COURS
DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE;

Par BÉZOUT, de l'Académie des Sciences & de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Élèves & des Aſpirants au Corps de l'Artillerie, &c.

SUITE DE LA QUATRIÈME PARTIE.

CONTENANT l'application des Principes généraux de la MÉCHANIQUE, à différents cas de MOUVEMENT & d'ÉQUILIBRE.

A PARIS,

De l'Imprimerie de BAUDELOT & EBERHART, rue S. Jacques, N° 30.

L'An IV^e de la République Françaiſe.

N°.

du Catalogue des Livres de fonds et d'assortiment de J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, N°. 25, à Paris.

AVERTISSEMENT.

CE Volume faiſant un même Ouvrage avec le précédent, nous avons continué l'ordre des numéros qui ſervent pour les citations ; enſorte que le Volume précédent finiſſant au numéro 375, celui-ci commence par le numéro 376. Ainſi, toute citation de numéro au-deſſous de 376, renvoie au Volume précédent, lorſqu'elle n'eſt point ſuivie des abréviations *Arith.* ou *Géom.* qui renvoient à l'Arithmétique ou à la Géométrie.

Tout ce qui eſt en petit caractere, tant dans ce Volume que dans les précédents, n'eſt point cenſé faire partie du Cours d'étude ordinaire : ce ſont des objets ſur leſquels pourront s'exercer ceux qui déſireront acquérir plus de connoiſſances.

TABLE DES MATIERES.

Fin de la Table.

Extrait des Regiſtres de l'Académie des Sciences.

Du 2 Novembre 1767.

Duhamel & d'Alembert, qui avoient été nommés pour examiner *la quatrieme Partie du Cours de Mathématiques à l'uſage des Gardes du Pavillon & de la Marine*, par Bézout, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion; en foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, le 20 Mars 1765.

Grandjean de Fouchy, *Secr. perp. de l'Ac. des Sciences.*

APPLICATIONS
DES PRINCIPES GÉNÉRAUX
DE LA MÉCHANIQUE,
A DIFFÉRENTS CAS DE MOUVEMENT
ET D'ÉQUILIBRE.

Du choc direct des Corps.

376. Nous ferons encore abstraction de la pesanteur des corps, de la résistance de l'air, des frottemens, &c.

Nous supposerons que les corps dont nous allons considérer le choc, agissent les uns sur les autres suivant une même ligne droite passant par leurs centres de gravité, & que cette ligne droite est perpendiculaire au plan qui toucheroit leur surface dans le point où ils se rencontreront.

Nous distinguerons deux sortes de corps : les uns que nous appellerons *corps durs*, ſuppoſés tels qu'aucune force ne peut changer leur figure : les autres, que nous appellerons *corps élaſtiques*, ſeront ſuppoſés pouvoir changer de figure, c'eſt-à-dire, être *compreſſibles*, mais doués en même-temps, de la propriété de reprendre cette figure, dès que la compreſſion ceſſera.

Quoiqu'il n'y ait point, dans la nature, de corps d'une maſſe ſenſible, qui ſoit parfaitement dans l'une ou dans l'autre de ces deux claſſes, ce n'eſt, cependant, qu'en partant de cette ſuppoſition, qu'on peut parvenir à déterminer l'action des corps tels que la nature nous les offre.

Du choc direct des Corps durs.

377. DEUX corps durs qui viennent à ſe rencontrer, ou dont l'un vient à rencontrer l'autre ſuppoſé en repos, ſe communiquent ou ſe font perdre une partie de leur mouvement. Mais de quelque maniere que les choſes ſe paſſent, on peut toujours (318) à l'inſtant du choc, ſe repréſenter chaque corps, comme animé de deux vîteſſes, dont l'une ſubſiſtera après le choc, & dont l'autre ſera détruite.

Suppoſons donc d'abord deux corps mus d'un même ſens. Il eſt clair que celui qui va le plus vîte, perdra de ſa vîteſſe, &

qu'au contraire l'autre en gagnera, par le choc. Soit M la maſſe du choquant, & V ſa vîteſſe avant le choc; m la maſſe du choqué (qui peut être plus petite ou plus grande que M), & U ſa vîteſſe avant le choc. Concevons que la vîteſſe V ſe change en u, par le choc; M aura donc perdu la vîteſſe $V - u$; je le conſidérerai, comme ayant, à l'inſtant du choc, la vîteſſe u & la vîteſſe $V - u$. Si nous ſuppoſons, pareillement que U devienne v, par le choc, m aura gagné $v - U$; je puis donc à l'inſtant du choc, le conſidérer comme ayant la vîteſſe v dans le ſens du mouvement actuel, & la vîteſſe $v - U$, en ſens contraire, puiſque dans cette ſuppoſition il n'a réellement que la vîteſſe U.

Puis donc que de ces quatre vîteſſes, il ne doit par la ſuppoſition, reſter que les deux vîteſſes u, & v; il faut donc que les deux autres $V - u$, & $v - U$ ſoient détruites dans le choc; or comme elles ſont directement oppoſées, il faut (217) que les quantités de mouvement que les corps auroient en vertu de ces vîteſſes, ſoient égales. On a donc $M(V - u) = m(v - U)$.

Obſervons maintenant que, pour que u & v ſoient, comme nous le ſuppoſons, les vîteſſes qu'auront, après le choc, les deux corps M & m, il faut qu'elles soient telles, que le choquant n'ait plus d'action sur le choqué; c'est-à-dire, qu'après le choc, les deux corps doivent aller de compagnie; on a donc $v = u$; donc enfin $M(V - u) = m(u - U)$; ou $MV - Mu = mu - mU$, d'où l'on tire $u = \frac{MV + mU}{M + m}$. C'est-à-dire, que *lorsque les corps vont d'un même sens, pour avoir la vîtesse après le choc, il faut prendre la somme des quantités de mouvement que les corps avoient avant le choc, & la diviser par la somme des masses.* Par exemple, si M est de 5 onces; m de 7 onces; V de 8 pieds par seconde, U de 4 pieds par seconde; on aura $u = \frac{5 \times 8 + 7 \times 4}{5 + 7} = \frac{40 + 28}{12} = \frac{68}{12} = 5\frac{2}{3}$; la vîtesse après le choc, sera donc de cinq pieds & $\frac{2}{3}$, par seconde.

378. Si l'un des deux corps, si m, par exemple, étoit en repos avant le choc, on supposeroit $U = 0$; ce qui réduit la vîtesse après le choc, à $u = \frac{MV}{M + m}$; c'est-à-dire, qu'il faut diviser la quantité de mouvement qu'avoit le choquant, par la somme des masses.

Au reste, si sans déduire ce cas, du cas général, on veut le trouver directement, on y parviendra par le même principe. On considérera le choqué comme étant animé avant le choc, d'une vîtesse u égale & de même sens que celle qu'il doit avoir après le choc, & d'une vîtesse $-u$, c'est-à-dire, d'une vîtesse égale & en sens contraire. Ainsi puisqu'il ne doit conserver que la premiere, il faudra qu'en vertu de la seconde, il fasse équilibre au corps M animé de la vîtesse $V-u$ qu'il doit perdre. Il faudra donc que $M(V-u)=Mu$, d'où l'on tire $u=\frac{MV}{M+m}$; ainsi que nous l'avons conclu de la formule générale.

379. Si les corps vont dans des sens opposés, pour connoître la vîtesse après le choc, il n'y a qu'à supposer dans la premiere formule, que U est négative; ce qui donne $u=\frac{MV-mU}{M+m}$; c'est-à-dire, que *lorsque les corps vont en sens opposés, pour avoir la vîtesse après le choc, il faut diviser la différence des quantités de mouvement qui avoient lieu avant le choc, par la somme des masses; & cette vîtesse aura lieu dans le sens de celui qui a la plus grande quantité de mouvement.*

On peut aussi trouver directement ce résultat, en employant encore le même principe que ci-dessus.

Ainsi, les loix du choc direct des corps durs, se réduisent pour tous les cas, à cette seule régle; *la vîtesse après le choc, est égale à la somme ou à la différence des quantités de mouvement avant le choc, (selon que les corps vont d'un même, ou de différens sens) divisée par la somme des masses.*

Réflexions sur la force d'inertie.

380. Nous avons supposé, dans ce que nous venons de dire, qu'en faisant abstraction de la pesanteur, de la résistance de l'air & de tout autre obstacle, l'un des deux corps opposoit de la résistance à l'autre, & lui faisoit perdre une partie de sa vîtesse. Mais comment un corps sans pesanteur & qui n'est retenu par aucun obstacle, peut-il opposer de la résistance? Cela ne semble-t-il pas supposer qu'il seroit capable de se donner du mouvement?

Non: toute résistance n'annonce pas toujours un mouvement actuel dans le corps qui résiste. Par exemple, si le corps *A* est tiré en même-temps par deux forces égales & contraires représentées par *AB*, *AC*, (*Fig.* 1), il est évident qu'il n'aura aucun mouvement. Mais il n'est pas moins évident que si une force égale *CA* vient à agir sur lui dans la direction *CB*, cette force sera détruite par l'effort *AC*, & alors le corps obéira en vertu de la force *AB* égale à celle qu'on vient d'appliquer.

Nous ne prétendons pas décider ſi la réſiſtance que les corps oppoſent au mouvement, vient ou ne vient pas d'une ſemblable cauſe. Quoi qu'il en ſoit, cette réſiſtance à laquelle on a donné le nom de *force d'inertie*, differe de la réſiſtance qu'oppoſent les forces actives, telles que ſont les forces des corps qui ſe choquent en ſens oppoſés, en ce que celles-ci abſorbent une partie du mouvement; au lieu que la force d'inertie détruit, à la vérité, du mouvement dans le choquant, mais ce mouvement paſſe entierement dans le choqué. C'eſt ce que démontre évidemment l'équation $M(V-u) = m(u-U)$ que nous avons eu ci-deſſus pour déterminer le mouvement, après le choc, pour deux corps qui vont d'un même ſens; car $V-u$ eſt la vîteſſe perdue par le choquant, & par conſéquent $M(V-u)$ eſt la quantité de mouvement qu'il perd par le choc; nous avons pareillement entendu par $u-U$ la vîteſſe que le choquant a gagnée, en ſorte que $m(u-U)$ eſt la quantité de mouvement qu'il a gagné. Or nous avons démontré que ces deux quantités devoient néceſſairement être égales.

La force d'inertie eſt donc, à proprement parler, le moyen de communication de mouvement, d'un corps à un autre. Tout corps réſiſte au mouvement, & c'eſt en réſiſtant qu'il en reçoit; & il en reçoit préciſément autant qu'il en détruit dans celui qui agit ſur lui.

On voit donc par-là, que tout obſtacle étant ſuppoſé anéanti, quelque petite que l'on ſuppoſe la maſſe choquante, & quelque grande que ſoit la maſſe choquée, il y aura toujours du mouvement. En effet, dans le cas, par exemple, où l'un des deux corps eſt en repos, la vîteſſe qui (378) a pour expreſſion $u = \frac{MV}{M+m}$, ne peut jamais devenir zéro, quelques valeurs qu'on donne à M, m & V; il n'y a que dans le cas où m ſeroit infinie, ou V infiniment petite. Ainſi, ſi dans la nature nous voyons les corps perdre le mouvement qu'ils ont reçu; c'eſt parce qu'ils le communiquent aux parties matérielles des corps, de l'air, &c. qui les environnent; & comme la formule $u = \frac{MV}{M+m}$ fait voir que plus le corps choqué m aura de maſſe, plus (toutes choſes d'ailleurs égales) la vîteſſe reſtante u ſera petite, en regardant m comme la ſomme des parties matérielles avec leſquelles *M* partage son mouvement, on voit que la vîtesse *u* peut être bientôt réduite à échapper aux sens, quand même il ne se rencontreroit pas d'obstacles immobiles, tels que le frottement, &c. pour la détruire.

381. La force d'inertie, étant une force propre à la matiere, existe également dans chaque partie égale de la matiere; & par conséquent, dans une masse déterminée, elle se fait sentir proportionnellement à la quantité de matière, ou à la masse; & comme la masse est proportionnelle au poids, la force d'inertie peut être regardée comme proportionnelle au poids. Mais il faut bien se donner de garde d'en conclure, que la force d'inertie vienne de la pesanteur : elle en est tout-à-fait indépendante : en effet, si pendant qu'un corps tombe librement, on le suit de la main, avec une vîtesse plus grande que celle avec laquelle il tombe, on éprouvera en le rencontrant, un choc, une résistance, qu'on ne peut évidemment attribuer à la pesanteur, qui n'agit que de haut en bas. Encore moins doit-on l'attribuer à la résistance de l'air; car outre qu'il resteroit à savoir pourquoi l'air résiste, la résistance de l'air ne pouvant agir que sur les surfaces, ne peut être proportionnelle à la quantité de matière.

a force d'inertie eſt donc une force particuliere à la matiere, par laquelle tout corps réſiſte à ſon changement d'état. *La force d'inertie eſt proportionnelle à la quantité de matiere & ſe fait ſentir dans toutes les directions ſelon leſquelles on tend à mouvoir un corps.*

Quelques applications du choc des corps durs: conſéquences qui en réſultent par rapport à leur percuſſion.

382. LES regles que nous venons de donner ſur le choc des corps durs, ont lieu, ſoit que les corps ſe choquent immédiatement, comme nous l'avons ſuppoſé; ſoit qu'ils ſe pouſſent à l'aide d'une verge qui joindroit leurs centres de gravité, ſoit enfin qu'ils ſe tirent par un fil, pourvu que l'action ſe tranſmette immédiatement au centre de gravité de chacun.

Par exemple, ſi deux corps M & m (*Fig.* 2) ſe tirent par un fil, paſſant par deſſus une poulie P *, & que l'on veuille déterminer le mouvement qu'ils prendront en

* Nous ſuppoſerons, ici, que l'action ſe tranſmet à l'aide d'une poulie, de la même maniere que ſi les deux parties du fil étoient étendues en ligne droite: nous démontrerons par la ſuite, cette vérité, qui eſt d'ailleurs facile à appercevoir.

vertu de leur pefanteur ; on obfervera (202) que la pefanteur tend à imprimer à chacun de ces deux corps, une vîteffe égale, à chaque inftant. Or comme l'un ne peut fe mouvoir fans entraîner l'autre, les deux corps fe trouvent, à chaque nouvelle action de la pefanteur, dans le même cas que s'ils fe tiroient en fens directement oppofés avec des vîteffes égales ; donc (379) pour avoir la vîteffe qui en réfultera, il faut, en nommant g la vîteffe que la pefanteur donne, à chaque inftant, à un corps libre, il faut prendre la différence $Mg - mg$ des quantités de mouvement, & la divifer par la fomme $M + m$ des maffes ; on aura donc $\frac{Mg - mg}{M + m}$ ou $\frac{M - m}{M + m}g$ pour la vîteffe réelle que chaque nouvelle action g de la pefanteur ajoute, à chaque inftant, dans le corps M. On voit donc, puifque M, m & g font des quantités conftantes, que le corps M eft mu d'un mouvement uniformément accéléré, & que la force qui l'accélere réellement, eft à la pefanteur libre,

$$:: \frac{M - m}{M + m}g : g :: M - m : M + m.$$

Donc fi on nomme p la vîteffe que la pefanteur fait naître dans un mobile libre, en une feconde de temps, on aura celle qu'elle fait naître en pareil temps dans le mobile M gêné par l'action de m, par cette proportion $M + m : M - m :: p : \frac{M-m}{M+m} p$; donc si on nomme u la vîtesse de M au bout d'un nombre t de secondes, on aura (197), $u = \frac{M-m}{M+m} pt$, & (197) l'espace qu'il aura décrit sera $e = \frac{M-m}{M+m} \frac{pt^2}{2}$; en mettant (203) 30, 2 pieds, pour p.

383. Si au premier instant, le corps m que je suppose avoir la moindre masse, recevoit une impulsion ou une vîtesse V; c'est-à-dire, s'il étoit frappé de maniere qu'étant libre & sans pesanteur, il pût parcourir en une seconde, un nombre de pieds marqué par V; alors il partageroit cette action avec le corps M qu'il entraîneroit pendant un certain temps. Pour savoir comment se feroit ce partage, il faut remarquer qu'au premier instant, l'action de la pesanteur étant infiniment petite ou nulle, le corps m animé de la vîtesse V, agit sur le corps M, comme si celui-ci étoit en repos. Il faut donc pour avoir la vîtesse restante après l'action, (378) diviser la quantité de mouvement mV, par la somme des masses; ce qui donnera $\frac{mV}{M+m}$, pour la vîtesse avec laquelle m entraîneroit M, si la pesan-

teur n'agissoit pas dans les instants suivants. Mais comme nous venons de voir qu'elle agissoit de maniere à donner au corps M, en sens contraire, la vîtesse $\frac{M-m}{M+m}pt$, dans le temps t; il s'ensuit donc qu'au bout du temps t le corps m, n'aura plus que la vîtesse $\frac{mV}{M+m} - \frac{M-m}{M+m}pt$. Par où l'on voit que quelque petit que soit m, quelque petite que soit la vîtesse V, & quelque considérable que soit M, m entraînera toujours M pendant un certain temps, après quoi le corps M reprendra le dessus, & entraînera m à son tour.

En effet, quelle que soit la quantité de mouvement mV qu'on imprime à m, tant qu'elle aura une valeur finie, il est clair qu'il faudra toujours, pour la consumer, que la pesanteur agisse pendant un certain temps, puisqu'elle n'agit que par degrés infiniment petits, à chaque instant.

Si l'on veut savoir, au bout de quel temps, m cessera de monter, voici comment on s'y prendra. Soit T le temps qu'il faudroit à un corps pesant, tombant librement, pour acquérir la vîtesse V; selon ce qui a été enseigné (303), on aura $V = pT$; donc la vîtesse de m se change en $\frac{mpT}{M+m} - \frac{M-m}{M+m}pt$, laquelle étant égalée à zéro, donne $mpT = (M-m)pt$, d'où l'on tire $t = \frac{mT}{M-m}$. Par exemple, si la vîtesse V qu'on a imprimée, est celle qu'un corps pesant acquéreroit dans une seconde de temps; on a $T = 1''$: supposons $M = 100$ livres, $m = 1$ livre. On aura $t = \frac{1''}{99}$; c'est-à-dire, que le corps m n'entraînera M, que pendant un 99e de seconde; mais enfin il l'entraînera.

On voit donc qu'il n'y a pas de force finie, si petite qu'elle soit, qui ne puisse vaincre le poids d'un corps, & qu'il n'est jamais possible de mettre un corps actuellement en mouvement, en équilibre avec le poids d'un autre corps, c'est-à-dire, avec un corps qui n'auroit que la simple tendance de la pesanteur. Le premier entraînera d'abord le second, & en sera ensuite entraîné: il y aura, à la vérité, un instant de repos; mais ce sera celui où le premier aura perdu toute la vîtesse imprimée, & ce ne sera qu'un instant.

384. Ainsi la force des corps en mouvement, ne peut être mesurée par des poids, c'est à-dire, par l'action seule des poids destitués de mouvement local; mais seulement

par d'autres forces de corps en mouvement ; par exemple, par celles des corps graves tombés d'une certaine hauteur. Ainsi, pour avoir une idée de la force d'un corps de *3 livres* qui seroit mu avec une vîtesse de *60* pieds par seconde, je chercherois, par ce qui a été dit (207) de quelle hauteur un corps pesant doit tomber pour acquérir une vîtesse de 60 pieds par seconde : je trouverois que c'est 59 pieds & demi à-peu-près. J'en conclurois qu'un corps de trois livres, animé d'une vîtesse de 60 pieds par seconde, doit frapper comme s'il étoit tombé de 59 pieds & demi de haut.

385. La force que les corps en mouvement sont capables d'exercer, s'appelle la *percussion*.

La force de percussion ne peut donc, en aucune maniere, être comparée à la simple pression, c'est-à-dire, à l'effort que peut faire, par son poids, une masse sans mouvement local. Un coup de marteau, même très-foible, fera entrer un clou dans un corps, lorsqu'un poids assez considérable n'y fera rien ; il en fera de même d'un corps d'une masse médiocre qui par sa chûte aura acquis un peu de vîtesse.

La raison de cette différence est que celui-ci emploie, en un seul instant, tous les degrés de vîtesse qu'il a acquis en tombant. Au lieu que le poids qui ne fait que presser, ne les reçoit que successivement, & les partage en même-temps, au clou & à la masse environnante; & comme chacun de ces degrés est infiniment petit, il est aussi-tôt absorbé qu'acquis.

386. Après ce que nous venons de dire, il est facile de voir comment on doit s'y prendre, pour déterminer le mouvement d'un corps M (*Fig.* 3) qui par son poids, entraîneroit le corps M' placé sur un plan horisontal sans frottement. L'action de la pesanteur sur M' étant détruite par le plan horisontal, celle qu'elle exerce sur M, se partage entre M & M', comme dans le cas où un corps agit sur un autre en repos. Ainsi, en raisonnant comme ci dessus, & nommant g la vîtesse que la pesanteur donne dans un instant à un corps libre, on aura $\frac{gM}{M+m}$ pour la vîtesse avec laquelle M sera réellement accéléré. Sa vîtesse au bout d'une seconde de temps, sera donc $\frac{pM}{M+m}$, p étant celle que la pesanteur fait naître, en une seconde de temps, dans un corps libre : donc au bout d'un temps quelconque t, sa vîtesse sera $\frac{pMt}{M+m}$, & l'espace qu'il aura décrit, sera $\frac{\frac{1}{2}pMt^2}{M+m}$.

387. Si les deux corps M & m (*Fig.* 2) s'entraînoient à l'aide d'une corde uniformément pesante, alors la force accélératrice de M, ne seroit plus une force constante. Voici comment on la détermineroit, ainsi que le mouvement de M. Soit c la longueur totale de la corde; P sa pesanteur spécifique, ou ce que pese un pied de longueur de cette corde. Soit x la longueur de la partie PM; on aura $PM = c - x$. La masse de PM sera donc Px; & celle de Pm, sera $P(c-x)$. Ainsi nous avons d'un côté une masse $= M + Px$; & de l'autre, une masse $= m + P(c-x)$, à chacune desquelles la pesanteur communique pendant l'instant actuel, la vîtesse infiniment petite h. Donc pour savoir quelle vîtesse ils prendront en vertu de leur action mutuelle,

il

Il faut divifer la différence des quantités de mouvement, par la fomme des maffes. On aura donc pour l'accélération de M, la quantité $\frac{Mh + Phx - mh - P(c-x)h}{M + Px + m + P(c-x)}$, qui fe réduit à $\frac{Mh - mh + 2Phx - Pch}{M + m + Pc}$; ou bien, en faifant $M - m - Pc = A$, & $M + m + Pc = B$, fe réduit à $\frac{Ah + 2Phx}{B}$. Donc cette vîteffe eft à celle h de la pefanteur, comme $\frac{A + 2Px}{B}$ eft à 1; donc fi on nomme p la vîteffe que la pefanteur imprime à un corps libre, dans une feconde, $\frac{A + 2Px}{B}p$ fera celle que M acquéreroit dans une feconde, fi pendant la durée de cette feconde, fa force accélératrice étoit conftante. C'eft donc (212) la quantité qu'il faut mettre pour p dans la formule $p\,dt = d\left(\frac{de}{dt}\right)$ que nous avons donnée (215) pour les mouvemens variés; & on mettra en même temps dx au lieu de de, parce que de quelque endroit que M foit parti d'abord, l'efpace qu'il décrit à chaque inftant, eft égal à l'augmentation dx de la longueur de PM. On aura donc $\frac{A + 2Px}{B}p\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Pour intégrer cette équation, je divife par dt, & je multiplie par dx; j'ai $\frac{A\,dx + 2Px\,dx}{B}p = \frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)$; dont l'intégrale eft $\frac{Ax + Px^2}{B}p + C = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt^2}$. Pour déterminer la conftante C, je remarque que $\frac{dx}{dt}$ eft (210) la vîteffe. Donc fi on fuppofe qu'au commencement du mouvement, M étoit en O, PO étant $= b$, & qu'il n'ait reçu aucune impulfion, il faut que la conftante C foit telle, que la vîteffe foit zéro, lorfque $x = b$, on a donc $\frac{Ab + Pb^2}{B}p + C = 0$, & par conféquent $C = \frac{-Ab - Pb^2}{B}p$; donc $\frac{Ax + Px^2 - Ab - Pb^2}{B}p = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt^2}$. Nommons z

l'espace parcouru OM; nous aurons $z = x - b$, ou $x = b + z$, & $dx = dz$, ce qui changera notre équation en . . . .

$$\frac{Az + 2Pbz + Pz^2}{B} p = \frac{\frac{1}{2} dz^2}{dt^2},$$ d'où l'on tire . . . . .

$$dt = \frac{dz\sqrt{\frac{B}{2p}}}{\sqrt{(A + 2Pb)z + Pzz}},$$ équation que l'on intégrera facilement, en la rendant rationnelle, par ce qui a été dit (143), & l'on aura le rapport de l'espace au temps, qui est supposé, ici, compté en secondes.

Quant à la vîtesse, puisqu'elle est exprimée (210) par $\frac{dz}{dt}$; en la nommant u on aura $u = \frac{\sqrt{(A + 2Pb)z + Pzz}}{\sqrt{\frac{B}{2p}}}$

u étant ce que le corps est capable, à chaque instant, de décrire dans une seconde, en vertu de son mouvement actuel continué uniformément.

Remarque sur les forces vives.

388. On a donné le nom de *forces vives*, aux forces des corps en mouvement, & on a appellé *forces mortes*, celles qui, comme une simple pression, ne supposent point un mouvement actuel dans la cause qui agit.

Il y a eu, pendant quelque temps, un partage de sentiments entre les Mathématiciens, sur la mesure des forces vives, ou des forces des corps en mouvement. Quelques-uns ont prétendu que ces forces ne devoient pas se mesurer par la masse multipliée par la vîtesse, ainsi que nous avons dit (188) qu'il falloit le faire; mais qu'il falloit les mesurer par le produit de la masse par le quarré de la vîtesse. Comme on pouvoit craindre que cette différence dans la mesure des forces, n'intéressât la méchanique, nous croyons devoir en dire un mot.

Il est absolument indifférent de mesurer la force des corps en mouvement, ou par la masse multipliée par la vîtesse simple, ou par la masse multipliée par le quarré de la vîtesse; pourvu qu'on n'attache pas la même idée au mot *force*, dans chaque cas.

Quand on prend pour mesure de la force, le produit de la masse par le quarré de la vîtesse; alors on entend par le mot *force*, le *nombre* des obstacles qu'un corps en mouvement, peut vaincre; & il est certain, qu'à masse égale, le *nombre* des obstacles qu'un corps en mouvement peut vaincre, est proportionnel au quarré de la vîtesse. Par exemple, si le corps *A* (*Fig.* 4) n'a précisément que la vîtesse nécessaire pour fermer un ressort tel que *ACB*; il ne faudra à un corps égal *M*, qu'une vitesse double pour fermer quatre ressorts égaux à *ACB*. Car, dans le premier instant, par exemple, *M* s'avançant du double de *A* fermera la totalité des quatre ressorts du double de ce que fera *A* sur son seul ressort; donc, chacun des quatre ressorts, ne sera fermé que de la moitié de ce que le sera *ACB*, & n'aura par conséquent opposé, pendant cet instant, qu'une résistance moitié moindre; donc les quatre ressorts pour être réduits à la même quantité angulaire, chacun, que l'est *ACB*, n'auront opposé qu'une résistance double. On démontrera de même pour les instants suivants que la résistance qu'opposent les quatre ressorts pour être fermés chacun d'une quantité angulaire égale à celle dont *ACB* est fermé dans un instant, est toujours à celle qu'oppose le seul effort *ACB* dans le même instant, dans le rapport des vîtesses qu'ont alors les deux corps; donc une vîtesse double suffira pour fermer les quatre ressorts; ainsi les nombres des ressorts fermés qui sont 1 & 4, sont donc comme les quarrés des vîtesses 1 & 2, nécessaires pour les fermer.

On voit donc que le nombre des obstacles que peuvent vaincre les corps en mouvement, croît comme les quarrés des vîtesses. Mais, par le mot *force*, doit-on entendre le *nombre* des obstacles? Ou bien n'est-il pas plus naturel d'entendre la *somme* des résistances que ces obstacles ont opposées; car, ce n'est pas seulement le nombre, mais encore la valeur de chaque obstacle qui détruit le mouvement. Or dans ce cas, chaque résistance instantanée étant évidemment proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle fait perdre (& en cela on a toujours été d'accord) la somme des résistances sera proportionnelle à la quantité de mouvement qui a été consumée; donc si, par *force*, on entend la *somme* & non pas seulement le *nombre* des résistances qu'un corps en mouvement peut vaincre, la force est proportionnelle à la quantité de mouvement. D'ailleurs, en partant de ce principe, on en déduit également que les nombres de résistances vaincues sont comme les quarrés des vitesses. La question n'est donc, au fonds, qu'une question de mots, elle se réduit à savoir ce que l'on doit entendre par le mot *force*. Or sur ce point, on est libre ; pourvu qu'on emploie ce que l'on prend pour mesure de la force, conséquemment à l'idée qu'on attache au mot force, on arrivera toujours aux mêmes résultats. Ainsi nous continuerons de prendre pour mesure des forces, le produit de la masse pour la vitesse ; & par conséquent nous entendons par la force d'un corps, la somme totale des résistances nécessaires pour épuiser son mouvement.

Du choc des Corps élastiques.

389. QUOIQUE les corps *élastiques* ou *à ressort*, suivant l'idée que nous en avons donnée (376), doivent être compressibles, pour être élastiques ; il ne faut pas croire néanmoins qu'ils doivent être d'autant plus compressibles qu'ils sont plus élastiques. Une balle de laine n'est pas plus élastique qu'une bille d'ivoire qui cependant est beaucoup moins compressible.

Quoi qu'il en soit, la compressibilité paroît inséparable de l'élasticité. En vertu de la compressibilité, un corps change de figure lorsqu'on lui applique extérieurement une force : & en vertu de l'élasticité, il tends à revenir à cette figure. Mais entre tous les corps élastiques, c'est-à-dire, qui devenus libres, tendent à reprendre leur figure, les uns la reprennent entiérement, les autres en partie ſeulement ; ces derniers ſont dits *corps à reſſort imparfait*. Quant aux autres, ils peuvent revenir à leur figure primitive plus ou moins promptement, & par des degrés forts différents. Mais s'ils ſont tels qu'après s'être choqués, ils ſe rétabliſſent par les mêmes degrés par leſquels ils ſe ſont comprimés, on les appelle *corps à reſſort parfait*. Dans tout autre cas, on les appelle ſimplement *corps à reſſort*. Nous ne conſidérerons ici que les corps à reſſort parfait.

Obſervons à l'égard de ceux-ci, que puiſque dans le choc il ſe fait une réſiſtance de la part de celui qui a le moins de vîteſſe, & que par conſéquent il y a compreſſion ; non ſeulement le rétabliſſement de la figure ſuit cette compreſſion, mais ce rétabliſſement eſt lui-même ſuivi d'un nouveau changement de figure tout contraire au premier. A celui-ci, il en ſuccede un autre qui ramene à la figure qu'ils avoient lors de la compreſſion, & ainſi de ſuite. En ſorte que les parties de chaque corps, ont à l'égard de leur centre de gravité, un mouvement de vibration ou d'allée & de retour ; parce que les parties tendent à revenir à leur premiere figure par un mouvement qui va en s'accélérant, & qui les fait paſſer au-delà. Ces changements alternatifs de figure ſont ſenſibles dans pluſieurs corps élaſtiques lorſqu'on les frappe ; principalement dans les corps ſonores.

Cependant, il ne faut pas imaginer que ces vibrations influent ſur la vîteſſe que prendront les corps élaſtiques après le choc. Elles ne peuvent influer ſur le mouvement des centres de gravité de ces corps, ainſi que nous l'avons vu (319) ; puiſque ces mouvements s'exécutent dans chacun des deux corps indépendamment de l'autre. C'eſt une action des parties d'un même corps les unes ſur les autres.

Voici donc comment on doit envifager le choc des corps parfaitement élaſtiques. Lorſque les deux corps *A* & *B* (*Fig.* 5) viennent à ſe rencontrer en *C*, la réſiſtance que *B* oppoſe à *A*, fait qu'ils ſe compriment mutuellement juſqu'à ce que les deux centres & le point de contact aient tous une égale vîteſſe : juſques-là tout ſe paſſe comme dans le choc des corps durs, au changement de figure près, qui ne peut contribuer en rien à la quantité de mouvement perdue ou gagnée.

Le changement de figure, ſe fait de maniere que chacun des deux corps s'applatit également de chaque côté ; parce que les parties les plus éloignées du contact, s'avantant plus promptement dans l'un, & moins promptement dans l'autre, jusqu'à ce que la compression soit finie, refoulent d'autant les parties intermédiaires. La compression une fois achevée, les parties de chaque corps, voisines du point de contact, s'appuient les unes contre les autres, pendant que le contact est transporté; & alors tout le débandement du ressort s'exerce vers les côtés opposés du point de contact; en sorte que les centres sont entraînés en sens opposés, avec tout l'effort avec lequel la restitution tend à se faire.

On voit donc que le choquant perd alors une vîtesse égale à celle qu'il avoit perdue par la compression; & qu'au contraire le choqué en gagne une égale à celle qu'il avoit déja gagnée pendant la compression. Et quoique les deux corps ne s'arrêtent pas à leur figure primitive dès qu'une fois ils y sont arrivés, néanmoins ils n'ont plus alors d'action l'un sur l'autre, parce que la force avec laquelle ils vont se dilater, ira en diminuant, & par conséquent ils se quittent à ce terme.

Cela étant, il s'en suit évidemment que les circonstances du choc des corps parfaitement élastiques, sont toutes comprises dans cette seule regle. . . . .

390. *Cherchez la vîtesse commune qu'auroient les corps, après le choc, s'ils étoient sans ressort; alors, si du double de cette vîtesse, vous ôtez la vîtesse que chacun avoit avant le choc, vous aurez les vîtesses de chacun, après le choc.* Sur quoi il faut observer, que quand les corps vont en sens contraire avant le choc; on doit donner le signe — à la vîtesse de celui qui a la moindre quantité de mouvement; ensorte que dans l'application de cette regle, cette vîtesse doit être ajoutée.

En effet, si lorsque les deux corps vont du même sens, V est la vîtesse du choquant, & U celle du choqué; que u soit la vîtesse qu'ils auroient après le choc, considérés comme corps durs; alors $V - u$ est la vîtesse perdue par le choquant; puis donc que le ressort, en se débandant en sens contraire au mouvement, fait perdre autant de mouvement que la compression en avoit déja fait perdre; il ne restera donc que la vîtesse $u - (V - u)$; c'est-à-dire, $u - V + u$, ou $2u - V$. A l'égard du choqué, $u - U$ est la vîtesse qu'il gagne par le choc; or nous venons de voir que par le débandement de son ressort, il en acquiert encore autant; il aura donc $u + u - U$, c'est-à-dire, $2u - U$. Ce cas comprend celui où l'un des deux corps auroit été en repos avant le choc.

Si les corps alloient en ſens contraire, le raiſonnement eſt encore le même pour celui des deux qui a la plus grande quantité de mouvement. Quant à l'autre, dans le choc, comme corps dur, il perdroit ſa vîteſſe & en acquerroit une autre en ſens contraire. Soit u cette vîteſſe ; alors la vîteſſe avec laquelle ſon reſſort ſe rétablit, eſt $U + u$, laquelle étant jointe à u, qu'il auroit eue comme corps dur, donne $2u + U$.

391. Il eſt facile de déduire de-là, des formules pour le choc des corps élaſtiques, dans leſquelles il n'entre autre choſe que les maſſes & les vîteſſes avant le choc ; il ne faut pour cela que ſubſtituer dans $2u - V$ & $2u \mp U$ la valeur de u que donnent les regles établies (377 & 379). Mais comme ces formules ne donnent rien d'auſſi facile à retenir que la regle que nous venons d'énoncer, nous laiſſons cette ſubſtitution à faire, à ceux qui en feront curieux.

392. Obſervons que lorſqu'un des deux corps eſt en repos, la vîteſſe qu'il reçoit par le choc, eſt double de celle qu'il auroit eue s'il n'eût point été élaſtique. C'eſt une ſuite évidente de la regle générale.

393. Pour donner quelques exemples de ces regles, ſuppoſons d'abord que les deux corps ſont égaux, & que l'un des

deux eſt en repos ; alors $\frac{MV}{M+m}$ qui (278) exprime la vîteſſe après le choc des corps conſidérés comme durs, ſe réduit à $\frac{MV}{2M}$, ou $\frac{1}{2}V$. Il faut donc (390) de deux fois $\frac{1}{2}V$ ou de V, retrancher V pour avoir la vîteſſe du choquant après le choc ; laquelle ſera par conſéquent zéro. Pour avoir la vîteſſe du choqué, il faut de deux fois $\frac{1}{2}V$ retrancher la vîteſſe zéro qu'il avoit avant le choc, ce qui donne V pour la vîteſſe après le choc ; c'eſt-à-dire, que le mouvement du choquant paſſe entiérement dans le choqué. D'où l'on peut conclure que ſi l'on avoit pluſieurs corps élaſtiques égaux, placés ſur une même ligne droite, & que l'on vînt à faire choquer l'un des extrêmes par un corps élaſtique égal à l'un d'entre-eux, il n'y auroit que l'autre extrême qui ſe détacheroit. Que ſi l'on faiſoit choquer en même temps, par deux corps élaſtiques pareils à ceux-là, il n'y auroit que ce dernier & l'avant-dernier qui ſe détacheroient ; & ainſi de ſuite.

Suppoſons que les deux corps vont du même ſens. L'un a 5 onces de maſſe ; & une vîteſſe de 6 pieds par ſeconde ; l'autre a 7 onces de maſſe, & une vîteſſe de 2 pieds par ſeconde. La vîteſſe qu'ils auroient après le choc, comme corps durs (377), ſera $\frac{44}{12}$ ou $3\,\frac{2}{3}$; ſi donc du double de cette quantité, c'eſt à-dire, de $7\,\frac{1}{3}$, j'ôte les vîteſſes 6 et 2 qui avoient lieu avant le choc, j'aurai $1\,\frac{1}{3}$, & $5\,\frac{1}{3}$ pour les vîteſſes du choquant & du choqué, après le choc.

Si le choqué au lieu d'avoir 7 onces de maſſe, comme dans cet exemple, en avoit 20; alors la vîteſſe après le choc, comme corps durs, ſeroit $\frac{72}{25}$ ou $2\,\frac{4}{5}$. Or ſi du double $5\,\frac{3}{5}$, on retranche les vîteſſes 6 & 2 qui avoient lieu avant le choc, on aura $5\,\frac{3}{5} - 6$ & $5\,\frac{3}{5} - 2$, ou $-\frac{2}{5}$ & $3\,\frac{3}{5}$, pour les vîteſſes après le choc; ou le ſigne —, indique que le choquant rebrouſſera.

Si les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre, avec les mêmes maſſes & les mêmes vîteſſes que dans le ſecond exemple; alors la vîteſſe après le choc, comme corps durs, ſeroit $\frac{30-14}{12}$ ou $1\,\frac{1}{3}$. Si du double de cette quantité, on retranche la vîteſſe 6 que le choquant avoit avant le choc, on aura $-\,3\,\frac{1}{3}$ pour ſa vîteſſe après le choc; il rebrouſſera donc avec une vîteſſe de 3 pieds & $\frac{1}{3}$. A l'égard du choqué, il faut (390) à ce même double de 1 & $\frac{1}{3}$ ajouter la vîteſſe 2 avant le choc, & l'on aura $4\,\frac{2}{3}$ pour ſa vîteſſe après le choc.

394. Puisque (390) lorsque les corps élastiques vont du même sens avant le choc, les vîtesses après le choc sont $2u - V$, & $2u - U$, (u étant celle qu'ils auroient après le choc s'ils n'étoient point élastiques); la différence de ces deux vîtesses qui est $V - U$, est donc la même que la différence des vîtesses avant le choc. Cette différence est ce qu'on appelle la vîtesse respective, qui est donc la même avant & après le choc. Au contraire, quand les corps, avant le choc, vont en sens opposés, leurs vîtesses, après le choc, sont $2u - V$ & $2u + U$, dont la différence est $V + U$ qui étoit leur vîtesse respective, ou celle avec laquelle ils s'approchoient l'un de l'autre avant le choc. Donc celle avec laquelle ils s'éloignent après le choc, est la même que celle avec laquelle ils s'approchoient avant: ainsi, en général, *dans le choc des corps élastiques, la vîtesse respective est la même avant & après le choc.*

Du choc & de la résistance des Fluides.

395. CONCEVONS qu'un corps M (*Fig.* 9) terminé par une surface plane AB, choque perpendiculairement à cette surface,

une couche de corps infiniment petits & ſans reſſort, dont la ſomme totale des maſſes ſoit m. La vîteſſe qu'il a avant le choc étant V, celle qu'il aura après le choc (378) ſera $\frac{MV}{M+m}$. Donc celle qu'il aura perdue ſera $V - \frac{MV}{M+m}$, c'eſt-à-dire, $\frac{mV}{M+m}$, ou ſimplement $\frac{mV}{M}$, parce que nous ſuppoſons que m eſt infiniment petite à l'égard de M. Donc la quantité de mouvement que M aura perdue, ou la réſiſtance qu'il aura éprouvée ſera $\frac{mV}{M} \times M$, ou mV.

Si l'on conçoit maintenant, que pendant un temps infiniment petit, le corps M s'avance de la quantité infiniment petite Bb, & qu'à chaque pas, la couche des particules qu'il a choquée d'abord, s'anéantiſſe pour faire place à une autre qui ſoit choquée à ſon tour ; il eſt clair que de B en b, la vîteſſe ne pouvant diminuer qu'infiniment peu, la perte de mouvement que le corps fera, à la rencontre de chaque couche, ſera la même, & égale à mV; donc la ſomme des réſiſtances que lui auront faites les couches qu'il aura rencontrées de B en b, ſera mV répétée autant de fois qu'on peut concevoir de particules dans l'eſpace Bb. Or ſi on appelle a l'épaiſſeur infiniment petite de chaque particule, $\frac{Bb}{a}$ exprimera le nombre de celles qui peuvent être rangées ſur Bb; on aura donc $mV \times \frac{Bb}{a}$, pour la réſiſtance que M aura éprouvée pendant une durée infiniment petite. Mais (191) la maſſe m de la premiere couche, eſt égale au volume de cette couche, multiplié par ſa denſité; c'eſt-à-dire, en nommant D cette denſité, & S la ſurface AB, eſt égale à $D \times S \times a$; donc $m = DSA$; donc la réſiſtance que j'appelle R, devient $R = DSaV \times \frac{Bb}{a} = DSV \times Bb$.

Obſervons maintenant, que Bb étant l'eſpace parcouru par le corps pendant un temps infiniment petit, que je repréſente par dt pendant lequel la vîteſſe doit (210) être ſuppoſée uniforme, on a $Bb = Vdt$ (210). Donc la réſiſtance $R = DSV^2 dt$.

396. Si l'on conçoit que les petits corps dont il vient d'être queſtion, ſoient les molécules qui compoſent un fluide incompreſſible; on remarquera que puiſqu'il eſt de la nature des fluides (327) de tranſmettre également, dans tous les ſens, la preſſion qu'on leur applique; dès que les molécules voiſines de AB recevront le choc,

elles le transmettront aux parties voisines qu'elles obligeront de couler le long de la surface du corps, pour remplir l'espace que le corps en se transportant, tend à laisser vuide derriere lui ; & elles succéderont à celles qu'elles auront chassées, pour laisser place à de nouvelles qui recevant de même le choc du corps M, agiront ensuite de la même maniere ; & ainsi de suite. Donc l'expression DSV^2dt, exprime généralement, la résistance qu'éprouve à chaque instant, le corps M, mu dans un fluide dont la densité est D.

397. Donc, par la même raison, si un autre corps se meut avec une vîtesse u, dans un autre fluide dont la densité soit D', & présente perpendiculairement une surface s ; on aura en nommant r la résistance qu'il éprouve pendant un pareil instant dt, $r = D'su^2dt$. D'où l'on conclura $R : r :: DSV^2dt : D'su^2dt :: DSV^2 : D'su^2$; c'est-à-dire, que *si deux corps se meuvent avec des vîtesses différentes* V *&* u *dans deux fluides dont les densités soient* D *&* D', *& présentent perpendiculairement des surfaces* S *&* s, *les résistances qu'ils éprouveront dans un même instant, seront comme les densités multipliées par les surfaces, & multipliées par les quarrés des vîtesses.*

398. Donc si la surface est la même, & la densité la même, les résistances seront comme les quarrés des vîtesses; car alors on aura $R:r::DSV^2dt:DSu^2dt::V^2:u^2$. Donc *les résistances qu'un même corps éprouve successivement de la part d'un même fluide, dans des instans égaux, sont comme les quarrés des vîtesses.*

399. Il est donc facile, par la proposition générale que nous venons d'établir (397) de trouver le rapport des résistances, lorsque les densités sont les mêmes, ou lorsque les surfaces sont les mêmes, ou lorsque les vîtesses sont les mêmes. Ainsi on voit par l'équation $R = DSV^2dt$, que toutes choses d'ailleurs égales, le choc d'un fluide est d'autant plus grand que sa densité est plus grande, ensorte que l'eau de mer est capable d'un plus grand choc, que l'eau douce; l'air n'est capable que d'un choc encore beaucoup moindre que celui de l'eau douce; & la force dont il est capable varie beaucoup par le chaud & par le froid, qui peuvent changer beaucoup sa densité.

400. Si le fluide étoit élastique, tout ce que nous venons de dire auroit également lieu, avec cette différence seulement, que la valeur absolue de la résistance, seroit

roit double ; c'eſt une ſuite de ce qui a été dit (392).

401. Il ne faut pas, cependant, diſſimuler que la regle donnée (392), ſuppoſant que le corps choqué devient libre, après le choc ; c'eſt-à-dire, que ſon reſſort ſe déploie librement ; on ne doit pas regarder cette meſure de la réſiſtance abſolue des fluides élaſtiques, comme bien rigoureuſe. Pluſieurs autres raiſons engagent à en douter ; mais cela n'empêche pas que cettte meſure ne puiſſe être employée, pour comparer les réſiſtances des fluides élaſtiques.

402. Si au lieu de concevoir, comme nous l'avons fait, que le corps M (*Fig.* 6) choque, dans un inſtant dt, tous les petits corps contenus dans l'eſpace $ABba$, on conçoit au contraire, que le corps M ſoit immobile, & qu'à chaque inſtant dt, il ſoit frappé par un volume de fluide, égal à $ABba$, mu avec la vîteſſe V, & qui s'anéantiſſe après avoir fait ſon choc ; on démontrera, de la même maniere, que la quantité de mouvement infiniment petite, que ce choc fera paſſer dans le corps M, aura pour expreſſion $DSV^2 dt$; & $2DSV^2dt$ lorſque le fluide eſt élaſtique. D'où l'on conclura, que *c'eſt la même choſe que le corps choque le fluide, ou que le fluide choque*

le corps ; pourvu que la vîtesse soit la même, dans chaque cas.

403. Ramenons, à des mesures plus connues, l'évaluation que nous venons de faire, de la résistance, ou du choc des fluides.

Si l'on suppose que h soit la hauteur d'où un corps pesant devroit tomber pour acquérir la vîtesse V avec laquelle nous supposons que le corps M se meut ; selon ce qui a été dit (207) on aura $h = \frac{V^2}{2p}$, p étant la vîtesse que la pesanteur engendre, en une seconde de temps, dans un corps libre. Si de cette équation on tire la valeur de V^2, pour la substituer dans l'expression que nous avons trouvée (396) pour la résistance, nous aurons $R = 2DShp\,dt$; & $R = 4DShp\,dt$ pour les fluides élastiques. Or puisque p exprime la vîtesse que la pesanteur engendre, en une seconde de temps, $p\,dt$ est ce qu'elle engendre pendant l'instant dt, puisque (203) les vîtesses qu'elle communique, sont dans la raison des temps. D'un autre côté, $2DSh$ exprime (191) la masse d'un prisme ou d'un cylindre du fluide dont il s'agit, lequel prisme auroit pour base la surface S, & pour hauteur $2h$, c'est-à-dire, le double de celle dont un corps pesant devroit tomber pour acquérir la vîtesse avec laquelle cette surface se meut dans le fluide ; donc $2DSh$ exprime la quantité de mouvement que ce prisme acquerroit pendant un instant par l'action libre de la pesanteur ; c'est-à-dire, qu'il exprime le poids de ce prisme. Donc la résistance qu'éprouve un corps, mu dans un fluide en repos, ou le choc qu'un corps en repos, éprouve de la part d'un fluide en mouvement, est égal au poids d'un prisme de ce fluide, qui auroit pour base la surface choquée, & pour hauteur, le double de la hauteur dont un corps pesant devroit tomber pour acquérir la vîtesse avec laquelle le corps, ou le fluide, se meut actuellement. Et dans les fluides élastiques, la résistance a pour mesure le double du poids de ce prisme.

404. Les différents Auteurs qui ont traité de la résistance des fluides, ne s'accordent pas trop sur la mesure de la valeur absolue de cette résistance : quelques-uns la font moitié moindre que nous ne la trouvons ici. Ceux qui ont consulté l'expérience ne s'accordent pas mieux entre-eux. La seule loi que l'expérience paroisse bien confirmer est celle qui établit que les résistances sont (toutes choses d'ailleurs égales) proportionnelles aux quarrés des vîtesses.

Quant aux ſurfaces & aux denſités, les expériences de M. *le Chevalier de Borda*, font voir que les réſiſtances ne leur ſont pas exactement proportionnelles.

En attendant que l'expérience & la théorie ſoient plus avancées ſur la loi des réſiſtances, nous ſuppoſerons que la hauteur du priſme de fluide, dont le poids meſure la réſiſtance, eſt à la hauteur $2h :: n : 1$; n étant un nombre inconnu que l'on déterminera par expérience, tant pour les fluides non élaſtiques, que pour les fluides élaſtiques. Ainſi, nous aurons généralement $R = 2DSnhpdt$, ou $R = DSnV^2dt$, puiſque $2ph = V^2$.

Si l'on ſuppoſe avec M. Bouguer (*Traité du Navire*, *pag.* 357) que l'eau de mer, mue avec une vîteſſe d'un pied par ſeconde, & choquant une ſurface d'un pied quarré, fait équilibre à un poids d'une livre ſept onces, ou de 23 onces, voici comment on déterminera n.

p étant la vîteſſe qu'un corps peſant acquiert dans une ſeconde, pdt eſt celle qu'il acquiert dans un inſtant dt; ainſi $23pdt$ eſt la quantité de mouvement qu'un corps de 23 onces a acquiſe à la fin de cet inſtant. Cette quantité de mouvement doit donc être égale au choc exprimé par $nDSV^2dt$, en mettant un pied quarré pour S, 1 pied pour V, & pour D la pesanteur spécifique de l'eau de mer, c'est-à-dire, 73 livres ou 1152 onces. On a donc $23\,p\,d\,t = n\,D\,d\,t$, ou $n = \frac{23\,p}{D} = \frac{23}{1152}\,p$; p valant 30, 2 pieds. Ensorte que n revient à 0, 603 à très-peu-près.

L'équation $23\,p\,d\,t = n\,D\,d\,t$, donne $n\,D = 23\,p = 694, 6$. Si on substitue pour $n\,D$ cette valeur, dans l'expression $n\,D\,S\,V^2\,dt$ de la résistance, on aura $R = 23\,p\,S\,V^2\,d\,t$, ou $R = 694, 6\,S\,V^2\,d\,t$ pour la résistance de l'eau de mer; la surface S étant supposée mesurée en pieds quarrés, & la vîtesse V en pieds. Cette quantité divisée par $p\,d\,t$ ou $30, 2\,d\,t$, exprime la masse dont le poids feroit équilibre à la résistance. Comme $d\,t$, dans cette expression, ne sert qu'à déterminer l'effet de la résistance eu égard à la durée de l'instant, qui est arbitraire, on peut supposer $d\,t = 1$, & écrire simplement $R = 694, 6\,S\,V^2$.

Si l'on suppose, avec M. Mariotte, (*Traité du mouvement des Eaux*, *pag.* 180), que l'air mu avec une vîtesse 24 fois plus grande que l'eau, fait le même choc sur une même surface. Alors on aura $V = 24$, $S = 1$; ainsi représentant par n' la valeur de n qui convient à l'air, & par D' la densité de l'air, on aura $23\,p\,dt = n'D'SV^2dt = n'D' \times 24^2dt$, ou $n'D' = \frac{23\,p}{24^2} = \frac{23\,p}{576}$; substituant cette valeur de $n'D'$ dans l'expression de la résistance, on a pour l'air, $R = \frac{23\,p}{576}SV^2dt$ ou $R = \frac{694,6\,SV^2dt}{576}$, ou simplement $R = \frac{694,6\,SV^2}{576}$. Ainsi, d'après cette expérience, la résistance ou le choc de l'air, seroit 576 fois moindre que celle de l'eau. Au reste, cette résistance est fort variable, parce que la densité de l'air est très-variable.

405. Passons à la résistance sur les surfaces qui se présentent obliquement; & pour plus de simplicité, supposons que c'est le fluide qui se meut.

Concevons un corps tel que le représente la *Fig.* 7; c'est-à-dire, dont les faces planes $EFGL$, $AELD$, $AEFB$, soient perpendiculaires entre-elles; & dont les trois autres faces planes aient telle grandeur & telle inclinaison que l'on voudra, de maniere cependant qu'il n'y ait que la face $ABCD$ qui soit exposée au choc du fluide que je suppose se mouvoir suivant gT parallele à AE, ou perpendiculaire à $EFGL$. Imaginons qu'on éleve sur le plan $ABCD$, la perpendinulaire *g R'*, & que par cette ligne, & la ligne *g T*, on faſſe paſſer un plan. Ce plan ſera perpendiculaire aux deux plans *ABCD*, *EFGL*; & ſi on le conçoit prolongé, il formera dans le corps, une ſection *MHIN* inclinée aux deux plans *AELD*, *AEFB*. De plus, comme il paſſe par la droite *gT* qui eſt la direction du fluide, toutes les particules de fluide arrivent ſur la ſurface *ABCD* ſuivant les directions paralleles à la ſection *MHIN*; en ſorte que ſi on imagine le corps coupé par pluſieurs plans paralleles à *MHIN*, on pourra dire de chaque ſection, ce que nous allons dire de celle-ci.

Soit donc *p* (*Fig.* 8) une particule qui arrive à la ſurface actuellement repréſentée par *MN*. Que la direction, ainſi que la vîteſſe *V* de cette particule, ſoient repréſentées par *p G*. Si ſur cette ligne, comme diagonale, on forme le parallélogramme *pKGL*, dont le côté *p K* ſoit ſur *MN*, & dont le côté *P L* ſoit perpendiculaire à *MN*; & qu'à l'inſtant où cette particule arrive, on conçoive ſa vîteſſe *p G*, compoſée de deux autres, l'une *p K* dirigée ſuivant *MN*, l'autre *p L* perpendiculaire à cette même ſurface; il eſt clair que cette particule n'agit ſur le corps, qu'en vertu de la vîteſſe qu'elle a ſuivant *p L*; car en vertu de ſa vîteſſe ſuivant pK, elle ne peut que ſe mouvoir le long de la ſurface, que nous ſuppoſons parfaitement unie & ſans frottement, & à laquelle, par conſéquent, la particule p ne peut donner de mouvement. Ainſi le choc de la particule p ſe fait avec une quantité de mouvement exprimée par $p \times pL$. Et comme les autres particules qui arrivent en même-temps ſur les autres points de la ſurface, ſont ſuppoſées avoir toutes la même vîteſſe, & des directions paralleles; ſi l'on conçoit pour chacune, une décompoſition ſemblable, elles auront chacune, perpendiculairement à la ſurface, la même vîteſſe pL; enſorte que ſi l'on nomme m, la ſomme de leurs maſſes, la quantité de mouvement qui paſſera dans le corps, perpendiculairement à la ſurface, ſera $m \times pL$.

Pour juger, à préſent, de la quantité de mouvement qui paſſera dans le temps infiniment petit dt, il faut déterminer le nombre des lames de fluide qui arriveront à la ſurface pendant ce même temps dt. Or ce nombre eſt, évidemment, le même que celui des lames que rencontreroit le corps, mu avec la vîteſſe V. Concevons donc que le corps ſe meuve pendant l'inſtant dt, en ſorte que la ſurface $ABCD$ (*Fig.* 7), repréſentée (*Fig.* 9) vienne en $abcd$ parallelement à elle-même, le point g décrivant sur gT la ligne infiniment petite gr; il eſt clair en menant gs perpendiculaire ſur $abcd$, qu'il ne peut pas y avoir plus de lames de fluide entre $ABCD$ & $abcd$, que l'épaiſſeur d'une des particules, n'eſt contenue de fois dans l'épaiſſeur gs; donc en nommant a l'épaiſſeur d'une des particules, $\frac{gs}{a}$ exprimera le nombre des lames; donc $m \times pL \times \frac{gs}{a}$, exprimera la quantité de mouvement qui paſſe dans le corps pendant l'inſtant dt, & qui eſt dirigée perpendiculairement à la ſurface $ABCD$.

Mais puiſque la maſſe m de la premiere lame, eſt égale au volume de cette lame, multiplié par ſa denſité; ſi l'on nomme S la ſurface $ABCD$ & D la denſité du fluide, on aura $m = DSa$; donc la quantité de mouvement qui paſſe dans le corps, eſt $D \times S \times pL \times gs$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer pL & gs.

Or ſi l'on nomme i l'angle TgM (*Fig.* 7) que la direction du mouvement de chaque particule, fait avec la ſurface (angle qu'on appelle *angle d'incidence*), lequel eſt le même que MpO (*Fig.* 8) qui eſt égal à GpK; le triangle rectangle GpK donnera $1 : pG :: \sin i : GK$ ou pL; donc $pL = pG \sin i = V \sin i$, puisque pG marque la vîtesse.

A l'égard de gs (*Fig.* 9); si l'on joint les deux points r & s, le triangle grs sera rectangle en s, puisque gR' ou gs est perpendiculaire au plan $abcd$ dans lequel se trouve rs; & l'angle grs sera égal à l'angle TgM de la *Fig.* 7; c'est-à-dire, sera égal à i. On aura donc $1 : \sin i :: gr : gs$; donc $gs = gr \sin i$; ou bien, parce que gr étant l'espace décrit avec la vîtesse V pendant le temps dt, ce qui (210) donne $gs = V dt$, on aura $gs = V dt \sin i$.

Mettant donc ces valeurs de pL & de gs, dans $D \times S \times pL \times gs$, on aura, en nommant R' cette résistance ou ce choc, $R' = DSV^2 dt \sin^2 i$; ou plus exactement, (en vertu de l'observation faite 404), $R' = nDSV^2 dt \sin^2 i$.

406. Remarquons, actuellement, que pour la résistance, dans le cas où la surface se présente perpendiculairement, nous avons (404) trouvé $R = nDSV^2 dt$, on a donc $R : R' :: nDSV^2 dt : nDSV^2 dt \sin^2 i :: 1 : \sin^2 i :: 1^2 : \sin^2 i$; donc, *toutes choses d'ailleurs égales, la résistance ou le choc direct d'un fluide, est à la résistance oblique sur la même surface, comme le quarré du rayon, est au quarré du sinus d'incidence.* Ainsi, l'une de ces résistances

peut toujours ſe conclure facilement de l'autre.

407. La réſiſtance que nous venons de calculer, ſe tranſmet perpendiculairement à la ſurface. Mais on a, le plus ſouvent, beſoin de connoître l'effet qui en réſulte dans une direction donnée, voyons donc comment on y parvient.

Il eſt facile de voir (*Fig.* 7) que puiſque cette force eſt dirigée perpendiculairement à la ſurface *ABCD*, laquelle eſt inclinée aux plans *AEFB*, *AELD*, *EFGL* que nous avons ſuppoſés perpendiculaires entre eux, elle tend à donner du mouvement au corps ſuivant des directions perpendiculaires à chacun de ces trois plans.

Pour déterminer chacun de ces trois efforts, il faudroit décompoſer l'effort R' perpendiculaire à *ABCD*, en trois autres, perpendiculaires à ces trois plans; mais on peut y parvenir plus promptement en déterminant d'abord l'un quelconque de ces efforts, de la maniere ſuivante: & de celui-là nous conclurons les autres.

408. Propoſons-nous donc cette queſtion générale: la force R' (*Fig.* 11) appliquée perpendiculairement au plan *ABCD*, étant connue, déterminer quel eſt ſon effort ſuivant une direction perpendiculaire à un plan connu *EFGL*.

Par la direction gR' de la force R' on imaginera un plan qui soit, tout-à-la fois, perpendiculaire au plan $ABCD$, & au plan $EFGL$. Soient MI & HI les intersections de ce plan, avec $ABCD$ & $EFGL$; & TK la section commune de ces deux derniers; MI & HI seront perpendiculaires à TK; & l'angle MIH, mesurera l'inclinaison des deux plans.

Si sur la ligne $R'g$ prolongée & prise pour diagonale, on forme le parallélogramme $gROQ$ dans le plan MIH, & dont les côtés gQ & gR soient, le premier, perpendiculaire, & le second, parallele au plan $EFGL$; on pourra substituer à la force R' les deux forces gR & gQ. Or gR étant parallele au plan $EFGL$, ne tend à donner au plan $ABCD$ aucun mouvement pour s'approcher du plan $EFGL$, ni pour s'en éloigner, & ne peut que le faire mouvoir parallelement à lui-même, sa distance au plan $EFGL$ demeurant toujours la même; ainsi la seule tendance que $ABCD$ ait en vertu de la force R', pour se mouvoir perpendiculairement à $EFGL$, est gQ. Voyons donc quelle est la valeur de gQ.

Or par le principe de la décomposition des forces, on a (en nommant Q la force gQ) $R' : Q :: gO : gQ$. Mais si l'on prolonge

gQ jusqu'à ce qu'elle rencontre HI en S, on verra facilement que les deux triangles rectangles OgQ, gSI sont semblables ; parce qu'outre l'angle droit en Q & en S, les deux angles OgQ & SIg sont égaux, comme étant compléments du même angle SgI. On a donc $gO : gQ :: Ig : IS$; donc $R' : Q :: Ig : IS$. Mais le triangle rectangle gSI donne $Ig : IS :: 1 : \sin IGS :: 1 : \cos SIG$; donc enfin $R' : Q :: 1 : \cos SIG$; c'est-à-dire, que *l'effort absolu de la force* R', *perpendiculaire au plan* ABCD, *est à celui qui en résulte suivant une direction perpendiculaire à un autre plan quelconque* EFGL, *comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison de ces deux plans.*

409. Quant à l'effort gR qui est parallele à IH; c'est de lui que résultent les deux efforts perpendiculaires au plan $AEFB$ & au plan $AELD$; ensorte que pour avoir ces deux efforts, il faudroit, ainsi que nous l'avons déjà observé, décomposer l'effort gR, en deux autres qui fussent perpendiculaires à ces deux plans perpendiculaires entre-eux & au plan $EFGL$. Mais il est facile d'appercevoir que les trois efforts dans lesquels la force R' sera alors décomposée, éta[nt] perpendiculaires entre-eux, aucun des trois ne peut contribuer à l'effet des deux autres ;

donc chacun peut être déterminé comme nous venons de le faire, c'eſt-à-dire, en décompoſant ſimplement la force R' en deux autres, l'une perpendiculaire, & l'autre parallele au plan dont il s'agit. De ſorte que la force R' eſt à chacun des trois efforts qu'elle tend à faire perpendiculairement aux plans $EFGL$, $AEFB$, $AELD$ perpendiculaires entre-eux, comme le rayon eſt au coſinus de l'inclinaiſon du plan $ABCD$ ſur chacun de ces trois plans.

410. Voilà donc le rapport de ces trois efforts, fixé. Mais pour l'uſage que nous voulons en faire, il faut le traduire en un autre.

Dans cette vue, ſoit $ABCD$ (*Fig.* 10) une ſurface plane quelconque. Concevons que de tous ſes points on ait mené des perpendiculaires ſur un plan quelconque $A'B'FE$ qui rencontre le plan $ABCD$ dans la droite EF. Ces perpendiculaires formeront ſur le plan $A'B'FE$ une ſurface $A'B'C'D'$ qu'on appelle la *projection* de $ABCD$, & qui ſera à celle-ci, comme le coſinus de l'inclinaiſon des deux plans, eſt au rayon.

En effet, ſi l'on conçoit dans le plan $ABCD$, deux droites MNP, mnp infiniment proches l'une de l'autre, & perpendiculaires à l'interſection commune FE; & qu'on ſe repréſente en même temps, leurs projections $M'N'P$, $m'n'p$; il eſt facile de voir, qu'à cauſe de la hauteur commune Pp, les deux ſurfaces $MmpP$, $M'm'pP$, ſont entr'elles comme $MP : M'P$. Par la même raiſon, les ſurfaces $NnpP$, $N'n'pP$ ſont entr'elles :: $NP : N'P$, ou (à cauſe des paralleles MM', NN') :: $MP : M'P$; donc auſſi les ſurfaces $MmnN$, $M'm'n'N'$ ſont entr'elles :: $MP : M'P$. Or le triangle rectangle $MM'P$ donne $MP : M'P :: 1 : \mathit{ſin}\ PMM'$; donc puiſqu'on peut toujours conſidérer les deux ſurfaces comme compoſées d'un même nombre de petits trapèzes correſpondants, tels que $MmnN$, $M'm'n'N'$, leſquels ſeront toujours l'un à l'autre :: $1 : \mathit{ſin}\ PMM'$, on peut dire, généralement, que la ſurface plane quelconque $ABCD$, eſt à celle de ſa projection :: $1 : \mathit{ſin}\ PMM'$. Or puiſque les lignes MP, $M'P$ ſont perpendiculaires à la ſection commune EF, l'angle MPM' qu'elles forment, meſure l'inclinaiſon des deux plans $ABCD$, $A'B'C'D'$; & à cauſe du triangle rectangle MPM', l'angle PMM' eſt le complément de cette inclinaiſon; donc en général, *ſi l'on projette ſur un plan quelconque, une ſurface plane quelconque; la ſurface projettée eſt à celle de ſa projection, comme le rayon eſt au coſinus de l'inclinaiſon, de ces deux plans.*

411. Concluons donc de-là, que puiſque (409) lorſqu'on décompoſe la force R' (*Fig.* 11) en trois autres, perpendiculaires à trois plans connus & perpendiculaires entr'eux, cette force eſt à chacune de ſes compoſantes, comme le rayon eſt au coſinus de l'angle que fait le plan $ABCD$, avec celui auquel cette compoſante eſt perpendiculaire; concluons, dis-je, que ſi l'on nomme r, r', r'' les effets que le choc R' d'un fluide, ſur $ABCD$, produit dans le ſens perpendiculaire à chacun des trois plans $EFGL$, $AEFB$, $AELD$; & ſi l'on nomme s, s', s'', les ſurfaces que l'on auroit en projettant ſur chacun de ces trois plans la ſurface $ABCD$ que nous avons appellée S; on aura $R' : r : r' : r'' :: S : s :: s' : s''$; donc puiſque nous avons trouvé $R' = nDSV^2dt\, \text{ſin}^2 i$; ſi de cette ſuite de rapports on tire les trois proportions $R' : r :: S : s$; $R' : r' :: S : s'$; $R' : r'' :: S : s''$, & que l'on mette pour R' ſa valeur, on aura $r = nD sV^2dt\, \text{ſin}^2 i$, $r' = nD s'V^2dt\, \text{ſin}^2 i$, $r'' = nD s''V^2dt\, \text{ſin}^2 i$.

C'eſt-à-dire, que *lorſqu'une ſurface plane quelconque* ABCD *eſt expoſée au choc d'un fluide, ſi l'on veut ſavoir l'effet que ce choc produit, ſuivant une direction donnée; il faut imaginer cette ſurface projettée ſur un plan auquel cette direction ſeroit perpendiculaire; & ayant déterminé*

déterminé par ce qui a été dit (396), le choc que cette projection éprouveroit, si elle étoit mue perpendiculairement, on le multipliera par le quarré du sinus d'incidence du fluide sur la véritable surface.

412. On pourra donc, par ces principes, déterminer les efforts que le choc, ou la résistance des fluides, tend à produire dans un corps, suivant trois directions perpendiculaires entr'elles, soit que ce corps présente plusieurs surfaces planes différemment inclinées, soit qu'il présente une surface courbe ; car dans ce dernier cas, on peut toujours imaginer cette surface décomposée en une infinité de petites surfaces planes. Nous verrons, en parlant des mouvements de rotation, quels effets ces efforts doivent produire. Quant à présent, faisons voir, par quelques exemples, comment on détermine le choc ou la résistance, d'après ces principes. Mais pour simplifier le calcul, observons que la quantité $n D V^2 dt$, qui entre comme facteur dans l'expression de la résistance, étant la même pour toutes les parties de la surface, on peut l'omettre, pendant le détail du calcul des différentes parties de la surface, & des angles d'incidence, sauf à le remettre dans le résultat du calcul.

413. Supposons que le corps *M* (*Fig.* 12) est un parallélipipede rectangle, mu dans l'eau suivant la ligne horisontale quelconque *g T*, la surface *DEGH* étant horisontale. Si l'on imagine que la partie plongée de ce solide, soit coupée par des plans horisontaux, en une infinité de tranches égales, il est visible que chaque tranche éprouve la même résistance. Ainsi nous pouvons nous borner à chercher celle qu'éprouveroit une de ces tranches; il ne s'agira plus que de la multiplier par le nombre des tranches.

Supposons donc (*Fig.* 13) un parallélogramme rectangle *ABCD*, mu suivant la ligne *g T* tirée dans son plan, & qui fait avec les côtés *BC*, *AB*, des angles connus *g B E*, *g B D*. Il est clair que ces angles sont les angles d'incidence du fluide à l'égard de chacun des points de chaque surface exposée au choc. Donc la résistance faite sur *BC* (406) sera (en omettant le facteur $n D V^2 dt$) exprimée par $BC \times \sin^2 gBE$. Par la même raison, la résistance faite sur *AB*, sera $AB \times \sin^2 gBD$.

Maintenant, comme ces résistances agissent dans un même plan, l'effort total qui en résulte, sera aussi dans le même plan. D'ailleurs les résistances faites sur les différents points de *BC*, & celles qui se font sur chacun des points de AB, se réduisant chacune à une seule, qui agit perpendiculairement sur le milieu de chaque ligne, passeront évidemment par le point L, où se coupent les lignes IH, FK menées par les milieux des côtés opposés. Donc si à compter du point L, on prend les lignes LM, LO, dans le rapport de ces résistances, c'est-à-dire, telles que l'on ait $LM : LO :: BC \times \sin^2 gBE : AB \times \sin^2 gBD$, & que sur ces lignes on forme le parallélogramme $LMQO$, la diagonale LQ représentera la direction de l'effort de la résistance totale; & cet effort dirigé suivant LQ, sera à celui qui se fait sur $BC :: LQ : LM$; c'est-à-dire, qu'on aura $LM : LQ :: BC \times \sin^2 gBE$, est à l'effort absolu de la résistance, lequel sera donc exprimé par $BC \times \sin^2 gBE \times \frac{LQ}{LM}$, ou (en remettant le facteur $n\dot{D}V^2 dt$), par $n\dot{D}V^2 dt \times BC \times \sin^2 gBE \times \frac{LQ}{LM}$. Ainsi, si le corps se meut en vertu d'une impulsion primitive, son mouvement sera non-seulement retardé, mais il changera continuellement de direction, à moins que dès le premier instant LQ ne se soit trouvée en ligne droite avec gT.

Mais si le corps se meut en vertu d'une force qui répare toujours le mouvement; par exemple, en vertu de l'action du vent ſur une voile repréſentée par RS, il pourra conſerver ſa vîteſſe & ſa direction, ſi la voile eſt placée perpendiculairement à LQ, & ſi en même-temps, l'action du vent perpendiculairement à RS, eſt égale à $nD \times BC \times V^2 dt \, \mathit{ſin}^2 gBE \times \frac{LQ}{LM}$. Car l'action du vent, comme de tout autre fluide, ne s'exerce que perpendiculairement à la ſurface qu'elle rencontre, ainſi que nous l'avons déjà dit.

414. Il eſt facile de conclure de-là, quelle relation il doit y avoir entre la poſition de la voile, & celle de la route : en voici le calcul.

Si par le point L on tire LX parallele à gT, LX eſt la direction du point L; & l'angle que LX fait avec la droite HI qui partage, ici, le corps, en deux parties égales & ſemblables, eſt ce qu'on appelle l'*Angle de la dérive*, ou ſimplement *la dérive*.

En général nous appellerons dérive, l'angle que la route fera avec une ligne fixe quelconque.

Il eſt évident que puiſque RS eſt perpendiculaire à QL, l'angle RLM eſt complément de MLQ. Or dans le triangle rectangle LMQ, on a $LM : MQ :: 1 : tang\, MLQ$, ou $:: 1 : cot\, RLM$. Mais comme nous avons fait, ci-deſſus, $LM : MQ$ ou $LO :: BC \times \mathit{ſin}^2 gBE : AB \times \mathit{ſin}^2 gBD$; c'eſt-à-dire, $:: BC : AB \times \frac{\mathit{ſin}^2 gBD}{\mathit{ſin}^2 gBE}$, ou (à cauſe que gBE eſt complément de gBD) : : $BC : AB \times \frac{\sin^2 gBD}{\cos^2 gBD}$, ou : : $BC : AB \times tang^2 gBD$, puisque $tang\, gbD = \frac{\sin gBD}{\cos g BD}$, on a $1 : cot\, RLM$: : $BC : AB\, tang^2 gBD$. Donc $AB\, tang^2 gBD = BC\, cot\, RLM$. Ainsi connoissant AB, BC, & l'un de ces deux angles, la dérive, & l'angle de la voile avec la quille, il sera facile de trouver l'autre.

415. Au reste, lorsque le corps M (*Fig.* 12) ne plonge pas entiérement, la résistance tend à produire une inclinaison : l'action du vent sur la voile, tend aussi à en produire une ; c'est en traitant des mouvements de rotation, que nous examinerons ces effets.

416. Supposons, actuellement, que la surface exposée au choc, au lieu d'être plane, soit courbe ; mais dans un sens seulement. Supposons, par exemple, que le corps est une espece de prisme droit, dont la base est une courbe quelconque telle qu'on la voit (*fig.* 14) ; alors chaque tranche horisontale peut être considérée séparément.

Par un point quelconque G, menons les deux lignes GA, GC perpendiculaires entr'elles, & ayant pris l'arc infiniment petit Mm, menons MP, mp perpendiculaires sur AG, & Mr parallele à AG. Que gT située dans le plan de la figure, soit la direction du mouvement, ou soit la route du corps. Si l'on mene la tangente mX, & la ligne gR parallele à AG ; l'angle TgX sera l'angle d'incidence ; & l'angle RgX sera égal à mMr ; donc l'angle d'incidence TgX qui est composé de l'angle TgR de la dérive, & de l'angle RgX, sera $= TgR + mMr$. Nommons donc a, l'angle de la dérive ; & z, l'angle mMr ; nous aurons $TmX = a + z$; & par conséquent le sinus d'incidence sera $\sin(a+z)$, c'est-à-dire, $\sin a \cos z + \sin z \cos a$.

Nommons AP, x; PM, y. Le triangle rectangle Mrm nous donnera $Mm : Mr :: 1 : \sin Mmr$ ou $\cos mMr$; c'est-à-dire, $\sqrt{dx^2+dy^2} : dx :: 1 : \cos z$, donc $\cos z = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. On trouvera de même, $\sin z = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Le sinus d'incidence sera donc $\frac{dx \sin a + dy \cos a}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

L'effort que la résistance fait perpendiculairement au côté Mm étant dirigé dans le plan de la figure, ne peut produire de mouvement que suivant ce plan; il suffira donc, pour avoir ses effets, de l'imaginer décomposé en deux autres, l'un perpendiculaire à AG, l'autre perpendiculaire à GC. Or la projection de Mm sur AG, est évidemment $= dx$; & sa projection sur GC est $= dy$; on a donc $\frac{dx(dx \sin a + dy \cos a)^2}{dx^2+dy^2}$ pour l'effort perpendiculaire à AG; & $\frac{dy(dx \sin a + dy \cos a)^2}{dx^2+dy^2}$ pour l'effort perpendiculaire à GC; ces deux efforts étant ceux qui résultent du choc fait sur Mm. Donc pour avoir l'effort total résultant des chocs faits sur toutes les parties Mm qui y sont exposées, il faut intégrer ces quantités; ensorte que l'effort total perpendiculaire à AG, est $\int \frac{dx(dx \sin a + dy \cos a)^2}{dx^2+dy^2}$, & l'effort total perpendiculaire à GC est $\int \frac{dy(dx \sin a + dy \cos a)^2}{dx^2+dx^2}$. Or ayant l'équation de la courbe, il sera aisé d'en déduire la valeur de dx en dy, ou de dy en dx, laquelle étant substituée dans ces formules, donnera, en intégrant, les valeurs de ces efforts.

Mais il faut bien remarquer jusqu'à quelles limites il faut prendre cette intégrale. Et pour déterminer ces limites, on imaginera deux tangentes BL, DL, paralleles à la direction de la route : il est évident qu'il n'y a que les arcs AD, AB, qui reçoivent le choc. Les deux points B & D, se détermineront, par ce qui a été dit (33).

On prendra donc l'intégrale depuis A jusqu'en D, en regardant y comme positive. Puis faisant y négative, on prendra l'intégrale, de A jusqu'en B, en observant de plus, pour celle ci, de faire $\sin a$ négatif, parce que l'angle d'incidence TgX qui est $a + z$ pour chaque petit arc de la branche AD, est au contraire, $z - a$, pour chaque petit arc de la branche AB. Alors on ajoutera les deux intégrales.

417. Si l'angle a de la dérive étoit nul, alors on auroit $\sin a = 0$, & $\cos a = 1$, ce qui simplifie les formules. Les deux arcs AD, AB, deviennent AC, AE; & si le corps est composé de deux parties égales & semblables, la partie du choc qui agit perpendiculairement à AG, & qui alors est exprimée par $\int \frac{dx\,dy^2}{dx^2 + dy^2}$ pour l'arc AC, sera exprimée par $-\int \frac{dx\,dy^2}{dx^2 + dy^2}$ pour l'arc correspondant AE: & comme la somme de ces deux quantités est zéro, il s'en suit que les résistances faites de part & d'autre de AG perpendiculairement à cette ligne, se détruisent.

Mais, lorsque l'angle de la dérive n'est pas nul, il y a toujours une action perpendiculaire à AG, & une action perpendiculaire à GC, dont on déterminera la valeur, comme il vient d'être dit.

418. Pour trouver la direction de l'effort unique qui résulte de la résistance, il faut chercher à quelle distance de GC & de GA passent les efforts résultans des actions partielles perpendiculaires à AG & GC.

Or nous avons vu ci-dessus, quelle est l'expression des efforts partiels perpendiculaires à AG & GC, résultants du choc fait sur Mm. Si on les multiplie respectivement par x, & y, & que l'on en prenne l'intégrale, on aura............

$$\int \frac{x\,dx\,(dx \sin a + dy \cos a)^2}{dx^2 + dy^2} \;\&\; \int \frac{y\,dy\,(dx \sin a + dy \cos a)^2}{dx^2 + dy^2}$$

pour la somme de leurs moments, par rapport au point A, & à la droite AG. Divisant ces deux sommes, chacune, par la somme des forces qui lui est relative, & dont on a eu, ci-dessus, l'expression, on aura les distances auxquelles passent ces deux forces; c'est-à-dire, la distance au point A pour la force perpendiculaire à AG, la distance à GA pour la force perpendiculaire à GC.

Si l'on ſuppoſe que N ſoit le point où les directions de ces deux forces ſe rencontrent, & que l'on prenne ſur ces directions les deux parties NQ, NO qui ſoient entr'elles, comme la force totale perpendiculaire à GC eſt à la force totale perpendiculaire à AG; en formant le parallélogramme $QNOS$, on aura NS pour la direction de la réſiſtance abſolue, & par conſéquent SN pour celle ſuivant laquelle le vent doit agir pour maintenir le corps conſtamment dans la même ſituation. Ainſi, puiſque, comme nous l'avons déjà dit, la voile doit être perpendiculaire à cette direction, on pourra toujours, quelle que ſoit la courbe, déterminer la relation de l'angle que la voile fait avec la quille, avec l'angle de la dérive, puiſque ce premier angle eſt le complément de l'angle QNS, dans le triangle rectangle NQS dont les côtés NQ & QS ſont dans le rapport des forces, rapport qui renferme l'angle de la dérive. Nous ne nous arrêterons pas à donner des applications de ces formules; cela eſt facile actuellement: on peut prendre pour exemple, le triangle, le cercle, &c.

419. Quoique nous ayons ſuppoſé tacitement, que le plan de la figure, étoit horiſontal, il eſt facile de voir qu'on s'y prendroit de même pour trouver la réſiſtance, s'il étoit vertical; du moins, en ſuppoſant la dérive nulle. Ainſi on peut déterminer par-là, la réſiſtance qu'éprouveroit une proue qui ne ſeroit courbe que dans un ſens: c'eſt-à-dire, dont toutes les coupes verticales & paralleles à la quille, ſeroient égales, lorſqu'il n'y a point de dérive.

420. Conſidérons, actuellement, la réſiſtance qu'éprouveroit une proue conique (Fig 15) faiſant moitié d'un cône droit, & qui s'avanceroit horiſontalement dans l'eau, ſuivant la direction de ſon axe RA. Si on imagine cette ſurface, compoſée d'une infinité de triangles tels que MAm, qui ont pour ſommet commun celui du cône, tous ces triangles étant également inclinés à l'axe, rencontrent le fluide ſous une même

incidence, mesurée par l'angle que le côté du cône fait avec l'axe. Par conséquent, chaque point de la surface de chaque triangle reçoit un choc égal de la part de l'eau. Donc l'effort qui se fait perpendiculairement à la surface de ce triangle, doit (300) passer par le centre de gravité de ce même triangle.

Si l'on conçoit cet effort, décomposé en trois autres ; l'un, perpendiculaire à la base *DBC*; l'autre, perpendiculaire au plan horisontal *DAC*; & le troisieme, perpendiculaire au plan vertical *ARB*; on voit 1°. qu'en prenant de part & d'autre de *ARB* deux de ces triangles, situés de la même maniere, & de la même grandeur, les efforts perpendiculaires au plan *ARB*, seront égaux de part & d'autre, & directement opposés ; ils se détruiront donc ; ensorte que de la résistance totale qui se fait sur la proue actuelle, il n'en peut résulter aucun déplacement à droite ou à gauche du plan *ARB*.

2°. Si on imagine chaque petit triangle *AMm* projetté sur la base *DBC*; la projection sera un petit triangle *MRm*, qui aura son sommet au centre *R*. Il faudra donc (411) pour avoir la résistance dans le sens perpendiculaire à *DBC*, multiplier le triangle *MRm* par le quarré du sinus de l'angle d'incidence ; c'est-à-dire, par le quarré du ſinus de l'angle RAC. Donc la force totale, perpendiculaire à DBC, ſera égale à la ſomme de tous les petits triangles MRm, c'eſt-à-dire, à la ſurface du demi-cercle DBC, multipliée par le quarré du ſinus de RAC.

On voit donc que la réſiſtance dans le ſens de l'axe, eſt moindre dans une proue conique, que celle qui ſe feroit ſur la baſe même. Car celle-ci ſeroit exprimée par la ſurface DBC, tandis que la premiere eſt exprimée par $DBC \times \mathit{ſin}^2\, RAC$; en ſorte qu'elles ſont entre-elles : : $DBC : DBC \cdot \mathit{ſin}^2\, RAC$, ou : : $1 : \mathit{ſin}^2\, RAC$; or $\mathit{ſin}\ RAC$ eſt toujours plus petit que le rayon.

3°. Chaque petit triangle* AMm, étant projetté ſur le plan DAC, aura pour projection, un triangle $AM'm'$; & par la même raiſon on voit que l'effort total perpendiculaire au plan DAC, ſera exprimé par la ſomme de tous ces triangles, c'eſt-à-dire, par la ſurface du triangle ADC, multipliée par le quarré du ſinus de l'angle RAC.

421. Pour avoir, maintenant, la poſition de la réſultante de l'effort perpendiculaire à DBC, & de l'effort perpendiculaire à DAC, il faut chercher à quelle diſtance du plan DAC & du plan DBC, paſſent ces deux efforts.

Or il eſt clair, d'abord, à cauſe de la figure ſymmétrique, que ces deux efforts ſont dans le plan ARB. D'ailleurs, nous venons de voir que l'effort qui ſe fait perpendiculairement ſur la ſurface de chaque tr gle AMm paſſe par le centre de gravité de ce triangle; d'où il eſt facile de conclure que les deux efforts qui en réſultent perpendiculairement à DBC & DAC, paſſent par les centres de gravité des projections MRm, $AM'm'$. Donc les moments de ces efforts ſeront égaux à ces mêmes efforts multipliés par les diſtances des centres de gravité des projections MRm, $AM'm'$. Or l'effort perpendiculaire à DBC étant égal à $MRm \times \sin^2 RAC$, ſon moment à l'égard du plan DAC, ſera donc égal à $\sin^2 RAC$ multiplié par MRm, & par la diſtance du centre de gravité de MRm, à DAC; c'eſt-à-dire, ſera égal à $\sin^2 RAC$, multiplié par le moment du triangle MRm. Donc la ſomme des moments de tous les efforts perpendiculaires à DBC, ſera égale à $\sin^2 RAC$ multiplié par la ſomme des moments de tous les petits triangles MRm à l'égard du plan DAC; c'eſt-à-dire, par le moment de DBC à l'égard de DC, ou par le produit de DBC par la diſtance de ſon centre de gravité au point R. Donc ſi O marque le point où cet effort passe, & si l'on appelle g la distance du centre de gravité de DBC, au point R; puisque la somme des forces est $DBC \times \sin^2 RAC$, on aura $DBC \times \sin^2 RAC \times RO = \sin^2 RAC \times DBC \times g$; donc $RO = g$; donc l'effort total perpendiculaire à DBC, passe par le centre de gravité de ce demi-cercle.

Par un raisonnement semblable, on prouvera que l'effort total perpendiculaire à DAC, passe par le centre de gravité de ce triangle. Donc si l'on conçoit que $ABCD$ (*Fig* 16) soit la coupe longitudinale du navire, & que G, G' soient les deux centres de gravité dont nous venons de parler, si l'on mene les lignes GF, $G'F$ paralleles à AR & BR, & que du point F où elles se rencontrent, on prenne FK, FE qui soient l'une à l'autre, comme la force perpendiculaire à RB, est à la force perpendiculaire à AR; c'est-à-dire, (*Fig.* 15) :: $DBC \times \sin^2 RAC : DAC \times \sin^2 RAC$, ou :: $DBC : DAC$; en formant le parallélogramme $EFKH$ (*Fig.* 16), on aura FH pour la direction de l'effort total résultant de la résistance.

Que I soit le point de la quille où répond le mât (en supposant qu'il n'y en ait qu'un). Le point Q où FH coupera la verticale IQ, déterminera la plus grande hauteur à laquelle doit répondre le milieu de la voile ; c'est-à-dire, sera ce qu'on appelle le *point vélique*. Nous en parlerons plus particulierement par la suite.

422. Si l'on veut déterminer la résistance, lorsque la proue est formée, en général, d'une moitié de solide de révolution, quelconque, la dérive étant nulle. On imaginera la surface de ce solide composée d'une infinité de zônes infiniment petites. La projection de chaque zône sur le plan DBC (*Fig.* 17) sera une demi-couronne circulaire, telle qu'on la voit *Fig.* 18), qui aura pour rayon, le rayon PM (*Fig.* 17) de cette zône. Or, puisque le demi-cercle qui a PM ou y pour rayon, a $\frac{cy^2}{2}$ pour surface, en supposant que le rapport du rayon à la demi-circonférence, est celui de 1 à c; on aura $cydy$ pour la surface de la demi-couronne ou de la projection de la zône sur le plan DBC. Quant à la projection de la zône sur le plan DAC, elle est évidemment, le trapèze $MSsm$, ou $2ydx$; en nommant AP, x.

Cela posé, toutes les parties de la zône ont une égale inclinaison à l'égard de l'axe AR, & sont par conséquent frappées de la même maniere par le fluide. Donc si on conçoit l'effort qui se fait perpendiculairement sur chacune, décomposé en trois autres, l'un perpendiculaire à DBC, le second perpendiculaire à DAC, & le troisieme perpendiculaire à ARB; on verra facilement que la résultante des efforts perpendiculaires à ARB, sera zéro. Que la résultante des efforts perpendiculaires à DBC, sera exprimée par la projection de la zône, ou par la demi-couronne, multipliée par le quarré du sinus de l'angle d'incidence qui est égal à rmM. Enfin, que la résultante des efforts perpendiculaires à DAC, sera exprimée par la projection $MSsm$ multipliée de même par le quarré du sinus de rmM. Donc, pour chaque zône, ces deux forces seront exprimées par $cydy \times \frac{dy^2}{dx^2+dy^2}$, & par $2ydx. \frac{dy^2}{dx^2+dy^2}$. Donc l'effort total, perpendiculaire à

DBC sera $\int \frac{cy\,dy^3}{dx^2 + dx^2}$; & l'effort total perpendiculaire à *DAC* sera $\int \frac{2y\,dx\,dy^2}{dx^2 + dy^2}$.

Il est d'ailleurs facile de voir que ces deux efforts s'exercent dans le plan *BAR* ; & que par conséquent leur résultante, ou l'effet total de la résistance sera aussi dans ce plan. Et pour déterminer sa direction, on prendra la somme des moments des efforts partiels que nous venons de déterminer, & on divisera cette somme des moments, par la somme correspondante des efforts partiels ; ce qui est facile à présent, & donnera les distances où passent les deux forces perpendiculaires à *KB* & *AR* ; après quoi il sera facile de déterminer la position de la résultante.

Nous ne pousserons pas plus loin ces recherches. Nous remarquerons seulement que si le solide de révolution est entier, alors l'effort total perpendiculaire à *DAC*, sera zéro, & l'effort perpendiculaire à *DBC*, sera le double de celui que nous venons d'assigner.

Si l'on applique ces recherches à la sphère, on trouvera que la résistance est la moitié de celle qu'éprouveroit son grand cercle.

423. Si l'on y fait attention, on verra facilement, que puisque la résistance qui se fait sur une surface plane quelconque, est en général, représentée par $n\,D\,V^2\,S\,dt\,sin^2 i$, i étant le sinus d'incidence ; & que l'effet de cette résistance dans une direction donnée, est $n\,D\,V^2\,S'\,dt\,sin^2\,i$, en appellant S' la projection de S sur un plan auquel la direction dont il s'agit, seroit perpendiculaire ; on verra, dis-je, facilement, que si l'on regarde $S'\,sin^2\,i$, ou (ce qui revient au même), $\frac{S'\,sin^2\,i}{1^2}$, comme une surface,

cette surface est celle qui étant exposée perpendiculairement au choc, éprouveroit de la part de la résistance, le même effort que la résistance qui se fait sur la surface S, occasionne suivant la direction dont il s'agit.

Ainsi, pour trouver, dans quelques corps que ce soit, quel est l'effet de la résistance, dans une direction donnée, il faut décomposer sa surface en un assez grand nombre de parties, pour que chacune puisse être regardée comme plane; déterminer la projection de chaque partie, sur un plan auquel cette direction seroit perpendiculaire; déterminer pareillement le sinus d'incidence du fluide sur chaque partie; & ayant multiplié chaque projection par le quarré du sinus d'incidence, la somme de tous ces produits formera la valeur de la surface qui étant exposée directement au choc du fluide, éprouveroit un effort égal à celui que la résistance qui se fait sur la véritable surface, occasionne dans la direction en question.

De la maniere de déterminer l'impulsion de l'eau sur la proue des Navires.

424. Si la surface de la carène des vaisseaux étoit telle que la nature de la courbe que forme chaque coupe, pût être exprimée par une équation, il seroit facile de déterminer les effets que la résistance doit produire, dans le sens de la quille, dans le sens horisontal perpendiculaire à la quille, & dans le sens vertical ; effets qu'il est important de connoître. Mais au defaut de cet avantage, on peut se contenter d'imaginer la partie choquée de la carène décomposée en un grand nombre de quadrilatères. Et alors pour déterminer la surface, qui mesure la résistance, voici comment on s'y prendra.

Supposons d'abord qu'il n'y a pas de dérive ; & voyons quelle doit être l'impulsion dans le sens de la quille.

On imaginera le navire, coupé en un grand nombre de tranches verticales, perpendiculaires à la quille, & d'une égale épaisseur. On imaginera aussi la carène coupée en un grand nombre de tranches horisontales. Alors la surface de la carène sera décomposée en plusieurs quadrilatères dont les

les ſurfaces pourront être regardées comme planes.

Imaginons que les courbes que l'on voit (*Fig.* 19) ſoient les projections des coupes verticales, ou des membres, ſur le plan de la maîtreſſe varangue; & que BC repréſente l'épaiſſeur d'une des tranches horiſontales. Si l'on mene les horiſontales Bg, Ci; le petit trapèſe $abcd$ pourra être regardé comme rectiligne, & ſera la projection d'un des quadrilateres qui compoſent la ſurface de la proue. Pour avoir l'effet que la réſiſtance faite ſur ce quadrilatère, produit dans le ſens de la quille, il faudra donc (411) multiplier le petit trapèſe $abcd$, par le quarré du ſinus d'incidence ſur la ſurface du quadrilatere; ainſi cet effet ſera exprimé par $abcd \times \sin^2 i$, i étant l'angle d'incidence, & 1 le rayon. Mais ſi l'on ne ſuppoſe pas le rayon égal à l'unité, on aura $abcd \times \frac{\sin^2 i}{R^2}$ pour la valeur de cet effet, en repréſentant le rayon par R. Déterminons donc cet angle d'incidence.

Soit PQ (*Fig.* 20) l'épaiſſeur d'une des tranches verticales. Et ayant mené be (*Fig.* 19) perpendiculaire ſur ac, tranſportons be de Q en R (*Fig.* 20) perpendiculairement à

P Q; alors l'angle *Q P R* sera l'angle d'incidence dans le cas où il n'y a point de dérive.

En effet, si *ACDB* (*Fig.* 21) représente le quadrilatere qui fait partie de la surface de la proue, & que *a b c d* soit la projection sur le plan de la maîtresse varangue : les points *A* & *C* appartenants à une même coupe verticale, seront dans un plan *AEFC* perpendiculaire à *B b*. Or l'angle d'incidence, étant ici, l'angle que *B b* ou *B E* fait avec le plan *ABDC*, il est clair que pour avoir cet angle, il faut faire passer par *B b* ou *B E*, un plan perpendiculaire à *A B D C* : & l'angle que *BE* forme avec l'intersection *BG* de ces deux plans, est l'angle d'incidence; ainsi l'angle *E B G* est l'angle d'incidence. Mais puisque *B E* est perpendiculaire au plan *A E F C*, elle est perpendiculaire à *E G* qui est l'intersection du plan *BEG*, avec *AEFC*: de plus, le plan *B E G* perpendiculaire à *A B D C*, passant par la ligne *B E* perpendiculaire au plan *A E F C*, est aussi perpendiculaire à ce dernier; donc il est perpendiculaire à leur intersection commune *A C*; donc *E G* est perpendiculaire à *A C*. Le triangle *B E G* est donc un triangle rectangle qui a pour hauteur, l'épaisseur *B E* de la tranche verticale; & pour base, la ligne EG perpendiculaire à AC, qui (à cause que $AEFG$ est évidemment égal & parallele à $abdc$) est égal à bc, ou à be (*Fig.* 19); donc le triangle BEG (*Fig.* 21) est égal au triangle PQR (*Fig.* 20).

Cela posé, on aura donc (*Fig.* 19 & 20) $abdc \times \frac{\sin^2 QPR}{R^2}$ pour la résistance parallele à la quille. Mais $abcd = \frac{ab+cd}{2} \times BC$; donc la résistance est exprimée par $\frac{BC}{2} \times (ab + cd) \times \frac{\sin^2 QPR}{R^2}$. Or dans le triangle rectangle QPR, on a $R : \sin QPR :: PR : QR$; donc $\frac{\sin QPR}{R} = \frac{QR}{PR}$. Donc la résistance est $\frac{BC}{2} (ab + cd) \frac{QR^2}{PR^2}$. D'ailleurs, si l'on mene QI perpendiculaire à PR, on a (*Géom.* 112) $PR : QR :: QR : RI$; donc $\frac{QR^2}{PR} = RI$, & par conséquent $\frac{QR^2}{PR^2} = \frac{RI}{PR}$; la résistance devient donc $\frac{BC}{2} \times (ab + cd) \times \frac{RI}{PR}$, ou $\frac{BC}{2} \times ab \times \frac{RI}{PR} + \frac{BC}{2} \times cd \times \frac{RI}{PR}$. Or si ayant élevé au point P, la perpendiculaire PZ sur PR, on prend $Pm = ab$, & $Pn = cd$; on aura, en tirant Rm & Rn, & supposant que p & q sont les points où ces lignes sont coupées par QI prolongée, on aura $PR : RI :: Pm$, ou $ab : Ip$, & $PR : RI :: Pn$ ou

E 2

$cd : Iq$; donc $ab \times \frac{RI}{PR} = Ip$, & $cd \times \frac{RI}{PR} = Iq$. Donc enfin, la résistance est exprimée par $\frac{BC}{2} \times Ip + \frac{BC}{2} \times Iq$, ou par $BC \times \frac{(Ip + Iq)}{2}$ qui exprime la surface d'un trapèse qui auroit BC pour hauteur, & dont les bases opposées & paralleles, seroient Ip & Iq.

Donc si l'on conçoit que pour chacun des trapèses tels que $abdc$ (*Fig.* 19) dont la moitié de la projection totale de la proue est composée, on ait fait une opération semblable, en commençant par les trapèses les plus voisins de AX; & qu'ayant prolongé les horisontales, on ait tiré une ligne $A'X'$ parallele à AX; si l'on fait $B'f'$ égale à la ligne Ip; & $C'h'$ égale à la ligne Iq que cette construction aura donnée pour le premier trapèse $BfhC$; qu'on fasse pareillement $f'b'$ égale à la ligne Ip, & $h'd'$ égale à la ligne Iq, que cette construction aura donnée pour le trapèse $bfhd$, ainsi de suite; & que l'on fasse la même chose pour chaque tranche horisontale; on aura un espace terminé par la ligne courbe $R'i'X'$, dont la surface étant doublée, exprimera la résistance qu'éprouve la proue lorsqu'il n'y a pas de dérive; c'est-à-dire, que la résistance que la proue éprouvera réellement, dans le sens de la quille, sera à celle que la projection

RXZ éprouveroit, comme le double de $R'A'X'$ eſt au double de RAX, ou comme $R'A'X' : RAX$. Or la ſurface de $R'A'X'$ ſera facile à déterminer par ce qui a éte dit (*Géom.* 154), d'autant plus que les lignes $g'B'$, $i'C'$ &c, ſeront toutes connues par ces opérations.

425. Non-ſeulement, on peut, par ces opérations, déterminer la réſiſtance qu'éprouvera la proue; mais on peut encore déterminer facilement le point par où paſſe l'effort total de cette réſiſtance dans le ſens de la quille.

En effet, il eſt d'abord évident, qu'il doit paſſer par quelque point de la ligne AX (*Fig.* 19). On ſait d'ailleurs (255) que pour avoir cette réſultante, il faut prendre la ſomme des moments des efforts partiels perpendiculaires à RXZ, & la diviſer par la ſomme de ces efforts. Or puiſque chaque effort eſt repréſenté par un petit trapèſe tel que $a'b'd'c'$, ſon moment à l'égard du plan de flottaiſon repréſenté par RZ, ſera le moment de l'eſpace $a'b'c'd'$, à l'égard de $R'Z'$. Il faudra donc prendre la ſomme des moments des différentes parties de l'eſpace $R'X'Z'$, à l'égard de $R'Z'$, & la diviſer par cet eſpace : or c'eſt préciſément cette derniere opération qu'il faudroit faire pour trouver le centre de gravité de l'eſpace $R' X' Z'$; donc l'effet réſultant de la réſiſtance dans le ſens de la quille, paſſe par le centre de gravité de l'eſpace $R' X' Z'$, $A' X'$ étant ſuppoſé ſur $A\ X$; & ce centre eſt facile à déterminer par ce qui a été dit (299).

On voit, par ce que nous venons de dire, comment il faudroit s'y prendre pour déterminer l'effet que le choc fait ſur la proue, tend à produire perpendiculairement au plan de flottaiſon. On imagineroit, de même, la proue décompoſée en tranches horiſontales, & projettée ſur le plan de flottaiſon. Ainſi, ayant tracé les plans de ces tranches, on en feroit un uſage ſemblable.

426. Donc ſi l'on conçoit (*Fig.* 22) que $A\ B\ C\ D\ E$ ſoit la coupe verticale du navire, faite ſuivant la quille ; BI le plan de flottaiſon, ou la ligne d'eau ; CF le plan du maître couple ; on connoîtra l'effet de la réſiſtance perpendiculairement à $C\ F$, ſon effet perpendiculairement à BF, & les points H & G par où paſſent ces efforts. Donc ſi l'on mene GK & HK paralleles à FC & FB, & qu'à compter du point K, on prenne $K\ S$ & $K\ R$ dans le rapport des réſiſtances que nous venons d'enſeigner à déterminer ;

la diagonale KT repréſentera la vraie direction ſuivant laquelle la réſiſtance faite à la proue, affecte le navire. Nous en verrons l'uſage par la ſuite.

427. Lorſqu'il y a de la dérive, la partie de la carene expoſée au choc, change de grandeur & de figure ; & l'incidence du fluide ſur chaque partie change auſſi. S'il n'y avoit que cette derniere qui changeât, il ſuffiroit de déterminer, pour une ſeule dérive connue, l'action ſuivant la quille, & l'action latérale ; l'on en concluroit facilement la réſiſtance pour toutes les autres dérives. Mais comme ces trois choſes changent à la fois, on ne peut conclure, de ce qui arrive pour une dérive propoſée, ce qui doit arriver pour toute autre, qu'autant que la loi de la figure du navire ſeroit ou pourroit être exprimée par une équation. Mais à cauſe de l'irrégularité de cette figure, il faut, pour chaque cas, un calcul particulier. M. Bouguer ne paroît pas avoir penſé de même ; mais nous ne pouvons admettre la formule que ce ſavant Mathématicien a donné (*Traité du Navire*, *pag.* 414), pour déterminer l'impulſion dans le ſens de la quille, & l'impulſion latérale, dans le cas où il y a de la dérive. Car quand on ſuppoſeroit, comme M. Bouguer paroît l'avoir fait, que ce ſont toujours les mêmes parties de la carène qui ſont choquées par l'eau, l'impulſion latérale, dans le cas où la dérive eſt de 45°, ne doit pas être déterminée de la maniere dont il le fait. Cette derniere détermination influe ſur quelques-unes des conſéquences qu'il en a tirées, ſoit par rapport à la dérive, ſoit par rapport à la poſition de la voile, la vîteſſe du navire, &c.

