{\partial(\varphi+V)}{\partial y}+\dfrac{dv}{dt}=0, \\ \dfrac{\partial(\varphi+V)}{\partial z}+\dfrac{dw}{dt}=0. \end{cases}$$

Soit μ_1 un point matériel qui se trouvait à l'instant t au point géométrique M_1 dont les coordonnées sont:

$$x+dx, \qquad y+dy, \qquad z+dz.$$

Il se trouve, à l'instant $(t+dt)$, en un point géométrique M'_1 dont les coordonnées sont:

$$x+dx+\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)dt,$$
$$y+dy+\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\right)dt,$$
$$z+dz+\left(w+\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz\right)dt.$$

Si nous convenons de désigner ces coordonnées par:

$$x+dx+udt+\frac{d\,dx}{dt}dt,$$
$$y+dy+vdt+\frac{d\,dy}{dt}dt,$$
$$z+dz+wdt+\frac{d\,dz}{dt}dt,$$

nous voyons que

$$\frac{ddx}{dt}dt, \quad \frac{ddy}{dt}dt, \quad \frac{ddz}{dt}dt,$$

seront les composantes de la différene géométrique

$$(M'M'_1 - MM_1)$$

et que nous aurons

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{ddx}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz, \\ \dfrac{ddy}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz, \\ \dfrac{ddz}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz. \end{cases}$$

Considérons les points matériels qui forment un segment infiniment petit $\mu\mu_1$; ce segment occupe, à l'instant t, la position géométrique MM_1 et, à l'instant $(t+dt)$, la position géométrique $M'M'_1$. Formons pour le segment MM_1, l'expression :

$$udx + vdy + wdz.$$

Pour le segment $M'M'_1$, l'expression analogue a une valeur que nous désignerons par

$$udx + vdy + wdz + \frac{d}{dt}(udx + vdy + wdz)dt.$$

Nous aurons évidemment

$$\frac{d}{dt}(udx + vdy + wdz) = \frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dz}dz$$
$$+ \frac{ddx}{dt}u + \frac{ddy}{dt}v + \frac{ddz}{dt}w,$$

ou bien, en tenant compte des égalités (7),

$$\frac{d}{dt}(udx + vdy + wdz)$$
$$= \frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz$$
$$+ \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx$$
$$+ \left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy$$
$$+ \left(u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz;$$

ou bien, encore en posant

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Omega = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

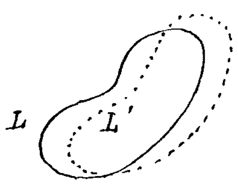
$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d}{dt}(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{du}{dt}dz + \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (6) par dx, les deux membres de la seconde par dy, les deux membres de la troisième par dz, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de l'égalité (5). Nous obtenons le résultat suivant :

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d}{dt}(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

$$\frac{\partial(\varphi + V - \Omega)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\varphi + V - \Omega)}{\partial y}dy + \frac{\partial(\varphi + V - \Omega)}{\partial z}dz = 0$$

Fig. 12.



Traçons une courbe fermée L (fig. 12) dans une région où u, v, w, φ, V, sont des fonctions uniformes, finies et continues de x, y, z, t.

Formons, pour les points matériels qui se trouvent à l'instant t sur la courbe L l'intégrale

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad J = \int_L (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

A l'instant $(t + dt)$, ces points matériels sont sur une nouvelle courbe fermée L', infiniment voisine de la première.

Soient, en effet, deux points matériels μ, μ_1, occupant, à l'instant t, les positions géométriques $M(x, y, z)$ et $M_1(x + dx, y + dy, z + dz)$. Le segment $\mu\mu_1$ a pour projections à l'instant t, dx, dy, dz, et, à l'instant $(t + dt)$.

$$dx + \frac{d\,dx}{dt}dt,$$
$$dy + \frac{d\,dy}{dt}dt,$$
$$dz + \frac{d\,dz}{dt}dt$$

ou bien encore d'après les égalités (7),

$$dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)dt,$$
$$dy + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)dt,$$
$$dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)dt.$$

Si le segment $\mu\mu_1$ a, à l'instant t, une longueur nulle, on a

$$dx = 0 \qquad dy = 0, \qquad dz = 0;$$

alors d'après la formule précédente, il a, à toute instant une longueur nulle s'il se trouve dans une région où les dérivées partielles de u, v, w, ont des valeurs finies. On en conclut sans peine que si certains points matériels forment, à l'instant t une courbe fermée, ils forment une courbe fermée à tout instant.

L'expression analogue à J prend, pour ces points, la nouvelle valeur

$$J + \frac{dJ}{dt}dt = \int_L \Big[u\,dx + v\,dy + w\,dz + \frac{d}{dt}(u\,dx + v\,dy + w\,dz)dt\Big].$$

Nous aurons donc

$$\frac{dJ}{dt} = \int_L \frac{d}{dt}(u\,dx + v\,dy + w\,dz) ;$$

ou bien d'après l'égalité (10),

$$\frac{dJ}{dt} + \int_L \Big[\frac{\partial(\varphi + V - \Omega)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\varphi + V - \Omega)}{\partial y}dy + \frac{\partial(\varphi + V - \Omega)}{\partial z}dz\Big] = 0.$$

Le principe fondamental de la Théorie des intégrales Curvilignes nous enseigne que l'intégrale qui figure au premier membre de cette égalité est nulle; cette égalité devient donc simplement

$$(12) \qquad \frac{dJ}{dt} = 0.$$

Sir W. Thomson a donné à la quantité J, définie par l'égalité (11), le nom de circulation du fluide le long de la courbe fermée L. Moyennant cette définition, on peut de la manière suivante, énoncer en langage ordinaire les conséquences qu'exprime l'égalité (12):

Considérons un fluide placé dans des conditions où l'on peut traiter les équations de l'Hydrodynamique etc. soumis à des forces extérieures qui admettent une fonction potentielle. Si, dans ce fluide, on trace une surface fermée qui ne rencontre aucune surface de discontinuité et qui se déplace avec le fluide, la circulation le long de cette ligne demeure constante pendant toute la durée du mouvement.

Tel est le lemme démontré par Sir W. Thomson en 1869.

La démonstration de ce lemme suppose, il faut bien le remarquer, que $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$, ont des valeurs finies en tout point et à tout instant; en d'autres termes, que l'accélération de chacun des points matériels qui compose le fluide a, à chaque instant, une valeur finie. Celà pourrait ne pas avoir lieu s'il survenait une secousse brusque à un instant quelconque du mouvement, et alors le lemme de Sir W. Thomson pourrait n'être plus exact.

2. – Théorème de Lagrange. Potentiel des Vitesses.

Si, en particulier, à l'instant t_0 du mouvement, la circulation est nulle le long de toute ligne fermée tracée à l'intérieur du fluide et ne rencontrant pas les surfaces de discontinuité, elle sera encore nulle, à tout instant t du mouvement, pour toute ligne fermée tracée à l'intérieur du fluide et ne rencontrant pas les surfaces de discontinuité.

Or pour que l'intégrale

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

étendue à une ligne fermée quelconque ne rencontrant pas les surfaces de discontinuité, soit égale à 0, il faut et il suffit qu'il existe une quantité φ, fonction uniforme, finie et continue d'x, y, z, dans toute région limitée par les surfaces de discontinuité telle que l'on ait

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Si la circulation doit être nulle le long de toute courbe fermée ne rencontrant pas les surfaces de de discontinuité et à tout instant du mouvement, il existera une fonction $\varphi(x, y, z, t)$, uniforme, finie et continue dans toute région où les fonctions u, v, w, Φ et V sont uniformes finies et continues, et telle que les égalités (13) soient vérifiées à tout instant.

Avec M. H. von Helmholtz, nous donnerons le nom de Fonction Potentielle des Vitesses à cette fonction φ.

Nous pourrons alors énoncer le Théorème suivant, qui est dû à Lagrange.

Un fluide, placé dans les conditions où la densité en chaque point dépend uniquement de la pression au même point, se meut sous l'action de forces qui admettent une fonction potentielle. Si, à un instant quelconque du mouvement, il existe une fonction potentielle des vitesses, il en existera une pendant toute la durée du mouvement.

Ce théorème, comme le lemme de Thomson, suppose que l'accélération de chacun des points matériels du système demeure finie pendant toute la durée du mouvement; il cesserait d'être exact si une percussion s'était produite pendant la durée du mouvement.

Considérons un fluide soumis aux restrictions précédentes et supposons le d'abord au repos sous l'action de liaisons indépendantes du temps; il est par exemple enfermé dans un vase dont les parois sont fixes.

A partir d'un instant $t = t_0$, les liaisons deviennent dépendantes du temps; par exemple, une des parois commence à se déplacer; le fluide est alors mis en mouvement. Supposons que le passage de l'état de repos à l'état de mouvement ait lieu sans secousse brusque, c'est à dire que les vitesses soient infiniment petites, et les accélération finies au début du mouvement. Appliquons à ce fluide le Théorème de Lagrange. Avant l'instant t_0, les vitesses, qui étaient toutes nulles, admettaient une fonction potentielle, à savoir n'importe quelle fonction de la seule variable t. Elles doivent donc, à tout instant, admettre une fonction potentielle, et l'on arrive au Théorème suivant.

Si un fluide soumis aux restrictions précédemment énoncées, est mis en mouvement sans secousse brusque, il existera, pendant toute la durée du mouvement une fonction potentielle des vitesses.

C'est Euler qui a, le premier, introduit en Hydrodynamique la notion de fonction potentielle des vitesses et montré combien l'étude du mouvement des fluides était simplifiée dans le cas où il existe une semblable fonction.

L'existence d'une fonction potentielle des vitesses dans le mouvement d'un fluide pouvait, à priori, sembler une circonstance exceptionnelle dont la réalisation présentait fort peu de probabilité. Lagrange[1], en démontrant le théorème fondamental qui porte son nom, prouva que l'existence du potentiel des Vitesses était infiniment plus probable qu'il ne semblait, puisqu'il suffisait qu'on fût assuré de cette existence à un instant quelconque du mouvement pour l'être pour toute la durée du mouvement.

La démonstration de Lagrange laissait à désirer au point de vue de la rigueur. Il en est de même de la démonstration donnée par Poisson[1]. Cauchy[2] donna le premier, en 1827, une démonstration rigoureuse du Théorème de Lagrange; mais, bien que sa méthode fût susceptible d'être généralisée, il ne l'appliqua qu'aux fluides incompressibles.

Stokes[3], en 1847; W. Thomson[4] en 1848, donnèrent d'autres démonstrations du théorème de Lagrange, limité au cas des fluides incompressibles.

Stokes[5], en 1848, en donna deux démonstrations, fondées l'une sur les

---

(1) Lagrange. Mécanique Analytique 2e Partie. Section XI, §§ 16, 17, 18,

(1) Poisson. Traité de Mécanique, T. II. p. 688 (2e Addition)

(2) Cauchy. Mémoire de la Théorie des Ondes couronné par l'Académie des Sciences (Savants Étrangers et Œuvres de Cauchy. T. I)

(3) Stokes. Cambridge Transactions. Vol VIII. p. 307. 1847.

(4) W. Thomson. On the equation of continuity (Cambridge and Dublin Math. Journ. Vol II p. 282.)

(5) Stokes. Démonstration of a fundamental théorème (Ibid. Vol III. p. 209. 1848)

équations de Lagrange, l'autre sur les équations d'Euler. La première, que nous retrouverons au Chapitre suivant, n'est que l'extension de la démonstration de Cauchy.

Enfin, en 1869, W. Thomson[6] en donna la belle et rigoureuse démonstration qu'on vient de lire.

§ 3. – Fluides Incompressibles – Théorème de Green.

Pour donner une claire notion de l'importance que possède, dans l'étude du mouvement des fluides, l'existence d'une fonction potentielle des vitesses, nous allons montrer à quel point le problème du mouvement d'un fluide incompressible se transforme, lorsqu'il existe une semblable fonction.

Considérons un fluide incompressible soumis à des forces intérieures qui admettent une fonction potentielle V.

Les équations d'Euler [Équations (1)] deviennent, pour un semblable fluide

$$(14) \cdots\cdots \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Pi}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{du}{dt} = 0, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Pi}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{dv}{dt} = 0, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d \Pi}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{dw}{dt} = 0, \end{cases}$$

Dans ces équations, ρ est une constante.

L'équation de continuité peut s'écrire [Chapitre III, Égalité (27)]

$$(15) \cdots\cdots \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Enfin les conditions aux limites [Chapitre III, § 4] sont de la forme

$$(16) \cdots\cdots u\cos(n_i, x) + v\cos(n_i, y) + w\cos(n_i, z) = f,$$

ou de la forme

$$(17) \cdots\cdots \Pi = q,$$

f et q étant des quantités connues à chaque instant en chaque point de la surface limite à laquelle se rapporte la condition considérée.

Supposons maintenant qu'il existe une fonction potentielle des vitesses ; soit φ cette fonction ; à tout instant, nous aurons les

---

[6] W. Thomson. On Vortex Motion (Cambridge Transactions. 1869)

égalités suivantes :

$$(13) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

L'équation de continuité (15) devient alors.

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles, que φ vérifie, est une équation célèbre ; elle a été découverte par Laplace qui a montré que la fonction potentielle des forces Newtonniennes vérifiait cette équation en dehors des masses agissantes. Cette équation, qui se retrouve en électrostatique, en magnétisme dans la théorie de la chaleur, a donné lieu à d'innombrables recherches analytiques qui jettent un jour singulier sur tous les problèmes qui dépendent de son intégration. On donne d'après Sir W. Thomson, le nom de fonction harmonique dans un certain espace à une fonction qui, dans cet espace, vérifie l'équation de Laplace.

Les égalités (14) deviennent, moyennant les égalités (15)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Pi + \rho\left(V - \frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\Pi + \rho\left(V - \frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\Pi + \rho\left(V - \frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = 0,$$

ou bien

$$(19) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Pi + \rho\left(V - \frac{d\varphi}{dt}\right) = F(t),$$

la fonction $F(t)$ ne dépendant point d'x, y, z.

L'égalité (16) deviendra

$$(20) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + f = 0.$$

Enfin l'égalité (17) deviendra

$$(21) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad g + \rho V - F(t) = \rho \frac{d\varphi}{dt}.$$

Supposons en particulier, que le fluide soit limité uniquement par des parois qui sont immobiles ou dont le mouvement est donné ; les seules conditions aux limites que nous ayons à considérer s'expriment par des équations de la forme (20). Il est facile de voir que quelles que soient les forces extérieures la détermination du mouvement du fluide se ramène à la détermination de la fonction φ ; cette fonction est harmonique en tout point de l'espace occupé par le fluide ; la quantité $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$ a une valeur commune en tout point des surfaces qui limitent le fluide.

Nous allons voir que ces conditions déterminent sans ambiguité le mouvement du fluide.

Nous nous appuierons, pour démontrer cette proposition, sur un lemme d'analyse dont il sera fait un fréquent usage dans la suite de ce cours, le Théorème de Green[1]. Nous allons démontrer ici ce lemme.

Considérons un espace clos, limité par une surface fermée S; dv est un élément de cet espace; n_i est la normale à la surface S, vers l'intérieur de l'espace qu'elle limite.

Soient U et F deux fonctions finies, continues et uniformes à l'intérieur de l'espace considéré, admettant par rapport à x, y, z, des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies. Nous avons vu que l'on pouvait écrire :

$$\int U \frac{\partial F}{\partial x}\, dv = -\mathsf{S}\, UF \cos(n_i, x)\, dS - \int F \frac{\partial U}{\partial x} dv.$$

Supposons que l'on ait :

$$F = \frac{\partial V}{\partial x},$$

et l'égalité précédente deviendra la première des égalités

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv = -\mathsf{S}\, U \frac{\partial V}{\partial x} \cos(n_i, x)\, dS - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dv,$$

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dv = -\mathsf{S}\, U \frac{\partial V}{\partial y} \cos(n_i, y)\, dS - \int \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} dv,$$

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dv = -\mathsf{S}\, U \frac{\partial V}{\partial z} \cos(n_i, z)\, dS - \int \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} dv$$

Les deux autres égalités se démontrent d'une manière analogue.

Posons pour abréger,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

et ajoutons membre à membre les égalités précédentes; nous obtenons l'égalité

$$(22) \quad \int U \Delta V\, dv = -\mathsf{S}\, U \frac{\partial V}{\partial n_i} dS - \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv,$$

qui est la première forme du Théorème de Green.

---

[1] Georges Green. An essay on application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism (Nottingham. 1828).

Nous pouvons écrire de même.

$$\int V \Delta U dv = - \int V \frac{\partial U}{\partial n_i} dS$$
$$- \int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) dv.$$

Cette égalité comparée à l'égalité (22), donne :

(23)............ $$\int (U \Delta V - V \Delta U) dv = - \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n_i} - V \frac{\partial U}{\partial n_i} \right) dS.$$

C'est la seconde forme du Théorème de Green. Nous aurons à en faire usage dans un prochain chapitre.

Revenons à l'égalité (22) ; faisons y

$$U = V$$

et nous trouverons l'égalité

(24)......................... $$\int U \Delta U dv = - \int U \frac{\partial U}{\partial n_i} dS$$
$$- \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dv$$

Cette égalité va nous servir à démontrer la proposition que nous avons énoncée.

Supposons que deux fonctions distinctes, φ et φ', puissent servir de Potentiel des Vitesses au fluide dont on se propose d'étudier le mouvement ; la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$ est donnée en tout point de la surface S qui limite le fluide ; on a, en tout point de cette surface,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = \frac{\partial \varphi'}{\partial n_i},$$

ou bien

$$\frac{\partial \theta}{\partial n_i} = 0,$$

en désignant par θ la différence $(\varphi' - \varphi)$.

On a donc

$$\int \theta \frac{\partial \theta}{\partial n_i} dS = 0,$$

égalité qui peut s'écrire, en vertu de l'égalité (24),

$$\int \theta \Delta \theta dv + \int \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dv = 0$$

Mais on a, en tout point du fluide,

$$\Delta \varphi = 0, \qquad \Delta \varphi' = 0,$$

et, par conséquent,

$$\Delta \theta = \Delta (\varphi' - \varphi) = \Delta \varphi' - \Delta \varphi = 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\int \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 \right] dv = 0.$$

Cette égalité exige que l'on ait, en tout point du fluide,

$$(25) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0.$$

Car si les quantités $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}$, étaient différentes de zéro en un point du fluide, elles le seraient, par raison de continuité, dans toute l'étendue d'un certain domaine avoisinant ce point; et si elles étaient différentes de zéro.... à l'intérieur d'une région du fluide, si petite soit elle, l'intégrale précédente serait positive, et non pas égale à zéro.

Dès lors, désignons par u, v, w, les vitesses dont φ est la fonction potentielle et par u', v', w', les vitesses dont φ' est la fonction potentielle. Nous aurons

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$
$$u' = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x}. \qquad v' = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y}, \qquad w' = -\frac{\partial\varphi'}{\partial z},$$

et, par conséquent,

$$u' - u = -\frac{\partial\theta}{\partial x},$$
$$v' - v = -\frac{\partial\theta}{\partial y},$$
$$w' - w = -\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

En vertu des égalités (25), ces égalités deviennent

$$u = u', \qquad v = v', \qquad w = w'.$$

Les deux mouvements supposés du fluide ont donc la même vitesse en tout point et à tout instant, en sorte que, comme nous l'avons annoncé, ils sont identiques.

Faisons une application simple du Théorème que nous venons de démontrer.

Supposons qu'un fluide incompressible remplisse entièrement un vase dont les parois sont immobiles. On satisfera évidemment aux équations de l'hydrodynamique si l'on suppose que l'on ait en tout point et à tout instant.

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

c'est-à-dire si l'on suppose le fluide en équilibre. D'après le Théorème précédent, c'est là le seul mouvement du fluide qui soit compatible avec l'existence d'un Potentiel des vitesses. Si un semblable fluide est en mouvement, ce mouvement n'admet certainement pas de fonction potentielle des vitesses.

Si deux fonctions φ et φ' vérifient l'équation (18) en tout point du fluide et l'équation (20) en tout point de la surface qui le limite, ces deux fonctions satisfont aux équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = 0.$$

Elles ne diffèrent donc que par une fonction du temps ; inversement il est évident que si à une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ vérifiant ces conditions, on ajoute une fonction arbitraire du temps, on obtient une nouvelle fonction vérifiant encore ces conditions.

On voit donc que, dans ce problème, le mouvement du fluide est complètement déterminé, mais que la fonction potentielle des vitesses est déterminée à une fonction près du temps comme l'exige sa définition.

Si nous nous reportons à l'égalité (19), où $F(t)$ est une fonction arbitraire du temps, nous voyons que dans ce problème la pression Π est déterminée à une fonction près du temps ; on reconnaît, en effet, ce qui est d'accord avec ce résultat, que si une pression satisfait aux conditions du problème, on satisfera encore à ces conditions en adjoignant à cette pression, à chaque instant, une nouvelle pression uniforme arbitrairement variable d'un instant à l'autre.

La pression sera au contraire complètement déterminée par la connaissance de la fonction potentielle des vitesses si l'une des surfaces qui limitent le système est soumise à des pressions données. Si, en effet, on a déterminé une fonction potentielle des vitesses φ, l'application de la relation (21) à un point de la surface en question fera connaître la fonction $F(t)$ et la relation (19) fera alors connaître, en tout point du fluide, la valeur de la pression Π.

Nous ne donnerons que ces brèves indications sur le mouvement des fluides incompressibles ; le lecteur curieux de nouveaux détails pourra recourir avec fruit aux leçons de Mécanique de G. Kirchhoff.[1]

§4. – Influence du Frottement.

Les conditions restrictives que nous avons admises au début du présent cours [Livre I, Ch. I, §7] excluent l'existence du frottement entre les diverses parties du système étudié. Il ne nous semble pas que la science soit encore en possession d'une théorie parfaitement logique des phénomènes divers que l'on attribue au frottement ; aussi, désireux de nous borner dans ces leçons, à l'étude

[1] G. Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische physik. Mechanik. (Leipzig. 1877).

des notions les plus claires sur l'hydrodynamique et l'élasticité, nous laisserons en général de côté l'étude de ces phénomènes.

Il est toutefois une remarque relative aux fluides doués de frottement que nous voulons indiquer ici, parcequ'elle est indispensable si l'on veut apprécier la portée de l'étude des fluides privés de frottement.

Nous admettrons que, pour rendre compte des phénomènes de frottement on doive remplacer les équations (6) par les équations

$$
(26) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial(\varphi+V)}{\partial x}+\frac{du}{dt}&=\xi,\\
\frac{\partial(\varphi+V)}{\partial y}+\frac{dv}{dt}&=\eta,\\
\frac{\partial(\varphi+V)}{\partial z}+\frac{dw}{dt}&=\zeta,
\end{aligned}
\right.
$$

ξ, η, ζ, étant les composantes de la force de frottement au point x, y, z.

Ce n'est pas là faire une hypothèse, mais seulement admettre que les équations (6) peuvent cesser d'être exactes lorsque les conditions que l'on a supposées exactes pour les établir cessent d'être remplies.

Le travail des forces de frottement pendant le temps dt est

$$dt\iiint \rho\,(\xi u+\eta v+\zeta w)$$

Nous admettrons que cette quantité est toujours négative, sauf dans le cas où la position relative des divers points du fluide demeure invariable pendant le temps dt.

La quantité

$$\xi dx+\eta dy+\zeta dz$$

peut elle être, en général, la différentielle totale d'une fonction continue et uniforme d'x, y, z ?

Considérons le cas particulier d'un fluide incompressible limité de toutes parts par des parois immobiles et démontrons que, dans ce cas particulier, la quantité

$$\xi dx+\eta dy+\zeta dz$$

ne peut être une différentielle totale ; il en sera de même, à fortiori, dans le cas général.

Nommons ligne de flux une ligne tracée à l'intérieur du fluide et tangente en chaque point à la direction de la vitesse en ce point. Soit S l'arc d'une semblable courbe, compté à partir d'une origine arbitraire, dans le sens du mouvement du fluide. Nous aurons, en tout point de la courbe,

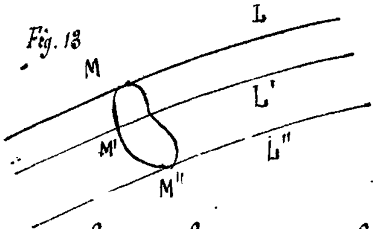
$$(27) \quad \frac{dx}{ds}=\frac{u}{\psi}, \qquad \frac{dy}{ds}=\frac{v}{\psi}, \qquad \frac{dz}{ds}=\frac{w}{\psi}$$

Ψ étant la valeur absolue de la vitesse, définie par l'égalité :

(28) .... $\Psi = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$

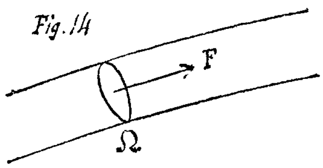
A l'intérieur du fluide, traçons une courbe fermée infiniment petite C (fig. 13) par les divers points M, M', M'', ... de cette courbe, menons des lignes de flux L, L', L'', ... ces lignes engendrent une surface qui délimite un espace infiniment délié. Nous donnerons à cet espace le nom de filet de flux.

Fig. 13



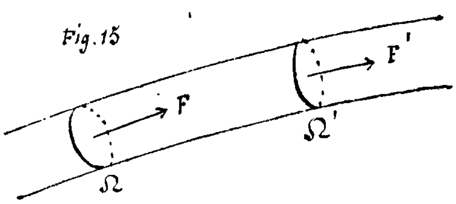
Coupons un semblable filet par un plan normale à l'une des lignes qui le limitent (fig. 14) Il découpera dans le filet une section droite Ω. La quantité $\Psi\Omega$ est ce que nous nommerons le flux au travers de la surface Ω. Nous représenterons ce flux par une grandeur géométrique F portée dans le même sens que la vitesse Ψ.

Fig. 14



Coupons un même filet de flux par deux sections droites, Ω et Ω' (fig. 15), la section Ω' venant après la section Ω lorsqu'on suit le filet dans le sens du mouvement du fluide.

Fig. 15



Soient F le flux au travers de la surface Ω et F' le flux au travers de la surface Ω'.

Le fluide étant supposé incompressible, nous avons, en tout point du fluide, l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Nous avons donc

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dv = 0$$

l'intégrale s'étendant au segment du filet de flux compris entre les deux surfaces Ω et Ω'.

Une transformation bien connue permet de remplacer cette égalité par la suivante.

$$S \left[u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z) \right] dS = 0,$$

l'intégrale s'étendant à la surface qui limite ce segment.

Soit Σ la surface latérale de ce segment ; l'égalité précédente s'écrira plus explicitement.

$$\int_{\Sigma}\left[u\cos(n_i,x)+v\cos(n_i,y)+w\cos(n_i,z)\right]d\Sigma$$
$$+\int_{\Omega}\left[u\cos(n_i,x)+v\cos(n_i,y)+w\cos(n_i,z)\right]d\Omega$$
$$+\int_{\Omega'}\left[u\cos(n_i,x)+v\cos(n_i,y)+w\cos(n_i,z)\right]d\Omega'=0$$

La vitesse du fluide est tangente en chaque point à la surface latérale du filet ; on a donc

$$\int_{\Sigma}\left[u\cos(n_i,x)+v\cos(n_i,y)+w\cos(n_i,z)\right]d\Sigma=0$$

D'ailleurs on a évidemment,

$$\int_{\Omega}\left[u\cos(n_i,x)+v\cos(n_i,y)+w\cos(n_i,z)\right]d\Omega=F$$

$$\int_{\Omega'}\left[u\cos(n_i,x)+v\cos(n_i,y)+w\cos(n_i,z)\right]d\Omega'=-F'$$

L'égalité précédente peut donc s'écrire

$$F = F'$$

et s'énoncer ainsi :

Le flux au travers d'une section droite d'un filet de flux garde la même valeur tout le long de ce filet.

Si l'on se souvient de la définition des quantités F et F', cette égalité peut encore s'écrire :

(29) .... $\psi\,\Omega=\psi'\Omega'$

Cette égalité nous montre qu'un filet de flux ne peut se clore en un point situé à l'intérieur du fluide, car il faudrait qu'on eût, en ce point

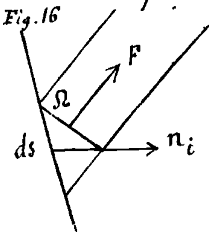
$$\Omega'=0$$

et, par conséquent que ψ' fût infini, ce qui est impossible.

Donc, dans un fluide incompressible, tout filet de flux se ferme sur lui-même ou débouche à la surface du fluide.

Supposons qu'un filet de flux vienne déboucher à la surface S qui limite le fluide par une certaine surface infiniment petite dS (fig. 16).

Fig. 16



Soit F le flux en un point infiniment voisin de la surface S. Nous le supposerons, pour fixer les idées, dirigé vers l'intérieur de la surface S. Nous aurons :

$$\Omega=dS\cos(n_i,F).$$

Nous aurons d'autre part:

$$u \cos(n_i x) + v \cos(n_i y) + w \cos(n_i z) = \psi \cos(n_i F)$$

et, par conséquent,

$$F = \psi \Omega = \int [u \cos(n_i x) + v \cos(n_i y) + w \cos(n_i z)] \, dS$$

Supposons, en particulier, que le fluide soit limité par des parois immobiles; le second membre serait égal à 0, et il en serait de même de F, ce qui est impossible; donc, lorsque le fluide est limité par des parois immobiles, aucun filet de flux ne vient déboucher à sa surface; tous les filets de flux sont fermés sur eux-mêmes.

Décomposons le fluide en filets de flux fermés sur eux-mêmes; l'intégrale

$$\int \rho (\xi u + \eta v + \zeta w) \, dv$$

étendue au fluide entier sera la somme des intégrales analogues étendues aux divers filets de flux en lesquels le fluide est décomposé

Considérons l'intégrale

$$\int \rho (\xi u + \eta v + \zeta w) \, dv$$

étendue à un filet de flux.

Grâce à l'incompressibilité du fluide, ρ a la même valeur tout le long du filet.

Soit S l'arc d'une des lignes de flux L qui limitent le filet; soit Ω la section droite variable de ce filet; nous aurons:

$$dv = \Omega \, dS$$

Moyennant ces remarques et les égalités (29), l'intégrale précédente peut s'écrire:

$$\rho \int_L \psi \Omega \, (\xi dx + \eta dy + \zeta dz)$$

Mais $\psi \Omega$ a, d'après l'égalité (29), une même valeur F tout le long du filet. L'intégrale précédente peut donc s'écrire

$$\rho F \int_L (\xi dx + \eta dy + \zeta dz)$$

La courbe L est fermée; si donc la quantité

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

était la différentielle totale d'une fonction continue et uniforme, l'intégrale précédente serait égale à 0; il en serait de même de toute intégrale analogue, et par conséquent, de la somme de toutes ces intégrales, c'est-à dire de l'intégrale

$$\int \rho(\xi u + \eta v + \zeta w)\, dv$$

étendue au fluide entier. Or, cette dernière est supposée négative. Donc: $(\xi dx + \eta dy + \zeta dz)$ ne peut être une différentielle totale.

Les forces de frottement ne peuvent admettre une fonction potentielle.

Imaginons un fluide dans lequel le frottement soit très petit; nous entendons par là que la quantité

$$\int \rho(\xi u + \eta v + \zeta w)\, dv$$

est, en général, du même ordre de grandeur qu'une certaine quantité très petite K

Admettons que nous connaissions le mouvement de ce fluide supposé sans aucun frottement; les éléments de ce mouvement fictif du fluide ne différent-ils de son mouvement réel que de quantités de l'ordre de K? En d'autres termes, l'étude du mouvement du fluide fictif, supposé sans frottement, fournira-t-elle, en général, une théorie approchée du mouvement du fluide réel, dont le frottement est supposé très petit?

Voyons, en particulier, si le théorème de Lagrange, rigoureusement exact dans le premier cas, est au moins approché dans le second.

Considérons une ligne fermée L qui se déplace avec le fluide; soit

$$J = \int_L (u\, dx + v dy + w\, dz)$$

la circulation le long de cette ligne. En raisonnant sur les équations (26) comme nous avons raisonné, au § 1, sur les équations (6) nous trouverons

$$\frac{dJ}{dt} = \int_L (\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz)$$

Supposons qu'à l'instant t_0 il existe une fonction potentielle des vitesses; nous aurons alors à l'instant t_0

$$J_0 = 0$$

et à l'instant t,

(30) .... $$J = \int_{t_0}^{t} \int_L (\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz)\, dt.$$

La quantité

$$\int_L (\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz)$$

est, en général, une quantité finie, mais très petite de l'ordre de K.

Dès lors, deux cas sont à distinguer :

1° L'intervalle de temps $(t-t_0)$ n'est pas une quantité très grande de l'ordre de $\frac{1}{K}$.

Dans le cas, le second membre de l'égalité (30) est une quantité très petite ; l'égalité (30) se réduit sensiblement à

$$J = 0$$

et l'existence d'une fonction potentielle des vitesses à l'instant t_0 entraînera l'existence approximative d'une fonction potentielle des vitesses à l'instant t.

2° L'intervalle de temps $(t-t_0)$ est une quantité très grande de l'ordre $\frac{1}{K}$

Dans ce cas, l'intégrale qui figure au second membre de l'égalité (30) peut avoir une valeur finie et l'existence d'une fonction potentielle des vitesses à l'instant t_0 n'entraîne nullement l'existence, exacte ou approximative, d'une fonction potentielle des vitesses à l'instant t.

Prenons un exemple relatif à ce dernier cas.

Un fluide est immobile jusqu'à l'instant t_0, en sorte que, jusqu'à cet instant il existe une fonction potentielle des vitesses ; à l'instant t_0, sans secousse brusque, on lui imprime un mouvement, puis on l'abandonne à lui-même. Au bout d'un certain temps $(t_1 - t_0)$ sous l'influence des frottements très faibles dont il est le siège, le fluide parvient sensiblement à un régime permanent. Lorsqu'on se propose d'étudier ce régime permanent, on est tenté d'admettre, en ce régime, l'existence d'une fonction potentielle des vitesses, et de regarder l'existence de cette fonction comme une conséquence du Théorème de Lagrange. Mais ce raisonnement serait inexact, car le temps $(t_1 - t_0)$, nécessaire pour que les frottements amènent le fluide à l'état permanent, est, en général, une quantité très grande de l'ordre $\frac{1}{K}$

Ainsi, les résultats rigoureusement exacts pour un fluide fictif absolument dénué de frottement, peuvent, dans certains cas, n'être ni exacts, ni approchés, pour un fluide dont le frottement est très petit.

Cette remarque fondamentale, qui restreint singulièrement la portée de certaines recherches d'Hydrodynamique, est due à M. Brillouin.(1)

---

(1) M. Brillouin. Revue de Physique. Questions d'Hydrodynamique. (Annales de Toulouse 1887).

Chapitre VI

Les Mouvements Tourbillonnaires.

§1. – Transformation de l'Énoncé du Théorème de Lagrange.

Pendant longtemps, les analystes n'ont su traiter le mouvement des fluides qu'en admettant l'existence d'une fonction potentielle des vitesses. Cauchy (1), le premier, en 1827, a étudié le mouvement d'un fluide incompressible sans supposer l'existence d'une semblable fonction. Il montra que l'on pouvait toujours, dans ce cas, trouver trois intégrales premières des équations de Lagrange; mais de ce beau résultat analytique, il ne tira presque aucune conséquence physique, sinon la première démonstration rigoureuse du Théorème de Lagrange.

Comme nous l'avons vu au Chapitre précédent, Stokes (2) avait donné en 1847, une autre démonstration du Théorème de Lagrange pour les fluides incompressibles. Cette démonstration reposait sur l'emploi des équations d'Euler.

En 1858, M. Helmholtz (3), en suivant la méthode qui avait servi à Stokes, retrouva des résultats analytiques équivalents à ceux de Cauchy. Mais, en outre, il déduisit de ces résultats une série de Théorèmes auxquels leur signification physique très nette donnait un vif intérêt.

M. Helmholtz avait considéré seulement le cas des fluides incompressibles. En 1869, Sir W. Thomson (4) parvint à étendre à tous les fluides dans lesquels il existe une relation entre la densité et la pression, les théorèmes de M. Helmholtz.

De même que Stokes avait étendu à des fluides compressibles la démonstration du théorème de Lagrange qu'il avait déduite des équations d'Euler, de même M. Hanson étendit la méthode de M. Helmholtz aux fluides compressibles.

Stokes avait montré également que la méthode donnée par Cauchy

---

(1) Cauchy — Mémoire sur la Théorie des Ondes. (Savants Étrangers et Œuvres de Cauchy. T I)

(2) Stokes — Cambridge Philosophical Transactions. Vol. VIII. p. 307.

(3) H. von Helmholtz — Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche der Wirbelbewegungen entsprechen (Journal de Crelle. T. IV; Œuvres de Helmholtz. T. I).

(4) Sir W. Thomson — On vortex motion (Edinburgh Transactions. 1869)

pour démontrer le théorème de Lagrange en partant des équations de cet illustre géomètre pouvait s'étendre au cas des fluides compressibles. G. Kirchhoff(1), mettant à profit cette remarque, se servit de la méthode de Cauchy pour démontrer, pour des fluides compressibles quelconques, les Théorèmes fondamentaux de M. H. von Helmholtz.

Nous allons reproduire ici l'exposé, donné par Kirchhoff, de quelques uns des principaux théorèmes de M. H. von Helmholtz.

Pour que la quantité

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

soit la différentielle totale d'une fonction uniforme d'x, y, z, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Considérons un élément de masse dm appartenant au fluide. Entre l'instant t et l'instant $(t+dt)$, cet élément éprouve une modification infiniment petite qui, d'après ce que nous avons vu au Livre I, Ch. II, peut se décomposer ainsi qu'il suit :

1° Trois dilatations suivant trois axes rectangulaires convenablement choisis ;

2° Une translation ayant pour composantes.

$$u\,dt, \quad v\,dt, \quad w\,dt;$$

3° Une rotation autour d'un axe passant par un point de l'élément. Cette rotation a pour composantes :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dt,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dt,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dt.$$

(1) G. Kirchhoff — Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Leipzig. 1877.

Les composantes de la rotation instantanée sont

$$(2) \cdots\cdots \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \beta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \gamma = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Les égalités (1) peuvent donc s'écrire

$$(3) \cdots\cdots \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

Ainsi, lorsque dans le mouvement d'un fluide, il existe une fonction potentielle des vitesses ; le mouvement de chaque particule se compose simplement de trois dilatations rectangulaires et d'une translation sans aucune rotation.

Lorsque les trois composantes α, β, γ de la rotation instantanée d'une particule ne seront pas égales à zéro, nous dirons que cette particule est animée d'un mouvement tourbillonnaire (1). Dès lors, le Théorème précédent peut s'énoncer de la manière suivante :

Si, dans un fluide soumis à l'action de forces qui admettent une fonction potentielle, il n'existe pas de mouvements tourbillonnaires à un instant donné, il n'en existe jamais.

Transformation, due à Cauchy, des équations de Lagrange.

Ce beau théorème ouvre une série de propositions sur la conservation des mouvements tourbillonnaires ; pour démontrer ces propositions, nous allons faire subir aux équations de Lagrange une transformation qui est due à Cauchy et a été généralisée par Stokes (V. § 1)

Les équations de Lagrange [Chapitre III Égalité (9)] s'écrivent :

$$(4) \cdots \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial x}{\partial a} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial a} + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial a} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \pi}{\partial a} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial x}{\partial b} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial b} + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial b} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \pi}{\partial b} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial x}{\partial c} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial c} + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial c} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \pi}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

---

(1) Wirbelbewegung d'Helmholtz ; Vortex de W. Thomson.

Si les forces agissantes admettent une fonction potentielle V, cette fonction d'x, y, z, peut être regardée comme fonction de a, b, c et de t, et nous aurons

$$X \frac{\partial x}{\partial a} + Y \frac{\partial y}{\partial a} + Z \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial a} = 0$$

$$X \frac{\partial x}{\partial b} + Y \frac{\partial y}{\partial b} + Z \frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial V}{\partial b} = 0$$

$$X \frac{\partial x}{\partial c} + Y \frac{\partial y}{\partial c} + Z \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial c} = 0$$

D'autre part, nous supposerons qu'entre ρ et π, il existe une relation

$$\rho = F(\pi)$$

Si, comme au chapitre V, Égalité (3), nous définissons une fonction $\phi(\pi)$ par l'égalité

$$\frac{d\varphi(\pi)}{d\pi} = \frac{1}{F(\pi)}$$

cette fonction $\varphi(\pi)$ sera, comme π, une fonction de a, b, c et de t, et les égalités (4) deviendront

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} \dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dfrac{\partial y}{\partial a} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} \dfrac{\partial z}{\partial a} + \dfrac{\partial (V+\varphi)}{\partial a} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} \dfrac{\partial x}{\partial b} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dfrac{\partial y}{\partial b} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} \dfrac{\partial z}{\partial b} + \dfrac{\partial (V+\varphi)}{\partial b} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} \dfrac{\partial x}{\partial c} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dfrac{\partial y}{\partial c} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} \dfrac{\partial z}{\partial c} + \dfrac{\partial (V+\varphi)}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

Différentions la seconde des équations (5) par rapport à c, la troisième par rapport à b, et retranchons membre à membre les résultats obtenus, en remarquant que

$$\frac{\partial^2(\phi + V)}{\partial b \partial c} - \frac{\partial^2(\phi + V)}{\partial c \partial b} = 0,$$

Nous trouvons l'équation

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial c}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial c}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial c}\right) = 0$$

Mais nous pouvons écrire

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$

$$=\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)}{\partial t^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}{\partial b}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial u}{\partial b}\right)$$

Nous pouvons écrire de même :

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial v}{\partial b}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial w}{\partial c}-\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial w}{\partial b}\right)$$

L'égalité (6) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial u}{\partial b}\right.$$

$$+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial v}{\partial b}$$

$$\left.+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial w}{\partial c}-\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial w}{\partial b}\right)=0$$

Si donc nous désignons par A, B, C, trois fonctions de a, b, c qui ne dépendent pas du temps, l'égalité précédente fournit la première des égalités.

$$
(7)\ \begin{cases}
\left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial u}{\partial c} - \dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial u}{\partial b}\right) + \left(\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial v}{\partial c} - \dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial v}{\partial b}\right) + \left(\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial w}{\partial c} - \dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial w}{\partial b}\right) = \mathcal{A}, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial u}{\partial a} - \dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial u}{\partial c}\right) + \left(\dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial v}{\partial a} - \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial v}{\partial c}\right) + \left(\dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial w}{\partial a} - \dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial w}{\partial c}\right) = \mathcal{B}, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial u}{\partial b} - \dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial u}{\partial a}\right) + \left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial v}{\partial b} - \dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial v}{\partial a}\right) + \left(\dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial w}{\partial b} - \dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial w}{\partial a}\right) = \mathcal{C}.
\end{cases}
$$

Les deux autres égalités (7) se démontrent d'une manière analogue.

Multiplions les deux membres de la première égalité (7) par $\frac{\partial x}{\partial a}$; les deux membres de la seconde par $\frac{\partial x}{\partial b}$; les deux membres de la troisième par $\frac{\partial x}{\partial c}$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous obtenons l'égalité

$$
(8) \quad \frac{\partial v}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right) + \frac{\partial w}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right)
$$

$$
+ \frac{\partial v}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right) + \frac{\partial w}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right)
$$

$$
+ \frac{\partial v}{\partial c}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) + \frac{\partial w}{\partial c}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right)
$$

$$
= \mathcal{A}\frac{\partial x}{\partial a} + \mathcal{B}\frac{\partial x}{\partial b} + \mathcal{C}\frac{\partial x}{\partial c}.
$$

Cette égalité peut se transformer. Au lieu de regarder x, y, z comme fonctions de a, b, c, t, on peut regarder a, b, c comme fonctions de x, y, z, t. Soient Dx, Dy, Dz les différentielles de x, y, z et Da, Db, Dc, les différentielles de a, b, c lorsqu'on regarde t comme une constante.

Les égalités

$$
Da = \frac{\partial a}{\partial x}Dx + \frac{\partial a}{\partial y}Dy + \frac{\partial a}{\partial z}Dz,
$$

$$
Db = \frac{\partial b}{\partial x}Dx + \frac{\partial b}{\partial y}Dy + \frac{\partial b}{\partial z}Dz,
$$

$$
Dc = \frac{\partial c}{\partial x}Dx + \frac{\partial c}{\partial y}Dy + \frac{\partial c}{\partial z}Dz,
$$

ne doivent être autre chose que les égalités :

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial a} Da + \frac{\partial x}{\partial b} Db + \frac{\partial x}{\partial c} Dc,$$

$$Dy = \frac{\partial y}{\partial a} Da + \frac{\partial y}{\partial b} Db + \frac{\partial y}{\partial c} Dc,$$

$$Dz = \frac{\partial z}{\partial a} Da + \frac{\partial z}{\partial b} Db + \frac{\partial z}{\partial c} Dc,$$

résolues par rapport à Da, Db, Dc. Si donc on pose

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

on aura

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right),$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right),$$

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right),$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right),$$

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\right),$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right),$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right),$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\right),$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right).$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (8) devient :

$$D\left[\left(\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right]=\mathcal{A}\frac{\partial x}{\partial a}+\mathcal{B}\frac{\partial x}{\partial b}+\mathcal{C}\frac{\partial x}{\partial c}$$

ou bien

$$D\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\mathcal{A}\frac{\partial x}{\partial a}+\mathcal{B}\frac{\partial x}{\partial b}+\mathcal{C}\frac{\partial x}{\partial c}$$

Moyennant la première des égalités (2), cette égalité devient la première des égalités

$$(10)\ldots(10)\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}2D\alpha&=-\left(\mathcal{A}\frac{\partial x}{\partial a}+\mathcal{B}\frac{\partial x}{\partial b}+\mathcal{C}\frac{\partial x}{\partial c}\right),\\2D\beta&=-\left(\mathcal{A}\frac{\partial y}{\partial a}+\mathcal{B}\frac{\partial y}{\partial b}+\mathcal{C}\frac{\partial y}{\partial c}\right),\\2D\gamma&=-\left(\mathcal{A}\frac{\partial z}{\partial a}+\mathcal{B}\frac{\partial z}{\partial b}+\mathcal{C}\frac{\partial z}{\partial c}\right).\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

D'après l'équation de continuité [Chapitre III, Égalité (14)] le produit ρD est une fonction de a, b, c qui ne dépend pas du temps. Si donc nous posons :

$$\mathcal{A}=-2\,A\,\rho\,D,$$
$$\mathcal{B}=-2\,B\,\rho\,D,$$
$$\mathcal{C}=-2\,C\,\rho\,D,$$

les trois quantités A, B, C seront trois fonctions de a, b, c indépendantes de t et les égalités (10) deviendront :

$$(11)\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}\alpha&=\rho\left(A\frac{\partial x}{\partial a}+B\frac{\partial x}{\partial b}+C\frac{\partial x}{\partial c}\right),\\\beta&=\rho\left(A\frac{\partial y}{\partial a}+B\frac{\partial y}{\partial b}+C\frac{\partial y}{\partial c}\right),\\\gamma&=\rho\left(A\frac{\partial z}{\partial a}+B\frac{\partial z}{\partial b}+C\frac{\partial z}{\partial c}\right).\end{aligned}\right.$$

§.3. Théorèmes généraux sur les mouvements tourbillonnaires.

Nous avons exposé cette transformation de Cauchy sans faire aucune hypothèse sur la nature des trois paramètres a, b, c qui déterminent un point matériel. Nous allons maintenant supposer que ces trois paramètres soient les coordonnées x_0, y_0, z_0 de la particule à l'instant t_0 et nous écrirons les égalités (11).

$$
(12)\cdots\cdots\quad
\begin{cases}
\alpha = \rho\left(A\dfrac{\partial x}{\partial x_0} + B\dfrac{\partial x}{\partial y_0} + C\dfrac{\partial x}{\partial z_0}\right)\\[2ex]
\beta = \rho\left(A\dfrac{\partial y}{\partial x_0} + B\dfrac{\partial y}{\partial y_0} + C\dfrac{\partial y}{\partial z_0}\right)\\[2ex]
\gamma = \rho\left(A\dfrac{\partial z}{\partial x_0} + B\dfrac{\partial z}{\partial y_0} + C\dfrac{\partial z}{\partial z_0}\right)
\end{cases}
$$

Ces égalités nous donnent une interprétation immédiate des trois quantités A, B, C, qui, variables d'une particule matérielle à une autre, demeurent invariables, pour une même particule matérielle, pendant toute la durée du mouvement.

En effet, à l'instant t_0 on a :

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial x}{\partial x_0} = 1 & \dfrac{\partial x}{\partial y_0} = 0 & \dfrac{\partial x}{\partial z_0} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial x_0} = 0 & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} = 1 & \dfrac{\partial y}{\partial z_0} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial z}{\partial x_0} = 0 & \dfrac{\partial z}{\partial y_0} = 0 & \dfrac{\partial z}{\partial z_0} = 1
\end{array}
$$

et les égalités (12) deviennent :

$$
(13)\qquad A = \frac{\alpha_0}{\rho_0} \qquad B = \frac{\beta_0}{\rho_0} \qquad C = \frac{\gamma_0}{\rho_0}
$$

Ces égalités, vraies à l'instant t_0, demeurent vraies à tout instant, puisque les quantités A, B, C ne dépendent pas du temps.

Voici une première conséquence de ces équations (13).

Supposons qu'à l'instant t_0 la particule (x_0, y_0, z_0) ne soit pas animée d'un mouvement tourbillonnaire.

On aura alors

$$\alpha_0 = 0, \qquad \beta_0 = 0, \qquad \gamma_0 = 0.$$

les équations (13) deviendront

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$$

et les équations (12)

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0; \qquad \gamma = 0;$$

en sorte qu'à un instant quelconque t la particule considérée ne présentera encore aucun mouvement tourbillonnaire.

Ainsi : si une particule n'a pas de mouvement tourbillonnaire au début du mouvement du fluide, elle n'en aura jamais pendant toute la durée du mouvement.

Ce théorème renferme évidemment le Théorème de Lagrange.

Prenons deux particules μ, μ'. Au début du mouvement, la première occupe une position M_0 dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0; la seconde occupe une position M'_0 dont les coordonnées sont $(x_0 + dx_0), (y_0 + dy_0)$, $(z_0 + dz_0)$. Supposons ces particules choisies de telle sorte que l'on ait

$$(14) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dx_0}{A} = \frac{dy_0}{B} = \frac{dz_0}{C} = \varepsilon$$

Alors, d'après les égalités (13), on a aussi

$$\frac{dx_0}{\alpha_0} = \frac{dy_0}{\beta_0} = \frac{dz_0}{\gamma_0}$$

égalités qui prouvent que la ligne $M_0 M'_0$ marque, à l'instant t_0, l'axe instantané autour duquel a lieu la rotation de la particule μ. D'autre part, d'après les égalités (14) les égalités (12) deviennent

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \varepsilon\alpha = \rho\left(\dfrac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \dfrac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \dfrac{\partial x}{\partial z_0} dz_0\right) \\[2ex] \varepsilon\beta = \rho\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \dfrac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \dfrac{\partial y}{\partial z_0} dz_0\right) \\[2ex] \varepsilon\gamma = \rho\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \dfrac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \dfrac{\partial z}{\partial z_0} dz_0\right) \end{cases}$$

A l'instant t, la particule μ occupe une position M dont les coordonnées sont x, y, z; la particule μ' occupe une position M' dont les coordonnées sont $(x + dx), (y + dy), (z + dz)$; dx, dy, dz, sont donnés par les égalités

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0,$$

Les egalités (15) deviennent alors

(16) .... $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}\alpha = \rho\, dx \\ \mathcal{E}\beta = \rho\, dy, \\ \mathcal{E}\gamma = \rho\, dz, \end{array} \right.$

Ces égalités nous enseignent que la ligne MM' est encore, à l'instant t, l'axe instantané autour duquel s'effectue le mouvement tourbillonnaire de la particule μ.

Soit ds la longueur de la droite MM'; soit ω la vitesse angulaire de rotation de la particule μ à l'instant t; nous aurons

$$ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}},$$

en sorte que les égalités (16) pourront s'écrire

(17) .... $\mathcal{E}\,\omega = \rho\, ds$

Si l'on observe que $\mathcal{E}$ est, comme A, B, C, une quantité indépendante du temps, on voit que la distance MM' qui sépare les deux molécules $\mu\,\mu'$ à l'instant t est proportionnelle au quotient de la rotation instantanée de la particule μ par la densité de cette particule.

Les théorèmes exprimés par les égalités (16) et (17) entraînent plusieurs conséquences remarquables que nous allons exposer.

Considérons une file $\mu\mu'\mu''$ .... de particules matérielles qui à l'instant t, occupent des positions M_0, M'_0, M''_0, ... formant une certaine ligne L_0. Supposons cette ligne L_0 tangente en chacun de ses points M_0 à l'axe instantané autour duquel s'effectue la rotation de la particule μ. Nous dirons que la ligne L_0 constitue à l'instant t_0, une ligne-tourbillon.

A l'instant t, les particules μ, μ', μ'', ... occupent des positions M, M', M'', ...: qui forment une ligne L. D'après le théorème exprimé par les égalités (16) la ligne L sera, en chacun de ses points M, tangente à l'axe instantané autour duquel tourne la particule μ à l'instant t. La ligne L forme donc, à l'instant t une ligne-tourbillon. D'où le Théorème suivant:

Les particules qui, à un instant, donné forment une ligne tourbillon, continuent à former une ligne tourbillon pendant toute la durée du mouvement.

Traçons dans le fluide, à l'instant t_0, une courbe fermée infiniment petite. Par chacun des points $M_0, \ldots$ de cette courbe fermée passe une ligne tourbillon $L_0, \ldots$ L'ensemble de ces lignes tourbillons engendre une surface infiniment déliée qui constitue ce que nous nommerons un filet tourbillon à l'instant t_0. D'après le Théorème précédent, les particules qui forment, par leur ensemble, un filet tourbillon à l'instant t_0, forment un filet tourbillon pendant toute la durée du mouvement. Nous pourrons dès lors parler des variations qu'éprouve, durant le mouvement un même filet tourbillon, entendant par là que nous considérons la suite des filets tourbillons formés aux divers instants par un même ensemble de particules

Soient deux particules μ, μ', occupant, à l'instant t, des positions M, M', infiniment voisines sur l'une des lignes tourbillons qui limitent un filet tourbillon. Par les deux points M, M', menons deux sections droites du filet tourbillon. Ces sections découpent dans le filet un segment infiniment petit.

Soit σ l'aire d'une de ces sections; soit ds la distance MM'. La masse du segment infiniment petit considéré a pour valeur

$$dm = \rho\,\sigma\,dS$$

D'après l'égalité (17), cette égalité devient

$$dm = \mathcal{E}\,\omega\,\sigma$$

Les quantités dm et $\mathcal{E}$ étant indépendantes du temps, il doit en être de même du produit $\omega\,\sigma$, ce qui démontre le Théorème suivant:

Prenons les particules dont l'ensemble forme une section droite d'un filet tourbillon; le produit de l'aire qu'elles recouvrent par la vitesse angulaire du mouvement tourbillonnaire qui les anime demeure invariable pendant toute la durée du mouvement.

Prenons un espace limité par une surface fermée quelconque S. Nous pourrons, pour cet espace, écrire

$$\int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)dv$$

$$= -\int\left[\alpha\cos(n_i x)+\beta\cos(n_i y)+\gamma\cos(n_i z)\right]dS$$

Mais les égalités

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \beta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \gamma = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

donnent

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

en sorte que l'égalité précédente devient :

$$(18) \qquad \iint \left[\alpha \cos(n_i\, x) + \beta \cos(n_i\, y) + \gamma \cos(n_i\, z)\right] dS = 0$$

Appliquons cette égalité à la surface du segment que deux sections droites σ, σ', découpent dans un filet tourbillon.

Sur ce filet tourbillon, faisons choix d'un sens de parcours, le sens qui va de σ vers σ'. En chaque point, comptons positivement la rotation instantanée lorsque la grandeur géométrique qui la représente est dirigée suivant le sens de parcours choisi.

Nous aurons alors, pour la surface σ,

$$\iint \left[\alpha \cos(n_i\, x) + \beta \cos(n_i\, y) + \gamma \cos(n_i\, z)\right] dS = \omega$$

et pour la surface σ',

$$\iint \left[\alpha \cos(n_i\, x) + \beta \cos(n_i\, y) + \gamma \cos(n_i\, z)\right] dS = -\omega'\sigma'$$

Enfin, pour la surface latérale du filet, nous aurons

$$\iint \left[\alpha \cos(n_i\, x) + \beta \cos(n_i\, y) + \gamma \cos(n_i\, z)\right] dS = 0$$

L'égalité (18) devient donc

$$\omega\sigma = \omega'\sigma'$$

A un même instant, le produit de l'aire de la section droite d'un filet-tourbillon par la grandeur de la rotation instantanée en un point de cette section droite a la même valeur dans toute l'étendue du filet.

Ce théorème nous démontre qu'un filet tourbillon ne peut jamais se terminer en un point du liquide ; en ce point, en effet, la section droite du filet serait nulle et, par conséquent, la rotation instantanée serait infinie. Tout filet tourbillon se ferme sur lui-même, ou bien il vient s'ouvrir par ses deux extrémités à la surface du fluide.

Nous nous bornerons à l'exposé de ces quelques propositions générales sur les tourbillons. M. H. von Helmholtz a encore démontré un grand nombre d'autres propositions sur les tourbillons au sein des fluides incompressibles. On trouvera l'exposé de ces propositions dans le Mémoire de M. H. von Helmholtz et dans la Mécanique de G. Kirchoff.

Chapitre VII.

Les petits Mouvements dans les Fluides.

§.1 _ L'Équation des petits Mouvements.

Considérons un fluide dont les diverses masses élémentaires ne sont soumises à aucune force extérieure donnée; désignons par ω le volume spécifique de ce fluide, lié à la densité par la relation

$$\omega = \frac{1}{\rho}$$

Supposons que ce volume spécifique ne dépende, en chaque point de la masse fluide, que de la pression en ce point.

Les équations de l'Hydrodynamique, prises sous la forme que leur a donnée Euler, pourront s'écrire, dans ce cas:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\omega \frac{\partial \Pi}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ &\omega \frac{\partial \Pi}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ &\omega \frac{\partial \Pi}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\omega}\left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = 0$$

$$(3) \quad \Pi = f(\omega)$$

Supposons le fluide animé de mouvements infiniments petits. Traitons les quantités u, v, w, leurs dérivées partielles et les quantités $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}, \frac{\partial \omega}{\partial t}$ comme des infiniments petits du premier ordre.

L'égalité (3) donne:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{df(\omega)}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{df(\omega)}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{df(\omega)}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Si nous tenons compte de ces égalités, et si, dans les égalités (1) et (2), nous négligerons les infiniment petits du second ordre, nous trouvons, pour équations du mouvement du fluide

$$(4) \ldots\ldots \begin{cases} \omega \dfrac{df(\omega)}{d\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\[2ex] \omega \dfrac{df(\omega)}{d\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \\[2ex] \omega \dfrac{df(\omega)}{d\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$(5) \ldots\ldots \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

Admettons maintenant que le mouvement du fluide soit tel qu'il existe à tout instant une fonction potentielle des vitesses ; hypothèse sur laquelle nous reviendrons à la fin de ce Chapitre. Cette fonction $\varphi(x, y, z, t)$ est définie par les relations

$$(6) \ldots\ldots \begin{cases} u = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\[2ex] v = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\[2ex] w = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

Elle n'est donc point entièrement déterminée ; on peut toujours lui ajouter une fonction arbitraire du temps. Posons

$$(7) \ldots\ldots \omega \frac{df(\omega)}{d\omega} + \frac{dG(\omega)}{d\omega} = 0$$

Moyennant les équations (6) et (7), les équations (4) deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[G(\omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[G(\omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[G(\omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0$$

Ces égalités nous enseignent que la différence

$$G(\omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ne dépend pas d'x, y, z ; c'est une simple fonction de t que nous pouvons toujours mettre sous la forme $\frac{d\,\psi(t)}{dt}$. Nous avons donc

(8) .... $G(\omega) = \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial t}$

Mais, comme nous l'avons remarqué, le Potentiel des Vitesses est défini à une fonction près du temps ; nous pouvons toujours prendre pour fonction potentielle des vitesses au lieu de la fonction φ, la fonction $\varphi + \psi(t)$. Si nous désignons maintenant par φ cette nouvelle fonction, les égalités (6) subsisteront et l'égalité (8) deviendra

(9) .... $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = G(\omega)$

De là, on déduit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{dG(\omega)}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

ou d'après l'égalité (7)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega \frac{df(\omega)}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Tenons compte des égalités (5) et (6) ; posons

(10) .... $a^2 = -\omega^2 \frac{df(\omega)}{d\omega}$

égalité où a^2 est essentiellement positif, car la quantité

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \frac{d\Pi}{d\omega}$$

est essentiellement négative et nous aurons :

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

D'après les egalités (6) on a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\partial w}{\partial z},$$

la quantité $\Delta \varphi$ est donc un infiniment petit du premier ordre ; l'égalité

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G'(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

montre qu'il en est de même de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Les variations de la quantité a^2 sont des quantités infiniment petites du premier ordre. Si donc on néglige les infiniment petits du second ordre devant ceux du premier, on pourra réduire a^2 à sa partie constante, c'est-à-dire supposer que dans l'égalité (10) ω est le volume spécifique du fluide supposé en équilibre.

Si nous différentions successivement les deux membres de cette égalité par rapport à x, par rapport à y, ou par rapport à z et si nous tenons compte des égalités (6) nous trouvons les trois égalités :

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases}$$

qui sont de même forme que l'égalité (11).

De l'égalité (11) différentiée par rapport à t, on déduit

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (9)

$$\frac{\partial^2 G(\omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(\omega)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G(\omega)}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 G(\omega)}{\partial t^2}$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$\frac{dG(\omega)}{d\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\right)$$

$$+\frac{d^2G(\omega)}{d\omega^2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2\right]=0$$

Au premier membre, le second terme, du second ordre, disparaît en présence du premier terme, qui est du premier ordre, et il reste l'égalité

(13) .... $$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$$

de même forme que les égalités (11) et (12).

Posons, suivant une convention précédemment indiquée

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

et nous pourrons énoncer le Théorème suivant:

Lorsqu'un fluide est animé de mouvements infiniment petits, le Potentiel des vitesses, les trois composantes de la vitesse, le volume spécifique, vérifient, en tout point du fluide, une même équation aux dérivées partielles du second ordre:

(14) .... $$a^2\,\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

La quantité a^2 est définie par l'égalité

(10) .... $$a^2=-\omega^2\frac{df(\omega)}{d\omega}$$

Dans cette dernière équation, ω a la valeur constante qui convient à l'équilibre.

---

§2. Théorème de G. Kirchhoff.

Nous sommes donc amenés à étudier d'une manière spéciale les fonctions définies par l'équation aux dérivées partielles du second ordre (14). Cette étude est une généralisation de l'étude des fonctions harmoniques définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta V=0$$

Nous ferons reposer cette étude sur un Théorème fondamental qui a été démontré par G. Kirchoff[1] et employé par lui dans la théorie de la diffraction. M. Maggi[2] a élevé quelques objections contre le raisonnement de G. Kirchoff et a proposé une démonstration destinée à les éviter. Enfin, une troisième démonstration du même Théorème a été donnée par M. Beltrami[3].

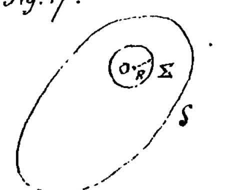
C'est la démonstration de M. Beltrami que nous allons exposer ici.

Considérons un espace E dont dv est un élément de volume, et un point O qui lui est extérieur; soient S la surface fermée qui limite l'espace E. Soit r la distance d'un point de l'espace E ou de la surface S au point O. Soient F et V deux fonctions de x, y, z, régulières dans tout l'espace E. Nous aurons en vertu d'une formule que nous avons souvent employée, la relation suivante:

(15).
$$\iint\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{V}{r}\right)\right]dv$$
$$+\int\frac{V}{r}\,\frac{\partial F}{\partial n_i}\,dS=0$$

Lorsque le point O est intérieur à l'espace E, il n'est pas immédiatement évident que la formule précédente demeure exacte, car la fonction $\frac{1}{r}$ devient infinie dans le champ d'intégration; nous allons démontrer qu'elle demeure néanmoins exacte dans ce cas.

Fig. 17.



Pour cela, entourons le point O (fig 17) d'une sphère Σ, de rayon R, contenue en entier dans l'espace E. Désignons par E' l'espace compris entre la sphère Σ et la surface S.

Dans cet espace E', la fonction $\frac{1}{r}$ demeure finie

---

(1) G. Kirchhoff — Zur Théorie der Lichtstrahlen (Sitzungsberichte der Berliner Akademie. 1882 — Traduit dans les Annales de l'École Normale Supérieure.)

(2) G. A. Maggi — Sulla propazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo (Annali di Matematica. T. XVI).

(3) Eugenio Beltrami — Sul principio di Huygens (Rendiconti del R. Instituto Lombardo. Série II. Vol. XXII. 1889).

et la formule précédente peut s'appliquer à l'espace E'.

Aux divers points de la surface Σ la direction n_i est la direction même du rayon R. L'égalité (15), appliquée à l'espace E' devient donc

$$\int_{E'} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{V}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{V}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{V}{r}\right)\right] dv'$$

$$+ \int \frac{V}{r}\frac{\partial F}{\partial n_i}\, dS + \int \frac{V}{R}\frac{\partial F}{\partial R}\, d\Sigma = 0\,,$$

Soit $d\theta$ l'angle sous lequel l'élément $d\Sigma$ est vu du point O. Nous aurons

$$d\Sigma = R^2\, d\theta$$

et l'égalité précédente pourra encore s'écrire.

$$\int_{E'} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{V}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{V}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{V}{r}\right)\right] dv'$$

$$+ \int \frac{V}{r}\frac{\partial F}{\partial n_i}\, dS + \int V\frac{\partial F}{\partial R}\, R\, d\theta = 0$$

Faisons maintenant tendre le rayon R vers O; au premier membre de l'égalité précédente, le troisième terme tend vers 0; le second terme ne varie pas; l'espace E', auquel s'étend l'intégration que renferme le premier terme tend vers l'espace E; et l'égalité précédente donne, à la limite l'égalité (16).

