ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Salvatore Pincherle in Bologna | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XXIX.

MILANO
TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.
OFFICINA CARTE VALORI
—
1921.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXIX.° (SERIE III.ª)

Sulle superficie rigate che hanno per asintotiche infinite cubiche gobbe.

(*Di* Maria Mancinelli, *a Urbino.*)

Le superficie rigate che hanno per asintotiche del secondo sistema delle cubiche gobbe sono evidentemente razionali, e di ordine ≤ 6. Una di esse, nota da gran tempo, è la rigata cubica (di Chasles-Cayley) a direttrici rettilinee coincidenti. Quella di sesto grado fu incontrata nel 1877 da A. Voss (1) col seguente teorema: Se quattro rette sono tangenti ad una cubica gobba, esse sono tangenti a ∞^1 tali curve; e queste sono asintotiche per una rigata di sesto ordine dotata di due direttrici triple e di quattro generatrici di regresso.

Più recentemente Ch. Bioche finiva una sua Nota (2) con un rapido cenno intorno ai diversi casi che le rigate suddette possono presentare riguardo all'ordine, alle direttrici ed alle generatrici singolari.

Qui mi propongo di studiare un po' più minutamente l'argomento. In particolare, basandomi su una nota Memoria del Cremona (3), assegnerò le particolarità che si presentano nella rappresentazione piana di quelle varie superficie, e ne trarrò quali sono le singolarità che bastano a caratterizzarle.

Alcuni dei risultati che su ciò si ottengono varranno a conferma di qualche osservazione più generale di H. Mohrmann (4).

(1) *Ueber vier Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung.* Mathematische Annalen, t. 13, pag. 168.

(2) *Recherches sur les surfaces algébriques qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche.* Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 26, 1898, pag. 217.

(3) *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano, e determinazione delle loro curve assintotiche.* Annali di Matematica (2), 1, 1868, pag. 248 (Opere matematiche, t. II, pag. 409).

(4) *Ueber die Haupttangentenkurven auf den Netzflächen.* Mathematische Annalen, t. 73, 1913, pag. 571. — Rimando a questo lavoro ed a quello del Bioche per qualche altra citazione.

1. Una superficie rigata che ha per asintotiche del secondo sistema infinite cubiche gobbe, appartiene ad una congruenza lineare di rette. Infatti una cubica gobba origina nello spazio una polarità nulla, nella quale si corrispondono i suoi punti ed i suoi piani osculatori, e quindi un complesso lineare al quale appartengono i suoi fasci di *rette osculatrici*, in particolare le sue tangenti. La rigata che ha la cubica per asintotica, avendo per piani tangenti nei punti della curva i suoi piani osculatori, ha le generatrici giacenti in questi piani, e quindi appartenenti al complesso. Dunque, se ha per asintotiche infinite cubiche gobbe, appartiene agli ∞^1 complessi lineari che esse determinano ([5]).

Questi complessi formano un fascio: infatti la loro intersezione non può essere una schiera rigata (se no la superficie sarebbe una quadrica), nè può comporsi di un numero finito di rette: quindi è una congruenza lineare, che contiene la rigata.

2. Sopra una rigata appartenente ad una congruenza lineare di rette, ogni asintotica del secondo sistema si può ottenere (seguendo S. Lie) come luogo di un punto pel quale il piano tangente alla rigata è il piano che ad esso corrisponde in uno degli ∞^1 complessi lineari che passano per la congruenza.

Fissiamo uno di questi complessi lineari, **C**, e consideriamo una generatrice g della rigata. Se un piano tangente alla rigata ruota intorno a g, il suo punto di contatto ed il suo polo rispetto a **C** descrivono su g due punteggiate proiettive (al fascio descritto dal piano, e quindi) fra loro. I punti uniti sono (per la ricordata proposizione di Lie) le intersezioni di g con l'asintotica appartenente a **C**.

Se la congruenza lineare contenente la rigata è a direttrici distinte, a, b, consideriamo i punti d'incontro A, B di queste rette con la generatrice g. Le rette a, b sono polari rispetto a tutti i complessi lineari del fascio, quindi il punto A ha per polare il piano Ab, il punto B ha per polare il piano Ba. D'altra parte il piano Ab è tangente alla rigata in B, il piano Ba è tangente in A, sicchè i punti A, B si corrispondono in doppio modo in tutte le proiettività considerate sulla retta g. Tali proiettività sono involuzioni,

([5]) Non possono tutte le asintotiche appartenere ad uno stesso complesso lineare: se no, starebbero in questo tutte le tangenti alla superficie, il che è assurdo.

quindi i loro punti uniti, che sono le intersezioni della generatrice con le asintotiche, sono coniugati armonicamente con i punti A, B.

In una rigata appartenente ad una congruenza lineare generale, ogni asintotica del secondo sistema incontra ciascuna generatrice in due punti, separati armonicamente dalle direttrici della congruenza.

3. Introduciamo ora il fatto che le asintotiche del secondo sistema sono del terzo ordine.

Se R_1, R_2 sono i due punti d'incontro di una generatrice g con l'asintotica appartenente ad un complesso del fascio, il piano osculatore alla curva in R_1, essendo ivi tangente alla rigata, conterrà tutta la g, e quindi passerà per R_2. Ora il piano osculatore ad una C^3 in un punto R_1 non può incontrarla in un ulteriore punto R_2. Bisognerà dunque che l'asintotica appartenente ad un complesso del fascio si spezzi in *due* cubiche: sia cioè una sestica così composta. Le due cubiche sono rispettivamente i luoghi dei due punti doppi delle involuzioni che abbiamo considerato sulle diverse generatrici, in relazione con uno stesso complesso (n. 2).

Se la congruenza lineare è speciale, l'unica direttrice d appartiene a tutti i complessi lineari del fascio. Il punto D in cui una generatrice g incontra la d, ha sempre per polare il piano dg, e questo è tangente alla rigata in D. Il punto D è unito per tutte le proiettività sulla retta g: l'ulteriore punto unito di ciascuna proiettività dà l'intersezione della g con una cubica asintotica.

4. Le rette di una congruenza lineare sono unite per ∞^1 omografie biassiali che hanno le direttrici, distinte o coincidenti, per rette di punti uniti. Queste omografie trasformano in sè una rigata appartenente alla congruenza, conservando le generatrici: su ogni generatrice viene subordinata una proiettività, che ha per punti uniti le intersezioni con le direttrici. Le ∞^1 omografie corrispondono alla possibilità di assegnare in infiniti modi l'omologo di un ulteriore punto.

Un'omografia che muti la rigata in sè, muta le asintotiche in asintotiche, perchè il concetto di asintotica è proiettivo. Un'asintotica che incontri in un punto P una generatrice g, può essere trasformata in quell'altra asintotica che vogliamo: basta fissare, tra le ∞^1 omografie accennate, quella che fa corrispondere a P il punto P' in cui quest'altra asintotica incontra la g.

Se la congruenza lineare è generale, tra le ∞^1 omografie biassiali c'è l'omografia biassiale involutoria: questa trasformerà l'una nell'altra due cubiche asintotiche appartenenti ad uno stesso complesso lineare.

5. Generazione del Bioche delle nostre rigate. — Fissiamoci sopra una C^3 asintotica (che indicheremo con Γ) e in ogni suo punto P consideriamo il piano osculatore: esso contiene la generatrice della rigata che passa per P. La superficie ha almeno una direttrice rettilinea d. La generatrice g, che esce da P, si appoggia alla d nel punto in cui questa è incontrata dal piano osculatore a Γ in P. Dunque: *Una rigata le cui asintotiche del secondo sistema sono cubiche gobbe, può essere definita come il luogo delle rette che congiungono ogni punto di una cubica Γ al punto d'incontro del relativo piano osculatore con una retta fissa d.*

Inversamente, ogni rigata generata con la legge su esposta ha per asintotiche infinite cubiche gobbe. Infatti le sue generatrici appartengono ad una congruenza lineare perchè, in quanto stanno nei piani osculatori alla Γ, appartengono al complesso lineare generale $\mathbf{C}$, che contiene le tangenti alla Γ; in quanto si appoggiano alla d, appartengono al complesso lineare speciale che ha per asse la d. Appartengono dunque alla congruenza lineare intersezione di questi due complessi. A seconda che d non appartiene al complesso $\mathbf{C}$ o gli appartiene, la congruenza lineare sarà generale oppure speciale.

La Γ sarà un'asintotica della rigata, ossia il piano osculatore a Γ in ogni suo punto P sarà tangente alla superficie, poichè contiene la generatrice passante per P e la tangente in P alla Γ ([6]). E così pure saranno asintotiche della rigata le trasformate di Γ nelle ∞^1 omografie biassiali che hanno per rette unite le rette della congruenza lineare, e che quindi mutano la rigata in sè. Sono perciò cubiche gobbe tutte le asintotiche del secondo sistema.

Dunque: *Le rigate che consideriamo sono tutte e sole quelle generate con questa legge.*

6. Classificazione. — Alla classificazione di queste superficie si giunge pensando che la cubica Γ e la retta d possono avere posizioni reciproche diverse.

([6]) In generale queste due rette non coincideranno: se coincidessero sempre, la superficie si ridurrebbe alla sviluppabile delle tangenti a Γ, e non potrebbe avere una direttrice rettilinea.

La d può incontrare Γ in m punti (ove $0 \leq m \leq 2$) e stare in μ piani osculatori ($0 \leq \mu \leq 2$). Per un punto P della d si possono allora condurre $3 - \mu$ piani osculatori variabili alla Γ, quindi passano $3 - \mu$ generatrici, ossia la d è direttrice multipla di ordine $3 - \mu$. Un piano per la d incontra la Γ in $3 - m$ punti variabili, ossia contiene $3 - m$ generatrici, che sono le sue intersezioni con i piani osculatori nei $3 - m$ punti. Dunque la sua intersezione completa con la rigata è formata dalle $3 - m$ generatrici e dalla d, la quale è multipla secondo il numero $3 - \mu$, se non è generatrice oltre che direttrice.

L'ordine della rigata è dunque (con quella riserva) $6 - (\mu + m)$, ove μ ed m possono assumere i valori 0, 1, 2. Combinando questi tra loro in tutti i modi possibili, si hanno tutti i tipi di superficie.

Vedremo però che alcune combinazioni vanno escluse. Inoltre, se una retta d presenta il caso: $m = \alpha$, $\mu = \beta$, la sua polare d' rispetto al complesso lineare inerente a Γ si comporterà, rispetto a questa, nel modo duale, cioè presenterà il caso: $m = \beta$, $\mu = \alpha$. Se α, β non sono uguali sarà dunque d' distinta da d, ed essendo anch'essa direttrice della rigata, vediamo che questa risponderà tanto ad $m = \alpha$, $\mu = \beta$ quanto ad $m = \beta$, $\mu = \alpha$. Ossia: due combinazioni ottenute l'una dall'altra scambiando tra loro i valori di m e μ, dànno una stessa superficie.

I casi da considerare sono i seguenti:

Sia anzi tutto $\mu = 0$, $m = 0$. La superficie è di *sesto ordine*. La direttrice d non incontra la Γ e non sta in nessun piano osculatore.

1.° caso. Se la d non appartiene al complesso lineare definito dalla Γ, la superficie ha un'altra direttrice rettilinea d', polare di d rispetto al complesso, la quale, come la d, non incontra Γ e non sta in alcun piano osculatore. Tanto la d quanto la d' sono direttrici triple.

2.° caso. Se invece d appartiene al complesso lineare, essa è l'unica direttrice rettilinea (tripla) della superficie: le tre generatrici che escono da un suo punto stanno in un piano con essa. —

3.° caso. Sia $\mu = 0$, $m = 1$, oppure $\mu = 1$, $m = 0$. Si ha una rigata del *quinto ordine.*

La d (supposto $\mu = 0$, $m = 1$) incontra Γ in un punto P e non sta in nessun piano osculatore (non potrebbe stare che nel piano osculatore in P); è direttrice tripla della rigata. Siccome non sta nel piano osculatore in P, non è retta del complesso lineare che contiene le tangenti alla Γ; quindi c'è un'altra direttrice d', polare di d rispetto al complesso, che sta nel piano osculatore in P senza passare per P. Questa è dunque direttrice doppia, e corrisponde ai valori $\mu = 1$, $m = 0$.

4.° caso. Sia $\mu = 1$, $m = 1$. La rigata è del *quarto ordine.*

La d incontra Γ in P e sta nel piano osculatore: è direttrice doppia della rigata; appartiene al complesso lineare, ed è, quindi, l'unica direttrice rettilinea.

5.° caso. $\mu = 0$, $m = 2$, oppure $\mu = 2$, $m = 0$. La rigata è ancora di *quarto ordine.*

La d ($\mu = 0$, $m = 2$) incontra Γ in due punti, P, Q, e non sta in nessun piano osculatore: è direttrice tripla, e non appartiene al complesso lineare delle tangenti alla Γ. La rigata ha un'altra direttrice d', che è la polare di d rispetto al complesso, ossia l'intersezione dei piani osculatori in P, Q: essa non incontra la Γ, è direttrice semplice e corrisponde al caso $\mu = 2$, $m = 0$.

6.° caso. Quando $m = 2$, se i due punti P, Q d'appoggio su Γ della corda d sono distinti, d non può stare su alcun piano osculatore, sicchè $\mu = 0$. Perchè con $m = 2$ sia $\mu > 0$ bisogna dunque che P e Q coincidano, cioè che la d sia tangente a Γ in P. Ma allora d si può riguardare anche come intersezione di due piani osculatori, sicchè sarebbe da porre $\mu = 2$. È dunque da escludere il caso $m = 2$, $\mu = 1$, e dualmente il caso $m = 1$, $\mu = 2$. Resta, come sesto, quello che d sia tangente a Γ: esso può riguardarsi come corrispondente ai valori $m = 2$, $\mu = 2$.

In questo caso d appartiene al complesso lineare definito da Γ, è l'unica direttrice rettilinea, ed è in pari tempo generatrice: come direttrice è doppia. Si ha una *rigata del terzo ordine a direttrice unica doppia* (di Chasles-Cayley).

Questo caso è il limite dell'altro: $\mu = 0$, $m = 2$ e $\mu = 2$, $m = 0$, quando i due punti P, Q, e quindi i relativi piani osculatori, si avvicinano indefinitamente.

7. Rigate a direttrici distinte. — Ci occuperemo principalmente di quelle rigate che hanno due direttrici distinte: tali sono la prima, la terza e la quinta del numero precedente, dotate di direttrici rispettivamente triple, tripla e doppia, tripla e semplice, e che possiamo indicare con i simboli: $F^6(3, 3)$, $F^5(3, 2)$, $F^4(3, 1)$.

Diciamo, come si usa, *parabolica* una generatrice la quale provenga da due generatrici, uscenti da uno stesso punto di una direttrice, che si sono avvicinate indefinitamente; *punto cuspidale* e *piano parabolico* il punto e il piano delle due generatrici infinitamente vicine. Il piano è tangente alla rigata lungo tutta la generatrice parabolica. Chiamiamo poi (con H. MOHRMANN) *paraboliche di secondo ordine* quelle generatrici che risultano dall'avvicinarsi indefinitamente di *tre*, uscenti dallo stesso punto.

Per una rigata con due rette direttrici, ogni generatrice parabolica è tangente di flesso a tutte le asintotiche nel relativo punto cuspidale.

Questa proposizione, dovuta al CREMONA (7), si può dimostrare geometricamente così: Sia d una direttrice della rigata, P un suo punto cuspidale, p la generatrice parabolica corrispondente. L'unico piano tangente alla rigata in tutti i punti di p è il piano parabolico $p\,d'$, se d' è l'altra direttrice. Tutte le asintotiche, nelle loro intersezioni con la p, debbono avere $p\,d'$ per piano osculatore. D'altra parte il piano osculatore in un punto deve essere l'omologo del punto stesso rispetto al complesso lineare che contiene le tangenti all'asintotica: ma in ciascuno di questi complessi il piano $p\,d'$ corrisponde al punto P, quindi ogni asintotica non può incontrare che in P la retta p. La p è dunque tangente in P a tutte le asintotiche, perchè in questo punto sono venute a coincidere le sue due intersezioni (n. 2) con ciascuna di esse.

D'altra parte, se consideriamo una generatrice g che s'accosti indefinitamente a p, con i suoi due punti dell'asintotica i quali tenderanno a P, vediamo che il piano $p\,d$, come limite del piano $P\,g$, ha tre intersezioni riunite in P con l'asintotica. Invece il piano $p\,d'$, come limite del piano di due generatrici uscenti da uno stesso punto, vicinissimo a P, della d, ha quattro intersezioni con l'asintotica riunite in P. Ne segue che P è punto di flesso per l'asintotica, con p per tangente e il piano $p\,d'$ per piano osculatore.