Lorſque la dérive eſt petite, on peut regarder, ſans erreur ſenſible, la partie de la carène expoſée au choc, comme conſtante. Dans ce cas, on peut trouver une expreſſion générale de la réſiſtance dans le ſens de la quille, & de la réſiſtance latérale.

Quant à la réſiſtance dans le ſens de la quille, il eſt viſible que, dans ce cas, elle ne peut changer que d'une quantité très-petite, & que par conſéquent, on peut prendre pour ſa meſure, celle que nous avons déterminée (424).

Mais pour la réſiſtance latérale, comme elle eſt nulle dans le cas où la dérive eſt nulle ; il faut un moyen particulier pour la déterminer, lorſque la dérive eſt petite : c'eſt ce dont il s'agit actuellement. Voyons donc comment on détermine l'angle d'incidence.

Soit $ABCD$ (*Fig.* 23) l'une des ſurfaces planes partielles de la carene ; ſurface que je ſuppoſe inclinée tant à l'égard de l'horiſon, qu'à l'égard de la ligne CO parallelle à la quille. Soit TC la direction du choc de l'eau. Par les lignes horiſontales CT, CO, concevons un plan horiſontal qui coupe $ABCD$, dans la ligne CD ; & du point T pris arbitrairement ſur CT, menons TE perpendiculaire au plan $ABCD$, & TF perpendiculaire ſur CD. Du point G où TF coupe CO, menons GI parallele à TE, ou perpendiculaire au plan $ABCD$; enfin tirons les lignes CE, CI. L'angle TCE ſera l'angle d'incidence actuel ; & l'angle GCI eſt l'angle d'incidence, lorſqu'il n'y a point de dérive. Comme nous avons vu (424), comment on détermine ce dernier, il faut y rapporter l'angle actuel d'incidence. Or j'obſerve que ſi nous regardons TC comme rayon, TE & TF ſont les ſinus des angles TCE, TCF; on a donc $TE : TF :: \sin TCE : \sin TCF$. Par la même raiſon, ſi nous regardons CG comme rayon, GI & GF ſont les ſinus des angles GCI, GCF; on a donc $GI : GF :: \sin GCI : \sin GCF$. Mais puiſque GI eſt parallele à TE, on a $TE : TF :: GI : GF$; donc $\sin TCE : \sin TCF :: \sin GCI : \sin GCF$. Cela poſé, nommons a l'angle GCF; x l'angle TCG de la dérive ; i l'angle GCI d'incidence, lorſqu'il n'y a pas de dérive ; & i' l'angle TCE ; nous aurons $\sin i' : \sin (a+x) :: \sin i : \sin a$; donc $\sin i' = \frac{\sin i \sin (a+x)}{\sin a}$. Et ſi le plan $ABCD$ étoit ſitué de l'autre côté de CO on auroit. . . . .
$$\sin i = \frac{\sin i \sin (x-a)}{\sin a}.$$

Concevons, maintenant, que chaque partie de la ſurface de la proue, ſoit projettée ſur un plan vertical paſſant par la quille ; & ſoit b la ſurface de la projection d'une de ces parties. Nous aurons $\frac{b \sin^2 i \sin^2 (a+x)}{\sin^2 a}$ pour l'effort latéral du fluide. Et puiſque nous ſuppoſons que la dérive eſt petite, chaque petite ſurface b peut être cenſée avoir ſa correſpondante, de l'autre côté de la proue ; & l'effort latéral qui ſe

fait de ce côté, sera $\frac{b \sin^2 i \sin^2 (x - a)}{\sin^2 a}$; donc l'effort latéral qui résulte de ces deux-là, sera. . . . .
$\frac{b \sin^2 i \sin^2 (a + x) - b \sin^2 i \sin^2 (x - a)}{\sin^2 a}$, qui se réduit à
$\frac{4 b \sin^2 i \cos a \sin x \cos x}{\sin a}$. Donc l'effort latéral total sera
$\sin x \cos x \int \frac{4 b \sin^2 i \cos a}{\sin a}$; cette intégration étant faite pour la moitié de la proue comprise entre le maître couple, & le plan vertical mené par la quille. Il ne s'agit donc plus que de savoir comment on déterminera $\int \frac{4 b \sin^2 i \cos a}{\sin a}$.

Pour cet effet, on remarquera que si l'on projette sur le plan vertical passant par la quille, le petit quadrilatere dont $abdc$ (*Fig.* 19) nous représentoit la projection sur le maître couple (424), on aura, pour projection, un rectangle qui aura CB pour hauteur, & dont la base sera égale à l'épaisseur de la même tranche verticale que nous avons considérée (424). C'est-à-dire, sera égale à PQ (*Fig.* 20). Donc (*Fig.* 19 & 20) $\int \frac{4 BC \times PQ \sin^2 i \cos a}{\sin a}$ exprimera la valeur de $\int \frac{4 b \sin^2 i \cos a}{\sin a}$. Or nous avons vu (424) que $\sin^2 i = \frac{RI}{PR}$; on a donc $\int \frac{4 BC \times PQ \times RI}{PR} \times \frac{\cos a}{\sin a}$, ou $\int 4 BC \times \frac{RI}{PR} \times \frac{PQ \cos a}{\sin a}$. Mais si (*Fig.* 20) on fait $QS = ab$ de la *Fig.* 19, il est facile de voir que l'angle QPS est alors, l'angle a; & dans le triangle PQS, on a $QS : QP :: \sin a : \cos a$, ou $\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{PQ}{QS}$; on a donc $\int 4 BC \times \frac{RI \times PQ^2}{PR \times PS}$. Or $\frac{PQ^2}{PR} = PI$, & $PI \times RI = \overline{QI}^2$; donc notre intégrale se réduit à $\int \frac{4 BC \times QI^2}{QS}$; donc si pour chacun des trapèses $abdc$ qui composent l'espace RAX (*Fig.* 19) on construit un petit rectangle qui ait BC pour hauteur, & $\frac{\overline{QI}^2}{QS}$ ou une troisieme proportionnelle à QS & QI pour base; le quadruple de la somme de ces rectangles exprimera la surface cherchée, laquelle étant multipliée par $\sin x \cos x$ donnera la mesure de l'effort latéral; ainsi en appellant B cette surface, on aura $B \sin x \cos x$ pour l'effort latéral; quantité dans laquelle il est facile de voir que B sera toujours une quantité d'autant plus grande que le navire aura plus de longueur, la largeur restant la même. Et comme l'angle x est supposé petit, ce qui donne $\cos x$, presque $= 1$, on peut réduire cette expression à $B \sin x$.

Du Solide de la moindre résistance.

428. Nous nous bornerons aux solides de révolution, & nous ferons abstraction de la dérive.

Cette question peut être proposée de deux manieres : elle peut regarder les solides de même base & de même masse, ou les solides qui n'ont de commun que la base.

La quantité de mouvement que le solide perd à chaque instant, est égale à l'impulsion du fluide, estimée dans le sens de l'axe. D'un autre côté, cette même quantité de mouvement est égale à la vîtesse perdue, multipliée par la masse; donc la vitesse perdue est égale à l'impulsion divisée par la masse du solide; donc le solide de la moindre résistance, ou qui perdra le moins de vitesse, entre tous ceux de même base, sera celui dans lequel l'impulsion du fluide, divisée par la masse du solide, sera un *minimum*. Donc la différentielle de l'expression de l'impulsion divisée par la masse, doit être zéro. Donc si la masse est supposée constante, la différentielle de l'impulsion doit être zéro. Examinons d'abord ce premier cas.

Soit donc Mm (*Fig.* 24) une portion infiniment petite de la courbe génératrice du solide cherché. Prenons un point N infiniment plus près de cet arc, que M ne l'est de m; & ayant mené les deux petites droites MN, Nm, concevons que MNm soit un petit arc appartenant à la courbe génératrice d'un autre solide de révolution. Il faut donc que la différence des impulsions faites sur les surfaces engendrées par Mm, & par

MNn ſoit zéro ; car la propriété demandée doit avoir lieu, quelle que ſoit la longueur du ſolide.

Nommons donc AP, x ; PM, y ; & ayant mené Noq parallele à AP ; & du point o où elle coupe Mm, ayant mené or parallele à PM, & tiré Ms parallele à AP ; nous aurons $Ms = dx$, $os = dy$, $oq = dx + ddx$, $mq = dy + ddy$, $Mo = ds$, & (en ſuppoſant ds conſtant) $om = ds$. Des points M & m comme centres & des rayons MN & mo, décrivons les arcs Ni, lo. En comparant les triangles Nio, Nlo, aux triangles Mos, omq, chacun à ſon correſpondant, & nommant No, h, on aura $oi = \frac{hdx}{ds}$, $Nl = \frac{h(dx + ddx)}{ds}$; donc $MN = ds - \frac{hdx}{ds}$, & $Nm = ds + \frac{h(dx + ddx)}{ds}$. Or (422) l'impulſion ſur Mo, produit dans le ſens de l'axe, un effort exprimé par $\frac{cydy^3}{ds^2}$, c étant la circonférence du cercle dont le rayon $= 1$; donc l'impulſion ſur om, ſera $\frac{c(y + dy)(dy + ddy)^3}{ds^2}$; & l'impulſion totale ſur Mom ſera $\frac{cydy^3 + c(y + dy)(dy + ddy)^3}{ds^2}$. Par la même raiſon, l'impulſion faite ſur MN ſera... $\frac{cydy^3}{\left(ds - \frac{hdx}{ds}\right)^2}$, ou (*Alg.* 157) en élevant le dénominateur à la puiſſance -2, & ne prenant que les deux premiers termes de la ſérie, parce que h eſt infiniment petite, l'impulſion ſera $\frac{cydy^3}{ds^2} + \frac{2chydy^3dx}{ds^4}$. Pareillement l'impulſion faite ſur Nm ſera $\frac{c(y + dy)(dy + ddy)^3}{\left(ds + h\frac{(dx + ddx)}{ds}\right)^2}$ ou $\frac{c(y + dy)(dy + ddy)^3}{ds^2} - \frac{2hc(y + dy)(dy + ddy)^3}{ds^4} \times (dx + ddx)$; en ſorte que l'impulſion totale faite ſur MNm, ſera $\frac{cydy^3}{ds^2} +$

$\frac{2chydy^3dx}{ds^4} + \frac{c(y+dy)(dy+ddy)^3}{ds^2} - \frac{2ch(y+dy)(dy+ddy)^3}{ds^4} \times$ $(dx+ddx)$; donc la différence des impulsions faites sur MNm & sur Mom, sera $\frac{2chydy^3dx}{ds^4} - \frac{2ch(y+dy)(dy+ddy)^3}{ds^4} \times$ $(dx+ddx)$, dont la seconde partie n'est autre chose (au signe près) que la premiere dans laquelle on auroit mis $y+dy$ au lieu de y, $dy+ddy$ au lieu de dy, & $dx+ddx$ au lieu de dx; la différence des impulsions est donc $\frac{2chd(ydy^3dx)}{ds^4}$, laquelle doit être égale à zéro. On a donc $\frac{d(ydy^3dx)}{ds^4}=0$, & en intégrant $\frac{ydy^3dx}{ds^4}=C$, ou $ydy^3dx = Cds^4 = C(dx^2+dy^2)^2$, équation dans laquelle faisant $dx=pdy$, on aura $y = \frac{(Cp^2+1)^2}{p}$; donc $dx = Cpd\frac{(p^2+1)^2}{p}$; quantité qui s'intègre en partie algébriquement, & en partie par logarithmes. Ayant x & y en p, il sera facile de construire la courbe.

Si la masse n'est pas constante; alors si on nomme i l'impulsion, & m la masse; il faut que $d\left(\frac{i}{m}\right)$ ou $\frac{mdi-idm}{mm}=0$; ou bien, $\frac{di}{dm}=\frac{i}{m}$; c'est-à-dire, que si l'on passe du solide engendré par Mom, au solide engendré par MNm, l'impulsion augmente comme la masse; donc le rapport $\frac{i}{m}$ est un rapport constant. Donc $\frac{di}{dm}$ doit être égal à une constante k; ainsi on a $\frac{di}{dm}=k$. Nous venons de trouver la valeur de di, il ne s'agit donc plus que d'avoir la valeur de dm; c'est-à-dire, la différence des accroissements des deux solides, ou le petit solide engendré par $MOmNM$. Or il est facile de trouver que ce petit solide a pour expression $chydy$; on aura donc $\frac{2chd\left(\frac{ydy^3dx}{ds^4}\right)}{chydy}=k$, ou $2d\left(\frac{ydy^3dx}{ds^4}\right)=kydy$; d'où l'on tire $\frac{ydy^3dx}{ds^4} = C + \frac{ky^2}{2}$; équation dans laquelle faisant $dx = pdy$, comme dans le cas précédent, on aura y en p; & par conséquent x en p; ce qui donnera le moyen de construire la courbe.

De ces deux solutions, la premiere est celle qui peut regarder le navire arrivé à l'état d'uniformité. En effet, si on appelle I, l'impulsion du vent sur les voiles, i l'impulsion de l'eau sur la proue, & M la masse du navire, on a généralement $\frac{I-i}{M} = \frac{du}{dt}$. Donc pour que $\frac{du}{dt}$ soit un maximum, il faut que $d\left(\frac{I-i}{M}\right) = 0$; c'est-à-dire, que $\frac{dI-di}{M} - \frac{(I-i)dM}{MM} = 0$. Mais lorsque le navire est arrivé à l'uniformité, on a $I - i = 0$; on a donc $\frac{dI-di}{M} = 0$, $dI = di$; mais la vîtesse du vent, son obliquité sur les voiles, & la surface des voiles restant les mêmes, dI aura pour facteur la quantité du qui est ici zéro ; donc $dI = 0$, donc l'équation qui satisfait à la question actuelle pour le navire arrivé à l'uniformité, est $di = 0$.

Du Mouvement rectiligne des corps, dans les milieux résistants.

429. ON voit, par ce qui précede, qu'un corps mu dans un espace ou milieu résistant, en vertu d'une impulsion primitive, perd continuellement de sa vîtesse, & peut même décrire une ligne courbe, si sa figure est telle que les effets de la résistance, de part & d'autre de la direction de son mouvement ne se détruisent point. Nous ne considérerons, pour le présent, que le mouvement qui a lieu, lorsque ces effets se détruisent ; c'est-à-dire, que nous supposerons que le corps n'éprouve de changement que dans sa vîtesse.

Cela posé, puisqu'on peut toujours trouver une surface plane qui étant exposée au choc d'un fluide, éprouve le même choc que la surface d'un corps quelconque mu dans ce même fluide, nous supposerons cette surface connue & représentée par s. Alors si u marque la vîtesse actuelle de ce corps, la résistance qu'il éprouve, sera (404) exprimée par $nDsu^2dt$; c'est la quantité de mouvement que ce corps perd à chaque instant. Donc si M est la masse de ce corps $\frac{nDsu^2dt}{M}$ sera (189) la vîtesse qu'il perd : on aura donc $\frac{nDsu^2dt}{M} = -du$, pour l'équation qui sert à déterminer les circonstances du mouvement d'un corps, sans pesanteur, dans un milieu résistant. Cette équation donne $-\frac{du}{u^2} = \frac{nDsdt}{M}$, & en intégrant, $C + \frac{1}{u} = \frac{ndst}{M}$.

Si V marque la vîtesse que le corps a reçu au commencement du mouvement, il faudra que la constante C soit telle que lorsqu'on supposera $t = 0$, on ait $u = V$. Donc $C + \frac{1}{V} = 0$, & par conséquent $C = \frac{-1}{V}$. Donc enfin $\frac{1}{u} - \frac{1}{V} = \frac{nDst}{M}$; équation qui donnera la vîtesse au bout d'un temps quelconque t.

430. Si l'on veut savoir quel est l'espace décrit au bout d'un temps quelconque t; en nommant x cet espace, on aura $dx = udt$, (210). Tirant donc de l'équation précédente, la valeur de u, & la substituant dans celle-ci, on aura . . . $dx = \frac{MVdt}{M + nDsVt}$, dont l'intégrale (124) est . . . $x = C' + \frac{M}{nDs} l(M + nDsVt)$. Or puisque x est l'espace décrit pendant le temps t, la constante C' doit être telle que $x = 0$, lorsque $t = 0$. On a donc $0 = C' + \frac{M}{nDs} lM$, & par conséquent $C' = -\frac{M}{nDs} lM$; donc $x = \frac{M}{nDs} l(M + nDsVt) - \frac{M}{nDS} lM$; c'est-à-dire, $x = \frac{M}{nDs} l(1 + \frac{nDsV}{M} t)$.

On peut arriver au même résultat, par plusieurs autres voies. Par exemple, si on compare l'équation $\frac{nDsu^2}{M} dt = -du$ à l'équation $p\,dt = -du$ que nous avons donnée (211) pour les mouvements variés ; on voit qu'ici la force retardatrice p, a pour expression $\frac{nDsu^2}{M}$. Substituant cette valeur dans l'équation $p\,dt = -d\left(\frac{de}{dt}\right)$ que nous avons donnée (215) on a $\frac{nDsu^2}{M}dt = -d\left(\frac{de}{dt}\right)$, ou (à cause que nous avons nommé x l'espace parcouru) $\frac{nDsu^2}{M}dt = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Mais puisque $u = \frac{dx}{dt}$, cette équation se change en celle-ci $\frac{nDs}{M}\frac{dx^2}{dt^2}dt = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, d'où l'on tire $\frac{nDs}{M}dt = -\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$, & en intégrant, $\frac{nDst}{M} = C + \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$. Or $\frac{dx}{dt}$ étant l'expression de la vîtesse, il faut que lorsque $t = 0$, on ait $\frac{dx}{dt} = V$, V étant la vîtesse initiale ; donc $C = -\frac{1}{V}$; donc $\frac{nDs}{M}t = \frac{-1}{V} + \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$, ou $dx = \frac{MVdt}{M + nDsVt}$, équation qui étant intégrée, donne le même résultat que ci-dessus.

431. Voyons maintenant, le mouvement rectiligne des corps pesants, dans les milieux résistants.

Soit M la masse du corps, D' sa densité ; p la vîtesse que la pesanteur donne, dans la premiere seconde, à un corps libre ; $p\,dt$ sera la vîtesse qu'elle donne dans un instant dt ; & $Mp\,dt$ sera la quantité de mouvement que le corps auroit, s'il étoit libre. Mais cette quantité de mouvement est diminuée par deux causes ; la premiere est (343) qu'il perd une partie de son poids, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace ; & la seconde, est la résistance provenante de l'inertie du fluide. La quantité de mouvement perdue en vertu de cette derniere, est $nDsu^2dt$. A l'égard de celle qui est perdue par la premiere cause, pour la trouver, il faut déterminer la masse du volume de fluide que le corps déplace, ce qui est facile, puisqu'à volume égal, les masses sont comme les densités (191). On a donc $D' : D :: M$ est à la masse du fluide déplacé, laquelle sera donc $\frac{MD}{D'}$. Donc la quantité de mouvement que cette masse auroit en vertu de la pesanteur, est $\frac{MD}{D'}pdt$; ainsi la quantité de mouvement que le corps acquérera réellement, à chaque instant, en descendant, sera $\left(M - \frac{MD}{D'}\right)pdt - nDsu^2dt$; & celle qu'il perdra, en montant, sera $\left(M - \frac{MD}{D'}\right)pdt + nDsu^2dt$. Donc l'accroissement de sa vîtesse sera . . . $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)pdt - \frac{nDsu^2}{M}dt$, dans le premier cas; & la diminution, en montant, sera $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)pdt + \frac{nDsu^2}{M}dt$.

Ainsi, pour la descente, on aura $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)pdt - \frac{nDsu^2}{M}dt = du$; & pour la montée, $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)pdt + \frac{nDsu^2}{M}dt = -du$.

432. Traitons d'abord le premier cas. Nommons x l'espace parcouru. Nous aurons $u = \frac{dx}{dt}$, & $du = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$; ce qui étant substitué dans l'équation qui convient à ce cas, la change en $\left[\left(1 - \frac{D}{D'}\right)p - \frac{nDsdx^2}{Mdt^2}\right]dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Faisons, pour simplifier, $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)p = g$; & $\frac{nDs}{M} = gk^2$, nous aurons $\left(g - gk^2\frac{dx^2}{dt^2}\right)dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, d'où l'on tire $gdt = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{1 - \frac{k^2dx^2}{dt^2}}$ que l'on peut (136) changer en . . .

$gdt =$

$g\,dt = \dfrac{\frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{1+k\frac{dx}{dt}} + \dfrac{\frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{1-k\frac{dx}{dt}}$, équation dont l'intégrale est $gt = C + \frac{1}{2k}\,l\left(1+k\frac{dx}{dt}\right) - \frac{1}{2k}\,l\left(1-k\frac{dx}{dt}\right)$, ou $gt = C + \frac{1}{2k}\,l\,\dfrac{1+k\frac{dx}{dt}}{1-k\frac{dx}{dt}}$. Or si l'on suppose qu'au commencement du mouvement, on n'ait donné aucune impulsion au corps, il faut que $\frac{dx}{dt}$ qui exprime la vîtesse, soit zéro lorsque $t=0$; on a donc $0 = C + \frac{1}{2k}\,l\,\frac{1}{1}$, d'où l'on tire $C=0$. Donc $gt = \frac{1}{2k}\,l\,\dfrac{1+k\frac{dx}{dt}}{1-k\frac{dx}{dt}}$ ou $2gkt = l\,\dfrac{1+k\frac{dx}{dt}}{1-k\frac{dx}{dt}}$. Donc (157) en nommant e le nombre dont le logarithme est 1, on aura $\dfrac{1+k\frac{dx}{dt}}{1-k\frac{dx}{dt}} = e^{2gkt}$, d'où l'on tire $dx = \frac{dt}{k} \times$

$$\frac{e^{2gkt}-1}{e^{2gkt}+1} = \frac{1}{k}\,\frac{dt\,e^{2gkt}}{e^{2gkt}+1} - \frac{1}{k}\,\frac{dt}{e^{2gkt}+1} = \frac{1}{k}\,\frac{dt\,e^{2gkt}}{e^{2gkt}+1} - \frac{1}{k}\,\frac{dt\,e^{-2gkt}}{1+e^{-2gkt}}$$

dont l'intégrale (124 & 147) est . . . .

$$x = \frac{1}{2gkk}\,l(e^{2gkt}+1) + \frac{1}{2gkk}\,l(1+e^{-2gkt}) + C'$$

qui se réduit à $2gkkx = l(e^{2gkt}+1)\left(\frac{e^{2gkt}+1}{e^{2gkt}}\right) + C'$

F

ou $2gkkx = 2l\frac{e^{2gkt}+1}{e^{gkt}} + C'$, ou enfin . . . . . . ,

$gkkx = l\frac{e^{2gkt}+1}{e^{gkt}} + \frac{C'}{2}$, équation qui donnera l'espace x décrit au bout d'un temps quelconque t, lorsque nous aurons déterminé la constante C'. Or cette constante C' doit être telle que lorsque $t = 0$, on ait $x = 0$; donc $0 = l\frac{1+1}{1} + \frac{C'}{2}$; donc $C' = -2l2$; donc $gkkx = l\frac{e^{2gkt}+1}{2e^{gkt}}$.

433. A l'égard de la vîtesse ; puisque nous avons trouvé ci-dessus $dx = \frac{dt}{k}\frac{e^{2gkt}-1}{e^{2gkt}+1}$, & que $\frac{dx}{dt}$ est l'expression de la vîtesse u, on a donc $u = \frac{1}{k}\frac{e^{2gkt}-1}{e^{2gkt}+1}$ qui donne la vîtesse, au bout d'un temps quelconque t.

434. Pour ramener ces expressions à des choses connues; il faut remarquer que e^{gkt} est le nombre dont le logarithme hyperbolique est gkt ; ainsi, quand on aura trouvé la valeur de gkt, on la multipliera par 0, 43429448 pour avoir la correspondante des tables, laquelle fera connoître le nombre ; c'est-à-dire, e^{gkt}; quarrant ce nombre, on aura e^{2gkt}, d'où il sera facile d'avoir $\frac{e^{2gkt}+1}{2e^{gkt}}$; & par conséquent x, puisque $x = \frac{1}{gk^2}l\frac{e^{2gkt}+1}{2e^{gkt}}$; mais il faudra observer qu'après avoir pris ce dernier logarithme dans les tables, il faudra le multiplier par 2, 30255809.

435. Nous prendrons pour appliquer cette théorie, une des expériences faites par M. *Newton*, au mois de Juin 1710.

M. Newton trouva par expérience qu'un Globe de verre rempli d'air, de 4, 6932 pouces de diamètre, & du poids de 1$^{\text{once}}$, 0219 dans l'air, (ces mesures & ces poids sont réduites à la mesure de Paris) étoit tombé de 206$^{\text{pieds}}$, 5 de hauteur en 8$''$ $\frac{1}{5}$ de temps. Voyons donc si, dans 8$''$ $\frac{1}{5}$, un corps pesant doit, en vertu de la résistance de l'air, ne décrire que 206$^{\text{pieds}}$, 5. Déterminons d'abord la quantité que nous avons nommée g & qui est $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) p$.

Un Globe de 4, 6932 pouces, ou de 0, 3911 de pied de diamètre, à 0, 03134 de pied cube de solidité; le pied cube d'air pesant la 850^{e} partie d'un pied cube d'eau commune, c'est-à-dire, la 850^{e} partie de 70 livres ou de 1120 onces, pese donc $\frac{1120}{850}$ ou $\frac{112}{85}$ d'once; donc un globe d'air de même diamètre que celui de l'expérience, pese 0, 0413 d'once; donc puisque le globe de l'expérience a dû perdre dans l'air une partie de son poids égale au poids du volume d'air qu'il a déplacé, il s'ensuit que dans le vuide, il auroit pesé 1$^{\text{once}}$, 0632; ainsi $M = 1$, 0632. D'ailleurs, à volume égal, les densités étant comme les masses ou comme les poids, on a $D' : D :: 1, 0632 : 0, 0413$ ou $:: 10632 : 413$; donc $\frac{D}{D'} = \frac{413}{10632} = 0, 0288$; donc $g = (1 - 0{,}0388) \times 30, 2 = 0, 9612 \times 30, 2 = 29{,}03$.

Calculons présentement la valeur de gk^2 qui est $gk^2 = \frac{nDS}{M}$.

Observons d'abord que nD que nous avons (404) représenté par $n'D'$, vaut $\frac{23p}{576}$; mais comme cette valeur paroît, d'après l'expérience, être celle qui convient à la température de l'hiver, & que de cette température à celle de l'été ou du mois de Juin où l'expérience a été faite, l'air se dilate d'un septieme, & que sa résistance diminue par conséquent de $\frac{1}{7}$, nous ne devons prendre pour valeur de nD que la quantité $\frac{23p}{576} \times \frac{6}{7}$; ainsi nous aurons $nD = \frac{23 \times 30{,}2}{576} \times \frac{6}{7} = 1{,}03$.

A l'égard de S; selon ce qui a été dit (422); elle est la moitié du grand cercle du Globe; mais *M. le Chevalier de*

Borda a trouvé par expérience que la résistance de la sphère est moindre que la moitié de celle de son grand cercle, & qu'elle n'en est que la partie $\frac{1}{2,44}$; puis donc que la surface du grand cercle du Globe, dont il s'agit, est de 0, 12019 de pied quarré, la surface S sera $S = 0, 0492$; ainsi $\frac{n L' S}{M}$ ou $g k^2 = 0, 0,476$.

Cela posé, puisqu'on a $g = 2,903$, on aura donc $k^2 = 0, 0016397$, & par conséquent $k = 0, 040498$; donc puisque $t = 8'' \frac{1}{5}$, $gkt = 9, 6392$; multipliant donc par 0, 43429448, nous aurons 4,1862513 pour le logarithme de e^{gkt} pris dans les tables; donc $e^{gkt} = 15355$; & par conséquent $e^{2gkt} = \overline{15355}^2$; d'où $\frac{e^{2gkt}+1}{2e^{gkt}} = 7677$ à peu près. Son logarithme pris dans les tables est 3, 8851915; multipliant donc par 2,3025851, on aura $x = \frac{8,9459838}{gk^2} = \frac{8,9459838}{0,0476} = 187, 9$. Or l'expérience a donné 206, 5; la différence est 18, 6 pieds. Il paroît donc que la mesure que nous avons prise pour la résistance de l'air, est ici un peu trop forte. Quoi qu'il en soit, dans le même temps, c'est-à-dire, en $8'' \frac{1}{5}$, ce même Globe, sans la résistance de l'air auroit dû tomber de 1008 pieds.

436. Si dans l'équation $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p dt - \frac{n D s u^2}{M} dt = du$ que nous avons trouvée ci-dessus, on suppose $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p dt - \frac{n D s u^2}{M} dt = 0$; on aura $du = 0$; c'est-à-dire, que le corps cessera de s'accélérer; son mouvement deviendra donc uniforme. Or cette équation donne $\left(M - \frac{MD}{D'}\right) p dt = n D s u^2 dt$, dans laquelle le premier membre exprime le poids du corps dans le fluide, & le second exprime la résistance; le mouvement deviendra donc uniforme, quand la résistance sera devenue égale au poids du corps dans le fluide.

437. S'il n'y avoit pas d'autre résistance que celle qui vient de l'inertie du fluide, les corps pesants n'arriveroient à cet état d'uniformité qu'au bout d'un temps infini : c'est ce qu'il est facile de voir, en différenciant l'équation $u = \frac{1}{k} \frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$; on verra que du ne peut être zéro, qu'en supposant t infini. Mais les parties des fluides opposent une autre sorte de résistance, qui vient de leur adhérence entre-elles : & quoique cette résistance soit beaucoup plus petite que la premiere, elle suffit cependant pour amener bientôt le mouvement à l'uniformité.

En effet, l'équation $dx = \frac{dt}{k} \frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$ fait voir qu'au bout d'un intervalle de temps médiocre, les accroissements des espaces approchent de plus en plus, d'être proportionnels aux accroissements du temps ; parce que la fraction $\frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$ approche sans cesse de l'unité. Donc il ne faut ajouter qu'une médiocre résistance pour ramener le mouvement à l'uniformité.

438. Passons au mouvement du corps lorsqu'il monte.

L'équation $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p\,dt + \frac{nDsu^2}{M} dt = -du$ qui convient à ce cas, se change en $\left(g + gk^2 \frac{dx^2}{dt^2}\right) dt = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, en appellant x l'espace parcouru, & faisant les mêmes substitutions que dans le cas précédent.

Cette équation donne $g\,dt = -\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{1 + k^2 \frac{dx^2}{dt^2}}$; ou, en multipliant chaque membre par k, $gk\,dt = -\frac{d\left(\frac{kdx}{dt}\right)}{1 + \frac{k^2dx^2}{dt^2}}$.

Or le second membre (111) est l'élément d'un arc de cercle dont le rayon eſt 1, & dont la tangente eſt $\frac{k\,dx}{dt}$; on a donc $\frac{k\,dx}{dt} = C - tang\,gkt$.

Pour déterminer la conſtante C, on obſervera que lorſque $t = 0$, la vîteſſe, ou $\frac{dx}{dt}$ doit être égale à la vîteſſe initiale que je repréſente par m. Donc $km = C$; donc $\frac{k\,dx}{dt} = km - tang\,gkt$; donc $dx = m\,dt - \frac{dt}{k}\,tang\,gkt = m\,dt - \frac{dt\,fin\,gkt}{k\,cof\,gkt}$, équation dont l'intégrale eſt. . . . . $x = mt + \frac{1}{gk^2}\,l\,cof\,gkt$, à laquelle il n'y a point de conſtante à ajouter, parce que lorſque $t = 0$, elle donne $x = 0$, ainſi que cela doit être. C'eſt par cette équation qu'on déterminera à quelle hauteur le corps eſt arrivé après un temps donné t.

439. A l'égard de la vîteſſe u; puiſqu'elle eſt égale à $\frac{dx}{dt}$, l'équation $\frac{k\,dx}{dt} = km - tang\,gkt$ donnera. . . . . . $u = m - \frac{1}{k}\,tang\,gkt$. Donc pour déterminer au bout de quel temps le corps ceſſera de monter, on aura . . . . . $m - \frac{1}{k}\,tang\,gkt = 0$ ou $tang\,gkt = km$; d'où il ſera facile de connoître gkt, & par conſéquent t; lequel étant une fois connu & ſubſtitué dans l'équation qui donne la valeur de x, fera connoître à quelle hauteur le corps peut monter avec une vîteſſe donnée m.

440. Remarquons, en terminant cette matiere, que ſi la réſiſtance au lieu d'être proportionnelle au quarré de la vîteſſe, étoit proportionnelle à une fonction quelconque de la vîteſſe, on pourroit toujours trouver la relation de l'eſpace au temps, & de la vîteſſe au temps, ſoit par intégration immédiate, ſoit par les quadratures. Car ſi la réſiſtance étoit proportionnelle à une fonction de la vîteſſe, repréſentée par $F(u)$, on auroit $dt\,F(u) = \pm du$; c'eſt-à-dire, $dt = \pm \frac{du}{F(u)}$ équation toute ſéparée & réduite aux premieres différences;

u étant trouvé, on aura aisément x, au moyen de l'équation $dx = u\,dt$.

De la vîtesse que prend le Navire par l'action du vent.

441. Le navire ne prend que successivement la vîtesse avec laquelle il se meut au bout d'un certain temps : son mouvement s'accélere par les impulsions successives du vent ; mais cette accélération a un terme, passé lequel, le navire se meut uniformément ; c'est cette derniere vîtesse dont nous voulons déterminer le rapport avec celle du vent.

Pour y parvenir, nous observerons que tout ce qui précede, suppose que l'un des deux, le fluide, ou le corps que nous avons considéré, est en repos. Ainsi, le choc d'un fluide qui (toutes choses d'ailleurs égales) est proportionnel au quarré de la vîtesse du fluide lorsqu'il rencontre un corps en repos, n'est plus proportionnel au quarré de la vîtesse absolue du fluide, lorsque le corps se meut ; mais seulement au quarré de la vîtesse avec laquelle le fluide atteint ce corps.

Pour trouver cette vîtesse, il faut en général concevoir la vîtesse du fluide, décomposée en deux autres, dont l'une soit égale à celle du corps & de même direction ; la seconde sera celle dont le quarré doit être employé dans la mesure de l'impulsion ; car il est évident qu'en vertu de la premiere, le fluide n'auroit aucune action sur le corps.

442. Cela posé, concevons d'abord que le vaisseau suit la route directe ; & réduisons, par la pensée, la totalité des parties des voiles qui portent, à une seule voile dont *S* représente la surface. Soit *XAC* (*Fig.* 25) la direction du vent que nous supposons se mouvoir horisontalement ; *AC* sa vîtesse ; *AD* celle du navire. Si l'on tire *CD*, & que par le point *A*, on mène *AE* parallele à *CD*; & par le point *C*, *CE* parallele à *AD*; au lieu de concevoir que le vent vient suivant *AC*, on pourra supposer qu'il a, tout à la fois, suivant *AD*, & *AE*, les deux vîtesses *AD*, *AE*. Or la vîtesse *AD* étant égale à celle du navire, il est évident qu'en vertu de cette vîtesse, le vent ne peut avoir aucune action sur la voile *PQ*. C'est donc en vertu de la vîtesse *AE*, & suivant la direction *AE*, que le vent agit réellement sur la voile ; ensorte que, pour le dire en passant, c'est réellement suivant *AE* que le vent se fait sentir à ceux qui sont

dans le vaiſſeau ; *AE* eſt la direction que prennent les *girouettes*.

Lorſque le vaiſſeau n'eſt pas encore arrivé à l'état d'uniformité, la vîteſſe *AD* allant en augmentant, tandis que la vîteſſe abſolue *AC* du vent, & l'angle *CAD* qu'il fait avec la quille, reſtent les mêmes, le parallélogramme *CDAE*, varie continuellement : à meſure que *AD* croît, *CD* ou la vîteſſe relative *AE* du vent diminue ; & l'angle *DCA*, ou ſon égal *CAE* augmente, en ſorte que l'angle *EAP*, ou ſon égal *QAT*, que la direction *apparente* du vent fait avec la voile, diminue continuellement. Mais lorſque le vaiſſeau eſt arrivé à l'état d'uniformité ; *AD* ne changeant plus, la vîteſſe *AE* & l'angle *EAP* reſtent conſtamment les mêmes. Alors l'effet de la vîteſſe relative *AE* du vent, eſt de lutter contre la réſiſtance de l'eau ſeulement.

Nous pouvons donc conſidérer le vaiſſeau comme ſi étant en repos, la voile étoit frappée par le vent, ſuivant *TAE*, avec la vîteſſe *AE*. Or nous avons vu (404 & 405) qu'en général l'impulſion eſt $n'D'S'V^2 dt\, \sin^2 t$; donc ici, elle ſera $n'\, D'\, S'\, dt \times \overline{AE}^2 \times \sin^2 PAE$. Puiſque *PAE*, qu'on appelle l'angle d'incidence apparente, eſt véritablement l'angle ſous lequel s'exerce l'action du vent. Voyons donc quelle eſt la valeur de $AE \times$ *ſin* PAE.

Nommons a l'angle XAQ ou CAP que la direction réelle du vent fait avec la voile qui dans la route directe eſt perpendiculaire à la quille. Menons DI parallele à PQ; & nommons AC, V; & AD, u. Dans le triangle DAI, nous aurons *ſin* AID ou $QAX : AD ::$ *ſin* ADI ou $1 : AI$; d'où l'on tire $AI = \frac{u}{\text{ſin } a}$. Donc $CI = V - \frac{u}{\text{ſin } a}$. Or, dans le triangle CID, on a $CI : CD$ ou $AE ::$ *ſin* CDI, ou *ſin* PAE : *ſin* CID ou *ſin* DIA; donc $AE \times$ *ſin* $PAE = CI \times$ *ſin* $DIA = \left(V - \frac{u}{\text{ſin } a}\right) \times$ *ſin* $a = V$ *ſin* $a - u$; donc l'impulſion $n'D'S'dt \times AE \times$ *ſin*^{2} PAE, ſe change en $n'D'S'dt \times (V \text{ ſin } a - u)^2$.

Mais, en nommant A la ſurface qui étant expoſée directement au choc de l'eau recevroit le même choc que la proue, on a $nDAu^2 dt$ pour la valeur de ce choc; u, D, ayant les mêmes ſignifications qu'au n° (404). Or puiſque le vaiſſeau eſt ſuppoſé arrivé à l'uniformité, il faut que l'impulſion du vent ſoit égale à la réſiſtance de l'eau. On a donc $n'D'S'dt\,(V \text{ ſin } a - u)^2 = nDAu^2 dt$. Nous avons déterminé (404) le rapport nD à $n'D'$; repréſentons en général, ce rapport par celui de q à 1 ; alors nous aurons $S'(V \sin a - u)^2 = qAu^2$, ou $u\sqrt{qA} = (V \sin a - u)\sqrt{S'}$; donc $u = \frac{V \sin a \sqrt{S'}}{\sqrt{qA} + \sqrt{S'}}$. D'où l'on voit que dans la route directe, la vîtesse est proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence réelle du vent sur la voile.

443. L'équation $u\sqrt{qA} = (V \sin a - u)\sqrt{S'}$, donne $\sqrt{S'} = \frac{u\sqrt{qA}}{V \sin a - u}$, qui, lorsque le navire va vent en poupe, se réduit à $\sqrt{S'} = \frac{u\sqrt{qA}}{V-u}$, ou $S' = \frac{qAu^2}{(V-u)^2}$. Donc pour une autre voilure S'', si V' & u' marquent les vîtesses du vent & du navire, on a $S'' = \frac{qAu'^2}{(V'-u')^2}$; donc $S' : S'' :: \frac{u^2}{(V-u)^2} : \frac{u'^2}{(V'-u')^2}$. C'est-à-dire, que *les surfaces des voiles, doivent être comme les quarrés des vîtesses absolues du navire, divisées par les quarrés des vitesses respectives* ; car alors $V - u$, & $V' - u'$ marquent les vîtesses respectives.

Ainsi, si un navire dont la voilure est S' prend le $\frac{1}{3}$ de la vîtesse du vent, dans la route directe ; pour qu'il puisse prendre les $\frac{2}{3}$, il faut que sa voilure soit 16 fois plus grande.

444. Supposons, à présent, que la voile PQ fait avec la quille, un angle quelconque (*Fig.* 26 & 27). XA est la direction du vent dont AC marque la vîtesse V ; AD la route & la vîtesse u du navire. Dans la *Fig.* 27, le vaisseau va

au plus près ou *à la bouline ;* c'est-à-dire, que sa route AZ faisant un angle aigu avec la direction du vent, il s'approche, dans son mouvement, de l'origine X du vent.

Décomposant encore la vitesse AC du vent, en deux autres AD, AE, *Fig.* 26 & 27, dont l'une AD soit égale à celle du navire, nous aurons AE pour la vitesse relative; pour celle avec laquelle se fait l'impulsion ; &, en prolongeant AE en T, QAT, égal à PAE sera l'angle d'incidence apparent, celui qui doit entrer dans la mesure de l'impulsion.

Ainsi nous aurons $n' D' S' dt \times \overline{AE} \sin^2 PAE$ pour la mesure de cette impulsion.

Soit x l'angle DAO de la dérive ; a, l'angle XAQ que le vent fait avec la voile ; b, l'angle PAR ou OAQ que la voile fait avec la quille OR. Si on prolonge la route DA, vers S, on aura $b + x$ pour l'angle PAS que la route fait avec la voile. Menons DI parallele à la voile ; & dans le triangle AID nous aurons $\sin DIA$ ou $\sin QAX : ID ::$ $\sin ADI$ ou $\sin PAS : AI$; donc $AI = \frac{u \sin(b+x)}{\sin a}$, & par conséquent $CI = V - \frac{u \sin(b+x)}{\sin a}$. Or dans le triangle CID, on a $CI : CD :: \sin CDI$ ou $\sin PAE : \sin DIC$ ou $\sin DIA$ ou $\sin QAX$; donc $CD \sin PAE = CI \times \sin QAX =$ $\left(V - \frac{u \sin(b+x)}{\sin a}\right) \times \sin a = V \sin a - u \sin(b+x)$. Donc l'impulsion est $n' D' S' dt \times [V \sin a - u \sin(b+x)]^2$.

Soit A' la surface qui exposée au choc direct de l'eau éprouveroit la même résistance que le navire éprouve actuellement, dans le sens de la quille ; B' la surface qui détermine pareillement l'impulsion latérale, Si l'on suppose que AF, AG (*Fig* 28) représentent ces impulsions ; en formant le parallélogramme $GAFH$, la diagonale AH sera la direction de la résistance absolue de l'eau : & il faudra pour que le navire soit maintenu dans la route AZ, que l'effort dirigé suivant AH soit détruit par l'impulsion du vent ; c'est-à-dire, qu'il soit perpendiculaire à la voile PQ & qu'il soit égal à l'impulsion du vent que nous venons de déterminer. Or puisque $AF : AG$ ou $FH :: A' : B'$, on a $FH = \frac{AF \times B'}{A'}$.

Donc AH qui est $\sqrt{\overline{FH}^2 + \overline{FH}^2}$, sera $= \frac{AF}{A'} \sqrt{A'A' + B'B'}$.
Mais la force suivant AF, doit être à la force suivant $AH :: AF : AH$; donc puisque la force suivant AF, a pour valeur $n D A' u^2 dt$; on aura la force suivant $AH = nDu^2dt \sqrt{A'A'+B'B'}$. Donc 1°. $nDu^2dt \sqrt{A'A' + B'B'} = n'D'S'dt [V \sin a - u \sin (b+x)]^2$, ou en représentant le rapport de $n'D'$ à nD, par celui de 1 à q, & la surface $\sqrt{A'A' + B'B'}$ par S, $qSu^2 = S' [V \sin a - u \sin (b+x)]^2$.
2°. Et puisque AH doit être perpendiculaire a PQ, l'angle FAH doit être complément de RAP ou de b; or dans le triangle AFH, on a $AF : FH :: 1 : tang. FAH$, c'est-à dire, $A' : B' :: 1 : cot\ b$; donc $B' = A' \cot b$. Ce sont-là les deux équations qui déterminent généralement le mouvement du navire, en supposant qu'on ait l'expression générale de A' & de B' qui dépendent des dimensions principales du navire & de la dérive; & que l'on peut toujours déterminer lorsque la nature des coupes du navire peut être exprimée par des équations. Dans le cas contraire, on détermine A' & B' par des moyens approchés, & que l'on peut toujours trouver d'après ce que nous avons dit (424 & *suiv.*).

445. L'équation $qSu^2 = S' [V \sin a - u \sin (b+x)]^2$, donne $u = \frac{V \sin a \sqrt{S'}}{\sqrt{qS} + \sin(b+x)\sqrt{S'}}$. Si l'on suppose que l'angle x de la dérive, soit nul; il est clair qu'alors $B' = 0$. Et l'équation $B' = A' \cot b$, fait voir que $b = 90°$. De plus, la surface S se réduit à A' qui n'est alors que ce que (442) nous avons appellé A; on a donc, en nommant u' la vîtesse du navire, dans ce cas, $u' = \frac{V \sin a \sqrt{S'}}{\sqrt{qA} + \sqrt{S'}}$, la même que nous avons trouvée (442) pour ce même cas.

446. Si dans l'équation $u = \frac{V \sin a \sqrt{S'}}{\sqrt{qS} + \sin(b+x)\sqrt{S'}}$, on suppose que la surface S' de la voile, soit infinie, on aura $u = \frac{V \sin a}{\sin (b+x)}$.

M. Bouguer (*Traité du Navire*, *pag.* 450) conclut de cette expression, que lorsque la surface de la voile est infinie, la vîteſſe du navire peut, dans la route oblique, ſurpaſſer la vîteſſe du vent. Mais cette concluſion ſuppoſe que $\textit{ſin}\,(b+x)$ ſoit plus petit que $\textit{ſin}\ a$; ce qui ne peut avoir lieu dans le cas préſent. Car l'effort du vent, étant par la ſuppoſition, infini à l'égard de la réſiſtance de l'eau, le navire ne peut manquer de ſe mouvoir ſuivant une direction perpendiculaire à la voile, ce qui eſt très-facile à voir; or dans ce cas $b+x = 90°$, ce qui donne $u = V\,\textit{ſin}\ a$; valeur de u qui ne peut, même, être égale à V que lorſque le vent tombe perpendiculairement ſur la voile.

Mais ſi la concluſion de M. Bouguer n'eſt pas fondée, pour ce cas, il n'eſt pas moins vrai, ainſi que ce ſavant Géometre l'a remarqué, qu'il y a beaucoup de cas où la vîteſſe du navire dans la route oblique, peut ſurpaſſer celle qu'il auroit dans la route directe, & même celle du vent, quoiqu'avec une ſeule voile : en voici la démonſtration. Dans l'équation $u = \dfrac{V\,\textit{ſin}\,a\sqrt{S'}}{\sqrt{qS}+\textit{ſin}\,(b+x)\sqrt{S'}}$, pour que u devienne plus grande que V, il faut que $\textit{ſin}\ a\sqrt{S'}$ ſoit plus grand que $\sqrt{qS}+\textit{ſin}\,(b+x)\sqrt{S'}$; d'où il eſt aiſé de conclure que la poſſibilité du fait ſe réduit à ce que $\sqrt{S'}$ ſoit plus grand que $\dfrac{\sqrt{qS}}{\textit{ſin}\,a-\textit{ſin}\,(b+x)}$; c'eſt-à-dire, à donner à la voile une étendue plus grande que .... $\dfrac{qS}{[\textit{ſin}\,a-\textit{ſin}\,(b+x)]^2}$.

Mais il ſe préſente, ici, une difficulté qu'il eſt bon de lever. Si le navire, dira-t-on, peut prendre dans certaines routes, une vîteſſe plus grande que celle du vent, n'en prendra-t-il pas une plus grande encore, ſi l'on augmente la ſurface de la voile? Et ſi cela eſt ainſi, comment peut-on dire que lorſque la ſurface de la voile eſt augmentée à l'infini, la vîteſſe du navire ne peut être, tout au plus, qu'égale à celle du vent? Voici la réponſe.

Si l'on fait attention à l'état de la queſtion, & à l'expreſſion générale que nous avons trouvée pour la vîteſſe, on verra que comme la vîteſſe ne dépend pas ſeulement de la ſurface de la voile, il y a un terme d'augmentation pour cette ſurface, paſſé lequel, la vîteſſe après avoir augmenté, diminueroit. En effet, ſi après avoir déterminé la ſurface de la voile, propre pour une certaine vîtesse, vous venez à changer cette surface, vous troublez l'équilibre qui avoit d'abord lieu entre la résistance de l'eau & l'impulsion du vent. Vous faites changer la route &, par conséquent l'angle x de la dérive. Il n'est donc pas étonnant que la vîtesse puisse devenir moindre qu'elle n'étoit. Ainsi, lorsqu'en augmentant la surface de la voile jusqu'à l'infini, on trouve que la vîtesse n'est plus qu'égale à celle du vent, il ne s'ensuit pas que pour d'autres surfaces, cette vîtesse ne puisse surpasser celle du vent. Cela ne prouve autre chose, sinon qu'il y a une étendue de surface, propre à donner la plus grande vîtesse possible. Voici comment on peut déterminer ce *maximum*.

447. L'équation $B' = A' \cot b$, détermine b en x, parce que A' & B' sont des quantités dépendantes des dimensions principales du navire, & de la dérive x. Cela posé, dans l'équation $u = \frac{V \sin a \sqrt{S'}}{\sqrt{qS} + \sin(b+x)\sqrt{S'}}$, S & b doivent donc être regardés comme des fonctions connues de x. A l'égard de l'angle a, si l'on appelle f l'angle que le vent fait avec la quille, on a $a = 180° - f\ b$. Ainsi la position du navire à l'égard du vent, restant la même, u sera une fonction de x & de S'. Donc si après avoir substitué pour a, b & S leurs valeurs en x, on différencie l'expression de u, en regardant f, comme constante, & qu'on égale à zéro, cette différentielle; on aura l'équation qui exprime la condition du *maximum*. Alors égalant à zéro le coëfficient de dx & celui de dS' on aura deux équations qui avec les équations $B' = A' \cot b$, & $a = 180° - f - b$, détermineront la route, la position de la quille, la grandeur & la position de la voile, dans le cas de la plus grande vîtesse possible.

448. La *Fig.* 29 fait voir un de ces cas où le navire peut aller plus vîte que le vent. On voit qu'en supposant la vîtesse AD du navire plus grande que la vîtesse AC du vent, la vîtesse relative AE du vent s'exerce encore suivant une direction TAE telle que le vent peut encore avoir de l'action sur PQ; & que par conséquent, pour que le navire conserve cette vîtesse AD, il suffit que sa figure, l'étendue de la voile, la valeur de AE, & de l'angle TAQ soient tels qu'il puisse y avoir équilibre entre l'impulsion de l'eau &

celle du vent ſuivant TA ; équilibre dont la poſſibilité eſt évidente.

449. La vîteſſe du navire peut être plus grande, dans certaines routes obliques, que celle du vent, par une autre cauſe : c'eſt que dans la route oblique, lorſqu'il y a pluſieurs voiles, il y a une plus grande partie de voiles, qui porte ; du moins dans certaines obliquités. Voici comment on peut déterminer la vîteſſe eu égard à cette circonſtance.

Suppoſons pour plus de ſimplicité, qu'il n'y a que deux voiles, & qu'elles ſont également hautes : il ſera facile de voir comment on doit s'y prendre dans toute autre ſuppoſition. Soient AB, CD (*Fig.* 30) ces deux voiles ; EF la direction de la quille. L'angle CLF eſt celui que nous avons nommé b. Soit DH la direction relative du vent, qui eſt la même que celle de TA dans la *Fig.* 26. Nommons p l'angle DHB qui doit être plus petit que l'angle CAB, pour que la ſurface rencontrée par le vent, ſoit plus grande que dans la route directe. Soit k la diſtance LI des deux mâts. En abaiſſant les deux perpendiculaires IG, DQ, nous aurons, $IG = DQ = k\ \text{ſin}\ b$; $LG = k\ \text{coſ}\ b$. Soit $LD = m$; donc $GD = IQ = m - k\ \text{coſ}\ b$. Soit $IB = n$; donc $BQ = n - m + k\ \text{coſ}\ b$. Dans le triangle DQH on a $QH = \frac{k\ \text{ſin}\ b\ \text{coſ}\ p}{\text{ſin}\ p}$. Donc $BH = n - m + k\ \text{coſ}\ b + \frac{k\ \text{ſin}\ b\ \text{coſ}\ p}{\text{ſin}\ p}$. Donc $CD + BH = n + m + k\ \text{coſ}\ b + \frac{k\ \text{ſin}\ b\ \text{coſ}\ p}{\text{ſin}\ p}$. Donc enfin, en nommant h la hauteur commune des deux voiles, on a $(n + m)h + kh\ \text{coſ}\ b + \frac{kh\ \text{ſin}\ b\ \text{coſ}\ p}{\text{ſin}\ p}$ pour la valeur de ce que nous avons appellé S'.

Obſervons, maintenant, que l'angle p étant égal à l'angle TAV ou CDI de la *Fig.* 26, pour avoir la valeur de $\frac{\text{coſ}\ p}{\text{ſin}\ p}$, il faut avoir celle de $\frac{\text{coſ}\ CDI}{\text{ſin}\ CDI}$. Or en menant du point C, la ligne CV perpendiculaire ſur DI, on a $CV : DV :: \text{ſin}\ CDI : \text{coſ}\ CDI$,

donc

donc $\frac{cof\, CDI}{fin\, CDI} = \frac{DV}{CV}$; voyons donc quelle eſt la valeur de cette dernière quantité. Dans le triangle CIV, on a $CV = CI\, fin\, CIV = CI\, fin\, DIA$ & $IV = CI\, cof\, DIA$. Dans le triangle DIA, on a $DI = \frac{AD\, fin\, IAD}{fin\, DIA}$; donc $DV = CI\, cof\, DIA + \frac{AD\, fin\, IAD}{fin\, DIA}$; ou en mettant pour CI, AD, & DIA leurs valeurs trouvées ci-deſſus, & pour IAD ſa valeur $f\text{-}x$, on a $CV = V\, fin\, a - u\, fin\,(b+x)$, & $DV = \frac{V\, cof\, a\, fin\, a - u\, fin\,(b+x)\, cof\, a + u\, fin\,(f-x)}{fin\, a}$;

donc $\frac{DV}{CV}$ ou $\frac{cof\, p}{fin\, p} = \frac{V\, cof\, a\, fin\, a - u\, fin\,(b+x)\, cof\, a + u\, fin\,(f-x)}{fin\, a\,[V\, fin\, a - u\, fin\,(b+x)]}$

d'où, par les propriétés des ſinus, on conclura que $kh\, cof\, b + \frac{kh\, fin\, b\, cof\, p}{fin\, p} = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{kh\,[V\, fin\, a\, fin\,(a+b) - u\, fin\,(b+x)\, fin\,(a+b) + u\, fin\, b\, fin\,(f-x)]}{fin\, a\,[V\, fin\, a - u\, fin\,(b+x)]}$$

ſubſtituant donc au lieu de S', la valeur qui réſulte de ces opérations, la ſubſtituant, dis-je, dans l'équation $q\,S\,u^2 = S'\,[V\, fin\, a - n\, fin\,(b+x)]^2$ trouvée ci-deſſus, on aura $q\,S\,u^2 \times fin\, a = (n+m)\,[V\, fin\, a - n\, fin\,(b+x)]^2\, fin\, a + k\,h\,[V\, fin\, a\, fin\,(a+b) - u\, fin\,(b+x)\, fin\,(a+b) + u\, fin\, b\, fin\,(f-x)]\,[V\, fin\, a - u\, fin\,(b+x)]$, équation dans laquelle u ne monte qu'au ſecond degré.

450. Lorſqu'on a déterminé d'une maniere générale, comme nous venons de faire (445 & 449), l'expreſſion de la vîteſſe, on peut l'employer à réſoudre pluſieurs queſtions importantes.

Par exemple, veut-on déterminer la poſition la plus avantageuſe des voiles & du vaiſſeau, par rapport au vent, pour ſuivre une route propoſée? On différenciera l'expreſſion de la vîteſſe, en regardant a, b & x comme variables, & on égalera la différentielle à zéro; puiſque la vîteſſe doit être un *maximum.* Enſuite par le moyen de l'équation $B' = A'\, cot\, b$ on aura la valeur de b & de db, en x & dx. A l'égard de a, ſi l'on nomme p l'angle que la route AD (*Fig.* 26) doit faire avec la direction AX du vent, on aura $p = a + b + x$, & puiſque p eſt conſtant, $o = da + db + dx$.

Subſtituant pour, a, b, da, & db leurs valeurs en x, dans la différentielle égalée à zéro, il n'y aura plus d'autre inconnue que x, laquelle étant trouvée, on aura facilement, b & a, c'eſt-à-dire, la poſition de la voile à l'égard du vent, & à l'égard de la quille.

451. S'agit-il de trouver la diſpoſition des voiles & du vaiſſeau, la plus propre pour *gagner au vent* le plus qu'il eſt poſſible ? c'eſt-à-dire, de trouver la diſpoſition ſelon laquelle le vaiſſeau, dans ſon mouvement ſuivant la ligne inconnue AZ (*Fig.* 31) auroit la plus grande vîteſſe dans le ſens parallele à la direction AX du vent, ou vers l'origine du vent ?

En abaiſſant ſur AX la perpendiculaire DS de l'extrémité D de la ligne AD qui marque la vîteſſe du vaiſſeau, ſi l'on imagine le parallélogramme $TASD$, on voit que la vîteſſe AD du navire, eſt compoſée de la vîteſſe AT par laquelle il ne s'approche ni ne s'éloigne de l'origine du vent ; & de la vîteſſe AS qui eſt celle avec laquelle il gagne au vent. Or dans le triangle rectangle ASD, on a $AD : AS :: 1 : cof\,DAS$; ou $u : AS :: 1 : cof\,DAS$; donc $AS = u\,cof\,DAS$. Il faut donc que $u\,cof\,DAS$ ſoit un *maximum*. Or l'angle DAS qui eſt la même choſe que XAZ de la *Fig.* 26, eſt $= a + b + x$; donc $u\,cof\,(a + b + x)$ doit être un *maximum*. Donc ſi au moyen de l'équation qui donne la vîteſſe, & de l'équation $B' = A'\,cot\,b$ on élimine u & b, & qu'enſuite on différencie la quantité en laquelle ſe changera l'expreſſion $u\,cof\,(a + b + x)$, on aura en égalant la différentielle à zéro, l'équation qui doit ſatisfaire à la queſtion. Or comme cette équation renfermera les deux variables a & x, & leurs différentielles, on égalera à zéro, le coefficient de dx & celui de da, ce qui donnera deux équations qui détermineront a & x, leſquels étant trouvés, il ſera facile d'avoir b. On aura donc la poſition de la voile & celle de la quille.

452. En général, ſi l'on veut connoître la diſpoſition la plus avantageuſe des voiles & du navire par rapport au vent, pour s'approcher ou s'éloigner le plus qu'il eſt poſſible d'une ligne de poſition connue ; par exemple, pour s'écarter le plus promptement d'une côte ; ce problême ne differe du précédent qu'en ce que l'angle qu'on doit ſubſtituer à l'angle DAS eſt l'angle que la ligne en queſtion fait avec le vent,

plus ou moins l'angle DAS. Ainſi en nommant e, cet angle, c'eſt $u \cos(e \pm a \pm b \pm x)$ qui doit être un *maximum*, e étant conſtant. Du reſte, le procédé du calcul eſt abſolument le même pour ce cas que pour le précédent.

Il y auroit encore beaucoup d'autres queſtions à parcourir ici; mais les autres objets que nous avons à conſidérer ne nous permettent pas de nous en occuper pour le préſent, non plus que d'expoſer les moyens de ſimplifier ces ſolutions. Nous eſpérons pouvoir y ſuppléer ailleurs.

453. Lorſque la dérive eſt petite, nous avons vu (427) que l'impulſion ſur la proue, & l'impulſion latérale pouvoient être déterminées, quelque fût d'ailleurs la figure du navire. En repréſentant la premiere par A, la ſeconde eſt exprimée par $B \sin x$, x étant la dérive, & B étant une ſurface que l'on détermine comme nous l'avons dit (427). La quantité que nous avons repréſentée par S, devient donc $\sqrt{AA + BB \sin^2 x}$, A & B étant des quantités conſtantes. Et l'équation $B' = A' \cot b$ ſe change en $B \sin x = A \cot b$ qui donne d'une maniere fort ſimple la relation entre la dérive & la poſition de la voile. Ces deux équations peuvent ſervir à réſoudre les queſtions ci-deſſus, pour un navire de figure quelconque, lorſque la dérive eſt petite, ce qui eſt le cas le plus ordinaire.

L'équation que nous venons de donner; entre la dérive & la poſition de la voile, differe de celle qu'a donnée M. Bouguer (*Traité du Navire*, *pag.* 437); cette différence vient de ce que nous avons déjà eu occaſion d'obſerver ſur la maniere dont M. Bouguer calcule la réſiſtance latérale & la réſiſtance dans le ſens de la quille.

Du Mouvement des corps peſants le long des plans inclinés.

454. Un corps peſant qui eſt abandonné à lui-même ſur une ſurface plane $KLHI$ (*Fig.* 32) inclinée à l'horiſon $PIHN$, n'obéit point librement à ſa peſanteur. Une

partie de la force que la pesanteur lui donne, est employée à presser le plan ; & l'autre sert à le mouvoir le long de ce plan. Il faut donc que la pesanteur se décompose en deux forces, dont l'une produise la pression sur le plan, & dont l'autre donne le mouvement le long du plan.

Soit donc *G* le centre de gravité de ce corps, ou le point dans lequel la pesanteur peut être censée (300) réunir toute son action ; soit *GB* la quantité dont le corps descendroit dans un instant, s'il étoit libre. Menons *GC* perpendiculaire au plan *KLHI* ; & concevons que par *GB* & *GC*, on fasse passer un plan ; ce plan sera perpendiculaire aux deux plans *KLHI*, *IPNH*, puisqu'il passe par des droites perpendiculaires à ces plans. Donc si on conçoit que *DE*, *EF* soient les intersections de ce plan prolongé, avec les deux plans *KLHI*, *IPNH* ; *DE*, *EF* seront perpendiculaires à l'intersection commune *HI* de ces deux plans.

Menons *GA* parallele à *DE*, & concevons le parallélogramme *GABC*, dont *GB* soit la diagonale, & *GA*, *GC*, les côtés. On peut (222) supposer que la pesanteur, au lieu de solliciter le corps à se mouvoir suivant *GB*, le sollicite à se mouvoir en même-temps suivant *GC*, avec la vîtesse *GC*,

& ſuivant *G A* avec la vîteſſe *G A*. Or il eſt évident que *G C* étant perpendiculaire au plan, ne peut manquer d'être détruite, ſi le point *O* où elle rencontre le plan, eſt en même temps un point du corps.

Quant à la force *G A*, comme elle ne tend ni à approcher ni à éloigner le corps, du plan, puiſqu'elle lui eſt parallele, elle ne peut manquer d'avoir ſon effet. C'eſt donc *G A* qui repréſente la vîteſſe que le corps tend à prendre, & prendra dans le premier inſtant.

Comme la force *G A* eſt dans le plan des deux droites *G B* & *G C*, elle eſt donc dans le plan *DEF*. On peut donc faire abſtraction de l'étendue des deux plans *K L H I*, *I P H N*, & ne conſidérer que le ſeul plan *DEF* repréſenté en *DEF*, (*Fig.* 33), enſorte qu'on peut regarder le corps comme mu ſur la droite *DE* que nous appellerons le *Plan incliné* : *F E* en ſera la *baſe*, & repréſentera le plan horiſontal ; la perpendiculaire *D F* menée d'un point quelconque *D* de *D F* ſur *E F*, ſera ce qu'on appelle la *hauteur* du plan incliné.

455. Puiſque la force *G A* paſſe par le centre de gravité *G* du corps *M*, elle doit donc (301) ſe diſtribuer également à toutes les parties de ce corps. Donc, tant qu'on

fera abstraction du frottement, le corps ne peut avoir d'autre mouvement qu'un mouvement pour glisser le long du plan, & jamais un mouvement pour rouler, quelle que soit d'ailleurs sa figure, pourvu que la perpendiculaire *G C* rencontre le plan en un point qui appartienne en même-temps à la surface du corps. Il n'en seroit pas de même, ainsi que nous le verrons par la suite, si la perpendiculaire sur le plan, ne rencontroit pas la base du corps, ou la surface par laquelle il touche le plan; ou bien s'il y avoit du frottement. Mais dans tout autre cas le corps ne peut pas rouler.

456. Puisque le corps *M* doit décrire *G A* dans le même-temps qu'il auroit décrit *GB* par l'action libre de sa pesanteur, si l'on conçoit qu'à la fin du premier instant, la pesanteur agisse de nouveau; comme elle communique dans des instants égaux des degrés égaux de vîtesse, si l'on imagine pour le second degré de vîtesse qu'elle communiquera suivant la verticale, une décomposition semblable à celle que nous avons faite pour le premier instant; on verra que le second parallélogramme sera parfaitement égal au premier, & dans le même plan. On conclura donc, de même, que la force perpendiculaire au plan sera détruite, & la force parallele qui

ſera égale à GA ſe joindra à celle-ci ; enſorte qu'en raiſonnant de même, pour les inſtants ſuivants, on conclura généralement que la vîteſſe le long du plan incliné s'accélere par des degrés égaux ; c'eſt-à-dire, que le *mouvement des corps peſants, le long des plans inclinés, eſt un mouvement uniformement accéléré.* Donc tout ce que nous avons dit (194 *& ſuiv.*) ſur les mouvements uniformément accélérés, s'applique mot à mot au mouvement le long des plans inclinés ; en ſorte que les vîteſſes ſont comme les temps ; les eſpaces parcourus ſont comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des vîteſſes, &c,

457. Donc pour être en état de déterminer le mouvement ſur un plan d'une inclinaiſon connue, il ne s'agit que de connoître le rapport de la force qui accélere, à la peſanteur ; c'eſt-à-dire le rapport de GA & GB. Or GA & GB étant paralleles à DE, DF; l'angle AGB eſt égal à EDF; & l'angle A étant droit ainſi que l'angle F, les deux triangles AGB, EDF ſont ſemblables, & donnent $DE : DF :: GB : GA$; c'eſt-à-dire, que *la longueur du plan incliné, eſt à ſa hauteur, comme la vîteſſe que la peſanteur donneroit au corps, s'il étoit libre, eſt à celle qu'elle lui donne réellement le long du plan incliné.*

Or, comme la pesanteur donne à un corps libre, dans une seconde de temps, une vîtesse à parcourir 30, 2 pieds, uniformément, par seconde (203); il sera donc toujours facile de déterminer quelle vîtesse acquiert, dans la premiere seconde de sa chûte, un corps qui tombe le long d'un plan incliné. Par exemple, si la longueur du plan, est double de la hauteur, la vîtesse acquise le long de ce plan pendant la premiere seconde, sera la moitié de 30, 2 pieds; c'est-à-dire, qu'au bout d'une seconde, si la pesanteur cessoit d'agir, le corps parcourroit, 15, 1 pied, à chaque seconde.

Ayant ainsi déterminé la vîtesse pour la premiere seconde, on aura la vîtesse après tel nombre de secondes qu'on voudra, en multipliant celle-là par le nombre de secondes; & l'espace, en multipliant cette même premiere vîtesse, par la moitié du quarré de ce nombre de secondes (197). En un mot, il sera facile de déterminer toutes les autres circonstances de ces mouvements, par ce qui a été dit (194 *& suiv.*) De ces principes, on déduit avec facilité les propriétés suivantes.

458. Si deux corps pesants partis en même-temps du point *D* (*Fig.* 34) descen-

dent, l'un le long du plan DE, l'autre le long de la verticale DF, & que l'on veuille ſavoir à quel endroit du plan DE, le premier eſt arrivé, lorſque le ſecond eſt en un point quelconque A; il n'y aura autre choſe à faire qu'à mener AB perpendiculaire ſur DE; le point B ſera le point cherché. En effet, ſi on repréſente par p, la vîteſſe que la peſanteur donne à un corps libre en une ſeconde de temps, on aura (205) en nommant t le temps néceſſaire pour tomber le long de DA, $DA = \frac{pt^2}{2}$. D'un autre côté (457) la vîteſſe qu'acquiert en une ſeconde le corps qui tombe le long de DE eſt $\frac{p \times DF}{DE}$; donc en nommant T le temps néceſſaire pour tomber de D en B, on aura (197) $DB = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; donc $DA : DB :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2} :: DE \times t^2 : DF \times T^2$; mais $DA : DB :: DE : DF$; donc $DE : DF :: DE \times t^2 : DF \times T^2$; donc $T^2 = t^2$, ou $T = t$.

459. Donc ſi DG (*Fig.* 35) eſt un troiſieme plan parcouru par un troiſieme mobile parti du point D en même-temps que les deux autres; en menant du point A la perpendiculaire AC, les points A, B, C ſont ceux où ces trois mobiles arrivent en même temps.

460. Si sur DA comme diametre, on décrit une demi-circonférence; elle passera (*Géom.* 65.) par les points C & B, puisque les angles C & B sont droits. Donc les cordes DC, & DB sont décrites dans le même temps que le diametre vertical AD; & comme ceci ne dépend point de la longueur ni de l'inclinaison des cordes, on peut dire généralement que *le temps de la chûte par la corde quelconque d'un cercle, tirée de l'extrémité du diamètre vertical, est le même que le temps de la chûte par ce diamètre vertical.*

461. Nous venons de voir (457) que p étant la vîtesse que la pesanteur donne, dans une seconde de temps, à un corps libre, $\frac{p \times DF}{DE}$ est celle qu'elle donne, dans le même temps, au corps qui se meut le long de DE. Soient t & T les temps nécessaires pour décrire DF & DE; on aura $DF = \frac{pt^2}{2}$; & $DE = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; donc $DF : DE :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$, donc $\frac{\overline{DF}^2}{DE} \times T^2 = DE \times t^2$, ou $\overline{DF}^2 \times T^2 = \overline{DE}^2 \times t^2$, ou $DF \times T = DE \times t$; donc $t : T :: DF : DE$. C'est-à-dire, que *les temps nécessaires pour arriver à différents points* F & E *de l'horisontale* FE, *en par-*

courant des plans de même hauteur, soit entre eux comme les longueurs de ces plans.

462. La vîtesse du corps qui tombe le long de DF, est $p't$, au bout du temps t Par une semblable raison, celle du corps qui tombe le long de DE est $\frac{p \times DF}{DE} \times T$, au bout du temps T; donc si on nomme u & v les vîtesses acquises en arrivant en F & E, on aura $u : v :: pt : \frac{p \times DF}{DE} T$, donc $pvt = pu \times \frac{DF}{DE} T$. Mais nous venons de voir (461) que $t : T :: DF : DE$, ce qui donne $t = \frac{DE \times T}{DE}$; substituant cette valeur de t, & réduisant, on a $v = u$. Donc *si plusieurs corps décrivent des plans différemment inclinés, mais de même hauteur; ils auront la même vîtesse, après avoir parcouru des parties de même hauteur, chacun sur son plan.*

Du Mouvement le long des surfaces courbes.

463. SI un corps sans pesanteur & sans ressort, parcourt, en vertu d'une impulsion primitive, les côtés successifs AB, BC, &c. (*Fig.* 36) d'un polygone quelconque; à la rencontre de chaque côté, il perdra une

partie de sa vîtesse que l'on déterminera de la maniere suivante.

Concevons qu'il se meuve actuellement de *A* vers *B*, & que lorsqu'il est en *B*, sa vîtesse soit telle que dans un temps déterminé, comme d'une seconde, il décriroit la ligne *B F* sur *AB* prolongée, s'il étoit libre. Ayant élevé au point *B* sur *B C* la perpendiculaire *BE*, on imaginera le parallélogramme rectangle *BDFE* dont *B F* soit la diagonale, & dont les côtés soient sur *B C* & *B E* : & au lieu de concevoir que le corps a la vîtesse *BF*, on imaginera qu'il a, tout ensemble, les deux vîtesses *B D* & *B E*; or comme le côté *BC* l'empêche d'obéir à la vîtesse *BE*, il est clair que sa vîtesse sera réduite à *BD*.

Si du point *B* comme centre, & du rayon *BF*, on imagine que l'on ait décrit l'arc *FI*; *DI* qui est la différence entre *BF* & *BD*, sera donc la vîtesse perdue : or *D I* est le sinus verse de l'arc *FI* ou de l'angle *FBC* que font les deux côtés contigus *AB*, *BC*. Donc tant que ces deux côtés feront un angle fini, le corps perdra une partie finie de sa vîtesse, à la rencontre de chaque côté.

464. Mais si l'angle que forment ces deux côtés, est infiniment petit; la vîtesse perdue, non-seulement ne sera pas une quantité finie; elle ne sera pas même infi-

niment petite du premier ordre : elle ne fera qu'infiniment petite du fecond. Pour le démontrer, la queftion fe réduit à faire voir que le finus verfe d'un angle infiniment petit, eft infiniment petit du fecond ordre; & voici comment cela fe démontre. *CD* (*Fig.* 37) étant un arc quelconque; & *BD* une perpendiculaire fur le diametre *AC*, on a (*Géom.* 125) *AB* : *BD* : : *BD* : *BC*; donc fi *CD* & par conféquent *BD* eft infiniment petite, *BC* (finus verfe de *CD*) fera infiniment plus petite que *BD*, puifqu'elle eft contenue dans *BD* autant que *BD* l'eft dans la quantité infiniment plus grande *AB*. Donc *BC* eft infiniment petite du fecond ordre.

465. Concluons de-là que *fi un corps fans pefanteur fe meut le long de la furface courbe* ABC (*Fig.* 38) *il a par-tout la même vîteffe.* Car en confidérant cette courbe comme un polygone d'une infinité de côtés; comme ces côtés font des angles infiniment petits entr'eux, la perte de la vîteffe à la rencontre de chaque côté, eft infiniment petite du fecond ordre à l'égard de la vîteffe primitive. Donc la fomme des vîteffes perdues en parcourant une infinité de ces côtés, c'eft-à-dire en parcourant un arc quelconque *ABC*, ne peut former qu'une quantité infini-

ment petite du premier ordre. Donc la vîteſſe n'eſt point altérée.

466. Venons, maintenant, au mouvement des corps peſants ſur les ſurfaces courbes. Nous ne conſidérons, pour le préſent, que celui qui ſe fait dans un plan vertical.

Soit donc *AMB* (*Fig.* 39) la ſection de la ſurface courbe, par un plan vertical, & la trace que le corps fait ſur cette ſurface. Conſidérons cette courbe comme un polygone d'une infinité de côtés ; & concevons que le corps vient de décrire le petit côté *n M*. Comme la rencontre du côté *M m* ne peut (465) lui faire rien perdre de ſa vîteſſe ; il décriroit *M m* avec la vîteſſe qu'il avoit en *M*, ſi la peſanteur n'agiſſoit plus. Mais cette force agiſſant ſuivant la verticale *M q* ſollicite de nouveau le corps à deſcendre, comme elle le feroit ſur un plan de pareille inclinaiſon. Donc ſi l'on imagine que la vîteſſe *M q* que la peſanteur tend à donner dans un inſtant, ſoit décompoſée en deux, l'une *M s* perpendiculaire à *M m* & l'autre *M t* dirigée ſuivant *M m* ; ce ſera en vertu de cette derniere que la vîteſſe de *M* ſera accélérée. Or en menant la verticale *m r*, & comparant les triangles ſemblables *M q t*,

Mmr, on a $Mm : mr :: Mq : Mt$; donc $Mt = \frac{Mq \times mr}{Mm}$.

Concevons que les différents points de la courbe quelconque AB ſoient rapportés à l'axe vertical quelconque BZ. Nommons BP, x; PM, y; l'arc BM, s. Nous aurons Pp ou $mr = - dx$; $Mm = - ds$. Je donne (21) le ſigne $-$, à ces quantités, parce que x & s vont en diminuant, pendant que le temps t augmente. Soit p la vîteſſe que la peſanteur donne à un corps libre dans une ſeconde; pdt ſera celle qu'elle lui donneroit dans l'inſtant dt. Nous aurons donc la vîteſſe $Mq = pdt$. Nommons u la vîteſſe qu'a le corps, lorſqu'il arrive en M; du marquera l'augmentation qu'il recevra pendant le temps dt; ainſi on aura $du = Mt$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation $Mt = \frac{Mq \times mr}{Mm}$, on a $du = pdt \times \frac{-dx}{-ds}$, $= pdt \times \frac{dx}{ds}$. Or (210) $dt = \frac{-ds}{u}$; donc, réduction faite, $udu = -pdx$. Equation dont l'intégrale eſt $\frac{uu}{2} = C - px$, ou $uu = 2C - 2dx$.

Pour déterminer la conſtante C; ſuppoſons que le point A d'où le corps a commencé à tomber, ſoit élevé au-deſſus de l'horiſontale qui paſſeroit par B, d'une quantité $BZ = b$. Il faut donc que lorſque u étoit zéro ; x fût $= b$; donc $o = 2C - 2pb$; donc $C = pb$; donc $uu = 2pb - 2px = 2p(b - x) = 2p \times PZ$. Mais (207) ſi un corps peſant tomboit librement de la hauteur ZP, le quarré de la vîteſſe qu'il auroit en P, ſeroit $2p \times PZ$; donc *lorſqu'un corps deſcend le long d'une ligne courbe quelconque, il a en quelque point que ce ſoit, la même vîteſſe que s'il étoit tombé librement de pareille hauteur.*

Ainſi la vîteſſe qu'acquiert ſucceſſivement un corps qui, par ſa peſanteur, tombe dans la concavité d'une ligne courbe, eſt tout à fait indépendante de la nature de cette ligne courbe.

467. Donc ſi le corps après être arrivé au point B le plus bas, & dont je ſuppoſe que la tangente ſoit horiſontale, rencontre la concavité de la même ou d'un autre courbe quelconque qui touche la premiere en B, il s'élevera dans celle-ci, à une hauteur égale à celle dont il étoit parti.

En effet, ſuppoſons que le corps M ſoit actuellement en B où $x = o$; ſa vîteſſe ſera telle qu'on aura $uu = 2bp$, ou $VV = 2pb$, en appellant V cette vîteſſe pour la diſtinguer de l'autre. Concevons qu'avec cette vîteſſe

vîteſſe il remonte le long de la courbe quelconque BM' ; on trouvera par le même raiſonnement que ci-deſſus, que ſa vîteſſe en un point quelconque M' ſe déterminera par l'équation $-du' = pdt \times \frac{dx}{ds'}$, en appellant u' ſa vîteſſe, s' l'arc AM', & obſervant que u' diminue à meſure que t, & s' & x augmentent. Mettant donc pour dt ſa valeur $\frac{ds'}{u'}$, on aura $u'du' = -pdx$; & en intégrant $u'^2 = 2C - 2px$; mais lorſque $x = 0$, la vîteſſe u' eſt V, on a donc $V^2 = 2C$, & puiſque $V^2 = 2pb$, on a $2C = 2pb$; donc $u'^2 = 2pb - 2px$. Or lorſque le corps ceſſera de monter, on aura $u' = 0$, & par conſéquent $2pb - 2px = 0$, qui donne $x = b$; donc le point où le corps ſera arrivé dans la courbe quelconque BA' ſera à même hauteur que le point A.

468. A l'égard du temps que le corps emploiera à décrire un arc quelconque AM ou AB de la courbe ; comme on a $dt = \frac{-ds}{u}$, on aura $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2pb - 2px}}$; enſorte que, il faudra, par le moyen de l'équation de la courbe, avoir la valeur de ds, en x & dx, & l'ayant ſubſtituée dans cette valeur de dt, on aura celle de t, en intégrant.

Du Mouvement d'Oscillation.

469. Nous venons de voir (467) qu'un corps pesant après être descendu par l'arc quelconque de courbe AB, doit (abstraction faite de la résistance de l'air, & du frottement) remonter à pareille hauteur dans la courbe quelconque BA' qui auroit au point B la même tangente horisontale que BA. Donc ce corps retombant ensuite, parcourroit en sens contraire toute l'étendue $A'BA$; & feroit consécutivement des allées & des retours qui ne finiroient jamais. Ce mouvement est, ce qu'on appelle, un mouvement d'oscillation. Nous venons de voir ce qu'il y avoit à faire en général, pour déterminer la durée de chaque oscillation qui doit, évidemment, être le double du temps de la chûte par l'arc AB, si BA' est la même que BA.

Lorsque la courbe le long de laquelle le corps descend, est un cercle, & qu'en même temps les oscillations se font par de petits arcs, elles ont cette propriété remarquable & importante, que leur durée ne dépend pas de l'étendue de l'arc AB (*Fig.* 40) ensorte que l'arc AB étant petit, (comme de 4 ou 5 degrés au plus), le mobile arrivera toujours en B dans le même temps, soit qu'il parte du point A, soit qu'il parte de tout autre point O pris entre A & B. Voici comment on peut s'assurer de cette propriété.

En conservant les mêmes dénominations que ci-dessus; & nommant a, le rayon BC, du cercle BAD; nous aurons, par la nature du cercle, $y = \sqrt{2ax - xx}$. D'où l'on conclura aisément que l'arc Mm, ou ds, ou $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, est $= \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Mais comme l'arc BM est petit, ensorte que x est petite à l'égard de a, on doit, pour exprimer cette condition, supprimer xx, vis-à-vis de $2ax$; ce qui donne $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}}$. Substituant cette valeur de ds, dans celle de dt (468); on a $dt = \frac{-adx}{\sqrt{2ax}.\sqrt{2pb - 2px}}$, qu'on peut réduire à $dt = \frac{-\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ap}.\sqrt{bx - xx}}$, ou $dt = \sqrt{\frac{a}{p}}.\frac{-\frac{1}{2}dx}{\sqrt{bx - xx}}$. Or de même que $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ exprime l'élément d'un arc de cercle dont le diametre est $2a$, de même $\frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx - xx}}$ exprime l'élément d'un arc de cercle dont le diametre seroit b; & l'absciſſe x. Mais la ligne BZ étant b, ſi ſur BZ comme diametre on décrit le demi-cercle $BM'Z$, alors $M'm'$ ſera cet élément ; enſorte qu'on aura $\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{bx-xx}} = M'm' = d(BM')$; donc $\frac{\frac{1}{2}b\,dx}{\sqrt{bx-xx}} = \frac{d(BM')}{b}$. Subſtituant cette valeur dans celle de dt on a $dt = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{d(BM')}{b}$; & en intégrant, $t = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer la conſtante C. Or il eſt facile de voir que lorſque $t = 0$, c'eſt-à-dire, quand le corps part du point A, l'arc BM' devient la demi-circonférence $BM'Z$; donc $0 = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b}$, & $C = \sqrt{\frac{a}{p}} \cdot \frac{BM'Z}{b}$; donc $t = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b} - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$, ou $t = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{ZM'}{b}$. C'eſt là l'expreſſion du temps employé à parcourir l'arc quelconque AM ; temps qui eſt ſuppoſé compté en ſecondes. Mais lorſque l'arc AM devient l'arc AB, c'eſt-à-dire, au bout de la demi-oſcillation, l'arc ZM' devient $ZM'B$; on a donc en nommant $\frac{1}{2}T$, la durée de la demi-oſcillation, ... $\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{ZM'B}{b}$, ou $T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{2\,ZM'B}{b}$. Or ſi l'on repréſente par $1 : c$ le rapport du diametre à la circonférence d'un cercle, on a $1 : c :: b : 2\ ZM'B$, & par conséquent $\frac{2ZM'B}{b} = c$; donc $T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times c$, ou . . . $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. C'est-là l'expression de la durée d'une oscillation entiere. Et comme cette quantité ne renferme point b qui détermine la hauteur d'où le corps est descendu, & par conséquent l'étendue de l'excursion AB; il s'ensuit que le temps T ne dépend nullement de l'étendue de l'arc, tant que cet arc est petit. Donc *les oscillations qui se font dans de petits arcs de cercle, sont sensiblement isochrones ; c'est à dire, de même durée.*

Cette propriété a également lieu pour les petits arcs de toutes les courbes, dans lesquelles le rayon de la développée, au point le plus bas, n'est pas nul. Parce que ces arcs se confondent avec ceux du cercle qui en mesurent la courbure (80).

Si l'on veut connoître l'erreur que l'on peut commettre en prenant cette valeur de T pour la durée d'une oscillation dans le cercle : voici comment on le trouvera.

Reprenons la valeur trouvée ci-dessus pour ds, savoir $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; réduisons-la en série (*Alg.* 149), mais jusqu'au troisieme terme seulement, ce qui est plus que suffisant pour notre objet.

Nous aurons $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}}\left(1 + \frac{x}{4a} + \frac{3x^2}{32a^2}\right)$ substituant dans la valeur de $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2pb - 2px}}$, & réduisant, on aura $dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\,\dfrac{\left(x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{4a} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{32a^2}\right)}{\sqrt{b-x}}$.

Comme nous ſavons déjà quelle eſt l'intégrale du premier terme, bornons-nous à chercher celle des deux derniers, & repréſentons-la par $\frac{1}{2}t'$; nous aurons donc $\frac{1}{2}dt' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}$ $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{4a} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{32a^2}\right)(b-x)^{-\frac{1}{2}}$.

Pour avoir l'intégrale de cette équation, j'ai recours à ce qui a été dit (128); c'eſt pourquoi j'écris $\frac{1}{2}t' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}$ $(Ax^{\frac{3}{2}} + Bx^{\frac{1}{2}})(b-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\int Cx^{-\frac{1}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}} + C$. Je détermine les coëfficients A, B, C ſelon ce qui a été enſeigné (129), & je trouve $A = -\frac{3}{64a^2}$, $B = -\frac{1}{4a} - \frac{9b}{12a^2}$ $C = \frac{b}{8a} + \frac{9b^2}{256a^2}$. Or l'intégrale de $x^{-\frac{1}{2}}dx(b-x)^{-\frac{1}{2}}$, ou $\frac{dx}{\sqrt{bx-xx}}$ ou $\frac{1}{\frac{1}{2}b} \times \frac{\frac{1}{2}b\,dx}{\sqrt{bx-xx}}$ eſt $\frac{1}{\frac{1}{2}b}$ multiplié par l'arc BM'; donc l'intégrale totale eſt $\frac{1}{2}t' = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}$ $\left(-\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{64a^2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{4a} - \frac{9bx^{\frac{1}{2}}}{12a^2}\right)(b-x)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b} \times$ $\left(\frac{b}{8a} + \frac{9b^2}{256a^2}\right) + C$.

Pour déterminer la conſtante C, on obſervera que quand $x = b$, on doit avoir $t' = 0$, & que l'arc BM' devient alors $BM'Z$; ſubſtituant donc, on aura $0 = -\sqrt{\frac{a}{p}}\cdot\frac{BM'Z}{b}$ $\left(\frac{b}{8a} + \frac{9b^2}{256a^2}\right) + C$. Subſtituant la valeur de C que donne cette équation dans la valeur de $\frac{1}{2}t'$, faiſant $x = b$

pour avoir l'intégrale totale, & observant que BM' devient alors zéro, on aura $\frac{1}{2}t' = \sqrt{\frac{a}{p}} \cdot \frac{BM'Z}{b}\left(\frac{b}{8a} + \frac{9b^2}{256a^2}\right)$. Mais en prenant, comme ci-dessus, c pour le rapport de la circonférence au diametre, on a $\frac{BM'Z}{b} = \frac{c}{2}$; donc $t' = c\sqrt{\frac{a}{p}}\left(\frac{b}{8a} + \frac{9b^2}{256a^2}\right)$. Comparant cette valeur de t', à celle de T trouvée ci-dessus, on a $T : t' :: c\sqrt{\frac{a}{p}} : c\sqrt{\frac{a}{p}} \cdot \left(\frac{b}{8a} + \frac{9b^2}{256a^2}\right)$, ou $t' = T\left(\frac{b}{8a} + \frac{9b^2}{256a^2}\right)$, quantité dans laquelle $\frac{b}{a}$ est le sinus verse de l'arc décrit pendant une demi-oscillation, le rayon étant 1.

Supposons que $T = 1''$, & que l'étendue des arcs décrits de chaque coté de la verticale, soit de 5°. Le sinus verse de 5° est 0,0038053, le rayon étant 1; on a donc $\frac{b}{8a} =$ 0,0004757. A l'égard du terme $\frac{9b^2}{256a^2}$, il est au-dessous d'une unité décimale du 7^e ordre. L'erreur sur chaque oscillation seroit donc $t' = 1'' \times 0{,}0004757 = 0'',0004757$. Ainsi si un corps descendoit, par l'action de sa pesanteur, dans la concavité d'un cercle, & en décrivoit des arcs infiniment petits de part & d'autre du point le plus bas, dans une seconde de temps, la durée de chacune de ses oscillations, abstraction faite du frottement & de la résistance de l'air, ne différeroit de celle qu'il emploieroit à décrire des arcs de 5° de part & d'autre du point le plus bas, que de $0'',0004757$; en sorte que dans ce dernier cas, pour faire 86400 vibrations qui font le nombre de vibrations d'une pendule à secondes, en un jour, il emploieroit, par-delà 24 heures, un nombre de secondes marqué par $86400 \times 0'',0004757$; c'est-à-dire, $41''$ & environ $\frac{1}{10}$. Donc un pendule de même longueur que le pendule à secondes, à qui l'on feroit décrire des arcs de 5° de part & d'autre de la verticale, ne retarderoit que de $41''$ par jour sur celui qui décriroit des arcs infiniment petits.

Si les arcs décrits de part & d'autre de la verticale n'étoient que de 1°, dont le sinus verse est 0,0001523, on trouvera de même que le retardement diurne ne seroit que de 1″,64 ; c'est-à-dire, 1″$\frac{2}{3}$; & pour un demi-degré il ne seroit que de 0″,41 ; c'est-à-dire, environ $\frac{2}{5}$ de seconde par jour.

470. Ce que nous venons de dire s'applique tout naturellement aux pendules. On appelle, en général *pendule*, tout fil ou toute verge qui tient un ou plusieurs corps suspendus ou attachés à un point fixe *C* (*Fig.* 41.) On l'appelle *pendule simple*, lorsqu'il n'y a qu'une masse soutenue par un fil ou par une verge sans pesanteur, & qu'en même temps cette masse est d'un diametre très-petit à l'égard de la longueur du pendule. Nous ne parlons, pour le présent, que du pendule simple.

Lorsqu'on écarte le pendule, de la situation verticale *CB*, l'effort de la pesanteur sur la masse transportée en *A*, agissant suivant la verticale *AM*, n'est pas tout employé à mouvoir le corps : une partie s'exerce sur le point *C*. Il faut donc concevoir l'effort *AM* décomposé en deux autres, l'un *AN* dirigé suivant *CAN*, & qui est détruit ; l'autre *AP* qui donne au corps le mouvement suivant l'arc *AB*. Or comme le rayon *CA* est perpendiculaire à l'arc, on voit donc que le mouvement se décompose ici de la même maniere que si le corps tomboit naturellement le long de l'arc AB, qui a pour rayon la longueur CA du pendule. Donc en effet tout ce que nous venons de dire, s'applique immédiatement aux pendules: voici, maintenant, quelques conséquences qui résultent du calcul précédent appliqué aux pendules.

471. Nous avons trouvé pour la durée d'une oscillation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. Donc pour un autre pendule dont la longueur seroit a', & qui seroit animé par une pesanteur différente ou capable de donner la vîtesse p' dans une seconde, on auroit, en nommant T' la durée d'une oscillation, $T' = c\sqrt{\frac{a'}{p'}}$. Donc $T : T' :: c\sqrt{\frac{a}{p}} : c\sqrt{\frac{a'}{p'}} :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$; c'est-à-dire, que *si deux pendules de longueur différente, sont animés par des pesanteurs différentes, les durées des oscillations sont comme les racines quarrées des longueurs des pendules, divisées par les racines quarrées des quantités qui expriment ces pesanteurs.*

472. Comme la pesanteur est la même dans un même lieu, on doit donc dire que les durées des oscillations sont comme les racines quarrées des longueurs des pendules.

473. Mais si un même pendule étoit successivement exposé à l'action de deux pesanteurs différentes, alors a étant égal à a', on auroit $T : T' :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a}{p'}} :: \sqrt{ap'} : \sqrt{ap} :: \sqrt{p'} : \sqrt{p}$; c'est-à-dire, que les durées des oscillations seroient en raison inverse des racines quarrées des pesanteurs.

474. Soit n le nombre de vibrations que fait le pendule a dans un temps donné, comme d'une heure, ou $3600''$; on aura $T = \frac{3600''}{n}$. Par la même raison, si l'on représente par n' le nombre de vibrations que fait, pendant le même temps, le pendule a', on aura $T' = \frac{3600''}{n'}$; donc $T : T' :: \frac{3600''}{n} : \frac{3600''}{n'} :: n' : n$; c'est-à-dire, que les nombres de vibrations que font, en même temps, deux pendules de longueur différente, sont en raison inverse des durées de chaque vibration. Donc puisqu'on a $T : T' :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$; on aura $n : n' :: \sqrt{\frac{a'}{p'}} : \sqrt{\frac{a}{p}}$; c'est-à-dire, que *les nombres de vibrations que font, en même temps, deux pendules de longueur différente, & qui sont sollicités par des pesanteurs différentes, sont en raison inverse des racines quarrées des longueurs des pendules*

divisées par les racines quarrées des pesanteurs. Ensorte que si les pesanteurs sont les mêmes, les nombres de vibrations seront réciproquement comme les racines quarrées des longueurs des pendules ; & si les longueurs sont les mêmes, les nombres de vibrations seront directement comme les racines quarrées des pesanteurs.

475. Donc si un même pendule porté en différents lieux de la terre n'y fait pas le même nombre de vibrations dans un même intervalle de temps, on doit en conclure que la pesanteur n'est pas la même en ces différents lieux ; & le nombre des vibrations faites, dans un même temps, en chaque lieu, fera connoître la diminution ou l'augmentation de la pesanteur. C'est par ce principe qu'on s'est assuré que la pesanteur va en diminuant à mesure qu'on s'approche de l'équateur ; & au contraire, va en augmentant, à mesure qu'on s'approche des pôles ; nous en verrons la raison, dans peu.

476. Ce principe, que les nombres de vibrations faites dans un même temps par deux pendules différents, animés d'une même pesanteur, sont réciproquement proportionnels aux racines quarrées des longueurs des pendules, peut servir à trouver

la longueur du pendule à secondes dans un lieu quelconque. Ayant suspendu à un fil de métal très-délié, un corps qui sous un petit volume renferme beaucoup de matiere, comme une balle de plomb, de cuivre, d'or, &c. on donnera à ce fil une longueur de trois pieds au moins, & que l'on mesurera très-exactement. On fera osciller ce pendule en l'écartant peu de la verticale, & l'on comptera le nombre d'oscillations qu'il fera dans un temps déterminé & bien constaté (je suppose ici que ce soit une heure); après quoi on fera cette proportion: 3600, nombre des oscillations que doit faire le pendule cherché, est au nombre d'oscillations observées, comme la racine quarrée de la longueur du pendule d'observation, est à un quatrieme terme qui sera la racine quarrée de la longueur du pendule à secondes; ainsi, en quarrant on aura cette longueur. C'est ainsi qu'on a déterminé que le pendule simple qui fait ses oscillations dans une seconde, doit, à la latitude de Paris, avoir $3^{pi.}$ 0^{po} 8^{l}, 5-. Cette mesure a été déterminée par plusieurs expériences faites avec un très-grand soin.

477. Il est facile, maintenant, de déterminer de combien doit tomber dans la premiere seconde de sa chûte, un corps à

qui l'air ne fait pas de résistance sensible dans cet intervalle de temps. En effet, l'équation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, donne $p = \frac{acc}{TT}$; valeur dans laquelle p représente la vîtesse qu'un corps pesant acquiert dans la premiere seconde de sa chûte, & qui (196) est le double de la hauteur dont il tomberoit dans ce temps; a est la longueur du pendule qui fait ses oscillations dans le temps T; en sorte que si pour T, nous mettons une seconde, a doit être de 3p 0p 8l, 57 ou 440l, 57. Enfin c est le rapport de la circonférence au diametre, & vaut par conséquent $\frac{355}{113}$; donc $p = (\frac{355}{113})^2 \times 440,57$, quantité qui vaut 4348l, 25146, & qui réduite en pieds, est de 30p, 19619; donc l'espace décrit par un corps pesant, dans la premiere seconde de sa chûte, est de 15,09809; c'est ce que nous avions promis (203) de faire voir.

478. Si l'on appelle t le temps qu'il faudroit à un corps pesant descendant librement, pour parcourir le diametre BD ou $2a$ (*Fig.* 40), on aura (205), $2a = \frac{pt^2}{2}$; donc $\sqrt{\frac{a}{p}} = \frac{1}{2}t$. Substituant cette valeur dans l'équation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, on a $T = \frac{1}{2}ct$, ou $\frac{1}{2}T = \frac{1}{4}ct$ qui donne $\frac{1}{2}T : t :: \frac{1}{4}c : 1$; c'est-à-dire,

que la durée de la chûte par le petit arc quelconque AB eſt au temps de la chûte par le diametre, comme le quart de la circonférence eſt au diametre. Or le quart de la circonférence eſt plus petit que le diametre; donc un corps emploie moins de temps à tomber par un petit arc de cercle dont la tangente inférieure eſt horiſontale, qu'il n'en emploieroit à tomber le long du diametre. Et puiſque (460) le temps de la chûte par le diametre, eſt le même que celui de la chûte par la corde quelconque AB; on voit donc qu'un corps arrivera plutôt de A en B, en tombant par l'arc AB, qu'en tombant par la ligne droite AB. Ainſi la ligne droite eſt bien le plus court chemin, mais elle n'eſt pas toujours le chemin qui exige le temps le plus court.

De la ligne de la plus vîte deſcente.

479. Non-ſeulement ce n'eſt pas par la ligne droite, qu'un corps peſant arrive le plus promptement d'un point à un autre: ce n'eſt pas non plus par l'arc de cercle. C'eſt par un arc d'une autre courbe, qu'on trouvera en cette maniere.

Concevons que AMR (*Fig.* 42) eſt la courbe cherchée, celle par laquelle un corps peſant arrivera le plus promptement du point donné A, au point donné B. Si l'on prend deux points infiniment voiſins M & m' ſur cette courbe, l'arc Mm' doit auſſi pouvoir être parcouru en moins de temps que tout autre arc paſſant par les deux mêmes points M & m', puiſque ces deux points peuvent être pris pour les deux points donnés. Ayant pris un point N infiniment plus près de Mm' que M ne l'eſt de m', concevons les deux petites droites MN & Nm'; puiſque le temps par Mmm' doit être un *minimum*, il faudra que la différence entre le temps par Mmm', & le temps par MNm' qui eſt la différentielle du temps lorſqu'on paſſe d'un arc à l'autre, ſoit zéro.

Par les points M, N, m' menons les horiſontales MP, mp, $m'p'$; & concevons la verticale AC. Nommons AP, x; PM, y; AM, s. Et ſuppoſons $Mm = mm'$ c'eſt-à-dire, ds conſtant. Nous aurons $mr = dx$; $rM = dy$; $mr' = dx + ddx$ $r'm' = dy + ddy$. Soit u la vîteſſe pendant que le corps décrit Mm; u ſera auſſi (461) la vîteſſe avec laquelle MN eſt décrit; & $u + du$ ſera celle avec laquelle mm' & Nm' ſeront décrits. Donc le temps par Mm, ſera $\frac{ds}{u}$; & le temps par mm', ſera $\frac{ds}{u+du}$.

Des points M & m' comme centres, & des rayons MN, mm' décrivons les arcs Nn, mt. En comparant les triangles Nmn, Nmt aux triangles Mmr, $mm'r'$, on aura $nm = Nm \times \frac{dy}{ds}$, & $Nt = Nm \times \frac{dy + ddy}{ds}$. Donc $MN = ds - Nm \times \frac{dy}{ds}$ & $Nm' = ds + Nm \times \frac{dy + ddy}{ds}$. Donc le temps par MN, ſera $\frac{ds - Nm \times \frac{dy}{ds}}{u}$; & le temps par Nm', ſera $\frac{ds + Nm \times \frac{dy+ddy}{ds}}{u+du}$. On aura donc

$$\frac{dx - Nm \times \frac{dy}{ds}}{u} + \frac{ds + Nm \times \frac{dy+ddy}{ds}}{u+du} - \frac{ds}{u} - \frac{ds}{u+du} = 0,$$

équation qui ſe réduit à $\frac{Nm}{ds}\left(\frac{dy+ddy}{u+du} - \frac{dy}{u}\right) = 0$ ou $d\left(\frac{dy}{u}\right) = 0$; donc, en intégrant, $\frac{dy}{u} = \frac{ds}{C}$ ou

$Cdy = uds$. Mais (466) puisque la vîtesse u est la même que celle que le mobile auroit acquise en tombant de la hauteur AP, on a $uu = 2px$; donc $Cdy = ds\sqrt{2px}$ & $C^2dy^2 = 2pxds^2 = 2px(dx^2 + dy^2)$, d'où l'on tire

$$dy = \frac{dx\sqrt{2px}}{\sqrt{C^2 - 2px}}.$$

Pour déterminer la constante C, on observera que lorsque $\sqrt{2px} = C$, on a $dy = ds$; donc si l'on appelle V la vîtesse que le corps aura au point où $\sqrt{2px} = C$, l'équation $Cdy = uds$, est alors $Cds = Vds$, qui donne $C = V$. Et si l'on appelle b, la hauteur correspondante AC, on a $VV = 2pb$, donc $CC = 2pb$. Donc $dy = \dfrac{dx'\sqrt{2px}}{\sqrt{2pb - 2px}}$, ou $dy = \dfrac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{b-x}}$, équation de la courbe : mais pour mieux reconnoître cette courbe, donnons une autre forme à cette équation.

Imaginons, par le point R ou $dy = ds$, la verticale RD; & ayant prolongé PM, en O, nommons AD, a; OR, x'; OM, y'. Nous aurons $x = b - x'$, $y = a - y'$; $dx = -dx'$; $dy = -dy'$; substituant ces valeurs, on a $dy' = \dfrac{dx'\sqrt{(b-x')}}{\sqrt{x'}}$

$$= \frac{b\,dx' - x'dx'}{\sqrt{bx' - x'x'}} = \frac{\frac{1}{2}b\,dx' - x'dx'}{\sqrt{bx' - x'x'}} + \frac{\frac{1}{2}b\,dx'}{\sqrt{bx' - x'x'}}.$$ Donc

$$y' = C' + \sqrt{bx' - x'x'} + \int \frac{\frac{1}{2}b\,dx'}{\sqrt{bx' - x'x'}}.$$

Concevons que sur DR, ou b, comme diametre, on ait décrit le demi-cercle DER. On aura $OE = \sqrt{bx' - x'x'}$, & l'arc $RE = \int \dfrac{\frac{1}{2}b\,dx'}{\sqrt{bx' - x'x'}}$; on a donc en général

$OM = C' + OE + RE$.