Désignons par F_o une quantité qui sera égale à 0, si le point O est extérieur à l'espace E, et à la valeur de F au point O, si le point O est intérieur à l'espace E.

Posons :

$$(16) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \begin{cases} \psi = \dfrac{F}{r} \\[2ex] \psi' = \dfrac{F - F_o}{r} \end{cases}$$

Nous aurons identiquement

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{V}{r} = V\frac{\partial \psi'}{\partial x} - (F - F_0)\,V\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

et par conséquent,

$$(17)\ldots\ldots\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{V}{r}\right)$$

$$= V\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial (FV)}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + (F - F_0)V\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}$$

Nous avons

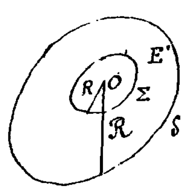
$$(18)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}(F - F_0)$$

Si le point O est extérieur à l'espace E, l'intégrale

$$\int V\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}\,dv$$

étendue à cet espace a évidemment une valeur finie et déterminée; la proposition n'est plus évidente si le point O est intérieur à l'espace E, car alors la quantité $\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}$ devient infinie, d'après l'égalité (18), dans le champ d'intégration.

Fig. 18.



Dans ce cas, entourons le point O d'une surface Σ (fig. 18) contenue dans l'espace E. Soient R le rayon vecteur mené du point O à la surface Σ; $\mathcal{R}$ le rayon vecteur mené du point O à la surface S; $d\theta$ l'ouverture sphérique d'un cône infiniment délié ayant son sommet au point O; E' l'espace compris entre les surfaces Σ et S. Nous aurons

$$\int_{E'} V\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}\,dv' = \int\int_R^{\mathcal{R}} V\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}\,r^2\,dr\,d\theta,$$

le signe $\int^1$ désignant une intégration qui s'étend à tous les éléments $d\theta$ de la sphère de rayon 1. D'après l'égalité (18), cette égalité peut s'écrire

$$\int_{E'} V \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}\, dv' = \int \int_{R}^{\mathcal{R}} T\left(r \frac{\partial F}{\partial x} - (F - F_0) \frac{\partial r}{\partial x}\right) dr\, d\theta$$

Si l'on fait tendre R vers 0, le second membre de cette égalité tend vers une limite finie et déterminée ; il en est donc de même du premier. L'intégrale

$$\int_E V \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}\, dv$$

existe donc et a une valeur finie.

Des démonstrations analogues prouveraient qu'il en est de même des intégrales

$$\int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x}\, dv,$$

$$\int \frac{\partial (F V)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dv,$$

$$\int (F - F_0) V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\, dv,$$

L'égalité (17) donne donc

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{V}{r}\right) dv = \int V \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}\, dv + \int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dv$$

$$- \int \frac{\partial (F V)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dv + \int (F - F_0) V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\, dv.$$

En remplaçant successivement la variable x par chacune des deux variables y et z, on obtient deux égalités analogues ; en ajoutant membre à membre ces trois égalités, on trouve

$$(19) \ldots\ldots \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{r} \frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{r} \frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V}{r} \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] dv =$$

$$=\int V\Delta\psi' dv+\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dv+\int(F-F_0)V\Delta\frac{1}{r}dv$$

$$-\int\left(\frac{\partial(FV)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial(FV)}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial(FV)}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dv$$

Si le point O est extérieur à l'espace E, on a, dans tout l'espace E,

$$\Delta\frac{1}{r}=0,$$

et, par conséquent

$$\int(F-F_0)V\Delta\frac{1}{r}dv=0$$

Si le point O est intérieur à l'espace E l'intégrale

$$\int_E(F-F_0)V\Delta\frac{1}{r}dv$$

est la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$\int_{E'}(F-F_0)V\Delta\frac{1}{r}dv'$$

lorsque la surface Σ se contracte autour du point O; et comme $\Delta\frac{1}{r}$ est égal à 0 dans tout l'espace E' cette limite ne peut être que zéro. On a donc, en toute occurrence

$$\int(F-F_0)V\Delta\frac{1}{r}dv=0$$

et l'égalité (19) devient :

$$(20)\ \dots\dots\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{V}{r}\right)\right]dv$$

$$=\int V\Delta\psi' dv$$

$$+\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)dv$$

$$-\int\left[\frac{\partial (FV)}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial (FV)}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial (FV)}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right]dv$$

1° Supposons le point O extérieur à l'espace E.

Soient u, f, deux fonctions uniformes, finies, continues à l'intérieur de l'espace E, admettant à l'intérieur de cet espace des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies. Le théorème de Green nous donne : (Chapitre V, Egalité (22))

$$\int u\,\Delta f\,dv = -\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}\right)dv$$

$$-\int u\,\frac{\partial f}{\partial n_i}\,dS$$

Prenons

$$f = \frac{1}{r}$$

$$u = FV$$

et remarquons que, dans tout l'espace

$$\Delta f = 0$$

Nous aurons :

$$(21)\ \ldots\ldots -\int\left[\frac{\partial (FV)}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial (FV)}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial (FV)}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right].$$

$$=\int FV\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i}\,dS$$

et l'égalité (20) deviendra

$$(22)\ \ldots\ldots \int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{V}{r}\right)\right]dv$$

$$=\int V\Delta\psi' dv + \int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dv$$

$$+\int FV \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS$$

2° Supposons maintenant le point O intérieur à l'espace E.

Entourons ce point d'une surface sphérique Σ de rayon R contenue dans l'espace E (fig 13). Appliquons l'égalité (21) à l'espace E' compris entre les surfaces Σ et S. Nous aurons :

$$-\int_{E'}\left(\frac{\partial (FV)}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial (FV)}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial (FV)}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dv'$$

$$= \int FV \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS + \int FV \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} d\Sigma$$

Nous aurons d'ailleurs

$$d\Sigma = R^2 d\theta$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} = -\frac{1}{R^2}$$

et l'égalité précédente pourra s'écrire :

$$-\int_{E'}\left(\frac{\partial (FV)}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial (FV)}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial (FV)}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dv'$$

$$= \int FV \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS - \int FV\, d\theta.$$

Faisons tendre vers 0 le rayon R de la sphère Σ ; l'espace E' tend vers l'espace E ; au second membre de l'égalité précédente, le premier terme ne varie pas ; le second tend vers

$$-4\pi F_0 V_0$$

V_0 étant la valeur de V au point O.

On a donc, dans le cas où le point O est intérieur à l'espace E,

$$-\iint\left[\frac{\partial(FV)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial(FV)}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial(FV)}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\varpi$$

$$=\int FV\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i}\,dS-4\pi F_0V_0$$

et l'égalité (20) devient :

$$(23)\ldots\ldots\ldots\iint\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{V}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{V}{r}\right)\right]d\varpi$$

$$=\int V\Delta\psi'd\varpi+\iint\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\varpi$$

$$+\int FV\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i}\,dS-4\pi F_0V_0$$

Si l'on observe que, par définition, F_0 est égal à 0 lorsque le point O est extérieur à l'espace E, on voit que, dans ce cas, cette relation (23) redonne la relation (22) et qu'elle peut, par conséquent, s'appliquer que le point O soit extérieur ou intérieur à l'espace E.

L'égalité (23), comparée à l'égalité (15) nous permet d'écrire

$$(24)\ldots 4\pi F_0V_0=\int V\Delta\psi'd\varpi$$

$$+\iint\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\varpi$$

$$+\int V\frac{\partial\psi}{\partial n_i}\,dS$$

L'égalité (15) subsiste si l'on permute les deux fonctions F

20. Duh.

et V; elle devient alors :

$$\iint\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{F}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\frac{F}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\frac{F}{r}\right)\right)dv$$

$$=\int\frac{F}{r}\frac{\partial V}{\partial n_i}\,dS=0$$

Cette égalité devient immédiatement

$$(25)\ldots\ldots\quad \int\psi\,\Delta V+\iint\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dv$$

$$+\int\psi\frac{\partial V}{\partial n_i}\,dS=0$$

La comparaison des égalités (24) et (25) donne :

$$(26)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad 4\pi F_o V_o=\iint(V\Delta\psi'-\psi\,\Delta V)\,dv$$

$$+\int\left(V\frac{\partial\psi}{\partial n_i}-\psi\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)dS$$

Dans cette égalité, les fonctions ψ et ψ' sont liées à la fonction F par les égalités (16).

Cette égalité (26) va nous servir de lemme pour établir le Théorème de G. Kirchhoff.

Supposons que la fonction V soit une fonction de x, y, z, t, vérifiant l'équation des petits mouvements

$$(14)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad a^2\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Nous aurons alors

$$(27) \quad \int \psi \Delta V \, dv = \frac{1}{a^2} \int \psi \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \, dv$$

La fonction F sera une fonction de x, y, z, t de la forme

$$F = F(r + at)$$

Nous aurons alors

$$\psi = \frac{F}{r} = \frac{F(r+at)}{r}$$

Il est facile de voir que la fonction ψ vérifie, elle aussi, l'équation aux dérivées partielles

$$a^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Si le point O est extérieur à l'espace E, nous avons

$$F_0 = 0$$

ce qui donne

$$\psi' = \psi$$

Par conséquent

$$a^2 \Delta \psi' = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

et

$$(28) \quad \int V \Delta \psi' \, dv = \frac{1}{a^2} \int V \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \, dv$$

Si le point O est extérieur à l'espace E, nous avons

$$F_0 = F(at)$$

$$\psi' = \psi - \frac{F(at)}{r}$$

$$\Delta \psi' = \Delta \psi - F(at) \Delta \frac{1}{r}$$

$$\int V \Delta \psi' \, dv = \int V \Delta \psi \, dv - F(at) \int V \Delta \frac{1}{r} \, dv$$

On a d'ailleurs

$$\int V\Delta\,\psi\,dv = \frac{1}{a^2}\int V\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,dv;$$

D'autre part, une démonstration analogue à celle par laquelle nous avons établi que

$$\int (F - F_0)\,V\Delta\,\frac{1}{r}\,dv = 0$$

nous montre que

$$\int F\Delta\,\frac{1}{r}\,dv = 0$$

Nous avons donc encore, dans le cas actuel, l'égalité

$$(29) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int V\Delta\,\psi'\,dv = \frac{1}{a^2}\int V\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,dv.$$

Les égalités (27) et (28) donnent :

$$\int\left(V\Delta\,\psi' - \psi\,\Delta V\right)dv = \frac{1}{a^2}\int\left(V\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)dv.$$

Mais

$$V\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(V\,\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\,\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

Nous avons donc

$$\int\left(V\Delta\,\psi' - \psi\,\Delta V\right)dv = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\left(V\,\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\,\frac{\partial V}{\partial t}\right)dv.$$

L'égalité (26) devient alors

$$(30) \ldots\ldots\ldots\ldots\; 4\pi\,F_0 V_0 = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\left(V\,\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\,\frac{\partial V}{\partial t}\right)dv$$

$$+\int\left(V\,\frac{\partial\psi}{\partial n_i} - \psi\,\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)dS.$$

Nous avons

$$\psi = \frac{F}{r}$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_i} = F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial n_i}$$

Mais

$$\frac{\partial F(r+at)}{\partial n_i} = \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n_i}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_i} = F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} + \frac{1}{a} \frac{\frac{\partial r}{\partial n_i}}{r} \frac{\partial F}{\partial t},$$

et

$$V \frac{\partial \psi}{\partial n_i} = FV \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} + \frac{1}{a} \frac{\frac{\partial r}{\partial n_i}}{r} \frac{\partial (FV)}{\partial t} - \frac{1}{a} \frac{\frac{\partial r}{\partial n_i}}{r} F \frac{\partial V}{\partial t}$$

Posons maintenant pour abréger

$$(31) \ldots \left\{ \begin{array}{l} G(t) = V \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} - \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial V}{\partial n_i} - \dfrac{1}{a} \dfrac{\frac{\partial r}{\partial n_i}}{r} \dfrac{\partial V}{\partial t}, \\ H = \dfrac{1}{a^2} \displaystyle\int \left(V \dfrac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \dfrac{\partial V}{\partial t} \right) dv + \dfrac{1}{a} \int \dfrac{F(r+at)}{r} V \dfrac{\partial r}{\partial n_i} \, dS, \end{array} \right.$$

et l'égalité (30) deviendra :

$$(32) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4\pi E_0 V_0 = \frac{\partial H}{\partial t} + \int F(r+at)\, G(t)\, dS$$

Supposons maintenant que la fonction V soit identiquement nulle, dans tout l'espace E, jusqu'à une valeur T_0 du temps ; c'est ce qui arrivera si cette fonction V représente l'une des quantités φ, u, v, w, relative au mouvement d'un fluide et si le fluide est demeuré en repos jusqu'à l'instant t_0. D'autre part, la fonction F étant arbitraire, nous pouvons supposer qu'elle est identiquement nulle dans tout l'espace E pour toute valeur de t qui surpasse une certaine valeur t_1. Soient T un instant antérieur à t_0 et T' un instant postérieur à t_1. Nous aurons

$$H(T) = 0, \quad H(T') = 0$$

Si donc nous intégrons les deux membres de l'égalité (32) entre T et T', nous aurons :

$$4\pi \int_T^{T'} E_0 V_0 \, dt = \int_T^{T'} \int F(r+at)\, G(t)\, dS\, dt$$

que nous pouvons écrire encore, en ajoutant aux deux membres des termes identiquement nuls,

$$4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F_0 V_0 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int F(r+at) G(t) \, dS \, dt$$

A la variable t, substituons une nouvelle variable θ définie par la relation

$$r + at = a\theta$$

La variable θ représentera, comme t, un temps, dont l'origine seule aura changé et sera variable d'un point à l'autre. L'égalité précédente deviendra alors

$$(33) \ldots\ldots\ldots 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F_0 V_0 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int F(a\theta) \, G\left(\theta - \frac{r}{a}\right) dS \, dt$$

1° Le point O est extérieur à l'espace E. Nous aurons alors

$$F_\infty = 0$$

et l'égalité précédente deviendra :

$$(34) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} F(a\theta) \int G\left(\theta - \frac{r}{a}\right) dS \, d\theta = 0$$

Il en résulte que l'on a, quel que soit θ,

$$\int G\left(\theta - \frac{r}{a}\right) dS = 0$$

Supposons, en effet, que, pour une certaine valeur θ de la variable θ, le premier membre de l'égalité précédente diffère de 0. Ce premier membre étant une fonction continue de θ, on pourrait toujours comprendre θ dans un intervalle de temps $\theta_1 \, \theta_2$ assez petit pour que, dans cet intervalle, ce premier membre eût un signe constant ; on pourrait aussi choisir la fonction $F(a\theta)$ de manière qu'elle fût positive dans cet intervalle et nulle en dehors de cet intervalle. Dès lors, l'égalité (34) serait impossible. On a donc pour toute valeur de θ,

$$\int G\left(\theta - \frac{r}{a}\right) dS = 0$$

ou, en d'autres termes, pour toute valeur de t,

$$(35) \ldots\ldots\ldots\ldots \int G\left(t - \frac{r}{a}\right) dS = 0$$

2º Le point O est intérieur à l'espace E. Nous aurons alors

$$F_o = F(at)$$

Si l'on observe que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(at) V_o(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a\theta) V_o(\theta)\, d\theta$$

l'égalité (33) pourra s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(a\theta) \left/ 4\pi V_o(\theta) - \int G\left(\theta - \frac{r}{a}\right) dS \right/ d\theta = 0$$

Un raisonnement analogue à celui que nous venons d'exposer prouvera que cette égalité entraîne, pour toute valeur de θ,

$$4\pi V_o(\theta) - \int G\left(\theta - \frac{r}{a}\right) dS = 0$$

On doit donc avoir, pour toute valeur de t

$$(36) \ldots\ldots\ldots\ldots 4\pi V_o(t) = \int G\left(t - \frac{r}{a}\right) dS$$

Récapitulons les résultats obtenus

Si nous posons :

$$(37) \ldots\ldots G(x, y, z, t) = V(x, y, z, t) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial n_i} - \frac{1}{a} \frac{\frac{\partial r}{\partial n_i}}{r} \frac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial t}$$

égalité dans laquelle r désigne la distance du point (x, y, z) de la surface fermée S à un point fixe $O(x_o, y_o, z_o)$ et n_i la normale en (x, y, z) à la surface S vers l'intérieur de cette surface, nous aurons :

$$(35') \ldots\ldots\ldots\ldots \int G\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS = 0$$

si le point O est extérieur à la surface S et

$$(36') \ldots\ldots\ldots\ldots \int G\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) dS = 4\pi V_0(x_0, y_0, z_0, t)$$

si le point O est intérieur à la surface S.

Telle est la propriété fondamentale, découverte par G. Kirchhoff des fonctions qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta V = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Ces fonctions renferment comme cas particulier les fonctions harmoniques qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles.

$$\Delta V = 0$$

De l'étude des premières, on déduit l'étude des secondes en donnant à $\frac{1}{a}$ la valeur 0, et en rendant V indépendant du temps.

Effectuons cette opération sur les égalités de Kirchhoff. L'égalité (31') devient

$$G(x, y, z) = V(x, y, z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial n_i}$$

et nous arrivons au résultat suivant :

Lorsque la fonction V est harmonique, si le point O est extérieur à la surface S, nous avons

$$(35'') \ldots\ldots\ldots \int \left[V(x, y, z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial n_i} \right] dS = 0$$

et si le point O est intérieur à la surface S, nous avons

$$(36'') \int \left[V(x, y, z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial n_i} \right] dS = 4\pi V(x_0, y_0, z_0)$$

Ces propositions, qui jouent un très grand rôle dans la théorie des fonctions harmoniques ont été démontrées par Green en 1828.

Le théorème de G. Kirchoff peut encore se mettre sous une forme un peu différente, qui est due à M. E. Beltrami.

L'égalité (31') nous donne

$$G\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)=-\frac{1}{r^2}\left[V\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial r}{\partial n_i}\right.$$
$$+r\frac{\partial V\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{\partial n_i}$$
$$-\frac{r}{a}\frac{\partial V\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n_i}$$
$$\left.+\frac{r}{a}\frac{\partial V\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n_i}\right]$$

ce qui devient, toute réduction faite,

$$G\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[r\,V\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)\right]$$

On peut donner au Théorème de G. Kirchhoff la forme suivante.

Si la fonction $V(x,y,z,t)$ vérifie, en tout point d'un certain milieu, l'équation

$$a^2\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

et si l'on trace dans ce milieu une surface fermée S, pour tout point (x_0,y_0,z_0) extérieur à l'espace qu'elle enferme, on a

$$(37)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \int\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[r\,V\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)\right]dS=0$$

et, pour tout point (x_0,y_0,z_0) extérieur à cet espace, on a

$$(38)\ \ldots\ldots\ldots V(x_0,y_0,z_0,t)=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[r\,V\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)\right]dS$$

§.3.– Théorème de Poisson.

Supposons que le point $O(x_0,y_0,z_0)$ soit le centre d'une sphère S de rayon R. Appliquons à cette sphère et au point O le Théorème de G. Kirchhoff.

L'égalité (31') peut s'écrire, en général,

$$G(x,y,z,\theta)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\,V(x,y,z,\theta)\right]\frac{\partial r}{\partial n_i}$$

$$- \frac{1}{ar} \frac{\partial V(x,y,z,\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial n_i}$$

Dans le cas qui nous occupe actuellement, nous avons

$$r = R, \qquad \frac{\partial r}{\partial n_i} = -1,$$

et

$$G(x,y,z,\theta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left[R V(x,y,z,\theta)\right]$$

$$+ \frac{1}{aR} \frac{\partial V(x,y,z,\theta)}{\partial \theta}$$

La formule (36') devient alors

$$(39) \ldots\ldots V(x_0,y_0,z_0,t) = \left\{ \frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{\partial}{\partial R}\left[R V(x,y,z,\theta)\right] dS \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi R^2} \int \frac{\partial V(x,y,z,\theta)}{\partial \theta} dS \right\}_{\theta = t - \frac{R}{a}}$$

Cette égalité peut encore s'écrire autrement

Soit $d\theta$ l'angle sous lequel, du point O, on voit l'élément dS

Nous aurons

$$dS = R^2 d\theta,$$

$$\frac{1}{R^2} \int \frac{\partial}{\partial R}\left[R V(x,y,z,\theta)\right] dS = \int \frac{\partial}{\partial R}\left[RV(x,y,z\,\theta)\right] d\theta$$

$$= \frac{\partial}{\partial R} \int RV(x,y,z,\theta)\, d\theta = \frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{R}\int V(x,y,z,\theta)\, dS\right],$$

et l'égalité (39) deviendra :

$$(40) \ldots\ldots V(x_0,y_0,z_0,t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{4\pi R^2} \int V(x,y,z,\theta)\, dS\right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a} \frac{1}{4\pi R} \int \frac{\partial V(x,y,z,\theta)}{\partial \theta} dS \right\}_{\theta = t - \frac{R}{a}}$$

L'égalité (39) est la généralisation d'une égalité célèbre relative aux fonctions harmoniques

Dans ce cas, on doit rendre la fonction V indépendante de θ et faire en outre $\frac{1}{a} = 0$ l'égalité (39) devient donc :

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int V(x, y, z)\,dS$$

$$- \frac{1}{4\pi R}\int \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial R}\,dS$$

Mais on a

$$\int \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial R}\,dS = -\int \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial n_i}\,dS$$

$$= \int \Delta V\,dv = 0,$$

et l'égalité précédente devient :

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int V(x, y, z)\,dS$$

La valeur d'une fonction harmonique au centre d'une surface sphérique est la moyenne des valeurs que prend cette fonction sur la surface sphérique. Cette belle proposition est due à Gauss[1] qui l'a prise pour point de départ de la théorie des Fonctions Harmoniques

L'égalité (40) conduit à un important Théorème de Poisson.

Faisons, dans cette égalité,

$$R = at$$

Nous aurons alors

$$\theta = 0$$

et

$$dR = a\,dt$$

L'égalité (40) deviendra :

---

(1) Gauss. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs - Und Abstossungs - Kräfte (Resultate des magnetischen Vereins — 1839. — Gauss Werke Bd. V).

$$(41) \ldots\ldots \quad V(x_0, y_0, z_0, t) = \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a t} \int V(x, y, z, \theta)\, dS \right] + \frac{1}{a} \frac{1}{4\pi a t} \int \frac{\partial V(x, y, z, \theta)}{\partial \theta}\, dS \right\}_{\theta = 0}$$

Cette formule renferme un théorème qui peut s'énoncer ainsi : Soit une fonction $V(x, y, z, t)$ qui vérifie l'équation

$$a^2 \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Pour $t=0$ la fonction $V(x, y, z, t)$ se réduit à la fonction $f(x, y, z)$ et la fonction $\frac{\partial V(x,y,z,t)}{\partial t}$ à la fonction $g(x, y, z)$. Du point $O(x_0, y_0, z_0)$ comme centre, avec un rayon égal à at, on décrit une surface sphérique. La moyenne des valeurs de la fonction f sur cette surface est une simple fonction de t :

$$(42) \ldots\ldots \quad F(t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int f(x, y, z)\, dS.$$

La moyenne des valeurs de la fonction g sur cette surface est une simple fonction de t.

$$(43) \ldots\ldots \quad G(t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int g(x, y, z)\, dS$$

La valeur de la fonction V au point O à l'instant t est donnée par la formule

$$(44) \ldots\ldots \quad V(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{d}{dt}\left[t F(t) \right] + t G(t)$$

Il est aisé de voir, en effet, que cette égalité n'est autre chose que l'égalité (41).

Réciproquement, soient $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ deux fonctions uniformes, finies et continues d'x, y, z. La fonction

$$V(x_0, y_0, z_0, t)$$

formée par le procédé que nous venons d'indiquer, vérifie, en tout point $O(x_0, y_0, z_0)$ du milieu l'équation aux dérivées partielles du second ordre.

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z_0^2} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Pour démontrer ce Théorème, désignons par M un point (x, y, z) de l'élément dS; par u, u', u'', les angles que la droite OM fait avec les axes de coordonnées. Nous aurons

$$OM = at$$

et

$$x = x_0 + at \cos u,$$
$$y = y_0 + at \cos u'$$
$$z = z_0 + at \cos u''$$

Si $d\theta$ est l'angle sous lequel, du point O, on voit l'élément dS, on aura

$$dS = a^2 t^2 \, d\theta$$

et d'après l'égalité (42),

$$\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = tF(t) = \frac{1}{4\pi} \int t f(x_0 + at\cos u, y_0 + at\cos u', z_0 + at\cos u'') \, d\theta$$

De là nous déduisons:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int f \, d\theta + \frac{a}{4\pi} \int t \left(\cos u \frac{\partial f}{\partial x_0} + \cos u' \frac{\partial f}{\partial y_0} + \cos u'' \frac{\partial f}{\partial z_0} \right) d\theta$$

et, par conséquent,

$$(45) \ldots\ldots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{2a}{4\pi} \int \left(\cos u \frac{\partial f}{\partial x_0} + \cos u' \frac{\partial f}{\partial y_0} + \cos u'' \frac{\partial f}{\partial z_0} \right) d\theta$$

$$+ \frac{a^2 t}{4\pi} \int \Big(\cos^2 u \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \cos^2 u' \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \cos^2 u'' \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2},$$

$$+ 2\cos u' \cos u'' \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial z_0} + 2\cos u'' \cos u \frac{\partial^2 f}{\partial z_0 \partial x_0} + 2 \cos u \cos u' \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} \Big) d\theta$$

L'intégrale

$$\frac{2a}{4\pi} \int \cos u \frac{\partial f}{\partial x_0} \, d\theta$$

est susceptible d'une transformation. Par les droites OM et OX, menons un plan; sa trace sur le plan ZOY fait un angle v avec OZ. Nous avons alors:

$$(46)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \cos u' = \sin u \sin v, \\ \cos u'' = \sin u \cos v, \\ d\theta = \sin u \, du \, dv. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\frac{2a}{4\pi}\int \cos u \frac{\partial f}{\partial x_0} d\theta = \frac{2a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial f}{\partial x_0} \cos u \sin u \, du \, dv$$

Une intégration par parties donne :

$$2\int_0^{\pi} \frac{\partial f}{\partial x_0} \sin u \cos u \, du = \left|\frac{\partial f}{\partial x_0}\sin^2 u\right|_{u=0}^{u=\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \, \partial u} \sin^2 u \, du\,,$$

Mais

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_0}\sin^2 u\right|_{u=0}^{u=\pi} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_0}\sin u + \frac{\partial f}{\partial y_0}\cos u \sin v + \frac{\partial f}{\partial z_0}\cos u \cos v\right) at,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \, \partial x_0} = \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\sin u + \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\cos u \sin v + \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial z_0}\cos u \cos v\right) at$$

On a donc, en vertu des égalités (46)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \, \partial u}\sin^2 u \, du \, dv$$

$$= -at\int\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\sin^2 u - \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\cos u \cos u' - \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial z_0}\cos u \cos u''\right) d\theta$$

et

$$\frac{2a}{4\pi}\int \cos u \frac{\partial f}{\partial x_0} d\theta$$

$$= \frac{a^2 t}{4\pi}\int\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\sin^2 u - \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}\cos u \cos u' - \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial z_0}\cos u \cos u''\right) d\theta$$

Les deux intégrales

$$\frac{2a}{4\pi}\int \cos u' \frac{\partial f}{\partial y_0} d\theta \qquad \frac{2a}{4\pi}\int \cos u'' \frac{\partial f}{\partial z_0} d\theta,$$

se transforment d'une manière analogue, et l'égalité (45) devient finalement,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{a^2 t}{4\pi} \int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} \right) d\theta$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_0^2} \right)$$

On démontrerait de même que la fonction

$$\psi(x_0, y_0, z_0, t) = t\, G(t)$$

vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_0^2} \right)$$

Il en résulte de suite, comme nous l'avions annoncé, que la fonction

$$V(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{\partial \varphi \; x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} + \psi(x_0, y_0, z_0, t)$$

vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z_0^2} \right)$$

Le théorème que nous venons de démontrer fournit donc le moyen de former toutes les fonctions qui vérifient, dans une région donnée, l'équation

$$a^2 \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

lorsque l'on connaît les valeurs que prennent, en tout point de cet espace, les fonctions V et $\frac{\partial V}{\partial t}$ pour la valeur 0 du temps

Ce Théorème fondamental, si voisin du Théorème de la Moyenne relatif aux fonctions harmoniques, donné par Gauss seulement en 1839, a été découvert par Poisson en 1819 (1). G. Kirchhoff (2) en a donné une

---

(1) Poisson — Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques. (Lu à l'Académie le 19 Juillet 1819). —

(2) G. Kirchhoff — Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. p. 314 (Leipzig. 1877). —

méthode qui lui a servi ensuite à établir le Théorème général démontré au §2.

§4. Les Intégrales des Équations des petits Mouvements ne sont pas toujours des fonctions analytiques.

Nous avons fait ressortir, dans les deux § précédents, les analogies qui rapprochent les fonctions harmoniques, c'est à dire les fonctions d'x, y, z, qui vérifient en tous les points d'un espace l'équation

$$\Delta V = 0$$

et les fonctions d'x, y, z, t, qui vérifient en tous les points d'un espace l'équation des petits mouvements

$$a^2 \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Mais ces analogies ne nous doivent pas faire méconnaître les différences très profondes qui séparent les fonctions définies par la première équation aux dérivées partielles des fonctions définies par la seconde. Nous allons mettre en évidence celle de ces différences qui domine toutes les autres.

L'un des Théorèmes fondamentaux sur les fonctions harmoniques est le suivant :

Si dans un espace E, une fonction $V(x, y, z)$ est uniforme, finie et continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre ; si ses dérivées partielles du second ordre sont finies et intégrables, sans être nécessairement continues, si cette fonction vérifie, dans tout l'espace E, l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta V = 0$$

cette fonction est analytique dans tout l'espace E.

Soient, en effet, S la surface fermée qui limite l'espace E,
dS un élément de cette surface,
μ un point de l'élément dS,
n_i la normale de l'élément dS vers l'intérieur de la surface S,
$M(x, y, z)$ un point de l'espace E,
r la distance du point M au point μ de l'élément dS.

Nous avons [Égalité (36'')],

$$V(x,y,z) = 4\pi \int \left[V(\mu) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial V(\mu)}{\partial n_i} \right] dS.$$

Il est évident sur cette formule que la fonction $V(x,y,z)$ admet, par rapport aux variables x, y, z, des dérivées partielles de tous les ordres qui sont finies ; que, par conséquent, elle est analytique dans tout l'espace E.

Ce Théorème entraine la conséquence suivante :

Imaginons deux espaces E_1, E_2, confinant par la surface Σ. En un point μ de la surface Σ, soient n_1 la normale vers l'intérieur de l'espace E_1 et n_2 la normale vers l'intérieur de l'espace E_2. Soient V_1 une fonction harmonique dans l'espace E_1 et V_2 une fonction harmonique dans l'espace E_2. Supposons qu'en tout point μ de la surface Σ, on ait :

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0$$

la fonction V_2 prolongera analytiquement la fonction V_1.

Si, en effet, nous considérons une fonction égale à V_1 dans l'espace E_1 et à V_2 dans l'espace E_2, cette fonction vérifiera dans l'espace E, formé par l'ensemble des deux espaces E_1, E_2, les conditions exigées pour l'application du Théorème précédent ; elle sera donc analytique dans tout l'espace E.

L'importance des Théorèmes que nous venons de démontrer a été mise en évidence simultanément par M. Paul Painlevé (1) et par M. Axel Harnack (2).

Envisageons maintenant une fonction $V(x,y,z,t)$ qui, dans un certain espace E, et pour un certain intervalle de temps, admet par rapport à x, y, z, t des dérivées partielles du premier et du second ordre, les premières étant, comme la fonction, uniformes, finies et continues, les secondes étant seulement assujetties à être finies et intégrables. Cette fonction vérifie, en tous les points de l'espace E, l'équation aux dérivées partielles :

---

(1) Paul Painlevé — Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. (Annales de Toulouse 1887).

(2) Axel Harnack — Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene (Leipzig 1887)

$$a^2 \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Cette fonction n'est pas forcément analytique dans l'espace E.

Considérons en effet une sphère en entier contenue dans l'espace E. Soit R le rayon de cette sphère. Considérons une valeur t du temps au plus égale à $\frac{R}{a}$. La valeur de $V(x, y, z, t)$ au centre de cette sphère peut être formée, par le procédé de Poisson au moyen des valeurs que les fonctions

$$V(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

$$\left[\frac{\partial V(x, y, z, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = g(x, y, z),$$

prennent au voisinage de la surface de la sphère.

Nous avons démontré au § précédent que, si les fonctions $f(x, y, z)$ $g(x, y, z)$ étaient régulières au voisinage de la sphère, ce procédé donnait la fonction $V(x, y, z, t)$ régulière au voisinage du centre de la sphère et vérifiant l'équation aux dérivées partielles.

$$a^2 \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Mais si, par la méthode suivie au § précédent, nous cherchons à démontrer l'existence des dérivées partielles du troisième ordre de la fonction V, nous serons amenés à supposer que les fonctions $f(x, y, z)$ $g(x, y, z)$, admettent, elles aussi, des dérivées partielles du troisième ordre; or, rien ne nous oblige à admettre cette hypothèse; il nous est loisible de choisir pour $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, des fonctions n'admettant pas de dérivées partielles du troisième ordre; alors le procédé de Poisson nous fournira une fonction $V(x, y, z, t)$ régulière, vérifiant l'équation aux dérivées partielles des petits mouvements, mais n'admettant pas, en général de dérivées partielles du troisième ordre.

Ainsi, l'équation aux dérivées partielles des petits mouvements peut admettre des intégrales non analytiques.

Considérons, en particulier, à l'instant t, deux espaces $E_1 E_2$, confinant par une surface Σ; supposons que, dans l'espace E_1, l'équation des petits mouvements admette une intégrale analytique V_1; que, dans l'espace E_2, l'équation des petits mouvements admette une intégrale analytique V_2; que, sur la surface Σ, on ait, en tout point μ

$$V_1 = V_2,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{\partial V_2}{\partial t};$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0$$

La fonction V_2 ne sera pas forcément le prolongement analytique de la fonction V_1.

Cette proposition est essentielle pour comprendre les développements qui vont suivre, en particulier les Chapitres IX et X.

Chapitre VIII

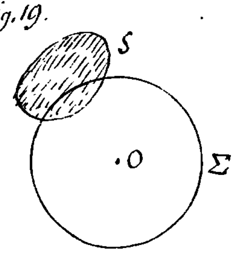
La propagation d'un petit Mouvement dans un Fluide.

§.1. Propagation du mouvement, sa vitesse.

Imaginons un milieu fluide indéfini.

Supposons qu'à l'instant $t=0$ les points intérieurs à une certaine surface S soient seuls en mouvement (fig 19)

Fig. 19.



A l'instant $t=0$, les quantités u, v, w, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ peuvent être regardés comme égales à 0 en tout point extérieur à la surface S.

Cherchons l'état du milieu au temps t.

Pour connaître la valeur de u en un point O au temps t, nous employons le procédé de Poisson.

Soit $M(x,y,z)$ un point du milieu. Posons:

$$\left[u(M,t)\right]_{t=0} = f(M)$$

$$\left[\frac{\partial u(M,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = g(M)$$

Du point O comme centre, avec un rayon égal à at, décrivons une sphère Σ. Posons:

$$F(t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2}\int f(M)\, d\Sigma$$

$$G(t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2}\int g(M)\, d\Sigma$$

et nous aurons [Chapitre VII, Egalité (44)]

$$u(O,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\,F(t)\right] + t\,G(t)$$

Si la surface de la sphère Σ n'avait aucun point M intérieur à la surface S, $f(M)$ et $g(M)$ seraient nuls en tous les points de cette sphère et l'on aurait

$$u(0, t) = 0$$

on aurait de même dans ce cas

$$v(0,t) = 0 \qquad w(0, t) = 0$$

il n'y aurait aucun mouvement au point O

Il n'y a donc de mouvement au point O à l'instant t que si certains points intérieurs à la surface S sont à une distance at du point O.

Soit Δ la moindre distance du point O à un point de la surface S. Soit D la plus grande distance du point O à un point de la surface S. Il n'y aura aucun mouvement au point O avant l'époque

$$t_0 = \frac{\Delta}{a}$$

il n'y aura plus aucun mouvement au point O après l'époque

$$t_1 = \frac{D}{a}$$

Ces faits s'expriment en disant que dans un milieu fluide un petit mouvement se propage avec une vitesse uniforme égale à a.

La quantité a est donc la vitesse de propagation d'un ébranlement infiniment petit, ou en d'autres termes, la valeur limite de la vitesse du son pour un son infiniment peu intense. On la nomme simplement vitesse du son dans le milieu considéré.

Au temps t, les points O qui sont à une distance supérieure à at de tous les points de la surface S sont extérieurs à une surface fermée σ. Les points dont la distance à tous les points de la surface S est inférieure à at sont intérieurs à une surface fermée σ', contenue dans la précédente. Il n'y a de mouvement qu'entre les deux surfaces σ, σ'. En dehors de ces surfaces, on a identiquement

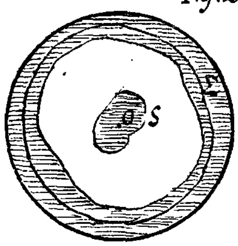
$$\varphi = \varphi_0, \; u = 0, \; v = 0, \; w = 0, \; \omega = \omega_0$$

φ_0, ω_0 étant les déterminations de φ et de ω qui conviennent à l'équilibre.

Les fonctions φ, u, v, w, ω ont donc des déterminations analytiques différentes dans les trois régions en lesquelles les deux surfaces σ, σ' partagent l'espace.

Ces fonctions étant formées par le procédé de Poisson, seront continues dans tout l'espace, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre ; nous trouvons donc là un exemple de ce que nous avons annoncé au Chapitre VI, § 4 ; une intégrale de l'équation des petits mouvements, continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, possédant des dérivées partielles du second ordre qui sont finies, peut fort bien être formée d'un côté d'une surface par une certaine fonction analytique d'x, y, z, t, et de l'autre côté de cette surface par une autre fonction analytique des mêmes variables.

Fig. 20



Supposons, en particulier, qu'à l'instant 0, les seuls points ébranlés du milieu se trouvent à l'intérieur d'une très petite surface S environnant le point O (fig. 20).

A l'instant t, les points du fluide qui sont en mouvement sont tous situés à l'intérieur d'une couche très mince avoisinant la surface Σ d'une sphère ayant le point O pour centre et at pour rayon.

Les méthodes qui servent à déterminer la vitesse du son à l'air libre ne sont que la réalisation du phénomène dont nous venons de donner la théorie. Ce serait ici le lieu, dans un cours complet d'Acoustique, de placer la description de ces méthodes; nous nous contenterons de renvoyer le lecteur aux Traités de Physique; il y trouvera l'exposé et la discussion de ces méthodes.

§. 2. Formule de la Vitesse du son - Historique.

Si l'on désigne par

$$\Pi = f(\omega)$$

la relation supplémentaire qu'il convient d'adjoindre aux équations de l'hydrodynamique pour traiter les petits mouvements du fluide que l'on considère, la quantité a est donnée par l'égalité [Chapitre VII, Égalité (10)]

$$a^2 = -\omega^2 \frac{df(\omega)}{d\omega}$$

La vitesse du son est donc donnée par la formule

$$(1) \quad a = \left[-\omega^2 \frac{df(\omega)}{d\omega}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Supposons, en particulier, qu'il s'agisse d'un fluide dans lequel la relation supplémentaire doive être représentée par la loi de détente adiabatique. Nous aurons alors, d'après les notations adoptées au Chapitre IV,

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_Q$$

ou bien, d'après le Théorème de Reech [Chapitre IV, Egalité (13)]

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \frac{C}{c}\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T$$

La vitesse du son est donc représentée par la formule

(2) .... $a = \sqrt{-\omega^2 \frac{C}{c}\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T}$

Si la relation supplémentaire qui doit être jointe aux équations de l'Hydrodynamique était non pas la loi de détente adiabatique, mais l'équation de compressibilité isothermique, on aurait

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T,$$

et

(2') .... $a = \sqrt{-\omega^2 \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T}$.

S'il s'agit d'un Gaz dont les coefficients de dilatation sont sensiblement constants, l'égalité (2) deviendra [Chapitre IV, Egalité (15)] en se souvenant que

$$\rho = \frac{1}{\omega}$$

est la densité du gaz,

(3) .... $a = \sqrt{\frac{\Pi}{\rho} \frac{C}{c} \frac{1+\alpha(T-T_0)}{1+\beta(T-T_0)} \frac{\beta}{\alpha}}$

Tandis que, dans les mêmes conditions, la formule (2') deviendrait

(3') .... $a = \sqrt{\frac{\Pi}{\rho} \frac{1+\alpha(T-T_0)}{1+\beta(T-T_0)} \frac{\beta}{\alpha}}$

Enfin il s'agit d'un Gaz parfait, la formule (3) deviendra

(4) .... $a = \sqrt{\frac{\Pi}{\rho} \frac{C}{c}}$

tandis que la formule (3') deviendrait :

$$a = \sqrt{\frac{\Pi}{\rho}} \tag{4'}$$

Newton [1] supposait que la relation supplémentaire à joindre aux équations de l'hydrodynamique pour l'étude du mouvement des gaz parfaits était la loi de compressibilité isothermique, et il avait trouvé, pour formule de la vitesse du son dans ces conditions la formule (4').

Cette formule (4') donnerait pour la vitesse du son dans l'air à 0 un nombre voisin de 279^m95 par seconde ; nombre beaucoup trop faible, car toutes les mesures donnent un nombre voisin de 330^m par seconde.

L'analyse de Newton s'appliquait seulement à la propagation d'un petit mouvement dans l'air que renferme un tuyau cylindrique ; elle supposait en outre le mouvement dirigé, en tout point, parallèlement à l'axe du tuyau.

Cette analyse de Newton est d'ailleurs fort obscure et laisse à désirer.

Lagrange [2] reprit la théorie de Newton en faisant usage des équations aux dérivées partielles de l'Hydrodynamique ; en faisant disparaître les défauts du raisonnement de Newton, il ne modifia pas l'expression de la vitesse du son ; en sorte que l'écart entre la valeur de cette vitesse ainsi calculée et la valeur observée n'était pas diminué.

Lagrange et Euler ont ensuite étendu l'analyse dont nous venons de parler au cas où le son se propage dans l'air libre et de la même manière dans toutes les directions issues d'un point occupé par une source sonore très petite ; ils ont trouvé que la vitesse du son était la même dans ce cas que dans le cas où le son se propage dans un tuyau et où la vitesse des molécules d'air est en chaque point parallèle à l'axe du tuyau.

Enfin Poisson aborda l'étude de la propagation dans un fluide indéfini d'un petit ébranlement quelconque. Il démontra, dans son Mémoire sur la Théorie du Son [3], que la vitesse de propagation de ce mouvement

---

(1) Newton — Philosophiæ naturalis principia mathematica

(2) Lagrange — Mécanique Analytique — 2e Partie Section XII

(3) Poisson — Mémoire sur la Théorie du Son — Lu à l'Institut le 17 Août 1807 (Journal de l'École Polytechnique XIVe Cahier. p. 319. 1808).

était une constante caractéristique du fluide dans lequel s'effectue la propagation ; cette constante est égale à la vitesse de propagation dans les conditions étudiées par Newton, Lagrange et Euler. Plus tard [1], Poisson donna de ce résultat la démonstration précise que nous avons indiquée au commencement de ce Chapitre.

En même temps que ces divers travaux perfectionnaient l'analyse de la propagation d'un petit mouvement dans un fluide, les géomètres mettaient en évidence la cause du désaccord entre la valeur de la vitesse du son calculée théoriquement et la valeur de la même vitesse trouvée expérimentalement.

Déjà Lagrange [2] avait remarqué que l'écart de ces deux valeurs disparaîtrait si la relation supplémentaire adjointe aux équations du mouvement de l'air, au lieu d'être représentée par la loi de Mariotte qui rend la pression proportionnelle à la densité, était représentée par une relation rendant la pression proportionnelle à une puissance de la densité égale environ à $\frac{4}{3}$. Mais il ne trouva point de raison pour justifier la substitution de cette relation à la loi de Mariotte.

C'est Laplace [3] qui, le premier, a mis en évidence la cause pour laquelle la loi de Mariotte doit, dans l'étude du mouvement de l'air, être remplacée par une relation différente entre la densité et la pression ; la compression de chaque masse d'air élémentaire dégage une quantité de chaleur qui élève la température de cette masse, faute d'avoir le temps de se communiquer aux masses voisines ; à une même augmentation de densité doit correspondre une augmentation de pression plus grande que si la température demeurait invariable.

Tandis que, d'après la loi de Mariotte, on aurait

$$d\pi = \frac{\pi}{\rho} d\rho$$

on devra, dans le cas où la chaleur dégagée par la compression est uniquement employée à échauffer le fluide, remplacer la relation précédente par une relation de la forme :

---

(1) Poisson — Mémoire sur l'Intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques, lu à l'Académie des Sciences le 19 Juillet 1819.

(2) Lagrange — Nouvelles recherches sur la Propagation du Son (Anciens Mémoires de Turin. T. II. p. 153)

(3) Laplace — cité par Poisson. Journal de l'École Polytechnique, 14e cahier p. 325

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\pi = m\frac{\pi}{\rho}d\rho$$

m étant un nombre positif plus grand que 1.

Il semble à Poisson [1], en 1807, qu'aucune expérience directe ne peut former la valeur de la quantité m. Mais une méthode indirecte permet de déterminer la valeur de cette quantité. Calculant la vitesse du son dans l'air en faisant usage de la relation (5), Poisson trouve qu'elle doit être donnée par la formule

$$(4'') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad a = \sqrt{m\frac{\pi}{\rho}}$$

a étant connu par l'expérience, cette formule fait connaître à Poisson la valeur de m.

En 1816, Laplace [2] donna la signification théorique du coefficient m. Il montra que ce coefficient représente le rapport de la chaleur spécifique du gaz chauffé sous pression constante à la chaleur spécifique du gaz chauffé sous volume constant, et il énonça le théorème suivant :

La vitesse du son est égale au produit de la vitesse que donne la formule Newtonienne par la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique de l'air sous une pression constante à sa chaleur spécifique sous un volume constant

Dans ce Mémoire, Laplace donnait un premier essai de contrôle expérimental en faisant usage d'expériences dues à De la Roche et Bérard.

Dans la Mécanique Céleste Laplace [3] donna un exposé complet de ses idées sur les relations entre la théorie de la chaleur et la théorie de la propagation du son.

Dans l'intervalle qui s'était écoulé entre ces deux publications de Laplace, Desormes et Clément [4] avaient effectué, sur la détente des

---

(1) Poisson —— Mémoire sur la Théorie du son lu à l'Institut le le 17 Août 1807 (Journal de l'École Polytechnique p. 326 - 14e cahier 1808)

(2) Laplace —— Sur la vitesse du son dans l'air et dans l'eau. (Annales de Chimie et de Physique 2e série. T. III. p. 238. 1816)

(3) Laplace —— Mécanique Céleste. 2e Partie. Livre XII. De l'Attraction et de la répulsion des sphères, et des lois de l'équilibre et du mouvement des fluides élastiques. (T. V. p. 89).

(3) Desormes et Clément —— Détermination expérimentale du zéro absolu de la chaleur et du calorique spécifique des gaz. (Journal de Physique, T. LXXXIX. pp. 321 et 428 (1819).

gaz, des recherches expérimentales propres à déterminer le rapport du coefficient m de la détente adiabatique. Gay Lussac et Welter avait repris ces recherches avec une précision plus grande, mais ne les avaient pas encore publiées. Laplace put, en partant des résultats de ses recherches et de sa formule, calculer la valeur de la vitesse du son. La différence entre cette valeur et la valeur observée n'était plus que de trois mètres.

La théorie développée par Laplace était mêlée à beaucoup d'hypothèses sur la nature des gaz. Il était désirable de donner, des résultats qu'il avait obtenus, une démonstration dégagée de ces hypothèses et fondée uniquement sur des lois expérimentales. C'est ce que fit Poisson [1]. Admettant, comme Laplace, que les deux chaleurs spécifiques des gaz étaient constantes, il mit la loi de détente adiabatique des gaz sous la forme

$$\Pi = \text{const} \times \rho^{\frac{C}{c}}$$

ce qui justifiait l'idée émise par Lagrange sur la forme de la relation supplémentaire dans les gaz.

Telle est, dans ses grandes lignes, l'histoire des recherches relatives à la théorie de la propagation du son. Ces recherches sont importantes non seulement par l'objet même auquel elles s'adressaient, mais encore parce qu'elles ont donné naissance à la Thermodynamique.

L'étude expérimentale de la détente des gaz, inaugurée par Désormes et Clément et par Gay-Lussac et Welter, a été continuée par Masson et par Cazin; elle a fourni les résultats suivants pour valeur du rapport $\frac{C}{c}$

	$\frac{C}{c}$	
Air	1,35	Desormes et Clément
	1,37	Gay Lussac et Welter
	1,4196	Masson
	1,41	Cazin
Hydrogène	1,376	Masson
	1,41	Cazin
Oxygène	1,41	Cazin
Azote	1,41	Cazin
Oxyde de carbone	1,41	Cazin

(1) Poisson. Sur la vitesse du son (Annales de Physique et de Chimie, 2e Série, Tome XXIII, p. 5, 1823)
Sur la Chaleur des Gaz et des vapeurs (Ibid. p. 337).

D'autre part, si, dans la formule de Laplace, on porte la valeur de la vitesse du son dans l'air trouvée par Regnault, on trouve :

$$\frac{C}{c} = 1,3945$$

La valeur de la vitesse du son trouvée par Moll et Van Beck donne

$$\frac{C}{c} = 1,4078.$$

La valeur trouvé par Dulong donne

$$\frac{C}{c} = 1,4172.$$

L'accord qui existe entre les valeurs de $\frac{C}{c}$ trouvées directement dans les expériences précises de Masson et de Cazin et les valeurs déduites indirectement de la vitesse du son dans l'air, fournissent une vérification très complète des idées de Laplace.

Lorsqu'au lieu d'étudier un gaz parfait, on étudie un gaz qui s'écarte sensiblement de l'état parfait, on doit faire usage, pour déterminer la formule de la vitesse du son dans ce gaz, non plus de la formule de Laplace, mais de la formule (3).

Supposons que a soit la vitesse du son dans l'air et a' la vitesse du son dans l'acide carbonique.

D'après les expériences de Masson, le rapport

$$\frac{C}{c} \quad \frac{\beta}{\alpha}$$

relatif à l'acide carbonique a pour valeur 1,30 ; d'après Cazin, il a pour valeur 1,291. On trouve alors

$$\frac{a'}{a} = 0,7827$$

Regnault a trouvé directement

$$\frac{a'}{a} = 0,7848$$

La valeur calculée du rapport $\frac{a'}{a}$ ne diffère de la valeur observée que de $\frac{1}{373}$ de cette dernière valeur.

---

§.3. Vitesse du son dans les liquides.

La formule

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad a = \sqrt{-\omega^2 \frac{C}{c}\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T}$$

donne avec une exactitude suffisante la vitesse du son dans un gaz ; quelle formule convient-il d'adopter pour la vitesse du son dans un liquide ?

Les deux hypothèses extrêmes que l'on peut faire sont les suivantes :

1° —— Négliger entièrement les échanges de chaleur entre les diverses parties du liquide ; la vitesse du son est alors donnée par la formule précédente.

2° —— Supposer la température constante dans la masse du liquide ; la vitesse du son est alors donnée par la formule :

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a = \sqrt{-\omega^2\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T}$$

Le principe de Carnot montre, que pour un corps quelconque, la chaleur de dilatation l a pour valeur

$$l = \frac{T}{E}\left(\frac{d\Pi}{dT}\right)_\omega$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur

D'après l'égalité (5) du Chapitre IV, cette égalité peut s'écrire :

$$l = -\frac{T}{E}\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_\Pi$$

D'autre part, l'égalité (10) du même Chapitre donne :

$$C = c + l\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_\Pi$$

On a donc

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C - c = -\frac{T}{E}\left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T\left(\frac{d\omega}{dT}\right)^2_\Pi$$

Soit ω_0 le volume spécifique du fluide sous la pression Π, à la température T_0 de la glace fondante ; soit α son coefficient de dilatation sous la pression constante Π à la température T ; nous aurons [Chapitre IV, Égalité (3)]

$$\left(\frac{d\omega}{dT}\right)_\Pi = \omega_0\alpha .$$

Soit χ le coefficient de compressibilité du fluide à la température T. Nous aurons, par définition

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{d\Pi}{d\omega}\right)_T = -\frac{1}{\chi\omega}$$

L'égalité (6) peut donc s'écrire :

$$C - c = \frac{T}{E}\frac{\omega_0^2}{\omega}\frac{\alpha^2}{\chi}$$

En particulier, à la température de la glace fondante, nous trouvons

$$C - c = \frac{T_0}{E}\,\omega_0\,\frac{\alpha^2}{\chi}$$

On peut calculer la valeur de cette quantité $(C - c)$ pour les liquides, tels que l'eau et le mercure, pour lesquels on connaît la valeur du coefficient de compressibilité χ. On la trouve négligeable en présence de C. La quantité $\frac{C}{c}$ est donc très voisine de l'unité ; pour les liquides, les deux formules (2) et (2') conduisent à des valeurs à peine différentes de a. La véritable valeur de la vitesse du son devant être comprise entre les valeurs données par ces deux formules, on peut, pour la représenter, adopter l'une quelconque de ces deux formules, par exemple la formule (2')

Moyennant l'égalité (7), la formule (2') devient

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a = \sqrt{\frac{\omega}{\chi}}$$

Calculons, par cette formule, la vitesse du son dans l'eau à 4°. D'après Grassi, nous avons, à cette température (où $\alpha = 0$, et où par conséquent $C = c$ rigoureusement)

$$\chi = 0{,}0000499$$

La formule (8) nous donne alors, en mètres par seconde,

$$a = 1425$$

En 1820, les expériences faites à Marseille par Beudant ont donné

$$a = 1500$$

En 1827, Colladon et Sturm ont trouvé, dans les eaux du lac de Genève

$$a = 1435$$

L'accord entre l'expérience et la théorie est remarquable, si l'on songe aux difficultés qui environnent la détermination expérimentale des quantités a et χ.

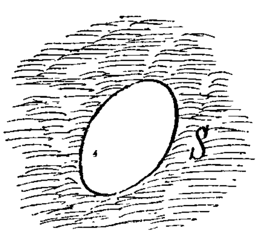
Chapitre IX

Propagation d'un petit Mouvement dans un autre. Méthode d'Hugoniot.

§.1. Quelques définitions.

Imaginons un fluide qui, jusqu'à l'instant $t = t_0$,

Fig. 21.



est soumis à certaines conditions aux limites parfaitement déterminées. C'est, par exemple, un fluide indéfini assujetti à s'appuyer sur la partie extérieure d'une surface immobile S (fig 21).

Ce fluide est en mouvement. Ce mouvement est représenté par les équations analytiques

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} u = U(x, y, z, t) \\ v = V(x, y, z, t) \\ w = W(x, y, z, t) \\ \pi = P(x, y, z, t) \\ \rho = R(x, y, z, t) \end{cases}$$

obtenues en intégrant les équations aux dérivées partielles du mouvement et en tenant compte des conditions aux limites qui sont imposées au fluide jusqu'à l'instant $t = t_0$

Imaginons maintenant qu'à partir de l'instant $t = t_0$ les conditions aux limites auxquelles le fluide était assujetti soient remplacées par des conditions analytiquement différentes. Par exemple, la surface S sur laquelle ce fluide doit s'appuyer, au lieu de demeurer immobile, se met en mouvement suivant une certaine loi.

Pour les valeurs de t supérieures à t_0, le mouvement du fluide ne pourra plus, en général, être représenté par les équations (1) où les cinq fonctions U, V, W, P, R, sont cinq fonctions analytiques

En général, en effet, ces équations (1) ne seront pas compatibles avec les nouvelles conditions aux limites imposées au fluide après le temps $t = t_0$. Pour les valeurs de t supérieures à t_0, le mouvement du fluide est représenté par les équations

$$2 \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} u = \mathcal{U}(x, y, z, t) \\ v = \mathcal{V}(x, y, z, t) \\ w = \mathcal{W}(x, y, z, t) \\ \pi = \mathcal{P}(x, y, z, t) \\ \rho = \mathcal{R}(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Il peut arriver que les cinq fonctions

$$\mathcal{U}(x, y, z, t)$$
$$\mathcal{V}(x, y, z, t)$$
$$\mathcal{W}(x, y, z, t)$$
$$\mathcal{P}(x, y, z, t)$$
$$\mathcal{R}(x, y, z, t)$$

soient constituées de la manière suivante :

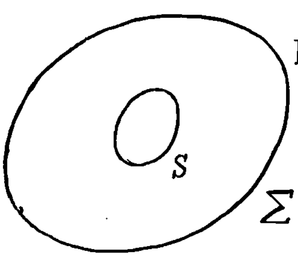


Fig. 22

A chaque instant t, postérieur à t_0, on peut tracer dans le fluide une surface Σ qui se déplace et se déforme avec le temps t (fig. 22).

En tout point (x, y, z) de la région 2, extérieure à la surface Σ, les cinq fonctions

$$\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{P}, \mathcal{R},$$

sont des expressions analytiques respectivement identiques aux cinq fonctions

$$U, V, W, P, R$$

En tout point (x, y, z) de la région 1, intérieure à la surface Σ, les cinq fonctions

$$\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{P}, \mathcal{R}$$

ont des expressions analytiques

$$U', V', W', P', R'$$

différentes des expressions analytiques

$$U, V, W, P, R$$

S'il en est ainsi, nous dirons que les deux mouvements considérés sont compatibles ; que le second mouvement se propage dans le premier ; enfin que Σ est la surface de l'onde au temps t.

Si l'on se reporte au Chapitre précédent, on voit qu'un petit mouvement du genre de ceux que nous avons considérés dans ce chapitre peut se propager dans un fluide au repos ; que par conséquent, un tel petit mouvement et un mouvement nul sont compatibles, au sens que nous venons de donner à ce mot.

Au contraire, on conçoit très bien que deux mouvements quelconques ne sont pas nécessairement compatibles. Il pourrait arriver, par exemple, qu'à un instant quelconque t, supérieur à t_0, les fonctions

$$\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{P}\ \mathcal{R},$$

eussent en tous les points de l'espace des expressions analytiques différentes de

$$U, V, W, P, R,$$

bien que les valeurs des différences

$$\mathcal{U} - U$$
$$\mathcal{V} - V$$
$$\mathcal{W} - W$$
$$\mathcal{P} - P$$
$$\mathcal{R} - R$$

à un instant donné t, postérieur à t_0 tendissent vers 0 lorsque le point (x, y, z) s'éloignerait indéfiniment de la région où s'est produite la perturbation.

On comprendra nettement la différence qui sépare deux mouvements qui se propagent l'un dans l'autre et deux mouvements qui ne se peuvent propager l'un dans l'autre en comparant l'exemple qui a été étudié au Chapitre précédent avec un exemple très simple que nous allons maintenant étudier.

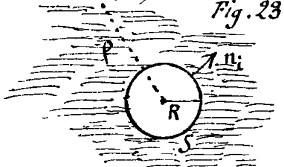


Fig. 23.

Un fluide incompressible occupe l'espace illimité qui est extérieur à une sphère S (fig 23) dont le centre O est fixe, mais dont le rayon R est une fonction du temps

$$R = f(t)$$

Si nous désignons par n_i la normale à la surface S en un point vers l'intérieur du fluide, la composante suivant n_i de la vitesse d'un point de la surface S sera

$$\frac{dR}{dt} = \frac{df(t)}{dt}$$

Supposons le fluide animé d'un mouvement admettant un potentiel des vitesses φ. En tout point (x, y, z) de l'espace occupé par le fluide, on aura [Chapitre V, Egalité (18)],

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

et, en tout point de la surface S [Chapitre V, Egalité (20)]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{df(t)}{dt} = 0$$

Ces conditions sont précisément celles qui déterminent la fonction potentielle d'une couche uniforme d'électricité distribuée sur la surface S avec une densité

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{df(t)}{dt}$$

On peut donc prendre, en vertu de ce Théorème connu qu'une couche électrique uniforme distribuée à la surface d'une sphère a, en tout point extérieur, même fonction potentielle que si elle était ramassée au centre de la sphère ;

$$\varphi = \frac{R^2}{\rho} \frac{df(t)}{dt}$$

ρ étant la distance du point $M(x, y, z)$ au centre O de la sphère ; ou, plus explicitement :

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho} f^2(t) \frac{df(t)}{dt}$$

Supposons que les variations du rayon R de la sphère S soient jusqu'à l'instant $t = t_0$ représentées par la fonction analytique $f(t)$. La vitesse au point M du fluide à l'instant t, inférieur à t_0, aura pour composantes :

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} u = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} f^2(t)\dfrac{d f(t)}{dt} \\[2ex] v = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} f^2(t)\dfrac{d f(t)}{dt} \\[2ex] w = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial \rho}{\partial z} f^2(t)\dfrac{d f(t)}{dt} \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'à partir du temps t_0 les variations du rayon R de la sphère S soient représentées par une fonction analytique $g(t)$, différente de $f(t)$; au mouvement représenté par les équations 2 succèdera, pour les instants postérieurs à t_0, un mouvement représenté par les équations

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} u' = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} g^2(t)\dfrac{d g(t)}{dt} \\[2ex] v' = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} g^2(t)\dfrac{d g(t)}{dt} \\[2ex] w' = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial \rho}{\partial z} g^2(t)\dfrac{d g(t)}{dt} \end{cases}$$

On voit donc qu'à un instant t, postérieur à t_0, on n'a, en aucun point de l'espace

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w'$$

seulement les différences

$$u' - u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\left[g^2(t)\frac{dg(t)}{dt} - f^2(t)\frac{df(t)}{dt}\right]$$

$$v' - v = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial y}\left[g^2(t)\frac{dg(t)}{dt} - f^2(t)\frac{df(t)}{dt}\right]$$

$$w' - w = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial z}\left[g^2(t)\frac{dg(t)}{dt} - f^2(t)\frac{df(t)}{dt}\right]$$

tendent vers 0 lorsque le point $M(x, y, z,)$ s'éloigne indéfiniment de la sphère S.

Voilà donc un exemple de deux mouvements qui ne sont pas compatibles, qui ne se propagent pas l'un dans l'autre. Cela est vrai même si le premier mouvement est identiquement nul; le second mouvement ne se propage pas dans le fluide au repos; dès le début, dès l'instant $t = t_0$, il anime tous les points du fluide; mais la vitesse de ceux qui sont extrêmement éloignés de la source du mouvement est extrêmement petite.

Nous avons pris un cas particulier dans le mouvement des fluides incompressibles. Mais tout mouvement d'un fluide incompressible qui admet un Potentiel des Vitesses donnerait lieu aux mêmes remarques, car ce Potentiel des Vitesses doit vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\varphi = 0$$

qui, comme nous l'avons vu au Chapitre VII, §4, n'admet que des intégrales analytiques.

Revenons au cas de deux mouvements compatibles

On pourrait fort bien supposer que, sur la surface de l'onde, les fonctions U', V', W', R' prennent des valeurs différentes des fonctions U, V, W, R; seules, les deux fonctions P et P' sont forcément égales entre elles. Mais nous écarterons cette hypothèse. Nous admettrons que les conditions aux limites antérieures au temps t_0 se sont transformés d'une manière continue en les conditions aux limites postérieures au temps t_0, et que, par suite de ce fait, on a, en tout point de la surface de l'onde

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned} U &= U' \\ V &= V' \\ W &= W' \\ P &= P' \\ R &= R' \end{aligned}\right.$$

Ces définitions et ces hypothèses une fois admises, nous allons étudier comment se déforme avec le temps la surface de l'onde d'un mouvement qui se propage dans un autre avec lequel il est compatible. La méthode que nous allons suivre a été indiqué par Hugoniot[1]

§.2. Propagation d'un petit mouvement dans un petit mouvement.

Considérons dans un fluide compressible, deux petits mouvements quelconques compatibles entre eux.

---

(1) Hugoniot — Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (Journal de Mathématiques pures et appliquées. 4e série. T. III. p. 477 et T. IV. p. 153).

Soient φ la fonction potentielle des vitesses dans le premier mouvement et φ' la fonction potentielle des vitesses dans le second mouvement. Posons

$$\Phi = \varphi' - \varphi$$

La surface de l'onde au temps t est une surface fermée, ou une surface se terminant aux limites du fluide, ou encore une surface illimitée; elle partage l'espace occupé par le fluide en deux régions ; l'une, que nous nommerons intérieure, renferme les sources de la perturbation ; l'autre est nommée extérieure.

En tout point de la région extérieure, nous aurons

$$\varphi = \varphi'$$

et, par conséquent,

$$\Phi = 0$$

A l'intérieur de la surface de l'onde, φ diffère de φ' et Φ diffère de 0

Prenons un point M extérieur à la surface de l'onde et un point M' intérieur à la surface de l'onde, ces deux points étant infiniment voisins l'un de l'autre et de la surface de l'onde

On a, tant au point M qu'au point M',

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -U, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -W$$

Au point M, on a

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = -U, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = -V, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = -W$$

Au point M' on a

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = -U' \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = -V', \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = -W'$$

Mais le point M' est infiniment voisin de la surface de l'onde, et sur la surface de l'onde, on a, d'après les égalités (5),

$$U = U' \quad V = V' \quad W = W'$$

On peut donc écrire qu'on a aussi, au point M'.