8. In particolare si tratti delle nostre rigate, in cui ogni asintotica è una C^6 spezzata in due C^3. In un punto cuspidale P la generatrice parabolica p incontra tutte due le C^3 in cui la C^6 si spezza; anzi dovendo avere in comune tre punti con la C^6, sarà tangente alle due C^3 (8).

Con lo stesso ragionamento di poc'anzi si vede che il piano parabolico $P\,d'$ sarà osculatore (a contatto tripunto) in P per ambe le cubiche: il che risulta anche dal fatto che quel piano corrisponde a P rispetto al complesso lineare delle tangenti alle cubiche.

(7) Vedi pag. 414 della 2ª citazione di (8). Cfr. anche MOHRMANN, (4), pag. 581.

(8) Non può avvenire che una sola delle due cubiche tocchi in P la p, a causa dell'omografia biassiale involutoria che le muta l'una nell'altra (n. 4).

Se riscontriamo al n. 6 ciò che è detto sugl' incontri di una cubica asintotica Γ con le due direttrici della rigata, vediamo che: *La* $F^6(3,3)$ *non ha punti cuspidali sulle direttrici* (*e quindi non ha generatrici paraboliche*); *la* $F^5(3,2)$ *ha un solo punto cuspidale sulla direttrice tripla; e così la* $F^4(3,1)$ *ne ha due, ancora sulla direttrice tripla.* Le tre generatrici uscenti da uno, P, di questi punti (della F^5 o della F^4) debbono coincidere nella generatrice parabolica p; poichè il loro piano è osculatore in P alla cubica Γ, e in caso contrario conterrebbe, su una generatrice diversa da p, un punto di Γ diverso da P.

Risulta così (d'accordo con una osservazione più generale del MOHRMANN) che: *Tutte le rigate a direttrici distinte, che hanno per asintotiche infinite cubiche gobbe, hanno soltanto generatrici paraboliche del secondo ordine.*

9. SULLA RAPPRESENTAZIONE PIANA DELLE NOSTRE SUPERFICIE. — Il CREMONA, nella Memoria citata ([3]), dà una rappresentazione piana delle rigate razionali con due direttrici rettilinee, che qui ci converrà ricordare per poterla applicare nei singoli casi.

Siano M, N le due direttrici, m ed n i loro ordini di multiplicità ($m \geqq n$). La rigata sarà di grado $m+n$, ed essendo razionale avrà $(m-1)(n-1)$ generatrici doppie.

La rappresentazione piana è espressa dalle formole seguenti:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = z\,\varphi\,\omega : z\,\varphi\,\theta : \psi\,u : \psi\,v, \tag{1}$$

ove le x_i sono le coordinate omogenee dei punti della superficie; x, y, z quelle dei punti del piano rappresentativo; u, v sono forme di x, y del grado m; ω, θ di grado n; φ di grado $\mu-n-1$, ψ di grado $\mu-m$; essendo μ un intero che si può assumere $\geqq m$ se $m > n$; e invece $\geqq m+1$ se $m=n$.

Questa rappresentazione dà, evidentemente, come immagini delle generatrici le rette passanti per il punto $O\,(x=y=0)$, e come immagini delle sezioni piane della superficie delle curve di ordine μ, col punto O $(\mu-1)$-plo, aventi in esso le $\mu-n-1$ tangenti fisse $\varphi=0$, e le rimanenti n variabili nell' involuzione

$$a\,\omega + b\,\theta = 0. \tag{2}$$

Inoltre quelle curve incontrano la retta $G\,(z=0)$ nei $\mu-m$ punti fissi $\psi=0$, ed in un gruppo di m punti, che varia nell' involuzione

$$c\,u + e\,v = 0. \tag{3}$$

I gruppi di m punti di questa involuzione sulla G sono le immagini dei singoli punti della direttrice m-pla M; i gruppi di n punti infinitamente vicini ad O, sui gruppi di n rette della prima involuzione, rappresentano i singoli punti della direttrice n-pla N.

I gruppi (Jacobiani) di $2(m-1)$ e di $2(n-1)$ elementi doppi delle due involuzioni rappresentano i punti cuspidali di M, N.

Se poi si considera nel fascio O, oltre alla prima involuzione (2), quella che si ottiene proiettando da O l'involuzione (3) della retta G, le $(m-1)(n-1)$ coppie di rette comuni rappresentano le $(m-1)(n-1)$ generatrici doppie della rigata.

Come immagini delle asintotiche della superficie si trovano le curve del fascio

$$z^2\,\varphi^2\,(\omega_1\,\theta_2 - \omega_2\,\theta_1) - k\,\psi^2\,(u_1\,v_2 - u_2\,v_1) = 0, \tag{4}$$

ove gl'indici inferiori 1, 2 significano derivazione rispetto ad x, y.

10. Rigata del sesto ordine a direttrici triple, $F^6\,(3, 3)$. — Quando una rigata algebrica sta in una congruenza lineare, si sa che l'ordine delle asintotiche, determinate al modo di Lie (n. 2), è uguale al rango della rigata. Qui le asintotiche (considerate in quel modo) sono di sesto ordine, quindi il rango della rigata è 6, ossia le sue sezioni piane sono di sesta classe.

Queste sezioni piane sono razionali, e poichè hanno già due punti tripli sulle due direttrici, dovranno ancora avere quattro punti doppi. Non potendo esservi, fuori delle due direttrici, una linea doppia che non si componga di generatrici, concludiamo che la rigata ha quattro generatrici doppie.

Per riconoscere se queste quattro generatrici doppie sono nodali o cuspidali, diciamo d il numero di quelle nodali ed r quello delle cuspidali, sicchè:

$$d + r = 4.$$

Ogni sezione piana, di sesta classe, ha due punti tripli che valgono per sei doppi, e poi d nodi ed r cuspidi. Quindi, per la formola di Plücker che dà la classe mediante l'ordine e il numero dei punti doppi:

$$6 = 6 \cdot 5 - 2\,(6 + d) - 3\,r, \quad \text{ossia} \quad 2\,d + 3\,r = 12.$$

Da queste due relazioni fra d ed r segue: $d = 0$, $r = 4$. Dunque: *La rigata ha quattro generatrici cuspidali o di regresso.*

Una generatrice cuspidale c è tangente, in punti variabili, a tutte le cubiche asintotiche della superficie. Infatti, se un piano che ruota intorno all'una o all'altra direttrice viene a passare per c (e così due delle generatrici giacenti in esso vengono in c), due intersezioni del piano con una cubica vengono a coincidere nel punto d'incontro di questa curva con c.

Il fatto che le generatrici cuspidali, tangenti a tutte le cubiche, sono quattro, si accorda con l'altro che la sviluppabile delle tangenti ad una cubica gobba è di quarto grado, e mostra che *le generatrici cuspidali della* $F^6(3, 3)$ *sono tutte e sole le tangenti alla cubica* Γ, *con la quale si genera la superficie, che si appoggiano alla retta* d, e quindi anche alla d'. (Si confronti il teorema di Voss citato in principio.)

Abbiamo già rilevato al n. 8 che la rigata $F^6(3, 3)$ non ha generatrici paraboliche, ossia punti cuspidali sulle due direttrici. In realtà la corrispondenza (3, 3) segnata fra i punti di queste dalle generatrici della rigata avrebbe, in generale, su ciascuna direttrice dodici punti di diramazione, ossia punti cuspidali. Ma è facile vedere che ogni punto d'incontro della direttrice con una generatrice di regresso assorbe tre di questi punti: basta segare la rigata F con un piano. I piani parabolici di F, passanti per una direttrice, hanno per tracce le tangenti condotte alla curva sezione di F dal punto traccia della direttrice. Se F acquista una generatrice di regresso, e quindi la curva sezione una cuspide, il numero di quelle tangenti subisce una riduzione di tre unità.

Così mentre una rigata di sesto ordine con due direttrici triple, *generale,* ha dodici generatrici paraboliche uscenti da dodici punti cuspidali di una direttrice, e così per l'altra, la nostra rigata $F^6(3, 3)$, avendo quattro generatrici cuspidali, non ha più affatto generatrici paraboliche: si può dire che queste sono state assorbite da quelle.

11. *Ogni rigata del sesto ordine con due direttrici rettilinee triple e quattro generatrici di regresso, ha per asintotiche infinite cubiche gobbe.*

Per dimostrare questo teorema, che stabilisce essere *caratteristico* per le nostre $F^6(3, 3)$ il possedere quattro generatrici di regresso, ricorriamo alla rappresentazione piana della superficie, del n. 9.

In questo caso $m = n = 3$; u, v, ω, θ sono di terzo grado in x, y. Poniamo $\mu = 4$; ψ risulta lineare in x, y; φ è una costante.

Le immagini delle sezioni piane

$$z\,\varphi\,(a\,\omega + b\,\theta) + \psi\,(c\,u + e\,v) = 0 \tag{5}$$

sono linee del quarto ordine: hanno in $O\,(x = y = 0)$ un punto triplo, con le tre tangenti $a\,\omega + b\,\theta = 0$ formanti un gruppo di una delle due involuzioni, che sono di terzo grado. Tagliano la retta $G\,(z = 0)$ nei tre punti $c\,u + e\,v = 0$, che formano un gruppo dell'altra involuzione, e nel punto fisso $(P)\,\psi = 0$.

I punti base della rappresentazione sono: il punto O, triplo, a tangenti distinte e variabili, ed il punto P.

Dobbiamo introdurre la condizione che la superficie abbia quattro generatrici cuspidali.

Il Cremona considera soltanto il caso di generatrici doppie nodali. Ognuna di queste (come dicemmo al n. 9) è rappresentata da una coppia di rette comuni alle due involuzioni del fascio O. Ora quando la generatrice diventa cuspidale, bisogna ammettere che le due rette immagini, comuni alle due involuzioni, si avvicinino indefinitamente, fino a venire a coincidere, ossia che la coppia comune sia formata da una retta doppia per l'una e per l'altra involuzione.

Qui le due involuzioni, essendo di terzo grado, hanno quattro coppie di rette comuni: inoltre ciascuna ha quattro rette doppie. Per poter avere quattro generatrici cuspidali sarà necessario che tutte le rette doppie per l'una, siano doppie anche per l'altra.

Se consideriamo le involuzioni che si ottengono segando le precedenti con la retta G, vediamo che i punti doppi dell'una sono quelli le cui coordinate x, y annullano il Jacobiano della (3), ossia sono radici dell'equazione

$$u_1\,v_2 - u_2\,v_1 = 0, \tag{6}$$

e così i punti doppi dell'altra sono dati dall'equazione

$$\omega_1\,\theta_2 - \omega_2\,\theta_1 = 0. \tag{7}$$

Per quello che abbiamo detto, le due involuzioni debbono avere gli stessi punti uniti, ossia la (6) e la (7) debbono avere le stesse radici. Se indichiamo con α una costante, deve essere:

$$u_1\,v_2 - u_2\,v_1 = \alpha\,(\omega_1\,\theta_2 - \omega_2\,\theta_1).$$

L'equazione (4) delle immagini delle asintotiche si può dunque scrivere:

$$z^2 \varphi^2 (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1) - k \alpha \psi^2 (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1) = 0.$$

Essa si spezza nella (7), che viene ora a rappresentare le quattro generatrici cuspidali, e nella coppia di rette

$$z^2 \varphi^2 - k \alpha \psi^2 = 0$$

le quali passano pel punto fondamentale $P (z = 0, \psi = 0)$, e però rappresentano delle curve di *terzo ordine.*

12. RIGATA DEL QUINTO ORDINE A DIRETTRICI TRIPLA E DOPPIA, $F^5 (3, 2)$. — Sia d la direttrice doppia, d' la direttrice tripla: d' incontra tutte le asintotiche in un punto fisso P (cuspidale per la rigata): d sta nel piano osculatore comune in P.

Le sezioni piane della rigata sono di quinto ordine e di sesta classe (9), con un nodo nell'intersezione del loro piano con la d, un punto triplo a tangenti distinte nell'intersezione con la d'. Sono razionali, quindi debbono avere ancora due punti doppi. Affinchè la classe risulti 6, dovranno essere due cuspidi. Dunque: *La superficie ha due generatrici cuspidali, che* (n. 10) *sono tangenti in punti variabili a tutte le asintotiche.*

Quanto a generatrici paraboliche, abbiamo già visto al n. 8 che ve n'è una sola, parabolica di secondo ordine, uscente da P. La corrispondenza (2, 3) fra i punti delle due rette direttrici condurrebbe, in generale, all'esistenza di sei punti cuspidali su d e otto su d', ma gl'incontri con le due generatrici cuspidali ne assorbono sei su ogni direttrice (n. 10), e sulla d' il punto P, essendo di secondo ordine, equivale ai due che rimarrebbero.

Una rigata del quinto ordine a direttrici distinte tripla e doppia, che ha per asintotiche infinite cubiche gobbe, ha una generatrice parabolica di secondo ordine, e due generatrici cuspidali.

13. Ora, ricorrendo alla rappresentazione piana, dimostriamo che, inversamente: *Una rigata del quinto ordine a direttrici distinte tripla e doppia, dotata di due generatrici cuspidali e di una generatrice parabolica di secondo ordine, ha per asintotiche infinite cubiche gobbe.*

In questo caso porremo, nel n. 9, $m = 3$, $n = 2$, e poi $\mu = 3$. Le u, v

(9). Vedi il principio del n. 10.

sono dunque di terzo grado in x, y, le ω, θ di secondo grado: φ e ψ sono costanti.

Ragionando come al n. 11 si vede che l'esistenza di due generatrici di regresso esige che fra i Jacobiani delle due involuzioni si abbia

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1) \chi,$$

ove χ indica una forma quadratica di x, y. Questa, uguagliata a zero, dà quei due punti doppi dell'involuzione (3) della G, che sarebbero immagini dei punti cuspidali di d' non assorbiti dalle intersezioni con le due generatrici di regresso. Ora noi vogliamo avere una generatrice parabolica *di secondo ordine*: bisogna dunque che quei due punti cuspidali coincidano, ossia che χ sia il quadrato di una forma lineare $f(x, y)$.

Posto ciò nella relazione precedente, e sostituendo nell'equazione (4) delle immagini delle asintotiche, vediamo che essa viene a spezzarsi nelle due:

$$\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1 = 0$$

e

$$z^2 \varphi^2 - k f^2 \psi^2 = 0.$$

La prima rappresenta le immagini delle due generatrici cuspidali della superficie, la seconda una coppia di rette passanti per il punto $z = 0$, $f = 0$. Vediamo così che nel caso attuale le asintotiche si spezzano in cubiche rappresentate dal fascio delle rette uscenti da quel punto.

14. Rigata del quarto ordine a direttrici tripla e semplice, F^4 (3, 1). — Sia d la direttrice semplice, d' la direttrice tripla: d' incontra tutte le asintotiche in due punti, P, P' (cuspidali per la F); d sta nei relativi piani osculatori.

Le sezioni piane, del quarto ordine, avendo un punto triplo nell'intersezione con d', non possono avere altri punti multipli. *La superficie non ha,* dunque, *generatrici doppie. Ha invece* (n. 8) *due generatrici paraboliche di secondo ordine, uscenti da P, P'.*

Dimostriamo ora che, inversamente, *ogni rigata del quarto ordine a direttrici tripla e semplice, dotata di due generatrici paraboliche di secondo ordine, ha per asintotiche infinite cubiche gobbe.*

Ricorrendo, al solito, alla rappresentazione piana del n. 9, abbiamo $m = 3$, $n = 1$; poniamo $\mu = 3$: u, v sono di terzo grado in x, y; ω, θ, φ sono lineari, ψ costante.

L'involuzione (3) del n. 9, del terzo grado, ha quattro punti doppi che coincidono a due a due, per l'ipotesi che la superficie abbia due generatrici paraboliche di *secondo ordine*. Quindi il suo Jacobiano sarà il quadrato di una forma quadratica $f(x, y)$, cioè:

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = f^2.$$

L'equazione (4) delle immagini delle asintotiche diventa:

$$z^2 \varphi^2 (\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1) - k \psi^2 f^2 = 0.$$

Queste immagini (tenuto presente che ora $\omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1$ è una costante) si spezzano in due coniche, variabili nel fascio:

$$\lambda z \varphi + \mu \psi f = 0.$$

Tali coniche passano per O, che è punto fondamentale, doppio, della rappresentazione piana, e toccano in esso la retta $\varphi = 0$, che è pur tangente fissa in O alle immagini delle sezioni piane della rigata. Dunque le coniche sono immagini di cubiche della F; queste cubiche comporranno le asintotiche del secondo sistema.