Pour déterminer la constante C'; il faut remarquer que lorsque $x' = 0$, on doit avoir $y' = 0$. Donc puisqu'alors OE & RE deviennent zéro; on a $C' = 0$, Donc $OM = OE + RE$; donc

donc (37) la courbe cherchée est une demi-cycloïde ordinaire dont le cercle générateur est DER, & dont AD est la demi base. La seule chose qui reste à déterminer, c'est b; car il n'y a rien autre chose de donné que les deux points A & B, par lesquels le corps doit passer. Or voici comment on déterminera b.

Ayant mené la verticale BK qui rencontre en K l'horisontale AK menée par le point A, on décrira sur AK comme demi-base, la demi-cycloïde AVT; c'est-à-dire, une demi-cycloïde dont le cercle générateur ait AK pour longueur de sa demi-circonférence. Et ayant mené AB qui coupe cette cycloïde en V, on menera VK, à laquelle on menera par le point B, la parallele BD qui déterminera AD pour la demi-base de la cycloïde cherchée ; c'est-à-dire, pour la demi-circonférence de son cercle générateur. Cette construction est fondée sur ce que les cycloïdes AVT, ABR, qui ont leurs bases sur AD, & qui ont le point A commun, sont semblables; ce qui est facile à démontrer.

480. Nous avons supposé que le mobile n'avoit aucune vîtesse en partant du point A. Mais s'il avoit déja reçu quelque vîtesse suivant une direction donnée, l'origine de la courbe seroit plus élevée : l'équation $Cdy = uds$ trouvée ci-dessus, donne $\frac{u}{C} = \frac{dy}{ds}$, qui fait voir que la constante C doit être telle que divisant la vîtesse initiale, elle donne la valeur du sinus de l'angle, que la direction de cette vîtesse initiale fait avec la verticale, condition qui, avec celle que le mobile doit passer par A & par B, déterminera la cycloïde convenable à ce cas.

481. Outre la propriété qu'a la cycloïde, d'être la courbe de la plus vîte descente dans un milieu non résistant, elle en a encore plusieurs autres très-remarquables. Elle a, par exemple, cette propriété singuliere, que quelque soit le point X d'où un corps commence à descendre dans la concavité de cette courbe, il arrive toujours au point le plus bas R, dans un même temps. Voici comment on lui trouve cette propriété.

En nommant t, le temps, & s, l'arc RM correspondant au point quelconque M où le corps ſe trouve au bout du temps t; on a (468), $dt = -\frac{ds}{u}$. Or en nommant b', la hauteur de X au-deſſus de l'horiſontale OM, on a $u = \sqrt{2p(b'-x')}$; d'ailleurs il eſt facile de conclure de la valeur trouvée, ci-deſſus, pour dy', que $ds = \frac{dx'\sqrt{b}}{\sqrt{x'}}$;

donc $dt = -\frac{dx'\sqrt{b}}{\sqrt{2p(b'x'-x'x')}} = -\sqrt{\frac{b}{2p}} \times \frac{1}{\frac{1}{2}b'} \times \frac{\frac{1}{2}b'd'x'}{\sqrt{b'x'-x'x'}}$;

donc $t = C - \frac{2}{b'}\sqrt{\frac{b}{2p}} \times \int \frac{\frac{1}{2}b'dx'}{\sqrt{b'x'-x'x'}}$ d'où l'on conclura en raiſonnant comme on l'a fait (488), & nommant T le temps total employé à venir de X en R, $T = \frac{2}{b'} \times \sqrt{\frac{b}{2p}} \times \frac{b'c}{2}$ c étant le rapport de la circonférence au diametre. Donc $T = c\sqrt{\frac{b}{2p}}$; c'eſt-à-dire, que le temps T eſt indépendant de la hauteur b' d'où le corps eſt parti.

Du Mouvement en ligne courbe, en général.

482. Puiſqu'un corps qui a été mis une fois en mouvement, doit (abſtraction faite de tout obſtacle) perſévérer dans cet état de mouvement, avec la même vîteſſe & la même direction; il s'enſuit qu'un corps ne peut décrire une ligne courbe, à moins qu'il ne ſurvienne une force ou un obſtacle qui change à chaque inſtant la direction de ſon mouvement.

Si la force qui agit ſur le mobile ſuivant une direction différente de celle qu'il suit, agit à des intervalles de temps, finis, & communique à chaque intervalle de temps, une vîtesse finie; le corps décrira un polygône. Par exemple, si lorsque le corps qui décrit la ligne AB (*Fig.* 43) est arrivé en B, il reçoit une impulsion capable de lui faire décrire BE, dans le même temps; au lieu de décrire $BD = AB$, comme il l'auroit fait sans cette nouvelle force, il décrira (223) la diagonale BC du parallélogramme $BECD$. Et si lorsqu'il est arrivé en C, & qu'il tend à décrire CG égale & en ligne droite avec BC, une nouvelle force vient à agir sur lui, suivant CH, & tend à lui faire décrire CH dans le même temps, il décrira réellement la diagonale CF du parallélogramme $CHFG$, & ainsi de suite; ensorte que par la suite des dérangements qu'il aura reçus, il aura décrit les côtés AB, BC, CF, &c. du polygône.

483. Mais si le mobile ayant reçu d'abord une vîtesse finie, la force qui le détourne, agit sans interruption; ou, ce qui revient au même, si elle agit à des intervalles de temps infiniment petits; & si en même temps, à chaque intervalle, elle imprime des degrés de vîtesse infiniment petits; alors les côtés BC, CF décrits

pendant la durée de chaque inſtant, ſeront infiniment petits; & les lignes BE, CH qui marquent les actions infiniment petites de la force qui fait varier le mouvement, devant être infiniment petites en comparaiſon de celles BC, CF qui marquent la vîteſſe actuelle du mobile, les angles BCE, CFH, ou leurs égaux DBC, GCF, ſeront infiniment petits; la trace du mobile ſera donc une ligne courbe. D'où l'on voit qu'il ne ſuffit pas, pour qu'un corps décrive une ligne courbe, que la force agiſſe à chaque inſtant infiniment petit; il faut encore que l'action qu'elle exerce ſuivant ſa propre direction, à chaque inſtant, ſoit infiniment petite. Telle eſt l'action que la peſanteur exerce à chaque inſtant : telle eſt la réſiſtance des fluides, à chaque inſtant du mouvement.

484. Soit que la force qui agit ſur le mobile, ſoit une force active, comme la peſanteur; ſoit qu'elle ſoit une force paſſive comme la réſiſtance d'un point fixe, ou d'un fluide en repos, ou de tout autre obſtacle ; on eſt toujours maître de conſidérer le mouvement, comme une ſuite de mouvements compoſés, comme dans l'exemple que nous venons de rapporter, ou bien de le conſidérer comme une ſuite de mouve-

ments décomposés, de la maniere suivante.

Par exemple, lorsque le mobile arrivé en B (*Fig.* 44) est près de recevoir l'action de la force BE; je puis (225) concevoir que le mouvement BD qu'il auroit eu, sans cette nouvelle force, est décomposé en un mouvement BC qu'il doit prendre réellement, & un autre mouvement BI qui ne doit rien produire, & qui par conséquent doit être égal & directement opposé à l'effort BE. Pareillement, lorsque le corps sera arrivé en C, je concevrai le mouvement CG qu'il auroit eu sans la force CH, comme décomposé en un mouvement CF qu'il aura réellement, & un mouvement CK égal, & directement opposé à l'effort CH.

Dans quelque cas que ce soit, on peut toujours envisager le mouvement, de telle de ces deux manieres, que l'on voudra. Mais si l'on veut l'envisager de la maniere la plus conforme à la nature; c'est de la premiere maniere qu'il faut l'envisager, lorsque la force qui fait changer le mouvement, est une force active, comme la pesanteur. Et lorsqu'au contraire cette force est une résistance, comme celle d'un point fixe, &c; c'est de la seconde maniere qu'il faut l'envisager.

485. Un corps qui se meut en ligne courbe, peut donc à chaque instant être considéré comme se mouvant sur la tangente au point où il se trouve ; & si la force qui le détourne à chaque instant, cessoit d'agir, il persévéreroit à se mouvoir, suivant cette tangente.

486. On appelle, en général, force *centrale*, la force qui détourne le corps, à chaque instant, pour lui faire décrire une ligne courbe. Si en considérant le mouvement par rapport à un point fixe, la force tend à approcher le corps de ce point, on l'appelle force *centripète* ; & au contraire on l'appelle force *centrifuge*, lorsqu'elle tend à l'éloigner de ce point.

487. Puisqu'un corps qui décrit une ligne courbe, cesseroit de la décrire, & poursuivroit son mouvement suivant la tangente, si la force centrale cessoit d'agir; on voit donc qu'à l'égard du point quelconque *A* (*Fig.* 45) pris du côté de la concavité, le mobile *M*, en vertu de son mouvement sur la courbe, a véritablement une force centrifuge, puisque tendant à se mouvoir suivant *MT*, il tend à s'éloigner du point *A*, vers lequel il ne peut être ramené que par l'action de la force centrale.

Du Mouvement dans le Cercle.

488. Pour qu'un corps *A* libre & ſans peſanteur *(Fig. 46)* frappé ſuivant la direction quelconque *PA* puiſſe décrire un cercle, en vertu de la vîteſſe imprimée & d'une force conſtamment dirigée au point fixe *C*; il faut d'abord que la direction *PA* ſoit perpendiculaire à la ligne *AC* qui joint le point *A* de départ, & le point *C*. Mais cette condition ne ſuffit pas; il faut encore que la vîteſſe imprimée ait une certaine meſure.

Suppoſons que la ligne infiniment petite *AB* ſoit l'eſpace qu'il auroit décrit dans un inſtant ſans l'action de la force centrale; & que (483) la ligne infiniment plus petite *AD*, marque l'eſpace que la force centrale agiſſant ſans interruption, lui feroit décrire dans ce même inſtant. Comme *AB* eſt infiniment petite, on peut regarder la force centrale, comme agiſſant ſur le mobile, parallélement à *AD*; donc ſi l'on mene *Bb* parallele à *AD*, il faut que la vîteſſe *AB* ſoit telle que la quantité *Bb* dont elle auroit écarté le corps, ſoit égale à celle *AD* dont la force centrale peut le ramener. Voyons donc, comment par cette condition, on peut déterminer le rapport de la force centrale, à la vîteſſe imprimée.

Prolongeons le rayon AC juſqu'à ce qu'il rencontre, en E, la circonférence. Par la nature du cercle, on aura $\overline{Db}^2 = AD \times DE$. Mais puiſque AB eſt infiniment petite, DE doit être regardée comme égale à AE ou $2CA$, on a donc $\overline{Db}^2$ ou $\overline{AB}^2 = AD \times 2CA$.

Repréſentons par V la vîteſſe imprimée; alors (210) nous aurons $AB = Vdt$. Donc $V^2dt^2 = \overline{AB}^2 = AD \times 2CA$.

Repréſentons par g, la vîteſſe que la force centrale feroit naître, en une ſeconde de temps, dans un mobile ſoumis à ſon action ſeule répétée également à chaque inſtant. Alors (197) l'eſpace qu'elle fera décrire pendant l'inſtant dt, ſera $\frac{gdt^2}{2}$. On aura donc $AD = \frac{gdt^2}{2}$; donc $V^2dt^2 = \frac{gdt^2}{2} \times 2CA$ ou $V^2 = g \times CA$. Soit h la hauteur, d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe V; & p la vîteſſe que la peſanteur donne dans une ſeconde; on aura $V^2 = 2ph$ (207). Donc $2ph = g \times CA$; ce qui donne $g : p :: 2h : CA :: h : \frac{1}{2}CA$; c'eſt-à-dire, que pour qu'un corps libre &

ſans peſanteur décrive une circonférence de cercle d'un rayon déterminé, en vertu d'une force dirigée à ſon centre, & d'une vîteſſe primitivement imprimée; il faut que la force centrale ſoit à la peſanteur, comme la hauteur d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe imprimée, eſt à la moitié du rayon. Ainſi, ſi la vîteſſe imprimée, & la force centrale n'ont point entr'elles le rapport néceſſaire pour cela, le corps ne peut décrire une circonférence de cercle. Mais ſi ce rapport a lieu, le corps décrira l'arc Ab.

489. Puiſque la force centrale eſt dirigée au centre C, elle eſt perpendiculaire à l'arc; elle ne tend donc ni à augmenter, ni à diminuer la vîteſſe du corps. Donc lorſque le corps ſera arrivé au point b, il ſe trouvera à l'égard de la force centrale, dans les mêmes circonſtances qu'au point A. D'où l'on conclura que *ſi un corps décrit une circonférence de cercle, en vertu d'une force dirigée au centre, & d'une vîteſſe imprimée; ſa vîteſſe eſt uniforme, & la force centrale eſt conſtante.*

490. Si le corps n'eſt pas libre; ſi, par exemple, le corps A (*Fig.* 47) eſt retenu au point fixe C, par le moyen d'un fil inextenſible, ou d'une verge. Alors ſi on lui

donne une impulſion ſuivant quelque direction que ce ſoit, tendante à l'écarter du centre, il décrira néceſſairement la circonférence qui a *CA* pour rayon ; & voici comment on doit concevoir que ſe paſſe ce mouvement. En quelque point *A* que le corps ſoit arrivé, il tend à ſe mouvoir ſuivant la tangente *AB* (485). Puis donc qu'il ne peut ſuivre ce mouvement, il faut (318) que celui-ci ſe décompoſe en deux autres, l'un *Ab* ſuivant la circonférence, & qui ſera celui qui aura lieu ; & l'autre *AD* qui ſoit détruit ; il faut donc que ce dernier ſoit dirigé ſuivant *CAD*, puiſqu'il n'y a que la réſiſtance du point fixe pour le détruire. Le mouvement ſe paſſera donc comme dans le cas précédent, avec cette différence ſeulement que la force centrale, au lieu d'être centripète, eſt centrifuge. Ainſi tout ce que nous avons dit du premier cas, a lieu pour celui-ci ; c'eſt-à-dire, 1°, que le mouvement ſera uniforme ; 2° que la force centrifuge ſera la même en chaque point de la circonférence, ou que le fil ſera conſtamment tendu avec la même force ; 3° que la force centrifuge, ſera à la peſanteur, comme la hauteur d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe actuelle du mobile *A*, eſt à la moitié du rayon *CA*.

Par exemple, ſuppoſant qu'un corps d'une livre, circule à l'extrémité d'une corde de 5 pieds, avec une vîteſſe de 30, 2 pieds par ſeconde. La hauteur dûe à cette vîteſſe étant 15, 1 pied, la force centrifuge de ce corps ſera à ſa peſanteur comme 15, 1 : $\frac{5}{2}$: : 30, 2 : 5 : : 6,04 : 1 ; donc ce poids d'une livre, tend la corde, comme le feroit un poids immobile de 6 livres & $\frac{4}{100}$; puiſque les forces ou quantités de mouvement que le même corps A peut avoir en vertu de ſa peſanteur & de ſa force centrifuge, ſont entr'elles, comme les vîteſſes g & p que ces deux forces peuvent engendrer dans un même temps.

491. Il eſt donc facile maintenant, de comparer entr'elles les forces centrifuges de deux mobiles quelconques qui décrivent des circonférences quelconques, avec des vîteſſes données, ou dans des temps donnés.

En effet, l'équation $V^2 = g \times CA$ que nous avons trouvée ci deſſus, donne $g = \frac{V^2}{C.A}$. Or puiſque g exprime la vîteſſe que la force centrale feroit naître, en une ſeconde de temps, dans le mobile, ſi elle agiſſoit ſur lui ſans interruption & également à chaque inſtant, gdt ſera la vîteſſe qu'elle engendreroit pendant un inſtant. Et $A \times gdt$, ſera la quantité de mouvement qu'elle donneroit à chaque instant au mobile ; donc cette quantité de mouvement sera $\frac{A \times V^2 dt}{CA}$, en mettant pour g sa valeur. Donc si l'on appelle F la force centrifuge absolue, ou cette quantité de mouvement, pour le corps A, on aura $F = \frac{A \times V^2 dt}{CA}$; ou bien, en nommant R, le rayon CA, $F = \frac{AV^2 dt}{R}$. Donc pour une autre masse A' qui décriroit avec une vîtesse V', une circonférence qui auroit R' pour rayon, on auroit $F' = \frac{A'V'^2 dt}{R'}$, en nommant F' sa force centrifuge. Donc $F : F' :: \frac{AV^2 dt}{R} : \frac{A'V'^2 dt}{R'}$ ou $:: \frac{AV^2}{R} : \frac{A'V'^2}{R'}$; c'est-à-dire, en général, *que les forces centrifuges de deux mobiles, sont entre-elles comme les masses multipliées par les quarrés des vîtesses, & divisées par les rayons des circonférences décrites.*

492. Soient C & C' ces circonférences; T & T' les temps que les deux mobiles emploient à faire une révolution. Puisque ces mouvements sont uniformes, on aura $V = \frac{C}{T}$, $V' = \frac{C'}{T'}$, (184). Et puisqu'en représentant le rapport du rayon à la circonférence par celui de 1 à c, on a $C = cR$,

& $C' = cR'$; donc $V = \frac{R}{T}$, & $V' = \frac{cR'}{T'}$; ſubſtituant pour V & V' ces valeurs, dans la proportion que nous venons de trouver, on a $F : F' :: \frac{Ac^2R^2}{RT^2} : \frac{A'c^2R'^2}{R'T'^2} :: \frac{AR}{T^2} : \frac{A'R'}{T'^2}$; donc *lès forces centrifuges ſont comme les maſſes multipliées par les rayons, & diviſées par les quarrés des temps des révolutions.*

493. D'après le rapport que nous avons établi (488) entre la peſanteur & la force centrifuge, & l'exemple que nous avons donné (490), on voit donc que lorſqu'un corps ſolide, ou pluſieurs corps ſolides liés entre-eux, tournent autour d'un point fixe, les parties de ces corps tendent à ſe déſunir, en s'éloignant du centre; que cet effort peut ſurpaſſer conſidérablement leurs poids. Et ce que nous venons de démontrer (492) fait voir que s'ils achevent leurs révolutions en même temps, leurs forces centrifuges ſont proportionnelles aux maſſes multipliées par les rayons; enſorte que les parties égales font d'autant plus d'effort pour ſe détacher, qu'elles ſont plus éloignées du centre de rotation.

Donc ſi un fluide peſant ou non peſant, circule, les parties font un effort continuel pour s'échapper & s'éloigner du centre, enſorte que ſi le fluide eſt renfermé dans un vaſe, & que l'on faſſe une ouverture à quelque diſtance du centre que ce ſoit, le fluide s'échappera. Par exemple, l'eau contenue dans le tambour *A D F C* (*Fig.* 48), étant agitée circulairement autour de l'axe *G H*, preſſe la ſurface convexe; & cette preſſion ſe répandant partout (327) ſi l'on fait une ouverture en quelque point *R*, elle jaillira par cette ouverture.

491. C'eſt d'après ce principe que l'on a imaginé les ſoufflets continus que l'on a propoſés pour renouveller l'air dans les vaiſſeaux. Le tambour fixe *A b C* (*Fig.* 49) eſt ouvert dans ſa partie *A C* où il reçoit le tuyau *F A C*. La roue dentée *Z* portée par le montant *D R*, tourne par le moyen de la manivelle *E*, & engrène dans une lanterne *X* dont l'arbre porte les aîles *ae*, *bf* &c. d'un volant, (*Fig.* 50) placé dans l'intérieur du tambour. Celles-ci, en tournant, impriment à l'air un mouvement de rotation & une force centrifuge qui l'oblige de ſortir par *F*. Près du centre *X* (*Fig.* 49) ſont pluſieurs trous *P*, *Q*, &c. par leſquels il entre de nouvel air, qui à ſon tour eſt chaſſé de même. Ainſi l'ouverture *F* du tuyau *F A C* aboutiſſant hors de la

cale, on peut faire ſortir l'air infect, & y faire ſuccéder un air pur. Ceux qui voudront connoître les autres moyens qu'on a imaginés pour purifier ou renouveller l'air dans les vaiſſeaux, peuvent conſulter l'ouvrage de M. *Duhamel*, qui a pour titre : *Moyens de conſerver la ſanté aux Equipages ;* & un Mémoire de M. *Bigot de Morogues*, qui a pour titre : *Sur la corruption de l'air dans les vaiſſeaux ; Mémoires préſentés à l'Académie, tome I.*

495. Une maſſe fluide dont les parties ne ſeroient ſollicitées par d'autres forces que par une tendance vers un point fixe C (*Fig.* 51), & qui auroit une figure ſphérique dont C ſeroit le centre, conſerveroit conſtamment cette figure, ſi cette tendance ou peſanteur vers le point C, étoit la même à diſtances égales de C ; cela eſt évident. Mais ſi cette maſſe a en même temps un mouvement de rotation autour d'une droite quelconque AB, elle ne pourra plus conſerver cette figure. En effet, une particule quelconque M décrivant, alors, un cercle qui a pour rayon PM, a une certaine force centrifuge qui tend à l'éloigner du centre P, avec un effort proportionné à ſa diſtance PM (492). Donc ſi l'on repréſente cet effort par Mm, & que l'effort de

la pesanteur ou de la tendance vers C soit représenté par MO, en imaginant le parallélogramme $mMOR$, MR sera la direction suivant laquelle la particule M est sollicitée à se mouvoir; & comme la force MO restant la même pour chaque particule située à la surface, la force Mm varie, & diminue à mesure qu'on s'éloigne du grand cercle ou de l'équateur représenté par EQ, il est visible que les forces absolues MR, qui sollicitent véritablement ces particules, sont toutes différentes, & dirigées vers différents points. La masse doit donc perdre sa figure sphérique. Mais quelle que soit celle qu'elle pourra prendre, elle doit (329) être telle que la force absolue MR qui sollicite chaque particule de la surface, soit perpendiculaire à cette nouvelle surface; donc la nouvelle figure $TVNX$ que prendra la masse, doit être telle que MR lui soit perpendiculaire; donc cette masse doit être applatie vers les pôles X & V, & renflée au contraire dans le sens de l'équateur, qui au lieu d'être EQ, deviendra TN.

Ceci est précisément le cas de la terre qui, soit qu'elle ait été primitivement fluide, soit qu'elle ait été en partie solide, & en partie fluide, a dû avoir originairement une figure applatie; sans quoi, en vertu des forces

forces centrifuges des différentes parties, il y auroit eu un bouleversement général jusqu'à ce que le tout eût pris la figure applatie convenable au mouvement de rotation.

MO est la vraie direction de la pesanteur, non pas de celle dont nous appercevons les effets; mais de celle qui auroit lieu, sans la rotation de la terre. *MR* est celle dont nous appercevons les effets, & c'est suivant cette ligne que tombent les corps situés près de la surface de la terre vers *M*. Ainsi la pesanteur actuelle ne sollicite pas les corps à descendre vers le centre de la terre. Mais comme les observations ont constaté que l'applatissement de la terre est petit, eu égard au rayon de l'équateur, le point *O* differe peu du point *C*.

Comme l'angle *mMO* est nécessairement obtus, il est facile de voir que *MR* est toujours plus petite que *MO*, & d'autant plus petite que le point *M* est plus près de l'équateur; ensorte que la pesanteur va en diminuant depuis les pôles jusqu'à l'équateur. Donc (471) la longueur du pendule qui bat les secondes, n'est pas la même dans tous les lieux de la terre; elle doit diminuer à mesure qu'on s'approche de l'équateur.

Aux pôles, où la force centrifuge est nulle, la pesanteur agit comme elle le feroit si la terre étoit immobile. A l'équateur, où la force centrifuge est directement opposée à la pesanteur primitive, la pesanteur est diminuée de toute la quantité de la force centrifuge. Dans les lieux intermédiaires, la diminution de la pesanteur décroît par deux causes ; la premiere, parce que la force centrifuge n'étant pas directement opposée à la pesanteur primitive, n'en consume qu'une partie d'autant moindre que l'arc MT est plus grand ; la seconde, parce que la force centrifuge diminue à proportion que le point M s'éloigne plus de l'équateur.

496. Ce que nous venons de dire de la mesure de la force centrifuge dans le cercle, appartient également à la force centrifuge d'un corps qui décrit une courbe quelconque ; toute la différence est, que la force centrifuge est différente en chaque point ; mais elle est toujours déterminée par l'équation $2ph = g \times R$, en nommant R le rayon de la développée ; c'est-à-dire, le rayon du cercle qui mesure la courbure de la courbe, en chaque point. Par-là on peut résoudre facilement cette question.

497. Trouver la courbe OMB (*Fig.* 52) le long de laquelle un corps descendant, tant en vertu de sa pesanteur, qu'en vertu d'une vîtesse primitivement imprimée, presseroit également en chaque point.

Si le corps n'avoit point de pesanteur, il n'en presseroit pas moins la courbe, en vertu de sa vîtesse imprimée, par l'effet de sa force centrifuge. Mais, à cette force il se joint une partie de la pesanteur qui étant dirigée suivant une ligne verticale MQ, se décompose en une force MS suivant la courbe, qui accélere le mouvement du corps; & une autre force MR qui presse la courbe. En sorte que celle-ci est pressée par l'action réunie de la force centrifuge & de la force MR.

Soit $AP = x$, $PM = y$, l'arc $OM = s$; p la vîtesse que la pesanteur imprime dans une seconde de temps; & par conséquent pdt celle qu'elle imprime dans l'instant dt; on a donc $MQ = pdt$. Or les triangles semblables Mrm, MRQ, donnent $MR = \frac{pdtdy}{ds}$. Mais l'équation $2ph = gR$ (dans laquelle R marque le rayon de la développée en M) donne $g = \frac{2ph}{R}$; & g étant la vîtesse que la force centrifuge feroit naître en une seconde de temps, dans un mobile sur lequel elle agiroit également & sans interruption pendant ce temps, gdt est la vitesse qu'elle donne au corps pendant l'instant dt ou pendant qu'il parcourt Mm; donc la vîtesse avec laquelle le mobile tend à s'écarter de la courbe, est $gdt + \frac{pdtdy}{ds}$, ou (en mettant pour g, sa valeur) est $\frac{2phdt}{R} + \frac{pdtdy}{ds}$. Donc en nommant M la masse du mobile, $\frac{2Mphdt}{R} + \frac{Mpdtdy}{ds}$ est la pression qu'il exerce sur le point M. Puis donc, qu'on veut que cette pression soit la même par tout; si l'on appelle M' la masse dont le poids $M'pdt$ est toujours équivalent à cette pression, on aura $\frac{2Mphdt}{R} + \frac{Mpdtdy}{ds} = M'pdt$, ou $\frac{2h}{R} + \frac{dy}{ds} = \frac{M'}{M}$.

Cela posé, (466), la hauteur h dûe à la vîtesse que le corps a, en M, est HP, ou $a + x$, en nommant a la hauteur AH dûe à la vîtesse au point O du départ; & (76) le rayon de la développée est $\frac{ds^3}{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. On a donc

$$\frac{2(a+x)\,dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}+\frac{dy}{ds}=\frac{M'}{M}.$$

Comme on n'a rien ſuppoſé conſtant, dans cette équation, nous pouvons, pour faciliter l'intégration, ſuppoſer conſtante, telle différentielle que nous voudrons. Suppoſons ds conſtante. Alors on a dds ou $d\sqrt{dx^2+dy^2}=0$; qui donne $dxddx+dyddy=0$, ou $ddx=-\frac{dyddy}{dx}$. Or $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)=dx^2\left(\frac{dxddy-dyddx}{dx^2}\right)$; donc $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{ds^2}{dx}ddy$. Notre équation ſe change donc en $2(a+x)\,ddy+dxdy=\frac{M'}{M}dsdx$; ou, en diviſant par $2(a+x)^{\frac{1}{2}}$, $(a+x)^{\frac{1}{2}}ddy+\frac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{2}}dxdy$ $=\frac{M'}{M}\times\frac{1}{2}(a+x)^{-\frac{1}{2}}dsdx$, dont l'intégrale eſt. . . . .

$$(a+x)^{\frac{1}{2}}dy=\frac{M'}{M}(a+x)^{\frac{1}{2}}ds+Cds.$$

Pour déterminer la conſtante C, ſuppoſons que la tangente de la courbe au point de départ O, faſſe avec la verticale un angle dont le ſinus ſoit q; comme ce ſinus eſt d'ailleurs exprimé par $\frac{dy}{ds}$ on aura $q=\frac{M'}{M}+\frac{C}{\sqrt{a}}$; donc. . . . .
$C=\left(q-\frac{M'}{M}\right)\sqrt{a}$. Regardant donc C, comme déterminé, nous aurons $ds=\frac{(a+x)^{\frac{1}{2}}dy}{\frac{M'}{M}(a+x)^{\frac{1}{2}}+C}$, & ds^2 ou $dx^2+dy^2=\frac{(a+x)\,dy^2}{\left(\frac{M'}{M}(a+x)^{\frac{1}{2}}+C\right)^2}$; donc. . . . .

$$dy=\frac{dx\left(\frac{M'}{M}(a+x)^{\frac{1}{2}}+C\right)}{\sqrt{a+x-\left(\frac{M'}{M}(a+x)^{\frac{1}{2}}+C\right)^2}};$$ équa-

tion qui s'intégre exactement lorfque $M' = M$, dans tout autre cas, elle dépend des logarithmes, ou des arcs de cercle, felon que M' eft plus petit ou plus grand que M; c'eft ce que l'on verra aifément en rendant le fecond membre rationel.

Il n'y auroit de différence que pour l'intégration, fi au lieu de fuppofer que la preffion eft conftante, on exigeoit qu'elle variât fuivant une loi donnée. Alors $\frac{M'}{M}$, feroit une quantité variable, dont la loi feroit donnée. Par exemple, fi l'on vouloit que la preffion, en chaque point, fût comme la vîteffe; $\frac{M'}{M}$ feroit proportionnelle à $\overline{a + x}^{\frac{1}{2}}$. On mettroit donc, dans la premiere équation différentielle, $k(a + x)^{\frac{1}{2}}$, au lieu de $\frac{M'}{M}$, k étant une quantité donnée; & l'on intégreroit.

Du Mouvement des Projectiles.

498. PAR *Mouvement des Projectiles*, nous entendons celui que prennent les corps qui ayant été lancés avec une force quelconque, font enfuite abandonnés à l'action de leur pefanteur, & à la réfiftance du fluide qui remplit l'efpace, ou le *milieu* dans lequel ils fe meuvent, lorfque ce milieu eft occupé par un fluide. Voyons d'abord quelle feroit la courbe que décriroient les projectiles, fi le milieu dans lequel ils fe meuvent, ne réfiftoit pas.

Imaginons donc qu'au point A (*Fig.* 53) on ait lancé un mobile fuivant la direction

AZ, & avec une vîteſſe quelconque. Si la peſanteur n'agiſſoit pas, il ſe mouvroit uniformément ſur la droite AZ. Mais comme la peſanteur agit ſans interruption, il ne ſera ſur la droite AZ que pendant un temps infiniment petit, & décrira, au lieu de AZ, une ligne courbe ABC dont AZ ſera tangente au point A, puiſque AZ eſt une des directions inſtantanées, du mobile.

Pour déterminer la nature de cette ligne courbe, je ſuppoſe que AE eſt la vîteſſe imprimée, ou le nombre de pieds que le mobile décriroit par chaque ſeconde s'il conſervoit toujours cette vîteſſe ; & au moment où il part du point A, je conçois cette vîteſſe compoſée de deux autres, l'une AD horiſontale, & l'autre AF verticale. Il eſt clair que la direction de la peſanteur étant verticale ou perpendiculaire à AD, l'action de la peſanteur, ne tend ni à diminuer ni à augmenter la vîteſſe AD; que par conſéquent, quelque part où ſe trouve le mobile dans la ſuite de ſon mouvement, il conſervera conſtamment une même vîteſſe parallélement à l'horiſon. Quant à la vîteſſe ſuivant AF, lorſque le mobile en vertu de ſa vîteſſe conſtante parallélement à l'horiſon, ſe trouvera s'être avancé d'une quantité égale à AP, il ne se trouvera pas élevé à une hauteur PN égale à celle où il feroit arrivé sans l'action de la pesanteur, mais à quelque point M plus bas, dans la même ligne verticale PN; parce que sa vîtesse dans le sens vertical étant directement contraire à celle de la pesanteur, l'espace qu'il décriroit en vertu de cette vîtesse verticale, doit être diminué de tout ce que l'action de la pesanteur pourroit faire décrire à un mobile en pareil temps.

Nommons donc V la vîtesse imprimée suivant AZ, ou le nombre de pieds que le projectile décriroit uniformément, à chaque seconde, en vertu de cette vîtesse, & t le temps, ou le nombre de secondes ou de parties de seconde qu'il emploieroit à venir de A, au point quelconque N. On aura $AN = Vt$, (185).

Soit p la vîtesse que la pesanteur donne en une seconde de temps, $\frac{pt^2}{2}$ sera l'espace qu'un corps pesant décrira dans le nombre t de secondes (197). Donc si M est le point où le corps arrive réellement au bout du temps t, on aura $NM = \frac{1}{2}pt^2$.

Par le point A, menons la verticale AX & par le point M, la ligne MQ parallele à la tangente AZ; nommons AQ, x', &

QM qui eſt égale à AN, y'. Nous aurons donc $x' = \frac{1}{2}pt^2$, & $y' = Vt$. Si de cette derniere équation on tire la valeur de t, pour la ſubſtituer dans la premiere, on aura $x' = \frac{\frac{1}{2}py'^2}{V^2}$, ou $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}x' = y'^2$. Mais (207) $\frac{V^2}{2p}$ exprime la hauteur dont un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe V; donc ſi on appelle h cette hauteur, on aura $\frac{V^2}{2p} = h$, & par conſéquent $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p} = 4h$; donc $4hx' = y'^2$. Donc chaque point M de la courbe AMC, a cette propriété, que le quarré de l'ordonnée y' ou QM parallele à la tangente AZ, eſt égal au produit de l'abſciſſe AQ, par une ligne conſtante $4h$; donc (*Alg.* 366) la courbe AMC eſt une parabole qui a pour diametre, la ligne verticale AX; qui a pour parametre, le quadruple de la hauteur dûe à la vîteſſe de projection; & dont l'angle AQM que les ordonnées font avec ce diametre, eſt le complément de l'angle de projection ZAC; donc connoiſſant la vîteſſe de projection & l'angle de projection, il ſera facile de conſtruire cette courbe, par ce qui a été dit (*Alg.* 367).

496. Examinons maintenant quelques-unes des propriétés de cette courbe conſidérée comme la trace des projectiles; &

pour cet effet, rapportons-en les différents points M, à la ligne horisontale AC, en menant PM perpendiculaire sur AC.

Nommons AP, x; PM, y; a l'angle de projection ZAC. Dans le triangle rectangle APN, nous aurons $1 : AN :: \sin NAP : PN :: \cos NAP : AP$; donc $PN = Vt \sin a$, & $AP = Vt \cos a$; donc puisque $MN = \frac{1}{2}pt^2$, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, on a $PM = Vt \sin a - \frac{1}{2}pt^2$. On a donc $x = Vt \cos a$; & $y = Vt \sin a - \frac{1}{2}pt^2$. Tirant de la premiere, la valeur de t, & la substituant dans la seconde, on aura, toute réduction faite, & en mettant pour $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}$, sa valeur $4h$, $4hy \cos^2 a = 4hx \sin a \cos a - xx$, qui nous fournit les propriétés suivantes.

497. Comme la vîtesse imprimée au mobile, ne peut avoir qu'une certaine mesure, son effet dans le sens vertical, doit être épuisé au bout d'un certain temps, par l'action de la pesanteur; ensorte qu'il y aura un terme où le corps cessera de monter, pour descendre ensuite; mais comme sa vîtesse horisontale n'est point altérée, lorsqu'il sera arrivé au point B le plus élevé; il décrira la seconde branche BC de la même courbe, & viendra rencon-

trer de nouveau l'horiſontale, en un autre point C. Or pour connoître la diſtance AC qu'on appelle *l'amplitude du jet*, il eſt viſible qu'il n'y a autre choſe à faire, qu'à ſuppoſer $y = 0$. On aura donc $4hx \sin a \cos a - xx = 0$, qui donne $x = 0$, & $x = 4h \sin a \cos a$. La premiere valeur de x, indique le point A; & la ſeconde eſt celle de AC, que l'on déterminera en prolongeant XA d'une quantité $AK = 4h$, abaiſſant du point K, la perpendiculaire KL ſur AZ, & du point L la perpendiculaire LC, ſur AC; on aura alors $AC = 4h \sin a \cos a$.

498. Si, pour une même vîteſſe de projection, on veut ſavoir quel eſt l'angle qui donne la plus grande amplitude; il faut (45) différencier la valeur de AC en regardant a comme variable, & égaler cette différentielle à zéro, on aura donc $4hda \cos^2 a - 4hda \sin^2 a = 0$, d'où l'on tire $\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = 1$, ou $\tang^2 a = 1$; donc $\tang a = 1$; c'eſt-à-dire, que la tangente de l'angle de projection eſt alors égale au rayon; cet angle eſt donc de 45°. Donc *la plus grande amplitude a lieu, lorſque l'angle de projection eſt de 45°.*

499. Dans ce même cas, on a $\sin a = \cos a = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; donc la valeur de AC

eſt, alors, $4h \times \frac{1}{2}$ ou $2h$; donc *la plus grande amplitude, eſt le double de la hauteur dont un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe de la projection.*

Par-là, on peut eſtimer la force de la poudre; en tirant ſous l'angle de 45°, & meſurant l'amplitude, on a la valeur de h qui ſert à déterminer la vîteſſe que la poudre peut imprimer au projectile; & l'on a en même temps, en prenant le double de cette amplitude, le parametre du diametre AX qui ſert à conſtruire la courbe, ainſi qu'à déterminer les angles de projection, comme nous le verrons inceſſamment.

500. Veut-on ſavoir où eſt le point le plus élevé de la courbe? Il faut égaler à zéro, la différentielle de y priſe en regardant x ſeule comme variable. On aura donc $4h\,dx\,\mathit{ſin}\ a\ \mathit{coſ}\ a - 2x\,dx = 0$; d'où l'on tire $x = 2h\,\mathit{ſin}\ a\ \mathit{coſ}\ a$; donc puiſque nous avons trouvé $AC = 4h\,\mathit{ſin}\ a\ \mathit{coſ}\ a$, ſi l'on imagine la perpendiculaire BD, on aura $AD = \frac{1}{2} AC$. Et ſi l'on ſubſtitue pour x, la valeur $2h\,\mathit{ſin}\ a\ \mathit{coſ}\ a$, dans l'équation, on aura y ou $BD = h\,\mathit{ſin}^2\ a$, ce qui détermine le ſommet de l'axe puiſque dy étant zéro au point B, la tangente en B eſt parallele à AC ou perpendiculaire à BD.

501. Voyons maintenant, comment on

détermine la direction AZ (*Fig.* 54) qu'on doit donner au mobile, pour qu'il tombe sur un point donné M; c'est-à-dire, par exemple, quelle inclinaison on doit donner au mortier pour faire tomber une bombe sur un point connu M.

Ayant imaginé la perpendiculaire MP, on doit regarder la distance AP, & l'angle MAP, comme connus. Soit donc l'angle $MAP = b$, & la distance $AP = c$; on aura $MP = \frac{c \sin b}{\cos b}$. On a donc pour le point M, $x = c$, & $y = \frac{c \sin b}{\cos b}$. Substituant ces valeurs, dans l'équation en x & y, on a $4h \sin b \cos^2 a = 4h \sin a \cos a \cos b - c \cos b$, ou . . . . $4h \cos a (\sin a \cos b - \sin b \cos a) = c \cos b$, ou (*Alg.* 415) $4h \cos a \sin (a - b) = c \cos b$; ou (*Alg.* 418) $2h \sin (2a - b) = 2h \sin b + c \cos b$; donc enfin $\frac{2h}{\cos b} \sin (2a - b) = \frac{2h \sin b}{\cos b} + C$, qui donne la construction suivante.

Ayant élevé sur AM la perpendiculaire indéfinie AE, du milieu D de $AK = 4h$, on menera sur AK la perpendiculaire DE qui coupera AE en un point E duquel, comme centre, & du rayon EA on décrira l'arc $ANNK$; & ayant prolongé PM jusqu'à ce qu'elle rencontre cet arc aux points N & N', si on tire ANZ, ANZ', ces lignes feront les deux directions suivant lesquelles un mobile étant lancé avec une vîtesse dûe à la hauteur h, peut également arriver au point N.

En effet, il est facile de voir que l'angle EAD du triangle rectangle ADE, est égal à MAP. Donc puisque $AD = 2h$, on a $ED = \frac{2h \sin b}{\cos b}$; & puisque $AP = c$, on a donc $ED + AP$, ou $EI = \frac{2h \sin b}{\cos b} + c$; donc $\frac{2h \sin (2a - b)}{\cos b} = EI$. Mais dans le même triangle ADE, on a $AE = \frac{2h}{\cos b}$; donc $AE \sin (2a - b) = EI$. Concevons l'arc KNA prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre, en G, la verticale GE; & des points N & N' menons les perpendiculaires NL, $N'L'$. Dans le triangle NEL, on a $NE : NL$, ou $AE : EI :: 1 : \sin NEG$, donc $AE \sin NEG = EI$; donc on a aussi $\sin (2a - b) = \sin NEG$; & $2a - b = NEG = NEA + b$; donc $a = \frac{1}{2} NEA + b$. Mais à cause que l'angle NAM a son sommet à la circonférence, & que AM est tangente, on a $NAM = \frac{1}{2} NEA$; d'ailleurs l'angle $MAP = b$; donc $a = NAM + MAP = NAP$; donc le point N satisfait à la question.

On prouvera de même, que le point N' y satisfait aussi ; parce que dans le triangle $N'EL'$ on a $N'E : N'L'$ ou $AE : EI ::$ $1 : \sin N'EL'$ ou $:: 1 : \sin N'EG$; donc $AE \sin N'EG = EI$; donc aussi . . . $\sin(2a-b) = \sin N'EG$, & $2a-b = N'EG = N'EA + b$; donc $a = \frac{1}{2} N'EA + b = N'AM + MAP = N'AP$.

502. Ainsi avec une même force de projection, on peut toujours faire tomber un projectile sur un même but M, suivant deux directions différentes, pourvu que AP n'excede pas DR. La direction AN' est la plus avantageuse lorsqu'il s'agit d'écraser avec la bombe des édifices, ou autres objets. La direction AN est préférable lorsqu'on ne veut que renverser, & que le projectile après avoir rencontré le but, puisse encore en se relevant, ravager à quelque distance : ceci nous conduit à dire un mot des *Ricochets ;* mais auparavant, faisons remarquer que l'équation $x = Vt \cos a$ que nous avons trouvée ci-dessus, donne une expression simple du temps employé à venir de A, au point quelconque M. Il ne s'agit que de mettre pour x, sa valeur c, & pour V sa valeur $\sqrt{2ph}$. On aura donc $t = \frac{c}{\cos a \sqrt{2ph}}$. Or nous

avons vu ci-dessus, comment on détermine h, par expérience, & nous savons que $p = 30, 2^{\text{pieds}}$.

Quand l'inclinaison est de 45°, $cos\ a$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on a $t = \frac{c}{\sqrt{ph}}$; donc si le point M est dans l'horisontale, ce qui donne c égal à l'amplitude, ou $= 2h$ (499); alors $t = 2\sqrt{\frac{p}{h}}$.

L'expression générale du temps, que nous venons de donner, peut servir à régler les fusées des bombes. Venons aux Ricochets.

503. Le *Ricochet* est ce mouvement par lequel un projectile après avoir rencontré un obstacle quelconque, se releve, se réfléchit pour recommencer un mouvement semblable à celui qu'il avoit d'abord. Plus la direction suivant laquelle le mobile est lancé, fait un petit angle avec l'horison, & plus (toutes choses d'ailleurs égales) le projectile est dans le cas de faire ricochet; parce qu'alors la force de projection s'exerce presque toute entiere dans le sens horisontal, & ne peut être consumée par la résistance de l'air & les autres obstacles, qu'en beaucoup plus de temps. Si le projectile étoit sans ressort, que la surface sur laquelle il tombe fut horisontale & sans

flexibilité, il ne pourroit y avoir de ricochet; parce que la vîtesse du projectile arrivant en *C* (*Fig.* 55) suivant la direction quelconque *MC*, se décomposeroit en deux autres; dont l'une *QC* perpendiculaire à la surface seroit purement & simplement détruite sans aucune restitution, puisqu'il n'y a point de ressort; l'autre vîtesse *PC* subsisteroit, abstraction faite du frottement & de la résistance de l'air, & le corps glisseroit le long de *CZ*.

504. Mais si au point *C* (*Fig.* 56) où le mobile rencontre la surface, il se trouve une éminence *CE*; le mouvement suivant *MC* se décomposera en un mouvement *QC* perpendiculaire à la surface *CE* de cette éminence, & un autre *PC* suivant cette surface, par lequel le mobile s'avancera suivant la direction *PE*, & pourra décrire en quittant le point *E* une nouvelle courbe de même nature que celle qu'il auroit décrite s'il eût été lancé, au point *E*, suivant *CE* avec la même vîtesse; ensorte qu'il s'élevera jusqu'à un certain terme, puis reviendra rencontrer encore la surface en un autre point *I*, où il pourra recommencer un mouvement semblable si les circonstances sont semblables.

505. Le ricochet dont nous venons de

de parler, dépend donc de la position de l'obstacle que le mobile rencontre. Mais si l'obstacle est flexible ou mobile, comme la terre, l'eau, &c. il peut y avoir ricochet, quand même la surface seroit parfaitement horisontale. En effet, par la vîtesse verticale QC (*Fig.* 37) le mobile tend à s'enfoncer & s'enfonce plus ou moins, selon la nature de l'obstacle; tandis qu'avec la vîtesse PC, il laboure le terrein & forme un sillon dont la profondeur augmente jusqu'à ce que la vîtesse verticale QC soit éteinte. Alors par la vîtesse restante dans le sens horisontal, il refoule devant lui la matiere qui s'oppose, & l'écarte pour se frayer un passage du côté où il éprouve le moins de résistance; dans ce refoulement, la cavité du sillon devient à l'égard du mobile, ce que la surface CE de la *fig.* 56 étoit dans le cas précédent. Or comme la faculté de sortir est évidemment d'autant plus grande (toutes choses d'ailleurs égales) que la profondeur totale du sillon sera moins grande, & que cette profondeur dépend de la vîtesse verticale QC, qui sera d'autant plus petite que l'angle MCP sera plus petit, ou que l'angle de projection RAZ, aura été plus petit, on voit comment la facilité du ricochet dépend de ce que l'angle de projection soit petit.

506. Le ricochet dépend encore beaucoup de la figure du projectile. S'il s'agit, par exemple, d'un ricochet sur l'eau, & que le projectile soit sphérique, il faut pour qu'il puisse y avoir ricochet, que la vîtesse *MC* soit telle que la vîtesse verticale *QC* puisse être consumée avant que le diametre vertical soit entierement plongé; car dès qu'une fois celui-ci est entiérement plongé, la résistance de l'eau agit également de part & d'autre de la direction du mobile, ensorte qu'il ne peut plus être détourné que par l'action de la pesanteur qui ne tend elle-même qu'à empêcher le ricochet.

507. Comme l'enfoncement ne se fait que successivement, il est facile de voir que pendant la durée de cet enfoncement, le centre décrit une ligne courbe; parce que la direction suivant laquelle se fait la résistance, change continuellement. Par exemple, si lorsque le centre *C* (*Fig.* 58) après avoir décrit la trace quelconque *PC* tend à se mouvoir suivant le prolongement *CI* de sa direction actuelle, on imagine deux tangentes *BR*, *DS* paralleles à cette direction; il est évident qu'il n'y a que la partie *BVL* qui éprouve la résistance; & que si le corps est sphérique, la résul-

tante CK de toutes les résistances faites sur les différents points de BVL, aura une direction qui tend à élever le corps au-dessus de CI; en sorte qu'en imaginant le parallélogramme $CIEK$, CE sera la route que le corps prendra, au lieu de CI, abstraction faite de la pesanteur.

508. Enfin si le mobile & l'obstacle sont flexibles, s'ils sont à ressort ; ces circonstances peuvent encore contribuer à faciliter le ricochet. Pour en donner un exemple, prenons un cas très simple ; supposons que le mobile seul est flexible & à ressort, & que ce ressort soit parfait ; faisons de plus, abstraction de la pesanteur. A l'instant où le mobile lancé suivant AC (*Fig.* 59) vient toucher la surface, sa vîtesse se décompose en une vîtesse horisontale QC qui subsistera toujours la même, s'il n'y a point de frottement, & point de résistance de la part du milieu dans lequel le corps se trouve. Quant à la vîtesse perpendiculaire ou verticale PC, elle comprime le corps, & ne s'éteignant que successivement tandis que la vîtesse horisontale subsiste, il est clair que le centre C s'approche du plan HZ par des degrés qui vont toujours en décroissant, tandis que ceux par lesquels il s'avance parallelement

à *HZ*, demeurent les mêmes. Donc si l'on conçoit qu'à chaque instant on forme un parallélogramme dont le côté horisontal soit au côté vertical, comme la vîtesse horisontale, est à la vîtesse restante dans le sens vertical, la diagonale de ce parallélogramme qui doit, pour chaque instant, marquer la route du centre, sera différente & différemment située à chaque instant, en sorte que le centre *C* s'approchera de *HZ* en décrivant une ligne courbe pendant le temps de la compression. Lorsque la compression cessera de se faire, le centre *C* sera mu pendant un instant, sur la tangente parallele à *HZ*; après quoi le ressort se débandant, restituera au corps des degrés de vîtesse par lesquels le centre tendra à s'écarter du plan, de la même maniere qu'il s'en est approché pendant la compression, & décrira la seconde branche *RO* parfaitement égale à *RC*. Enfin lorsqu'il sera arrivé au point *O* éloigné de *HZ* d'une quantité égale au rayon *IC*, il se mouvra suivant la tangente *OT* située de la même maniere que *AC*; c'est-à-dire, que le choc oblique d'un corps à ressort contre un plan inflexible & inébranlable, se fait (abstraction faite de la pesanteur), de maniere que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence; chacun de ces deux angles étant mesuré par celui que font avec le plan horisontal les tangentes aux extrémités *C* & *O* de la courbe que le centre décrit pendant la compression & la restitution du ressort ; courbe qui est d'autant plus petite que cette compression & restitution approchent plus d'être instantanées.

509. Si l'on a égard à la pesanteur, & que *B D* soit la ligne suivant laquelle le corps est lancé ; il décrira la portion *D C* de parabole dont *B D* est la tangente, jusqu'à ce qu'il touche le plan ; puis lorsque la compression aura cessée, il décrira une autre portion *S O* de parabole, parfaitement égale à la premiere, & posée de la même maniere.

510. Le frottement contribue encore à la facilité du ricochet ; parce qu'il occasionne dans le mobile une rotation qui le met à même de surmonter plus facilement les obstacles : c'est ce qu'on verra encore mieux quand nous aurons parlé du frottement. Telles sont les causes & les circonstances principales des ricochets.

511. Terminons ce que nous venons de dire sur le mouvement des projectiles dans un milieu non résistant, en observant que puisque la pesanteur écarte les corps

de la direction qu'on leur imprime, & les ramene vers la surface de la terre, lorsqu'on vise à quelque objet que l'on veut atteindre en y tirant ou lançant un autre corps, on doit toujours viser au-dessus de cet objet, & d'autant plus au-dessus que la distance est plus grande, & que la force d'impulsion est moindre. C'est pour cette raison que dans les armes à feu, la ligne de mire fait un angle avec l'axe de la piece; en sorte que ces deux lignes prolongées se rencontreroient au-delà de la bouche, par rapport à la culasse. Le projectile, balle, ou boulet, chassé suivant l'axe, part suivant une direction qui fait avec l'horison un angle plus grand que celui que fait la ligne de mire, & se trouve dans le même cas que si l'on avoit visé suivant l'axe, mais au-dessus de l'objet.

512. Remarquons encore, qu'il peut arriver que quoiqu'en apparence on n'ait donné aucune impulsion à un corps, & qu'on semble l'abandonner à la seule pesanteur, néanmoins ce corps décrive la ligne courbe commune à tous les projectiles; par exemple, un corps qu'on laisseroit tomber librement de la hune d'un vaisseau en mouvement, décrit réellement une ligne courbe. Si l'on regarde le point du navire où

il tombera, on le verra autant éloigné du mât, que l'étoit le point d'où le mobile est parti ; ce qui fait voir qu'à l'égard du mât le mobile a décrit une ligne droite parallele au mât, mais à l'égard d'un spectateur placé hors du navire, il a réellement décrit une parabole (du moins abstraction faite de la résistance de l'air). Car lorsqu'il a été abandonné à sa pesanteur, il avoit la même vîtesse que le vaisseau, puisqu'il étoit transporté avec le vaisseau. Il s'est donc trouvé dans le même cas que si le vaisseau étant immobile, on l'eût lancé avec une vîtesse égale à celle du vaisseau, & dans le même sens. On voit par-là, en même-temps, pourquoi néanmoins il décrit à l'égard du mât, une ligne droite parallele à ce mât ; puisqu'ayant dans le sens du mouvement de celui-ci, la même vîtesse, il doit se trouver toujours également éloigné de lui.

513. Voyons maintenant, comme on doit s'y prendre pour déterminer la courbe que décrivent les projectiles lorsque le milieu résiste. Concevons que *ABC* (*Fig.* 60) est la courbe cherchée, & que le mobile décrit actuellement l'arc infiniment petit *Mm*. Sans l'action de la résistance & de la pesanteur il décriroit dans l'instant suivant la ligne *mq*, située sur le prolongement de *Mm*. Supposant que pendant cet instant la résistance puisse le retarder de la quantité *qn*, & que la pesanteur puisse le faire descendre de la quantité *nm'*; le point *m'* sera donc celui où il arrivera dans le second instant.

Menons qr parallele à la verticale MP, & ns parallele à l'horisontale AC. Nommons AP, x; PM, y; l'arc AM, s; & supposons que R & p marquent la résistance & la pesanteur du mobile dans le fluide; c'est-à-dire, les vîtesses que ces forces engendreroient en une seconde, si elles agissoient également à chaque instant pendant la durée de cette seconde. On aura Rdt & pdt pour les vîtesses qu'elles engendrent pendant un instant (211). Concevons que la diminution de vîtesse que produit la résistance, & qu'on peut supposer représentée par qn, soit décomposée en deux autres, l'une qs, verticale; & l'autre qo, horisontale. On aura $nq : qs ::$ Rdt est à la diminution de vîtesse occasionnée par la résistance dans le sens vertical. On aura de même $nq : sn ::$ Rdt est à la diminution de vîtesse dans le sens horisontal. Or, en tirant Mt parallele à AC, on a $nq : sq : sn ::$ $Mm : mt : Mt ::: ds : dy : dx$; donc la diminution de vîtesse suivant qs sera $\frac{Rdydt}{ds}$; & celle suivant sn, sera $\frac{Rdxdt}{ds}$. Donc si à la premiere on joint l'action pdt de la pesanteur, on aura $\frac{Rdydt}{ds} + pdt$, & $\frac{Rdxdt}{ds}$ pour les diminutions de vîtesse tant dans le sens vertical que dans le sens horisontal. Mais tandis que le corps décrit Mm, il s'avance parallélement à PM de la quantité tm, ou dy; & parallélement à AF, de la quantité Mt, ou dx. Donc sa vîtesse parallélement à PM est $\frac{dy}{dt}$; & parallélement à AP, elle est $\frac{dx}{dt}$. Donc lorsqu'il décrira mm', ces vîtesses seroient $\frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, si elles alloient en croissant; donc $-d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $-d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ sont les diminutions de ces vîtesses. On a donc $\frac{Rdydt}{ds} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $\frac{Rdxdt}{ds} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Ce sont là les deux équations dont l'intégration déterminera le mouvement & la courbe. Voyons-en quelques applications.

514. Si la résistance est nulle ; on a $p\,dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $o = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, qui donnent $pt = C - \frac{dy}{dt}$, & $C' = \frac{dx}{dt}$. Pour déterminer ces deux constantes, supposons que AZ est la ligne de projection ; que l'angle ZAC soit a ; & que la vitesse de projection soit V ; on aura $V \cos a$ pour la vîtesse horisontale initiale ; & $V \sin a$ pour la vîtesse verticale initiale. Donc les constantes C & C' doivent être telles que lorsque $t = o$, on ait $\frac{dx}{dt} = V \cos a$ & $\frac{dy}{dt} = V \sin a$. On a donc $o = C - V \sin a$, & $C' = V \cos a$. Donc $pt = V \sin a - \frac{dy}{dt}$, & $V \cos a = \frac{dx}{dt}$. Donc $y = Vt \sin a - \frac{1}{2}pt^2$, & $x = Vt \cos a$; intégrales auxquelles nous n'ajoutons point de constantes, parce que y & x deviennent zéro dans cette équation lorsque $t = o$, ainsi que cela doit être. On aura donc enfin $y = \frac{x \sin a}{\cos a} - \frac{\frac{1}{2}px^2}{V^2 \cos^2 a}$; ou en appellant h la hauteur dûe à la vîtesse V, $y = \frac{x \sin a}{\cos a} - \frac{x^2}{4h \cos^2 a}$, équation qui est absolument la même que nous avons trouvée pour ce cas. (496).

515. Que la résistance soit proportionnelle à la vîtesse. On aura $R = \frac{g\,ds}{dt}$, g étant une constante. Alors nos deux équations deviennent $g\,dy + p\,dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $g\,dx = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$; qui étant intégrées, donneront $dy + gy\,dt + pt\,dt = C\,dt$, & $dx + gx\,dt = C'dt$, dont les constantes C & C' se détermineront comme dans le cas précédent, en observant d'ailleurs que x & y sont zéro lorsque $t = o$.

Pour intégrer de nouveau ces deux équations, je les multiplie par e^{gt} ; e étant le nombre dont le logarithme est 1. En intégrant (147), j'ai $ye^{gt} + e^{gt}\left(\frac{p}{g}t - \frac{p}{gg}\right) =$

$\frac{C}{g} e^{gt} + C''$, & $x e^{gt} = \frac{C}{g} e^{gt} + C'''$.

Pour déterminer les constantes C'' & C''', on observera que y, x & t doivent être zéro en même temps. On aura donc $C'' = -\frac{C}{g} - \frac{p}{gg}$, & $C''' = -\frac{C'}{g}$; donc $y = -\left(\frac{C}{g} + \frac{p}{gg}\right) e^{-gt} + \frac{C}{g} + \frac{p}{gg} - \frac{p}{g} t$; & $x = \frac{C'}{g} - \frac{C'}{g} e^{-gt}$; équations toutes séparées, à l'aide desquelles il sera facile de construire la courbe.

516. Supposons enfin que la résistance est proportionnelle au quarré de la vîtesse, ce qui est le cas le plus conforme à la nature. On a donc $R = \frac{g\,ds^2}{dt^2}$; & nos deux équations générales deviennent $\frac{g\,dy\,ds}{dt} + p\,dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $\frac{g\,dx\,ds}{dt} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Supposons, pour plus de simplicité, que dt soit constant; & éliminons ds; nous aurons $\frac{ddx}{dx} = \frac{p\,dt^2 + ddy}{dy}$, ou $p\,dt^2 = -dx\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Mais l'équation $\frac{g\,dx\,ds}{dt} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ou $g\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = -\frac{ddx}{dx^2}$, étant multipliée par $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ donne $g\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = -\frac{ddx}{dx^2}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ou en mettant dans le second membre $-\frac{p\,dt^2}{dx}$ au lieu de $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, donne $g\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = p\,dt^2 \frac{ddx}{dx^3}$, dont le second membre est intégrable exactement, & dont le premier l'est en partie exactement, & en partie par logarithmes. On aura donc $C - \frac{p\,dt^2}{2\,dx^2}$ . . . . .

$$\frac{\frac{1}{2}g\,dy}{dx}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+\tfrac{1}{2}g\log\left(\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right);$$

d'où en remettant pour $\frac{p\,dt^2}{dx}$ sa valeur, on conclura $dx =$

$$\frac{-d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{2C-g\frac{dy}{dx}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}-g\log\left(\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right)}.$$

Donc faisant $\frac{dy}{dx}=z$, on aura x en quarrant la courbe qui a pour absciss. z, & pour ordonnée l'unité divisée par ce en quoi se change le dénominateur de la valeur de dx, lorsqu'on y met z au lieu de $\frac{dy}{dx}$. Enfin on aura $y=\int z\,dx$.

A l'égard du temps t, puisqu'on a $p\,dt^2 = -\,dx\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ on a $dt=\sqrt{-\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; or on a dx exprimé en $\frac{dy}{dx}$. C'est-à-dire, en z; on aura donc t en z par les quadratures. Enfin la vîtesse u ou $\frac{ds}{dt}=\frac{dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{-\frac{dx}{p}d\left(\frac{dy}{dx}\right)}}$, quantité que l'on ramenera à ne renfermer que $\frac{dy}{dx}$ & des constantes, en y mettant pour $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ sa valeur tirée de l'équation de la courbe trouvée ci-dessus.

On voit donc que quoique la courbe que les projectiles décrivent dans les milieux résistants soit beaucoup plus composée que la parabole, on peut néanmoins en déterminer tous les points, ou par le calcul, ou par des constructions. Mais comme ces constructions ne paroissent pas pouvoir être ramenées à quelque chose de bien commode dans la pratique, nous ne nous y arrêterons pas. Nous ferons seulement remarquer que ce que nous avons appellée g eſt ce que (431) nous avons repréſentée par $\frac{n D s}{M}$; & que ce que repréſente ici p, c'eſt ce que (431) nous avons exprimé par $\left(1 - \frac{D'}{D}\right) p$; quantité que l'on peut, ſans erreur ſenſible, ſuppoſer $= p$, lorſqu'il s'agit de l'air, à moins que le mobile ne fût d'une matiere fort rare.

Nous avons ſuppoſé qu'il ne ſe faiſoit aucun vuide derriere le corps. Mais ſi le corps en partant alloit aſſez vîte pour laiſſer un vuide, la réſiſtance ſuivant la tangente ſeroit augmentée de la preſſion du fluide ſur la partie antérieure du corps.

De quelques autres Mouvements en ligne courbe.

517. Les forces que nous avons ſuppoſées agir ſur le projectile, ont été ſuppoſées dans un même plan avec la direction de l'impulſion primitive. Tant que les forces ſont ainſi dans un même plan, on peut toujours, (227) en quelque nombre qu'elles ſoient, les réduire à une ſeule. Mais il eſt plus commode de les réduire à deux (254) paralleles à deux droites données de poſition. L'exemple que nous allons en donner, ſuffira pour faire voir comment on doit s'y prendre dans tous les cas.

518. Suppoſons donc qu'un projectile ait été d'abord lancé ſuivant une direction quelconque, & avec une vîteſſe quelconque. Qu'à chaque point m (*Fig.* 51) de la route qu'il ſuit, il ſoit ſollicité par trois forces, l'une ſuivant la courbe, la ſeconde dirigée à un point fixe C, & la troiſieme perpendiculaire à mC; toutes trois dans un même plan.

Concevons que Mm eſt l'arc infiniment petit que le corps vient de décrire pendant l'inſtant dt, après un temps quelconque t; que mc dirigée ſuivant mM ſoit la vîteſſe que la premiere force peut imprimer pendant l'inſtant dt; mk celle que la ſeconde peut imprimer pendant le même inſtant; & enfin mg celle que peut donner la troiſieme. Soient P, P', P'', ces trois forces, c'eſt-à-dire, les vîteſſes qu'elles engendreroient, en une ſeconde de temps, ſi pendant chaque inſtant de la durée de cette ſeconde, elles agiſſoient de la même maniere qu'en m. Alors $P\,dt$, $P'dt$, $P''dt$ seront les vîtesses qu'elles engendrent pendant l'instant dt; & l'on aura par conséquent, $mc = P\,dt$, $mk = P'dt$, $mg = P''dt$.

Imaginons qu'ayant tiré arbitrairement par le point C la ligne CA, on forme sur les lignes me, mk, mg comme diagonales, les parallélogrammes que l'on voit dans la figure, c'est-à-dire, qui ayent un de leurs côtés contigus parallele à AC, & l'autre perpendiculaire à AC. On pourra décomposer chacune de ces trois vîtesses, en deux autres, l'une parallele, & l'autre perpendiculaire à AC. Et les forces qui sollicitent le corps, ou les vîtesses qu'elles tendent à lui imprimer, se réduiront à deux, l'une parallele à AC & $= mf + mh - md$; l'autre, perpendiculaire à AC, & $= me + mb - mn$, laquelle tend à rapprocher le corps de AC. La vîtesse du mobile parallélement à AC, recevra donc l'augmentation $mf + mh - md$; & sa vîtesse, pour s'élever au-dessus de AC, recevra la diminution $me + mb - mn$.

Mais tandis que le mobile s'avance suivant Mm, il décrit parallélement à AC la ligne Mr, & perpendiculairement à AC la ligne rm; donc, si ayant pris arbitrairement le point fixe A, on nomme AP, x; PM, y; on a $\frac{dx}{dt}$ & $\frac{dy}{dt}$, pour la vîtesse parallélement à AC, & pour la vîtesse perpendiculairement à AC. Donc par la même raison, lorsque le corps décrira mm', les vîtesses correspondantes seront........ $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, & $\frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, on aura donc $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = mf + mh - md$, & $-d\left(\frac{dy}{dt}\right) = me + mb - mn$.

Or si l'on compare les triangles semblables mek, mpC, les triangles semblables mhg, mpC, les triangles semblables mbc, mrM, & que l'on nomme AC, c, & CM ou Cm, z; on aura ek ou $mf = \frac{c-x}{z}P'dt$, $me = \frac{y}{z}P'dt$, $mh = \frac{y}{z}P''dt$, gh ou $mn = \frac{c-x}{z}P''dt$, $mb = \frac{dy}{ds}P\,dt$, bc ou $mb = \frac{dx}{ds}P\,dt$. Donc enfin $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{c-x}{z}P'dt + \frac{y}{z}P''dt$

$-\frac{dx}{dt} P dt$, & $-d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{y}{z} P'dt + \frac{dy}{z} Pdt - \frac{c-x}{z} P''dt.$

Ce sont là les deux équations qui détermineront toutes les circonstances du mouvement du corps, lorsqu'on aura les valeurs de P, P', P''. Voyons-en quelques applications.

519. Si le point C est infiniment éloigné, alors z devient infinie & $= y$; à l'égard de $c - x$ on doit le rejetter comme nul vis-à-vis de z & y. On a donc $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = P''dt - \frac{dx}{dt} P dt$, & $-d\left(\frac{dy}{dt}\right) = P'dt + \frac{dy}{ds} P dt$ pour les deux équations qui servent à déterminer le mouvement, lorsque les deux forces P', P'', sont constamment paralleles à deux droites données de position. Et si l'on suppose $P'' = 0$, ces équations deviennent celles que nous avons trouvées (516); ce qui doit être en effet, puisque la force mk devient perpendiculaire à AP & peut représenter la pesanteur, mc représentant la résistance.

520. Si le point C restant à une distance finie, on suppose P, & $P'' = 0$, alors on a $-d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{yP'dt}{z}$ & $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{(c-x)P'dt}{z}$ pour déterminer le mouvement d'un corps qui étant lancé dans un milieu libre seroit sollicité vers un point fixe C par une force quelconque P'. Arrêtons un moment sur les circonstances de ce mouvement.

Si après avoir multiplié la premiere de ces deux équations par $c - x$, nous la retranchons de la seconde multipliée par y, nous aurons $(c-x)\, d\left(\frac{dy}{dt}\right) + y\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, dont l'intégrale est $(c-x)\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = C$.

Et si après avoir multiplié la premiere par $\frac{dy}{dt}$, nous l'ajoutons à la seconde multipliée par $-\frac{dx}{dt}$, nous aurons

$$-\frac{dy}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{P'[y\,dy - dx\,(c-x)]}{}.$$

Or $z = \sqrt{yy + (c - x)^2}$, par conséquent $y\,dy - dx\,(c - x) = z\,dz$; donc $-\frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = P'\,dz$; donc si P' est une fonction de z, on aura $C' - \frac{dy^2}{2\,dt^2} - \frac{dx^2}{2\,dt^2} = \int P'dz$, cette derniere quantité ne renfermant qu'une seule variable.

Pour simplifier le calcul, nommons r l'angle MCA; nous aurons $y = z \sin r$, $c - x = z \cos r$, & nos deux intégrales se changeront en $\frac{z^2 dr}{dt} = C$, & $C' - \frac{dz^2 + z^2 dr^2}{2\,dt^2} = \int P'\,dz$. Substituant dans la seconde, la valeur de dt tirée de la premiere, on a toute réduction faite, $dr = \dfrac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\frac{2C'}{C^2} - \frac{2}{C^2}\int P'dz - \frac{1}{zz}}}$.

Donc tant que P' sera une fonction de z, on pourra toujours construire la courbe, au moins par les quadratures.

521. Examinons maintenant les propriétés de ce mouvement.

Dans l'équation $\frac{z^2 dr}{dt} = C$, ou $z^2\,dr = C\,dt$, $z\,dr$ exprime l'arc Ms (*Fig.* 62) décrit du rayon CM; donc $\frac{z^2 dr}{2}$ exprime la surface du secteur MCm; on a donc $z^2 dr = 2\,MCm$, & par conséquent $2\,MCm = C\,dt$; donc $2\,ACM = Ct$; c'est-à-dire, que *le secteur* ACM *correspondant à l'arc* AM *décrit pendant le temps* t *est proportionel au temps*.

522. Si du centre C des forces, on abaisse sur la tangente en M la perpendiculaire CT, on aura $Mm : Ms :: CM : CT$, ou $Mm = \frac{z^2\,dr}{CT} = \frac{C\,dt}{CT}$; donc $\frac{Mm}{dt}$ ou la vîtesse $u = \frac{C}{CT}$; c'est-à-dire, que *les vîtesses des différents points* M *de la courbe, sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées du centre* C *des forces sur ces tangentes.*

523. La même équation $z^2 dr = C dt$, donne $\frac{dr}{dt} = \frac{C}{z^2}$. Or $\frac{dr}{dt}$ exprime la vîtesse angulaire, ou celle avec laquelle l'angle dr est décrit, donc *la vîtesse angulaire est réciproquement proportionnelle au quarré de la distance.*

524. Supposons que A soit le point d'où le corps est parti, & qu'il ait été lancé perpendiculairement à AC avec une vîtesse g. Soit f la valeur de AC, & soit en général ds le petit arc parcouru sur la courbe pendant un instant. Il est évident qu'au point A, l'arc Mf devient ds, & que z devient f. L'équation $z^2 dr = C dt$, ou $z \times z dr = C dt$ devient donc $f \times ds = C dt$; donc $\frac{ds}{dt} = \frac{C}{f}$; mais $\frac{ds}{dt}$ est alors g; donc $g = \frac{C}{f}$, ou $C = gf$. Ainsi l'équation $z^2 dr = C dt$, se change en $z^2 dr = gf dt$.

525. Prenons maintenant un cas particulier, & supposons que la force centrale agit en raison inverse des quarrés des distances; c'est-à-dire, que si k, par exemple, marque la vîtesse qu'elle est capable d'engendrer en continuant également pendant une seconde l'action qu'elle exerce à une distance connue AC ou f, celle qu'elle peut engendrer dans le même temps par l'action dont elle est capable en M, se déterminera per la proportion $zz : ff :: k : \frac{ffk}{zz}$.

Nous aurons donc $P' = \frac{ffk}{zz}$, & par conséquent $\int P' dz = -\frac{ffk}{z}$, quantité à laquelle je n'ajoute point de constante, parce que cette constante a déjà été ajoutée dans l'intégration faite ci-dessus pour avoir l'équation de la courbe. Substituant donc cette valeur & celle de C, dans celle de dr trouvée ci-dessus, nous aurons $dr = \frac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\frac{2C}{g^2 f^2} + \frac{2k}{g^2 z} - \frac{1}{zz}}}$.

Avant que d'aller plus loin, déterminons C. Reprenons pour

pour cet effet l'équation $C' - \frac{dz^2 + z^2 dr^2}{2 dt^2} = \int P' dz$, ou $C' - \frac{ds^2}{2 dt^2} = - \frac{ffk}{z}$. La constante C' doit être telle qu'au point A, on ait $\frac{ds}{dt} = g$; on a donc $C' - \frac{g^2}{2} = - fk$, ou $C' = \frac{g^2 - 2fk}{2}$.

L'équation de la courbe devient donc . . . .

$$dr = \frac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\frac{g^2 - 2fk}{g^2 f^2} + \frac{2k}{g^2 z} - \frac{1}{zz}}},$$ que l'on peut écrire

ainsi $$dr = \frac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\left(\frac{g^2 - fk}{g^2 f}\right)^2 - \left(\frac{k}{g^2} - \frac{1}{z}\right)^2}}.$$ Donc si pour simplifier, nous faisons $\frac{g^2 - fk}{g^2 f} = q$, & $\frac{k}{g^2} - \frac{1}{z} = qy'$; y' étant une nouvelle variable, & q une constante, nous aurons $dr = \frac{dy'}{\sqrt{1 - yy'}}$; en intégrant (158), on tire $y' = \sin(r + C'') = \sin r \cos C'' + \sin C'' \cos r$.

Pour déterminer la constante C'' on observera que lorsque $z = f$, on doit avoir $r = 0$; or lorsque $z = f$, l'équation $\frac{k}{g^2} - \frac{1}{z} = qy$, donne $y = \frac{k}{qg^2} - \frac{1}{qf}$; donc $\frac{k}{qg^2} - \frac{1}{qf} = \sin C''$; c'est-à-dire, en mettant pour q sa valeur, $\sin C'' = -1$; donc $\cos C'' = 0$. L'équation devient donc $y' = -\cos r = \frac{k}{qg^2} - \frac{1}{qz}$; donc $\frac{1}{z} = \frac{k}{g^2} + q \cos r$, ou enfin $\frac{1}{z} = \frac{k}{g^2} + \left(\frac{1}{f} - \frac{k}{g^2}\right) \cos r$; équation qui appartient, en général, à une section conique dont C est le foyer, & A le sommet, ainsi qu'on peut s'en convaincre facilement, en remettant pour $\cos r$, sa valeur

$\frac{c-x}{z}$, & pour z, sa valeur $\sqrt{yy+(c-x)^2}$. En particulier elle appartient à l'ellipse, lorsque $\frac{k}{g^2}$ est plus grand que $\frac{1}{2f}$; au cercle si $\frac{k}{g^2}$ est $=\frac{1}{f}$; à la parabole si $\frac{k}{g^2}=\frac{1}{2f}$. Enfin elle est à l'hyperbole, lorsque $\frac{k}{g^2}$ est plus petit que $\frac{1}{2f}$.

526. Nous avons traité, en particulier, le cas où la force centrale agit en raison inverse des quarrés des distances, parce que ce cas est celui des corps célestes. Il paroît constant, par la comparaison des observations avec le calcul, que toutes les parties de la matiere ont une tendance à s'unir les unes aux autres. Cette tendance dont la cause n'est point connue, peut être comparée à celle que les corps terrestres ont vers le centre de la terre, c'est-à-dire, à la pesanteur, qui probablement, n'est-elle même qu'un cas particulier de cette tendance générale, à laquelle en attendant qu'on en connoisse la cause, on donne le nom d'attraction. Cette attraction, à des distances égales, agit dans la raison des masses, parce qu'elle a lieu pour chaque particule de matière, ensorte qu'un corps attire deux fois plus fortement une particule de matiere, lorsqu'il a deux fois plus de masse. Comme le soleil a incomparablement plus de masse qu'aucune des planetes, son action sur celles-ci, surpasse de beaucoup celles qu'elles exercent entr'elles; ensorte que dans l'évaluation des principales circonstances de leurs mouvements, il suffit de considérer l'action du soleil. Or telle est la loi de cette force d'attraction, que chaque particule du corps attirant, agit en raison inverse du quarré de la distance; & que lorsque ce corps est sphérique, la somme des actions de chacune de ses parties se réduit à une seule qui passe par son centre de masse, & qui agit aussi en raison inverse du quarré de la distance. D'où, & de ce que nous venons de voir, il suit que les planetes décrivent autour du soleil, l'une des sections coniques. Et comme les observations font voir qu'elles ont des retours périodiques, & qu'une même planete change de distance au soleil, il faut en conclure que la route des planetes est une ellipse. Il en est de même des cometes.

527. Comme les directions de la pesanteur tendent à peu près au centre de la terre, & que la pesanteur à différentes distances de ce centre varie (à très-peu près) en raison in-

verſe des quarrés des diſtances ; on voit que la courbe que décrivent les projectiles n'eſt que ſenſiblement une parabole; & que plus rigoureuſement, elle eſt une ellipſe, dont le centre de la terre eſt un des foyers.

528. Si dans l'équation $\frac{1}{z} = \frac{k}{g^2} + \left(\frac{1}{f} - \frac{k}{g^2}\right) cof\ r$, on fait $r = 0$, & $r = 180°$, pour avoir les points où la ligne AC rencontre la courbe, on aura $\frac{1}{z} = \frac{1}{f}$, ou $z = f$; & en appellant z' la ſeconde valeur de z, $\frac{1}{z'} = \frac{-1}{f} + \frac{2k}{g^2}$, ou $z' = \frac{fg^2}{2kf - g^2}$ dont $z + z'$ ou le grand axe AB, que je repréſente par a, eſt $= \frac{2kf^2}{2kf - g^2}$. Mais (*Alg.* 294) nous avons vu qu'en nommant b le petit axe, on avoit $\frac{bb}{4} = AC \times CB = fz' = \frac{ffg^2}{2kf - g^2}$; donc $b = \frac{2fg}{\sqrt{2kf - g^2}}$.

529. Cela poſé, ſoit $1 : c'$ le rapport du diamètre à la circonférence. Selon ce qui a été dit (123), on aura $\frac{c'ab}{4}$ pour la ſurface d'une ellipſe dont a & b feroient les deux axes. Donc la ſurface de celle dont nous venons de déterminer les axes, ſera $\frac{kf^3gc'}{(2kf - g^2)^{\frac{3}{2}}}$. Or nous avons vu (521) qu'en général on avoit $2\ ACM = Ct = fg\,t$. Donc ſi on appelle T le temps d'une révolution entiere, on aura $\frac{2kf^3gc'}{(2kf - g^2)^{\frac{3}{2}}} = fg\,T$, ou $T = \frac{2kf^2c'}{(2kf - g^2)^{\frac{3}{2}}}$, ou $Tf\sqrt{2k} = \frac{2f^3kc'\sqrt{2k}}{(2kf - g^2)^{\frac{3}{2}}}$, c'eſt-à-dire, $Tf\sqrt{2k} = c'\left(\frac{2f^2k}{2kf - g^2}\right)^{\frac{3}{2}} = c'a^{\frac{3}{2}}$. Soit maintenant a' le grand axe d'une autre ellipſe, dont la diſtance du ſommet au foyer ſoit f', & qui ſoit décrite en vertu d'une force d'impulſion quelconque combinée avec la même force cen-

trale tendante au point C, & modifiée en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. Si on appelle k' la quantité correſpondante à k, on aura $k' = \frac{kf^2}{f'^2}$, ou $f'\sqrt{k'} = f\sqrt{k}$. Donc puiſqu'on aura également (en appellant T' le temps de la révolution) $T'f'\sqrt{2k'} = c'a'^{\frac{3}{2}}$; à cauſe de $f'\sqrt{k'} = f\sqrt{k}$, on aura auſſi $T'f\sqrt{2k} = c'a'^{\frac{3}{2}}$; donc $T : T' :: a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}}$; c'eſt-à-dire, que *les durées des révolutions ſont comme les racines quarrées des cubes des grands axes*. On peut donc, par l'obſervation des temps périodiques des planetes, connoître les rapports des grands axes de leurs orbites.

530. Enfin ſi dans l'équation $C' - \frac{ds^2}{2dt^2} = \int p'dz$ trouvée ci-deſſus, on met pour $\frac{ds}{dt}$, la vîteſſe u, & pour C' & $\int P'dz$, leurs valeurs $\frac{g^2 - 2fk}{2}$, & $\frac{-ffk}{z}$, on aura . . . . $u = \sqrt{g^2 - 2fk + \frac{ffk}{z}}$. D'où l'on conclura en faiſant $du = 0$, que la plus grande & la plus petite vîteſſe, ont lieu aux deux extrémités oppoſées du grand axe ; puiſqu'on trouvera $\frac{dz}{zz} = 0$, ce qui, par l'équation de la courbe, donne $-dr \sin r = 0$, condition qui a lieu, lorſque $r = 0$, & $r = 180°$.

531. Il n'en eſt pas toujours de même, lorque la force centrale n'agit pas en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. Le point de la plus grande vîteſſe, qu'on appelle le point du *Périhélie* ou le *Périhélie*, & celui de la plus petite vîteſſe, qu'on appelle l'*Aphélie*, ne ſont pas toujours fixes ni directement oppoſés.

Telles ſont les loix générales des mouvements des corps céleſtes. Mais en vertu des lois de l'attraction réciproque des parties de la matiere, on ſent bien que les mouvements de ces corps doivent être ſujets à de petites inégalités réſultantes de leurs actions mutuelles. Dans la lune ces inégalités ſont aſſez ſenſibles. Le calcul de ces inégalités a fait l'objet de pluſieurs ſavantes recherches de la part de Mrs d'*Alembert*, *Clairaut* & *Euler*. Les équations fondamentales qui ſervent à les déterminer, ſont les équations générales que nous avons données ci-dessus, en supposant $P = 0$. Nous ne pourrions sans nous écarter trop de notre sujet, nous livrer à l'application de nos équations à cet objet. Nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer aux ouvrages des savans Géomètres que nous venons de citer.

Enfin, nos deux équations générales renferment le cas où l'on voudroit avoir égard à la résistance que les planetes éprouveroient dans leur mouvement, de la part du milieu où elles se meuvent. M. l'abbé *Bossut* a très-bien discuté ce dernier point, dans sa Piece qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences pour l'année 1762.

532. Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'un seul corps. Supposons maintenant que deux corps M & M' (*Fig.* 63) ayant été lancés aux points B & D, suivant les directions quelconques, s'attirent l'un & l'autre, en raison de leurs masses, & en raison d'une fonction quelconque de leur distance MM': voici comment on déterminera les courbes qu'ils décrivent, & les circonstances de leurs mouvements, en supposant d'abord que le tout se passe dans un même plan.

Soit MQ la vîtesse que l'action de la masse M' imprimeroit à M dans un instant, $M'Q'$ celle que M imprimeroit à M' dans le même instant. On aura donc $M'Q' = \frac{M}{M'} \times MQ$. Prenons arbitrairement la ligne AP; & des points M & M' abaissons les perpendiculaires MP, $M'P'$. Décomposons les vîtesses MQ, $M'Q'$, en vîtesses MR, $M'R'$ paralleles à PM, & en vîtesses MS, $M'S'$ paralleles à AP: & en nommant AP, x; PM, y; AP', x'; $P'M'$, y'; AC, r; CM, z; $C'M'$, z'; supposant de plus que P marque la vîtesse qu'engendreroit en une seconde de temps, la force avec laquelle M' agit sur M dans leur situation actuelle, si cette force agissoit également pendant toute la durée de cette seconde; nous aurons $MQ = P\,dt$, $M'Q' = \frac{M}{M'} P\,dt$, $MR = \frac{P y\,dt}{z}$ $MS = \frac{P(x-r)\,dt}{z}$, $M'R' = \frac{MPy'\,dt}{M'z'}$, $M'S' = \frac{M}{M'} \frac{P(r-x')\,dt}{z'}$, ou à cause des triangles semblables MPC, $M'P'C$ qui donnent $\frac{y}{z} = \frac{y'}{z'}$, & $\frac{x-r}{z} = \frac{r-x'}{z'}$, nous aurons $M'R' = \frac{M}{M'} \frac{P y\,dt}{z}$, & $M'S' =$

$\frac{M}{M'}\frac{P(x-r)dt}{z}$. Donc en raiſonnant comme dans les exemples précédents, nous aurons $\frac{Pydt}{z} = -d\left(\frac{dy}{dt}\right) \ldots\ldots (A)$, $\frac{P(x-r)dt}{z} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right) \ldots (B)$, $\frac{M}{M'}\frac{Pydt}{z} = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right) \ldots (C)$, $\frac{M}{M'}\frac{P(x-r)dt}{z} = d\left(\frac{dx'}{dt}\right) \ldots (D)$.

Si l'on ſubſtitue dans les équations C & D, la valeur de $\frac{Pydt}{z}$, & de $\frac{P(x-r)dt}{z}$, tirées des équations A & B, on aura $-\frac{M}{M'}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, & $-\frac{M}{M'}d\left(\frac{dx}{dt}\right) = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$; & en intégrant $C \times M' = \frac{Mdy}{dt} - \frac{M'dy'}{dt}$, & $C' \times M' = \frac{Mdx}{dt} + \frac{M'dx'}{dt}$. Mais $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$ étant les viteſſes, des corps parallélement à AP, la ſomme des produits $\frac{Mdx}{dt}$, $\frac{M'dx'}{dt}$ doit (305) être $= (M + M')\,g$, en appellant g la vîteſſe du centre commun de gravité, parallélement à AP. On a donc $C' \times M' = (M + M')\,g$; par la même raiſon l'équation $\frac{Mdy}{dt} - \frac{M'dy'}{dt} = C \times M'$ dans laquelle $\frac{dy}{dt}$ & $\frac{dy'}{dt}$ marquent les vîteſſes oppoſées de M & M', parallélement à PM, fait voir qu'en nommant g' la vîteſſe du centre de gravité parallélement à PM, on aura $C \times M' = (M + M')\,g'$; donc g & g' ſont des quantités conſtantes. Donc le centre de gravité ſe meut uniformément, & en ligne droite; ce qui eſt d'ailleurs connu par ce qui a été dit (319).

Suppoſons donc, pour plus de ſimplicité, que la ligne des x ſoit priſe ſur la route du centre de gravité qui eſt facile à déterminer (305), par les viteſſes primitivemnt imprimées, alors nous aurons $g' = 0$, & $g\,dt = dr$. Faiſons $x - r = q$; nous aurons $dx - dr = dq$, & par conſéquent $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = d\left(\frac{dr + dq}{dt}\right) = d\left(g + \frac{dq}{dt}\right) = d\left(\frac{dq}{dt}\right)$. Subſtituant dans l'équation B, nous aurons $\frac{Pqdt}{z} = -d\left(\frac{dq}{dt}\right)$, équation qui conjointement avec l'équation A, ou $\frac{Pydt}{z} = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ déterminera la courbe & le mouvement de M par rapport au point mobile C. Ainsi en imitant ce que nous avons fait (520), je retranche la premiere de ces deux dernieres équations multipliée par y, de la seconde multipliée par q, & j'ai $yd\left(\frac{dy}{dt}\right) - qd\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, dont l'intégrale est $\frac{ydq}{dt} - \frac{qdy}{dt} = C''$. Pareillement, à la premiere multipliée par $\frac{dq}{dt}$; j'ajoute la seconde multipliée par $\frac{dy}{dt}$, & j'ai $\frac{Pqdq + Pydy}{z} = -\frac{dq}{dt}d\left(\frac{dq}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, ou (à cause que $qdq + ydy = zdz$, puisque $qq + yy = zz$), $Pdz = -\frac{dq}{dt}d\left(\frac{dq}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, dont l'intégrale est $\int Pdz = C''' - \frac{dq^2 + dy^2}{2dt^2}$.

Supposons maintenant, l'angle $ACM = x''$. Nous aurons $y = z \sin x''$, $q = -z \cos x''$. Si l'on substitue pour q & y, ces valeurs, on aura $z^2 dx'' = C'' dt$, & $\int Pdz = C''' - \frac{dz^2 + z^2 dx''^2}{2dt^2}$. Substituant dans celle-ci, la valeur de dt tirée de la précédente, on aura toute réduction faite, ...

$$dx'' = \frac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\frac{2C'''}{C''^2} - \frac{2}{C''^2}\int Pdz - \frac{1}{zz}}}.$$

Or puisque le point C est continuellement le centre commun de gravité de MM', on a $MM' = \frac{M + M'}{M} \times z$; donc puisque P est supposé une fonction de MM', P sera une fonction de z. Donc notre équation finale est toute séparée.

Si l'on compare cette équation à celle que nous avons trouvée (520) pour le cas où l'un des points atttirants étoit fixe, on voit qu'ici le corps M se meut autour du point mobile C, comme si ce point étoit fixe & attiroit aussi proportionnellement à une fonction de la distance MC, puisque MC a un rapport constant avec MM'.

L'équation $C'' dt = z^2 dx''$ donnera dt exprimé en $z dz$. Cette même équation donne la vîtesse angulaire autour de C, savoir $\frac{dx''}{dt} = \frac{C''}{z^2}$; expression tout-à-fait semblable à celle que nous avons trouvée (523). Enfin l'équation .... $\int P dz = C''' - \frac{dq^2 + dy^2}{2dt^2}$ ou $\int P dz = C''' - \frac{ds^2}{2dt^2}$, en appellant s l'arc de la courbe que M décrit autour de C, donne la vîtesse dans cette courbe exprimée aussi de la même maniere qu'on l'auroit au n° 520. Or cette vîtesse étant connue, & celle de C l'étant aussi par l'équation $g dt = dr$, ou $\frac{dr}{dt} = g$, il sera facile d'avoir la vîtesse absolue de M.

Enfin la courbe que décrit M autour de C & la vîtesse de C étant connue, il est facile d'avoir la position de M, au bout d'un temps quelconque t. On voit facilement par ce que nous venons de dire de M, ce qu'on doit dire de M'.

533. Si l'on suppose que les deux corps s'attirent en raison inverse du quarré de leur distance, & que l'on nomme k la vîtesse qu'imprimeroit à M, en une seconde de temps, l'action continuée de M, telle qu'elle s'exerceroit à la distance f, on aura $P = \frac{ffk}{(MM')^2} = \frac{M'^2}{(M+M')^2} \times \frac{ffk}{zz}$; d'où il sera facile de conclure, en raisonnant comme on l'a fait (525), que chaque corps décrit autour de C une ellipse dont C est le foyer, & dont les axes seront faciles à déterminer.

534. Si la loi suivant laquelle les corps agissent les uns sur les autres n'étoit pas donnée immédiatement, rien n'empêcheroit de se conduire comme si elle étoit donnée. Les conditions de la question donneroient toujours autant d'équations qu'il est nécessaire tant pour déterminer les circonstances du mouvement, que pour éliminer la lettre ou les lettres par lesquelles on avoit représenté la loi de ces actions. Par exemple, supposons que deux corps M & M' (*Fig.* 64), sans pesanteur, liés par un fil, décrivent les courbes BM, DM', en vertu d'impulsions primitives dirigées dans un même plan,

& de la résistance qu'ils s'opposent par l'inextensibilité du fil.

A l'instant où ces corps arrivent en M & M', on concevra (318) que les vîtesses MH, $M'H'$ qu'ils auroient s'ils devenoient libres, sont décomposées en vîtesses Mn, $M'n'$, suivant les courbes, & en vîtesses MN, $M'N$ qui soient détruites. Il faudra donc que MN, $M'N'$ soient directement opposées, & (218) que $M \times MN = M' \times M'N'$.

Maintenant, MN devant être égale & directement opposée à la vîtesse que l'action de M' tend à donner à M suivant le fil; si l'on appelle P la vîtesse que cette action continuée uniformément pendant une seconde, engendreroit dans M, on aura $MN = P\,dt$, & cette vîtesse $P\,dt$, dirigée de M vers M' sera celle par laquelle le mouvement de M varie; donc on aura aussi $M'N' = \frac{M}{M'} P\,dt$, & celle-ci devant être égale à la vîtesse que M engendreroit dans M, suivant le fil, pendant l'instant dt, est celle par laquelle le mouvement de M' varie. Donc si conservant les mêmes dénominations que ci-dessus (532) on décompose, de même, les vîtesses $P\,dt$, & $\frac{M}{M'} P\,dt$ dirigées de M vers M' & de M' vers M, on parviendra absolument aux mêmes équations. Et si l'on observe de plus que z est constante, & que par conséquent $dz = 0$, on aura tout ce qu'il faut pour déterminer le mouvement, & pour éliminer P. De ces équations, traitées comme ci-dessus (532), on conclura facilement que les deux corps décrivent uniformément autour de leur centre commun de gravité, des circonférences de cercle, tandis que ce centre se meut aussi uniformément.

535. Si les corps sont supposés pesants, on concevra que les vîtesses MH, $M'H'$ (*Fig.* 65) qu'ils auroient suivant les tangentes, s'ils devenoient libres, & que la pesanteur n'agît pas sur eux, soient combinées (223) avec les vîtesses Mk, $M'k'$ que la pesanteur tend à leur donner dans un instant, & que Ms, $M's'$ soient les vîtesses qu'ils auroient alors. Puis (318) on imaginera que ces vîtesses soient décomposées en vîtesses Mn, $M'n'$ suivant les courbes, & en vîtesses MN, $M'N'$, qui soient détruites. On aura donc $M \times MN = M' \times M'N'$, MN & $M'N'$ étant dirigés suivant le fil.

Maintenant, soit que la pesanteur de M' soit supposée la même ou différente de celle de M, M reçoit suivant le fil, de la part de M', une vîtesse égale à MN & en sens contraire, laquelle conjointement avec la pesanteur Mk, est ce qui fait qu'au lieu de venir en H, il vient en n. Ainsi les vîtesses qui font varier le mouvement de M sont la vîtesse MN dirigée en sens contraire, & la vîtesse Mk. Par la même raison les vîtesses qui font varier le mouvement de M', sont la vitesse $M'N'$ dirigée en sens contraire, & la vîtesse $M'k'$. Or en raisonnant comme ci-dessus (534), on aura $MN = Pdt$ & $M'N' = \frac{M}{M'}Pdt$. Donc si on décompose les vîtesses suivant NM & Mk, & les vîtesses suivant $N'M'$ & $M'k'$, en vitesses paralleles aux x, & aux y; on égalera à $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, la somme ou la différence des vîtesses paralleles aux x; & à $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, la somme ou la différence des vîtesses paralleles aux y, pour le corps M. Et opérant d'une maniere semblable pour M', si pour plus de simplicité on suppose que la pesanteur est parallele aux y, on aura, en nommant p la vîtesse que la pesanteur donne dans une seconde, les équations suivantes $-\frac{y}{z}Pdt - pdt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $-\left(\frac{x-r}{z}\right)Pdt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $pdt - \frac{y'}{z'} \times \frac{M}{M'}Pdt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\frac{r-x'}{z'} \times \frac{M}{M'}Pdt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$. On observera de plus, que $\frac{y'}{z'} = \frac{y}{z}$, & $\frac{r-x'}{z'} = \frac{x-r}{z}$, & que $z + z'$ est constant.

Substituant dans les deux dernieres équations du mouvement, ces deux valeurs, & celle de $\frac{Pydt}{z}$ & $Pdt\left(\frac{x-r}{z}\right)$ que donnent les deux premieres équations, on aura . . . $pdt + \frac{M}{M'}pdt + \frac{M}{M'}d\left(\frac{dy}{dt}\right) = d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$ & $-\frac{M}{M'}d\left(\frac{dx}{dt}\right) = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. De cette derniere on conclura que le mouvement du centre de gravité parallélement aux x, est uniforme. La précédente qui est la même chose que $(M + M')\,pdt = M'd\left(\frac{dy'}{dt}\right) - Md\left(\frac{dy}{dt}\right)$ fait voir que le centre de gravité obéit à la pesanteur comme le feroit un corps libre. Donc (495) le centre de gravité décrit une parabole $F'QF$, comme le feroit un projectile qui auroit été lancé avec la vîtesse que le centre de gravité a eue au commencement du mouvement, & suivant la même direction. Et puisque les distances des deux corps à ce centre de gravité sont constantes, ils décriront donc autour de ce centre de gravité des circonférences de cercle, & les décriront uniformément.

536. S'il y avoit un plus grand nombre de corps ; s'il y en avoit trois, par exemple, sans pesanteur, & liées par les deux fils MM', MM'' (*Fig.* 66) ; on imagineroit (318) qu'au moment où les corps M, M', M'' arrivent en M, M', M'', les vîtesses MH, $M'H'$, $M''H''$ qu'ils auroient suivant les tangentes, s'ils devenoient libres, se décomposent chacune en deux autres, l'une suivant la courbe, & l'autre qui doit être détruite. Cette autre pour chacun des deux corps M' & M'' doit donc être dirigée suivant le fil ; & pour le corps M, elle doit se décomposer en deux autres dirigées suivant les fils $M'M$, $M''M$; ensorte que si $M''N''$, $M'N'$, Mo, Mq sont ces secondes vîtesses, on doit avoir $M \times Mq = M' \times M'N'$ & $M \times Mo = M'' \times M''N''$. Ainsi si l'on appelle P, la vîtesse qu'engendreroit dans M, en une seconde de temps, l'action de M' continuée uniformément, & P' celle que M'' engendreroit pareillement dans M, on aura $Mq = P\,dt$, $Mo = P'\,dt$, $M'N' = \frac{M}{M'} P\,dt$, $M''N'' = \frac{M}{M'} P'dt$.

Si l'on conçoit ensuite que les vîtesses qM, oM, $M'N'$, $M''N''$ soient décomposées chacune en deux autres, l'une parallele à AP, l'autre parallele à PM ; & que l'on nomme AP, x ; PM, y ; AP', x' ; $P'M'$, y' ; AP'', x'' ; $P''M''$, y'' ; AC, r ; AC', r' ; CM, z ; CM', z' ; $C'M'$, z'' ; $C'M''$, z''' ; il sera facile, en imitant les solutions précédentes, de trouver l'expression de la variation de la vîtesse parallélement à AP & à PM, tant pour M', que pour M'', & on les égalera à $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, & $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy''}{dt}\right)$ respectivement.

A l'égard de M, la variation de la vîtesse parallélement à AP, parallélement à PM, résultera des deux autres qui naîtront de la décomposition de Mq, Mo ; c'est pourquoi ce que l'on doit égaler, ici, à $d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$ & à $d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, c'eſt la ſomme ou la différence des deux efforts paralleles à AP, & des deux efforts paralleles à PM ſelon qu'ils agiſſent d'un même ſens, ou de ſens opposés. Par-là on aura ſix équations. On obſervera de plus que les triangles MPC, $M'P'C'$, ſont ſemblables, & qu'il en eſt de même des triangles MPC', $M''P''C'$. Enfin les diſtances MM', MM'' ſont conſtantes. Avec ces conditions, on a tout ce qu'il faut pour trouver le mouvement, & les courbes décrites : nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Si les corps étoient peſants, on imiteroit ce qui a été fait (535).

On voit donc comment on doit ſe conduire, quand il y a un plus grand nombre de corps.

537. Si les impulſions primitives que les corps ont reçues n'étoient points dirigées dans un même plan, ou ſi les forces qui font varier les mouvements, n'étoient pas dirigées dans un même plan ; alors après avoir décomposé la vîteſſe que chaque corps tend à avoir, en deux autres, l'une qu'il aura réellement & l'autre qui doit être détruite ; on décompoſera cette derniere en autant d'autres qu'il ſera néceſſaire pour que l'équilibre, en vertu de ces dernieres vîteſſes, ait lieu : puis pour avoir les équations des courbes & du mouvement, on décompoſera ces dernieres vîteſſes ſuppoſées dirigées en ſens contraire, en trois autres paralleles à trois droites que l'on pourra ſuppoſer perpendiculaires entr'elles, & que l'on regardera comme les coordonnées x, y, z; x', y', z', &c. des courbes. Et ayant fait, pour chaque corps, une ſomme de toutes celles qui agiſſent parallélement à l'une de ces lignes*, on l'égalera à $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ou $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, &c.

538. Si l'on applique ceci à la queſtion traitée (532), en ſuppoſant que les impulſions primitives aient été dirigées en différents plans, on verra que le mouvement du centre de gravité eſt uniforme ; que relativement à un plan quelconque le mouvement ſe paſſe d'une maniere toute ſemblable à ce qui

* Par le mot *ſomme*, nous entendons toujours la ſomme des vîteſſes dirigées dans un ſens, moins la ſomme de celles qui ſont dirigées dans l'autre.

auroit lieu si les deux corps se mouvoient dans ce plan; & qu'il y a un plan relativement auquel les deux corps s'élevent ou s'abaissent tous deux également. Ce plan est facile à déterminer en imaginant d'abord que les vîtesses imprimées soient décomposées chacune en deux autres, l'une dans ce plan, l'autre qui lui soit perpendiculaire; alors si l'on suppose ces deux dernieres égales, on aura la position de ce plan à l'égard d'un plan connu auquel on aura rapporté les directions des vîtesses imprimées. Ainsi, dans le cas présent le mouvement se passe comme dans le premier cas, à cette différence près que le plan dans lequel les deux corps sont mus, est transporté parallélement à lui-même & perpendiculairement avec une vîtesse uniforme.

539. Si la cause qui fait varier le mouvement, au lieu d'être l'action des corps entr'eux, est la résistance de quelqne obstacle immobile, comme lorsqu'un corps parcourt une surface courbe tant en vertu de sa pesanteur que d'un mouvement primitivement imprimé, on se conduira encore d'après les mêmes principes, en cette maniere.

Soit ab (*Fig.* 67) la ligne qui tend à décrire pendant l'instant dt, lorsqu'il est arrivé au point quelconque a de la surface courbe, & bc la vîtesse que la pesanteur lui donneroit, pendant cet instant; ac sera la ligne qu'il décriroit sans la résistance de la surface. Il faut donc que ac se décompose en deux autres vîtesses, l'une af suivant la surface courbe, & l'autre aq qui soit détruite. Donc aq ou sa parallele cf doit être perpendiculaire à la surface courbe.

Concevons par a un plan horisontal qui coupe la surface du solide, selon ar; & par f un plan vertical qui coupe cette même surface suivant fr, & le plan horisontal suivant ri. Soit ai perpendiculaire à ri, & ah la projection de af sur le plan horisontal ari. Du point c, tirons cd perpendiculaire au plan vertical $rfgi$, & ce perpendiculaire à la verticale hf; enfin de d, tirons df & de. Puisque le corps, qui seroit venu en b si le mouvement qu'il avoit en a n'avoit pas changé, vient au contraire en f tant par la vîtesse bc de la pesanteur que par la résistance cf de la surface, bc & cf sont donc les deux vitesses qui font varier son mouvement. Concevons la vîtesse cf décomposée en deux autres, l'une suivant ce, & l'autre égale & parallele à ef; la variation qui arrive à la vitesse verticale sera donc $bc - ef$, on aura donc $pdt - ef =$

$d\left(\frac{dz}{dt}\right)$, ou $ef = p\,dt - d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ en appellant z la distance verticale du corps à un plan horisontal fixe situé au-dessus de ce corps.