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = -U', \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = -V, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = -W.$$

On a donc, en tout point infiniment voisin de la surface de l'onde, qu'il soit intérieur ou extérieur à cette surface,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi'}{\partial z} = 0,$$

ou bien

(6)............................ $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$

D'après l'égalité (8) du Chapitre VII, on a, tant en M qu'en M'

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = G\left(\frac{1}{R}\right)$$

En M, on doit avoir aussi

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = G\left(\frac{1}{R}\right),$$

tandis qu'en M' on a

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = G\left(\frac{1}{R}\right),$$

Mais le point M' est infiniment voisin de la surface de l'onde et, sur la surface de l'onde, on a d'après les égalités (5)

$$R = R'$$

La dernière égalité peut donc s'écrire

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = G\left(\frac{1}{R}\right).$$

On a donc, en tout point infiniment voisin de la surface de l'onde, qu'il soit intérieur ou extérieur à cette surface.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0$$

ou bien

(7).. $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$

Il résulte de ce que nous avons dit à la fin du Chapitre VII, §4, que deux intégrales de l'équation des petits mouvements, analytiques l'une, φ, d'un côté de la surface de l'onde, l'autre φ', de l'autre côté de la surface de l'onde, peuvent fort bien vérifier, en tout point de la surface de l'onde les égalités.

$$\varphi = \varphi' \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi'}{\partial y'} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi'}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi'}{\partial x'} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi'}{\partial z'}$$

sans se continuer analytiquement l'une l'autre. Les suppositions précédentes ne sont donc pas contradictoires.

En tout point tant intérieur qu'extérieur à la surface de l'onde les deux fonctions φ et φ' vérifient les équations aux dérivées partielles.

$$a^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$a^2\Delta\varphi' = \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}$$

Si l'on retranche membre à membre ces deux égalités, on trouve que l'on doit avoir en tout point tant extérieur qu'intérieur à la surface de l'onde

(8) .... $a^2\Delta\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$

Les égalités (6), (7), (8), vont nous servir de point de départ dans notre recherche

Voyons d'abord les conséquences des seules égalités (6) :

Soient M et M_1 deux points, l'un des coordonnées x, y, z, l'autre de coordonnées $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Supposons que la droite MM_1 soit parallèle au plan tangent à la surface de l'onde au temps t, ce qui s'exprime par

$$\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz = 0,$$

λ, μ, ν, étant les cosinus directeurs de la normale à la surface de l'onde vers l'intérieur de cette surface. Supposons en outre que cette droite MM_1 soit infiniment voisine de la surface de l'onde au temps t; $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ devra être égal à 0 aussi bien au point M qu'au point M_1; on doit donc avoir

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dy + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}dz = 0$$

En éliminant dx, dy, dz, entre cette égalité et la précédente, on trouve la première des égalités

(9) .... $$\left\{\begin{aligned} \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}}{\lambda} &= \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}}{\mu} = \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}}{\nu} \\ \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}}{\lambda} &= \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}}{\mu} = \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}}{\nu} \\ \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}}{\lambda} &= \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}}{\mu} = \frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}{\nu} \end{aligned}\right.$$

qui doivent avoir lieu en tout point, extérieur ou intérieur à la surface de l'onde et infiniment voisin de cette surface.

Tirons ensuite les conséquences de l'ensemble des égalités (6) et (7)

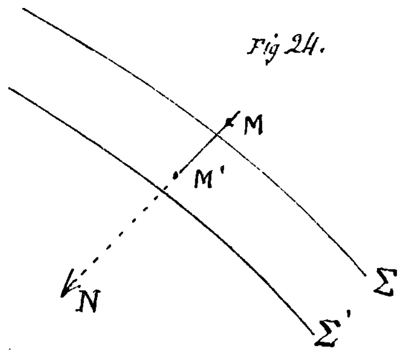


Fig 24.

Soit Σ la surface de l'onde au temps t; soit Σ' la surface de l'onde au temps $t' > t$. A l'intérieur de la surface Σ, prenons un point M (fig. 24) infiniment voisin de la surface Σ. Par ce point menons une normale MN à la surface Σ et prolongeons la jusqu'à sa rencontre avec la surface Σ'. Sur cette normale, prenons un point M' infiniment voisin de la surface Σ'

Au point M à l'intérieur t, nous devons avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

De même, au point M', à l'instant t', nous devons avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t'} = 0$$

Soit n la distance MM', qui est une fonction de t'. Les valeurs au temps t' et au point M' des quantités $\frac{\partial \varphi}{\partial t'}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z'}$, sont des fonctions de t'; ces fonctions devant être constamment égales à 0, il doit en être de même de leur dérivée par rapport à t'. On doit donc avoir

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial \varphi}{\partial t'} = 0,$$

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0.$$

Ces égalités peuvent s'écrire plus explicitement

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} + \frac{dn}{dt'}\left(\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t' \partial x'} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t' \partial y'} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t' \partial z'}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t'} + \frac{dn}{dt'}\left(\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial y'} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial z'}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'\partial t'}+\frac{dn}{dt'}\left(\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'\partial x'}+\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'\partial z'}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial t'}+\frac{dn}{dt'}\left(\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial x'}+\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'\partial y'}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}\right)=0$$

Ces égalités doivent avoir lieu même si l'on fait

$$t=t',$$

cas auquel on a

$$x=x' \qquad y=y', \qquad z=z'.$$

Les égalités précédentes deviennent alors:

$$(10)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{dt^2}+\frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x}+\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial y}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial z}\right)=0\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+\frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right)=0,\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}+\frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}+\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\right)=0,\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}+\frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}+\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0.
\end{aligned}\right.$$

En vertu des trois dernières égalités (10) la première peut s'écrire

$$(11)\ \ldots\ldots\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\left(\lambda^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\mu^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\nu^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right.$$
$$\left.+2\mu\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}+2\nu\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}+2\lambda\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)$$

Cette égalité doit avoir lieu en tout point intérieur à la surface de l'onde au temps t et infiniment voisin de cette surface.

Mais, aux points intérieurs à la surface de l'onde, les dérivées secondes de la fonction φ ne sont pas nulles en général. On peut donc déduire des équations (9) les égalités

$$\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}=\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

$$\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}=\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}=\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

$$\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}=\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},\quad \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}=\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

en vertu desquelles l'égalité (11) devient:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \Delta \varphi.$$

D'ailleurs,

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \Delta \varphi.$$

Si l'on compare cette égalité à l'égalité (8), qui doit avoir lieu en tout point intérieur à la surface de l'onde, et si l'on remarque qu'à l'intérieur de la surface de l'onde la quantité $\Delta \varphi$ n'est pas nulle en général, on arrive à l'égalité

$$(12) \qquad \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = a^2$$

Ainsi si un petit mouvement quelconque se propage au sein d'un fluide indéfini déjà animé d'un petit mouvement quelconque, on déduira la surface de l'onde au temps $(t + dt)$ de la surface de l'onde au temps t, en portant en chaque point de cette dernière, dans un sens convenablement choisi, une normale de longueur $dn = a dt$ et en cherchant le lieu des extrémités de ces normales. Les surfaces d'onde sont donc toutes parallèles entre elles.

Le Théorème précédent ne nous indique pas le sens dans lequel doit être portée la longueur normale $a dt$ à partir d'une surface d'onde pour obtenir la surface d'onde voisine.

Tant que la surface d'onde, dans son mouvement, ne rencontre aucune des surfaces de discontinuité que le fluide peut renfermer ou qui le limitent, le mouvement de cette surface doit varier d'une manière continue; et comme la vitesse de propagation de cette onde est constante et ne peut s'annuler, le sens de la propagation ne peut changer. Pour connaître ce sens à tout instant, il suffit de le connaître au début du second mouvement, c'est à dire à un instant postérieur à t_0 d'une quantité infiniment petite. Or à cet instant $(t_0 + \varepsilon)$ la surface d'onde est évidemment infiniment voisine des surfaces le long desquelles les conditions aux limites ont changé à l'instant t_0; elle ne peut se propager que si la direction de propagation est dirigée vers la région de l'espace qui ne renferme pas ces surfaces, c'est à dire vers l'extérieur de la surface d'onde; la surface d'onde au temps $(t + dt)$ est donc toujours extérieure à la surface d'onde au temps t.

De là la construction suivante.

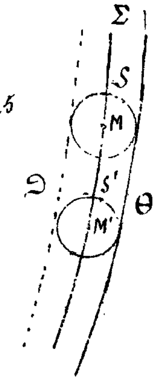


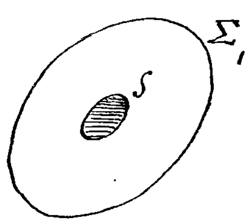
Fig. 25

Soit Σ la surface d'onde au temps t (fig. 25); on prend les diverses points $M, M', \ldots\ldots$ de cette surface pour centres de sphères $S, S', \ldots\ldots$ ayant pour commun rayon $a\,dt$. L'enveloppe de ces sphères se compose de deux nappes; l'une, ϑ est extérieure à la surface Σ; l'autre, ϑ est intérieure à la même surface; la surface Θ représente la surface d'onde au temps ϑ.

§ 3. Principe d'Huygens.

Nous avons démontré, au Chapitre précédent qu'un petit mouvement quelconque se propageait dans un fluide compressible au repos; en d'autres termes d'après la dénomination adoptée par M. Hugoniot, dans un fluide compressible, un petit mouvement quelconque est compatible avec un mouvement nul.

Fig. 26.



Supposons donc que dans un fluide compressible illimité primitivement au repos, le mouvement d'une certaine surface S (fig. 26) ait engendré à partir de l'instant t_0 un petit mouvement qui se propage. A l'instant t_1 la surface d'onde de ce mouvement est en Σ, elle renferme la surface S à son intérieur.

A l'extérieur de la surface Σ_1, et sur la surface Σ_1 même, on a

$$u = 0,$$
$$v = 0,$$
$$w = 0,$$
$$\rho = \rho_0,$$
$$\Pi = \Pi_0,$$

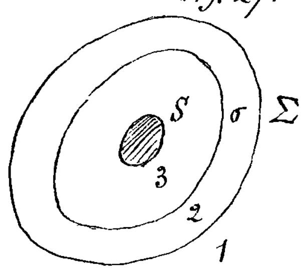
ρ_0 étant la densité du fluide immobile et Π_0 la pression à l'intérieur de ce fluide. A l'intérieur de la surface Σ_1, on a

$$u = U(x,y,z,t),$$
$$v = V(x,y,z,t),$$
$$w = W(x,y,z,t),$$
$$\rho = R(x,y,z,t),$$
$$\Pi = P(x,y,z,t).$$

Sur la surface Σ_1 les fonctions U, V, W, R et P prennent respectivement, à l'instant t_1, les valeurs $0, 0, 0, \rho_0$ et Π_0.

Imaginons qu'à l'instant t_1, la surface S retombe au repos ; Supposons que ce changement dans les conditions aux limites entraîne un nouveau mouvement compatible avec le mouvement précédent ; nous entendons par là qu'au temps t, postérieur à t_1 il existe deux surfaces, σ et Σ, la dernière extérieure à la première (fig. 27) ; ces deux surfaces partagent en trois régions l'espace extérieur à la surface S ; une région, 1, illimitée et extérieure à la surface Σ ; une région, 2, comprise entre les surfaces σ et Σ ; une région 3 comprise entre les surfaces S et σ.

Fig. 27.



Dans chacune des trois régions 1, 2, 3, les fonctions u, v, w, ρ, Π ont des déterminations analytiques différentes, qui sont

Dans la région

	1	2	3
$u =$	$0,$	$U(x,y,z,t),$	$U'(x,y,z,t),$
$v =$	$0,$	$V(x,y,z,t),$	$V'(x,y,z,t),$
$w =$	$0,$	$W(x,y,z,t),$	$W'(x,y,z,t),$
$\rho =$	$\rho_0,$	$R(x,y,z,t),$	$R'(x,y,z,t),$
$\Pi =$	Π_0	$P(x,y,z,t).$	$P'(x,y,z,t).$

On a en outre

Sur la surface

σ	Σ
$U(x,y,z,t) = U'(x,y,z,t),$	$U(x,y,z,t) = 0,$
$V(x,y,z,t) = V'(x,y,z,t),$	$V(x,y,z,t) = 0,$
$W(x,y,z,t) = W'(x,y,z,t),$	$W(x,y,z,t) = 0,$
$P(x,y,z,t) = P'(x,y,z,t),$	$P(x,y,z,t) = \Pi_0,$
$R(x,y,z,t) = R'(x,y,z,t).$	$R(x,y,z,t) = \rho_0.$

Ces hypothèses admises, il résulte des démonstrations précédentes que les deux surfaces Σ et σ se propagent dans le milieu avec une même vitesse constante a, normale à chacune d'elles et dirigée vers l'extérieur de chacune d'elles.

Nous n'avons pas dit que les intégrales du mouvement qui existe dans la région 3 fussent

$$u = 0,$$
$$v = 0,$$
$$w = 0,$$
$$\Pi = \Pi_0,$$
$$\rho = \rho_0,$$

c'est à dire qu'il y eût équilibre à l'intérieur de la région 3. Cette hypothèse serait d'accord avec la condition

$$u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z) = 0$$

qui doit être vérifiée en tout point de la surface S', à tout instant t postérieur à t_1. Mais nous ne pouvons pas dire que cette condition entraine l'égalité à 0 de tout mouvement dans la région 3. Nous verrons au Chapitre XII, sur un exemple particulier, que l'affirmer serait, en général, énoncer une erreur; la nature du mouvement qui existe dans la région 3 après le temps t_1 dépend du mouvement de la surface S' avant le temps t_1.

Supposons cependant que nous nous trouvions dans ce cas particulier: le mouvement de la surface S' est de telle nature qu'à l'instant t, postérieur à t_1, il n'y a aucun mouvement dans la région 3. Une question se pose immédiatement: à l'instant t', postérieur à t, le mouvement se trouve-t-il seulement compris entre les deux surfaces σ' et Σ', lieux des extrémités de normales égales à $a(t'-t)$, menées aux surfaces σ et Σ, vers l'extérieur de ces surfaces ? Il n'est pas immédiatement évident qu'il en soit ainsi. Le Procédé de Poisson nous montre qu'à l'instant t' il ne pourra y avoir de mouvement au point M, si la sphère décrite de M comme centre, avec $a(t'-t)$ pour rayon, n'a aucun point dans la région 2 où le mouvement est localisé à l'instant t; de là, il résulte bien qu'à l'instant t' il n'y aura aucun mouvement à l'extérieur de la surface Σ', mais il n'en résulte pas qu'il n'y aura aucun mouvement à l'intérieur de la surface σ'.

La théorie de M. Hugoniot nous permet au contraire d'affirmer qu'à l'instant t' il n'y aura aucun mouvement à l'intérieur de la surface σ' si l'on admet qu'à l'instant t il n'y aura aucun mouvement à l'intérieur de la surface σ. Car les mêmes fonctions analytiques doivent représenter le mouvement du fluide à l'instant t, à l'intérieur de la surface σ et à l'instant t' à l'intérieur de la surface σ'. Toutefois, ce résultat est subordonné à certaines restrictions. Il faut que les règles données pour déduire les unes des autres les surfaces d'onde successives puissent constamment s'appliquer jusqu'à l'instant t'. Il faut donc que, jusqu'à l'instant t', la surface Σ', et, par conséquent la surface σ', n'aient pas rencontré les surfaces qui limitent le milieu continu où s'effectue la propagation. La proposition précédente tombe donc en défaut lorsqu'il y a réflexion. Nous verrons, au Chapitre XIV, comment elle doit alors être modifiée.

Considérons un mouvement du genre de ceux que nous venons d'étudier; supposons que le temps t, soit infiniment voisin du temps 0; les deux surfaces σ, Σ, entre lesquelles, par hypothèse, le mouvement est localisé au temps t, sont infiniment voisines l'une de l'autre; il résulte alors des considérations précédentes qu'au temps t', postérieur à t, le mouvement se trouvera seulement dans une couche comprise entre deux surfaces σ', Σ', infiniment voisines. La surface σ', sur laquelle cette couche est distribuée au temps t', se déduira de la surface σ, sur laquelle elle est distribuée au temps t de la manière suivante:

On considérera les sphères de rayon $a(t'-t)$ qui ont leur centre sur la surface σ. L'enveloppe de ces sphères se composera de deux nappes; chacune de ces deux nappes sera dans l'une des deux régions en lesquelles la surface σ partage l'espace, l'une d'elles sera dans les mêmes régions que les sources de perturbation; l'autre sera dans l'autre région; c'est cette dernière qui constitue la surface σ'.

Cette construction n'est légitime que tant que la surface σ' ainsi construite ne vient pas heurter les limites du milieu.

Sous cette forme, on voit que la proposition que nous venons d'établir n'est autre chose que le célèbre Principe d'Huygens.

On voit en même temps qu'il importe de bien comprendre l'énoncé de ce Principe.

Le principe d'Huygens n'affirme pas que si un corps plongé dans un fluide, est mis en mouvement pendant un temps très court, il n'y aura jamais de mouvement du fluide que dans une couche très mince obtenue par la construction d'Huygens; il affirme seulement que, s'il en est ainsi pendant le temps qui précède un certain instant, il en sera encore de même pendant le temps qui suit cet instant.

Chapitre X.

Propagation d'un Ebranlement quelconque dans un ébranlement quelconque.

Nous allons maintenant supposer qu'un ébranlement quelconque se propage dans un autre ébranlement quelconque avec lequel il soit compatible; nous allons nous proposer d'étudier, suivant la méthode d'Hugoniot, la déformation de la surface de l'onde. Dans cette étude, nous ne ferons qu'une seule hypothèse : c'est qu'il existe une relation supplémentaire entre la pression Π et le volume spécifique ω

Soient

$$u, v, w, \omega, \Pi,$$

les cinq fonctions analytiques d'x, y, z, t, qui intègrent les équations de l'Hydrodynamique à l'extérieur de la surface d'onde; Soient

$$u', v', w', \omega', \Pi',$$

les cinq fonctions analytiques d'x, y, z, t, qui intègrent les équations de l'Hydrodynamique à l'intérieur de la surface d'onde. En tout point tant intérieur qu'extérieur à la surface d'onde, nous aurons.

$$(1) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} &\omega \frac{\partial \Pi}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = X, \\ &\omega \frac{\partial \Pi}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = Y, \\ &\omega \frac{\partial \Pi}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = Z, \\ &u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial t} - \omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ &\Pi = f(\omega) . \end{aligned} \right.$$

En tout point intérieur à la surface d'onde nous aurons :

$$(2)\ldots\ldots\begin{cases} \omega'\dfrac{\partial \Pi'}{\partial x}+u'\dfrac{\partial u'}{\partial x}+v'\dfrac{\partial u'}{\partial y}+w'\dfrac{\partial u'}{\partial z}+\dfrac{\partial u'}{\partial t}=X',\\ \omega'\dfrac{\partial \Pi'}{\partial y}+u'\dfrac{\partial v'}{\partial x}+v'\dfrac{\partial v'}{\partial y}+w'\dfrac{\partial v'}{\partial z}+\dfrac{\partial v'}{\partial t}=Y',\\ \omega'\dfrac{\partial \Pi'}{\partial z}+u'\dfrac{\partial w'}{\partial x}+v'\dfrac{\partial w'}{\partial y}+w'\dfrac{\partial w'}{\partial z}+\dfrac{\partial w'}{\partial t}=Z',\\ u'\dfrac{\partial \omega'}{\partial x}+v'\dfrac{\partial \omega'}{\partial y}+w'\dfrac{\partial \omega'}{\partial z}+\dfrac{\partial \omega'}{\partial t}-\omega'\left(\dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}+\dfrac{\partial w'}{\partial z}\right)=0, \end{cases}$$

$$\Pi'=f(\omega')$$

Par hypothèse, on a, sur la surface de l'onde,

$$u=u', \qquad w=w', \qquad \omega=\omega'.$$

La dernière de ces égalités exige que l'on ait aussi, en tout point de la surface de l'onde,

$$\Pi=\Pi'.$$

Posons

$$\begin{aligned} U&=u'-u,\\ V&=v'-v,\\ W&=w'-w,\\ \Omega&=\omega'-\omega,\\ P&=\Pi'-\Pi. \end{aligned}$$

Nous aurons, sur la surface de l'onde

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots U=0 \quad V=0 \quad W=0, \quad \Omega=0, \quad P=0$$

Un raisonnement analogue à celui qui, au Chapitre précédent, a a fourni les égalités (9) nous montre que si l'on désigne par λ, μ, ν, les cosinus directeurs de la normale à la surface de l'onde, on doit avoir en tout point de cette normale intérieur à la surface de l'onde et infiniment voisin de cette surface

$$(4)\ldots\ldots\begin{cases} \dfrac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\lambda}=\dfrac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\mu}=\dfrac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\nu}, & \dfrac{\frac{\partial W}{\partial x}}{\lambda}=\dfrac{\frac{\partial W}{\partial y}}{\mu}=\dfrac{\frac{\partial W}{\partial z}}{\nu},\\ \dfrac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\lambda}=\dfrac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\mu}=\dfrac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\nu}, & \dfrac{\frac{\partial P}{\partial x}}{\lambda}=\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}}{\mu}=\dfrac{\frac{\partial P}{\partial z}}{\nu}. \end{cases}$$

Une démonstration analogue à celle qui, au Chapitre précédent, a fourni les égalités (10), montre qu'on doit avoir au même point

$$(5) \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \left(\lambda \dfrac{\partial U}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial U}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial U}{\partial z}\right) \dfrac{dn}{dt} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \left(\lambda \dfrac{\partial V}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial V}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial V}{\partial z}\right) \dfrac{dn}{dt} = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + \left(\lambda \dfrac{\partial W}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial W}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial W}{\partial z}\right) \dfrac{dn}{dt} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial t} + \left(\lambda \dfrac{\partial P}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial P}{\partial z}\right) \dfrac{dn}{dt} = 0 \end{cases}$$

Enfin, au même point, doivent avoir lieu les égalités (1) et (2); comme, en ce point,

$$u' - u = v' - v = w' - w = \omega' - \omega = \Pi' - \Pi = 0$$

ces égalités retranchées membre à membre, donnent

$$(6) \ldots\ldots \quad \begin{cases} \omega \dfrac{\partial P}{\partial x} + u \dfrac{\partial U}{\partial x} + v \dfrac{\partial U}{\partial y} + w \dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial U}{\partial t} = 0 \\ \omega \dfrac{\partial P}{\partial x} + u \dfrac{\partial V}{\partial x} + v \dfrac{\partial V}{\partial y} + w \dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial W}{\partial t} = 0 \\ \omega \dfrac{\partial P}{\partial z} + u \dfrac{\partial W}{\partial x} + v \dfrac{\partial W}{\partial y} + w \dfrac{\partial W}{\partial z} + \dfrac{\partial W}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{1}{\omega f'(\omega)}\left[u \dfrac{\partial P}{\partial x} + v \dfrac{\partial P}{\partial y} + w \dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{\partial P}{\partial t}\right] - \left[\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z}\right] = 0 \end{cases}$$

Les équations (4), (5), (6) constituent 16 relations linéaires et homogènes entre les 16 dérivées partielles du premier ordre des quatre fonctions U, V, W, P, des variables x, y, z, t. Ces relations doivent être vérifiées en tout point intérieur à la surface d'onde et infiniment voisin de cette surface; le déterminant des coefficients des 16 dérivées partielles doit donc être égal à 0, ce qui fournit une relation en $\dfrac{dn}{dt}$. Cette relation peut s'obtenir de la manière suivante

La première des égalités (5) peut s'écrire

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\lambda^2 \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\lambda} + \mu^2 \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\mu} + \nu^2 \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\nu}\right) \frac{dn}{dt} = 0$$

Si l'on tient compte des premières égalités (4), et si l'on remarque en outre que

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

on voit que l'égalité précédente peut s'écrire indiféremment sous l'une des trois formes

$$(7) \quad \left\{\begin{aligned} &\lambda \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dn}{dt}=0 \\ &\mu \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dn}{dt}=0 \\ &\nu \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dn}{dt}=0 \end{aligned}\right.$$

Moyennant ces égalités, on déduit de la première des égalités (6) la première des égalités

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned} &\omega \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dn}{dt}+\left[\frac{dn}{dt}-(\lambda u+\mu v+\nu w)\right]\frac{\partial U}{\partial t}=0 \\ &\omega \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dn}{dt}+\left[\frac{dn}{dt}-(\lambda u+\mu v+\nu w)\right]\frac{\partial V}{\partial t}=0 \\ &\omega \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dn}{dt}+\left[\frac{dn}{dt}-(\lambda u+\mu v+\nu w)\right]\frac{\partial W}{\partial t}=0 \end{aligned}\right.$$

Les deux dernières égalités (8) se déduisent de même de la seconde et de la troisième des égalités (6).

Une démonstration analogue à celle qui a fourni les égalités (7) permet d'écrire

$$\lambda \frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{dn}{dt}=0$$

$$\mu \frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{dn}{dt}=0$$

$$\nu \frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{dn}{dt}=0$$

Les égalités (8) peuvent donc s'écrire :

$$\left\{\left[\frac{dn}{dt}-(\lambda u+\mu v+\nu w)\right]\frac{\partial U}{\partial t}-\lambda\omega\frac{\partial P}{\partial t}=0\right.$$

$$(9)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \left[\dfrac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\dfrac{\partial V}{\partial t} - \mu\omega\dfrac{\partial P}{\partial t} = 0 \\ \left[\dfrac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\dfrac{\partial W}{\partial t} - \nu\omega\dfrac{\partial P}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

La quatrième égalité (6), transformée de même, donne

$$(10)\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{\omega f'(\omega)}\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$+\lambda\frac{\partial U}{\partial t} + \mu\frac{\partial V}{\partial t} + \nu\frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (9) par λ; les deux membres de la seconde par μ; les deux membres de la troisième par ν; les deux membres de l'égalité (10) par

$$-\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]$$

ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte la relation :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

Nous trouvons

$$\left\{\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]^2 + \omega^2 f'(\omega)\right\}\frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Cette égalité ne sera en général vérifiée que si l'on a.

$$\frac{dn}{dt} = \lambda u + \mu v + \nu w \pm \sqrt{-\omega^2 f'(\omega)}$$

Entre les deux signes + et −, qui précèdent le radical, on choisira par les considérations indiquées au chapitre précédent ; si la direction n est la direction de la normale à la surface de l'onde vers l'extérieur, la formule précédente devra s'écrire

$$(11)\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dn}{dt} = \lambda u + \mu v + \nu w + \sqrt{-\omega^2 f'(\omega)}$$

le radical étant pris en valeur absolue

Si u, v, w, sont infiniment petits, cette formule se réduit à

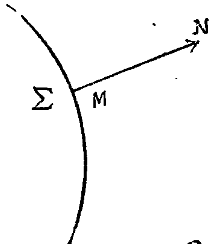
$$\frac{dn}{dt} = \sqrt{-\omega^2 f'(\omega)},$$

expression déjà obtenue au chapitre précédent dans le cas où les deux mouvements compatibles sont très petits.

Interprétons cette égalité (11).

Soit Σ (fig 28) la surface de l'onde au temps t ; soit M un point de cette surface. Considérons le point matériel qui se trouve en M à l'instant t ; si le fluide était animé seulement du premier mouvement, ce point aurait une certaine vitesse ; la composante de cette vitesse suivant la normale extérieure à la surface Σ aurait pour valeur

Fig. 28



$$N = \lambda u + \mu v + \nu w$$

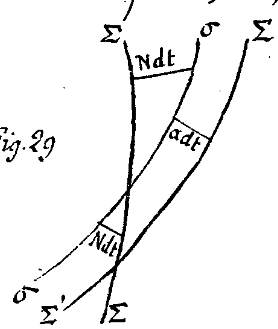
L'égalité (11) peut donc s'écrire

$$\frac{dn}{dt} = N + \sqrt{-\omega^2 f'(\omega)}$$

D'après cette égalité, lorsqu'on connaît la surface d'onde Σ au temps t, on obtiendra la surface d'onde Σ' au temps $(t+dt)$ par le procédé suivant :

Par tout point de la surface Σ (fig. 29) on élève des normales à cette surface, et, sur chacune de ces normales, vers l'extérieur de la surface Σ ; on porte une longueur représentée en grandeur et en signe par $N\,dt$. On obtient ainsi une surface σ ; cette surface représente le lieu qu'occuperaient au temps $(t+dt)$ les molécules qui se trouvent au temps t sur la surface Σ, si le premier mouvement animait seul le fluide.

Fig. 29



Puis, en chaque point de la surface σ et vers l'extérieur de cette surface, on mène à cette surface des normales de longueur $a\,dt$, a étant défini par l'égalité

$$a = \sqrt{-\omega^2 f'(\omega)}$$

on obtient ainsi la surface cherchée Σ'.

On peut donc dire que lorsqu'un mouvement se propage dans un premier mouvement avec lequel il est compatible, le mouvement réel de la surface d'onde s'obtiendra en composant le mouvement propre de l'onde, qui est un mouvement de propagation doué d'une vitesse uniforme égale, en toutes circonstances, à la vitesse du son, avec le mouvement propre du fluide.

Par exemple, la vitesse du son dans un air agité s'obtiendra en composant la vitesse du vent avec la vitesse qu'aurait le son en air calme

Il semble résulter de ce beau théorème d'Hugoniot que la vitesse de propagation d'un ébranlement quelconque, et, en particulier, la vitesse d'un son d'amplitude quelconque, dans un milieu primitivement au repos est toujours égale à la vitesse d'un son de très faible amplitude. Il faut toutefois à cet égard faire une remarque. La démonstration d'Hugoniot est subordonnée à cette hypothèse qu'il existe une relation entre la pression et le volume spécifique du fluide, hypothèse dont nous avons marqué le caractère éminemment restrictif.

Chapitre XI.

Théorie des Tuyaux Sonores dans l'Hypothèse des Tranches.

§.1. Énoncé de l'Hypothèse des Tranches ; propagation d'un petit ébranlement dans un tuyau.

Daniel Bernoulli, auquel on doit le premier traité d'Hydrodynamique imprimé en 1738, s'était borné à étudier le mouvement des fluides contenus dans les tuyaux cylindriques. Il avait subordonné cette étude à l'hypothèse suivante :

La vitesse du fluide est en tout point normale à la section droite ou tranche qui passe par ce point ; elle a la même valeur au même instant pour tous les points d'une tranche.

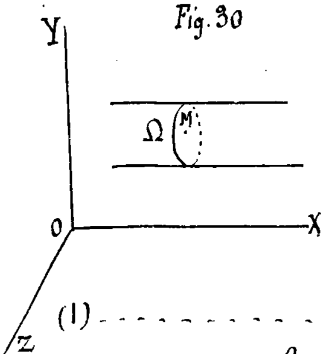
Cette hypothèse connue sous le nom d'hypothèse des tranches, servit aussi de fondement aux premiers travaux de d'Alembert sur l'Hydrodynamique, travaux imprimés dans l'essai qui termine sa Dynamique, publiée en 1743, et dans son ital qui parut en 1744. C'est dans ces travaux que se trouvent les premières démonstrations précises des lois des tuyaux, dues à Daniel Bernoulli.

Après que d'Alembert et Euler eurent fait connaître les équations générales de l'Hydrodynamique, on n'en continua pas moins à faire usage de l'hypothèse des tranches dans l'étude des propriétés des tuyaux fermés. Les travaux d'Euler et de Lagrange reposaient sur cette hypothèse.

Le mouvement de l'air dans un tuyau, en partant de l'hypothèse des tranches, est le plus simple des problèmes d'Hydrodynamique; il offre en outre l'avantage de fournir une théorie approchée des tuyaux ouverts ou fermés; à ces deux titres; il est intéressant d'examiner en détail ce problème

Considérons un tuyau cylindrique rempli d'air; supposons les génératrices de ce cylindre parallèle à l'axe des x (fig 30)

Fig. 30



Soit Ω une tranche de ce tuyau, normale à OX. Soit M une molécule de la tranche Ω.

La vitesse de cette molécule M est, à chaque instant, normale à Ω et par conséquent, parallèle à OX. On a donc, à tout instant,

(1) . . . . $v = 0 \qquad w = 0$

Cette hypothèse satisfait évidemment à la condition

$$u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z) = 0$$

qui doit être vérifiée tout le long des parois latérales du tuyau.

De plus, toutes les molécules d'une même tranche Ω ont, au même instant, la même vitesse. La quantité u ne dépend donc pas d'y et de z; c'est une simple fonction d'x et de t.

Supposons que le mouvement qui agite l'air du tuyau soit un petit mouvement; on devra alors avoir, en chaque point [chapitre VII, égalité (12)] l'égalité

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

La quantité u ne dépendant pas d'y et de z, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

et l'égalité précédente devient:

(2) . . . . $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

L'équation de continuité (chapitre VII, égalité (5))

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

donne, moyennant les égalités (1),

(3) .... $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = 0.$

Si l'on désigne par φ le Potentiel des Vitesses, on a [Ch. VII, Égalité (9)]

$$G(\omega) = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

On en déduit : $\dfrac{d\,G(\omega)}{d\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$

Mais on a aussi (Chapitre VII, Égalité (7))

$$\omega \frac{d f(\omega)}{d\omega} + \frac{d\,G(\omega)}{d\omega} = 0$$

L'égalité précédente devient donc :

(4) .... $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \omega \dfrac{d f(\omega)}{d\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 0$

Lorsque la vitesse u est déterminée au moyen de l'égalité (2), et les conditions aux limites qui doivent y être adjointes, les égalités (3) et (4) font connaître les deux dérivées partielles du volume spécifique ω.

Le premier problème que nous ayions à résoudre est donc l'intégration de l'équation

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Cette équation aux dérivées partielles est bien connue sous le nom d'équation des cordes vibrantes. C'est la première équation aux dérivées partielles que l'on ait su intégrer ; elle a été intégrée par d'Alembert au 1[er] volume de ses opuscules.

Cette intégration peut se faire de la manière suivante :

Posons

(5) .... $at = y$

L'équation (2) deviendra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Posons maintenant

(5 bis) .... $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

Il est aisé de voir que l'équation précédente se réduira à :

(6) .... $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x'\,\partial y'} = 0$

Cette égalité nous enseigne que la quantité $\frac{\partial u}{\partial x'}$ ne dépend pas de y'; c'est donc une simple fonction de x'. Posons

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = f(x')$$

Soit x'_0 une valeur arbitraire de x'. Ces deux quantités

$$u \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{x'} f(x')dx'$$

ayant même dérivée par rapport à x', ne diffèrent que par une fonction de y', $G(y')$. Si donc nous posons :

$$F(x') = \int_{x'_0}^{x'} f(x')\,dx',$$

nous aurons :

(7) .... $u = F(x') + G(y')$

Ainsi toute fonction u de x' et de y' qui vérifie l'équation (6) est de la forme (7). Réciproquement, on voit que toute fonction de cette forme vérifie l'équation (6), si les fonctions F et G admettent des dérivées premières et secondes.

Si nous remplaçons x' et y' par leurs expressions déduites des égalités (5) et (5 bis), nous trouvons que pour qu'une fonction u vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

(8) .... $u = F(x - at) + G(x + at)$

F et G représentant deux fonctions arbitraires douées de dérivées premières et secondes

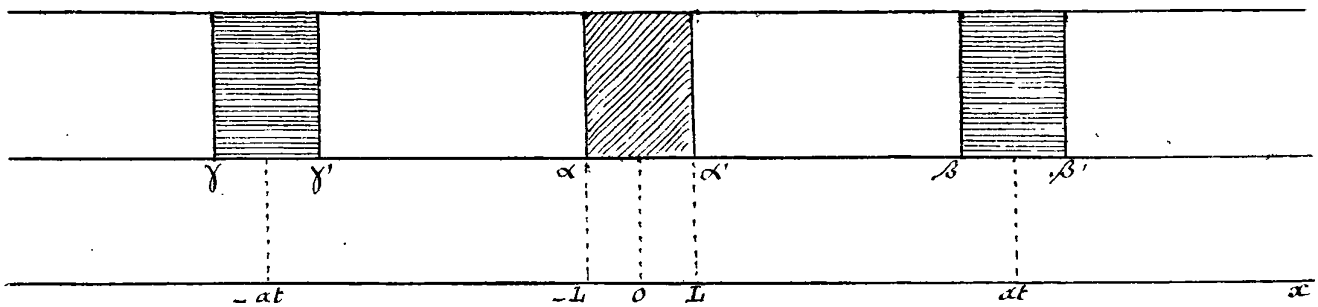
L'intégration, dans ce cas simple, de l'équation aux dérivées partielles des petits mouvements donne un exemple saisissant de la proposition énoncée au Chapitre VII, § 11, que les intégrales de l'équation des petits mouvements ne sont pas forcément analytiques. Ici, en effet, les deux fonctions F et G sont assujetties à admettre des dérivées seulement jusqu'au second ordre inclusivement ; elles ne sont pas forcément analytiques

Examinons quelques conséquences de ce Théorème.

1° Tuyau illimité dans les deux sens.

Considérons un tuyau illimité dans les deux sens (fig 31)

Fig. 31.



A l'instant $t = 0$ nous imprimons un mouvement connu à l'air compris entre les deux tranches α, α', qui ont pour abscisses

$$x = -L\ , \qquad\qquad x = L\ ,$$

tandis que le reste de l'air est en repos ; on peut, alors, supposer que l'on ait

$$F(x) = 0\ , \qquad\qquad G(x) = 0$$

pour toute valeur de x inférieure à $(-L)$ et supérieure à L.

En effet, à l'instant $t = 0$, on doit avoir, en tout point dont l'abscisse est inférieure à $(-L)$ et supérieure à L,

$$u = 0\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ou bien d'après l'égalité (8),

$$F(x) + G(x) = 0$$

$$\frac{dF(x)}{dx} - \frac{dG(x)}{dx} = 0$$

égalités qui entraînent

$$F(x) = A$$

$$G(x) = -A$$

A étant une constante

Mais, si l'on pose

$$F_1(x) = F(x) - A \qquad\qquad G_1(x) = G(x) + A$$

l'égalité (8) pourra s'écrire

(8 bis) .... $u = F_1(x - at) + G_1(x - at)$

avec

$$F_1(x) = 0 \qquad\qquad G_1(x) = 0$$

pour toute valeur de x inférieure à $-L$ ou supérieure à $+L$

Duhem . 27.

Dès lors on voit qu'à l'instant t, on aura

$$F(x - at) = 0$$

si x est inférieur à $(at - L)$ ou supérieur à $(at + L)$
et

$$G(x + at) = 0$$

si x est inférieur à $(-L - at)$ ou supérieur à $(-at + L)$
D'où les conséquences suivantes

1° à l'instant t, dans le segment compris entre les tranches β, β' qui ont pour abscisses

$$x = at - L$$
$$x = at + L$$

l'air est animé d'un mouvement représenté par l'équation

(9) .... $u = F(x - at)$

2° A l'instant t, dans le segment compris entre les tranches γ, γ', qui ont pour abscisses

$$x = -at - L$$
$$x = -at + L$$

l'air est animé d'un mouvement représenté par l'équation

(10) .... $u = G(x + at)$

3° A l'instant t, l'air qui n'est pas compris dans les deux segments $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ est en repos.

L'équation (9) représente donc un mouvement qui se propage dans le tuyau, avec la vitesse uniforme a, égale à la vitesse du son dans une atmosphère illimitée, dans le sens des x positifs.

L'équation (10) représente un mouvement qui se propage dans le tuyau, avec la vitesse uniforme a, dans le sens des x négatifs.

L'équation (8), qui est l'équation générale du mouvement de l'air dans le tuyau, représente la superposition des ces deux mouvements.

Ce que nous venons de dire met en évidence ce résultat énoncé pour la première fois par Euler :

Le son se propage dans un tuyau cylindrique avec la même vitesse qu'à l'air libre.

On remarquera que le mouvement renfermé dans le segment $\beta\beta'$ demeure identique à lui même en se propageant ; c'est-à-dire que si l'on envisage un instant t' postérieur à l'instant t, la masse d'air en mouvement à cet instant t' s'obtiendrait en prenant la masse d'air $\beta\beta'$ dans l'état où elle se trouve à l'instant t et en lui donnant, dans le sens des x positifs, une translation égale à $a(t'-t)$.

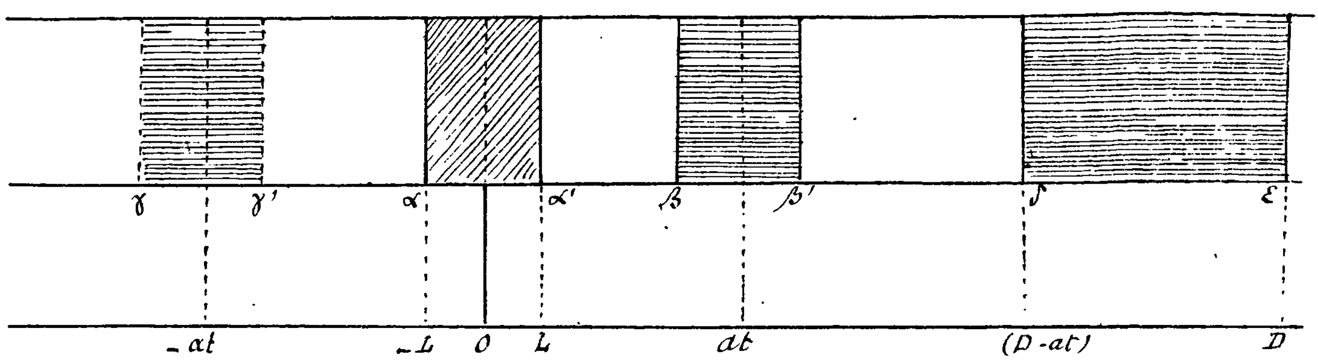
De même le mouvement renfermé dans le segment $\gamma\gamma'$ demeure identique à lui-même en se propageant.

Il en résulte que l'intensité du son qui se propage dans un tuyau illimité ne varie pas durant la propagation de ce son.

2° Tuyau limité dans un sens.

Nous allons supposer maintenant que le tuyau soit limité dans un sens, par exemple dans le sens des x positifs. Soit D la distance du fond $\mathcal{E}$ du tuyau (fig 32) à l'origine

Fig. 32



A l'instant $t=0$, nous imprimons un mouvement connu à la masse d'air comprise entre les deux tranches α, α', qui ont pour abscisses

$$x=-L \qquad\qquad x=L\ .$$

tandis que le reste de la masse d'air renfermée dans le tuyau est au repos. Nous voyons alors que les deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$, qui sont supposées avoir des valeurs connues pour les valeurs de x comprises entre $(-L)$ et $(+L)$ sont égales à 0 pour toute valeur de x comprise entre

$$-\infty \qquad \text{et} \qquad -L$$

et entre

$$L \qquad \text{et} \qquad D$$

Pour les valeurs de x supérieures à D, ces fonctions ne nous sont pas données.

Cette indétermination n'a aucune importance en ce qui concerne la fonction $F(x)$, car, pour les valeurs positives du temps t, que nous aurons seules à considérer, la quantité

$$x-at$$

n'est supérieure à D en aucun point du tuyau. Mais il n'en est pas de même pour la fonction $G(x)$. Pour les valeurs de x supérieures à D, nous supposerons que cette fonction soit une certaine fonction $g(x)$ qui ne dépend pas seulement des conditions initiales.

Dès lors, à l'instant t, nous aurons à distinguer :

1°. Les points de la masse d'air comprise entre les tranches γ, γ', dont les abscisses sont

$$x = -at - L, \qquad x = -at + L.$$

En ces points nous aurons :

(10) .... $u = G(x + at)$

2°. Les points de la masse d'air comprise entre les tranches β, β' dont les abcisses sont

$$x = at - L, \qquad x = at + L$$

En ces points nous aurons.

(9) $u = F(x - at)$

3°. Les points de la masse d'air comprise[1] entre les tranches δ, ε, dont les abcisses sont

$$x = D - at, \qquad x = D.$$

En ces points, $x + at$ est supérieur à D, on a donc

$$F(x - at) = 0, \qquad G(x + at) = g(x + at),$$ et

(11) .... $u = g(x + at)$

4° Les points qui ne font partie d'aucune des masses précédentes ; en ces points l'air est au repos

Dans le cas d'un tuyau limité, dans un sens le mouvement de l'air se compose des deux mouvements qui se propageraient dans un tuyau illimité et d'un troisième mouvement représenté par l'équation (11). Ce mouvement se propage à partir du fond du tuyau, dans le sens des x négatifs, avec une vitesse uniforme égale à la vitesse du son. La nature de ce mouvement dépend de la nature de la paroi qui forme le fond du tuyau.

Imaginons que l'air qui confine à cette paroi ε demeure immobile jusqu'à l'instant

$$t = \frac{D - L}{a}$$

où la tranche β' vient frapper la paroi. Il faut pour cela d'après l'égalité (11) que l'on ait.

$$g(D + at) = 0$$

lorsque t varie de 0 à $\frac{D-L}{a}$ ou en d'autres termes que $g(x)$, déjà égal à 0

---

[1] Pour simplifier, nous avons supposé qu'il n'y avait pas de points communs à cette masse et à la precedente ; lorsqu'il y a de tels points, on a, en ces points

(11 bis) .... $u = F(x + at) + g(x + at)$

lorsque x varie de $(-\infty)$ à D soit encore égal à 0 lorsque x varie de D à $(2D-L)$

Imaginons aussi que l'air confinant à la paroi $\mathcal{E}$ retombe au repos à partir de l'instant

$$t = \frac{D+L}{a}$$

où la tranche β vient frapper la paroi. Il faut, pour cela, d'après l'égalité (11) que l'on ait

$$g(D+at) = 0$$

lorsque t varie de $\frac{D+L}{a}$ à $+\infty$, ou, en d'autres termes que $g(x)$ soit égal à 0 lorsque x varie de $(2D+L)$ à $+\infty$.

Dans ces conditions, la paroi $\mathcal{E}$ n'engendrera le mouvement représenté par l'égalité (11) que pendant que le mouvement de la tranche $\beta\beta'$ vient la frapper. Nous dirons alors que l'égalité (11) représente le mouvement de la tranche $\beta\beta'$ réfléchi sur le fond du tuyau.

Pour que le mouvement réfléchi, représenté par l'égalité (11) soit différent de 0, il faut que

$$x + at$$

soit compris entre

$$2D - L \quad \text{et} \quad 2D + L$$

Le mouvement réfléchi affecte donc uniquement une masse comprise entre deux tranches dont les distances au fond du tuyau sont

$$(at - D - L) \qquad \text{et} \qquad (at - D + L)$$

Cette masse est égale à la masse $\beta\beta'$ qui renfermait le mouvement incident représenté par l'égalité (9); mais la nature du mouvement réfléchi qui dépend de la forme de la fonction $g(x)$, n'est pas identique à la nature du mouvement incident, qui dépend de la forme de la fonction $F(x)$. La relation qui existe entre ces deux mouvements dépend des hypothèses faites sur la nature de la paroi $\mathcal{E}$ qui forme le fond du tuyau. Dans le cas où cette paroi est fluide, nous apprendrons, au chapitre XIV, à trouver la relation qui existe entre ces deux fonctions.

Traitons seulement le cas où la paroi qui limite le fond du tuyau est supposée rigoureusement immobile. Dans ce cas, pour $x = L$, on devra avoir identiquement

$$u = 0$$

ou suivant l'égalité (11^{bis})

$$F(L - at) + g(L + at) = 0$$

Posons $(L + at) = y$. Cette égalité donnera

$$g(y) = -F(2L - y)$$

Au point M d'abscisse x, à l'instant t, la vitesse du mouvement réfléchi est, d'après l'égalité (11)

$$u' = g(x+at)$$

D'après l'égalité précédente, cette égalité peut s'écrire :

$$u' = -F\left[(2L-x)-at\right]$$

Or

$$u = F\left[(2L-x)-at\right]$$

serait la vitesse du mouvement incident à l'instant t, et au point d'abscisse $(2L-x)$, c'est-à-dire au point M', symétrique du point M par rapport au fond du tuyau ; on peut donc écrire :

$$u'(M,t) = -u(M',t)$$

et dire : Si le fond du tuyau est rigoureusement immobile, la vitesse du mouvement réfléchi au point M et à l'instant t est égale et de signe contraire à la valeur qu'aurait au même instant la vitesse du mouvement incident au point M', symétrique du point M par rapport à la paroi sur laquelle se produit la réflexion

§ 2. _ Vibrations stationnaires d'un tuyau

Après avoir vu comment un ébranlement isolé se propage dans une masse d'air limitée par un tuyau cylindrique, nous allons nous proposer de chercher dans quelles conditions cette masse d'air peut vibrer, c'est-à-dire être animée d'un mouvement périodique.

Pour que cette masse d'air soit animée d'un mouvement périodique ayant pour période T, il faut et il suffit que la quantité u soit, pour chaque valeur de x, une fonction périodique de t, ayant pour période T, et oscillant autour de la valeur 0.

Une telle fonction sera développable en série de Fourier de la manière suivante

$$(12) \ldots\ldots\ u = A_1 \sin 2\pi\frac{t}{T} + A_2 \sin 4\pi\frac{t}{T} + A_3 \sin 6\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ B_1 \cos 2\pi\frac{t}{T} + B_2 \cos 4\pi\frac{t}{T} + B_3 \cancel{\sin}\ 6\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots\ldots$$

Les coefficients

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$$

$$B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots$$

sont des quantités indépendantes de t, assujetties à avoir la même valeur aux divers points d'une même tranche, mais susceptibles de varier d'une tranche à l'autre ; ce sont des fonctions de x dont la valeur doit être déterminée.

Nous admettrons que la série (12) soit uniformément convergente pour toutes les valeurs de x et de t que nous aurons à considérer ainsi que celles que l'on obtient par une ou deux différentiations par rapport à x ou à t.

Pour déterminer la forme des fonctions

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

$$B_1, B_2, B_3, \ldots$$

Nous observerons que la quantité u doit vérifier à l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

L'équation (12) nous donne, par différentiation

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2} = a^2 \frac{d^2 A_1}{dx^2} \sin 2\pi \frac{t}{T} + a^2 \frac{d^2 A_2}{dx^2} \sin 4\pi \frac{t}{T} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ a^2 \frac{d^2 B_1}{dx^2} \cos 2\pi \frac{t}{T} + a^2 \frac{d^2 B_2}{dx_2} \cos 4\pi \frac{t}{T} + \ldots\ldots\ldots$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} - \left(\frac{4\pi}{T}\right)^2 A_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} - \ldots\ldots\ldots$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} - \left(\frac{4\pi}{T}\right)^2 B_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} - \ldots\ldots\ldots$$

Les deux fonctions

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

sont, d'après l'égalité (2), identiques entre elles. Une même fonction ne peut se développer que d'une manière en série de Fourier uniformément convergente. Les coefficients des deux développements précédents doivent donc être identiques entre eux ce qui donne

$$a^2 \frac{d^2 A_1}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A_1 = 0, \qquad a^2 \frac{d^2 B_1}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 B_1 = 0,$$

$$a^2 \frac{d^2 A_2}{dx^2} + \left(\frac{4\pi}{T}\right)^2 A_2 = 0, \qquad a^2 \frac{d^2 B_2}{dx^2} + \left(\frac{4\pi}{T}\right)^2 B_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi A_1, B_1, doivent être deux intégrales de l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi = 0$$

A_2, B_2, doivent être deux intégrales de l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{4\pi}{aT}\right)^2 \psi = 0$$

. . . .

En général, A_i, B_i, doivent être deux intégrales de l'équation

(13) . . . . $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{a\frac{T}{i}}\right)^2 \psi = 0$$

Il est facile d'intégrer l'équation

(14) . . . . $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + K^2\psi = 0$$

où K est une constante. Multiplions les deux membres de cette équation par $\frac{d\psi}{dx}$. Nous obtiendrons un résultat qui peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + K^2\psi^2\right] = 0$$

La quantité

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + K^2\psi^2$$

est donc constante ; si nous désignons par m une constante, nous pourrons écrire

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + K^2\psi^2 = K^2 m^2$$

Posons

(15) . . . . $$\theta = \frac{\psi}{m}$$

Cette équation deviendra

$$K\,dx = \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}$$

Si nous désignons par δ une nouvelle constante, cette équation donnera

$$K(x+\delta) = \operatorname{arc}\cos\theta$$

ou bien

$$\theta = \cos K(x+\delta)$$

ou bien encore, en vertu de la définition de θ donnée par l'égalité (15)

(16)$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \psi = m \cos K (x + \delta)$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (14)

On voit alors que si l'on désigne par

$$m_1, m_2, \ldots\ldots \qquad n_1, n_2, \ldots\ldots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \qquad \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots$$

des constantes on devra avoir:

$$A_1 = m_1 \cos \frac{2\pi}{aT}(x + \alpha_1) \qquad B_1 = n_1 \cos \frac{2\pi}{aT}(x + \beta_1)$$

$$A_2 = m_2 \cos \frac{4\pi}{aT}(x + \alpha_2) \qquad B_2 = n_2 \cos \frac{4\pi}{aT}(x + \beta_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

et l'égalité (12) deviendra:

$$(17)\quad u = m_1 \cos \frac{2\pi}{aT}(x + \alpha_1) \sin 2\pi \frac{t}{T} + m_2 \cos \frac{4\pi}{aT}(x + \alpha_2) \sin 4\pi \frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

$$+ n_1 \cos \frac{2\pi}{aT}(x + \beta_1) \cos 2\pi \frac{t}{T} + n_2 \cos \frac{4\pi}{aT}(x + \beta_2) \sin 4\pi \frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

Telle est la forme générale d'une fonction $u(x, t)$ qui, pour chaque valeur de x, est une fonction périodique de t, ayant une période T indépendante de x, et oscillant autour de la valeur 0; qui, de plus, vérifie en tout point l'équation aux dérivées partielles

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Les conditions aux limites relatives aux parois latérales du tuyau sont vérifiées d'elle même dans l'hypothèse des tranches; il reste donc à disposer des constantes que renferme la formule (17) de telle manière que les conditions aux limites relatives aux deux extrémités du tuyau soient vérifiées.

Comment s'exprimeront ces conditions aux limites?

L'extrémité d'un tuyau peut être fermée ou ouverte

Si une extrémite d'un tuyau est fermée, nous admettrons qu'elle est fermée par une paroi rigoureusement immobile; en tout point de cette paroi, nous devrons avoir, quel que soit t,

$$u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, y) = 0$$

égalité qui se réduit, puisque la paroi qui ferme le tuyau est supposée normale aux génératrices, à la condition

(18) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = 0$

Les premiers auteurs qui se sont occupés d'hydrodynamique ont supposé qu'en tout point de la tranche par où l'extrémité ouverte d'un tuyau confine avec l'air extérieur la pression demeurait constante et égale à la pression extérieure ; c'est une hypothèse que nous discuterons au début du chapitre XVII. Pour le moment, nous l'accepterons et en ferons usage. La pression étant constante, d'après cette hypothèse, à l'extrémité d'un tuyau ouvert, il doit en être de même du volume spécifique de sorte qu'à l'extrémité d'un tuyau ouvert on doit avoir, quel que soit t.

(19) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \dfrac{\partial\omega}{\partial t} = 0$

Les conditions aux limites (18) et (19) vont nous permettre de déterminer les constantes que renferme l'égalité (17).

Nous admettrons en premier lieu que le tuyau soit toujours ouvert à l'une de ses extrémités, l'embouchure. Prenons pour plan origine le plan de l'embouchure ; nous devrons alors avoir

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0\,,$$

quel que soit t, pour $x = 0$.

D'après l'égalité (3), cette égalité se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Or l'égalité (17) donne.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2\pi}{aT} m_1 \sin\frac{2\pi}{aT}(x+\alpha_1)\sin 2\pi\frac{t}{T} - \frac{4\pi}{aT} m_2 \sin\frac{4\pi}{aT}(x+\alpha_2)\sin 4\pi\frac{t}{T} - \ldots\ldots$$

$$-\frac{2\pi}{aT} n_1 \sin\frac{2\pi}{aT}(x+\beta_1)\cos 2\pi\frac{t}{T} - \frac{4\pi}{aT} n_2 \sin\frac{4\pi}{aT}(x+\beta_2)\cos 4\pi\frac{t}{T} - \ldots\ldots$$

Cette quantité doit être nulle, quel que soit t, pour $x = 0$. Une quantité développée suivant la série de Fourier ne peut être identiquement nulle que si tous les coefficients du développement sont égaux à 0. On doit donc avoir

$$\sin\frac{2\pi\alpha_1}{aT} = 0\,; \qquad \sin\frac{2\pi\beta_1}{aT} = 0\,,$$

$$\sin\frac{4\pi\alpha_2}{aT} = 0\,, \qquad \sin\frac{4\pi\beta_2}{aT} = 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces équations fournissent pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots$ les valeurs suivantes

$$\alpha_1 = 0 \quad \left(\frac{aT}{2}\right), \quad 2\left(\frac{aT}{2}\right), \quad 3\left(\frac{aT}{2}\right), \ldots\ldots$$
$$-\left(\frac{aT}{2}\right), \quad -2\left(\frac{aT}{2}\right), \quad -3\left(\frac{aT}{2}\right), \ldots\ldots$$

$$\beta_1 = 0 \quad \left(\frac{aT}{2}\right), \quad 2\left(\frac{aT}{2}\right), \quad 3\left(\frac{aT}{2}\right), \ldots\ldots$$
$$-\left(\frac{aT}{2}\right), \quad -2\left(\frac{aT}{2}\right), \quad -3\left(\frac{aT}{2}\right), \ldots\ldots$$

$$\alpha_2 = 0 \quad \left(\frac{aT}{4}\right), \quad 2\left(\frac{aT}{4}\right), \quad 3\left(\frac{aT}{4}\right), \ldots\ldots$$
$$-\left(\frac{aT}{4}\right), \quad -2\left(\frac{aT}{4}\right), \quad -3\left(\frac{aT}{4}\right), \ldots\ldots$$

$$\beta_2 = 0 \quad \left(\frac{aT}{4}\right), \quad 2\left(\frac{aT}{4}\right), \quad 3\left(\frac{aT}{4}\right), \ldots\ldots$$
$$-\left(\frac{aT}{4}\right), \quad -2\left(\frac{aT}{4}\right), \quad -3\left(\frac{aT}{4}\right), \ldots\ldots$$

....

Dès lors, si nous désignons par

$$m'_1, m'_2 \ldots\ldots \qquad n'_1, n'_2 \ldots\ldots$$

des quantités égales en valeur absolue à

$$m_1, m_2, \ldots\ldots \qquad n_1, n_2, \ldots\ldots$$

mais peut être différentes de signe, l'égalité (17) pourra s'écrire :

$$u = \cos\frac{2\pi}{aT}x\left(m'_1 \sin 2\pi\frac{t}{T} + n'_1 \cos 2\pi\frac{t}{T}\right)$$
$$+ \cos\frac{4\pi}{aT}x\left(m'_2 \sin 4\pi\frac{t}{T} + n'_2 \cos 4\pi\frac{t}{T}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Posons maintenant

$$\text{Tang}\, 2\pi\theta_1 = -\frac{n'_1}{m'_1} \qquad \text{Tang}\, 2\pi\theta_2 = -\frac{n'_2}{m'_2}, \ldots\ldots$$

$$M_1^2 = m_1'^2 + n_1'^2, \qquad M_2^2 = m_2'^2 + n_2'^2, \ldots\ldots$$

et l'égalité précédente prendra la forme

$$(20) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = M_1 \cos \frac{2\pi}{aT} x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

$$+ M_2 \cos \frac{4\pi}{aT} x \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Telle est l'équation qui déterminera la vitesse u lorsqu'on y aura introduit la condition limite relative à la seconde extrémité du tuyau

A cette équation, nous en joindrons deux autres, déterminant les quantités $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial \omega}{\partial t}$.

L'égalité (3) donne

$$(21) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega \frac{\partial u}{\partial x}$$

et l'égalité (4) donne

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{1}{\omega f'(\omega)} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Mais on a [Chapitre VII, Egalité (10)]

$$a^2 = -\omega^2 f'(\omega)$$

a étant la vitesse du son. L'égalité précédente peut donc s'écrire :

$$(22) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\omega}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Moyennant l'égalité (20), les égalités (21) et (22) deviennent

$$(23) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\omega \left[\frac{2\pi}{aT} M_1 \sin \frac{2\pi}{aT} x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)\right.$$

$$+ \frac{4\pi}{aT} M_2 \sin \frac{4\pi}{aT} x \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_2\right)$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$

$$(24) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\omega}{a^2} \left[\frac{2\pi}{T} M_1 \cos \frac{2\pi}{aT} x \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)\right.$$

$$+ \frac{4\pi}{T} M_2 \cos \frac{4\pi}{aT} x \cos 4\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_2\right)$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$

§ III Tuyaux ouverts

Introduisons maintenant la condition limite relative à la seconde extrémité du tuyau ; supposons en premier lieu que cette seconde extrémité s'ouvre librement dans l'atmosphère ; nous aurons alors un tuyau ouvert.

Soit L la longueur du tuyau ; pour

$$x = L,$$

nous devrons avoir, d'après l'égalité (19),

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

quel que soit t.

D'après l'égalité (23), cette condition peut s'écrire

$$\frac{2\pi}{aT} M_1 \sin \frac{2\pi L}{aT} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

$$+ \frac{4\pi}{aT} M_2 \sin \frac{4\pi L}{aT} \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_2\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Une quantité, développée suivant la série de Fourier, ne peut être identiquement nulle que si tous les coefficients de la série sont égaux à 0 ; la condition précédente exige donc que l'on ait

$$(25) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} M_1 \sin \dfrac{2\pi L}{aT} = 0 \\[2ex] M_2 \sin \dfrac{4\pi L}{aT} = 0 \\[2ex] M_3 \sin \dfrac{6\pi L}{aT} = 0 \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

M_1 ne peut être égal à 0, car, si M_1 était égal à 0, c'est que le mouvement vibratoire aurait pour période non pas T, mais un sous multiple de T, contrairement à ce qui a été supposé. La première égalité (25) exige donc que l'on ait

$$\sin \frac{2\pi L}{aT} = 0$$

La période T du mouvement vibratoire doit donc avoir l'une des valeurs

(26) $$T = 2\frac{L}{a}, \quad 2\frac{L}{2a}, \quad 2\frac{L}{3a}, \ldots\ldots$$

D'ailleurs, s'il en est ainsi, toutes les égalités (25) sont vérifiées.

Ainsi la vitesse du mouvement vibratoire dans un tuyau ouvert est donnée par la formule (20), la période du mouvement vibratoire ayant l'une des valeurs (26). Les coefficients $M_1, M_2, \ldots\ldots$ ont des valeurs arbitraires. Voyons les diverses conséquences de ce résultat:

1°_Sons simples

Supposons que tous les coefficients M soient égaux à 0, sauf le premier; l'égalité (20) deviendra alors:

(27). $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u = M_1 \cos\frac{2\pi}{aT} x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

Considérons la particule qui, à l'instant t, a pour abscisse x; à l'instant t', elle est en un point qui a pour abscisse x' et sa vitesse u' est donnée par la formule

$$u' = M_1 \cos\frac{2\pi}{aT} x' \sin 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \theta_1\right)$$

Mais, comme il s'agit par hypothèse d'un très petit mouvement, x et x' diffèrent très peu de l'abscisse x_0 du point où se trouve la particule à l'instant $t = 0$. La vitesse de la particule peut donc être représentée par la formule

$$u = M_1 \cos\frac{2\pi}{aT} x_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

D'ailleurs par définition

$$u = \frac{dx}{dt}$$

L'équation du mouvement de la particule est donc

$$x - \left(x_0 + M_1 \cos\frac{2\pi}{aT} x_0 \cos 2\pi\theta_1\right) = -M_1 \cos\frac{2\pi}{aT} x_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

Cette particule exécute donc sensiblement ce qu'on nomme en cinématique un mouvement oscillatoire simple autour du point qui a pour abscisse

$$x_0 + M_1 \cos\frac{2\pi}{aT} x_0 \cos 2\pi\theta_1$$

Or, quand toutes les molécules d'un corps exécutent des mouvements oscillatoires simples, on convient de dire que le corps rend un son simple. Un tuyau ouvert peut donc rendre une infinité de sons simples.

Les durées des vibrations doubles qui correspondent à ces sons sont respectivement :

(26) .... $T = 2\dfrac{L}{a}, \quad 2\dfrac{L}{2a}, \quad 2\dfrac{L}{3a}, \ldots$

En d'autres termes ces sons correspondent à des nombres de vibrations doubles par seconde qui sont respectivement :

$$n = \frac{a}{2L}, \quad 2\frac{a}{2L}, \quad 3\frac{a}{2L}, \ldots\ldots$$

Le plus grave de ces sons est celui dont le nombre de vibrations doubles s'obtient par la formule

$$n = \frac{a}{2L}$$

Il porte le nom de son fondamental du tuyau.

Si l'on considère, d'une part, un son ayant un nombre de vibrations doubles égal à n, et, d'autre part, des sons ayant pour nombres respectifs de vibrations doubles $2n$, $3n$, ... ces derniers sont dits sons harmoniques du premier. On voit alors que les sons simples que peut rendre un tuyau ouvert sont :

1° Le son fondamental, dont le nombre de vibrations doubles s'obtient en divisant la vitesse du son par le double de la longueur du tuyau ;

2° Tous les sons harmoniques du son fondamental.

On donne le nom de longueur d'onde d'un mouvement vibratoire de période T au produit

(28).. .... $\lambda = aT$

Cette longueur représente l'espace parcouru par le son pendant la durée de la période du mouvement vibratoire

Les égalités (26) peuvent s'écrire :

$$L = \frac{\lambda}{2}, \quad 2\frac{\lambda}{2}, \quad 3\frac{\lambda}{2}, \ldots\ldots\ldots$$

Les sons simples que le tuyau peut rendre sont tels que la longueur du tuyau soit un multiple de leur demi-longueur d'onde.