15. Il Bioche, nei §§ 14-15 della Memoria citata, rileva come notevole una superficie rigata del quarto ordine avente per asintotiche infinite cubiche gobbe, e tale che, su ogni corda di ciascuna di queste, i due punti d'appoggio separano armonicamente gli ulteriori due punti d'incontro con la superficie.

Come equazione di questa superficie egli ottiene, in coordinate omogenee:

$$x z^3 - y^3 t = 0, \tag{8}$$

e dimostra che questa è la sola rigata del quarto ordine, con una direttrice tripla ed una semplice, che goda della proprietà di ammettere trasformazioni omografiche in sè, diverse dalle collineazioni biassiali aventi le due direttrici per assi.

Ora merita di esser notato che questa superficie è proprio *la più generale rigata del quarto ordine avente per asintotiche infinite cubiche gobbe.*

Infatti, assunte le direttrici, tripla e semplice, rispettivamente come rette fondamentali $y = z = 0$ e $x = t = 0$, l'equazione della superficie si potrà scrivere:

$$x f(y, z) + t g(y, z) = 0 \tag{9}$$

dove f, g sono forme cubiche di y, z.

Supponiamo poi che i piani $x = 0$, $t = 0$ siano precisamente i due piani parabolici passanti per la direttrice semplice: piani che, come sappiamo, debbono incontrare la superficie ognuno in una generatrice parabolica di secondo ordine, ossia da contarsi tre volte. E precisamente siano $x = y = 0$ e $z = t = 0$ le rispettive due generatrici paraboliche. Allora f e g si ridurranno, a meno di fattori costanti, a z^3 ed a y^3, e l'equazione (9), eventualmente con un cambiamento nel punto unità, si ridurrà alla (8) del Bioche.

16. Cenni su quelle, fra le nostre superficie, che stanno in una congruenza lineare speciale. — Queste superficie sono la F^6, la F^4, la F^3, che costituivano i casi 2°, 4°, 6° del n. 6.

Ciò che si è detto allora, in relazione con un'asintotica Γ, e quello che s'è visto poi per le superficie di una congruenza lineare non speciale, delle quali le superficie attuali possono riguardarsi come limite, conducono alle proposizioni seguenti.

La rigata F^6 con direttrice unica avrà ancora quattro generatrici cuspidali (tangenti a tutte le cubiche asintotiche) e nessuna generatrice parabolica. —

La F^4 con una direttrice doppia, unica, ha una generatrice cuspidale (tangente alle asintotiche) ed una generatrice parabolica ordinaria. —

La F^3 con direttrice doppia unica, di Chasles-Cayley, presenta, com'è noto, sulla retta direttrice d un punto singolare P, tale che la generatrice g variabile, passante per un punto mobile su d, viene a cadere in d quando questo punto passa per P. Il piano $g\,d$ ha per limite un piano δ che incontra la F^3 in d contata tre volte. Le cubiche asintotiche passano per il punto P ed hanno, in esso, d per tangente e δ per piano osculatore.

Possiamo dimostrare, per queste cubiche asintotiche della F^3, una notevole proprietà: cioè che *le ∞^1 corde tirate ad esse da un punto della rigata formano un fascio* (astrazion fatta, s'intende, delle corde di quella cubica che passa pel punto considerato).

Infatti ricordiamo anzitutto che, chiamando *coniugati* rispetto ad una C^3 due punti situati su una corda di questa e coniugati armonici rispetto ai punti d'appoggio, i coniugati rispetto ad una C^3 dei punti di un piano osculatore a questa, formano una rigata cubica, avente per unica direttrice rettilinea la tangente alla C^3 relativa a quel piano osculatore, e per la quale la C^3 è un'asintotica.

Applichiamo dunque il coniugio rispetto alle ∞^1 asintotiche di terzo ordine della F^3 data, a trasformare i punti del piano singolare δ dianzi nominato (osculatore a quelle C^3). I coniugati di quei punti dovranno sempre costituire la F^3 data, visto che è ben determinata una F^3 rigata dall'avere una data C^3 come asintotica e una tangente di questa come direttrice. Su ogni corda di una delle ∞^1 C^3 asintotiche, l'ulteriore punto d'incontro con la F^3 e la traccia su δ saranno coniugati armonici rispetto ai due punti d'appoggio della corda.

Fissato un punto R su F^3, e tirate da esso le corde alle ∞^1 asintotiche (non passanti per R), i coniugati armonici di R rispetto alle coppie dei punti d'appoggio staranno su δ. D'altra parte essi debbono stare anche sulla quadrica polare di R rispetto ad F^3: quadrica che contiene la retta doppia d, e perciò sega ulteriormente δ in una retta. Su questa dunque stanno quei coniugati armonici, sicchè quelle corde tirate da R formano un fascio.

Urbino, 30 maggio 1919.

Sulla teoria generale delle trasformazioni di Ribaucour, e sue applicazioni alla generalizzazione delle trasformazioni di Darboux.

(*Di* PASQUALE CALAPSO, *a Messina.*)

La presente memoria si compone essenzialmente di due parti; la prima si riferisce alle proprietà delle trasformazioni di RIBAUCOUR in generale, l'altra ha per iscopo di ottenere un tipo speciale di trasformazioni di RIBAUCOUR, che comprenda come caso particolare varie trasformazioni finora studiate, come le trasformazioni di DARBOUX e quelle di EISENHART.

Le considerazioni con cui si ottengono tali speciali trasformazioni sono basate principalmente sul *teorema generale di permutabilità* (*), per il che ho trovato opportuno dare alla prima parte una forma piuttosto estesa, richiamando i teoremi già noti per le ricerche di BIANCHI e DEMOULIN (**) ed aggiungendone dei nuovi; in guisa che la teoria rimane preparata per le ricerche ulteriori, ed altresì per uno studio sulle trasformazioni delle superficie di GUICHARD che pubblicherò prossimamente.

Il punto da cui si parte è la considerazione di una superficie S e di due superficie S_1 e S_2 contigue a S per trasformazioni di RIBAUCOUR; le su-

(*) Il primo enunciato del teorema di permutabilità per le trasformazioni di RIBAUCOUR si trova in una Nota pubblicata dal BIANCHI nei *Rendiconti dei Lincei* (Aprile 1904). Recentemente è stato esteso dall'autore ai sistemi n^{pli} ortogonali nella Nota: *Sul teorema generale di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali* [Reale Accademia dei Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 6°, anno 1917], e nella Memoria: *Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali e il teorema generale di permutabilità* [Annali di Matematica, T. XXVII della serie III; pag. 183 e seguenti].

(**) DEMOULIN, *Sur la transformation de Ribaucour* [Comptes Rendus, anno 1910, vol. 150, pag. 25 e seguenti. — *Sur les systèmes et les congruences k* [l. c., pag. 156 e seguenti; pagina 310 e seguenti].

perficie S ed S_1 sono le due falde di un inviluppo di sfere ed in esse si riguardano come corrispondenti i punti P e P_1 di contatto di ogni sfera con S ed S_1; similmente per S ed S_2.

In questo modo ad ogni punto P di S corrispondono rispettivamente due punti P_1 e P_2 sulle superficie S_1 ed S_2, e rimane così individuato un circolo che indichiamo con $P P_1 P_2$.

Il sistema di circoli che nasce nella maniera indicata è detto con DEMOULIN un *sistema* K, ed è chiamata *congruenza* K la congruenza formata dagli assi dei circoli.

Si possono presentare effettivamente due casi; *le immagini sferiche delle rigate della congruenza (corrispondenti alle linee di curvatura di* S*) formano due sistemi distinti di linee.* Questo caso, studiato dal DEMOULIN, ha condotto l'autore ai seguenti teoremi:

I. *Le sviluppabili della congruenza* K *corrispondono alle linee di curvatura di* S.

II. *Sopra ogni raggio della congruenza i fuochi sono le intersezioni del raggio coi piani delle sezioni principali della superficie* S *nel punto corrispondente.*

Dal modo poi di comportarsi delle equazioni di trasformazione per quanto riguarda l'immagine sferica, sono stato indotto a studiare la trasformazione di COMBESCURE dei sistemi K, e sono pervenuto al seguente teorema:

III. *Per ogni sistema* K *di circoli, esiste una trasformazione di Combescure tale che i circoli del sistema trasformato sono tutti ortogonali ad una sfera fissa.*

Può accadere invece che, pur essendo ben distinte le superficie S_1 ed S_2, *le immagini sferiche delle rigate della congruenza (corrispondenti alle linee di curvatura di* S*) non formino due sistemi distinti di linee;* nel quale caso il relativo sistema K è stato da me detto *singolare.*

Io ho dimostrato l'esistenza dei sistemi K singolari ed ho osservato che anche in questo caso sussiste il teorema III, cioè che il sistema ∞^2 di circoli $P P_1 P_2$ si può portare per trasformazione di COMBESCURE in un sistema di circoli $\overline{P}\,\overline{P}_1\,\overline{P}_2$ tutti ortogonali ad una sfera fissa; ma qui ha luogo la circostanza particolare che *i circoli* $\overline{P}\,\overline{P}_1\,\overline{P}_2$ *sono anche ortogonali ad un piano fisso e formano quindi un sistema ciclico.*

Stabilite queste proposizioni, viene dimostrato il *teorema di permutabilità* che si enuncia nel seguente modo:

Se ad una superficie S *sono contigue, per trasformazioni di Ribaucour,* *due altre superficie S_1 ed S_2, esistono ∞^1 superficie S' (deducibili per quadrature) tali che ogni superficie S' è contigua, per trasformazioni di Ribaucour, alle medesime superficie S_1 ed S_2.*

La dimostrazione di questo teorema è fatta sulla traccia di quella data dall'autore medesimo; e sempre sulla traccia dell'autore è osservato che le funzioni trasformatrici per le quali si passa da S_1 ad S' si compongono linearmente ed omogeneamente con due loro sistemi particolari di valori, per il che è detto che le superficie S' formano un *fascio.* Se allora si considera altresì il fascio a cui appartengono S_1 ed S_2 il teorema di permutabilità resta così completato:

Si hanno due fasci di superficie tali che due superficie, prese ad arbitrio l'una nel primo fascio, l'altra nel secondo fascio, sono fra loro legate da una trasformazione di Ribaucour (*).

Dopo questa proposizione, che è la più importante della teoria sia in sè stessa che per le applicazioni, vengono dimostrati alcuni elegantissimi teoremi pure dovuti al Bianchi che si riassumono nelle proposizioni seguenti:

Il punto P' della superficie S', che corrisponde al punto P di S, appartiene al circolo $P P_1 P_2$; se si considerano tutte le superficie S', ciascuna delle quali presa con S, S_1, S_2 forma la quarta superficie del teorema di permutabilità, le normali alle superficie S' nei punti ove incontrano uno stesso circolo $P P_1 P_2$ si distribuiscono sulle generatrici di un iperboloide rotondo (in particolare giacciono nel piano del circolo mantenendosi equidistanti dall'asse).

Se oltre alle superficie S' si considerano anche le superficie Σ del fascio a cui appartengono S_1 ed S_2, si trova che il punto P'' di Σ appartiene pure al circolo $P P_1 P_2$ e le normali alle superficie Σ nei punti d'incontro con lo stesso circolo $P P_1 P_2$ si distribuiscono sulle generatrici dello stesso iperboloide (o in particolare giacciono nel piano del circolo se ciò avveniva alle normali di S'); se non che le normali ad S' appartengono ad uno stesso sistema di generatrici, mentre le normali alle superficie Σ appartengono all'altro sistema di generatrici.

Io ho chiamato con Demoulin *sistema K di prima specie* un sistema K di circoli per i quali le normali alle superficie S', nei punti ove incontrano uno stesso circolo, giacciono nel piano del circolo medesimo; per un tale sistema K il Demoulin ha dimostrato che *la relativa congruenza K è ciclica*

(*) Bianchi, *Le trasformazioni di Ribaucour*, ecc.; l. c., pag. 215.

ed il sistema normale di circoli associato alla congruenza si ottiene assumendo, per ogni raggio, il circolo inviluppato dalle normali ad S' lungo il circolo $P P_1 P_2$;

In particolare se le normali ad S' sono tangenti al circolo $P P_1 P_2$, il sistema K è per sè stesso ciclico.

Io ho voluto studiare a fondo questo caso, che si presenta come la generalizzazione del sistema ciclico di GUICHARD, e sono pervenuto ai risultati seguenti:

Se S ed S_1 sono le due falde di un inviluppo di Ribaucour, le tangenti isotrope nei punti corrispondenti P e P_1 si tagliano in due punti P_0 e P'_0; la retta $P_0 P'_0$ descrive una congruenza ciclica e i punti P_0 e P'_0 descrivono due superficie formanti alla loro volta le due falde focali di un nuovo inviluppo di sfere.

Considerando poi le quattro superficie S, S_1, S_2, S' del teorema di permutabilità nel caso che diano luogo ad un sistema K di seconda specie, siano

P_0 e P'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S ed S_1,
Q_0 e Q'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S ed S_2,
M_0 e M'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S_1 ed S',
N_0 e N'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S_2 ed S',

e si indichino rispettivamente con

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3, \quad \Sigma_4$$

le sfere che dànno origine agl'inviluppi

$$(S_2 S'); \quad (S_1 S'); \quad (S S_2); \quad (S S_1).$$

Considerando allora le coppie di punti

$$P_0 \text{ e } P'_0; \quad Q_0 \text{ e } Q'_0; \quad M_0 \text{ e } M'_0; \quad N_0 \text{ e } N'_0;$$

si ha:

I. *Le rette $P_0 P'_0$, $Q_0 Q'_0$, $M_0 M'_0$, $N_0 N'_0$ concorrono in un punto O' dell'asse del circolo $P P_1 P_2$.*

II. *Il prodotto delle distanze che il punto O' ha dai punti delle varie coppie è uguale al quadrato della distanza che il punto O' ha dai vari punti del cerchio.*

III. *I sei punti ottenuti, sopprimendo la r^{ma} coppia, appartengono alla sfera* Σ_r.

IV. *Quattro punti ottenuti, prendendo ad arbitrio due punti di una coppia e due punti di un'altra coppia, appartengono sempre ad un circolo.*

Si chiude la parte generale con alcune osservazioni sui casi particolari del teorema di permutabilità, e i principali risultati si riassumono nei seguenti teoremi:

Se una delle superficie S_1, S_2 contigue ad S per trasformazioni di Ribaucour è deducibile da S mediante l'inversione, le superficie S' (ciascuna delle quali con S, S_1, S_2 forma la quarta superficie del teorema di permutabilità) si ottengono tutte in termini finiti.

Una trasformazione di Ribaucour è sempre decomponibile (a meno di una inversione) nel prodotto di due trasformazioni di Ribaucour, e ciò in infiniti modi.

È da osservare che supponendo ad esempio S_2 deducibile da S mediante l'inversione, fra le superficie S' ne esiste una deducibile da S_1 pure mediante l'inversione.

Segue che si passa da S ad S' operando prima un'inversione che porta S in S_2 e poscia una trasformazione di Ribaucour che porta S_2 in S'; oppure si può operare dapprima una trasformazione di Ribaucour che porta S in S_1 e poscia un'inversione che porta S_1 in S'. In questo senso *le trasformazioni di Ribaucour sono permutabili con le inversioni.*

Infine viene considerato il teorema di permutabilità nel caso in cui il sistema di superficie S, S_1, S_2 dà luogo ad un sistema K singolare; si è detto che i circoli $P P_1 P_2$ sono ortogonali ad un piano fisso π; l'importanza di questo piano per quanto riguarda il teorema di permutabilità risulta dal seguente teorema:

Se il sistema di superficie S, S_1, S_2 dà luogo ad un sistema K singolare, si ottiene nel modo più generale una superficie S' assumendo una superficie Σ e trasformandola mediante una simmetria rispetto al piano π.

Stabilite queste proposizioni fondamentali sulle trasformazioni di Ribaucour in generale, viene indi intrapreso lo studio di speciali trasformazioni, che si presentano come una generalizzazione delle trasformazioni di Darboux.

Siffatte trasformazioni operano sopra superficie appartenenti ad una classe che ora definiremo, e sono condotte in modo che la superficie trasformata appartiene sempre alla classe. Considerando poi tre superficie S, S_1, S_2 appartenenti alla classe, e tali che S_1 ed S_2 siano contigue ad S per trasformazioni di Ribaucour, si sa che esistono infinite superficie S' a ciascuna delle quali S_1 ed S_2 sono pure contigue per trasformazioni di Ribaucour; *di queste superficie S' sempre una ed una sola appartiene alla classe.*

Si perviene a questi risultati con la considerazione seguente.