Décomposons la vîtesse ce, en deux autres; l'une suivant cd, & l'autre égale & parallele à de; cd sera la variation de la vîtesse parallélement à ai, ainsi on aura $cd = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ en appelant x la distance du corps à un plan vertical parallele à $rfgi$. Enfin de est la variation de la vîtesse parallele à ri, ainsi on aura $de = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ en appellant y la distance du corps à un plan vertical parallele à aig, & supposé au-delà de g par rapport à f. Or il est aisé de démontrer que les triangles def, rfh sont semblables, & qu'il en est de même des triangles cde, air.

Cela posé, on a $ai = dx$, $ig = dz$, $gf = dy$. Soit $ir = dy'$; dy', sera la différence de y prise en supposant z constant. On aura donc $-d\left(\frac{dy}{dt}\right) : p\,dt - d\left(\frac{dz}{dt}\right) :: dz : dy' - dy$; & $d\left(\frac{dx}{dt}\right) : -d\left(\frac{dy}{dt}\right) :: dy' : dx$. Donc

$$-dy'd\left(\frac{dy}{dt}\right) + dy\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) = p\,dz\,dt - dz\,d\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\&\ dx\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -dy'd\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Si après avoir divisé ces deux équations par dt, on les ajoute ensuite, on aura $\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = p\,dz$, & en intégrant $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2} = pz + C$; ou en nommant ds le petit arc af, $\frac{ds^2}{2\,dt^2} = pz + C$. Or $\frac{ds}{dt}$ est la vîtesse; donc si l'on suppose qu'au commencement du mouvement le corps n'ait reçu aucune impulsion, on a $\frac{ds^2}{2\,dt^2} = pz$, ou $\frac{ds^2}{dt^2} = 2pz$, c'est-à-dire, que quelle que soit la surface courbe, sa vîtesse est la même que si le corps étoit tombé librement de pareille hauteur.

Maintenant, ayant l'équation de la surface courbe, il sera facile d'avoir z & dz en x & dx, y & dy; & celle de dy' en x, y & dx. Substituant dans l'équation $\frac{ds^2}{dt^2} = 2pz + 2C$, & dans l'équation $dx\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -dy'd\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & mettant dans celle-ci, pour dt, sa valeur tirée de la premiere, on aura une équation en x, dx, ddx, y, dy, ddy, laquelle étant intégrée donnera la projection de la courbe, sur le plan horisontal. Et pour faciliter l'intégration, on pourra supposer constante, telle différentielle que l'on voudra.

540. Si l'impulsion primitive a été donnée horisontalement, & que l'on veuille savoir quelle devroit être la surface courbe pour que le corps continuât à se mouvoir horisontalement, alors on a $dz = 0$, & $dy' = dy$; ce qui réduit les deux équations du mouvement, à cette seule $dx\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -dy\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ qui étant divisée par dt, & intégrée, donne $dx^2 + py^2 = 2Cdt^2$, & fait voir que la vîtesse est constante. Or pour que ce mouvement ait lieu, il faut que la force centrifuge & la pesanteur se réduisent à une seule force perpendiculaire à la surface courbe.

Supposons donc que ab (*Fig.* 68) marque la force centrifuge; ad la pesanteur; que ae soit la section de la courbe par un plan vertical perpendiculaire à la surface, soit $ef = dz'$, $af = dy''$, & g la vîtesse que la force centrifuge engendreroit en une seconde, par son action répétée uniformément. On aura $dz' : dy'' :: g : p$. Or nous avons vu (496) que $g : p :: h : \frac{1}{2}R$, en nommant R, le rayon de la developpée dans la tranche horisontale que le corps décrit; donc $h : \frac{1}{2}R :: dz' : dy''$, ou $dy'' = \frac{R\,dz'}{2h}$, h étant la hauteur d'où le corps devroit tomber pour acquérir sa vîtesse actuelle. On voit donc qu'il y a une infinité de surfaces courbes dans lesquelles ce mouvement peut avoir lieu. Si la surface courbe est un solide de révolution, alors R est une quantité constante pour chaque tranche, & $= y''$. On a donc $\frac{dy''}{y''} = \frac{dz'}{2h}$.

541. Si la courbe génératrice, est un cercle; ou si la sur-

face courbe eſt celle d'une ſphere dont a ſoit le rayon ; on aura $dy'' : dz' :: Qg : y''$, Q étant le centre. L'équation $\frac{dy''}{y''} = \frac{dz'}{2h}$, devient donc $\frac{Qg}{y''^2} = \frac{1}{2h}$; donc $h = \frac{1}{2}\frac{y''^2}{Qg}$; c'eſt-à-dire, que pour qu'un corps ſuſpendu par un fil, à un point fixe Q, puiſſe faire des oſcillations coniques, il faut que la hauteur due à la viteſſe d'impulſion ſoit la moitié de la troiſieme proportionnelle à la hauteur & à la demi-baſe du cône.

L'équation $dx^2 + dy^2 = 2C\,dt^2$ trouvée ci-deſſus ou $\frac{ds'^2}{dt^2} = 2C$, en appellant s' un arc quelconque de la circonférence qui a y'' pour rayon, donne $2C = 2ph$, ou $C = ph$; donc $\frac{ds'}{dt} = \sqrt{2ph}$, & $t = \frac{s'}{\sqrt{2ph}}$; donc en nommant T le temps d'une révolution, & ſuppoſant le rapport du rayon à la circonférence, comme de 1 à c, on aura $T = \frac{cy''}{\sqrt{2ph}}$; ou en mettant pour h, ſa valeur, $T = c\sqrt{\frac{Qg}{p}}$. C'eſt-à-dire, (puiſque Qg eſt la hauteur du cône), que la durée des oſcillations coniques eſt toujours la même, tant que la hauteur du cône demeure la même, quel que ſoit d'ailleurs le rayon ou la longueur du pendule.

Si l'on ſuppoſe que la hauteur Qg differe très-peu du rayon, que j'appelle a, on aura à très-peu-près, $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, expreſſion qui eſt abſolument la même que celle que nous avons trouvée (469) pour les oſcillations très-petites dans un plan vertical. Donc lorſque les oſcillations ſont petites, elles ſont de même durée entr'elles, & ſont les mêmes, ſoit qu'elles ſe faſſent dans un plan vertical, ſoit qu'elles ſoient coniques.

542. Si l'on veut ſavoir quel eſt le ſolide de révolution dans lequel le temps d'une révolution autour de l'axe ſeroit toujours le même, en ſuppoſant la vîteſſe imprimée telle qu'il eſt néceſſaire pour que le mobile pût ſe mouvoir dans une zône horiſontale ; on obſervera que l'équation $\frac{dy''}{y''} = \frac{dz'}{2h}$, donne $h = \frac{y''dz'}{2dy''}$. Subſtituant cette valeur dans celle de T, on

a $T =$

a $T = \frac{c y''}{\sqrt{\frac{p y'' d z'}{d y''}}}$ qu'il faut donc ſuppoſer égal à une conſtante b. Donc $\frac{p b b y'' d z'}{d y''} = c c y''^2$, & par conſéquent $d z' = \frac{c c y'' d y''}{p b b}$; donc $z' = \frac{c c y''^2}{2 p b^2}$; équation qui fait voir que la courbe génératrice eſt une parabole dont le paramètre eſt $\frac{2 p b^2}{c^2}$; dont le ſommet eſt au point le plus bas, parce que nous avons ſuppoſé tacitement que y'' & z' croiſſent en même temps.

543. La ſurface étant celle d'un ſolide de révolution dont l'axe ſoit vertical, on a $y = \sqrt{2 r x - x x}$, r étant l'ordonnée de la courbe génératrice, & par conſéquent une fonction de z donnée par l'équation de cette courbe.

De cette équation différenciée en ſuppoſant z, & par conſéquent r conſtant, on tire $d y' = \frac{r d x - x d x}{\sqrt{2 r x - x x}} = \frac{(r - x) d x}{y}$. Si on ſubſtitue cette valeur de $d y'$ dans l'équation $d x\, d\left(\frac{d x}{d t}\right) = - d y' d\left(\frac{d y}{d t}\right)$ trouvée ci deſſus, on aura $y d\left(\frac{d x}{d t}\right) = - (r - x) d\left(\frac{d y}{d t}\right)$, équation dont l'intégrale eſt $y \frac{d x}{d t} + (r - x) \frac{d y}{d t} = C'$, ou $y d x + (r - x) d y = C' d t$. Or il eſt facile de voir que $y d x + (r - x) d y$ exprime le double du ſecteur décrit autour de l'axe, pendant le temps $d t$, ſur la projection horiſontale; donc quelle que ſoit cette projection, le ſecteur décrit eſt proportionnel au temps.

L'équation $y d x + (r - x) d y = C' d t$, & l'équation... $\frac{d x^2 + d y^2 + d z^2}{2 d t^2} = p z + C$, ſerviront donc à déterminer toutes les circonſtances du mouvement d'un corps ſur la ſurface d'un ſolide de révolution; & l'on voit que l'on aura toujours facilement l'équation de la projection, en différences premieres.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DANS LES MACHINES.

544. L'OBJET général des Machines eſt de tranſmettre l'action des forces.

On n'a pas toujours pour but, dans l'uſage des Machines, d'augmenter l'action dont la force motrice feroit capable ſi elle agiſſoit immédiatement ſur le mobile : quelquefois il ne s'agit que de tranſmettre cette action ſuivant une direction déterminée ; telle eſt, par exemple, la deſtination des poulies fixes. D'autres fois on n'a en vue que d'aſſujettir le mobile à décrire des eſpaces réglés ſur certaines conditions relatives ſoit au temps, ſoit à d'autres circonſtances quelconques; conditions qui n'exigent pas toujours que la force motrice augmente en ſe tranſmettant; les machines d'horlogerie en fourniſſent pluſieurs exemples.

Le nombre & la nature des machines varient ſelon les objets qu'on a en vue. Mais pour être en état de déterminer leurs effets, il n'eſt pas néceſſaire de les avoir conſidérées toutes. Quelque compoſées, quelque variées qu'elles ſoient, elles ne ſont que des combinaiſons d'un nombre aſſez limité de machines ſimples.

Nous allons d'abord expoſer les propriétés de celles-ci. Nous ferons voir enſuite, par divers exemples, comment ces propriétés doivent être appliquées à l'évaluation des effets des machines compoſées.

Nous réduirons à cinq le nombre des machines ſimples ; ſavoir, *les Cordes*, *le Levier*, *la Poulie*, *le Treuil*, & *le plan incliné*.

A ne conſidérer ces machines que par rapport à l'équilibre, on pourroit les réduire à deux, & même à une ſeule ; ſavoir, au levier. Mais dans le cas du mouvement, la nature de chacune donne lieu à des conſidérations qui lui ſont propres, & qui exigent qu'on en traite ſéparément.

Des Cordes.

545. NOUS ſuppoſerons, d'abord, que les cordes ſont des corps parfaitement flexibles : nous verrons ailleurs comment on doit avoir égard à leur défaut de flexibilité parfaite.

Nous conſidérerons auſſi, d'abord, les cordes comme non peſantes, mais peu après nous verrons la maniere d'avoir égard à leur peſanteur.

Ces deux ſuppoſitions faites, il eſt facile de voir, que le diametre plus ou moins grand des cordes, ne fait rien à la communication des forces : on peut toujours, par la penſée, ſubſtituer aux cordes, un fil qui paſſeroit ſuivant l'axe du cylindre qu'elles forment, & ſuppoſer que la force appliquée à la corde, agit par le moyen de ce fil ſeulement.

On emploie les cordes pour tranſmettre l'action des forces, ſoit immédiatement, ſoit en appliquant les cordes aux machines. Mais pour juger des effets des puiſſances appliquées aux machines par le moyen des cordes, il faut connoître les effets dont elles ſont capables, lorſqu'elles agiſſent par le moyen des cordes ſeulement.

546. Conſidérons donc, d'abord, trois puiſſances P, Q, R (*Fig.* 69) agiſſant les unes contre les autres, par le moyen des cordes AP, AQ, AR unies par le nœud A: & ſuppoſant que l'on connoît les directions AP, AQ, AR, propoſons-nous de déterminer les conditions néceſſaires pour que ces trois forces ſe faſſent équilibre, & les rapports de ces forces.

Il eſt évident 1°, qu'elles doivent être toutes trois dans un même plan. Car ſi l'une, par exemple la frce R, n'étoit pas dans le plan des deux autres, on pourroit toujours (225) la concevoir décompoſée en deux forces, l'une dans ce plan, l'autre perpendiculaire à ce même plan, & par conſéquent perpendiculaire à chacune des deux forces *P* & *Q*; celle-ci n'agiroit donc en aucune maniere pour s'oppoſer à ces deux-ci; il n'y auroit donc rien pour la détruire; il n'y auroit donc point d'équilibre.

2°. Ces trois forces étant dans un même plan, il faut pour qu'elles ſe faſſent équilibre, que l'une quelconque d'entr'elles, par exemple la force *P*, produiſe deux efforts, l'un égal & contraire à la force *Q*, l'autre égal & contraire à la force *R*.

Or ſi après avoir prolongé *RA* & *QA*, on prend la ligne quelconque *AD* pour repréſenter la force *P*, & que ſur *AD* comme diagonale, on forme le parallélogramme *ACDB* dont les côtés *AB*, *AC* ſoient ſur le prolongement de *QA* & de *RA*, les deux côtés *AB*, *AC*, repréſentent (225) deux forces qui agiſſant conjointement ſuivant ces directions feroient le même effet que la force *P*. Donc *AB*, *AC* ſont les efforts que *P* oppoſe réellement aux deux forces *Q* & *R*; donc pour qu'il y ait équilibre, il faut que *Q* puiſſe être repréſenté par *BA*, & que *R* le ſoit par *CA*, dans la ſuppoſition que *P* le ſoit par AD. On doit donc avoir $P : Q :: AD : AB$, & $P : R :: AD : AC$, c'eſt-à-dire, $P : Q : R :: AD : AB : AC$. Tel eſt le rapport que doivent avoir les trois forces P, Q, R pour être en équilibre.

547. Puiſque les deux forces Q & R doivent être égales aux deux forces AB, AC qui ſont les compoſantes de la force P, on peut donc dire que lorſqu'il y a équilibre entre trois forces, deux quelconques doivent avoir le même rapport avec la troiſieme, que deux forces compoſantes ont avec leur réſultante.

548. Donc (233) on aura auſſi $P : Q : R :: \sin BAC : \sin CAD : \sin DAB$, ou :: $\sin RAQ : \sin RAS : \sin QAS$, en prolongeant PA vers S; c'eſt-à-dire, que *quand trois forces ſe ſont équilibre, chacune eſt repréſentée par le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres, prolongées s'il eſt néceſſaire.*

549. Puiſque les trois forces P, Q, R, qui doivent ſe faire équilibre, ſont repréſentées par AD, AB, AC, ou (ce qui revient au même) par les côtés AD, AB, BD du triangle ABD dont les angles ABD, BDA, DAB ſont égaux aux angles CAQ, RAS, QAS qui déterminent les directions de ces forces, on voit donc que toutes les

questions qu'on peut proposer à l'égard des valeurs & des directions des forces qui doivent se faire équilibre, se réduisent à la Trigonométrie. Par exemple, si l'on donnoit les valeurs des trois forces P, Q, R, & que l'on demandât comment elles doivent être dirigées pour se faire équilibre, on résoudroit (*Géom.* 304) le triangle DBA dont les trois côtés sont connus; & les angles que donneroit cette résolution, détermineroient ceux que doivent former entr'elles les directions des puissances. Si l'on donnoit les deux forces P & Q, & l'angle PAQ de leurs directions, ou son supplément $QAS = DAB$; alors on connoîtroit les deux côtés AD, AB, & l'angle compris DAB; on pourroit donc (*Géom.* 306) calculer DB ou la valeur de la force R, & l'angle BDA dont l'égal SAR est celui que la direction de R doit former avec celle de P. Si les angles que les trois directions doivent former étoient donnés, on ne pourroit pas (*Géom.* 267) déterminer la valeur absolue des trois forces, mais seulement le rapport. Dans tous les autres cas, la proposition que nous venons d'établir (548) donnera toujours ce que l'on cherche, dès qu'il y aura trois choses connues.

550. Si au lieu d'avoir deux puissances

Q & R attachées aux deux cordons, ces deux cordons étoient fixement attachés en Q & R ou fur tout autre point de leurs directions; AB, AC, exprimeroient les efforts que fupportent ces points fixes.

551. Nous avons fuppofé (*Fig.* 69) que les trois cordons étoient fixement attachés au nœud A. Mais fi la puiffance P (*Fig.* 70) étoit appliquée à un cordon dont l'extrêmité eût un anneau dans lequel pafsât la corde QAR, alors on ne feroit pas maître de donner les directions des trois cordons. En effet, il ne fuffit pas, alors, que l'effort AB foit dirigé fuivant QA & égal à la force Q, & qu'il en foit de même de AC à l'égard de R: il faut encore que l'anneau ne puiffe pas gliffer, ce qui exige que l'angle QAS foit égal à SAR; c'eft-à-dire, que la puiffance P doit être dirigée de maniere à divifer l'angle QAR en deux parties égales. Au refte on a toujours $P : Q : R :: \sin QAR : \sin SAR : \sin QAS$; mais comme $SAR = QAS = \frac{1}{2} QAR$, cette fuite de rapports devient $P : Q : R :: \sin QAR : \sin \frac{1}{2} QAR : \sin \frac{1}{2} QAR$; enforte que les deux puiffances R & Q font égales.

552. Il en eft de même fi la corde RAQ tirée par les deux puiffances R & Q, paffe par-deffus un point fixe A. Les deux puif-

ſances *R* & *Q* doivent être égales, & la preſſion qui en réſulte contre ce point fixe, eſt dirigée ſuivant une ligne qui diviſe l'angle *QAR* en deux parties égales, & elle eſt à l'égard de l'une des deux puiſſances, comme le ſinus de *QAR* eſt au ſinus de ſa moitié.

553. Tout ce qui précede étant bien compris, rien n'eſt plus facile que de déterminer les conditions de l'équilibre entre tant de puiſſances que l'on voudra, appliquées à différents cordons unis par un même nœud ou par différents nœuds.

Suppoſons d'abord que chaque nœud n'aſſemble que trois cordons, & que tout eſt dans un même plan, & tel qu'on le voit (*Fig.* 71).

La puiſſance *P* fait effort contre les deux cordons *AT*, *AB*. Prolongeons donc les directions de ceux-ci, & ayant pris *AF* pour repréſenter la puiſſance *P*, formons ſur *AF* comme diagonale, & ſur les prolongements *AE*, *AD*, comme côtés, le parallélogramme *ADFE*, il faudra que *T* ſoit exprimé par *AE*; & la tenſion du cordon *BA* ſera exprimée par *AD*; enſorte qu'en nommant *a* cette tenſion, on aura $P : T : a :: AF : AE : AD$, ou $P : T : a :: \text{ſin } DAE : \text{ſin } FAD : \text{ſin } FAE$, ou (à cauſe que *TAD* eſt ſupplément de DAE) :: *ſin* TAD : *ſin* FAD : *ſin* FAE.

Concevons l'effort AD appliqué en B ſuivant BI égale & en ligne droite avec AD. BI fait effort contre la puiſſance Q & contre le cordon BC : prolongeant donc, comme ci-deſſus, les cordons QB & CB, & formant le parallélogramme $GBHI$, BH ſera la valeur que doit avoir la puiſſance Q, & BG la tenſion du cordon CB. On aura, par la même raiſon, en nommant b cette tenſion, $a : Q : b ::$ *ſin* GBH : *ſin* IBG : *ſin* IBH.

Concevons l'effort BG appliqué en C ſuivant CK égale & en ligne droite avec BG. CK fait effort contre S & contre R. Donc ſi on prolonge RC & SC, & que l'on forme comme ci-devant le parallélogramme $MCLK$, CM exprimera la valeur que doit avoir la force R, & CL celle que doit avoir la force S. On aura, par la même raiſon, $b : R : S ::$ *ſin* MCL : *ſin* KCL : *ſin* MCK.

Et ſi l'on veut avoir immédiatement le rapport de la tenſion T d'une branche quelconque TA de la corde, à la tenſion d'une autre branche quelconque, de CS par exemple, on la trouvera facilement en cette maniere.

Des ſuites de rapports ci-deſſus, ne prenons que ceux qui concernent les tenſions des parties de la corde *TABCS*: nous aurons

$T : a :: \sin FAD : \sin FAE$

$a : b :: \sin GBH : \sin IBH$

$b : S :: \sin MCL : \sin MCK$

Lesquelles étant multipliées par ordre, donnent $T : S :: \sin FAD \times \sin GBH \times \sin MCL : \sin FAE \times \sin IBH \times \sin MCK$. Et si l'on vouloit le rapport de la tension *l* à la tension *b*, on ne multiplieroit que les deux premieres proportions; & ainsi des autres.

Veut-on avoir le rapport des puissances entr'elles? Il n'y a qu'à tirer des suites de rapports ci-dessus, le rapport de deux puissances consécutives à la tension d'un même cordon : on aura

$P : a :: \sin TAD : \sin FAE$

$a : Q :: \sin GBH : \sin IBG$

$Q : b :: \sin IBG : \sin IBH$

$b : R :: \sin MCL : \sin KCL$

Multipliant ces quatre proportions & réduisant (*Géom.* 100) $P : R :: \sin TAD \times \sin GBH \times \sin MCL : \sin FAE \times \sin IBH \times \sin KCL$. Et si on vouloit le rapport de *P* à *Q*, on ne multiplieroit que les deux premieres proportions.

On voit, par-là, ce qu'il y a faire pour un plus grand nombre de puissances, & pour comparer les tensions des cordons avec les puissances mêmes.

554. Si les puiſſances P, Q, R diviſoient en deux parties égales les angles TAB, ABC, &c. alors les angles DAF, FAE, ſeroient égaux, & les angles GBH, MCL auroient les mêmes ſinus que les angles IBH, MCK; d'où & des rapports ci-deſſus on concluroit que toutes les parties de la corde $TABCS$ ſont également tendues.

555. Si au lieu des puiſſances P, Q, R, on avoit en A, B, C des points fixes, alors (552) la preſſion que la tenſion des parties extrêmes de la corde exerceroit ſur ces points fixes, ſeroit dirigée de maniere à diviſer chaque angle en deux parties égales; & les tenſions de toutes les parties TA, AB, &c. de la corde $TABCS$ ſeroient égales (554). Donc (*Fig.* 72) ſi deux puiſſances T & S tendent une corde appliquée ſur le contour d'un polygone ou d'une courbe quelconque, la tenſion ſe communiquera également partout, enſorte que ces deux puiſſances doivent être égales.

556. Lorſque les cordons aſſemblés par un même nœud, étant dans un même plan, ſe trouvent être au nombre de plus de trois; ou lorſqu'étant dans des plans différents, ils ſont au nombre de plus de quatre; alors les directions des cordons étant données, les rapports des puiſſances & des tenſions des

cordons ne ſont pas abſolument déterminés; c'eſt-à-dire, que ſi un certain nombre de puiſſances (qui ne ſoit pas au-deſſous de ce qui vient d'être dit) ſe font fait équilibre ſuivant des directions connues, on peut leur ſubſtituer pareil nombre d'autres puiſſances dirigées de la même maniere, mais qui ayant entr'elles des rapports tout différents, ne ſe feront pas moins équilibre.

Par exemple, ſi les quatre cordons *AP*, *AQ*, *AR*, *AS*, (*Fig.* 73) ſont tous dirigés dans un même plan, & qu'ayant pris *AB* pour repréſenter la force *P*, & prolongé le cordon *SA* vers *C*, on conçoive l'effort *AB* compoſé de deux autres *AC*, *AD* dont le premier ſoit égal & directement oppoſé à la puiſſance *S*, rien ne détermine la direction *AD* de l'action qui doit s'oppoſer à l'effort compoſé des deux puiſſances *Q* & *R*; rien, dis-je, ne détermine cette direction, ſinon que prolongée elle doit paſſer dans l'angle *QAR*; condition à laquelle on voit évidemment qu'il y a une infinité de manieres de ſatisfaire. C'eſt pourquoi ſi ayant pris une direction *AD* arbitrairement avec la condition ſeulement qui vient d'être preſcrite, on forme ſur *AB* comme diagonale, & ſur les directions *AC*, *AD*, comme côtés, le parallélogramme *ACBD*; & qu'enſuite ſur

AD comme diagonale, & ſur les prolongements *AE*, *AF* des directions des deux puiſſances *Q* & *R*, on forme le parallélogramme *AEDF*; alors en prenant *AB* pour repréſenter la valeur de *P*, on pourra prendre *AC* pour celle de *S*, *AF* pour celle de *R*, & *AE* pour celle de *Q*, parce que la force *AB* agit comme le feroient les deux forces *AC*, *AD*, dont la premiere pour faire équilibre à *S*, doit être = *S*; à l'égard de la ſeconde, *AD*, elle agit comme les deux forces *AF*, *AE*, qui pour faire équilibre à *R* & *Q*, doivent leur être reſpectivement égales. Mais on voit en même temps qu'en donnant à *AD* une direction différente, *AC*, *AF* & *AE* auroient des valeurs différentes, telles néanmoins, qu'étant attribuées aux puiſſances ſur les directions deſquelles elles ſe trouvent, ces puiſſances ſe feroient équilibre : ainſi, dans ce cas, les directions reſtant les mêmes, il y a une infinité de manieres de mettre ces puiſſances en équilibre.

557. Il en eſt de même lorſque les cordons iſſus d'un même nœud, ſont dans différents plans, & qu'ils ſont au nombre de plus de quatre. Mais lorſqu'il n'y en a que quatre, les directions étant données, les rapports que doivent avoir les forces appliquées à ces cordons, ſont déterminés.

Car, par deux quelconques *AP, AS* de ces cordons (*Fig.* 74), on peut toujours concevoir un plan qui prolongé suffisamment rencontrera le plan *RAQ* des deux autres, suivant la ligne *DAE* quelconque, mais dont la position est déterminée par les directions des quatre puissances. Alors si l'on prolonge la direction *SA*, & qu'ayant pris *AB* pour représenter la puissance *P*, on forme sur *AB* comme diagonale, & sur les directions *AD, AC* comme côtés, le parallélogramme *DACB*, on aura *AC* pour la valeur de la puissance *S*, & *AD* pour celle de l'effort que la puissance *P* exerce contre les deux puissances *Q* & *R* agissant conjointement. Donc si ayant prolongé *QA* & *RA* qui sont dans un même plan avec *AD*, on forme sur *AD* comme diagonale, & sur les prolongements *AF* & *AG* comme côtés, le parallélogramme *AFDG*; *AF, AG* seront les valeurs qu'on doit donner aux deux puissances *Q* & *R*.

558. Au reste, dans quelque cas que ce soit, soit que les cordons soient ou ne soient pas dans un même plan; comme l'équilibre exige que chaque nœud demeure immobile, si l'on décompose la force ou la tension de chaque cordon appliquée à un même nœud en trois autres forces perpendiculaires en-

tr'elles, ou paralleles à trois droites perpendiculaires entr'elles, il faut (314) pour chaque nœud, que la ſomme des forces paralleles à chacune de ces lignes, ſoit zéro. (Bien entendu que par le mot *ſomme*, on entend ici la ſomme des forces qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent dans l'autre). Si les cordons aſſemblés dans un même nœud, étoient dans un même plan, il ſuffiroit de décompoſer en deux forces paralleles à deux lignes perpendiculaires entr'elles, & tirées dans ce même plan. Par ce principe, on aura toujours toutes les conditions de l'équilibre, les cordons étant fixement liés entr'eux.

Pour en donner un exemple ſimple, propoſons-nous de trouver par ce même principe, le rapport de trois puiſſances en équilibre par le moyen de trois cordons aſſemblés par un même nœud (*Fig.* 75).

Suppoſons, pour un moment, que AG, AB, AF, ſont les lignes qui peuvent repréſenter ces trois puiſſances, & pour avoir moins de décompoſitions à faire, décompoſons les deux puiſſances Q & R, comme on le voit dans la figure, c'eſt-à-dire, chacune en deux ; l'une, ſur la direction de P; l'autre, perpendiculaire à cette même direction. Alors dans les triangles rectangles

BAC,

BAC, FAI, en repréſentant le rayon par 1, nous aurons $BC = AD = AB \sin AQC$; $FI = AE = AF \sin RAC$; $AC = AB \cos QAC$; $AI = AF \cos FAI$. Donc ſuivant le principe que nous venons de poſer, nous aurons $AB \sin QAC - AF \sin RAC = 0$, & $AB \cos QAC + AF \cos RAC - AG = 0$. La premiere de ces équations donne $AB \sin QAC = AF \sin RAC$, & par conſéquent $AB : AF :: \sin RAC : \sin QAC$, c'eſt-à-dire, $Q : R :: \sin RAC : \sin QAC$, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qui a été démontré (548). Si de la premiere équation on tire la valeur de AF, & qu'on la ſubſtitue dans la ſeconde, on aura $AB \cos QAC + \frac{AB \cos RAC \sin QAC}{\sin RAC} - AG = 0$, ou $AB \cos QAC \sin RAC + AB \cos RAC \sin QAC = AG \sin RAC$. Mais (*Géom.* 284) $\cos QAC \sin RAC + \cos RAC \sin QAC = \sin (QAC + RAC) = \sin QAR$; donc $AB \sin QAR = AG \sin RAC$; c'eſt-à-dire, $AB : AG :: \sin RAC : \sin QAR$, ou $Q : P :: \sin RAC : \sin QAR$; ce qui s'accorde également avec ce qui a été démontré (548).

559. Voyons maintenant ce que la peſanteur des cordes peut changer à la communication de l'action des puiſſances.

Soient (*Fig.* 76) tant de puiſſances que l'on voudra appliquées à une même corde ſans peſanteur $TABCS$ tirée à ſes deux extrémités par deux puiſſances T & S, ou retenue à deux points fixes T & S.

Si l'on prolonge les deux cordons extrêmes TA, CS juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en V, il eſt évident que l'effort réſultant des tenſions particulieres de ces deux cordons extrêmes, doit paſſer par ce point V. Et puiſque nous ſuppoſons qu'il y a équilibre, la réſultante des trois puiſſances P, Q & R, & des tenſions des deux cordons intermédiaires AB & BC, doit auſſi paſſer par le point V, puiſque pour l'équilibre elle doit être égale & directement oppoſée à la réſultante des tenſions des deux cordons TA & CS. Mais la réſultante des trois puiſſances & des tenſions des deux cordons intermédiaires, n'eſt autre que celle des trois puiſſances ſeulement, parce que chacun des deux cordons AB & BC n'a, par lui-même, aucune action, & par conſéquent aucun effet contre quelque partie que ce ſoit du ſyſtême. Donc la réſultante de toutes les puiſſances P, Q, R appliquées à la corde, paſſe par le prolongement V des deux cordons extrêmes.

On a vu (227 & *ſuiv.*) comment on peut déterminer cette réſultante; mais ſi les cordons font paralleles, comme il arrive lorfque les puiffances P, Q, R font des poids, comme leur réfultante ne peut manquer de leur être parallele, fa direction fe détermine tout fimplement, en menant par le point V, une parallele à l'une des directions de ces poids, c'eft-à-dire, une verticale.

Soient donc (*Fig.* 77) tant de poids qu'on voudra, appliqués à une même corde fans pefanteur; ayant prolongé les deux cordons extrêmes, & mené par leur rencontre V la verticale VX, on peut réduire, par la penfée, l'éqilibre de tout ce fyftême, à celui de trois puiffances appliquées à trois cordons affemblés par le nœud V, & où la puiffance dirigée fuivant XVZ eft la fomme des poids. De-là & de ce qui a été dit (548) on conclura donc que la tenfion T, eft à la tenfion S comme le finus de VXS eft au finus de TVX.

Si l'on fe repréfente, maintenant, une corde pefante, comme l'affemblage d'une infinité de petits poids uniformément diftribués fur l'axe de cette corde, on voit donc que fi S (*Fig.* 78) repréfente le point où la puiffance eft appliquée à la corde, & T celui où cette corde eft appliquée à une machine, l'action que la puiffance exerce fur le point T, fe tranfmet fuivant la tangente TV à la courbe que forme la corde par sa pesanteur : que cette action n'est égale à celle de la puissance S, que lorsque la verticale menée par le point de concours V des deux tangentes extrêmes divise l'angle TVS en deux parties égales ; & qu'en général l'action de la puissance S, celle qu'elle transmettroit, si la corde n'étoit pas pesante, est à celle qu'elle transmet conjointement avec le poids de la corde, comme le sinus de TVX, est au sinus de SVX.

560. Remarquons que, rigoureusement parlant, quelque force que l'on emploie pour tendre une corde, elle ne peut jamais être parfaitement droite, si ce n'est dans la situation verticale. En effet, supposons que la corde RAP (*Fig.* 79) sans pesanteur, soutient le poids Q, à l'aide des deux puissances égales P & R dont les directions forment un angle infiniment approchant de 180°. On aura $Q : P :: \sin CAD : \sin CAB$ (548), ou (en prolongeant DA) $:: \sin CAS : \sin \frac{1}{2} CAD$; mais l'angle CAS est infiniment petit, par la supposition ; & $\frac{1}{2}$ CAD approche infiniment d'un angle droit ; donc Q doit être infiniment petit par rapport à P ; donc lors même que le poids Q est infiniment petit, les deux parties de la corde forment encore un angle.

On peut donc conclure de-là, qu'une force très-petite Q, excite une tenſion très-grande dans les cordons AP, AR lorſque l'angle RAP de ceux-ci eſt fort obtus.

Par-là on peut expliquer pourquoi en ſoufflant par le moyen du tuyau Aa (*Fig.* 80) dans une enveloppe flexible $aEBCa$ à l'extrémité B de laquelle eſt attaché le poids P, un ſouffle médiocre ſuffit pour élever ce poids P quoiqu'aſſez conſidérable. En effet, on peut regarder chaque moitié aCB, aEB de la ſection verticale de cette enveloppe, comme une corde pouſſée en chaque point par une force perpendiculaire, égale à la preſſion que l'air exerce intérieurement contre les parois de l'enveloppe. La réſultante de toutes ces preſſions doit (559) être dirigée ſuivant FED, c'eſt-à-dire, paſſer par le concours des tangentes aux extrémités de cette corde, & elle doit être à l'effort qui ſe fait ſuivant BD : : *ſin* aDB ou *ſin* aDu : *ſin* FDA. Or l'angle aDu eſt très-petit. Donc l'effort très-petit dirigé ſuivant FD, en produit un très-grand ſuivant BD; par la même raiſon, la preſſion faite ſur aEB engendrera un effort conſidérable ſuivant BF; le poids P ſera donc tiré par deux forces très-conſidérables, ſuivant BD, BF, & qui auront d'autant plus d'effet que l'angle FBD ſera plus petit, parce que leur effort résultant approche d'autant plus d'être égal à leur somme.

De la courbure que les cordes prennent par les poids, & de la courbure des voiles par l'action du vent.

561. Lorsqu'une corde ou tout autre corps long & flexible prend une courbure par l'action de plusieurs forces quelconques appliquées à chacun de ses points, pour déterminer quelle peut être cette courbure, voici la route que l'on peut tenir.

Regardant cette courbe comme un polygone d'une infinité de côtés, on en considérera trois consécutifs, & supposant les forces appliquées aux angles, on décomposera celles qui sont appliquées à un même angle, chacune en deux autres dirigées suivant les deux côtés de cet angle. Alors la condition générale de l'équilibre, est que pour chaque côté intermédiaire tel que bc (*Fig.* 81) la somme des forces qui agissent de b vers c, soit égale à la somme de celles qui agissent de c vers b.

Supposons qu'à chaque angle, il y ait deux sortes de forces appliquées; l'une perpendiculaire à la courbe, ou qui divise l'angle des deux côtés contigus, en deux parties égales; l'autre parallele à une droite donnée de position que nous prendrons pour l'axe des y.

Soit pour le point b la force perpendiculaire à la courbe, $= P$, & la force suivant $Pb = Q$; & soient pour le point c, ces forces $P + dP$, & $Q + dQ$. Nommons $Aq = x$; $qa = y$; $ab = ds$. L'angle de contingence abe sera (77) exprimé par $-\frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; ou bien puisque le rayon R de la développée (77) est exprimé par ds divisé par cet angle de contingence, ce qui donne $\frac{ds}{-\frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = R$, on aura l'angle de contingence exprimé plus simplement par $\frac{ds}{R}$. Donc l'angle de contingence kcd sera $\frac{ds + dds}{R + dR}$.

Cela posé, décomposons d'abord la force bf ou P, en be & bg dirigées suivant les côtés cb, ab. Nous aurons $\sin gbe$ ou $\sin abe : \sin fbg :: P : be$; donc en faisant attention que l'angle fbg est droit, on a $\frac{ds}{R} : 1 :: P : be = \frac{PR}{ds}$. Par une décomposition & un raisonnement semblables pour le point c, on trouvera $ck = \frac{(P+dP)(R+dR)}{ds+dds}$.

Décomposons pareillement les forces Q ou bk (*Fig.* 82) en deux autres suivant bi & bl prolongements des côtés cb, ab. Nous aurons $\sin ibl$ ou $\sin abi : \sin kbl$ ou $\sin abP :: Q : bi$, ou $\frac{ds}{R}$: $\frac{dx}{ds} :: Q : bi = \frac{QRdx}{ds^2}$. On trouvera de même pour le point c, $\sin mcb : \sin mcn$, ou $\sin pcd$, ou $\sin(bcp+mcb) :: Q+dQ : co$. Or $\sin(bcp+mcb) = \sin bcp \cos mcb + \sin mcb \cos bcp$ $= \frac{dx+ddx}{ds+dds} + \frac{ds+dds}{R+dR} \times \frac{dy+ddy}{ds+dds}$, parce que le cosinus de mcb est censé égal au rayon. Donc . . . .

$$co = \frac{(Q+dQ)(R+dR)(dx+ddx)}{(ds+dds)^2} + \frac{(Q+dQ)(dy+ddy)}{ds+dds}.$$

Réunissant donc les forces qui agissent au point b (*Fig.* 81); réunissant pareillement celles qui agissent au point c, & égalant la somme des premieres à la somme des secondes, on aura $\frac{PR}{ds} + \frac{QRdx}{ds^2} = \frac{(P+dP)(R+dR)}{ds+dds} + \ldots\ldots$

$$\frac{(Q+dQ)(R+dR)(dx+ddx)}{(ds+dds)^2} + \frac{(Q+dQ)(dy+ddy)}{ds+dds},$$

équation qui n'est autre que celle-ci, $0 = d\left(\frac{PR}{ds}\right) + d\left(\frac{QRdx}{ds^2}\right) + \frac{(Q+dQ)(dy+ddy)}{ds+dds}$, ou $d\left(\frac{PR}{ds}\right) + d\left(\frac{QRdx}{ds^2}\right) + \frac{Qdy}{ds} = 0$, en rejettant, comme il convient, les infiniment petits des ordres inférieurs.

562. Pour faire connoître l'usage de cette équation, supposons d'abord qu'il n'y a point de forces paralleles aux y; c'est-

à-dire, que $Q = o$; & supposons que les forces P sont toutes égales, ou, ce qui revient au même, qu'elles sont proportionnelles à l'élément correspondant ds ; c'est-à-dire, $P = ads$, a étant une constante donnée. Notre équation générale se réduira à $d(aR) = o$; donc $aR = C$. Le rayon R de la développée, est donc constant ; la courbe est donc un arc de cercle. C'est-à-dire, que si une corde ou une surface flexible & non pesante, est tirée ou poussée en chacun de ses points, par des forces égales, & qui lui soient perpendiculaires, elle prendra la figure d'un arc de cercle si c'est une corde, & la courbure d'une sphere si c'est une surface fermée de toutes parts. On voit par-là pourquoi les bulles d'air qui se dégagent d'une liqueur grasse, prennent une figure sphérique : l'air intérieur en se dilatant, presse également & perpendiculairement tous les points de la surface.

563. Supposons, en second lieu, que les forces perpendiculaires sont nulles, & que les forces paralleles aux y, soient le poids même des éléments ab, cd, &c ; c'est-à-dire, que $P = o$ & $Q = pds$, p marquant la pesanteur spécifique de la corde. Notre équation générale deviendra $d\left(\frac{pRdx}{ds}\right) + pdy = o$, dont l'intégrale est $\frac{pRdx}{ds} + py = C$. Pour déterminer la constante C, on observera que lorsque $y = o$, c'est-à-dire, au point A (*Fig.* 83) l'équation se réduit à $\frac{pRdx}{ds} = C$. Or le premier membre de cette équation exprime la tension de la corde en A ; donc si on suppose cette tension équivalente au poids pa, on aura $C = pa$, & par conséquent $\frac{Rdx}{ds} + y = a$. Remettons pour $\frac{ds}{R}$ sa valeur $-\frac{dx^2}{ds^2}d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; nous aurons

$$\frac{-ds^2}{dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)} = a - y, \text{ ou } \frac{1}{a-y} = \frac{-dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx^2 + dy^2} = \frac{-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Multiplions chaque membre par $-dy$, & intégrons, nous aurons $l(a-y) = \frac{1}{2}l\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + lC'$, ou $(a-y)^2 =$

$C'C'\left(\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}\right)$, qui lorsque $y=0$ devient $aa=-\frac{C'C'ds^2}{dx^2}$, & donne $C'=\frac{a\,dx}{ds}$. Or il est facile de voir que $\frac{a\,dx}{ds}$ exprime la tension de la corde au point O le plus bas; donc si on appelle b cette tension, on aura $C'=b$, & par conséquent $(a-y)^2=bb\left(\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}\right)$, d'où l'on tire $dx=\pm\frac{b\,dy}{\sqrt{(a-y)^2-bb}}$ équation dont l'intégrale est $x=\mp bl(a-y+\sqrt{(a-y)^2-bb})+lC''$.

Or si nous supposons que le point A origine des x est sur la courbe, il faut que lorsque y sera zéro, la premiere valeur de x devienne zéro; on a donc $0=lC''-bl(a+\sqrt{aa-bb})$; donc enfin $x=bl(a+\sqrt{aa-bb})\mp bl(a-y+\sqrt{(a-y)^2-bb})$ qui donnera facilement tous les points de la courbe lorsque a & b seront donnés.

Si l'on donnoit le poids de la corde, ou seulement sa longueur, & que la corde dût être fixée en deux points donnés A & B (*Fig.* 83); alors il faudroit que lorsque $x=AD$, on eût $y=DB$, & que lorsque $x=AD$ & $y=DB$, on eût la longueur AOB (qui est facile à déterminer par l'équation & par la formule ordinaire de rectification) égale à la longueur donnée. Ces deux conditions donneront deux équations pour déterminer a & b. Mais quoique de l'une des deux il soit facile de conclure la valeur de a en b, on ne pourra cependant avoir b, à l'aide de la seconde, que par une sorte de tâtonnement, à cause des quantités logarithmiques qui y entrent.

564. Proposons-nous, maintenant, de trouver la courbure que prend une voile enflée par le vent, en supposant 1°. que cette voile est rectangulaire; 2°. que ses deux bords opposés supérieur & inférieur forment toujours chacun une ligne droite; 3°. que les particules d'air arrivent dans des plans perpendiculaires à ces deux lignes droites; 4°. que ces mêmes particules s'échappent à mesure qu'elles ont fait leur choc. En vertu de ces suppositions, toutes les coupes de la voile, faites parallélement au mouvement des particules d'air, seront absolument les mêmes; & il suffit d'en considérer une seule; c'est-à-dire, de se conduire comme s'il s'agissoit d'une corde ou d'un fil sollicité par les mêmes forces.

Si on néglige la pesanteur de la voile, on aura $Q=0$; & selon ce qui a été dit (406) les forces P seront exprimées par $m\,ds \times \frac{dx^2}{ds^2}$, m étant une quantité connue dépendante de la vîtesse du fluide & de sa densité.

La supposition que $Q=0$, réduit notre équation générale à $d\left(\frac{PR}{ds}\right)=0$, qui donne $\frac{PR}{ds}=C$, & fait voir que la tension $\frac{PR}{ds}$ est par-tout la même. Substituant pour P & pour $\frac{ds}{R}$, leurs valeurs, on a $\frac{m\,ds}{-\left(\frac{dy}{dx}\right)}=C$; ou bien, supposant la tension C exprimée par mb, on a $\frac{-d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds}=\frac{1}{b}$, qui se change en $-\frac{\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}=\frac{1}{b}$; multipliant par dy & intégrant, on a $C'-\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{y}{b}$. Lorsque $y=0$, cette équation devient $C'\frac{ds}{dx}=0$, ou $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{C'}$. Soit donc $\frac{a}{b}$ la valeur qu'a alors $\frac{dx}{ds}$, on aura $C'=\frac{a}{b}$ & par conséquent $a-y=b\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, d'où l'on tire $dx=\pm\frac{b\,dy}{\sqrt{(a-y)^2-bb}}$ équation qui étant absolument la même que celle que nous avons trouvée (563) fait voir que la courbure de la voile est précisément celle que prend une corde par l'action de sa pesanteur.

Si l'air ne s'échappe pas à mesure qu'il fait son choc, alors chaque coupe verticale de la voile prendra la figure d'un arc de cercle (562), du moins dans la partie d'où l'air ne s'échappe pas.

Quant à la direction suivant laquelle les efforts faits sur les différents points de la voile, s'accordent à pousser ensemble la voile (ce qu'on appelle la direction moyenne), on l'aura, en menant par les deux points extrêmes A & B (*Fig.* 84) les deux tangentes AT, BT, & par leur point de concours T la perpendiculaire TO à la courbe AOB. C'est une suite de ce qui a été dit (559), & de ce que les impressions faites en chaque point, s'y exercent perpendiculairement.

Si l'on veut savoir ce que la courbure de la voile fait perdre de l'action du vent, cela se réduit à chercher ce qui résulte dans le sens horisontal, de l'impulsion d'un fluide sur tous les points de la courbure AOB dont on a l'équation; c'est une chose facile d'après ce qui a été dit (416) : alors comparant ce résultat, avec l'impression faite par le même fluide sur la surface AOB supposée plane, on aura le rapport de l'une à l'autre impression.

Au reste, le cas que nous venons d'examiner, est encore fort borné. Si le bord supérieur de la voile peut être censé rectiligne, parce qu'il est attaché à la vergue en plusieurs endroits, il n'en est pas de même du bord inférieur dont les angles seulement (qu'on appelle les *points* de la voile) sont fixés : ce qui fait que la voile prend deux sortes de courbures. Mais le calcul pour déterminer en général, la figure que doit prendre une surface, eu égard à la maniere dont ses bords sont fixés, est trop compliqué pour pouvoir trouver place ici : nous devons nous borner à mettre sur la voie sur ces sortes d'objets.

565. Si dans la même supposition que ci-dessus (564) on veut avoir égard à la pesanteur de la voile : alors outre $P = m\,ds.\frac{dx^2}{ds^2}$, on aura $Q = p\,ds$. Supposant, pour plus de simplicité que le rapport de $p : m$ est celui de $1 : k$, ce qui donne $m = pk$, alors l'équation générale deviendra $d\left(\frac{PR}{ds}\right) + d\left(\frac{QRdx}{ds^2}\right) + p\,dy = 0$, dont l'intégrale est $\frac{PR}{ds} + \frac{QRdx}{ds^2} + py = C$, qui en mettant pour P, Q & $\frac{ds}{R}$ leurs valeurs, & supposant $C = pa$, donne $\frac{-dx\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds(kdx+ds)} = \frac{1}{a-y}$. Mettant

pour ds sa valeur $\sqrt{dx^2+dy^2}$ ou $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, & multipliant par $-dy$, on change cette équation en . . . .

$$\frac{\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\left(k+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right)}=\frac{-dy}{a-y}, \text{ ou....}$$

$$\frac{d\left(k+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right)}{k+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}=\frac{-dy}{a-y}, \text{ dont l'intégrale est....}$$

$l\left(k+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right)=l(a-y)+lC'$. Cette équation lorsque $y=0$ devient $l\left(k+\frac{ds}{dx}\right)=la+lC'$, d'où l'on tire $C'=\frac{k}{a}+\frac{ds}{adx}$, $\frac{ds}{dx}$ étant ici ce que devient la valeur générale de $\frac{ds}{dx}$ lorsque $y=0$. Soit $\frac{a}{b}$ cette valeur ; on aura $k+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{(kb+a)}{ab}(a-y)$, d'où l'on tire $dx=\pm\frac{ab\,dy}{\sqrt{[(kb+a)(a-y)-kab]^2-a^2b^2}}$, équation qui exprime encore une courbe de même nature que celle d'une corde tendue par son propre poids.

566. Il est facile d'appliquer notre équation générale à une infinité d'autres cas ; par exemple, aux cas où la corde ne seroit pas d'une épaisseur uniforme, où les directions de la pesanteur ne seroient pas paralleles, &c ; & en général, aux cas où les différents points de la corde seroient sollicités par des forces quelconques dirigées dans un même plan : parce qu'il sera toujours possible de décomposer telle force que ce soit, en deux autres, l'une perpendiculaire à la courbe, l'au-

ire parallele aux y ; & d'avoir les expressions de ces forces, dont la totalité des premieres a été représentée par P ; & la totalité des dernieres, par Q.

Des petites oscillations des corps attachés à des fils ou à des cordes.

567. Nous avons vu (534 & *suiv.*) comment on doit s'y prendre pour déterminer les mouvements des corps qui agissent les uns sur les autres par le moyen de fils auxquels ils sont liés. Nous allons nous arrêter un moment sur quelques circonstances où ces mouvements sont alternatifs.

Nous regardons les corps attachés à ces fils, comme des points pesants dont toute la masse est réunie à leur centre de gravité. Lorsqu'ils sont d'un volume sensible, leur figure influe sur leur mouvement. Mais on verra par la suite comment on y a égard.

Soit donc aMm (*Fig.* 85) un fil ou une corde parfaitement flexible & sans masse, fixée au point a par une de ses extrémités, à laquelle soient attachées les deux masses M & n. Supposons que les distances Mc, mn, à la verticale an, sont incomparablement plus petites que les longueurs aM, Mm, ensorte que les angles Man, mbn que les deux parties du fil forment avec la verticale soient infiniment petits.

Il est clair, dans cette supposition, que les portions de courbe que les corps décrivent, peuvent être regardées comme des lignes droites Mc, mn perpendiculaires à an.

Soient mi & Me les vitesses que les corps acquerroient dans l'instant dt en vertu de leur pesanteur s'ils étoient libres. Si l'on nomme p la vitesse qu'un corps pesant acquerroit dans une seconde de temps, on aura $Me = p\,dt$ & $mi = p\,dt$, le temps t étant supposé compté en secondes.

Le corps m ne pouvant obéir entierement à l'action de sa pesanteur, je décompose sa vitesse mi en deux autres, l'une nk perpendiculaire à Ml, ou (ce qui revient au même en vertu de la supposition) dirigée suivant mn, & qui soit celle que le corps prendra réellement, ou l'accroissement de sa vitesse actuelle ; l'autre ml qui ne puisse plus produire aucun mouvement dans m, & qui par conséquent soit telle que la force de m en vertu de cette derniere, se distribue tellement entre M & le point fixe a, que le mouvement mk n'en soit point troublé, ce qui exige d'abord que ml soit dirigé suivant le fil Mm.

Cela posé, (233) on aura $mi : mk :: \sin lmk : \sin lmi$, & $mi : ml :: \sin lmk : \sin imk$, d'où en observant que l'angle lmi étant infiniment petit, l'angle lmk est réputé droit, on a $mk = mi \sin lmi = pdt \sin Mbc$, & $ml = pdt$.

Maintenant, le corps m tendant à se mouvoir suivant ml avec la vîtesse pdt, agit sur le point M avec une force exprimée par $mpdt$, & tend par conséquent à donner à M une vîtesse $Mh = \frac{mpdt}{M}$. On doit donc actuellement regarder le corps M comme sollicité par deux forces dont l'une tend à lui donner la vîtesse Mh, & l'autre la vîtesse Me. Mais comme il ne peut obéir pleinement ni à l'une ni à l'autre, que d'ailleurs la vîtesse qu'il doit prendre doit être telle qu'elle ne trouble pas mk que nous avons supposé être tout ce que m recevra, je décompose chacune en deux autres, l'une suivant le fil aN, & l'autre perpendiculaire à aM ou Mm, ou ce qui revient au même, dans la supposition présente, dirigée sur la ligne Mc, ensorte que la vîtesse que M prendra, ou plutôt l'accroissement de vîtesse qu'il recevra, sera Md-Mg. Or (233) on a $Mh : Mg :: \sin gMr : \sin hMr :: 1 : \sin aMb$ ou $:: 1 : \sin(Mbc - Mac)$; donc $Mg = \frac{M}{m} pdt \sin(Mbc - Mab)$: pareillement Me: $Md :: \sin fMd : \sin fMe :: 1 : \sin Mab$; donc $Md = pdt \sin Mab$, & par conséquent $Md - Mg = pdt [\sin Mab - \frac{m}{M} \sin(Mbc - Mab)]$.

Or si l'on nomme Mc, x; mn; x'; & qu'on observe que t croissant, x & x' diminuent, on aura $\frac{-dx}{dt}$ & $\frac{-dx'}{dt}$ pour les vîtesses de M & m suivant Mc & mn; & par conséquent $-d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ & $-d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$ pour les accroissements $Md - Mg$, & mk de ces vîtesses. On aura donc $-d\left(\frac{dx}{dt}\right) = pdt\ [\sin Mab - \frac{m}{M} \sin(Mbc - Mab)]$ & $-d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = pdt \sin Mbc$. Or on trouvera facilement que $\sin Mab = \frac{x}{L}$ en nommant L la longueur aM; & que $\sin Mbc$ ou $\sin mMu = \frac{x' - x}{l}$ en nommant l la longueur Mm : donc puiſqu'à cauſe des angles infiniment petits on a $\sin(Mbc - Mab) = \sin Mbc - \sin Mab$, on aura enfin $-d\left(\frac{dx}{dt}\right) = p\,dt\left(\frac{x}{L} - \frac{m}{M} \cdot \frac{x' - x}{l} + \frac{mx}{ML}\right)$ & $-d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = p\,dt\left(\frac{x' - x}{l}\right)$. Si, comme on en eſt bien le maître, on ſuppoſe dt conſtant, on s'y prendra, pour intégrer ces deux équations, de la maniere qui a été enſeignée (178). Mais il n'eſt pas indiſpenſable, pour appliquer cette méthode, de ſuppoſer dt conſtant. On peut s'y prendre de la maniere ſuivante.

Suppoſons (pour ſimplifier le calcul, car cela ne change rien à la méthode) que $M = m$, & $L = l$. Nos équations ſe réduiront à $p\,dt\left(\frac{x' - x}{l}\right) + d\left(\frac{dx'}{dt}\right) = 0$, & $p\,dt\left(\frac{3x - x'}{l}\right) + d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$. A la premiere j'ajoute la ſeconde multipliée par le coëfficient conſtant & inconnu a ; j'ai . . .

$$\frac{p}{l}dt(1 - a)x' + \frac{p}{l}dt(3a - 1)x + d\left(\frac{dx}{dt}\right) + ad\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

J'ajoute à cette équation la quantité $b\,dx + c\,dx'$, & j'en retranche ſon équivalente $\frac{b\,dx}{dt}dt + \frac{c\,dx'}{dt}dt$, b & c étant des conſtantes inconnues, après quoi je multiplie par P que je ſuppoſe être une fonction de t propre à rendre l'équation intégrable. J'ai $\frac{pP}{l}dt(1 - a)x' + \frac{pP}{l}dt(3a - 1)x + Pc\,dx' + Pb\,dx - \frac{Pc\,dx'}{dt}dt - \frac{Pb\,dx}{dt}dt + Pd\left(\frac{dx'}{dt}\right) + Pa\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, équation qui (153) pour être intégrable exige que $\frac{a\,dP}{dt} = -Pb$, $\frac{dP}{dt} = -Pc$, $\frac{b\,dP}{dt} = \frac{pP}{l}(3a - 1)$, $\frac{c\,dP}{dt} = \frac{pP}{l}(1 - a)$. De ces équations on tirera $a = -1 \pm \sqrt{2}$, qui donnera pour c ces quatre valeurs $c = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{-1}$, $c = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{-1}$, & pour b, quatre valeurs correſpondantes. De plus, on aura $P = e^{-ct}$. Or notre équation a pour intégrale $Pa\frac{dx}{dt}+\frac{Pdx'}{dt}+Pbx+Pcx'=C$, ou $\frac{adx}{dt}+\frac{dx'}{dt}+bx+cx'=Ce^{-ct}$.

Concevons donc qu'on substitue successivement pour a ses deux valeurs, & qu'à mesure qu'on substituera chaque valeur de a, on substitue à b & c les deux valeurs qui, pour chacune, correspondent à une même valeur de a, on aura quatre équations en observant de changer successivement C en C', C'', C'''. De ces équations on tirera facilement les valeurs de $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, x' & x, exprimées en t & en constantes. A l'égard des constantes C, C', C'', C''', on les déterminera par ces quatre conditions, que lorsque $t=0$, on ait $\frac{-dx'}{dt}=0$, $\frac{-dx}{dt}=0$, $x'=m'$; $x=m$; m' & m étant les valeurs initiales de x' & de x. Enfin si l'on se rappelle (162) que le cosinus d'un arc z, a pour expression $\frac{e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, on ramenera facilement les valeurs de x & x' à être exprimées par des cosinus d'arc multiples de t.

Le calcul qu'on aura à faire dans la supposition de $\frac{m}{M}$ & de L & l quelconques, est absolument semblable. Si l'on calcule donc de la même maniere les valeurs générales de x & x', il sera ensuite facile de déterminer les durées des oscillations totales de chaque corps; dans quels cas elles se feront dans un même temps, &c. Nous n'entrerons point dans ces détails que l'on peut voir dans la *Dinamique* de M. *d'Alembert*.

568. Si le nombre des corps étoit plus considérable, on se conduiroit d'une maniere semblable tant pour former les équations, que pour l'intégration de ces mêmes équations. Par exemple, s'il y avoit trois corps, on opéreroit pour m & M (*Fig.* 86) comme dans le cas précédent, pour déterminer l'accroissement de vîtesse de chacun; on détermineroit de plus, la vîtesse Mr qui tend à donner à M', une quantité de mouvement $m\times Mr$, & par conséquent une vîtesse $\frac{m}{M'}.Mr$.

On

On détermineroit pareillement la vîteſſe Mf qui tend à donner à M' une quantité de mouvement $M \times Mf$, & par conſéquent une vîteſſe $\frac{M}{M'} \times Mf$; enſorte que l'action des deux corps M & m tend à donner à M' ſuivant $M'M$, la vîteſſe $\frac{m}{M'} Mr + \frac{M}{M'} Mf$. Il ne s'agit donc plus que de regarder M' comme animé de la vîteſſe $M'b$ que lui donne la peſanteur, & de la vîteſſe $\frac{m}{M} mr + \frac{m}{M'} Mf$, leſquelles doivent être décompoſées de même qu'on l'a fait pour M, dans la figure 85.

Quant à l'intégration des trois équations, on ſe conduira, comme il a été dit (178), ſans être obligé de ſuppoſer dt conſtant; on imitera ſeulement ce que nous avons fait dans la ſolution précédente par rapport à dt variable. On parviendra de cette maniere, à ſix équations intégrales, qui donneront les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dx''}{dt}$, x, x', x''.

569. Ce que nous venons d'expoſer, nous conduit naturellement à chercher le mouvement d'une corde uniformément peſante, fixée à ſon extrémité A (*Fig.* 87) & tendue à ſon autre extrémité B, par une force quelconque. Nous nous bornerons au cas où chaque point ſe meut perpendiculairement à la corde, & où par conſéquent le poids appliqué à ſon extrémité B, ne deſcend qu'infiniment peu. Les points de la corde peuvent bien avoir d'autres mouvements; mais ce cas nous ſuffit pour les deux circonſtances que nous nous propoſons de conſidérer. Soit m la peſanteur ſpécifique de la corde; a ſon diametre; $1 : c$ le rapport du diametre à la circonférence; on aura $\frac{maac}{4} + re$ (*Fig.* 88) pour la maſſe d'un élément quelconque re de la corde. Et ſi p marque la vîteſſe que la peſanteur donne en une ſeconde de temps, enſorte que pdt ſoit la vîteſſe qu'elle donne dans l'inſtant dt, on aura $\frac{pmaacdt}{4} \times re$ pour le poids re, que nous ſuppoſerons agir en r, & repréſenté par rh.

Soit la tenſion de la corde en B, équivalente au poids d'une maſſe connue M dont la peſanteur ſpécifique ſoit à celle de la corde : : 1 : m, on aura $pMdt$ pour cette tenſion.

Cela poſé, ſi l'on décompoſe la tenſion appliquée au dernier élément rB, en deux autres, l'une perpendiculaire à er, l'autre dirigée ſuivant er, on trouvera facilement que la tenſion qui en réſulte ſuivant er, ne differe de la tenſion ſuivant rB, que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre. C'eſt-à-dire, que la tenſion $pMdt$ ſe tranſmet également à tous les points de la corde.

Si l'on décompoſe pareillement le poids rh d'un élément quelconque re, en deux forces, l'une perpendiculaire à cet élément, l'autre ſuivant ſa direction re, on verra aiſément (à cauſe des triangles ſemblables rhl, ref) que la tenſion rl qui en réſulte ſuivant er, ſera $rh \times \frac{rf}{re}$, c'eſt-à-dire, $\frac{pmaacdt}{4} \times rf$. Et puiſqu'elle doit ſe tranſmettre, ſans perte, ſuivant be, ſi l'on fait en e une décompoſition ſemblable du poids de l'élément be, on aura $\frac{pmaacdt}{4}(rf + ie)$ pour la tenſion ſuivant be réſultante des poids de re & de be; donc, en général, (*Fig.* 87) la tenſion en M réſultante du poids total de la partie MB, ſera $\frac{pmaac}{4} dt \times RB$; ajoutant la tenſion $pMdt$, & nommant BQ, b; PM, y; on aura $pMdt + \frac{pmaac}{4} dt\,(b-y)$ pour la tenſion totale ſuivant mM.

Nommons AP, x; AM, s, & R le rayon de la développée en M. Concevons la tenſion en M décompoſée en deux efforts l'un perpendiculaire à Mm, & l'autre dirigée ſuivant mM; nous aurons, en repréſentant cette tenſion par T, $\frac{Tds}{R}$ pour l'effort perpendiculaire. Et la décompoſition faite (*Fig.* 88) de la peſanteur rh de l'élément er qui repréſente Mm de la figure 87, on conclura que l'effort perpendiculaire rg, eſt exprimé par $\frac{pmaacdtdx}{4}$. Quant à l'effort ſuivant rl réſultant de la peſanteur de l'elément er, il doit être négligé, puiſque, par la ſuppoſition, le poids tendant ne deſcend qu'infiniment peu pendant tout le mouvement de la corde. Donc le point M tend à se mouvoir perpendiculairement à Mm (*Fig.* 87) avec une force exprimée par $\frac{Tds}{R} - \frac{pmaacdtdx}{4}$, & par conséquent (en divisant par la masse de l'élément Mm), avec une vîtesse $\frac{4T}{maacR} - \frac{pdtdx}{ds}$ qui tend à l'approcher de AP.

Soit Mn cette vîtesse, & concevons la décomposée en deux autres, l'une Mp perpendiculaire, l'autre Mo parallele à AP. Nous aurons (à cause des triangles semblables MPn, Mqm) $Mp = Mn \times \frac{mq}{Mm}$, & pn ou $Mo = Mn \times \frac{qM}{Mm}$. Or Mp est l'accroissement de la vîtesse de M vers P, & Mo celui de la vîtesse parallele à AP; donc en faisant attention que t croissant, y diminue, on a $Mn \times \frac{dx}{ds} = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $Mn \times \frac{dy}{ds} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Substituant donc pour Mn sa valeur, & dans celle-ci, celle de T, on aura............

$$\left(\frac{4pMdt}{maacR} + \frac{pdt(b-y)}{R} - \frac{pdtdx}{ds}\right)\frac{dx}{ds} = -d\left(\frac{dy}{dt}\right) \text{ \&}$$

$$\left(\frac{4pMdt}{maacR} + pdt\left(\frac{b-y}{R}\right) - \frac{pdtdx}{ds}\right)\frac{dy}{ds} = d\left(\frac{dx}{dt}\right) \text{ pour}$$

les équations qui expriment le mouvement de la corde.

Observons au sujet de ces équations, quelle que puisse être leur intégrale générale, que les différentielles dx, dy, ds qui entrent dans chacun des deux premiers membres, & dans R, supposent t constant, parce qu'ils sont relatifs aux différents points de la corde, considérés dans un même instant : au contraire, les différentielles dx & dy qui entrent dans chacun des deux seconds membres, supposent t variable, parce qu'elles expriment le mouvement d'un même point de la corde pendant la durée de l'instant dt.

Si l'on suppose nul, l'accroissement Mn de la vîtesse, l'équation que l'on aura, sera celle de la corde lorsque tous ses points sont parvenus à leur plus grande vîtesse. Or cette équation est $\frac{4pMdt}{maacR} + \frac{pdt(b-y)}{R} - \frac{pdtdx}{ds} = 0$, qui en représentant $\frac{4pM}{maac} + b$ par a', peut être réduite à $a' - y - \frac{Rdx}{ds} = 0$, qui donne la même équation que nous avons trouvée (565), donc 1°. tous les points de la corde arrivent en même temps à leur plus grande vîtesse ; 2°. ils forment alors la même courbe que dans le cas de l'équilibre.

570. Si l'on veut avoir les oscillations d'une corde pesante, & infiniment peu éloignée de la verticale AZ ; on remarquera 1°. qu'alors la distance verticale BQ est constante & égale à la longueur AMB de la corde. 2°. Que les mouvements de tous les points pouvant être censés perpendiculaires à la verticale AZ, peuvent aussi être censés perpendiculaires à la courbe.

Cela posé, on a $dy = ds$; & comme le mouvement vertical de chaque point de la corde ne peut être qu'infiniment petit, on négligera la premiere équation qui exprime ce mouvement. On observera de plus que le rayon R de la développée qui est $\frac{ds}{-\frac{dx^2}{ds^2} \times d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, devient $\frac{dy}{-\frac{1}{dy^2}(dx\,ddy - dy\,ddx)}$, ou $\frac{dy}{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$. Substituant donc dans la seconde équation & supposant $M = 0$, on aura $\frac{(b-y)\,d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} - \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p\,dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ équation que l'on peut réduire à............

$(b-y)\frac{ddx}{dy^2} - \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}\frac{ddx}{dt^2}$, parce qu'il est évident qu'on peut supposer dt constant ; & il ne l'est pas moins qu'on peut supposer ds ou dy constant, parce que ce n'est autre chose que supposer que les poids des élémens de la corde sont égaux & également éloignés.

571. Si la corde supposée tendue au point fixe B, est supposée d'une pesanteur très-petite en comparaison de la force qui la tend, & si en même temps elle est infiniment peu éloignée de la droite AB ; alors supposant, comme on en est le maître, que AQ est sur AB, on aura $ds = dx$, $R = \frac{dx}{-d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$;

& l'on doit rejetter comme nuls, les termes . . . . $\frac{pdt(b-y)}{R} - \frac{pdtdx}{ds}$ qui dépendent du poids de la corde. La seconde équation qui exprime le mouvement parallélement à AB (*Fig.* 89), doit être négligée, parce que ce mouvement est alors nul, & que tous les points de la corde peuvent être considérés comme se mouvant perpendiculairement à l'axe AB.

La premiere équation devient donc (en faisant . . . . $\frac{4pM}{maac} = g$) $\frac{-g}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, ou $\frac{g}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{dt} d\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Telle est l'équation générale des cordes vibrantes, pour l'intégration générale de laquelle nous renvoyons aux *Mémoires de l'Académie de Berlin, an.* 1747, où M. d'*Alembert* a le premier discuté cette question, & par une méthode très-ingénieuse. Nous nous bornerons à rechercher la nature de la courbe & la durée de ses vibrations, dans le cas où la force accélératrice de chaque point est proportionnelle à sa distance PM à l'axe AB. Soit donc k la force accélératrice du point M, lorsqu'il étoit en M', $AM'B$ étant la figure initiale de la corde, & soit $PM' = b$. La force accélératrice de M, lorsque la corde est parvenue en AMB, est par l'équation ci-dessus $\frac{-g}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; on a donc k : $\frac{-g}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) :: b : y$, & par conséquent $\frac{-g}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ky}{b}$. Multipliant par $-dy$ & intégrant, on a $\frac{gdy^2}{2dx^2} = C - \frac{ky^2}{2b}$. Mais si l'on suppose que le point M soit le point O le plus éloigné de l'axe AB, cette même équation doit avoir encore lieu en entendant par y, la ligne OC que je nomme y'; car le rapport $\frac{k}{b}$ ne change pas d'un point de la courbe à un autre. On a donc alors $\frac{gdy'^2}{2dx^2} = C - \frac{ky'^2}{2b}$. Mais dans cette supposition, $dy' = 0$; donc $C = \frac{ky'^2}{2b}$; donc notre équation devient $\frac{gdy^2}{dx} = \frac{ky'^2}{b} - \frac{ky^2}{b}$; d'où l'on tire $dx\sqrt{\frac{k}{bg}} =$

$$\frac{dy}{\sqrt{y'^2-y^2}}=\frac{\frac{1}{y'}dy}{\sqrt{1-\frac{y^2}{y'^2}}}$$; par conséquent (158), $\frac{y}{y'}=C'$ $+ \sin x\sqrt{\frac{k}{bg}}$, ou simplement $\frac{y}{y'}=\sin\left(x\sqrt{\frac{k}{bg}}\right)$, parce que lorsque $x=0$, on doit avoir $y=0$.

Pour déterminer le rapport $\frac{k}{b}$ soit l la longueur de la corde; il faut que lorsque $x=l$, on ait $y=0$. Donc $\sin l\sqrt{\frac{k}{bg}}=0$; donc l'arc dont la longueur est $l\sqrt{\frac{k}{bg}}$ doit être de 180°. Soit $1:c$ le rapport du diamètre à la circonférence : comme dans l'intégration précédente, le rayon est supposé 1, la circonférence sera $2c$; on aura donc le nombre de degrés de l'arc $l\sqrt{\frac{k}{bg}}$, exprimé par $\frac{360^\circ}{2c}l\sqrt{\frac{k}{bg}}$ lequel devant être de 180°, donne $\frac{l}{c}\sqrt{\frac{k}{bg}}=1$, & par conséquent $\frac{k}{b}=\frac{gcc}{ll}$. Réduisant de même en degrés l'arc $x\sqrt{\frac{k}{bg}}$, & substituant pour $\frac{k}{b}$ sa valeur, on aura $y=y'\sin\left(\frac{x}{l}\,180^\circ\right)$ pour l'équation de la courbe. Cherchons maintenant la durée des vibrations.

Reprenons donc l'équation $\frac{g}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, & substituant pour $\frac{g}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ sa valeur $\frac{-ky}{b}$, nous aurons $\frac{-ky}{b}=\frac{1}{dt}d\left(\frac{dy}{dl}\right)$, qui étant multipliée par dy, & intégrée, donne $C'-\frac{ky^2}{2b}=\frac{dy^2}{dt^2}$. Or lorsque $y=b$, la vitesse $\frac{dy}{dt}$ doit être zéro; on a donc $C''=\frac{kb^2}{2b}$, & par conséquent $dt\sqrt{\frac{k}{b}} = \frac{-dy}{\sqrt{bb-yy}}$, ou $dt\sqrt{\frac{k}{b}} = \frac{-\frac{dy}{b}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{bb}}}$ *

dont l'intégrale est $\frac{y}{b} = cos\left(t\sqrt{\frac{k}{b}}\right) + C'''$. Mais lorsque $t = 0$, on doit avoir $y = b$; donc $1 = 1 + C'''$; donc $C''' = 0$; donc $\frac{y}{b} = cos\left(t\sqrt{\frac{k}{b}}\right)$ ou $\frac{y}{b} = cos\left(t\sqrt{\frac{k}{b}}\,.\,\frac{180^\circ}{c}\right)$ en réduisant en degrés. Enfin si l'on se rappelle que $g = \frac{4pM}{maac}$, & qu'on substitue pour $\frac{k}{b}$ sa valeur, on aura..............

$\frac{y}{b} = cos\left(180^\circ.\,\frac{2t}{la}\sqrt{\frac{pM}{mc}}\right)$.

Pour avoir la durée de la demi-vibration, il faut supposer $y = 0$. Donc $cos\left(180^\circ.\,\frac{2t}{la}\sqrt{\frac{pM}{mc}}\right) = 0$, & par conséquent $180^\circ.\,\frac{2t}{la}\sqrt{\frac{pM}{mc}} = 90$; donc pour la vibration entiere on aura $2t = \frac{la}{2}\sqrt{\frac{mc}{pM}}$.

On voit donc que la durée des vibrations ne dépend point de leur grandeur, & qu'elle sera toujours la même pour une même corde tendue par un même poids, tant que les excursions seront petites.

Si l'on veut avoir la longueur du pendule qui feroit ses oscillations en même temps que la corde, on se rappellera (469) que la durée d'une oscillation d'un pendule dont L est la longueur, est exprimée par $c\sqrt{\frac{L}{p}}$; on a donc $c\sqrt{\frac{L}{p}} = \frac{la}{2}\sqrt{\frac{mc}{pM}}$; ou parce que $mlaac$ exprime la masse de la corde, si l'on suppose cette masse $= n$, on aura $c\sqrt{\frac{L}{p}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ln}{pM}}$, donc $L = \frac{1}{4}\,\frac{ln}{ccM}$.

* Je donne à dy le signe —, parce que des deux signes $\pm$ dont il est susceptible, c'est le signe — qui convient ici où t croissant y diminue.

Si $2\,t'$ représente la durée d'une vibration d'une autre corde de longueur l', dont le diametre soit a' la pesanteur spécifique m', & qui soit tendue par une masse M' de même pesanteur spécifique que M; on aura $2\,t : 2\,t' :: la\sqrt{\frac{m}{M}} : l'a'\sqrt{\frac{m'}{M'}}$; c'est-à-dire, que les durées des vibrations de deux cordes quelconques, sont comme les longueurs multipliées par les diametres ou les grosseurs, multipliées par les racines quarrées des densités ou pesanteurs spécifiques, & divisées par les racines quarrées des poids qui tendent ces cordes; d'où il est facile de conclure les rapports de ces durées, lorsqu'il y a égalité entre deux ou un plus grand nombre de ces éléments. Et comme le nombre des vibrations fait pendant un temps donné, est en raison inverse de la durée de chaque vibration, on aura donc aussi le rapport des nombres de vibrations que peuvent faire deux cordes quelconques, dans un temps donné. Tels seront, en effet, les rapports des nombres des vibrations des cordes sonores, si dans leur mouvement elles parviennent à prendre la courbure que nous venons de déterminer, & qui, comme on le voit, est telle que tous ses points arrivent en même temps à la ligne droite AB, puisque ce temps ne dépend ni de l'abscisse x, ni de l'ordonnée y : or il y a lieu de croire que les cordes parviennent à cette figure après un intervalle de temps assez court. On ne pourroit cependant pas le conclure de ce que l'expérience feroit voir que tous les points arrivent en même temps à la ligne droite; car M. d'Alembert a fait voir dans le Mémoire dont nous avons parlé ci-dessus, qu'il y a une infinité de figures à donner à la corde, qui toutes s'accorderoient à amener tous les points, en même temps, à la ligne droite.

Le dégré d'aigu, ou de grave, dans les sons rendus par les cordes de même matiere, de même diametre & également tendues, dépend du nombre de vibrations qu'elles font en même temps, lequel est en raison inverse de leurs longueurs. Une corde moitié moindre qu'une autre donne l'octave au-dessus de celle-ci; si elle en est les $\frac{2}{3}$, elle donne la quinte, &c. Donc si on imagine qu'une corde en faisant ses vibrations prenne une courbure $AMCM'B$ (*Fig.* 90) telle que $AICI'B$ étant une courbe de même nature que celle que nous avons déterminée en dernier lieu, les arties AMC $CM'B$ soient aussi de même nature;

alors si le point C est le milieu, les parties AMC, $CM'B$ feront autour de AIC, $CI'B$ des vibrations qui s'acheveront en moitié moins de temps que la vibration totale de ACB ou de $AMCM'B$; & tous les points arriveront en même temps à la ligne droite. Les parties AMC, $CM'B$ rendront donc chacune l'octave du son que rendra la corde totale; on verra de même comment une même corde peut rendre la douzieme, & la dix-septieme, en même temps que le son principal, ainsi que l'expérience le fait voir. Cette explication ingénieuse de la coëxistence des sons dans les corps sonores est dûe au célebre M. *Daniel Bernouilli.* Il y auroit beaucoup d'autres choses à dire concernant le mouvement des cordes; mais nous avons d'autres objets à examiner.

Du Levier; des Centres d'oscillation; des Centres de percussion; des Mouvements de rotation autour d'un point, ou axe, fixe ou mobile; de l'action du Gouvernail & des Voiles pour faire tourner le Navire, &c. &c.

572. PAR *levier*, nous entendons ici, une verge inflexible, de quelque figure que ce soit, tellement fixée en l'un C de ses points (*Fig.* 91 & 92) qu'elle ne puisse prendre d'autre mouvement par l'action des forces qui lui seroient appliquées, qu'un mouvement de *Rotation*, c'est-à-dire, un mouvement pour tourner autour de C. Ce point C s'appelle *Point d'appui.*

Nous regarderons d'abord le levier comme sans masse & sans pesanteur. Dans le cas de l'équilibre, on peut aisément avoir égard à sa pesanteur, en la considérant comme rassemblée au centre de gravité de ce levier, & comme une nouvelle force qu'on lui appliqueroit en ce point, suivant une direction verticale. Dans le cas du mouvement, ce n'est point au centre de gravité qu'il faut imaginer la masse rassemblée pour avoir l'effet qu'elle peut produire, c'est en un autre point que nous déterminerons dans peu.

Nous supposerons que les forces appliquées au levier sont toutes dans un même plan avec le point d'appui. Nous traiterons, dans un autre article, de l'équilibre & du mouvement, lorsque les forces appliquées au levier sont dans différens plans.

573. Supposons donc que deux puissances *P* & *Q* (*Fig.* 91 & 92) appliquées aux deux points *B* & *D* du levier *BCD*, soit immédiatement, soit par le moyen de deux cordons ou de deux verges sans masse, agissent sur ce levier suivant les directions *BP*, *DQ*, & se fassent équilibre : il s'agit de déterminer les conditions de cet équilibre.

Comme l'une quelconque des deux puissances, la puissance *Q*, par exemple, ne fait équilibre à l'autre, qu'à l'aide du point d'appui *C*, il est clair que la puissance *Q*, doit produire deux efforts, dont l'un anéantiſſe celui de la puiſſance *P*, & dont l'autre ſoit détruit par le point d'appui *C*, & par conſéquent, paſſe par ce point.

Prolongeons indéfiniment les directions *PB* & *QD* qui ſe rencontrent en *A*, & menons *AC*. Nous pouvons (228) ſuppoſer la puiſſance *Q* appliquée en *A* ſuivant *AQ*; alors ſi *AG* repréſente la valeur de cette puiſſance, & que ſur *AG* comme diagonale & ſur les directions *AC*, *BAE*, comme côtés contigus on forme le parallélogramme *AHGE*; *AE* repréſentera (225) l'ffort que *Q* exerce dans la direction & en ſens contraire de *P*; & *AH*, celui qu'elle exerce contre le point d'appui *C*. En effet, quoique le point *A* ne ſoit point lié aux deux points *B* & *C*, la diſtribution de la force *Q* ne s'en fait pas moins de la même maniere que s'il y étoit lié. Car il eſt évident que ſi, ſans rien changer aux forces & à leurs directions, on lioit le point *A* aux trois points *B*, *C*, *D*, par trois verges inflexibles *AB*, *AC*, *AD* ſans maſſe, cela ne changeroit rien du tout à l'état préſent du ſyſtême, & par conſéquent à la maniere dont la force *Q* communique ſon action : or dans ce dernier cas, l'action de la force *Q* feroit viſiblement communiquée de la maniere qui vient d'être décrite; donc elle eſt communiquée de la même maniere dans le premier cas. Cela posé, pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force *AE* soit non-seulement directement contraire, mais encore, égale à la force *P*. Quant à la force *AH*, il suffit pour qu'elle soit détruite, qu'elle soit dirigée au point *C*. On a donc en nommant *C* la charge que supporte l'appui *C*, $Q : P : C : : AG : AE : AH$.

574. Si, de *A* vers *B*, on prend $AI = AE$, & que l'on mene *IH*, il est facile de voir que *AIHG* est un parallélogramme. Or *AI*, *AG* côtés de ce parallélogramme, marquent les valeurs & les directions des deux forces *P* & *Q*; donc (223) la diagonale *AH* représente leur résultante; donc puisque *AH* représente aussi la charge du point d'appui, il faut en conclure qu'en général, la charge du point d'appui, est précisément la résultante des deux forces appliquées au levier; & que par conséquent ce deux forces agissent sur l'appui, comme si elles y étoient immédiatement appliquées suivant les directions paralleles à celles qu'elles ont actuellement.

Au reste, on peut voir immédiatement cette derniere vérité, en faisant attention que puisqu'à la force *Q* on peut substituer les deux forces *AE*, *AH* dont la premiere est détruite par la force *P*, la force restante *AH* est l'effet unique auquel se réduisent les deux forces P & Q, & par conséquent la résultante de ces deux forces.

575. La suite des rapports $Q : P : C : : AG : AE : AH$ que nous venons de trouver (573) fournit donc le moyen de comparer les forces Q & P, tant entr'elles qu'avec la charge C de l'appui. Mais comme ce rapport n'est pas le plus commode à employer, voici deux autres moyens qu'on peut employer dans la même vue.

1°. Selon ce qui a été dit (233) on a $AG : AE : AH : : \sin HAE : \sin HAG : \sin GAE$, ou : : $\sin HAI : \sin HAG : \sin GAI$, parce que les angles HAE, GAE, ont même sinus que leurs suppléments HAI, GAI; donc $Q : P : C : : \sin HAI : \sin HAG : \sin GAI$; c'est-à-dire que des deux forces Q & P, & de la charge de l'appui C, chacune est représentée par le sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.

2°. Nous avons vu (234) que de trois forces dont l'une est résultante des deux autres, deux quelconques sont toujours entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées sur leurs directions, d'un point quelconque pris sur la direction de la troisieme.

Donc si de tel point que ce soit de AC; si de C, par exemple, on mene les perpendiculaires CL, CM, fur les directions PB, QD, on aura $Q : P :: CL : CM$.

Pareillement fi de tel point que ce foit de la direction de Q ; fi du point D, par exemple, on mene les perpendiculaires DO, DR fur les directions de la force P & de la charge de l'appui on aura $P : C :: DR : DO$. On comparera de même la force Q avec la charge C.

Toutes ces vérités ont lieu quelle que foit la figure du levier, & quelles que foient les directions des deux puiffances.

576. Lorfque les directions des deux puiffances font paralleles (auquel cas la réfultante ou la charge de l'appui leur eft parallele) les perpendiculaires menées d'un même point de direction de l'une d'entr'elles fur les directions des deux autres, fe touvent toutes fur une même ligne LCM (*Fig.* 93). On peut donc dire alors que fi l'on mene une ligne LCM perpendiculaire aux directions des puiffances, chaque puiffance eft repréfentée par la partie de cette droite, comprife entre les directions des deux autres.

577. Si, de plus, le levier eft droit, alors il eft aifé de voir, par les triangles femblables CLB, CMD, que les parties CB, CD, BD, ont même rapport entr'elles que les

parties CL, CM, LM; donc on peut dire dans ce cas, que chaque force eſt repréſentée par la partie du levier compriſe entre les directions de deux autres : ainſi $Q : P :: CB : CD$; c'eſt-à-dire, que les deux puiſſances ſont en raiſon inverſe des bras de levier CB, CD; enſorte que la puiſſance Q doit être d'autant plus petite pour faire équilibre à la puiſſance P, que le bras CD auquel elle eſt appliquée, eſt plus grand que le bras BC auquel P eſt appliquée. A l'égard de la charge de l'appui, elle eſt égale à la ſomme des deux puiſſances P & Q, puiſque celles-ci (576) étant repréſentées par CD & BC, la charge l'eſt par BD.

578. Si l'on diſtingue (*Fig.* 94, 95 & 96) une puiſſance Q, motrice, ou prête à donner le mouvement, un mobile P, & un appui C; on pourra, avec les anciens, diſtinguer trois ſortes de levier, ſuivant les trois différentes poſitions que la puiſſance peut avoir à l'égard du mobile & de l'appui. La figure 94 repréſente ce qu'on appelle *levier de la premiere eſpece* : la puiſſance & le mobile, y ſont de part & d'autre de l'appui, & la puiſſance a d'autant plus d'avantage (577) qu'elle eſt plus éloignée du point d'appui. La figure 97 repréſente le *levier de la ſeconde eſpece*, où le mobile eſt entre l'appui & la puiſſance qui par

conſéquent a toujours de l'avantage. Enfin la figure 97 repréſente le *levier de la troiſieme eſpece*, où la puiſſance eſt entre l'appui & le mobile : elle a donc alors un déſavantage réel, & par conſéquent ce levier ſeroit mal employé dans les cas où il s'agit d'augmenter l'effet de la force motrice, c'eſt-à-dire, de la mettre en état de ſurmonter une force plus grande qu'elle-même. Mais, ainſi que nous l'avons déja obſervé, comme on n'a pas toujours pour objet de multiplier la force motrice, cette conſidération n'empêche pas que cette troiſieme eſpece de levier ne puiſſe être employée très-utilement dans des machines où l'on veut profiter de tous les mouvements dont on peut diſpoſer. C'eſt ainſi, par exemple, qu'on l'emploie avec avantage dans les Métiers à Toiles, à Draps & autres Etoffes, où les mains de l'ouvrier occupées au tiſſu de l'étoffe ne peuvent être employées à donner le mouvement à la machine : on y emploie les pieds qui en appuyant ſur les pédales *CD* tirent ſur la corde *BR*, laquelle par-deſſus la poulie *R*, va joindre l'aſſemblage qui ſert à élever & à baiſſer alternativement les fils, & qui ayant peu de poids n'exige pas une force conſidérable. La machine du Rémouleur ou Gagne-petit, certains rouets à filer, ſont dans le même

cas

cas, ainſi que beaucoup d'autres machines.

579. Obſervons, avant que d'aller plus loin, qu'abſtraction faite du frottement, le point d'appui d'un levier ne doit pas être conſidéré comme un ſimple ſoutien. En effet, (*Fig.* 92) ſi l'appui *C* au lieu de pénétrer dans l'intérieur du levier, en touchoit ſeulement la ſurface, il eſt facile de voir que quoique les deux puiſſances *Q* & *P* fuſſent entr'elles en raiſon inverſe des perpendiculaires *CM* & *CL*, elles ne pourroient être en équilibre ſur ce levier que dans un ſeul cas; ſavoir, quand la direction *AC* ſeroit perpendiculaire à *BD*, (ou à la tangente en *C* dans la figure 91), car ſi *AC* étoit oblique, il eſt facile de voir qu'elle communiqueroit au levier un mouvement ſuivant *BD*; ainſi ce ſeroit une erreur de croire, par exemple, qu'abſtraction faite du frottement, & de la peſanteur du levier *PQ* (*Fig.* 97) les deux poids *P* & *Q* demeuraſſent en équilibre dans la ſituation inclinée, ſi *P* étant à *Q* : : *CQ* : *CP* la ſurface du levier s'appuyoit ſeulement ſur le point *C*. Le point d'appui tel qu'on doit le concevoir pour qu'il y ait équilibre dans toutes les poſitions du levier, doit faire l'effet d'une broche qui paſſant par *C*, permettroit ſeulement au levier de tourner autour de *C*. En un mot, quand on dit qu'il

fuffit que la réfultante AC des deux puiffances paffent par le point d'appui C, c'eft en fuppofant que le point correfpondant C du levier ne peut prendre aucun mouvement; car cette condition ne fuffit plus dès qu'il peut en prendre. Par exemple, fi le levier BD (*Fig.* 98) étoit tiré par les trois puiffances P, Q, R, appliquées aux trois cordons BP, DQ, CR, il n'y auroit point équilibre fi AC étoit la direction de la réfultante de P & de Q, quoique AC paffe par l'appui C : il faudroit encore que le point de concours A fût fur CR.

580. Puifque les deux forces P & Q qui doivent fe faire équilibre à l'aide du levier BCD (*Fig.* 91 & *fuiv.*) doivent être en raifon inverfe des perpendiculaires CL, CM; c'eft-à-dire, puifqu'on doit avoir $P:Q::CM:CL$, il s'enfuit que $P \times CL = Q \times CM$, c'eft-à-dire que les moments de ces deux forces pris par rapport au point d'appui, ou (249) par rapport à tout autre point de la direction AC, doivent être égaux.

581. Comme il ne peut y avoir de force fans une tendance au mouvement, on doit par ces expreffions *les forces* P & Q, entendre le produit d'une certaine maffe par la vîteffe que ces forces lui communiqueroient fi elle étoit libre. Ainfi, foit M une certaine

maſſe, & V la vîteſſe que la force P agiſſant librement ſur cette maſſe, peut lui communiquer : ſoit pareillement M' une autre maſſe quelconque, & V' la vîteſſe que la force Q eſt capable de lui communiquer ; il faudra donc pour l'équilibre, que l'on ait $M \times V : M' \times V'$ $:: CM : CL$.

582. Soit g la vîteſſe que la peſanteur donne, dans un inſtant, à toute partie matérielle en liberté ; & ſoient M & M' (*Fig.* 99) deux corps peſants attachés aux deux cordons BIM, DKM' qui paſſant par deſſus les renvois courbes I & K tranſmettent entiérement (555) au levier BCD, ſuivant les directions quelconques BI & DK, l'action de la peſanteur de ces corps ; on aura gM, & gM' pour la meſure des forces avec leſquelles ces corps agiſſent (188) ; il faudra donc, pour l'équilibre, que $gM : gM' ::$ $CO : CN$, c'eſt-à-dire, $M : M' :: CO : CN$; donc, en général, pour que deux maſſes qui ne ſont ſollicitées que par leur peſanteur, ou pour que deux maſſes qui ſeroient animées de vîteſſes égales ſe faſſent équilibre ſur un levier, il ſuffit que ces maſſes ſoient en raiſon inverſe des diſtances de leurs directions au point d'appui.

583. Mais ſi les vîteſſes n'étoient pas égales, on voit que ce doivent être, non

les masses seulement, mais les produits des masses par les vîtesses, qui soient en raison inverse des distances de leurs directions au point d'appui.

584. Si deux masses finies & pesantes M & M' viennent à recevoir des vîtesses finies & inégales suivant les cordons IM & KM'; comme la vîtesse que la pesanteur peut leur imprimer dans un instant est infiniment petite, il suffira pour que les deux vîtesses finies se détruisent mutuellement, que les quantités de mouvement que les deux corps auroient en vertu de ces vîtesses soient en raison inverse de CO & CN. Mais cet équilibre n'aura lieu qu'un instant; car dès que ces vîtesses se seront détruites mutuellement, les corps M & M' soumis à l'action de leur pesanteur, en recevront des quantités de mouvement qui seront dans le rapport simple des masses, & qui par conséquent ne seront plus dans le rapport inverse des distances CO, CN.

585. On voit par-là, la différence qu'il y a entre l'équilibre des poids animés par la pesanteur seulement, & celui des poids animés de vîtesses finies.

Une autre remarque qu'il est encore à propos de faire ici, c'est qu'il est impossible de mettre en équilibre un poids animé de sa ſeule peſanteur avec un poids ou une maſſe animée d'une vîteſſe finie ; la raiſon en eſt la même que celle que nous avons expoſée (383). D'où il faut conclure que ſi le poids *P* (*Fig.* 94) eſt en équilibre avec une force *Q* telle que celle d'un homme, d'un animal, &c. cette derniere ne tend à faire mouvoir le point *D* qu'avec une vîteſſe infiniment petite. Si au contraire la force *Q* appliquée en *D* agiſſoit par une ſecouſſe ou impreſſion finie, elle feroit monter le poids *P*, tel qu'il fût, du moins pendant un certain temps qui lorſque *P* ſera un peu conſidérable, peut être tel que l'œil ne puiſſe pas ſaiſir ce mouvement, mais ce mouvement n'en ſera pas moins réel : voyez ce que nous avons dit (383).

Nous avons cru devoir placer ici ces réflexions qui ne peuvent que fixer l'eſprit des commençants ſur la véritable idée qu'ils doivent ſe former des forces appliquées aux machines : on en ſentira encore mieux l'importance à meſure que nous avancerons.

586. Les rapports que nous avons établis (573 & *ſuiv.*) entre les deux puiſſances *P* & *Q*, & la charge *C* de l'appui (*Fig.* 91 & *ſuiv.*) mettent en état de réſoudre cette queſtion générale. *Trois de ces ſix choſes étant données, les deux puiſſances, la charge de l'appui, & leurs*

directions ; trouver les trois autres ? Quand les directions seules sont données, alors on ne peut avoir que le rapport des puissances. La solution de cette question est évidente par ce qui a été dit (549). Elle peut s'exécuter aussi par des constructions géométriques faciles à trouver, mais dans le détail desquelles nous n'entrerons point. Nous observerons seulement que quand les directions sont paralleles, alors ce qui a été dit (238) ou (576), résout la question, & qu'en général s'il s'agit de déterminer la position de l'appui lorsque l'on connoît les puissances P & Q, & leurs positions, la question se réduit à trouver la position de la résultante de ces deux puissances, ce qui est facile par ce qui a été dit (223).

587. Il n'en est pas de même, lorsqu'il y a plus de deux puissances appliquées au levier; alors on peut [de même qu'on l'a vu pour les cordes (556)] varier à l'infini les rapports ou les directions de quelques-unes des puissances, en laissant les autres les mêmes, & cependant avoir toujours équilibre: mais il y a cette différence entre le levier & les cordes, que la condition de l'équilibre sur le levier est unique; au lieu que pour les cordes, il y a autant de conditions que de nœuds (558). Il nous suffira

de faire connoître cette condition pour trois puiſſances, pour faire ſentir qu'elle doit avoir lieu de même pour quelque nombre de puiſſances que ce ſoit.

588. Soient donc (*Fig.* 100) trois puiſſances P, Q, R, dirigées ſuivant BP, EQ, DR, en équilibre ſur le levier $BCED$. La puiſſance Q fait donc effort contre chacune des deux puiſſances P & R, & contre l'appui C. Ayant prolongé les directions, & pris, à compter de la rencontre A de BP & EQ, la ligne AH pour repréſenter la puiſſance Q, j'imagine cette puiſſance décompoſée en deux autres, l'une AG égale & directement oppoſée à la puiſſance P, l'autre AF telle qu'elle puiſſe faire équilibre à la puiſſance R au moyen de l'appui C. Donc ſi la direction DR rencontrant AF au point I, on conçoit la force AF appliquée en I ſuivant $AFIL$; il faut que la force AF ou IL puiſſe ſe décompoſer en deux autres forces, l'une IK égale & directement oppoſée à la puiſſance R, l'autre IM dirigée au point d'appui C. Par ce moyen la force Q produit les trois effets AG, IK, IM, dont les deux premiers étant égaux & directement oppoſés aux forces P & R ſont détruits, & dont le dernier étant dirigé au point fixe C ne peut manquer d'être détruit auſſi. Or puiſque toutes

les forces qui agissent sur le levier sont P,Q,R, ou AG, IK, IM, P & R, dont AG, IK, P & R se détruisent, concluons-en donc que IM est la résultante des trois puissances P, Q, R; que par conséquent la condition unique à laquelle l'équilibre est assujetti, est que la résultante de toutes les puissances, passe par le point d'appui C. On voit donc que les puissances P, Q, R agissent sur l'appui C, comme si elles y étoient immédiatement appliquées suivant des directions paralleles à celles qu'elles ont actuellement. Et cela est général pour quelque nombre de puissances que ce soit, parce qu'on peut toujours supposer qu'une seule des puissances fait équilibre à toutes les autres, à l'aide de la résistance de l'appui.

589. Puisque C doit être un des points de la résultante, il doit donc avoir les propriétés dont nous avons fait mention (248); c'est-à-dire, qu'en général *lorsque plusieurs puissances dirigées dans un même plan se font équilibre à l'aide d'un levier de figure quelconque; si du point d'appui on mene des perpendiculaires sur les directions de ces forces, & qu'on multiplie chaque force par la perpendiculaire correspondante, c'est-à-dire, si on prend les moments de ces forces par rapport au point d'appui, la somme des moments des forces qui*

tendent à faire tourner le levier dans un ſens, doit être égale à la ſomme des moments de celles qui tendent à le faire tourner en ſens contraire ; ce qu'on peut exprimer généralement, en prenant avec des ſignes contraires les moments des forces qui tendent à faire tourner en ſens oppoſés, & diſant que *la ſomme des moments doit être zéro.*

590. Donc tout ce que nous avons dit (254) pour trouver la valeur & la direction de la réſultante, aura lieu ici pour trouver la charge & la poſition du point d'appui, quelque ſoit le nombre des puiſſances.

591. Donc ſi connoiſſant les deux poids *P* & *Q* (*Fig.* 101), la longueur & le poids *BD* du levier, on veut déterminer le point d'appui *C*, ſur lequel le tout peut demeurer en équilibre; on imaginera que le poids du levier eſt une nouvelle force véritable *R* appliquée au centre de gravité *E* de ce levier, & il faudra que le moment de *P* par rapport au point inconnu *C*, ſoit égal à la ſomme des moments des deux points *R* & *Q*, pris par rapport au même point inconnu *C.*

Suppoſons, pour en donner un exemple, que le levier *BD* eſt droit, d'une groſſeur & d'une peſanteur uniforme : & faiſant attention qu'à cauſe des paralleles ou peut, au lieu des perpendiculaires CI, CK, CL, employer les parties BC, CE, CD, qui ont même rapport entr'elles, on aura $P \times BC = R \times CE + Q \times CD$.

Soit a, longueur du levier ; x, la distance BC ; on aura (275) $BE = \frac{1}{2}a$; $CE = \frac{1}{2}a - x$, $CD = a - x$. Soit p la pesanteur spécifique du levier, c'est-à-dire, pour fixer les idées, ce que pese ce levier, par pouce de longueur, a & x étant comptés en pouces; pa sera son poids total R. On aura donc $Px = pa\left(\frac{1}{2}a - x\right) + Q(a - x)$ d'où l'on tirera $x = \frac{\frac{1}{2}paa + Qa}{P + pa + Q}$. Soit $a = 24$ pouces, $P = 20$ ℔, $Q = 4$ ℔, $p = \frac{1}{12}$ de livre. On aura donc $x = \frac{120}{26} = 4$ pouces $\frac{8}{13}$; c'est-à-dire, qu'il faut mettre le point d'appui C, à quatre pouces $\frac{8}{13}$, de l'extrémité B ; au lieu qu'en négligeant la pesanteur du levier, on auroit $x = \frac{Qa}{P + Q} = \frac{96}{24} = 4$ pouces.

Si au contraire, on donnoit le point B, le point C, & qu'il fallût trouver le point D, où doit être appliquée la puissance Q supposée connue ainsi que P : on représenteroit BC par b, & BD par y ; alors l'équation des moments se changeroit en $Pb = py\left(\frac{1}{2}y - b\right) + Q(y - b)$, qui donneroit

$$y = \frac{pb - Q \pm \sqrt{(Q - pb)^2 + (2Pb + 2Qb)p}}{p}.$$

dont la valeur positive donne la distance BD dans la figure 101 ; & dont la valeur négative donne la distance BD (*Fig.* 102) en supposant que la distance BC est sans pesanteur.

Si l'on veut avoir la distance y à laquelle le poids de la partie CD (*Fig.* 101) suffira pour faire équilibre au poids P, on fera $Q = o$, & l'on aura $y = \frac{+pb + \sqrt{p^2 b^2 + 2pPb}}{p}$.

Si dans la figure 103 on veut, connoissant P, Q, BC, & la pesanteur spécifique du levier DC, déterminer la distance CD où doit agir la puissance Q ; nommant CD, y ; BC, b ; on aura py pour le poids R ; il faudra donc que $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$, d'où il sera facile d'avoir y.

Dans la figure 101, il est facile de voir que plus le levier sera long, & plus la puissance Q doit diminuer jusqu'à devenir zéro, après quoi elle doit agir en sens contraire.

Dans la figure 103, la longueur du levier augmentant, la puissance Q va d'abord en diminuant, mais jusqu'à un certain terme seulement, passé lequel elle doit augmenter. C'est ce qu'il est aisé de voir de plusieurs manieres, & entr'autres par l'équation $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$ qui donnant $Q = \frac{Pb + \frac{1}{2}pyy}{y}$, fait voir que lorsque $y = o$, Q doit être infinie ; & qu'elle le doit être aussi lorsque *y* eſt infinie ; donc entre ces deux cas extrêmes, elle doit avoir des valeurs finies ; donc pour paſſer de l'une à l'autre, il y aura un terme où elle aura la plus petite valeur poſſible. Pour déterminer ce terme, il n'y a autre choſe à faire (48) qu'à égaler à zéro la différentielle de la valeur de *Q*, priſe en regardant *y* ſeule comme variable. On aura donc $-\frac{(Pb+\frac{1}{2}py^2)dy}{yy}+pdy=0$, qui donne $y=\sqrt{\frac{2Pb}{p}}$. Donc *la valeur de la plus petite puiſſance Q que l'on puiſſe employer avec un levier peſant, de la ſeconde eſpece, eſt* $\sqrt{2Ppb}$, *& la longueur de ce levier eſt* $\sqrt{\frac{2Pb}{p}}$.

On voit donc que lorſqu'avec un levier peſant, on veut ſoulever un fardeau *F* (*Fig.* 104) il y a une certaine longueur à donner à ce levier pour y employer la moindre force poſſible : & qu'en deçà ainſi qu'au delà de cette longueur, il n'y a qu'à perdre. Il n'en eſt donc pas du levier lorſqu'on a égard à ſa peſanteur, comme du levier conſidéré ſans peſanteur. Au reſte, dans l'exemple que nous prenons ici (*Fig.* 104) il ne faudroit pas prendre pour *P*, la valeur totale du fardeau *F* ; nous verrons par la ſuite, ce que l'on doit en prendre. Conſidérons maintenant le levier en mouvement.

592. Soient M, M' M'' (*Fig.* 105) des masses quelconques sans pesanteur, & considérées comme des points, situées dans un même plan avec le point C, liées entr'elles & avec le point C, de maniere à ne pouvoir changer leurs distances réciproques, & à ne pouvoir que tourner autour de C ou autour d'un axe passant par C, perpendiculaire à leur plan. Supposons que ces masses reçoivent en même-temps dans leur plan des impulsions suivant Mm, $M'm'$, $M''m''$, telles que si elles étoient libres, elles eussent des vîtesses représentées par ces lignes : il s'agit de déterminer le mouvement qu'elles prendront.