2° Variation de la vitesse le long du tuyau ; ventres et nœuds

La formule (27) peut s'écrire, moyennant l'égalité (28),

(29) .... $u = M_1 \cos \dfrac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \theta_1\right)$

Cette formule nous montre que pour une valeur donnée t du temps, la vitesse u est une fonction périodique de x ayant pour période la longueur d'onde λ du son simple que rend le tuyau.

Si donc nous divisons le tuyau, à partir de l'embouchure, en segments ayant tous pour longueur commune λ, l'état de l'air en deux points correspondants de deux de ces segments sera toujours le même au même instant. Le tuyau renferme, d'après ce qui précède, un nombre entier (qui peut être nul) de ces segments, plus un demi segment, ou bien un nombre entier de ces segments.

Il existe des points où la vitesse u est constamment nulle, quel que soit t; ces points portent le nom de nœuds; les abscisses de ces points s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

Ces abscisses ont donc respectivement pour valeur

$$x = \frac{\lambda}{4}, \quad 3\frac{\lambda}{4}, \quad 5\frac{\lambda}{4}, \dots\dots\dots$$

Pour trouver ceux de ces points qui existent réellement à l'intérieur du tuyau, il faudra prendre seulement, parmi ces valeurs de x, celles qui sont inférieures à L.

Supposons que le tuyau rende le $(n-1)^e$ harmonique du son fondamental; la période du mouvement vibratoire est alors

$$T = 2\frac{L}{n\,a}$$

et la longueur d'onde du son est liée à la longueur du tuyau par la formule

$$L = \frac{n\lambda}{2}$$

Il y aura alors, à l'intérieur du tuyau, n nœuds dont les abscisses seront

$$x = \frac{\lambda}{4}, \; 3\frac{\lambda}{4}, \dots\dots\dots\dots (2n-1)\frac{\lambda}{4},$$

ou bien

$$x = \frac{L}{2n}, \; 3\frac{L}{2n}, \dots\dots\dots (2n-1)\frac{L}{2n}$$

Deux nœuds consécutifs sont distants l'un de l'autre d'une demie longueur d'onde; on donne le nom de concamération à un segment du tuyau compris entre deux noeuds consécutifs.

En deux points de deux concamérations consécutives, symétriques par rapport au nœud qui sépare ces deux concamérations, la vitesse u a, au même instant, la même valeur absolue et des signes contraires.

La valeur absolue de la vitesse est maximum, à l'instant t, aux points où

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$$

c'est-à-dire aux points d'abscisses

$$x = 0\ , \frac{\lambda}{2},\ 2\frac{\lambda}{2},\ 3\frac{\lambda}{2}, \ldots\ldots\ldots$$

ou bien encore, si l'on suppose que le tuyau rende la $(n-1)^e$ harmonique du son fondamental,

$$x = 0\ , \frac{L}{n},\ 2\frac{L}{n}, \ldots\ldots\ldots\ldots (n-1)\frac{L}{n},\ L$$

Ces points, où la valeur absolue de la vitesse du mouvement vibratoire est maximum quel que soit t, portent le nom de ventres.

Les ventres occupent le milieu de chaque concamération.

Les deux extrémités du tuyau sont deux ventres.

3° Variation du volume spécifique le long du tuyau.

Dans le cas où le tuyau rend un son simple, les formules (23) et (24) se réduisent à

$$(30) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{2\pi}{aT} M_1\, \omega \sin \frac{2\pi x}{aT} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

$$(31) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{2\pi}{a^2 T} M_1\, \omega \cos \frac{2\pi x}{aT} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

La première de ces deux égalités nous montre qu'il existe des points où l'on a

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

quel que soit t ; ces points, où le volume spécifique garde une valeur invariable pendant toute la durée du mouvement, sont les ventres. Cette valeur invariable est d'ailleurs celle autour de laquelle oscille, en tout autre point, la valeur du volume spécifique.

Il existe des points où, à l'instant t, la valeur absolue du volume spécifique ω est maximum. Ces points sont ceux pour lesquels

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$$

Leur position est donc indépendante du temps ; ce sont les nœuds.

Soit ω_0 la valeur autour de laquelle oscille, en tout point du tuyau, le volume spécifique ω. On donne le nom de condensation en un point M au temps t à la valeur que prend, au point M et à l'instant t, la quantité

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$$

On voit alors qu'aux ventres, la condensation est constamment nulle ; les nœuds sont, dans la longueur du tuyau, les points où sa valeur absolue est maximum à tout instant ; aux points correspondants de deux concamérations consécutives, la condensation a, au même instant, la même valeur absolue et des signes contraires.

4° Sons complexes

Lorsqu'un tuyau ouvert vibre, le coefficient M_1 n'est pas, en général, le seul qui diffère de zéro. Le tuyau émet alors un son complexe auquel on donne le même nom qu'au son simple de même période, et par conséquent de même hauteur, représenté par le premier terme de la série.

Il se peut qu'un nombre fini de termes de la série soient différents de 0.

Dans ce cas, le mouvement de chaque particule d'air dans le tuyau peut être regardé comme le résultat de la composition des divers mouvements oscillatoires simples représentés par les divers termes non nuls que renferme la série.

Lorsque la série renferme un nombre illimité de termes, on dit encore que le son complexe rendu par le tuyau est la superposition des sons simples représentés par les divers termes de la série ; mais ce n'est plus là qu'une forme de langage.

Comme nous le verrons au Livre V, le timbre du son émis par le tuyau dépend des termes qui figurent dans la série et de la grandeur absolue des coefficients M qui affectent ces termes.

Les lois du mouvement de l'air dans le tuyau qui rend un son complexe sont représentées par les égalités :

$$(20) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = M_1 \cos \frac{2\pi}{aT} x \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$

$$+ M_2 \cos \frac{4\pi}{aT} x \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \theta_2\right)$$

$$+ M_3 \cos \frac{6\pi}{aT} x \sin 6\pi \left(\frac{t}{T} - \theta_3\right)$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(26) \dots\dots\dots\dots\dots\dots T = 2\frac{L}{a}, \quad 2\frac{L}{2a}, \quad 2\frac{L}{3a}, \dots\dots\dots$$

Peut-il exister encore des points où la vitesse soit nulle à tout instant ?

Pour qu'un pareil point existât, il faudrait que son abscisse vérifiât toutes les égalités

$$(32) \dots\dots\dots\dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} M_1 \cos \frac{2\pi}{aT} x = 0, \\ M_2 \cos \frac{4\pi}{aT} x = 0, \\ M_3 \cos \frac{6\pi}{aT} x = 0, \\ M_4 \cos \frac{8\pi}{aT} x = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Le coefficient M_1 étant essentiellement différent de 0, la première des égalités (32) se réduit à :

$$\cos \frac{2\pi}{aT} x = 0$$

et exige que x ait l'une des valeurs

$$x = \frac{aT}{4}, \quad 3\frac{aT}{4}, \quad 5\frac{aT}{4}, \dots\dots\dots$$

Ces valeurs transforment en identités non seulement la première des équations (32), mais encore toutes les équations (32) de rang impair ; mais les équations (32) de rang pair sont transformées en

$$M_2 = 0 \qquad M_4 = 0, \dots$$

Si donc les coefficients M de rang pair ne sont pas égaux à 0, aucune valeur de x ne peut vérifier les équations (32)

Ainsi lorsqu'un tuyau ouvert rend un son complexe, il n'existe de points où la vitesse est nulle à tout instant que, dans le cas très particulier où le son rendu par le tuyau n'est accompagné que de ses harmoniques d'ordre pair (2^e, 4^e .... harmoniques)

D'après l'égalité (24), c'est aussi dans ce cas seulement que les points où la condensation a, à un même instant, une valeur plus grande ou plus petite qu'en tous les points voisins, ont une position indépendante du temps.

En d'autres termes on peut dire que c'est dans ce cas seulement qu'il existe des nœuds

De l'égalité (20), on déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2\pi}{aT} M_1 \sin\frac{2\pi}{aT}x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\theta_1\right)$$
$$-\frac{4\pi}{aT} M_2 \sin\frac{4\pi}{aT}x \sin 4\pi\left(\frac{t}{T}-\theta_3\right)$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit alors que, quelque soit t, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

aux points où

$$x = 0 \quad , \quad \frac{a.T}{2} \, , \quad 2\,\frac{aT}{2} \, , \ldots\ldots\ldots$$

En ces points, d'après l'égalité (23), on a aussi, quelque soit t

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

Donc, lorsqu'un tuyau ouvert rend un son complexe, il existe des ventres, situés à des distances $0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, \ldots$ de l'embouchure, où la condensation est constamment nulle ; ce sont aussi, dans la longueur du tuyau, les points où la valeur absolue de la vitesse est maximum quel que soit t.

§ IV. Tuyaux fermés

Lorsque le tuyau est fermé par une paroi immobile, située à une distance L de l'embouchure, on doit avoir, pour $x = L$ et quelque soit t l'égalité

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = 0$$

Si nous reportons cette condition dans l'égalité (20) nous trouvons que l'on doit avoir :

$$(33) \cdots\cdots \begin{cases} M_1 \cos \dfrac{2\pi}{aT} L = 0, \\ M_2 \cos \dfrac{4\pi}{aT} L = 0, \\ M_3 \cos \dfrac{6\pi}{aT} L = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ces égalités (33) sont analogues aux égalités (32) ; pour qu'elles puissent être simultanément vérifiées, il faut que l'on ait :

$$(34) \cdots\cdots \quad M_2 = 0 \,, \quad M_4 = 0 \,, \cdots\cdots$$

Elles seront alors vérifiées par les valeurs suivantes de T

$$(35) \cdots\cdots \quad T = 4\frac{L}{a}\,,\quad 4\frac{L}{3a}\,,\quad 4\frac{L}{5a}\,,\cdots\cdots$$

La loi du mouvement de l'air dans un tuyau fermé est donc représentée, en vertu des égalités (20) et (34), par l'équation :

$$(36) \cdots\cdots \quad u = M_1 \cos\frac{2\pi}{aT} x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$
$$+ M_3 \cos\frac{6\pi}{aT} x \sin 6\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_3\right)$$
$$+ M_5 \cos\frac{10\pi}{aT} x \sin 10\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_5\right)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

T ayant l'une des valeurs données en (35)

L'égalité (36) donne

$$(36)^{bis} \cdots\cdots \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2\pi}{aT} M_1 \sin\frac{2\pi}{aT} x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)$$
$$- \frac{6\pi}{aT} M_3 \sin\frac{6\pi}{aT} x \sin 6\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_3\right)$$
$$- \cdots\cdots\cdots$$

Les égalités (23) et (24) deviennent, moyennant les égalités (34)

$$(37) \cdots\cdots \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\omega\left[\frac{2\pi}{aT} M_1 \sin\frac{2\pi}{aT} x \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right)\right.$$
$$+ \frac{6\pi}{aT} M_3 \sin\frac{6\pi}{aT} x \sin 6\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_3\right)$$
$$\left. + \cdots\cdots\cdots \right]$$

$$(38) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\omega}{a^2}\left[\frac{2\pi}{T} M_1 \cos\frac{2\pi}{aT} x \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_1\right) + \frac{6\pi}{T} M_3 \cos\frac{6\pi}{aT} x \cos 6\pi\left(\frac{t}{T} - \theta_3\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

Voyons les conséquences de ces diverses égalités.

D'après les égalités (35) le plus grave des sons que peut rendre un tuyau fermé a une durée de vibrations doubles qui s'obtient en multipliant par quatre le rapport de la longueur du tuyau à la vitesse du son. C'est l'octave grave du son fondamental d'un tuyau ouvert de même longueur.

Les sons simples qu'un tuyau fermé peut rendre sont le son fondamental et les 2e, 4e, 6e .... harmoniques de ce son.

Tout son complexe rendu par un tuyau fermé résulte de la superposition du son simple de même hauteur et de ses 2e, 4e, 6e, ... harmoniques.

Aux points dont les abscisses sont

$$(39) \ldots\ldots\ldots\ldots x = \frac{\lambda}{4},\quad 3\frac{\lambda}{4},\quad 5\frac{\lambda}{4},\ \ldots\ldots$$

on a

$$\cos\frac{2\pi}{aT} x = 0$$

$$\cos\frac{6\pi}{aT} x = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dès lors, en ces points, quel que soit t, on a, d'après l'équation (36)

$$u = 0$$

et, d'après l'équation (38),

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Que le tuyau fermé rende un son simple ou un son complexe, il existe toujours des points, dont les abscisses sont définies par les égalités (39), où la vitesse est nulle, et où la valeur absolue de la condensation est maximum, quel que soit l'instant considéré ; ces points sont des noeuds ; par définition, le fond du tuyau est toujours un nœud.

Au point dont les abscisses sont :

$$(40) \ldots\ldots\ldots\ldots x = 0,\ \frac{\lambda}{2},\quad 2\frac{\lambda}{2},\quad 3\frac{\lambda}{2},\ \ldots\ldots\ldots$$

on a

$$\sin \frac{2\pi}{aT} x = 0,$$

$$\sin \frac{6\pi}{aT} x = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dès lors, en ces points, quel que soit t, on a, d'après l'égalité (37)[bis]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

et, d'après l'égalité (37)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

Que le tuyau fermé rende un son simple ou un son complexe, il existe toujours des points, dont les abscisses sont définies par les égalités (40), où la condensation est nulle et où la valeur absolue de la vitesse est maximum, quel que soit l'instant considéré ; ces points sont des ventres ; l'embouchure du tuyau est toujours un ventre.

Chapitre XII

Les Ondes Sphériques.

§.1. L'Onde progressive.

Lorsqu'on traite le mouvement de l'air dans un tuyau en admettant l'hypothèse des tranches, on admet que la fonction potentielle des vitesses a, à un même instant, la même valeur en tous les points d'un plan de direction donnée qui est ici la direction normale aux génératrices du tuyau.

Lorsqu'une semblable condition est remplie, on dit que le mouvement se fait par ondes planes. Nous avons vu que, dans ce cas, on savait, depuis d'Alembert, intégrer l'équation aux dérivées partielles des petits mouvements.

Euler a montré que l'on pouvait intégrer l'équation des petits mouvements dans un second cas : c'est celui où la fonction potentielle des vitesses est, en chaque point M du fluide, à un instant donné t, fonction de la distance r du point M à un point fixe O du milieu. On dit, dans ce cas, que mouvement a lieu par ondes sphériques.

Il est aisé de concevoir comment un semblable cas peut être réalisé. Imaginons que, dans un milieu primitivement au repos, se trouve plongée une sphère ayant pour centre le point O. Supposons qu'à partir d'un certain moment, le centre de cette sphère demeurant fixe, le rayon de la sphère se mette à varier suivant une certaine loi. Le fluide se mettra en mouvement et, par raison de symétrie, la fonction potentielle des vitesses au point O ne pourra être fonction que des deux variables r et t.

Considérons un mouvement qui se propage par ondes sphériques; la fonction potentielle des vitesses est la fonction $\varphi(r, t)$; les composantes de la vitesse en un point sont

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y},$$

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(OM, x),$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \cos(OM, y),$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos(OM, z).$$

Les égalités précédentes deviennent donc:

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} u = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\cos(OM, x), \\ v = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\cos(OM, y), \\ w = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}\cos(OM, z). \end{cases}$$

La vitesse est donc, en chaque point M, dirigée suivant le rayon OM mené du point O au point M.

Que devient l'équation des petits mouvements

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

dans le cas particulier où φ ne dépend que des deux variables r et t ?

L'on voit aisément que, dans ce cas,

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial \varphi}{\partial r}\Delta r$$

Soient ξ, η, ζ, les coordonnées du point O. On a

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x-\xi)^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-\eta}{r}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{(y-\eta)^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-\zeta}{r}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{1}{r} - \frac{(z-\zeta)^2}{r^3}.$$

Ces égalités donnent :

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

$$\Delta r = \frac{2}{r},$$

et par conséquent

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi).$$

L'équation des petits mouvements devient alors

$$(2) \quad \frac{a^2}{r}\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Cette équation s'intègre immédiatement ; posons, en effet,

$$r\varphi = \psi$$

et elle deviendra

$$a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2};$$

elle est ainsi ramenée à l'équation de d'Alembert ; nous savons que l'intégrale générale de cette dernière est donnée par la formule :

$$\psi = F(r-at) + G(r+at)$$

F et G étant deux fonctions assujetties seulement à admettre des dérivées secondes qui soient finies. L'intégrale générale de l'équation (2) est donc donnée par la formule

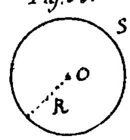
$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varphi = \frac{F(r-at) + G(r+at)}{r}$$

Tel est le résultat obtenu par Euler

La détermination des fonctions F et G dépend des conditions initiales du problème

Prenons l'exemple suivant :

Fig. 33.



Une sphère S (fig 33) de centre O et de rayon R, est immobile dans un fluide qui est aussi immobile dans toute son étendue jusqu'à l'instant $t=0$. A partir de cet instant, le rayon de la sphère se met à varier avec le temps de petites quantités ; le fluide se met en en mouvement par ondes sphériques.

Jusqu'à l'instant $t=0$, on a, dans tout le fluide

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

La fonction φ est donc une simple fonction de t. D'ailleurs on a, en général,

$$G(\omega) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Soit ω_0 le volume spécifique du fluide en équilibre ; jusqu'à l'instant 0, nous aurons

$$G(\omega_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

et, φ dépendant seulement de t,

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varphi = G(\omega_0)(t-T),$$

T étant une constante.

Considérons la fonction

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \psi = \varphi - G(\omega_0)(t-T).$$

Nous aurons

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

égalités qui nous permettent de prendre ψ, au lieu de φ, pour fonction potentielle des vitesses.

Pour les valeurs de t inférieures à 0, et pour les valeurs de r comprises entre R et $+\infty$, on aura

$$\psi = 0.$$

La quantité ψ, vérifiant l'équation des petits mouvements doit, d'après l'égalité (2), être de la forme :

$$(2^{bis}) \qquad \psi = \frac{F(r-at) + G(r+at)}{r}$$

et le résultat précédent s'énonce ainsi :

Pour les valeurs de t inférieures à 0, et pour les valeurs de r comprises entre R et $+\infty$, on a :

$$F(r-at) + G(r+at) = 0$$

On en déduit sans peine les deux égalités

$$F(r) + G(r) = 0$$

$$\frac{dF(r)}{dr} - \frac{dG(r)}{dr} = 0$$

qui entraînent, pour toutes les valeurs de r comprises entre R et $+\infty$.

$$(6) \qquad F(r) = A, \qquad G(r) = -A$$

A étant une constante. Par un raisonnement analogue à celui que nous avons donné plus haut (p. 209) on pourra remplacer ces égalités par

$$F(r) = 0 \qquad G(r) = 0$$

Considérons un point du fluide à l'instant t, postérieur à l'instant 0; pour ce point, r est compris entre R et $+\infty$; t étant positif, il en est de même de $(r+at)$. Donc, quel que soit ce point au sein de la masse fluide, l'égalité

$$G(r+at) = 0$$

y est vérifiée; pour étudier le mouvement du fluide, nous pourrons réduire l'égalité (2^{bis}) à

$$(7) \qquad \psi = \frac{F(r-at)}{r}$$

Cette égalité représente donc la forme la plus générale du mouvement émis par une cause d'ébranlement qui agit de même en toute direction autour du point O.

Au temps t, la fonction $F(r-at)$ n'est différente de 0 qu'en une partie du fluide, celle où $(r-at)$ est inférieur à R et où par conséquent, r est inférieur à $(R+at)$. Si donc on trace une sphère ayant le point O pour centre et pour rayon $(R+at)$, au temps t, aucun des points extérieurs à cette sphère n'aura encore été atteint par le mouvement, tandis que les points intérieurs à cette sphère seront en mouvement. C'est de ce résultat qu'Euler a déduit la proposition suivante : le son se propage à l'air libre avec la même vitesse que dans un tuyau.

Soit, à l'instant θ, $f(\theta)$ la vitesse d'un point de la surface de la sphère dans la direction du rayon de la sphère. En tout point de la surface de la sphère à l'instant θ, on doit avoir

$$\frac{\partial \psi(r,\theta)}{\partial r} + f(\theta) = 0.$$

La surface de la sphère à l'instant θ diffère infiniment peu de la surface de la sphère de rayon R, qui est son état initial. On peut donc remplacer l'égalité précédente par

$$\left[\frac{\partial \psi(r,\theta)}{\partial r}\right]_{r=R} + f(\theta) = 0.$$

ou bien, d'après l'égalité (7), par

$$\frac{1}{R}\,\frac{dF(R-a\theta)}{dR} - \frac{1}{R^2}F(R-a\theta) + f(\theta) = 0$$

Posons

$$R - a\theta = y$$

et l'égalité précédente deviendra :

$$(8) \quad \frac{1}{R}\,\frac{dF(y)}{dy} - \frac{1}{R^2}F(y) + f\left(\frac{R-y}{a}\right) = 0$$

Telle est l'équation différentielle qui détermine la fonction $F(y)$; elle ne la détermine pas complètement ; cette équation, en effet, admet une infinité d'intégrales ; la différence de deux quelconques de ces intégrales est une intégrale de l'équation

$$\frac{1}{R}\,\frac{dF(y)}{dy} - \frac{1}{R^2}F(y) = 0.$$

c'est à dire une quantité de la forme

$$(9) \quad F(y) = Ce^{\frac{y}{R}},$$

C étant une constante arbitraire.

Supposons, par exemple, que la sphère ait été en mouvement jusqu'au temps $t = \theta_0$, puisqu'à partir de ce temps, elle revienne au repos. Alors, pour les valeurs de t supérieures à θ_0, nous aurons

$$f(t) = 0.$$

Donc pour les valeurs de y inférieures à $(R - a\theta_0)$, nous aurons

$$F(y) = C e^{\frac{y}{R}}$$

Prenons à l'instant t, un point M dont la distance r au centre O de la sphère soit inférieure à $[a(t - \theta_0) + R]$; la quantité $(r - at)$ sera alors inférieure $(R - a\theta_0)$; on aura donc, en ce point,

$$F(r - at) = C e^{\frac{r-at}{R}}$$

et

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{C e^{\frac{r-at}{R}}}{r}.$$

Ainsi aux divers points dont la distance à la sphère pulsante est inférieure à $a(t - \theta_0)$, le mouvement n'est pas nécessairement nul; il peut être donné par la formule (10), où C représente une constante; la valeur de cette constante dépend de la nature du mouvement de la sphère et du milieu avant le temps θ_0.

On voit par là combien il serait faux de dire que, la sphère S s'étant mise en mouvement à l'instant 0 et s'étant arrêtée à l'instant θ_0, il n'y a de mouvement à l'instant t qu'entre les deux sphères Σ, de rayon $(R + at)$, et σ, de rayon $[R + a(t - \theta_0)]$: Il est vrai qu'il n'y a pas de mouvement à l'extérieur de la sphère Σ; mais, à l'intérieur de la sphère σ, il y a en général un mouvement représenté par l'équation (10).

Ce qui est vrai, c'est que si, jusqu'à l'instant t, il n'y a pas de mouvement à l'intérieur de la sphère de rayon $[R + a(t - \theta_0)]$ la constante C doit être égale à 0; et alors, il n'y aura pas non plus de mouvement à l'instant t', postérieur à t, à l'intérieur de la sphère de rayon $[R + a(t' - \theta_0)]$

Si la sphère S n'est demeurée en mouvement que pendant un temps très court, on ne peut affirmer qu'il n'y ait de mouvement, à l'instant t, que dans une couche sphérique très peu épaisse de rayon $(R + at)$. Mais on peut affirmer que, si cette proposition est exacte jusqu'à une certaine valeur de t, elle continue à l'être pour les valeurs ultérieures de t.

Tout cela est conforme à ce que nous avons dit au Chapitre IX, §3 au sujet du Principe d'Huygens.

Considérons un mouvement qui se propage de manière qu'à l'instant t les seuls points en mouvement soient les points compris entre la sphère de rayon $(R + at)$ et la sphère de rayon $[R + a(t - \theta_0)]$. Nous venons de voir qu'au temps t' il n'y aurait de mouvement qu'entre la sphère de rayon $(R + at')$ et la sphère de rayon $[R + a(t' - \theta_0)]$. Ce résultat ne semble pas, de prime abord, pouvoir être retrouvé par le procédé de Poisson;

le procédé de Poisson semble seulement montrer qu'au temps t' il n'y a de mouvement qu'entre la sphère de rayon $(R + at')$ et la sphère de rayon $[R + a(t - \theta_0 - t')]$. Il est intéressant de prouver que le procédé de Poisson redonne le résultat que nous avons trouvé directement ; c'est ce que M. Beltrami[1] a fait de la manière suivante :

A l'intérieur de la région en mouvement à l'instant t, nous avons

$$\psi = \frac{F(r - at)}{r},$$

$F(y)$ étant une fonction définie pour toutes les valeurs de y comprises entre R et $+\infty$.

Nous avons donc :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{F(r - at)}{r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dF(r - at)}{dr},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a}{r}\,\frac{dF(r - at)}{dr},$$

et, par conséquent,

$$(11) \quad \frac{1}{a}\,\frac{\partial (r\psi)}{\partial t} + \frac{\partial (r\psi)}{\partial r} = 0$$

Cela posé, cherchons, par le procédé de Poisson, la fonction potentielle des vitesses, à l'instant t', au point M' dont la distance au point O est r'. Nous voulons vérifier que cette fonction est donnée par l'égalité

$$\psi(M', t') = \frac{F(r' - at')}{r}.$$

Posons, pour l'instant particulier t,

$$(12) \quad \begin{cases} \psi(r, t) = \Psi(r) \\ \dfrac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = \Psi'(r) \end{cases}$$

L'égalité (11) nous donnera

$$(13) \quad \frac{r}{a}\,\Psi'(r) + \frac{d\left[r\,\Psi(r)\right]}{dr} = 0$$

Du point M' comme centre, décrivons une sphère ayant pour rayon

$$\rho = a(t' - t)$$

Soit S la surface de cette sphère.

---

(1) E. Beltrami – Sul Principio di Huygens (Rendiconti del R. Instituto Lombardo Série II. Vol. XXII. 1889)

Posons

$$(14) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} F(t') = \dfrac{1}{4\pi\rho^2}\displaystyle\int_S \Psi(r)\, dS, \\ G(t') = \dfrac{1}{4\pi\rho^2}\displaystyle\int_S \Psi'(r)\, dS. \end{cases}$$

D'après le théorème de Poisson, nous aurons

$$(15) \ldots\ldots \psi(M',t') = \frac{d}{dt'}\Big[(t'-t)\,F(t')\Big] + (t'-t)\,G(t').$$

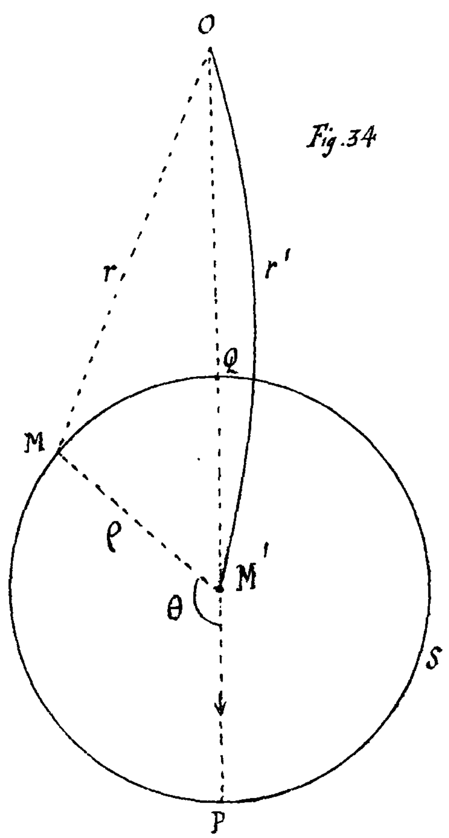


Fig. 34

Soit M un point de la sphère S de rayon ρ (fig 34). Soit θ l'angle des deux directions $M'M$ et OM'. Soit φ l'angle du plan MOM' avec un plan fixe passant par OM'

Nous aurons

$$(16) \ldots\ldots r^2 = \rho^2 + r'^2 + 2\rho r' \cos\theta$$

et

$$(17) \ldots\ldots dS = \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Le point M', et par conséquent la distance r', demeurant invariables dans nos calculs, r devient, en vertu de l'égalité (16) une simple fonction de ρ et de θ. On a dès lors

$$(18) \ldots\ldots \begin{cases} \Psi(r) = \mathcal{F}(\rho,\theta), \\ \Psi'(r) = \mathcal{F}'(\rho,\theta). \end{cases}$$

L'égalité

$$(19) \ldots\ldots\ldots \rho = a(t'-t)$$

permet de poser

$$(20) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} F(t') = f(\rho), \\ G(t') = g(\rho). \end{cases}$$

Les égalités (14) deviennent alors

$$f(\rho) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{F}(\rho,\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$g(\rho) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{F}'(\rho,\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

ou bien, en effectuant, dans chacune de ces deux formules, l'intégration par rapport à φ,

$$(21) \ldots\ldots \begin{cases} f(\rho) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \mathcal{F}(\rho,\theta)\sin\theta\, d\theta, \\ g(\rho) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \mathcal{F}'(\rho,\theta)\sin\theta\, d\theta. \end{cases}$$

D'ailleurs, en vertu des égalités (19) et (20), l'égalité (15) peut s'écrire :

$$\psi(M',t') = \frac{d}{d\rho}\Big[\rho f(\rho)\Big] + \frac{\rho}{a} g(\rho)$$

ou bien, en vertu des égalités (21),

$$(22) \ldots\ldots \psi(M',t') = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\rho\mathcal{F}(\rho,\theta)\Big] + \frac{\rho}{a}\mathcal{F}'(\rho,\theta)\right\}\sin\theta\, d\theta$$

Nous allons changer de variable d'intégration, et prendre pour variable d'intégration r au lieu de θ. Nous aurons :

$$r\,dr = -\rho\, r' \sin\theta\, d\theta$$

$$\text{pour } \theta = 0, \text{ nous aurons } r = OP$$

$$\text{pour } \theta = \pi, \text{ nous aurons } r = OQ$$

et la formule (22) pourra s'écrire, en vertu des égalités (18),

$$\psi(M',t') = \frac{1}{2r'}\int_{OQ}^{OP}\left[\frac{r}{a}\Psi'(r) + \frac{r}{\rho}\Psi(r) + r\frac{\partial\mathcal{F}(\rho,\theta)}{\partial\rho}\right]dr$$

Mais on a, en vertu de l'égalité (16),

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{F}(\rho,\theta)}{\partial\rho} &= \frac{d\Psi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial\rho} \\ &= \frac{d\Psi(r)}{dr}\frac{(\rho + r'\cos\theta)}{r} \\ &= \frac{d\Psi(r)}{dr}\frac{r^2+\rho^2-r'^2}{2\rho r}. \end{aligned}$$

L'égalité précédente devient donc

$$\psi(M't') = \frac{1}{2r'}\int_{OQ}^{OP}\left[\frac{r}{a}\Psi'(r) + \frac{r}{\rho}\Psi(r) + \frac{r^2+\rho^2-r'^2}{2\rho}\frac{d\Psi(r)}{dr}\right]dr$$

ou bien

$$\psi(M',t') = \frac{1}{2r'}\int_{OQ}^{OP}\left\{\frac{r}{a}\Psi'(r) + \frac{d}{dr}\left[r\Psi(r)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\rho}\frac{d}{dr}\left[\left((r-\rho)^2 - r'^2\right)\Psi(r)\right]\right\}dr.$$

Si l'on tient compte de l'égalité (13), on voit que cette formule devient tout calcul fait

$$\Psi(M',t') = \frac{1}{4\rho r'}\left[\left((r-\rho^2) - r'^2\right)\Psi(r)\right]_{r=OQ}^{r=OP}$$

Pour $r = OP$, nous avons :

$$r = r' + \rho, \qquad (r-\rho^2) - r'^2 = 0.$$

Pour $r = OQ$, nous avons :

$$r = r' - \rho, \qquad (r-\rho)^2 - r'^2 = -4\rho(r'-\rho).$$

Nous trouvons donc :

$$(23) \ldots\ldots\ldots\ldots \psi(M',t') = \frac{r'-\rho}{r'}\Psi(r'-\rho)$$

D'ailleurs

$$\Psi(r'-\rho) = \Psi\left[r' - a(t'-t)\right]$$

ou bien d'après les égalités (12)

$$= \psi\left\{\left[r' - a(t'-t)\right], t\right\}$$

ou enfin, puisque

$$\psi(r,t) = \frac{F(r'-at)}{r}$$

$$\Psi(r'-\rho) = \frac{F(r'-at')}{r'-a(t'-t)}$$

et l'égalité (23) devient :

$$\psi(M't') = \frac{F(r'-at')}{r'}$$

Ainsi la méthode de Poisson nous montre que si jusqu'à l'instant t, la fonction potentielle des vitesses a pour expression

$$\frac{F(r-at)}{r}$$

elle aura encore la même expression à un instant t' postérieur à t. On en conclut sans peine que les conséquences de la méthode de Poisson sont d'accord avec le Principe d'Huygens, comme cela devait arriver.

§2. – L'onde Régressive

Nous avons vu que, dans un mouvement qui se propage par ondes sphériques, la fonction potentielle des vitesses était en général donnée par l'égalité

$$(2^{bis}) \dots\dots\dots\dots \psi = \frac{F(r-at)+G(r+at)}{r}$$

Ce mouvement général peut toujours être regardé comme résultant de la superposition de deux mouvements plus particuliers : l'un, dont la fonction potentielle des vitesses serait donnée par l'égalité

$$(7) \dots\dots\dots\dots \psi = \frac{F(r-at)}{r}$$

l'autre dont la fonction potentielle des vitesses serait donnée par l'égalité

$$(24) \dots\dots\dots\dots \psi = \frac{G(r+at)}{r}$$

Nous avons vu que la première formule pouvait être regardée comme correspondant à un mouvement issu de la cause d'ébranlement qui environne le point O ; nous allons maintenant examiner à quel mouvement correspond la formule (24).

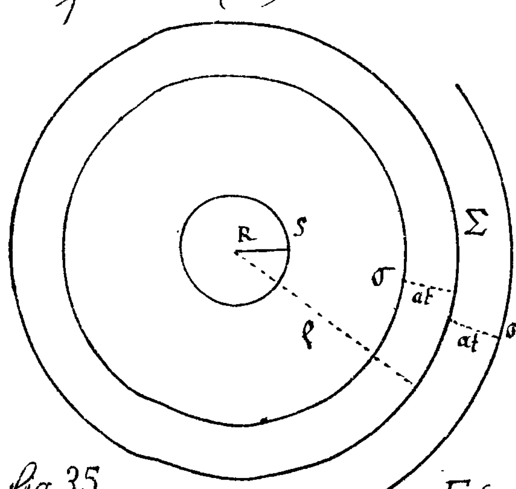


fig. 35

Imaginons qu'au temps 0 la sphère S soit immobile ainsi que le fluide qui l'environne immédiatement, et qu'il n'y ait de mouvement dans le milieu qu'au delà d'une sphère Σ (fig. 35) de rayon ρ.

Ce mouvement est nécessairement représenté par l'équation générale (2^{bis}) et par un raisonnement que nous avons plusieurs fois répété, on voit que, pour les valeurs de r comprises entre R et ρ, on a

$$F(r) = 0 \qquad G(r) = 0.$$

Quel sera le mouvement du fluide au temps t, inférieur à $\frac{\rho - R}{a}$? Pour les valeurs de r comprises entre R et $(\rho - at)$, on aura

$$F(r-at)=0 \qquad G(r-at)=0$$

Pour les valeurs de r comprises entre $(\rho-at)$ et $(\rho+at)$, on aura

$$F(r-at)=0$$

Donc, au temps t, entre la sphère S et la sphère σ de rayon $(\rho-at)$, il n'y aura aucun mouvement ; entre la sphère σ et la sphère σ' de rayon $(\rho+at)$, le mouvement du fluide sera simplement représenté par l'équation

(24) .... $\psi=\dfrac{G(r+at)}{r}$

Cette équation représente donc un mouvement qui se propage de l'infini vers la sphère S.

Au lieu de vérifier l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (11), que vérifie la fonction potentielle des vitesses des ondes progressives, la fonction potentielle des vitesses des ondes regressives vérifie l'équation aux dérivées partielles.

(25) .... $\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial(r\psi)}{\partial t}-\dfrac{\partial(r\psi)}{\partial r}=0$

Cette égalité (25) permettrait de démontrer que, dans le cas des ondes régressives comme dans le cas des ondes progressives, la méthode de Poisson conduit à des conséquences qui concordent avec le principe d'Huygens. Nous renverrons, pour cette démonstration, à la note de M. Beltrami.

---

§ 3. — . Ondes sphériques propageant un mouvement périodique

Nous avons supposé jusqu'ici que le milieu fût le siège d'un petit mouvement dont la fonction potentielle des vitesses ψ eût la même valeur en tous les points d'une sphère ayant pour centre le point O. La fonction ψ dépendait seulement des deux variables r et t et vérifiait l'équation aux dérivées partielles

(2^{bis}) .... $\dfrac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}=0$

Nous supposerons maintenant que ce mouvement soit un mouvement périodique, de période T. La fonction ψ devra alors être une fonction périodique de t, de période T, oscillant autour de la valeur qui convient à l'équilibre, c'est-à-dire de la valeur 0 et cela pour chaque valeur de r. On pourra donc d'après le théorème de Fourier, écrire :

(26) .... $\psi=A_1\sin 2\pi\dfrac{t}{T}+A_2\sin 4\pi\dfrac{t}{T}+$ ....

$+B_1\cos 2\pi\dfrac{t}{T}+B_2\cos 4\pi\dfrac{t}{T}+$ ....

les quantités

$$A_1,\ A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots B_1,\ B_2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

étant des fonctions de la variable r

On déduit de l'égalité (26):

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}$$

$$= \left[\frac{d^2(rA_1)}{dr^2} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 rA_1\right] \sin 2\pi\frac{t}{T} + \left[\frac{d^2(rB_1)}{dr^2} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 rB_1\right] \cos 2\pi\frac{t}{T}$$

$$+ \left[\frac{d^2(rA_2)}{dr^2} + \left(\frac{4\pi}{aT}\right)^2 rA_2\right] \sin 4\pi\frac{t}{T} + \left[\frac{d^2(rB_2)}{dr^2} + \left(\frac{4\pi}{aT}\right)^2 rB_2\right] \cos 4\pi\frac{t}{T}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'après l'égalité (2 bis), cette quantité doit être égale à 0 quelque soit t. On doit donc avoir, en général

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{d^2(rA_i)}{dr^2} + \left(\dfrac{2i\pi}{aT}\right)^2 r\,A_i = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2(rA_i)}{dr^2} + \left(\dfrac{2i\pi}{aT}\right)^2 r\,B_i = 0 \end{cases}$$

Si l'on pose

$$r\lambda = u$$

l'équation différentielle

$$\frac{d^2(r\lambda)}{dr^2} + K^2 r\lambda = 0$$

se réduit à l'équation (14) du chapitre XI, que nous savons intégrer; l'équation précédente donne.

$$\lambda = \frac{m \cos K\,(r+\delta)}{r}$$

m et δ étant deux constantes arbitraires. Si donc nous désignons par m_i, n_i α_i β_i, quatre constantes, les équations (27) nous donneront:

$$A_i = \frac{m_i}{r}\cos\frac{2i\pi}{aT}\,(r+\alpha_i),$$

$$B_i = \frac{n_i}{r}\cos\frac{2i\pi}{aT}\,(r+\beta_i).$$

Moyennant ces valeurs des coefficients A_i, B_i .... l'égalité (26) devient

$$(28) \ldots\ldots \psi = \frac{1}{r}\Big[m_1 \cos\frac{2\pi}{aT}(r+\alpha_1)\,\mathrm{Sin}\,2\pi\frac{t}{T} + m_2 \cos\frac{4\pi}{aT}(r+\alpha_2)\,\mathrm{Sin}\,4\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

$$+ n_1 \cos\frac{2\pi}{aT}(r+\beta_1)\,\mathrm{Cos}\,4\pi\frac{t}{T} + n_2 \cos\frac{4\pi}{aT}(r+\beta_2)\,\mathrm{Cos}\,4\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots\Big]$$

Soit, en un point M dont r est la distance au point O, f la vitesse au temps t, comptée positivement suivant OM. Nous aurons

$$f = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

ou bien d'après l'égalité (28)

$$f = \frac{1}{r^2}\Big[m_1 \cos\frac{2\pi}{aT}(r+\alpha_1)\,\mathrm{Sin}\,2\pi\frac{t}{T} + m_2\,\mathrm{Cos}\frac{4\pi}{aT}(r+\alpha_2)\,\mathrm{Sin}\,4\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

$$+ n_1\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{aT}(r+\beta_1)\cos 2\pi\frac{t}{T} + m_2\,\mathrm{Cos}\frac{4\pi}{aT}(r+\beta_2)\cos 4\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots\Big]$$

$$+ \frac{1}{r}\,\frac{2\pi}{aT}\Big[m_1\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{aT}(r+\alpha_1)\,\mathrm{Sin}\,2\pi\frac{t}{T} + 2m_2\,\mathrm{Sin}\frac{4\pi}{aT}(r+\alpha_2)\,\mathrm{Sin}\,4\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

$$+ n_1\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{aT}(r+\beta_1)\,\mathrm{Cos}\,2\pi\frac{t}{T} + 2n_2\,\mathrm{Sin}\frac{4\pi}{aT}(r+\beta_2)\cos 4\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots\Big]$$

Supposons que nous ayions affaire à un son assez aigu pour que sa longueur d'onde

$$\lambda = aT$$

soit très petite par rapport aux distances r que nous considérons. Le facteur $\frac{1}{r^2}$ sera alors négligeable en présence du facteur $\frac{1}{r}\,\frac{2\pi}{aT}$, et l'égalité précédente se réduira à

$$(29) \ldots\ldots\ldots\ldots f = \frac{2\pi}{aT}\,\frac{J}{r}$$

en désignant par J la fonction de r et de t que définit l'égalité suivante:

$$(30) \ldots\ldots J = m_1\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{aT}(r+\alpha_1)\,\mathrm{Sin}\,2\pi\frac{t}{T} + 2m_2\,\mathrm{Sin}\frac{4\pi}{aT}(r+\alpha_2)\,\mathrm{Sin}\,4\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

$$+ n_1\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{aT}(r+\beta_1)\,\mathrm{Cos}\,2\pi\frac{t}{T} + 2n_2\,\mathrm{Sin}\frac{4\pi}{aT}(r+\beta_2)\,\mathrm{Cos}\,4\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

Cette quantité J est une fonction périodique de t, ayant pour période T, et une fonction périodique de r ayant pour période $\lambda = aT$; envisagée d'une manière ou de l'autre, la valeur moyenne autour de laquelle elle oscille est la valeur 0.

En un point M, dont la distance au point O est r, nous nommerons intensité du son la quantité

$$\mathcal{J} = \frac{\rho}{2T}\int_t^{t+T} f^2\,dt = \frac{\rho}{2T}\int_t^{t+T} (u^2+v^2+w^2)\,dt.$$

dans laquelle ρ désigne la densité du fluide.

D'après l'égalité (29), cette intensité a pour valeur

$$\mathcal{J} = \left(\frac{4\pi}{aT}\right)^2 \frac{\rho}{2T} \frac{1}{r^2} \int_t^{t+T} J^2 dt.$$

D'après ce que nous avons dit de la quantité J, le facteur $\int_t^{t+T} J^2 dt$ est une fonction périodique de r ayant pour période la longueur d'onde $\lambda = aT$ du son qui emplit l'espace.

Prenons, dans l'espace, deux points correspondants M et M', c'est à dire deux points dont les distances r et r' au point O diffèrent d'un nombre entier de longueur d'onde. En ces deux points la quantité

$$\int_t^{t+T} J^2 dt$$

a la même valeur. On a donc, d'après l'égalité précédente,

$$\frac{\mathcal{J}'}{\mathcal{J}} = \frac{r^2}{r'^2}$$

Si l'on prend dans l'espace deux points correspondants, l'intensité du son en ces deux points sera en raison inverse des carrés des distances de ces deux points au centre de la source sonore.

Cette proposition fondamentale n'est exacte que si les distances considérées sont très grandes par rapport à la longueur d'onde du son qui remplit l'espace; c'est en effet seulement à cette condition que l'on peut écrire l'égalité (29).

Chapitre XIII

Deux Sources Sonores dans le même milieu. Interférences. Battements.

§.1 —— Deux Sources sonores dans un même milieu.

Une première source sonore est formée par une sphère S de centre O, de rayon R; placée seule dans le milieu, et mise en mouvement à l'instant 0, elle y engendrerait un mouvement dont le potentiel des vitesses serait, à l'instant t, et au point M,

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \psi = \frac{F(r-at)}{r},$$

r étant la distance OM. La fonction F est choisie de manière à satisfaire aux conditions aux limites qui ont lieu le long de la sphère S. Si $f(t)$ est la vitesse d'un point de cette sphère suivant la normale extérieure à la sphère, on a, en tout point de la sphère S

$$(2) \ldots\ldots \quad f(t) = -\frac{\partial \psi(R,t)}{\partial R} = -\frac{1}{R}\left[\frac{dF(R-at)}{dR} - \frac{F(R-at)}{R}\right]$$

Une seconde source sonore est formée par une sphère S', de centre O', de rayon R'; placée seule dans le milieu, et mise en mouvement à l'instant 0, elle y engendrerait un mouvement dont le potentiel des vitesses serait, à l'instant t, et au point M,

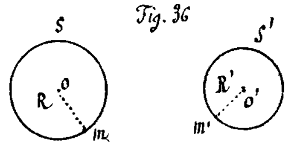
$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \psi' = \frac{F'(r'-at)}{r'}$$

r' étant la distance $O'M$. La fonction F' est choisie de manière à satisfaire aux conditions aux limites qui ont lieu le long de la sphère S'. Si $f'(t)$ est la vitesse d'un point de cette sphère suivant la normale extérieure à la sphère; on a, en tout point de la sphère S'

$$(4) \ldots\ldots \quad f'(t) = -\frac{\partial \psi'(R',t)}{\partial R'} = -\frac{1}{R'}\left[\frac{dF'(R'-at)}{dR'} - \frac{F'(R'-at)}{R'}\right]$$

Imaginons maintenant que l'on place la sphère S et la sphère S' dans un même milieu au repos, (fig. 36); qu'à l'instant 0, on mette la sphère S en-

Fig. 36



mouvement, et qu'à l'instant θ, on anime la sphère S'. A quelles conditions sera soumis le Potentiel des vitesses Ψ du mouvement engendré dans le milieu ?

1° En tout point du milieu, à tout instant, on devra avoir:

(5) .... $a^2 \Delta \Psi = \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$

2° Dans tout le milieu, pour toute valeur de t inférieure à 0, on doit avoir

(6) .... $\Psi = 0$

3° En tout point m de la sphère S on doit avoir:

(7) .... $\dfrac{\partial \Psi(m,t)}{\partial R} + f(t) = 0$

4° En tout point m' de la sphère S' on doit avoir:

(8) .... $\dfrac{\partial \Psi(m',t)}{\partial R'} + f'(t-\theta) = 0$

Peut-on vérifier toutes ces conditions en posant:

$$\Psi(M,t) = \psi(r,t) + \psi'(r', t-\theta),$$
$$= \frac{F(r-at)}{r} + \frac{F'(r'-at+a\theta)}{r'} \ ?$$

Cette expression vérifie évidemment les égalités (5) et (6).
En tout point m de la sphère S, elle donne:

(9) ... $$\frac{\partial \Psi(m,t)}{\partial R} = -\frac{1}{R}\left[\frac{dF(R-at)}{\partial R} - \frac{F(R-at)}{R}\right]$$
$$-\frac{1}{O'm}\left[\frac{dF'(r'-at+a\theta)}{dr'} - \frac{F(r'-at-a\theta)}{r'}\right] \mathrm{Cos}(om, o'm).$$

En tout point m' de la sphère S', elle donne

(10) ...... $$\frac{\partial \Psi(m',t)}{\partial R'} = -\frac{1}{R'}\left[\frac{dF'(R'-at+a\theta)}{dR'} - \frac{F'(R'-at+a\theta)}{R'}\right]$$
$$-\frac{1}{Om'}\left[\frac{dF(r-at)}{dr} - \frac{F(r-at)}{r}\right] \mathrm{Cos}(O'm', Om').$$

En général, ces égalités (9) et (10) sont incompatibles avec les égalités (7) et (8), car $f(t)$ est indépendant de $\mathrm{Cos}(Om, O'm)$ et $f'(t-\theta)$ est indépendant de $\mathrm{Cos}(O'm', Om')$.

Toutefois, si les rayons R et R' des deux sources sonores sont très petits par rapport à la distance OO' qui les sépare, les égalités (9) et (10) pourront être réduites à

$$\frac{\partial \Psi(m,t)}{\partial R} = -\frac{1}{R}\left[\frac{dF(R-at)}{\partial R} - \frac{F(R-at)}{R}\right],$$

$$\frac{\partial \Psi(m',t)}{\partial R'} = -\frac{1}{R'}\left[\frac{dF'(R'-at+a\theta)}{dR'} - \frac{F'(R'-at+a\theta)}{R'}\right].$$

Si l'on se reporte alors aux égalités (2) et (4) on voit que les égalités (7) et (8) seront vérifiées.

Ainsi, si l'on place dans un même milieu deux sources sonores très petites à une distance finie l'une de l'autre, si l'on met la première en mouvement au temps 0 et la seconde au temps θ, le Potentiel des vitesses à l'instant t sera représenté, en tout point du milieu, par l'équation

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Psi(t) = \frac{F(r-at)}{r} + \frac{F'(r'-at+a\theta)}{r'}$$

Au point M, à l'instant t, les composantes de la vitesse de ce mouvement sont :

$$U(M,t) = -\frac{\partial \Psi(t)}{\partial x},$$

$$V(M,t) = -\frac{\partial \Psi(t)}{\partial y},$$

$$W(M,t) = -\frac{\partial \Psi(t)}{\partial z}.$$

Ces égalités peuvent s'écrire

$$U(M,t) = -\frac{\partial \psi(t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi'(t-\theta)}{\partial x},$$

$$V(M,t) = -\frac{\partial \psi(t)}{\partial y} - \frac{\partial \psi'(t-\theta)}{\partial y},$$

$$W(M,t) = -\frac{\partial \psi(t)}{\partial z} - \frac{\partial \psi'(t-\theta)}{\partial z}.$$

Si la première source, placée seule dans le milieu, avait été mise en mouvement à l'instant 0, elle eût engendré au point M, à l'instant t, une vitesse

$$u = -\frac{\partial \psi(t)}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \psi(t)}{\partial y} \qquad w = -\frac{\partial \psi(t)}{\partial z}.$$

Si la seconde source, placée seule dans le milieu, avait été mise en mouvement à l'instant θ, elle eût engendré au point M, à l'instant t, une vitesse

$$u' = -\frac{\partial \psi'(t-\theta)}{\partial x}, \qquad v' = -\frac{\partial \psi'(t-\theta)}{\partial y}, \qquad w' = -\frac{\partial \psi'(t-\theta)}{\partial z}\,;$$

Les égalités précédentes peuvent donc s'écrire :

$$U(M,t) = u + u',$$
$$V(M,t) = v + v',$$
$$W(M,t) = w + w'.$$

D'où le théorème suivant :

Deux sources sonores très petites, placées dans un même milieu, engendrent en chaque point de ce milieu une vitesse qui s'obtient en composant entre elles les vitesses qu'engendreraient, au même instant et au même point, chacune des deux sources considérées isolément.

§2 – Interférences de deux sons.

Appliquons le Théorème précédent à l'exemple que voici :

La source sonore S émet un mouvement dont le Potentiel des vitesses est

$$\psi = \frac{A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right)}{r}\,.$$

La source S' émet un mouvement identique au précédent

$$\psi' = \frac{A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r'}{aT}\right)}{r'}\,.$$

La vitesse f du son envoyé par la première source en un point M étant comptée positivement suivant OM, a pour valeur

$$f = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{A}{r^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right) - \frac{A}{r}\,\frac{2\pi}{aT}\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right)$$

Si la longueur d'onde $\lambda = aT$ du son émis par la source est très petite par rapport à la distance r que l'on considère, cette égalité se réduira sensiblement à

$$f = -\frac{A}{r}\,\frac{2\pi}{aT}\,\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right)$$

On voit alors que le mouvement vibratoire sera, en tout point du milieu, un mouvement vibratoire simple.

Supposons que l'on mette en mouvement les deux sources S et S', cette dernière un temps θ après la première. Le potentiel des vitesses du mouvement engendré dans le milieu sera, d'après ce que nous avons vu au § précédent

$$\Psi = A\left[\frac{1}{r}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right) + \frac{1}{r'}\cos 2\pi\left(\frac{t-\theta}{T} - \frac{r'}{aT}\right)\right].$$

Calculons l'une des composantes de la vitesse en un point du milieu, par exemple la composante u parallèle à OX. Nous aurons :

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = A\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right) + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial x}{\partial x}\cos 2\pi\left(\frac{t-\theta}{T} - \frac{r'}{aT}\right)\right]$$
$$+\frac{2\pi A}{aT}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right) + \frac{1}{r'}\frac{\partial r'}{\partial x}\sin 2\pi\left(\frac{t-\theta}{T} - \frac{r'}{aT}\right)\right].$$

Nous supposons le point M situé à une distance des deux sources grande par rapport à la distance OO' de ces deux sources ; nous supposons ainsi cette distance grande par rapport à la longueur d'onde aT du son émis par les deux sources. Ces deux hypothèses permettent de réduire l'égalité précédente à

$$u = \frac{2\pi A}{aT}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t-\theta}{T} - \frac{r'}{aT}\right)\right].$$

Cette égalité peut se transformer de manière à fournir la première des trois égalités

$$u = \frac{4\pi A}{aT}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\sin \pi\left(\frac{2t-\theta}{T} - \frac{r+r'}{aT}\right)\cos\pi\left(\frac{r'-r+a\theta}{aT}\right),$$
$$v = \frac{4\pi A}{aT}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\sin \pi\left(\frac{2t-\theta}{T} - \frac{r+r'}{aT}\right)\cos\pi\left(\frac{r'-r+a\theta}{aT}\right),$$
$$w = \frac{4\pi A}{aT}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z}\sin \pi\left(\frac{2t-\theta}{T} - \frac{r+r'}{aT}\right)\cos\pi\left(\frac{r'-r+a\theta}{aT}\right).$$

Ces égalités montrent qu'aux points où l'on a

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cos\pi\left(\frac{r'-r+a\theta}{aT}\right) = 0,$$

on a

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

et qu'en ces points, par conséquent, l'air ne vibre pas.

L'égalité (5) exige que l'on ait pour $(r'-r)$ l'une des valeurs

$$r = -\left(a\theta + \frac{T}{2}\right), \; -a\left(\theta + \frac{3T}{2}\right), \; -a\left(\theta + \frac{5T}{2}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\left(a\theta - \frac{T}{2}\right), \; -a\left(\theta - \frac{3T}{2}\right), \; -a\left(\theta - \frac{5T}{2}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Elle définit donc une série d'hyperboloïdes de révolution à deux nappes, ayant pour foyer les centres O, O' des deux sources S, S'. A la surface de chacun de ces hyperboloïdes, il y aura silence

Pour réaliser cette expérience, il faut d'abord prendre des sources sonores capables de réaliser des sons simples ; on prend à cet effet des diapasons qui, l'expérience le montrent, donnent sensiblement naissance à de pareils sons. Ces sources, il est vrai, sont loin de réaliser les conditions de symétrie des deux sources sphériques S et S' imaginées dans la théorie précédente ; néanmoins, dans une direction peu différente de la normale à une ligne joignant ces deux diapasons on peut les regarder comme donnant des effets auxquels peuvent sensiblement s'appliquer les raisonnements qui précédent.

Il s'agit ensuite de les faire vibrer très exactement à l'unisson. A cet effet, on emploie un artifice indiqué par Lord Rayleigh (1). « Un diapason interrupteur qui fait 128 vibrations par secondes est placé sur le parcours d'un courant qui « par un procédé électromagnétique, entretient deux autres diapasons, dont chacun fait « ainsi très exactement 256 vibrations par seconde. Deux résonateurs, accordés à ces « diapasons renforcent le son qu'ils émettent. On pouvait alors observer les points de « l'espace où ne se produisait aucun son durant la vibration des deux diapasons, tandis « qu'il suffisait d'arrêter un des deux diapasons pour y entendre un son très notable. »

Cette expérience d'acoustique est conçue à l'imitation de la célèbre expérience de Fresnel dite expérience des deux miroirs.

---

§3 — Battements (2)

Nous allons supposer maintenant que l'on place dans le même milieu deux sources sonores dont chacune rend un son simple, ces deux sons simples ayant des hauteurs peu différentes.

Soient

$$\psi = \frac{A}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right),$$

et

$$\psi' = \frac{A'}{r'} \cos 2\pi \left(\frac{t-\theta}{T'} - \frac{r'}{aT'}\right)$$

les Potentiels des Vitesses des deux mouvements engendrés par ces sources.

La composante u de la vitesse en un point sera, en négligeant les termes en $\frac{1}{r}$ devant les termes en $\frac{1}{aT}$.

$$u = \frac{2\pi}{aT} \frac{A}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{aT}\right)$$

$$\frac{2\pi}{aT'} \frac{A'}{r'} \frac{\partial r'}{\partial x} \sin 2\pi \left(\frac{t-\theta}{T'} - \frac{r'}{aT'}\right).$$

---

(1) Lord Rayleigh. Theory of Sound Chap. XIV.

(2) Les battements ont été étudiés tout d'abord par Sauveur (Histoire de l'Académie des Sciences. Année 1700.)

Posons

$$\left(\frac{2\pi}{aT}\;\frac{A}{r}\;\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{2\pi}{aT'}\;\frac{A'}{r'}\;\frac{\partial r'}{\partial x}\right)=M\,,$$

$$\left(\frac{2\pi}{aT}\;\frac{A}{r}\;\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{2\pi}{aT'}\;\frac{A'}{r'}\;\frac{\partial r'}{\partial x}\right)=M'.$$

L'égalité précédente deviendra

$$u=\frac{M+M'}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{aT}\right)+\frac{M-M'}{2}\sin 2\pi\left(\frac{t-\theta}{T'}-\frac{r'}{aT'}\right)$$

$$=M\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}-\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]$$

$$\times\cos\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]$$

$$+M'\cos\pi\left[\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}-\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]$$

$$\times\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]$$

Posons

$$M\cos\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT}\right]=\mathcal{A}\cos\alpha$$

$$M'\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]=\mathcal{A}\sin\alpha.$$

L'égalité précédente deviendra

$$u=\mathcal{A}\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}-\frac{r'+a\theta}{aT'}+\frac{\alpha}{\pi}\right]$$

Les valeurs de v et de w se trouvent d'une manière analogue; les résultats ainsi obtenus sont résumés dans les tableaux suivants

$$(6)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{2\pi}{aT'}\frac{A'}{r'}\frac{\partial r'}{\partial x}\right)\cos\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]+\mathcal{A}\cos\alpha=0,\\
&\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{2\pi}{aT'}\frac{A'}{r'}\frac{\partial r'}{\partial x}\right)\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]+\mathcal{A}\sin\alpha=0,\\
&\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{2\pi}{aT'}\frac{A'}{r'}\frac{\partial r'}{\partial y}\right)\cos\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]+\mathcal{B}\cos\beta=0,
\end{aligned}\right.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{2\pi}{aT'}\frac{A}{r'}\frac{\partial r'}{\partial y}\right)\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]+\mathcal{B}\sin\beta=0\,,\\
&\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{2\pi}{aT'}\frac{A'}{r'}\frac{\partial r'}{\partial z}\right)\cos\pi\left[\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]+\mathcal{C}\cos\gamma=0\,,\\
&\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{2\pi}{aT'}\frac{A'}{r}\frac{\partial r'}{\partial z}\right)\sin\pi\left[\left(\frac{t}{T}-\frac{t}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}+\frac{r'+a\theta}{aT'}\right]+\mathcal{C}\sin\gamma=0\,;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(7)\ \ldots\ldots\ldots\ldots
\left\{
\begin{aligned}
u&=\mathcal{A}\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}-\frac{r'+a\theta}{aT'}+\frac{\alpha}{\pi}\right],\\
v&=\mathcal{B}\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}-\frac{r'+a\theta}{aT'}+\frac{\beta}{\pi}\right],\\
w&=\mathcal{C}\sin\pi\left[\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)t-\frac{r}{aT}-\frac{r'+a\theta}{aT'}+\frac{\gamma}{\pi}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

D'après les égalités (6), les quantités

$$
\begin{matrix}
\mathcal{A}, & \cos\alpha, & \sin\alpha,\\
\mathcal{B}, & \cos\beta, & \sin\beta,\\
\mathcal{C}, & \cos\gamma, & \sin\gamma,
\end{matrix}
$$

sont des fonctions périodiques de t ayant toutes pour période

$$
(8)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathcal{T}=\frac{2}{\dfrac{1}{T}-\dfrac{1}{T}},
$$

$$
=\frac{2\,T\,T'}{T'-T}
$$

Pendant le temps $\mathcal{T}$, la quantité α varie de 2π

Si les deux sons simples émis par les deux sources ont des périodes T et T' très voisines, la période $\mathcal{T}$ sera très grande par rapport à chacune des périodes T et T'. Les variations de α seront très petites par rapport aux variations de

$$
\pi\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)t
$$

Dès lors, les égalités (7) représenteront très sensiblement une vibration périodique simple, de période

$$
(9)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \tau=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)
$$

L'effet produit sur l'oreille par l'ensemble des deux sources sonores considérées, qui ne sont pas rigoureusement à l'unisson, est sensiblement l'effet d'un son simple dont le nombre de vibrations par seconde serait la moyenne des nombres de vibrations des deux sons émis.

L'intensité de ce son sera

$$\mathcal{I} = \frac{\rho}{2T} \int_t^{t+T} (u^2+v^2+w^2)\,dt.$$

Dans l'intégration, on peut traiter comme des constantes les quantités $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha, \beta, \gamma$, qui varient peu lorsque t varie de t à $t+T$. L'égalité précédente donne alors

(10) .... $\mathcal{I} = \frac{\rho}{\tau}\left(\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2\right)$

Cette intensité, donnée par l'égalité (10), n'est pas absolument indépendante du temps; c'est une fonction périodique du temps, dont la période, égale à la moitié de la valeur de $\mathcal{T}$ par l'égalité (8), est très longue par rapport à la période de chacun des deux sons émis. L'intensité du son perçu oscillera donc entre un maximum et un minimum; le nombre de maxima (ou battements) par seconde sera

$$\frac{2}{\mathcal{T}} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'}$$

Il sera égal à la différence du nombre de vibrations par secondes des deux sons émis

Ce phénomène des battements, très facile à constater au moyen de deux diapasons presque exactement accordés, a frappé depuis longtemps les acousticiens. Il rend très sensible une légère différence entre la hauteur de deux sons, et sert à accorder deux instruments avec précision.

Nous avons dit que la hauteur du son entendu différait peu de la hauteur moyenne des deux sons émis et, partant, de la hauteur de chacun de ces deux sons, qui sont presque à l'unisson.

M.M. Boussinesq et Terquem (1) ont tenté d'atteindre une plus grande précision dans la détermination de la hauteur du son entendu; mais leur raisonnement repose sur une hypothèse qui nous semble trop arbitraire pour que nous la reproduisions ici.

Nous avons traité des battements de deux sons simples; mais la théorie peut s'étendre aux battements des sons complexes. Imaginons par exemple qu'une des deux sources émette un son complexe formé par la superposition de deux sons, harmoniques l'un de l'autre; le premier correspondant à n vibrations par secondes; le second, par exemple à $2n$. Imaginons que l'autre source émette un son simple de n' vibrations par secondes, le nombre n' étant très voisin de $2n$.

L'oreille éprouvera l'effet que lui ferait éprouver la superposition d'un son simple d'intensité

(1) Terquem et Boussinesq. Recherches sur la Théorie des Battements (Journal de Physique. 1re Série. T. IV, p. 93)

constante, de n vibrations par secondes; et d'un second son simple, qui exécuterait à peu près $2n$ vibrations par secondes, mais qui aurait une intensité variable, présentant, par secondes

$$(2n - n')$$

maxima séparés par autant de minima.

Nous conseillerons au lecteur désireux d'approfondir les propriétés acoustiques des battements, l'étude des chapitres VIII et X de la Théorie Physiologique de la Musique de M. Helmholtz.

Chapitre XIV.

La Réflexion et la Réfraction du Son.

§1. —— Réflexion et Réfraction des ondes planes

Dans les précédents chapitres, nous avons examiné la propagation et les principales propriétés d'un petit mouvement produit au sein d'un milieu fluide unique; nous allons maintenant examiner, sinon d'une manière générale, au moins dans un cas particulier très étendu, les propriétés d'un petit mouvement produit au sein d'un système formé de deux fluides différents. Cette étude nous fera connaître les lois de la réflexion et de la réfraction du son.

Après que Fresnel eut donné sa théorie mécanique de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface de séparation de deux milieux isotropes, les géomètres durent naturellement se proposer de déduire des données précises de l'Hydrodynamique les lois de la réflexion et de la réfraction du son à la surface de séparation de deux fluides.

Poisson aborda en premier lieu (1) l'étude détaillée de la réflexion et de la réfraction d'ondes planes qui tombent normalement sur une surface plane séparant deux fluides différents.