I coefficienti E, G dell'elemento lineare di una superficie, riferita alle linee di curvatura, si possono sempre mettere sotto la forma

$$\sqrt{E} = e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta \, ; \quad \sqrt{G} = e^{\xi} \cosh \Theta . \tag{1}$$

Assumendo in particolare $\xi = \text{cost.}$ si ha la classe ben nota caratterizzata dalla relazione

$$E - G = \text{cost.} \tag{2}$$

Fra le trasformate di Combescure delle superficie di questa classe esiste una superficie isoterma, i cui coefficienti dell'elemento lineare hanno le espressioni

$$\sqrt{E_0} = e^{\Theta}, \quad \sqrt{G_0} = e^{\Theta},$$

e si ha la relazione

$$\cosh \Theta \cdot \sqrt{E_0} - \operatorname{senh} \Theta \cdot \sqrt{G_0} = 1. \tag{3}$$

Otteniamo una generalizzazione della classe di superficie (2) prendendo ξ funzione dei parametri u e v che individuano il punto della superficie (1), con la sola condizione che la (1) ammetta una trasformata di Combescure nella relazione (3).

Una tale superficie è detta *Superficie G*, e la sua trasformata di Combescure nella relazione (3) è detta *Superficie I coniugata alla G.*

Si hanno i teoremi:

Una superficie G ammette infinite superficie I ad essa coniugate, dipendenti da una costante arbitraria; se P e Q descrivono due superficie coniugate G ed I, tutte le superficie coniugate alla G si ottengono a meno di omotetia come luogo di un punto che divide il segmento PQ in un rapporto costante arbitrariamente assegnato.

Una superficie G ammette infinite trasformate di Ribaucour che sono ancora superficie G.

Il passaggio dalla G ad una sua trasformata G_1 richiede l'integrazione di un sistema *illimitatamente integrabile* in sette funzioni incognite, omogeneo, risoluto rispetto alle derivate delle funzioni incognite e contenente altresì due relazioni finite.

Il sistema contiene inoltre esplicitamente una costante arbitraria m, onde ho chiamato D_m la trasformazione che porta G in G_1, per indicare che si presenta come una *trasformazione di Darboux generalizzata* (*).

La trasformazione di Darboux si presenta generalizzata sotto duplice aspetto; prima perchè le superficie G comprendono le (2) come caso particolare, poi perchè la trasformazione introduce ogni volta cinque costanti arbitrarie.

Sussiste infine per le superficie G il teorema di permutabilità sotto la forma seguente:

Se di una superficie G si ottengono due nuove superficie G_1 e G_2 mediante le trasformazioni D_m e D_n, esiste una quarta superficie G' pienamente determinata e costruibile in termini finiti, che è legata alla sua volta alle medesime superficie G_1 e G_2 da due trasformazioni D_n e D_m colle costanti n, m invertite.

Rimane così esteso alle D_m generalizzate il teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie isoterme dovuto al Bianchi, e fatto conoscere dall'autore nella Memoria: *Ricerche sulle superficie isoterme, ecc.* [Annali di Matematica, t. XI della serie III, pag. 93 e seguenti].

Si chiude il presente lavoro osservando che dalle trasformazioni D_m generalizzate si possono in particolare dedurre le trasformazioni di Eisenhart (trasformazioni E_m) per le superficie di Guichard, considerando una superficie di Guichard come una superficie G che sia coniugata alla sua rappresentazione sferica.

In alcune ricerche che pubblicherò prossimamente sarà esposto uno studio sulle trasformazioni E_m e sulla loro espressione in trasformazioni di Guichard e di Darboux; e di tali importanti trasformazioni, dovute ad Eisenhart, sarà anche fatta l'estensione agli spazi di curvatura costante.

(*) Vedasi Darboux, *Sur les surfaces isothermiques.* Annales scientifiques de l'école normale supérieure, tomo XVI, troisième série, pag. 491 e seguenti.

§ 1. — Generalità sulla composizione delle trasformazioni di Ribaucour.

1. Sia una superficie S riferita alle linee di curvatura, per la quale adoperiamo le consuete notazioni; è noto (*) che per ottenere nel modo più generale una sua trasformata S_1 di Ribaucour, basta assumere una soluzione del sistema

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \mu + \frac{D}{\sqrt{E}} w + m \varphi \\
\frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \mu \\
\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \lambda \\
\frac{\partial \mu}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \lambda + \frac{D''}{\sqrt{G}} w + m \Omega \\
\frac{\partial w}{\partial u} &= -\frac{D}{\sqrt{E}} \lambda \\
\frac{\partial w}{\partial v} &= -\frac{D''}{\sqrt{G}} \mu \\
\frac{\partial \psi}{\partial u} &= \sqrt{E} \lambda \\
\frac{\partial \psi}{\partial v} &= \sqrt{G} \mu \\
\frac{\partial \sigma}{\partial u} &= \frac{\lambda}{\psi} (\varphi - \sigma \sqrt{E}) \\
\frac{\partial \sigma}{\partial v} &= \frac{\mu}{\psi} (\Omega - \sigma \sqrt{G}) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \Omega \\
\frac{\partial \Omega}{\partial u} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(*) Vedasi la mia Memoria: *Intorno agl'inviluppi di sfere, sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura* [Annali di Matematica, tomo XXVI della serie III, pagina 151 e seguenti].

con la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \psi\, \sigma, \tag{2}$$

in cui m è una costante arbitraria diversa da zero. Le coordinate del punto che descrive la trasformata S_1 sono date dalle formole

$$x_1 = x - \frac{1}{m\,\sigma}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2 + w\, X_3); \tag{3}$$

e per gli elementi relativi alla superficie S_1 si ha

$$\left.\begin{aligned}
X_1^{(1)} &= \varepsilon' \left[\left(\frac{\lambda^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right) X_1 + \frac{\lambda\,\mu}{m\,\psi\,\sigma} X_2 + \frac{\lambda\, w}{m\,\psi\,\sigma} X_3\right] \\
X_2^{(1)} &= \varepsilon'' \left[\frac{\lambda\,\mu}{m\,\psi\,\sigma} X_1 + \left(\frac{\mu^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right) X_2 + \frac{\mu\, w}{m\,\psi\,\sigma} X_3\right] \\
X_3^{(1)} &= \varepsilon'\,\varepsilon'' \left[\frac{\lambda\, w}{m\,\psi\,\sigma} X_1 + \frac{\mu\, w}{m\,\psi\,\sigma} X_2 + \left(\frac{w^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right) X_3\right]
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{E_1} &= \varepsilon' \left(\frac{\varphi}{\sigma} - \sqrt{E}\right) \\
\sqrt{G_1} &= \varepsilon'' \left(\frac{\Omega}{\sigma} - \sqrt{G}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D_1}{\sqrt{E_1}} &= \varepsilon'' \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\varphi\, w}{\psi\,\sigma}\right) \\
\frac{D''_1}{\sqrt{G_1}} &= \varepsilon' \left(\frac{D''}{\sqrt{G}} + \frac{\Omega\, w}{\psi\,\sigma}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

in cui ε' ed ε'' indicano l'unità, positiva o negativa, in guisa che le espressioni (5) di $\sqrt{E_1}$ e $\sqrt{G_1}$ risultano positive.

Da queste si ha altresì

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} &= \varepsilon'\,\varepsilon'' \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\varphi\,\mu}{\psi\,\sigma}\right), \\
\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} &= \varepsilon'\,\varepsilon'' \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\Omega\,\lambda}{\psi\,\sigma}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

È utile osservare fin da ora che le funzioni trasformatrici relative al passaggio inverso da S_1 ad S sono

$$-\varepsilon' \frac{\lambda}{\psi\sigma}, \quad -\varepsilon'' \frac{\mu}{\psi\sigma}, \quad -\varepsilon'\varepsilon'' \frac{w}{\psi\sigma}, \quad \frac{1}{\sigma}, \quad \frac{1}{\psi}, \quad \varepsilon' \frac{\varphi}{\psi\sigma}, \quad \varepsilon'' \frac{\Omega}{\psi\sigma},$$

e le (3) si possono anche scrivere

$$x_1 = x - \frac{1}{m\sigma}(\varepsilon' \lambda X_1^{(1)} + \varepsilon'' \mu X_2^{(1)} + \varepsilon' \varepsilon'' w X_3^{(1)}). \tag{8}$$

2. Assumiamo due trasformate di Ribaucour S_1 ed S_2 della superficie data S, e indichiamo con

$$\lambda_1, \quad \mu_1, \quad w_1, \quad \psi_1, \quad \sigma_1, \quad \varphi_1, \quad \Omega_1, \tag{9}$$

le funzioni trasformatrici relative al passaggio da S ad S_1, e con

$$\lambda_2, \quad \mu_2, \quad w_2, \quad \psi_2, \quad \sigma_2, \quad \varphi_2, \quad \Omega_2, \tag{10}$$

le funzioni trasformatrici relative al passaggio da S ad S_2.

Noi supponiamo che le (9) soddisfino al sistema (1), (2); e le (10) soddisfino al sistema analogo ove alla costante sia attribuito un valore n diverso da m; inoltre le differenze

$$\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1, \quad w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1, \quad \psi_1 w_2 - \psi_2 w_1, \tag{11}$$

le supporremo espressamente diverse da zero.

Per ogni punto P della superficie S si hanno in corrispondenza due punti P_1 e P_2 appartenenti rispettivamente alle superficie S_1 ed S_2; i punti P, P_1, P_2 non sono in linea retta e individuano perciò un cerchio. Si genera così un sistema ∞^2 di cerchi che chiameremo con Demoulin un *sistema* K; chiameremo altresì *congruenza* K la congruenza formata dagli assi dei circoli.

Per richiamare le proprietà generali dei sistemi K, conviene introdurre i punti in cui il raggio incontra i piani principali di S; indicando con Q' l'intersezione col piano normale passante per la tangente alla linea v e con Q'' l'intersezione col piano normale passante per la tangente alla linea u, avremo per le coordinate di Q'

$$\xi' = x - \frac{\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1} X_2 + \frac{\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1} X_3, \tag{12}$$

e per le coordinate di Q''

$$\xi'' = x + \frac{\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1}{w_1 \lambda_1 - w_2 \lambda_1} X_1 - \frac{\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1}{w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1} X_3; \tag{13}$$

inoltre le coordinate (omogenee) della direzione del raggio della congruenza sono

$$\left.\begin{aligned} X &= (\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) X_1 + (w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) X_2 + (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) X_3, \\ Y &= (\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) Y_1 + (w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) Y_2 + (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) Y_3, \\ Z &= (\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) Z_1 + (w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) Z_2 + (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) Z_3, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Per lo sviluppo della presente Memoria è utile preparare le derivate delle espressioni $\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1$, $w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1, \ldots$; esse si ottengono facilmente osservando le equazioni (1), (2) per λ_1, μ_1, $w_1, \ldots$, e le analoghe per λ_2, μ_2, $w_2, \ldots$

Si ha:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) = \frac{D}{\sqrt{E}}(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}(w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) + m\, \Omega_1 w_2 - n\, \Omega_2 w_1 \\
&\frac{\partial}{\partial u}(w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) - m\, \varphi_1 w_2 + n\, \varphi_2 w_1 \\
&\frac{\partial}{\partial v}(w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) = \frac{D''}{\sqrt{G}}(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) \\
&\frac{\partial}{\partial u}(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = -\frac{D}{\sqrt{E}}(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) + m\, \varphi_1 \mu_2 - n\, \varphi_2 \mu_1 \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = -\frac{D''}{\sqrt{G}}(w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) - m\, \Omega_1 \lambda_2 + n\, \Omega_2 \lambda_1 \\
&\frac{\partial}{\partial u}(\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u}(\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1) + \\
&\qquad\qquad + (\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1)\frac{D}{\sqrt{E}} + n\, \psi_1 \varphi_2 - m\, \psi_2 \varphi_1 \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1) - (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)\sqrt{G}
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}(\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}(\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1) + (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)\sqrt{E} \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1) = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1) + \\
&\qquad\qquad + (\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1)\frac{D''}{\sqrt{G}} + n\,\psi_1\,\Omega_2 - m\,\psi_2\,\Omega_1 \\
&\frac{\partial}{\partial u}(\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1) = -\sqrt{E}\,(w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) - \frac{D}{\sqrt{E}}(\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1) \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1) = \sqrt{G}\,(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) - \frac{D''}{\sqrt{G}}(\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1).
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Tenendo presente queste formole facilmente si deducono le derivate delle funzioni ξ', η', ζ', X, Y, Z sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi'}{\partial u} = \frac{1}{(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1)^2}\left[\sqrt{E}\,(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) - \frac{D}{\sqrt{E}}(\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1) - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}(\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1)\right] X \\
&\frac{\partial \xi'}{\partial v} = \frac{\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1}{(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X + (m\,\Omega_1 w_2 - n\,\Omega_2 w_1) X_2 - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - (m\,\Omega_1 \mu_2 - n\,\Omega_2 \mu_1) X_3\right]
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial u} = -(m\,\varphi_1 w_2 - n\,\varphi_2 w_1) X_2 + (m\,\varphi_1 \mu_2 - n\,\varphi_2 \mu_1) X_3 \\
&\frac{\partial X}{\partial v} = (m\,\Omega_1 w_2 - n\,\Omega_2 w_1) X_1 - (m\,\Omega_1 \lambda_2 - n\,\Omega_2 \lambda_1) X_3
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

3. Premesse queste formole fondamentali passiamo anzitutto alla ricerca delle sviluppabili della congruenza K; la loro equazione differenziale è

$$\left.\begin{vmatrix}
\frac{\partial \xi'}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial u} & X \\
\frac{\partial \eta'}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & Y \\
\frac{\partial \zeta'}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} & Z
\end{vmatrix} du^2 +
\begin{vmatrix}
\frac{\partial \xi'}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\
\frac{\partial \eta'}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y \\
\frac{\partial \zeta'}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z
\end{vmatrix} du\,dv + \right\} \quad (18)$$

$$
+\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi'}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial u} & X \\ \dfrac{\partial \eta'}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & Y \\ \dfrac{\partial \zeta'}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} & Z \end{vmatrix} d\,u\,d\,v + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi'}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial v} & X \\ \dfrac{\partial \eta'}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & Y \\ \dfrac{\partial \zeta'}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} & Z \end{vmatrix} d\,v^2 = 0. \tag{18}
$$

Tenendo conto delle espressioni (14), (16), 17) si riconosce subito che

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi'}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial u} & X \\ \dfrac{\partial \eta'}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & Y \\ \dfrac{\partial \zeta'}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} & Z \end{vmatrix} = m\,n\,(\psi_1\,w_2 - \psi_2\,w_1)\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1); \tag{19}
$$

in quanto agli altri determinanti della (18) sono nulli; quindi se l'espressione $\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1$ è diversa da zero si ha il teorema:

Le sviluppabili della congruenza K corrispondono alle linee di curvatura della superficie S.

Possiamo formare facilmente l'equazione di Laplace a cui soddisfano le funzioni X, Y, Z.