Il faut, suivant le principe exposé (318), décomposer les vîtesses Mm, $M'm'$, $M''m''$, chacune en deux autres dont l'une puisse avoir lieu, & dont l'autre soit telle que si les masses M, M', M'' n'eussent eu que cette vîtesse, elles fussent demeurées en équilibre.

Or il est clair 1°. que les vîtesses que ces corps peuvent prendre, ne pouvant être que des vîtesses de rotation autour de C, doivent être perpendiculaires aux rayons CM, CM', CM''. 2°. Que pour que ces vîtesses aient lieu, c'est-à-dire, ne s'alterent point mutuellement, il faut qu'elles soient proportionnelles aux distances CM, CM', CM''.

Cela posé, je décompose les vîtesses imprimées Mm, $M'm'$, $M''m''$, en vîtesses Ms $M's'$, $M''s''$ qui soient celles qui peuvent avoir lieu, & en vîtesses Mq, $M'q'$, $M''q''$ avec lesquelles les masses puissent se faire équilibre autour de C. On aura donc $Ms : M's' :: CM : CM'$; $Ms : M''s'' :: CM : CM''$, & (589) en menant les perpendiculaires Ct, $C't$, Ct'' sur les directions prolongées des vîtesses Mq, &c. $M \times Mq \times Ct + M' \times M'q' \times Ct' - M'' \times M''q'' \times Ct'' = o$. Or par la propriété des parallélogrammes (243), on a $M \times Mq \times Ct + M \times Ms \times CM = M \times Mm \times CT$, en abaissant les perpendiculaires CT, CT', CT'' sur les directions de Mm, Mm', Mm''; c'est-à-dire, $M \times Mq \times Ct = M \times Mm \times CT - M \times Ms \times CM$. Par la même raison on a $M' \times M'q' \times Ct' = M' \times M'm' \times CT' - M' \times M's' \times CM'$, & $M'' \times M''q'' \times Ct'' = M'' \times M''m'' \times CT'' + M'' \times M''s'' \times CM''$.

Si de ces trois dernieres équations on ajoute les deux premieres, & qu'on en retranche la derniere; que de plus on fasse attention à la condition de l'équilibre exprimé par l'équation des moments donnée ci-dessus, on aura $o = M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT'' - M \times Ms \times CM - M' \times M's' \times CM' - M'' \times M''s'' \times CM''$. Mais les proportions établies, ci-dessus, donnent $M's' = \frac{Ms \times CM'}{CM}$, $M''s'' = \frac{Ms \times CM''}{CM}$.

Subſtituant ces valeurs, & faiſant les réductions & tranſpoſitions ordinaires, on aura
$$Ms = \frac{M \times Mm \times CT + M' \times m'M' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT''}{M \times \overline{CM}^2 + M' \times \overline{CM'}^2 + M'' \times \overline{CM''}^2} \times CM.$$

Or le numérateur de cette fraction, qui exprime la ſomme * des moments des forces $M \times Mm$, $M' \times Mm'$, &c. eſt (248) égal au moment de leur réſultante. Donc ſi l'on nomme R cette réſultante, & D ſa diſtance au point C, on aura cette ſomme de moments, $= R \times D$. De plus, le dénominateur étant la ſomme des produits de chaque maſſe multipliée par le quarré de ſa diſtance au point C; ſi l'on repréſente en général, l'une quelconque de ces maſſes par m, & ſa diſtance au point C, par r, on pourra repréſenter la ſomme de ces produits, par cette expreſſion abrégée, $\int mrr$, ($\int$ déſignant le mot *ſomme*), enſorte que nommant v la vîteſſe Ms, on aura Ms ou $v = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$.

593. Quoique nous ayons ſuppoſé que toutes les forces, & toutes les parties du ſyſtême fuſſent dans un même plan, il eſt facile de voir (& d'ailleurs on le verra par la ſuite) que la même choſe auroit encore

* Toujours en prenant avec des ſignes contraires, les moments des forces qui tendent à faire tourner en ſens contraires.

lieu, quand même elles feroient feulement dans les plans paralleles entr'eux & perpendiculaires à l'axe de rotation, pourvu que toutes les parties du fyftême fuffent affujetties à tourner autour d'une droite ou axe fixe.

594. Et puifqu'un corps folide de figure quelconque, peut toujours être confidéré comme l'affemblage de plufieurs points folides liés entr'eux, on peut donc dire, en général, que

Lorfqu'un corps L *de figure quelconque* (Fig. 106) *follicité par tant & de telles forces que l'on voudra, ne peut prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe* A B (*fitué hors de ce corps, ou dans ce corps*), *la vîteffe de rotation que l'un quelconque de fes points prendra, fe trouvera en divifant la fomme des moments de toutes ces forces* (*ou le moment de leur réfultante*) *par la fomme des produits de chaque partie de ce corps multipliée par le quarré de fa diftance à l'axe de rotation, & multipliant le quotient par la diftance du point dont on cherche la vîteffe, à ce même axe.*

595. Soit *G* le centre de gravité du corps *L* (*Fig.* 107); concevons que tandis que le point quelconque *M*, en tournant, décrit pendant un inftant l'arc infiniment petit *M s* le centre de gravité *G* décrive l'arc

l'arc Gg, perpendiculaire à CG; & menons par le point g, la ligne gk parallele & égale à CG. Au lieu de concevoir que le corps tourne autour de C, on peut concevoir qu'il eſt tranſporté parallélement à lui-même avec une vîteſſe égale à Gg, & qu'en même-temps ſes parties tournent autour du point mobile G avec une vîteſſe telle qu'en prenant $gk = GC$, le point k décrive l'arc $kC = Gg$; car alors le point C du corps L reſte également immobile. Or le corps étant libre alors, la réſultante de tous les mouvements de rotation autour du point mobile G eſt nulle (320). Donc la réſultante de tous les mouvements, dont le corps eſt actuellement animé, n'eſt autre que la force qu'auroit le corps L animé de la vîteſſe Gg, c'eſt-à-dire, que cette force doit être perpendiculaire à CG & $= L \times Gg$, en repréſentant par L, la maſſe du corps. Or puiſque les parties du corps décrivent des arcs ſemblables, on a $CM : CG :: Ms : Gg$; donc $Gg = \frac{Ms \times CG}{CM}$; donc la force réſultante de tous les mouvements de rotation, autour de C, eſt $\frac{L \times Ms \times CG}{CM}$.

Mais quoique cette réſultante ſoit la même que ſi le corps étant libre, le centre de gravité eût reçu la vîteſſe Gg, néanmoins il eſt facile de voir qu'elle ne paſſe pas par G, mais par quelque point R de CG, plus éloigné de G; puiſque les points les plus éloignés ayant plus de force, la réſultante doit paſſer du même côté que le centre de gravité par rapport à C, & plus loin que ce centre de gravité. Nommons donc D' la diſtance CR, à laquelle paſſe cette réſultante, & nous aurons $\frac{L \times Ms \times CG}{CM} \times D'$ pour ſon moment.

Or ſi à l'inſtant où les forces que nous avons conſidérées ci-deſſus (592) viennent à agir ſur les parties du corps, on leur oppoſoit à la diſtance D' une force égale à celle que nous venons de déterminer; c'eſt-à-dire, égale à l'effort total qu'elles produiſent ſur ce corps, il eſt évident qu'il y auroit équilibre; mais dans ce cas (589) le moment $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM}$ doit être égal au moment $R \times D$; donc puiſque (592) $R \times D = \frac{Ms}{MC} \int mrr$, on aura $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM} = \frac{Ms}{CM} \int mrr$, & par conſéquent $D' = \frac{\int mrr}{L \times CG}$.

Il réſulte donc, de ce que nous venons d'expoſer, que

596. *Si tant de forces que l'on voudra, dirigées comme on le voudra, dans des plans auxquels l'axe de rotation ſoit perpendiculaire,*

agissent sur un corps, & ne peuvent le faire tourner qu'autour de cet axe ; 1°. la force que ce corps en recevra, sera égale à la masse de ce corps multipliée par la vîtesse que prendra son centre de gravité; vîtesse que l'on détermine par ce qui a été dit (594). 2°. *Cette force sera perpendiculaire au plan qui passe par l'axe & par le centre de gravité.* 3°. *Sa distance à l'axe sera toujours la même quelles que soient ces forces & leurs directions; & elle sera égale à la somme des produits de chaque particule du corps, multipliée par le quarré de sa distance à l'axe, égale, dis-je, à cette somme divisée par la masse du corps multipliée par la distance du centre de gravité au même axe.*

597. v marquant toujours la vîtesse avec laquelle un point déterminé M du corps L, tend à tourner en vertu de l'action de tant de forces que l'on voudra, ou de leur résultante R; si l'on appelle r la distance d'une particule quelconque, à l'axe de rotation, & m la masse de cette particule; on aura $\frac{rv}{CM}$ pour sa vîtesse de rotation, & $\frac{mrv}{CM}$ pour la force qu'elle reçoit, & par conséquent pour la résistance qu'elle oppose à R, par son inertie (380); donc $\frac{mrrv}{CM}$ sera le moment de cette résistance ; donc la

ſomme des moments des réſiſtances que les particules de L oppoſent au mouvement de rotation que R leur imprime, eſt $\int \frac{mrrv}{CM}$, ou $\frac{v}{CM} \int mrr$; car ces deux expreſſions ſont les mêmes, puiſque v & CM ne changent point, quelle que ſoit la particule m que l'on conſidere.

On voit donc que, toutes choſes d'ailleurs égales, la réſiſtance que les parties d'un corps oppoſent au mouvement de rotation qu'on leur imprime, eſt d'autant plus grande, que $\int mrr$ eſt plus grande.

Dorénavant, nous appellerons la quantité $\frac{v}{CM} \int mrr$, *le moment d'inertie* du corps; & $\int mrr$ nous l'appellerons *l'expoſant du moment d'inertie.*

598. Nous verrons, dans peu, comment on détermine l'expoſant du moment d'inertie, dans un corps quelconque; mais quand on a déterminé cet expoſant à l'égard d'un axe quelconque, il eſt très-facile d'en conclure ce qu'il doit être à l'égard de tout autre axe parallele au premier. Comme nous aurons occaſion de conſidérer le moment d'inertie à l'égard de différents axes paralleles, nous allons d'abord faire voir comment on peut, pour un axe quelconque,

conclure la valeur de ſon expoſant, de celle qu'elle auroit à l'égard d'un autre axe parallele au premier.

Soit donc AB (*Fig.* 108) un axe quelconque; $A'B'$, un autre axe qui lui ſoit parallele, & qui paſſe par le centre de gravité du corps : ſoit m une particule quelconque de ce corps ; & par m concevons un plan mCC' perpendiculaire aux deux axes AB, $A'B'$; ayant mené mC, mC', & la ligne mP perpendiculaire ſur CC', les lignes mC, mC' feront perpendiculaires ſur AB, $A'B'$.

Cela poſé, ſelon ce qui a été dit (*Alg.* 259) on aura $\overline{mC}^2 = \overline{mC'}^2 + \overline{CC'}^2 + 2\,CC' \times C'P$. Donc $\int m \,.\, \overline{mC}^2 = \int m \,.\, \overline{mC'}^2 + \int m \,.\, \overline{CC'}^2 + \int 2\,m \,.\, CC' \,.\, C'P$. Or puiſque la diſtance CC' eſt toujours la même quelle que ſoit la particule m que l'on conſidere, $\int m \,.\, \overline{CC'}^2$ n'eſt autre choſe que $\overline{CC'}^2 \int m$, ou $\overline{CC'}^2 \times L$, en nommant L la maſſe du corps. Par la même raiſon, $\int 2\,m \times CC' \times C'P$, n'eſt autre choſe que $2\,CC' \int m \,.\, C'P$; mais $\int m \,.\, C'P$, étant la ſomme des produits des particules par rapport à un plan qui paſſe par $A'B'$, c'eſt-à-dire, par le centre de gravité, doit (270) être $= 0$; on a donc ſimplement, $\int m \,.\, \overline{mC}^2 = \int m \,.\, \overline{mC'}^2 + L \times \overline{CC'}^2$. Donc *connoissant l'exposant* $\int m \,.\, \overline{mC'}^2$ *du moment d'inertie à l'égard d'un axe passant par le centre de gravité, on aura l'exposant de ce moment à l'égard de tout autre axe parallele à celui-là, en ajoutant au premier, le produit de la masse par le quarré de la distance de ces deux axes.*

D'après cela, & l'expression de la vîtesse de rotation trouvée (592), on voit donc que *de tous les axes autour desquels on peut faire tourner un corps, en vertu d'une force ou impulsion quelconque, ceux autour desquels la vîtesse de rotation sera la plus grande, sont ceux qui passent par le centre de gravité;* puisque l'exposant du moment d'inertie à l'égard d'un axe passant par le centre de gravité est plus petit qu'à l'égard de tout autre axe.

599. Tout ce qui précede est d'un très-grand usage, & renferme la méthode pour trouver le *centre de percussion*, & le *centre d'oscillation* des corps assujettis à tourner autour d'un axe déterminé ou d'un point déterminé C (*Fig.* 109). Ce qu'on entend par *centre de percussion*, c'est le point R de la ligne CG menée par le point fixe C, & le centre de gravité G, où il faudroit placer un corps, pour qu'il reçût la plus grande impression de la part du corps L tournant autour de C. Or il est visible que ce point doit être celui par où passe la résultante des

mouvements de rotation de tous les points de L; ce point, ou le centre de percussion, est donc déterminé par ce qui a été dit (596).

A l'égard du *centre d'oscillation*, c'est le point R d'un corps, L (*Fig.* 109) ou d'un systême de corps, qui se trouve éloigné de C d'une quantité égale à la longueur que devroit avoir un pendule simple pour faire ses oscillations en même temps que ce corps ou ce systême de corps, fait les siennes en vertu de la pesanteur. Nous allons voir que ce centre est le même que le centre de percussion.

En effet, lorsqu'il s'agit de la pesanteur, la force R résultante de l'action que la pesanteur exerce sur chaque partie matérielle d'un corps, est égale à la masse totale multipliée par la vîtesse que la pesanteur imprime, en un instant, à toute partie de matiere; c'est-à-dire, que $R = g \times L$, en nommant g, cette vîtesse. De plus cette résultante R passe par le centre de gravité G; & par conséquent sa distance au point fixe C, ou à l'axe qui passe par C, est CN; donc (594) la vîtesse de rotation Ms que prend un point quelconque M, lorsque le corps est abandonné à l'action de sa pesanteur, est $Ms = \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CM$; ensorte que pour le centre de gravité G, elle eſt $Gg = \frac{g \times L \times CN}{\int m r r} \times CG$.

Or pour qu'un pendule ſimple qui auroit pour longueur CR, faſſe ſes oſcillations en même-temps que le corps L, il faut qu'en le ſuppoſant éloigné de la verticale, de la même quantité angulaire que l'eſt CR, la vîteſſe que la peſanteur lui communique en R (*Fig.* 110) perpendiculairement à CR, ſoit la même que celle du point R (*Fig.* 109); c'eſt-à-dire, qu'elle ſoit à la vîteſſe de G (*Fig.* 109) : : $CR : CG$; or il eſt facile de voir (*Fig.* 110) en décompoſant la vîteſſe RL, ou g, que la peſanteur donne dans un inſtant, à un corps libre, en deux autres; l'une Rk ſuivant la verge CR, l'autre Rr perpendiculaire à CR, il eſt facile de voir que $Rl : Rr :: CR : RS :: CG : CN$; donc $g : Rr :: CG : CN$; & par conſéquent $Rr = \frac{g \times CN}{CG}$; il faut donc que $\frac{g \times CN}{CG} : \frac{g \times L \times CN}{\int m r r} \times CG :: CR : CG$; d'où l'on tire $CR = \frac{\int m r r}{L \times CG}$; c'eſt-à-dire, la même valeur que pour le centre de percuſſion.

600. Puiſque toutes les forces qui agiſſent ſur le corps L, ou ſur un ſyſtême de corps aſſujetti à tourner autour d'un point ou d'un axe fixe, font naître dans ce corps une

vîteſſe telle qu'un point quelconque M tourne avec une vîteſſe $Ms = \frac{R \times D}{\int m r r} \times CM$; & qu'il eſt d'ailleurs évident que ſi le corps venoit à tourner en ſens contraire avec la même vîteſſe, il feroit équilibre à toutes ces forces; concluons-en que ſi, un corps, tournant avec une vîteſſe qui pour un point déterminé M ſoit v, on veut arrêter ce mouvement avec une puiſſance R dont la direction paſſe à une diſtance de $C = D$, il faudra que cette puiſſance ou ſa diſtance D ſoit telle que le moment $R \times D$ ſoit égal à la vîteſſe du point M, diviſée par la diſtance CM, & multipliée par la ſomme des produits des particules par les quarrés de leurs diſtances à C ou à l'axe qui paſſe par C. En effet, cette puiſſance doit être telle qu'elle puiſſe reproduire la même vîteſſe dans le corps L ſuppoſé en repos; or cette vîteſſe feroit $v = \frac{R \times D}{\int m r r} \times CM$, qui donne $R \times D = \frac{v}{CM} \int m r r$.

601. Si un corps L de figure quelconque (*Fig.* 111), aſſujetti de maniere à ne pouvoir tourner qu'autour du point fixe C, ou d'un axe paſſant par ce point qui peut d'ailleurs être par-tout où l'on voudra; ſi un corps, dis-je, vient à être choqué perpendiculaire-

ment à sa surface par un corps N, on pourra, par les principes précédents, déterminer le mouvement de l'un & de l'autre après le choc, de la maniere suivante.

Soit V la vîtesse de N, suivant la perpendiculaire TS, avant le choc; v sa vîtesse après le choc. $V-v$ sera la vîtesse, & $N(V-v)$ la quantité de mouvement qu'il perdra par le choc, & qui passera dans L. Cette quantité de mouvement fera donc naître dans L une vîtesse de rotation (594) telle que le point T, par exemple, tournera avec une vîtesse $v' = \frac{N(V-v) \times CS}{\int mrr} \times CT$, en menant CS perpendiculaire sur TS.

Concevons que l'arc infiniment petit Tm décrit du centre C, représente cette vîtesse; en formant sur la tangente TA, & sur la perpendiculaire TS, le parallélogramme $TAmr$, on verra en substituant, par la pensée, les vîtesses TA & Tr, à la vîtesse Tm, que la vîtesse TA ne peut nuire en rien à la vîtesse v que N doit prendre; mais que la vîtesse Tr nuiroit à la vîtesse v, si elle étoit plus petite que v; donc puisqu'on suppose que v est réellement la vîtesse que M conservera, il faut que Tr soit $= v$. Or les triangles semblables CST, Trm, donnent $CT : CS ::$ TM ou $v' : Tr$; donc $\frac{v' \times CS}{CT} = Tr = v$, &

par conſéquent $v' = \frac{v \times CT}{CS}$; ſubſtituant donc pour y' cette valeur, dans l'équation ci-deſſus, on aura $\frac{v \times T}{CS} = \frac{N \times (V - v) \times CS}{\int mrr} \times CT$, d'où l'on tire $v = \frac{N \times V \times \overline{CS}^2}{\int mrr + N \times \overline{CS}^2}$: delà il eſt facile de conclure la vîteſſe de rotation v'. Mais l'équation $v' = \frac{v \times CT}{CS}$, donnant $v : v' :: CS, CT$, fait voir que v eſt la vîteſſe de rotation du point S; on voit donc que le point S tourne avec la vîteſſe qui reſte à N après le choc.

602. On voit donc que pour avoir les mouvements des corps qui tournent, il faut ſavoir déterminer la valeur de $\int mrr$. C'eſt ce qui ſera toujours facile, ainſi qu'on va le voir, ſi la nature du corps peut être exprimée par des équations. Et ſi cette condition n'a pas lieu, on pourra toujours, du moins, partager le corps en parties, comme parallélipipedes ou pyramides, &c. dont la nature peut être exprimée par des équations; & cherchant pour chacune la valeur de $\int mrr$, on ajoutera enſuite toutes ces ſommes pour avoir la valeur totale de $\int mrr$ pour le corps entier ou le ſyſtême de corps dont il s'agit. Voyons donc comment on doit s'y prendre pour trouver dans les corps dont la nature

peut être exprimée par des équations, la valeur de $\int m r r$.

Soit AB (*Fig.* 112) l'axe de rotation; & concevons par AB, deux plans perpendiculaires entr'eux; soit m une particule quelconque du corps, & ayant mené mC perpendiculaire sur AB; menons mS perpendiculaire au plan AR. Si l'on tire CS, elle sera perpendiculaire à AB, & par conséquent au plan PQ. Le triangle rectangle mSC donne $\overline{Cm}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{Sm}^2$; donc $\int m . \overline{Cm}^2$ ou $\int m r r = \int m \times \overline{CS}^2 + \int m . \overline{mS}^2$. La question revient donc à trouver la somme des produits des particules par les quarrés de leurs distances à deux plans qui passent par l'axe de rotation, & sont perpendiculaires entr'eux. Or dès qu'on aura trouvé l'expression algébrique de cette somme, par rapport à l'un des plans, il sera aisé de l'avoir par rapport à l'autre; voyons donc comment on peut, en général, trouver la somme des produits des particules d'un corps, par les quarrés de leurs distances à un plan connu.

On concevra ce corps partagé en tranches infiniment minces, parallèles à ce plan; & supposant que Dd (*Fig.* 113) représente l'épaisseur d'une de ces tranches, on nommera x la diſtance CD au plan dont il s'agit, & S la ſurface de la tranche : alors, comme tous les points de cette ſurface ſont éloignés du plan PQ, d'une quantité égale à x, on aura $xxSdx$ pour les produits de tous les points de cette tranche par les quarrés de leurs diſtances à ce plan, & par conſéquent $\int xxSdx$ pour la ſomme totale de ces produits pour tout le corps.

Si l'on nomme, pareillement, x', les diſtances au plan perpendiculaire à PQ & paſſant par l'axe de rotation AB, & que concevant le corps partagé en tranches paralleles à ce nouveau plan, on appelle S' la ſurface de l'une des tranches, on aura de même $\int x'x'S'dx'$ pour la ſomme des produits des particules, par le quarré de leur diſtance à ce ſecond plan; en ſorte que $\int xxSdx +$ $\int x'x'S'dx'$ ſera la valeur de la ſomme des produits de chaque partie du corps multipliée par le quarré de ſa diſtance à l'axe AB.

603. Pour en donner quelques exemples, ſuppoſons que le corps eſt un parallélipipede rectangle (*Fig.* 114) tournant autour de l'axe AB perpendiculaire à l'axe de ce parallélipipede & au milieu du côté RS. Par la nature de ce corps, la ſurface S eſt conſtante; ainſi l'intégrale $\int xxSdx$ eſt $\frac{x^3S}{3}$, qui

lorsque x est égal à la hauteur h du parallélipipede, devient $\frac{h^3 S}{3}$.

On voit de même que S' est une quantité constante, & qu'ainsi $\int x'x'S'dx'$, devient $\frac{x'^3 S'}{3}$ qui lorsque $x' = \frac{1}{2} MN$, ou $\frac{1}{2} h'$, en nommant MN, h', devient $\frac{1}{8}.\frac{h'^3 S'}{3}$; & comme le plan qui passe par l'axe divise le corps en deux parties égales, on aura pour les deux moitiés $\frac{1}{4}.\frac{h'^3 S'}{3}$; donc la somme totale des produits sera $\frac{h^3 S}{3} + \frac{h'^3 S'}{12}$.

Si l'on veut donc trouver le centre d'oscillation ou de percussion, il ne s'agit plus (599) que de diviser cette quantité par la masse du parallélipipede multipliée par la distance de son centre de gravité; c'est-à-dire, par $h\,h\,b \times \frac{1}{2} h$, en nommant $R\,M$, b. On aura donc $\frac{2\,h^3 S}{3\,h^2 h' b} + \frac{h'^3 S'}{6\,h^2 h' b}$; ou à cause que $S = h'b$, & $S' = h\,b$, on aura $\frac{2\,h}{3} + \frac{h'^2}{6\,h}$ pour la distance du centre d'oscillation, & pour celle du centre de percussion.

Si h' est très-petit par rapport à h, on aura cette distance $= \frac{2\,h}{3}$. Donc *le centre d'oscillation, & le centre de percussion d'une ligne droite, ou d'un parallélogramme tournant au-*

tour d'un de ses côtés comme axe, est aux $\frac{2}{3}$ de la distance au point ou à l'axe de rotation.

Ainsi la verge ou barre CA (*Fig.* 115) tournant autour du point fixe C, frappera le clou T, le plus fortement qu'il est possible, si ce clou répond à la distance $CP = \frac{2}{3} CA$.

Si la verge CA tournoit par l'action seule de sa pesanteur, la force qu'elle exerceroit sur le clou, seroit égale à la masse de la verge multipliée par la vîtesse que le centre de gravité G acquiert en tombant le long de BG; c'est-à-dire, (466) par la vîtesse qu'un corps pesant acquerroit en tombant de la hauteur BD.

604. Prenons pour second exemple, la sphere. La surface que nous avons appellée S, est un cercle qui a pour rayon IM (*Fig.* 116) que je nomme y. Ainsi supposant que $1 : c$ est le rapport du rayon à la circonférence, on aura $\frac{cy^2}{2} = S$. Soit $DI = z$, & r le rayon de la sphere; on a $y^2 = 2rz - zz$, & par conséquent $S = \frac{c}{2}(2rz - zz)$. Soit $DC = a$, on aura CI ou $x = z + a$, & $dx = dz$; donc $\int x^2 S dx$ devient $\int (z + a)^2 \times \frac{c}{2}(2rz - zz)dz$, ou en développant tout, devient $\int \frac{c}{2}$ ($2aarzdz + 4arz^2dz - aaz^2dz + 2rz^3dz - 2az^3dz -$

$z^4 dz$) ; & en intégrant on a $\frac{c}{2}(aarz^2 + \frac{4}{3}arz^3 - \frac{1}{3}aaz^3 + \frac{1}{2}rz^4 - \frac{1}{2}az^4 - \frac{1}{5}z^5)$ qui lorſque $z = 2r$, ſe réduit à $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2 r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{8}{5}r^5)$. Pour trouver la valeur de $\int x' x' S' dx'$, il n'eſt pas néceſſaire de recommencer le calcul; parce que la figure réguliere de la ſphere, fait voir qu'il ſeroit abſolument ſemblable ; il n'y a autre choſe à faire qu'à ſuppoſer que a qui exprime la diſtance du plan PQ, à la ſurface, devient $-r$, c'eſt-à-dire, que ce plan paſſe par le centre, en l'imaginant d'ailleurs perpendiculaire à ſa premiere poſition; & on aura $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}r^5 - \frac{8}{3}r^5 + \frac{8}{5}r^5)$ qui ſe réduit à $\frac{c}{2} \cdot \frac{4}{15}r^5$. Réuniſſant donc les deux intégrales, on a $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2 r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{28}{15}r^5)$.

Et puiſque la ſolidité de la ſphere eſt $\frac{c}{2} \times \frac{4}{3}r^3$, & que la diſtance de ſon centre de gravité au plan PQ, eſt $a+r$, diviſant le réſultat qu'on vient de trouver, par le produit de ces deux dernieres quantités, on aura pour la diſtance CO du centre d'oſcillation & de percuſſion, $CO = \frac{a^2 + 2ar + \frac{7}{5}r^2}{a+r} = \frac{a^2 + 2ar + r^2 + \frac{2}{5}r^2}{a+r} = a + r + \frac{2}{5} \cdot \frac{r^2}{a+r} = CG + \frac{2}{5} \cdot \frac{\overline{DG}^2}{CG}$, d'où l'on voit que le centre d'oſcillation & de

percuſſion

percuſſion eſt plus bas que le centre même de la ſphere, & qu'on ne peut les prendre pour celui-ci, que lorſque le rayon de la ſphere eſt très-petit à l'égard de la diſtance du centre *G* au point de ſuſpenſion.

Si la ſphere eſt ſuſpendue par une verge ou lame, & qu'on veuille avoir égard à la maſſe de cette lame; on ſe rappellera que nous avons trouvé (603), $\frac{h^3 S}{3} + \frac{h'^3 S'}{12}$ pour la ſomme des produits des particules de cette lame par les quarrés de leurs diſtances au point fixe ou à l'axe. Or *h* eſt ce que nous repréſentons ici par *a*; de plus, *S* étant (603) $= h'b$, & $S' = hb = ab$, on aura $\frac{a^3 h'b}{3} + \frac{h'^3 ab}{12}$; cette quantité & celle qui appartient à la ſphere, doivent être multipliées par les peſanteurs ſpécifiques de ces deux corps, ſi ces peſanteurs ſont différentes; alors ajoutant les deux produits, on aura en appellant p & p' les peſanteurs ſpécifiques de la lame & de la ſphere, on aura, dis-je, $p\frac{a^3 h'b}{3} + p\frac{h'^3 ab}{12} + p'\frac{c}{2}\left(\frac{4}{3}a^2 r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{28}{15}r^5\right)$, pour la ſomme des produits des particules de tout le ſyſtême, par le quarré de leur diſtance à l'axe. Diviſant cette quantité par la ſomme

S

$pak'b + p'\frac{c}{2} \cdot \frac{4}{3} r^3$, on aura la diſtance du centre d'oſcillation.

605. Dans la pratique on peut ſe contenter de partager le corps en un grand nombre de parties, & de multiplier chacune par le quarré de ſa diſtance à l'axe, pour avoir d'une maniere ſuffiſamment exacte, la valeur de $\int mrr$.

606. Après cette petite digreſſion ſur la maniere de trouver $\int mrr$, revenons aux applications qu'on peut faire de la regle donnée (594).

Nous avons démontré (322) que lorſqu'un corps quelconque *L* (*Fig.* 117) reçoit une impreſſion ſuivant une direction qui ne paſſe pas par ſon centre de gravité *G*, cette impreſſion ſe tranſmet entierement au centre de gravité qui ſe meut parallélement à la direction *RS*, ſuivant laquelle le corps a reçu cette impreſſion; & qu'en même temps les parties de ce corps tournent autour du centre de gravité de la même maniere qu'elles le feroient, ſi le point *G* étoit fixe. Donc ſi la figure de ce corps, & les forces qui lui ſont tranſmiſes (dont je ſuppoſe que *R* repréſente la réſultante) ſont telles qu'il ne puiſſe tourner qu'autour d'un ſeul axe; comme cet axe paſſera néceſſairement par le centre de gravité, tout ce que nous avons dit ci-dessus aura également lieu, en entendant par r, dans $\int mrr$, la distance d'une particule quelconque à l'axe qui passe par le centre de gravité, & par $R \times D$ le moment de la force R pris par rapport au même axe, ou la somme des moments de toutes les forces qui agissent sur le corps, prise par rapport à ce même axe. C'est-à-dire, que le centre de gravité sera mu parallélement à la direction de la force R, avec une vîtesse $= \frac{R}{L}$, L étant la masse du corps (189). Et si l'on mene GS perpendiculaire sur RS, & qu'on appelle v la vîtesse de rotation de S, on aura $v = \frac{R \times GS}{\int mrr} \times GS$, ou . . . . $v = \frac{R \times GS^2}{\int mrr}$, (594). Voyons-en quelques applications.

607. Supposons que le corps N (*Fig.* 118) vient choquer le corps L suivant une direction quelconque CQ, telle cependant, qu'il n'en résulte de rotation dans L, qu'autour d'un seul axe perpendiculaire au plan qui passe par le centre de gravité G, & par la perpendiculaire TS au point de contact T; il s'agit de déterminer les vîtesses après le choc, & leurs directions; le corps L est supposé en repos.

Concevons par le point de contact T, un plan tangent; & imaginons la vîtesse de N suivant CQ, décomposée en deux autres, l'une suivant CT perpendiculaire à ce plan, l'autre suivant CI parallele à ce même plan. Si N n'avoit d'autre vîtesse que CI, il ne feroit que toucher L en passant, & ne lui communiqueroit aucun mouvement, du moins abstraction faite du frottement. Ce n'est donc qu'en vertu de la vîtesse CT que se fait le choc. Or comme il est aisé, dans le parallélogramme $CTAI$ dont tous les angles & la diagonale CA sont supposés connus, de connoître CT, nous regarderons cette vîtesse CT comme connue, & nous la nommerons V. Soit v la vîtesse qui restera à N après le choc, suivant la même direction CT ou CS; & par conséquent $V-v$ la vîtesse qu'il perd; $N \times (V-v)$ est donc la force qui passe dans le corps L, celle que nous avons nommée R. Donc (322) le centre de gravité, & toutes les parties du corps, prendront suivant GM parallele à CS, une vîtesse $= \frac{N \times (V-v)}{L} = v'$ en nommant v' cette vîtesse.

Mais comme la force $N \times (V-v)$ ne passe pas par le centre de gravité G, de L, ce corps doit tourner autour de G comme si ce point eût été fixe (322). Soit u la vîtesse de rotation que prendra le point S qui eſt celui où la perpendiculaire GS ſur CS, rencontre cette derniere ligne ; on aura donc (594), $u = \frac{N(V-v)\times\overline{GS}^2}{\int mrr}$, ou, en repréſentant GS par D, $u = \frac{ND^2(V-v)}{\int mrr}$.

Obſervons de plus, que pour que le corps N ait réellement la vîteſſe v, il faut que le point T du corps L ait auſſi cette même vîteſſe v ſuivant TS; voyons donc avec quelle vîteſſe ce point doit avancer ſuivant TS.

Il aura d'abord la vîteſſe v' commune à toutes les parties de L. De plus, ſi l'on ſuppoſe que l'arc infiniment petit Tm perpendiculaire à GT repréſente la vîteſſe de rotation du point T, en imaginant le parallélogramme $Trmn$ ſur les directions Tm, TA & TS, on aura Tr pour la vîteſſe de T ſuivant TS en vertu de ſa rotation. Or les triangles ſemblables Tmr, GTS, donnent $GT : GS :: Tm : Tr$; donc $Tr = \frac{GS \times Tm}{GT}$. Mais puiſque u eſt la vîteſſe de rotation du point S, on a $u : Tm :: GS : GT$, & par conſéquent $Tm = \frac{u \times GT}{GS}$; donc $Tr = \frac{GS}{GT} \times \frac{u \times GT}{GS} = u$; donc la vîteſſe totale du point T du corps L, ſuivant CS, eſt $v' + u$; il faut donc $v' + u = v$.

Si des trois équations que nous venons de trouver, pour exprimer les conditions du mouvement, on tire les valeurs de v, u, & v', on aura $v = \frac{N(\int mrr + LD^2)V}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$, $v' = \frac{NV\int mrr}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$, $u = \frac{LND^2V}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$.

Si la diſtance de GS ou $D = 0$; c'eſt-à-dire, ſi le choc paſſe par le centre de gravité G, alors la vîteſſe de rotation $u = 0$, les vîteſſes v & v' ſont égales entr'elles & à $\frac{NV}{N+L}$, ainſi que cela doit être (378). La vîteſſe v étant déterminée, ſi on la compoſe avec la vîteſſe CI, qui n'a ſouffert aucune altération, on aura la vîteſſe abſolue de N, & ſa direction après le choc.

Si le corps L étoit en mouvement avant le choc, alors on décompoſeroit la vîteſſe de N avant le choc, en deux autres, dont l'une fût égale & parallele à celle de L; elle ne contribueroit en rien au choc; on emploiera donc la ſeconde, comme on a employé la vîteſſe ſuivant CQ, en conſidérant le corps L comme en repos.

Si l'on compare la valeur que nous venons de trouver pour u, avec celle que nous avons trouvée (601) pour la vîteſſe de rotation, en faiſant attention à la différence de ſignification de r, dans chaque cas, on pourra connoître la différence entre la vîtesse de rotation que prend un corps libre, & celle qu'il prend quand il est assujetti à tourner autour d'un point ou axe déterminé.

608. De la valeur que nous venons de trouver pour la vîtesse u de rotation, on peut tirer une méthode pour déterminer, par expérience, la valeur de $\int mrr$, & la position du centre de gravité, dans un corps de figure quelconque. Nous appliquerons au vaisseau ce que nous allons en dire.

Supposons qu'ayant attaché une corde vers la poupe, on fasse tirer le vaisseau perpendiculairement à sa longueur, par un poids N (*Fig.* 119) assez considérable, mais qui, cependant, soit petit eu égard au poids total du vaisseau : ce poids passera, par exemple, par-dessus une poulie P. La vîtesse que le vaisseau prendra pendant l'expérience qui ne doit durer que peu de temps, comme une minute, ou une demi-minute, sera assez petite pour qu'on puisse se dispenser d'avoir égard à la résistance de l'eau qui (toutes choses d'ailleurs égales) étant proportionnelle (398) au quarré de la vîtesse, ne pourra être que très-petite.

L'action de la pesanteur communique à N

dans l'inſtant dt, de la vîteſſe pdt (204), p étant celle qu'elle communique en une ſeconde de temps ; & fait naître dans le vaiſſeau une vîteſſe de rotation infiniment petite que j'appelle du, pour le point A où la corde eſt attachée. Mettant donc pdt pour V, & du pour u, dans la valeur de u trouvée (607), ſuppoſant de plus, N très-petit ou nul à l'égard de la maſſe L du vaiſſeau, ce qui réduit u à $u = \frac{ND^2V}{\int mrr}$, on aura $du = \frac{pND^2dt}{\int mrr}$. Soit du' la vîteſſe avec laquelle tourne le point du vaiſſeau qui eſt éloigné du centre de gravité, de la diſtance de un pied ; on aura $du : du' :: AG : 1 :: D : 1$, & par conſéquent $du = D\,du'$. Subſtituant pour du, cette valeur, on a $du' = \frac{pNDdt}{\int mrr}$, & en intégrant, $u' = \frac{pNDt}{\int mrr}$.

Soit z l'arc décrit pendant le temps t, par ce même point ſitué à la diſtance de 1 pied ; on aura $dz = u'\,dt$ (210) ; & par conſéquent $dz = \frac{pNDtdt}{\int mrr}$; donc en intégrant on aura $z = \frac{pNDt^2}{2\int mrr}$. Donc ſi la corde tirant toujours perpendiculairement à la longueur du vaiſſeau, eſt attachée en un autre point I, & qu'on nomme z' l'arc que décrit alors le même point que ci-devant, pendant le même temps t, on aura $z' = \frac{pND't^2}{2\int mrr}$, en appellant D' la diſtance IG; d'où l'on conclura $z : z' :: D : D' : AG : IG$; donc (*Arith.* 184) $z - z' : z :: AG - IG$ ou $AI : AG$.

Cela poſé, ſi à la fin de chaque expérience on meſure (ce qui eſt facile par pluſieurs moyens) les angles de rotation, c'eſt-à-dire, les nombres de degrés des arcs z & z', on pourra ſubſtituer ces nombres de degrés au lieu des arcs z & z', dans la proportion ; & comme la diſtance AI eſt connue, on aura facilement AG, c'eſt-à-dire, la poſition du centre de gravité.

La valeur de AG ou D étant déterminée, on calculera (*Géom.* 153) la longueur de l'arc z qui a pour rayon 1, & dont le nombre de degrés eſt connu; alors comme N eſt connu, & que p (203) vaut 30, 2 pieds; ſi l'on a eu ſoin d'obſerver le nombre de ſecondes qui ſe ſont écoulées juſqu'au moment où l'on a determiné le nombre de degrés de z, on connoîtra tout, excepté $\int mrr$, dans l'équation $z = \frac{pNDt^2}{2\int mrr}$; or cette équation donne $\int mrr = \frac{pNDt^2}{2z}$, on aura donc la valeur de $\int mrr$, qui feroit très-pénible à avoir par un calcul détaillé des différentes parties du vaiſſeau.

609. Lorſqu'un corps L de figure quelconque (*Fig.* 120) ayant reçu une impulſion ſuivant une direction RS qui ne paſſe pas par le centre de gravité, prend les deux mouvements dont nous avons parlé (606), il eſt facile de voir que, pendant un inſtant, on peut le conſidérer comme n'ayant qu'un ſeul mouvement, ſavoir, un mouvement de rotation autour d'un point ou axe fixe C, qui, ſelon la figure du corps, & ſelon la diſtance GS à laquelle paſſe la force impulſive, peut être dans le corps même, ou dehors. En effet, ſi tandis que la ligne GS ſe tranſporte parallélement à elle-même de GS en $G'S'$, on imagine qu'elle tourne autour du point mobile G, comme les points du corps ont des vîteſſes de rotation d'autant plus grandes qu'ils ſont plus éloignés de G, il eſt facile de voir qu'il y a ſur SG un point C qui ſe trouvera avoir décrit de C' vers C, un arc égal à GG', arc que pendant un inſtant, on peut regarder comme une ligne droite; & alors ce point C aura autant rétrogradé par ſon mouvement de rotation qu'il s'étoit avancé parallélement à GG' par la vîteſſe commune à toutes les parties; ce point aura donc toujours reſté en C que l'on pourra par cette raiſon conſidérer,

pendant un instant, comme un point fixe autour duquel le corps tourneroit. Si l'on veut connoître la position du point C, on remarquera que les arcs CC', $S'I$ que les points C' & S' décrivent, dans un instant, peuvent être regardés comme des lignes droites perpendiculaires à GS, ou paralleles à GG'; or les triangles semblables $CC'G'$, $G'S'I$ donnent $G'S' : G'C' :: S'I : CC'$, ou $GS : GC :: S'I : GG'$; or nous avons trouvé la vîtesse $GG' = \frac{R}{L}$, & la vîtesse $S'I = \frac{R \times D^2}{\int mrr}$; donc GS ou $D : GC :: \frac{R \times D^2}{\int mrr} : \frac{R}{L}$, d'où l'on tire $GC = \frac{\int mrr}{D \times L}$.

610. Le point C est ce qu'on appelle le *Centre spontané de rotation*, parce que c'est un centre que le corps prend comme de lui-même. Ce point est précisément le centre d'oscillation qu'auroit le corps L, s'il tournoit autour d'un point ou axe fixe placé en S; car de $CG = \frac{\int mrr}{D \times L}$, on conclut $CS = GS + \frac{\int mrr}{D \times L}$ $= \frac{L \times GS \times D + \int mrr}{D \times L} = \frac{L \times \overline{GS}^2 + \int mrr}{GS \times L}$; or $L \times \overline{GS}^2 + \int mrr$, est (598) précisément ce que (599) on entendoit par $\int mrr$; donc le point C est ici le même que le point R considéré (599).

On voit donc que le point autour duquel un corps peut être censé tourner pendant un instant, est indépendant de la valeur de la force ou des forces qu'on applique à ce corps ; &, en général, on voit par la valeur de CG, que ce point est d'autant plus loin, que cette force, ou la résultante de toutes ces forces, agit plus près du centre de gravité.

611. Nous avons vu (599) que lorsqu'un corps tourne autour d'un point ou axe fixe, son centre de percussion est le même que son centre d'oscillation : ces deux centres se trouvent donc alors, par la même opération. Il n'en est pas de même quand le corps est libre. En effet, supposons qu'un corps dont la masse est L, tourne avec une vîtesse qui, pour un point situé à une distance connue a, soit v; & qu'en même-temps, le centre de gravité de ce corps soit mu avec la vîtesse u. Il est clair d'abord que la force résultante de tous les mouvements qui animent les différentes parties de ce corps, aura pour valeur $L \times u$, ou Lu, c'est-à-dire, la même que si le corps ne tournoit pas (320). En second lieu, la distance à laquelle cette résultante doit passer à l'égard du centre de gravité, est évidemment celle à laquelle une force égale à Lu, feroit naître dans le

mobile, la même vîtesse de rotation qu'il a actuellement ; or (594) cette vîtesse v a pour expression $\frac{Lu \times D \times a}{\int mrr}$, en appellant D la distance cherchée ; on a donc $v = \frac{LuDa}{\int mrr}$, & par conséquent $D = \frac{v}{u} . \frac{\int mrr}{La}$; d'où l'on voit que la distance du centre de percussion d'un corps libre dépend du rapport de la vîtesse de rotation à sa vîtesse du centre de gravité ; qu'en particulier, elle est nulle quand la vîtesse de rotation est nulle, ce qui doit être en effet.

On peut donc par-là, déterminer en quel point on peut arrêter un corps libre qui se meut en tournant sur lui-même ; & ce point est en même temps le centre de percussion de ce corps, ou l'endroit où il choqueroit le plus fortement.

612. C'est ici le lieu de parler des mouvements de rotation que le navire reçoit par l'action des forces qui lui sont appliquées extérieurement : parlons d'abord du gouvernail.

L'action que le choc de l'eau exerce sur chacune des parties du gouvernail pendant un même instant, peut être censée la même, & par conséquent son effort total passera par le centre de gravité L (*Fig.* 121) de ce gouvernail représenté par BD. Si l'on représente par ab la surface de la partie du gouvernail exposée au choc, a étant sa hauteur, b sa largeur BD; que l'on représente par h, la hauteur dûe à la vîtesse actuelle du vaisseau ; par p, la vîtesse que la pesanteur donne, en un seconde de temps, à un corps libre; par e, la densité de l'eau; alors on aura $2\,n\,p\,h\,e\,a\,b\,d\,t\,\sin^2 CEB$ pour le choc ou la quantité infiniment petite de mouvement que ce choc communique pendant un instant dt, suivant la perpendiculaire IE (405) Or comme ce choc se fait suivant une direction qui ne passe point par le centre de gravité G du vaisseau, il occasionnera un mouvement de rotation autour de G. Il peut même à la rigueur, ainsi qu'on le verra par la suite, en produire de plus d'une sorte; mais nous ne nous attacherons qu'à considérer celui qui se fait horisontalement, c'est-à-dire, autour d'un axe vertical passant par G. A ce choc, qui ne produiroit qu'une vîtesse de rotation infiniment petite, il en succede une infinité d'autres pendant la durée de l'évolution, ensorte qu'au bout d'un intervalle de temps fini, le vaisseau tourne avec une vîtesse finie.

Nommons dv la petite vîtesse de rotation que le choc instantané de l'eau fait naître, à chaque inſtant, dans le point S où tombe la perpendiculaire GS ſur IE; (594) nous aurons $dv = \frac{2nphabedt\,ſin^2 CEB \times GS^2}{\int mrr}$. Mais comme notre deſſein eſt de comparer les vîteſſes de rotation dans différents vaiſſeaux, il faut rapporter ces vîteſſes à une même diſtance connue. Nommons donc dv' la petite vîteſſe avec laquelle tourne, pendant le même inſtant dt, un point ſitué à une diſtance fixe & connue, comme de 1 pied; nous aurons $dv : dv' :: GS : 1$; & par conſéquent $dv = dv' \times GS$; ſubſtituant cette valeur au lieu de dv nous aurons . . . . $dv' = \frac{2nphabedt\,ſin^2 CEB \times GS}{\int mrr}$ qui nous fournit les concluſions ſuivantes.

613. Comme les quantités $\int mrr$, $2nphabedt$, reſtent conſtamment les mêmes, pour un même navire cinglant avec la même vîteſſe; l'accroiſſement dv' de la vîteſſe de rotation ne dépend donc que de la diſtance GS, & du quarré du ſinus de l'angle CEB. Or ſi l'on ne veut conſidérer que les évolutions très-petites, on peut regarder l'angle CEB, & la diſtance GS comme ne variant pas ſenſiblement pendant la durée de ces évolutions. Intégrant donc la valeur de dv', dans cette ſuppoſition, on aura

$v' = \frac{2nphabet \, \text{sin}^2 CEB \times GS}{\int mrr}$ qui fait voir que *dans les petites évolutions, la vîtesse de rotation augmente dans le rapport du temps.*

614. Soit z l'arc décrit par le point situé à la distance 1, pendant le temps t de l'évolution; (210) on aura $dz = v' \, dt$, & par conséquent $dz = \frac{2nphabet \, dt \, \text{sin}^2 CEB \times GS}{\int mrr}$; donc en intégrant, on aura . . . . $z = \frac{nphabet^2 \, \text{sin}^2 CEB \times GS}{\int mrr}$, qui renferme d'une maniere générale, le rappport entre les temps des petites évolutions, & l'étendue de ces évolutions.

Donc, pour un autre vaisseau cinglant avec la même vîtesse, & dont l'incidence de l'eau sur le gouvernail seroit la même, on auroit $z' \frac{npha'b'et'^2 \, \text{sin}^2 CEB \times G'S'}{\int m'r'r'}$, en marquant par des lettres accentuées, les quantités analogues à a, b, &c. qui sont différentes d'un vaisseau à l'autre. Par conséquent $z : z' :: \frac{abt^2 \times GS}{\int mrr} : \frac{a'b't'^2 \times G'S'}{\int m'r'r'}$. Donc si l'on veut comparer les durées des évolutions semblables, comme on a, alors, $z = z'$, on aura $\frac{abt^2 \times GS}{\int mrr} = \frac{a'b't'^2 \times G'S'}{\int m'r'r'}$, & par conséquent $t^2 : t'^2 :: \frac{\int mrr}{ab \times GS} : \frac{\int m'r'r'}{a'b' \times G'S'}$.

Concluons

Concluons donc que *les quarrés des temps des petites évolutions semblables de deux vaisseaux quelconques, sont entr'eux comme les exposants des moments d'inertie, divisés par la surface de la partie plongée du gouvernail multipliée par la distance au centre de gravité du vaisseau, à la perpendiculaire suivant laquelle s'exerce le choc de l'eau sur le gouvernail.*

615. Lorsqu'un vaisseau cingle uniformément, l'action du vent sur les voiles n'a plus d'effet pour augmenter le mouvement du vaisseau : elle n'est plus employée qu'à faire équilibre à la résistance de l'eau; ensorte que si l'on suppose que les lignes égales *AB, EG, IL* (*Fig.* 122) représentent la vîtesse du vent, & qu'ayant mené les lignes *AD, EH, IM* paralleles & égales à la vîtesse du vaisseau, on forme les parallélogrammes *DACB, FEHG, MIKL*; les côtés *AC, EF, IK*, marqueront les vîtesses avec lesquelles le vent atteint chaque voile; & les efforts qui en résulteront perpendiculairement à chacune, doivent se réduire à un seul qui soit égal & directement opposé à la résistance de l'eau sur la partie plongée de la carene. Concevons que *TZV* soit la direction de cette résistance; on peut donc alors, si l'on veut, regarder le vaisseau comme un levier sollicité par trois forces

dont les directions sont perpendiculaires aux voiles, qui se font équilibre sur un appui placé à tel point *Z* que l'on voudra de la direction *TV*, tandis que cet appui & tout le systême, sont transportés parallélement à *AD*.

Mais si dans quelque vue que ce soit, on vient à *carguer* quelques-unes des voiles, alors c'est supprimer quelques-unes des forces, qui se faisoient équilibre. Supposons qu'ici on en supprime deux : la force qui s'exerce sur la voile *R S*, & la force *TZV*, dont je suppose que les directions ne passent pas par le centre de gravité, imprimeront à ce centre, un mouvement égal & parallele à leur résultante, lequel combiné avec le mouvement actuel du vaisseau, lui fera changer de route; de plus, ces mêmes forces imprimeront à toutes les parties du vaisseau, un mouvement autour du centre de gravité, qui changeant la position de la voile à l'égard du vent, fera changer la valeur & la direction de la force perpendiculaire à la voile *RS*, & de la force suivant *TV*; ensorte que le centre de gravité changera de route à chaque instant, c'est-à-dire, décrira une ligne courbe, & tous les points du vaisseau tourneront avec des vîtesses qui seront accélérées d'une maniere différente à chaque inſtant. Quoi qu'il en ſoit, l'action totale qui s'exerce alors ſur le vaiſſeau, eſt abſolument de même nature que celle que nous venons de conſidérer à l'occaſion du gouvernail, enſorte que ce que nous avons dit des petites évolutions produites par l'action du gouvernail, s'applique ici mot à mot, pourvu qu'à l'action de l'eau ſur le gouvernail, on ſubſtitue la réſultante de la force ſuivant IK & de la force ſuivant TZV, & qu'à la diſtance GS, on ſubſtitue la diſtance de cette réſultante à l'axe vertical qui paſſe par le centre de gravité. Enſorte que ſi le vaiſſeau étoit en repos, & qu'il fût queſtion de le faire tourner par l'action du vent, il n'y auroit d'autre différence que de changer le mot de gouvernail, en celui de voile, & celui d'eau, en celui de vent.

Dans les petites évolutions produites par la voile ou par le gouvernail, on ne conſidere point la réſiſtance que l'eau oppoſe au mouvement de rotation du vaiſſeau; parce que cette vîteſſe eſt petite à l'égard de la vîteſſe du ſillage, & que la réſiſtance qui, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe, ne peut être qu'inſenſible.

616. Il ſuit de ce que nous avons dé-

montré (614) que l'incidence étant la même, & la position de la surface qui reçoit le choc, aussi la même, *dans les vaisseaux semblables les durées des petites évolutions, sont entr'elles comme les longueurs des vaisseaux*; en effet les quantités $\int m r r$, $\int m' r' r'$ sont entr'elles comme les cinquiemes puissances des longueurs, puisque les solidités des parties semblables m, m', sont comme les cubes des longueurs, & que les distances r & r' sont comme ces mêmes longueurs: de plus, les surfaces $a b$, $a' b'$, sont comme les quarrés des longueurs : enfin l'égalité d'incidence & la similitude des deux corps, rendent $G S$ & $G' S'$, dans le rapport des mêmes longueurs; donc en nommant l & l' ces longueurs, on aura $t^2 : t'^2 :: \frac{l^5}{l^3} : \frac{l'^5}{l'^3} :: l^2 : l'^2$. Et par conséquent $t : t' :: l : l'$; proportion qui a lieu pour la voile comme pour le gouvernail.

617. La valeur $dv' = \frac{2 n p h a b e d t \sin^2 CEB \times GS}{\int m r r}$, fait voir que, toutes choses d'ailleurs égales, la petite vîtesse $d v'$ communiquée par le choc, à chaque instant, varie selon que l'angle d'incidence $C E B$ varie, ainsi que la distance $G S$ qui dépend de cet angle. Mais ce qu'il est à propos d'observer, c'est que le produit $\sin^2 C E B \times G S$ auquel cette

petite vîtesse $d\,v'$ est proportionnelle, a un terme où il est le plus grand qu'il est possible. En effet, si l'on conçoit qu'on mette d'abord le gouvernail ou la voile dans une position telle que le fluide vienne parallélement à sa surface, l'angle *CEB* étant zéro, le produit $\sin^2 CEB \times GS$, & par conséquent la vîtesse dv', devient zéro. Donnant ensuite une autre position, ce produit augmente, mais jusqu'à un certain terme seulement, après lequel il diminue; car si la position qu'on donnera au gouvernail ou à la voile, se trouvoit telle que la perpendiculaire *IE* passât par le centre *G*, alors *GS* & par conséquent le produit seroit zéro. On voit donc qu'entre toutes les positions qu'on peut donner au gouvernail ou à la voile, il y en a une qui est plus propre que toutes les autres à faciliter & à accélérer l'évolution. Pour la trouver, il ne s'agit donc que de chercher quelle est la position du gouvernail ou de la voile, qui rend le produit $\sin^2 CEB \times GS$, le plus grand qu'il est possible; c'est-à-dire (48) d'égaler à zéro, la différentielle de ce produit.

Nommons donc x, l'angle *DBL*; g, l'angle *CLB* que la direction de l'eau ou du vent fait avec la quille; l, la distance *GB* qui, quant il s'agit de la voile, est la distance de G au mât. Menant BO parallele à SE, nous aurons $GO = l \cos x$; & par conséquent $GS = \frac{1}{2} b + l \cos x$. L'angle CEB (*Géom.* 75) est égale à $EBL + GLB = x + g$. Nous aurons donc $\sin^2 CEB \times GS = \sin (x+g) (\frac{1}{2} b + l \cos x)$. Différencions donc (22 & *suiv.*) cette quantité, en regardant x seule comme variable, & égalons la différentielle à zéro. Nous aurons . . $2\,dx \sin (x+g) \cos (x+g) (\frac{1}{2} b + l \cos x) - l\,dx \sin x \sin^2 (x+g) = 0$, ou . . . . . $2 \cos (x+g) (\frac{1}{2} b + l \cos x) - l \sin x \sin (x+g) = 0$, en divisant par $dx \sin (x+g)$.

Pour ne point compliquer inutilement le calcul, nous regarderons b comme nul à l'égard de l; parce qu'en effet, la largeur du gouvernail est très-petite en comparaison de l; & que pour la voile, la direction de l'effort perpendiculaire au vent, passe par le mât, ou très-près du mât, ce qui rend $\frac{1}{2} b = 0$. Nous aurons donc en divisant par l, $2 \cos x (x+g) - \sin x \sin (x+g) = 0$, ou (*Alg.* 418) $\cos (2x+g) + \cos g - \frac{1}{2} \cos g + \frac{1}{2} \cos (2x+g) = 0$; d'où l'on tire $\cos (2x+g) = \frac{-1}{3} \cos g$. Ainsi l'angle g de la dérive, s'il s'agit du gouvernail, ou l'angle g que la direction du vent fait avec la quille, s'il s'agit de la voile, étant donné, il sera facile d'avoir la valeur de $\cos (2x+g)$, par les tables, & par conséquent, aussi celle de $2x+g$, & enfin de x. Sur quoi il faut observer, 1° que la valeur négative $-\frac{1}{3}\cos g$, annonce (*Alg.* 69, & *Géom.* 275) que l'on doit prendre pour $2x+g$, le supplément de ce qu'on auroit s'il y avoit $+\frac{1}{3}\cos g$. 2°. Que comme le cosinus d'un angle appartient, non-seulement à cet angle, mais encore à son supplément à la circonférence entiere, on a une seconde valeur pour $2x+g$, en prenant le supplément de la premiere, à 360°; ensorte que si la premiere valeur étoit de 100°, par exemple, la seconde seroit de 260°. C'est ce qu'on peut voir encore aisément, par la construction de l'équation $\cos(2x+g)=-\frac{1}{3}\cos g$, qui se fera de la maniere suivante.

On fera (*Fig.* 123) l'angle DAE égal à l'angle g; & ayant pris AD d'une grandeur arbitraire, que, pour plus de simplicité, je suppose $=1$, on menera DE perpendiculaire sur AE, ce qui donnera $AE=\cos g$. Au point A on élévera sur AD la perpendiculaire $AC=AD$, & ayant décrit, du point C comme centre, & du rayon CA, la circonférence $AGBS$, on prendra sur le diametre OS parallele à DE, $CI=\frac{1}{3}AE=\frac{1}{3}\cos g$; la perpendiculaire BIG, sur OS, déterminera sur la circonférence, deux points

B & G par lesquels & par le point A tirant BA & GA, on aura les angles BAD, GAD, pour les deux valeurs de x. En effet, l'arc ASG plus grand que 90°, a pour cosinus $-CI$ ou $-\frac{1}{3}cof\,g$; donc $cof\ SAG = cof\ (2x + g)$. Or $SAG = SA + AG = g + AG$, parce que l'angle ACS est égal à DAE, à cause de AC, CS perpendiculaires sur AD, AE; donc $cof\ (AG + g) = cof\ (2x + g)$; donc $AG = 2x$ & $x = \frac{1}{2}AG$; mais la mesure de l'angle GAD est $\frac{1}{2}AG$; donc $x = GAD$. Pareillement, l'arc $SBOG$ supplément de SAG, à la circonférence entiere, ou son égal $SAGOB$, a pour cosinus $-CI$, ou $-\frac{1}{3}cof\,g$; on a donc $cof SAGOB$, ou $cof\ (SA + AGOB)$ ou $cof\ (AGOB + g) = cof\ (2x + g)$; donc $2x = AGOB$; & par conséquent $x = \frac{1}{2}AGOB$ mesure de l'angle BAD.

De ces deux valeurs de x, il n'y a jamais que la plus petite qui puisse convenir au gouvernail, qui ne peut faire, avec la quille, qu'un angle beaucoup au-dessous de 90°, & qui le plus souvent va à peine à 30°. Cette valeur de 30° est beaucoup au-dessous de celle de l'angle que le gouvernail devroit former avec la quille, dans le cas où l'eau le choqueroit suivant des directions paralleles à la quille. En effet, dans ce cas, où

$g=0$, l'équation $cos\,(2x+g)=-\frac{1}{3}\,cos\,g$, se réduit à $cos\,2x=-\frac{1}{3}=-0,33333$. Or dans les tables la quantité $0,33333$ (ou plutôt 33333, car le rayon des tables n'est pas 1, comme on l'a supposé ici, mais bien 100000) est le sinus de $19^\circ\ 28'$; $2x$ seroit donc le complément de $19^\circ\ 28'$, c'est-à-dire, seroit $70^\circ\ 32'$ si l'on n'avoit pas le signe $-$; mais selon ce que nous avons dit, ci-dessus, il faut prendre le supplément de $70^\circ\ 32'$, c'est-à-dire, qu'on a $2x=109^\circ\ 28'$, & par conséquent $x=54^\circ\ 44'$. Ce seroit en effet, l'angle que le gouvernail devroit faire avec le prolongement de la quille, si l'eau choquoit le gouvernail suivant des directions paralleles à la quille. Mais comme l'eau suit assez le contour de la carene, les différents point du gouvernail sont frappés sous des angles différents chacun, de celui sous lequel ils le seroient dans la premiere supposition.

Si l'on imagine que toutes ces différentes incidences, soient réduites à une incidence moyenne, commune à tous les filets d'eau, & si l'on représente par g cette angle d'incidence, il est facile de voir que l'angle x doit être plus petit que $54^\circ\ 44'$. Par exemple, si cet angle g est de 15° qui est un milieu entre 0° angle des filets qui coulent à la profondeur de la quille, & $30°$ angle que forment, avec la quille, les filets qui suivent le contour de la carene à fleur d'eau, on aura $cos\,(2x + 15°) = -\frac{1}{3}\,cos\,15°$; c'est-à-dire, en faisant usage des tables, $cos\,(2x + 15°) = -0,32198$; d'où l'on conclura, par les mêmes tables, $x = 46°\,52'$, angle plus approchant de celui que le gouvernail peut former, dans l'état présent des choses, & qui ne differe que de $12'$ de celui que M. Bouguer a trouvé en entrant dans le détail rigoureux des différentes impulsions faites sur les différentes parties du gouvernail. A l'égard des voiles, les deux valeurs de x peuvent toujours avoir lieu, sauf les difficultés locales qui ne permettent pas toujours de faire former aux voiles un angle aussi grand qu'il le faudroit pour leur faire produire le plus grand effet. De ces deux valeurs (qui sont égales & de $54°\,44'$ chacune, lorsque le vent vient parallélement à la quille) l'une indique la position PQ (*Fig.* 124); l'autre indique une position telle que $P'\,Q'$.

618. Passons à d'autres applications des principes donnés ci-dessus.

Supposons que le corps P (*Fig.* 125) de figure quelconque, soit frappé suivant la direction RD qui ne passe point par le centre de gravité : par ce qui précede, on déterminera donc facilement quel mouvement il prendra, du moins en ſuppoſant, comme nous le faiſons toujours, qu'il ne puiſſe tourner qu'autour d'un ſeul axe. Mais on peut encore déterminer, par les mêmes principes, quel changement apporteroit au mouvement de rotation, l'addition ou la ſouſtraction d'un nouveau poids p, fait en quelque endroit que ce ſoit.

Concevons une droite AB qui paſſe par le centre de gravité G du corps P & qui ſoit fixe à l'égard de ce corps ; menons pG. L'addition du poids p fera que le centre de gravité ne ſera plus en G, mais en quelque autre point G' de la ligne pG.

La puiſſance R qui, ſans l'addition du poids p, auroit fait tourner le corps autour de G, le fera tourner autour de G' : & ſi le point G' eſt plus éloigné de la direction RD de la piſſance R, que ne l'eſt le point G, l'action de cette puiſſance pour faire tourner autour de G' ſera plus conſidérable que celle qu'elle auroit pour faire tourner autour de G. Mais comme la réſiſtance provenant de l'inertie du corps eſt augmentée par l'addition du poids p, & dépend de la diſtance Gp, on voit que l'avantage que la puiſſance peut recevoir par l'addition du poids p, doit avoir des bornes ; enforte qu'il doit y avoir fur chaque ligne Gp, un point où il eft plus avantageux de placer le poids p, que par-tout ailleurs. Déterminons donc ce point.

Nommons v la vîteffe que doit prendre un point fitué à la diftance 1, à l'égard de G'; & nommons r' la diftance d'une particule quelconque de P, au même point G; menons les perpendiculaires GS, GS'. Selon ce qui a été dit (594), on aura .....
$v = \frac{R \times G'S'}{\int m r' r' + p \times \overline{pG'}^2}$ *. Mais nous avons vu (598) que $\int m r' r' = \int m r r + P \times \overline{GG'}^2$, r étant la diftance d'une particule quelconque au centre de gravité G du corps P; on a donc
$v = \frac{R \times G'S'}{\int m r r + P \times \overline{GG'}^2 + p \times \overline{pG'}^2}$. Déterminons donc GG', pG' & $G'S'$.

Prolongeons pG jufqu'à ce qu'elle rencontre RD en I, & nommons h, l'angle pIR; nommons pG, z. Par la nature du centre de gravité (270) nous aurons $P \times GG'$ $= p \times pG'$, & par conféquent $GG' = \frac{p}{P} \times pG'$; donc $pG = pG' + GG' = pG' + \frac{p}{P}\, pG' =$

* Nous mettons fimplement $p \times \overline{pG'}^2$: à la rigueur, il faudroit mettre la fomme des produits des particules de p, par les quarrés de leurs diftances à G'; mais nous fuppofons que le poids p eft petit à l'égard de P.

$\frac{P+p}{p} \times p\,G'$; d'où l'on tire $p\,G' = \frac{P}{P+p}\,p\,G = \frac{P}{P+p}\,z$; & par conséquent $G'G = \frac{p}{P+p}\,z$. Donc $P \times \overline{GG'}^2 + p \times \overline{p\,G'}^2 = \frac{Pp^2}{(P+p)^2}\,zz + \frac{pP^2}{(P+p)^2}\,zz = \frac{Pp\,(P+p)}{(P+p)^2}\,zz = \frac{Pp}{P+p}\,zz = Pnzz$, en faisant $\frac{p}{P+p} = n$.

A l'égard de $G'S'$; nommons, c, la perpendiculaire GS, & menons GK parallele à RD. Le triangle rectangle $G'GK$, dans lequel l'angle $G'GK = h$, nous donnera $G'K = GG' \sin h = nz \sin h$ en supposant le rayon $= 1$. Donc $G'S' = GS + G'K = c + nz \sin h$.

Substituons ces valeurs dans celle de v, & nous aurons $v = \frac{R \times (c + nz \sin h)}{\int mrr + Pnz^2}$, ou $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \sin h}{\frac{\int mrr}{P} + nz^2}$; mais si l'on appelle e la distance de G au centre spontané C de rotation (609), on aura $ce = \frac{\int mrr}{P}$; donc enfin $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \sin h}{ce + nz}$.

On voit donc que la position du poids p, peut faire varier la vîtesse de rotation par deux causes ; la premiere, par le changement de l'angle h, ou de l'inclinaison de $p\,G$ à RD;

la ſeconde, par le changement de la diſtance pG ou z.

Voyons d'abord, entre tous les points d'une même ligne pG, quel eſt celui où le poids p étant placé, rendra la vîteſſe de rotation la plus grande qu'il eſt poſſible. Il ne s'agit, pour cela, (48) que de différencier la valeur de v, en ſuppoſant z variable, & d'égaler cette différentielle à zéro. On aura donc $\frac{R}{p} \frac{[ndz\,\sin h(ce+nz^2)-(c+nz\sin h)2nzdz]}{(ce+nz^2)^2}$ $= 0$, ou après les opérations & les réductions ordinaires, $ce\sin h - nz^2\sin h - 2cz = 0$, équation du ſecond degré, qui étant réſolue *(Alg. 100)* donnera $z = -\frac{c}{n\sin h} \pm \sqrt{\frac{ce}{n^2\sin^2 h}+\frac{ce}{n}}$, ou $z = \frac{1}{n}\left(\frac{-c}{\sin h} \pm \sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h}+nce}\right)$.

Ces deux valeurs que l'on trouve, en même-temps, pour z, font voir qu'il y a ſur chaque ligne pG prolongée ſuffiſamment, deux points où l'on doit placer le poids p, pour qu'il favoriſe plus le mouvement de rotation, ou qu'il lui nuiſe moins qu'il ne le feroit ſur tout autre point de la même ligne.

Mais ces deux points répondent à deux cas différents dont la queſtion préſente eſt ſuſceptible, enviſagée généralement. En effet, le poids additionnel p, peut être tellement placé que le centre commun de gravité G' (*Fig.* 125) se trouve, ainsi que nous l'avons supposé, de même côté que G par rapport à la direction de la force R, & alors la valeur de z est $\frac{1}{n}\left(-\frac{c}{\sin h}+\sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h}+nce}\right)$.

Mais le poids p peut encore être placé (*Fig.* 126) de maniere que les deux centres de gravité G & G' se trouvent de différents côtés de la direction RD; alors la valeur de z est . . . .
$\frac{1}{n}\left(-\frac{c}{\sin h}-\sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h}+nce}\right)$.

La premiere position, déterminée par la premiere valeur de z, donnera toujours un mouvement de rotation plus prompt que si le poids p n'eût pas été ajouté : & la seconde au contraire le donnera plus petit. En effet, si l'on substitue pour z, ces deux valeurs, dans l'expression générale . . . . . $v=\frac{R}{P}.\frac{c+nz\sin h}{ce+nz^2}$ de la vîtesse de rotation, que l'on réduise, & que l'on divise ensuite, haut & bas, par $\sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h}+nce}$, on aura $v=\frac{R}{P}\times\frac{\pm n\sin h}{\sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h}+nce\mp\frac{2c}{\sin h}}}$; or en prenant le signe supérieur, la valeur de v est plus grande que $\frac{R}{P}.\frac{1}{e}$ qui exprime la vîtesse de rotation, lorſqu'on ſuppoſe p & par conſéquent $n = o$ dans la valeur générale de v. En effet, ſi l'on ſuppoſoit . . . . . .

$$\frac{n \sin h}{2\sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h} + nce - \frac{2c}{\sin h}}}$$ plus petit que $\frac{1}{e}$, il faudroit (en multipliant tout par le premier dénominateur) que $n \sin h$ fût plus petit que $\frac{2}{e}\sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h} + nce - \frac{2c}{e \sin h}}$, ou que $n \sin h + \frac{2c}{e \sin h}$ fût plus petit que $\frac{2}{e}\sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h} + nce}$, ou en quarrant & ſupprimant les termes communs de part & d'autre, il faudroit que $n^2 \sin^2 h$ fût plus petit que zéro ; ce qui n'eſt pas poſſible. Il n'en eſt pas de même en employant la ſeconde valeur de z, qui d'ailleurs donne un mouvement de rotation en ſens contraire.

Puiſque le dénominateur de la valeur réduite de v, n'eſt autre choſe que $2nz$, on a donc pour la plus grande valeur de v, $v = \frac{R}{p} \times \frac{n \sin h}{2nz}$; & puiſque cette valeur eſt plus grande que $\frac{R}{p} \cdot \frac{1}{e}$, il s'enſuit donc que $\frac{n \sin h}{2nz}$ eſt plus grande que $\frac{1}{e}$, & que par conſéquent z eſt plus petit que $\frac{e}{2} \sin h$. Donc en général, quelle que ſoit la poſition de la ligne

ligne $p\,G$ (*Fig.* 125) ſur laquelle on veut placer le poids p; pour qu'il ne nuiſe point à la vîteſſe de rotation, il faut qu'il ſoit placé à une diſtance de G moindre que la moitié de la diſtance du centre ſpontané de rotation, multipliée par le ſinus de l'inclinaiſon de $p\,G$ à l'égard de la direction de la puiſſance R: & le point où il favoriſera le plus la vîteſſe de rotation, eſt déterminé par la valeur . .

$$z = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{\sin h} + \sqrt{\frac{cc}{\sin^2 h} + nce}\right).$$

A l'égard de la ſeconde valeur de z, quoiqu'elle donne une vîteſſe de rotation plus petite que ſi le poids p n'étoit pas ajouté, elle n'indique pas moins un *maximum*. Elle fait connoître, dans le cas de la figure 126, l'endroit où le poids p devroit être placé pour nuire le moins qu'il eſt poſſible à la vîteſſe de rotation.

Tout ce que nous venons de dire, eſt indépendant de la poſition de la ligne $p\,G$ Mais ſi l'on demande ſi entre toutes les lignes pG, il n'y en a pas une ſur laquelle il eſt plus avantageux de placer le poids p, que ſur toute autre, l'inſpection de la valeur générale de v, ſavoir $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz\sin h}{ce + nz^2}$, fait voir qu'en effet il y en a une. Car cette quantité (z reſtant le même) croît à meſure que l'angle h augmente, mais ſeulement juſqu'à ce qu'il ſoit arrivé à 90°; après quoi elle diminue (*Geom.* 273); donc la poſition la plus avantageuſe, eſt ſur la perpendiculaire menée par le centre de gravité G du corps P (*Fig.* 125) ſur la direction de la force R. Alors la valeur de z (puiſque $\sin h = 1$) ſe réduit à $z = \frac{1}{n}\left(-c + \sqrt{cc + nce}\right)$.

L'application de ceci au vaiſſeau, eſt évidente. Suppoſons que RD (*Fig.* 125) repréſente la direction ſuivant laquelle l'eau exerce ſon action ſur le gouvernail (en imaginant le point D au-delà de B par rapport à G), on voit que pour faciliter cette action, il faut que les parties de la charge ſoient raſſemblées en plus grande quantité vers l'avant que vers l'arriere. On voit auſſi comment l'addition d'un poids peut faciliter l'action du vent ſur les voiles, comment & en quels endroits cette addition doit être faite.

Concevons que le vaiſſeau ait une figure telle que le repréſente la figure 127, c'eſt-à-dire parfaitement ſymmétrique, enſorte que le centre de gravité ſoit préciſément au milieu de la longueur; on voit donc qu'il feroit moins ſenſible à l'action du gouvernail & des voiles de l'arriere, que ſi la charge étoit plus considérable de G vers A que de G vers B. C'est une des raisons pour lesquelles on porte le centre de gravité des vaisseaux, plus vers l'avant que vers l'arriere.

619. Si au lieu d'ajouter un poids p, on le retranchoit au contraire; pour savoir quel changement cela occasionneroit dans le mouvement de rotation, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer p, & par conséquent n, négatif dans la valeur générale $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \sin nh}{ce + nz^2}$; ce qui la changera en . . . $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c - nz \sin h}{ce - nz^2}$, dans laquelle $n = \frac{p}{P - p}$, & qui suppose toujours que le poids p est pris au-delà de G par rapport à la direction RD. Mais si on le prend en-deçà, alors z étant négatif, on a $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \sin h}{ce - nz^2}$.

Par cette expression de v, on voit que tant que ce est plus grand que nz^2, ou tant que z est plus petit que $\sqrt{\frac{ce}{n}}$, la vîtesse v est toujours plus grande que si l'on ne retranchoit pas le poids p; ensorte que lorsque $ce - nz^2 = 0$, ou lorsque $z = \sqrt{\frac{ce}{n}}$, cette vîtesse devient infinie. Passé ce terme, la vîtesse va en diminuant, & a lieu en sens contraire, puiſque $ce - nz^2$ devenant alors négatif, la valeur de v devient négative. On voit donc que la ſuppreſſion d'un poids faite du même côté que la puiſſance, par rapport au centre de gravité, favoriſe le mouvement de rotation, pourvu qu'on ne le prenne pas à une diſtance plus grande que $\sqrt{\frac{ce}{n}}$. Or comme n eſt ſuppoſé une quantité fort petite, $\sqrt{\frac{ce}{n}}$ eſt fort grande : enſorte que dans les vaiſſeaux, on doit toujours, lorſqu'on veut ſupprimer quelque partie de la charge, la prendre le plus loin du centre de gravité qu'il eſt poſſible.

Pour juger d'un ſeul coup d'œil, de tous les changements que l'addition ou la ſouſtraction d'un poids peut apporter au mouvement de rotation, il faut ſe repréſenter l'équation qui exprime la valeur de v, comme étant celle d'une ligne courbe, dans laquelle z marque les abſciſſes & v les ordonnées. Alors s'il s'agit d'un poids ajouté, l'équation $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \sin h}{ce + nz^2}$, fait voir que tant que z eſt poſitive, v eſt poſitive, mais qu'après avoir augmenté juſqu'à un certain terme, elle diminue juſqu'à devenir zéro, lorſque z eſt infini; enſorte que du côté des z poſitives, la courbe a la figure que l'on voit de B vers D (*Fig.* 128). Mais du côté des z négatives, v va d'abord en diminuant juſqu'à devenir zéro, lorſque $c + nz \sin h = 0$, ou que $z = \frac{-c}{n \sin h}$; après quoi v devient négative, mais augmente de valeur, juſqu'à un certain terme, paſſé lequel elle diminue juſqu'à devenir zéro, lorſque z eſt infinie & négative, enſorte que du côté des z négatives la courbe a la figure $BCEF$. On voit donc qu'il y a en effet, deux *maximum*, ainſi que nous l'avons dit (618); cependant M. Bouguer, (*Manœuvre des Vaiſſeaux*, page 351) ſemble regarder la ſolution qui répond à une des deux valeurs de z que nous avons trouvées (618) comme appartenant à un *minimum*.

Dans le cas où le point p est retranché, la valeur......... $v = \frac{R}{P}\left(\frac{c + nz \sin h}{ce - nz^2}\right)$, qui convient au cas de z négatif, fait voir que v croît tant que z est négative jusqu'à ce que $ce - nz^2 = 0$, ou que $z = \sqrt{\frac{ce}{n}}$, auquel cas v est infinie : z, toujours négative, devenant plus grande, v devient négative, & diminue jusqu'à devenir zéro lorsque z est infinie ; ainsi, du côté des z négatives la courbe aura toujours la figure que l'on voit sur la droite de AB (*Fig.* 129 & 130); c'est-à-dire, s'élevera à l'infini de B vers D ; AI étant $\sqrt{\frac{ce}{n}}$; & au-delà de I elle s'étend à l'infini le long de AR & de IS.

Mais du côté des z positives, sa figure varie selon les deux cas qui peuvent avoir lieu. Comme alors on a $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c - nz \sin h}{ce - nz^2}$, il peut se faire que $ce - nz^2$ devienne zéro, avant ou après que $c - nz \sin h$ sera devenu zéro. Dans le premier cas la courbe se continue par une branche BCF (*Fig.* 129) qui s'étend à l'infini au-dessus de IK, mais sans s'éloigner de A parallélement à AK, plus loin que $\sqrt{\frac{ce}{n}}$. En outre, lorsqu'on donne à z une valeur plus grande que AK ou $\sqrt{\frac{ce}{n}}$, la valeur de v devient négative jusqu'à ce que $c - nz \sin h$ devienne zéro, c'est-à-dire, jusqu'à ce que $z = \frac{c}{n}$. Passé ce terme, v devient positive, augmente jusqu'à un certain terme L ; puis diminue jusqu'à devenir zéro, lorsque z sera infinie. On voit donc que si l'on différencie la valeur de v, & qu'on en égale la différentielle à zéro ; des deux valeurs que l'on trouvera pour z, l'une indique un *minimum* qui répond au point C, & l'autre un *maximum* qui répond au point L.

Mais si $c - nz \sin h$ devient zéro avant $ce - nz^2$: alors, par un examen semblable, on verra que du côté des z positives, la courbe aura la figure marquée (*Fig.* 130) par les branches infinies BCF, EO, enforte qu'il n'y aura ni *minimum* ni *maximum* autre que zéro & l'infini.

620. Si au lieu d'ajouter, ou de retrancher un poids p, on ne fait que le déplacer, alors voici comment on déterminera les changements que ce déplacement occafionnera à la vîteffe de rotation.

Suppofons qu'on l'ôte en p, pour le placer en p' (*Fig.* 131). En ôtant le poids, en p, le centre de gravité G vient en g fur le prolongement de pG; & l'on a $P-p : p :: pG : gG$. Enfuite, lorfqu'on place ce poids en p', le centre de gravité vient en g' fur $p'g$, enforte qu'on a $P-p : p :: p'g' : g'g$; donc fi l'on mene pp' & Gg', ces deux lignes feront paralleles, (*Géom.* 105), puifqu'il fuit delà que $pG : Gg : p'g' : gg$.

Cela pofé, fi de g' on abaiffe la perpendiculaire $g'S'$ fur la direction RD de la puiffance R, on aura (594), en attribuant à v la même fignification que ci-deffus.................

$$v = \frac{R \times g'S'}{\int mrr + P \times \overline{Gg'}^2 - p \times \overline{pg'}^2 + p \times \overline{p'g'}^2}.$$ Déterminons donc Gg', pg', $p'g'$, & $g'S'$.

On vient donc de voir que $P-p : p :: pG : Gg$; donc $P : p :: pg : Gg$; or les triangles femblables $pp'g$, $Gg'g$, donnent $pg : Gg :: pp' : Gg'$; donc $P : p :: pp' : Gg'$; donc $Gg' = \frac{p}{P} \cdot pp'$. Des points p & p', abaiffons fur Gg', les perpendiculaires ps, $p't$. Nous aurons (*Alg.* 259) $\overline{pg'}^2 = \overline{pG}^2 + \overline{Gg'}^2 + 2\,Gg' \times Gs$ & $\overline{p'g'}^2 = \overline{p'G}^2 + \overline{Gg'}^2 + 2\,Gg' \times Gt$. Donc $\overline{pg'}^2 - \overline{p'g'}^2 = \overline{pG}^2 - \overline{p'G}^2 + 2\,Gg' \times pp'$, parce que $Gs - Gt = st = pp'$. Ainfi la valeur de v devient.............

$$v = \frac{R \times g'S'}{\int mrr + \frac{p^2}{P} \cdot \overline{pp'}^2 + p\,(\overline{p'G}^2 - \overline{pG}^2) - 2\,p \times Gg' \times pp'},$$

ou, en mettant pour Gg' fa valeur, & réduifant.........

$$v = \frac{R \times g'S'}{\int mrr + p\,(\overline{p'G}^2 - \overline{pG}^2) - \frac{pp}{P} \cdot \overline{pp'}^2}.$$ Or comme nous fuppofons le poids p fort petit en comparaifon de P, on peut omettre le terme $\frac{pp}{P} \times \overline{pp'}^2$, & l'on aura fimplement

$$v = \frac{R \times g'S'}{\int m r r + p\,(\overline{p'G}^2 - \overline{pG}^2)}.$$

Reste donc à déterminer $g'S'$. Or si par le centre de gravité G du corps P, on mene Kn parallele à la direction RD de la force R (*Fig.* 132), & que des points g, g', p', on mene sur Kn les perpendiculaires gl, $g'q$, $p'n$; on aura, par la nature du centre de gravité, $(P - p)\,gl - p \times p'n = P \times g'q$. Or si l'on nomme h, l'angle $pGK = gGq$; h', l'angle $p'GK$; on aura $gl = Gg\,\sin h$, c'est-à-dire, $= \frac{p}{P-p} \times pG \sin h$, puisqu'on a trouvé ci-dessus $P - p : p :: pG : Gg$. Pareillement on aura $p'n = p'G \sin h'$; donc on aura...... $g'q = \frac{p \times pG \sin h - p \times p'G \sin h'}{P}$; donc en nommant la ligne GS, c, on aura $g'S' = c - \frac{p}{P}(pG \sin h - p'G \sin h')$. Donc enfin, nommant pG, z; $p'G$, z'; substituant pour $\frac{\int m r r}{P}$ sa valeur ce, & faisant $\frac{p}{P} = n$, on aura.........

$$v = \frac{R}{P}.\frac{(c - nz\sin h + nz'\sin h')}{ce + nz'^2 - nz^2}.$$

A l'inspection de cette valeur de v, on voit que pour que v ait la plus grande valeur possible, il faut (z & z' restants, chacun, le même), que $\sin h = -1$, & $\sin h' = 1$; c'est-à-dire, que le poids p doit être ôté sur la perpendiculaire menée de G sur la direction de la force R, en de-çà de G, par rapport à R, & porté au-delà. Alors la valeur de v devient $v = \frac{R}{P}.\frac{(c + nz + nz')}{ce + nz'^2 - nz^2}$. Et si l'on veut avoir le rapport des distances z & z' pour que v soit la plus grande qu'il est possible, il n'y a qu'à différencier cette valeur de v en faisant z & z' variables, & égaler, séparément, à zéro, ce qui multipliera dz, & ce qui multipliera dz'. On parviendra à une équation du quatrieme degré pour avoir z, comme pour avoir z'. Mais si l'on veut regarder z ou z' comme donné, alors on différenciera en regardant z' ou z seule comme variable, & l'on n'aura qu'une équation du second degré à résoudre.

Il y a une infinité de points où un poids qu'on ajouteroit, ou qu'on retrancheroit, ou qu'on tranſpoſeroit, peut être placé de maniere à donner en chaque point le même mouvement de rotation. Tous ces points ſont placés ſur la circonférence d'un cercle. Par exemple, s'il s'agit d'un poids qu'on ajoute ; comme la valeur de v eſt $v = \frac{R}{P}\left(\frac{c + nz \sin h}{ce + nz^2}\right)$; ſi l'on demande tous les points où le poids p (*Fig.* 133) peut être placé de maniere que la vîteſſe de rotation reſte la même que lorſqu'on le place à une diſtance connue $GS = b$, & ſur une ligne qui faſſe avec la direction RD, un angle connu a; on aura $\frac{R}{P}\left(\frac{c + nz \sin h}{ce + nz^2}\right) = \frac{R}{P}\left(\frac{c + nb \sin a}{ce + nb^2}\right)$, ou $\frac{c + nz \sin h}{ce + nz^2} = \frac{c + nb \sin a}{ce + nb^2}$. Or ſi l'on mene ſur GK parallele à RD, la perpendiculaire pq; & qu'on nomme pq, y; & Gq, x; on aura $y = z \sin h$, & $zz = yy + xx$, donc $\frac{c + ny}{ce + n(xx + yy)} = \frac{c + nb \sin a}{ce + nb^2}$; équation au cercle (*Alg.* 384).

Si lorſqu'on ne veut que tranſpoſer le poids p, on le partage en deux parties égales, pour les placer ſymmétriquement de part & d'autre de pG; alors la courbe ſur les points de laquelle ils peuvent être placés indifféremment, eſt une ellipſe : cela eſt aiſé à voir en déterminant la valeur générale de v, dans cette ſuppoſition ; ce qui eſt facile après tout ce qui précéde.

Des Poulies, des Mouſles, Palans, Caliornes, &c.

621. On connoît aſſez la figure de la poulie pour qu'il ſoit ſuperflu d'en donner ici la deſcription.

On peut réduire toutes les différences eſpeces de poulies, à deux; ſavoir, la poulie *fixe* ou de *renvoi*, & la poulie *mobile*.

La poulie fixe (*Fig.* 134 & 135) eſt celle dans laquelle la puiſſance & le fardeau, ou l'obſtacle qu'elle doit vaincre, ſont appliqués tous deux ſuivant des directions tangentes à la circonférence de la poulie.

La poulie mobile (*Fig.* 136, 137 & 138) eſt celle dans laquelle le fardeau ou l'obſtacle eſt appliqué au centre, ou ſuivant une direction qui paſſe par le centre ou par l'axe de la poulie.

A conſidérer généralement la poulie, cette machine eſt ſuſceptible de deux ſortes de mouvements; l'un par lequel la corde qui paſſe dans la *gorge* de la poulie, c'eſt-à-dire, qui embraſſe la poulie, peut changer de place, ſans pour cela que le corps de la poulie ſoit déplacé; l'autre par lequel le corps de la poulie peut changer de ſituation. Ainſi l'équilibre dans cette machine, eſt aſſujetti à deux conditions abſolument diſtinctes: la premiere, que les tenſions des deux parties de la corde qui embraſſe la poulie, ſe détruiſent mutuellement; & pour cet effet, elles doivent être égales, quelle que ſoit d'ailleurs, la courbure de la poulie (555). La ſeconde condition ſe déduit de cette premiere, de la maniere ſuivante.

622. Des tenſions des deux cordons qui embraſſent la poulie, il réſulte ſur le corps

de cette machine, un effort que l'on déterminera en prenant ſur les directions des cordons, à compter de leur point de concours (*Fig.* 134, 135 & 136), les parties égales IA, IB, & formant le parallélogramme $IADB$ dont la diagonale ID repréſentera l'effort qui s'exerce ſur le corps de la poulie, en ſuppoſant que IA repréſente la tenſion du cordon OP (*Fig.* 134 & 135) ou OG (*Fig.* 136). Or à cauſe des tangentes IR, IO, & des lignes égales IB, IA, il eſt facile de voir que ID prolongée, paſſe par le centre C de la poulie. Donc ſi le corps de la poulie n'eſt pas fixement aſſujetti, ID ne peut être détruit qu'autant que l'obſtacle quelconque qui doit empêcher le mouvement du corps de la poulie, ſera placé ſur quelque point de la ligne IC qui va du centre C, au point de concours des deux cordons qui embraſſent la poulie. Ainſi, ſi la poulie eſt deſtinée à tourner dans une chappe CG fixée à un point extérieur G (*Fig.* 135), & ſi cette chappe peut tourner autour de G, il n'y aura équilibre que lorſque la chappe CG ſera dirigée ſuivant CI.

Pareillement, ſi le corps de la poulie étant embraſſé par une corde fixée au point G (*Fig.* 136) eſt mobile, il n'y aura équilibre que lorsque l'effort appliqué au centre C ou à la chappe fixée à ce centre, divisera en deux parties égales, l'angle des deux cordons OG, RQ, & que cet effort sera à la tension de chacun des deux cordons $OG, RQ :: ID : IA : IB$.

623. D'après cela, il est facile de trouver le rapport des tensions de chacun des deux cordons qui embrassent la poulie, à l'effort qui en résulte sur le corps de la poulie, & par conséquent à l'effort dont la poulie mobile (*Fig.* 136) est capable. La tension de chaque cordon étant représentée par IA ou son égale IB, l'effort qui s'exerce sur le corps de la poulie est exprimé par ID. Or dans le triangle $IAD, IA : ID :: \sin IDA : \sin IAD$, ou $:: \sin CIQ : \sin OAD$ ou $\sin GIQ$; on peut donc dire en général que *dans l'équilibre à l'aide de la poulie simple, fixe ou mobile, 1° les tensions des deux cordons qui embrassent la poulie, ou les puissances appliquées à ces cordons, sont égales. 2° Chacune de ces puissances, est l'effort qui se fait sur le centre de la poulie, comme le sinus de la moitié de l'angle que forment ces deux cordons, est au sinus de cet angle entier.*

Ainsi, dans la poulie fixe (*Fig.* 134 & 135), la puissance Q n'a d'autre avantage que celui de pouvoir changer à volonté la direction de ſon action. Mais dans la poulie mobile (*Fig.* 136, 137 & 138) la puiſſance Q a le double avantage de pouvoir changer ſa direction & augmenter l'effet de ſon action. Mais il faut remarquer qu'à meſure que ſa direction change, l'effort qu'elle exerce ſur le centre varie, enſorte qu'il y a une direction ſelon laquelle cet effort eſt le plus grand qu'il eſt poſſible, & c'eſt lorſque les deux cordons GO, RQ ſont paralleles, qu'on va le voir.

624. Si l'on mene les rayons OC, CR (*Fig.* 136) & la ſoutendante OR, le triangle OCR aura ſes côtés perpendiculaires ſur ceux du triangle BID, & lui ſera par conſéquent ſemblable; on aura donc $IB : ID :: CR : OR$, c'eſt-à-dire, $Q : P :: CR : OR$; donc en général, *la tenſion d'un des cordons eſt à l'effort que ſupporte le centre, comme le rayon de la poulie, eſt à la ſoutendante de l'arc embraſſé par la corde.*

Or il eſt évident que ce dernier rapport eſt le plus grand qu'il eſt poſſible, & devient celui de 1 à 2, quand les cordons ſont paralleles; donc dans la poulie mobile la puiſſance eſt la plus petite qu'il eſt poſſible, lorſque les cordons ſont paralleles; & elle eſt alors, la moitié du poids ſoutenu par le centre de la poulie, On fait uſage de cette ſeconde eſpece de poulie pour tendre les voiles en les tirant par leurs *points* ou angles C; voyez (*Fig.* 138).

625. Donc ſi le poids P (*Fig.* 139) eſt ſoutenu par la puiſſance Q, à l'aide de pluſieurs poulies mobiles embraſſées, chacune par un cordon dont une extrémité ſoit arrêtée à un point fixe, & l'autre à la chappe de la poulie voiſine, le rapport de la puiſſance au poids, ſera celui du produit des rayons de toutes les poulies mobiles, au produit des ſoutendantes des arcs embraſſés par les cordes.

En effet, ſi l'on appelle N & M les charges des centres des deux poulies N & M, qui ſont en même temps les tenſions des deux cordons attachés aux centres N & M, & qu'on appelle r, r', r'', les rayons, & s, s', s'' les ſoutendantes des poulies N, M, L; on aura (624) $Q : N :: r : s$; $N : M :: r' : s'$; $M : L$ ou $P :: r'' : s''$; donc en multipliant par ordre, & ſupprimant les facteurs communs aux deux termes du premier rapport, on aura $Q : P :: r\,r'\,r'' : s\,s'\,s''$. Et ſi les cordons ſont paralleles, ce qui donne $s = 2\,r$, $s' = 2\,r'$, $s'' = 2\,r''$, on aura $Q : P :: r\,r'\,r'' : 2\,r \times 2\,r' \times 2r'' ::$ $1 : 2 \times 2 \times 2$, c'eſt-à-dire, que la puiſſance ſera au poids, comme l'unité eſt au nombre 2 élevé à une puiſſance marquée par le nombre des poulies mobiles : par exemple, avec trois poulies, la puiſſance Q ſoutiendroit 8 fois ſa valeur.

626. Mais cette diſpoſition de poulies n'eſt pas la plus commode : on emploie plus ordinairement celles qui ſont repréſentées dans les figures 140, 14 , 142, 143, 144 & 145, auxquelles on donne le nom de *Mouſles*, *Palans*, *Caliornes ;* ce ſont pluſieurs aſſemblages de poulies toutes embraſſées par une même corde, dont les unes ſont fixes & les autres mobiles. Toutes les poulies fixes ſont portées ſur une même chappe, & toutes les poulies mobiles ſur une ſeule autre chappe. Tantôt (*Fig.* 140, 141, 142 & 143) leurs centres ſont diſtribués ſur différents points de cette chappe; tantôt (*Fig.* 144) ils ſont tous ſur un même axe.

Quelque différence qu'il y ait dans ces diſpoſitions particulieres, on peut toujours trouver le rapport de la puiſſance au poids, par ce principe : *La puiſſance eſt au poids comme le rayon ou ſinus de 90°, eſt à la ſomme des ſinus des angles que ſont avec l'horiſontale chacun des cordons aboutiſſants à la mouſle mobile.*

En effet, ſi ſur chacun de ces cordons (*Fig.* 140 & 141) on prend les parties égales im, np, &c. pour repréſenter leur tenſion, & que ſur chacune de ces lignes comme diagonale, on forme un parallélogramme dont deux côtés ſoient verticaux, & les deux autres horiſontaux; au lieu de conſidérer le poids P, comme ſoutenu par les tenſions immédiates des cordons, on pourra le conſidérer comme ſoutenu, par le concours des forces horiſontales ik, no, &c, & des forces verticales il, nq, &c. Or les premieres étant perpendiculaires à la direction de l'action du poids, ne contribuent point à contrebalancer cette action; & dans l'équilibre elles ſe détruiront mutuellement; le poids P n'eſt donc ſoutenu que par la réſultante, c'eſt-à-dire, par la ſomme des forces verticales il, nq, &c. Or dans les triangles rectangles iml, nqp, &c, on a $im : il :: 1 : \sin iml$; np ou $im : nq :: 1 : \sin npq$; & ainſi des autres cordons; donc $il = im \sin iml$; $nq = im \sin npq$; donc enfin $Q : P :: im : im \sin iml + im \sin npq +$ &c, ou $:: 1 \sin iml + \sin npq +$ &c.

Si les cordons ſont paralleles, & par conſéquent verticaux, les angles iml, npq, &c, ſeront droits, & par conſéquent leurs ſinus ſeront, chacun, égal au rayon 1. Donc alors la puiſſance ſera au poids comme 1 eſt à la ſomme d'autant d'unités qu'il y a de cordons aboutiſſants à la mouſle mobile.

D'où l'on voit que *si une des extrémités de la corde est attachée à la moufle fixe* (Fig. 140 & 142), *la puissance sera au poids, comme l'unité est au double du nombre des poulies de la moufle mobile. Et si l'extremité de la corde est attachée à la moufle mobile* (Fig. 141 & 143) *la puissance sera au poids, comme l'unité est au double du nombre des poulies de la moufle mobile, augmenté d'une unité.*

627. La proposition générale que nous venons de démontrer, a lieu soit que les cordons soient ou ne soient pas dans un même plan. Et si l'obstacle que l'on a dessein de forcer en faisant usage des moufles ou palans, n'étoit pas un poids; c'est-à-dire, si la direction de l'effort total de la moufle n'étoit pas verticale, cette proposition n'auroit pas moins lieu, en substituant aux angles que les cordons étoient supposés faire avec le plan horisontal, ceux qu'ils font avec le plan perpendiculaire à l'effort total de la moufle. Par exemple, dans la figure 145 la puissance Q est à l'effort qui se fait en G, comme le rayon est à la somme des sinus des angles que chacun des cordons aboutissants à la moufle EF font avec un plan perpendiculaire à FG.

628. Si l'on emploie plusieurs moufles tant fixes que mobiles, il sera encore facile,

cile, d'après ce qui précede, d'avoir le rapport de la puiſſance au poids. Par exemple, dans la figure 145, les cordons étant ſuppoſés paralleles, la puiſſance *Q*, eſt à l'effort qui ſe fait ſuivant *CB* (626) : : 1 : 5; or ce dernier effort fait l'office de puiſſance à l'égard de l'équipage *BA*; il eſt donc à l'égard du poids *P*, comme 1 : 4; donc (en multipliant par ordre) la puiſſance *Q* eſt au poids *P* : : 1 : 20; ainſi, un effort de 50 ℔, par exemple, ſoutiendroit un poids de 1000 ℔.

629. Dans tout ce qui précede, nous avons fait abſtraction de la peſanteur des poulies, chappes, &c, du frottement, & de la roideur des cordes. Nous verrons plus bas comment on doit avoir égard à ces deux dernieres ſortes de réſiſtance. A l'égard de la peſanteur des parties mobiles que la puiſſance doit ſoutenir, la maniere d'y avoir égard dans le cas de l'équilibre, eſt de comprendre leur valeur totale dans celle du poids *P*, lorſque (*Fig.* 142 & 143) l'action totale de leur poids coïncide avec celle de *P*; mais ſi comme on le voit (*Fig.* 145) la peſanteur de l'équipage *CF* ne s'exerce pas ſuivant la même ligne *BC*, ſuivant laquelle s'exerceroit l'effort de cet équipage ſans la peſanteur; alors *BC* n'eſt plus dans

X

cette derniere direction, mais dans la direction de la résultante de la pesanteur de cet équipage, & de l'effort qu'il feroit sans la pesanteur; mais comme cet objet est de peu de considération dans les cas où l'on emploie les poulies de cette maniere; nous n'entrerons pas dans l'examen du rapport exact qu'il y a alors entre la puissance & le poids.

630. A l'égard du mouvement dans la poulie, nous n'examinerons ici que celui qu'elle donne au poids *P*, lorsque les cordons sont paralleles. Or il est évident que dans la poulie fixe & simple, (*Fig.* 134) le poids *P* ne peut avoir que la même vîtesse que la puissance *Q*; & dans la poulie simple & mobile (*Fig.* 137) le poids va deux fois moins vîte que la puissance. Dans les moufles, les cordons étant paralleles, la vîtesse du poids est à celle de la puissance, comme la puissance est au poids dans le cas de l'équilibre. Car il est évident que si la moufle mobile (*Fig.* 142 *& suiv.*) a monté d'un pied, par exemple, chacun des cordons aboutissants à cette moufle s'est accourci d'un pied; donc celui auquel la puissance est appliquée, a dû s'alonger d'autant de pieds qu'il y a de cordons aboutissants à la moufle mobile.

Lorsqu'on emploie les poulies dans des machines où la régularité & la précision des mouvements sont nécessaires, alors il faut avoir égard à leur inertie; mais le mouvement de rotation qu'elles prennent, étant l'effet du frottement, nous remettons à en parler plus bas.

631. Lorsqu'un poids Q (*Fig.* 146) descendant par l'action de sa pesanteur, entraîne avec lui, à l'aide de la poulie de renvoi T un autre poids P attaché à une poulie mobile, il lui communique à chaque instant une certaine quantité de mouvement. Si l'on veut savoir quel doit être le poids P, pour que la quantité de mouvement communiquée, soit la plus grande qu'il est possible, c'est-à dire, dans quel cas la force P, produira le plus grand effet possible, on s'y prendra de la maniere suivante.

Soit p la vîtesse que la pesanteur donne à un corps libre pendant une seconde; $p\,dt$ sera celle qu'elle lui donne pendant l'instant dt. Soit dv la vîtesse que prendra réellement le corps P; $2\,dv$ sera celle que prendra P (630). Il faut donc (318) concevoir que la vîtesse $p\,dt$ que Q auroit eue s'il eût été libre, est composée de la vitesse $2\,dv$ qu'il conservera, & de la vîtesse $p\,dt - 2\,dv$ qu'il doit perdre.

Pareillement, il faut concevoir que la vîtesse $p\,dt$ que P auroit eue s'il eût été libre, est composée de la vîtesse $-dv$ qu'il va prendre en sens contraire à celle $p\,dt$ qu'il devoit avoir, & de la vîtesse $p\,dt + dv$ qui sera détruite. Or puisque les vîtesses $p\,dt - 2\,dv$, & $p\,dt + dv$ de Q & P doivent être détruites, il faut (624) que $p\,Q\,dt - 2\,Q\,dv : p\,P\,dt + P\,dt :: 1 : 2$; donc $2\,p\,Q\,dt - 4\,Q\,dv = p\,P\,dt + P\,dv$, d'où l'on tire $dv = \frac{2pQ - pP}{4Q + P}\,dt$. Donc la quantité de mouvement de P, sera $\frac{2pPQ - pP^2}{4Q + P}\,dt$; & puisqu'elle doit être un *maximum*, il faut que sa différentielle prise en regardant P seule comme variable, soit zéro; on aura donc $d\left(\frac{2pPQ - pP^2}{4Q + P}\,dt\right)$

X 2

$= 0$, ou $8 Q^2 - 8 P Q - P^2 = 0$; d'où l'on tire.........
$P = Q(-4 + \sqrt{24})$.

On trouvera de même un *maximum* dans la poulie simple, dans les moufles, &c, pour le cas que nous examinons ici: & pour le dire en passant, dans le choc de deux corps qui vont en sens contraire, il y a lieu à un pareil *maximum*.

Du Tour ou Treuil, Cabestan, &c.