Dans un Mémoire ultérieur (2), Poisson aborda, dans son entière généralité, l'étude de la propagation dans un système formé de deux fluides élastiques superposés

---

(1) Poisson. Mémoire sur le mouvement des fluides élastiques dans des tuyaux cylindriques et sur la Théorie des Instruments à vent. (Nouveaux mémoires de l'Académie T II page 372. 1819)

(2) Poisson. Mémoire sur le mouvement de deux fluides élastiques superposés (Ibid. T X p. 317. 1823)

suivant une surface plane d'un petit ébranlement qui, dans un milieu unique, se propagerait par ondes sphériques. Puis supposant le centre d'ébranlement très éloigné, il a établi les lois de la réflexion et de la réfraction d'ondes planes qui tombent obliquement sur la surface de séparation.

La théorie de Poisson reposait sur les calculs les plus longs et les plus épineux. Dans un très court, mais très beau Mémoire, Green[1] montra que la théorie de la réflexion et de la réfraction des ondes planes pouvait être présentée d'une manière beaucoup plus simple ; il parvint ainsi à éviter quelques erreurs qui s'étaient glissées dans l'analyse de Poisson, et à confirmer complètement ce résultat remarquable obtenu par l'illustre géomètre : Les lois de la réflexion et de la réfraction des ondes sonores sont représentées par les formules que Fresnel avait indiquées comme réglant la réflexion et la réfraction de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

C'est la théorie de Green que nous nous bornerons à exposer dans le présent Chapitre ; la théorie plus générale de Poisson conduit à des calculs trop compliqués pour qu'il soit possible de les présenter ici. Nous nous inspirerons non seulement du travail de Green, mais encore de l'exposé qui en a été donné par Lord Rayleigh[2].

Lorsque deux fluides 1 et 2 sont en contact le long d'une surface Σ, nous savons que l'on doit avoir, en tout point de la surface Σ, les égalités suivantes

(1) .... $u_1 \cos(n_1,x) + v_1 \cos(n_1,y) + w_1 \cos(n_1,z)$
$$+ u_2 \cos(n_2,x) + v_2 \cos(n_2,y) + w_2 \cos(n_2,z) = 0,$$

(2) .... $\Pi_1 = \Pi_2$.

Ces égalités ont été données au Chapitre III, sous les N^os^ (15) et (16).

Voyons ce que deviennent ces conditions lorsque les mouvements qui animent les deux fluides sont de petits mouvements admettant une fonction potentielle des vitesses.

Soit φ_1 la fonction potentielle des vitesses dans le premier fluide. Soit Ω_1 le volume spécifique de ce fluide au repos. Considérons, comme au Chapitre XII Egalité (5), la fonction

(3) .... $\psi_1 = \varphi_1 - G_1(\Omega_1)(t - \tau_1)$,

τ_1 étant une constante choisie de manière que ψ_1 ait la valeur 0 jusqu'au début du mouvement.

Nous aurons

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - G_1(\Omega_1)$$

---

[1] Green. On the reflexion and refraction of Sound. (Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1838 — Œuvres de Green, p. 231)

[2] Lord Rayleigh. Theory of Sound.

D'ailleurs, on a, en général,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = G_1(\omega_1).$$

Le volume spécifique du fluide en mouvement diffère très peu du volume spécifique du fluide en équilibre ; la quantité $(\omega_1 - \Omega_1)$ étant infiniment petite, on peut écrire

$$G_1(\omega_1) - G_1(\Omega_1) = (\omega_1 - \Omega_1)\frac{dG(\Omega_1)}{d\Omega_1}.$$

D'ailleurs la fonction $G_1(\omega_1)$ est définie par la relation [Chapitre VII Égalité (7)]

$$\frac{dG_1(\omega_1)}{d\omega_1} + \omega_1 \frac{df_1(\omega_1)}{d\omega_1} = 0.$$

Nous avons donc, tout calcul fait,

(4) .... $$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \omega_1 \frac{df_1(\omega_1)}{d\omega_1}(\omega_1 - \Omega_1).$$

Si, faisant usage, pour le second fluide, d'une notation analogue, on pose

(3^{bis}) .... $$\psi_2 = \varphi_2 - G_2(\Omega_2)(t - T_2),$$

on aura

(4^{bis}) .... $$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \omega_2 \frac{df_2(\omega_2)}{d\omega_2}(\omega_2 - \Omega_2).$$

On a, en général,

$$\Pi_1 = f_1(\omega_1), \qquad \Pi_2 = f_2(\omega_2).$$

L'égalité (2) deviendra donc, en général,

$$f_1(\omega_1) = f_2(\omega_2)$$

et dans le cas particulier de l'équilibre

$$f_1(\Omega_1) = f_2(\Omega_2).$$

De ces égalités, on déduit

$$f_1(\omega_1) - f_1(\Omega_1) = f_2(\omega_2) - f_2(\Omega_2),$$

ou

$$\frac{df_1(\omega_1)}{d\omega_1}(\omega_1 - \Omega_1) = \frac{df_2(\omega_2)}{d\omega_2}(\omega_2 - \Omega_2),$$

Égalité qui devient, en vertu des égalités (4) et (4^{bis}).

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{\omega_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial t},$$

ou bien, en désignant par ρ_1 et ρ_2 les densités des deux fluides,

$$(5) \quad \rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} .$$

D'après l'égalité (3), les deux fonctions φ_1 et ψ_1 ont les mêmes dérivées partielles par rapport à x_1, y_1, z_1. On a donc

$$(6) \quad u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \qquad v_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \qquad w_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}$$

On a, de même,

$$(6^{bis}) \quad u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \qquad v_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \qquad w_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial z_2}$$

L'égalité (1) devient alors

$$(7) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n_2} = 0$$

Les égalités (5) et (7) représentent les conditions relatives à la surface Σ.

Imaginons que la surface de séparation des deux milieux soit un plan indéfini ; prenons pour axe des z la normale n_1 à ce plan. Nous pourrons alors écrire l'équation (7) sous la forme :

$$(7^{bis}) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi_2}{\partial z}$$

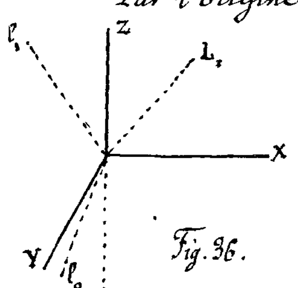


Fig. 36.

Par l'origine O des coordonnées (fig. 37), menons deux droites OL_1, Ol_1, dans le premier milieu, et une droite Ol_2 dans le second milieu. Que leurs cosinus directeurs soient

Pour la droite OL_1 : A_1, B_1, C_1 ;
Pour la droite Ol_1 : α_1, β_1, γ_1 ;
Pour la droite Ol_2 : α_2, β_2, γ_2 ;

La fonction

$$(8) \quad \psi_1' = F_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z + a_1 t)$$

représenterait la fonction potentielle des vitesses d'un petit mouvement se propageant par ondes planes, dans le premier milieu, suivant la direction $L_1 O$.

La fonction

$$(9) \quad \psi_1'' = f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - a_1 t)$$

représenterait la fonction potentielle des vitesses d'un petit mouvement se propageant par ondes planes, dans le premier milieu, suivant la direction Ol_1.

La fonction

$$(10) \quad \psi_2 = f_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - a_2 t)$$

représenterait la fonction potentielle des vitesses d'un petit mouvement se propageant par ondes planes, dans le second milieu suivant la direction Ol_2.

Nous allons voir s'il est possible de prendre pour fonction potentielle des vitesses dans le premier milieu la fonction

$$\psi_1 = \psi_1' + \psi_1''$$

et, pour fonction potentielle des vitesses dans le second milieu, la fonction ψ_2. Si cela est possible, nous dirons que l'égalité (8) définit la fonction potentielle des ondes incidentes ; l'égalité (9), la fonction potentielle des ondes réfléchies ; l'égalité (10) la fonction potentielle des ondes réfractées.

Il est d'abord évident que la fonction ψ_1 vérifie l'équation

$$a^2 \Delta \psi_1 = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t_2}$$

en tout point du premier milieu et que la fonction φ_2 vérifie l'équation

$$a^2 \Delta \psi_2 = \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial t^2}$$

en tout point du second milieu. Il suffit donc de s'assurer que les égalités (5) et (7^{bis}) sont vérifiées sur la surface de contact

$$z = 0$$

des deux fluides.

L'égalité ($7^{\underline{bis}}$) nous donne l'égalité

$$(11) \ldots\ldots \frac{C_1}{a_1} \frac{\partial F_1(A_1 x + B_1 y + a_1 t)}{\partial t} - \frac{\gamma_1}{a_1} \frac{\partial f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y - a_1 t)}{\partial t} + \frac{\gamma_2}{a_2} \frac{\partial f_2(\alpha_2 x + \beta_2 y - a_2 t)}{\partial t} = 0 .$$

L'égalité (5) nous donne

$$(12) \ldots\ldots \rho_1 \frac{\partial F_1(A_1 x + B_1 y + a_1 t)}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y - a_1 t)}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial f_2(\alpha_1 x + \beta_2 y - a_1 t)}{\partial t} = 0 .$$

De ces identités (11) et (12) nous déduisons les nouvelles identités

$$(13) \ldots\ldots \left(\frac{C_1}{a_1} \rho_2 + \frac{\gamma_2}{a_2} \rho_1\right) \frac{\partial F_1(A_1 x + B_1 y + a_1 t)}{\partial t} - \left(\frac{\gamma_1}{a_1} \rho_2 - \frac{\gamma_2}{a_2} \rho_2\right) \frac{\partial f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + a_1 t)}{\partial t} = 0,$$

$$(14) \ldots\ldots \left(\frac{C_1}{a_1}\rho_1 + \frac{\gamma_1}{a_1}\rho_1\right)\frac{\partial F_1(A_1x+B_1y+a_1t)}{\partial t}$$
$$-\left(\frac{\gamma_1}{a_1}\rho_2 + \frac{\gamma_2}{a_2}\rho_1\right)\frac{\partial f_2(\alpha_2x+\beta_2y+a_2t)}{\partial t} = 0.$$

Il ne peut y avoir identité entre deux fonctions dépendant chacune d'une variable que si l'une de ces variables est fonction de l'autre ; d'après cela, chacune des deux quantités

$$\alpha_1 x + \beta_1 y - a_1 t,$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y - a_2 t,$$

doit être fonction de la quantité :

$$A_1 x + B_1 y + a_1 t,$$

ce qui exige l'exactitude des relations :

$$(15) \ldots\ldots \frac{\alpha_1}{A_1} = \frac{\beta_1}{B_1} = -1,$$

$$(16) \ldots\ldots \frac{\alpha_2}{A_1} = \frac{\beta_2}{B_1} = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Interprétons ces relations

Les relations (15)

$$\alpha_1 = -A_1,$$
$$\beta_1 = -B_1,$$

conduisent aux lois suivantes :

Le rayon incident $L_1 O$, (fig 37), le rayon réfléchi Ol_1 et la normale OZ au plan d'incidence sont dans un même plan.

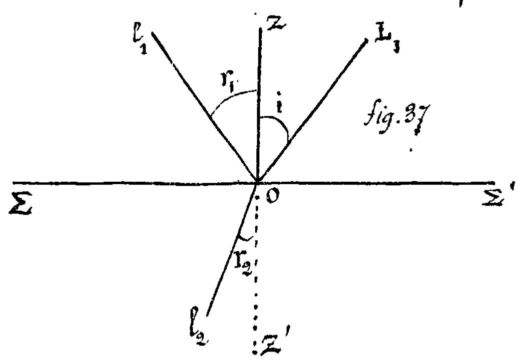


fig.37

Le rayon incident et le rayon réfléchi sont de part et d'autre de la normale au plan d'incidence.

L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion

Les relations (16) conduisent de même aux lois suivantes :

Le rayon incident $L_1 O$, le rayon réfracté Ol_2, et la normale OZ au plan d'incidence sont dans un même plan.

Le rayon incident et le rayon réfracté sont de part et d'autre de la normale au plan d'incidence.

Le rapport $\frac{\sin i_1}{\sin r_2}$ du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est constant et égal au rapport $\frac{a_1}{a_2}$ de la vitesse du son dans le premier milieu à la vitesse du son dans le second.

Moyennant les égalités (15) et (16), les relations (13) et (14) deviennent :

$$(13^{bis}) \ldots \left(\frac{C_1}{a_1}\rho_2 + \frac{\gamma_2}{a_2}\rho_1\right)\frac{\partial F_1(A_1x+B_1y+a_1t)}{\partial t} - \left(\frac{\gamma_1}{a_1}\rho_2 - \frac{\gamma_2}{a_2}\rho_1\right)\frac{\partial f_1[-(A_1x+B_1y+a_1t)]}{\partial t} = 0$$

$$(14^{bis}) \dots\dots\dots \left(\frac{C_1}{a_1}\rho_1 + \frac{\gamma_1}{a_1}\rho_1\right)\frac{\partial F_1(Ax+By+a_1t)}{\partial t}$$

$$-\left(\frac{\gamma_1}{a_1}\rho_2 - \frac{\gamma_2}{a_2}\rho_1\right)\frac{\partial f_2\left[-\frac{a_2}{a_1}(Ax+By+a_1t)\right]}{\partial t}$$

Désignons par ξ une quantité variable d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Les égalités (13^{bis}) et (14^{bis}) deviendront

$$(17) \dots\dots \begin{cases} \dfrac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi} = \dfrac{\dfrac{C_1}{a_1}\rho_2 + \dfrac{\gamma_2}{a_2}\rho_1}{\dfrac{\gamma_1}{a_1}\rho_2 - \dfrac{\gamma_2}{a_2}\rho_1} \dfrac{\partial F_1(-\xi)}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi} = \dfrac{\left(\dfrac{C_1}{a_1} + \dfrac{\gamma_1}{a_1}\right)\rho_1}{\dfrac{\gamma_1}{a_1}\rho_2 - \dfrac{\gamma_2}{a_2}\rho_1} \dfrac{\partial F_1\left(-\frac{a_1}{a_2}\xi\right)}{\partial \xi} \end{cases}$$

Les relations

$$\operatorname{Cos} i_1 = \operatorname{Cos} r_1 = C_1 = \gamma_1$$

$$\operatorname{Cos} r_2 = -\gamma_2$$

$$\frac{\operatorname{Sin} i_1}{\operatorname{Sin} i_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

donnent

$$\frac{\dfrac{C_1}{a_1}\rho_2 + \dfrac{\gamma_2}{a_2}\rho_1}{\dfrac{\gamma_1}{a_1}\rho_2 - \dfrac{\gamma_2}{a_2}\rho_1} = \frac{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - \dfrac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} i_1}}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} i_1}}$$

$$\frac{\left(\dfrac{C_1}{a_1} + \dfrac{\gamma_1}{a_1}\right)\rho_1}{\dfrac{\gamma_1}{a_1}\rho_2 - \dfrac{\gamma_2}{a_2}\rho_1} = \frac{2}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} r_1}}$$

Si l'on remarque alors qu'il est nécessaire de déterminer chacune des trois fonctions F_1, f_1, f_2, seulement à une constante près, on trouvera que l'on peut écrire les égalités (17) sous la forme :

$$(18) \dots\dots\dots \begin{cases} f_1(\xi) = \dfrac{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - \dfrac{\operatorname{cotg} r_2}{\operatorname{cotg} i_1}}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{\operatorname{cotg} r_2}{\operatorname{cotg} i_1}} F_1(-\xi), \end{cases}$$

$$\left(f_2(\xi) = \frac{2}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\text{Cotg}\, r_2}{\text{Cotg}\, i_1}} F_1\left(-\frac{a_1}{a_2}\xi\right)\right.$$

Ces formules déterminent le mouvement réfléchi et le mouvement réfracté quand le mouvement incident est donné.

Ces formules ne sont acceptables que si l'angle r_2, défini par la relation

$$\sin r_2 = \frac{a_2}{a_1} \sin i_1$$

est réel. Il en sera toujours ainsi si a_2 est inférieur à a_1 ; si a_2 est supérieur à a_1, il en sera encore ainsi tant qu'on aura

$$\sin i_1 < \frac{a_1}{a_2} \ ;$$

Mais, à partir du moment où $\sin i_1$ atteindra, pour la dépasser, la valeur $\frac{a_1}{a_2}$, les formules (18) cesseront d'être acceptables, et il en sera par conséquent de même des hypothèses sur lesquelles reposent ces formules. Nous sommes alors amenés à chercher d'autres hypothèses qui puissent, dans ce cas, se substituer aux précédentes ; nous ferons l'hypothèse qu'aucun mouvement ne se propage dans le milieu 2. La fonction f_2 étant identiquement nulle, les égalités (11) et (12) seront remplacées par

$$\frac{C_1}{a_1} \frac{\partial F_1(A_1 x + B_1 y + a_1 t)}{\partial t}$$
$$-\frac{\gamma_1}{a_1} \frac{\partial f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + a_1 t)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1(A_1 x + B_1 y + a_1 t)}{\partial t} - \frac{\partial f_1(\alpha_1 x + \beta_1 y - a_1 t)}{\partial t} = 0 .$$

De là on déduit sans peine les égalités

$$\alpha_1 = -A_1, \qquad \beta_1 = -B_1, \qquad \gamma_1 = -C_1,$$

qui fournissent entre l'onde incidente et l'onde réfléchie les mêmes relations de situation que par le passé. Ces relations admises, les égalités précédentes deviennent :

$$\frac{\partial F_1(A_1 x + B_1 y + a_1 t)}{\partial t} - \frac{\partial f_1(-A_1 x - B_1 y - a_1 t)}{\partial t} = 0 .$$

On en déduit la relation très simple

(19)............................ $f_1(\xi) = F_1(-\xi)$

qui lie le mouvement réfléchi au mouvement incident dans le cas où il y a réflexion totale.

La valeur de $f_1(\xi)$ donnée par l'égalité (18), peut-elle devenir identiquement nulle ? Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\rho_2 \operatorname{Cotg} i_1 - \rho_1 \operatorname{cotg} r_2 = 0 .$$

$\operatorname{Cotg} i_1$ et $\operatorname{Cotg} r_2$ étant toujours des quantités positives, cette égalité peut être remplacée par

(20) .... $\rho_2^2 \operatorname{Cotg}^2 i_1 - \rho_1^2 \operatorname{Cotg}^2 r_2 = 0$.

Mais on a

$$1 + \operatorname{Cotg}^2 i_1 = \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 i_1} ,$$

$$1 + \operatorname{Cotg}^2 r_1 = \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 r_2} ,$$

$$\frac{\operatorname{Sin} i_1}{\operatorname{Sin} r_2} = \frac{a_1}{a_2} .$$

De ces égalités, on déduit :

$$\operatorname{Cotg}^2 r^2 = \left(\frac{a_1^2}{a_2^2} - 1\right) + \frac{a_1^2}{a_2^2} \operatorname{Cotg}^2 i_1$$

et l'égalité (20) devient

(21) .... $\operatorname{Cotg}^2 i_1 = \dfrac{\dfrac{a_1^2}{a_2^2} - 1}{\dfrac{\rho_2^2}{\rho_1^2} - \dfrac{a_1^2}{a_2^2}}$.

Cette égalité n'est vérifiée par une valeur réelle de $\operatorname{Cotg} i_1$ que si le rapport $\frac{a_1}{a_2}$, qui est l'indice de réfraction du son passant du premier milieu dans le second, est compris entre $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et l'unité.

Si l'on suppose que le milieu 1 soit de l'air et le milieu 2 de l'eau, on trouve que cette égalité (21) est vérifiée pour une valeur de i_1 mesurée par 12° environ. Cette valeur est un peu inférieure à l'angle i'_1 pour lequel il y a réflexion totale.

Dès lors, examinons ce qui se passe lorsque l'angle d'incidence i_1 part de 0 et va en croissant, le milieu supérieur étant l'air et le milieu inférieur étant l'eau.

Il y a d'abord une onde réfléchie et une onde réfractée ; l'onde réfléchie va s'atténuant, et s'annule pour une valeur de l'angle d'incidence égale à 12° environ ; puis elle croît de nouveau ; pour une valeur de l'angle d'incidence définie par

$$\operatorname{Sin} i_1 = \frac{a_1}{a_2}$$

l'onde réfractée disparaît ; il y a désormais réflexion totale de l'onde incidente.

Cette existence d'une incidence particulière pour laquelle l'onde réfléchie cesse entièrement d'exister rapproche le phénomène de la réflexion du son du phénomène de la réflexion d'un rayon lumineux polarisé perpendiculairement au plan d'incidence.

Deux gaz parfaits ne peuvent demeurer séparés par une surface plane; mis au contact, ils se mélangent; si donc nous examinons ici, à l'exemple de Poisson et de Green, la réflexion et la réfraction du son à la surface de contact de deux gaz parfaits, ce sera simple jeu de formules; toutefois, ce calcul conduit à des résultats curieux que nous allons indiquer.

Pour deux gaz parfaits, nous avons:

$$a_1^2 = \frac{\Pi_1}{\rho_1} \frac{C_1}{c_1}$$

$$a_2^2 = \frac{\Pi_2}{\rho_2} \frac{C_2}{c_2}$$

Pour les gaz les plus voisins de l'état parfait, oxygène, hydrogène, azote, air, oxyde de carbone $\frac{C}{c}$ a sensiblement une valeur unique. On a donc, sous une même pression,

(22) .... $\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

ou bien

(22 bis) .... $\frac{\sin^2 i_1}{\sin^2 r_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

Les formules (18) deviennent alors

$$f_1(\xi) = \frac{\sin 2i_1 - \sin 2r_2}{\sin 2i_1 + \sin 2r_2} F_1(-\xi),$$

$$f_2(\xi) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{2\sin 2i_1}{\sin 2i_1 + \sin 2r_2} F_1\left(-\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\xi\right).$$

Ces formules sont semblables à celles que Fresnel a données pour exprimer les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière polarisée normalement au plan d'incidence.

La formule (21), qui donne l'incidence pour laquelle il n'existe pas d'onde réfléchie devient, dans ce cas

$$\cot^2 i = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Cette formule, rapprochée de la formule (22) devient

$$\operatorname{tg} i = \frac{a_1}{a_2}$$

L'incidence pour laquelle il n'y a pas de réflexion est celle dont la tangente est égale à l'indice de réfraction du son ; cette loi est semblable à celle que Brewster avait trouvée pour la lumière polarisée normalement au plan d'incidence.

Ces rapprochements entre la théorie de la réflexion de la lumière et la théorie de la réflexion du son sont curieux ; mais on n'y doit pas chercher une trop complète analogie reposant sur la nature même des phénomènes.

Revenons maintenant aux formules générales, et supposons que le son incident soit un son simple, en sorte que

$$\psi'_1 = A \operatorname{Cos} 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z}{a_1 T}\right)$$

Les formules (9), (10), (15), (16) et (18) donneront alors

$$(23)\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{aligned} \psi''_1 &= \frac{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - \dfrac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} i_1}}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} i_1}} A \operatorname{Cos} 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{A_1 x + B_1 y - C_1 z}{a_1 T}\right) \\ \psi_2 &= \frac{2}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} i_1}} A \operatorname{Cos} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z}{a_2 T}\right) \end{aligned}\right.$$

Les composantes de la vitesse du mouvement incident sont :

$$u'_1 = -\frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \qquad v'_1 = -\frac{\partial \psi'_1}{\partial y}, \qquad w'_1 = -\frac{\partial \psi'_1}{\partial z}$$

Les composantes de la vitesse du mouvement réfléchi sont

$$u''_1 = -\frac{\partial \psi''_1}{\partial x}, \qquad v''_1 = -\frac{\partial \psi''_1}{\partial y}, \qquad w''_1 = -\frac{\partial \psi''_1}{\partial z}$$

Les composantes de la vitesse du mouvement réfracté sont :

$$u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \qquad v_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \qquad w_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial z}$$

L'intensité du son incident est :

$$\mathcal{J}'_1 = \frac{\rho_1}{2T} \int_0^T \left(u'^2_1 + v'^2_1 + w'^2_1\right) dt.$$

L'intensité du son réfléchi est :

$$\mathcal{J}''_1 = \frac{\rho_1}{2T} \int_0^T \left(u''^2_1 + v''^2_1 + w''^2_1\right) dt$$

L'intensité du son réfracté est :

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\rho_2}{2T} \int_0^T \left(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2\right) dt.$$

On trouve sans peine

(24) .... $$\mathcal{J}'_1 = \frac{\rho_1 \mathcal{A}^2}{a_1^2 T}$$

(25) .... $$\mathcal{J}''_1 = \frac{\rho_1 \mathcal{A}^2}{a_1^2 T} \left(\frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\mathrm{Cotg}\, r_2}{\mathrm{Cotg}\, i_1}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mathrm{Cotg}\, r_2}{\mathrm{Cotg}\, i_1}} \right)^2,$$

(26) .... $$\mathcal{J}_2 = \frac{\rho_2 \mathcal{A}^2}{a_2^2 T} \frac{4}{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\mathrm{Cotg}\, r_2}{\mathrm{Cotg}\, i_1}\right)^2}$$

Prenons, dans le mouvement incident, un faisceau de rayons de section Ω_1 (fig 38). Le faisceau réfléchi correspondant a même section ; mais le faisceau réfracté une section Ω_2 telle que

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\cos r_2}{\cos i_1}$$

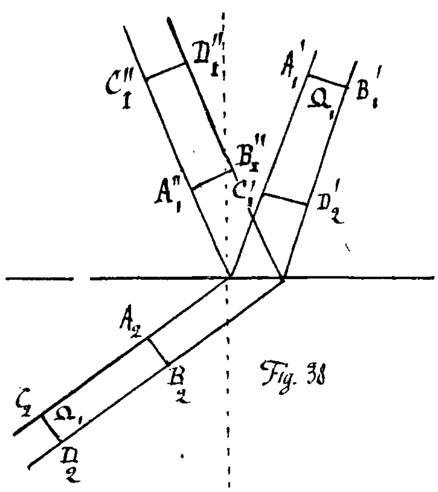


Fig. 38

Prenons :

Dans le premier faisceau,
Une concamération $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$, de longueur $a_1 T$;
Dans le second faisceau,
Une concamération $A''_1 B''_1 C''_1 D''_1$ de longueur $a_1 T$;
Dans le troisième faisceau,
Une concamération $A_2 B_2 C_2 D_2$ de longueur $a_2 T$.

A l'instant t, le fluide contenu dans la première concamération a une force vive

$$W'_1 = \frac{\rho_1 \Omega_1 a_1}{2} \int_0^T \left(u'^2_1 + v'^2_1 + w'^2_1\right) dt = T a_1 \Omega_1 \mathcal{J}'_1;$$

Le fluide contenu dans la seconde concamération a une force vive

$$W''_1 = \frac{\rho_1 \Omega_1 a_1}{2} \int_0^T \left(u''^2_1 + v''^2_1 + w''^2_1\right) dt = T a_1 \Omega_1 \mathcal{J}''_1;$$

Le fluide contenu dans la troisième concamération a une force vive

$$W_2 = \frac{\rho_2 \Omega_2 a_2}{2} \int_0^T \left(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 \right) dt = T a_2 \Omega_2 J_2$$

Formons la quantité

$$W_1'' + W_2 = T a_1 \Omega_1 \left(J_1'' + \frac{a_2}{a_1} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} J_2 \right)$$

$$= \frac{\rho_1 \Omega_1}{a_1} A^2 \left[\frac{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} i_1} \right)^2 + 4 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{a_1}{a_2} \frac{\Omega_2}{\Omega_1}}{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} i_1} \right)^2} \right]$$

Mais on a

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\operatorname{Sin} i_1}{\operatorname{Sin} r_2} \frac{\operatorname{Cos} r_2}{\operatorname{Cos} i_1} = \frac{\operatorname{Cotg} r_2}{\operatorname{Cotg} i_1}$$

et par conséquent

$$W_1'' + W_2 = \frac{\rho_1 \Omega_1}{a_1} A^2 = T a_1 \Omega_1 J_1' = W_1'$$

Ainsi, la force vive de la concamération incidente se partage intégralement entre la force vive de la concamération réfléchie et la force vive de la concamération réfractée.

La même propriété se retrouve dans les théories données par Fresnel, Mac Cullagh et Neumann, de la réflexion de la lumière ; elle constitue même l'une des hypothèses fondamentales de ces théories.

Les formules (25) et (26) supposent qu'il n'y ait pas réflexion totale. S'il y a réflexion totale, on a

$$f_2(\xi) = 0$$

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f_1(\xi) = F_1(-\xi)$$

On trouve alors, au lieu des formules (25) et (26)

$$J_2 = 0$$

$$J_1'' = \frac{\rho_1 A^2}{a_1^2 T} = J_1'$$

S'il y a réflexion totale, l'intensité de l'onde réfractée est nulle ; l'intensité de l'onde réfléchie est égale à l'intensité de l'onde incidente.

Nous ne pousserons pas plus loin cette étude de la réflexion et de la réfraction du son ; le lecteur trouvera de plus amples détails dans le Mémoire de Poisson que nous avons cité au début de ce chapitre.

Chapitre XV.

Les sons propres d'un espace

§ 1 – Vibrations périodiques d'une masse d'air quelconque

Nous avons étudié, dans les chapitres précédents, un certain nombre de problèmes particuliers d'Hydrodynamique, problèmes relatifs aux ondes planes et aux ondes sphériques. Ces problèmes très simples, étudiés depuis D. Bernoulli, d'Alembert, Euler et Lagrange, nous ont déjà permis d'expliquer un certain nombre de faits acoustiques : les lois des sons rendus par les tuyaux ouverts ou fermés, les interférences, les battements, la réflexion et la réfraction du son à la surface de deux milieux fluides. Nous allons maintenant revenir à l'étude des ondes quelconques, et en déduire, l'explication d'autres phénomènes acoustiques.

Imaginons une masse d'air enfermée en une surface S, qui est immobile ou animée d'un petit mouvement donné ; supposons cette masse d'air animée d'un petit mouvement quelconque doué d'un Potentiel des vitesses. Ce potentiel vérifie, en tout point de la masse d'air, l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \dots\dots\dots\dots \quad a^2 \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

En tout point M de la surface S on a

$$(2) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + V_n = 0,$$

n_i étant la normale en M à la surface S, vers l'intérieur de cette surface, et V_n la composante suivant cette direction n_i de la vitesse du point M de la paroi. V_n est une fonction donnée du temps.

Nous avons vu que l'on pouvait toujours choisir cette fonction φ de telle manière que, lorsque le système est en équilibre, on ait

$$\varphi = 0$$

Nous supposerons que φ ait été choisi de la sorte.

Demandons-nous si le petit mouvement qui anime cette masse d'air peut être un mouvement périodique de période T ; dans ce cas, φ serait une fonction périodique de t, de période T, oscillant autour de la valeur 0 ; d'après le Théorème de Fourier, φ pourrait s'écrire de la manière suivante :

$$\varphi = A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} + \cdots\cdots$$

$$+ B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} + \cdots\cdots$$

$A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ sont des fonctions d'x, y, z.

De cette égalité (3) on déduit :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} - \left(\frac{4\pi}{T}\right)^2 A_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} - \cdots\cdots$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} - \left(\frac{4\pi}{T}\right)^2 B_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} - \cdots\cdots$$

$$a^2 \Delta \varphi = a^2 \Delta A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + a^2 \Delta A_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} + \cdots\cdots$$

$$+ a^2 \Delta B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + a^2 \Delta B_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} + \cdots\cdots$$

Ces deux quantités $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ et $a^2 \Delta \varphi$ doivent être identiques d'après l'égalité (1). Les coefficients correspondants de leurs développements doivent être identiques. On doit donc avoir

$$(4) \cdots \left\{ \begin{array}{ll} \Delta A_1 + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A_1 = 0, & \Delta B_1 + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 B_1 = 0, \\ \Delta A_2 + \left(\frac{4\pi}{aT}\right)^2 A_2 = 0, & \Delta B_2 + \left(\frac{4\pi}{aT}\right)^2 B_2 = 0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array} \right.$$

Telles sont les équations aux dérivées partielles que doivent vérifier les coefficients du développement (3). Elles sont toutes de la forme

$$(5) \cdots\cdots \Delta \psi + K^2 \psi = 0$$

équation aux dérivées partielles qui se trouve ainsi jouer un rôle capital dans la théorie des vibrations des fluides.

Les égalités (2) et (3) donnent

$$\frac{\partial A_1}{\partial n_i} \sin 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\partial A_2}{\partial n_i} \sin 4\pi \frac{t}{T} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\partial B_1}{\partial n_i} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\partial B_2}{\partial n_i} \cos 4\pi \frac{t}{T} + \cdots\cdots + V_n = 0$$

Cette égalité ne peut avoir lieu, quel que soit t, que si V_n est une fonction périodique de t, ayant pour période T, oscillant autour de la valeur 0. Le théorème de Fourier permet alors d'écrire

$$V_n = a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + a_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} + \dots\dots\dots\dots$$

$$+ b_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + b_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} + \dots\dots$$

et l'égalité (2) entrainera les suivantes

$$(6) \dots\dots\dots \begin{cases} \dfrac{\partial A_1}{\partial n_i} + a_1 = 0, & \dfrac{\partial B_1}{\partial n_i} + b_1 = 0, \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial n_i} + a_2 = 0, & \dfrac{\partial B_2}{\partial n_i} + b_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ainsi pour déterminer les coefficients

$$A_1, A_2, \dots\dots B_1, B_2, \dots\dots$$

on a à intégrer les équations aux dérivées partielles (4), en tenant compte des conditions (6) où les quantités $a_1, a_2, \dots\ b_1, b_2, \dots$ ont des valeurs données en tout point de la surface S.

On est donc amené au problème d'analyse que voici :

Trouver une fonction régulière $\psi(x, y, z)$ vérifiant, en tout point d'un certain espace, l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \dots\dots\dots\dots\dots\dots \Delta\psi + K^2\psi = 0,$$

et telle que $\frac{\partial \psi}{\partial n_i}$ prenne une valeur donnée en tout point de la surface S qui limite cet espace

C'est l'étude de ce problème général et de ses principales conséquences physiques qui va faire l'objet du présent Chapitre

L'équation

$$(5) \dots\dots\dots\dots\dots\dots \Delta\psi + K^2\psi = 0,$$

peut être regardée comme une forme générale dans laquelle rentre l'équation

$$\Delta\psi = 0,$$

qui définit les fonctions harmoniques ; pour passer de la première à la seconde, il suffit de donner à la constante K une valeur particulière 0.

Parmi les nombreux problèmes relatifs aux fonctions harmoniques, il en est deux qui ont une importance particulière.

Le premier consiste à déterminer une fonction harmonique dans un certain espace et prenant, aux limites de cet espace, des valeurs données ; ce problème qui ne peut admettre plus d'une solution, est le problème de Lejeune - Dirichlet ; c'est à ce problème que se ramènent l'étude de l'équilibre des températures ou de la distribution électrique sur un corps conducteur.

Le second consiste à déterminer une fonction ψ, harmonique à l'intérieur d'une certaine surface S et telle que $\frac{\partial \psi}{\partial n_i}$ prenne sur cette surface S des valeurs connues. C'est à ce problème que se ramène, comme nous l'avons vu, (Chapitre V, §3), l'étude du mouvement des fluides incompressibles lorsqu'il existe une fonction potentielle des vitesses; c'est ainsi à ce problème que se ramènent certaines questions de la théorie du magnétisme.

Ces deux problèmes se ramènent l'un à l'autre quand la fonction ψ ne dépend que deux variables et que la courbe qui limite l'aire dans laquelle elle est harmonique remplit certaines conditions sur lesquelles il est inutile d'insister ici.

Dans le cas où la fonction ψ dépend de trois variables, ils ne sont plus, en général, réductibles l'un à l'autre; dans ce cas, tandis que l'étude du premier, du problème de Lejeune-Dirichlet, est fort avancée par les beaux travaux d'analyse auxquels elle a donné lieu, l'étude du second est à peine ébauchée.

Sur les fonctions ψ, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles (5), on peut se proposer deux problèmes analogues.

1° Déterminer une fonction ψ qui à l'intérieur d'une certaine surface S, vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \psi + K^2 \psi = 0$$

et qui prend des valeurs données aux divers points de la surface S.

2° Déterminer une fonction ψ, qui, à l'intérieur d'une certaine surface S, vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \psi + K^2 \psi = 0$$

et telle que $\frac{\partial \psi}{\partial n_i}$ prenne des valeurs données aux divers points de la surface S.

Le premier problème, ou du moins le problème analogue relatif aux fonctions de deux variables, se présente dans l'étude des membranes vibrantes; nous aurons donc à l'étudier au Livre III. Nous verrons que les beaux travaux de M. H. Schwarz et de M. E. Picard ont donné sur le problème relatif aux fonctions de deux variables d'importants résultats qui peuvent presque tous s'étendre au cas où la fonction dépend de trois variables.

L'étude du second problème, en présence duquel nous nous trouvons maintenant, est au contraire très peu avancée; sur ce problème, nous ne connaissons qu'un petit nombre de propositions générales dues à M. H. Poincaré [1], et dont la démonstration prête à de trop graves critiques pour entraîner autre chose que la vraisemblance des Théorèmes visés.

---

[1] H. Poincaré. — Sur les Équations aux Dérivées partielles de la Physique Mathématique (American Journal of Mathematics. Tome XII. p. 211).

92. — Sons propres d'un Espace donné

Nous allons tout d'abord exposer l'énoncé et l'enchaînement des propositions dont il s'agit ; nous en donnerons ensuite la démonstration rigoureuse pour quelques cas particuliers ; enfin nous verrons par quelles considérations M. H. Poincaré arrive à les rendre vraisemblables pour un espace quelconque.

On veut que la fonction ψ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\psi + K^2\psi = 0,$$

en tout point intérieur à la surface S, et que $\frac{\partial\psi}{\partial n_i}$ ait une valeur donnée en tout point de la surface S. Existe-t-il plus d'une fonction ψ remplissant ces conditions ?

Si deux fonctions ψ et ψ' remplissent ces conditions, la fonction $\theta = \psi' - \psi$, vérifiera, en tout point intérieur à la surface S, l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\theta + K^2\theta = 0, \tag{7}$$

et en tout point de la surface S l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial n_i} = 0. \tag{8}$$

Réciproquement, si une fonction θ, différente de 0, vérifie l'équation (7) en tout point intérieur à la surface S et l'équation (8) en tout point de la surface S ; si d'autre part la fonction ψ est une solution du problème posé, la fonction

$$\psi' = \psi + \lambda\theta, \tag{9}$$

où λ est une constante quelconque, sera une autre solution du même problème.

Nous sommes donc amenés à étudier le problème suivant :

Existe-t-il une fonction θ, différente de 0, telle que l'on ait, en tout point intérieur à la surface S,

$$\Delta\theta + K^2\theta = 0, \tag{7}$$

et, en tout point de la surface S,

$$\frac{\partial\theta}{\partial n_i} = 0\,? \tag{8}$$

C'est à cette question que répond le Théorème général suivant :

En général, il n'existe pas de fonction θ, différente de 0, qui vérifie les équations (7) et (8). Mais, pour chaque surface S particulière, il existe une suite discontinue

$$K_1, K_2, \ldots\ldots K_n, \ldots$$

de valeurs de la constante K, telles que les équations (7) et (8) admettent une intégrale θ différente de 0 ; elles en admettent alors une infinité, toutes comprises dans la formule

$$\lambda\theta(x, y, z), \tag{10}$$

λ étant une constante arbitraire.

Avant de démontrer ce Théorème soit dans des cas particuliers, soit en général, voyons quelles en seront les conséquences.

Posons

$$(11) \ldots\ldots \quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{2\pi}{aT_1}, \\ K_2 = \dfrac{2\pi}{aT_2}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ K_n = \dfrac{2\pi}{aT_n}; \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les quantités $T_1, T_2, \ldots\ldots T_n, \ldots\ldots$ se nommeront les périodes des sons propres du système.

Imaginons que les parois du système soient immobiles et demandons-nous si l'air que renferme le système peut être animé d'un mouvement vibratoire de période T.

Si l'air peut être animé d'un semblable mouvement vibratoire, le Potentiel des Vitesses de ce mouvement sera de la forme

$$(1) \ldots\ldots \quad \phi = A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} + \ldots\ldots$$
$$+ B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

les quantités A_1, B_1, n'étant pas toutes deux identiquement nulles.

En tout point intérieur à la surface S, on devra avoir :

$$(4) \ldots\ldots \quad \Delta A_1 + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A_1 = 0, \qquad \Delta B_1 + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 B_1 = 0.$$

En tout point de la surface S, qui est immobile, on doit avoir, d'après les égalités (6)

$$\frac{\partial A_1}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial n} = 0$$

Dès lors deux cas sont à distinguer :

1° La période T ne coïncide pas avec la période de l'un des sons propres du système. Dans ce cas, les égalités précédentes entraînent nécessairement

$$A_1 = 0, \qquad B_1 = 0.$$

Une masse d'air, enfermée dans un espace dont les parois sont immobiles, ne peut être animée d'un mouvement vibratoire dont la période ne serait pas celle d'un son propre de cet espace.

2° La période T coïncide avec la période de l'un des sons propres du système ; soit pour fixer les idées, la période T_1. Nous subdiviserons ce cas en deux cas secondaires:

A) Il n'existe aucun son propre du système dont la période soit sous multiple de la période T_1.

Dans ce cas, il existe une infinité de fonctions ψ vérifiant l'équation

$$\Delta \psi + \left(\frac{2\pi}{aT_1}\right)^2 \psi = 0,$$

en tout point intérieur à la surface S, et l'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_i} = 0,$$

en tout point de la surface S. Désignons par ψ' et ψ'' deux quelconques des fonctions; nous aurons

$$A_1 = \psi', \qquad B_1 = \psi''$$

D'autre part, les équations

$$\Delta A_2 + \left(\frac{2\pi}{a\frac{T_1}{2}}\right)^2 A_2 = 0, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial n_i} = 0,$$

$$\Delta B_2 + \left(\frac{2\pi}{a\frac{T_1}{2}}\right)^2 B_2 = 0, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial n_i} = 0,$$

$$\Delta A_3 + \left(\frac{2\pi}{a\frac{T_1}{3}}\right)^2 A_3 = 0, \qquad \frac{\partial A_3}{\partial n_i} = 0,$$

. . . .

nous donneront

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 0, \quad A_3 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

puisque les quantités $\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{3}, \ldots\ldots\ldots$ ne sont pas des périodes de sons propres du système. L'égalité (1) se réduira donc à

$$\varphi = \psi' \operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T_1} + \psi'' \operatorname{Cos} 2\pi\frac{t}{T_1}$$

L'air enfermé dans l'espace à parois immobiles considéré peut rendre une infinité de sons ayant pour période la période du son propre considéré ; ces sons sont toujours des sons simples

B) Il existe des sons propres du système dont la période est sous multiple de la période T_1.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait :

$$T_2 = \frac{T_1}{m}, \qquad T_3 = \frac{T_1}{n},$$

m et n étant deux nombres entiers.

Soient ψ', ψ'', deux intégrales quelconques des équations

$$\Delta\psi + \left(\frac{2\pi}{aT_1}\right)^2 \psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n_i} = 0;$$

Soient χ', χ'' deux intégrales quelconques des équations

$$\Delta\chi + \left(\frac{2\pi}{aT_2}\right)\chi = 0, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial n_i} = 0;$$

Soient ξ', ξ'', deux intégrales quelconques des équations

$$\Delta\xi + \left(\frac{2\pi}{aT_3}\right)\xi = 0, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial n_i} = 0.$$

Nous aurons

$$A_1 = \psi', \qquad B_1 = \psi'',$$
$$A_m = \chi', \qquad B_m = \chi'',$$
$$A_n = \xi', \qquad B_n = \xi'';$$

Tous les autres coefficients A et B seront égaux à 0. La fonction φ, donnée par l'égalité (1) sera de la forme :

$$\varphi = \psi' \operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T_1} + \psi'' \operatorname{Cos} 2\pi\frac{t}{T_1}$$
$$+ \chi' \operatorname{Sin} 2m\pi\frac{t}{T_1} + \chi'' \operatorname{Cos} 2m\pi\frac{t}{T_1}$$
$$+ \xi' \operatorname{Sin} 2n\pi\frac{t}{T_1} + \xi'' \operatorname{Cos} 2n\pi\frac{t}{T_1}$$

Si les parois qui limitent l'espace considéré sont maintenues immobiles, l'air qu'il renferme pourra rendre une infinité de sons ayant pour période la période considérée ; ces sons seront des sons complexes formés par la superposition d'un son simple de même hauteur et des harmoniques de ce son simple qui sont des sons propres du système.

Supposons maintenant qu'au lieu de maintenir immobile les parois S qui limitent l'espace étudié, on les anime d'un petit mouvement périodique quelconque de période T ; l'air enfermé dans la surface S prendra un mouvement périodique de même période.

1° Ni la période du mouvement qui anime la surface S, ni aucun de ses sons multiples n'est la période d'un son propre du système.

Dans ce cas, les équations (4) et (6) déterminent sans aucune ambiguité les coefficients

$$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, B_1, B_2, \ldots\ldots\ldots;$$

le mouvement de la masse d'air est complètement déterminé.

2° La période T du mouvement qui anime la surface S', ou l'un des sons multiples de cette période, coïncide avec la période de l'un des sons propres du système.

Supposons, pour fixer les idées, que

$$T_1 = \frac{T}{n},$$

n étant un nombre entier.

Dans ce cas, les équations (4) et (6) détermineront sans ambiguïté les coefficients A et B, sauf les coefficients A_n, B_n. Si A_n, B_n sont deux déterminations acceptables de ces coefficients, on en obtiendra deux autres en prenant

$$A'_n = A_n + \psi',$$
$$B'_n = B_n + \psi'',$$

ψ', ψ'' étant deux intégrales quelconques des équations:

$$\Delta\psi + \left(\frac{2\pi}{aT_1}\right)^2 \psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n_i} = 0.$$

Si donc on a obtenu une première forme φ du Potentiel des Vitesses, on en obtiendra une seconde φ' en posant :

$$\varphi' = \varphi + \psi' \sin 2n\pi\frac{t}{T} + \psi'' \cos 2n\pi\frac{t}{T}.$$

Le mouvement de l'air n'est plus complètement déterminé par les conditions données; ayant un premier mouvement compatible avec ces conditions, on peut en obtenir un second en lui superposant un mouvement harmonique avec le premier et à l'unisson d'un son propre du système

Après avoir montré nettement, par les considérations précédentes, la portée de notre Théorème général, nous allons démontrer ce Théorème dans trois cas particuliers.

---

§3 — Sons propres d'un tuyau cylindrique

Considérons un tuyau cylindrique dont les génératrices sont parallèles à Ox; supposons-le fermé à ses deux extrémités par deux parois planes, normales à Ox; soient

$$x = 0, \qquad x = L,$$

les abscisses de ces deux parois.

Imaginons les parois tant latérales que terminales immobiles et cherchons les mouvements périodiques, soumis à l'hypothèse des tranches, que peut présenter l'air du tuyau.

Moyennant l'hypothèse des tranches, les fonctions désignées par φ dans ce qui précède seront de simples fonctions d'x; l'équation (5) se réduira à

$$(12) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + K^2\psi = 0,$$

La condition

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_i} = 0,$$

que l'on doit avoir en tout point des surfaces limites, se réduit à celle-ci:

Pour $x = 0$ et pour $x = L$, on doit avoir,

$$(13) \quad \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Nous avons appris à intégrer l'équation (12); nous avons vu (Chapitre XI, Egalité (16)) qu'elle admettait pour intégrale générale

$$(14) \quad \psi = m \cos K(x + \delta),$$

m et δ étant deux constantes arbitraires.

En exprimant que la condition (13) est vérifiée pour $x = 0$, on trouve:

$$\sin K\delta = 0$$

ce qui exige que l'on ait pour δ l'une des valeurs

$$\delta = 0, \quad \pm\frac{\pi}{K}, \quad \pm\frac{\pi}{2K}, \ldots$$

Si l'on désigne par M une constante égale en valeur absolue à m, mais qui peut n'avoir pas le même signe, l'égalité (14) deviendra:

$$(15) \quad \psi = M \cos Kx$$

Il reste à exprimer que la fonction ψ, donnée par cette égalité (15) vérifie la condition (13) pour $x = L$. Cela exige que l'on ait

$$\sin KL = 0$$

K devant être positif, les racines de cette équation sont représentées par la suite que voici:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \dfrac{\pi}{L}, \\ K_2 = \dfrac{2\pi}{L}, \\ \ldots\ldots \\ K_n = \dfrac{n\pi}{L}, \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Les périodes des sons propres sont les suivantes :

$$(17) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} T_1 = \dfrac{2L}{a}, \\ T_2 = \dfrac{2L}{2a}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ T_n = \dfrac{2L}{na}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on compare ces égalités aux égalités (26) Chapitre XI, on voit que les sons propres d'un cylindre clos à ses deux extrémités sont les sons simples que peut rendre un tuyau ouvert de même longueur.

Si les parois du tuyau sont maintenues immobiles, l'air que ce tuyau renferme ne pourra pas être animé d'un mouvement périodique, à moins que ce mouvement n'ait pour période l'une des quantités $T_1, T_2, \ldots T_n, \ldots$ données par les égalités (17).

Si l'on considère une quelconque des périodes propres du système, on voit, d'après les égalités (17), que tous les sous-multiples de cette période sont aussi des périodes propres du système.

Donc, quand les parois du tuyau sont maintenues immobiles, le son qu'il rend a même hauteur que l'un des sons propres du système ; c'est en général un son complexe qui peut être formé par la superposition du son propre considéré et de toutes ses harmoniques.

D'après l'égalité (15), le Potentiel des Vitesses d'un semblable son est donné par la formule

$$(18) \ldots\ldots\ldots \varphi = \left(M_1 \operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T} + N_1 \cos 2\pi\frac{t}{T}\right) \operatorname{Cos} \frac{2\pi}{aT}x$$
$$+ \left(M_2 \operatorname{Sin} 4\pi\frac{t}{T} + N_2 \operatorname{Cos} 4\pi\frac{t}{T}\right) \operatorname{Cos} \frac{4\pi}{aT}x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

La vitesse est dirigée suivant Ox et donnée par la formule

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

ou bien, d'après l'égalité (18)

$$(19) \ldots\ldots\ldots u = \frac{2\pi}{aT}\left(M_1 \operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T} + N_1 \operatorname{Cos} 2\pi\frac{t}{T}\right) \operatorname{Sin} \frac{2\pi}{aT}x$$
$$+ \frac{4\pi}{aT}\left(M_2 \operatorname{Sin} 4\pi\frac{t}{T} + N_2 \operatorname{Cos} 4\pi\frac{t}{T}\right) \operatorname{Sin} \frac{4\pi}{aT}x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Considérons les points pour lesquels

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \sin \frac{2\pi}{aT}\, x = 0$$

En ces points la vitesse est nulle quelle que soit T. Ces points sont des noeuds.

L'origine du tuyau est un nœud, car l'égalité (20) est vérifiée si l'on donne à x la valeur 0 ; si l'on donne à x la valeur L, l'égalité (20) est encore vérifiée ; en effet, T étant une des périodes propres du tuyau ; données par les égalités (17), $\frac{2L}{aT}$ est un nombre entier ; l'extrémité du tuyau est donc aussi un nœud.

La distance de deux noeuds consécutifs est égale à $\frac{aT}{2}$.

§ 4. Sons propres de l'espace compris entre deux sphères concentriques

Nous venons d'examiner un cas où les sons propres du système sont déterminés avec une extrême simplicité, et où ces sons propres sont harmoniques les uns des autres ; nous allons prendre maintenant un second exemple, le plus simple après le précédent, et qui, cependant, va nous offrir une toute autre complication.

Soient deux sphères concentriques l'une de rayon ρ, l'autre de rayon $\mathcal{R}$. Supposons

$$\rho < \mathcal{R}$$

et considérons l'espace compris entre ces deux sphères ; supposons les parois de cet espace immobile et cherchons si cet espace peut être animé d'un mouvement périodique à ondes sphériques.

Dans ce cas, si nous désignons par r la distance d'un point (x, y, z) de l'espace considéré au centre commun O des deux sphères, la fonction désignée dans ce qui précède par ψ sera une simple fonction de r. On trouve alors sans peine que l'on a

$$\Delta \psi = \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{r}\,\frac{d^2}{dr^2}\,(r\psi).$$

L'équation aux dérivées partielles

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta\psi + K^2\psi = 0,$$

que cette fonction ψ doit vérifier se réduit alors à

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) + K^2 r\psi = 0.$$

Nous avons appris à intégrer cette équation [Chapitre XII. p. 244] et nous avons vu qu'elle avait pour intégrale générale

$$(21) \ldots\ldots\ldots\ldots \psi = m \frac{\cos K(r+\delta)}{r},$$

m et δ étant deux constantes arbitraires.

De cette équation (21) on déduit:

$$\frac{d\psi}{dr} = -m\left[\frac{\cos K(r+\delta)}{r^2} + K\frac{\sin K(r+\delta)}{r}\right]$$

La condition

$$\frac{\partial\psi}{\partial n_i} = 0,$$

que doit vérifier la fonction ψ en tout point des parois, se réduit ici à la suivante:

On doit avoir

$$\frac{d\psi}{dr} = 0,$$

pour $r = \rho$ et pour $r = \mathcal{R}$.

Nous obtenons donc les deux conditions

$$K\rho \operatorname{Tang} K(\rho+\delta) + 1 = 0,$$
$$K\mathcal{R} \operatorname{Tang} K(\mathcal{R}+\delta) + 1 = 0.$$

Ces deux conditions déterminent K et δ et ne laissent plus rien d'indéterminé, dans l'expression (21) de la fonction ψ, si ce n'est la constante m.

Les équations précédentes peuvent s'écrire:

$$\operatorname{Tang} K\rho \operatorname{Tang} K\delta - K\rho\left(\operatorname{Tang} K\rho + \operatorname{Tang} K\delta\right) - 1 = 0,$$
$$\operatorname{Tang} K\mathcal{R} \operatorname{Tang} K\delta - K\mathcal{R}\left(\operatorname{Tang} K\mathcal{R} + \operatorname{Tang} K\delta\right) - 1 = 0,$$

ou bien

$$(22) \ldots\ldots \begin{cases} (K\rho - \operatorname{Tang} K\rho) \operatorname{Tang} K\delta + K\rho \operatorname{Tang} K\rho + 1 = 0, \\ (K\mathcal{R} - \operatorname{Tang} K\mathcal{R}) \operatorname{Tang} K\delta + K\mathcal{R} \operatorname{Tang} K\mathcal{R} + 1 = 0. \end{cases}$$

En éliminant $\operatorname{Tang} K\delta$ entre ces équations (22), on trouve, pour déterminer K, l'équation transcendante

$$(K\rho - \operatorname{Tang} K\rho)(K\mathcal{R} \operatorname{Tang} K\mathcal{R} + 1)$$
$$-(K\mathcal{R} - \operatorname{Tang} K\mathcal{R})(K\mathcal{R} \operatorname{Tang} K\rho + 1) = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$(1 + K^2\rho\mathcal{R})(\operatorname{Tang} K\mathcal{R} - \operatorname{Tang} K\rho)$$
$$-K(\mathcal{R} - \rho)(1 + \operatorname{Tang} K\mathcal{R} \operatorname{Tang} K\rho) = 0,$$

ou bien

$$(23) \quad \text{Tang}\, K(\mathcal{R} - \rho) = \frac{K(\mathcal{R} - \rho)}{1 + K^2 \mathcal{R} \rho}$$

Si nous désignons par $K_1, K_2, \dots K_n, \dots$ les racines de cette équation (23), les sons propres du système seront déterminés par les égalités

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = \dfrac{2\pi}{a K_1}, \\ T_2 = \dfrac{2\pi}{a K_2}, \\ \dots\dots\dots \\ T_n = \dfrac{2\pi}{a K_n}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

A chaque valeur de K, on peut, par l'une des égalités (22), faire correspondre une valeur déterminée de Tang KS.

En général les valeurs de K déterminées par l'égalité (23) sont incommensurables entre elles; deux des valeurs de T, données par les égalités (11), ne sont donc pas sous multiples l'une de l'autre; par conséquent deux sons propres du système ne sont pas, en général, harmoniques l'un de l'autre. Lorsque les parois du système sont maintenues immobiles, le système ne peut rendre que des sons simples.

§5 — Sons propres d'un Parallélipipède Rectangle

Lamé [1] a montré comment on pouvait déterminer les sons propres d'un parallélipipède rectangle.

Considérons l'expression

$$(24) \quad \psi = M \sin(\lambda_1 x + \mu_1) \sin(\lambda_2 y + \mu_2) \sin(\lambda_3 z + \mu_3).$$

On a

$$\Delta \psi = -M(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \sin(\lambda_1 x + \mu_1) \sin(\lambda_2 y + \mu_2) \sin(\lambda_3 z + \mu_3).$$

Cette fonction vérifie donc l'équation

$$\Delta \psi + K^2 \psi = 0,$$

si l'on pose

$$(25) \quad K^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

[1] Lamé Leçons sur la Théorie analytique de la chaleur. p. 331. 1861

Peut-on, maintenant, disposer des constantes

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$$
$$\mu_1, \mu_2, \mu_3,$$

de manière que l'on ait

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_i} = 0$$

en tout point de la surface du parallélipipède rectangle limité par les plans

$$x = a \quad \text{et} \quad x = -a$$
$$y = b \quad \text{et} \quad y = -b$$
$$z = c \quad \text{et} \quad z = -c \; ?$$

Cette condition se transforme aisément en la suivante :
On doit avoir :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad \text{pour } x = a \qquad \text{et pour } x = -a,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \qquad \text{pour } y = b \qquad \text{et pour } y = -b,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour } z = c \qquad \text{et pour } z = -c.$$

Celà peut encore s'écrire :

$$(26) \cdots\cdots\cdots\cdots \begin{cases} \cos(\lambda_1 a + \mu_1) = 0, & \cos(\lambda_1 a - \mu_1) = 0, \\ \cos(\lambda_2 b + \mu_2) = 0, & \cos(\lambda_2 b - \mu_2) = 0, \\ \cos(\lambda_3 c + \mu_3) = 0, & \cos(\lambda_3 c - \mu_3) = 0. \end{cases}$$

Les premières égalités (26) donnent

$$\lambda_1 a + \mu_1 = (2K+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_1 a - \mu_1 = (2K'+1)\frac{\pi}{2},$$

K et K' étant deux nombres entiers quelconques. On déduit de là

$$\lambda_1 a = (K+K'+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\mu_1 = (K-K')\frac{\pi}{2}$$

$(K+K'+1)$ et $K-K'$ sont deux nombres entiers quelconques ; désignons-les par $m_1, n_1,$

et nous aurons

$$(27) \cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1 a = m_1 \frac{\pi}{2}, \qquad \mu_1 = n \frac{\pi}{2}; \\ &\text{de même} \\ &\lambda_2 b = m_2 \frac{\pi}{2}, \qquad \mu_2 = n_2 \frac{\pi}{2}; \\ &\lambda_3 c = m_3 \frac{\pi}{2}, \qquad \mu_3 = n_3 \frac{\pi}{2}; \end{aligned} \right.$$

D'après les égalités (25) et (27), les valeurs de K qui correspondent aux sons propres du système sont toutes comprises dans la formule

$$(28) \cdots\cdots K = \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}$$

m_1, m_2, m_3, étant trois nombres entiers quelconques.

En vertu des égalités (27), l'égalité (24) devient :

$$(29) \cdots\cdots \psi = M \sin\left(m_1 \frac{x}{a} + n_1\right)\frac{\pi}{2} \times \sin\left(m_2 \frac{y}{b} + n_2\right)\frac{\pi}{2} \times \sin\left(m_3 \frac{z}{c} + n_3\right)\frac{\pi}{2}.$$

Cette formule permet d'étudier complètement les sons propres du parallélipipède rectangle.

De la formule (29) on déduit :

$$(30) \cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -M \frac{m_1}{a} \cos\left(m_1 \frac{x}{a} + n_1\right)\frac{\pi}{2} \\ &\quad \times \sin\left(m_2 \frac{y}{b} + n_2\right)\frac{\pi}{2} \sin\left(m_3 \frac{z}{c} + n_3\right)\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -M \frac{m_2}{b} \cos\left(m_2 \frac{y}{b} + n_2\right)\frac{\pi}{2} \\ &\quad \times \sin\left(m_3 \frac{z}{c} + n_3\right)\frac{\pi}{2} \sin\left(m_1 \frac{x}{a} + n_1\right)\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -M \frac{m_3}{c} \cos\left(m_3 \frac{z}{c} + n_3\right)\frac{\pi}{2} \\ &\quad \times \sin\left(m_1 \frac{x}{a} + n_1\right)\frac{\pi}{2} \sin\left(m_2 \frac{y}{b} + n_2\right)\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, si l'on définit T par l'égalité

$$T = \frac{2\pi}{aK},$$

le potentiel des vitesses aura pour expression

$$\varphi = \psi' \operatorname{Sin} 2\pi \frac{t}{T} + \psi'' \operatorname{Cos} 2\pi \frac{t}{T},$$

ψ', ψ'', étant deux fonctions du type (29) correspondant à une même valeur de K, ce qui exige, en général que les nombres m_1, m_2, m_3, aient les mêmes valeurs dans les deux fonctions ψ' et ψ'', tandis que les nombres n_1, n_2, n_3 peuvent avoir des valeurs n'_1, n'_2, n'_3 dans la première et n''_1, n''_2, n''_3 dans la seconde.

Les composantes u, v, w de la vitesse en un point seront données par les formules

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \operatorname{Sin} 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\partial \psi''}{\partial x} \operatorname{Cos} 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ v &= -\left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \operatorname{Sin} 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\partial \psi''}{\partial y} \operatorname{Cos} 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ w &= -\left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \operatorname{Sin} 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\partial \psi''}{\partial z} \operatorname{Cos} 2\pi \frac{t}{T}\right); \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi'}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \psi''}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi''}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi''}{\partial z},$$

étant données par les formules (30).

Considérons les plans

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1 \frac{x}{a} + n'_1 &= 2 N_1, \\ m_2 \frac{y}{b} + n'_2 &= 2 N_2, \\ m_3 \frac{z}{c} + n'_3 &= 2 N_3, \end{aligned} \right.$$

N_1, N_2, N_3, étant trois nombres entiers quelconques. En tout point du premier de ces trois plans on a

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial z} = 0;$$

en tout point du second,

$$\frac{\partial \psi'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0;$$

en tout point du troisième,

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0.$$

Donc, aux points P où se coupent trois plans de la famille (32), on a

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial z} = 0.$$

Considérons ensuite les plans

$$(33) \ldots\ldots \begin{cases} m_1 \dfrac{x}{a} + n'_1 = 2N_1 + 1, \\ m_2 \dfrac{y}{b} + n'_2 = 2N_2 + 1, \\ m_3 \dfrac{z}{c} + n'_3 = 2N_3 + 1. \end{cases}$$

En tout point du premier plan, on a

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0;$$

en tout point du second plan, on a

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0;$$

en tout point du troisième plan, on a

$$\frac{\partial \psi'}{\partial z} = 0.$$

Donc, aux points Q où se coupent trois plans de la famille (32), on a aussi

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial z} = 0.$$

Les plans des familles

$$(32\ bis) \ldots\ldots \begin{cases} m_1 \dfrac{x}{a} + n''_1 = 2N_1, \\ m_2 \dfrac{y}{b} + n''_2 = 2N_2, \\ m_3 \dfrac{z}{c} + n''_3 = 2N_3, \end{cases}$$

$$(33\ bis) \ldots\ldots \begin{cases} m_1 \dfrac{x}{a} + n''_1 = 2N_1 + 1, \\ m_2 \dfrac{y}{b} + n''_2 = 2N_2 + 1, \\ m_3 \dfrac{z}{c} + n''_3 = 2N_3 + 1. \end{cases}$$

possèdent, relativement à la fonction ψ'', des propriétés analogues à celles que les plans des familles (32) et (33) possèdent relativement à la fonction ψ'.

Cela posé, distinguons plusieurs cas :

1º Les différences $(n''_1 - n'_1)$, $(n''_2 - n'_2)$, $(n''_3 - n'_3)$ sont paires. Les plans de la famille (32^{bis}) sont alors identiques aux plans de la famille (32) ; les plans de la famille (32) sont identiques aux plans de la famille (33).

Si l'on considère un point P' où se coupent trois plans de la famille (32), ou un point Q' où se coupent trois plans de la famille (33), on a, en ce point

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi'}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial \psi''}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \psi''}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \psi''}{\partial z} = 0,$$

et par conséquent, quel que soit t,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

Ce point est un nœud.

2º Les différences $(n''_1 - n'_1)$, $(n''_2 - n'_2)$, $(n''_3 - n'_3)$ sont impaires. Les plans de la famille (32^{bis}) sont alors identiques aux plans de la famille (33) ; les plans de la famille (33^{bis}) aux plans de la famille (32) ; les points P' et Q' sont encore des nœuds.

3º Parmi les différences $(n''_1 - n'_1)$, $(n''_2 - n'_2)$, $(n''_3 - n'_3)$ deux sont paires et une impaire ; ou bien deux sont impaires et une paire ; il n'y a plus alors aucun point où l'on ait, quelque soit t,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

il n'y a plus de nœud.

Nous venons d'étudier les sons propres de trois sortes d'espaces : le cylindre limité ; la couche comprise entre deux sphères concentriques ; le parallélipipède rectangle. Nous avons montré l'existence de certains sons propres de ces espaces ; mais nous ne sommes pas assurés de les avoir tous trouvés. En effet, parmi les mouvements vibratoires qui peuvent animer l'air enfermé dans un cylindre limité, nous avons étudié seulement ceux qui se font par tranches ; parmi les mouvements vibratoires de l'air enfermé entre deux sphères concentriques, nous avons étudié seulement ceux qui se font par ondes sphériques ; enfin, parmi les mouvements vibratoires de l'air enfermé dans un parallélipipède rectangle, nous avons envisagé seulement ceux dont le potentiel des vitesses a la forme donnée par Lamé.