A tale scopo osserviamo l'identità

$$
\begin{vmatrix} 0 & -(m\,\varphi_1\,w_2 - n\,\varphi_2\,w_1) & m\,\varphi_1\,\mu_2 - n\,\varphi_2\,\mu_1 \\ m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1 & 0 & -(m\,\Omega_1\,\lambda_2 - n\,\Omega_2\,\lambda_1) \\ \mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1 & w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1 & \lambda_1\,\mu_2 - \lambda_2\,\mu_1 \end{vmatrix} = \\
= m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(\mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1); \tag{20}
$$

rimanendo nell'ipotesi che $\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1$ è diverso da zero, vediamo che dalle (17) e (14) possiamo esprimere X_1, X_2, X_3 mediante X, $\dfrac{\partial X}{\partial u}$, $\dfrac{\partial X}{\partial v}$. Otteniamo così

$$
\begin{aligned}
X_1 = {} & \frac{m\,\Omega_1\,\lambda_2 - n\,\Omega_2\,\lambda_1}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(\mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1)}\,\frac{\partial X}{\partial u} - \\
& - \frac{m\,\varphi_1\,\lambda_2 - n\,\varphi_2\,\lambda_1}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)}\,\frac{\partial X}{\partial v} + \\
& + \frac{(m\,\varphi_1\,w_2 - n\,\varphi_2\,w_1)\,(m\,\Omega_1\,\lambda_2 - n\,\Omega_2\,\lambda_1)}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(\mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)}\,X,
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$\left.\begin{aligned}
X_2 = {} & \frac{m\,\Omega_1\,\mu_2 - n\,\Omega_2\,\mu_1}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(\mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1)}\,\frac{\partial X}{\partial u} - \\
& - \frac{m\,\varphi_1\,\mu_2 - n\,\varphi_2\,\mu_1}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)}\,\frac{\partial X}{\partial v} + \\
& + \frac{(m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1)\,(m\,\varphi_1\,\mu_2 - n\,\varphi_2\,\mu_1)}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(\mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)}\,X, \\
X_3 = {} & \frac{m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(\mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1)}\,\frac{\partial X}{\partial u} - \\
& - \frac{m\,\varphi_1\,w_2 - n\,\varphi_2\,w_1}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)}\,\frac{\partial X}{\partial v} + \\
& + \frac{(m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1)\,(m\,\varphi_1\,w_2 - n\,\varphi_2\,w_1)}{m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\,(\mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)}\,X.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Osserviamo ancora le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial v}(m\,\varphi_1\,w_2 - n\,\varphi_2\,w_1) = \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,(m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1) - \\
& \qquad - \frac{D''}{\sqrt{G}}\,(m\,\varphi_1\,\mu_2 - n\,\varphi_2\,\mu_1), \\
& \frac{\partial}{\partial v}(m\,\varphi_1\,\mu_2 - n\,\varphi_2\,\mu_1) = \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,(m\,\Omega_1\,\mu_2 - n\,\Omega_2\,\mu_1) - \\
& \qquad - \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,(m\,\varphi_1\,\lambda_2 - n\,\varphi_2\,\lambda_1) + \\
& \qquad + \frac{D''}{\sqrt{G}}\,(m\,\varphi_1\,w_2 - n\,\varphi_2\,w_1) + m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1), \\
& \frac{\partial}{\partial u}(m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1) = \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,(m\,\varphi_1\,w_2 - n\,\varphi_2\,w_1) - \\
& \qquad - \frac{D}{\sqrt{E}}\,(m\,\Omega_1\,\lambda_2 - n\,\Omega_2\,\lambda_1), \\
& \frac{\partial}{\partial u}(m\,\Omega_1\,\lambda_2 - n\,\Omega_2\,\lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,(m\,\varphi_1\,\lambda_2 - n\,\varphi_2\,\lambda_1) - \\
& \qquad - \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,(m\,\Omega_1\,\mu_2 - n\,\Omega_2\,\mu_1) + \\
& \qquad + \frac{D}{\sqrt{E}}\,(m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1) - m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1);
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

in forza di queste si calcola dalle (17) la derivata seconda mista della funzione X sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = (m\,\varphi_1\, w_2 - n\,\varphi_2\, w_1)\,\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\,X_1 - \\ - (m\,\Omega_1\, w_2 - n\,\Omega_2\, w_1)\,\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\,X_2 + \\ + \Big[(m\,\Omega_1\,\nu_2 - n\,\Omega_2\,\nu_1)\,\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \\ - (m\,\varphi_1\,\lambda_2 - n\,\varphi_2\,\lambda_1)\,\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + m\,n\,(\varphi_1\,\Omega_2 - \varphi_2\,\Omega_1)\Big]\,X_3\,.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Se ora sostituiamo in questa per X_1, X_2, X_3 i valori dati dalle (21), otteniamo con facile calcolo l'equazione

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\log(\mu_1\, w_2 - \mu_2\, w_1)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} + \\ + \frac{\partial}{\partial u}\log(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)\cdot\frac{\partial X}{\partial v} + \Phi\, X,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

in cui abbiamo posto

$$\left.\begin{aligned}\Phi = \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\,\frac{m\,\varphi_1\, w_2 - n\,\varphi_2\, w_1}{\mu_1\, w_2 - \mu_2\, w_1} - \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\,\frac{m\,\Omega_1\, w_2 - n\,\Omega_2\, w_1}{w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1} + \\ + \frac{(m\,\varphi_1\, w_2 - n\,\varphi_2\, w_1)\,(m\,\Omega_1\, w_2 - n\,\Omega_2\, w_1)}{(\mu_1\, w_2 - \mu_2\, w_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)}\,.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

4. Passiamo ora alla ricerca dei fuochi. Dalla prima delle (16) segue subito che un fuoco è il punto Q'; per avere l'altro fuoco osserviamo che un punto qualunque del raggio della congruenza ha le coordinate della forma

$$\xi''' = \xi' + \rho X, \quad \eta''' = \eta' + \rho\, Y, \quad \zeta''' = \zeta' + \rho\, Z; \tag{26}$$

se esso è il fuoco richiesto facendo variare v solamente descrive una curva tangente alla retta; perciò si dovrà avere

$$Y\,\frac{\partial \xi'}{\partial v} - X\,\frac{\partial \eta'}{\partial v} + \rho\left(Y\,\frac{\partial X}{\partial v} - X\,\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = 0, \tag{27}$$

ed essendo

$$\left.\begin{aligned} Y\frac{\partial \xi'}{\partial v} - X\frac{\partial \eta'}{\partial v} = -\frac{\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}\Big[&(m\,\Omega_1\,\lambda_2 - n\,\Omega_2\,\lambda_1)\,Z_1 + \\ &+ (m\,\Omega_1\,\mu_2 - n\,\Omega_2\,\mu_1)\,Z_2 + (m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1)\,Z_3\Big], \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} Y\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial Y}{\partial v} = (w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)\Big[&(m\,\Omega_1\,\lambda_2 - n\,\Omega_2\,\lambda_1)\,Z_1 + \\ &+ (m\,\Omega_1\,\mu_2 - n\,\Omega_2\,\mu_1)\,Z_2 + (m\,\Omega_1\,w_2 - n\,\Omega_2\,w_1)\,Z_3\Big], \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

risulta per ρ il valore

$$\rho = -\frac{\psi_1\,w_2 - \psi_2\,w_1}{(\mu_1\,w_2 - \mu_2\,w_1)\,(w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1)}\,; \tag{30}$$

ed in conseguenza si hanno le coordinate del fuoco sotto la forma

$$\xi''' = x + \frac{\psi_1\,w_2 - \psi_2\,w_1}{w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1}\,X_1 - \frac{\psi_1\,\lambda_2 - \psi_2\,\lambda_1}{w_1\,\lambda_2 - w_2\,\lambda_1}\,X_3\,, \tag{31}$$

come per altro era chiaro geometricamente.

Confrontando questo risultato con la (13) risulta subito il teorema:

Sopra ogni raggio $(u,\ v)$ *della congruenza* K *i fuochi sono le intersezioni del raggio coi piani delle sezioni principali della superficie* S, *nel punto* $(u,\ v)$.

5. Per completare queste generalità operiamo una trasformazione di Combescure, trasformando la superficie S in una superficie $\overline{S}$, data dalle formole

$$\overline{x} = (\lambda_1 + \lambda_2)\,X_1 + (\mu_1 + \mu_2)\,X_2 + (w_1 + w_2)\,X_3\,. \tag{32}$$

Si ha:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = (m\,\varphi_1 + n\,\varphi_2)\,X_1\,;\quad \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = (m\,\Omega_1 + n\,\Omega_2)\,X_2\,; \tag{33}$$

e per dedurre una trasformata $\overline{S}_1$ di $\overline{S}$ possiamo mantenere le stesse funzioni

$$\lambda_1\,,\quad \mu_1\,,\quad w_1\,,\quad \varphi_1\,,\quad \Omega_1\,,$$

ed assumere due nuove funzioni $\overline{\psi}_1$, $\overline{\sigma}_1$ dalle formole

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{\psi}_1}{\partial u} = (m\,\varphi_1 + n\,\varphi_2)\,\lambda_1\,; \quad \frac{\partial \overline{\psi}_1}{\partial v} = (m\,\Omega_1 + n\,\Omega_2)\,\mu_1\,; \\ &\qquad \overline{\sigma} = \frac{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2}{2\,m\,\psi_1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Poichè nelle (4) intervengono soltanto le funzioni λ, μ, w si conclude che la superficie $\overline{S}_1$ è una trasformata di COMBESCURE di S_1.

Similmente per dedurre da $\overline{S}$ una seconda trasformata di RIBAUCOUR $\overline{S}_2$ possiamo mantenere le funzioni

$$\lambda_2, \quad \mu_2, \quad w_2, \quad \varphi_2, \quad \Omega_2,$$

ed assumere

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{\psi}_2}{\partial u} = (m\,\varphi_1 + n\,\varphi_2)\,\lambda_2\,; \quad \frac{\partial \overline{\psi}_2}{\partial v} = (m\,\Omega_1 + n\,\Omega_2)\,\mu_2\,; \\ &\qquad \overline{\sigma}_2 = \frac{\lambda_2^2 + \mu_2^2 + w_2^2}{2\,n\,\overline{\psi}_2}\,; \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

e questa superficie $\overline{S}_2$ è una trasformata di COMBESCURE di S_2.

Possiamo allora considerare per ogni punto $\overline{P}$ della superficie $\overline{S}$, i punti $\overline{P}_2$ e $\overline{P}_2$ rispettivamente corrispondenti di $\overline{S}_1$ ed S_2; ed in conseguenza il circolo $\overline{P}\,\overline{P}_1\,\overline{P}_2$ che giace in un piano parallelo al piano del circolo $P\,P_1\,P_2$.

Il sistema ∞^2 di circoli $\overline{P}\,\overline{P}_1\,\overline{P}_2$ si dirà derivato dal sistema di circoli $P\,P_1\,P_2$ per trasformazione di COMBESCURE.

Se consideriamo l'espressione

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2 + (w_1 + w_2)^2 - 2\,\overline{\psi}_1 - 2\,\overline{\psi}_2$$

facilmente vediamo, che per le equazioni del sistema fondamentale e per le (34) e (35), le derivate sono nulle e perciò essa è una costante; anzi possiamo ritenere tale costante positiva e diversa da zero, disponendo nelle (34) e (35) di una costante additiva; dunque scriveremo

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2 + (w_1 + w_2)^2 = 2\,(\overline{\psi}_1 + \overline{\psi}_2 + c) \quad (c = \text{cost.}). \tag{36}$$

Ciò premesso consideriamo uno dei punti in cui il circolo $\overline{P}\,\overline{P}_1\,\overline{P}_2$ è incontrato colla sfera

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 2\,c\,;$$

detto P_3 questo punto, scriviamo le sue coordinate sotto la forma

$$x_3 = \overline{x} - M X_1 - N X_2 - H X_3 ; \tag{37}$$

si dovrà avere

$$\left.\begin{aligned}
&M^2 + N^2 + H^2 - 2M(\lambda_1 + \lambda_2) - 2N(\mu_1 + \mu_2) - 2H(w_1 + w_2) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\overline{\psi}_1 + 2\overline{\psi}_2 = 0, \\
&M^2 + N^2 + H^2 - 2N \frac{\overline{\psi}_1 w_2 - \overline{\psi}_2 w_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1} + 2H \frac{\overline{\psi}_1 \mu_2 - \overline{\psi}_2 \mu_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1} = 0, \\
&M(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) + N(w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) + H(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

donde seguono facilmente le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda_1 + \lambda_2 - M) M + (\mu_1 + \mu_2 - N)\left(N - \frac{\overline{\psi}_1 w_2 - \overline{\psi}_2 w_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}\right) + \\
&\qquad + (w_1 + w_2 - H)\left(H + \frac{\overline{\psi}_1 \mu_2 - \overline{\psi}_2 \mu_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}\right) = 0, \\
&(\lambda_1 + \lambda_2 - M)\,(\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1) + (\mu_1 + \mu_2 - N)(w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1) + \\
&\qquad + (w_1 + w_2 - H)(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

La loro interpretazione è facile; esse esprimono che il circolo $\overline{P}\,\overline{P}_1\,\overline{P}_2$ taglia ortogonalmente la sfera nel punto P_3; dunque:

Per ogni sistema K di circoli esiste una trasformazione di COMBESCURE *tale che i circoli del sistema trasformato sono tutti ortogonali ad una sfera fissa.*

§ 2. — I SISTEMI K SINGOLARI.

6. Ora vogliamo esaminare il caso finora escluso in cui si annulla l'espressione $\varphi_1 \Omega_2 - \varphi_2 \Omega_1$, per decidere anzitutto tra i risultati precedenti quali continuano a sussistere, e per rilevare inoltre le proprietà speciali a cui la nuova ipotesi dà luogo.

Avendosi in generale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & X \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & Z \end{vmatrix} = m\, n\, (\varphi_1\, \Omega_2 - \varphi_2\, \Omega_1)\; (\mu_1\, w_2 - \mu_2\, w_1)\; (w_1\, \lambda_2 - w_2\, \lambda_1)$$

nell'ipotesi attuale il determinante è nullo, e quindi l'immagine sferica della congruenza non dà luogo a due sistemi distinti di linee u, v.

In tali condizioni il sistema K si dirà *singolare*.

Occorre anzitutto dimostrare l'esistenza di sistemi K singolari. A tale scopo supponiamo di partire da una soluzione

$$\lambda_1, \quad \mu_1, \quad w_1, \quad \psi_1, \quad \sigma_1, \quad \varphi_1, \quad \Omega_1$$

del sistema fondamentale; indi poniamo

$$\varphi_2 = \rho\, \varphi_1, \quad \Omega_2 = \rho\, \Omega_1 .$$

Si determina ρ dalle condizioni

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \Omega_2, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \varphi_2,$$

e si trova $\rho = \text{cost}$; sicchè avendo messo in vista nel sistema differenziale fondamentale una costante arbitraria n, possiamo ritenere

$$\varphi_2 = \varphi_1, \quad \Omega_2 = \Omega_1 . \tag{40}$$

Posto allora nel sistema differenziale per le incognite

$$\lambda_2, \quad \mu_2, \quad w_2, \quad \psi_2, \quad \sigma_2, \quad \varphi_2, \quad \Omega_2$$

al posto di φ_2 ed Ω_2 rispettivamente φ_1 ed Ω_1, rimane un sistema nelle sole incognite

$$\lambda_2, \quad \mu_2, \quad w_2, \quad \psi_2, \quad \sigma_2$$

che è *illimitatamente integrabile;* basta allora assumere i valori iniziali in guisa che (per assegnati valori delle variabili) le differenze

$$\mu_1\, w_2 - \mu_2\, w_1, \quad w_1\, \lambda_2 - w_2\, \lambda_1, \quad \psi_1\, w_2 - \psi_2\, w_1, \tag{41}$$

siano diverse da zero.

Abbiamo visto che per un sistema K singolare l'immagine sferica della congruenza degli assi non dà luogo a sistemi distinti di linee; ma sussistono integralmente le formole generali del n. 2, e permane la proprietà che i circoli $P P_1 P_2$ si possono portare per trasformazione di COMBESCURE ad essere ortogonali ad una sfera fissa.

7. Ma qui ha luogo una circostanza particolare; invero se a, b, c, h sono costanti arbitrarie possiamo ritenere

$$\begin{aligned} n\lambda_1 - m\lambda_2 &= a X_1 + b Y_1 + c Z_1, \\ n\mu_1 - m\mu_2 &= a X_2 + b Y_2 + c Z_2, \\ n w_1 - m w_2 &= a X_3 + b Y_3 + c Z_3, \\ n\psi_1 - m\psi_2 &= a x + b y + c z + h, \end{aligned}$$

e si deduce

$$\begin{aligned} a &= (n\lambda_1 - m\lambda_2) X_1 + (n\mu_1 - m\mu_2) X_2 + (n w_1 - m w_2) X_3, \\ b &= (n\lambda_1 - m\lambda_2) Y_1 + (n\mu_1 - m\mu_2) Y_2 + (n w_1 - m w_2) Y_3, \\ c &= (n\lambda_1 - m\lambda_2) Z_1 + (n\mu_1 - m\mu_2) Z_2 + (n w_1 - m w_2) Z_3 \cdot \end{aligned}$$

Ed allora se teniamo presenti le (12) e (14) troviamo le relazioni

$$\begin{aligned} a\xi' + b\eta' + c\zeta' + h &= 0, \\ a X + b Y + c Z &= 0, \end{aligned}$$

le quali esprimono che l'asse del circolo si muove nel piano fisso

$$a x + b y + c z + h = 0;$$

dunque: *i circoli di un sistema K singolare sono tutti ortogonali ad un piano fisso.*

§ 3. — IL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ.

Le formole precedenti permettono di dimostrare speditamente un teorema molto importante del BIANCHI, *il teorema generale di permutabilità*, che si enuncia nel modo seguente:

Se ad una superficie S sono contigue, per trasformazioni di RIBAUCOUR, *due altre superficie S_1 ed S_2, esistono ∞^1 superficie S' (deducibili per qua-*

drature) tali che ogni superficie S' è contigua, per trasformazioni di Ribaucour, *alle medesime superficie S_1 ed S_2.*

La dimostrazione che noi qui riportiamo è sulla traccia di quella data dall'autore medesimo.