632. LE *Tour* ou *Treuil* est, en général, une roue (*Fig.* 147) traversée perpendiculairement par un cylindre dont les extrémités portent sur deux appuis C, C. Une puissance Q appliquée suivant une direction tangente à la circonférence de la roue, entraîne cette circonférence avec le cylindre qui est solidement lié avec elle, & obligeant l'un & l'autre de tourner autour de l'axe de ce cylindre, sur les appuis C, C, enveloppe successivement les différentes parties de la corde DP, à laquelle est attachée le poids P que l'on se propose d'élever ou d'attirer vers ce cylindre.

Quelquefois au lieu d'une roue, on se contente d'implanter dans le corps du cylindre & perpendiculairement à son axe des *barres* E, E, (*Fig.* 147, 149, 150 & 151) auxquelles la puissance s'applique, & produit le même effet. D'autres fois, les extrémités du cylindre sont terminées par deux manivelles, Q, Q (*Fig.* 148) auxquelles on applique la force ou les forces motrices.

Lorſque l'axe du cylindre eſt vertical (*Fig.* 154 & 151) on lui donne le nom de *Cabeſtan*. C'eſt dans cette ſituation qu'on l'emploie ſur les vaiſſeaux; avec cette différence que pour pouvoir plus facilement remonter le cordage, lorſqu'étant arrivé au point le plus bas de la fuſée *AB*, il empêche de virer, on donne à cette fuſée la figure conique au lieu de la figure cylindrique.

633. Mais, en général, quelle que ſoit la diſpoſition de cette machine, on voit que l'action de la puiſſance & celle du poids ou de l'obſtacle qu'il s'agit de ſurmonter, ne s'exercent pas dans un même plan, mais dans des plans paralleles, ou à très-peu-près paralleles. L'action de la puiſſance produit deux effets, dont l'un s'exerce contre le poids même, & l'autre contre les appuis : voyons comment s'engendrent ces deux effets, dans le cas de l'équilibre.

Réduiſons toute la machine repréſentée par la figure 147, à ce que l'on voit (*Fig.* 152); c'eſt-à-dire, réduiſons le cylindre à ſon axe *CC*; repréſentons par *AMN*, le plan de la roue, & par *BDL*, la ſection du cylindre par un plan parallele à *AMN*, & paſſant par le cordon *DP*.

Ayant mené le rayon *AE*, au point *A* où

X 3

la puissance Q agit sur la roue, concevons par CC & par EA, un plan CEA qui rencontre BDL suivant IB qui sera nécessairement parallele à AE. Ayant mené AB, concevons par cette ligne, & par la direction AQ de la puissance, un plan QAR qui rencontrera l'axe CC en quelque point R. Enfin par les points B & R, menons BF & RG paralleles à AQ.

Cela posé, nous pouvons (240) décomposer la force Q, en deux autres forces F & G dirigées suivant BF & RG: & comme cette derniere passe par l'axe même du cylindre, elle ne peut produire aucun mouvement de rotation autour de cet axe, & par conséquent ne peut contribuer à soutenir le poids P; elle sera toute consumée contre les appuis. Il n'y a donc que la force F qui puisse faire équilibre au poids P. Or 1°. cette force est dirigée dans le même plan BDL dans lequel s'exerce l'action de ce poids. 2°. Les deux lignes BF & BI étant paralleles aux deux droites AQ, AE qui font un angle droit, BF est donc perpendiculaire à BI, tangente à la circonférence BDL. On peut donc regarder BID comme un levier angulaire dont le point d'appui est en I; & puisque les distances BI, ID, des directions des deux puissances F & P, à ce point d'appui ſont égales, ces deux puiſſances doivent être égales ; on a donc $F = P$; voyons donc quel eſt le rapport de F à Q.

Selon ce qui a été dit (237), on a $Q : F :: BR : AR$; mais les triangles ſemblables RBI, RAE, donnent $BR : AR :: BI : AE$; donc $Q : F :: BI : AE$, ou (puiſque $F = P$) $Q : P :: BI : AE$, c'eſt-à-dire, que *dans le treuil, la puiſſance eſt au poids comme le rayon du cylindre eſt au rayon de la roue.*

634. Si le poids P étoit attaché en un point B (*Fig.* 153) du plan de la roue, tel que la perpendiculaire IB ſur ſa direction fût égale au rayon du cylindre ; on pourroit regarder AIB comme un levier angulaire dont le point d'appui ſeroit au centre I; & il faudroit, pour l'équilibre (575), que l'on eût $Q : P :: BI : AI$; c'eſt-à-dire, qu'on auroit entre la puiſſance & le poids le même rapport que ci-devant. Donc *l'action de la puiſſance ſe tranſmet au poids, à l'aide du treuil, comme ſi le poids & la puiſſance étoient dans un même plan.*

635. A l'égard de la charge de chacun des appuis, il n'en eſt pas de même : elle varie ſelon la diſtance du plan BLD (*Fig.* 152) au plan de la roue. Pour la déterminer on décompoſera la puiſſance Q (con-

ſidérée comme appliquée en *E* parallélement à *AQ*) en deux forces paralleles à *AQ*, & qui paſſent par *C* & *C* (240). On décompoſera, pareillement, le poids *P* conſidéré comme appliqué en *I*, en deux forces paralleles à *PD*, & qui paſſent par *C* & *C*. Par ce moyen, chaque appui ſera ſollicité par deux forces dont les valeurs & les directions ſeront connues. Il ſera donc facile, pour chaque appui, de réduire ces forces à une ſeule dont la valeur & la direction ſoient connues.

Cette méthode de trouver la charge des deux appuis, eſt fondée ſur ce que les deux forces *F* & *P* ſe réduiſent à une ſeule qui agit en *I*; ſi l'on conçoit celle-ci décompoſée en deux forces paralleles à *F* & *P*, & appliquées en *I*, elles n'auront pas d'autres valeurs que *F* & *P*. Donc 1° on peut regarder *P* comme appliqué en *I*: 2° la force *F* conſidérée comme appliquée en *I*, & la force *G* appliquée en *R* ne peuvent manquer d'avoir pour réſultante *Q*, puiſque c'eſt la force *Q* qui les a engendrées, ainſi que nous l'avons vu ci-deſſus; de plus, cette réſultante paſſe par *E*, puiſque $RI : RE :: RB : RA :: Q : F$ (137).

636. Si la puiſſance, au lieu d'être appliquée ſuivant une direction tangente à

la roue, agiſſoit par le moyen des bras *E*, *E* (*Fig.* 150 & 151) & perpendiculairement à leur longueur, le rapport de la puiſſance au poids ſeroit toujours le même que ci-devant, en ſubſtituant aux mots *rayon de la roue* ceux de *longueur du bras*, cette longueur étant comptée depuis l'axe du cylindre. Mais ſi la puiſſance n'agiſſoit pas perpendiculairement au bras *IE* (*Fig.* 150), au lieu de ce bras on prendroit la perpendiculaire *IR* menée ſur la direction de la puiſſance; enſorte que la puiſſance ſeroit au poids, comme le rayon du cylindre eſt à *IR*.

637. Puiſque (*Fig.* 152) $Q : P :: BI : AE$, on a donc $Q \times AE = P \times IB$; c'eſt-à-dire, que le moment de la puiſſance eſt égal au moment du poids, ces moments étant pris par rapport à l'axe *CC*. Donc ſi l'on emploie, en même temps, pluſieurs puiſſances appliquées à différents bras; il faudra que la ſomme des moments de ces puiſſances, ſoit égale au moment du poids.

638. Si la corde qui porte le poids, ou qui tranſmet à l'obſtacle, l'action de la puiſſance, au lieu de s'envelopper ſur un cylindre, s'enveloppe ſur une ſurface conique, ou en général ſur celle d'un ſolide dont les diametres varient, le rapport de la puiſſance

au poids variera auſſi continuellement : & réciproquement ſi la puiſſance dont l'action doit ſe communiquer à l'aide d'une machine ſemblable à celle dont il s'agit ici, varie continuellement, & doit néanmoins produire conſtamment le même effet, on doit, pour y parvenir, faire enſorte que ſon action ſoit appliquée à des rayons d'autant plus longs, qu'elle diminuera davantage. C'eſt ce que l'on voit particulierement dans les montres ou horloges à reſſort, où la force motrice eſt un reſſort fixé par une de ſes extrémités à l'arbre du tambour ou barillet *Z* (*Fig.* 154), & qui, après pluſieurs circonvolutions, eſt fixée intérieurement à la ſurface concave de ce barillet. Une chaîne attachée d'une part ſur la ſurface convexe du barillet, fait pluſieurs tours ſur la fuſée *Y* à laquelle elle eſt fixée par ſon autre extrémité ; par le développement du reſſort, le barillet en tournant tire la chaîne & fait tourner la fuſée *Y* ; mais comme le reſſort, à meſure qu'il ſe débande, diminue de force, on compenſe cette diminution en donnant à la fuſée plus de diametre dans les parties qui doivent être développées les dernieres ; par ce moyen le rouage reçoit de la part du reſſort, des impulſions égales en temps égaux.

639. Il paroît donc, à ne confidérer les chofes que du côté de l'équilibre, qu'on peut diminuer à volonté, le rapport de la puiffance au poids, & mettre un poids, fi petit qu'il foit, en état de vaincre tel poids qu'on voudra, à l'aide du tour, & des machines qui s'y rapportent. Mais quand on confidere le mouvement & qu'on a égard, comme on le doit, à la nature des agents qu'on emploie, l'effet ne peut pas être augmenté arbitrairement; le rapport du rayon du cylindre, au rayon de la roue, n'eft point arbitraire : il y en a un propre à donner le plus grand effet poffible.

Suppofons, par exemple, que le moteur appliqué au bras E (*Fig.* 150) tende à fe mouvoir avec une vîteffe V, & que la force dont il eft capable foit MV, c'eft-à-dire, équivalente à celle d'une maffe connue M animée de cette vîteffe V. Soit v la vîteffe avec laquelle fera mû le point E, en vertu de réfiftance de P. Alors fi l'on nomme R le bras IE, & r le rayon du cylindre, on aura la vîteffe que prendra P, par cette proportion, $R : r :: v : \frac{rv}{R}$, puifqu'il eft évident que le point E, & le point où la corde touche le cylindre, ont des vîteffes proportionnelles à leurs diftances à l'axe. Il faut donc (318) concevoir, au moment où la puiſſance vient à agir, que la vîteſſe V eſt compoſée de la vîteſſe v qui ſubſiſtera, & de la vîteſſe $V - v$ qui ſera détruite. Et qu'au même inſtant le poids P a la vîteſſe $\frac{rv}{R}$ qui aura lieu, & la vîteſſe $\frac{rv}{R}$ en ſens contraire, & qui ſera détruite; c'eſt-à-dire, que la force motrice réduite à la force $M(V-v)$ doit faire équilibre à la maſſe P animée de la force $\frac{Prv}{R}$. Donc (637) $M(V-v) \times R = \frac{Prrv}{R}$ d'où l'on tire, . . . $v = \frac{MVRR}{MRR + Prr}$. Donc la vîteſſe du poids P, qui eſt $\frac{rv}{R}$, ſera $\frac{MVrR}{MRR + Prr}$. Donc pour ſavoir quel rapport il doit y avoir entre R & r, pour que le poids P prenne la plus grande vîteſſe poſſible, il faut (48) égaler à zéro la différentielle de cette valeur, priſe en regardant r ſeule comme variable. On aura donc $MVRdr(MRR + Prr) - MVRr \times 2Prdr = 0$, d'où l'on tire $MRR = Prr$, & $r = R\sqrt{\frac{M}{P}}$. Par exemple, ſi le poids P eſt de 100000 ℔, & que la force motrice ſoit équivalente à un poids de 10 ℔, on aura $r = R\sqrt{\frac{10}{1000000}}$ $= R \times \frac{1}{100}$; c'eſt-à-dire, que le rayon du cylindre doit être la centieme partie du bras IE, pour que l'effet ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible. Que l'on augmente, ou que l'on diminue le bras IE, ou le rayon du cylindre, il n'y a qu'à perdre.

640. Si le poids Q appliqué à la circonférence de la roue (*Fig.* 155) entraîne par ſa peſanteur, le poids P appliqué à la circonférence du cylindre; on peut ſe propoſer ſur ce mouvement, les deux queſtions ſuivantes: 1°. Quel doit être le rapport de Q à P pour que la quantité de mouvement que P prendra, ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible? 2°. Quel doit être le rapport du rayon R de la roue, au rayon r du cylindre, pour que P ſoit élevé le plus promptement qu'il eſt poſſible? On ſatisfera à ces deux queſtions de la maniere ſuivante.

Soit p la vîteſſe que la peſanteur donne à un corps libre, en une ſeconde de temps, & par conſéquent $p\,dt$ celle qu'elle lui donne pendant l'inſtant dt. Soit dv celle que prendra réellement le corps Q, & par conſéquent $\frac{r\,dv}{R}$, celle que prendra P; il faut donc (318) concevoir la vîteſſe $p\,dt$ que Q devoit recevoir pendant un inſtant, comme compoſée de la vîteſſe dv qu'il aura réellement, & la viteſſe $p\,dt - dv$ qu'il perdra par la réſiſtance de P. Pareillement il faut concevoir la vîteſſe $p\,dt$ que P auroit eue s'il eût été libre, comme compoſée de la vîteſſe $-\frac{r\,dv}{R}$ qu'il prendra en ſens contraire, & de la vîteſſe $p\,dt + \frac{r\,dv}{R}$ qui ſera détruite. Ainſi, puiſque les vîteſſes $p\,dt - dv$ & $p\,dt + \frac{r\,dv}{R}$ doivent être détruites, il faut (637) que $Q \times (p\,dt - dv) \times R = P\left(p\,dt + \frac{r\,dv}{R}\right) \times r$, d'où l'on tire $dv = \frac{QR^2 - PrR}{QRR + Prr}\,p\,dt$; & par conſéquent la vîteſſe que P recevra pendant le même inſtant, ſera $\frac{QrR - Prr}{QRR + Prr}\,p\,dt$. Donc la quantité de mouvement qu'il reçoit à chaque inſtant, ſera $\frac{PQrR - P^2r^2}{QRR + Pr^2}\,p\,dt$. Or pour que cette quantité ſoit un *maximum*, il faut que ſa différentielle priſe en regardant P ſeule comme variable, soit $=$ o ; on a donc $(QR^2 + Pr^2)(QrRdP - 2r^2PdP) - (PQrR - P^2r^2)r^2dP = 0$, ou $Q^2R^3 - 2PQR^2r - P^2r^3 = 0$, d'où il est aisé de tirer la valeur P.

Mais si P & Q étant donnés, on veut savoir quel rapport il doit y avoir entre r & R, pour que P soit élevé le plus promptement qu'il est possible : il faut différencier l'expression de la vîtesse de P, en regardant r seule comme variable, & égaler cette différentielle à zéro. Or cette opération conduit à l'équation $QR^2 - 2PRr - Pr^2 = 0$, d'où il est facile de conclure le rapport de R à r.

A l'égard du mouvement que prendront les deux corps P & Q, il est aisé de voir que ce sera un mouvement uniformément accéléré, semblable à celui des corps graves qui tombent librement, puisque la petite vîtesse que reçoit Q à chaque instant, étant exprimée par $dv = \frac{QR^2 - PrR}{QR^2 + Pr^2} p\,dt$, est constante & est à celle $p\,dt$ que donne la pesanteur à un corps libre, $:: \frac{QR^2 - PrR}{QR^2 + Pr^2} : 1$. Il sera donc facile de déterminer par ce qui a été dit (195 & suiv.), les espaces que décrivent Q & P, & leurs vîtesses au bout d'un temps quelconque t.

Si l'on veut avoir égard à la pesanteur des cordes DP, CQ, tout le changement qu'il y a à faire à la solution précédente, est de mettre au lieu de P, P plus le poids de DP; & au lieu de Q, Q plus le poids de CQ. Soit donc q la pesanteur spécifique de la corde CQ, & q' la pesanteur spécifique de la corde DP, c'est-à-dire, ce que pese cette corde, par pied. Soit z la longueur de CQ, & z' celle de DP, on aura.. $dv = \frac{R^2(Q + qz) - rR(P + q'z')}{RR(Q + qz) + r^2(P + q'z')} p\,dt$. Or on a $\frac{dz}{dt}$ & $\frac{-dz'}{dt}$ * pour les vîtesses de Q & P, & par conséquent $\frac{dz}{dt} : \frac{-dz'}{dt}$ ou $dz : -dz' :: R : r$; donc $-dz' = \frac{r}{R}dz$, & par conséquent $C - z' = \frac{r}{R}z$. Soit a la longueur de DP lorsque $z = 0$, on a donc $C = a$, & par conséquent $a - z' = \frac{r}{R}z$, ou $z' = a - \frac{r}{R}z$. Substituant cette valeur pour z'

* Je mets le signe $-$, parce que t croissant, z' diminue.

& $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ pour dv; faisant ensuite, pour simplifier, $QR^2 - PRr - q'rRa = b$, $qr^2 + q'r^2 = c$, $QR^2 + Pr^2q'r^2a = b'$, $qR^2 - q'r^2\frac{r}{R} = c'$, on aura $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{b+cz}{b'+c'z}p\,dt$. Multipliant par $\frac{dz}{dt}$, on a $\frac{dz}{dt}\,d\left(\frac{dz}{dt}\right) = {}^*p\left(\frac{c}{c'}dz - \frac{b'c-bc'}{c'}\,\frac{dz}{b'+c'z}\right)$;

donc en intégrant on a $C' + \frac{dz^2}{2dt^2} = p\left(\frac{c}{c'}z - \frac{b'c-bc'}{c'c'}\log.(b'+c'z)\right)$. Et si l'on suppose que lorsque $z = 0$, $\frac{dz}{dt}$ ou v soit zéro, on aura $C' = -p\left(\frac{b'c-bc'}{c'c'}\right)\log.b'$, & par conséquent $\frac{dz^2}{2dt^2}$ ou $\frac{v^2}{2} = p\left[\frac{c}{c'}z + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{b'c-b'c}{c'c'}\log.\left(\frac{b'}{b'+c'z}\right)\right]$. Et par conséquent . . . . . .

$$dt = \frac{c'dz}{\sqrt{2}.\sqrt{p\left[cc'z + (b'c-bc')\log.\frac{b'}{b'+c'z}\right]}},$$

équation que l'on ne peut intégrer généralement, que par approximation.

Si $c' = 0$, c'est-à-dire, si $R = r$, ce qui est le cas de la poulie, l'équation $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{b+cz}{b+c'z}p\,dt$, se réduit à $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{b+cz}{b'}p\,dt$ qui est la même que celle que nous avons trouvée pour ce cas (387).

641. Dans la question que nous avons traitée (639) nous n'avons pas eu égard à la quantité de matiere de la roue ou des barres & du cylindre. Mais comme il peut arriver souvent qu'elle soit assez considérable

* En divisant $cz + b$ par $c'z + b$.

pour partager sensiblement l'action de la puissance, on doit y avoir égard pour être pleinement en état de juger si la machine aura son effet, si la puissance donnera la vîtesse nécessaire. Or c'est ce qu'il est facile de faire par ce que nous avons dit (594). Il faut, pour cet effet, considérer la masse P, (*Fig.* 150) celle des barres, ou de la roue lorsqu'il y en a une, & celle du cylindre, comme ne faisant qu'un seul corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe qui est ici l'axe du cylindre, la masse P étant considérée comme appliquée à la surface de ce cylindre. Alors si l'on nomme $\int m\,r'\,r'$ la somme des produits des particules de la roue & du cylindre, par les quarrés de leurs distances à l'axe, on aura $v = \frac{MVRR}{MRR + Prr + \int mr'r'}$ qui ne revient à la valeur trouvée (639) que lorsque $\int mr'r'$ est assez petite à l'égard de $MRR + Prr$, pour pouvoir être négligée. Dans tout ce qui précede, nous n'avons pas eu égard à la grosseur des cordes. Mais si elles ont un diametre un peu considérable, alors on doit prendre pour le rayon de la roue & pour celui du cylindre, leur rayon véritable augmenté du rayon ou demi-diametre de la corde, parce qu'on doit regarder l'action comme se transmettant suivant l'axe de la corde.

642.

642. Il y a une infinité de machines qui peuvent, soit en tout, soit en partie, être rapportées au treuil, & par conséquent au levier; tels sont le cric (*Fig.* 156), les roues dentées (*Fig.* 157) &c. & toutes les machines destinées à percer ou pousser en tournant, quoique ces dernieres participent souvent d'une autre machine que nous examinerons dans peu, savoir, le plan incliné. Dans le cric (*Fig.* 156) l'axe sur lequel est chaussée ou auquel est liée la manivelle CRQ porte un pignon P, dont les aîles ou dents engrenent dans une barre dentée AB. L'aîle K du pignon souleve en tournant, la barre AB, à l'aide de la dent contiguë, avec une force qui (633) est à la force Q appliquée à la manivelle, comme le rayon de la manivelle est à celui du pignon; ensorte que comme le rayon du pignon est fort petit à l'égard de celui de cette manivelle, on peut à l'aide de cette machine soulever des poids assez considérables, avec une force médiocre.

643. Les roues dentées servent à plusieurs usages; tantôt on les emploie pour multiplier la force, tantôt pour multiplier la vitesse, d'autres fois pour changer la direction des mouvements; souvent pour régler les mouvements sur certains périodes de temps, ou pour rendre sensibles des

mouvements ou des efpaces que l'œil ne pourroit faifir.

Si plufieurs roues dentées V, X, Y, Z (*Fig.* 157) communiquent les unes aux autres par les pignons u, x, y, z, voici comment on peut trouver le rapport de la puiffance Q appliquée à la premiere de ces roues, au poids ou à l'effort P que le dernier pignon peut foutenir. Soient R, R' R'', R''' les rayons de ces roues; r, r', r'', r''', ceux de leurs pignons. On confidérera l'effort que l'aîle d'un pignon quelconque fait fur la dent de la roue voifine, comme une puiffance appliquée à celle-ci; alors felon ce qui a été dit (633), en nommant E, E', E'' ces efforts, on aura $Q : E :: r : R$, $E : E' :: r' : R'$, $E' : E'' :: r'' : R''$, $E'' : P :: r''' : R'''$, d'où en multipliant par ordre, on conclura $Q : P :: r\,r'\,r''\,r''' : R\,R'\,R''\,R'''$; c'eft-à-dire, que la puiffance eft au poids, comme le produit des rayons de tous les pignons, eft au produit des rayons de toutes les roues : par exemple, fi le rayon de chaque pignon eft 10 fois plus petit que celui de fa roue, une puiffance d'une livre, foutiendra un effort de 10000 livres.

Au refte, ce qu'on gagne du côté de la force, en employant les rouages, on le perd du côté de la vîteffe. En effet, lorfque la roue V a fait un tour, le pignon u qui a fait aussi un tour, n'a encore fait passer qu'autant de dents de la roue X, qu'il a d'aîles, ensorte que si la roue X a 48 dents, & le pignon u, 6 aîles, la roue X n'a fait qu'un huitieme de tour lorsque la roue V en a fait un ; on voit, par la même raison, que la roue V va plus lentement que X, & ainsi de suite.

644. Voyons maintenant, comment on peut augmenter la vîtesse, dans un rapport donné, à l'aide des roues dentées.

Soit (*Fig.* 158) une roue dentée V qui engrene dans un pignon u; il est clair que pendant un tour de la roue V, le pignon fera autant de tours que le nombre de ses aîles est contenu de fois dans le nombre des dents de la roue V; c'est-à-dire, que pendant un tour de la roue V, le pignon u fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N}{n}$, N & n marquant les nombres de dents & d'aîles de la roue & du pignon.

Donc si la tige du pignon u porte une roue X qui engrene aussi dans un pignon x, on verra de même, que pendant un tour de la roue X ou du pignon u, le pignon x fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N'}{n'}$, N' & n' marquant les nombres de dents & d'aîles de la roue X & du pignon x. Donc pendant que la roue X fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N}{n}$, c'eſt-à-dire, pendant que la roue V fera un tour, le pignon x fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N'}{n'} \times \frac{N}{n}$ ou $\frac{NN'}{nn'}$. Et en continuant de raiſonner de même ſur un plus grand nombre de roues & de pignons, on voit que le nombre de tours que fera le dernier pignon pendant un tour de la premiere roue, eſt exprimé par une fraction qui a pour numérateur le produit des nombres des dents de toutes les roues, & pour dénominateur le produit des nombres des aîles de tous les pignons.

Donc lorſqu'on demande quels doivent être les nombres des dents & des aîles, d'un nombre de roues & de pignons propoſé, pour que la vîteſſe de la derniere piece, ſoit à celle de la premiere, dans un rapport donné; c'eſt une queſtion indéterminée, ou qui peut avoir pluſieurs ſolutions : deux exemples ſuffiront pour voir comment on doit ſe conduire dans ces ſortes de queſtions.

Suppoſons que l'on demande, combien on doit donner de dents aux deux roues, V & X, & d'aîles aux pignons u & x, pour que le pignon x faſſe 50 tours pendant un tour de la roue *V*. On aura donc $\frac{NN'}{nn'} = 50$. Nous ne connoiſſons donc ici que le quotient de NN' diviſé par nn'; mais nous ne connoiſſons ni le dividende ni le diviſeur. Prenons donc arbitrairement, pour le diviſeur nn' un nombre compoſé de deux facteurs qui ne ſoient ni trop petits ni trop grands pour pouvoir êtres les nombres d'ailes qu'on peut donner à des pignons. Suppoſons, par exemple, $nn' = 7 \times 8 = 56$. Nous pourrons ſuppoſer $n = 7$, & $n' = 8$. Alors nous aurons $\frac{NN'}{56} = 50$, ou $NN' = 50 \times 56$; or 50 & 56 n'excédant pas le nombre des dents qu'on peut donner à chaque roue, je ſuppoſerai $N = 50$, & j'aurai par conſéquent $N' = 56$. Si ces deux facteurs ou l'un deux eût été trop grand, je les aurois décompoſés en tous leurs facteurs premiers, & j'aurois examiné ſi de la combinaiſon de ces facteurs, il n'en feroit pas réſulté deux facteurs plus petits, ou bien j'aurois pris un autre nombre pour nn'.

Suppoſons, pour ſecond exemple, qu'on demande les nombres des dents de trois roues, & des aîles de trois pignons, pour que le dernier pignon faiſant un tour en 12 heures, la premiere roue faſſe un tour en un an.

L'année commune étant de 525949 minutes; & les 12 heures valant 720 minutes, il eſt clair que pendant un tour de la premiere roue, le dernier pignon fait un nombre de tours exprimé par $\frac{525949}{720}$; on a donc $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720}$. Prenons arbitrairement $n = 7$, $n' = 8$. Nous aurons $\frac{NN'N''}{7 \times 8n''} = \frac{525949}{720}$, ou $NN'N'' = \frac{525949}{720} \times 7 \times 8\,n'' = \frac{3681643\,n''}{90}$. Or comme il faut que $NN'N''$ ſoit un nombre entier, il eſt clair que pour réſoudre exactement la queſtion, il faudroit prendre pour n'', un multiple de 90; ce qui étant un nombre trop grand pour être celui des aîles d'un pignon, il faut voir ſi en retranchant ou en ajoutant un petit nombre d'unités, au numérateur de cette derniere fraction, elle ne pourroit pas devenir un nombre entier; comme ce nombre différeroit peu de la valeur véritable de $NN'N''$, on le prendroit pour ce produit.

Soit donc q le plus petit nombre d'unités dont il faille diminuer le numérateur, & ſoit t le nombre entier qui en réſulte, & que l'on prendra pour $NN'N''$; on aura donc $\frac{3681643\,n''-q}{90} = t$ ou $40907\,n'' + \frac{13\,n''-q}{90} = t$. Il faut donc que $\frac{13\,n''-q}{90}$ ſoit un nombre entier; je l'appelle s. J'ai donc $\frac{13n''-q}{90}=s$, ou $n''=\frac{90s+q}{13}=6s+\frac{12s+q}{13}$. Je fais $\frac{12s+q}{13}=r$, & j'ai $s=\frac{13r-q}{12}=r+\frac{r-q}{12}$. Enfin, je fais $\frac{r-q}{12}=k$; & j'ai $r=12k+q$. Donc $s=13k+q$, & $n''=90k+7q$. Or comme il faut que n'' soit petit, je suppose $k=0$, & donnant à q la plus petite valeur possible en entiers, je suppose $q=1$. J'ai donc $n''=7$, & t, ou $N\,N'\,N''=286350$. Reste à savoir, maintenant, si ce nombre peut être décomposé en trois facteurs qu'on puisse prendre pour les nombres des dents N, N', N''; or c'est ce qui a lieu, parce que les trois facteurs de ce nombre sont 50, 69, 83, qui ne sont pas trop grands pour cet objet. On peut donc prendre, & disposer comme on le voudra, trois roues de 50, 69, & 83 dents, & trois pignons de 7, 7 & 8 aîles.

Si le nombre qu'on trouve, ainsi, pour $N\,N'\,N''$, ne donnoit point des facteurs convenables, pour être les nombres de dents qu'on peut tailler commodément sur des roues, on recommenceroit l'opération en donnant d'autres valeurs à q, ou à n, ou à n'.

Quoique la solution qu'on obtient en négligeant ainsi quelques unités, ne soit qu'approchée, elle est cependant suffisamment exacte. Car dans le cas présent, le nombre de tours du dernier pignon, pendant un tour de la premiere roue, étant $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{286350}{7 \times 7 \times 8}$; si l'on multiplie cette quantité par 12 heures, durée de chaque tour, on aura pour la durée de révolution de la premiere roue, $365^j\ 5^h\ 48'\ 58''\ \frac{38}{49}$; or nous avons supposé l'année de $365^j\ 5^h\ 49'$.

De l'Équilibre & du Mouvement à l'aide du levier, lorsque les forces appliquées sont dans des plans différents; & des différentes especes de mouvement que peut prendre un corps de figure quelconque.

645. LORSQUE les forces qui agissent sur un levier seront situées dans différents plans, on concevra par le point d'appui C trois plans HI, KL, MN (*Fig.* 159) perpendiculaires entr'eux. Et comme on peut toujours décomposer une force quelconque, en trois autres perpendiculaires à trois plans donnés de position, on décomposera chacune des forces données, en trois autres perpendiculaires aux trois plans HI, KL, MN.

Soit P l'une de celles qui sont perpendiculaires au plan MN; & par le point V où sa direction rencontre ce plan, concevons la ligne quelconque SVT qui rencontre en S & T les intersections DE, AB, de ce plan avec les deux autres. On pourra toujours concevoir la force P décomposée en deux autres Q & R qui lui soient paralleles, & qui agissent aux points S & T. La force Q (240) sera exprimée par $\frac{P \times VT}{ST}$, & la force R le sera par $\frac{P \times SV}{ST}$, ou, en menant VX, VZ paralleles à SC & TC, ce qui donne $ST : VT :: CS : VX$, & $ST : SV :: CT : VZ$, la force Q sera exprimée par $\frac{P \times VX}{CS}$, & la force R le sera par $\frac{P \times VZ}{CT}$.

Or il est visible que la force Q tend à faire tourner autour de l'axe DE, & son moment à l'égard de cet axe, qui est $Q \times CS$, est $\frac{P \times VX}{CS} \times CS$, ou simplement $P \times VX$; c'est-à-dire, le même que celui de la puissance P, si cette puissance sans changer de distance à l'axe DE, agissoit dans le plan LK auquel elle est parallele. Pareillement la force R tend à faire tourner autour de l'axe AB, & son moment à l'égard de cet axe, qui est $R \times CT$, est $\frac{P \times VZ}{CT} \times CT$, ou simplement $P \times VZ$, c'est-à-dire, le même que celui de la puissance P, si cette puissance sans changer de distance à l'axe AB, agissoit dans le plan HI auquel elle est parallele. La force P tend donc à faire naître deux mouvements de rotation, l'un autour de DE, l'autre autour de AB. Or par un raisonnement semblable, on verra que toute force perpendiculaire au plan KL, tend à faire tourner autour de l'axe AB, & autour de l'axe FG; & que toute force perpendiculaire au plan HI, tend à faire tourner autour de DE & autour de FG. De plus, le moment de la force avec laquelle chacune tend à faire tourner autour de l'un de ces axes, est le même que si cette puissance agissoit dans celui des deux plans auquel elle est parallele, & qui est perpendiculaire à cet axe.

Cela posé, en appliquant à chaque force une décomposition semblable à celle que nous venons d'appliquer à la force P, on voit qu'on réduira toutes ces forces à agir dans les trois plans KL, HI, MN. Or comme ces trois plans sont perpendiculaires entr'eux, celles qui agissent dans l'un quelconque, ne peuvent ni favoriser celles qui agissent dans l'un quelconque des deux autres, ni leur nuire. Donc pour que toutes ces forces se fassent équilibre, il faut que toutes celles qui agiſſent dans l'un quelconque de ces plans, puiſſent ſe faire équilibre entr'elles ; or cette condition (589) exige que la ſomme de leurs moments à l'égard du point C ſoit zéro ; donc puiſque les moments des forces qui, après la décompoſition agiroient dans chaque plan, ſont les mêmes que ſi les forces qui les ont engendrées agiſſoient dans ces mêmes plans, ſans changer de diſtance à l'égard de l'axe par rapport auquel on conſidere les moments, on peut donc établir cette regle générale.

Concevez, par le point d'appui, trois plans perpendiculaires entr'eux ; décompoſez chacune des forces données en trois autres, perpendiculaires à ces plans. Prenez les moments de chacune à l'égard de deux axes qui ſont les interſections du plan auquel cette force eſt perpendiculaire, avec les deux autres plans ; alors raſſemblez (avec les ſignes convenables) les moments de toutes les forces qui agiſſent parallélement à l'un des plans, & égalez-la à zéro ; faites la même choſe par rapport à chacun des trois plans.

646. Si le levier, ou en général, ſi le corps ou le ſyſtême de corps auquel ſont appliquées les forces qui doivent ſe faire mutuellement équilibre, n'étoit point aſſujetti par un point fixe, comme nous l'avons ſuppoſé ; alors on meneroit les trois plans par tel point qu'on voudroit ; & les trois conditions que nous venons d'établir pour l'équilibre, devroient encore avoir lieu. Car puiſqu'il n'y a pas de point fixe, toutes les forces qui agiſſent dans un même plan, doivent pouvoir ſe faire équilibre entr'elles : or ici la choſe ne peut avoir lieu qu'autant que leur réſultante ſera zéro ; donc puiſque (248) la ſomme des moments de ces forces eſt égale au moment de leur réſultante, il faut encore que chacune de ces ſommes de moments ſoit zéro.

Mais, dans le même cas, ces trois conditions ne ſont pas les ſeules néceſſaires ; il faut encore (344) que la ſomme de toutes les forces perpendiculaires à l'un quelconque des trois plans, ſoit zéro ; ce qui donne trois nouvelles conditions : enſorte que l'équilibre entre pluſieurs forces dirigées dans des plans différents eſt aſſujetti à ſix conditions, lorſqu'il n'y a pas de point fixe dans le ſyſtême, & que toutes les parties du ſyſtême ſont ſolidement liées entr'elles.

647. Suppoſons maintenant que les forces appliquées au corps, ou au ſyſtême de corps, ſoient telles qu'elles ne ſe faſſent

point équilibre : le corps prendra du mouvement ; & selon ce qui a été dit (322) celui que prendra le centre de gravité sera le même que si toutes les forces étoient immédiatement appliquées à ce centre : de plus, les parties du corps tourneront autour de ce centre de gravité. Mais nous venons de voir, que ce mouvement de rotation peut avoir lieu en même-temps, autour de trois axes différents. Voyons d'abord quel peut être ce mouvement au premier instant.

Il est évident d'abord, quelque mouvement que prennent les parties du système, que si à l'instant où les forces agissent on imprimoit à ces parties des mouvements égaux & contraires à ceux qu'elles prennent, l'effet de ces forces seroit détruit : la question se réduit donc à exprimer les conditions de l'équilibre entre les forces appliquées au système, & celles que prennent les parties du système, celles-ci étant supposées dirigées en sens contraires.

Soit donc M (*Fig.* 160) une particule du corps, ou du système : & soient trois plans XAZ, XAY, ZAY perpendiculaires entr'eux. Ayant abaissé MC perpendiculaire sur le plan XAY, & CB perpendiculaire sur AY; nommons AB, x; BC, y; CM, z. Nous aurons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ pour les vîtesses de M parallélement à AY, AX, AZ, ou perpendiculairement aux plans ZAX, ZAY, XAY. Concevons que les forces imprimées soient aussi décomposées chacune en trois forces perpendiculaires à ces mêmes plans ; soit F l'une de celles qui sont perpendiculaires à ZAX ; F' l'une de celles qui sont perpendiculaires à ZAY, & F'' l'une de celles qui sont perpendiculaires à XAY. Soient a & a' les distances de la direction de F aux plans XAY, ZAY auxquels elle est parallele ; b & b' les distances de F' aux deux plans XAY, ZAX; c & c' les distances de F'' aux deux plans ZAY, ZAX. Les forces F & F'' tendent à faire tourner autour de l'axe AX; & en supposant que les forces F, F', & F'' agissent dans le sens des vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, &c, ces deux forces tendent à faire tourner en sens contraires ; ensorte que le résultat des moments de ces deux forces, est $Fa - F''c'$. Mais si les vîtesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, étoient appliquées en sens contraire, le point M tendroit à tourner autour de AX, en vertu de la vîtesse $\frac{dx}{dt}$, & de la vîtesse $\frac{dz}{dt}$, avec des forces $\frac{m\,dx}{dt}$, $\frac{m\,dz}{dt}$, en appellant m la masse du point quelconque M; & les moments de ces forces seroient $\frac{mz\,dx}{dt} - \frac{mx\,dz}{dt}$. Donc la somme des moments de celles de toutes les forces imprimées, qui tendent à faire tourner autour de AX, étant représentée par $\int(Fa\text{-}F''c')$; & la somme des moments de ceux de tous les mouvements reçus, qui tendent à faire tourner autour du même axe, étant représentée par $\int\frac{m(z\,dx - x\,dz)}{dt}$; il faut (645) que $\int(Fa\text{-}F''c') - \int\frac{m(z\,dx - x\,dz)}{dt} = 0$, ou $\int(Fa\text{-}F''c') = \int\frac{m(z\,dx - x\,dz)}{dt}$.

Par un raisonnement semblable, on trouvera pour les mouvements de rotation qui tendent à se faire autour de AY, l'équation $\int(Fb - F''c) = \int\frac{m(z\,dy - y\,dz)}{dt}$; & pour les mouvements de rotation autour de AZ, l'équation $\int(Fa' - F'b') = \int\frac{m(y\,dx - x\,dy)}{dt}$; & ces équations seront les seules nécessaires pour déterminer le mouvement initial d'un point quelconque M du corps ou du systeme, si ce corps est assujetti par l'un de ses points seulement qui alors est supposé le même que le point A, origine des x, y & z.

Mais si le corps est libre, il faudra de plus (646) que $\int F - \int\frac{m\,dx}{dt} = 0$, ou $\int F = \int\frac{m\,dx}{dt}$, $\int F' = \int\frac{m\,dy}{dt}$, $\int F'' = \int\frac{m\,dz}{dt}$: ces trois dernieres équations détermineront le mouvement du centre de gravité.

648. Considérons maintenant l'état du corps après un temps quelconque t; & supposons que ses différentes parties, ou quelques-unes seulement, soient sollicitées à chaque instant par des forces accélératrices qui, dans le sens parallele aux x, y & z, soient représentées par f, f', f''; c'est-à-dire, (215) que f, f', f'' représentent la vîtesse que chaque force engendreroit dans une seconde de temps, si elle agissoit comme une force accélératrice

constante pendant ce temps. Alors $f\,dt$, $f'\,dt$, $f''\,dt$ marqueront les vîtesses que ces forces sont capables d'imprimer pendant l'instant dt; & m' désignant la masse à laquelle ces forces accélératrices sont appliquées, $m'f\,dt$, $m'f'\,dt$, $m'f''\,dt$ seront les forces que le corps reçoit par leur action. Or les vîtesses de chaque particule du corps se changent (d'un instant quelconque au suivant) en $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\frac{dz}{dt} + d\left(\frac{dz}{dt}\right)$, c'est-à-dire, que les vîtesses que reçoit à chaque instant chaque particule du corps, par l'action des forces accélératrices, sont $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$. Donc pour avoir l'état du mouvement, en vertu de ces forces, il n'y a autre chose à faire qu'à substituer dans les équations précédentes, $m'f\,dt$, $m'f'\,dt$, $m'f''\,dt$, au lieu de F, F', F''; & $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en observant que a, a', b, b', c & c', marquent alors des distances variables, & qui dépendent de la position du corps à chaque instant. Alors on aura pour les équations qui serviront à déterminer le mouvement d'un corps libre de figure quelconque, sollicité par tant & de telles forces que l'on voudra, les six équations suivantes.

$$\int(fa - f''c')\,m'\,dt = \int m\left[z\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) - x\,d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right],$$

$$\int(f'b - f''c)\,m'\,dt = \int m\left[z\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) - y\,d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right],$$

$$\int(fa' - f'b')\,m'\,dt = \int m\left[y\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) - x\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)\right],$$

$$\int m'f\,dt - \int m\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0,\quad \int m'f'\,dt - \int m\,d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

$\int m'f''\,dt - \int m\,d\left(\frac{dz}{dt}\right) = 0$, dont les trois premieres seulement seront nécessaires si le corps ou système de corps est assujetti à tourner autour d'un point fixe A.

Il faut bien observer que les signes $\int$ qui entrent dans ces équations, sont relatifs aux différents points de système, & ne sont point les signes d'intégration relativement aux variables qui expriment le mouvement de chaque point.

649. Si les forces accélératrices que nous venons de supposer agir à chaque instant sur le corps, sont nulles; c'est-à-dire, si le corps ne se meut qu'en vertu d'une ou de plusieurs impulsions primitives, alors les équations se réduisent à ....

$$\int m\left[z d\left(\frac{dx}{dt}\right) - x d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right] = 0, \int m\left[z d\left(\frac{dy}{dt}\right) - y d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right] = 0,$$

$$\int m\left[y d\left(\frac{dx}{dt}\right) - x d\left(\frac{dy}{dt}\right)\right] = 0, \int m\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

$$\int m\, d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0, \int m\, d\left(\frac{dz}{dt}\right) = 0,$$ dont les intégrales sont

$$\int m\left(\frac{z\,dx - x\,dz}{dt}\right) = C, \int m\left(\frac{z\,dy - y\,dz}{dt}\right) = C' \ldots$$

$$\int m\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dt}\right) = C'', \int m\frac{dx}{dt} = C''', \int m\frac{dy}{dt} = C^{\text{IV}},$$

$\int m\frac{dz}{dt} = C^{\text{V}}$, dans lesquelles les constantes C, C', C'', ont pour valeur, les premiers membres des trois premieres équations données (647); & les constantes C''', C^{IV}, C^{V}, ont pour valeur, la somme des forces qui ont été d'abord appliquées parallélement à x, y & z respectivement; puisque $\int m\frac{dx}{dt}$, par exemple, exprimant la somme des produits de chaque particule du corps, par la vitesse que prend cette particule, doit être égal à toute la quantité de mouvement communiquée parallélement à x, & ainsi des autres.

650. Voyons maintenant, plus particulierement comment on doit employer ces formules pour déterminer le mouvement d'une partie quelconque du système, ou du corps; & supposons d'abord ce corps retenu seulement par un de ses points autour duquel il puisse d'ailleurs tourner dans tous les sens.

On observera 1° que les quantités x, y & z sont variables non-seulement pour chaque instant du mouvement, mais encore selon la position du point M dans le corps. 2° Dans les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, la position d'un même point M, dans le corps, est supposée invariable. Ainsi pour traiter nos équations relativement à ces différentes acceptions, il faut trouver pour x, y & z, d'autres expressions où l'on puisse distinguer facilement ce qui caractérise la position d'un point quelconque M, dans le corps, & la position de ce corps au bout d'un temps quelconque.

Soit donc CD (*Fig.* 161) une droite qui passe par le point fixe C autour duquel le corps est supposé se mouvoir, & qui ait une position constante à l'égard des différents points de ce corps, mais qui soit mobile avec lui* : nous appellerons cette droite, l'*axe* du corps. Soit $C'Q$ la projection de cette droite sur le plan fixe XAY; M un point quelconque du corps : concevons par CD un plan $CC'KP$ perpendiculaire au plan XAY. Menons MP perpendiculaire à CD, & Mm perpendiculaire au plan $CC'KP$; des points P, m, M, menons PK, mQ, MO perpendiculaire au plan XAY; des points C & m, les lignes Cn, mt perpendiculaires à PK; du point Q, la ligne QS perpendiculaire à AY; & des points C' & O, les lignes $C'R$, Or paralleles à AY.

Cela posé, la ligne tn sera la hauteur de M au-dessus du plan passant par C parallélement à XAY, ou au-dessus de XAY, en supposant que le point A est sur le point C; ainsi $tn = z$. Pareillement la ligne Rr sera y, & $C'R + rO$ sera x.

Soit $PM = g$, $CP = h$; g & h sont des quantités constantes pour un même point M, & variables pour différents points. Soit q l'angle que le plan $CC'KP$ fait avec le plan ZAY ou l'angle $QC'R$; s l'angle que CD fait avec le plan XAY, ou l'angle PCn; enfin, soit r l'angle MPm; & concevons par CD un plan CDE dont la position dans le corps soit fixe; nous appellerons ce plan, *le méridien*. Soit r'' l'angle que ce méridien fait avec PM, angle qui est constant pour un même point M, & pour tous ceux qui seroient dans un même plan passant par CD & par M. Soit r' l'angle que ce même méridien fait au bout d'un temps quelconque t avec le plan $CC'KP$, ou l'angle

* C'est pour rendre la figure plus distincte que nous prenons le point C différent du point A; mais comme ce que nous allons dire, ne suppose aucune distance entre A & C, après le calcul fait, on supposera que le point A & le point C ne sont qu'un seul & même point.

de rotation de ce plan ou du point M, en supposant qu'au commencement du mouvement, le méridien fût dans le plan $CC'KP$; on aura $r' - r'' = r$.

Dans le triangle rectangle PnM, on aura $Pm = g \cos r$, $Mm = g \sin r = QO$. Le triangle rectangle Ptm, dans lequel l'angle mPt est égal à l'angle PCn, donne $Pt = Pm \cos s = g \cos r \cos s$, $mt = g \cos r \sin s = KQ$. Le triangle rectangle PCn donne $Cn = h \cos s = C'K$, & $Pn = h \sin s$; donc 1° $tn = Pn - Pt = h \sin s - g \cos r \cos s = z$. 2°. Le triangle rectangle QrO, dans lequel l'angle OQr est égal à l'angle $QC'R$, donne $Qr = QO \cos q = g \sin r \cos q$, & $rO = g \sin r \sin q$. Le triangle rectangle $QC'R$ donne $QR = C'Q \sin q = (C'K + KQ) \sin q = h \cos s \sin q + g \cos r \sin s \sin q$, & $C'R = h \cos s \cos q + g \cos r \sin s \cos q$; donc $C'R + rO$, ou $x = h \cos s \cos q + g \cos r \sin s \cos q + g \sin r \sin q$; & $R r$ ou $QR - Qr$, ou $y = h \cos s \sin q + g \cos r \sin s \sin q - g \sin r \cos q$.

Donc lorsqu'on voudra déterminer le mouvement d'un corps de figure quelconque retenu par un point fixe seulement, & sollicité par telles forces que l'on voudra, il ne s'agira que de substituer, dans les formules données ci-dessus, au lieu de x, y & z, les valeurs qu'on vient de trouver, & intégrer les équations qui naîtront de ces substitutions.

Mais il faudra observer en même temps 1°. de substituer au lieu des distances que ci-dessus nous avons appellées a, a', b, b', &c, leurs valeurs exprimées par les mêmes angles q, s, &c. lorsque ces distances aux axes fixes qu'on a choisis d'abord, seront variables; or c'est ce qui sera toujours facile en imitant ce que nous venons de faire pour déterminer les distances x, y & z.

2°. Dans la substitution des valeurs de x, y, z & leurs différences, on observera que h & g doivent être regardées comme constantes, & que la différentielle de r doit être prise en regardant r' seule comme variable; ensorte qu'au lieu de dr, on mettra dr' en vertu de l'équation $r' - r'' = r$; enfin on mettra au lieu de r, sa valeur $r' - r''$. Alors les intégrations marquées par le signe $\int$, se feront en regardant r'', g & h comme variables; & comme la nature du corps est censée connue, la relation des lignes g & h, & de l'angle r'', est censée donnée; ensorte que ces intégrations ne dépendront jamais que des méthodes du calcul intégral à une seule variable. On procédera ensuite à l'intégration des équations mêmes, en y regardant, r', q, s & t comme variables.

651.

651. Si le corps est libre, on imaginera que le point C est son centre de gravité; & comme (322) les mouvements de rotation se font autour de ce centre comme s'il étoit fixe, on aura les mêmes quantités à substituer dans les trois premieres équations, pour déterminer les mouvements des parties à l'égard de trois plans mobiles passant par ce centre, & paralleles aux plans ZAX, ZAY, XAY. Et les trois dernieres équations détermineront le mouvement de ce centre, en entendant alors par x, y & z, dans ces équations, les distances AB, BC', CC'.

652. Avant de parler de l'intégration des équations résultantes de ces substitutions, nous allons tirer quelques conséquences de ce qui précede.

En introduisant, comme nous venons de le faire, les angles q, s, r', nous considérons le corps comme tournant autour de l'axe CD, tandis que cet axe lui-même tourne parallélement au plan XAY & perpendiculairement à ce plan. Mais il peut arriver que quoique les forces appliquées à ce corps soient dirigées dans des plans différents, cependant il n'en résulte qu'un seul mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Pour déterminer les cas où cela arrive, & quel est alors l'axe, nous imaginerons que ce soit CD. On aura donc alors $dq = 0$ & $ds = 0$. Ainsi, pour déterminer le mouvement, dans cette supposition, il suffira de substituer dans les équations du mouvement, les valeurs de x, y, z, dx, dy, dz en y regardant q & s comme constantes. Ces équations, en observant que $\sin^2 r + \cos^2 r = 1$, $\sin^2 s + \cos^2 s = 1$, &c, seront......

$$\int m(-gh \sin r \cos q + gh \cos r \sin s \sin q - gg \cos s \sin q)\frac{dr'}{dt} = C$$

$$\int m(-gh \sin r \sin q - gh \cos r \sin s \cos q + gg \cos s \cos q)\frac{dr'}{dt} = C'$$

$$\int m(gg \sin s + gh \cos r \cos s)\frac{dr'}{dt} = C''.$$

Égalant donc les valeurs de $\frac{dr'}{dt}$, on aura $C\int m\,(gg \sin s + gh \cos r \cos s) = C''\int m\,(-gh \sin r \cos q + gh \cos r \sin s \sin q - gg \cos s \sin q)$, & $C'\int m\,(gg \sin s + gh \cos r \cos s) = C''\int m\,(-gh \sin r \sin q - gh \cos r \sin s \cos q + gg \cos s \cos q)$. Or q & s devant être des constantes, il est visible que pour que cette condition ait lieu, tous les termes qui

Z

renferment r, doivent être zéro, puisque r renfermant r' ou le mouvement de rotation, varie en même-temps que r'; il faut donc que $\int mgh \sin r = 0$, & $\int mgh \cos r = 0$; ce qui réduit nos deux équations a $C \int mgg \sin s = C'' \int m. (-gg \cos s \sin q)$, & $C' \int m (gg \sin s) = C'' \int mgg \cos s \cos q$, ou $C \sin s = -C'' \cos s \sin q$, & $C' \sin s = C'' \cos s \cos q$, qui donnent $\tan q = -\frac{C}{C'}$, & $\tan s = -\frac{C'' \sin q}{C}$. Substituant donc dans ces deux dernieres équations, les valeurs de C, C' & C'', déterminées par ce qui a été dit ci dessus (649), on aura les valeurs de s & de q, ou la position cherchée de l'axe CD, qui sera l'axe fixe de rotation si les deux équations $\int mgh \sin r = 0$, & $\int mgh \cos r = 0$ ont lieu.

Si dans ces deux dernieres équations on substitue au lieu de r, la valeur $r' - r''$, on aura $\int mgh\, r' \cos r'' - \int mgh \sin r'' \cos r = 0$, & $\int mgh \cos r' \cos r'' + \int mgh \sin r' \sin r'' = 0$. Or comme ces équations doivent avoir lieu indépendamment de toute valeur particuliere de l'angle de rotation r', il est visible que chaque terme affecté de r' doit être zéro séparément, ce qui donne quatre équations, mais qui se réduisent aux deux suivantes $\int mgh \sin r'' = 0$, & $\int mgh \cos r'' = 0$, qui ne dépendent que de la figure du corps.

On voit donc que si la figure du corps est telle que ces deux équations ne puissent pas avoir lieu à la fois pour l'axe de rotation déterminé par les valeurs de $\tan q$, & de $\tan s$, cet axe ne sera point le seul axe de rotation. Alors pour avoir le mouvement au bout d'un temps quelconque, il faudra procéder à l'intégration des équations données (649), après y avoir substitué pour x, y, & z leurs valeurs en a, r', r'' & s.

Mais si les deux équations $\int mgh \sin r'' = 0$, & $\int mgh \cos r'' = 0$, ont lieu à l'égard de cet axe, alors la vîtesse de rotation $\frac{dr'}{dt}$ sera constante & aura pour valeur $\frac{C''}{\int mgg \sin s}$ ou $\frac{C''}{\sin s \int mgg}$, ainsi qu'il résulte de ce qui précede.

653. Quoiqu'il puisse souvent arriver que les deux équations $\int mgh \sin r'' = 0$, &c, n'aient pas lieu à l'égard de l'axe de rotation déterminé par les valeurs de q & de s, données ci-dessus, il y a néanmoins toujours dans quelque corps que ce soit, au moins trois axes relativement auxquels ces équations

peuvent avoir lieu ; c'est-à-dire, trois axes dont chacun a cette propriété, qu'un corps qui aura commencé à tourner autour de l'un, persévérera à tourner uniformément autour de ce même axe. Voici comment on peut les déterminer.

Supposant dans la figure 161 que le point A & le point quelconque C du corps, sont un seul & même point ; que AX, AY, AZ, sont trois axes fixes dans le corps ; & que CD est l'axe cherché : si l'on appelle x', y', z' les distances du point M à ces axes ; & que l'on appelle q, s & r'' les angles $QC'R$, PCn & MPm, on aura évidemment pour x', y', z' les mêmes valeurs en r'' qu'on a trouvées ci-dessus (650) en r, pour x, y & z. Et si de ces équations on tire les valeurs de $g\, fin\, r''$, $g\, cof\, r''$ & de h, on aura $g\, fin\, r'' = x'\, fin\, q - y'\, cof\, q$, $g\, cof\, r'' = x'\, cof\, q\, fin\, s + y'\, fin\, q\, fin\, s - z'\, cof\, s$, & $h = x'\, cof\, q\, cof\, s + y'\, fin\, q\, cof\, s + z'\, fin\, s$.

Substituant ces valeurs dans les équations $\int m\, g\, h\, fin\, r'' = o$, $\int m\, g\, h\, cof\, r'' = o$, on aura deux équations dans lesquelles si l'on fait $\int m\, x'x' = A$, $\int m\, y'y' = B$, $\int m\, z'z' = C$, $\int m\, x'y' = D$, $\int m\, x'z' = E$, $\int m\, y'z' = F$; A, B, C, &c, seront censées des quantités connues, parce qu'elles pourront être déterminées par les méthodes ordinaires du calcul intégral. On divisera la premiere de ces équations par $cof\, s$, & la seconde par $fin\, s\, cof\, s$, & ayant substitué pour $\frac{fin\, s}{cof\, s}$, sa valeur $tang\, s$, on tirera de la premiere la valeur de $tang\, s$, & de la seconde, celle de $\frac{tang\, s}{1 - tang^2\, s}$, exprimées en A, B, C, &c, $fin\, q$ & $cof\, q$. Substituant dans la seconde, au lieu de $tang\, s$, sa valeur tirée de la premiere, on aura une équation qui ne renfermera plus d'autre inconnue que q : & si dans celle-ci on observe de mettre 1 pour $fin^2\, q + cof^2\, q$, & enfin $tang\, q$ au lieu de $\frac{fin\, q}{cof\, q}$, ou $cof\, q\, tang\, q$ au lieu de $fin\, q$; on aura enfin une équation du troisieme degré, dont $tang\, q$ sera l'inconnue : cette équation étant résolue donnera la valeur de $tang\, q$, & celle-ci fera connoître la valeur de $tang\, s$.

654. Donc si l'équation qui donne la valeur de $tang\, q$ a trois racines réelles, il y aura, comme nous l'avons dit ci-dessus, trois axes de rotation uniforme. Or voici comment on peut s'assurer que $tang\, q$ aura en effet trois valeurs réelles.

Concevons les lignes ICG & CF perpendiculaires à CD, la premiere dans le plan $CC'KP$, & la seconde perpendiculaire à ce même plan : je dis que ICG, & CF seront les deux autres axes de rotation uniforme. En effet, les conditions nécessaires pour que CD soit un axe de rotation uniforme, sont que $\int mgh \sin r'' = 0$, & $\int mgh \cos r'' = 0$; c'est-à-dire, que $\int m \times Mm \times CP = 0$, & $\int m \times Pm \times CP = 0$; donc par la même raison, les conditions nécessaires pour que ICG soit un axe de rotation uniforme, sont que $\int m \times Mm \times Pm = 0$, & $\int m \times CP \times Pm = 0$; & les conditions nécessaires pour que CF soit un axe de rotation uniforme, sont que $\int m \times Pm \times Mm = 0$, & $\int m \times Mm \times CP = 0$. Or, dans chacune de ces deux couples d'équation, il y en a une qui étant commune avec les deux équations relatives à l'axe CD, a déja lieu. Il ne s'agit donc plus que de faire voir que l'équation $\int m \times Pm \times Mm = 0$, commune à ces deux couples d'équations, mais, qui ne leur est pas commune avec aucune des deux équations relatives à l'axe CD, est néanmoins une suite de ces deux-ci, ou, ce qui revient au même, que chacune de ces deux couples d'équations conduit à la même équation en q, que les deux équations relatives à l'axe CD.

Or, pour nous en convaincre, prenons les deux équations relatives à l'axe ICG, savoir $\int m \times Pm \times CP = 0$, & $\int m \times Pm \times Mm = 0$. En faisant attention aux valeurs trouvées ci-dessus pour Mm, Pm & CP, on verra facilement que l'équation $\int m \times Pm \times Mm = 0$, est la même qu'on auroit si dans l'équation $\int m \times Mm \times CP$, on substituoit au lieu de s, $s + 90°$; donc elle donnera pour $tang\,(s + 90°)$, c'est-à-dire, pour $-\cot s$ qui est la même chose, la même valeur que celle-ci donnoit, dans le cas de l'axe CD, pour $tang\ s$. A l'égard de l'équation $\int m \times Pm \times CP = 0$, comme elle est commune à l'axe ICG & à l'axe CD, elle donnera comme ci-devant la même valeur pour $\frac{tang\ s}{1 - tang^2 s}$, or cette derniere quantité est la même que $\frac{-\cot s}{1 - \cot^2 s}$; donc quand on substituera dans celle-ci pour $-\cot s$ sa valeur, il est évident qu'on aura la même équation, que lorsque dans le cas précédent, on substituoit pour $tang\ s$, sa valeur dans $\frac{tang\ s}{1 - tang^2 s}$; donc on est toujours conduit à la même équation, quel que ſoit celui des trois axes CD, CF, CG que l'on regarde comme axe de rotation uniforme; donc l'équation qui donne la valeur de $tang\, q$, détermine en même temps ces trois axes, par ſes trois différentes racines.

Concluons donc de là, qu'à l'égard de tout axe de rotation uniforme, on a tout à-la fois $\int mgh \sin r'' = 0$, $\int mgh \cos r'' = 0$, & $\int mgg \sin r'' \cos r'' = 0$.

On voit donc qu'il y a toujours au moins trois axes de rotation uniforme, dans quelque corps que ce ſoit; mais il peut y en avoir une infinité, dans un grand nombre de corps. Ces corps ſont ceux dans leſquels les valeurs des quantités que nous avons repréſentées, ci-deſſus par A, B, C, &c. ſont telles que les équations $\int mgh \sin r'' = 0$, $\int mgh \cos r'' = 0$, ont lieu, indépendamment de toute valeur de s ou de q.

655. Paſſons maintenant à la détermination des mouvements que peut prendre un corps attaché à un point fixe autour duquel il peut tourner dans tous les ſens; c'eſt-à-dire, à l'intégration des équations données (648), après les ſubſtitutions preſcrites (650). Pour rendre ces équations plus ſimples, nous ſuppoſerons que CD eſt un des axes de rotation uniforme, & nous chercherons quel peut être le mouvement de CD, & le mouvement autour de CD.

Nous nous bornerons aux corps dans leſquels $\int mgg \sin^2 r'' = \int mgg \cos^2 r''$; c'eſt-à-dire, dans leſquels $\int m \times \overline{Mm}^2 = \int m \times \overline{PM}^2$, ce qui comprend tous les ſolides de révolution & une infinité d'autres.

Puiſque nous prenons CD, pour un des axes de rotation uniforme, nous aurons donc $\int mgh \sin r'' = 0$, $\int mgh \cos r'' = 0$, $\int mgg \sin r'' \cos r'' = 0$. Donc 1° dans la ſubſtitution que l'on fera des valeurs de x, y & z, en g, h, r, s & q, on rejettera tous les termes où gh entrera; parce que $\sin r$ étant égal à $\sin r' \cos r'' - \sin r'' \cos r'$, $\int mgh \sin r$ ſera $= \sin r' \int mgh \cos r' - \cos r' \int mgh \sin r''$, c'eſt à-dire $= 0$, on verra de même que $\int mgh \cos r = 0$.

2°. Puiſque $\int mgg \sin^2 r'' = \int mgg \cos^2 r''$, on rejettera auſſi tous les termes dans leſquels devra entrer $\sin r \cos r$; car cette quantité étant $\sin(r' - r'') \cos(r' - rr'')$ ou $\sin r' \cos r' \cos^2 r'' - \cos^2 r' \sin r'' \cos r' + \sin^2 r' \sin r'' \cos r'' - \sin r' \cos r' \sin^2 r''$, $\int mgg \sin r \cos r$ ſera zéro, puiſque d'ailleurs (654) . . . . . $\int mgg \sin r'' \cos r''$ eſt zéro.

En ſuppoſant $\int mgg \sin^2 r'' = Mkk$, qui eſt cenſée une quantité connue, & dans laquelle M marque la masse du corps, on pourra dans tous les termes où entrera $\int mgg \sin^2 r$, ainsi que dans ceux où entrera $\int mgg \cos^2 r$, substituer Mkk; parce que $\int mgg \sin^2 r = \int mgg (\sin^2 r \cos^2 r' - 2 \sin r' \cos r' \sin r'' \cos r'' + \sin^2 r'' \cos^2 r') = \sin^2 r' \times Mkk + \cos^2 r' \times Mkk = Mkk$. Enfin on fera $\int mhh = Mll$. Avec ces attentions les substitutions seront beaucoup plus promptes.

Supposons, maintenant, que les forces qui sollicitent le corps, sont la pesanteur dirigée perpendiculairement au plan XAY, & qu'il n'y ait pas d'autres forces qui fassent varier le mouvement primitivement imprimé. On aura $f dt = 0$, $f' dt = 0$, & $f'' dt = -p dt$; p étant la vitesse qu'un corps pesant acquiert en une seconde de temps, en tombant librement. Je mets le signe $-$, parce qu'en établissant (646) les équations du mouvement actuel, nous avons supposé que la vitesse $f'' dt$ étoit dirigée dans le sens dans lequel les z tendent, au lieu qu'ici elle est dirigée en sens contraire. Supposons de plus que dt est constant; alors les équations données (643) seront $\int m' p c' dt = \int m \left(\frac{z ddx - x ddz}{dt}\right)$, ou $p dt \int m'c' = \int m \frac{d(z dx - x dz)}{dt}$, $p dt \int m' c = \int m \frac{d(z dy - y dz)}{dt}$, & $0 = \int m \frac{d(y dx - x dy)}{dt}$. Avant de substituer pour x, y & z leurs valeurs, déterminons $\int m' c$ & $\int m' c'$.

Les quantités $\int m' c$ & $\int m' c'$, étant la somme des produits des parties du corps, par leurs distances aux plans ZAY & ZAX, on peut (268) à la place de ces quantités, substituer le produit de la masse entiere, par la distance de son centre de gravité à chacun de ces deux plans. Supposons, pour plus de simplicité, que ce centre de gravité soit en L sur l'axe même CD; & concevons toujours que le point A est le même que le point C, abaissons la perpendiculaire LL' sur le plan XAY, & de L', la perpendiculaire $L'L''$ sur $C'R$; il faudra donc au lieu de $\int m' c$ & $\int m' c'$, mettre $M \times L'L''$, & $M \times C'L''$. Or, en appelant a la distance CL, on aura $CL' = a \cos s$, $L'L'' = a \cos s \sin q$, & $C'L'' = a \cos s \cos q$. D'après ces observations, si l'on exécute toutes les substitutions, on aura, après avoir divisé par M, les trois équations suivantes...............,

$pa \cos s \cos q \, dt^2 = d(-ll ds \cos q) - ll dq \sin s \cos s \sin q - kk ds \cos q$

$+ kkdq \sin s \sin q - 2 kkdr \cos s \sin q) \ldots (A)$.
$pa \cos s \sin q\, dt^2 = d(-llds \sin q + lldq \sin s \cos s \cos q - kkds \sin q - kkdq \sin s \cos s \cos q + 2 kk dr \cos s \cos q) \ldots (B)$.
$0 = d(-lldq \cos^2 s - kkdq \sin^2 s - kkdq + 2 kkdr \sin s) \ldots (C)$.

Si après avoir multiplié la premiere par $\sin q$, on en retranche la seconde multipliée par $\cos q$, on aura..............
$0 = lldsdq - llddq \sin s \cos s - lldqds \cos^2 s + lldqds \sin^2 s + kkdsdq + kkddq \sin s \cos s + kkdqds \cos^2 s - kkdqds \sin^2 s - kkddr \cos s + 2 kkdrds \sin s \ldots (D)$.

Si après avoir multiplié la premiere par $\cos q$, on l'ajoute à la seconde multipliée par $\sin q$, on aura..................
$pa \cos s\, dt^2 = -(ll + kk) dds + (kk - ll) dq^2 \sin s \cos s - 2 kk drds \cos s$ (E).

Et l'équation (C) après la différentiation exécutée, donne $0 = -llddq \cos^2 s + 2 lldqds \sin s \cos s - kkddq \sin^2 s - 2 kkdqds \sin s \cos s - kkddq + 2kkddr \sin s + 2kkdrds \cos s = 0$ (F).

Si après avoir multiplié l'équation (D), par $\cos s$, on en retranche l'équation (F) multipliée par $\sin s$, on aura après avoir divisé par $2\, kk$, $ddq \sin s + dqds \cos s - ddr = 0$, dont l'intégrale est $dr = dq \sin s + C dt$. Et si l'on substitue pour dr cette valeur, dans l'intégrale de l'équation (C) qui est évidemment $-lldq \cos^2 s - kkdq \sin^2 s - kk dq + 2 kk dr \sin s = C' dt$, on aura $-(ll + kk) dq \cos^2 s + 2 kk C dt \sin s = C' dt$, ou
$$dq = \frac{2 kk C \sin s - C'}{(ll + kk \cos^2 s} dt,$$ & par conséquent........
$$dr = \frac{2 kk C + (ll - kk) C \cos^2 s - C' \sin s}{(ll + kk) \cos^2 s} dt.$$

Il ne reste donc plus qu'à substituer ces valeurs dans l'équation (E), & intégrer l'équation en s, ds, dds & dt qui en résultera. Nous n'entrerons point dans ce détail, & nous nous bornerons au cas où la pesanteur est nulle.

656. Lorsque $p = 0$, les équations A, B, C, s'intégrent tout de suite, & donnent $-llds \cos q - lldq \sin s \cos s \sin q - kkds \cos q + kkdq \sin s \cos s \sin q - 2kk dr \cos s \sin q = C dt$. (A')
$-llds \sin q + lldq \sin s \cos s \cos q - kkds \sin q - kkdq \sin s \cos s \cos q + 2 kkdr \cos s \cos q = C' dt \ldots$ (B').
$-lldq \cos^2 s - kkdq \sin^2 s - kkdq + 2 kkdr \sin s = C'' dt \ldots$ (C')

Si après avoir multiplié la premiere par $cof\,q$, on l'ajoute à la feconde multipliée par $fin\,q$, on aura $-(ll+kk)\,ds = (C\,cof\,q + C'\,fin\,q)\,dt \ldots (E')$.

Si après avoir multiplié la premiere par $fin\,q$, on en retranche la feconde multipliée par $cof\,q$, on aura .... $-(kk-ll)\,dq\,fin\,s\,cof\,s - 2\,kkdr\,cof\,s = (C\,fin\,q - C'\,cof\,q)\,dt \ldots$, (F'). Et fi dans celle-ci, on met pour dr fa valeur tirée de l'équation C', on aura $-(kk+ll)\,dq\,cof\,s - [(C\,fin\,q - C'\,cof\,q)\,fin\,s - C''\,cof\,s]\,dt = 0 \ldots$ (G). Subftituant pour dt fa valeur tirée de l'équation E', on a $-dq\,(C\,cof\,q + C'\,fin\,q)\,cof\,s + ds\,fin\,s\,(C\,fin\,q - C'\,cof\,q) = C''\,ds\,cof\,s$, dont l'intégrale eft $C''' - (C\,fin\,q - C'\,cof\,q)\,cof\,s = C''\,fin\,s$.

De cette équation on tirera facilement la valeur de $fin\,q$, & celle de $\sqrt{1 - fin^2\,q}$ ou de $cof\,q$; d'où il fera facile d'avoir dq exprimé en s & ds. Subftituant dans l'équation E, on aura dt en s & ds, & en intégrant on aura t. Enfin mettant pour dt & dq leurs valeurs dans l'équation C', on aura la valeur de dr en s & ds.

On peut fimplifier beaucoup cette folution, par une confidération qu'on peut appliquer avantageufement à l'intégration pour un corps de figure quelconque. C'eft qu'on peut toujours fuppofer $C = 0$, & $C' = 0$; parce qu'il eft toujours poffible de trouver deux axes à l'égard defquels les valeurs trouvées (649) pour C & C' foient zéro. En faifant cette fuppofition pour le cas préfent, on aura 1° $ds = 0$, & par conféquent s conftant, 2° $dq = \frac{C''\,dt}{kk + ll}$, c'eft-à-dire que la rotation autour de AZ eft uniforme. 3° $dr = \frac{ll - kk}{2\,kk}\,dq\,fin\,s$; c'eft-à-dire, que la rotation autour de CD eft auffi uniforme.

Des ofcillations des corps flottants.

657. EXAMINONS maintenant le mouvement du corps, lorfqu'il peut faire de très-petites ofcillations dans tous les fens, fa figure étant d'ailleurs quelconque. Nous fuppoferons que le point C (*Fig.* 161) eft le centre de gravité; que CD fait à chaque inftant un très-petit angle avec $C'Q$, qui en fait auffi un très-petit avec $C'R$; & que l'angle de rotation r' eft très-petit pendant tout le mouvement,

Si l'on reprend les valeurs que nous avons données (650) pour x, y & z, en s, q & r, & qu'on y suppose que s, q & r' soient de très-petits angles, ces valeurs se réduiront aux suivantes : $x = h + gs\cos r'' - gq \sin r''$, $y = hq - gr' \cos r'' + g \sin r''$, $z = hs - g \cos r'' - gr' \sin r''$ en mettant s, q, r', au lieu de $\sin s$, $\sin q$, $\sin r'$; 1 au lieu de $\cos s$, $\cos q$, $\cos r'$, & négligeant les termes où entreroient qs, qr', sr'. Si on substitue ces valeurs dans $\int m\,(zdx - xdz)$, $\int m\,(zdy - ydz)$ & $\int m\,(ydx\ xdy)$, en observant de rejetter les termes où quelqu'une des variables très petites s, q & r se trouveroit multipliée par sa différentielle, ou par celle de l'une ou l'autre des autres ; que de plus on fasse $\int mgg \sin^2 r'' = A$, $\int mgg \cos^2 r'' = B$, $\int mgg \sin r'' \cos r'' = C$, $\int mgh \sin r'' = D$, $\int mgh \cos r'' = E$, & $\int mhh = F$, on aura..

$$\int m(zdx - xdz) = -Bds - Fds + Cdq + Ddr'$$
$$\int m(zdy - ydz) = -Dds - Edq + Bdr' + Adr'$$
$$\int m(ydx - xdy) = Cds - Adq - Fdq + Edr'.$$

Ainsi, en supposant dt constant, dans les équations données (648), & mettant les quantités $\int m \left[z\,d\left(\frac{dx}{dt}\right) - x\,d\left(\frac{dz}{dt}\right) \right]$, &c, sous cette forme $\int m \frac{d(zdx - xdz)}{dt}$, on aura après avoir multiplié par dt, & substitué les valeurs qu'on vient de trouver, on aura, dis-je, ...

$$\int m'(fa - f''c')\,dt^2 = -Bdds - Fdds + Cddq + Dddr'$$
$$\int m'(f'b - f''c)\,dt^2 = -Ddds - Eddq + Bddr' + Addr'$$
$$\int m'(fa' - fb')\,dt^2 = Cdds - Addq - Fddq + Eddr',$$

équations qui conviennent à tous les mouvements où un corps de figure quelconque fait des oscillations infiniment petites dans tous les sens.

658. Pour appliquer ceci aux oscillations des corps flottants, il faut déterminer ce que sont alors les forces $m'fdt$, $m'f'dt$, $m'f''dt$. Or nous avons démontré (345) que lorsqu'un corps solide est plongé dans un fluide, les forces qui le pressent horizontalement, se font équilibre ; on aura donc (645)........ $\int m'(fa' - fb')\,dt = 0$ & (314) $\int m'fdt = 0$, & $\int m'f'dt = 0$. Ces deux dernieres équations font voir que le centre de gravité ne peut avoir d'autre mouvement qu'un mouvement vertical. Or il est aisé de démontrer d'après les principes donnés (345 & 408)

que non-seulement les forces $m'fdt$ & $m'f'dt$ se font équilibre entr'elles, mais encore que les forces $m'fdt$ se font équilibre entr'elles, & qu'il en est de même des forces $m'f'dt$, donc $\int m'fa\,dt = 0$, & $\int m'f'.b\,dt = 0$.

Reste donc à déterminer $\int m'f'c'\,dt$ & $\int m'f''c\,dt$, ainsi que $\int m'f''dt$ qui, en particulier, doit donner le mouvement vertical du centre de gravité. Or toutes les parties du corps sont sollicitées par la pesanteur avec des vîtesses égales, chacune, à $p\,dt$, p étant la vîtesse que la pesanteur donne en une seconde de temps à un corps libre; ainsi toutes les forces des particules, en vertu de la pesanteur, se réduisent à une seule $= Mp\,dt$. De plus, par la pression du fluide, le corps est poussé de bas en haut par une force égale au poids du volume de fluide déplacé; en sorte que si V' représente ce volume, pour un instant quelconque; & si l'on suppose que la densité du fluide soit à celle de $M :: e : 1$, on aura $eV'p\,dt$ pour cette force, laquelle (344) passe par le centre de gravité de la partie submergée. On voit donc que le corps n'est soumis qu'à l'action de deux forces, toutes deux verticales, dont l'une $Mp\,dt$ passe par le centre de gravité de ce corps, & dont la seconde $eV'p\,dt$ passe par le centre de gravité de la partie submergée. Donc la force qui sollicite le centre à descendre, est $Mp\,dt - eV'p\,dt$, & par conséquent l'accroissement instantané de sa vîtesse, est $p\,dt - \frac{eV'}{M}p\,dt$ ou $p\,dt\left(1 - \frac{eV'}{M}\right)$. Donc 1° si l'on nomme y la quantité verticale très-petite dont le centre de gravité est descendu au bout du temps t, on aura $p\,dt\left(1 - \frac{eV'}{M}\right) = d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{ddy}{dt}$ à cause de dt constant.

2°. La somme des moments $\int m'f''c'dt$, $\int m'f''c\,dt$ n'est autre chose ici que la différence des moments des deux forces $Mp\,dt$ & $eV'p\,dt$ qui sont les seules qui agissent sur le corps; or comme nous considérons ici les moments par rapport à des axes qui passent par le centre de gravité, le moment de la force $Mp\,dt$ sera zéro; donc si l'on représente par k & k' les distances du centre de gravité de la partie submergée, au plan vertical passant par CR, & au plan vertical qui lui seroit perpendiculaire, on aura $\int m'f''c'\,dt = k'eV'p\,dt$, & $\int m'f''c\,dt = keV'p\,dt$; reste donc à déterminer k, k', & V'.

Concevons que $ARD'S$ (*Fig.* 162) soit la section du corps par le plan qui toucheroit la surface du fluide, c'est-à-dire, par le plan de flotaison : que C' soit la projection du centre de gravité du corps ; ACD' la direction de la projection de l'axe CD de la figure 161 ; RS perpendiculaire à AD. Soient G & G' les centres de gravité des espaces $RD'S$, ARS ; & ayant mené les perpendiculaires LG, LG', sur AD' nous pouvons regarder CI, LG, $C'L'$, $L'C'$ comme connues, puisque nous avons des méthodes pour les déterminer (261 & *suiv.*)

Soient pareillement g & g' les centres de gravité des espaces ARD', ASD' ; en abaissant les perpendiculaires gl $g'l'$ sur RS, on pourra regarder $C'l$, $C'l$, gl & $g'l$, comme connue.

Concevons que MTN (*Fig.* 163) soit la section verticale du corps, par un plan passant par le centre de gravité C ; AD' la même ligne que dans la figure 162 ; & supposant que tant par la descente verticale du centre de gravité du corps, que par la rotation par laquelle ce même corps décrit le petit angle que nous avons appelé s, la surface de flotaison représentée par AD' devienne ad' ; si par le point i où cette ligne coupe la verticale CT, on conçoit le plan eq parallele AD', la partie plongée qui étoit ATD', étant devenue aTd', sera $ATD' + eAD'q$ $qid' + aie$; en sorte que $eAD'q$ sera l'augmentation de ce volume submergé, dûe à la descente du centre de gravité du corps ; & $qid' - aie$ sera la diminution qu'apporte à ce volume, la rotation par laquelle le corps décrit l'angle s. Or comme $C'i$ est supposé une petite quantité, si l'on appelle S la surface $ARD'S$ (*Fig.* 162) représentée par AD' (*Fig.* 163), on aura $eAD'q = Sy$.

A l'égard des onglets ou solides décrits pendant la rotation s, & représentés par aie & qid', il est aisé de voir 1° que l'angle $aie = qid' = s$; 2° qu'en nommant a & a' les distances $C'L$, $C'L'$, & S S'' les surfaces RDS, RAS (*Fig.* 162), l'onglet qid (*Fig.* 163) sera exprimé par $aS's$, & l'onglet aie, par $a'S's$. * Donc si le corps n'avoit d'autre mouvement qu'un

* Voici sur quoi est fondée cette évaluation du solide de l'onglet. Si l'on appelle y une ordonnée quelconque RDS (*Fig.* 162), paral lele à RS, & dx la hauteur du petit trapèze élémentaire de cette surface ; & enfin s, l'arc très-petit décrit autour de RS par un point qui en feroit éloigné d'une quantité $= 1$, on aura sy pour le petit arc décrit par l'ordonnée y, $\frac{1}{2} y \times sy$ pour la surface du sec-

mouvement vertical commun à toutes les parties, & le mouvement de rotation s, le volume submergé seroit $V' + Sy - aS's + aS''s$, V' étant la valeur de ce volume lorsque le corps n'a aucun mouvement. Mais puisque nous supposons que le corps tourne aussi autour de l'axe CD (*Fig.* 161), & décrit autour de cet axe un petit angle r, dans le temps t; on verra de même en nommant b & b' les distances $C'l$, $C'l$ (*Fig.* 162), & s' & s'' les surfaces ARD', ASD, on verra, dis-je, qu'en vertu de ce mouvement, le volume de la partie submergée, varie encore de la différence des deux onglets engendrés par ces deux surfaces, laquelle est exprimée par $- bs'r + b s'r$.

Quant à la rotation autour de l'axe vertical, celle par laquelle le corps décrit l'angle q, il est évident qu'elle n'occasionne aucun changement dans le volume de la partie submergée; donc enfin le volume submergé après le temps t, a pour valeur $V' + Sy - aS's + aS''s - bs'r' + b's''r'$. Déterminons maintenant k & k'.

Lorsque le corps est tranquille, le centre de gravité de la partie submergée est dans la ligne verticale qui passe par le centre de gravité C du corps (354). Soit donc alors C' ce premier centre; & supposons que lorsque ad' est devenue la surface de flotaison, ce centre ait changé de place, & se trouve sous quelque point de la partie $AC'S$ (*Fig.* 162); de maniere que sa distance à CT (*Fig* 163) mesurée dans le plan MTN, soit $c''t$, & que sa distance au plan MTN soit g. Cela posé, (261) le moment $aTd' \times c't$, du volume aTd', devant être égal à la somme des moments de ses parties déterminées ci-dessus, pris avec des signes convenables, sera composé du moment de $eADq$, pris négativement, plus le moment de ATD' qui est zéro, puisque son centre de gravité est en C'', plus le moment de qid', plus le moment de aie. Or si l'on suppose que N (*Fig.* 162) soit le centre de gravité de la surface $ARD'S$, on pourra regarder ce point comme le centre de gravité du solide représenté par $eAD'q$ (*Fig.* 163) dont

tout décrit en tournant; donc $\frac{1}{2}y \times sydx$, sera le petit solide décrit par le trapèze ydx, & par conséquent $\int \frac{1}{2}y \cdot sydx$ ou $s\int \frac{1}{2}y \cdot ydx$ sera l'onglet. Or $\int \frac{1}{2}y \cdot ydx$ est la somme des moments de tous les trapèzes, par rapport à RS, & par conséquent (261) est égale à $S \times a$; donc l'onglet est aSs. On voit par-là comment on peut démontrer fort simplement & généralement le Theorême du Pere *Guldin*, dont ceci est un cas.

le moment à l'égard de $C'T$ sera, par conséquent, $Sy \times C'O$ ou Sly, en appellant $C'O$, l.

Quant aux mouvements des parties qid' & aie; d'après ce qui a été dit (359) on verra facilement que si l'on se représente les deux surfaces RDS & RAS, comme composées de trapèzes dont les bases soient paralleles à AD, & que pour ces deux surfaces, on appelle N & N' la somme des produits de chaque trapèze par le $\frac{1}{3}$ du quarré de sa base, ces deux moments seront exprimés par Ns & $N's$; on aura donc $a\,Td' \times c't$, ou $ATD' \times c''t$, ou $V' \times c''t = -Sly + Ns + N's$ & par conséquent $c''t = \dfrac{-Sly + Ns + N's}{V'}$.

A l'égard de la distance g du centre de gravité de la partie submergée, au plan MTN; si l'on appelle l' la distance ON (*Fig.* 162), & que pour les surf ces RDS, RAS, on marque par n & n' la moitié de la somme des produits des mêmes trapèzes que ci-devant, multipliés chacun par le produit de sa base & de la distance de cette base à AD', on trouvera facilement que $g = \dfrac{Sl'y - ns + n's}{V'}$.

Enfin si l'on cherche, de même, les mouvements qu'aura parallélement & perpendiculairement au plan MTN dans des directions horisontales, le centre de gravité de la partie submergée, en vertu de la rotation r seule, on retrouvera pour le premier de ces mouvements . . . .
$\dfrac{-ir' + i'r'}{V'}$; & pour le second $\dfrac{Ir' + I'r'}{V'}$, en représentant par I, I', i, i', les quantités qui, pour les surfaces ASD', ARD', sont analogues à ce que N, N', n, n' sont pour les surfaces $RD'S$, RAS. Et si l'on fait attention aux sens dans lesquels chacun de ces quatre mouvements sont dirigés, on verra que le centre de gravité de la partie submergée s'éloigne de CT parallélement au plan MTN dans le sens de $D'A$ de la figure 162, d'une quantité $= \dfrac{-Sly + Ns + N's + ir' - i'r'}{V'}$, & perpendiculairement au même plan, & dans le sens de RS de la figure 162, d'une quantité $= \dfrac{Sl'y - ns + n's - Ir' - I'r'}{V'}$.

Mais dans ce même temps, le point C'' de la ligne CC'', ou CT, dont la position est fixe dans le corps, s'éloigne en sens

contraire, par le mouvement angulaire s, d'une quantité $= CC' \times s$ ou hs, ce qui diminue d'autant la distance du centre de gravité de la partie submergée au plan vertical mené par le centre de gravité du corps, parallélement à la premiere position de MIN; cette distance sera par conséquent. . . .
$-hs\,\frac{-Sly+Ns+N's+ir'-i'r'}{V'}$. Pareillement, par le mouvement angulaire r', ce point C'' de la ligne CT se meut parallélement à hS de la figure 161, & dans le sens de cette ligne, d'une quantité $= hr$ qui augmente d'autant la distance du centre de gravité de la partie submergée au plan vertical passant par le centre de gravité, & perpendicluaire à la premiere position de MIN. Donc cette distance devient
$hr' + \frac{Sl'y - ns + n's - Ir' - I'r'}{V'}$.

Mais si au lieu de supposer que lorsque r & s sont zéro, le centre de gravité de la partie submergée soit dans la ligne CC'', on suppose qu'il étoit éloigné du plan vertical passant par RS, d'une quantité très-petite $= g'$, vers A; & du plan vertical passant par AD', d'une quantité très-petite $= g'$, vers S; il est visible qu'on doit encore augmenter les deux distances qu'on vient de déterminer, des quantités g' & g''; en sorte qu'on aura pour ces deux distances, les deux quantités . . . . . .

$$g' - hs + \frac{-Sly + Ns + N's + ir' - i'r'}{V'}, \text{ \& } \ldots\ldots$$

$$g'' + hr' + \frac{Sly - ns + n's - Ir' - I'r'}{V'}.$$

Ce sont les distances du centre de gravité de la partie submergée, tant au plan $CC'QP$ (*Fig.* 161) qu'au plan qui lui seroit perpendiculaire & passeroit par CC'; & h marque toujours la distance du centre de gravité du corps, au centre de gravité de la partie submergée lors de l'équilibre, parce que la distance de ces deux centres, dans le sens vertical, ne varie qu'infiniment peu.

Or à cause de l'angle très petit q, les deux distances que nous venons de déterminer, peuvent être censées perpendiculaires à $C'R$ & $C'B$, & meme, être les distances à ces lignes; parce que le centre de gravité de la partie submergée ne s'éloignant que très-peu de la ligne CC', sa distance à $C'Q$ ne peut différer de sa distance à $C'R$, que d'une quantité très-petite par rapport à chacune de ces deux diſtances; donc les deux valeurs que nous venons de trouver, ſont, ce que nous avons appellé k' & k, à cela près, qu'en les ſubſtituant, on doit les prendre négativement, parce qu'elles tombent de côtés opposés à ceux où k' & k ont été ſuppoſés dans la ſolution générale. Faiſant donc toutes les ſubſtitutions qui réſultent de tout ce que nous venons d'expoſer, nous aurons pour déterminer le mouvement, les quatre équations ſuivantes en négligeant les termes où les variables q, r', s, y, ſeroient multipliées ou par elles-mêmes, ou entr'elles . . . .

$$epdt^2(g'V' - hV's - Sly + Ns + N's + ir' - i'r') = -(B+F)dds + Cddq + Dddr'$$

$$epdt^2(g''V' + hV'r' + Sl'y - ns + n's - Ir' - I'r') = -Ddds - Eddq + (A+B)ddr'$$

$$0 = Cdds - (A+F)ddq + Eddr'$$

$$\& \; pdt^2\left[1 - \frac{e}{M}(V' + Sy - aS's + a'S''s - bs'r' + b's''r')\right] = ddy.$$

La troiſieme de ces équations donne $Cdt = Cds - (A+F)dq + Edr'$; puis $Ct + C' = Cs - (A+F)q + Er'$. Si de cette équation on tire la valeur de q pour la ſubſtituer dans les deux premieres, on aura deux équations de cette forme $dt^2(Py + Qs + Rr') = Xdds + Tddr'$ P, Q, R, X & T, étant des conſtantes; ces deux équations, avec la derniere, étant intégrées, donneront le mouvement du corps. Or nous avons vu (178) la méthode pour intégrer ces ſortes d'équations; la queſtion eſt donc réduite à un calcul connu.

659. Si le plan vertical qui paſſe par CD, diviſe le corps en deux parties égales & ſemblables, on aura $l' = 0$, $n = 0$, $n' = 0$, $I = I'$, $i = i'$, $D = 0$, $E = 0$, & par conſéquent (654) $C = 0$; de plus $bs'b' = b's''$; & ſuppoſant $g' = 0$, & $g'' = 0$, ainſi qu'on en eſt le maître, les quatre équations ſe réduiront à....

$$epdt^2(-hV's - Sly + Ns + N's) = -(B+F)dds$$

$$epdt^2(hV'r' - 2Ir') = (A+B)ddr'$$

$$0 = -(A+F)ddq$$

$$\& \; pdt^2\left[1 - \frac{e}{M}(V' + Sy - aS's + a'S''s)\right] = ddy$$

ou $pdt^2\left[1 - \frac{e}{M}(V' + Sy - Sls)\right] = ddy$, car par la propriété des centres de gravité on a $a S' - a' S'' = S l$.

Ce sont là les équations qu'on doit intégrer pour déterminer convenablement le *Roulis* & le *Tangage* dans les vaisseaux. Arretons-nous-y un peu. La troisieme équation fait voir qu'il n'y aura aucun mouvement horisontal sensible dans l'axe CD. En effet, elle donne ou $A + F = 0$, ou $ddq = 0$; or $A + F = 0$ ne peut jamais avoir lieu dans quelque corps que ce soit; on a donc $ddq = 0$. Cette équation intégrée, comme à l'ordinaire, donneroit $dq = Cdt$, ou $\frac{dq}{dt} = C$; mais il est clair que $C = 0$, puisqu'autrement la vitesse horisontale étant constante, cela ne s'accorderoit pas avec la supposition de ses oscillations. On a donc $dq = 0$; & par conséquent $q = C'$, constante qu'on peut toujours supposer $= 0$.

Cette valeur de q réduit la question de ces sortes de mouvements, à l'intégration des trois équations suivantes. . . .

$$epdt^2[-hV's - Sly + (N+N')s] = -(B+F)dds$$
$$epdt^2(hV'r' - 2Ir') = (A+B)ddr'$$
$$pdt^2[1 - \frac{e}{M}(V' + Sy - Sls)] = ddy.$$

La seconde de ces trois équations ne renfermant que r', fait voir que le roulis est indépendant du tangage & des oscillations verticales du centre de gravité du navire; & les deux autres ne renfermant point r', font voir que le tangage & le mouvement vertical du centre de gravité sont indépendants du roulis. La seconde équation étant multipliée par dr', & intégrée, donne $\frac{1}{2}epdt^2(hV' - 2I)r'^2 + Cdt = \frac{1}{2}(A+B)dr'^2$, ou $epdt^2(2I - hV')(kk - r'r') = (A+B)dr'^2$, en supposant que $r' = k$, lorsque $\frac{dr}{dt} = 0$; c'est-à-dire, au commencement ou à la fin d'une oscillation, k étant la plus grande valeur de r'; on a donc $dt\sqrt{\frac{pe(2I-hV')}{A+B}} = \frac{-dr'}{\sqrt{kk - r'r'}}$ *

$$= \frac{-\frac{1}{k}dr'}{\sqrt{1 - \frac{r'r'}{kk}}}\text{; donc (158) } \frac{r'}{k} = C' + cost\sqrt{\frac{pe(2I-hV')}{A+B}},$$

* Je mets le signe $-$, parce que t croissant, r' diminue.

ou

ou bien (puisque $r' = k$ lorsque $t = o$) $\frac{r'}{k} = \ldots\ldots\ldots$ $cos\, t \sqrt{\frac{pe\,(2I - hV')}{A+B}}$.

Cette valeur de r' présente trois cas tant qu'on suppose h positif; c'est-à-dire, le centre de gravité du corps au-dessus de celui de la partie submergée : ou $hV' = 2I$; ou hV' est plus grand que $2I$, ou enfin, il est plus petit; si $hV' = 2I$ ou si $h = \frac{2I}{V'}$, on a $\frac{r'}{k} = cos\, t \times o = 1$; c'est-à-dire, $r' = k$; ce qui indique que le corps ne fera point d'oscillations dans le sens des arcs r'; mais qu'il demeurera dans l'inclinaison qu'on lui donnera. Or si l'on y fait attention, on verra que ce cas est celui où le centre de gravité seroit précisément au métacentre; car la valeur $\frac{2I}{V'}$ revient à la même que nous avons déterminée (359) pour la hauteur du métacentre. Donc, lorsque le centre de gravité sera sur le métacentre même, le vaisseau ne sera pas propre à porter la voile; il n'aura aucune disposition à revenir à l'état de l'équilibre, & pour peu que l'inclinaison augmente, il se renversera.

Si hV' est plus grand que $2I$, c'est-à-dire, si h est plus grand que $\frac{2I}{V'}$, la valeur de r' devient imaginaire, & fait voir que si petite qu'on suppose l'inclinaison, il y aura toujours renversement, puisque la supposition d'oscillations, même très-petites, conduit alors à une absurdité. Ce cas est celui où le centre de gravité seroit au-dessus du métacentre.

Mais si hV' est plus petit que $2I$, ou h plus petit que $\frac{2I}{V'}$, alors r' sera réel, & le roulis se fera avec d'autant plus de sûreté que h sera plus petit que $\frac{2I}{V'}$: la stabilité du vaisseau sera d'autant plus grande. Pour déterminer quelle est alors la durée des oscillations, on fera $r' = o$, ce qui donnera. . . $cos\, t \sqrt{\frac{pe\,(2I - hV')}{A+B}} = cos\, 90°$; ou (*Géom.* 153), en réduisant en degrés, & supposant que le rapport de $c : 1$ est celui de la circonférence du cercle à son diametre.........

$$cos\frac{360^\circ}{2c}t\sqrt{\frac{pe(2I-hV')}{A+B}} = cos\,90^\circ;\ \text{donc}.......$$

$$\frac{360^\circ}{2c}t\sqrt{\frac{pe(2I-hV')}{A+B}} = 90^\circ,\ \text{ou}\ 2t = c\sqrt{\frac{A+B}{pe(2I-hV')}},$$

pour la durée d'une oscillation entiere. On voit donc, que toutes choses d'ailleurs égales, les oscillations du roulis seront d'autant plus promptes, que le centre de gravité du navire sera plus au-dessous du métacentre.

Si l'on fait $\frac{2I}{V'} - h = h'$, h' sera la distance du centre de gravité au métacentre, & l'on aura $2I - hV' = h'V'$, ce qui donne $2t = c\sqrt{\frac{(A+B)}{peh'V'}}$. Or le poids du volume de fluide déplacé (343) étant égal au poids total M du navire, on a $eV' = M$; donc $2t = c\sqrt{\frac{(A+B)}{pMh'}}$; d'où connoissant la distance h' du métacentre au centre de gravité, le poids total du navire, & la quantité $A+B$ qui est la somme des produits de toutes les parties de la masse du vaisseau par les quarrés de leurs distances à l'axe mené par le centre de gravité parallélement à la quille, il sera facile de connoître la durée des oscillations du roulis.

Comme r' n'entre point dans l'expression de $2t$, on voit donc que les oscillations du roulis sont toutes de même durée, & indépendantes de l'étendue des arcs décrits, pourvu que ces arcs soient petits.

Si l'on veut connoître la longueur du pendule simple qui feroit ses oscillations en même temps que le vaisseau fait les siennes; il n'y a qu'à égaler la valeur de $2t$ à celle qui a été trouvée (469), & on aura cette longueur que nous y avons appellée $a = \frac{A+B}{Mh'}$.

660. Nous n'avons considéré d'autres forces que la pesanteur, & la pression de l'eau sur la partie submergée de la carene. Si l'on vouloit encore considérer l'action du vent sur

les voiles, & la résistance de l'eau sur la partie de la carene exposée au choc, il est évident d'après tout ce qui précede, qu'il faudroit de plus, faire entrer dans les équations, la somme des moments des parties de ces forces qui tendent à faire tourner autour des mêmes axes que ci devant. Ainsi, si l'on appelle T, T', T'' les surfaces qui, exposées au choc direct de l'eau, éprouveroient les mêmes résistances que le vaisseau éprouve perpendiculairement à la quille, parallélement à la quille, & verticalement; on aura (395 & 404) $neu^2 Tdt$, $neu^2 T'dt$, $neu^2 T'' dt$ pour ces forces, u étant la vîtesse du vaisseau, & e la densité de l'eau. Pareillement si l'on appelle T''' la surface des voiles, & g l'angle d'incidence apparent du vent sur les voiles, on aura $n'e' T''' u'^2 dt \sin^2 g$ pour l'action du vent perpendiculairement aux voiles, e' étant la densité de l'air, & u' la vîtesse relative du vent. Et si l'on décompose cette action en trois autres, l'une perpendiculaire à la quille, la seconde parallele à la quille, & la troisieme verticale; on pourra, puisqu'on suppose l'inclinaison fort petite, négliger la force verticale, du moins en supposant toutes les voiles verticales; & nommant g' l'angle que les voiles font avec la quille, on aura $n'e' T''' u'^2 dt \sin^2 g'$, & $n'e' T''' u'^2 dt \sin^2 g \sin g'$ pour les forces perpendiculaires & paralleles à la quille. Donc, si pour la résistance de l'eau, on appelle X & X' les distances de la premiere force aux deux axes AY & AZ (*Fig.* 161) (le point A étant censé le même que le point C); qu'on appelle de même, Y & Y', les distances de la seconde force aux deux axes AX & AZ; Z & Z' les distances de la troisieme aux deux axes AY & AX; qu'on appelle pareillement, pour le vent, X'' & X''' les distances de la premiere force, & Y'', Y''' les distances de la seconde aux mêmes axes, on pourra, à cause de la petitesse des angles q, r, s, regarder toutes ces distances comme constantes, & comme étant celles de ces mêmes forces, aux axes qui passeroient par le centre de gravité parallélement à la quille, perpendiculairement à la quille dans le sens vertical, & perpendiculairement à la quille dans le sens horisontal. Alors en vertu de tout ce qui a été dit depuis le n° 657, & eu égard aux réductions indiquées (659) on aura . . . .

$$-neu^2 T'Y dt^2 + neu^2 T'' Z' dt^2 - n'e' T''' Y'' u'^2 \sin^2 g \sin g' dt^2$$
$$+ ep\, dt^2 [-hV's - S'/y + (N+N')s] = -(B+F) dds$$
$$-neu^2 TX dt^2 + neu^2 T'' Z dt^2 - n'e' T''' X'' \sin^2 g \cos g' dt^2$$

$+epdt^2(hV't'-2Ir')-(A+B)ddr'$

$neu^2T'Y'dt^2-neu^2TX'dt^2-n'e'u'^2T'''Y'''\sin^2 g\sin g' dt^2$

$-n'eu'^2T'''X'''\sin^2 g\cos g' dt^2=-(A+F)ddq$

$-\frac{neu^2T''}{M}dt^2+pdt^2[-\frac{e}{M}(V'+Sy-Sls)]=ddy$. Et les quantités $\frac{n'e'T'''u'^2\sin^2 g\cos g'-neu^2T}{M}dt$ & ...... $\frac{n'e'T'''u'^2\sin^2 g\sin g'-neu^2T'}{M}dt$ seront les forces accélératrices du centre de gravité parallélement & perpendiculairement à la quille.

Ce sont là les équations qui détermineront par quels degrés le vaisseau s'incline d'une petite quantité, dans tous les sens, tant par l'action des voiles que par la résistance de l'eau, & par sa poussée verticale résultante de la pression seule. Mais les degrés par lesquels le vaisseau prend de l'inclinaison, ne sont pas tant ce qu'il importe de connoitre que la mesure même de cette inclinaison, & des causes qui peuvent la produire jusqu'au moment où le vaisseau arrive à l'état d'uniformité. Or c'est ce qu'il est facile de déterminer à présent. En effet, quand le vaisseau est arrivé à l'état d'uniformité, il est visible que le mouvement de son centre de gravité ne recevant plus aucun changement, on doit avoir $n'e'T'''u'^2\sin^2 g\cos g'-neu^2T=0$, $n'e'T'''u'^2\sin^2 g\sin g'-neu^2T'=0$, $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ (qui exprime l'accélération verticale du centre) $=0$; ou $ddy=0$, puisque nous supposons dt constant; par la même raison on doit avoir $ddr'=0$, $dds=0$, $ddq=0$. Faisant donc ces suppositions dans les quatre équations que nous venons de trouver, & mettant au lieu de $\frac{2I}{V'}-h$, la quantité h' qui, comme nous l'avons déja vu, exprimera la distance du centre de gravité au métacentre; mettant aussi au lieu de eV', la masse M du vaisseau, on aura, à l'aide de ces équations & des deux que nous venons de trouver, le rapport général entre la force du vent, la résistance de l'eau sur la carene, l'étendue des voiles, la figure de la carene, la situation du point vélique, le poids du vaisseau, la distance de son centre de gravité au métacentre, l'inclinaison dans le roulis, l'inclinaiſon dans le tangage ; & la quantité dont le centre de gravité ſera élevé par l'action combinée de la réſiſtance de l'eau, & du vent ; en un mot, tout ce qui peut déterminer la ſtabilité du vaiſſeau.

Nous aurions bien deſiré pouvoir nous livrer ici, aux conſéquences également utiles & nombreuſes qui réſultent de ces équations, ainſi que des principes que nous avons expoſés ſur les mouvements de rotation. Mais de pareils détails ne peuvent être ſuffiſamment expoſés que dans un Traité particulier du Navire ; & les autres matieres qui nous reſtent à traiter, ne nous permettent pas d'en rien dire davantage ici. C'eſt par cette même raiſon que nous ne nous arrêterons pas non plus à l'intégration des deux équations du n° 659, qui donnent les oſcillations pour le tangage & celles du centre de gravité ; équations qui font voir que ces deux mouvements ſont abſolument dépendants l'un de l'autre ; & qu'ils ne ſeront ſimultanés que dans un très-petit nombre de cas ; en ſorte qu'on doit regarder comme trop limité, ce que *M. Bouguer* a donné ſur cet objet, puiſqu'il y a ſuppoſé que ces deux mouvements étoient toujours ſimultanés. Au reſte, comme cette matiere eſt très-utile, nous eſpérons pouvoir nous en occuper plus particulierement dans la ſuite.

De l'équilibre & du mouvement ſur les plans.