Existe-t-il des mouvements vibratoires ne rentrant pas dans les types que nous avons étudiés ? A coup sûr. Si, par exemple, les parois latérales du cylindre sont en mouvement, l'air enfermé dans ce cylindre ne pourra pas vibrer conformément à l'hypothèse des tranches ; si chacune des deux sphères concentriques possède des vitesses différentes aux divers points de sa surface, l'air compris entre ces deux sphères ne pourra pas vibrer par ondes sphériques ; si le mouvement varie d'une manière quelconque d'un point à l'autre d'une face du parallélipipède, le potentiel des vitesses de l'air que ce parallélipipède contient ne pourra pas avoir la forme donnée par Lamé.

A ces types de mouvements vibratoires que nous n'avons pas étudiés, correspond-il des sons propres autres que ceux que nous avons trouvés ? Cela peut être, et, dans certains cas, cela est certain. Si l'on supposait, par exemple, que la vitesse de l'air que renferme un tuyau est toujours comprise dans la tranche, ce qui est admissible si les deux bases du cylindre sont immobiles et si ses parois vibrent seules, on pourrait prouver qu'à ce nouveau mode de vibration correspondent des sons propres en général différents de ceux qui correspondent à une vibration soumise à l'hypothèse des tranches.

Mais nous nous contenterons de marquer, comme nous venons de le faire, combien la recherche de certains sons propres à un espace est différente de la recherche de tous les sons propres à ce même espace, sans aborder cette dernière étude.

§6 – Sons propres d'un espace quelconque

Après avoir montré, dans certains cas très simples, l'existence de sons propres à un espace, nous allons chercher la réponse à la question suivante :

Tous les espaces admettent-ils des sons propres ?

La réponse à cette question est la suivante :

Tout espace admet au moins un son propre, et en général une infinité, dont les périodes forment une suite discontinue.

Bien que cette proposition ne puisse être démontrée avec une rigueur absolue, les recherches de M. H. Poincaré ne laissent aucun doute au sujet de son exactitude et de sa généralité.

La démonstration de M. Poincaré est imitée de celle par laquelle Lejeune-Dirichlet et Riemann ont démontré le principe de Lejeune-Dirichlet ; elle donne prise aux critiques que M. Weierstrass, M. Kronecker et M. Heine ont élevées contre cette dernière démonstration, critiques auxquelles nous ne voulons point nous attarder ici.

Considérons un espace E limité par une surface S. Soit U une fonction régulière à l'intérieur de cet espace et choisie de manière à satisfaire à la condition

$$A = \int U\, dv = 0 .$$

Il existe évidemment une infinité de semblables fonctions qui ne sont pas égales à 0 dans tout l'espace E.

Pour une telle fonction, la quantité

$$B = \int U^2 dv$$

a une certaine valeur positive. Si l'on multiplie la fonction U par un certain facteur constant λ, la quantité A demeure égale à 0, tandis que la quantité B est multipliée par λ^2; on peut donc, en choisissant convenablement le facteur λ, faire en sorte que la nouvelle valeur de B soit égale à 1. Nous arrivons donc à la conclusion suivante, qui sera le point de départ de notre démonstration :

Il existe une infinité de fonctions U, régulières dans l'espace E, et satisfaisant aux deux conditions

$$(34) \ldots\ldots\ldots\ldots \int U\, dv = 0,$$

$$(35) \ldots\ldots\ldots\ldots \int U^2\, dv = 1.$$

Remarquons immédiatement qu'une telle fonction U ne peut ni être constante, ni différer d'une constante d'aussi peu qu'on le veut.

Formons maintenant, pour toutes ces fonctions U, la quantité

$$(36) \ldots\ldots\ldots J = \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] dv$$

Cette quantité ne peut être négative ; ses variations admettent donc une limite inférieure ; cette limite inférieure ne peut être 0.

Deux cas, en effet, pourraient se présenter :

Ou bien il existerait une fonction U telle que l'on eût $J = 0$. On aurait alors, en tout point de l'espace E,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

ce qui ne peut avoir lieu, puisque U ne peut être une constante. Ou bien, on pourrait constituer une suite de fonctions U telles que les valeurs correspondantes de J tendissent vers 0; mais on prouverait sans peine alors que la fonction U peut différer d'une constante aussi peu qu'on le veut, ce que nous savons être inadmissible.

La fonction J admet donc une limite inférieure J_1 qui est positive.

Existe-t-il forcément une fonction U pour laquelle J atteigne cette limite inférieure ? Cela n'est nullement certain. C'est donc faire une hypothèse sujette à critiques que d'admettre, comme nous le ferons, qu'il existe une fonction U qui fait prendre à J sa valeur minima J_1.

Soit ψ_1 cette fonction U particulière, et désignant par

$$\psi_1 + \delta U$$

une autre fonction U quelconque, infiniment voisine de ψ_1.

Les deux fonctions

$$\psi_1 \quad \text{et} \quad \psi_1 + \delta U.$$

doivent vérifier les conditions (34) et (35); ce qui donne

$$\int \psi_1 \, dv = 0, \qquad \int (\psi_1 + \delta U) dv = 0,$$

$$\int \psi_1^2 \, dv = 1, \qquad \int \left[\psi_1^2 + 2 \psi_1 \delta U + (\delta U)^2 \right] dv = 1.$$

ou bien, en négligeant les infiniment petits du second ordre

$$(37) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int \delta U \, dv = 0,$$

$$(38) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int \psi_1 \delta U \, dv = 0.$$

D'autre part, J devant être minimum pour $\psi = \psi_1$, la quantité

$$\int \left\{ \left[\frac{\partial (\psi_1 + \delta U)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (\psi_1 + \delta U)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial (\psi_1 + \delta U)}{\partial z} \right]^2 \right\} dv$$

$$- \int \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 \right] dv,$$

doit avoir, pour les valeurs suffisamment petites de δU, un signe qui ne change pas lors qu'on change le signe δU, ce que les conditions (37) et (38) permettent de faire; cela exige que l'on ait

$$(39) \ldots\ldots \int \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \delta U}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \delta U}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \delta U}{\partial z} \right) dv = 0.$$

Ainsi, il existe au moins une fonction ψ, la fonction ψ_1, telle que l'on ait

$$(39^{bis}) \ldots\ldots \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta U}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \delta U}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \delta U}{\partial z} \right) dv = 0,$$

δU étant une fonction régulière infiniment petite assujettie seulement aux deux conditions :

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int \delta U \, dv = 0,$$

$$(38^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int \psi \, \delta U \, dv = 0.$$

En général, il peut exister d'autres fonctions $\psi_2, \ldots \psi_n$, qui vérifient ces mêmes conditions ; il peut même en exister un nombre illimité ; à ces fonctions correspondent des valeurs $J_2, \ldots J_n$, de la quantité J ; ces valeurs $J_2, \ldots J_n$, sont ou des minima ou des maxima relatifs, ou, plus généralement, des valeurs stationnaires de J. J_1 étant le minimum absolu de J, aucune des quantités $J_2, \ldots J_n$, ne peut être inférieure à J_1. J_1 étant positif et fini, il en est de même à fortiori des quantités $J_2, \ldots J_n$.

Supposons les quantités $J_1, J_2, \ldots J_n, \ldots$ rangées par ordre de grandeur croissante. Prenons une des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$; soit la fonction ψ_n.

Nous aurons l'égalité

$$\int \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \frac{\partial \delta U}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \frac{\partial \delta U}{\partial y} + \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \frac{\partial \delta U}{\partial z} \right) dv = 0$$

pour toutes les fonctions régulières et infiniment petites δU qui vérifient les conditions

$$\int \delta U \, dv = 0,$$

$$\int \psi_n \, \delta U \, dv = 0.$$

Dès lors, d'après un Théorème du Calcul des Variations, dont l'application au cas actuel prête à certaines critiques, il doit exister deux facteurs constants λ_n et K_n, tels que l'on ait :

$$(40) \quad \ldots\ldots\ldots \int \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \frac{\partial \delta U}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \frac{\partial \delta U}{\partial y} + \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \frac{\partial \delta U}{\partial z} \right) dv$$
$$- \lambda_n \int \delta U \, dv - K_n \int \psi_n \, \delta U \, dv = 0,$$

quelle que soit la fonction régulière δU.

Le théorème de Green [Chapitre V, Égalité (22)] nous donne :

$$\int \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \frac{\partial \delta U}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \frac{\partial \delta U}{\partial y} + \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \frac{\partial \delta U}{\partial z} \right) dv$$

$$= - \int \Delta \psi_n \, \delta U \, dv - \mathsf{S} \frac{\partial \psi_n}{\partial n_i} \delta U \, dS$$

L'égalité (40) devient donc

$$(41) \ldots\ldots\ldots \int (\Delta \psi_n + K_n \psi_n + \lambda_n) \, \delta U \, dv + \mathsf{S} \frac{\partial \psi_n}{\partial n_i} \delta U \, dS = 0.$$

Cette égalité (41) doit avoir lieu quelle que soit la fonction régulière δU. Un mode de raisonnement souvent employé déjà nous permet d'en déduire les conclusions suivantes :

1° En tout point de l'espace E on a :

$$(42) \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta \psi_n + K_n \psi_n + \lambda_n = 0$$

2° En tout point de la surface S on a :

$$(43) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial \psi_n}{\partial n_i} = 0$$

Calculons λ_n et K_n. L'égalité (42) nous donne les deux égalités

$$\int \Delta \psi_n \, dv + K_n \int \psi_n \, dv + \lambda_n \int dv = 0,$$

$$\int \psi_n \Delta \psi_n \, dv + K_n \int \psi_n^2 \, dv + \lambda_n \int \psi_n \, dv = 0.$$

La fonction ψ_n vérifie les égalités (34) et (35). Les égalités précédentes deviennent donc :

$$(44) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \lambda_n \int dv + \int \Delta \psi_n \, dv = 0, \\ K_n + \int \psi_n \Delta \psi_n \, dv = 0, \end{cases}$$

Mais le théorème de Green donne

$$\int \Delta \psi_n \, dv = - \mathsf{S} \frac{\partial \psi_n}{\partial n_i} dS$$

$$\int \psi_n \Delta \psi_n \, dv = - \mathsf{S} \psi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial n_i} dS$$

$$- \int \left[\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial z} \right)^2 \right] dv$$

ou bien en vertu des égalités (43) et (36)

$$\int \Delta \psi_n \, dv = 0$$

$$\int \psi_n \Delta \psi_n \, dv = - J_n$$

Les égalités (41) deviennent donc :

$$\lambda_n = 0$$

$$K_n = J_n$$

La quantité J_n étant une quantité finie et positive, si l'on pose

(45) .... $K_n = J_n^{\frac{1}{2}}$

on aura

$$K_n = k_n^2$$

et les équations (42) et (43) deviendront :

(46) .... $\begin{cases} \Delta \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 & \text{(en tout point de l'espace } E) \\ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial n_i} = 0 & \text{(en tout point de la surface } S) \end{cases}$

La proposition que nous venons de démontrer peut se résumer dans l'énoncé suivant :

Considérons toutes les fonctions U régulières dans tout l'espace E et astreintes aux deux conditions

$$\int U \, dv = 0, \qquad \int U^2 dv = 1.$$

Formons, pour toutes ces fonctions, l'expression

$$J = \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dv,$$

qui est toujours finie et positive. Parmi les déterminations que cette quantité J peut prendre, il en est toujours au moins une qui est minimum, et en général une infinité qui sont maxima, minima ou stationnaires. Soient $J_1, J_2, \ldots\ldots J_n, \ldots\ldots$ ces déterminations rangées par ordre de grandeur. Soient $\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_n, \ldots\ldots$ les fonctions qui, substituées à U, font prendre à J ces valeurs. Posons :

$$J_1 = k_1^2, \; J_2 = k_2^2, \ldots\ldots J_n = k_n^2, \ldots\ldots$$

Nous aurons

en tout point

de l'espace E	de la surface S
$\Delta \psi_1 + K_1^2 \psi_1 = 0,$	$\frac{\partial \psi_1}{\partial n_i} = 0,$
$\Delta \psi_2 + K_1^2 \psi_2 = 0,$	$\frac{\partial \psi_2}{\partial n_i} = 0,$
....	....
$\Delta \psi_n + K_n^2 \psi_n = 0,$	$\frac{\partial \psi_n}{\partial n_i} = 0,$
....	....

Les quantités

$$T_1 = \frac{2\pi}{aK_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{aK_2}, \ldots\ldots\ldots \quad T_n = \frac{2\pi}{aK_n}, \ldots\ldots\ldots,$$

sont des sons propres du système.

Obtient-on ainsi tous les sons propres du système ?

Supposons que l'on ait trouvé une constante K et une fonction φ telle que l'on ait, en tout point de l'espace E,

(47) .... $\Delta \varphi + K\varphi = 0,$

et en tout point de la surface S

(48) .... $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 0$

Si la fonction φ ne se réduit pas à une constante, la quantité K ne peut être égale à 0 ; car nous avons vu [Chapitre V, § 3] que si l'on avait

$$\Delta \varphi = 0$$

en tout point de l'espace E et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 0.$$

en tout point de la surface S, on aurait, en tout point de l'espace E,

$$\varphi = \text{Const}.$$

La quantité K n'est donc pas égale à 0 ; nous allons voir qu'elle est forcément positive et égale à une des quantités $J_1, J_2, \ldots J_n, \ldots$ données par l'énoncé précédent.

De l'égalité (47), nous déduisons :

$$\int \Delta \varphi \, dv + K \int \varphi \, dv = 0$$

Le Théorème de Green nous donne l'égalité

$$\int \Delta \varphi \, dv = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} dS,$$

qui devient, en vertu de l'égalité (48)

$$\int \Delta \varphi \, dv = 0.$$

On a donc

$$K \int \varphi \, dv = 0,$$

ou bien, puisque K n'est certainement pas égal à 0.

$$\int \varphi \, dv = 0$$

La quantité $\int \varphi^2 dv$ a une certaine valeur positive B. Considérons la fonction

(49) .... $\psi = \frac{\varphi}{B^{\frac{1}{2}}}$

Cette fonction vérifiera les deux égalités

(50) .... $\int \psi \, dv = 0, \qquad \int \psi^2 dv = 1$

En vertu des égalités (47) et (48), on aura

(51) .... $\Delta \psi + K \psi = 0$

en tout point de l'espace E et

(52) .... $\frac{\partial \psi}{\partial n_i} = 0$

en tout point de la surface S.

Soit δU une fonction régulière dans l'espace E infiniment petite et assujettie aux conditions

(53) .... $\int \delta U \, dv = 0 \qquad \int \psi \, \delta U \, dv = 0.$

L'égalité (51) nous donne

$$\int \Delta \psi \, \delta U \, dv + K \int \psi \, \delta U \, dv = 0$$

ou, en vertu de la dernière égalité (53)

$$\int \Delta\psi\,\delta U\,dv = 0$$

Le Théorème de Green permet d'écrire cette égalité sous la forme

$$\mathbf{S}\,\delta U\,\frac{\partial\psi}{\partial n_i}\,dS + \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\delta U}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\delta U}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial\delta U}{\partial z}\right)dv = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (52)

$$\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\delta U}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\delta U}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial\delta U}{\partial z}\right)dv = 0.$$

ou encore, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier

$$\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\psi+\delta U)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}(\psi+\delta U)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\psi+\delta U)\right]^2\right\}dv = 0$$

$$-\int\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]dv = 0$$

Ainsi, nous obtenons le résultat suivant :

Soit φ une fonction quelconque vérifiant l'équation

$$\Delta\varphi + K\varphi = 0$$

en tout point de l'espace E et l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = 0$$

en tout point de la surface S. Considérons la fonction

(54) .... $$\psi = \frac{\varphi}{\left[\int \varphi^2\,dv\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Elle vérifie simultanément les trois conditions

$$\int \psi\,dv = 0$$

$$\int \psi^2\,dv = 1$$

$$\delta\int\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]dv = 0$$

Elle est donc une des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \ldots$ déterminées par l'énoncé précédent, et K est alors celle des quantités $K_1, K_2, \ldots K_n, \ldots$ qui lui correspond.

Nous voyons ainsi que la règle précédente détermine tous les sons propres du système.

L'égalité (54) nous enseigne en outre que toute fonction φ qui vérifie, en tout point de l'espace E, l'égalité

$$\Delta \varphi + K_n \varphi = 0$$

et, en tout point de la surface S, l'égalité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 0$$

s'obtient en multipliant la fonction ψ_n donnée par la règle précédente, par un facteur constant, qui représente la valeur de

$$\left[\int \varphi^2 \, dv\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi se trouve démontré le Théorème général énoncé au § 2.

§ 7 — Détermination des sons propres.

Nous avons vu que les périodes des sons propres du système étaient données par les égalités

$$T_1^2 = \left(\frac{2\pi}{a_1}\right)^2 \frac{1}{J_1},$$

$$T_2^2 = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{J_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_n^2 = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{J_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$J_1, J_2, \ldots J_n, \ldots$ étant les valeurs minima, maxima ou stationnaires que prend l'expression

$$\int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] dv$$

lorsqu'on donne à ψ toutes les déterminations soumises aux conditions

$$(50) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \int \psi \, dv = 0 \\ \int \psi^2 \, dv = 1. \end{cases}$$

Si nous désignons par φ une fonction assujettie seulement à la condition

$$(55) \qquad \int \varphi \, dv = 0 \, ,$$

la fonction

$$(54) \qquad \psi = \frac{\varphi}{\left[\int \varphi^2 \, dv\right]^{\frac{1}{2}}}$$

vérifiera les deux conditions (50); et, inversement, si nous effectuons l'opération représentée par la formule (54) sur toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité (55) nous obtiendrons toutes les fonctions ψ assujetties aux égalités (50).

En vertu de la formule (54), on a

$$\int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] dv$$

$$= \frac{\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dv}{\int \varphi^2 \, dv}$$

Nous arrivons donc ainsi au résultat suivant

Les quantités $J_1, J_2, \ldots J_n, \ldots$ sont les valeurs minima, maxima ou stationnaires que prend la quantité

$$\frac{\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dv}{\int \varphi^2 \, dv}$$

lorsqu'on donne à φ toutes les déterminations qui vérifient la condition

$$(55) \qquad \int \varphi \, dv = 0$$

Nous allons transformer encore cet énoncé

Soient dv, dv', deux éléments de volume de l'espace E; soit φ la valeur de la fonction φ, assujettie à la condition (55), en un point de l'élément dv; soit φ' la valeur de la même fonction en un point de l'élément dv'.

Considérons l'intégrale sextuple :

$$\iint (\varphi^2 - \varphi'^2) \, dv \, dv'$$

On peut l'écrire

$$\int dv' \int \varphi^2 dv - 2 \int \varphi' \left(\int \varphi \, dv\right) dv' + \int dv \int \varphi'^2 dv'$$

L'égalité (55) fait disparaître le second terme.

On a évidemment

$$\int \varphi^2 \, dv = \int \varphi'^2 \, dv'$$

et aussi

$$\int dv = \int dv' = W$$

W étant le volume de l'espace E. On a donc

$$\int \varphi^2 \, dv = \frac{\int\int (\varphi^2 - \varphi'^2) \, dv \, dv'}{2W}$$

Par conséquent, les quantités J_1, J_2, ... J_n, ... sont les valeurs maxima, minima ou stationnaires que prend l'expression

$$\frac{2W \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] dv}{\int\int (\varphi^2 - \varphi'^2) \, dv \, dv'}$$

lorsqu'on y donne à φ toutes les déterminations compatibles avec la condition

(55) .... $\int \varphi \, dv = 0$

Considérons une fonction régulière quelconque θ

En général, l'intégrale $\int \theta \, dv$ aura une valeur A différente de 0; mais si l'on considère la fonction

(56) .... $\varphi = \theta - \dfrac{A}{W}$,

elle vérifiera l'égalité (55); inversement, en effectuant sur toutes les fonctions régulières θ l'opération représentée par l'égalité (56), on obtiendra évidemment toutes les fonctions régulières φ qui vérifient l'égalité (55).

En vertu de l'égalité (56), on a

$$\frac{\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] dv}{\int\int (\varphi^2 - \varphi'^2) \, dv \, dv'}$$

$$= \frac{\int \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 \right] dv}{\int\int (\theta^2 - \theta'^2) \, dv \, dv'}$$

On arrive donc ainsi à la proposition suivante.

Les quantités $J_1, J_2, \dots J_n, \dots$ sont les valeurs minima, maxima ou stationnaires que prend l'expression

$$\frac{2W \int \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 \right] dv}{\int\int (\theta^2 - \theta'^2)\, dv\, dv'}$$

lorsque l'on y remplace θ par toute fonction régulière à l'intérieur de l'espace E

M. Poincaré a montré combien ce Théorème était utile dans certaines discussions sur les valeurs de $J_1, J_2, \dots J_n, \dots$

§8 — Théorème du P. Mersenne

Il existe, entre les sons propres d'espaces semblables, une relation extrêmement importante qui a été découverte expérimentalement au XVII[e] siècle, par le P. Mersenne et qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Supposons qu'un système rempli d'air admette un son propre de période T; si l'on remplit d'air à la même température et à la même pression un système semblable au précédent, mais K fois plus grand, ce nouveau système admettra un son propre de période KT.

Soient (x, y, z) un point du premier espace E et S la surface qui le limite. Par hypothèse, il existe une fonction ψ qui vérifie l'équation

$$(57) \dots\dots \quad \Delta\psi(x,y,z) + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi(x,y,z) = 0$$

en tout point de l'espace E, et

$$(58) \dots\dots \quad \frac{\partial \psi(x,y,z)}{\partial n_i} = 0$$

en tout point de la surface S.

Soit S' une surface homothétique de la surface S, le centre d'homothétie étant à l'origine des coordonnées, et le rapport d'homothétie étant K. Soit E' l'espace qu'enferme la surface S'. A tout point (x, y, z) de l'espace E correspond un point homothétique (x', y', z') de l'espace E' par les formules

$$(59) \dots\dots \quad \begin{cases} x = \dfrac{x'}{K} \\ y = \dfrac{y'}{K'} \\ z = \dfrac{z'}{K} \end{cases}$$

Considérons la fonction

(60)...... $\psi'(x', y', z') = \psi\left(\frac{x'}{K}, \frac{y'}{K}, \frac{z'}{K}\right)$

Cette formule (60) définit la fonction ψ' pour tout point de l'espace E' ou de la surface S'. Nous aurons

$$\frac{\partial^2 \psi'(x', y', z')}{\partial x'^2} = \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \psi\left(\frac{x'}{K}, \frac{y'}{K}, \frac{z'}{K}\right)}{\left[\partial\left(\frac{x'}{K}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial x^2}$$

Cette égalité et deux égalités analogues nous donnent

(61).... $$\frac{\partial^2 \psi'(x', y', z')}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'(x', y', z')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \psi'(x', y', z')}{\partial z'^2}$$

$$= \frac{1}{K^2} \Delta \psi(x, y, z)$$

Mais les égalités (57), (59) et (60) donnent successivement

$$\Delta \psi(x, y, z) = -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi(x, y, z)$$

$$= -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi\left(\frac{x'}{K}, \frac{y'}{K}, \frac{z'}{K}\right)$$

$$= -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi'(x', y', z')$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (61), montre que l'on a, en tout point de l'espace E'

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z'^2} + \left(\frac{2\pi}{a\,KT}\right)^2 \psi' = 0.$$

Considérons maintenant un point $M'(x', y', z')$ sur la surface S'; soit n'_i la normale en ce point à la surface S' vers l'intérieur de l'espace E'. Nous aurons

(62)..... $$\frac{\partial \psi'(x', y', z')}{\partial n'_i} = \frac{\partial \psi'(x', y', z')}{\partial x'} \cos(n'_i, x) + \frac{\partial \psi'(x', y', z')}{\partial y'} \cos(n'_i, y)$$

$$+ \frac{\partial \psi'(x', y', z')}{\partial z'} \cos(n'_i, z)$$

Mais l'égalité (60) donne

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x'} = \frac{1}{K} \frac{\partial \psi\left(\frac{x'}{K}, \frac{y'}{K}, \frac{z'}{K}\right)}{\partial\left(\frac{x'}{K}\right)}$$

Si l'on désigne par (x, y, z) les coordonnées du point M de la surface S qui est homothétique du point M', en vertu des égalités (59) l'égalité précédente deviendra :

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x'} = \frac{1}{K} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

On aura de même

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'} = \frac{1}{K} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial z'} = \frac{1}{K} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

et l'égalité (62) deviendra

$$\frac{\partial \psi'}{\partial n'_i} = \frac{1}{K} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n'_i, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n'_i, y) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos(n'_i, z) \right]$$

Mais la normale n'_i en M', à la surface S', vers l'intérieur de l'espace E' a même direction que la normale n_i en M, à la surface S, vers l'intérieur de l'espace E ; on a donc

$$\cos(n'_i x) = \cos(n_i, x)$$

$$\cos(n'_i y) = \cos(n_i y)$$

$$\cos(n'_i z) = \cos(n_i z)$$

et l'égalité précédente devient :

$$\frac{\partial \psi'}{\partial n'_i} = \frac{1}{K} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n_i, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(n_i, y) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos(n_i, z) \right]$$

$$= \frac{1}{K} \frac{\partial \psi}{\partial n_i}.$$

Si l'on se reporte alors à l'égalité (58), on voit que l'on a, en tout point de la surface S',

$$\frac{\partial \psi'}{\partial n'_i} = 0$$

Les deux propositions que nous venons de démontrer prouvent que, comme nous l'avions annoncé, l'espace E' admet pour son propre le son de période KT.

Chapitre XVI

La Résonnance.

§1. Résonnance d'un Espace pour les sons propres de cet espace

Considérons une masse d'air contenue à l'intérieur d'un certain espace ; animons les parois de cet espace d'un mouvement périodique infiniment petit de période T, et demandons-nous si l'air pourra être animé d'un mouvement périodique infiniment petit de même période que le mouvement des parois et du même ordre de grandeur.

Deux cas sont à distinguer :

1° Ni la période T du mouvement qui anime la paroi, ni aucun des sous multiples de T n'est période d'un son propre du système

Dans ce cas, si la composante v_n, normale à la paroi, de la vitesse qui anime chaque point de la paroi est donnée, nous savons, par ce qui a été dit au Chapitre précédent, que la fonction potentielle des vitesses du mouvement de l'air est complètement déterminée.

Cette fonction potentielle des vitesses φ est-elle du même ordre de grandeur que v_n ?

Cette fonction φ vérifie en tout point de l'espace occupé par l'air l'équation

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

et en tout point de la paroi, la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + v_n = 0$$

Multiplions les valeurs de v_n aux divers points de la paroi par un même facteur constant λ. L'air sera animé d'un nouveau mouvement dont la fonction potentielle sera φ'. Cette fonction φ' devra vérifier les conditions

$$a^2 \Delta \varphi' = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n_i} + \lambda v_n = 0 .$$

et ces conditions doivent déterminer entièrement la fonction φ'. Or elles sont évidemment remplies si l'on pose

$$\varphi' = \lambda \varphi ;$$

cette dernière égalité fournit donc la seule détermination acceptable de φ'.

Ainsi, quand on multiplie les quantités v_n par un facteur constant λ, le Potentiel des Vitesses du mouvement de l'air est multiplié par la même quantité λ. Le mouvement de l'air est donc un infiniment petit du même ordre que le mouvement de la paroi.

Donc : si l'on anime les parois d'un vase qui renferme de l'air d'un mouvement périodique infiniment petit qui n'est pas à l'unisson d'un son propre du vase, et dont aucune harmonique n'est à l'unisson d'un son propre du vase, l'air contenu dans le vase prendra un mouvement vibratoire infiniment petit, entièrement déterminé, qui sera du même ordre de grandeur que le mouvement communiqué aux parois.

2° La période T du mouvement qui anime la paroi ou un de ses sous multiples coïncide avec la période T_1 de l'un des sons propres du système.

Supposons, par exemple, que l'on ait :

$$T = T_1$$

Les parois étant animées d'un mouvement dont la vitesse normale est v_n, l'air est animé d'un mouvement périodique de Période T_1 dont le Potentiel des vitesses φ vérifie les équations

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + v_n = 0,$$

qui, d'ailleurs, ne suffisent pas à le déterminer.

Multiplions les quantités v_n par un facteur constant λ ; l'air prendra un nouveau mouvement périodique, de période T_1, dont le Potentiel des vitesses φ' vérifiera les équations

$$a^2 \Delta \varphi' = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial n_i} + \lambda v_n = 0.$$

Ces équations seront vérifiées si l'on pose

$$\varphi' = \lambda \varphi ;$$

mais ce ne sera pas là leur intégrale générale. D'après ce qui a été dit au Chapitre précédent leur intégrale générale sera

$$\varphi' = \lambda \varphi + \theta \left(L \sin 2\pi \frac{t}{T_1} + M \cos 2\pi \frac{t}{T_1} \right)$$

L et M étant deux constantes arbitraires et θ une quelconque des intégrales des équations

$$\Delta \theta + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \theta = 0 \quad (\text{dans l'espace } E)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n_i} = 0 \quad (\text{sur la surface } S)$$

L'expression de φ renferme un terme, $\lambda\varphi$, infiniment petit du même ordre que la vitesse communiquée aux parois ; mais l'ordre de l'autre terme

$$\theta\left(L \sin 2\pi\frac{t}{T} + M \cos 2\pi\frac{t}{T}\right)$$

n'a aucune relation nécessaire avec l'ordre de la vitesse communiquée aux parois. D'où la conclusion suivante :

On communique aux parois d'un vase un mouvement vibratoire infiniment petit qui est à l'unisson, ou dont l'une des harmoniques est à l'unisson de l'un des sons propres du système. L'air prend un mouvement vibratoire qui n'est pas un infiniment petit d'ordre supérieur, mais qui peut être un infiniment petit d'ordre inférieur à l'ordre du mouvement de la paroi.

Ainsi, si l'on communique à la paroi d'un vase un mouvement vibratoire complexe dont l'amplitude est infiniment petite du second ordre, deux cas peuvent se présenter :

1° Parmi les sons simples, harmoniques les uns des autres, dont la superposition forme le son complexe communiqué à la paroi du vase, ne se trouve aucun son propre du vase ; les vitesses prises par la masse d'air seront infiniment petites du second ordre ; le vase ne résonnera pas.

2° Parmi les sons simples dont la superposition forme le son complexe communiqué à la paroi du vase, se trouve un son propre du tuyau ; les vitesses prises par la masse d'air du tuyau renfermeront, en général, des termes infiniment petits du premier ordre, correspondant à un son simple de même période que le son propre considéré ; le tuyau résonnera et rendra par résonnance, un son simple de même hauteur que le son propre considéré.

Dans le cas particulier où certaines harmoniques du son propre seraient encore sons propres du tuyau, le tuyau rendrait, en général, non plus un son simple, mais un son complexe de même hauteur que le son simple considéré.

Ce phénomène de la résonnance soulève une sorte de paradoxe : comment, en entretenant la paroi en un mouvement infiniment petit du second ordre, peut-on maintenir la masse d'air en un mouvement infiniment petit du premier ordre ?

Cette difficulté va être éclaircie par les remarques suivantes :

Considérons un élément dS de la paroi. Soit Π la pression de l'air en un point de cet élément. Soient XdS, YdS, ZdS, les composantes de la force extérieure qui lui est appliquée. Soit $\sum\frac{mv^2}{2}$ la force vive de la paroi à l'instant t. Nous aurons :

$$\int\left\{\left[X - \Pi\cos(n_i, x)\right]\frac{dx}{dt} + \left[Y - \Pi\cos(n_i, y)\right]\frac{dy}{dt} + \left[Z - \Pi\cos(n_i, z)\right]\frac{dz}{dt}\right\}dS - \frac{d}{dt}\sum\frac{mv^2}{2} = 0$$

Duh. 39.

Si l'air était en équilibre, la pression Π aurait une valeur Π_0, les quantités X, Y, Z, des valeurs X_0, Y_0, Z_0, et l'on aurait

$$\int \left\{ \left[X_0 - \Pi_0 \cos(n_i, x) \right] \delta x + \left[Y_0 - \Pi_0 \cos(n_i, y) \right] \delta y + \left[Z_0 - \Pi_0 \cos(n_i, z) \right] \delta z \right\} = 0$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\int \left\{ \left[(X - X_0) - (\Pi - \Pi_0) \cos(n_i, x) \right] \frac{dx}{dt} + \left[(Y - Y_0) - (\Pi - \Pi_0) \cos(n_i, y) \right] \frac{dy}{dt} + \left[(Z - Z_0) - (\Pi - \Pi_0) \cos(n_i, z) \right] \frac{dz}{dt} \right\} dS = \frac{d}{dt} \sum \frac{m v^2}{2}$$

Si nous désignons par ω le volume spécifique de l'air à l'instant t, au point considéré, et par ω_0 le volume spécifique de l'air en équilibre dans l'espace considéré, nous aurons :

$$\Pi - \Pi_0 = f(\omega) - f(\omega_0) = \frac{d f(\omega_0)}{d\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

D'autre part, la fonction φ avait été d'abord choisie [Chapitre VII, Égalité (9)] de telle sorte que

$$G(\omega) = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

Puis, à cette fonction φ nous avons substitué [Chapitre XII, Égalité (5)], la fonction

$$\varphi - G(\omega_0)(t - \tau)$$

où τ désigne une constante convenablement choisie, et nous avons conservé la lettre φ pour désigner cette nouvelle fonction ; nous avons donc maintenant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = G(\omega) - G(\omega_0) = \frac{d G(\omega_0)}{d \omega_0} (\omega - \omega_0)$$

Mais l'on a [Chapitre VII, Égalité (7)]

$$\omega_0 \frac{d f(\omega_0)}{d\omega_0} + \frac{d G(\omega_0)}{d\omega_0} = 0$$

On a donc

$$\Pi - \Pi_0 = -\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

et

$$\int \left\{ \left[(X - X_0) + \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos(n_i, x) \right] \frac{dx}{dt} \right.$$

$$+\left[\left(Y-Y_o\right)+\frac{1}{\omega_o}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos(n_i,y)\right]\frac{dy}{dt}$$

$$+\left[\left(Z-Z_o\right)+\frac{1}{\omega_o}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos(n_i,z)\right]\frac{dz}{dt}\Bigg\}\,dS=\frac{d}{dt}\sum\frac{mv^2}{2}$$

Les quantités

$$(X-X_o)\,dS,\quad (Y-Y_o)\,dS,\quad (Z-Z_o)\,dS$$

sont les composantes de la force qu'il faut appliquer à l'élément dS pour le maintenir en mouvement ; le travail effectué par toutes les forces de ce genre dans le temps dt est

$$d\mathcal{T}=dt\int\left[(X-X_o)\frac{dx}{dt}+(Y-Y_o)\frac{dy}{dt}+(Z-Z_o)\frac{dz}{dt}\right]dS$$

L'égalité précédente donne

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt}=-\frac{1}{\omega_o}\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,v_n\,dS+\frac{d}{dt}\sum\frac{mv^2}{2}$$

et conduit à la conclusion suivante.

Lorsqu'on veut entretenir la paroi d'un vase en un mouvement périodique qui n'est pas à l'unisson, et dont aucune harmonique n'est à l'unisson d'un son propre du système, il faut lui appliquer certaines forces ; ces forces effectuent dans un temps fini un travail du même ordre que le carré de la vitesse de la paroi.

Lorsque le son communiqué à la paroi ou une de ses harmoniques est à l'unisson de l'un des sons propres du vase, les forces qui maintiennent la paroi en mouvement effectuent, en général ; dans un temps fini, un travail infiniment grand par rapport au carré de la vitesse communiquée à la paroi.

Ainsi, lorsque le mouvement communiqué à la paroi n'entraine pas de résonnance, le travail qui entretient ce mouvement est de l'ordre de sa force vive ; mais, lorsque le mouvement communiqué à la paroi fait résonner le vase, le travail qui entretient ce mouvement est infiniment grand par rapport à la force vive de la paroi.

§2 — Résonnance aux Nœuds

Considérons un espace E rempli d'air, limité par une surface S. Soit T la période d'un son propre de ce système. La surface S étant maintenue immobile, ce système peut être animé d'un mouvement vibratoire simple de période T, dont la fonction potentielle des vitesses est de la forme :

$$\varphi=\theta\left(L\sin 2\pi\frac{t}{T}+M\cos 2\pi\frac{t}{T}\right),$$

L et M étant deux constantes arbitraires, et θ une des intégrales des équations

$$\Delta\theta + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \theta = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n_i} = 0 \ .$$

Si nous posons

$$L = A \cos 2\pi\delta \ ,$$

$$M = -A \sin 2\pi\delta \ ,$$

A et δ étant deux nouvelles constantes, nous pourrons écrire

(2) .... $\varphi = A\,\theta \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right)$

Les composantes de la vitesse en un point (x, y, z) du système ont pour valeur

$$u = -A\,\frac{\partial\theta}{\partial x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right),$$

$$v = -A\,\frac{\partial\theta}{\partial y} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right),$$

$$w = -A\,\frac{\partial\theta}{\partial z} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right).$$

Lorsqu'on remplace un mouvement propre du système par un autre mouvement propre de même période, c'est-à-dire lorsque l'on change les valeurs des constantes A et δ, on change en général la grandeur de la vitesse au point (x, y, z); mais on ne change pas sa direction, qui coïncide toujours avec celle de la grandeur géométrique ayant pour composantes

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z}$$

Prenons un élément de surface dS normal en (x', y', z') à la direction de la vitesse. Les molécules qui, à l'instant t, sont sur cet élément plan, forment, à tout instant, un élément plan, de figure invariable, qui est animé, dans la direction de sa normale, d'une vitesse ayant pour grandeur

(3) .... $v' = -A\sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z'}\right)^2} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right)$

Si l'on remplaçait ces molécules par un plan solide animé du mouvement vibratoire que nous venons de définir, le mouvement du système ne serait pas troublé

Inversement, ayant déterminé une intégrale θ des équations (1), on place en un point (x', y', z') du système un élément solide dS, normal à la grandeur géométrique qui a pour composantes

$$\frac{\partial \theta}{\partial x'}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y'}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z'},$$

et on l'anime d'un mouvement vibratoire de période T ayant pour vitesse

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad V = U \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \mu\right)$$

Les parois du système étant maintenues immobiles, quel sera le mouvement vibratoire de l'air ?

Le potentiel des vitesses sera déterminé par la formule (2), pourvu que l'on donne aux constantes A et δ des valeurs telles que l'on ait à tout instant

$$f = V,$$

ou bien en vertu des égalités (3) et (4)

$$U \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \mu\right) = A\sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z'}\right)^2}\, \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right)$$

Cette égalité donne

$$\delta = \mu,$$

$$A\sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z'}\right)^2} = U$$

et le Potentiel des vitesses devient, d'après l'égalité (2),

$$\varphi = \frac{U}{\sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z'}\right)^2}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \mu\right) \theta\,(x, y, z).$$

Le mouvement communiqué à l'air par le plan vibrant dépend naturellement de la position (x', y', z') du point où l'on a placé l'élément vibrant, et cela d'une manière très simple.

La grandeur du mouvement en un point quelconque du milieu est en raison inverse de la grandeur qu'aurait la vitesse du mouvement propre du système au point où l'on a placé le corps vibrant.

La vitesse a une valeur absolue maxima en certains points du milieu nommés ventres et minima en certains points du milieu nommés nœuds ; les ventres s'obtiennent en cherchant les points où la quantité θ^2 présente un maximum, les nœuds en cherchant les points où elle présente un minimum.

Donc la résonnance est maxima si le corps vibrant est placé en un nœud du mouvement propre et minima si le corps vibrant est placé en un ventre du mouvement propre.

Si dans le mouvement propre, il existe des nœuds où la vitesse soit rigoureusement nulle, le corps vibrant, placé en un de ces points, excitera une résonnance infinie.

§3 – Un exemple de résonnance

Précisons ce que nous venons de dire par un exemple.

Prenons le tuyau cylindrique, de longueur L, clos aux deux extrémités, dont nous avons appris à déterminer les sons propres [Chapitre XV, §3]

Supposons l'une des parois qui limitent le cylindre, la paroi $x=0$, immobile, tandis que la paroi $x=L$ est animée d'un mouvement périodique dont la vitesse, dirigée suivant Ox, a pour expression

$$(5) \quad v_x = a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + a_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} + \dots + b_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + b_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} + \dots$$

Le Potentiel des vitesses est, en vertu de l'hypothèse des tranches, de la forme

$$(6) \quad \varphi = A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} + \dots + B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} + \dots$$

1° Ce potentiel doit vérifier l'équation des petits mouvements, ce qui donne :

$$\frac{d^2 A_1}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A_1 = 0, \qquad \frac{d^2 B_1}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 B_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 A_2}{dx^2} + \left(\frac{4\pi}{aT}\right)^2 A_2 = 0, \qquad \frac{d^2 B_2}{dx^2} + \left(\frac{4\pi}{aT}\right)^2 B_2 = 0,$$

$$\dots\dots \qquad \dots\dots$$

ou bien [Chapitre XI, Égalité (16)]

$$(7) \quad \begin{cases} A_1 = m_1 \cos \dfrac{2\pi}{aT}(x+\delta_1), & B_1 = n_1 \cos \dfrac{2\pi}{aT}(x+\varepsilon_1), \\ A_2 = m_2 \cos \dfrac{2\pi}{aT}(x+\delta_2), & B_2 = n_2 \cos \dfrac{4\pi}{aT}(x+\varepsilon_2), \\ \dots\dots & \dots\dots \end{cases}$$

2° Pour $x=0$, on doit avoir, quel que soit t

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

ce qui donne, en vertu des égalités (6) et (7)

$$m_1 \sin \frac{2\pi\delta_1}{aT} = 0, \qquad n_1 \sin \frac{2\pi\varepsilon_1}{aT} = 0,$$

$$m_2 \sin \frac{2\pi\delta_2}{aT} = 0, \qquad n_2 \sin \frac{2\pi\varepsilon_2}{aT} = 0$$

$$\dots\dots \qquad \dots\dots$$

D'après ces égalités, si l'on désigne par $M_1, M_2, \ldots N_1, N_2, \ldots$ certaines constantes respectivement égales en valeur absolue à $m_1, m_2, \ldots n_1, n_2, \ldots$ mais ayant peut-être un signe différent, on aura

$$(8) \ldots\ldots \begin{cases} A_1 = M_1 \cos \dfrac{2\pi x}{aT} & B_1 = N_1 \cos \dfrac{2\pi x}{aT} \\ A_2 = M_2 \cos \dfrac{4\pi x}{aT} & B_2 = N_2 \cos \dfrac{4\pi x}{aT} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

3° Pour $x = L$, on doit avoir, quel que soit t,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_x = 0$$

ce qui donne, en vertu des égalités (5), (6) et (8),

$$\frac{2\pi}{aT} M_1 \sin \frac{2\pi L}{aT} = a_1, \qquad \frac{2\pi}{aT} N_1 \sin \frac{2\pi L}{aT} = b_1,$$

$$\frac{4\pi}{aT} M_2 \sin \frac{4\pi L}{aT} = a_2, \qquad \frac{4\pi}{aT} N_2 \sin \frac{4\pi L}{aT} = b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Ces égalités, jointes aux égalités (6) et (8) donnent :

$$(9) \ldots\ldots \varphi = \frac{a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + b_1 \cos 2\pi \frac{t}{T}}{\frac{2\pi}{aT} \sin \frac{2\pi L}{aT}} \cos \frac{2\pi x}{aT}$$

$$+ \frac{a_2 \sin 2\pi \frac{t}{T} + b_2 \cos 2\pi \frac{t}{T}}{\frac{4\pi}{aT} \sin \frac{4\pi L}{aT}} \cos \frac{4\pi x}{aT}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Le Potentiel des vitesses est en général une quantité du même ordre que les coefficients $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ c'est-à-dire une quantité du même ordre que la vitesse v_x du fond du tuyau. Il n'y a d'exception que si T a l'une des valeurs

$$T = \frac{2L}{a}, \quad \frac{2L}{2a}, \quad \frac{2L}{3a}, \ldots\ldots,$$

c'est-à-dire [Chapitre IV, Égalité (17)] que si T est une des périodes propres du tuyau de longueur L limité à ses deux extrémités. Dans ce cas, φ sera, en général, infini par rapport à $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ c'est-à-dire par rapport à v_x, et le tuyau résonnera.

Voyons maintenant, sur un semblable tuyau, un exemple de résonnance aux noeuds.

Considérons un tuyau de longueur L, fermé aux deux extrémités par des cloisons immobiles, et prenons un des sons simples qui sont propres à ce tuyau, par exemple [Chapitre XV, Égalités (17)] le son qui a pour durée de vibration

$$T_n = \frac{2L}{na} \tag{10}$$

Au point d'abscisse ξ, plaçons un petit piston plan, normal à Ox, animé d'un mouvement vibratoire simple de période T_n. Soit

$$v = U \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \mu\right) \tag{11}$$

la vitesse du mouvement de ce piston.

Cherchons quel est le mouvement vibratoire simple de période T_n que peut présenter l'air du tuyau.

D'après les égalités (6) et (8), le Potentiel des vitesses de ce mouvement sera de la forme

$$\varphi = \left(M \sin 2\pi \frac{t}{T_n} + N \cos 2\pi \frac{t}{T_n}\right) \cos \frac{2\pi x}{aT_n} \tag{12}$$

Pour $x = L$, on doit avoir, quel que soit t,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \ ,$$

ce qui donne

$$\sin \frac{2\pi L}{aT_n} = 0,$$

égalité vérifiée d'elle-même, grâce à la valeur (10) de T_n. Posons

$$M = \mathfrak{M} \cos 2\pi \delta \ ,$$

$$N = \mathfrak{M} \sin 2\pi \delta \ ,$$

et l'égalité (12) deviendra

$$\varphi = \mathfrak{M} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \delta\right) \cos \frac{2\pi x}{aT_n} \tag{13}$$

Pour $x = \xi$, on doit avoir, quel que soit t

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v = 0$$

ou

$$\frac{2\pi}{aT_n} \mathfrak{M} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \delta\right) \sin \frac{2\pi \xi}{aT_n} = U \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \mu\right)$$

D'où

$$\delta = \mu,$$

$$\mathfrak{M} = \frac{U}{\frac{2\pi}{aT_n} \sin \frac{2\pi\xi}{aT_n}}$$

et, d'après l'égalité (13),

$$\varphi = \frac{U}{\frac{2\pi}{aT_n} \sin \frac{2\pi \xi}{aT_n}} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_n} - \mu\right) \cos \frac{2\pi x}{aT_n}$$

Pour un même mouvement du piston vibrant, l'amplitude du mouvement vibratoire en un point arbitrairement donné x dépend de la position qu'on a donnée au piston vibrant; elle est en raison inverse de $\sin \frac{2\pi \xi}{aT_n}$.

Elle est, en général, du même ordre de grandeur que l'amplitude du mouvement du piston.

Elle est minimum si l'on a pour ξ l'une des valeurs :

$$\xi = \frac{aT_n}{4}, \quad \frac{3aT_n}{4}, \dots\dots \frac{5aT_n}{4}, \dots\dots \frac{(2n-1)aT_n}{4},$$

qui deviennent en vertu de l'égalité (10), ...

$$\xi = \frac{L}{2n}, \quad \frac{3L}{2n}, \dots\dots \frac{5L}{2n}, \dots\dots \frac{(2n-1)L}{2n},$$

c'est-à-dire si le piston est placé en un ventre du son propre.

L'amplitude du mouvement de l'air devient en général infinie par rapport à l'amplitude du mouvement du piston, si l'on donne à ξ l'une des valeurs :

$$\xi = 0, \quad \frac{aT_n}{2}, \quad \frac{2aT_n}{2}, \dots\dots \frac{naT_n}{2},$$

qui deviennent, en vertu de l'égalité (10),

$$\xi = 0, \quad \frac{L}{n}, \quad \frac{2L}{n}, \dots\dots L,$$

c'est-à-dire si le piston vibrant est placé en un nœud du son propre.

Nous trouvons ainsi, dans ce cas particulier, des exemples des propositions générales énoncées aux § 1 et 2.

§ 4 — Théorie des Résonnateurs.

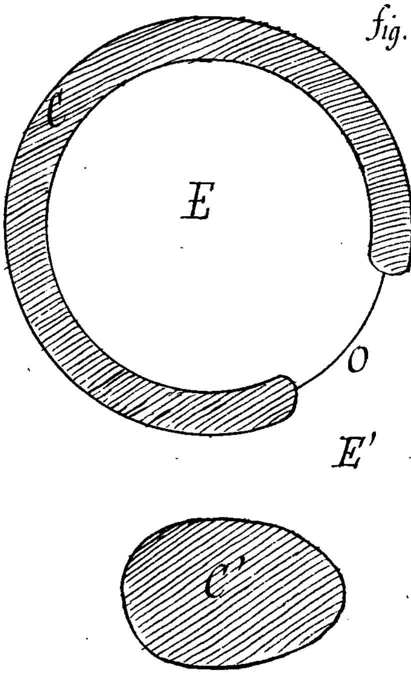
Imaginons un espace illimité, renfermant des corps solides. Nous pourrons regarder cet espace comme un espace limité par les surfaces de ces corps solides et par une sphère de rayon infini. Si nous imposons aux fonctions ψ et aux dérivées partielles des fonctions ψ, intégrales de l'équation

$$\Delta \psi + K^2 \psi = 0,$$

que nous considèrerons de se comporter à l'infini comme une fonction potentielle et comme les dérivées partielles d'une fonction potentielle, nous pourrons raisonner sur un pareil espace illimité comme sur un espace limité et parler des sons propres de cet espace.

Supposons que, parmi les corps solides $C, C', \dots$

fig. 39



qui limitent cet espace, il en soit un (fig 39) qui présente une cavité E communiquant avec l'extérieur par un orifice infiniment étroit.

Au travers de cet orifice, menons une surface O divisant l'espace illimité extérieur aux corps $C, C', \dots$ en deux parties:

1º Un espace limité E, formé par la cavité dont le corps C est creusé.

2º Un espace illimité E'.

Nous admettrons que les sons propres de l'espace $(E + E')$ se divisent en deux catégories.

1º Chacun des sons propres de la première catégorie diffère infiniment peu de l'un des sons propres de l'espace E. Soient T_1 un son propre de la première catégorie et Θ_1 le son propre de l'espace E qui est infiniment voisin de T_1. Soit ψ une fonction qui vérifie l'équation

$$\Delta \psi + \left(\frac{2\pi}{a T_1}\right)^2 \psi = 0$$

dans tout l'espace $(E + E')$ et la condition

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

à la surface des corps $C, C', \dots$.

Dans tout l'espace E', sauf aux points infiniment voisins de l'orifice O, la fonction ψ est infiniment voisine de 0.

Dans tout l'espace E, sauf aux points infiniment voisins de l'orifice O, la fonction ψ diffère infiniment peu de l'une des fonctions ξ qui vérifient l'équation

$$\Delta \xi + \left(\frac{2\pi}{a \Theta_1}\right)^2 \xi = 0,$$

dans tout l'espace E et la condition

$$\frac{\partial \xi}{\partial n_i} = 0$$

aux confins de cet espace.

2º Chacun des sons propres de la deuxième catégorie diffère infiniment peu de l'un des sons propres de l'espace E'. Soient T_2 un son propre de la deuxième catégorie et Θ_2

le son propre de l'espace E' qui est infiniment voisin de t_1. Soit Ψ une fonction qui vérifie l'équation

$$\Delta \Psi + \left(\frac{2\pi}{a t_1}\right)^2 \Psi = 0$$

dans tout l'espace $(E + E')$ et la condition

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$$

à la surface des corps C, C', ...

Dans tout l'espace E, sauf aux points infiniment voisins de l'orifice O, la fonction Ψ est infiniment voisine de 0.

Dans tout l'espace E', sauf aux points infiniment voisins de l'orifice O, la fonction Ψ diffère infiniment peu de l'une des fonctions Z qui vérifient l'équation

$$\Delta Z + \left(\frac{2\pi}{a \vartheta_1}\right)^2 Z = 0$$

dans tout l'espace E' et la condition

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = 0$$

aux confins de cet espace.

La supposition que nous venons d'énoncer doit nécessairement être admise, si l'on veut que les mouvements propres de l'espace $(E + E')$, variant d'une manière continue lorsque l'orifice O tend à se fermer, aient pour limites les mouvements qui sont propres à l'espace $(E + E')$ lorsque l'orifice O qui fait communiquer l'espace E et l'espace E' est fermé. Alors, en effet, les mouvements propres de l'espace $(E+E')$ sont toujours constitués par un mouvement propre de l'espace E joint à un mouvement propre de l'espace E'. Par conséquent sauf le cas où un mouvement propre de l'espace E et un mouvement propre de l'espace E' auraient même période, un mouvement propre de l'espace $(E + E')$ se compose, lorsque l'orifice O n'existe pas, d'un mouvement propre de l'espace E joint au repos dans l'espace E'; ou d'un mouvement propre de l'espace E' joint au repos dans l'espace E.

Ces considérations rendent vraisemblable la supposition que nous avons énoncée sans qu'on les puisse considérer comme suffisantes pour en prouver la légitimité. Elles nous montrent en même temps que la supposition précédente doit cesser d'être exacte dans le cas particulier où une période propre Θ_1 de l'espace E serait infiniment voisine d'une période propre ϑ_1 de l'espace E'; ce cas serait réalisé si l'un des corps C', ... que renferme l'espace E' était creusé d'une cavité identique à la cavité E.

Dans le cas où Θ_1 différerait infiniment peu de ϑ_1, on admettrait qu'il existe un son propre de l'espace $(E + E')$ dont la période T_1 diffère infiniment peu de Θ_1 et de ϑ_1. Soit f une fonction qui satisfait à l'équation

$$\Delta f + \left(\frac{2\pi}{a T_1}\right)^2 f = 0$$

dans tout l'espace $(E+E')$ et à la condition

$$\frac{\partial f}{\partial n}=0$$

aux confins de cet espace.

Dans tout l'espace E, sauf aux points infiniment voisins de l'orifice O, elle diffère infiniment peu de l'une des fonctions ψ qui vérifient l'équation

$$\Delta\psi+\left(\frac{2\pi}{a\,\Theta_1}\right)^2\psi=0$$

dans tout l'espace E et l'équation

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$$

aux confins de cet espace.

Dans tout l'espace E' sauf aux points infiniment voisins de l'orifice O, elle diffère infiniment peu de l'une des fonctions Ψ qui vérifient l'équation

$$\Delta\Psi+\left(\frac{2\pi}{a\,\vartheta_1}\right)^2\Psi=0$$

dans tout l'espace E' et l'équation

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}=0$$

aux confins de cet espace.

Nous exclurons de nos recherches ce cas particulier où un même son propre appartiendrait à la fois aux deux espaces E et E'.

Ajoutons, comme dernière remarque, que les sons propres de la première catégorie dépendent uniquement de la forme de l'espace E, et pas de la forme des corps C', ... que contient l'espace E'.

Ces principes posés, plaçons dans tout l'espace E' un corps Γ animé d'un mouvement vibratoire de période T. Soit V la composante suivant la normale extérieure au corps Γ de la vitesse en un point de la surface de ce corps. Nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}V&=a_1\sin 2\pi\frac{t}{T}+a_2\sin 4\pi\frac{t}{T}+\cdots\cdots\\&+b_1\cos 2\pi\frac{t}{T}+b_2\cos 4\pi\frac{t}{T}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

Trois cas sont à distinguer :

1°. Ni la période T du mouvement vibratoire du corps Γ, ni ses sous multiples $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, ... ne coïncident avec une période propre du système $(E+E')$

Dans ce cas, la fonction potentielle des vitesses de l'air dans tout l'espace $(E+E')$ sera déterminée si l'on connaît les coefficients $a_1, a_2, \ldots\; b_1, b_2, \ldots$ sur toute la surface du corps Γ. Le mouvement de l'air aura, en chaque point de l'espace $(E+E')$ une amplitude infiniment petite, en général du même ordre, et en certains points d'ordre plus élevé que la vitesse V.

2° La période T du mouvement vibratoire du corps Γ ou l'un des sous-multiples $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, ... coïncide avec une des périodes propres de la première catégorie.

Supposons, par exemple

$$\frac{T}{2} = T_1$$

Développons par la série de Fourier l'expression du Potentiel des Vitesses

$$\varphi = A_1 \sin 2\pi\frac{t}{T} + A_2 \sin 4\pi\frac{t}{T} + A_3 \sin 6\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

$$+ B_1 \cos 2\pi\frac{t}{T} + B_2 \cos 4\pi\frac{t}{T} + B_3 \cos 6\pi\frac{t}{T} + \ldots\ldots$$

D'après la théorie générale des sons propres, la connaissance des quantités a_1, a_3, ... b_1, b_3, ... détermine complètement les coefficients $A_1, A_3, \ldots B_1, B_3, \ldots$ Ces derniers sont des quantités infiniment petites du même ordre de grandeur que $a_1, a_3, \ldots\ b_1, b_3, \ldots$

Il n'en est plus de même pour les coefficients A_2, B_2. Ils ne sont plus entièrement déterminés par la connaissance des coefficients a_2, b_2. Ayant une première expression

$$\alpha_2 \sin 4\pi\frac{t}{T} + \beta_2 \cos 4\pi\frac{t}{T}$$

du terme

$$A_2 \sin 4\pi\frac{t}{T} + B_2 \cos 4\pi\frac{t}{T},$$

on obtiendra l'expression générale de ce terme en écrivant

$$(\alpha_2 + \lambda\theta) \sin 4\pi\frac{t}{T} + (\beta_2 + \mu\theta) \cos 4\pi\frac{t}{T},$$

λ et μ étant deux constantes arbitraires et θ une des fonctions qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\theta + \left(\frac{2\pi}{aT_1}\right)^2\theta = 0$$

en tout point de l'espace $(E+E')$ et la condition

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = 0$$

aux limites de cet espace.

Or, T_1 étant une des périodes de la première catégorie, θ est égal à 0 dans tout l'espace E' sauf au voisinage immédiat de l'ouverture O, tandis que θ est différent de 0 à l'intérieur de l'espace E. Si nous reproduisons alors des raisonnements semblables à ceux qui ont été exposés au §1, nous arriverons sans peine aux résultats suivants.

Dans l'espace E', les quantités A_2, B_2, sont entièrement déterminées par la connaissance des quantités a_2, b_2 ; les premières sont des infiniment petits du même ordre que les secondes.

Dans l'espace E, les quantités A_2, B_2, ne sont pas entièrement déterminées par la connaissance des quantités a_2, b_2 ; les premières sont en général infinies par rapport aux secondes.

Si une partie des parois qui limitent l'espace E est formée par la membrane du tympan ou par la membrane d'une capsule manométrique de Kœnig, cette membrane éprouvera, en général, des variations de pression infinies, par rapport à celles qui se produisent en un point du milieu E'.

3° La période T du mouvement vibratoire du corps Γ ou l'un de ses sous-multiples $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, ... coïncide avec une des périodes propres de la seconde catégorie.

Dans ce cas, un raisonnement analogue au précédent montre que, dans l'espace E, le mouvement de l'air est complètement déterminé ; son amplitude est en général du même ordre de grandeur que l'amplitude du mouvement du corps Γ. Il n'en est pas de même dans l'espace E'.

Ces résultats obtenus, on voit sans peine comment le corps E permet de reconnaître si un corps vibrant extérieur émet soit un son fondamental, soit une harmonique, ayant une période très voisine de l'une des quantités Θ_1, Θ_2, ... Θ_n, ...

Supposons que, comme il arrive pour les résonnateurs ordinairement employés, le son de période Θ_1 soit très grave par rapport aux sons de périodes Θ_2, ... Θ_n, ... et, par conséquent, facile à distinguer de ces derniers. Notre résonnateur nous permettra de reconnaître, parmi les sons simples qui composent un mouvement vibratoire donné, la présence ou l'absence d'un son ayant une période très voisine de Θ_1.

Une collection de semblables résonnateurs accordés pour des sons donnés est facile à faire, d'après le Théorème du P. Mersenne. Une telle collection permettra de déterminer les hauteurs des différents sons simples dont la superposition forme un son complexe donné, c'est-à-dire de faire l'analyse d'un son complexe.

Chapitre XVII.

Le Théorème d'Helmholtz.

§. 1 – Application du Théorème de Green aux intégrales de l'Equation

$$\Delta\psi + K^2\psi = 0$$

Nous terminerons cette étude générale des fonctions qui vérifient l'équation

$$\Delta\psi + K^2\psi = 0$$

par une importante proposition qui est due à M. H. von Helmholtz (1). Cette proposition nous sera d'un grand secours au Chapitre XVIII.

Soit E un espace clos ; soit S la surface qui le limite ; les deux fonctions Φ et Ψ sont régulières dans l'espace E et sur la surface S et, en tout point de l'espace E, elles vérifient les équations aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi + K^2\Phi = 0, \\ \Delta\Psi + K^2\Psi = 0 \end{array} \right.$$

Le Théorème de Green nous donne [Chapitre V, Egalité (23)]

$$\int (\Psi\Delta\Phi - \Phi\Delta\Psi)\, dv = -\mathsf{S}\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n_i} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}\right) dS$$

Ajoutons au premier membre de cette égalité la quantité identiquement nulle

$$K^2\int (\Psi\Phi - \Phi\Psi)\, dv$$

et nous aurons, en tenant compte des égalités (1).

$$(2) \qquad \mathsf{S}\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n_i}\right) dS = 0$$

Telle est l'égalité donnée par le Théorème de Green pour deux fonctions Φ et Ψ qui

(1) Helmholtz. – Théorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. 1859 – Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen. T. I).

vérifient les égalités (1).

Voici une première conséquence de cette égalité (2), conséquence dont nous aurons à faire usage au Chapitre suivant :

Soit Ψ une fonction quelconque vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta \Psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \Psi = 0$$

et prenons

$$\Phi = \cos \frac{2\pi x}{aT}$$

La fonction Φ vérifiera aussi l'équation aux dérivées partielles (3), et l'égalité (2) donnera alors

$$(4) \ldots\ldots\ldots \int \left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \cos \frac{2\pi x}{aT} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos \frac{2\pi x}{aT}\right)\right] dS = 0.$$

En prenant de même

$$\Phi = \sin \frac{2\pi x}{aT}$$

nous trouverons l'égalité

$$(4^{bis}) \ldots\ldots\ldots \int \left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \sin \frac{2\pi x}{aT} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\sin \frac{2\pi x}{aT}\right)\right] = 0$$

§ 2 Le Théorème d'Helmholtz.

Mais voici une autre conséquence, bien plus importante, de l'égalité (2). Elle s'obtient en prenant pour Ψ une fonction régulière quelconque vérifiant l'égalité (3), et pour Φ la fonction

$$\Phi = \frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r}$$

où r désigne la distance d'un point de l'espace E à un point fixe O extérieur à cet espace ; cette fonction Φ est en effet régulière dans l'espace E et y vérifie l'équation (3)

L'égalité (2) nous donne alors

$$(5) \ldots\ldots\ldots \int \left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r}\right)\right] dS = 0$$

Par quelle égalité doit être remplacée cette égalité (5) lorsque le point O est intérieur à l'espace E ?

Entourons le point O d'une sphère Σ de rayon R (fig 40) comprise en entier dans l'espace E ; la fonction

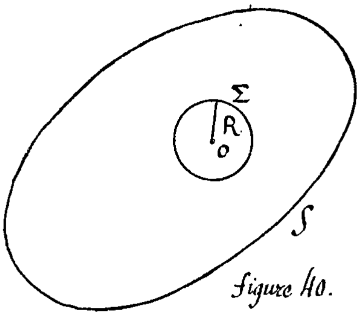


figure 40.

$$\Phi = \frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}$$

est régulière dans l'espace E' compris entre la sphère Σ et la surface S. Appliquons l'égalité (5) à cet espace E' auquel le point O est extérieur. Nous aurons

$$(6) \cdots\cdots\cdots \; S\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i}\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r} - \Psi\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right)\right] dS$$
$$+ S\left[\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\cos\frac{2\pi R}{aT}}{R} - \Psi\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\cos\frac{2\pi R}{aT}}{R}\right)\right] d\Sigma = 0$$

Soit $d\theta$ l'angle sous lequel, du point O, on voit l'élément $d\Sigma$. Nous aurons

$$d\Sigma = R^2 d\Theta$$

et

$$S\left[\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\cos\frac{2\pi R}{aT}}{R} - \Psi\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\cos\frac{2\pi R}{aT}}{R}\right)\right] d\Sigma$$
$$S\left(\frac{\partial \Psi}{\partial R}\cos\frac{2\pi R}{aT} + \frac{2\pi}{aT}\Psi \sin\frac{2\pi R}{aT}\right) R\, d\theta$$
$$+ S\, \Psi \cos\frac{2\pi R}{aT}\, d\theta ,$$

les sommations qui portent sur $d\theta$ s'étendant à la sphère de rayon 1 qui a le point O pour centre.

Faisons maintenant tendre R vers 0. Au second membre de l'égalité précédente, le premier terme tend vers 0 ; le second tend vers $4\pi\,\Psi_o$, Ψ_o étant la valeur de Ψ au point O. Dès lors, on voit sans peine que l'égalité (6) donne

$$(7) \cdots\cdots \; 4\pi\,\Psi_o = S\left[\Psi\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial n_i}\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right] dS$$

Les égalités (6) et (7) constituent le Théorème de M. H. von Helmholtz

On se rendra compte de l'importance que présente ce théorème pour l'étude des fonctions qui vérifient l'équation

$$\Delta\Psi + K^2\Psi = 0$$

en comparant ce Théorème aux propositions analogues, toutes conséquences du Théorème de Green, que l'on rencontre en analyse. Rappelons quelles sont ces propositions :

1° Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe z, régulière dans une certaine aire limitée par une Courbe S ; soit z_0 l'affixe d'un point invariable O.

On a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

si le point O est intérieur à la courbe S, et

$$\int_S \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0$$

si le point O est extérieur à la courbe S ; c'est le célèbre théorème de Cauchy, fondement de la théorie des fonctions d'une variable complexe

2° Soit une fonction V harmonique dans un certain espace E limité par une surface S ; O est un point fixe, et r la distance d'un point de l'espace E à ce point fixe. Nous avons [V. p. 169]

$$\mathbf{S}\left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_i}\right) dS = 0,$$

si le point O est extérieur à l'espace E, et

$$4\pi V_0 = \mathbf{S}\left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_i}\right) dS,$$

V_0 étant la valeur de V au point O, si le point O est intérieur à l'espace E. Ces égalités, dues à Green, ont une importance capitale dans l'étude des fonctions harmoniques.