Manteniamo tutte le notazioni dei precedenti paragrafi relativi al passaggio dalla superficie S alle superficie S_1 ed S_2, e cominciamo con dimostrare che si possono determinare con quadrature infinite superficie S', derivate per trasformazione di Ribaucour da S_1 con funzioni trasformatrici della forma

$$\left.\begin{aligned} -\varepsilon' \lambda'_1 &= \frac{A}{\psi_1 \sigma_1} \lambda_1 + (n-m) \lambda_2, \\ -\varepsilon'' \mu'_1 &= \frac{A}{\psi_1 \sigma_1} \mu_1 + (n-m) \mu_2, \\ -\varepsilon' \varepsilon'' w'_1 &= \frac{A}{\psi_1 \sigma_1} w_1 + (n-m) w_2, \\ \psi'_1 &= \frac{A}{\psi_1 \sigma_1} \psi_1 + (n-m) \psi_2. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Esprimendo che sono soddisfatte le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda'_1}{\partial v} &= \varepsilon' \varepsilon'' \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\Omega_1 \lambda_1}{\psi_1 \sigma_1} \right) \mu'_1, \\ \frac{\partial \mu'_1}{\partial u} &= \varepsilon' \varepsilon'' \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\varphi_1 \mu_1}{\psi_1 \sigma_1} \right) \lambda'_1, \\ \frac{\partial w'_1}{\partial u} &= -\varepsilon'' \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\varphi_1 w_1}{\psi_1 \sigma_1} \right) \lambda'_1, \\ \frac{\partial w'_1}{\partial v} &= -\varepsilon' \left(\frac{D''}{\sqrt{G}} + \frac{\Omega_1 w_1}{\psi_1 \sigma_1} \right) \mu'_1, \\ \frac{\partial \psi'_1}{\partial u} &= \varepsilon' \left(\frac{\varphi_1}{\sigma_1} - \sqrt{E} \right) \lambda'_1, \\ \frac{\partial \psi'_1}{\partial v} &= \varepsilon'' \left(\frac{\Omega_1}{\sigma_1} - \sqrt{G} \right) \mu'_1, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

si ottengono per la funzione incognita A le sole equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u} &= -(n-m)\lambda_2\varphi_1, \\ \frac{\partial A}{\partial v} &= -(n-m)\mu_2\Omega_1, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

nelle quali le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte.

Si deduce per quadrature una funzione A, e poichè le (43) sono sufficienti possiamo affermare che le formole

$$x' = x_1 - \frac{2\psi'_1}{\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1}(\lambda'_1 X^{(1)}_1 + \mu'_1 X^{(1)}_2 + w'_1 X^{(1)}_3), \tag{45}$$

danno una superficie S', derivata da S_1 per trasformazione di Ribaucour.

Similmente ponendo

$$\left.\begin{aligned} -\varepsilon'_1\lambda'_2 &= \frac{B}{\psi_2\sigma_2}\lambda_2 + (m-n)\lambda_1, \\ -\varepsilon''\mu'_2 &= \frac{B}{\psi_2\sigma_2}\mu_2 + (m-n)\mu_1, \\ -\varepsilon'\varepsilon'' w'_2 &= \frac{B}{\psi_2\sigma_2}w_2 + (m-n)w_1, \\ \psi'_2 &= \frac{B}{\psi_2\sigma_2}\psi_2 + (m-n)\psi_1, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

in cui la funzione B è dedotta dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial u} &= -(m-n)\lambda_1\varphi_2 \\ \frac{\partial B}{\partial v} &= -(m-n)\mu_1\Omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

si deduce una trasformata di Ribaucour della superficie S_2 mediante le formole

$$x'' = x_2 - \frac{2\psi'_2}{\lambda'^2_2 + \mu'^2_2 + w'^2_2}(\lambda'_2 X^{(2)}_1 + \mu'_2 X^{(2)}_2 + w'^{(2)}_3). \tag{48}$$

Il tutto si riduce a dimostrare che per una conveniente scelta della costante d'integrazione nelle (47) le due superficie (45) e (48) coincidono.

Per la dimostrazione osserviamo anzitutto che l'espressione

$$m A - n B - (m - n)(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2)$$

ha nulle le derivate rispetto ad u e v; essa è perciò una costante, e si può disporre nelle (47) della costante d'integrazione in guisa da aversi

$$m A - n B = (m - n)(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2). \tag{49}$$

Ciò premesso trasformiamo le (45) sostituendo per x_1, $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$ le loro espressioni (3) e (4); si ottengono equazioni della forma

$$x' = x - M X_1 - N X_2 - H X_3, \tag{50}$$

ove si è posto:

$$\left.\begin{aligned}
M &= \frac{\lambda_1}{m \sigma_1} + \frac{2 \psi'_1}{\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1}\left[\left(\frac{\lambda_1^2}{m \psi_1 \sigma_1} - 1\right)\varepsilon' \lambda'_1 + \right.\\
&\qquad\left. + \frac{\lambda_1 \mu_1}{m \psi_1 \sigma_1}\varepsilon'' \mu'_1 + \frac{\lambda_1 w_1}{m \psi_1 \sigma_1}\varepsilon' \varepsilon'' w'_1\right],\\
N &= \frac{\mu_1}{m \sigma_1} + \frac{2 \psi'_1}{\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1}\left[\frac{\lambda_1 \mu_1}{m \psi_1 \sigma_1}\varepsilon' \lambda'_1 + \right.\\
&\qquad\left. + \left(\frac{\mu_1^2}{m \psi_1 \sigma_1} - 1\right)\varepsilon'' \mu'_1 + \frac{\mu_1 w_1}{m \psi_1 \sigma_1}\varepsilon' \varepsilon'' w'_1\right],\\
H &= \frac{w_1}{m \sigma_1} + \frac{2 \psi'_1}{\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1}\left[\frac{\lambda_1 w_1}{m \psi_1 \sigma_1}\varepsilon' \lambda'_1 + \right.\\
&\qquad\left. + \frac{\mu_1 w_1}{m \psi_1 \sigma_1}\varepsilon'' \mu'_1 + \left(\frac{w_1^2}{m \psi_1 \sigma_1} - 1\right)\varepsilon' \varepsilon'' w'_1\right];
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

inoltre se sostituiamo in queste per λ'_1, μ'_1, w'_1, ψ'_1 i valori dati dalle (42), ed osserviamo le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1^2 + \mu_1^2 + w_1^2 &= 2 m \psi_1 \sigma_1,\\
\lambda_2^2 + \mu_2^2 + w_2^2 &= 2 n \psi_2 \sigma_2,
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

insieme alla (49) ed all'altra che se ne deduce

$$\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1 = \frac{2 n A B}{\psi_1 \sigma_1} + 2 n (n - m)^2 \psi_2 \sigma_2, \tag{53}$$

otteniamo infine per M, N, H le espressioni seguenti

$$\left.\begin{aligned}
M &= \frac{n-m}{m\,n}\cdot\frac{m\,\lambda_2\,\psi_1\,[A+(n-m)\,\psi_2\,\sigma_1]-n\,\lambda_1\,\psi_2\,[B-(n-m)\,\psi_1\,\sigma_2]}{A\,B+(n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}\\
N &= \frac{n-m}{m\,n}\cdot\frac{m\,\mu_2\,\psi_1\,[A+(n-m)\,\psi_2\,\sigma_1]-n\,\mu_1\,\psi_2\,[B-(n-m)\,\psi_1\,\sigma_2]}{A\,B+(n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}\\
H &= \frac{n-m}{m\,n}\cdot\frac{m\,w_2\,\psi_1\,[A+(n-m)\,\psi_2\,\sigma_1]-n\,w_1\,\psi_2\,[B-(n-m)\,\psi_1\,\sigma_2]}{A\,B+(n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Se ora si opera in modo analogo sulle (48), si perviene a relazioni della forma

$$x'' = x - M\,X_1 - N\,X_2 - H\,X_3$$

in cui M, N, H hanno i medesimi valori (54), il che per altro è evidente a priori essendo le (54) simmetriche nei due sistemi di quantità

$$(\lambda_1,\ \mu_1,\ w_1,\ \psi_1,\ \sigma_1,\ m),\quad (\lambda_2,\ \mu_2,\ w_2,\ \psi_2,\ \sigma_2,\ n),$$

onde risulta che le superficie (45) e (48) coincidono.

Dall'analisi precedente si vede dunque che esistono infinite superficie S' date dalle (50), dipendenti da una costante arbitraria [la costante d'integrazione delle (44)], tali che le due superficie S_1 ed S_2 sono deducibili da una qualunque di esse con trasformazioni di Ribaucour. È così dimostrato il teorema.

9. Prima di procedere ad altre ricerche vogliamo formare gli elementi relativi alla superficie S'.

A tale scopo conviene completare il sistema (42) delle funzioni trasformatrici.

Esprimendo che sono soddisfatte le relazioni

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial u} = -\varepsilon'\varepsilon''\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{\varphi_1\,\mu_1}{\psi_1\,\sigma_1}\right)\mu'_1+\varepsilon''\left(\frac{D}{\sqrt{E}}+\frac{\varphi_1\,w_1}{\psi_1\,\sigma_1}\right)w'_1+n\,\varphi'_1,$$

$$\frac{\partial\mu'}{\partial v} = -\varepsilon'\varepsilon''\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\Omega_1\,\lambda_1}{\psi_1\,\sigma_1}\right)\lambda'_1+\varepsilon'\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}+\frac{\Omega_1\,w_1}{\psi_1\,\sigma_1}\right)w'_1+n\,\Omega'_1,$$

si ottengono per φ'_1 e Ω'_1 le espressioni

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon'\,\varphi'_1 &= \frac{B}{\psi_1\,\sigma_1}\,\varphi_1-(n-m)\,\varphi_2,\\
\varepsilon''\,\Omega'_1 &= \frac{B}{\psi_1\,\sigma_1}\,\Omega_1-(n-m)\,\Omega_2;
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

ed infine dalla relazione

$$\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + w'^2_1 = 2\, n\, \psi'_1 \;'_1 ,$$

si ottiene

$$\sigma'_1 = \frac{\dfrac{A\,B}{\psi_1\,\sigma_1} + (n-m)^2\,\psi_2\,\sigma_2}{\dfrac{A}{\psi_1\,\sigma_1}\,\psi_1 + (n-m)\,\psi_2} . \tag{56}$$

Ciò premesso sappiamo dalle formole generali delle trasformazioni di RIBAUCOUR che i coefficienti E', G' dell'elemento lineare della superficie trasformata S' si esprimono mediante quelli della superficie primitiva S_1 colle formole

$$\eta' \sqrt{E'} = \varepsilon' \frac{\varphi'_1}{\sigma'_1} - \varepsilon' \sqrt{E_1} ; \quad \eta'' \sqrt{G'} = \varepsilon'' \frac{\Omega'_1}{\sigma'_1} - \varepsilon'' \sqrt{G_1} ;$$

ove al solito η' ed η'' rappresentano l'unità positiva o negativa; sostituendo in queste per φ'_1, Ω'_1, σ'_1 i valori dati dalle precedenti e per $\sqrt{E_1}$ e $\sqrt{G_1}$ i valori dati dalle (5), otteniamo

$$\left.\begin{aligned} &\eta' \sqrt{E'} = \sqrt{E} + \\ &+ (n-m) \cdot \frac{-\varphi_2 \psi_1 [A + (n-m) \psi_2 \sigma_1] + \varphi_1 \psi_2 [B - (n-m) \psi_1 \sigma_2]}{A\,B + (n-m)^2\, \psi_1\, \sigma_1\, \psi_2\, \sigma_2} , \\ &\eta'' \sqrt{G'} = \sqrt{G} + \\ &+ (n-m) \cdot \frac{-\Omega_2 \psi_1 [A + (n-m) \psi_2 \sigma_1] + \Omega_1 \psi_2 [B - (n-m) \psi_1 \sigma_2]}{A\,B + (n-m)^2\, \psi_1\, \sigma_1\, \psi_2\, \sigma_2} . \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Similmente pei coefficienti della seconda forma di S', si ha:

$$\eta'' \frac{\Delta}{\sqrt{E}} = \varepsilon'' \frac{D_1}{\sqrt{E_1}} + \varepsilon' \frac{\varphi'_1}{\sigma'_1} \varepsilon' \varepsilon'' \frac{w'_1}{\psi'_1} ,$$

$$\eta' \frac{\Delta'}{\sqrt{G'}} = \varepsilon' \frac{D''_1}{\sqrt{G_1}} + \varepsilon'' \frac{\Omega'_1}{\sigma'_1} \varepsilon' \varepsilon'' \frac{w'_1}{\psi'_1} ,$$

e per conseguenza

$$\left.\begin{aligned}
&\eta'\frac{\Delta}{\sqrt{E'}}=\frac{D}{\sqrt{E}}+\\
&+(n-m)\cdot\frac{\varphi_2[Aw_1+(n-m)w_2\psi_1\sigma_1]-\varphi_1[Bw_2-(n-m)w_1\psi_2\sigma_2]}{AB+(n-m)^2\psi_1\sigma_1\psi_2\sigma_2},\\
&\eta''\frac{\Delta''}{\sqrt{G'}}=\frac{D''}{\sqrt{G}}+\\
&+(n-m)\cdot\frac{\Omega_2[Aw_1+(n-m)w_2\psi_1\sigma_1]-\Omega_1[Bw_2-(n-m)w_1\psi_2\sigma_2]}{AB+(n-m)^2\psi_1\sigma_1\psi_2\sigma_2}.
\end{aligned}\right\}\quad(58)$$

Possiamo anche ottenere i coseni direttori del triedro principale di S' nel seguente modo.

Sappiamo che i coseni del triedro principale di S' si deducono da quelli del triedro principale di S_1 mediante le formole

$$\left.\begin{aligned}
X'_1&=\frac{\varepsilon'}{\eta'}\left[\left(\frac{\lambda'^2_1}{n\psi'_1\sigma'_1}-1\right)X_1^{(1)}+\frac{\lambda'_1\mu'_1}{n\psi'_1\sigma'_1}X_2^{(1)}+\frac{\lambda'_1 w'_1}{n\psi'_1\sigma'_1}X_3^{(1)}\right],\\
X'_2&=\frac{\varepsilon''}{\eta''}\left[\left(\frac{\lambda'_1\mu'_1}{n\psi'_1\sigma'_1}X_1^{(1)}+\left(\frac{\mu'^2_1}{n\psi'_1\sigma'_1}-1\right)X_2^{(1)}+\frac{\mu'_1 w'_1}{n\psi'_1\sigma'_1}X_3^{(1)}\right],\\
X'_3&=\frac{\varepsilon'\varepsilon''}{\eta'\eta''}\left[\frac{\lambda_1 w'_1}{n\psi'_1\sigma'_1}X_1^{(1)}+\left(\frac{\mu'_1 w'_1}{n\psi'_1\sigma'_1}X_2^{(1)}+\left(\frac{w'^2_1}{n\psi'_1\sigma'_1}-1\right)X_3^{(1)}\right],
\end{aligned}\right\}\quad(59)$$

e sostituendo in queste per $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$ le loro espressioni mediante X_1, X_2, X_3 ed osservando le (42) si ottengono relazioni del tipo

$$\left.\begin{aligned}
\eta' X'_1&=a_1X_1+b_1X_2+c_1X_3,\\
\eta'' X'_2&=a_2X_1+b_2X_2+c_2X_3,\\
\eta'\eta'' X'_3&=a_3X_1+b_3X_2+c_3X_3,
\end{aligned}\right\}\quad(60)$$

in cui

$$\left.\begin{aligned}
&a_1=1+\\
&+\frac{n-m}{mn}\cdot\frac{-m\lambda_2[A\lambda_1+(n-m)\lambda_2\psi_1\sigma_1]+n\lambda_1[B\lambda_2-(n-m)\lambda_1\psi_2\sigma_2]}{AB+(n-m)^2\psi_1\sigma_1\psi_2\sigma_2},\\
&b_1=\\
&=\frac{n-m}{mn}\cdot\frac{-m\mu_2[A\lambda_1+(n-m)\lambda_2\psi_1\sigma_1]+n\mu_1[B\lambda_2-(n-m)\lambda_1\psi_2\sigma_2]}{AB+(n-m)^2\psi_1\sigma_1\psi_2\sigma_2},
\end{aligned}\right\}\quad(61)$$