661. Si un corps P (*Fig.* 164) de figure quelconque, qui touche un plan XZ en un point quelconque C, eſt ſollicité par une force unique ; il ne peut demeurer immobile ſur ce plan qu'à ces deux conditions : 1° que la direction AD de la force unique qui le ſollicite, ſera perpendiculaire au plan XZ ; 2° que cette direction paſſera par le point C, où ce corps touche le plan.

La néceſſité de la premiere de ces deux conditions eſt évidente. Quant à la ſeconde, il eſt facile de voir qu'elle n'eſt pas moins néceſſaire, puiſque ſi la direction *AD* du corps *P'*, par exemple, quoique perpendiculaire au plan, ne paſſoit pas par le point d'attouchement *C*, la réſiſtance du plan qui ne peut s'exercer que ſuivant la perpendiculaire au point *C*, ne ſeroit point directement oppoſée à la force *AD*, & ne pourroit par conſéquent la détruire, même quand on la ſuppoſeroit égale à cette force.

662. Si le corps au lieu de ne toucher le plan que par un ſeul point, le touche par pluſieurs points, ou par une ſurface plane (*Fig.* 165 & 166), alors il n'eſt pas indiſpenſable que la force unique *AD* qui agit ſur lui, paſſe par quelqu'un de ces points; mais il faut qu'elle ſoit perpendiculaire au plan, & qu'elle puiſſe être décompoſée ſeulement en autant de forces perpendiculaires au plan, qu'il y a de points qui repoſent ſur ce plan, & qui paſſent par ces points. Enſorte, par exemple, que ſi le corps *P* (*Fig.* 165) touchoit par deux points *C* & *C'*, & que la force *AD* ne ſe trouvât pas dans le plan qui paſſeroit par les perpendiculaires élevés au point *C* & *C'*, l'équilibre ne ſe-

roit pas possible, parce que la force AD, ne pourroit être décomposée en forces qui passassent par C & C', sans qu'il en naquît une troisieme qui ne seroit point soutenue.

663. Donc si un corps qui touche un plan en un ou plusieurs points, est sollicité par plusieurs forces dirigées comme on le voudra, il faut 1° que ces forces puissent être réduites à une seule qui soit perpendiculaire à ce plan. 2°. Que celle-ci, dans le cas où elle ne passe pas par un des points d'attouchement, puisse être décomposée en autant de forces qui lui soient paralleles, qu'il a de points d'attouchement; & que celles-ci passent, chacune, par un de ces points d'attouchement.

664. Si la force unique qui sollicite le corps, est la pesanteur, il faudra donc que le plan soit horisontal; & si la verticale menée par son centre de gravité, ne rencontre pas l'un des points touchants, il faudra du moins, qu'elle ne laisse pas tous ces points d'un même côté.

665. Donc si le corps n'est sollicité que par deux forces, il faudra 1° que ces deux forces soient dans un même plan: 2° que ce plan soit perpendiculaire à celui sur lequel

le corps appuie : 3° que la résultante qui doit toujours être perpendiculaire à ce dernier plan, ne laisse pas tous les points de contact, d'un même côté.

Et si de ces deux forces, l'une est la pesanteur, il faudra de plus, que ce plan soit vertical, & passe par le centre de gravité du corps.

666. Voyons maintenant quel rapport il doit y avoir, en général, entre deux forces qui tiennent un corps en équilibre sur un plan.

Soient CQ, CP (*Fig.* 167) les directions de ces deux forces; concevons que AB soit l'intersection du plan de ces deux forces avec celui sur lequel le corps appuie; & ayant mené la perpendiculaire CH sur AB, imaginons sur cette ligne comme diagonale, & sur les directions CQ, CP, comme côtés, le parallélogramme $CEDF$. Pour que la résultante des deux forces Q & P soit dirigée suivant CD ou CH, il faut (223) que les deux forces Q & P soient entr'elles, comme CF est à CE; & alors les deux forces Q & P, & la pression qu'elles exercent sur le plan, & que je représente par H, seront telles qu'on aura $Q : P : H :: CF : CE : CD$.

667. Selon ce qui a été dit (233) on

aura également $Q : P : H :: \sin ECD : \sin FCD : \sin ECF$.

668. De deux points A & B pris arbitrairement sur AB, menons AG & BG perpendiculaires sur les directions des deux forces Q & P. Le triangle ABG, aura ses côtés perpendiculaires sur ceux du triangle CDE, & lui sera par conséquent semblable (*Géom.* 111). On aura donc $AG : BG : AB :: DE$ ou $CF : CE : CD$; c'est-à-dire, (666) : : $Q : P : H$; donc $AG : BG : AB :: Q : P : H$.

Mais (*Géom.* 299) $AG : BG : AB :: \sin ABG : \sin BAG : \sin AGB$; donc $Q : P : H :: \sin ABG : \sin BAG : \sin AGB$. C'est-à-dire, que lorsque deux forces seulement, agissent sur un corps pour le tenir en équilibre sur un plan; si l'on conçoit deux autres plans auxquels ces deux forces soient perpendiculaires, ces deux forces & la pression sur le plan vertical, sont représentées, chacune, par le sinus de l'angle compris entre les plans auxquels les deux autres forces sont perpendiculaires.

669. Puisque les rapports que nous venons d'établir, ont lieu, de quelque nature que soient les deux forces P & Q, ils ont donc encore lieu, lorsque l'une des deux, la

force P, par exemple, eſt la peſanteur : alors le plan BG eſt horiſontal.

670. De ce que (667) $Q : P : H$ (*Fig.* 150) : : *ſin* ECD : *ſin* FCD : *ſin* ECF, on conclud $Q : P$: : *ſin* ECD *ſin* : FCD ; ou : : *ſin* HCP : *ſin* HCQ, donc ſi connoiſſant le poids P, la puiſſance Q, & l'angle HCP que la direction du poids P fait avec la perpendiculaire au plan, on veut déterminer celui que la direction de la puiſſance Q doit faire avec la même perpendiculaire, on l'aura facilement par cette proportion, qui donne $\mathit{ſin}\ HCQ = \frac{P \times \mathit{ſin}\ HCP}{Q}$. Mais (*Géom.* 275) quand on détermine un angle par ſon ſinus, on n'eſt pas fondé à prendre pour valeur de cet angle, l'angle même qu'on trouve par les tables, plutôt que ſon ſupplément : donc le même poids peut être ſoutenu ſur le même plan, par la même puiſſance dirigée de deux manieres différentes. Ces deux directions doivent donc être telles que les deux angles HCQ, HCQ qu'elles formeront avec la perpendiculaire CH, ſoient ſupplément l'un de l'autre ; or ſi l'on prolonge la perpendiculaire HC, vers I, le plus grand de ces deux angles HCQ, eſt ſupplément de QCI ; donc puiſqu'il doit auſſi être ſupplément du plus petit angle

HCQ, il s'enſuit que QCI, & le plus petit angle HCQ, ſont égaux; donc les deux directions ſuivant leſquelles une même puiſſance peut ſoutenir un même poids, ſur un même plan, ſont également inclinées à l'égard de la perpendiculaire à ce plan, & par conſéquent à l'égard de ce plan; & elles tombent toujours toutes deux du côté de la perpendiculaire au plan, oppoſé à celui où ſe trouve la direction de la peſanteur du corps.

671. Dans la même proportion $Q : P :: \text{ſin } HCP : \text{ſin } HCQ$, ſi l'on met au lieu de l'angle HCP, l'inclinaiſon ABG du plan, qui eſt égale à cet angle, ainſi qu'il eſt aiſé de le voir, puiſque ces deux angles ſont complément des angles oppoſés au ſommet BRP, CRH, on aura $Q :: P :: \text{ſin } ABG : \text{ſin } HCQ$, & par conſéquent $Q = \frac{P \times \text{ſin } ABG}{\text{ſin } HCQ}$. Donc l'inclinaiſon du plan, & le poids reſtant les mêmes, la puiſſance Q doit être d'autant plus petite que le ſinus de ſon inclinaiſon à l'égard de la pependiculaire eſt plus grand, donc puiſque le plus grand de tous les *ſinus* eſt celui de 90°, on peut dire que *la direction ſelon laquelle une puiſſance a le moindre effort à faire pour ſoutenir un poids ſur un plan incliné, eſt la direction parallele à ce plan.*

672. Dans ce cas, la proportion $Q : P ::$

ſin ABG : *ſin* HCQ devient $Q : P ::$ *ſin* $ABG : 1$, ou au rayon. Or ſi du point A (*Fig.* 169) on abaiſſe la perpendiculaire AL ſur l'horiſontale BG; dans le triangle rectangle ALB, on a *ſin* $ABG : 1 :: AL : AB$; donc $Q : P :: AL : AB$; c'eſt-à-dire, que *lorſque la puiſſance eſt parallele au plan, elle eſt au poids, comme la hauteur du plan eſt à ſa longueur.*

673. Si la direction de la puiſſance étoit horiſontale (*Fig.* 170) l'angle HCQ, ſeroit égal à l'angle BAL, ainſi qu'il eſt aiſé de le voir, on auroit donc alors $Q : P ::$ *ſin* ABG ou *ſin* ABL : *ſin* BAL; c'eſt-à dire, (*Géom.* 299) $:: AL : BL$; donc *quand la direction de la puiſſance eſt parallele à la baſe du plan incliné, la puiſſance eſt au poids, comme la hauteur du plan eſt à la baſe.*

En général, la proportion $Q : P ::$ *ſin* ABG : *ſin* HCQ (*Fig.* 168) fait voir que la puiſſance ſera toujours d'autant plus petite, que l'inclinaiſon du plan à l'horiſon ſera plus petite, & qu'en même-tems, l'inclinaiſon de la puiſſance au plan ſera plus petite; car plus cette derniere inclinaiſon ſera petite, & plus l'angle HCQ qui en eſt le complément approchera de 90^o.

Nous n'avons rien dit du point où la direction de la puiſſance doit être appliquée au corps. Ce point n'eſt déterminé par d'autre condition, ſinon que la direction de la puiſſance rencontre la verticale menée par le centre de gravité du corps, en un point d'où la perpendiculaire menée ſur le plan, ait les conditions mentionnées (661 & *ſuiv.*). C'eſt par-là qu'on verra qu'une ſphere homogène, ou d'une matiere uniforme, ne peut être ſoutenue ſur un plan incliné, que lorſque la direction de la force qui doit la ſoutenir, paſſe par ſon centre de figure qui eſt en même-temps ſon centre de gravité.

674. Si au lieu d'oppoſer une ſeule puiſſance à l'action du poids, on en oppoſoit pluſieurs; alors tout ce que nous venons de dire de la puiſſance Q, devroit s'entendre de la réſultante de ces puiſſances. Par exemple, ſi le corps P (*Fig.* 171) eſt ſoutenu ſur le plan incliné par l'action combinée d'une puiſſance R & de la réſiſtance d'un point fixe B auquel eſt appliquée la corde BOR qui embraſſe ce corps; on imaginera par le point de concours S des deux cordons BH, RD, une ligne SC qui diviſe en deux parties égales l'angle des deux cordons BH, RD. Si cette ligne coupe la verticale menée par le centre de gravité de P, en un point C, duquel on puiſſe abaiſſer ſur le plan, une perpendiculaire qui paſſe par le point d'attouchement

H, l'équilibre fera poffible; & le rapport du poids *P*, à l'effort fuivant *SC*, fera déterminé par ce qui précede. Quand au rapport de l'effort fuivant *SC*, à la puiffance *R*, il fera le même que dans la poulie mobile (624). Ainfi, fi la puiffance *R* eft parallele au plan, le poids *P* fera à la puiffance *R*, comme la longueur du plan eft à la moitié de fa hauteur; c'eft-à-dire, que la puiffance fera moitié moindre que fi elle foutenoit fans le fecours du point fixe *B*.

675. A l'égard de la preffion totale qui s'exerce fur le plan, elle fera toujours facile à déterminer, par les rapports que nous venons d'établir. Quant aux preffions particulieres qui en réfultent fur chacun des points par lefquels le corps repofe ou appuie fur le plan, elle eft abfolument indéterminée, fi ce n'eft dans le cas où le corps ne touche que par deux points : alors la preffion totale fe diftribue à ces deux points, en raifon inverfe des diftances de fa direction à ces deux mêmes points Dans tout autre cas, il n'y a d'autres conditions pour les déterminer, finon 1° que leur fomme foit égale à la preffion totale. 2° Que la fomme de leurs moments pris par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de cette preffion totale, foit zéro; & qu'il en foit de même de la fomme

des moments par rapport à un autre axe perpendiculaire au premier, ces deux axes passant d'ailleurs par un point de la direction de la pression totale. Ainsi quand un corps repose sur un plan par une surface plane, il n'y a aucune raison pour supposer que tous les points sur lesquels il repose, éprouvent des pressions égales, si ce n'est lorsqu'il a la figure d'un prisme ou d'un cylindre droit.

676. A l'égard des corps qui appuient sur plusieurs plans à la fois, soit en vertu d'une force unique, soit en vertu de plusieurs forces dans lesquelles nous comprenons leur pesanteur, la loi générale de leur équilibre est 1° que la résultante de toutes ces forces puisse être décomposée en autant de forces qu'il y a de points par lesquels le corps appuie : 2° que celles-ci soient perpendiculaires au plan qui touche le corps en ce point.

De-là, on conclura que pour qu'un corps qui n'est sollicité que par sa pesanteur, demeure en équilibre entre deux plans inclinés, il faut qu'il y ait dans la verticale qui passe par son centre de gravité, au moins un point duquel on puisse abaisser, sur chacun de ces plans, une perpendiculaire; & que chacune de ces perpendiculaires ait les conditions mentionnées (661 & *suiv.*). Que par conſéquent ſi l'un des deux plans eſt horiſontal (*Fig.* 172), le corps ne peut demeurer en équilibre (abſtraction faite du frottement) que dans le ſeul cas où la verticale menée par ſon centre de gravité paſſeroit par quelqu'un des points où il touche le plan horiſontal, ou du moins dans le cas où tous ces points ne ſe trouveroient pas tous d'un même côté de cette verticale, & alors l'autre plan n'a rien à ſoutenir.

677. Ces principes ſuffiſent pour déterminer les conditions de l'équilibre à l'aide des plans, dans toutes les circonſtances. C'eſt par-là qu'on peut expliquer la force des voûtes, & en général, pourquoi les corps creux & dont la ſurface extérieure eſt convexe, ont plus de force pour réſiſter à la compreſſion, que ſi leur ſurface étoit plane. Par exemple, ſi un corps eſt compoſé de quatre parties *ABCD*, *CDFE*, *FEGH*, *ABGH* (*Fig.* 173) parfaitement dures, dont les courbures extérieures & intérieures ſoient circulaires & concentriques; & que ſuivant des directions tendantes au centre, on applique au centre de gravité de chaque partie, une même force; jamais, quelle que ſoit cette force, ces parties ne ſe ſépareront les unes des autres. Car il eſt facile de voir que la force appliquée à chaque partie pourra toujours

toujours être censé décomposée en deux autres, perpendiculaires aux deux faces planes de cette partie; & alors on verra que d'une partie à sa voisine, il y a toujours deux forces égales & directement opposées, qui, par conséquent, se détruisent; en sorte que toutes ces forces se font mutuellement équilibre.

Pareillement, si *EFGB*, *ABCD*, *HCKI* (*Fig.* 174) représentent trois voussoirs consécutifs, ou trois parties consécutives d'une voûte; on peut toujours imaginer de quelque point de la verticale menée par le centre de gravité de chacun, une perpendiculaire sur chacune des deux faces de ce voussoir; & comme il y a plusieurs points propres à remplir cette condition, il y en aura toujours un qui sera tel que la perpendiculaire menée sur une face sera directement opposée à la perpendiculaire menée sur cette même face, par quelque point de la verticale appartenant au voussoir voisin; or, en donnant à chaque voussoir, un poids suffisant, on pourra toujours rendre égales les deux forces dirigées suivant ces perpendiculaires, & par conséquent mettre ces voussoirs en équilibre; il n'y a que les deux voussoirs dont une des faces sera horisontale pour lesquels cette décomposition n'aura pas lieu, & qui, pour être retenus, exigeront une résistance horisontale.

678. Parlons maintenant du mouvement sur les plans, & en faisant encore abstraction du frottement.

Un corps qui est abandonné à sa propre pesanteur, & qui appuie une partie de sa surface sur un plan sans frottement, peut, généralement parlant, prendre deux sortes de mouvement; l'un qui sera commun à toutes les parties, & par lequel le centre de gravité glissera parallélement au plan, & pourra aussi s'approcher ou s'éloigner du plan; l'autre par lequel toutes les parties tourneront autour de leur centre de gravité, de maniere cependant que le corps touche toujours le plan en quelque point.

La regle générale pour savoir si le corps prendra, ou ne prendra pas quelque mouvement de rotation, en vertu de sa pesanteur, est d'examiner si la perpendiculaire menée du centre de gravité, sur le plan, rencontre quelqu'un des points par où le corps touche, ou ne les laisse pas tous d'un même côté. Si cette condition a lieu, il n'y aura pas de mouvement de rotation; parce que la pesanteur qui peut toujours être censée agir au centre de gravité même, pourra toujours y être décomposée en deux forces, l'une parallele au plan, l'une perpendiculaire à ce même plan. Or la ſeconde ayant les conditions requiſes (661 & *ſuiv.*) pour l'équilibre, ſera néceſſairement détruite. A l'égard de la premiere, puiſqu'elle paſſe par le centre de gravité, elle doit ſe diſtribuer également à toutes les parties qui n'auront par conſéquent, que des vîteſſes égales & paralleles au plan. Ainſi, pour le dire en paſſant, une ſphere poſée ſur un plan incliné, y deſcendroit en gliſſant, & non en roulant, s'il n'y avoit point de frottement; parce que la perpendiculaire menée de ſon centre de gravité ſur le plan, rencontre toujours la ſurface de cette ſphere, au point où celle-ci touche le plan.

Mais ſi la perpendiculaire menée du centre de gravité ſur le plan, ne rencontre aucun des points par leſquels le corps touche le plan; & ſi en même temps, elle les laiſſe tous d'un même côté; alors il y aura mouvement de rotation; parce que la réſiſtance du plan qui s'exerce ſuivant la perpendiculaire au point de contact (ou ſuivant la perpendiculaire qui paſſe entre les points de contact, lorſqu'il y en a pluſieurs) équivaut à une force qui pouſſeroit le corps ſuivant une direction parallele & en ſens contraire à celle ſelon laquelle il preſſe le plan; & comme, par la ſuppoſition, elle s'exerce fuivant une ligne qui ne paffe pas par le centre de gravité, elle ne peut manquer (321) de faire naître un mouvement de rotation.

679. Pour donner une idée de la maniere dont on doit alors déterminer le mouvement du corps, prenons le cas où la perpendiculaire DA (*Fig.* 175) élevée au point de contact D, eft dans un même plan avec la verticale menée par le centre de gravité G; & fuppofons que ces deux lignes fe rencontrent au point A, & que la figure du corps eft telle que le mouvement de rotation autour de G, peut fe faire autour d'un feul axe horifontal parallele au plan. Nous pourrons fuppofer la pefanteur appliquée en A, & l'y décompofer en deux forces, l'une fuivant une direction AZ, telle qu'elle puiffe être reçue fans perte par le corps; l'autre fuivant AD, & qui fera détruite. La force fuivant AZ ne paffant point par le centre de gravité, donnera (321) à ce centre, une vîteffe Gz parallele à AZ, & obligera en même temps les parties du corps de tourner autour de G. Déterminons l'une & l'autre de ces vîteffes.

J'obferve d'abord que fi le point D, au lieu d'être le point d'attouchement d'une furface courbe étoit une pointe, ou fommet d'un angle moindre que 180°, il faudroit pour que le point D ne quittât pas le plan, que la quantité dont le centre de gravité G, & par conféquent toutes les parties, s'approchent perpendiculairement au plan, fût égale à celle dont le mouvement de rotation en éloigne le point G. Mais fi la furface du corps eft courbe, le point d'attouchement D changera de place, non-feulement fur le plan, mais encore fur la furface du corps; & fi l'on fuppofe que le point i infiniment près de D, foit celui qui touchera le plan, dans l'inftant fuivant, & que par le point i on imagine la tangente ik rencontrée en k, par la perpendiculaire AD, il faudra que la quantité dont la nouvelle action de la pefanteur ramenera le centre vers le plan, foit égale à celle dont l'accélération furvenue dans le mouvement de rotation, tend à en éloigner le point D, moins la quantité Dk.

Cela pofé, nommons DG, z; l'angle GDH, y; i l'inclinaifon DBK du plan DB; à l'égard de l'horifon. Il eft aifé de voir qu'on aura $DAG = i$. Soit encore l'angle inconnu $DAZ = x$, & v la vîteffe de rotation d'un point éloigné de G d'une quantité $= 1$. Dans le triangle AGD, on aura $AG = \frac{Gd \sin GDA}{\sin GAD} = \frac{z \cos y}{\sin i}$. De G, menons sur AZ la perpendiculaire GI; & dans le triangle rectangle AIG nous aurons $GI = AG \times \sin GAI = \frac{z \cos y \sin(x-i)}{\sin i}$.

Soit p la vîtesse que la pesanteur donne à un corps libre, en une seconde de temps; pdt sera celle qu'elle lui donne pendant l'instant dt. Concevons donc cette vîtesse décomposée en deux autres suivant AZ & AD. Nous aurons pour la vitesse suivant AZ, & par conséquent pour Gz, la quantité $\frac{pdt \sin i}{\sin x}$ (133); donc en nommant M la masse du corps, $\frac{Mpdt \sin i}{\sin x}$ sera la force suivant AZ. Donc (594) l'accroissement dv de la vitesse de rotation, résultant de cette force, sera $dv = \frac{Mpdt \sin i}{\sin x} \times \frac{GI}{\int mrr}$, $\int mrr$ étant la somme des produits des particules du corps, par les quarrés de leurs distances à G. Mettant donc pour GI sa valeur, on aura $dv = \frac{Mzpdt \sin(x-i) \cos y}{\sin x \int mrr}$; donc la vitesse de rotation de D étant zdv, le petit espace circulaire Dn ou $zdvdt$ décrit en vertu de cette vîtesse, sera $\frac{Mz^2pdt^2 \sin(x-i) \cos y}{\sin x \int mrr}$. Or tandis que le point D décrit l'arc Dn, il est facile de voir, en menant no perpendiculaire sur DA, qu'il s'éleve au-dessus du plan d'une quantité $Do = Dn \times \frac{DH}{DG}$, GH étant la perpendiculaire menée de G sur le plan. Or $\frac{DH}{DG} = \cos y$; donc $Do = \frac{Mz^2pdt^2 \sin(x-i) \cos^2 y}{\sin x \int mrr}$.

Déterminons Dk. Or $Dk = Di \times \sin Dik = Di \times Dik$, parce que l'angle Dik est infiniment petit. D'ailleurs $Dik = iDH$; donc si l'on nomme Di, ds, & l'angle iDH, dz' on aura $Dk = ds\,dz'$. Donc la quantité dont le centre doit descendre perpendiculairement au plan, par la nouvelle accélération de la pesanteur, pour que le point i touche le plan, est $\frac{M z^2 p\, dt^2 \sin(x-i) \cos^2 y}{\sin x \int m r r} - ds\, dz'$. Voyons donc quelle est la quantité dont il descendra en effet. Décomposons la vîtesse Gz, en deux autres Gu & Gt parallele & perpendiculaire au plan. Nous aurons $Gu = Gz \sin z G t = \frac{p\, dt \sin i}{\sin x} \times \sin x = p.dt \sin i$, & $Gt = Gz \sin u Gz = Gz \cos DAZ = \frac{p\, dt \cos x \sin i}{\sin x}$. Donc le petit espace décrit en vertu de cette vîtesse, sera $\frac{p\, dt^2 \cos x \sin i}{\sin x}$. On aura donc $\frac{n\, dt^2 \cos x \sin y}{\sin x} = \frac{M z^2 p\, dt^2 \sin(x-i) \cos^2 y}{\sin x \int m r r} - ds\, dz'$. Mettant au lieu de $\sin(x-i)$ sa valeur $\sin x \cos i - \sin i \cos x$, on tirera de cette équation, $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{M z^2 p\, dt^2 \cos i \cos^2 y - ds\, dz' \int m r r}{p\, dt^2 \sin i \int m r r + M z^2 p\, dt^2 \sin i \cos^2 y}$. Substituant cette valeur dans celle de dv, après avoir mis dans celle-ci, pour $\sin(x-i)$, sa valeur $\sin x \cos i - \sin i \cos x$, on aura $dv = \frac{M z \cos y}{dt} \left(\frac{p\, dt^2 \cos i + ds\, dz'}{\int m r r + M z^2 \cos y}\right)$.

Soit GL une ligne fixe dans le corps ; celle, par exemple, qui au commencement du mouvement étoit perpendiculaire au plan. Nommons n l'angle LGH qu'elle forme actuellement avec la perpendiculaire au plan ; n sera donc l'angle de rotation. Nommons q l'angle LGD. Nous aurons $DGH = n - q$, & $y = 90° - n - q$, ce qui donne $\cos y = \sin(n-q)$; de plus, selon ce qu'on a vu (78), on aura $dz' = -dy + dq$.

Concevons que du rayon Gi on ait décrit l'arc il, le triangle Dil semblable à GHD, donnera $Di : Dl :: DG : DH :: 1 : \cos y$, & $Dl : il :: DH : GH :: \cos y : \sin y$; c'est-à-dire, qu'on aura $ds : -dz :: 1 : \cos y$ & $dy : z\, dq :: \cos y : \sin y$; donc $ds = \frac{-dz}{\cos y}$ & $dy \sin y = z\, dq \cos y$. Or par la nature du corps, on aura la valeur de z en q ; de plus, on a $dv = d\left(\frac{dn}{dt}\right) = \frac{ddn}{dt}$, en supposant dt constant ; substituant pour ds, dy, dv, dz', y & z ces valeurs, on aura une équation qui ne renfermera que n, q, ddn, dq & dt. Enfin l'équation $ds = -\frac{dz}{cof\,y} = \frac{-dz}{fin(n-q)}$ donnant $fin(n-q) = \frac{-dz}{ds}$, donnera n en q, puisque dz & ds ne renfermeront pas d'autre angle que q. On aura donc enfin une équation qui ne renfermera d'autres variables que q & t, & dans laquelle si l'on fait $dt = y'\,dq$, ce qui donnera à cause de dt constant, $ddq = \frac{-dy'dq}{y'}$, on aura une équation qui s'intégrera par la méthode donnée (165). Ayant trouvé la valeur de y' en q, on aura en intégrant l'équation $dt = y'dq$, la valeur de t en q ou de q en t; celle-ci donnera la valeur de dz & ds en t; & l'équation $cof\,y = \frac{-dz}{ds}$ donnera y en t; alors on aura aisément la distance du centre de gravité G au plan BD.

Enfin la valeur $pdt\,fin\,i$ qu'on a trouvée pour l'accroissement Gu de la vîtesse parallele au plan, faisant voir que le centre de gravité se meut parallélement au plan d'un mouvement uniformément accéléré, comme si le corps ne tournoit pas, il sera facile d'avoir au bout d'un temps quelconque t, la position du corps. Et si le plan est horisontal, alors la vîtesse du centre de gravité parallélement à ce plan, sera zéro; c'est-à-dire, que ce centre descendra dans une ligne verticale.

680. Si le corps tournoit sur une pointe ou sur un angle, alors on auroit $ds = 0$; z seroit constant, ainsi que q; ainsi, on auroit $dy = -dn$, & par conséquent $ddn = -ddy$. La valeur de dv, en menant au lieu de dv, sa valeur $\frac{ddn}{dt}$ ou $\frac{-ddy}{dt}$, seroit donc $\frac{-ddy}{dt} = \frac{Mz\,cof\,y \,.\, pdt\,cof\,i}{fmrr + Mz^2\,cof^2\,y}$ ou $-ddy = \frac{Mzp\,dt^2\,cof\,y\,cof\,i}{fmrr + Mz^2 - Mz^2\,fin^2\,y}$, équation dont chaque membre s'intégre facilement en multipliant par $-dy$ (133).

681. Si la figure & la position initiale du corps sont telles qu'en descendant le long du plan incliné, ses balancements ne puissent être que très-petits, alors voici comment on les déterminera.

Soit CGR (*Fig.* 176) une perpendiculaire à la surface courbe du corps, menée par le centre de gravité G. Quand le poids R sera arrivé sur le plan, CR sera perpendiculaire au plan; le mouvement de rotation cessera d'être accéléré, pour être ensuite retardé. Soit C le point où la perpendiculaire actuelle DC, rencontre CR. Comme l'arc DR est supposé fort petit, on peut regarder CR & DC, comme étant, chacun, le rayon de la développée en R; ainsi RC ou GC sont censés connus (77); je suppose $GC = a$. De plus, l'angle DCR ou $RGH = RGL - HGL$; or HGL est la quantité dont le corps a déja tourné, & RGL est celle dont il aura tourné quand le point R sera sur le plan; soit n' cette derniere quantité, on aura RCD ou $GCD = n' - n$. Or dans le triangle CGD, on a $GD : CG :: \sin GCD : \sin GDC :: GCD : \sin GDC$, à cause de l'angle GCD très-petit; donc $z \cos y = a(n' - n)$. Mettons donc pour dv, sa valeur $\frac{ddn}{dt}$; pour $z \cos y$, la valeur que nous venons de trouver; omettons dans le dénominateur de la valeur de dv, le terme $Mz' \cos^2 y$ qui est incomparablement plus petit que celui qui l'accompagne; & dans le numérateur omettons le terme $dsdz'$, parce que l'arc s étant supposé très-petit, $dsdz'$, est incomparablement plus petit que le terme $pdt^2 \cos i$; & nous aurons $ddn = \frac{Ma(n'-n)pdt^2 \cos i}{\int mrr}$; équation qui étant multipliée par dn, & intégrée, avec cette attention que lorsque $\frac{dn}{dt} = 0$, on ait $n = 0$, donnera $dn^2 = \frac{Mapdt^2 \cos i}{\int mrr}(2n'n - n^2)$, & par conséquent $dt\sqrt{\frac{Map \cos i}{\int mrr}} = \frac{dn}{\sqrt{2n'n - n^2}} =$

$$\frac{dn}{\sqrt{n'^2 - (n'-n)^2}} = \frac{1}{n'} \frac{dn}{\sqrt{1 - \left(\frac{n'-n}{n'}\right)^2}}.$$

Intégrant de nouveau (158), & ayant égard à ce que lorsque $n = 0$ on doit avoir $t = 0$, on a $\frac{n'-n}{n'} = \cos t \sqrt{\frac{Map \cos i}{\int mrr}}$. Donc enfin $n = n'\left(1 - \cos t \sqrt{\frac{Map \cos i}{\int mrr}}\right)$; ou bien en réduisant en degrés, & repréſentant par $1 : c$ le rapport du diametre à la circonférence, on a $n = n'\left(1 - cos\, t \times \frac{180°}{c}\sqrt{\frac{Map\, cos\, i}{fmrr}}\right)$.

Si l'on ſuppoſe $n = n'$, pour avoir la durée de la demi-oſcillation, on aura $1 - cos\, t \times \frac{180°}{c}\sqrt{\frac{Map\, cos\, i}{fmrr}} = 1$, & par conſéquent $cos\, t \times \frac{180°}{c}\sqrt{\frac{Map\, cos\, i}{fmrr}} = 0 = cos\, 90°$; dont $t = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{fmrr}{Map\, cos\, i}}$.

Tant que la quantité a qui repréſente la hauteur du point C de concours des perpendiculaires infiniment proches, au-deſſus du centre de gravité, ſera poſitive, la valeur de t ſera réelle: le corps pourra donc faire des oſcillations infiniment petites, ſi le point touchant D, au commencement du mouvement, a été mis fort près du point R. Mais ſi a eſt négatif, c'eſt-à-dire, ſi le point C ſe trouvoit au-deſſous du centre de gravité, la valeur de t ſeroit imaginaire ; & par conſéquent il n'y auroit point d'oſcillations infiniment petites.

682. Au reſte, quoique nous ayons ſuppoſé que la perpendiculaire au point touchant étoit dans un même plan avec la verticale menée par le centre de gravité, on n'en réſoudroit pas moins la queſtion par les mêmes principes, ſi ces deux lignes n'étoient pas dans un même plan, ayant égard, toutefois, à ce que le corps peut alors prendre trois mouvements de rotation, & à ce qui a été dit (645 *& ſuiv.*).

683. Si le corps avoit reçu, au commencement, une impulſion finie tendante à l'approcher du plan, on détermineroit ſon mouvement initial, ſans faire aucune attention à la peſanteur dont l'effet, dans un inſtant, eſt nul à l'égard de toute impulſion finie ; & la condition qui détermineroit ce mouvement initial, ſeroit que la vîteſſe du centre de gravité perpendiculairement au plan, fût égale à la vîteſſe avec laquelle le point touchant tend, en vertu de la rotation qu'il prendra, à s'écarter du plan perpendiculairement.

684. Si la ſurface ſur laquelle le corps deſcend, au lieu d'être plane, étoit une ſurface courbe, on auroit encore facilement la ſolution d'après les mêmes principes : i marqueroit un angle variable, dont la loi ſeroit donnée par la na-

ture de cette ſurface courbe : & la quantité dont le centre de gravité accéléreroit ſon mouvement perpendiculairement à la ſurface courbe ſur laquelle le corps deſcend, ſeroit égale à la même quantité que ci-devant (679), moins ou plus l'angle de contingence de cette ſurface multiplié par l'élément de la courbe que trace le point de contact; moins ou plus, dis-je, ſelon que cette ſurface ſeroit concave ou convexe.

685. Si le plan lui-même étoit mobile; alors il faudroit que la quantité dont s'accélere le mouvement du centre de gravité perpendiculairement au plan, fût égale à la même quantité que ci-devant, plus à celle dont l'accélération du mouvement du plan, entraîne perpendiculairement ce plan. Par exemple, ſi le plan, ou le corps quelconque terminé par la ſurface plane *BD* (*Fig.* 177) ne peut que gliſſer le long de l'horiſontale *BK*, en nommant x' l'eſpace qu'il parcourt, ddx' ſera celui qu'il parcourt en vertu de la preſſion qu'exerce ſur *BD* le corps qui tombe le long de *BD*; & il eſt facile de voir qu'en vertu de ce mouvement le plan *BD* ſe ſera éloigné de ſa premiere poſition, dans le ſens perpendiculaire, d'une quantité égale à $ddx' \sin i$; donc il faudra égaler la quantité dont le centre de gravité deſcend perpendiculairement au plan, par l'accélération, l'égaler, dis-je, à la même quantité que ci-devant (679) augmentée de $ddx' \sin i$.

De plus, comme la cauſe qui fait mouvoir le plan naît de la force ſuivant la perpendiculaire *AD*, force qui, en ſuivant les mêmes principes qu'au n° 679, & conſervant toujours les mêmes dénominations, ſera $= \frac{Mp\,dt \sin(x-i)}{\sin x} =$ $Mp\,dt\left(\cos i - \frac{\sin i \cos x}{\sin x}\right)$; ſi l'on décompoſe celle-ci en force perpendiculaire & force parallele à *BK*, on aura pour la force parallele à *BK*, $Mp\,dt \sin i\left(\cos i - \frac{\sin i \cos x}{\sin x}\right)$; c'eſt celle que reçoit le corps dont *BD* eſt la ſurface; donc ſi l'on appelle M' la maſſe de ce corps, on aura .... $\frac{M}{M'}p\,dt \sin i\left(\cos i - \frac{\sin i \cos x}{\sin x}\right)$ pour l'accroiſſement de la viteſſe du plan parallélement à *BK*; donc .... $\frac{M}{M'}p\,dt \sin i\left(\cos i - \sin i \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{ddx'}{dt}$ ſera l'équation qui déterminera le mouvement du plan, en mettant pour $\frac{\text{cof } x}{\text{fin } x}$ fa valeur trouvée (679). On voit par là comment on peut déterminer le mouvement d'un corps qui gliffe & roule en même temps fur une furface mobile ou immobile.

Du Frottement.

686. LA furface des corps, même les plus polis, eft hériffée d'un très-grand nombre d'éminences ou afpérités, & criblée de plufieurs cavités, qu'on appelle *Pores*. Lorfqu'un corps repofe fur un autre, les parties faillantes de l'un pénetrent dans les pores ou parties rentrantes de l'autre; & on ne peut dégager les unes des autres, qu'en employant une certaine force.

La réfiftance qui naît de cette propriété des corps, eft ce qu'on appelle la force du *frottement*. On diftingue deux fortes de frottement : celui qui a lieu, lorfqu'une des furfaces doit fimplement gliffer fur l'autre; & celui qui a lieu, lorfqu'une des furfaces, ou toutes deux, doivent fe mouvoir en tournant; tel eft le frottement des roues, fur le terrein. La réfiftance provenante de cette feconde efpece de frottement, eft beaucoup moindre que la premiere; parce que ce mouvement de rotation contribue, en partie, à dégager les afpérités.

Si les éminences dont la ſurface des corps eſt couverte, étoient parfaitement dures, & parfaitement liées à la ſurface, il faudroit, pour vaincre le frottement, ſoulever la maſſe. Et ſi elles étoient parfaitement flexibles, il n'y auroit aucune réſiſtance, aucun frottement. Mais comme elles ne ſont ni parfaitement dures, ni parfaitement flexibles, il s'enſuit 1° que la réſiſtance du frottement vient en partie de la difficulté de fléchir les aſpérités, en partie de la néceſſité de ſoulever un peu le corps. 2° Que les aſpérités n'ayant qu'un certain degré d'adhérence à la ſurface, lorſque la force néceſſaire pour faire gliſſer, ſurpaſſera ce degré d'adhérence, les aſpérités céderont à cette force, ſe briſeront, & les ſurfaces s'uſeront. Ainſi, l'effet du frottement dans les machines, eſt non-ſeulement d'abſorber une partie de la force motrice, mais encore d'accélérer la deſtruction des machines.

Il paroît très-difficile, pour ne pas dire impoſſible, d'établir des regles générales ſuffiſamment exactes, pour déterminer le frottement. En effet, on conçoit aiſément que cette réſiſtance doit varier ſelon le tiſſu & la nature des ſurfaces, objets ſuſceptibles d'autant de variétés qu'il y a de matieres différentes. Elle doit varier ſelon le degré de dureté des ſurfaces frottantes, & leur flexibilité; ſelon que les parties ſaillantes ſeront d'une figure & de dimenſions plus ou moins propres à pénétrer dans les pores; ſelon que la preſſion qui applique les ſurfaces l'une à l'autre, ſera plus ou moins grande; ſelon que cette preſſion aura agi plus ou moins long-temps; car les parties des ſurfaces ayant toujours une certaine flexibilité, les parties ſaillantes s'engageront plus ou moins profondément, ſi, par un plus long ſéjour, elles ont plus le temps d'écarter ou élargir les pores dans leſquels elles tendent à pénétrer.

C'eſt à l'expérience ſeule qu'il appartient de nous éclairer ſur ces faits; de nous apprendre juſqu'à quel point chacune de ces cauſes contribue à la réſiſtance du frottement. Les connoiſſances que l'expérience a données juſqu'ici, ne ſont point encore ni auſſi parfaites, ni auſſi nombreuſes qu'il ſeroit à deſirer : néanmoins elles peuvent être utiles en beaucoup d'occaſions. Nous allons les expoſer, ainſi que la méthode de les appliquer au calcul des effets du frottement dans diverſes eſpeces de machines & de mouvements.

687. 1°. Lorſque les ſurfaces qui doivent gliſſer l'une ſur l'autre ſont de même

matiere, la résistance du frottement, toutes choses d'ailleurs égales, est plus grande que lorsqu'elles sont de matieres différentes. Ainsi deux bois de différente espece auront moins de difficulté à se mouvoir l'un sur l'autre, que deux bois de même espece : le fer frottera moins sur le cuivre, que le fer sur le fer, ou le cuivre sur le cuivre.

2°. Plus les surfaces sont raboteuses, ou moins elles ont été préparées & polies, plus la résistance du frottement est grande. On peut donc diminuer cette résistance, en polissant les surfaces, ou en bouchant autant qu'on le peut, les pores, avec quelque matiere telle que l'huile, le savon, la graisse, &c ; en un mot, avec quelque matiere qui, en bouchant les pores, ne fasse pas contracter une nouvelle adhérence aux surfaces.

3°. Quoique l'étendue des surfaces semble devoir contribuer sensiblement à faire varier le frottement; cependant il paroît par un grand nombre d'expériences que cette étendue n'y contribue que pour très-peu de chose; en sorte qu'on n'éprouve, communément, pas plus de difficulté à traîner un corps sur une de ses faces que sur l'autre, quoiqu'elles soient différentes en étendue, pourvu que le poli ſoit le même. Il faut cependant en excepter les cas où le corps repoſe par une pointe : alors le frottement eſt plus conſidérable, parce que les aſpérités s'engagent plus profondément, que lorſque le corps repoſant par pluſieurs points, il s'en trouve, parmi ceux-ci, qui s'oppoſent à l'enfoncement.

4°. C'eſt principalement de la preſſion, que dépend la réſiſtance du frottement, en ſorte que cette réſiſtance paroît augmenter proportionnellement à la preſſion. C'eſt-à-dire, qu'on éprouve deux fois plus de réſiſtance pour vaincre le frottement, lorſque le corps eſt deux fois plus peſant, ou lorſque la force qui applique la ſurface contre une autre ſurface, eſt deux fois plus grande.

5°. Néanmoins, le temps pendant lequel les deux ſurfaces ſont appliquées, ſoit par leur peſanteur, ſoit par toute autre force, contribue beaucoup à faire varier la réſiſtance du frottement ; mais l'expérience n'a pas encore déterminé comment cette réſiſtance augmente eu égard au temps ; d'ailleurs on ſent aſſez que l'augmentation dûe à cette cauſe doit avoir des limites, & que ces limites varieront ſuivant la nature des ſurfaces frottantes.

6°. Pour les ſurfaces de même matiere, frottant ſur une même matiere quelconque, lorſque le poli eſt le même ou que ces ſurfaces ont été préparées également, le frottement eſt ſenſiblement le même ; & il eſt une partie déterminée de la preſſion, en ſorte que pour certaines matieres, il eſt le tiers de la preſſion ; pour d'autres, il en eſt le quart, & ainſi de ſuite.

La raiſon que l'on donne aſſez ordinairement pour expliquer pourquoi le frottement ne dépend pas de la grandeur des ſurfaces, eſt que ſi le nombre des points de la ſurface frottante eſt plus conſidérable, la force qui preſſe chacun, en eſt d'autant plus petite, & *vice-versâ* ; chaque éminence pénetre donc d'autant moins ou d'autant plus les cavités : en ſorte que s'il y a un plus grand nombre d'éminences à dégager, on n'a à les dégager que d'une quantité d'autant moindre ; & par conſéquent, dit-on, il doit toujours y avoir le même effort à faire.

Mais cette concluſion ſuppoſe que l'effort que l'on a à faire pour dégager les parties, eſt proportionnel (à nombre égal) à la quantité dont elles ſont engagées ; ſuppoſition qui ne paroît admiſſible que lorſque la quantité dont elles s'engagent, eſt très-petite, très-petite, même à l'égard de la profondeur des cavités. Auſſi l'expérience ne fait-elle pas voir que le frottement ſoit bien exactement proportionnel à la preſſion ſeule; le frottement des corps pointus forme une exception qui confirme la remarque que nous faiſons. Et la pente que l'on donne au plan ou chantier ſur lequel on conſtruit les vaiſſeaux, forme encore une exception remarquable, puiſque, pour les mettre en état d'aller à l'eau, cette pente ne va quelquefois qu'à ſix lignes par pied; ce qui eſt beaucoup au-deſſous de ce que l'expérience donne ſur la plupart des matieres, où cette pente eſt communément de 15 à 18°. Il y a donc bien lieu de croire qu'ici, les ſurfaces entrent pour beaucoup dans le frottement.

688. Après ces obſervations ſur ce que l'on ſait du frottement, par le ſecours de l'expérience; voyons comment, lorſqu'une fois on a déterminé la quantité du frottement ſur une eſpece de matiere connue, on peut en conclure l'effet qu'elle produira ſur une machine ou ſur un mouvement propoſé. Nous regarderons le frottement comme proportionnel à la preſſion ſeule.

Prenons pour premier exemple le poids *P*, (*Fig.* 178) posé sur le plan horisontal *AB*, & tiré par le poids *Q*, parallélement à *AB*. Supposons que le corps *Q* n'ait précisément que le poids nécessaire pour mettre le corps *P* sur le point de glisser. Voyons quel rapport il doit y avoir entre le poids *Q* & la force du frottement.

Du centre de gravité *G* du corps *P*, menons la perpendiculaire *GH* sur le plan *AB*. La pesanteur sollicite le corps *P*, suivant *GH*, tandis qu'il est sollicité par le corps *Q*, suivant *KD* qui rencontre *GH* en *K*. Du concours de ces deux forces, il en résulte un effort suivant une ligne quelconque *KI*, qui rencontre en *I* le plan horisontal; & cet effort doit être détruit, puisqu'on suppose que le corps *P* n'est que sur le point de se mouvoir. Concevons l'effort suivant *KI* ou *KIZ*, appliqué au point *I*, & décomposé en deux, l'un perpendiculaire au plan, l'autre suivant la direction du plan; il est facile de voir que ces efforts seront absolument les mêmes que ceux qui étoient dirigés suivant *KH*, & suivant *KD*. De plus, le premier de ces efforts sera, évidemment, détruit, du moins s'il rencontre le plan *AB* en quelque point *I* qui lui soit commun avec la surface du corps. A l'égard du second, comme il est suivant la direction même du frottement, il ne sera détruit qu'autant qu'il sera précisément égal à la force du frottement; ainsi, il faut que Q soit précisément égal à la force du frottement.

On voit par-là, comment on peut s'y prendre pour déterminer la valeur du frottement : on prendra successivement pour Q, différents poids jusqu'à ce qu'on en ait rencontré un qui mette le corps P sur le point de se mouvoir. Mais pour ne point comprendre dans l'évaluation du frottement du corps P, des effets étrangers à celui qu'on cherche; il faudra avoir soin 1°. Que la poulie D soit très-mobile, & que le cordon KDQ soit le plus flexible que faire se pourra. 2°. D'attacher le cordon CD en un point C le plus près de la surface AB qu'il sera possible : la nécessité de cette attention vient de ce que toutes choses d'ailleurs égales, le point I où l'effort suivant KI rencontre la surface AB, s'approchera d'autant plus de l'extrémité S de la base du corps, & même de tomber hors de cette base, que le point C sera plus élevé au-dessus du plan. Or dans le cas où le point I tomberoit hors de la base, l'effort perpendiculaire au plan n'étant point totalement détruit, il en résulteroit (321) un mouvement de rotation dans le corps. Et le frottement que l'on détermineroit alors, pourroit différer beaucoup de celui qu'on cherche, c'est-à-dire, de celui qui empêche le mouvement pour glisser, puisque le corps tournant alors sur une pointe, éprouveroit un frottement beaucoup plus considérable. Au lieu qu'en prenant le point C très-près du plan AB, le point I sera toujours très-près du point H, & l'on aura d'autant moins à craindre que toute la pression ne se rassemble au seul point S.

689. Si le poids Q est supérieur à la force du frottement, alors le poids P sera mu. Si le frottement se faisoit sentir sur les corps en mouvement, de la même maniere que sur les corps qui sont seulement sur le point de se mouvoir, alors il seroit facile de déterminer le mouvement de P & de Q au bout d'un temps quelconque t. En effet, si par exemple, le frottement étoit à la pression, qui est ici le poids du corps P, dans un rapport constant pendant toute la durée du mouvement, $p\,dt$ étant la vîtesse que donne la pesanteur en un instant, $Pp\,dt$ seroit la pression, & $\frac{n}{m}Pp\,dt$ seroit la force du frottement, en supposant que la pression est au frottement comme $m:n$. Ainsi, la pesanteur donnant à Q la quantité de mouvement $Qp\,dt$, il ne lui en resteroit pour agir efficacement sur P, que la quantité $QP\,dt - \frac{n}{m}Pp\,dt$, laquelle étant partagée comme on l'a fait (386), donneroit $\dfrac{Qp\,dt - \frac{n}{m}Pp\,dt}{P+Q}$ pour la vîtesse d'accélération de Q, qui seroit donc mu d'un mouvement uniformément accéléré, puisque, par la suppo-

ction, $\dfrac{Qp - \frac{n}{m} Pp}{P + Q}$ eſt une quantité conſtante. On auroit donc pour la vîteſſe au bout d'un temps quelconque t, la quantité $\dfrac{Qp - \frac{n}{m} Pp}{P + Q} t$; d'où il ſera facile de conclure l'eſpace parcouru. Mais il y a apparence que le frottement n'eſt pas conſtant, quand les corps ſont en mouvement, & qu'il doit dépendre beaucoup de la vîteſſe ; or l'expérience n'a pas encore fait connoître quelle eſt la loi du frottement eu égard à la vîteſſe.

690. Conſidérons maintenant un poids poſé ſur un plan incliné, & retenu par le ſeul effet du frottement. L'action de la peſanteur dirigée ſuivant la verticale GZ (*Fig.* 179) qui paſſe par le centre de gravité G du corps P, rencontrant en I l'un des points de la ſurface AB du plan, doit s'y décompoſer en deux efforts, l'un perpendiculaire au plan, l'autre ſuivant le plan. Le premier ſera détruit ſi le point I n'eſt pas hors de la baſe RS ; & le ſecond pour être détruit, doit être égal à la force du frottement. Or il eſt facile de voir en formant le parallélogramme $ILZH$, que ſi IZ repréſente le poids du corps, IH ſera la preſſion, & IL la force du frottement ; donc puiſque les triangles ſemblables ILZ, ABC donnent $IL : LZ$ ou $IH :: BC : AC$, on voit que la force du frottement doit être à la

pression, comme la hauteur du plan est à sa base. On voit pareillement que $IL : IZ :: BC : AC$, c'est-à-dire, que la force du frottement est au poids même du corps, comme la hauteur du plan est à sa longueur.

Ces principes peuvent aussi servir à déterminer le frottement sur différentes surfaces; on élevera successivement le plan AB jusqu'à ce que le corps P soit sur le point de glisser; alors mesurant la hauteur & la base, on aura le rapport de la force du frottement à la pression. Mais il faudra observer d'y employer pour P des corps dont le centre de gravité soit très-peu élevé au dessus du plan; afin que le point I où la verticale GZ rencontre le plan, ne sorte pas hors de la base RS, & ne passe pas même au point R; car alors le frottement qu'on auroit à vaincre étant celui d'un corps qui frotte par une pointe, seroit beaucoup plus considérable que celui dont il s'agit.

Par-là, & par ce qui a été observé (678) on voit que ce qui a été dit par plusieurs Auteurs, savoir, qu'un corps posé sur un plan incliné, doit culbuter lorsque la verticale menée par son centre de gravité, ne rencontre pas la base par laquelle il s'appuie, doit s'entendre du cas où il y a du frottement; lorsqu'il n'y a pas de frottement, les conditions pour que le corps ſe renverſe, ſont différentes (678).

691. Par ces deux exemples on voit qu'ayant égard au frottement, la condition pour qu'un corps demeure en équilibre ſur une ſurface propoſée, & de maniere à être dans l'état le plus prochain du mouvement, eſt que la force unique qui agit ſur lui, lorſqu'il n'y en a qu'une, ou la réſultante de toutes les forces qui agiſſent ſur lui, ait à l'égard de la ſurface ſur laquelle il doit gliſſer, une inclinaiſon GIS, ou ZIL (*Fig.* 179) telle que l'on ait $IL : LZ$ comme la force du frottement eſt à la preſſion; or (*Géom.* 296) $IL : LZ :: 1 : tang\ LIZ$, 1 étant le rayon des Tables; donc l'inclinaiſon LIZ doit être telle que le rayon ſoit à la tangente de cette inclinaiſon, comme la force du frottement, eſt à la preſſion; donc ſi une fois on a déterminé le rapport de la force du frottement, à la preſſion, il ſera toujours facile de déterminer quelle inclinaiſon doit avoir la réſultante de toutes les forces qui agiſſent ſur le corps, pour que ce corps ſoit dans l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement. Dorénavant nous appellerons cet angle LIZ, l'*angle du frottement*. Cet angle eſt donc différent, ſuivant les différentes eſpeces de matieres; ſuivant qu'elles ont été

plus ou moins préparées ou polies, &c. Si le frottement eſt le tiers de la preſſion, ainſi que cela a lieu, à-peu-près, dans un aſſez grand nombre de matieres qui ont été paſſablement applanies, la tangente de *LIZ* ſera triple du rayon; or l'angle dont la tangente eſt triple du rayon, eſt de $71^\circ\ 34'$; ce ſera donc là l'angle du frottement pour ces ſortes de matieres.

692. C'eſt d'après cette obſervation qu'on peut déterminer facilement, dans chaque machine, quel rapport il doit y avoir entre la puiſſance & le poids, dans le cas du frottement, pour que la machine ſoit ſur le point de ſe mouvoir.

Prenons d'abord le levier, & ſuppoſons que l'appui eſt un ſimple ſoutien tel qu'on le voit (*Fig.* 180). Nous avons vu (579) qu'en pareil cas il ne pouvoit y avoir équilibre, qu'autant que la réſultante *DC* des deux forces *P* & *Q* feroit perpendiculaire en *C*, à la tangente commune de la ſurface du levier, & de celle de l'appui. Dans le cas du frottement, il n'en eſt pas de même; il faut que la réſultante ſoit encore dirigée du point *D*, à l'appui *C*; mais il ſuffit pour l'équilibre que l'une des deux inclinaiſons *DCA* ou *DCB*, ſelon qu'on voudra que ce ſoit ou *Q* ou *P* qui ſoit ſur le point de prévaloir, ſoit plus grande que l'angle du frottement ; & pour l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement de la part de la puiſſance Q, il ſuffit que l'inclinaiſon DCA ſoit préciſément égale à l'angle du frottement. Parce que ſi l'on imagine la force ſuivant DC décompoſée en deux autres, l'une perpendiculaire à AB, l'autre ſuivant CA; la force ſuivant CA ſera plus petite que le frottement, dans le premier cas, & lui ſera préciſément égale, dans le ſecond : à l'égard des deux forces P & Q, elles n'en ſeront pas moins en raiſon inverſe des deux perpendiculaires CK, CL.

693. Mais ſi le point d'appui eſt tel que le levier ne puiſſe prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation ; c'eſt-à-dire, ſi le levier eſt traverſé par un axe, eſſieu, ou boulon ; alors on ſe conduira de la maniere ſuivante qui eſt commune à ce levier, à la poulie, & au treuil, du moins quand on ſuppoſe dans ce dernier que le poids & la puiſſance ſont dans un même plan : nous allons appliquer au treuil ce dont il s'agit ; on verra enſuite facilement, comment cela s'applique au levier & à la poulie.

Soient donc (*Fig.* 181) HFI le plan de la roue ; GKL la section du cylindre ; NDM celle de l'axe autour duquel toute la machine doit tourner. Dans le cas où il n'y auroit pas de frottement, il faudroit que la résultante des deux puissances P & Q, qui passe nécessairement par leur point de concours A, passât aussi par le centre C de l'axe. Mais s'il y a du frottement, la machine pourra demeurer en équilibre tant que la direction de la résultante, que je suppose être AD, ne fera point avec la surface NDM, c'est-à-dire, avec la tangente au point où AD, rencontre cette surface, un angle plus petit que l'angle du frottement. C'est ce qu'on verra facilement en imaginant cette force décomposée en force perpendiculaire à la tangente en D, & en force suivant cette tangente.

Cela posé, puisque AD est la direction de la résultante, on aura (233), $Q:P::$ $\sin GAF : \sin EAF$, c'est-à-dire, en imaginant AC, $::\sin(GAC + CAE) : \sin(CAF - CAE)$. Or 1°. si l'on mene CE perpendiculaire sur AD, dans le triangle rectangle CED, l'angle CDE est le complément de l'angle que AD fait en D avec la surface NDM; il est par conséquent censé connu. Ainsi si l'on appelle f l'angle du frottement, il sera le complément de f. Et si l'on appelle r', le rayon CD de l'essieu, on aura $CE = r' \operatorname{cos} f$, en supposant le rayon des tables, égal à 1. 2° Comme les directions de P & de Q sont censées connues, ainsi que les dimensions de la machine, les angles GAC, CAF sont censés connus, ainsi que la distance AC. Ainsi, dans le triangle rectangle CAE, où l'on connoît AC, & $CE = r' \operatorname{cos} f$, il sera donc facile de calculer l'angle CAE; je le nomme e; & je nomme a & b, les angles GAC, CAF; alors on a donc $Q : P :: \operatorname{sin} (a + e) : \operatorname{sin} (b - e)$. Et par conséquent $Q = \frac{P (\operatorname{sin} a + e)}{\operatorname{sin} (b - e)}$; c'est-là la valeur de la puissance, dans le cas du frottement.

Si le frottement est nul, l'angle f du frottement sera de 90°; c'est-à-dire, que la résultante doit être perpendiculaire à la surface de l'essieu, & passe par conséquent, par le centre C; on a donc alors $\operatorname{cos} f = 0$, & par conséquent $CE = 0$; donc $e = 0$; donc $Q = \frac{P \operatorname{sin} a}{\operatorname{sin} b}$. Or en regardant CA comme rayon, les perpendiculaires CG, CF sont les sinus des angles CAG, CAF, ou a & b; on a donc en nommant CG, r; & CF, R; $r : R :: \operatorname{sin} a : \operatorname{sin} b$; donc $\frac{\operatorname{sin} a}{\operatorname{sin} b} = \frac{r}{R}$, & $Q = \frac{Pr}{R}$, ou $Q : P :: r : R$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a démontré (633).

Si les directions PA, QA font paralleles, alors les angles GAC, CAE, CAF font censés infiniment petits, & ont même rapport que leurs finus. On peut donc au lieu de $\sin(a+e)$, mettre $\sin a + \sin e$, & au lieu de $\sin(b-e)$, mettre $\sin b - \sin e$; alors on aura $Q = \frac{P(\sin a + \sin e)}{\sin b - \sin e}$. Or nous venons de voir que $r : R :: \sin a : \sin b$; & par la même raison $\sin a : \sin e :: CG : CE :: r : r' \cos f$; donc $\sin a = \frac{r \sin b}{R}$, & $\sin e = \frac{r' \cos f \sin a}{r} = \frac{r' \cos f \sin b}{R}$; substituant donc dans la valeur de Q, on aura $Q = \frac{P(r + r' \cos f)}{R - r' \cos f}$. Donc puisque lorsqu'il n'y a point de frottement, la valeur de la puissance est $\frac{Pr}{R}$, si l'on appelle z l'augmentation que la puissance doit recevoir eu égard au frottement, on aura $z = \frac{P(r + r' \cos f)}{R - r' \cos f} - \frac{Pr}{R}$ ou $z = \frac{P.(R + r) r' \cos f}{R(R - r' \cos f)}$ qui fait voir que l'effet du frottement sera d'autant plus petit que le rayon de l'essieu sera plus petit, quoique cependant il ne diminue pas tout-à-fait proportionnellement à ce rayon.

694. Cette solution convient au levier, en y regardant R & r comme les distances des directions au point d'appui.

Elle convient auſſi à la poulie fixe, en y ſuppoſant $R = r$; & alors on a $z = \frac{2Pr' \cos f}{r - r' \cos f}$.

Quoique pour le treuil, nous ayons ſuppoſé les directions dans un même plan, la ſolution n'en eſt pas moins ſuffiſante, parce que dans l'uſage du treuil, ou du cabeſtan, le plan dans lequel agit le poids, eſt toujours aſſez peu éloigné du plan dans lequel agit la puiſſance.

695. Pour avoir l'effet du frottement dans la poulie mobile, voici ce qu'il faut conſidérer. Pour que la puiſſance Q (*Fig.* 182) ſoit ſur le point de faire tourner la poulie autour de ſon eſſieu C, il faut qu'elle reçoive une augmentation qui la mette en état de ſurmonter le frottement. Or cette augmentation fera que la puiſſance écartera un peu le poids P de ſa ſituation verticale, juſqu'à ce qu'elle l'ait amené en un point d'où la verticale menée par ſon centre de gravité faſſe au point D avec la ſurface de l'eſſieu, un angle égal à celui du frottement. Alors pour peu qu'on augmente encore la puiſſance, la poulie tournera autour de l'eſſieu.

Par la ſituation que le poids aura priſe, il tendra à faire tourner l'eſſieu ſur ſon centre C avec une force dont le moment ſera $P \times CE$,

CE étant perpendiculaire ſur la verticale qui paſſe par D ; or, nous avons vu ci-deſſus que $CE = r' \cos f$; ce moment ſera donc $P r' \cos f$. Or, pour que la puiſſance, par ſon augmentation que j'appelle z', ſoit ſur le point de ſurmonter cet effort, il faut que le moment $z' \times CG$ de la force z' avec laquelle elle tend à faire tourner autour du même point C, ſoit égal au moment $P r' \cos f$; on a donc en nommant r le rayon CG, $r z' = P r' \cos f$, & par conſéquent $z' = \frac{P r' \cos f}{r}$. Où l'on voit que l'effet du frottement ſera d'autant plus petit que le rayon de l'eſſieu ſera plus petit que celui de la poulie, & dans le même rapport.

D'après cela il eſt facile de déterminer l'effet du frottement dans les moufles, palans, caliornes, &c. Suppoſons qu'il s'agit de la figure 144 : que le poids P eſt de 400ᵗᵇ, & que, tant pour les poulies mobiles, que pour les fixes, le rayon r' de l'eſſieu, ſoit la cinquieme partie du rayon r de la poulie.

Les deux cordons 1 & 2 ſoutiennent à eux deux, la moitié du poids, c'eſt-à-dire, 200ᵗᵇ; ainſi, ſi dans la valeur de z', on met 200ᵗᵇ pour P; $\frac{1}{5}$ r pour r'; & ſi, ſuppoſant que le frottement eſt le quart de la pression, ce qui donne l'angle du frottement, de 75° 58′, on met pour *cos f*, *cos* 75° 58′, c'est-à-dire, (par les Tables), 0,24249, ou simplement 0,24; on aura $z' = 200 \times \frac{1}{5} \times 0,24 = 9$℔, 6; c'est-là ce dont le cordon 2 est plus tendu que le cordon 1, par l'effet du frottement.

Maintenant, le cordon 2 & le cordon 3 passant par-dessus la partie fixe, on déterminera ce dont le cordon 3 sera plus tendu que le cordon 2, par la formule donnée (694); c'est-à-dire, par la formule $z = \frac{2Pr'cosf}{r - r'cosf}$, dans laquelle *P* représente la tension du cordon 2, c'est-à-dire, 109℔, 6; puisque sans le frottement, cette tension n'eût été que le quart du poids ou 100℔. On aura donc $z = \frac{219,2 \times \frac{1}{5} \times 0,24}{1 - 0,24 \times \frac{1}{5}} = \frac{10,522}{0,95} =$ 11℔. 1. C'est la quantité dont le cordon 3 est plus tendu que le cordon 2, par l'effet du frottement. Ainsi, le cordon 3 est tendu avec une force = 120℔, 7.

Les cordons 3 & 4, embrassant la partie mobile, on déterminera ce dont le cordon 4 est plus tendu que le cordon 2, par la formule $z' = \frac{Pr'cosf}{r}$; en mettant pour *P*, 200℔, moitié du poids total soutenu par ces deux cordons. On aura donc, comme ci-dessus

$z' = 9^{tb}, 6$; ainſi le cordon 4, eſt tendu avec une force $= 130^{tb}, 3$.

Enfin ſuppoſant, pour plus de ſimplicité (ce qui, d'ailleurs, ne peut faire qu'une différence très-petite, dans le réſultat) que les deux cordons 4 & 5 qui embraſſent la partie fixe, ſont paralleles; on aura ce dont le cordon 5 ſera plus tendu que le cordon 4, par la formule $z = \frac{2 P r \, coſ f}{r - r' \, coſ f}$, en mettant pour P, $130^{tb}, 3$. On aura donc ..... $z = \frac{260,6 \times \frac{1}{5} \times 0,24}{1 - \frac{1}{5} \times 0,24} = 13^{tb}, 2$; ainſi la tenſion du cordon 5, ou la puiſſance Q, qui, ſans le frottement n'eût dû être que de 100^{tb}, ſera de $143^{tb}, 5$.

696. Dans la détermination que nous avons faite, de l'effet du frottement ſur la poulie mobile, nous n'avons point fait entrer dans la preſſion qui s'exerce au point D, l'augmentation donnée à la puiſſance, quoique quelques Auteurs en aient uſé ainſi. La raiſon en eſt que cette augmentation ne contribue en rien à cette preſſion; en effet, abſtraction faite de la roideur des cordes & de quelques autres obſtacles, dès que la puiſſance eſt plus grande qu'il ne faut pour l'équilibre, le corps de la poulie ſera élevé, en vertu du ſurplus. L'augmentation de

de la puiſſance ne contribue nullement ici à augmenter le frottement contre l'eſſieu, ſi ce n'eſt eu égard à la vîteſſe qui en pourroit réſulter & que nous ne conſidérons point ici, non plus que l'inertie du poids & de la poulie; il n'y a que le poids qui comprime. Il n'en eſt pas de même dans la poulie fixe; & la méthode que nous avons donnée, comprend à cet égard, tout ce qu'elle doit comprendre, quoiqu'elle differe auſſi de celle qu'on a ſuivie juſqu'à préſent, & dans laquelle il entre un peu d'arbitraire.

697. Nous ne devons pas diſſimuler que dans le calcul que nous venons de faire du frottement dans le plan de la figure 144, il faudroit s'y prendre un peu différemment ſi l'on vouloit déterminer bien rigoureuſement l'effet du frottement. En effet, en déterminant ainſi les tenſions particulieres de chacun des cordons, on ſuppoſe tacitement que chaque paire de cordons agit comme elle le feroit ſur une poulie ſimple; ce qui n'eſt peut-être pas rigoureuſement exact. Mais on peut ſe contenter de cette approximation, pour le préſent.

698. Sur le plan incliné; voici comment on déterminera le rapport qu'il doit y

avoir entre le poids & la puissance, pour que celle-ci soit sur le point de faire glisser le corps.

On imaginera, par le point de concours C des directions de la puissance Q & du poids P (*Fig.* 183,) la ligne CI qui fasse avec le plan AB, un angle CIA égal à l'angle du frottement. Pour que la puissance Q soit sur le point de faire glisser le corps, il faut 1°. que la résultante de la puissance & du poids soit dirigée suivant CI. 2°. Que le point I où la ligne CI rencontre le plan, appartienne, en même temps, à quelqu'un des points de la base RS, sans quoi le corps tourneroit.

Cela posé, (233) on aura $P : Q ::$ $\sin QCI : \sin PCI$; ou, en menant CH perpendiculaire au plan, $:: \sin(QCH-HCI) :$ $\sin(PCH+HCI$. Or l'angle HCI est le complément de l'angle du frottement; & les angles QCH & PCH sont supposés connus, puisque nous supposons que l'on connoît la direction de la puissance, & l'inclinaison du plan, qui est égale à l'angle PCH; on aura donc par-là, le rapport de P à Q.

Si l'on veut déterminer ce rapport, en lignes, on menera par un point quelconque B du plan incliné, la ligne BT qui fasse avec

AB, l'angle $ABT = HCQ$, & la ligne BV qui faſſe avec AB l'angle ABV égal à HCI complément de l'angle du frottement. Alors ſi l'on mene l'horizontale AT, on aura $P : Q :: VT : BT$; parce que l'angle $VBT = ABT - ABV = HCQ - HCI$, l'angle $BVT = BAV + ABV = PCH + HCI$; or dans le triangle BVT, on a $VT : BT ::$ ſin VBT : ſin BVT.

Au lieu de faire l'angle $ABT = HCQ$, & l'angle $ABV = ACI$, on peut encore mener BT perpendiculaire à la direction de la puiſſance, & BV perpendiculaire à CI, cela revient au même, & eſt d'ailleurs analogue à ce qui a été dit (668).

699. La ſeconde condition que nous venons de voir être néceſſaire pour que la puiſſance Q ſoit ſur le point de faire gliſſer le corps, fait voir que lorſque le corps n'appuie que par un point, il faut que la direction prolongée, de la puiſſance, rencontre la verticale menée par le centre de gravité au point C (*Fig.* 184) où celle-ci eſt rencontrée par la ligne IC qui partant du point de contact I, fait avec le plan, un angle égal à l'angle du frottement.

700. On ſe conduira de la même maniere pour déterminer les effets du frottement de la ſeconde eſpece, de celui qu'il

Dd 2

faut vaincre pour faire rouler les corps terminés par des ſurfaces courbes : je dis des ſurfaces courbes ; car pour les corps terminés par des ſurfaces planes, comme ils ne peuvent rouler qu'en tournant ſur une pointe ou partie angulaire, & que les loix, & la valeur de ce frottement ne ſont pas ſuffiſament connues, nous n'en dirons rien pour le préſent. Mais pour ceux dont il s'agit ici, la méthode eſt abſolument la même : il faut ſeulement obſerver que l'angle du frottement doit alors être ſuppoſé plus approchant de 90°, que dans le frottement de la derniere eſpece. C'eſt à l'expérience à déterminer cet angle, dans tous les cas.

701. Le frottement peut donner lieu à des mouvements bien différents de ceux qui auroient lieu ſans cette cauſe : nous allons en examiner qu.lques-uns.

Nous avons déja dit pluſieurs fois (321) & ailleurs, ce qui devoit arriver à un corps libre *BOQ* (*Fig* 185) qui recevroit une impulſion ſuivant une direction qui ne paſſeroit pas par ſon centre de gravité. Mais ſi ce corps étoit frappé extérieurement ſuivant une direction quelconque *AB*, il ne recevroit pas toute cette impulſion ; il faudroit décompoſer cette force en deux autres, l'une ſuivant la tangente à la ſurfaee, l'autre ſuivant la perpendiculaire *BC* à cette ſurface. Dans le cas où il n'y auroit pas de frottement, la force impulſive n'auroit aucun effet ſuivant la tangente, elle ne feroit que raſer la ſurface; il n'y auroit donc que la force ſuivant *BC* qui ſe tranſmettroit au corps, & qui d'ailleurs ne le feroit tourner que dans le cas où la direction de cette force ne paſſeroit pas par le centre de gravité *G*. D'où l'on voit que ſi le corps étoit ſphérique & d'une matiere uniforme, il ne tourneroit jamais, en vertu d'une impulſion extérieure, ſans le frottement; parce que la perpendiculaire à ſa ſurface paſſe toujours par le centre de figure qui eſt en même temps le centre de gravité. Il n'en eſt pas de même dans le cas du frottement; la force ſuivant la tangente, ſe tranſmet à l'aide des aſpérités de la ſurface, en partie d'autant plus grande, que la ſurface eſt plus ſuſceptible de frottement; enſorte qu'outre les mouvements qui naîtront de la force ſuivant *BC*, le corps tournera, & le centre *G* s'avancera parallélement à la tangente, comme ſi le point *B* étoit tiré ſuivant cette direction, à l'aide d'un fil attaché en ce point, par une puiſſance égale à la force du frottement.

702. Suppoſons que le corps dur & ſphérique *ABC* (*Fig.* 186) tombe librement ſur le plan horizontal *HR*; & qu'il ait reçu, par quelque cauſe que ce ſoit, un mouvement de rotation autour de ſon centre de gravité; s'il n'y avoit point de frottement, ce corps après avoir rencontré ce plan, ne conſerveroit d'autre mouvement que ſon mouvement de rotation, & ſon centre de gravité demeureroit immobile. Mais s'il y a du frottement, dès que le corps aura touché le plan, il roulera de *I* vers *R*, ou de *I* vers *H*, ſelon que ſon mouvement de rotation ſera dans le ſens *CAB*, ou dans le ſens *BAC*; parce que la réſiſtance du frottement qui s'exerce ſuivant le plan, étant équivalente à une force qui agiroit ſur ce corps ſuivant une direction contraire à ſon mouvement, doit, puiſqu'elle ne paſſe point par le centre de gravité de ce corps, lui donner (321) un mouvement parallele au plan, & un mouvement de rotation, tous deux en ſens contraire à ſon mouvement actuel de rotation; or de ces deux mouvements le dernier diminue continuellement le mouvement primitif de rotation; & au contraire le mouvement du centre s'accélérera, mais juſqu'à un certain terme ſeulement, après quoi il diminuera pour s'éteindre avec le mouvement de rotation.

703. Par-là on explique aisément 1°. pourquoi le corps sphérique *ABC* (*Fig.* 187) frappé suivant *DB*, après s'être avancé suivant *IE* revient ensuite de *E* vers *I*, & repasse même au-delà de *I* vers *F*. L'impulsion suivant *DB*, le fait tourner (en vertu du frottement en *B*) suivant *ABC*, & avancer suivant *IE*; mais le frottement sur le plan, étant alors un frottement de la premiere espece, le mouvement du centre de gravité est bientôt éteint, & le mouvement de rotation en fait naître un autre en sens contraire; comme dans le cas précédent (702).

2° Pourquoi un boulet qui, en tombant, semble avoir perdu toute sa force, se ranime, cependant, souvent avec violence. Lorsqu'il est chassé par la force de la poudre, il acquiert en frottant sur la paroi inférieure de l'ame de la piece, un mouvement de rotation qui ne s'altere que peu en l'air: lors donc qu'il vient à toucher la terre, comme son mouvement de rotation du côté de cette surface, se fait dans un sens contraire à son mouvement de transport, il doit (701) en résulter une accélération, dans le mouvement du centre, c'est-à-dire, dans le mouvement de transport. Cette cause doit être jointe à celles que nous avons expoſées (503 & *ſuiv.*) parmi celles qui occaſionnent les ricochets, ou les facilitent; car quand même le centre reſteroit immobile un inſtant, il eſt facile de voir après les conſidérations précédentes, que le mouvement de rotation peut ſouvent ſuffire, pour dégager le boulet, du creux où il ſe ſeroit engagé, en effleurant & labourant la terre.

704. Au reſte, ſi le frottement eſt nuiſible dans beaucoup d'occaſions, il eſt encore plus ſouvent utile. Sans le frottement, ſur la moindre inclinaiſon ſur laquelle nous marcherions, nous tomberions. Jamais un homme ou un animal courant rapidement & tournant en même temps, autour d'un point fixe C (*Fig.* 188), ne pourroit s'empêcher de tomber, quelque ſituation qu'il prît; au lieu qu'en vertu du frottement il peut s'incliner le côté vers le point C autour duquel il tourne, & faire par-là, que ſa peſanteur dirigée ſuivant la verticale GK qui paſſe par ſon centre de gravité G, & la force centrifuge GF qu'il acquiert en tournant, laquelle eſt dirigée de C vers F, s'accordent à produire une force unique ſuivant une ligne GI qui paſſe par un point I entre les jambes de l'animal; alors cette force quoiqu'oblique ne ſera pas

moins détruite par le frottement, pourvu que l'inclinaison soit telle que le frottement l'exige.

C'est au frottement même qu'on doit l'avantage de pouvoir diminuer ce qu'il a de nuisible; puisque ce n'est que par le frottement qu'on parvient à user & à polir les surfaces des corps. C'est au frottement qu'on doit la facilité de rendre les parties de certaines machines, tantôt fixes, tantôt mobiles. C'est par le frottement, que les ciseaux, & autres instruments tranchants de cette nature, les pinces, tenailles, limes, &c. font leur effet. Si les lames des ciseaux, par exemple, n'étoient point des scies armées de très-petites dents qui s'engagent dans les petites cavités des corps que l'on doit couper, ces corps glisseroient entre les deux tranchants.

Le frottement aide encore très-souvent à mouvoir les corps dans certains sens : c'est ainsi que lorsqu'à l'aide du levier *AB* (*Fig.* 189) on veut soulever le corps *P*, on y parvient facilement en le faisant porter sur son arrête *CD*; le frottement alors très-considérable, rend *CD* immobile, l'empêche de glisser. La même cause fixe l'extrémité *A* du levier. Dans ce cas si l'on veut savoir quel est le rapport du poids *P* à la puissance Q (ce que nous avons différé (591) d'exposer) on imaginera la pesanteur de P qui est dirigée suivant la verticale GK qui passe par son centre de gravité G décomposée en deux forces paralleles, l'une qui passe par le point I où le corps appuie sur le levier, l'autre qui passe par un point de CD, situé dans le plan des deux paralleles GK & IM; alors la force qui en résulte en I, sera à $P::EK:EM$ (237); & si de A on mene sur IM la perpendiculaire AL, la force Q sera à la force $I::AL:AB$; d'où l'on concluera que $Q:P::AL \times EK:AB \times EM$. Au reste, ce n'est qu'à cause du frottement qui a lieu au point I, que nous regardons la force suivant IM, comme transmise entiérement au levier. Sans ce frottement, le levier ne recevroit que la partie de cette force, qui s'exerceroit suivant la perpendiculaire à AB.

705. C'est au frottement, & uniquement au frottement, qu'est dû ce mouvement singulier par lequel certains corps animés d'un mouvement de rotation, semblent renoncer aux loix de la pesanteur, & prennent un mouvement pour s'élever, lorsque la pesanteur tend à les abaisser. Je veux parler du mouvement de la toupie. On sait que, lorsqu'un corps tel qu'on le voit (*Fig.* 190), c'est-à-dire, symmétrique à l'égard de l'un ND de ses axes, a reçu un mouvement de rotation autour de cet axe, & parcourt, sur sa pointe N, un plan horisontal XZ; on sait, dis je, que *plus cette pointe est petite*, & plus la matiere du corps, *en s'éloignant de N, s'éloigne*

de l'axe ND, plus aussi le corps se releve avec promptitude, & tend, par cet effort, à placer l'axe ND dans une direction verticale. Nous allons voir que ce phénomene n'auroit pas lieu sans le frottement, & de quelle nature est le frottement auquel il est dû.

Pour rendre la chose plus simple, ne considérons, de la toupie, que son axe ND (*Fig.* 191) : & supposons que la pointe N, ainsi que le plan horisontal HZ, sont parfaitement polis. La seule cause qui s'oppose au mouvement du centre de gravité G, étant le plan HZ, la résistance que ce centre éprouve ne peut avoir d'autre direction que la ligne NK perpendiculaire à HZ, quel que soit d'ailleurs le mouvement de rotation autour de ND. Or il est évident que cette résistance n'a lieu que parce que la pesanteur porte le corps vers le plan; car le mouvement de rotation autour de ND, ne peut exciter aucune pression sur le plan; donc cette résistance ne peut jamais équivaloir à la pesanteur; donc il restera toujours au centre de gravité G, une force pour s'approcher du plan. Donc quand il n'y a point de frottement, & que la toupie n'a reçu, d'abord, de mouvement de rotation, qu'autour de son axe de figure, elle doit tomber; & c'est par les principes donnés (679 & *suiv.*) qu'on déterminera les loix de sa chûte.

Il n'en est pas de même lorsqu'il y a du frottement. En effet, dans ce cas la résistance qui se fait en N, s'exerce, non pas suivant la perpendiculaire NK, mais suivant une ligne NK' qui fait avec le plan HZ un angle égal à l'angle du frottement, & passe par quelqu'un des points N par lesquels la pointe frotte. Quel que soit cet angle & ce point, la résistance qui s'exerce suivant $K'N$ équivaut à une force qui agiroit en sens contraire sur le corps; comme sa direction ne passe point par le centre de gravité, elle doit faire naître un mouvement de rotation dans le corps, c'est-à-dire, faire varier son mouvement actuel de rotation; mais elle doit, de plus, se transmettre toute entiere au centre de gravité. Concevons donc que GI parallele à NK' soit cette force : si la verticale Gn représente celle de la pesanteur, & qu'on imagine le parallélogramme $GImn$, la diagonale Gm sera la force qu'aura réellement le centre G.

Cela posé, l'angle IGn & la force Gn restant les mêmes; plus la force suivant $K'N$, & par conséquent la force GI, sera grande, & plus la ligne Gm approchera de la ligne GI;

c'eſt-à-dire, plus le point m tendra à s'élever au-deſſus de G. Reſte donc à ſavoir ſi, tant par la nature du frottement, que par la figure du corps, & par ſon mouvement de rotation, le rapport de la force ſuivant $K'N$ (*Fig.* 190) ou de la force Gl, à la force Gn de la peſanteur, peut croître aſſez pour que le point m ſe trouve plus élevé que G; auquel cas il ſera viſible que le centre de gravité peut s'élever à l'égard du plan, ſans que pour cela la pointe N le quitte, parce que le mouvement de rotation qui naît de la force ſuivant $K'N$, tendra à faire rapprocher cette pointe du plan. Or 1°. comme le corps repoſe par une pointe, on ne peut ſe diſpenſer d'admettre que les parties de la pointe s'engagent plus profondément que ſi le corps repoſoit par une ſurface ſenſible. 2°. Eu égard au mouvement de rotation autour de ND, & à l'action de la peſanteur, la preſſion qui s'exerce en N, n'eſt pas à beaucoup près le ſeul effet de la peſanteur. Pour ſe faire une juſte idée de cette preſſion, il faut ſe repréſenter 1° que par la peſanteur, les parties de la pointe N ſont d'abord appliquées contre le plan : 2° que par le frottement elles y ſont retenues avec un certain degré de force : 3° que par le mouvement de rotation elles tendent à pénétrer encore davantage dans le plan; c'eſt ce dont on ſera convaincu en faiſant attention avec quelle facilité les inſtruments deſtinés à percer en tournant, viennent à pénétrer, dès que la voie a été frayée par le plus léger enfoncement: or la figure de la toupie rend cette comparaiſon parfaitement exacte : les parties de la pointe ſont engagées par le frottement, & c'eſt par-là que le mouvement de rotation trouve d'autant plus de priſe pour creuſer ou tendre à creuſer. Ce mouvement d'ailleurs, d'autant plus rapide, & d'autant plus efficace pour occaſionner un grand effort pour creuſer & pour preſſer ſur la ſurface HZ, que les parties du corps s'éloignent plus de l'axe ND à meſure qu'elles s'éloignent du point N, doit produire les mêmes effets que dans ces inſtruments, c'eſt-à-dire, preſſer d'autant plus fortement les parties de la pointe. Tout contribue donc à faire voir que plus la figure de la toupie ſe renfle en s'éloignant de la pointe, & plus ſon mouvement de rotation eſt rapide; plus auſſi la force ſuivant Gl eſt grande à l'égard de la peſanteur ; & plus, par conſéquent, le mouvement Gm tend à élever le centre de gravité au deſſus du plan. Or il eſt clair que plus la force qui appuiera la pointe ſera conſidérable, & en même temps plus celle par laquelle le centre tend à s'élever, sera considérable, il est clair, dis-je, que la disposition de l'axe *ND*, à s'approcher de la perpendiculaire au plan, en deviendra d'autant plus considérable; en sorte que lorsque *ND* sera devenu vertical, après quelques balancements, si les éminences sur lesquelles porte la pointe ne sont point trop inégales, on verra le corps sauter continuellement au-dessus du plan, par des mouvements verticaux très-petits & très-subits; c'est ce qu'on observe en effet, lorsque la pointe est terminée par une petite surface plane coupée bien carrément & perpendiculairement à l'axe.

A l'explication que nous venons de donner, ajoutons que l'expérience confirme bien sensiblement, ce que nous y avons avancé; savoir, que la pression est bien plus considérable que s'il n'y avoit que la seule pesanteur qui appliquât les parties contre le plan : en effet, lorsque la toupie est en mouvement sur quelque matiere flexible, on voit bientôt la pointe s'enfoncer en se creusant un trou : & si on la prend dans la main, on sent une pression bien autrement forte que si elle étoit sans mouvement.

On voit en même temps par cette application, que le fait dépend essentiellement, 1° de ce que la pointe soit petite, eu égard aux distances des autres parties à l'axe *ND* : 2° de ce que celles-ci tournent rapidement; en sorte que selon que ces conditions auront lieu plus ou moins, le fait se manifestera plus ou moins : ainsi, on voit que tous les corps ne sont pas propres à manifester ce même phénomene qui, comme on le voit, n'est dû qu'au frottement.

On voit, par là, que sur un plan incliné, la toupie doit tendre à revenir, non pas à la verticale, mais à la perpendiculaire au plan. Mais comme elle doit glisser en même temps le long du plan, & que ce mouvement met le corps dans le cas de vaciller beaucoup en parcourant les inégalités du plan, il aura plus de difficulté à conserver la position perpendiculaire au plan, que sur un plan horisontal. On peut estimer, par là, jusqu'à quel point on peut compter sur la ligne de niveau qui seroit déterminée par le mouvement de la toupie : voyez le Traité de Navigation de *M. Bouguer*, *page* 261.

706. Si l'on veut avoir égard au frottement dans la solution des questions que nous avons résolues (*679 & suiv.*), tout le changement qu'il y a à faire, est de supposer (*Fig.* 175) que la ligne *AD*, au lieu d'être perpendiculaire au plan, forme avec ce plan, un angle à l'angle du frottement.

De la roideur des Cordes.

707. La roideur des cordes, ou la difficulté qu'on éprouve à les faire plier ſelon une courbure donnée, eſt encore une des cauſes qui diminuent l'effet des forces appliquées aux machines.

Pour ſe former une idée de la maniere dont cette roideur préjudicie aux effets des forces, repréſentons-nous que le tambour ou la poulie *ABC* (*Fig.* 192) eſt mobile autour de l'eſſieu *R*, ſans aucun frottement; les deux poids *P* & *Q* étant égaux, ſi l'on augmente tant ſoit peu l'un des deux, le poids *Q*, par exemple, le mouvement ne s'enſuivra qu'autant que la corde *PABCQ* ſera parfaitement flexible. En effet, concevons que la corde *PABCQ*, au lieu d'être parfaitement flexible, ne le ſoit point du tout, enſorte que les parties *AP*, *CQ* ſoient des verges roides & ſolidement liées au corps de la poulie; il eſt clair que ſi l'on force la poulie de ſe mouvoir ſuivant *ABC*, les deu poids *P* & *Q* pendront les ſituations *P′* & *Q′*; mais qu'ils tendront à revenir à leur premiere ſituation, & qu'il faudra une force particuliere pour les maintenir dans cette nouvelle ſituation. Si donc la corde n'eſt ni parfaitement inflexible, ni parfaitement flexible, on voit que ce que le défaut de flexibilité parfaite occaſionnera, ſera que le point A (*Fig.* 193) paſſant en A', & le point C en C', les parties AP, CQ, ſe courberont un peu, & de maniere que le poids P ſera plus loin de R, & le poids Q plus près, que ſi la corde étoit parfaitement flexible; enſorte que pour obliger les parties $A'O$, CC' de devenir tangentes aux points A & C, il faudra que la force qui tend à faire tourner, augmente; en un mot, il faudra employer une force qui n'auroit pas lieu ſans ce défaut de flexibilité.

La poulie étant toujours ſuppoſée parfaitement mobile ſur ſon eſſieu R, ſi au lieu d'une corde on emploie un ruban; alors, la plus légere augmentation dans le poids Q feroit tourner la poulie. Mais ſi l'on met enſuite une corde, on verra qu'il faut augmenter la puiſſance Q, & l'augmenter d'autant plus 1° que la ſomme des deux poids P & Q, ou en général, que la charge totale qui tend la corde, ſera plus conſidérable; parce que, toutes choſes d'ailleurs égales, la réſiſtance que les deux poids P & Q font ſentir, lorſque par la roideur de la corde ils prennent les ſituations $A'OP'$, $CC'Q'$, eſt d'autant plus conſidérable, que ces poids mêmes le ſont davantage.

2°. L'augmentation qu'il faudra donner à Q, doit être d'autant plus grande auſſi, que la poulie, ou en général la ſurface ſur laquelle la corde s'enveloppe, ſera d'un plus petit rayon. Car il eſt viſible que la difficulté que la puiſſance éprouve, venant de ce que la corde au lieu de s'appliquer contre la ſurface, à meſure que celle-ci entre, en reſte éloignée à une certaine diſtance, en prenant une courbure $P'OA'$ qui forme un certain angle $OA'A$ avec la ſurface; cette difficulté ſera d'autant plus grande que la courbure $A'O$ que la corde prend par ſon défaut de flexibilité, différera plus de la courbure de la ſurface : or plus le rayon de la ſurface ſera petit, & plus cette différence ſera grande.

3°. La puiſſance doit encore être augmentée à proportion de ce que le diametre de la corde ſera plus conſidérable. En effet, on ſent aiſément que la corde ſe fléchira d'autant moins qu'elle ſera plus groſſe; or nous venons de voir que la réſiſtance que la puiſſance éprouve eſt d'autant plus grande, qu'il y a plus de différence entre la courbure de $A'O$, & la courbure de $A'A$; elle eſt donc d'autant plus grande que $A'O$ pourra moins s'éloigner de la ligne droite; c'eſt-à-dire, d'autant plus grande

grande, que le diametre ou le rayon de la corde est plus grand.

708. Supposons que k soit l'augmentation qu'il faut donner à une puissance pour vaincre la résistance provenante de la roideur des cordes, lorsque la force totale qui tend la corde est P, que le diametre de la corde qui porte ce poids est D, & que le rayon de la surface ABC est R. Si l'on veut savoir ce que doit être cette augmentation, lorsque le poids sera p, le diametre de la corde d, & le rayon de la surface r; on observera, d'après ce qui vient d'être dit, que s'il n'y avoit de différence que dans le poids total qui tend la corde, on auroit cette augmentation, par la proportion $P : p :: k$: à un quatrieme terme, qui seroit $\frac{pk}{P}$. Mais si outre la différence dans le poids, il y en a aussi dans les courbures des surfaces; alors selon la seconde observation, qui fait voir que les augmentations provenantes de cette cause, sont en raison inverse des rayons des surfaces, l'augmentation dûe à cette cause, & au changement de poids, sera le quatrieme terme de cette proportion $r : R :: \frac{pk}{P}$ est à un quatrieme terme qui sera $\frac{pRk}{Pr}$. Enfin pour déterminer ce qui seroit dû aux trois causes

réunies, ayant égard à la troisieme observation, on calculera le quatrieme terme de cette proportion, $D : d :: \frac{pRk}{Pr}$ est à un quatrieme terme, qui sera $\frac{pRkd}{PrD}$. Ensorte que la résistance, dans le premier cas, sera à la résistance, dans le second, $:: k : \frac{pRkd}{PrD}$ ou $:: PrD : pRd$, *ou* $:: \frac{PD}{R} : \frac{pd}{r}$; c'est-à-dire, que les résistances provenantes de la roideur des cordes, sont comme les poids qui tendent ces cordes, multipliés par les diametres de ces mêmes cordes, & divisés par les rayons des surfaces sur lesquelles elles doivent être roulées.

Au reste, ces conclusions ne sont pas bien rigoureuses ; mais on peut les regarder comme suffisantes dans la pratique, en attendant que l'expérience ait éclairci davantage cette matiere : l'expérience fait voir en effet que la résistance dûe à la roideur des cordes suit à-peu-près cette loi ; mais toutes les expériences qui ont été faites sur cette matiere, n'ont pas encore un accord tel qu'on pourroit le desirer. Ce qu'on peut faire de mieux, est de s'appliquer à rendre les cordes plus souples qu'elles ne le sont. Voyez l'excellent *Traité de la Corderie* de M. Duhamel, tant pour cet objet que pour la force & les autres qualités des cordes.

709. Faisons voir maintenant, par un exemple, comment on doit appliquer les principes précédents. Reprenons, dans cette vue, le palan de la figure 144; & supposons-y que le rayon des poulies est de deux pouces; que celui de l'essieu en soit le $\frac{1}{5}$; le diametre des cordes, de 4 lignes, ou $\frac{1}{3}$ de pouce. Posons de plus, comme un fait établi par l'expérience, qu'une corde de six lignes ou $\frac{1}{2}$ pouce de diametre, chargée de 120ᵗᵇ, & embrassant une poulie de $\frac{3}{2}$ pouces de rayon, fait par sa roideur, une résistance de 8ᵗᵇ.

Cela posé, le poids P soutenu par le palan étant toujours de 400ᵗᵇ, comme nous l'avons supposé (695), les deux branches 1 & 2, sont chargées, tant par ce poids que par la force ajoutée à Q pour vaincre le frottement, par une force totale $=$ 209ᵗᵇ, 6; voyez (695). Multipliant donc (708) ce poids, par le diametre $\frac{1}{3}$ de la corde, & divisant par le rayon deux pouces commun à toutes les poulies; multipliant de même le poids 120ᵗᵇ de l'expérience, par le diametre $\frac{1}{2}$ de la corde, & divisant par le rayon $\frac{3}{2}$ de la poulie, qui ont servi dans cette même expérience ; on aura 34, 93 & 40 ; il faut donc (708) pour avoir la force dûe à la roideur de la corde 1, 2, qui passe sous la partie mobile, faire cette proportion 40 : 34, 93 : : 8^lb. à un quatrieme terme : ce quatrieme terme, qui est 6,99, ou 7^lb, est donc ce qu'il faudroit ajouter indépendamment du frottement, à la tension du cordon 2, si la mousle inférieure étoit fixe ; mais comme elle est mobile, ce qui diminue de moitié l'effort que doit faire le cordon 2, ainsi que nous le verrons ci-après, on aura donc 3^lb, 5 seulement, à ajouter aux 109^lb, 6 avec lesquelles ce cordon est déja tendu ; il le sera donc avec une force de 113^lb, 1.

Nous avons vu (695) qu'eu égard au frottement, le cordon 3 devoit être tendu avec une force = 120^lb, 7 ; donc la force totale qui tend la corde 2, 3 qui passe sur la partie fixe, est 113, 1 + 120, ou 233^lb, 8. Multipliant cette force, comme ci-dessus, par $\frac{1}{3}$, & divisant par deux, on aura 38,97. Cherchant donc comme ci-dessus, la valeur dûe à la roideur de la corde, 2, 3, qui passe sur la partie fixe, on aura 40 : 38, 97 : : 8^lb à un quatrieme terme qui est 7, 79. Il faut donc joindre ces 7^lb, 79 aux 120, 7^lb qui tendent déja le cordon 3, & on aura 128℔, 5 pour la force avec laquelle il doit être tendu eu égard au frottement, & à la roideur des cordes.

Le cordon 5, eu égard au frottement, devoit (695) être tendu avec une force = 130℔, 3; la force totale qui tend la corde 3, 4, qui embrasse la partie mobile, est donc 258℔, 8; avec laquelle & les mêmes dimensions pour les poulies & les cordes, on trouvera comme ci-dessus, que la force dûe à la roideur de la corde seroit 8℔, 62 si cette corde n'embrassoit pas la partie mobile; mais par la même raison que ci-dessus, il ne faut en prendre que la moitié; ainsi, la tension du cordon 4, eu égard à tout sera de 134℔, 6.

Le cordon 5, eu égard au frottement, devoit (695) être tendu avec une force = 143℔, 5; la force totale qui tend la corde 4, 5, qui embrasse la partie fixe, est donc 278℔, 1; avec cette valeur & les mêmes dimensions que ci-dessus, on trouvera pour la force dûe à la roideur des cordes, 9℔, 3; en sorte que le cordon 5 doit être tendu avec une force = 152℔, 8. Ainsi, le frottement & la roideur des cordes font que la puissance *Q* qui n'auroit dû être que de 100℔, doit être d'environ 153, c'est-à-dire, plus forte, de plus de moitié.

Nous n'avons pris que moitié de ce que nous donnoit le calcul, pour ce qu'on devoit ajouter à la tension des cordons 2 & 4, eu égard à la roideur; la raison en est que lorsque la poulie mobile tourne, le cordon qui l'entraîne la fait tourner à chaque instant sur un centre qu'on peut regarder comme placé au point où elle touche l'autre cordon; le cordon qui entraîne est donc dans le même cas que s'il avoit à faire tourner une poulie fixe dont le rayon seroit égal au diametre de la poulie mobile; & puisque les forces dûes à la roideur des cordes sont en raison inverse (707) des rayons des poulies, ici cette force doit donc être moitié moindre.

De la Vis.

710. LA *vis AB* (*Fig.* 194 & 195) est un cylindre revêtu extérieurement d'un relief, dont l'inclinaison à l'égard de l'axe *AB* de ce cylindre, est par-tout la même.

L'*écrou* est le solide *XZ* que traverse la vis, & dont l'intérieur est creusé ou sillonné de la même maniere que la vis est revêtue à l'extérieur; en sorte qu'il est exactement le moule de la partie de la vis qu'il embrasse.

Tantôt l'écrou eſt fixe, & la vis doit, en paſſant, paſſer ſucceſſivement tous ſes filets à travers l'écrou : tantôt c'eſt la vis qui eſt fixe, & l'écrou doit, en tournant, parcourir toute la longueur de la vis. Quelque ſoit celui de ces deux cas qui ait lieu, tant que la puiſſance eſt appliquée à la même diſtance de l'axe de la vis, il y aura toujours même rapport entre cette puiſſance, & l'effort qu'elle eſt capable de faire dans le ſens de l'axe, effort qui eſt celui que l'on conſidere principalement, dans la vis.

L'intervalle d'un filet de la vis, au filet voiſin, eſt ce qu'on appelle la *hauteur du pas de la vis;* ainſi *DE* (*Fig.* 195) eſt la hauteur du pas de la vis, ou ſimplement, le pas de la vis.

711. On peut prendre une idée aſſez exacte de la vis en ſe repréſentant ſon relief, comme formé par l'enveloppement ſucceſſif des hypothénuſes *CK* (*Fig.* 196) d'autant de triangles rectangles *CIK* qu'il doit y avoir de pas ; chaque triangle aura pour hauteur, la hauteur *CI* du pas; & ſa baſe *IK* aura pour longueur la circonférence de la ſection cylindrique qui répond au point *I;* en ſorte qu'à meſure que le filet

deviendra plus épais, *IK* aura plus de longueur, la hauteur *CI* restant la même.

Dans la figure 195 où le relief des spires forme un tranchant, à mesure que le relief épaissit, il faut concevoir que la base *IK* figure 196, augmente, & que la hauteur *CI* diminue.

712. La vis *AB* (*Fig.* 194) étant fixe, & dans une situation verticale, concevons qu'il n'y a point de frottement, & qu'on abandonne l'écrou à sa propre pesanteur. Il est clair qu'il parcourra en tournant, tous les filets inférieurs de la vis, en glissant sur chacun, comme sur une surface inclinée. Il n'est pas moins clair qu'on peut arrêter cet effort en appliquant, à l'écrou *XZ*, une puissance que l'on peut, d'ailleurs, supposer dirigée de plusieurs manieres différentes. Mais comme il est évident que l'écrou n'aura aucun mouvement si on l'empêche seulement de tourner, bornons-nous à chercher quel doit être le rapport entre le poids de l'écrou, ou en général, de la force qui le pousseroit parallélement à l'axe de la vis, & la force qui peut l'empêcher de tourner. Ne considérons d'abord que l'un des points de l'écrou, qui repose sur l'un des points du filet de la vis.

La force qui agit immédiatement ſur ce point, pour l'empêcher de tourner, & celle qui tend à le faire deſcendre parallélement à l'axe, doivent être regardées comme ſe faiſant équilibre ſur un plan incliné qui a pour hauteur la hauteur du pas de vis; & pour baſe, la circonférence qui a pour rayon la diſtance de ce point à l'axe. C'eſt une ſuite de la génération que nous venons de donner de la vis. Or, de ces deux forces, la premiere eſt parallele à la baſe de ce plan incliné, & la ſeconde lui eſt perpendiculaire; donc d'après ce qui a été dit (673) on voit que la partie de force parallele à l'axe de la vis, qui s'exerce ſur un point quelconque du filet, eſt à la force qu'il faudroit appliquer immédiatement à ce point pour l'empêcher de tourner, & dans le ſens contraire à cette rotation, comme la baſe de ce plan incliné, eſt à ſa hauteur, c'eſt-à-dire, comme la circonférence qui a pour rayon la diſtance de ce point à l'axe, eſt par rapport à la hauteur du pas de vis. Donc, ſi l'on appelle f, la premiere force; t, la ſeconde; r la diſtance du point dont il s'agit, à l'axe; h la hauteur du pas de vis, & qu'on ſuppoſe que $1:c$ marque le rapport du rayon à la circonférence; ce qui donnera rc pour la circonférence qui a r pour rayon ; on aura $f : t :: rc : h$.

Mais comme chaque point de l'écrou n'eſt point ſoutenu immédiatement, & que le tout eſt ſoumis à une ſeule puiſſance Q appliquée à quelque point de l'écrou, dont je ſuppoſe que la diſtance à l'axe, ſoit R ; il eſt clair que R étant plus grand que r, il faudra pour chaque point, une partie de la force Q d'autant moindre, que la diſtance R ſera plus grande ; en ſorte que ſi l'on nomme q, la partie de cette force qui, à la diſtance R peut faire le même effort que fait t à la diſtance r, on aura $t : q :: R : r$. Multipliant cette proportion, par la premiere, on aura $f : q :: cRr : hr :: cR : h$. C'eſt-à-dire, que pour chaque point de l'écrou, appuyant ſur le filet de la vis, il y a toujours même rapport entre la force qui le pouſſe parallélement à l'axe de la vis, & celle qui, à une diſtance donnée R, l'empêcheroit de tourner ; & ce rapport eſt celui de cR à h ; or cR eſt la circonférence que décriroit la puiſſance Q en tournant. Concluons donc que la ſomme de toutes les forces f qui pouſſent l'écrou parallélement à l'axe de la vis, eſt à la ſomme de toutes les puiſſances q néceſſaires pour l'empêcher de tourner ; c'eſt-à-dire, que la force totale (que j'appelle F) parallele à l'axe de la vis, eſt la force Q qui empêcheroit l'écrou de tourner par l'effet de la premiere force, comme la circonférence qui tend à décrire cette puiſſance Q, eſt à la hauteur du pas de la vis.

713. Donc auſſi la force qu'il faudroit employer parallélement à l'axe de la vis, pour empêcher la puiſſance Q de faire tourner l'écrou, doit être à cette puiſſance Q, comme la circonférence que tend à décrire cette derniere, eſt à la hauteur du pas de la vis.

714. Donc ſur une même vis, l'effet de la puiſſance Q ſera d'autant plus conſidérable, que cette puiſſance ſera appliquée plus loin de l'axe. Et ſur des vis différentes, la puiſſance étant également éloignée de l'axe, ſon effet ſera d'autant plus conſidérable, que la hauteur du pas de la vis ſera plus petite. C'eſt-à-dire, que plus les ſpires de la vis ſeront ſerrées, & plus la puiſſance aura d'effet pour comprimer dans le ſens de l'axe.

715. La vis eſt donc, ainſi qu'on le voit, une machine compoſée, qui participe du plan incliné & du levier. On l'emploie utilement pour comprimer les corps. Le frottement modifie, ſans doute beaucoup,

les effets que cette machine devroit avoir, en conséquence du rapport que nous venons d'établir; mais les considérations nécessaires pour bien déterminer ici les effets du frottement, nous meneroient trop loin, quand même l'expérience auroit établi quelque chose de certain sur le frottement des corps qui tournent. Quoi qu'il en soit, on doit regarder le rapport que nous venons d'établir, comme déterminant la limite des effets de cette machine.