3° Si la fonction $\varphi(x, y, z, t)$ vérifie, en tout point d'un certain milieu l'équation des petits mouvements

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

et si l'on trace dans ce milieu une surface fermée S, lorsque le point O sera extérieur à cette surface S, on aura

$$\mathbf{S}\, \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial n_i}\left[r\varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)\right] dS = 0$$

et lorsque le point O sera intérieur à la surface S, on aura

$$4\pi\varphi(x, y, z, t) = -\mathbf{S}\, \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial n_i}\left[r\varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)\right] dS$$

C'est le Théorème de G. Kirchhoff [Chapitre VII, §2]. Ce dernier Théorème a été inspiré par le Théorème de M. H. von Helmholtz que nous venons de démontrer.

§ 3. — Conséquences du théorème d'Helmholtz

Parmi les nombreuses conséquences du Théorème de M. H. von Helmholtz, il en est une que nous développerons de suite, à cause de son extrême importance. Cette conséquence rapproche les fonctions qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \psi + K^2 \psi = 0$$

des fonctions qui vérifient l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0$$

et les éloigne des fonctions qui vérifient l'équation des petits mouvements

$$a^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Cette conséquence est la suivante :

Si, dans un certain espace E, une fonction ψ est finie continue et uniforme ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre ; si ses dérivées partielles du second ordre, sans être forcément continues dans tout l'espace E, sont finies et intégrables dans cet espace, si enfin la fonction ψ vérifie dans l'espace E, l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \psi + K^2 \psi = 0$$

la fonction ψ est analytique dans tout l'espace E.

Pour démontrer ce Théorème, il suffit de remarquer qu'en tout point O de l'espace E la fonction ψ est exprimée par l'égalité (7).

Ce Théorème entraîne la conséquence suivante :

Imaginons deux espaces E_1, E_2, confinant l'un à l'autre par la surface Σ. En un point μ de la surface Σ soient n_1 la normale vers l'intérieur de l'espace E_1 et n_2 la normale vers l'intérieur de l'espace E_2. Soient ψ_1 une fonction qui vérifie dans l'espace E_1 et ψ_2 une fonction qui vérifie dans l'espace E_2 les conditions exigées pour l'application du théorème précédent. Supposons qu'en tout point μ de la surface Σ on ait

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} & \psi_1 = \psi_2 \\ & \frac{\partial \psi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial n_2} = 0 \end{aligned} \right.$$

La fonction ψ_2 prolongera analytiquement la fonction ψ_1.

Considérons, en effet, une fonction ψ égale à ψ_1 dans l'espace E_1 et à ψ_2 dans l'espace E_2.

Soit S_1 la surface qui, jointe à Σ, limite l'espace E_1 ; soit S_2 la surface qui, jointe à Σ, limite l'espace E_2

Soit O un point, intérieur à l'un des espaces E_1, E_2 ; supposons pour fixer les idées que ce soit à l'espace E_1 ; soit ψ_0 la valeur de ψ en ce point.

Nous aurons, d'après l'égalité (7)

$$4\pi\psi_0 = \mathrm{S}\left[\psi_1 \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial n_i}\right] dS_1$$

$$+ \mathrm{S}\left[\psi_1 \frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial n_1}\right] d\Sigma$$

et, d'après l'égalité (5)

$$0 = \mathrm{S}\left[\psi_2 \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\partial\psi_2}{\partial n_i}\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right] dS_2$$

$$+ \mathrm{S}\left[\psi_2 \frac{\partial}{\partial n_2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\partial\psi_2}{\partial n_2}\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right] d\Sigma$$

Ajoutons membre à membre ces deux égalités, en remarquant qu'en tout point de la surface Σ

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial n_2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) = 0$$

et nous aurons

$$4\pi\psi_0 = \mathrm{S}\left[\psi_1 \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\partial\psi_1}{\partial n_i}\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right] dS_1$$

$$+ \mathrm{S}\left[\psi_2 \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\partial\psi_2}{\partial n_i}\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right] dS_2$$

$$+ \mathrm{S}\left[(\psi_1 - \psi_2)\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial n_2}\right)\right] d\Sigma$$

Si nous tenons compte des égalités (8), le dernier terme disparaît au second membre de l'égalité précédente, et il vient

$$4\pi\psi_0 = \mathrm{S}\left[\psi_1 \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\partial\psi_1}{\partial n_i}\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right] dS_1$$

$$+ \int\!\!\int \left\{ \psi_2 \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r}\right) - \frac{\partial \psi_2}{\partial n_i}\,\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r} \right\} dS_2$$

Si le point O, au lieu d'appartenir à l'espace E_1, appartenait à l'espace E_2, on retrouverait identiquement la même égalité. Le second membre représente une fonction analytique des coordonnées du point O. Le Théorème énoncé est donc démontré

Si l'on se reporte au Chapitre VII, § 4, on voit que les deux Théorèmes que nous venons de démontrer rapprochent les fonctions qui vérifient l'équation

$$\Delta \psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right) \psi^2 = 0.$$

des fonctions harmoniques et les éloignent des fonctions qui vérifient l'équation des petits mouvements.

Chapitre XVIII.

Les Tuyaux ouverts _ Théorie d'Helmholtz.

§. 1er. Critique de la Théorie des Tuyaux ouverts.

Nous avons exposé précédemment la théorie des tuyaux donnée par Euler et Bernoulli ; nous avons vu que cette théorie reposait essentiellement sur l'hypothèse suivante :

Lorsqu'à une de ses extrémités le tuyau s'ouvre dans l'air extérieur, ce qui a lieu à l'embouchure pour tous les tuyaux, et à l'autre extrémité pour les tuyaux ouverts, l'air qui se trouve en cette partie du tuyau doit présenter un volume spécifique invariable, égal au volume spécifique de l'air en repos, ce qui s'exprime par cette condition imposée à la fonction potentielle des vitesses

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 .$$

Il est bien certain que la condensation doit être, pour une même période de vibration, beaucoup moindre à l'extrémité du tuyau où l'air extérieur empêche seul l'air vibrant de se dilater, qu'à l'intérieur du tuyau, où les parois mêmes du tuyau font obstacle latéralement à son expansion. Par conséquent, on conçoit que l'hypothèse précédente renferme une part de vérité et qu'il en peut être de même de la théorie à laquelle elle sert de fondement.

Mais ni l'hypothèse, ni la théorie qui repose sur elle, ne peuvent être regardées comme offrant une entière certitude.

En effet, ce que nous venons de dire montre bien que la densité de l'air à l'extrémité du tuyau doit différer fort peu de la densité que présente l'air extérieur au voisinage de cette extrémité, mais non pas de la densité de l'air au repos ; pour identifier ces deux densités, il faut faire cette nouvelle hypothèse que l'air extérieur ne participe presque aucunement, même au voisinage immédiat de l'orifice du tuyau, à l'ébranlement dont l'air du tuyau est le siège. Non seulement cette nouvelle hypothèse n'est pas justifiée, mais elle n'est même pas vraisemblable.

On conçoit donc que les objections abondent contre la théorie des tuyaux sonores que Bernoulli, Euler et Lagrange ont déduite d'une supposition si peu exacte.

Une première conséquence paradoxale de la théorie lui a été opposée, à titre d'objection, par Poisson (1) : Dans un tuyau de longueur convenablement choisie, il est possible, au moyen d'un ébranlement périodique infiniment petit, d'engendrer un mouvement de l'air qui a une amplitude finie.

---

(1) Poisson. Mémoire sur le mouvement des fluides élastiques dans un tuyau cylindrique et sur la Théorie des instruments à vent. (Mémoire de l'Académie des Sciences pour 1817. T. II. p. 305. 1819).

Cette objection s'évanouit si l'on remarque que, dans ce cas, l'ébranlement infiniment petit qui engendre le mouvement sonore ne peut être produit que par un travail fini, remarque que nous avons développée au Chapitre XVI.

Mais une objection autrement juste, déjà entrevue par Euler[1], est la suivante :

Une fois l'air du tuyau mis en mouvement, d'après la théorie de Bernoulli, ce mouvement se conserve indéfiniment sans rien perdre de sa force vive ; tandis qu'au contraire l'expérience nous montre que le son engendré dans un tuyau s'affaiblit et se perd rapidement.

Il est évident, et Euler l'avait déjà remarqué, que, pour lever cette objection, il faut admettre, contrairement à l'hypothèse de Bernoulli, la propagation dans l'air extérieur d'une partie du mouvement qui anime l'air du tuyau ; dès lors, l'air qui avoisine l'extrémité du tuyau ne doit pas être immobile et la condensation à l'extrémité du tuyau doit être petite, mais non pas nulle.

Poisson[2], donnant à cette idée d'Euler une forme plus précise, admit que la condensation à l'extrémité du tuyau était en effet non pas nulle, mais toujours très petite ; n'ayant aucun moyen de découvrir quelle en était la valeur, Poisson fit une hypothèse sur la loi suivant laquelle variait cette condensation. Bien que les travaux ultérieurs, et notamment ceux de M. H. von Helmholtz, aient amené à reconnaître l'inexactitude de cette hypothèse, comme elle est devenue la source de nombreuses discussions, nous allons l'énoncer ici brièvement.

Poisson admet qu'à l'extrémité du tuyau la condensation est en chaque point et à chaque instant proportionnelle à la vitesse u du mouvement dont l'air est animé ; il pose donc

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{K}{a} u,$$

la constante K étant supposée très petite à l'extrémité d'un tuyau ouvert et très grande à l'extrémité d'un tuyau fermé ; quant à sa véritable valeur, Poisson la laissait indéterminée.

Cette hypothèse de Poisson entraine la conséquence suivante :

A l'extrémité d'un tuyau ouvert les maxima de densité de l'air coïncident avec les maxima de vitesse. Nous verrons plus loin, en exposant la théorie donnée par M. H. von Helmholtz, qu'au contraire les tranches qui correspondent aux premiers maxima et les tranches qui correspondent aux seconds sont séparées les unes des autres par une distance qui est environ le quart de la longueur d'onde du son émis par le tuyau.

L'hypothèse de Poisson fait disparaître l'objection déjà soulevée par Euler contre l'ancienne théorie des tuyaux sonores ; lorsqu'un mouvement vibratoire a été communiqué

(1) Euler. Novi commentarii Academiae Petropolitanae. T. XVI. p. 347

(2) Poisson. Mémoire sur le mouvement des fluides élastiques dans un tuyau cylindrique et sur la théorie des instruments à vent. (Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1817. T. II p. 305 1819).

à l'air du tuyau et que la force qui a engendré ce mouvement vibratoire cesse d'agir, ce mouvement disparaît rapidement en se communiquant à l'air extérieur. Chaque fois que le son vient se réfléchir à l'extrémité du tuyau, une fraction de la force vive du mouvement de l'air que contient le tuyau passe à l'air extérieur. La valeur de cette fraction dépend de la valeur de K, et, par conséquent, demeure indéterminée dans la théorie de Poisson.

La théorie de Poisson est loin de lever toutes les objections auxquelles donne lieu la théorie des tuyaux ouverts; comme les théories plus anciennes de Daniel Bernoulli, d'Euler et de Lagrange, elle conduit à la conséquence suivante: les tranches nodales, c'est-à-dire les tranches où le mouvement vibratoire a une amplitude minimum, sont à des distances de l'orifice du tuyau exactement égales à des multiples impairs du quart de la longueur d'onde. Or, un grand nombre d'expérimentateurs ont déterminé la position des nœuds dans les tuyaux ouverts. Tous ont trouvé que la distance de deux nœuds consécutifs était sensiblement d'une demi-longueur d'onde, mais que la distance du dernier nœud à l'orifice du tuyau était sensiblement inférieure au quart de la longueur d'onde. Le son rendu par le tuyau est donc plus grave qu'il ne devrait être, eu égard à sa longueur, soit d'après la théorie de Bernoulli, Euler et Lagrange, soit d'après la théorie de Poisson.

Poisson chercha à expliquer de la manière suivante cette contradiction entre l'expérience et la théorie:

Si l'on communique à l'air du tuyau qui se trouve au point où, naturellement, se formerait un nœud, une vibration d'amplitude déterminée, l'amplitude des oscillations à l'embouchure devient une quantité extrêmement grande de l'ordre de $\frac{1}{K}$. Par conséquent, dans ces conditions l'amplitude du mouvement vibratoire deviendrait trop grande pour que l'on pût encore regarder comme justifiées les hypothèses qui servent à former les équations des petits mouvements. Il faut donc interpréter le résultat que nous venons de rappeler comme indiquant l'impossibilité du mouvement sonore dans les conditions où nous nous sommes placés; si l'on souffle à l'embouchure d'un tuyau, on ne pourra pas obtenir un son dont la hauteur soit exactement donnée par les formules de Poisson (qui concordent en ce point avec celles de Bernoulli, Euler et Lagrange), mais seulement un son un peu moins élevé.

Ce raisonnement, comme l'ont fort justement remarqué Quet et Zamminer, n'a aucune valeur mathématique. Quelque grande que soit la quantité $\frac{1}{K}$, on pourrait toujours supposer que l'on communique aux nœuds un mouvement d'amplitude assez faible pour que les équations des petits mouvements demeurent applicables.

Hopkins a d'ailleurs montré que cette explication de Poisson entraînait plusieurs conséquences contraires à l'expérience.

Toutefois, ces difficultés ne tiennent pas toutes nécessairement à l'hypothèse fondamentale de Poisson. Quet (1) a cherché à les éliminer et à rendre plus vraisemblable l'hypothèse de Poisson.

(1) Quet. Nouvelle théorie des tuyaux sonores (Journal de Liouville T XX. p. 1 1855)

Néanmoins Hopkins, puis Masson, ont fini par rejeter complètement l'hypothèse de Poisson pour la remplacer le premier par la simple supposition que la condensation est très faible à l'extrémité d'un tuyau ouvert, le second par une hypothèse entièrement différente.

Ce rapide exposé, que nous empruntons à M. H. von Helmholtz, nous montre que la théorie des tuyaux sonores n'avait pas en réalité fait de progrès considérables depuis Euler et Lagrange lorsque, en 1859, dans un Mémoire d'une importance capitale [1], M. H. von Helmholtz donna la théorie que nous allons exposer.

§ II. Tuyau illimité dans un sens - Point de départ de la Théorie.

Nous savons que lorsqu'une masse d'air vibre de manière à rendre un son simple, c'est-à-dire lorsque toutes les molécules qui la composent sont animées d'un mouvement périodique simple très petit, le Potentiel des vitesses est de la forme

$$(1) \qquad \varphi = \psi \sin 2\pi \frac{t}{T} + \psi' \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Chacune des deux fonctions ψ et ψ' vérifie, en tout point de la masse d'air, l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \Delta\,\psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi = 0$$

et est, de plus, assujettie à certaines conditions aux limites que nous avons appris à former.

Nous avons appris à intégrer cette équation aux dérivées partielles (2) dans deux cas particuliers.

1° Le premier cas particulier où nous sachions l'intégrer est celui où la fonction ψ ne dépend que de la seule variable x; dans ce cas, l'équation (2) se réduit à

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi = 0$$

et son intégrale générale est de la forme

$$\psi = \alpha \sin 2\pi \frac{x}{aT} + \beta \cos 2\pi \frac{x}{aT}$$

α et β étant deux constantes arbitraires. Nous avons vu que cette forme de la fonction ψ, qui correspond à l'hypothèse dite des tranches, convenait à toutes les conditions du problème suivant:

Trouver le mouvement périodique de l'air dans un tuyau illimité dans les deux sens.

[1] H. von Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (Journal de Crelle 1859. Mémoires d'Helmholtz, T. I)

le cas où la fonction ψ ne dépend que de la distance r du point considéré à un centre fixe.

Dans ce cas, comme nous l'avons vu au Chapitre XII, l'équation (2) prend la forme

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2\psi = 0$$

Son intégrale générale est de la forme :

$$\psi = \frac{1}{r}\left(\alpha \operatorname{Sin}\frac{2\pi r}{aT} + \beta \operatorname{Cos}\frac{2\pi r}{aT}\right),$$

α et β étant deux constantes arbitraires.

Cette forme, qui correspond à l'hypothèse dite des ondes sphériques, satisfait, comme nous l'avons vu, à toutes les conditions du problème suivant :

Trouver le mouvement périodique qu'engendre dans un air illimité et primitivement au repos une surface constamment sphérique dont le centre est fixe et dont le rayon varie périodiquement.

Cette forme convient encore au problème suivant :

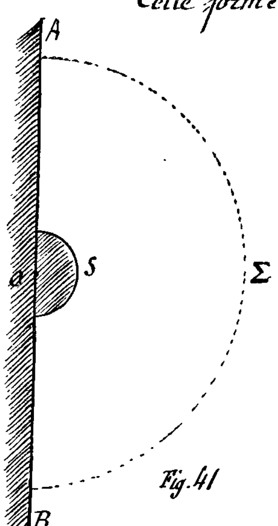


Fig. 41

Une masse d'air se trouve d'un côté d'un plan fixe illimité et immobile AB (fig. 41.) Un point O de ce plan est le centre d'une surface constamment hémisphérique dont le rayon varie périodiquement de manière à engendrer dans l'air un mouvement vibratoire simple ; trouver ce mouvement.

Pour montrer que la forme de fonction ψ que nous venons de trouver satisfait bien aux conditions de ce problème, il suffit de remarquer :

1° Que ψ et ses dérivées partielles tendent vers 0 lorsque r croît au delà de toute limite

2° Que les surfaces

$$\psi = \text{const.}$$

sont des hémisphères Σ, ayant pour centre le point O, et, par conséquent, qu'en tout point du plan AB on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \; .$$

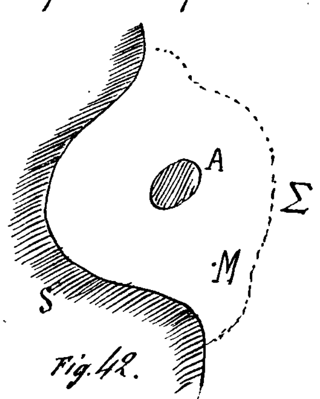


Fig. 42.

Voici maintenant une dernière remarque préliminaire qui, malgré son extrême simplicité, constitue l'une des idées fondamentales de la théorie de M. H. von Helmholtz.

Imaginons un certain espace, rempli d'air, en partie limité par des surfaces fixes S (fig. 42) et en partie illimité. Dans cet espace vibre un corps A qui a été mis en mouvement à un certain moment, par exemple au moment pris pour origine des temps. Avant ce moment, le corps et le milieu étaient en repos.

Le milieu va prendre un certain mouvement qui, en général, ne sera pas périodique, mais qui tendra, au fur et à mesure que le temps croîtra, à devenir un mouvement périodique de même période que le mouvement du corps A.

Si l'on envisage seulement les valeurs du temps supérieures à une certaine limite qui peut avoir, dans chaque cas particulier une valeur différente, on peut admettre l'exactitude de la proposition suivante :

Prenons un point M du milieu et cherchons le temps t au bout duquel, en regardant son mouvement comme périodique, nous ne commettrons plus, sur les éléments de ce mouvement, qu'une erreur relative inférieure à une limite donnée. Nous trouverons, en général, ce temps d'autant plus long que le point M est plus éloigné du corps sonore A. Si donc on convient de regarder le mouvement comme périodique à partir du moment où cette hypothèse n'affectera la vitesse que d'une erreur relative inférieure à une limite donnée, on pourra dire qu'à un certain instant t le mouvement est périodique à l'intérieur d'une certaine surface Σ, entourant le corps sonore A, et n'est pas périodique au delà ; à l'intérieur de la surface Σ, le son est permanent ; au delà, il se propage ; la surface Σ sera d'autant plus grande que le temps t est plus considérable

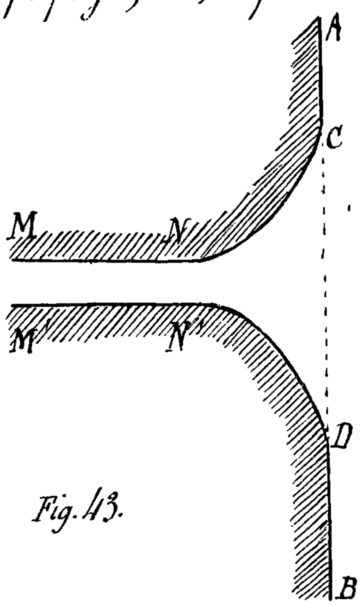


Fig. 43.

Ces préliminaires posés, imaginons qu'un plan AB (fig. 43) représenté par l'équation $x = 0$, sépare l'espace en deux régions : l'une, située à droite, est entièrement occupée par l'air ; l'autre, située à gauche est entièrement occupée par un solide immobile au sein duquel pénètre une cavité cylindrique indéfinie $MNM'N'$ dont les parois ont leurs génératrices normales à AB. Cette cavité pourra s'ouvrir dans l'air par une portion non cylindrique $NCN'D$.

Les sons que l'on a en général à considérer en musique ont une longueur d'onde assez considérable ; par exemple, un son qui correspond à 100 vibrations doubles par seconde a, dans l'air, une longueur d'onde de 330 centimètres ; un son qui correspond à 300 vibrations doubles par seconde a, dans l'air, une longueur d'onde de 110 centimètres.

Nous supposerons que le diamètre de la section du tuyau et les dimensions du pavillon non cylindrique $NCN'D$ sont de fort petites quantités par rapport à la longueur d'onde des sons que nous voulons étudier. Si nous convenons de traiter ces longueurs comme des longueurs finies, la longueur d'onde sera traitée dans nos calculs comme une quantité extrêmement grande

Supposons que dans une région du tuyau située très loin vers la gauche un mouvement périodique soit entretenu depuis un temps très long. Le mouvement s'est propagé dans l'air extérieur, et, au moment où nous commençons à étudier le mouvement de l'air du tuyau, on peut regarder comme animé d'un mouvement périodique non-seulement l'air du tuyau, mais encore l'air situé hors du tuyau à l'intérieur d'un hémisphère S (fig 44) dont le centre est en un point O de l'ouverture CD du tuyau, et dont le rayon est très grand même par rapport à la longueur d'onde. En dehors de cette sphère S, le mouvement n'est pas encore périodique au début du temps que nous considérons.

Au fur et à mesure que le temps va en croissant, la région où le mouvement de l'air peut être considéré ne fait que s'étendre; nous sommes donc assurés que le mouvement continue à être périodique dans la région où il l'était déjà au début de notre étude, c'est-à-dire dans le tuyau et à l'intérieur de la sphère S.

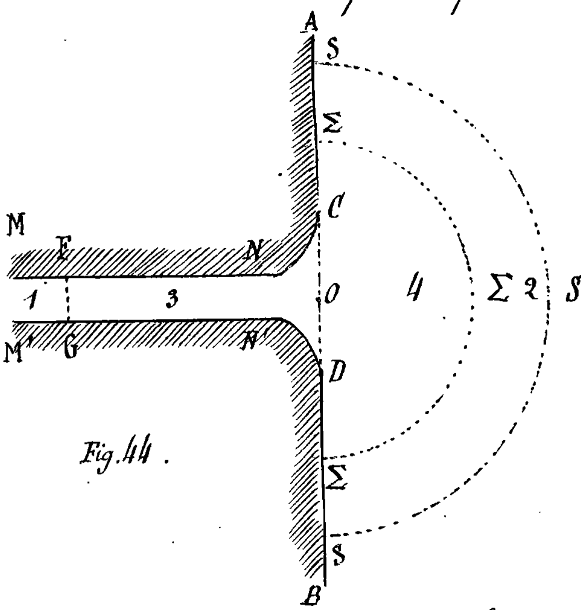


Fig. 44.

Prenons, dans le tuyau une région située à une distance de l'embouchure qui soit de l'ordre de la longueur d'onde et par conséquent très grande par rapport aux dimensions de la section. Le mouvement de l'air dans cette région, qui est, par hypothèse, un mouvement vibratoire simple de période T, coïncidera sensiblement avec l'un des mouvements vibratoires de période T que l'air peut prendre à l'intérieur d'un tuyau cylindrique illimité dans les deux sens. La fonction potentielle des vitesses doit donc, dans cette région, se réduire sensiblement à

$$\phi = \left(\alpha \sin \frac{2\pi x}{aT} + \beta \cos \frac{2\pi x}{aT}\right) \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$+ \left(\alpha' \sin \frac{2\pi x}{aT} + \beta' \cos \frac{2\pi x}{aT}\right) \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, étant quatre constantes.

Reportons l'origine du temps en arrière d'une quantité θ; t sera remplacé par $(t+\theta)$ et φ prendra la forme

$$\varphi = \left[\left(\alpha \sin \frac{2\pi x}{aT} + \beta \cos \frac{2\pi x}{aT}\right) \cos \frac{2\pi\theta}{T}\right.$$

$$\left. - \left(\alpha' \sin \frac{2\pi x}{aT} + \beta' \cos \frac{2\pi x}{aT}\right) \sin \frac{2\pi\theta}{T}\right] \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\left[\left(\alpha \sin \frac{2\pi x}{aT} + \beta \cos \frac{2\pi x}{aT}\right) \sin \frac{2\pi\theta}{T}\right.$$

$$\left. + \left(\alpha' \sin \frac{2\pi x}{aT} + \beta' \cos \frac{2\pi x}{aT}\right) \cos \frac{2\pi\theta}{T}\right] \cos 2\pi \frac{t}{T} \,..$$

On peut toujours choisir θ de manière que

$$\alpha \cos \frac{2\pi\theta}{T} - \alpha' \sin \frac{2\pi\theta}{T} = 0 .$$

Si l'on suppose l'origine du temps ainsi choisie, et si l'on pose

$$\frac{2\pi A}{aT} = \alpha \sin \frac{2\pi\theta}{T} + \alpha' \cos \frac{2\pi\theta}{T},$$

$$B = \beta \sin \frac{2\pi\theta}{T} + \beta' \cos \frac{2\pi\theta}{T},$$

$$\mathcal{B} = \beta \sin \frac{2\pi\theta}{T} - \beta' \cos \frac{2\pi\theta}{T},$$

A, B et $\mathcal{B}$ étant trois nouvelles constantes, on aura

$$(3) \ldots\ldots \varphi_1 = \left(\frac{2\pi A}{aT} \sin \frac{2\pi x}{aT} + B \cos \frac{2\pi x}{aT}\right) \cos 2\pi \frac{t}{T}$$
$$+ \mathcal{B} \cos \frac{2\pi x}{aT} \sin 2\pi \frac{t}{T} .$$

Telle est la forme sous laquelle on peut, moyennant un choix convenable de l'origine du temps, mettre la fonction qui représente approximativement la fonction potentielle des vitesses en tous les points du tuyau situés à gauche d'une certaine tranche F G fort éloignée de l'embouchure. Nous désignerons par l'indice 1 la région à laquelle appartiennent ces points.

Envisageons maintenant les points situés à droite du plan A B et à une distance de l'orifice du tuyau très grande par rapport à la longueur d'onde du son émis; nous admettrons, et c'est encore là une des idées fondamentales de la théorie de M. H. von Helmholtz, que, pour de tels points, l'orifice du tuyau se comporte comme une source sonore agissant de même en toutes directions, en sorte que le mouvement qui anime ces points se propage par ondes hémisphériques ayant pour centre le point O.

Pour parler d'une manière plus précise, nous admettrons que l'on peut tracer une hémisphère fixe Σ, ayant pour centre le point O et pour rayon une quantité qui est au moins de l'ordre de la longueur d'onde, telle qu'en un point M extérieur à cet hémisphère Σ la fonction potentielle des vitesses dépende seulement du temps t et de la distance r du point M au point O.

Le rayon de la sphère Σ ne dépend pas du temps; au contraire le rayon de la sphère S est d'autant plus grand que le début du laps de temps que l'on considère est plus éloigné du moment où le mouvement a commencé. Si l'on met un intervalle de temps suffisant entre le début du mouvement et le commencement de l'époque où les observations ont lieu, l'hémisphère S sera extérieur à l'hémisphère Σ. Nous supposerons qu'il en soit ainsi.

Envisageons alors l'espace 2 situé entre les hémisphères Σ et S; le mouvement sonore y est sensiblement stationnaire et les ondes y sont sensiblement des hémisphères ayant pour centre le point O. La fonction potentielle des vitesses coïncide donc sensiblement, en tout point de l'espace 2 avec la fonction

$$\varphi_2 = \frac{1}{\rho}\left[\lambda \sin \frac{2\pi\rho}{aT} + \mu \cos \frac{2\pi\rho}{aT}\right] \sin 2\pi \frac{t}{T}$$
$$+ \frac{1}{\rho}\left[\lambda' \sin \frac{2\pi\rho}{aT} + \mu' \cos \frac{2\pi\rho}{aT}\right] \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, étant quatre constantes et ρ la distance du point (x, y, z) au point O.

Déterminons quatre nouvelles constantes M, M_1, Θ, Θ_1, par les relations

$$M \cos 2\pi \frac{\Theta}{T} - M_1 \sin 2\pi \frac{\Theta_1}{T} + \lambda = 0,$$

$$M \sin 2\pi \frac{\Theta}{T} - M_1 \cos 2\pi \frac{\Theta_1}{T} + \mu = 0,$$

$$M \sin 2\pi \frac{\Theta}{T} + M_1 \cos 2\pi \frac{\Theta_1}{T} + \lambda' = 0,$$

$$M \cos 2\pi \frac{\Theta}{T} + M_1 \sin 2\pi \frac{\Theta_1}{T} - \mu' = 0,$$

égalités qui s'écrivent aussi :

$$M \sin 2\pi \frac{\Theta}{T} = -\frac{\lambda' + \mu}{2}, \qquad M_1 \sin 2\pi \frac{\Theta_1}{T} = \frac{\lambda + \mu'}{2},$$

$$M \cos 2\pi \frac{\Theta}{T} = -\frac{\mu' - \lambda}{2}, \qquad M_1 \cos 2\pi \frac{\Theta_1}{T} = \frac{\mu - \lambda'}{2},$$

et nous aurons

$$(4) \ldots\ldots\ldots \varphi_2 = \frac{M}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{t+\Theta}{T}\right)$$
$$- \frac{M_1}{\rho} \sin 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{t+\Theta_1}{T}\right);$$

cette expression de φ_2 peut encore s'écrire :

$$(5) \ldots\ldots \begin{cases} \varphi_2 = \Psi' \cos 2\pi \frac{t}{T} + \Psi \sin 2\pi \frac{t}{T} \\ \text{avec} \\ \Psi' = \frac{M}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{r} \sin 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right), \\ \Psi = \frac{M}{\rho} \sin 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) + \frac{M_1}{r} \cos 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right) \end{cases}$$

Entre le plan FG et l'hémisphère Σ, nous savons seulement que le Potentiel des vitesses est sensiblement de la forme

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi = \Psi \sin 2\pi \frac{t}{T} + \Psi' \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

Ψ et Ψ' étant deux intégrales de l'équation

$$\Delta \psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi = 0$$

Tel est le point de départ de la théorie de M. H. von Helmholtz ; comparons-le avec le point de départ des théories données par d'autres auteurs.

Dans l'ancienne théorie d'Euler et de Lagrange, on admet que le Potentiel des vitesses a, dans toute l'étendue du tuyau, la forme donnée par l'égalité (3), et, de plus, qu'il est identiquement nul à l'extérieur du tuyau. Cette théorie revient donc à poser

$$B = 0, \qquad \mathcal{B} = 0,$$
$$M = 0, \qquad M_1 = 0.$$

Comme nous l'avons vu, Euler a corrigé ensuite cette théorie en admettant que le mouvement de l'air du tuyau se propageait partiellement dans l'air extérieur ; il laisse d'ailleurs indéterminée l'intensité du mouvement qui se propage. Cela revient à supposer

$$B = 0, \qquad \mathcal{B} = 0,$$

mais à laisser à M et à M_1 des valeurs indéterminées.

Poisson admet que, pour $x = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ est proportionnel à $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, le facteur de proportionnalité étant très petit ; cela revient à supposer $B = 0$, $\mathcal{B}$ très petit, et à laisser M et M_1 indéterminés.

Enfin la théorie d'Hopkins revient à laisser aux quatre quantités B, $\mathcal{B}$, M, M_1, des valeurs indéterminées, dont les deux premières sont seulement très petites.

Nous allons voir comment M. H. von Helmholtz, sans faire aucune hypothèse sur les quatre constantes B, $\mathcal{B}$, M, M_1 parvient à relier leurs valeurs à la valeur de la constante A, en employant les théorèmes, fondés sur l'identité de Green, qui ont été démontrés au chapitre précédent.

§3. Tuyau illimité dans un sens (Suite). Applications du Théorème de Green.

Dans tout l'espace situé à gauche de l'hémisphère S, le Potentiel des vitesses a sensiblement la forme

$$\varphi = \Psi \sin 2\pi \frac{t}{T} + \Psi' \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

Ψ et Ψ' étant deux intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi = 0 .$$

Les deux fonctions Ψ et Ψ' sont régulières dans tout l'espace occupé par l'air à gauche de la sphère S; dès lors, d'après ce qui a été dit au Chapitre précédent, les deux fonctions Ψ et Ψ' sont analytiques

Les égalités (3) et (5) nous donnent des expressions approchées de Ψ et de Ψ' d'une part, pour l'espace 1 situé à gauche de FG, d'autre part, pour l'espace 2 situé entre les hémisphères Σ et S.

Ces expressions de Ψ et de Ψ' sont approchées, mais ne peuvent être exactes, car elles constituent des expressions analytiques différentes qui ne peuvent se prolonger l'une l'autre.

Nous allons chercher à constituer dans l'espace (3) et dans l'espace 4 deux fonctions analytiques représentant approximativement Ψ et Ψ'. Nous ferons, pour cela, une série d'applications des Théorèmes démontrés au chapitre précédent.

1ère Application — Considérons l'espace 3 compris entre les plans FG et CD (fig. 45).

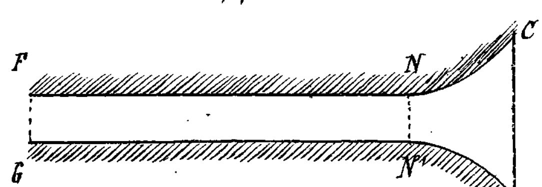


Fig. 45

Soit NN' la tranche qui limite la partie cylindrique du tuyau

Désignons par $d\omega$ un élément de la surface FG; par dP un élément de la surface $FNGN'$; par dp un élément de la surface $NCN'D$; par $d\omega'$ un élément de la surface CD; l'ensemble des surfaces que nous venons d'énumérer forme une surface fermée limitant l'espace 3. Soit n_i la normale à cette surface vers l'intérieur de l'espace 3.

L'égalité (4) du Chapitre XVII nous donnera

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots S\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]d\omega$$

$$+ S\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]dP$$

$$+ S\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]dp$$

$$+ S\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi}{aT}\right)\right]d\omega' = 0,$$

et, semblablement

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]d\omega$$

$$+\mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]dP$$

$$+\mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]dp$$

$$+\mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]d\omega' = 0.$$

Considérons d'abord l'équation (8).

D'après l'égalité (3), nous avons, en tout point de la tranche FG, approximativement :

$$\Psi' = \frac{2\pi A}{aT}\sin\frac{2\pi x}{aT} + B\cos\frac{2\pi x}{aT},$$

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} = \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\cos\frac{2\pi x}{aT} - \frac{2\pi}{aT}B\sin\frac{2\pi x}{aT},$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right) = -\frac{2\pi}{aT}\sin\frac{2\pi x}{aT},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]d\omega = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\omega$$

ω représentant la section droite du tuyau.

En tout point de la surface $FNGN'$, nous avons rigoureusement

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right) = 0,$$

et par conséquent

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]dP = 0.$$

En tout point de la surface $NCN'D$, on a

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right) = -\frac{2x}{aT}\sin\frac{2\pi x}{aT}\cos(n_i, x),$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT} - \Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2n x}{aT}\right)\right]dp$$

$$= \frac{2\pi}{aT}\mathrm{S}\,\sin\frac{2\pi x}{aT}\cos(n_i, x)\,\Psi'\,dp.$$

Enfin en tout point du plan CD, on a $x=0$; par conséquent,

$$\cos\frac{2\pi x}{aT}=1,\ \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)=0,$$

et

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}\cos\frac{2\pi x}{aT}-\Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\cos\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]d\omega'=-\mathrm{S}\,\frac{\partial\Psi'}{\partial x}d\omega'$$

L'égalité (8) devient donc

$$(9)\ldots\ldots\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\,\omega=\mathrm{S}\frac{\partial\Psi}{\partial x}d\omega'-\frac{2\pi}{aT}\mathrm{S}\,\Psi'\sin\frac{2\pi x}{aT}\cos(n_i,x)\,dp$$

Considérons de même l'égalité (7)

En tout point de la surface FG, nous avons approximativement en vertu de l'égalité (3)

$$\Psi=\mathcal{B}\cos\frac{2\pi x}{aT}$$

Dès lors, des calculs analogues aux précédents transforment l'égalité (7) en

$$(10)\ldots\ldots 0=\mathrm{S}\frac{\partial\Psi}{\partial x}d\omega'-\frac{2\pi}{aT}\mathrm{S}\,\Psi\sin\frac{2\pi x}{aT}\cos(n_i,x)\,dp.$$

Considérons encore l'espace 3 et la fonction Ψ', et appliquons leur l'égalité (4 bis) du Chapitre précédent; cette égalité deviendra

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\sin\frac{2\pi x}{aT}-\Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\sin\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]d\omega$$

$$+\mathrm{S}\left[\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\sin\frac{2\pi x}{aT}-\Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\sin\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]dP$$

$$+\mathrm{S}\left[\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\sin\frac{2\pi x}{aT}-\Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\sin\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]dp$$

$$+\mathrm{S}\left[\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\sin\frac{2\pi x}{aT}-\Psi'\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\sin\frac{2\pi x}{aT}\right)\right]d\omega'=0.$$

En raisonnant sur cette égalité comme sur l'égalité (7), on la transformera en

$$(11)\ldots\ldots \frac{2\pi}{aT} B\omega = -\frac{2\pi}{aT} \mathrm{S}\, \Psi' d\omega' + \frac{2\pi}{aT} \mathrm{S}\, \Psi' \cos\frac{2\pi x}{aT} \cos(n_i, x)\, dp.$$

2°. Application. Considérons l'espace (3+4) compris entre la tranche F G et la sphère Σ, (fig. 46) et appliquons à cet espace l'égalité (2) du Chapitre XVII en prenant pour Φ et Ψ les deux fonctions Ψ et Ψ' qui figurent dans l'expression du Potentiel des vitesses. Nous aurons, en désignant par $d\,\Omega$ un élément du plan ACDB,

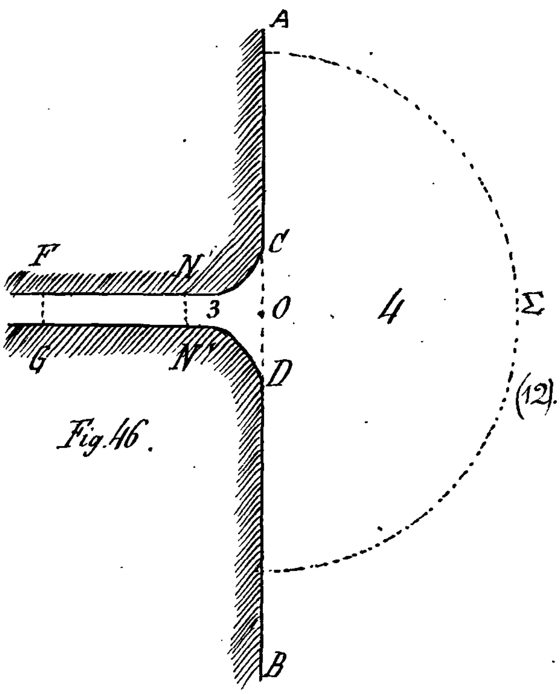


Fig. 46.

$$(12)\ldots\ldots \mathrm{S}\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\right)d\omega + \mathrm{S}\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\right)d\,P$$

$$+\,\mathrm{S}\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\right)dp + \mathrm{S}\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\right)d\,\Omega$$

$$+\,\mathrm{S}\left(\Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i} - \Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}\right)d\,\Sigma = 0$$

Sur les surfaces solides, on a

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} = 0, \quad \frac{\partial\Psi'}{\partial n_i} = 0,$$

ce qui laisse seulement, dans l'égalité précédente la première intégrale et la dernière.

En un point de FG, on a, approximativement en vertu de l'égalité (3),

$$\Psi = \mathcal{B}\cos\frac{2\pi x}{aT},$$

$$\Psi' = \frac{2\pi}{aT} A \sin\frac{2\pi x}{aT} + B\cos\frac{2\pi x}{aT},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{2\pi}{aT}\mathcal{B}\sin\frac{2\pi x}{aT},$$

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i} = \frac{\partial\Psi'}{\partial x} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\cos\frac{2\pi x}{aT} - \frac{2\pi}{aT} B\sin\frac{2\pi x}{aT},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{S}\left(\Psi'\frac{\partial\Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\right)d\omega = -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\mathcal{B}\,\omega.$$

D'autre part, en un point de la surface Σ, on a approximativement en vertu des égalités (5), en désignant par R le rayon de l'hémisphère Σ,

$$\Psi' = \frac{M}{R}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{R}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right),$$

$$\Psi = \frac{M}{R}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right) + \frac{M_1}{R}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right),$$

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} = -\frac{\partial \Psi'}{\partial R} = \frac{M}{R^2}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{R^2}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)$$
$$+\frac{2\pi}{aT}\left[\frac{M}{R}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{R}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} = -\frac{\partial \Psi}{\partial R} = \frac{M}{R^2}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right) + \frac{M_1}{R^2}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)$$
$$-\frac{2\pi}{aT}\left[\frac{M}{R}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{R}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)\right].$$

On a alors, tout calcul fait

$$\Psi'\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} = -\frac{2\pi}{aT}\,\frac{M^2+M_1^2}{R^2}$$

et

$$S\left(\Psi'\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\right)d\Sigma = -2\pi\left(M^2+M_1^2\right)\frac{2\pi}{aT}$$

On voit donc que l'égalité (12) peut s'écrire :

$$(13) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{2\pi}{aT}\,\mathcal{A}\mathcal{B}\,\omega + 2\pi\left(M^2+M_1^2\right) = 0.$$

3ᵉ Application. Considérons l'espace (2+4) situé entre le plan ACDB (fig. 47) et la sphère S de centre O et de rayon R. Soient α, β, γ, les coordonnées d'un point fixe M de cet espace; soit r la distance du point (x, y, z) au point M. Soit M' le point symétrique de M par rapport au plan AB; les coordonnées du point M' sont $-\alpha, \beta, \gamma$.

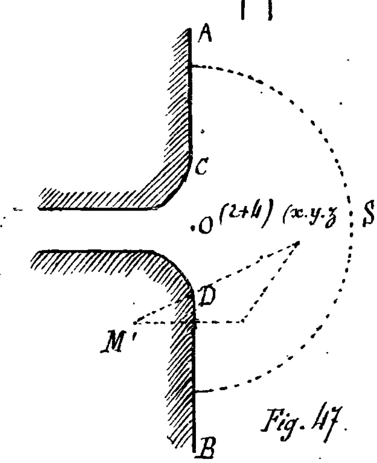


Fig. 47.

Posons

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r} + \frac{\cos\frac{2\pi r'}{aT}}{r'}\right) \ldots\ldots (14)$$

et considérons l'expression

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{S}\left(\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n_i} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\right) d\omega' + \mathrm{S}\left(\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n_i} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\right) d\Omega + \mathrm{S}\left(\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n_i} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\right) d\mathcal{S}$$

D'après l'égalité (5) du Chapitre XVII, on a

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \frac{\cos \frac{2\pi r'}{aT}}{r'} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos \frac{2\pi r'}{aT}}{r'}\right)\right] d\omega' + \mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \frac{\cos \frac{2\pi r'}{aT}}{r'} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos \frac{2\pi r'}{aT}}{r'}\right)\right] d\Omega + \mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \frac{\cos \frac{2\pi r'}{aT}}{r'} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos \frac{2\pi r'}{aT}}{r'}\right)\right] d\mathcal{S} = 0$$

D'après l'égalité (7) du même chapitre, on a

$$\mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r}\right)\right] d\omega' + \mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r}\right)\right] d\Omega + \mathrm{S}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} \frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r} - \Psi \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\cos \frac{2\pi r}{aT}}{r}\right)\right] d\mathcal{S} = -4\pi.$$

L'expression (15) a donc pour valeur

$$-2\pi \Psi(\alpha, \beta, \gamma).$$

D'autre part, en tout point du plan AB, on a

$$r = r',$$

d'où

$$\Phi = \frac{1}{r} \cos \frac{2\pi r}{aT}$$

On a aussi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{1}{r}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi r}{aT} + \frac{1}{r^2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi r}{aT}\right)\frac{\partial r}{\partial n_i}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{1}{r'}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi r'}{aT} + \frac{1}{r'^2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi r'}{aT}\right)\frac{\partial r'}{\partial n_i},$$

ce qui se réduit à 0, si l'on tient compte des égalités

$$r = r', \qquad \frac{\partial r}{\partial n_i} + \frac{\partial r'}{\partial n_i} = 0$$

Enfin, en tout point des parties AC et BD du plan AB, on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} = 0.$$

On a donc

$$(16) \ldots\ldots 2\pi\,\Psi(\alpha,\beta,\gamma) + S\,\frac{\partial \Psi}{\partial n_i}\frac{1}{r}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi r}{aT}\,d\omega'$$
$$+ S\left(\Phi\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial \Phi}{\partial n_i}\right)dS = 0.$$

En raisonnant de même sur la fonction Ψ', on trouvera

$$(17) \ldots\ldots 2\pi\,\Psi'(\alpha,\beta,\gamma) + S\,\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\frac{1}{r}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi r}{aT}\,d\omega'$$
$$+ S\left(\Phi\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} - \Psi'\frac{\partial \Phi}{\partial n_i}\right)dS = 0$$

Ces deux égalités sont rigoureuses

4^e^ Application — Considérons la fonction

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Phi' = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi r}{aT}}{r} + \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi r'}{aT}}{r'}\right)$$

fonction qui est régulière dans tout l'espace (2+4), même au point M. Reprenons les raisonnements précédents en substituant la fonction Φ' à la fonction Φ, et nous trouverons sans peine

$$(19) \ldots\ldots S\,\frac{\partial \Psi}{\partial n_i}\frac{1}{r}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi r}{aT}\,d\omega' + S\left(\Phi'\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial \Phi'}{\partial n_i}\right)dS = 0$$

$$(20) \ldots\ldots S\,\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i}\frac{1}{r}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi r}{aT}\,d\omega' + S\left(\Phi'\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} - \Psi'\frac{\partial \Phi'}{\partial n_i}\right)dS = 0$$

égalités rigoureuses comme les égalités (16) et (17).

En comparant les égalités (16) et (20) d'une part, les égalités (17) et (19) d'autre part, nous allons obtenir deux nouvelles égalités qui sont celles que nous cherchons.

En un point de la sphère S, nous avons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{\sin\frac{2\pi\Delta}{aT}}{\Delta} + \frac{\cos\frac{2\pi\Delta}{aT}}{\Delta^2}\right)\cos(\Delta, R),$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{\sin\frac{2\pi\Delta'}{aT}}{\Delta'} + \frac{\cos\frac{2\pi\Delta'}{aT}}{\Delta'^2}\right)\cos(\Delta', R),$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial n_i} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial R} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{\cos\frac{2\pi\Delta}{aT}}{\Delta} - \frac{\sin\frac{2\pi\Delta}{aT}}{\Delta^2}\right)\cos(\Delta, R)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{aT}\frac{\cos\frac{2\pi\Delta'}{aT}}{\Delta'} - \frac{\sin\frac{2\pi\Delta'}{aT}}{\Delta'^2}\right)\cos(\Delta', R)$$

Δ, Δ', étant les distances des points M, M', à un point de la sphère S

D'autre part, les égalités (5) montrent que l'on a approximativement, en tout point de la sphère S.

$$\Psi = \frac{M}{R}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) + \frac{M_1}{R}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right),$$

$$\Psi' = \frac{M}{R}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{R}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right),$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} = -\frac{2\pi}{aT}\left[\frac{M}{R}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{R}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right)\right]$$

$$+\frac{M}{R^2}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) + \frac{M_1}{R^2}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right),$$

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} = \frac{2\pi}{aT}\left[\frac{M}{R}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) + \frac{M_1}{R}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right)\right]$$

$$+\frac{M}{R^2}\cos 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{R^2}\sin 2\pi\left(\frac{R}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right)$$

On déduit aisément de là

$$(21) \ldots \left(\Phi\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} - \Psi\frac{\partial \Phi}{\partial n_i}\right) + \left(\Phi'\frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} - \Psi'\frac{\partial \Phi'}{\partial n_i}\right) = \frac{F(\Delta) + F(\Delta')}{2}$$

avec

$$(21^{bis})\ldots F(\Delta) = -\frac{2\pi}{aT}\,\frac{1-\cos(\Delta,\mathcal{R})}{\mathcal{R}\,\Delta}\Big[M \cos 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}+\Delta}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right) - M_1 \sin 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}+\Delta}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)\Big]$$
$$+\frac{1}{\mathcal{R}^2\Delta}\Big[M \sin 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}+\Delta}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right)+M_1 \cos 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}+\Delta}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)\Big]$$
$$-\frac{\cos(\Delta,\mathcal{R})}{\mathcal{R}\,\Delta^2}\Big[M \sin 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}-\Delta}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right)+M_1 \cos 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}-\Delta}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)\Big].$$

Et aussi

$$(22)\ldots\ldots\left(\Phi\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}-\Psi'\frac{\partial\Phi}{\partial n_i}\right)-\left(\Phi'\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}-\Psi\frac{\partial\Phi'}{\partial n_i}\right)=\frac{G(\Delta)+G(\Delta')}{2}$$

avec

$$(22^{bis})\ldots\ldots G(\Delta) = \frac{2\pi}{aT}\,\frac{1-\cos(\Delta,\mathcal{R})}{\mathcal{R}\,\Delta}\Big[M \sin 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}-\Delta}{aT}-\frac{\Phi}{T}\right) + M_1 \cos 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}-\Delta}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)\Big]$$
$$+\frac{1}{\mathcal{R}\,\Delta}\left[\frac{1}{\mathcal{R}}-\frac{\cos(\Delta,\mathcal{R})}{\Delta}\right]\Big[M \cos 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}+\Delta}{aT}-\frac{\Theta}{T}\right) - M_1 \sin 2\pi\left(\frac{\mathcal{R}+\Delta}{aT}-\frac{\Theta_1}{T}\right)\Big]$$

Les égalités (16) et (20), ajoutées membre à membre, en tenant compte de l'égalité (21) donnent

$$(23)\ldots\ 2\pi\,\Psi(\alpha,\beta,\gamma)+\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\cos\frac{2\pi r}{aT}+\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\sin\frac{2\pi r}{aT}\right)d\omega' + \int\frac{F(\Delta)+F(\Delta')}{2}\,dS = 0$$

De même, en retranchant membre à membre l'égalité (19) de l'égalité (17), et, en tenant compte de l'égalité (22) on trouve

$$(24)\ldots\ 2\pi\,\Psi'(\alpha,\beta,\gamma)+\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\cos\frac{2\pi r}{aT}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\sin\frac{2\pi r}{aT}\right)d\omega' + \int\frac{G(\Delta)+G(\Delta')}{2}\,dS = 0.$$

Dans ces égalités, les fonctions $F(\Delta)$ et $G(\Delta)$ sont définies par les égalités

(21^{bis}) et (22^{bis}) ; de plus, en écrivant ces égalités, on a tenu compte de ce fait qu'en tout point de la surface CD où ω', la direction de la normale n_i, coïncide avec la direction positive de l'axe des x.

Ces égalités (23) et (24) vont se simplifier ; nous allons prouver en effet que l'on a

$$\int \frac{F(\Delta) + F(\Delta')}{2}\, dS = 0,$$

$$\int \frac{G(\Delta) + G(\Delta')}{2}\, dS = 0,$$

au moyen d'une 5e application du Théorème démontré au Chapitre précédent.

Considérons (fig 48) l'espace compris entre l'hémisphère S et un hémisphère σ, concentrique au précédent, et de rayon ρ supérieur à R. Soit n_e la normale à la sphère S vers l'intérieur de cet espace.

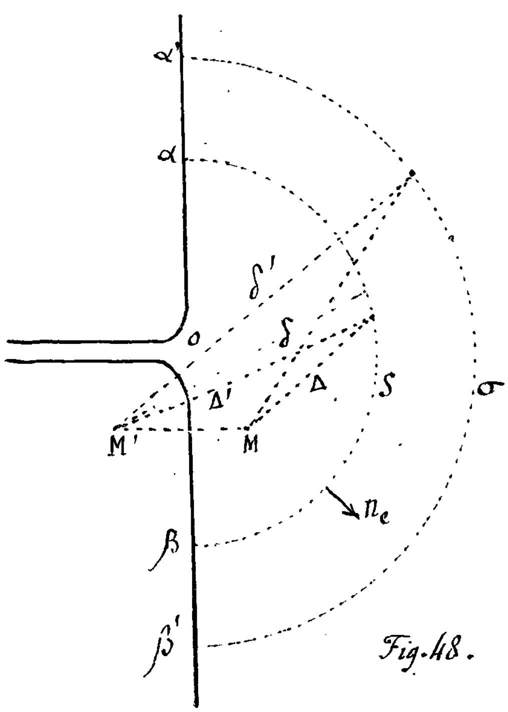


Fig. 48.

Considérons les fonctions

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi r}{aT}}{r} + \frac{\cos\frac{2\pi r'}{aT}}{r'}\right),$$

$$\Phi' = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{2\pi r}{aT}}{r} + \frac{\sin\frac{2\pi r'}{aT}}{r'}\right),$$

$$\Psi = \frac{M}{\rho}\sin 2\pi\left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right),$$
$$+ \frac{M_1}{\rho}\cos 2\pi\left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right),$$

$$\Psi' = \frac{M}{\rho}\cos 2\pi\left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right),$$
$$- \frac{M_1}{\rho}\sin 2\pi\left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right).$$

ρ étant la distance du point (x, y, z) au point O.

Ces quatre fonctions sont régulières dans l'espace considéré. Si l'on observe que l'on a, en tout point du plan αα'ββ'

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial n_i} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n_i} = 0, \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} = 0,$$

l'égalité (2) du Chapitre XVII permettra d'écrire :

Duh. 44.

$$\int\left(\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n_i}\right)d\sigma+\int\left(\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n_e}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n_e}\right)dS=0$$

$$\int\left(\varphi'\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}-\Psi'\frac{\partial\Phi'}{\partial n_i}\right)d\sigma+\int\left(\varphi'\frac{\partial\Psi'}{\partial n_e}-\Psi'\frac{\partial\Phi'}{\partial n_e}\right)dS=0.$$

Mais on a

$$\int\left[\left(\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n_e}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n_e}\right)+\left(\varphi'\frac{\partial\Psi'}{\partial n_e}-\Psi'\frac{\partial\Phi'}{\partial n_e}\right)\right]dS$$

$$=-\int\left[\left(\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}-\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}\right)+\left(\varphi'\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}-\Psi'\frac{\partial\Phi'}{\partial n_i}\right)\right]dS$$

ou bien en vertu de l'égalité (21)

$$=-\int\frac{F(\Delta)+F(\Delta')}{2}dS$$

D'autre part, si δ et δ' sont les distances d'un point de la sphère σ aux points M et M'; si $\mathfrak{R}$ est le rayon de la sphère σ, on aura

$$\int\left[\left(\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n_i}\right)+\left(\varphi'\frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}-\Psi'\frac{\partial\Phi'}{\partial n_i}\right)\right]d\sigma=\int\frac{f(\delta)+f(\delta')}{2}d\sigma$$

$f(\delta)$ se déduisant de $F(\Delta)$ par le changement de Δ et $\mathcal{R}$ en δ et $\mathfrak{R}$.

On a donc:

$$\int\frac{F(\Delta)+F(\Delta')}{2}dS=\int\frac{f(\delta)+f(\delta')}{2}d\sigma$$

Un raisonnement et une notation analogue permettent d'écrire:

$$\int\frac{G(\Delta)+G(\Delta')}{2}dS=\int\frac{g(\delta)+g(\delta')}{2}d\sigma$$

Ces égalités peuvent s'interpréter de la manière suivante:

Les quantités

$$\int\frac{F(\Delta)+F(\Delta')}{2}dS$$

$$\int\frac{G(\Delta)+G(\Delta')}{2}dS$$

définies par les égalités (21^{bis}) et (22^{bis}), ne changeraient pas de valeur si, laissant fixes les points M et M', on faisait croître au delà de toute limite le rayon $\mathcal{R}$ de la sphère S.

Or l'égalité (21^{bis}) donne:

$$F(\Delta)=\alpha\frac{1-\cos(\Delta,\mathcal{R})}{\mathcal{R}\Delta}+\frac{\beta}{\mathcal{R}^2\Delta}+\frac{\gamma}{\mathcal{R}\Delta^2},$$

α, β, γ, demeurant finis lorsque $\mathcal{R}$ croît au delà de toute limite.

On a donc

$$\int F(\Delta)\, dS = \int \left\{ \frac{\alpha \mathcal{R}}{\Delta} \left[1 - \cos(\Delta, \mathcal{R}) \right] + \frac{\beta}{\Delta} + \frac{\gamma \mathcal{R}}{\Delta^2} \right\} d\vartheta,$$

la quantité $d\vartheta = \frac{dS}{\mathcal{R}^2}$ étant un élément de l'hémisphère de rayon 1 qui a pour centre le point O, et l'intégrale qui figure au second membre s'étendant à cet hémisphère.

Lorsque $\mathcal{R}$ croît au delà de toute limite, les quantités

$$\alpha \frac{\mathcal{R}}{\Delta}, \quad \beta, \quad \gamma \frac{\mathcal{R}}{\Delta},$$

demeurent finies ; les quantités

$$1 - \cos(\Delta, \mathcal{R}), \qquad \frac{1}{\Delta},$$

tendent vers 0, la quantité

$$\int F(\Delta)\, dS$$

tend donc vers 0 ; on démontrerait de la même manière que les quantités

$$\int F(\Delta')\, dS, \qquad \int G(\Delta)\, dS, \qquad \int G(\Delta')\, dS,$$

tendent vers 0 lorsque $\mathcal{R}$ croît au delà de toute limite.

De ce résultat et de celui qui précède, on conclut que l'on a

$$\int \frac{F(\Delta) + F(\Delta')}{2}\, dS = 0$$

$$\int \frac{G(\Delta) + G(\Delta')}{2}\, dS = 0$$

Moyennant ces égalités, les égalités (23) et (24) deviennent :

$$(25) \ldots\ldots \quad 2\pi \Psi(\alpha, \beta, \gamma) = \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \frac{2\pi r}{aT} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \sin \frac{2\pi r}{aT} \right) d\omega',$$

$$(26) \ldots\ldots \quad 2\pi \Psi'(\alpha, \beta, \gamma) = \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x} \cos \frac{2\pi r}{aT} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \sin \frac{2\pi r}{aT} \right) d\omega'.$$

Les égalités (9), (10), (11), (13), (25) et (26), obtenues par des applications multiple des Théorèmes démontrés au Chapitre précédent sont les relations fondamentales sur lesquelle repose la théorie de M. H. von Helmholtz.

---

§ 4. Tuyau illimité dans un sens (Suite) – Simplification des Égalités précédentes

Nous allons maintenant simplifier ces égalités en tenant compte de l'ordre de grandeur des diverses quantités qui figurent dans nos raisonnements et nos équations

1° Égalité (9) – L'égalité (9) est la suivante :

$$\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\,\omega = \int \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\,d\omega' - \frac{2\pi}{aT}\int \Psi' \sin\frac{2\pi x}{aT}\cos(n_i, x)\,dp.$$

Les deux intégrales s'étendent à des surfaces dont les dimensions sont très petites par rapport à la longueur d'onde ; le long de la seconde surface $2\pi x$ est constamment très petit en valeur absolue par rapport à la longueur d'onde aT ; $\sin\frac{2\pi x}{aT}$ est donc très petit et la seconde intégrale est négligeable devant la première ; ce qui permet d'écrire

$$(I) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\,\omega = \int \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\,d\omega'$$

2° Égalité (10). – En raisonnant de même sur l'égalité (10) :

$$0 = \int \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,d\omega' - \frac{2\pi}{aT}\int \Psi \sin\frac{2\pi x}{aT}\cos(n_i, x)\,dp$$

on la réduit à

$$(II) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 = \int \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,d\omega'$$

3° Égalité (13) – Nous la conserverons telle que nous l'avons obtenue

$$(III) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{2\pi}{aT} A\,\mathcal{B}\,\omega + 2\pi\left(M^2 + M_1^2\right) = 0.$$

4° Égalité (11) – L'égalité (11) est la suivante :

$$\frac{2\pi}{aT}\,B\,\omega = -\frac{2\pi}{aT}\int \Psi\,d\omega' + \frac{2\pi}{aT}\int \Psi \cos\frac{2\pi x}{aT}\cos(n_i, x)\,dp.$$

En tout point du domaine auquel s'étend la seconde intégrale, $\frac{2\pi x}{aT}$ est très voisin de 0, et $\cos\frac{2\pi x}{aT}$ est très voisin de 1 ; l'égalité précédente peut donc se remplacer par celle-ci :

$$(IV) \ldots\ldots\ldots\ldots\ B\,\omega = -\int \Psi\,d\omega' + \int \Psi \cos(n_i, x)\,dp.$$

5° Égalités (25) et (26) – Pour un point (α, β, γ), intérieur à l'hémisphère Sona-

$$(25) \ldots\ 2\pi\,\Psi(\alpha,\beta,\gamma) = \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\cos\frac{2\pi r}{aT} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\sin\frac{2\pi r}{aT}\right)d\omega',$$

$$(26) \ldots\ 2\pi\,\Psi'(\alpha,\beta,\gamma) = \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x}\cos\frac{2\pi r}{aT} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\sin\frac{2\pi r}{aT}\right)d\omega'.$$

r étant la distance du point (α, β, γ) à un point de l'élément $d\omega'$:

Appliquons ces formules à un point (α, β, γ) compris entre les sphères Σ et S. La distance r d'un tel point à l'un des éléments $d\omega'$ est au moins de l'ordre de la longueur d'onde aT; mais la variation que cette distance r subit lorsqu'on passe de l'un des éléments $d\omega'$ à un autre est très petite par rapport à aT; on peut donc, dans les formules précédentes, remplacer la longueur variable r par la distance constante ρ du point (α, β, γ) au point O, et écrire.

$$2\pi \Psi(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2\pi\rho} \cos \frac{2\pi\rho}{aT} \int \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\omega' + \frac{1}{2\pi\rho} \sin \frac{2\pi\rho}{aT} \int \frac{\partial \Psi'}{\partial x} d\omega',$$

$$\Psi'(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2\pi\rho} \cos \frac{2\pi\rho}{aT} \int \frac{\partial \Psi'}{\partial x} d\omega' - \frac{1}{2\pi\rho} \sin \frac{2\pi\rho}{aT} \int \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\omega'.$$

Mais, entre les hémisphères Σ et S on doit avoir, d'après les égalités (5),

$$\Psi(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{M_1}{\rho} \cos 2\pi\left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right) + \frac{M}{\rho} \sin 2\pi\left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right),$$

$$\Psi'(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{M}{\rho} \cos 2\pi\left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta}{T}\right) - \frac{M_1}{\rho} \sin 2\pi\left(\frac{\rho}{aT} - \frac{\Theta_1}{T}\right).$$

En comparant ces deux groupes d'égalités, on trouve:

(V) .... $\Theta = 0, \quad \Theta_1 = 0,$

(27) .... $M_1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\omega', \quad M = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \Psi'}{\partial x} d\omega'.$

Les égalités (27), comparées aux égalités (I) et (II), donnent:

(VI) .... $M = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{2\pi}{aT}\right)^2 A\omega,$

(VII) .... $M_1 = 0$

Moyennant ces égalités (VI) et (VII), l'égalité (III) devient

(VIII) .... $B = -\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{2\pi}{aT}\right)^3 A\omega.$

En vertu de cette égalité (VIII), l'égalité (3), qui donne l'expression du Potentiel des Vitesses à gauche de la tranche FG, devient

(28) .... $$\varphi_1 = \left(\frac{2\pi A}{aT} \sin \frac{2\pi x}{aT} + B \cos \frac{2\pi x}{aT}\right) \cos 2\pi \frac{t}{T}$$
$$- \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^3 A\omega \cos \frac{2\pi x}{aT} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

En vertu des égalités (VI) et (VII), les égalités (5), qui fournissent le Potentiel des Vitesses entre les hémisphères Σ et S' donnent, pour expression de ce Potentiel

$$(29) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varphi_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{A\omega}{\rho} \operatorname{Cos} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{aT}\right).$$

L'égalité (28) peut se mettre sous une forme plus commode. Posons

$$(IX) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{B}{\left(\frac{2\pi}{aT}\right)A} + \operatorname{Tang}\frac{2\pi\alpha}{aT} = 0$$

et l'égalité (28) deviendra

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{aT}\frac{A}{\operatorname{Cos}\frac{2\pi\alpha}{aT}}\left(\operatorname{Sin}\frac{2\pi x}{aT}\operatorname{Cos}\frac{2\pi x}{aT} - \operatorname{Cos}\frac{2\pi x}{aT}\operatorname{Sin}\frac{2\pi\alpha}{aT}\right)\operatorname{Cos} 2\pi\frac{t}{T}$$

$$- \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^3 A\omega \cos\frac{2\pi x}{aT}\operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T},$$

ou bien

$$(X) \ldots \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{aT} A\left\{\frac{\operatorname{Sin}\frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\operatorname{Cos}\frac{2\pi\alpha}{aT}}\operatorname{Cos} 2\pi\frac{t}{T} - \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^3\operatorname{Cos}\frac{2\pi x}{aT}\operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T}\right\}$$

Cette égalité (X) est la formule fondamentale de la théorie des tuyaux sonores.