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= \\
&= \frac{n-m}{m\,n} \cdot \frac{-m\,w_2\,[A\,\lambda_1 + (n-m)\,\lambda_2\,\psi_1\,\sigma_1] + n\,w_1\,[B\,\lambda_2 - (n-m)\,\lambda_1\,\psi_2\,\sigma_2]}{A\,B + (n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2},
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_2 &= \\
&= \frac{n-m}{m\,n} \cdot \frac{-m\,\lambda_2\,[A\,\mu_1 + (n-m)\,\mu_2\,\psi_1\,\sigma_1] + n\,\lambda_1\,[B\,\mu_2 - (n-m)\,\mu_1\,\psi_2\,\sigma_2}{A\,B + (n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}, \\
b_2 &= 1 + \\
&+ \frac{n-m}{m\,n} \cdot \frac{-m\,\mu_2\,[A\,\mu_1 + (n-m)\,\mu_2\,\psi_1\,\sigma_1] + n\,\mu_1\,[B\,\mu_2 - (n-m)\,\mu_1\,\psi_2\,\sigma_2]}{A\,B + (n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}, \\
c_2 &= \\
&= \frac{n-m}{m\,n} \cdot \frac{-m\,w_2\,[A\,\mu_1 + (n-m)\,\mu_2\,\psi_1\,\sigma_1] + n\,w_1\,[B\,\mu_2 - (n-m)\,\mu_1\,\psi_2\,\sigma_2}{A\,B + (n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2},
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_3 &= \\
&= \frac{n-m}{m\,n} \cdot \frac{-m\,\lambda_2\,[A\,w_1 + (n-m)\,w_2\,\psi_1\,\sigma_1] + n\,\lambda_1\,[B\,w_2 - (n-m)\,w_1\,\psi_2\,\sigma_2]}{A\,B + (n-m)^2\,\psi_2\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}, \\
b_3 &= \\
&= \frac{n-m}{m\,n} \cdot \frac{-m\,\mu_2\,[A\,w_1 + (n-m)\,w_2\,\psi_1\,\sigma_1] + n\,\mu_1\,[B\,w_2 - (n-m)\,w_1\,\psi_2\,\sigma_2]}{A\,B + (n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}, \\
c_3 &= 1 + \\
&+ \frac{n-m}{m\,n} \cdot \frac{-m\,w_2\,[A\,w_1 + (n-m)\,w_2\,\psi_1\,\sigma_1] + n\,w_1\,[B\,w_2 - (n-m)\,w_1\,\psi_2\,\sigma_2}{A\,B + (n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Osserviamo infine le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\eta'\,\eta''\,\frac{1}{\sqrt{G'}}\,\frac{\partial\sqrt{E'}}{d\,v} = \frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\,v} + \\
&+ (n-m)\,\frac{-\varphi_2\,[A\,\mu_1 + (n-m)\,\mu_2\,\psi_1\,\sigma_1] + \varphi_1\,[B\,\mu_2 - (n-m)\,\mu_1\,\psi_2\,\sigma_2]}{A\,B\,(n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2},
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta'\eta''\frac{1}{\sqrt{E'}}\,\frac{\partial\sqrt{G'}}{\partial u} &= \frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \\ +(n-m)\,&\frac{-\Omega_2\,[A\,\lambda_1+(n-m)\,\lambda_2\,\psi_1\,\sigma_1]+\Omega_1\,[B\,\lambda_2-(n-m)\,\lambda_1\,\psi_2\,\sigma_2]}{A\,B+(n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

§ 4. — Ulteriori ricerche sul teorema di permutabilità.

10. In questo nuovo paragrafo, seguendo le ricerche del Bianchi nella nota citata, dimostreremo alcune proprietà complementari sul teorema di permutabilità che presentano molto interesse.

La prima circostanza che vogliamo osservare è la seguente:

Considerando la superficie S e le due superficie S_1 ed S_2 contigue ad S per trasformazione di Ribaucour, osserviamo che il sistema

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,\mu, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,\lambda,$$

$$\frac{\partial w}{\partial u}=-\frac{D}{\sqrt{E}}\,\lambda, \qquad \frac{\partial w}{\partial v}=-\frac{D''}{\sqrt{G}}\,\mu,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\sqrt{E}\,\lambda, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v}=\sqrt{G}\,\mu,$$

è soddisfatto dalle funzioni

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= K_1\,\lambda_2+K_2\,\lambda_1\,, & \mu &= K_1\,\mu_2+K_2\,\mu_1\,, \\ w &= K_1\,w_2+K_2\,w_1\,, & \psi &= K_1\,\psi_2+K_2\,\psi_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

essendo K_1 e K_2 costanti arbitrarie. Ponendo

$$\xi_1 = x-\frac{2\,\psi}{\lambda^2+\mu^2+w^2}\,(\lambda\,X_1+\quad X_2+w\,X_3) \tag{66}$$

al variare del rapporto $\dfrac{K_1}{K_2}$ otteniamo infinite superficie Σ, ciascuna delle quali è una trasformata di Ribaucour di S. Per la forma lineare con cui i parametri K_1 e K_2 entrano nelle (65) diremo con Bianchi che le superficie Σ formano un fascio.

Dimostriamo che la superficie Σ e la S' sono legate da una trasformazione di Ribaucour.

Infatti troviamo la quarta superficie del teorema di permutabilità, relativa alle tre superficie S, S_1, Σ; bisogna integrare il sistema

$$\frac{\partial A'}{\partial u} = -(n-m)(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1)\varphi_1,$$

$$\frac{\partial A'}{\partial v} = -(n-m)(K_1 \mu_2 + K_2 \mu_1)\Omega_1;$$

e possiamo porre

$$A' = K_1 A - (n-m) K_2 \psi_1 \sigma_1.$$

Calcolando ora le funzioni trasformatrici che portano da S_1 alla quarta superficie del teorema di permutabilità, troviamo

$$\frac{A'}{\psi_1 \sigma_1}\lambda_1 + (n-m)\lambda = K_1\left[\frac{A}{\psi_1 \sigma_1}\lambda_1 + (n-m)\lambda_2\right],$$

$$\frac{A'}{\psi_1 \sigma_1}\mu_1 + (n-m)\mu = K_1\left[\frac{A}{\psi_1 \sigma_1}\mu_1 + (n-m)\lambda_2\right],$$

$$\frac{A'}{\psi_1 \sigma_1}w_1 + (n-m)w = K_1\left[\frac{A}{\psi_1 \sigma_1}w_1 + (n-m)w_2\right],$$

$$\frac{A'}{\psi_1 \sigma_1}\psi_1 + (n-m)\psi = K_1\left[\frac{A}{\psi_1 \sigma_1}\psi_1 + (n-m)\psi_2\right],$$

e si ritrovano a meno di un fattore costante le stesse λ'_1, μ'_1, w'_1, ψ'_1.

Si conclude che la quarta superficie del teorema di permutabilità coincide con S', e quindi si passa da Σ ad S' con una trasformazione di RIBAUCOUR.

Un'altra osservazione da fare è la seguente. Fissiamo dalle (44) una funzione A e quindi una determinata superficie S'; indi partendo dalla superficie S_1 si considerino le funzioni trasformatrici (42) mediante le quali dalla superficie S_1 si deduce la S' sopra determinata.

Se si vuole dedurre da S_1 un'altra S' si dovrà porre

$$-\varepsilon' \lambda_1'' = \frac{A+K}{\psi_1 \sigma_1}\lambda_1 + (n-m)\lambda_2,$$

$$-\varepsilon'' \mu_1'' = \frac{A+K}{\psi_1 \sigma_1}\mu_1 + (n-m)\mu_2,$$

$$-\varepsilon' \varepsilon'' w_1'' = \frac{A+K}{\psi_1 \sigma_1}w_1 + (n-m)w_2,$$

$$\psi_1'' = \frac{A+K}{\psi_1 \sigma_1}\psi_1 + (n-m)\psi_2,$$

con K costante arbitraria; e tenendo conto delle (42) si ottiene

$$\lambda''_1 = \lambda'_1 - \varepsilon' K \frac{\lambda_1}{\psi_1 \sigma_1},$$

$$\mu''_1 = \mu'_1 - \varepsilon'' K \frac{\mu_1}{\psi_1 \sigma_1},$$

$$w''_1 = w'_1 - \varepsilon' \varepsilon'' K \frac{w_1}{\psi_1 \sigma_1},$$

$$\psi''_1 = \psi'_1 + K \frac{\psi_1}{\psi_1 \sigma_1};$$

ed osservando che

$$-\varepsilon' \frac{\lambda_1}{\psi_1 \sigma_1}, \quad -\varepsilon'' \frac{\mu_1}{\psi_1 \sigma_1}, \quad -\varepsilon' \varepsilon'' \frac{w_1}{\psi_1 \sigma_1}, \quad \frac{\psi_1}{\psi_1 \sigma_1}$$

sono le funzioni trasformatrici per il passaggio da S_1 ad S si vede che le superficie S' sono rispetto ad S_1 come le superficie Σ rispetto alla S, e conservando la superiore denominazione costituiscono un secondo fascio.

Abbiamo così il teorema di Bianchi: *Si hanno due fasci di superficie tali che due superficie prese ad arbitrio l'una nel primo fascio l'altra nel secondo fascio sono fra loro legate da una trasformazione di* Ribaucour.

11. Ora vogliamo ricercare il modo di comportarsi delle superficie Σ ed S' rispetto al circolo $P P_1 P_2$ introdotto nel primo paragrafo.

Indichiamo con P' il punto della superficie S' corrispondente di P. Dalle (12) e dalle 50 si ha:

$$\xi' - x' = M X_1 + \left(N - \frac{\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}\right) X_2 + \left(H + \frac{\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}\right) X_3;$$

inoltre dalle espressioni (54) di M, N, H si ricava facilmente

$$M^2 + N^2 + H^2 =$$

$$= \frac{n - m}{m n} \cdot \frac{2 m (n - m) \psi_2^2 \psi_1 \sigma_1 + 2 n (n - m) \psi_1^2 \psi_2 \sigma_2 + 2 \psi_1 \psi_2 (m A - n B)}{A B + (n - m)^2 \psi_1 \sigma_1 \psi_2 \sigma_2},$$

$$\frac{H (\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1)}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1} - \frac{N (\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1)}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1} =$$

$$= -\frac{n - m}{m n} \frac{m (n - m) \psi_2^2 \psi_1 \sigma_1 + n (n - m) \psi_1^2 \psi_2 \sigma_2 + \psi_1 \psi_2 (m A - n B)}{A B + (n - m)^2 \psi_1 \sigma_1 \psi_2 \sigma_2},$$

donde risulta la relazione

$$(\xi' - x')^2 + (\eta' - y')^2 + (\zeta' - z')^2 = \left(\frac{\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}\right)^2 + \left(\frac{\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}\right)^2;$$

inoltre vediamo subito che il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & w_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & w_2 \\ M & N & H \end{vmatrix}$$

è nullo; quindi *il punto P' appartiene al circolo $P P_1 P_2$.*

Con facili considerazioni si trova per il rapporto anarmonico dei quattro punti del cerchio l'espressione

$$(P_1 P_2 P P') = \frac{n}{m} \frac{B - (n - m) \psi_1 \sigma_2}{A + (m - n) \psi_2 \sigma_1}, \tag{67}$$

donde osservando che le (44) danno la funzione A, a meno di una costante additiva, ed osservando la (49) si deduce il teorema:

Quattro superficie S' tagliano il cerchio $P P_1 P_2$ in quattro punti, il cui rapporto anarmonico è costante.

12. Calcoliamo l'angolo d'inclinazione della normale alla superficie S', nel punto P', sull'asse del circolo; ponendo

$$\rho^2 = (\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1)^2 + (w_1 \lambda_2 - w_2 \lambda_1)^2 + (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^2,$$

e tenendo presenti le espressioni (60) dei coseni direttori della normale alla superficie S', si ha:

$$\rho \cos \Theta = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1.$$

Similmente ponendo

$$\rho'^2 = \left(\frac{\psi_1 w_2 - \psi_2 w_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}\right)^2 + \left(\frac{\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1}{\mu_1 \mu_2 - \mu_2 w_1}\right)^2$$

si calcola l'angolo della normale ad S' con la congiungente $P' Q'$ mediante la formola

$$\rho' \cos \Theta' = \frac{\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1}{\mu_1 w_2 - \mu_2 w_1}.$$

Noi distingueremo due casi secondo che la quantità $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ è nulla o diversa da zero; se è nulla tutte le normali alla superficie S' sono situate nel piano del cerchio $P P_1 P_2$ ed il sistema K dicesi *di prima specie;* se invece la quantità $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ è diversa da zero il sistema K dicesi *di seconda specie.*

Dalle relazioni precedenti risulta pertanto che *in un sistema K di seconda specie le normali alle varie superficie S' nei punti P' ove incontrano uno stesso circolo $P P_1 P_2$ formano angolo costante coll'asse del circolo e con la congiungente P' Q', e si distribuiscono perciò sulle generatrici di un iperboloide rotondo.*

Gli angoli Θ e Θ' sono rispettivamente uguali a quelli che la normale alla superficie S nel punto P fa con l'asse del circolo e con la congiungente $P Q'$; ed essendo il determinante

$$\begin{vmatrix} M & N \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{(n-m)^2}{m n} \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{A B + (n-m)^2 \psi_1 \sigma_1 \psi_2 \sigma_2}$$

diverso da zero, le normali alle superficie S' non incontrano la normale ad S ed appartengono perciò ad uno stesso sistema di generatrici.

Veniamo ora alla superficie Σ e indichiamo con P'' il punto di Σ che corrisponde al punto P di S; si vede al solito modo che il punto P'' appartiene al circolo $P P_1 P_2$ ed inoltre

$$(P_1 P_2 P P'') = -\frac{K_2 \psi_1}{K_1 \psi_2},$$

donde si deduce come prima che *quattro superficie Σ tagliano il cerchio $P P_1 P_2$ in quattro punti, il cui rapporto anarmonico è costante.*

Pei coseni direttori della normale alla superficie Σ si hanno le formole

$$\frac{2 \lambda w}{\lambda^2 + \mu^2 + w^2} X_1 + \frac{2 \mu w}{\lambda^2 + \mu^2 + w^2} X_2 + \left(\frac{2 w^2}{\lambda^2 + \mu^2 + w^2} - 1\right) X_3$$

ed analoghe in Y e Z; se ne deduce che essa è inclinata dello stesso angolo θ sull'asse del circolo, e dell'angolo θ' sulla retta P'' Q'.

Quindi considerando al solito tutte le superficie Σ che si ottengono facendo variare il rapporto $\frac{K_1}{K_2}$, le loro normali nei punti ove incontrano uno stesso circolo $P P_1 P_2$ descrivono lo stesso iperboloide rotondo precedentemente considerato.

Se non che le normali alle superficie Σ incontrano le normali ad S (nel centro della sfera che descrive l'inviluppo $[S, \Sigma]$) e quindi appartengono all'altro sistema di generatrici.

Riassumendo, *le normali alle superficie S' e Σ nei punti ove incontrano uno stesso circolo $P P_1 P_2$ si distribuiscono sulle generatrici di uno stesso iperboloide rotondo; le normali alle superficie S' appartengono ad uno stesso sistema di generatrici, le normali alle superficie Σ appartengono all'altro sistema di generatrici.*

13. Terminiamo questo paragrafo osservando le proprietà particolari dei sistemi K di prima specie. Per un tale sistema possiamo ritenere

$$\lambda_2 = \lambda_1, \quad \mu_2 = \mu_1, \quad w_2 = w_1 + 1, \quad \psi_2 = \psi_1 + c,$$

essendo c una costante arbitraria.

Dall'equazione di LAPLACE (24) a cui soddisfano X, Y, Z e dalle espressioni (14) delle medesime vediamo subito che, annullandosi la quantità

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1,$$

la congruenza K è ciclica.

Consideriamo sulla normale alla superficie S il punto M avente le coordinate

$$\xi_2 = x - c X_3, \quad \eta_2 = y - c Y_3, \quad \zeta_2 = z - c Z_3;$$

si ha:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial u} = \left(\sqrt{E} + c \frac{D}{\sqrt{E}}\right) X_1, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial v} = \left(\sqrt{G} + c \frac{D''}{\sqrt{G}}\right) X_2$$

e quindi il punto M descrive un sistema di linee di curvatura. Inoltre si vede facilmente che le tangenti alle linee di curvatura uscenti da M tagliano il raggio della congruenza rispettivamente nei fuochi Q' e Q''; dunque *il punto M descrive un sistema di linee di curvatura armonico alla congruenza K.*

Poichè la congruenza K si può generare partendo da una qualunque superficie S' e dalle sue trasformate di RIBAUCOUR S_1 ed S_2 possiamo enunciare il risultato seguente:

Per un sistema K di prima specie, la congruenza K formata dagli assi dei circoli è ciclica; la normale ad una qualunque superficie S' giace nel piano del circolo, ed il punto medio M della corda che il circolo determina sulla detta normale descrive un sistema di linee di curvatura armonico alla congruenza.