716. Ce que la puissance gagne du côté de la force, elle le perd dans cette machine, comme dans toute autre, du côté de la vîtesse. En effet, pour que l'écrou parcoure un des pas de la vis, il faut que la puissance fasse un tour entier.

Au reste, ce désavantage, si c'en est un, est inévitable. Mais on l'emploie utilement, dans plusieurs occasions. Lorsqu'il s'agit, par exemple, de mesurer les différentes parties d'un très-petit espace *A B* (*Fig.* 197), on le peut faire avec succès, en faisant parcourir cet espace, à l'extrémité *E* d'une vis *D E* dont les pas soient bien égaux. Si cette vis porte, à son autre extrémité, une aiguille qui entraînée d'un mouvement commun avec la vis, parcoure successivement les divisions d'un cadran que celle-ci traverse, on pourra, après avoir éprouvé quel nombre de tours doit faire l'aiguille pour que le point E parcoure la longueur connue AB, déterminer ensuite, par le nombre de tours & portion de tour que cette aiguille sera obligée de faire pour que le point E parcoure une partie quelconque de AB, déterminer, dis-je, la vraie mesure de cette partie, si petite qu'elle soit.

717. L'application de la vis, aux autres machines, peut en augmenter beaucoup l'effet. Par exemple, si la puissance Q appliquée à la manivelle $CDEQ$ (*Fig.* 198) fait tourner la vis AB, dont les spires mènent les dents de la roue M, & l'obligent de tourner; & que celle-ci entraîne avec elle un cylindre qui, en tournant, force la corde KP de s'envelopper : voici comment on déterminera le rapport de la puissance Q, au poids P.

En appellant L l'effort que le filet de la vis fait sur la dent L, on aura $Q:L::AB:Cir.DE$, AB étant la hauteur du pas, & $Cir.DE$ marquant la circonférence que décriroit la puissance Q (712). L'effort L, est une puissance qui, appliquée à la circonférence de la roue, fait effort contre le poids; ainsi (633) on a $L:P::IK:IL$; donc en multipliant ces deux proportions, on a $Q:P::$ $AB \times IK : IL \times Cir.\,DE$; proportion qui fait voir que Q aura d'autant plus d'avantage, que AB & IK feront plus petits, à l'égard de $Cir.\,DE$ & IL.

Du Coin.

718. LE coin $ADECB$ (*Fig.* 199) eft un prifme triangulaire que l'on introduit dans une fente IZR déja commencée, ou, en général, entre deux furfaces, pour augmenter cette fente, ou pour écarter davantage fes faces, ou enfin pour les fixer à une ouverture déterminée.

La théorie du coin confidéré comme inftrument à fendre, eft encore très-imparfaite, & le fera probablement, encore long-temps. Comme il n'eft pas de corps qui n'ait une certaine flexibilité, les parties de la fente que touchent les faces du coin peuvent être écartées davantage fans que pour cela le point Z où fe termine la fente, change de place; en forte qu'une partie de la force appliquée à la tête $ADEC$ du coin, eft uniquement employée à fléchir les deux branches féparées par la fente; & l'autre eft employée à tendre les fibres de la partie non entamée.

719. Si les branches ZFG, ZKL étoient inflexibles, & que les fibres qui lient les parties de ce qui reste à fendre, cédassent toutes en même temps, on pourroit, lorsque la rupture est sur le point de se faire, envisager les choses de cette maniere. Concevoir que le corps est actuellement fendu, & substituer, par la pensée, à la résistance de la partie $ZFGV$, & à celle de la partie $ZKLX$, des forces appliquées perpendiculairement à VO, & XS, & à des distances égales à celles où l'effort total de chacune de ces deux résistances s'exerce. Alors, pour avoir le rapport de la force P, aux deux résistances O & S qu'opposent les deux parties que l'on veut séparer, voici ce que l'on considéreroit.

720. La force appliquée perpendiculairement à la tête du coin, doit, pour avoir pleinement son effet, rencontrer un appui solide dans la base VX; & par conséquent si le corps n'étoit pas assujetti, & qu'il n'y eût pas de frottement, il faudroit que cette force rencontrât perpendiculairement la base, si la base porte sur un plan. S'il y a du frottement, il ne sera pas indispensable qu'elle soit perpendiculaire à la base; mais il faut qu'elle la rencontre, & qu'elle ne fasse pas avec la base un angle moindre que

celui du frottement, sans quoi le corps se renverseroit. Si la base est fixement retenue par un point, alors il faut que la direction de la force perpendiculaire à la tête du coin, passe par ce point. Ces conditions supposées, voici comment s'exerce l'action de la force *P*.

721. Pour que la force *P* se communique aux deux branches *ZFG*, *ZKL*, il faut, en supposant qu'il n'y eût pas de frottement, qu'il y ait sur sa direction au moins un point *P'* duquel on puisse abaisser une perpendiculaire sur chaque face de la fente, & qui passe par quelqu'un des points où cette face est touchée par celle du coin. Mais s'il y a du frottement, cette condition n'est pas nécessaire; il suffit qu'il puisse y avoir dans la direction de la force *P*, un point *P'* duquel on puisse mener deux lignes *P'R*, *P'I* qui passent par les points de contact, & qui n'y fassent point avec les faces, un angle plus petit que celui du frottement. C'est à ces conditions que la force *P* pourra être pleinement transmise aux deux faces.

On voit donc, par ce que nous venons de dire, que les connoissances qu'il faudroit avoir pour déterminer quelles forces on doit employer pour séparer les parties d'un corps,

corps, à l'aide du coin, laiſſent beaucoup d'obſcurité ſur ſa théorie. Contentons-nous donc d'avoir une ſorte de limite ſur cette théorie, & déterminons le rapport de la puiſſance P, à chacune des deux réſiſtances O & S, abſtraction faite du frottement, & en ſuppoſant que la baſe VX appuie ſur un plan.

722. On concevra la force P repréſentée par $P'Q$, décompoſée en deux autres dirigées ſuivant les perpendiculaires $P'N$, $P'M$, aux deux faces du coin. Ces deux forces feront effort pour faire tourner les deux parties du corps, la premiere autour de V, la ſeconde autour de X. Et les réſiſtances O & S dans les deux ſens oppoſés, ſont les forces qui s'oppoſent à ce mouvement de rotation. Menant donc les perpendiculaires VY, XT, ſur $P'N$, $P'M$, on regardera OVY, & SXT, comme deux leviers angulaires, dont les appuis ſont en V & X.

Cela poſé, en nommant I la force ſuivant $P'N$; on aura $P : I :: P'Q : P'N$; mais puiſque nous ſuppoſons la force P perpendiculaire à la tête du coin, & les deux forces $P'N$, $P'M$, perpendiculaires à ſes faces, le triangle $P'NQ$, eſt ſemblable au triangle ABC, & l'on a $P'Q : P'N :: AC$:

AB; donc $P:I::AC:AB$. Si l'on nomme O la résistance de la partie $ZFNV$, supposée passer à la distance VO, on aura, par la propriété du levier, $I:O::VO:VY$. Multipliant ces deux proportions, on aura $P:O::AC \times VO:AB \times VY$. Et pour l'autre face on trouvera de même $P:S::AC \times XS:BC \times XT$.

723. Si le corps étoit retenu, il faudroit envisager la chose un peu différemment; mais comme malgré ces considérations, nous n'en serions pas plus avancés sur la véritable théorie du coin, qui tient à des connoissances physiques que nous n'avons point, nous ne nous arrêterons pas davantage sur cette matiere. Nous ferons seulement observer qu'il suit de la proportion $P:O::AC \times VO:AB \times VY$, qu'en général, l'effet du coin sera d'autant plus considérable, que cet instrument sera plus aigu, puisqu'alors AC sera d'autant plus petit par rapport à AB. C'est à cet instrument qu'on doit rapporter l'effet des couteaux, rasoirs, &c, & de tous les instruments tranchants.

De la maniere d'estimer les Forces appliquées aux machines.

724. Nous avons déja dit plusieurs fois, que la mesure d'une force quelconque, étoit le produit de la multiplication d'une masse déterminée, par la vîtesse que cette force est capable de lui donner. Il est à propos d'ajouter ici quelques éclaircissements sur l'application de ce principe à la mesure des forces appliquées aux machines.

Lorsque deux poids agissent l'un sur l'autre, à l'aide d'une poulie simple & fixe; il faut, ainsi que nous l'avons vu, pour qu'ils se fassent équilibre, que leurs masses soient égales; & cet équilibre peut durer éternellement.

Mais si au lieu d'opposer un poids, à un poids, on oppose la force d'un animal, celle d'un homme, par exemple; quoiqu'il soit bien vrai que pour l'équilibre, cet homme ne doive employer qu'un effort égal au poids qu'il a à soutenir, c'est-à-dire, un effort égal à la quantité de mouvement qui résulte de la masse de ce corps multipliée par la vîtesse que la pesanteur lui donne dans un instant; il est clair, néanmoins, que si cet homme n'étoit capable que d'un pareil effort, l'équilibre ne dureroit qu'un inſtant, parce que la peſanteur renouvelle au ſecond inſtant, l'action qui a été détruite dans le poids, au premier inſtant.

Ce n'eſt donc pas par la maſſe ſeule que l'homme ſoutient, qu'on doit juger de ſa force ; il faut néceſſairement faire entrer encore dans la meſure de cette force, le nombre de fois qu'il eſt capable d'exercer une action égale à celle que la peſanteur fait paſſer à chaque inſtant, dans le poids. Or ſi p repréſente la vîteſſe que la peſanteur eſt capable de donner en une ſeconde de temps, à un corps libre ; & dt une portion infiniment petite d'un temps quelconque t; pdt ſera (194) la vîteſſe qu'elle donne pendant l'inſtant dt, t étant ſuppoſée compté en ſecondes. Donc ſi M eſt la maſſe qu'il s'agit de ſoutenir, $Mpdt$ ſera ſon poids, ou la quantité de mouvement que la peſanteur lui donne à chaque inſtant dt; c'eſt donc auſſi l'effort que ſera obligée d'exercer à chaque inſtant, la force qui doit ſoutenir la maſſe M, ſoit immédiatement, ſoit à l'aide d'une poulie. Donc pendant un temps quelconque t, cette force aura dû conſumer une quantité de mouvement égale à $\int Mpdt$, c'eſt-à-dire, $=Mpt$. Donc ſi t marque le temps au bout duquel l'agent n'eſt plus en état de soutenir la masse M, on pourra regarder Mpt comme étant la mesure de sa force. Sur quoi il faut observer, que nous n'entendons pas par-là, qu'il ne sera plus capable d'exercer aucun effort ; mais sa force étant devenue inférieure à l'effet qu'il s'agit de produire, est alors censée nulle quant à cet effet. Par exemple, supposons que pour soutenir un poids de 50^{lb} pendant une heure de temps, on veuille employer une force que l'on sache d'ailleurs être telle qu'agissant par degrés égaux & infiniment petits, elle peut parvenir à faire naître dans une masse de 20^{lb} une vîtesse qui soit de 50 pieds par seconde, au moment où cette force sera épuisée : je vois qu'alors cette masse de 20^{lb} auroit une quantité de mouvement $= 20^{lb} \times 50 = 1000$. Voyons donc si cette quantité de mouvement est au moins égale, à ce que devient la quantité Mpt, en y mettant 50^{lb} pour M, 1^{heure} ou 3600$''$ pour t, & 30, 2 pieds (283) pour p : il est évident qu'il s'en faut de beaucoup ; donc une pareille force ne soutiendroit pas le poids de 50^{lb} pendant une heure. Si l'on veut savoir pendant quel temps, ou quel nombre de secondes elle le soutiendroit, il n'y a qu'à supposer $Mpt = 1000$; & mettant 50 pour M, & 30, 2 pieds pour p, on aura $t = \frac{1000}{50 \times 30,2} = \frac{1000}{1510} = \frac{100}{151} = \frac{2''}{3}$ à peu près, c'eſt-à-dire qu'une pareille force ne ſoutiendroit un poids de 50 ℔, que pendant $\frac{2}{3}$ de ſeconde, à peu-près.

725. Suppoſons, maintenant, qu'il s'agit non-ſeulement de ſoutenir la maſſe M pendant un temps t, mais encore de la mouvoir pendant ce temps, avec une vîteſſe uniforme & connue, u.

Il eſt clair que pour que l'agent ait pu faire naître dans le mobile M, ſoit ſucceſſivement, ſoit ſubitement, la vîteſſe u, il a dû conſumer une quantité de mouvement $= Mu$; & pour entretenir cette vîteſſe u pendant ce temps t, il a fallu qu'il lutte pendant ce même temps, contre la peſanteur, de la même maniere que ſi le corps eût été en repos; c'eſt-à-dire (724) qu'il a dû, en outre, conſumer une quantité de mouvement $= Mpt$; donc pour entretenir le mobile M avec la vîteſſe u pendant le temps t, l'agent doit être capable de produire une quantité de mouvement $= Mu + Mpt$.

726. L'expérience a fait voir que ſi l'on applique un homme à la manivelle Q d'un treuil tel que celui de la figure 148, il peut agir pendant huit heures, & faire faire à la manivelle 30 tours par minute, en ſuppoſant

1° que le rayon du cylindre & celui de la manivelle ſont égaux & chacun de 14 pouces; 2° que le poids appliqué à la ſurface du treuil eſt de 25℔. Cette expérience détermine la valeur de $Mu + Mp\,t$, & par conſéquent ce au-delà de quoi on ne doit point compter dans l'évaluation de la force d'un homme appliqué à une machine, & qui doit agir pendant un certain temps. En effet, puiſque le rayon de la manivelle & celui du cylindre ſont égaux, le poids fait ici le même chemin que la puiſſance. Ainſi puiſque ce rayon eſt de 13 pouces; à chaque tour, la puiſſance parcourt $28 \times \frac{22}{7}$ ou 88 pouces; & puiſqu'elle fait 30 tours par minute, à chaque ſeconde elle décrit donc 44 pouces, ou $\frac{44}{12}$ de pied; c'eſt-à-dire que la vîteſſe $u = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$. La maſſe $M = 25$℔, $p = 30^{P}$, 2 & $t = 8^{h} = 28800''$. Les ſubſtitutions faites, dans $Mu + Mpt$, on a $Mu + Mpt = \frac{275}{3} + 21744000 = 21744092$. C'eſt par ce nombre qu'on pourra juger ſi avec la force d'un homme, on peut attendre tel ou tel effet que l'on ſe propoſe. Par exemple, ſi l'on demande s'il eſt poſſible qu'un homme appliqué à la même machine que dans cet exemple, puiſſe mouvoir un poids de 60℔ avec une vîteſſe de 10 pieds par ſeconde, pendant 6 heures, on verra qu'on ne doit pas y compter. En effet, ici on auroit $M = 50^{lb}$; $u = 10$; $p = 30, 2$; $t = 12600''$; ce qui donneroit $Mu + Mpt = 600 + 39139200 = 39139800$ qui surpassant de beaucoup 21744092, fait voir qu'un seul homme travaillant continuellement pendant six heures n'est pas capable d'un pareil effort.

On peut remarquer, en passant, que dans ces deux exemples, la vîtesse u avec laquelle l'homme est supposé mouvoir le poids, n'entre que pour très-peu de chose dans l'évaluation de la force; puisque dans le premier exemple, la quantité de mouvement qui répond à cette vîtesse, est $\frac{275}{3}$; & 600, dans le second; quantités qui sont très-petites à l'égard de 21744000, & 39139200. Ainsi, dans le second exemple, si l'on ne doit point attendre l'effet demandé, ce n'est pas parce que la vîtesse doit être plus grande que dans le premier cas; mais parce que la masse, & le temps pendant lequel elle doit être mue, supposent dans la valeur de la puissance, une quantité de mouvement trop grande.

On peut donc, tant que la vîtesse avec laquelle le moteur devra marcher, sera petite à l'égard de pt, c'est-à-dire, à l'égard de celle qu'un corps pesant acquerroit en tombant librement pendant le temps durant lequel on veut que la force agisse, on peut, dis-je, prendre simplement pour mesure de la force, la quantité $M\,pt$; & l'on aura $Mpt = 21744000$. Ainsi, si la masse que l'on veut mouvoir avec une vîtesse médiocre, si cette masse, dis-je, multipliée par la vîtesse qu'un corps pesant acquerroit en tombant librement pendant le temps durant lequel la force doit agir, forme un produit au-dessous du nombre constant 21744000, ou qui le surpasse peu, on peut regarder la force comme suffisante pour l'effet proposé, la puissance agissant comme dans les deux exemples précédents. Mais si la vîtesse avec laquelle le poids doit être mu, est comparable à celle qu'un corps pesant acquerroit pendant le temps de l'action de la force motrice; alors il faudra, du nombre constant 21744092, retrancher la quantité de mouvement Mu dûe à la vîtesse avec laquelle le poids doit être mu; & si le poids multiplié par la vîtesse qu'un corps pesant acquerroit pendant le temps que la machine doit être mue, forme un produit plus petit que le reste qu'on aura trouvé, la puissance pourra être jugée suffisante.

Il faut cependant obſerver que ceci ſuppoſe qu'un homme agiſſant avec une certaine vîteſſe, eſt capable du même effort que lorſqu'il agit lentement ; ce qui eſt d'autant moins exact que l'homme doit agir avec plus de vîteſſe. Au reſte, c'eſt à l'expérience à fixer quel nombre on doit prendre alors au lieu de 21744092. La force n'en doit pas moins être meſurée par $Mu + Mpt$; mais quand on aura déterminé par plusieurs expériences, une valeur de $Mu + Mpt$, on pourra l'employer pour toutes les vîteſſes qui ne différeront pas beaucoup de celle qui aura eu lieu dans l'expérience ; on pourra l'employer, dis-je, comme nous venons de voir qu'on devoit employer le nombre 21744000, dans les cas que nous venons d'examiner.

727. Dans tout ceci, nous avons fait abſtraction du frottement. Lorſque la machine a atteint l'uniformité, qui eſt l'état où il convient de conſidérer les machines, l'effet du frottement doit être conſidéré comme conſtant, & on peut le comparer à une nouvelle maſſe qu'il s'agiroit de mouvoir avec la maſſe propoſée. Ainſi, dans le même cas que ci-deſſus, ſuppoſant que le frottement équivaut au poids d'une partie connue $\frac{n}{m}$

de la masse M, cette résistance exigera de la part de la puissance, une quantité de mouvement $= \frac{n}{m} Mpt$; ensorte que $Mu + \frac{n}{m} Mpt + Mpt$, ou $Mu + \left(\frac{n}{m} + 1\right) Mpt$, sera la mesure de la force motrice.

Dans l'expérience ci-dessus, quoique l'Auteur qui la rapporte (Desaguilliers, *Cours de Physique Expérimentale*, *Tom. II*, *pag.* 594) n'ait point parlé de l'effet du frottement, on doit penser qu'il le comprend tacitement dans le résultat de l'expérience. Si donc on suppose qu'eu égard à ce que l'axe a dû être d'un rayon beaucoup plus petit que celui du cylindre, le frottement ait été la douzieme partie du poids, il faudra en négligeant Mu, comme on le peut ici, augmenter le nombre 21744000, de sa douzieme partie; & alors la force d'un homme, en pareilles circonstances, doit être représentée par le nombre 23556000. On voit donc que pour être en état de donner une estimation suffisante de la force d'un homme, il faut préalablement s'assurer du rapport de la force du frottement, à celle du poids, dans l'expérience que l'on fait dans la vue de déterminer cette force. Alors si k est la valeur que cette expérience donne pour $\left(\frac{n}{m} + 1\right) Mpt$, on aura $\left(\frac{n}{m} + 1\right) Mpt = k$, en négligeant Mu; c'eſt-à-dire, lorſque u eſt petit par rapport à pt. Cette équation ſervira à juger dans toute autre ſuppoſition ſur la valeur de $\frac{n}{m}$, ſi la force d'un homme ſuffira pour mouvoir le poids M, pendant le temps propoſé t.

728. Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons regardé l'agent, comme s'il agiſſoit immédiatement ſur le poids, & comme s'il ne tiroit aucun avantage des circonſtances locales & des machines. Pluſieurs circonſtances peuvent ſouvent permettre de compter ſur un effet plus grand qu'il ne réſulteroit des ſeules conſidérations que nous venons d'expoſer. Par exemple, dans l'uſage de la poulie, un homme peut ajouter à ſa propre force, le poids de ſon corps, ou une bonne partie de ce poids; & il y a beaucoup d'autres circonſtances, & de machines, où il peut s'en aider. Souvent le mouvement n'eſt pas continu, mais ſe fait par repriſes comme il arrive dans la poulie; & s'il y a de la perte de temps, il peut y avoir auſſi un bénéfice en ce que par les repos alternatifs, l'agent peut être plus long-temps capable de la même action. Nous ne nous arrêterons point à ces

détails dont il ſera toujours facile de tenir compte, en ſuivant l'eſprit de ce que nous venons de dire, & ſur-tout en s'appuyant ſur des expériences, dans leſquelles on ait eu ſoin de diſcuter ce qui appartient à chacune des cauſes dont l'action de la force motrice dépend.

On dit très-communément, qu'un homme, par un travail continué pendant environ huit heures, ne peut exercer qu'un effort de 25 ℔. On voit par ce qui précede, qu'un pareil énoncé ne détermine pas ſuffiſamment quelle eſt la valeur de cette force ; outre qu'il eſt néceſſaire d'avoir égard à la vîteſſe avec laquelle cet homme agit, il ne l'eſt pas moins d'avoir égard à la maniere dont ſon action eſt appliquée, & à beaucoup d'autres circonſtances dont l'énumération nous meneroit trop loin. Il faut quand les circonſtances viennent à varier, faire précéder le calcul, par des expériences relatives à ces circonſtances.

729. Quoique nous n'ayons conſidéré que le cas où le poids tranſmet toute ſa réſiſtance à la puiſſance, il n'en eſt pas moins facile, d'après ce que nous avons dit ſur le rapport du poids à la puiſſance, dans chaque machine, de déterminer de même, ſi à l'aide de telle ou telle machine, une puiſ-

ſance propoſée produira un effet propoſé. Par exemple, dans le treuil, ſi le rayon du cylindre eſt r, & celui de la roue R; pour que le poids ſe meuve avec la vîteſſe u, il faut que la puiſſance y ait employé une quantité de mouvement $\frac{Mur}{R}$; & puiſque pendant le temps t, l'action de la peſanteur fait paſſer dans le corps M, la quantité de mouvement Mpt, la puiſſance doit employer à ſoutenir cet effort, la quantité de mouvement $\frac{Mptr}{R}$; enfin ſi le frottement eſt équivalent à la partie $\frac{n}{m}$ de la maſſe M ſuppoſée appliquée à la diſtance r, la puiſſance aura encore à employer la quantité de mouvement $\frac{n}{m}\frac{Mptr}{R}$, enſorte que pour juger ſi la puiſſance pourra mouvoir avec la vîteſſe u, pendant le temps t, la maſſe M, ſur un treuil dont le rayon du cylindre ſeroit r, & celui de la roue, R; il faudra déterminer, par expérience, la valeur de $\frac{Mur}{R} + \left(\frac{n}{m} + 1\right)\frac{Mptr}{R}$, en appliquant à un treuil de dimenſions & d'un frottement connus, un moteur qui meuve une maſſe connue; & obſervant le temps, pendant lequel ce moteur peut continuer ſon action; alors ſi k eſt la valeur qu'on aura trouvée en mettant pour M, u, r, R,

$\frac{n}{m}$, & t, les valeurs que ces quantités ont eues dans l'expérience, il faudra dans tout autre cas, que $\frac{Mur}{R} + \left(\frac{n}{m} + 1\right)\frac{Mptr}{R}$ n'ait pas une valeur plus grande que k.

Pareillement, ſur le plan incliné, la puiſſance tirant parallélement au plan, avec une vîteſſe u; ſi l'on appelle i l'inclinaiſon du plan, $Mpt\ \mathit{ſin}\ i$ ſera (672) la quantité de mouvement que la peſanteur fera paſſer ſucceſſivement dans le mobile ſuivant la direction du plan, pendant le temps t; ainſi la puiſſance aura dû employer une quantité de mouvement $= Mu + Mpt\ \mathit{ſin}\ i$; & ſi le frottement eſt une partie $\frac{n}{m}$ du poids, elle aura dû employer une quantité de mouvement $= Mu + Mpt\ \mathit{ſin}\ i + \frac{n}{m} Mpt$. Ayant donc déterminé, par expérience, une valeur de $Mu + Mpt\ \mathit{ſin}\ i + \frac{n}{m}\ Mpt$, il faudra, lorſqu'on voudra déterminer ſi la même puiſſance peut mouvoir une maſſe déterminée M, avec une vîteſſe connue u, pendant un temps connu t, ſur un plan dont l'inclinaiſon eſt i, & ſur lequel le frottement eſt une partie connue du poids; il faudra, dis-je, examiner ſi la valeur qu'aura alors $Mu + Mpt\ \mathit{ſin}\ i + \frac{n}{m}\ Mpt$ eſt plus petite que celle de l'expérience, ou tout au plus égale; & alors la chose sera possible.

Si le temps t, pendant lequel la machine doit être en mouvement, n'étoit pas donné; mais que l'on connût l'espace que la puissance ou le poids doit parcourir; par exemple, celui que le poids doit parcourir avec la vîtesse u; alors comme on suppose que le mouvement est uniforme, si l'on appelle E l'espace qu'on a dessein que le poids parcourre, on mettroit au lieu de t sa valeur $\frac{E}{u}$ (185).

Telle est, en substance, la maniere dont on doit se conduire dans l'évaluation des forces appliquées aux machines. Chaque machine peut exiger des considérations particulieres eu égard à la nature de l'agent, & à la maniere dont il peut être appliqué à cette machine. Mais c'est toujours en remontant à la quantité de mouvement que cet agent doit consumer, qu'on estimera s'il est capable d'un effet proposé; & les principes que nous venons d'exposer, pourront guider utilement dans ces recherches.

Appendice.

730. Nous allons placer ici quelques additions à divers endroits de cet Ouvrage. Nous nous étions proposés de les rendre plus nombreuses; mais nous ne pourrions y satisfaire sans grossir trop ce volume.

Tout ce que nous avons dit sur le choc & la résistance des fluides,

fluides, depuis le n° 375, renferme la théorie ordinaire de ce choc. Mais il ne faut pas dissimuler que cette théorie n'est pas aussi conforme à l'expérience qu'il seroit à desirer. L'expérience confirme assez bien le principe que les résistances sont (toutes choses d'ailleurs égales) proportionnelles au quarré de la vîtesse; mais elle s'accorde peu avec celui qui établit que les résistances sont proportionnelles au quarré du sinus d'incidence. Elle ne confirme point, non plus, cet autre principe, qu'à incidences & à vîtesses égales, la résistance sur des surfaces planes, soit proportionnelle à l'étendue de ces surfaces, ensorte qu'on ne doit regarder les regles que l'on a eues jusqu'ici sur le choc des fluides, que comme des limites des véritables regles. Au reste, une théorie plus rigoureuse demanderoit un ouvrage à part, & un très-grand nombre d'expériences. Voyez le *Traité de la résistance des Fluides* de M. d'Alembert, & l'*Hydrodynamique* de M. Daniel Bernouilli.

731. Nous avons démontré (466) qu'un corps qui tombe par un arc de courbe quelconque, a dans quelque point que ce soit, la même vîtesse que s'il étoit tombé verticalement de la hauteur du point d'où il est parti, au-dessus de celui où il est actuellement. Ainsi, si un corps tombe par l'arc AD (*Fig.* 200) il aura au point D la même vîtesse que s'il étoit tombé le long de FD, AF étant horisontale, & CD verticale. Par la même raison s'il tombe par l'arc BD, il aura au point D la même vîtesse que s'il étoit tombé le long de ED. Or si on laissoit tomber un corps successivement, du point F & du point E, il auroit (199) en arrivant en D, des vîtesses qui seroient comme les racines quarrées des hauteurs; & (*Géom.* 170) si ABD est un arc de cercle, on a $\sqrt{DF} : \sqrt{DE} :: AD : BD$, AD & BD étant les cordes des arcs ABD & BD; donc les vîtesses acquises en tombant le long des arcs quelconques ABD, BD, dont la tangente au point le plus bas est horisontale, sont entr'elles comme les cordes de ces arcs. Ainsi, si l'on veut faire naître dans un mobile une vîtesse double, triple, &c. de celle qu'auroit au point D, un autre mobile tombant par l'arc BD, il n'y a qu'à faire tomber ce premier, par l'arc ABD dont la corde soit double, triple, &c. de la corde BD.

Et si l'on veut faire naître dans un mobile une vîtesse connue, par exemple, une vîtesse de 4 pieds par seconde; il n'y a qu'à déterminer par ce qui a été dit (207) de quelle hauteur un corps devroit tomber pour acquérir une vîteſſe de 4 pieds par ſeconde ; & ayant pris ſur la verticale *DC*, une ligne *DF* égale à cette hauteur ; à un point *C* pris au-delà, ſur *DC*, on attachera un fil de la longueur *DC*, & y ayant ſuſpendu le mobile, on l'écartera au point *A* où la perpendiculaire *FA* coupe l'arc *DA*; alors ce mobile parti du point *A*, aura en *D* la vîteſſe de 4 pieds par ſeconde ; c'eſt-à-dire, la vîteſſe demandée. Ces propriétés & celle de l'égalité de durée des chûtes par les petits arcs de cercle, ſont le fondement de la machine, avec laquelle on fait, en Phyſique, les expériences ſur le choc des corps. Voyez les *Leçons de Phyſique* de M. l'Abbé Nollet, la *Phyſique de s'Graveſande*, & autres.

732. Nous avons dit (567) que les oſcillations d'un corps de volume fini ne ſe faiſoient point comme celle d'un corps dont la maſſe pourroit être cenſée concentrée en un point, lorſque le corps oſcille à l'aide d'un fil parfaitement flexible, voici comment on doit alors déterminer les oſcillations, en les ſuppoſant très-petites.

Soit *C* (*Fig.* 201) le point autour duquel le corps *DihD* attaché par le point *D*, au fil *DC*, tourne d'un mouvement commun avec le fil, tandis que ce corps fait autour du point mobile *D* des oſcillations particulieres. Si par le centre de gravité *h*, on conçoit la verticale *ah* qui rencontre en *a* la direction *CD* du fil, prolongée; on pourra regarder la peſanteur comme agiſſant au point *a*, & l'y décompoſer en deux forces, l'une ſuivant *CDg* qui ſera détruite, l'autre ſuivant la ligne *af* perpendiculaire à *CDg*. Cette derniere ne paſſant point par le centre de gravité, donnera (321) à ce centre, ainſi qu'à toutes les parties, un mouvement perpendiculaire à *CD*, & qui ſera le même que ſi cette force eût été appliquée au centre de gravité; & de plus, les parties tourneront autour du centre de gravité, ce mouvement ſe fera dans le ſens *hiD*; déterminons donc ces deux mouvements.

Nommons x l'angle très-petit *DCZ* qui eſt égal à *gah*. Du point *h* au point *D*, concevons la ligne *hD* que nous nommerons a, & ſoit y l'angle très-petit *Dha*; x & y ſont les arcs décrits du rayon $= 1$, & qui meſurent ces angles. Si l'on nomme p la vîteſſe que la peſanteur donne à un corps peſant, en une ſeconde de temps, on aura $p\,dt$ pour la vîteſſe avec laquelle le corps tend à deſcendre ſuivant *ah*; donc (233) la vîteſſe ſuivant *af* ſera $p\,dt \sin x$ ou $p\,x\,dt$, à cause que x est très-petit. Toutes les parties du corps tendent donc à se mouvoir avec cette vîtesse, perpendiculairement à CD, & par conséquent aussi perpendiculairement à CZ, puisque l'angle DCZ est supposé très-petit; ainsi le point D tend à se mouvoir avec la vitesse $pxdt$.

Mais ce point D tend, en même temps, (594) à tourner en vertu de l'action suivant af, avec une vîtesse $dv = \frac{Mpxdt}{\int mrr} \times be \times bD$, M étant la masse du corps, & $\int mrr$ la somme des produits de ses particules, par les quarrés de leurs distances à b. Or dans le triangle baD, on a $ba = \frac{bD \times \sin bDa}{\sin baD} = bD \times \frac{\sin(bag - abD)}{\sin bag} = bD \times \frac{bag - abD}{bag}$ à cause des angles très-petits; on a donc $ba = a \times \frac{x - y}{x}$. Et dans le triangle rectangle abe, on a $be = ab \times \sin bae = ab$, parce que l'angle bae est très-approchant d'un angle droit. Donc $be = a \times \frac{x-y}{x}$; donc $dv = \frac{Mpxdt}{\int mrr} \times \frac{x-y}{x} \times aa = \frac{Mpa^2(x-y)dt}{\int mrr}$.

Cela posé, le mouvement de D vers E est donc accéléré 1° de la quantité $pxdt$ qui est commune à toutes les parties du corps : 2° de la quantité dv ou $\frac{Mpa^2(x-y)dt}{\int mrr}$. Mais si l'on nomme CD, l; on aura $DE = l \sin x = lx$; & l'accroissement de la vîtesse suivant DE sera $d\left(\frac{-ldx}{dt}\right)$; parce que t croissant, x diminue. On aura donc..............

$$pxdt + \frac{Mpa^2(x-y)dt}{\int mrr} = ld\left(\frac{-dx}{dt}\right), \text{ ou.........}$$

$$\left(px + \frac{Mpa^2}{\int mrr}(x-y)\right) dt^2 = -lddx,$$ en supposant dt constant.

Pareillement, puisque y exprime l'angle abD, on aura ay pour l'arc décrit du rayon bD, & compris entre les côtés de cet angle; donc $\frac{-ady}{dt}$ sera la vîtesse du point D en

vertu de sa rotation, & $\frac{-addy}{dt}$ sera l'accélération de cette vîtesse; c'est-à-dire, sera dv; on aura donc.............. $\frac{Mpa^2(x-y)dt^2}{\int mrr} = -addy$, ou $\frac{Mpa(x-y)dt^2}{\int mrr} = -ddy$.
Il ne s'agit donc que d'intégrer les deux équations........ $\left(px + \frac{Mpa^2}{\int mrr}(x-y)\right)dt^2 = -lddx$, & $\frac{Mpa(x-y)}{\int mrr}dt^2 = -ddy$; ce qui est facile par la méthode donnée (178).

733. D'après ce que nous avons dit sur le levier, sur la mesure de la résistance des fluides, & sur la maniere de mesurer les forces, voici comment on peut traiter le mouvement des rames.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'angle décrit par la rame pendant qu'elle est plongée, est fort petit; en sorte que l'angle sous lequel chaque partie de sa surface choque l'eau, sera censé le même, & droit. Nous nommerons a la partie AB (*Fig.* 202) de la rame, comprise entre l'*apostis* ou appui B, & le point A ou le Rameur est appliqué; b la partie BC qui ne plonge point dans l'eau; c la longueur BD depuis le point B, jusqu'à l'extrémité de la rame; x la distance d'un point quelconque de la partie CD, au point B; l la largeur de sa surface qui choque l'eau; v la vîtesse avec laquelle le point A tourne autour de E; u la vîtesse actuelle avec laquelle la galere avance.

Cela posé, le point A tournant avec la vîtesse v, le point situé à la distance x, tourne avec la vîtesse $\frac{vx}{a}$ en sens contraire à la vîtesse u; donc puisque par cette derniere, la galere & par conséquent la rame avance en sens contraire, le point en question ne rencontre l'eau, qu'avec la vîtesse $\frac{vx}{a} - u$. Concevons la surface de la partie de la rame, qui plonge, composée de petits rectangles dont la base soit l, & la hauteur dx; la surface de chacun sera ldx; donc si D est la densité de l'eau, on aura conformément à ce qui a été dit (404 & *suiv.*) $nD\left(\frac{vx}{a} - u\right)^2 ldxdt$ pour le choc que la portion ldx de la surface de la rame, fait contre l'eau, & par conséquent le choc que fait toute la surface plongée sera

$\int nD\left(\frac{vx}{a}-u\right)^2 l\,dx\,dt$; c'eſt-à-dire, égal à l'intégrale de cette quantité, priſe en regardant x ſeule comme variable.

Or cette quantité eſt la même que $\int nDldt\left(\frac{v^2x^2dx}{a^2}-\frac{2uvxdx}{a}+u^2dx\right)$, dont l'intégrale eſt $nDldt\left(\frac{v^2x^3}{3a^2}-\frac{uvx^2}{a}+u^2x\right)+C$. Soit L le point de la rame qui tourne autour de B avec la même vîteſſe que la galere s'avance. Sa diſtance x au point B ſera donc telle que $\frac{vx}{a}-u=0$, ou $x=\frac{au}{v}$. Les points qui ſont entre L & D ſeront choqués comme nous l'avons ſuppoſé juſqu'ici; les points qui ſont entre L & C, le ſeront en ſens contraire; & le point L n'éprouvera aucun choc. Ainſi, pour avoir l'impulſion qui ſe fait véritablement ſur CD; il faut, de celle qui ſe fait depuis L juſqu'en D, retrancher celle qui ſe fait depuis L juſqu'en C. Pour avoir la premiere, il faut faire $x=\frac{au}{v}$, puis $x=c$, & retrancher le premier réſultat du ſecond. Pareillement, pour avoir la ſeconde, il faut faire $x=\frac{au}{v}$, puis $x=b$, & retrancher le ſecond réſultat du premier; alors la différence des deux reſtes ſera l'impulſion cherchée, quelque part où ſoit le point L; ſoit qu'il ſoit entre C & D, ſoit qu'il ſoit alleurs. Faiſant donc ces opérations, on aura $nDldt\left[\frac{v^2c^3+v^2b^3}{3a^2}-vu\left(\frac{c^2+b^2}{a}\right)+u^2(b+c)-\frac{2au^3}{3v}\right]$, que, pour abréger, nous repréſenterons par $nDlQdt$.

La réſiſtance que l'eau oppoſe au choc de la partie CD, & qui eſt égale à ce choc, équivaut à une force qui frapperoit la partie CD en ſens contraire à ſon mouvement de rotation; ainſi il faut concevoir la rame AD, comme ſi elle étoit pouſſée en un certain point I par une force égale à la réſiſtance de l'eau, tandis que le Rameur ſoutiendroit cet effort, par ſon action ſur le point A; c'eſt-à-dire, que les choſes ſe paſſent, comme ſi la rame étant fixement attachée à la galere & ne faiſant qu'un même corps avec elle, la partie CD étoit frappée avec une force $= nDlQdt$: cet effort feroit donc non-seulement avancer la galere ; mais il la feroit tourner, si une rame pareille EH éprouvant un pareil effort, ne contre-balançoit ce mouvement de rotation. Ainsi, par l'action des deux rames, il passe dans la galere une quantité de mouvement $= 2nDlQdt$: & si N est le nombre des rames, N étant un nombre pair, $NnDlQdt$ sera la quantité de mouvement qui passe dans la galere. Or, cette quantité de mouvement se partage entre la masse M de la galere, & la résistance de l'eau sur la proue ; donc si l'on appelle S la surface qui, étant exposée au choc direct de l'eau, éprouveroit la même résistance qu'éprouve actuellement la proue, on aura $NnDlQtd = Mdu + nDSu^2dt$, & par conséquent $du = \frac{(NnDlQ - nDSu^2)dt}{M}$.

Concevons maintenant que les quantités M, N, S, u, v, &c. restant les mêmes, on fasse quelques changements aux quantités b & c qui entrent dans Q ; il est clair que la valeur de du pourra varier par ces changements. Donc si l'on veut savoir quel rapport il doit y avoir entre b & c pour que les degrés du de vîtesse communiqués à chaque instant, par la rame, soient les plus grands qu'il est possible, il faut différencier cette valeur de du en regardant b & c, seuls, comme variables, & égaler cette différentielle, à zéro. On aura donc $dQ = 0$, pour l'une des équations qui doivent servir à déterminer les meilleures dimensions des rames.

Imaginons que b & c soient déterminés, & considérons le mouvement de la galere, lorsqu'il est parvenu à l'uniformité. Alors on a $du = 0$, puisque la vîtesse ne reçoit plus ni augmentation ni diminution. L'équation ci dessus se réduit donc à $NnDlQdt = nDSu^2dt$, ou $NlQ = Su^2$, équation qui donnera la valeur de u.

Mais outre cette équation, il y a encore une autre condition à remplir. Pour que la force appliquée en A soutienne l'effort de la résistance de l'eau considéré comme dirigé suivant KI ; il faut, en se représentant la rame AD comme un levier dont l'appui seroit en B ; il faut, dis-je, que le moment de la force appliquée en A, soit égal à la somme des moments des efforts que la résistance de l'eau fait sur les différents points de CD.

Soit P la masse que pourroit soutenir immédiatement le

Rameur, pendant le temps t de ſon action contre l'eau, en faiſant le même effort qu'il fait à chaque inſtant ſur la rame, quand le mouvement eſt parvenu à l'uniformité; la force totale du Rameur ſera donc Ppt (724). Et ſi N' exprime le nombre des Rameurs appliqués à une même rame, leur force ſera $N'Ppt$; donc celle qui eſt conſumée à chaque inſtant dt, ſera $N'Pdt$; & le moment de cette force à l'égard du point B, ſera $a'N'Ppdt$, a' étant la diſtance de B, au point où paſſe l'effort total $N'Ppdt$.

Puiſque le choc de l'eau contre une partie quelconque ldx de la ſurface de la rame, eſt $nD\left(\frac{vx}{a}-u\right)^2 ldxdt$; le moment de cet effort ſera $nD\left(\frac{vx}{a}-u\right)^2 lxdxdt$; & la ſomme des moments ſera $\int nD\left(\frac{vx}{a}-u\right)^2 lxdxdt$; c'eſt-à-dire, $\int nlDdt\left(\frac{vvx^3dx}{a^2}-\frac{2uvx^2dx}{a}+uuxdx\right)$, ou $nlDdt\left(\frac{vvx^4}{4a^2}-\frac{2uvx^3}{3a}+\frac{uux^2}{2}\right)+C$. Faiſant donc comme ci-deſſus (& par la même raiſon) $x=\frac{au}{v}$, puis $x=c$, & retranchant le premier réſultat du ſecond; faiſant enſuite $x=\frac{au}{v}$, puis $x=b$, & retranchant le ſecond réſultat du premier; prenant enfin la différence des deux reſtes, on aura $nlDdt\left[\frac{v^2c^4+v^2b^4}{4a^2}-\frac{2uv}{3a}\left(c^3+b^3\right)+\frac{uu}{2}\left(c^2+b^2\right)-\frac{1}{6}\frac{a^2u^4}{v^2}\right]$ pour la ſomme des moments que pour abréger, nous repréſenterons par $nlDQ'dt$. Nous aurons donc $a'pN'Pdt=nlDQ'dt$, ou $a'pN'P=nlDQ'$. Ainſi, nous avons ces trois équations, $dQ=0$; $NlQ=Su^2$, & $a'pN'P=nlDQ'$.

On différenciera donc Q, en regardant b & c, ſeules, comme variables; puis de la ſeconde de ces trois équations comparée avec la troiſieme, on éliminera u; & on ſubſtituera dans $dQ=0$, la valeur de u qu'on trouvera en procédant à

Gg 4

l'élimination. Alors on aura deux équations dont l'une renfermera les variables b & c, & leurs différences db & dc; la seconde renfermera ces mêmes variables sans leurs différences. On différenciera celle-ci, pour en tirer une valeur de dc en db, laquelle étant substituée dans la premiere, on aura après avoir divisé par db, une seconde équation finie entre b & c. Alors à l'aide de ces deux équations finies, on éliminera b ou c, & l'on aura l'équation qui déterminera l'inconnue restante.

Tel est le calcul que l'on a à faire pour déterminer les dimensions les plus parfaites qu'on puisse donner aux rames; & puisque le problême est déterminé, ainsi qu'on le voit par ce qui précede, il est donc évident qu'il y a non-seulement un rapport déterminé entre la longueur BD, & celle de la partie BC qui sort de l'eau, mais encore, que les dimensions de ces deux parties, ont chacune un rapport déterminé avec AB; en sorte que tout autre rapport donneroit une rame moins parfaite.

Il est vrai que le calcul qui reste à faire pour déterminer ces dimensions, sera composé; mais c'est la nature de la question qui le veut ainsi; du moins en supposant les loix & la mesure de la résistance, telles qu'on les a admises jusqu'ici. Au reste, quand ces loix différeroient sensiblement, on auroit toujours la même méthode à suivre.

Si sans s'attacher aux dimensions les plus parfaites de la rame, on veut seulement déterminer entre toutes les rames dont la partie qui sort de l'eau, est de même longueur, celle qui peut produire le meilleur effet; alors on résoudra la question, en traitant b comme constant, dans l'équation $dQ = 0$; c'est-à-dire, qu'on fera $db = 0$; le calcul sera alors un peu moins composé.

Enfin, si sans prétendre à aucun *maximum*, on veut seulement déterminer la longueur que doit avoir BD pour une longueur BC prise arbitrairement; déterminer, dis-je, la longueur que BD doit avoir pour que le mouvement soit tel qu'on se le propose, c'est-à-dire, pour que le Rameur avec la vîtesse v pendant le temps t déterminé par la valeur supposée connue de la force Ppt du Rameur; on omettra l'équation $dQ = 0$; & ayant éliminé u, à l'aide des deux autres équations, on aura une équation indéterminée entre b & c, qui pour chaque valeur de b prise arbitrairement, donnera la valeur correspondante de c.

Enfin par la valeur de u, & le temps T, on aura l'espace parcouru; ſur quoi il faut obſerver que par T, on ne doit point entendre la même choſe que par t. t exprime la ſomme des temps pendant leſquels le Rameur peut agir pour vaincre la réſiſtance de l'eau, & ne comprend point ceux pendant leſquels la rame eſt hors de l'eau; au lieu que T comprend ces deux durées. C'eſt à l'expérience à décider le rapport de t à T.

734. C'eſt encore par les mêmes principes, qu'on peut réſoudre la queſtion de la poſition & des dimenſions des aîles des moulins à vent.

Soit LCK (*Fig.* 203) l'axe; CIH le plan de l'aîle; DE parallele à LK, la direction du vent; DG le petit arc que décrit actuellement pendant un inſtant, le point D, en vertu de la rotation. Concevons par GD & DE un plan $EGDF$ dont la ſection avec la ſurface de l'aîle ſoit IH. Que DE & DG repréſentent la vîteſſe du vent, & celle du point D de l'aîle. Si l'on imagine la vîteſſe DE, décompoſée en deux autres DG & DF, c'eſt en vertu de la vîteſſe DF que le vent agit ſur l'aîle; & ſi l'on nomme CD, x; l, la largeur IH de l'aîle, largeur que, pour plus de ſimplicité, je ſuppoſe très-petite en comparaiſon de la longueur, on aura $n'D' \times \overline{DF}^2 \times \mathit{ſin}^2\, FDH \times l\,dx\,dt$ pour l'impulſion ſur la petite ſurface élémentaire $l\,dx$, de l'aîle (404). Et comme cette impulſion s'exerce perpendiculairement à cette ſurface, & dans le plan $GDFE$ ou EIH, ſi on la conçoit décompoſée en deux autres, l'une ſuivant DE, l'autre ſuivant DG; la premiere ſera détruite par la réſiſtance de l'aîle; la ſeconde ſera celle qui tend à accélérer le mouvement de rotation. Or avec un peu d'attention, on verra que cette ſeconde a pour expreſſion $n'D' \times DF^2 \times \mathit{ſin}^2\, FDH \times l\,dx\,dt \times \mathit{coſ}\, EDH$. Par conſéquent le moment de cette force ſera $n'D' \times DF^2 \times \mathit{ſin}^2\, FDH \times l\,x\,dx\,dt\, \mathit{coſ}\, EDH$; & la ſomme des moments de toutes les forces ſemblables qui agiſſent ſur les autres points de l'aîle, ſera $\int n'D' \times \overline{DF}^2 \times \mathit{ſin}^2\, FDH \times l\,x\,dx\,dt\, \mathit{coſ}\, EDH$. Soit P la maſſe qui, étant appliquée à une diſtance connue a, de l'axe, y feroit par ſon inertie la même réſiſtance que toute la machine fait par la ſienne; v la vîteſſe de rotation du point ſitué à la diſtance a. Soit P' la maſſe qui, étant appliquée à la même diſtance a, feroit par ſon poids, la même réſiſtance que le frottement & les autres obſtacles différents de l'inertie, occaſionnent à chaque inſtant dt; $P'p\,dt$ ſera la résistance résultante de ces obstacles, & $P'padt$ sera son moment. Pareillement Pdv sera la quantité de mouvement qui passera dans la machine, & $Padv$ en sera le moment. Donc si N est le nombre des aîles, il faudra que $Padv + P'padt = N \int n' D' \times DF^2 \times \sin^2 FDH \times lx\,dx\,dt \cos EDH$; ou en faisant, pour abréger, cette derniere quantité $= Q\,dt$, il faudra que $Padv + P'padt = Q\,dt$. Donc $dv = \frac{Q - P'pa}{Pa}\,dt$.

Observons maintenant, que si toutes les quantités qui entrent dans le second membre de cette équation, restant les mêmes, à l'exception de celles qui déterminent les dimensions & la position de l'aîle, on venoit à faire varier celles-ci; la valeur de dv varieroit en même temps. Donc si l'on veut savoir quelles doivent être ces dernieres quantités, pour que dv soit la plus grande qu'il est possible; c'est-à-dire, pour que l'action du vent fasse passer dans la machine plus d'action qu'elle ne feroit pour toutes les autres dimensions & toute autre position de l'aîle, il n'y a autre chose à faire qu'à différencier cette valeur de dv en ne regardant comme variables, que les quantités qui dépendent des dimensions & de la position de l'aîle, & égaler cette différentielle à zéro. On aura donc $dQ = 0$, la différentielle dQ étant prise dans cette supposition.

Concevons que les dimensions & la position de l'aîle soient telles qu'il convient pour le plus grand effet, & représentons-nous la machine, arrivée à l'état d'uniformité de mouvement: on aura $dv = 0$, & par conséquent $Q\,dt = P'padt$, ou $Q = P'pa$; on a donc pour déterminer les meilleures dimensions, & la meilleure position de l'aîle, les deux équations suivantes, $dQ = 0$, & $Q = P'pa$. Déterminons l'expression analytique de Q.

Soit u la vîtesse du vent; puisque v est la vîtesse de rotation d'un point situé à la distance a, de l'axe, $\frac{vx}{a}$ sera celle du point D; & l'on aura $DE : DG :: u : \frac{vx}{a}$; c'est-à-dire, qu'on pourra supposer u représentée par DE; & $\frac{vx}{a}$ par DG. On aura donc à cause de l'angle droit EDG, GE ou $DF = \sqrt{uu + \frac{vvxx}{aa}} = \frac{\sqrt{aauu + vvxx}}{a}$.

Dans le triangle DEF, on aura donc . . . .

$$\sin EDF = \frac{vx}{\sqrt{aauu + vvxx}},\ \&\ \cos EDF = \frac{au}{\sqrt{aauu + vvxx}}.$$

Soit l'angle EDH, qui est égal à celui que le plan de l'aîle fait avec l'axe, $= y$. On aura $\sin FDH = \sin(LDH - EDF) =$ $\sin EDH \cos EDF - \sin EDF \cos EDH = \frac{au \sin y - vx \cos y}{\sqrt{aauu + vvxx}}$;

Donc $DF^2 \times \sin^2 FDH = \left(\frac{au \sin y - vx \cos y}{a}\right)^2$; ainsi la quantité Qdt deviendra $n'ND'ldt \int \left(\frac{au \sin y - vx \cos y}{a}\right)^2 \cos y x dx$ ou $\frac{n'ND'ldt \cos y}{aa} \int (aau^2 \sin^2 y . x dx - 2auv \sin y \cos y . x^2 dx +$ $vv \cos^2 y . x^3 dx)$, c'est-à-dire, $\frac{n'ND'ldt \cos y}{aa} \left(\frac{aau^2 \sin^2 y . x^2}{2} - \right.$ $\left.\frac{2auvx^3 \sin y \cos y}{3} + \frac{v^2 x^4 \cos^2 y}{4}\right) + C.$

Or il est facile de voir que les points de l'aîle qui sont tellement situés que $au \sin y$ soit plus petit que $vx \cos y$, au lieu d'être frappés par le vent, frappent l'air, au contraire; ensorte qu'au lieu d'ajouter l'impulsion pour ces points, on doit la retrancher de celle qui se fait sur les points qui sont en-deçà. Donc puisque ces points commencent à la distance $x = \frac{au \sin y}{v \cos y}$, il faut, pour avoir le moment de l'impulsion totale, faire dans l'intégrale qu'on vient de trouver; 1° $x = \frac{au \sin y}{v \cos y}$, puis $x = b$, b étant la distance de la naissance de la surface de l'aîle, à l'axe; & retrancher le second résultat du premier : 2° faire $x = \frac{au \sin y}{v \cos y}$, puis $x = c$; c étant la distance de l'axe, à l'extrémité de l'aîle, qui en est le plus éloignée, & retrancher le premier résultat du second : 3°. enfin, retrancher ce second reste du premier.

Faisant ces opérations, on aura $Qdt =$ . . . .
$\frac{n'ND'ldt \cos y}{aa} \left(\frac{1}{6} \frac{a^4 u^4 \sin^4 y}{vv \cos^2 y} + \frac{2}{3} auv \sin y \cos y (b^3 + c^3)\right.$ $\left.- \frac{1}{2} aau^2 \sin^2 y (b^2 + c^2) - \frac{1}{4} v^2 \cos^2 y (b^4 + c^4)\right)$. Ainsi, pour

déterminer les meilleures dimensions, & la meilleure position de l'aîle, on a 1° l'équation $dQ=0$, (la différentielle de Q, étant prise en ne faisant varier que b, c & y) : 2°. l'équation

$$P'pa = \frac{n'ND'l\cos y}{aa}\left(\frac{\frac{1}{6}a^4u^4\sin^4 y}{vv\cos^2 y} + \frac{2}{3}auv\sin y\cos y(b^3+c^3)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}aau^2\sin^2 y(b^2+c^2) - \frac{1}{4}v^2\cos^2 y(b^4+c^4)\right).$$

Comme la vîtesse u du vent, est censée ici, une des données, on tirera de cette derniere équation, la valeur de v que l'on substituera dans l'équation $dQ=0$; après quoi on égalera séparément, à zéro, le coëfficient de dy, celui de db, & celui de dc; & l'on aura trois équations pour déterminer b, c & y.

Si l'on suppose la vîtesse u du vent, incomparablement plus grande que v; c'est-à-dire, $v=0$, à l'égard de u, notre derniere équation se réduit à $0 = \frac{n'ND'l\cos y}{aa} \times \frac{1}{6}a^4u^4\sin^4 y$ qui donnent $\cos y=0$, & $\sin y=0$, valeurs qui n'ont rien que de très-plausible, puisqu'il est très-évident en effet, que la vîtesse v sera 0, toutes les fois que l'aîle sera dans un même plan avec l'axe, ou qu'elle lui sera perpendiculaire. Cependant, les Auteurs qui, les premiers ont tenté cette question, ont trouvé que l'aîle devoit être inclinée à l'axe, de 54° 44'. Pourquoi donc notre solution, d'ailleurs plus générale, semble-t-elle ne point donner cette solution particuliere? en voici la raison. Nous avons conclu l'équation $dQ=0$, de l'équation $dv = \frac{Q-P'pa}{Pa}dt$, dans laquelle pour que dv soit un *maximum*, il faut que $d(Q-P'pa)=0$. Et comme $P'pa$ est une constante; cette équation donne simplement $dQ=0$. Mais si Q, ainsi que $P'pa$ sont infinis, & différent d'une quantité finie, il est clair que l'équation $dQ=0$ renfermera cette quantité infinie, & que quand on aura exprimé dans la valeur de Q, la condition qui le rend infini, la quantité finie qui est l'objet de la question n'y sera plus. Or c'est ce qui arrive ici. $P'pa$ qui est le moment de la résistance que l'action du vent surmonte continuellement, doit être comparable au moment de cette action, qui est censée une quantité infinie; & Q l'est par la supposition. Mais comme rien ne détermine qu'elle est dans Q, la quantité équivalente à $P'pa$, on ne peut avoir $Q-P'pa$ que sous la forme d'une quantité infinie; ce qui empêche d'en rien conclure. Au reſte, cette difficulté eſt bientôt levée, ſi au lieu d'exprimer la ſuppoſition actuelle, après l'intégration, on l'exprime avant. En effet, dans la ſuppoſition préſente, la valeur $n'ND'ldt\int\left(\frac{au\,\mathit{ſin}\,y - vx\,\mathit{coſ}\,y}{a}\right)^2 \mathit{coſ}\,y.\,x\,dx$ trouvée ci-deſſus pour la ſomme des moments, ſe réduit à $n'ND'luudt\;\mathit{ſin}^2 y\;\mathit{coſ}\,y\int x\,dx$, qui, en ſuppoſant que l'aîle commence à la diſtance b, & finit à la diſtance c, devient $n'ND'luudt\,\mathit{ſin}^2 y\;\mathit{coſ}\,y\;\frac{(c^2-b^2)}{2}$. On aura donc

$Q = n'ND'lu^2\mathit{ſin}^2 y\;\mathit{coſ}\,y\left(\frac{c^2-b^2}{2}\right)$, & ....

$P'pa = n'ND'lu^2\mathit{ſin}^2 y\,\mathit{coſ}\,y\left(\frac{c^2-b^2}{2}\right)$. Regardant donc c & b, comme conſtants, l'équation $dQ = 0$, donnera $2\,dy\,\mathit{ſin}\,y\,\mathit{coſ}^2 y - dy\,\mathit{ſin}^3 y = 0$, ou $2\,\mathit{coſ}^2 y = \mathit{ſin}^2 y$, ou $\mathit{tang}\,y = \sqrt{2}$, qui donne $y = 54^\circ\,44'$; & l'équation $P'pa =$ &c. détermine le rapport de b à c, dont les Auteurs qui, les premiers, ont traité cette queſtion, ne paroiſſent pas s'être trop occupés.

Dans les autres cas, on ne peut avoir y que par une équation beaucoup plus compoſée. Quoi qu'il en ſoit, telle eſt la maniere de réſoudre cette queſtion, dans laquelle il eſt indiſpenſable de faire entrer, comme nous l'avons fait, la réſiſtance $P'pdt$ qui fait équilibre à l'action du vent, lorſque la machine a atteint le mouvement uniforme.

735. Des deux queſtions que nous avons examinées (640), la ſeconde ſatisfait au cas où l'on demanderoit quel doit être le rapport de r à R, pour que le poids P arrive à une hauteur donnée, dans le moindre temps poſſible.

En effet, puiſque la force accélératrice de P, a été trouvée $\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}pdt$; ſi l'on appelle z l'eſpace que P aura parcouru au bout du temps t, on aura $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ pour cette force accélératrice; & par conſéquent $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}pdt$. Multipliant par $\frac{dz}{dt}$, & intégrant, on aura

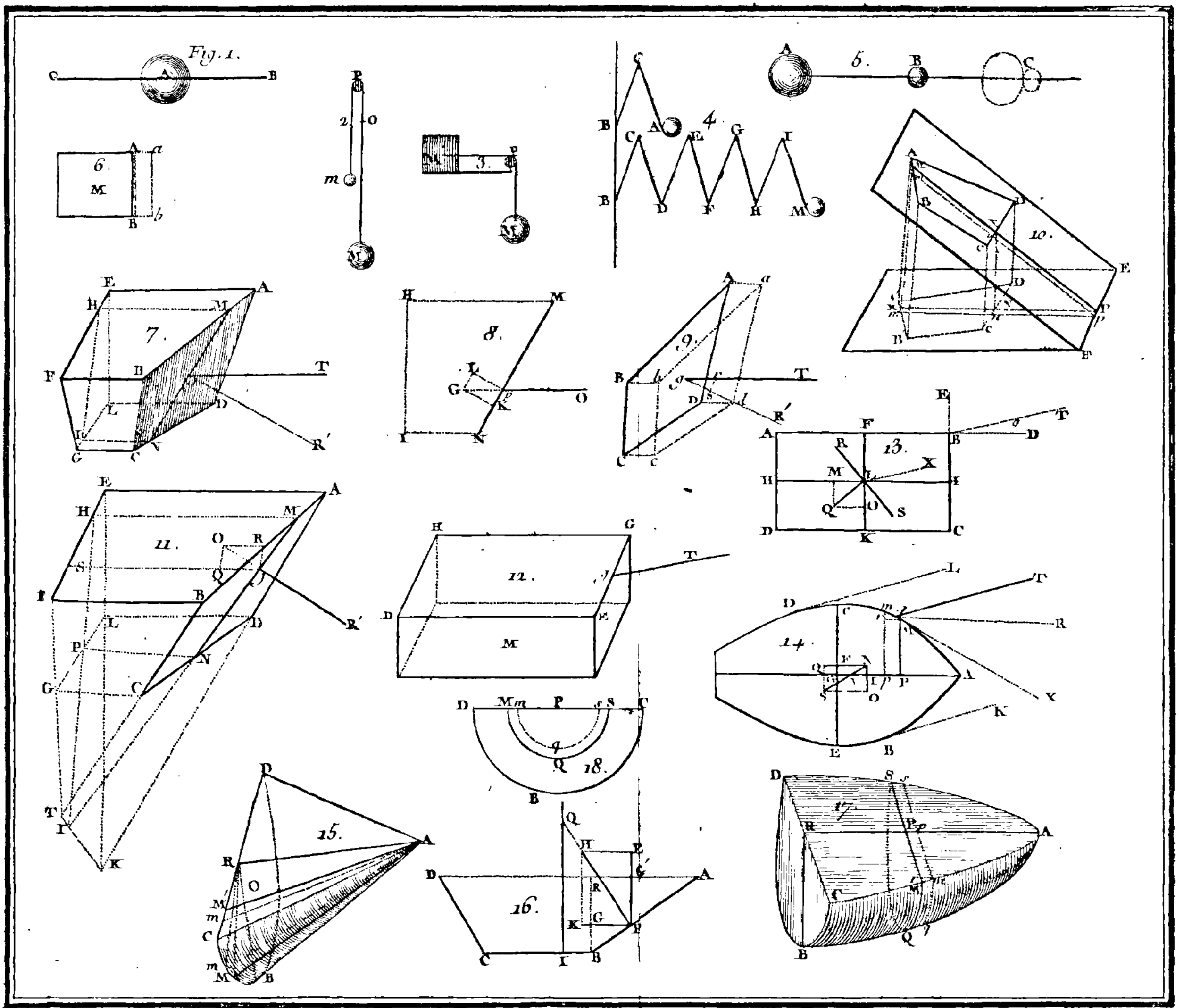
$\frac{dz^2}{2dt^2} = \frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2} pz$; en ſuppoſant que lorſque $z = 0$, on ait la vîteſſe $\frac{dz}{dt} = 0$.

On a donc $dt = \frac{dz}{\sqrt{2pz}} \cdot \sqrt{\frac{QR^2 + Pr^2}{QrR - Pr^2}}$, & par conſéquent $t = \sqrt{\frac{2z}{p}} \cdot \sqrt{\frac{QR^2 + Pr^2}{QrR - Pr^2}}$; d'où l'on tire $\frac{z}{t} = \sqrt{\frac{pz}{2}} \cdot \sqrt{\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}}$; où l'on voit que z étant donné ou conſtant, pour que P arrive à cette hauteur dans le moindre temps poſſible, il faut que t ſoit un *minimum*; $\frac{z}{t}$ ſera donc un *maximum*, puiſque z eſt ſuppoſé conſtant; il faudra donc que $\sqrt{\frac{pz}{2}} \cdot \sqrt{\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}}$ ſoit un *maximum*; & par conſéquent (à cauſe de z conſtant) il faudra que $d\left(\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + PR^2}\right) = 0$, qui eſt préciſément ce que nous avons fait (640). Mais ſi l'eſpace que Q doit parcourir, étant donné, on veut ſavoir quel doit être le rapport de R à r, pour que l'eſpace z parcouru par P, comparé au temps qu'il emploiera à le parcourir, ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible, alors il faut que $\frac{z}{t}$ ſoit un *maximum*, z & t, étant variables. Il faut donc que $d\left(\sqrt{\frac{pz}{2}} \cdot \sqrt{\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}}\right) = 0$, la différentiation étant faite, en regardant z & r comme variables.

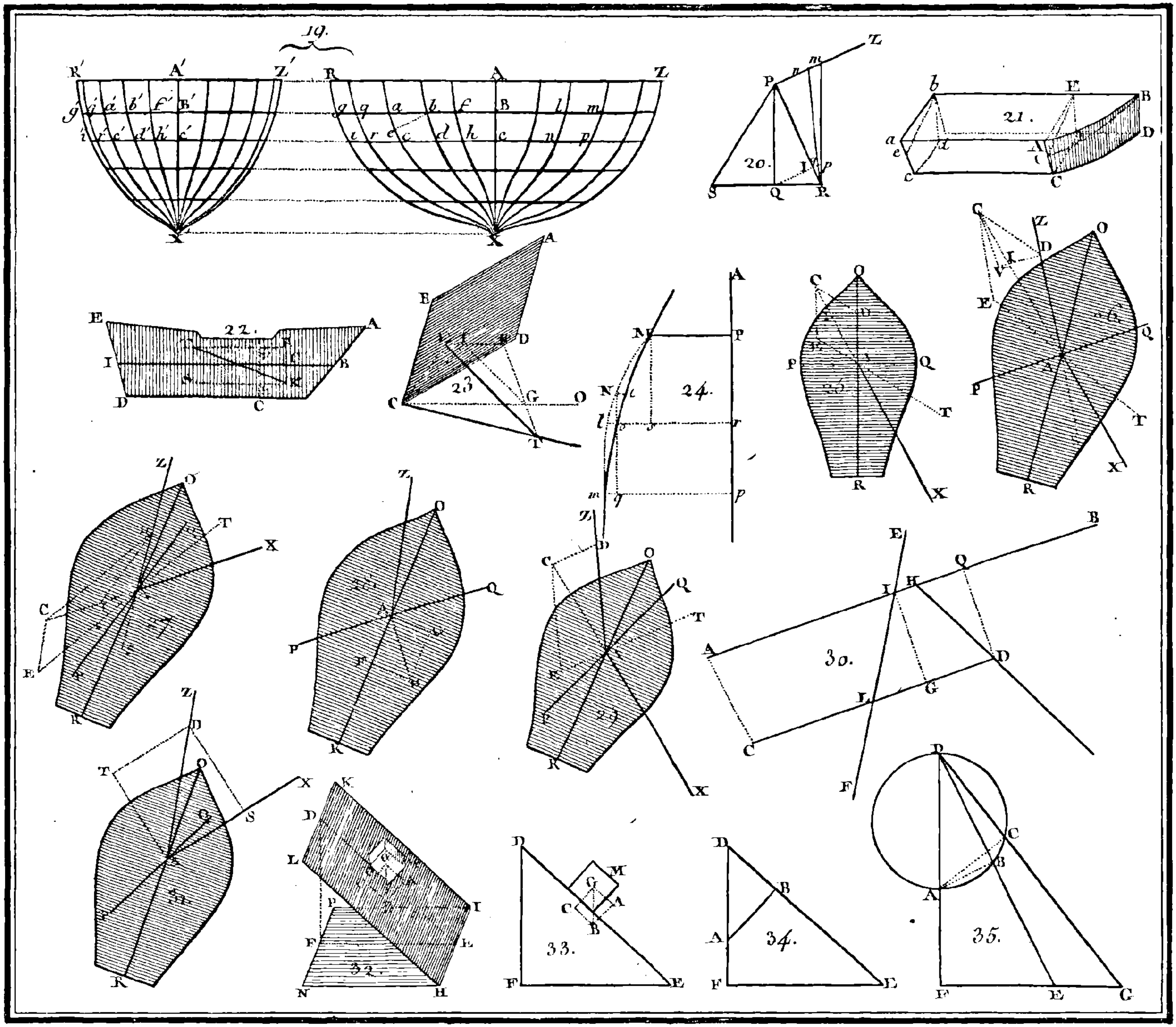
Soit a l'eſpace donné, que Q doit parcourir; on aura $\frac{ra}{R} = z$; il faut donc $d\left(\sqrt{\frac{par}{2R}} \sqrt{\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}}\right) = 0$, ou $d\left(\sqrt{\frac{Qr^2R - Pr^3}{QR^3 + Pr^2R}}\right) = 0$, ou enfin $d\left(\frac{Qr^2R - Pr^3}{QR^3 + PRr^2}\right) = 0$, qui donne $2QQR^3 - 3PQR^2r - P^2r^3 = 0$, par où l'on déterminera le rapport de r à R,

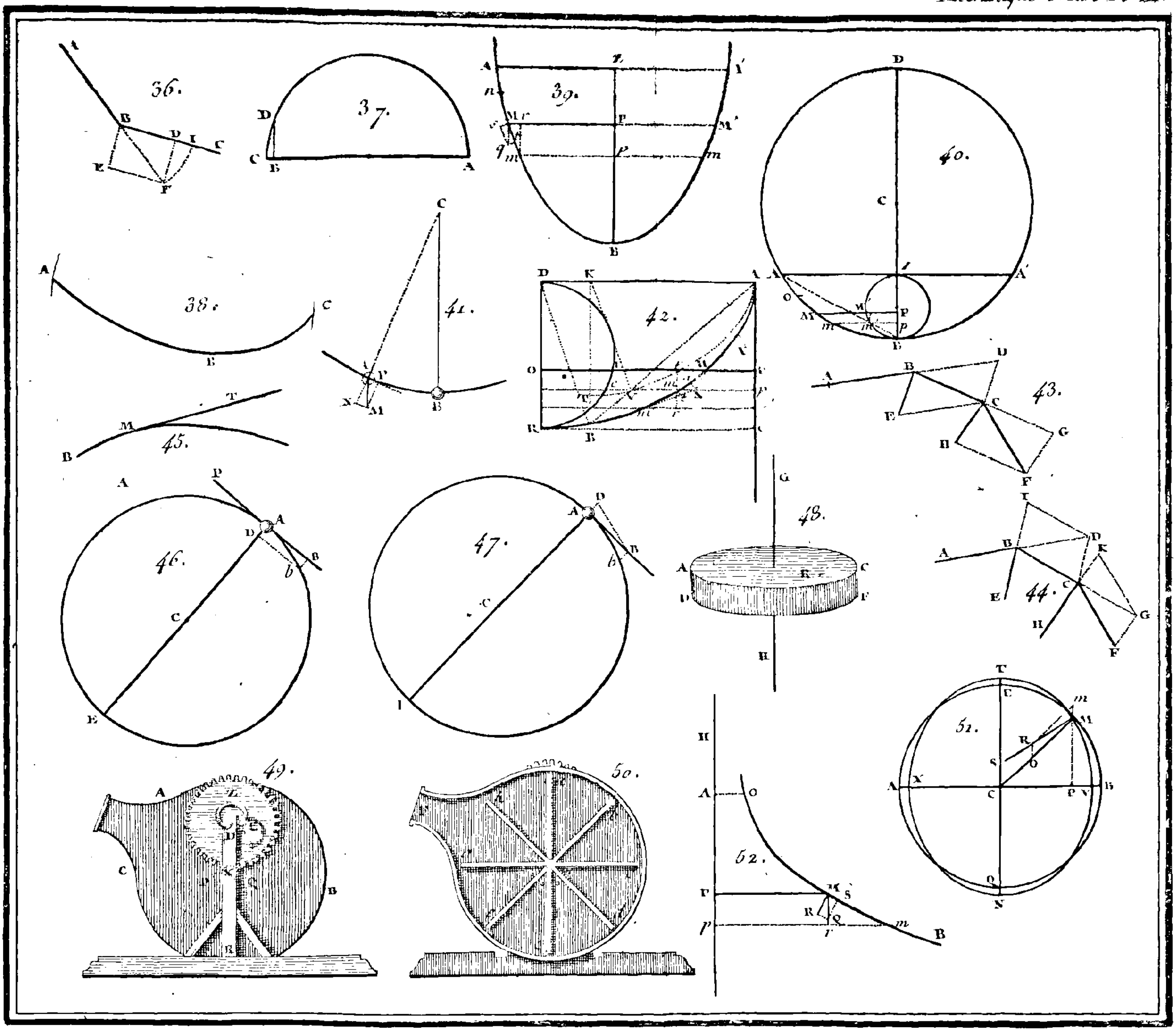
Si les rayons R & r étoient donnés, & qu'on voulût savoir quel doit être le rapport de Q à P, pour que l'espace décrit par P, comparé au temps employé à le decrire, fût le plus grand qu'il est possible, celui que Q doit parcourir étant donné; on différencieroit la même quantité en regardant P ou Q, seule, comme variable.

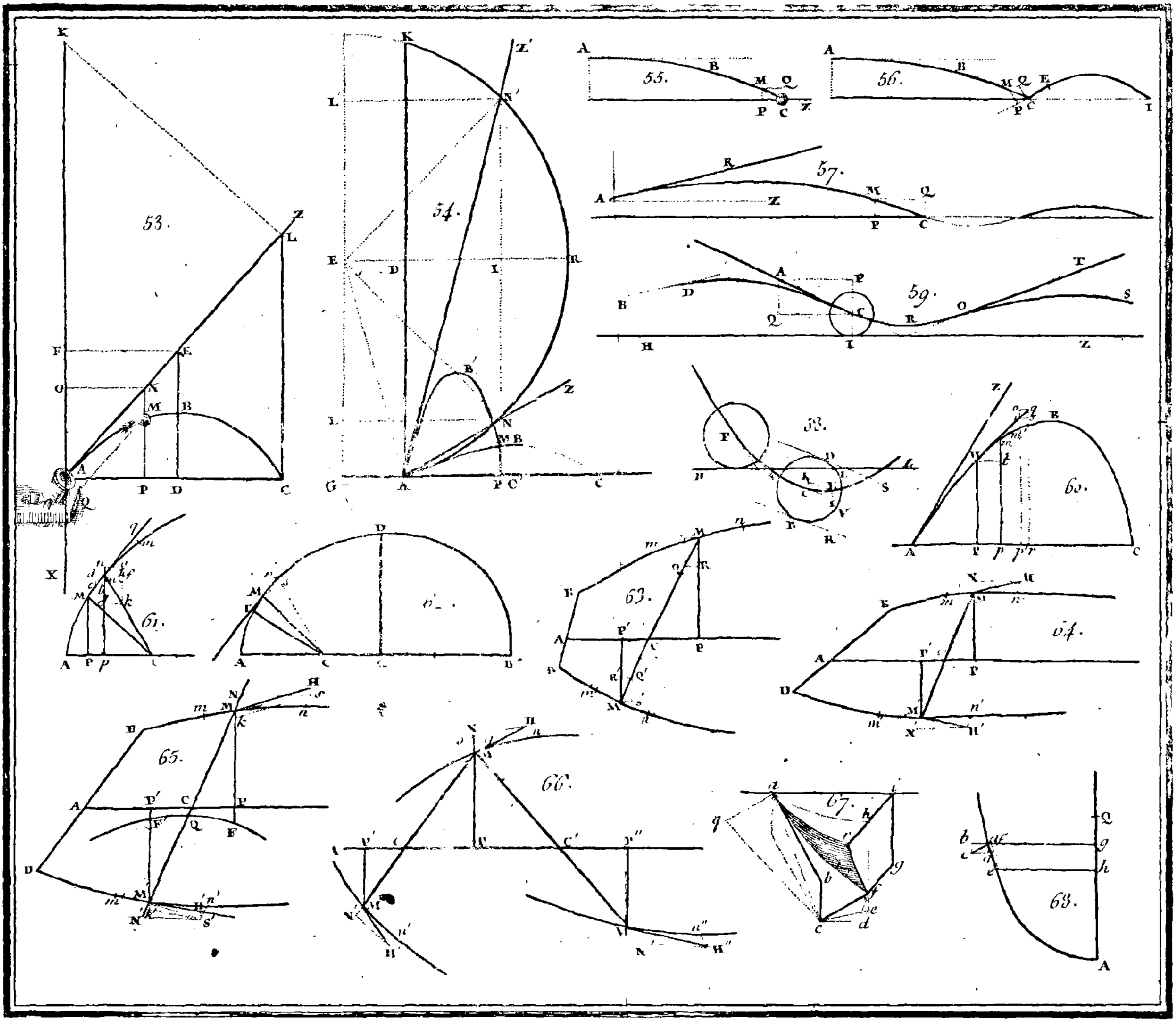
FIN.



Michelinot 1793.




36.
37.
39.
40.
38.
41.
42.
43.
45.
46.
47.
48.
44.
49.
50.
51.
52.



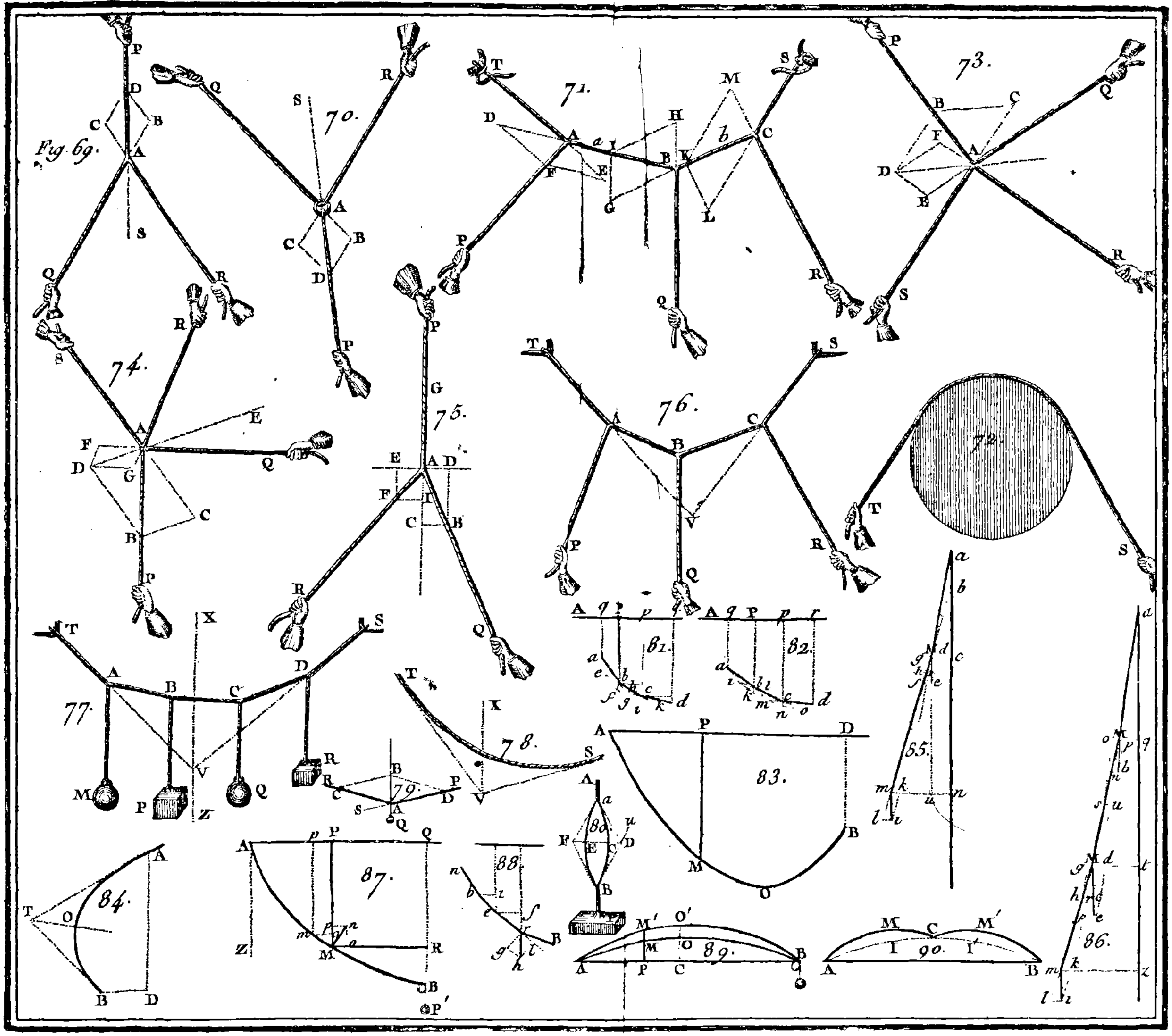
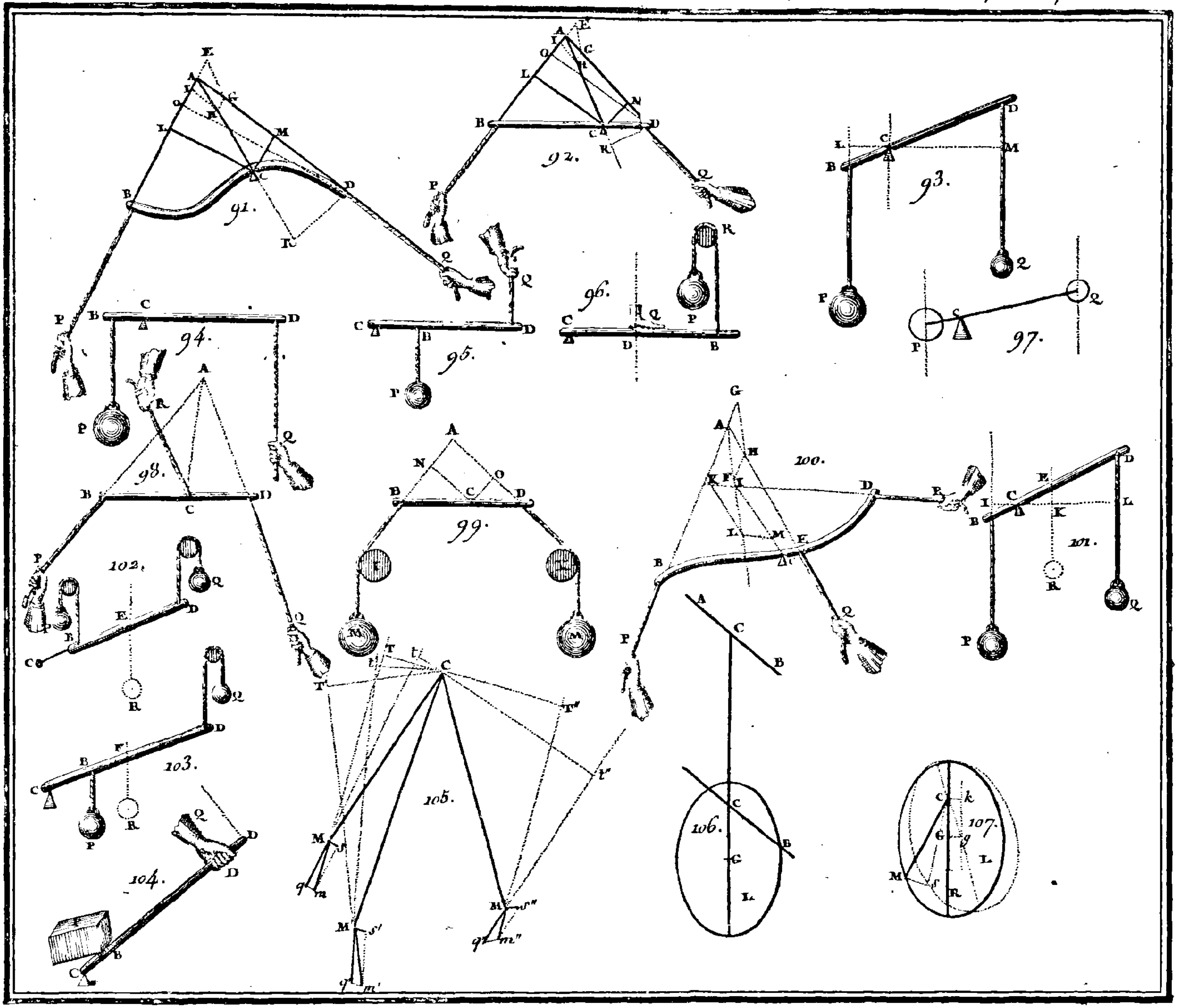
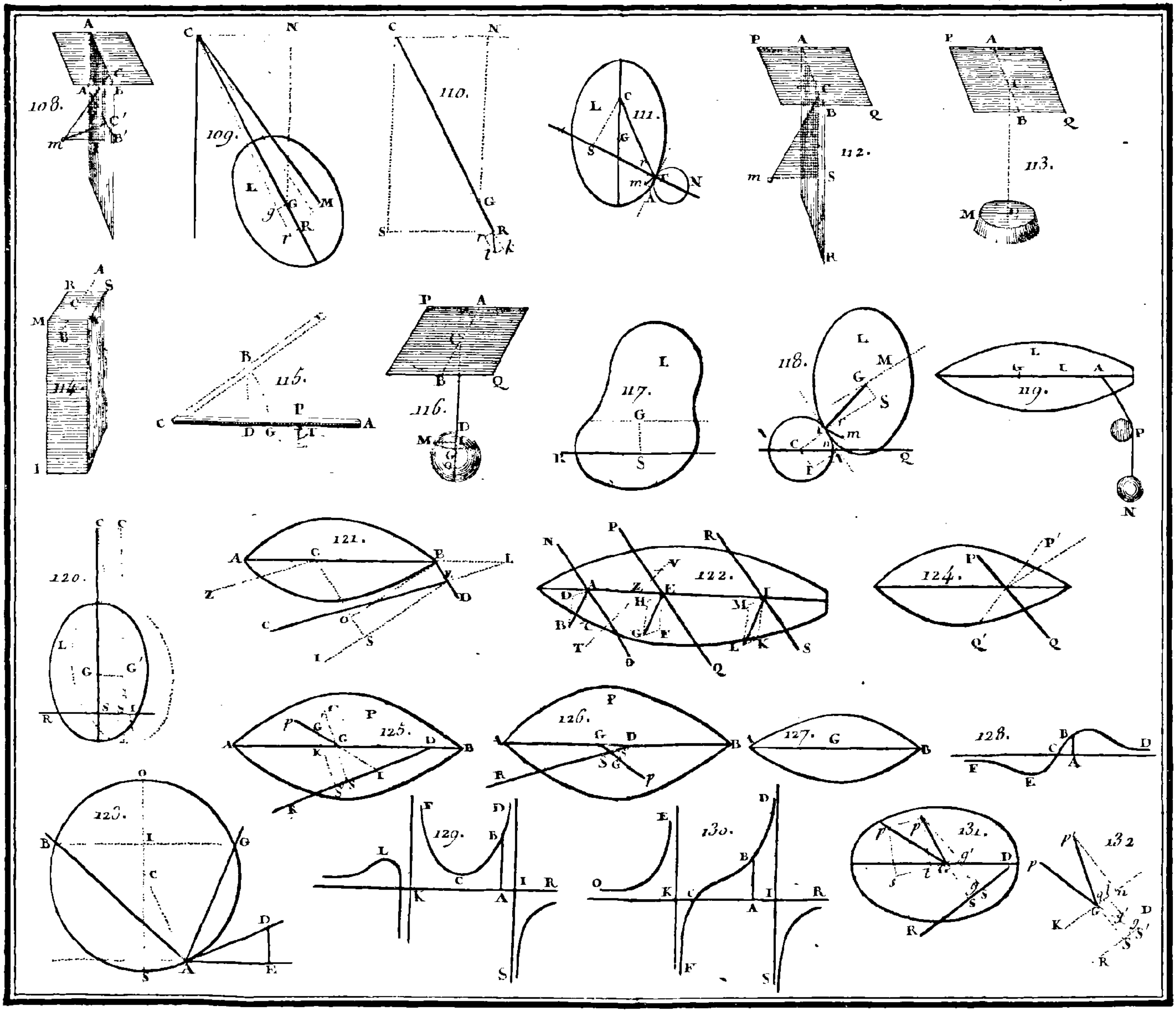
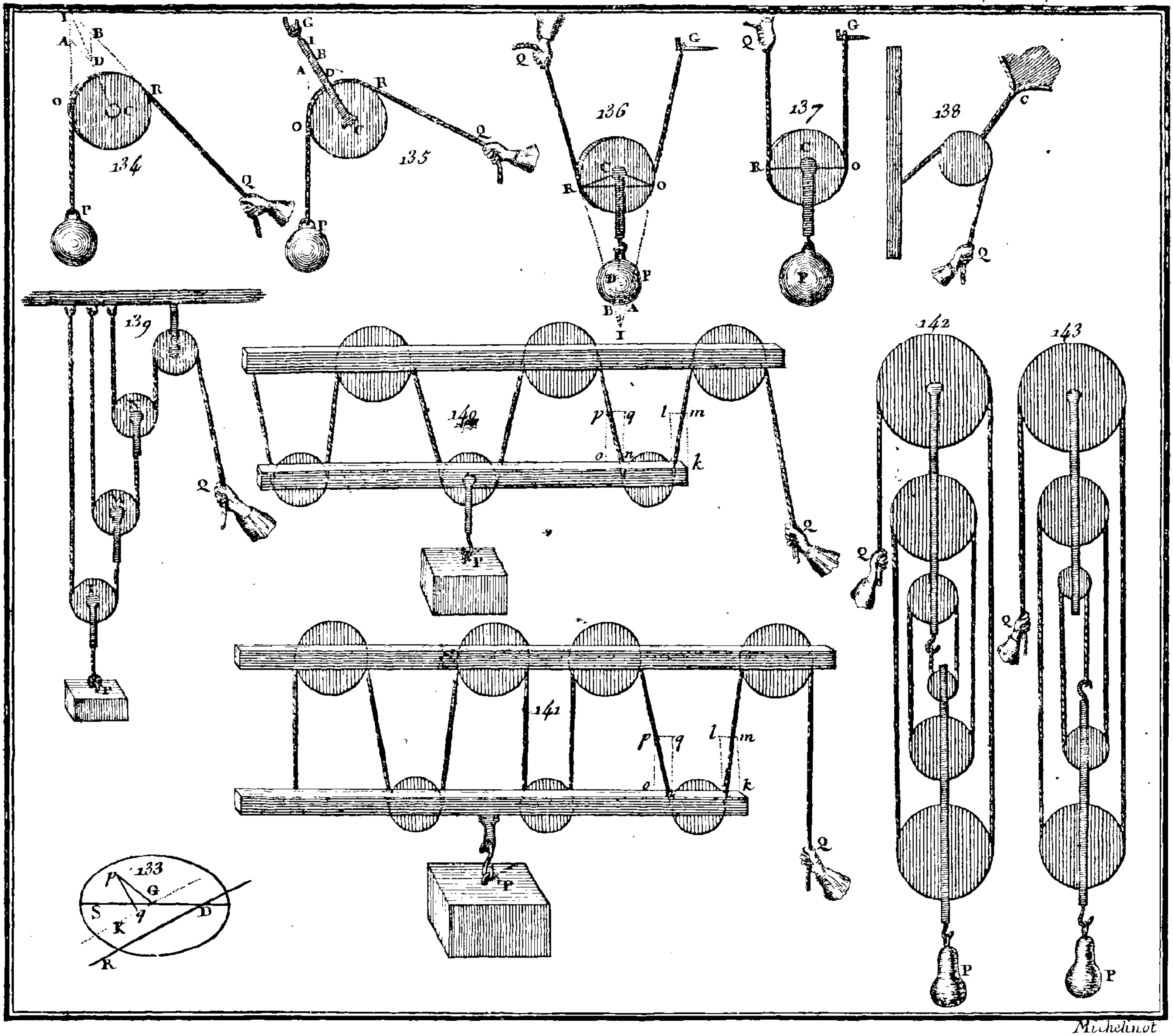


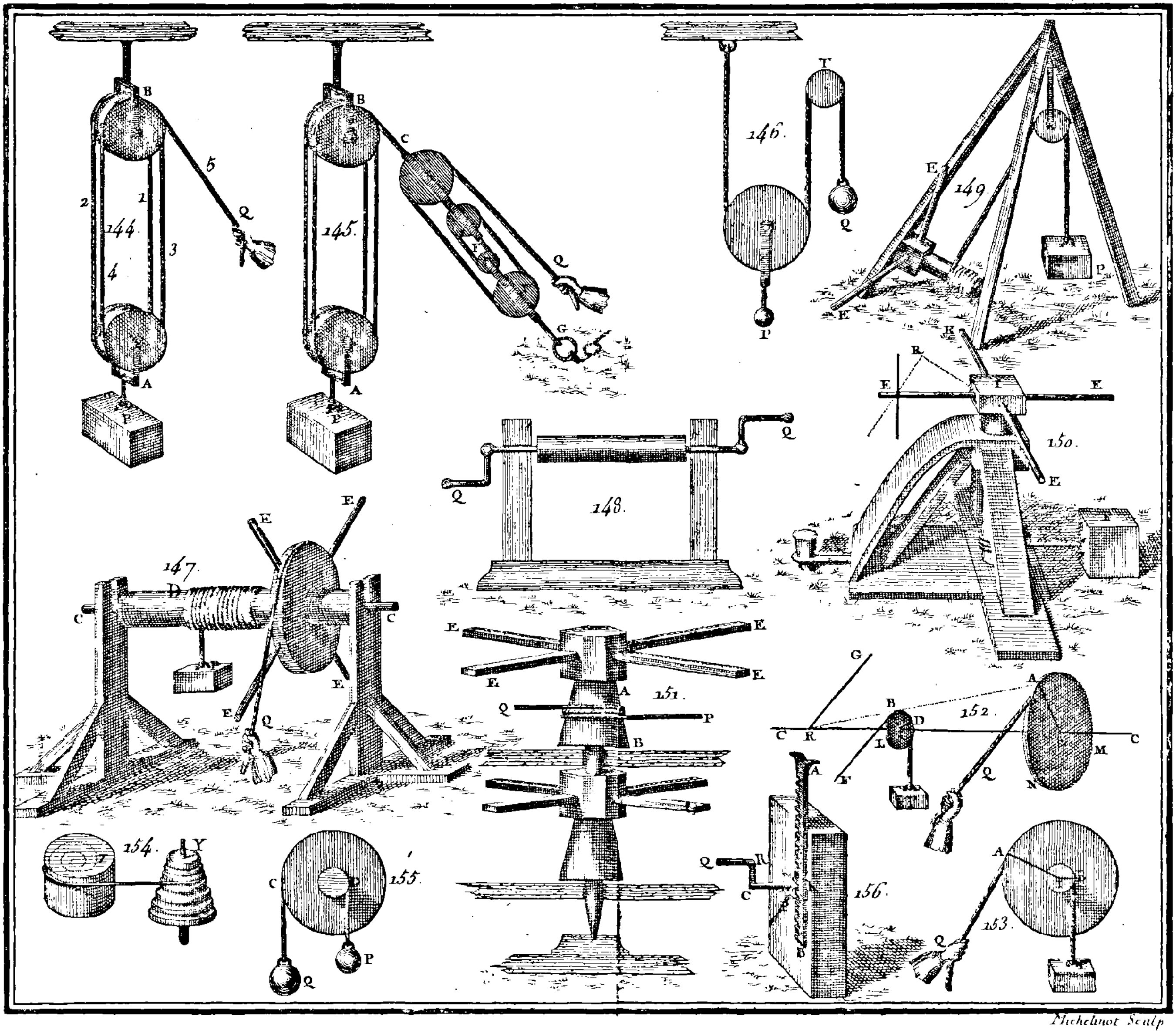
Fig. 69.
70.
71.
73.
74.
75.
76.
72.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.



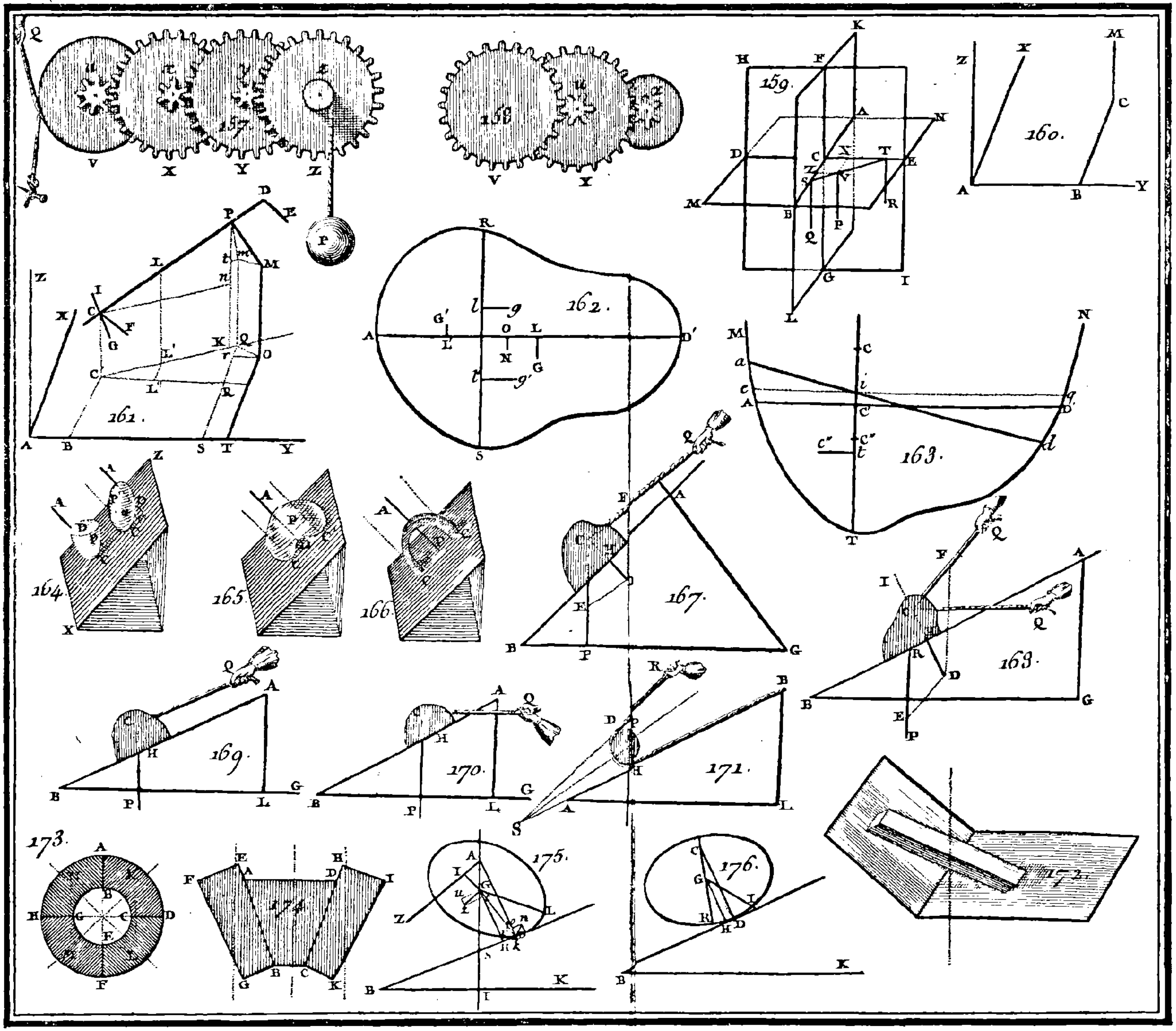

108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132

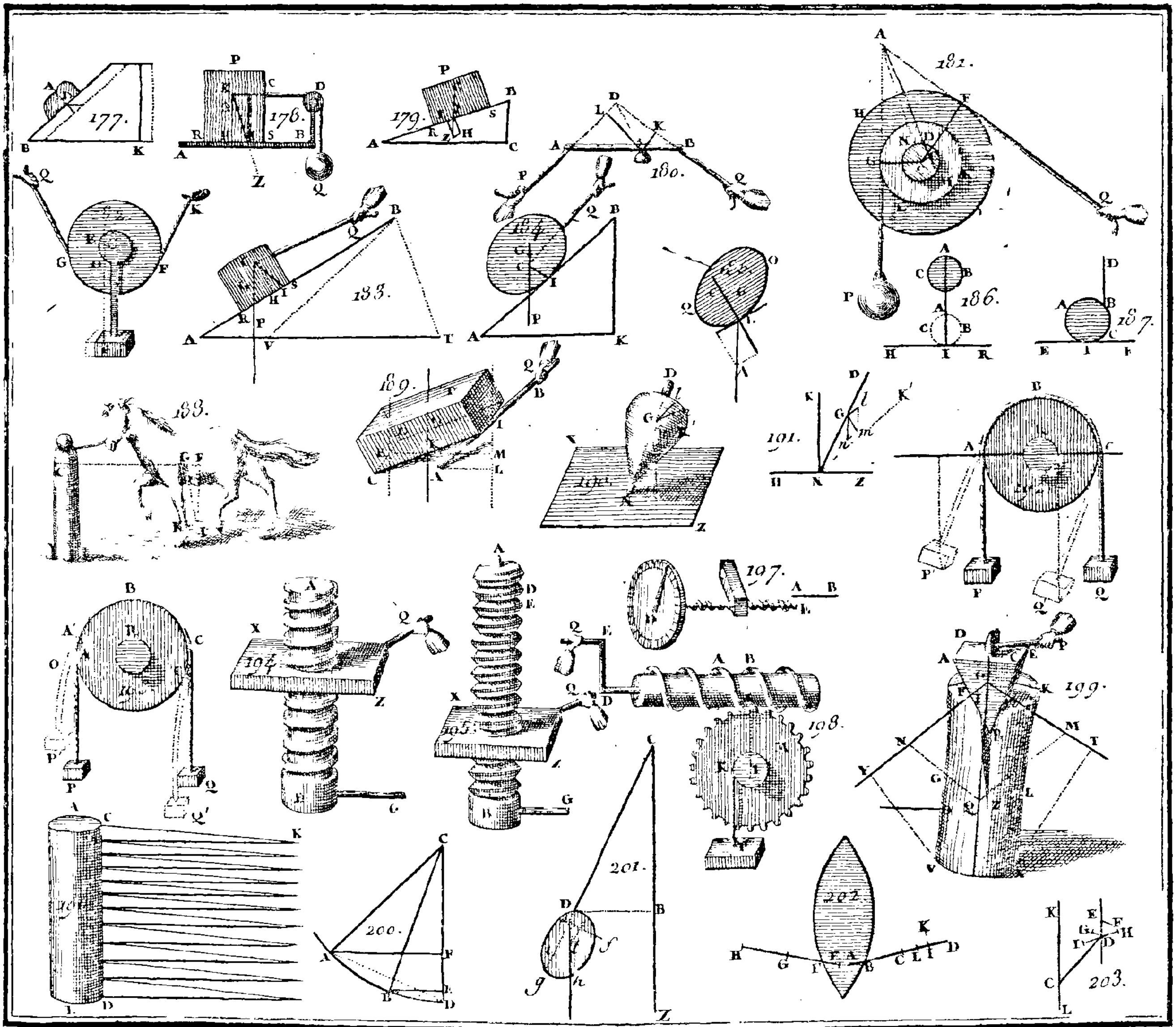


Michelinot



Michelinot Sculp


157
158
159
160.
161.
162.
163.
164
165
166
167.
168.
169.
170.
171.
172.
173.
174
175.
176.


177.
179.
180.
183.
186.
187.
191.
194.
197.
198.
199.
200.
201.
202.
203.