§5. Tuyau illimité dans un sens (Suite) – Analogie électrique; résistance ou longueur réduite.

Les formules (29) et (X) nous font connaître le mouvement périodique de l'air, soit hors du tuyau, soit dans le tuyau, à une distance de l'ouverture qui est au moins de l'ordre de la longueur d'onde.

Dans ces formules figurent deux constantes A et α ; d'après les égalités (I), (IV) et (IX), ces constantes sont définies de la manière suivante :

En vertu des conditions initiales et des conditions aux limites imposées au système, le mouvement de l'air que contient le tuyau et de l'air que renferme l'hémisphère S est un mouvement périodique qui admet pour Potentiel des vitesses la fonction

$$\varphi = \Psi \operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T} + \Psi' \cos 2\pi\frac{t}{T},$$

Ψ et Ψ' étant deux fonctions déterminées d'x, y, z ; ces fonctions une fois connues, les constantes A, B, α, sont données par les égalités

$$\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\,\omega = \int \frac{\partial \Psi'}{\partial x'}\, d\omega',$$

$$B\,\omega = -\int \Psi\, d\omega' + \int \Psi \cos(n_i, x)\, dp,$$

$$\frac{B}{A} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right) \operatorname{tang} \frac{2\pi\alpha}{aT} = 0.$$

Les constantes A, B, α, dépendent donc non seulement de la section du tuyau et de sa forme au voisinage de l'embouchure, mais encore, comme les fonctions Ψ et Ψ', de la période T du mouvement et de la nature des conditions initiales et des conditions aux limites.

Mais on peut prouver que, lorsqu'on fait croître au delà de toute limite la longueur d'onde aT, la quantité α tend vers une limite qui dépend seulement de la forme du tuyau et point de la période du mouvement ni de la manière dont il est engendré.

Envisageons la fonction Ψ'.

A gauche de la tranche FG, et sur la tranche FG, d'après l'égalité (28), on a

(30) .... $\Psi' = \frac{2\pi}{aT} A \sin \frac{2\pi x}{aT} + B \cos \frac{2\pi x}{aT}$

L'expression de Ψ' donnée par l'une des égalités (5), peut être prolongée analytiquement jusqu'à l'infini ; on a alors, à l'infini,

(31) .... $\Psi' = 0, \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial z} = 0.$

Le long des parois solides, on a

(32) .... $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0.$

Enfin dans tout l'espace occupé par l'air, on a

(33) .... $\Delta \Psi' + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \Psi' = 0.$

Supposons que aT croisse au delà de toute limite. L'équation (33) tendra à prendre la forme limite :

(34) .... $\Delta \Psi' = 0$

$\sin \frac{2\pi x}{aT}$ tendra vers $\frac{2\pi x}{aT}$ et $\cos \frac{2\pi x}{aT}$ vers 1, en sorte que l'égalité (30) prendra la forme limite

(35) .... $\Psi' = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A\,x + B.$

Quant aux égalités (31) et (32), elles conserveront leur forme. Ces égalités (34), (35), (31) et (32) sont celles qui détermineraient la fonction potentielle électrique dans le problème suivant :

L'air est remplacé par un métal conducteur, le cuivre, par exemple ; les parois du tuyau sont isolantes ; les tranches situées à l'intérieur du tuyau, à une distance suffisante de l'orifice, sont maintenues au niveau Potentiel

$$\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A x + B ;$$

le courant qui traverse la masse du cuivre est uniforme.

Cherchons l'intensité J de ce courant.

Si nous envisageons la tranche FG qui est traversée dans la direction positive de l'axe des x, pendant l'unité de temps, par une quantité d'électricité égale à cette intensité, nous voyons que nous aurons, en vertu de la loi de Ohm.

$$J = -\frac{\varepsilon}{\rho} \int \frac{\partial \Psi'}{\partial x} d\omega,$$

ε étant la constante des lois de Coulomb et ρ la résistance spécifique du cuivre.

Or, en tout point de la tranche FG,

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A$$

On a donc

$$J = -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\varepsilon}{\rho} A \omega.$$

On peut regarder notre conducteur comme compris entre deux électrodes ; l'une, placée suivant FG est maintenue au niveau potentiel.

$$-\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A \xi + B,$$

$(-\xi)$ étant l'abscisse d'un point de FG ; l'autre, formée par un hémisphère de centre O et de rayon infiniment grand, est maintenue au niveau potentiel O.

D'après la loi de Ohm, il existe entre ces deux électrodes une force électromotrice

$$\mathcal{E} = \varepsilon \left[B - \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A \xi \right] .$$

La résistance R du conducteur est, d'après la définition de la force électromotrice, le quotient

$$\frac{\mathcal{E}}{J},$$

en sorte que l'on a

$$R = \frac{\rho}{\omega}\left[\xi - \frac{B}{\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A}\right]$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de l'égalité (IX)

$$R = \frac{\rho}{\omega}\left[\xi + \frac{\operatorname{Tang}\frac{2\pi\alpha}{aT}}{\frac{2\pi}{aT}}\right]$$

Mais, si la longueur d'onde aT est très grande, on peut, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, remplacer $\operatorname{Tang}\frac{2\pi\alpha}{aT}$ par $\frac{2\pi\alpha}{aT}$, et remplacer l'égalité précédente par celle-ci.

(36) $$\frac{R}{\rho} = \frac{1}{\omega}\left(\xi + \alpha\right)$$

Telle est l'égalité très simple qui détermine la limite vers laquelle tend α lorsque la longueur d'onde aT croît au delà de toute limite.

Cette limite, on le voit, dépend uniquement de la section du tuyau et de la forme de son embouchure. Elle ne dépend ni de la période du son, ni de la manière dont il est est engendré.

Si nous envisageons la partie du tuyau comprise entre la tranche FG $(x = -\xi)$ et l'orifice $(x = 0)$, partie dont la longueur réelle est ξ, nous dirons que $(\xi + \alpha)$ en est la longueur réduite.

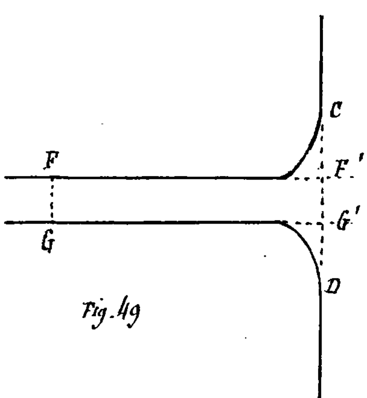


Fig. 49

Cette longueur réduite se présente, d'après ce qui précède, avec une signification très simple.

Si le tuyau était cylindrique jusqu'à l'embouchure et se terminait à l'embouchure en $F'G'$ (fig 49), en remplissant d'une matière dont la résistance spécifique ρ serait égale à l'unité le cylindre $FG\ F'G'$, dont la longueur est ξ, on obtiendrait un conducteur de résistance $\frac{\xi}{\omega}$. Au contraire si l'on remplit de la même matière non seulement le tuyau à partir de la tranche FG, mais encore l'espace illimité extérieur, on obtient un conducteur de résistance $\frac{\xi + \alpha}{\omega}$.

Cette remarque a fait donner à la quantité $\frac{\alpha}{\omega}$ le nom de résistance de l'orifice du tuyau.

D'après Lord Rayleigh, cette quantité $R_o = \frac{\alpha}{\omega}$ aurait sensiblement pour valeur

$$R_o = \frac{0,46}{\sqrt{\omega}}$$

tant que le tuyau est cylindrique jusqu'à son orifice et que celui-ci ne s'éloigne pas trop de la forme circulaire. La valeur de α dans ces conditions est donc

$$0{,}46\sqrt{\omega}$$

C'est la valeur limite vers laquelle tend α lorsque l'on fait croître au delà de toute limite la longueur d'onde du son émis. Comme dans nos recherches cette longueur d'onde doit toujours être supposée très grande par rapport aux dimensions de la section du tuyau, nous pourrons toujours remplacer α par cette valeur limite.

§6. Tuyau illimité dans un sens (Suite) — Ventres et nœuds.

Dans une région du tuyau située à une distance de l'ordre de la longueur d'onde de l'orifice, le Potentiel des vitesses est donné par la formule

$$(X) \ldots\ldots \varphi_1 = \frac{2\pi}{aT} A \left\{ \frac{\operatorname{Sin} \dfrac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\operatorname{Cos} \dfrac{2\pi\alpha}{aT}} \operatorname{Cos} 2\pi\frac{t}{T} - \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \operatorname{Cos}\frac{2\pi x}{aT} \operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T} \right\}$$

Cette formule va nous permettre de discuter les particularités que présente le mouvement de l'air à une distance de l'orifice de l'ordre de la longueur d'onde.

La quantité

$$\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \omega$$

est une quantité très petite du second ordre, les dimensions de la section du tuyau étant, par hypothèse, très petites par rapport à la longueur d'onde. Donc, si nous nous proposons seulement d'étudier les propriétés du tuyau en prenant les termes principaux, nous pourrons en général négliger le terme en $\operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T}$ devant le terme en $\cos 2\pi\frac{t}{T}$, et écrire simplement

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{aT} A \frac{\operatorname{Sin} \dfrac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\operatorname{Cos} \dfrac{2\pi\alpha}{aT}} \operatorname{Cos} 2\pi\frac{t}{T} \quad ;$$

toutefois cette opération ne serait plus légitime au voisinage immédiat des points pour lesquels

$$\operatorname{Sin} \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT} = 0$$

Nous conserverons donc la forme générale de φ_1 donnée par l'égalité (X) quitte à en simplifier les conséquences dans chaque cas particulier.

La vitesse u en un point du tuyau s'obtient par la formule

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Tout calcul fait, on trouve :

(30) .... $u = \frac{2\pi}{aT} A\, J \cos 2\pi \frac{t-\tau}{T},$

avec

(31).... $$\left\{ \begin{aligned} J^2 &= \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \left[\frac{\cos^2 \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos^2 \frac{2\pi\alpha}{aT}} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4 \frac{\omega^2}{4\pi^2} \sin^2 \frac{2\pi x}{aT} \right] \\ \operatorname{Tang} \frac{2\pi\tau}{T} &= \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi} \frac{\sin \frac{2\pi x}{aT} \cos \frac{2\pi\alpha}{aT}}{\cos \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}} \end{aligned} \right.$$

La quantité J^2 est très petite, et, par conséquent, la vitesse u est très petite quel que soit t, aux points pour lesquels

$$\cos^2 \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT} = 0,$$

c'est-à-dire aux points dont la distance

$$\xi = -x$$

à l'orifice du tuyau a l'une des valeurs

$$\xi = \frac{\lambda}{4} - \alpha, \quad \frac{3\lambda}{4} - \alpha, \quad \frac{5\lambda}{4} - \alpha, \ldots\ldots$$

Ces points portent le nom de nœuds.

On voit que, dans l'intérieur du tuyau, la distance de deux noeuds consécutifs est sensiblement égale à une demi longueur d'onde.

Mais, ainsi que l'expérience l'avait indiqué, le dernier noeud n'est pas à une distance de l'orifice égale à un quart de longueur d'onde ; il en est à une distance un peu moindre. La distance à l'orifice du tuyau diffère du quart de la longueur d'onde précisément de la longueur qu'il faut ajouter à la longueur vraie d'une portion quelconque du tuyau pour en obtenir la longueur réduite. On peut donc dire que les distances réduites des nœuds à l'orifice du tuyau sont les multiples impairs successifs du quart de la longueur d'onde.

En un nœud, on a sensiblement

$$\operatorname{Tang} \frac{2\pi\tau}{T} = \infty$$

et, par conséquent, la phase τ a pour valeur

$$\tau = (2K+1)\frac{T}{4}$$

K étant un nombre entier quelconque.

En tous les points qui ne sont pas extrêmement voisins d'un noeud, le second terme entre [ ], dans l'expression (31) de J^2 est infiniment petit par rapport au premier; on peut donc, en ces points, réduire J^2 à son premier terme et écrire

$$J^2 = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\cos^2 \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos^2 \frac{2\pi\alpha}{aT}}$$

On voit alors que J^2 est maximum aux points où

$$\cos^2 \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT} = 1$$

c'est-à-dire aux points dont la distance

$$\xi = -x$$

à l'orifice du tuyau a l'une des valeurs

$$\xi = \frac{\lambda}{2} - \alpha, \quad 2\frac{\lambda}{2} - \alpha, \ldots\ldots K\frac{\lambda}{2} - \alpha, \ldots\ldots$$

On donne à ces points le nom de ventres. Un ventre est toujours à égale distance de deux noeuds consécutifs.

La valeur de la phase τ en un ventre est donnée par l'égalité

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi\tau}{T} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi} \cos\frac{2\pi\alpha}{aT} \sin\frac{2\pi\alpha}{aT}$$

La quantité $\frac{2\pi\alpha}{aT}$ étant très petite, cette égalité devient sensiblement

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi\tau}{T} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^3 \frac{\omega\alpha}{2\pi},$$

ou bien

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi\tau}{T} = 0$$

Donc, en un ventre la phase a sensiblement l'une des valeurs

$$\tau = 0, \quad \frac{T}{2}, \ldots\ldots K\frac{T}{2}, \ldots\ldots$$

K étant un nombre entier quelconque.

Nous connaissons la valeur approchée de la phase aux ventres et aux noeuds; cherchons comment varie la phase dans l'intervalle qui sépare un ventre d'un noeud.

La seconde égalité (31) nous donne aisément

$$(32) \ldots \frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi\tau}{T}} \frac{d\tau}{dx} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^3 \frac{\omega}{2\pi} \cos^2 \frac{2\pi\alpha}{aT} \frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}$$

Nous voyons que $\frac{d\tau}{dx}$ est toujours une quantité fort petite, sauf au voisinage des nœuds, où l'on a sensiblement

$$\cos^2 \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT} = 0$$

Ce résultat nous permet de voir comment varie la phase τ du mouvement vibratoire lorsque l'on parcourt le tuyau. Prenons, par exemple, un ventre V; la phase y est égale à un multiple de $\frac{T}{2}$; supposons, pour fixer les idées, qu'elle soit égale à 0. Au nœud voisin N, elle sera égale à $\frac{T}{4}$, et au ventre suivant V' à $\frac{T}{2}$. Elle variera très lentement au voisinage des points V et V', et sa variation ne sera sensible qu'au voisinage immédiat du point N. Les variations de la phase le long du tuyau sont représentées par une courbe analogue à celle que représente la fig 50

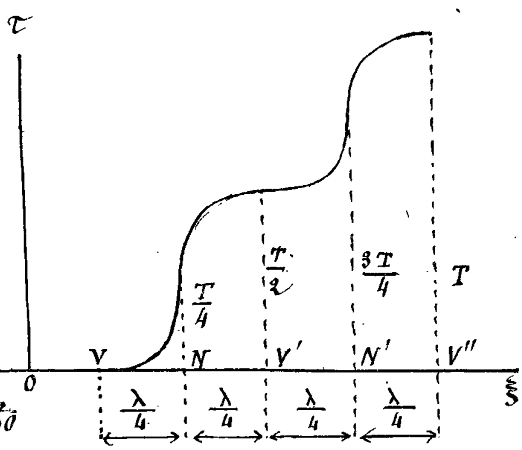


Fig. 50

Ces renseignements obtenus, nous pouvons aborder la solution de cette nouvelle question:

Les ventres sont-ils des points où l'amplitude du mouvement vibratoire est maximum en valeur absolue quelque soit t?

L'égalité (30) nous permet d'écrire:

$$(33) \ldots \frac{du}{dx} = \frac{2\pi}{aT} A \left\{ \frac{dJ}{dx} \cos 2\pi \frac{t-\tau}{T} + \frac{2\pi}{T} J \sin 2\pi \frac{t-\tau}{T} \frac{d\tau}{dx} \right\}$$

égalité dans laquelle $\frac{d\tau}{dx}$ doit être remplacé par sa valeur que donne l'égalité (32)

Cela posé, envisageons un instant t qui ne soit ni égal, ni approximativement égal, à un multiple impair de $\frac{T}{4}$. Pour tous les ventres, où la phase τ est voisine d'un multiple de $\frac{T}{2}$, la quantité

$$\cos \frac{2\pi(t-\tau)}{T}$$

aura une valeur qui ne sera pas infiniment petite.

D'ailleurs, pour tous les points qui ne sont pas très voisins d'un nœud, la phase τ a sensiblement la même valeur qu'au ventre le plus proche, comme nous venons de le voir.

Donc, à l'instant considéré, pour tous les points qui ne sont pas très voisins d'un nœud, la quantité

$$\cos \frac{2\pi(t-\tau)}{T}$$

aura assurément une valeur finie

On sait en même temps qu'en un pareil point $\frac{d\tau}{dx}$ a une très petite valeur ; ainsi, en un pareil point, d'après l'égalité (33) $\frac{du}{dx}$ ne peut être égal à 0 que si $\frac{dJ}{dx}$ a une très petite valeur absolue

La première des égalités (31) donne

$$J\frac{dJ}{dx} = -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^3 \left[\frac{\cos \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT} \sin \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos^2 \frac{2\pi\alpha}{aT}} - \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4 \frac{\omega^2}{4\pi^2} \sin \frac{2\pi x}{aT} \cos \frac{2\pi x}{aT} \right]$$

Pour les points qui ne sont pas très voisins d'un nœud, la quantité $\cos \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}$ n'est pas très petite ; la quantité $\frac{dJ}{dx}$ ne peut alors être très petite que si la quantité $\sin \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}$ est très petite, c'est-à-dire que si le point considéré est très voisin d'un ventre.

Ainsi, à un instant qui n'est pas très voisin d'un multiple impair de $\frac{T}{4}$, les points où $\frac{du}{dx}$ est égal à 0 sont ou très voisins d'un nœud, ou très voisins d'un ventre ; en d'autres termes, à un semblable instant, les points où la vitesse est maxima en valeur absolue sont ou très voisins d'un nœud, ou très voisins d'un ventre.

Or il est facile de voir qu'à l'instant considéré les maxima de la valeur absolue de la vitesse ne peuvent se produire au voisinage des nœuds ; car, si l'on se reporte à l'expression de u donnée par les égalités (30) et (31), et si l'on se souvient qu'à l'instant considéré $\cos \frac{2\pi(t-\tau)}{T}$ ne peut être très petit qu'en des points très voisins d'un nœud, on verra sans peine qu'à cet instant u est très petit au voisinage des nœuds et fini partout ailleurs

Nous arrivons donc au Théorème suivant :

Si l'on parcourt le tuyau à un instant qui n'est pas très voisin de

$$(2K+1)\frac{T}{4}$$

c'est-à-dire de la phase de l'un quelconque des nœuds, les points où la vitesse présente, à cet instant, la plus grande valeur absolue diffèrent extrêmement peu des ventres.

Cette conclusion cesse d'être exacte, avec tout le raisonnement qui a servi à l'établir, si l'on étudie le tuyau à un instant t très voisin de $(2K+1)\frac{T}{4}$. (Dans ce cas, les maxima de la valeur absolue de la vitesse se trouveront en des points dont la position dépend du temps, et varie très rapidement avec le temps

L'expression (30) de u peut s'écrire :

$$u = \frac{2\pi}{aT} AJ \left(\cos 2\pi\frac{t}{T} \cos 2\pi\frac{\tau}{T} + \sin 2\pi\frac{t}{T} \sin 2\pi\frac{\tau}{T} \right)$$

A un instant très voisin de $(2K+1)\frac{T}{4}$, $\sin 2\pi\frac{t}{T}$ est très voisin de 0; $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ est très petit aux ventres, et, d'après ce que nous avons vu, très petit aussi en tous les points qui ne sont pas très voisins d'un nœud; enfin, J est très petit aux points très voisins d'un nœud; donc à un semblable instant, la valeur absolue de la vitesse est très petite dans tout le tuyau. Nous arrivons ainsi à la proposition suivante.

A un instant très voisin de la phase de l'un quelconque des nœuds, la vitesse devient très petite dans tout le tuyau; les points où elle est maximum en valeur absolue ne sont plus aux ventres; leur position varie très rapidement durant ce très court espace de temps.

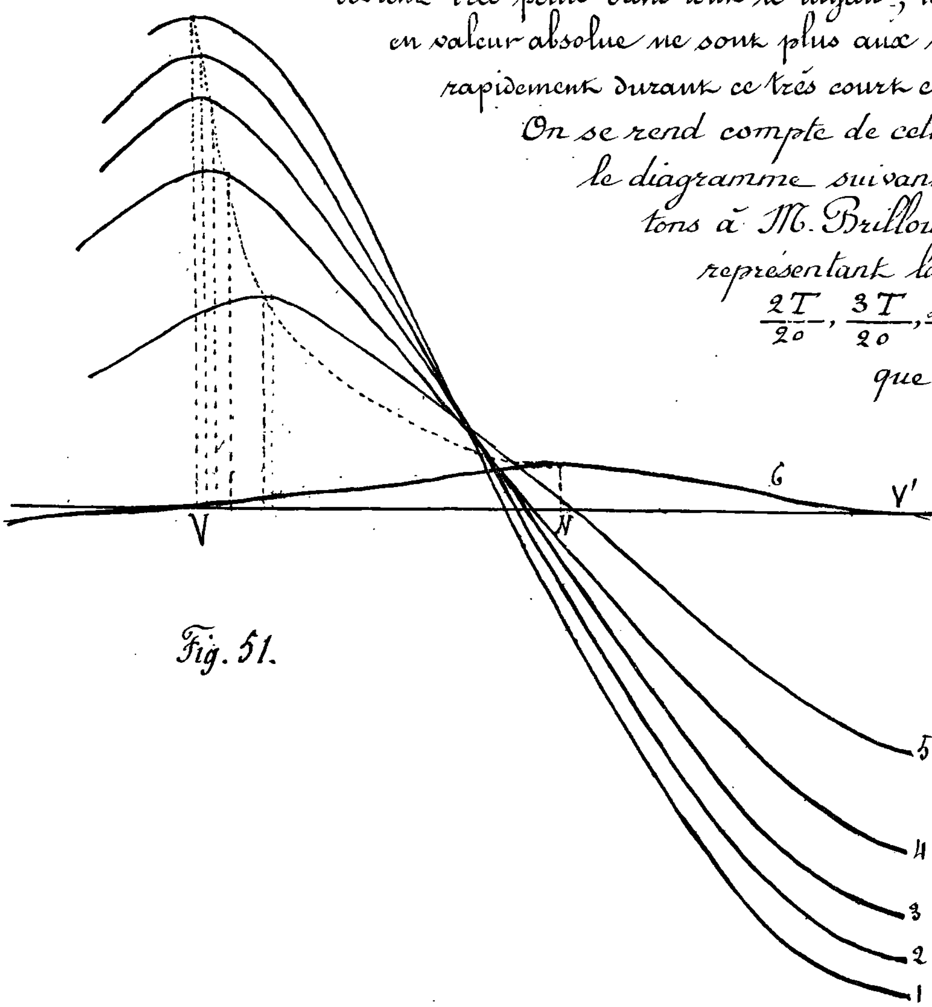


Fig. 51.

On se rend compte de cette variation en considérant le diagramme suivant (fig. 51) que nous empruntons à M. Brillouin (1). Les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6, représentant la vitesse aux instants $0, \frac{T}{20}, \frac{2T}{20}, \frac{3T}{20}, \frac{4T}{20}, \frac{5T}{20} = \frac{T}{4}$. On voit que tant que t n'approche pas de cette dernière valeur, la position du maximum de la vitesse s'écarte extrêmement peu du ventre V. Mais, lorsque t approche de $\frac{T}{4}$, la position de ce maximum s'approche très rapidement du ventre V', au voisinage duquel il se trouve lorsque t surpasse sensiblement $\frac{T}{4}$, et est sensiblement inférieur à $\frac{3T}{4}$.

Etudions maintenant la condensation.

Si ω_0 est le volume spécifique de l'air en équilibre, et ω le volume spécifique de l'air en mouvement nous avons

$$\frac{dG(\omega_0)}{d\omega_0}(\omega-\omega_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Ainsi, d'après l'égalité (X), à l'intérieur du tuyau, à une distance suffisante

(1) Brillouin. — Tuyaux sonores (Journal de Physique. 2e série T. VI. p. 214. 1887).

de l'orifice, nous aurons

$$(34)\ \frac{dG(\omega_0)}{d\omega_0}(\omega-\omega_0) = -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{2\pi A}{T}\left[\frac{\sin\frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos\frac{2\pi\alpha}{aT}}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2\frac{\omega}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{aT}\cos 2\pi\frac{t}{T}\right]$$

La condensation est constamment très petite aux points pour lesquels

$$\sin\frac{2\pi(x-\alpha)}{aT} = 0,$$

c'est-à-dire aux ventres. Aux autres points, elle a une valeur variable avec le temps et généralement finie.

En un ventre l'égalité (34) devient

$$\frac{dG(\omega_0)}{d\omega_0}(\omega-\omega_0) = -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^3 \frac{2\pi A}{T}\frac{\omega}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{aT}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

D'ailleurs, en ces points

$$\tau = K\frac{T}{2}$$

et l'égalité (30) devient

$$u = \pm\frac{2\pi}{aT}AJ\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

Donc, en un ventre, la condensation est à chaque instant proportionnelle à la vitesse au même instant. Le maximum de valeur absolue de la condensation a lieu au moment où la vitesse prend sa plus grande valeur absolue.

Mais ce résultat n'est plus exact pour les points qui ne sont pas infiniment voisins d'un ventre. En un point qui n'est pas extrêmement voisin d'un ventre, l'égalité (34) se réduit à

$$\frac{dG(\omega_0)}{d\omega_0}(\omega-\omega_0) = -\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{2\pi A}{T}\frac{\sin\frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos\frac{2\pi\alpha}{aT}}\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

tandis que la vitesse est représentée par la formule

$$u = \frac{2\pi}{aT}AJ\cos 2\pi\frac{t-\tau}{T}$$

Au point considéré, la condensation atteint sa plus grande valeur absolue au moment où

$$\sin 2\pi\frac{t}{T} = \pm 1$$

et la vitesse au moment où

$$\cos 2\pi\frac{t-\tau}{T} = \pm 1$$

Le maximum de vitesse se produit $\left(\tau - \frac{T}{4}\right)$ secondes après le maximum de condensation.

Ce fait est en contradiction absolue avec l'hypothèse de Poisson sur les tuyaux ouverts.

§ 7 — Tuyau fermé à un bout ; sons propres ; résonnance

Jusqu'ici, nous avons supposé le tuyau illimité. Nous allons maintenant supposer que ce tuyau, quoique très long, est fermé à une distance L de l'orifice.

Nous supposerons d'abord la fermeture immobile et nous chercherons les sons propres du système.

Nous avons, dans le tuyau,

$$(Y) \ldots \varphi_1 = \frac{2\pi}{aT} A \left[\frac{\sin \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos \frac{2\pi\alpha}{aT}} \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{aT} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right]$$

et par conséquent,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A \left[\frac{\cos \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos \frac{2\pi\alpha}{aT}} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \sin \frac{2\pi x}{aT} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right]$$

Pour $x = -L$, on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 .$$

T, période du mouvement vibratoire propre au tuyau, doit donc être telle que l'équation suivante soit vérifiée quel que soit t :

$$\frac{\cos \frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}}{\cos \frac{2\pi\alpha}{aT}} \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \sin \frac{2\pi L}{aT} \sin 2\pi \frac{t}{T} = 0$$

L'évaluation rigoureuse de T est impossible, car α dépend de T d'une manière qu'il est impossible de préciser. Mais si nous nous bornons au cas où la longueur d'onde aT est grande par rapport aux dimensions de la section du tuyau, nous pourrons aisément obtenir une valeur approchée de T ; dans ce cas, en effet, α peut être regardé comme une constante positive particulière au tuyau ; de plus le terme très petit du second ordre $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi}$ peut être négligé, et la condition précédente se réduit à

$$\cos \frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} = 0$$

Duh. 46.

Elle est vérifiée pour une infinité de valeurs de T

$$T = \frac{4(L+\alpha)}{a},\ \frac{4(L+\alpha)}{3a},\ \frac{4(L+\alpha)}{5a},\ \ldots\ldots$$

Les sons propres du tuyau sont donc le son fondamental

$$T = \frac{4(L+\alpha)}{a}$$

dont le nombre de vibration est

$$n = \frac{a}{4(L+\alpha)}$$

et toutes ses harmoniques de rang pair

Les sons propres d'un tuyau sont identiques aux sons propres donnés par la Théorie de Bernoulli pour un tuyau dont la longueur serait égale à la longueur réduite du tuyau étudié

Ces sons ne sont qu'approximativement sons propres.

Supposons maintenant le fond du tuyau animé d'un mouvement vibratoire simple dont la vitesse a pour expression

$$V = F \cos 2\pi \frac{t-\theta}{T}$$

$$= F\left[\cos\frac{2\pi\theta}{T}\cos\frac{2\pi t}{T} + \sin\frac{2\pi\theta}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}\right].$$

Quel sera le mouvement vibratoire pris par l'air du tuyau et par l'air extérieur? Pour $x = -L$, on devra avoir, quel que soit t,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + V = 0,$$

identité qui entraine les relations

$$(35)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A \frac{\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}}{\cos\frac{2\pi\alpha}{aT}} = F\cos\frac{2\pi\theta}{T} \\ &\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4 A\, \frac{\omega}{2\pi}\sin\frac{2\pi L}{aT} = F\sin\frac{2\pi\theta}{T}\end{aligned}\right.$$

De ces équations (35), nous déduisons les suivantes :

$$(36)\ \text{-------}\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Tang}\frac{2\pi\theta}{T} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2\frac{\omega}{2\pi}\,\frac{\cos\frac{2\pi\alpha}{aT}\sin\frac{2\pi L}{aT}}{\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}}. \\ &\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A^2 = \frac{F^2}{\dfrac{\cos^2\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}}{\cos^2\frac{2\pi\alpha}{aT}} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4\frac{\omega^2}{4\pi^2}\sin^2\frac{2\pi L}{T}}\end{aligned}\right.$$

La première de ces équations nous enseigne que la phase du corps vibrant qui forme le fond du tuyau doit avoir une valeur déterminée qui dépend de la longueur du tuyau et de la durée du mouvement vibratoire.

Pour comprendre le sens de ce résultat, il faut nous rappeler que l'origine à laquelle le temps est rapporté dans toute la théorie qui précède n'est nullement un instant quelconque. Au § II, pour écrire l'équation (3), nous avons choisi cette origine d'une manière toute particulière. C'est en vertu de ce choix particulier de l'origine du temps que nous sommes arrivés, au § précédent, à ce résultat. La valeur de la phase en un ventre est sensiblement égale à un multiple de $\frac{T}{2}$.

C'est aussi à cette origine particulière qu'est rapportée la phase θ qui figure dans la première égalité (36).

Prenons maintenant une origine arbitraire pour le temps. Supposons que l'instant qui, précédemment, servait d'origine, soit maintenant l'instant τ.

La phase en un ventre, égale précédemment à $K\frac{T}{2}$ deviendra

$$f = K\frac{T}{2} + \tau .$$

Si l'on désigne par θ la quantité qui vérifie la première égalité (36), la phase du fond du tuyau deviendra

$$\vartheta = \theta + \tau .$$

Ces deux égalités nous en donnent une troisième qui est indépendante de l'origine choisie pour les temps :

$$(37) \qquad f - \vartheta = K\frac{T}{2} - \theta$$

Le résultat que nous avions obtenu doit alors s'interpréter de la manière suivante :

Lorsque le tuyau vibre, l'excès de la phase en l'un quelconque des ventres sur la phase au fond du tuyau est donné par les égalités (36) et (37).

Discutons les conséquences de cette proposition.

Si la période du mouvement vibratoire n'est ni exactement, ni approximativement l'une des périodes

$$\frac{4(L+\alpha)}{a}, \ \frac{4(L+\alpha)}{3a}, \ \frac{4(L+\alpha)}{5a}, \ \dots\dots\dots$$

qui sont sensiblement propres au tuyau, la quantité $\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{T}$ a une valeur qui n'est pas très petite ; l'extrême petitesse du facteur $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2\frac{\omega}{2\pi}$, entraîne alors, d'après l'égalité (36), l'extrême petitesse de $\operatorname{Tang} 2\pi\frac{\theta}{T}$, en sorte que θ doit être un multiple de $\frac{T}{2}$. L'égalité (37) permet dans ces conditions, d'énoncer la proposition suivante :

Si la période du mouvement vibratoire du fond du tuyau n'est ni exactement, ni approximativement, l'une des périodes propres du tuyau, la différence entre la phase d'un ventre quelconque et la phase du fond du tuyau est toujours sensiblement égale à un multiple de la demie période.

Cette proposition cesse d'être exacte si l'on a, exactement ou approximativement, l'une des égalités

$$T = \frac{4(L+\alpha)}{a}, \frac{4(L+\alpha)}{3a}, \frac{4(L+\alpha)}{5a}, \ldots\ldots$$

car $\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}$ devient alors une quantité fort petite. Supposons en particulier que l'une de ces égalités ait lieu rigoureusement. Nous aurons alors

$$\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} = 0$$

et la première égalité (36) deviendra

$$\operatorname{Tang}\frac{2\pi\theta}{T} = \infty,$$

d'où

$$\theta = (2K+1)\frac{T}{4}$$

L'égalité (37) nous fournit, dans ce cas, la proposition suivante :

Si la période du mouvement vibratoire du fond du tuyau est rigoureusement égale à l'une des périodes propres du tuyau, la différence entre la phase d'un ventre quelconque et la phase du fond du tuyau est sensiblement égale à un multiple impair du quart de la période

La seconde équation nous donne la valeur de $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)A$; cette valeur est en général du même ordre de grandeur que F et il en est de même du Potentiel des vitesses aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du tuyau, cette quantité renfermant $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)A$ en facteur. Mais, dans le cas où la période du mouvement du piston qui forme le fond du tuyau est l'une des périodes propres du système, on a

$$\cos 2\pi\frac{L+\alpha}{aT} = 0$$

et la quantité $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)A$ est donnée par l'égalité

$$\left(\frac{2\pi}{aT}\right)A = \pm\frac{F}{\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2\frac{\omega}{2\pi}\sin\frac{2\pi L}{aT}}$$

Comme la quantité $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2\frac{\omega}{2\pi}$ est très petite, cette quantité est extrêmement grande.

Ainsi le mouvement engendré dans l'air est, en général, du même ordre de grandeur que le mouvement du piston qui ferme le fond du tuyau ; mais, dans le cas particulier où la période du mouvement de ce piston est une période propre du tuyau, le mouvement engendré dans l'air est extrêmement grand par rapport au mouvement du piston ; il y a résonnance.

Le mouvement engendré par résonnance est extrêmement grand par rapport au mouvement qui l'engendre, mais non pas infiniment grand, car les périodes pour lesquelles

$$\cos 2\pi \frac{L+\alpha}{aT} = 0$$

ne sont que d'une manière approchée périodes propres du tuyau

Étudions de même le phénomène de la résonnance aux nœuds.

Considérons un tuyau de longueur L, fermé par une cloison immobile. Soit T une des périodes propres de ce tuyau vérifiant l'équation

$$\cos \frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} = 0$$

Plaçons dans ce tuyau, à une distance λ de l'orifice un piston vibrant dont la vitesse soit donnée par la formule

$$V = F \cos \frac{2\pi(t-\theta)}{T},$$

On trouvera sans peine, dans ce cas, que l'on doit avoir

$$(38) \cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Tang} 2\pi \frac{\theta}{T} = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi} \frac{\cos \frac{2\pi\alpha}{aT} \sin \frac{2\pi\lambda}{aT}}{\cos \frac{2\pi(\lambda+\alpha)}{aT}} \\ &\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A^2 = \frac{F^2}{\dfrac{\cos^2 \frac{2\pi(\lambda+\alpha)}{aT}}{\cos^2 \frac{2\pi\alpha}{aT}} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega^2}{4\pi^2} \sin^2 \frac{2\pi L}{aT}} \end{aligned} \right.$$

La première égalité (38) s'interprète comme la première égalité (36); portons seulement notre attention sur la seconde. Cette seconde égalité donne en général pour $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)A$ une valeur du même ordre de grandeur que F. Il y a exception pour le cas où $\cos \frac{2\pi(\lambda+\alpha)}{aT}$ est très petit en valeur absolue, c'est-à-dire pour le cas où le corps vibrant est placé au voisinage immédiat d'un nœud. Dans ce cas $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)A$ est extrêmement grand par rapport à F; il y a résonnance

§. 8. Résonnance d'un Tuyau fermé pour une source sonore éloignée.

Nous avons supposé, dans toute la théorie précédente, qu'à une distance de l'orifice comparable à la longueur d'onde du tuyau, les ondes, c'est-à-dire les surfaces où le Potentiel des Vitesses a, au même instant, la même valeur, étaient des hemisphères ayant pour centre un point de l'orifice du tuyau. Pour amener cette hypothèse, nous avons admis qu'à une distance de l'orifice du tuyau comparable à la longueur d'onde le mouvement de l'air était sensiblement celui qu'engendrerait une source hemisphérique très petite dont le centre serait en un point de l'orifice

Mais cette hypothèse ne peut plus être conservée si nous supposons que le milieu extérieur renferme une source sonore très éloignée de l'orifice du tuyau et nous nous trouvons en présence d'un problème nouveau qu'il nous faut traiter directement.

Nous commencerons par traiter, à titre de lemmes, deux problèmes dont voici le premier :

Un milieu, indéfini dans un sens, est limité dans l'autre sens par un plan immobile; il renferme une sphère <u>très petite</u> dont le centre A est fixe et dont le rayon R varie périodiquement ; quelle est la nature du mouvement que cette source engendre dans le milieu ?

Le Potentiel des Vitesses doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° On doit avoir :

$$\varphi = \Psi \sin 2\pi \frac{t}{T} + \Psi' \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

les deux fonctions Ψ et Ψ' vérifiant l'équation

$$\Delta \psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi^2 = 0,$$

et étant finies, continues et uniformes ainsi que leurs dérivées partielles du premier et du second ordre dans tout le milieu.

2° Aux divers points du plan limite, que nous supposerons être le plan YOZ, on doit avoir

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = 0$$

3° Aux divers points de la sphère, les deux fonctions Ψ et Ψ' doivent satisfaire aux conditions suivantes

(39) .... $\dfrac{\partial \Psi}{\partial R} + V = 0, \qquad \dfrac{\partial \Psi'}{\partial R} + V' = 0$

la vitesse en un point de la sphère étant représentée par la formule

$$v = V \sin 2\pi \frac{t}{T} + V' \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

ou V et V' sont deux constantes

4° Les deux fonctions Ψ et Ψ' sont nulles à l'infini.

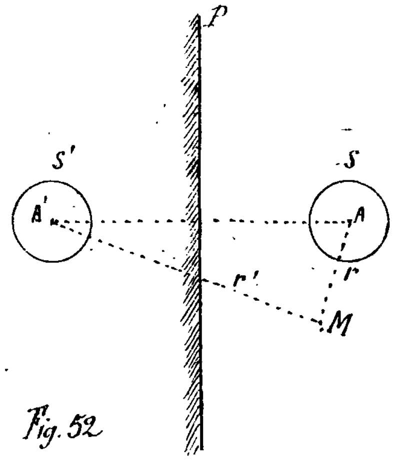


Fig. 52

Soit A' l'image de A par rapport au plan fixe YOZ ; soit M un point du milieu (fig 52) ; soient r et r' ses distances aux points A et A'. Considérons la fonction

$$(40) \dots\dots \varphi = H\left[\frac{1}{r}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT}\right) + \frac{1}{r'}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r'+\delta}{aT}\right)\right]$$

où H et δ sont deux constantes.

Cette fonction satisfait évidemment à toutes les conditions requises autres que les conditions (39). Voyons s'il est possible de déterminer les constantes H et δ de manière que les conditions (39) soient vérifiées.

On a en général

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -H\left[\frac{1}{r^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT}\right) + \frac{1}{r'^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r'+\delta}{aT}\right)\frac{\partial r'}{\partial r}\right]$$
$$+\frac{2\pi}{aT}H\left[\frac{1}{r^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT}\right) + \frac{1}{r'^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r'+\delta}{aT}\right)\frac{\partial r'}{\partial r}\right]$$

Supposons en particulier que $r = R$; comme R est très petit, les termes en $\frac{1}{r'^2}$ pourront être négligés par rapport aux termes en $\frac{1}{R^2}$, et l'égalité précédente donnera

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{H}{R^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R+\delta}{aT}\right) + \frac{2\pi}{aT}\frac{H}{R^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R+\delta}{aT}\right)$$
$$= \frac{H}{R^2}\left(\frac{2\pi R}{aT}\cos 2\pi\frac{R+\delta}{aT} - \sin 2\pi\frac{R+\delta}{aT}\right)\sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$+\frac{H}{R^2}\left(\frac{2\pi R}{aT}\sin 2\pi\frac{R+\delta}{aT} - \cos 2\pi\frac{R+\delta}{aT}\right)\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

Les conditions (39) seront donc vérifiées si l'on détermine les constantes H et δ par les égalités suivantes :

$$\frac{H}{R^2}\left(\frac{2\pi R}{aT}\cos 2\pi\frac{R+\delta}{aT} - \sin 2\pi\frac{R+\delta}{aT}\right) + V = 0,$$
$$\frac{H}{R^2}\left(\frac{2\pi R}{aT}\sin 2\pi\frac{R+\delta}{aT} - \cos 2\pi\frac{R+\delta}{aT}\right) + V' = 0.$$

Ces équations peuvent à leur tour se simplifier, car $\frac{2\pi R}{aT}$ est une quantité fort petite, et s'écrire

$$\frac{H}{R^2}\sin 2\pi\frac{R+\delta}{aT} = V,$$
$$\frac{H}{R^2}\cos 2\pi\frac{R+\delta}{aT} = V'.$$

Les constantes H et δ étant ainsi déterminées, la fonction φ satisfera au problème posé. Cette fonction donne lieu à quelques remarques

On peut écrire

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 ,$$

en posant

$$\varphi_1 = \frac{H}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT} \right)$$

$$\varphi_2 = \frac{H}{r'} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r'+\delta}{aT} \right) .$$

La première de ces deux fonctions serait le Potentiel des Vitesses du mouvement excité par la source A dans un milieu indéfini en tout sens ; la seconde serait le Potentiel des Vitesses du mouvement excité dans un milieu indéfini par une source identique à A, mais située en A'. Le mouvement réellement excité dans le milieu s'obtient en composant entre eux ces deux mouvements. On donne au premier le nom de mouvement émis par la source A ; au second le nom de mouvement réfléchi par le plan P qui limite le milieu.

Traitons maintenant ce second problème :

Trouver, dans un milieu illimité dans un sens et limité dans l'autre par un plan immobile P, le mouvement engendré par une très petite sphère vibrante dont le centre fixe, A, est situé dans le milieu et par un très petit hémisphère vibrant dont le centre fixe O est situé sur le plan P.

Les conditions du problème différeront des conditions du problème précédent en ce qu'en un point de l'hémisphère de centre O et de rayon $\mathcal{R}$, on devra avoir

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{R}} + U = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \Psi'}{\partial \mathcal{R}} + U' = 0$$

la vitesse en un point de l'hémisphère étant donnée par la formule

$$U \sin 2\pi \frac{t}{T} + U' \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

où U et U' sont deux constantes.

Soit ρ la distance d'un point du milieu au point O et considérons la fonction :

$$\varphi = H \left[\frac{1}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT} \right) + \frac{1}{r'} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r'+\delta}{aT} \right) \right]$$
$$+ \frac{M}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{t+\Theta}{T} \right) - \frac{M_1}{\rho} \sin 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{t+\Theta_1}{T} \right)$$

Nous verrons sans peine, en raisonnant comme dans le cas précédent, que, par un choix convenable des constantes M, Θ, M_1, Θ_1, cette fonction résoud le second problème.

Le mouvement engendré dans le milieu s'obtient en composant le mouvement que la source A engendrerait seule et le mouvement que la source O engendrerait seule.

Ces préliminaires posés, arrivons au problème que nous avons à traiter.

Un tuyau sonore très long et de section très petite par rapport à la longueur d'onde des sons étudiés, s'ouvre dans l'air en une région d'un plan solide, illimité, normal à ses génératrices. Le fond de ce tuyau de longueur L est fermé par un plan solide illimité. Sur l'axe de ce tuyau, dans l'air illimité extérieur, une source sonore sphérique est placée. Sa distance D à l'orifice est de l'ordre de la longueur d'onde. On demande le mouvement pris par le système.

Quelles sont les conditions d'un pareil problème ?

1° Dans l'espace considéré, le Potentiel des vitesses doit être de la forme

$$\varphi = \Psi \sin 2\pi \frac{t}{T} + \Psi' \cos 2\pi \frac{t}{T} ,$$

les fonctions Ψ et Ψ' étant finies, continues et uniformes, ainsi que leurs dérivées premières, en tous les points de l'espace rempli par l'air ; leurs dérivées secondes sont intégrables ; ces fonctions satisfont toutes deux à l'équation

$$\Delta \psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi = 0 .$$

2° A l'infini on a

$$\Psi = 0 \qquad \Psi' = 0 .$$

3° Sur les parois du tuyau et du plan qui en contient l'orifice, on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} = 0 \qquad \frac{\partial \Psi'}{\partial n_i} = 0$$

4° Nous admettrons qu'à une grande distance de l'orifice dans l'air extérieur, le mouvement est sensiblement le même que si le tuyau était remplacé par une petite source sonore hémisphérique dont le centre serait en un point O de l'orifice, de sorte qu'au dehors d'un hémisphère ayant le point O pour centre et un rayon de l'ordre de aT, le Potentiel des vitesses a sensiblement la forme suivante :

$$\varphi = H\left[\frac{1}{r} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT}\right) + \frac{1}{r'} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT}\right)\right]$$
$$+ \frac{M}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{t+\theta}{T}\right) - \frac{M_1}{\rho} \sin 2\pi \left(\frac{\rho}{aT} - \frac{t+\theta_1}{T}\right)$$

4° Nous admettrons qu'à l'intérieur du tuyau, à une distance de l'orifice de l'ordre de la longueur d'onde le mouvement de l'air a lieu par tranches

Cela étant, voyons comment φ sera déterminé.

Considérons une fonction Φ qui serait en dehors du tuyau égale à

$$\Phi_e = H\left[\frac{1}{r'}\,\mathrm{Cos}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+\delta}{aT}\right)+\frac{1}{r'}\,\mathrm{Cos}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+\delta}{aT}\right)\right]$$

et à l'intérieur du tuyau, égale à

$$\Phi_i = \frac{2H}{D}\,\mathrm{Cos}\,2\pi\,\frac{r+\delta}{aT}\,\mathrm{Cos}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{D+\delta}{aT}\right)$$

1° Cette fonction est sensiblement continue dans tout l'espace

Il est évident, en effet, qu'elle ne peut présenter d'autre surface de discontinuité que l'orifice du tuyau. Or, en tout point de l'orifice du tuyau, la fonction Φ_i se réduit rigoureusement à

$$\frac{2H}{D}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{D+\delta}{aT}\right).$$

Si l'on néglige les quantités du même ordre que le rapport des dimensions de l'orifice du tuyau à la longueur d'onde, on peut, pour obtenir l'expression de Φ_e aux divers points de l'orifice du tuyau remplacer r et r' par D, et écrire

$$\Phi_e = \frac{2H}{D}\,\mathrm{Cos}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{D+\delta}{aT}\right),$$

quantité identique à la précédente.

2° Les dérivées partielles du premier ordre de la fonction Φ sont ital continues dans tout l'espace occupé par l'air.

Elles ne peuvent évidemment avoir pour surfaces de discontinuité que la surface $x=0$.

En tout point, on a identiquement :

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = 0 .$$

D'autre part, on a en général

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = -\frac{4\pi H}{aTD}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi x}{aT}\,\mathrm{Cos}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{D+\delta}{aT}\right),$$

ce qui pour $x=0$ donne

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = 0$$

Considérons les dérivées partielles du premier ordre de la fonction Φ_e et en premier lieu, la fonction $\frac{\partial \Phi_e}{\partial x}$. Nous avons en général

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} = \frac{H}{r}\left[\frac{2\pi}{aT}\,\mathrm{Sin}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+\delta}{aT}\right)-\frac{1}{r}\,\mathrm{Cos}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+\delta}{aT}\right)\right]\frac{\partial r}{\partial x}$$
$$+\frac{H}{r'}\left[\frac{2\pi}{aT}\,\mathrm{Sin}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r'+\delta}{aT}\right)-\frac{1}{r'}\,\mathrm{Cos}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r'+\delta}{aT}\right)\right]\frac{\partial r'}{\partial x}$$

En tout point du plan $x=0$, on a

$$r = r', \qquad \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r'}{\partial x} = 0$$

et par conséquent, on a, rigoureusement $\quad \dfrac{\partial \Phi_e}{\partial x} = 0$.

Considérons maintenant l'une des deux quantités $\dfrac{\partial \Phi_e}{\partial y}$ ou $\dfrac{\partial \Phi_e}{\partial y}$, par exemple la quantité $\frac{\partial \Phi_e}{\partial y}$. Nous avons, en général,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} = \frac{H}{r}&\left[\frac{2\pi}{aT}\operatorname{Sin} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT}\right) - \frac{1}{r}\operatorname{Cos} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT}\right)\right]\frac{\partial r}{\partial y}\\ + \frac{H}{r'}&\left[\frac{2\pi}{aT}\operatorname{Sin} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r'+\delta}{aT}\right) - \frac{1}{r'}\operatorname{Cos} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r'+\delta}{aT}\right)\right]\frac{\partial r'}{\partial y}\end{aligned}$$

Aux divers points de l'orifice, si l'on néglige devant la longueur d'onde les quantités de l'ordre des dimensions de l'orifice, on pourra poser sensiblement

$$r = r' = D,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial r'}{\partial y} = 0$$

et par conséquent, on aura sensiblement

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} = 0 .$$

De même on aura sensiblement

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial z} = 0 .$$

On a donc sensiblement aux divers points de l'orifice

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial z}$$

3° A l'infini on a

$$\Phi = 0 .$$

4° En tout point de l'espace occupé par l'air, on a

$$\Phi = \Psi_1 \operatorname{Sin} 2\pi\frac{t}{T} + \Psi'_1 \operatorname{Cos} 2\pi\frac{t}{T},$$

les deux fonctions Ψ_1 et Ψ'_1 vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\,\psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \psi = 0 .$$

5° En tout point des parois solides autres que le fond du tuyau, on a sensiblement

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = 0 .$$

En effet, on peut écrire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \operatorname{Cos}(n_i, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \operatorname{Cos}(n_i, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \operatorname{Cos}(n_i, z) .$$

A) En tout point des parois cylindriques du tuyau, on a identiquement

$$\cos(n_i, x) = 0 , \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = 0 , \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = 0 .$$

B) En tout point de la paroi non cylindrique qui forme le pavillon voisin de l'orifice, on a identiquement

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = 0 , \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = 0 ;$$

on a aussi

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = -\frac{4\pi H}{aTD} \operatorname{Sin} \frac{2\pi x}{aT} \operatorname{Cos} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{D+\delta}{aT}\right),$$

quantité qui se réduit sensiblement à 0, car, pour tous les points de cette région x est très petit par rapport à aT.

C) En tout point du plan $x = 0$, on a identiquement

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} = 0 , \qquad \cos(n_i, y) = 0 \qquad \cos(n_i, z) = 0 .$$

6° Au fond du tuyau, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_i} = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right)_{x=-L} = \frac{2\pi}{aT} \frac{2H}{D} \operatorname{Sin} \frac{2\pi L}{aT} \operatorname{Cos} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{D+\delta}{aT}\right) .$$

Si nous posons

$$\varphi = \Phi + \Phi',$$

en comparant les propriétés des fonctions φ et Φ, nous trouverons les propriétés de la fonction Φ', qui sont sensiblement les suivantes :

1° La fonction Φ' est de la forme

$$\Phi' = \Psi_2 \operatorname{Sin} 2\pi \frac{t}{T} + \Psi'_2 \operatorname{Cos} 2\pi \frac{t}{T},$$

les fonctions Ψ_2 et Ψ'_2 étant régulières dans tout l'espace occupé par l'air et satisfaisant, en tout point de cet espace, à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \Psi + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \Psi = 0 .$$

2° A l'extérieur du tuyau, à une distance de l'orifice du tuyau de l'ordre de la longueur d'onde aT, la fonction Φ' doit se réduire sensiblement à la forme

$$\frac{M}{\rho}\cos 2\pi\left(\frac{\rho}{aT}-\frac{t+\theta}{T}\right)-\frac{M_1}{\rho}\sin 2\pi\left(\frac{\rho}{aT}-\frac{t+\theta_1}{T}\right)$$

3° A l'intérieur du tuyau à une distance de l'orifice de l'ordre de la longueur d'onde, la fonction Φ' se réduit sensiblement à une simple fonction de x et de T.

4° Le long des parois solides autres que le fond du tuyau, on a

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial n_i}=0$$

5° Au fond du tuyau on doit avoir

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial n_i}=-\frac{2\pi}{aT}\,\frac{2H}{D}\sin\frac{2\pi L}{aT}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{D+\delta}{aT}\right)$$

Nous savons déterminer une semblable fonction Φ'; cette fonction représenterait le Potentiel des Vitesses s'il n'y avait pas de source sonore extérieure et si le fond du tuyau était animé d'une vitesse

$$V=\frac{2\pi}{aT}\,\frac{2H}{D}\sin\frac{2\pi L}{aT}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{D+\delta}{aT}\right)$$

En nous reportant au § précédent, nous verrons que cette fonction Φ' est déterminée en remplaçant dans l'expression de la fonction φ déterminée à ce §, la quantité θ par la quantité $\frac{D+\delta}{a}$, et la quantité F par la quantité $\frac{2\pi}{aT}\frac{2H}{D}\sin\frac{2\pi L}{aT}$.

Donc, en premier lieu, d'après la première égalité (36), l'origine du temps sera choisie de telle sorte que l'on ait :

$$\text{(41)}\qquad \operatorname{Tang} 2\pi\frac{D+\delta}{aT}=\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2\frac{\omega}{2\pi}\,\frac{\cos\frac{2\pi\alpha}{aT}\sin\frac{2\pi L}{aT}}{\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}}$$

En second lieu, la quantité $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)A$ sera définie par l'égalité

$$\text{(42)}\qquad \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 A=\frac{\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2\frac{4H^2}{D^2}}{\dfrac{\cos^2\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}}{\cos^2\frac{2\pi\alpha}{aT}\sin^2\frac{2\pi L}{aT}}+\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4\frac{\omega^2}{4\pi^2}}$$

Cela posé, à l'intérieur du tuyau à une distance de l'orifice de l'ordre de la longueur d'onde, on aura d'après l'égalité (X)

$$\Phi' = \frac{2\pi}{aT} A \left[\frac{\sin \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos \frac{2\pi\alpha}{aT}} \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{aT} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right],$$

et par conséquent,

$$(43)\quad \varphi_1 = \Phi' + \Phi_i = \left[\frac{2\pi}{aT} A \frac{\sin \frac{2\pi(x-\alpha)}{aT}}{\cos \frac{2\pi\alpha}{aT}} + \frac{2H}{D} \cos 2\pi \frac{D+\delta}{aT} \cos \frac{2\pi x}{aT} \right] \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\left[\frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 + \frac{2H}{D} \sin 2\pi \frac{D+\delta}{aT} \cos \frac{2\pi x}{aT} \right] \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

A l'extérieur du tuyau, à une distance de l'orifice de l'ordre de la longueur d'onde, on aura, d'après l'égalité (29)

$$\Phi' = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{A\omega}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{aT}\right)$$

et, par conséquent,

$$(44)\quad \varphi_2 = \Phi' + \Phi_e = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi} \frac{A}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{aT}\right)$$

$$+ H \left[\frac{1}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r+\delta}{aT}\right) + \frac{1}{r'} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r'+\delta}{aT}\right) \right]$$

Cette dernière expression est la somme de deux termes Φ' de Φ_e. Elle nous montre que le mouvement qui existe à l'extérieur du tuyau à une grande distance de l'orifice résulte de la composition de deux mouvements :

1° L'un a pour Potentiel des vitesses la quantité Φ_e ; c'est le mouvement qui existerait seul dans le milieu si le plan P ne présentait aucune cavité ; il se compose du mouvement émis par la source sonore et du mouvement réfléchi par le plan P.

2° L'autre a pour Potentiel des vitesses la quantité

$$\Phi' = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi} \frac{A}{\rho} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\rho}{aT}\right);$$

on le considère comme le mouvement engendré dans le milieu par la résonnance du tuyau

D'après l'égalité (42) la quantité A est en général du même ordre de grandeur que H ; la quantité $\frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2$ étant très petite, on voit que Φ' est en général négligeable par rapport à Φ_e. Ainsi, en général, le tuyau ne résonne pas.

Il n'en est plus de même dans le cas particulier où

$$\cos \frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}$$

est très voisin de O, c'est-à-dire dans le cas où la période du mouvement de la source sonore est très voisine d'une période propre du tuyau. Dans ce cas, la quantité $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi}$ A est du même ordre de grandeur que D; Φ' est du même ordre de grandeur que Φ_e; le mouvement engendré par la résonnance est du même ordre de grandeur que le mouvement émis par la source; le tuyau résonne.

Considérons un point M situé sur une ligne parallèle à Ox passant par le tuyau et la source sonore, au delà de la source sonore. Soit Δ la distance de ce point à l'orifice du tuyau (fig 53).

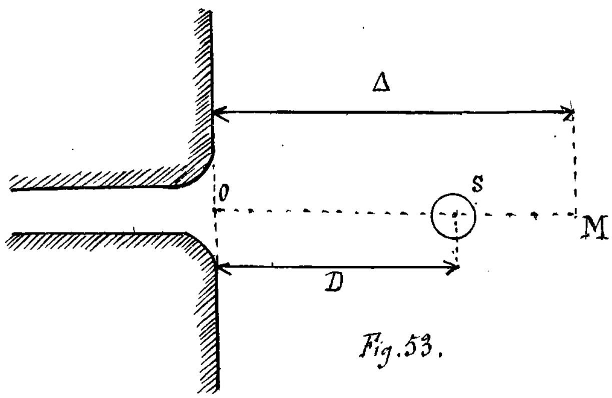


Fig. 53.

Nous aurons en ce point

$$\rho = \Delta,$$
$$r = \Delta - D,$$
$$r' = \Delta + D.$$

Le mouvement émis par la source sonore aura pour Potentiel des Vitesses.

$$\frac{H}{\Delta - D} \operatorname{Cos} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta + \delta - D}{aT}\right).$$

La phase de ce mouvement est

$$f = \frac{\Delta + \delta + D}{a}.$$

Le mouvement dû à la résonnance a pour Potentiel des Vitesses

$$\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{A}{\Delta} \frac{\omega}{2\pi} \operatorname{Cos} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{aT}\right)$$

La phase de ce mouvement est

$$F = \frac{\Delta}{a}$$

Entre la phase du mouvement émis et la phase du mouvement résonné existe une différence

$$\mathcal{F} = \frac{\delta - D}{a}$$

L'égalité (41) peut alors s'écrire

$$(45) \ldots\ldots \operatorname{Tang} 2\pi\left(\frac{\mathcal{F}}{T} + \frac{2D}{aT}\right) = \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi} \frac{\operatorname{Cos}\frac{2\pi\alpha}{aT} \operatorname{Sin}\frac{2\pi L}{aT}}{\operatorname{Cos}\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}}$$

Discutons cette égalité.

Supposons, en premier lieu, que le tuyau ne soit accordé ni exactement, ni approximativement, à la source sonore; alors $\operatorname{Cos}\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}$ aura une valeur finie.

comme le facteur $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^2 \frac{\omega}{2\pi}$ est très petit, le second membre de l'égalité (45) sera extrêmement petit ; l'égalité (45) entrainera donc la suivante

$$\mathcal{F} = K \frac{T}{2} - \frac{2D}{a}$$

L'excès de la phase du mouvement émis par la source sonore sur le mouvement produit par la résonnance du tuyau aura, au point M, une valeur fixe, indépendante de la longueur du tuyau et la distance du point M à l'orifice. Cette différence dépend seulement de la période de la source sonore et de sa distance à l'orifice.

La différence de phase n'aura plus la même valeur si le tuyau est exactement ou approximativement accordé au son émis par la source, car alors $\cos \frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}$ aura une très petite valeur et le raisonnement précédent ne pourra plus être répété.

Supposons, en particulier, que le tuyau soit exactement accordé au son émis par la source ; nous aurons alors

$$\cos \frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} = 0$$

et l'égalité (45) donnera

$$\mathcal{F} = (2K+1)\frac{T}{4} - \frac{2D}{a}$$

Supposons que nous placions une source qui donne un mouvement vibratoire d'amplitude déterminée à une distance déterminée de l'orifice d'un tuyau de longueur variable. Faisons varier la longueur de ce tuyau.

Tant que l'accord du tuyau avec la source sonore ne sera réalisé ni exactement, ni approximativement, l'excès de la phase du mouvement émis sur la phase du mouvement excité par résonnance ne variera pas lorsqu'on fera varier la longueur du tuyau. Mais à partir du moment où l'accord sera sensiblement réalisé, les variations de longueur du tuyau feront très rapidement varier cette différence de phase. Entre le moment où le tuyau commence à être approximativement accordé à la source et le moment où l'accord est rigoureux, cette différence de phase varie d'un quart de période.

Il résulte de là qu'au moment où L atteint l'une des valeurs pour lesquelles

$$\cos \frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} = 0 ,$$

la quantité $\frac{d\mathcal{F}}{dL}$ a une très grande valeur absolue ; ce que nous avons vu précédemment nous montre que dans ces conditions $\frac{dA}{dL}$ a aussi une très grande valeur absolue.

Proposons-nous de calculer les valeurs prises dans ces conditions par les quantités.

$$\frac{\frac{dF}{dL}}{F} \qquad \text{et} \qquad \frac{\frac{dA}{dL}}{A}$$

L'égalité (45) nous donne

$$a\frac{dF}{dL} = \frac{\cos 2\pi\frac{L}{aT}\cos\frac{2\pi\alpha}{aT}\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} + \sin\frac{2\pi L}{aT}\cos\frac{2\pi\alpha}{aT}\sin\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}}{\cos^2\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} + \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4\frac{\omega^2}{4\pi^2}\cos^2\frac{2\pi\alpha}{aT}\sin^2\frac{2\pi L}{aT}}$$

Lorsque L vérifie l'équation

$$\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} = 0,$$

cette égalité donne :

$$(46)\quad \frac{\frac{dF}{dL}}{F} = \frac{1}{(2K+1)\frac{aT}{4} - 2D}\;\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4\frac{\omega^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi\alpha}{aT}\sin\frac{2\pi L}{aT}}$$

On trouve sans peine

$$\frac{\frac{dA}{dL}}{A} = \frac{d}{dL}\log A = -\frac{1}{2}\frac{d}{dL}\log\frac{1}{A^2} = -\frac{A^2}{2}\frac{d}{dL}\frac{1}{A^2}.$$

D'ailleurs l'égalité (42) donne aisément

$$\frac{d}{dL}\frac{1}{A^2} = \frac{-\frac{4\pi}{aT}}{\frac{4H^2}{D^2}\cos^2\frac{2\pi\alpha}{aT}\sin^3\frac{2\pi L}{aT}}$$

$$\times\Big[\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}\sin\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}\sin\frac{2\pi L}{aT} - \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4\frac{\omega^2}{4\pi^2}\cos^2\frac{2\pi\alpha}{aT}\cos\frac{2\pi L}{aT}\sin^2\frac{2\pi L}{aT}$$

$$-\cos^2\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT}\cos\frac{2\pi L}{aT} - \left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4\frac{\omega^2}{4\pi^2}\cos^2\frac{2\pi\alpha}{aT}\sin^2\frac{2\pi L}{aT}\cos\frac{2\pi L}{aT}\Big].$$

Lorsque L vérifie l'équation

$$\cos\frac{2\pi(L+\alpha)}{aT} = 0,$$

cette égalité se réduit à

$$\frac{d}{dL}\frac{1}{A^2} = \frac{D^2}{H^2}\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^5\frac{\omega^2}{4\pi^2}\,\text{Cotang}\,\frac{2\pi L}{aT}$$

Duh. 48.

En même temps, l'égalité (42) donne :

$$A^2 = \frac{\frac{4H^2}{D^2}}{\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4 \frac{\omega^2}{4\pi^2}}$$

On a donc

$$\frac{\frac{dA}{dI}}{A} = -2\cdot\left(\frac{2\pi}{aT}\right) \text{Cotang}\, \frac{2\pi I}{aT} \tag{47}$$

Ainsi au moment où l'accord se produit rigoureusement, d'après l'égalité (46) $\frac{\frac{dF}{dI}}{F}$ est extrêmement grand à cause de la présence du facteur $\left(\frac{2\pi}{aT}\right)^4 \cdot \frac{\omega^2}{4\pi^2}$ au dénominateur, facteur qui est une quantité très petite du quatrième ordre, tandis que $\frac{\frac{dA}{dI}}{A}$ a une valeur finie.

Prenons un tuyau rigoureusement accordé avec une source sonore, puis, en faisant varier sa longueur, donnons-lui un très léger désaccord. En un point du milieu, l'amplitude du mouvement excité par résonnance et la phase de ce mouvement varieront ; mais la variation relative de l'amplitude aura une valeur infiniment plus petite que la variation relative de la phase.

Nous terminerons l'exposé de la théorie des tuyaux sonores due à M. H. von Helmholtz par cette proposition qui nous servira dans l'examen de la théorie du timbre.