La superficie descritta dal punto M taglia ortogonalmente i circoli del sistema normale associato alla congruenza.

Per $c=0$ la normale ad una superficie S' è tangente al circolo, ed il punto M coincide con P'; in tal caso il sistema ciclico associato alla congruenza K coincide con lo stesso sistema K, e le superficie ortogonali ai circoli sono le stesse S'.

Noi vogliamo studiare a fondo questo caso che si presenta come la generalizzazione del sistema ciclico di Guichard.

A tale scopo consideriamo i punti P_0 e P'_0 in cui si tagliano le tangenti isotrope alle superficie S ed S_1; le rispettive coordinate hanno le espressioni

$$x_0 = x - \frac{\psi}{\lambda + i\mu}(X_1 + i X_2),$$

$$x'_0 = x - \frac{\psi}{\lambda - i\mu}(X_1 - i X_2),$$

oppure

$$x_0 = x_1 + \frac{\psi}{\lambda + i\mu}(\varepsilon' X_1^{(1)} + i \varepsilon'' X_2^{(1)}),$$

$$x'_0 = x_1 + \frac{\psi}{\lambda - i\mu}(\varepsilon' X_1^{(1)} - i \varepsilon'' X_2^{(1)});$$

donde

$$(\lambda + i\mu)\frac{\partial x_0}{\partial u} = \left[i\mu\sqrt{E} + \frac{\psi}{\lambda + i\mu}\left(\frac{D}{\sqrt{E}} w + m\varphi\right)\right] X_1 +$$

$$+ \left[-i\lambda\sqrt{E} + \frac{i\psi}{\lambda + i\mu}\left(\frac{D}{\sqrt{E}} w + m\varphi\right)\right] X_2 - \psi\frac{D}{\sqrt{E}} X_3,$$

$$(\lambda + i\mu)\frac{\partial x_0}{\partial v} = \left[-\mu\sqrt{G} + \frac{i\psi}{\lambda + i\mu}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}} w + m\Omega\right)\right] X_1 +$$

$$+ \left[\lambda\sqrt{G} - \frac{\psi}{\lambda + i\mu}\left(\frac{D''}{\sqrt{E}} w + m\Omega\right)\right] X_2 - i\psi\frac{D''}{\sqrt{G}} X_3.$$

Quando il punto P descrive la superficie S il punto P_0 descrive una superficie, di cui i coseni direttori della normale sono

$$\tau X_3^{(0)} = \left[\lambda\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{m\psi}{\lambda + i\mu}\left(\Omega\frac{D}{\sqrt{E}} - \varphi\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)\right] X_1 +$$

$$+ \left[\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{i m\psi}{\lambda + i\mu}\left(\Omega\frac{D}{\sqrt{E}} - \varphi\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)\right] X_2 +$$

$$+ \left[w\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - m\left(\Omega\sqrt{E} - \varphi\sqrt{G}\right)\right] X_3,$$

dove τ indica un fattore di proporzionalità.

Inoltre si ha

$$2(\lambda+i\mu)^2\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}[\lambda+i\mu)^2]\cdot\frac{\partial x_0}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}[(\lambda+i\mu)^2]\frac{\partial x_0}{\partial u}=$$

$$=\left[2i\sqrt{E}(\lambda+i\mu)\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}w+m\,\Omega\right)-2\psi\mu\frac{D}{\sqrt{E}}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right]X_1$$

$$+\left[2\sqrt{G}(\lambda+i\mu)\left(\frac{D}{\sqrt{E}}w+m\,\varphi\right)+2\psi\lambda\frac{D}{\sqrt{E}}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right]X_2$$

$$+\left[-2\mu(\lambda+i\mu)\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-2i\lambda(\lambda+i\mu)\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right]X_3.$$

Formole analoghe si hanno per la superficie che descrive P'_0, le quali si deducono dalle precedenti cambiando i in $-i$.

Ciò premesso consideriamo sulla normale alla superficie, descritta dal punto P_0, un punto arbitrario; si avrà

$$\xi=x-\frac{\psi}{\lambda+i\mu}(X_1+iX_2)+\rho\,\tau\,X_3^{(0)};$$

se si prende

$$\rho=-\frac{1}{m\left(\Omega\frac{D}{\sqrt{E}}-\varphi\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)}$$

la precedente diventa

$$\xi=x+\rho\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)(\lambda X_1+\mu X_2+w X_3)-m\,\rho\,(\Omega\sqrt{E}-\varphi\sqrt{G})X_3.$$

Indichiamo con C questo punto particolare; è chiaro che esso appartiene anche alla normale alla superficie P'_0; si ha inoltre

$$C P_0=\rho\,\tau$$

$$C P'_0=\rho\,\tau$$

e quindi risulta che i punti P_0 e P'_0 descrivono le superficie focali di un nuovo sviluppo di sfere.

È da osservare però che il sistema ortogonale comune alle superficie (P_0) e (P'_0) non corrisponde *in generale* alle linee di curvatura di S.

Occorre anche notare che le quantità $\mu X_1 - \lambda X_2$ soddisfano all'equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\mu X_1 - \lambda X_2) = \frac{\partial \log \mu}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}(\mu X_1 - \lambda X_2) + $$
$$+ \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}(\mu X_1 - \lambda X_2) + \psi(\mu X_1 - \lambda X_2),$$

in cui ψ è una conveniente funzione; dunque:

Se S ed S_1 sono le due falde di un inviluppo di Ribaucour, le tangenti isotrope nei punti corrispondenti P e P_1 si tagliano in due punti P_0 e P'_0; la retta $P_0 P'_0$ descrive una congruenza ciclica e i punti P_0 e P'_0 descrivono due superficie, formanti alla loro volta le due falde focali di un nuovo inviluppo di sfere.

Ritorniamo alle quattro superficie S, S_1, S_2, S' del teorema di permutabilità; abbiamo in corrispondenza quattro congruenze cicliche; siano

P_0 e P'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S ed S_1,
Q_0 e Q'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S ed S_2,
M_0 e M'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S_1 ed S',
N_0 e N'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S_2 ed S'.

Le coordinate dei punti P_0, P'_0, Q_0, Q'_0, M_0, M'_0, N_0, N'_0 sono rispettivamente

$$x - \frac{\psi_1}{\lambda_1 + i\mu_1}(X_1 + i X_2),$$
$$x - \frac{\psi_1}{\lambda_1 - i\mu_1}(X_1 - i X_2),$$
$$x - \frac{\psi_2}{\lambda_2 + i\mu_2}(X_1 + i X_2),$$
$$x - \frac{\psi_2}{\lambda_2 - i\mu_2}(X_1 - i X_2),$$
$$x_1 - \frac{\psi'_1}{\lambda'_1 + i\mu'_1}(X_1^{(1)} + i X_2^{(1)}),$$
$$x_1 - \frac{\psi'_1}{\lambda'_1 - i\mu'_1}(X_1^{(1)} - i X_2^{(1)}),$$
$$x_2 - \frac{\psi'_2}{\lambda'_2 + i\mu'_2}(X_1^{(2)} + i X_2^{(2)}),$$
$$x_2 - \frac{\psi'_2}{\lambda'_2 - i\mu'_2}(X_1^{(2)} - i X_2^{(2)}).$$

Facciamo espressamente l'ipotesi che le superficie S, S_1, S_2, S' diano luogo ad un sistema K di seconda specie e consideriamo il punto

$$\xi_0 = x - \frac{\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1} X_1 + \frac{\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1} X_2 ;$$

avendosi per le (42) e (46)

$$-\frac{\varepsilon' (\psi'_1 \mu'_2 - \psi'_2 \mu'_1)}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1} = \frac{\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1},$$

$$-\frac{\varepsilon'' (\psi'_1 \lambda'_2 - \psi'_2 \lambda'_1)}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1} = \frac{\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1},$$

possiamo anche scrivere

$$\xi_0 = x_1 - \frac{\psi'_1 \mu'_2 - \psi'_2 \mu'_1}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1} X_1^{(1)} + \frac{\psi'_1 \lambda'_2 - \psi'_2 \lambda'_1}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1} X_2^{(1)} ,$$

$$\xi_0 = x_2 - \frac{\psi'_1 \mu'_2 - \psi'_2 \mu'_1}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1} X_1^{(2)} + \frac{\psi'_1 \lambda'_2 - \psi'_2 \lambda'_2}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1} X_2^{(2)} .$$

Detto O' il punto che ha le coordinate ξ_0, η_0, ζ_0, è facile vedere che le quattro rette $P_0 P'_0$, $Q_0 Q'_0$, $M_0 M'_0$, $N_0 N'_0$ concorrono nel punto O'; inoltre

$$O' P_0 = \frac{\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1 + i (\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1)}{\lambda_1 + i \mu_1} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1},$$

$$O' P'_0 = \frac{\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1 - i (\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1)}{\lambda_1 - i \mu_1} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1},$$

$$O' Q_0 = \frac{\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1 + i (\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1)}{\lambda_2 + i \mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1},$$

$$O' Q'_0 = \frac{\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1 - i (\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1)}{\lambda_2 - i \mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1},$$

$$O' M_0 = \frac{\psi'_1 \lambda'_2 - \psi'_2 \lambda'_1 + i (\psi'_1 \mu'_2 - \psi'_2 \mu'_1)}{\lambda'_1 + i \mu'_1} \cdot \frac{\sqrt{\lambda'^2_1 + \mu'^2_1}}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1},$$

$$O' M'_0 = \frac{\psi'_1 \lambda'_2 - \psi'_2 \lambda'_1 - i (\psi'_1 \mu'_2 - \psi'_2 \mu'_1)}{\lambda'_1 - i \mu'_1} \cdot \frac{\sqrt{\lambda'^2_1 + \mu'^2_1}}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1},$$

$$O' N_0 = \frac{\psi'_1 \lambda'_2 - \psi'_2 \lambda'_1 + i (\psi'_1 \mu'_2 - \psi'_2 \mu'_1)}{\lambda'_2 + i \mu'_2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda'^2_2 + \mu'^2_2}}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1},$$

$$O' N'_0 = \frac{\psi'_1 \lambda'_2 - \psi'_2 \lambda'_1 - i (\psi'_1 \mu'_2 - \psi'_2 \mu'_1)}{\lambda'_2 - i \mu'_2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda'^2_2 + \mu'^2_2}}{\lambda'_1 \mu'_2 - \lambda'_2 \mu'_1},$$

e quindi

$$O' P_0 \,.\, O' P'_0 = O' Q_0 \,.\, O' Q'_0 = O' M_0 \,.\, O' M'_0 = O' N_0 \,.\, O' N'_0 =$$
$$= \frac{(\psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1)^2 + (\psi_1 \mu_2 - \psi_2 \mu_1)^2}{(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^2},$$

in cui il secondo membro esprime il quadrato della distanza che il punto O' ha da un punto qualunque del circolo $P P_1 P_2$.

Questo risultato è suscettibile di un notevole complemento. La configurazione delle quattro superficie del teorema di permutabilità proviene da quattro inviluppi di sfere

$$(S_2 , S') ; \quad (S_1 , S') ; \quad (S , S_2) ; \quad (S , S_1) ;$$

in cui le relative sfere, che danno origine ai detti inviluppi, indichiamo rispettivamente

$$\Sigma_1 , \quad \Sigma_2 , \quad \Sigma_3 , \quad \Sigma_4 .$$

Se consideriamo ad esempio il centro della sfera Σ_4, esso ha le coordinate

$$x - \frac{\psi_1}{w_1} X_3 , \quad y - \frac{\psi_1}{w_1} Y_3 , \quad z - \frac{\psi_1}{w_1} Z_3 ,$$

che si possono anche scrivere

$$x_1 + \frac{\psi_1}{w_1} \varepsilon' \varepsilon'' X_3^{(1)} , \quad y_1 + \frac{\psi_1}{w_1} \varepsilon' \varepsilon'' Y_3^{(1)} , \quad z_1 + \frac{\psi_1}{w_1} \varepsilon' \varepsilon'' Z_3^{(1)} ;$$

le quali mostrano che questo punto ha la distanza $\frac{\psi_1}{w_1}$ dai punti P, P'_0, Q_0, Q'_0, M_0, M'_0; dunque questi sei punti appartengono alla sfera Σ_4.

Potendo ottenere le quattro superficie S, S_1, S_2, S' partendo da una qualunque di esse, si riconosce facilmente che se si considerano le coppie

$$P_0 \text{ e } P'_0 ; \quad Q_0 \text{ e } Q'_0 ; \quad M_0 \text{ e } M'_0 ; \quad N_0 \text{ e } N'_0$$

sussiste il seguente teorema:

I sei punti ottenuti sopprimendo la r^{ma} coppia appartengono alla sfera Σ_r.

Come conseguenza, sopprimendo due coppie qualunque, i quattro punti che si ottengono appartengono sempre ad un circolo.

§ 5. — Casi particolari del teorema di permutabilità.

14. In questo paragrafo vogliamo esaminare alcuni casi di particolare interesse, ed anzitutto il caso in cui una delle superficie contigue ad S, per esempio S_2, sia deducibile da S mediante l'inversione.

Per realizzare questo caso, basta porre

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{1}{n-m}\sqrt{E}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{n-m}\sqrt{G},\\
\lambda_2 &= \frac{n}{n-m}(x X_1 + y Y_1 + z Z_1),\\
\mu_2 &= \frac{n}{n-m}(x X_2 + y Y_2 + z Z_2),\\
w_2 &= \frac{n}{n-m}(x X_3 + y Y_3 + z Z_3),\\
2\psi_2 &= \frac{n-m}{n}(\lambda_2^2 + \mu_2^2 + w_2^2 - C),
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

e la seconda superficie focale sarà data dalle formole

$$x_2 = \frac{C x}{\left(\frac{n}{n-m}\right)^2 (x^2 + y^2 + z^2)} . \tag{69}$$

Nell'attuale ipotesi il sistema (47) diventa

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \sqrt{E}\,\lambda_1 ; \qquad \frac{\partial B}{\partial v} = \sqrt{G}\,\mu_1 ; \tag{70}$$

e s'integra immediatamente con la formola

$$B = \psi_1 + K ; \qquad (K = \text{cost.}) \tag{71}$$

donde poi dalla (49) si ottiene A in termini finiti sotto la forma

$$m A - n(\psi_1 + K) = (m - n)(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2). \tag{72}$$

Abbiamo dunque il teorema:

Se una delle superficie S_1, S_2, contigue ad S per trasformazioni di Ri-

baucour, è deducibile da S mediante l'inversione, le superficie S' (ciascuna delle quali con S, S_1, S_2 forma la quarta superficie del teorema di permutabilità) si ottengono tutte in termini finiti.

Inoltre dalle (55) si ha

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' \varphi'_1 &= \left(\frac{\varphi_1}{\sigma_1} - \sqrt{E}\right) + \frac{K}{\psi_1 \sigma_1} \varphi_1 , \\ \varepsilon'' \Omega'_1 &= \left(\frac{\Omega_1}{\sigma_1} - \sqrt{G}\right) + \frac{K}{\psi_1 \sigma_1} \Omega_1 , \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

le quali mostrano una circostanza che sembra assai notevole; cioè se fra le superficie S' si considera quella che si ottiene per $K=0$, essa è deducibile da S_1 mediante l'inversione. Segue che per passare da S ad S' possiamo operare dapprima un'inversione che porta S in S_2 e poscia una trasformazione di Ribaucour che porta S_2 in S'; oppure possiamo dapprima operare una trasformazione di Ribaucour che porta S in S_1, e poscia un'inversione che porta S_1 in S'. In questo senso possiamo dire che ***le trasformazioni di Ribaucour sono permutabili con le inversioni.***

Per $K==0$ la trasformazione che porta S_1 in S' non è un'inversione; ed al teorema di permutabilità possiamo dare una forma che presenta molto interesse; la trasformazione di Ribaucour che porta S in S_1 è qualunque, e può sostituirsi con un'inversione che porta S in S_2 seguíta da due trasformazioni di Ribaucour; dunque:

Una trasformazione di Ribaucour è sempre decomponibile (a meno di una inversione) nel prodotto di due trasformazioni di Ribaucour, e ciò in infiniti modi.

15. Un altro caso particolare è quello in cui il sistema di superficie S, S_1, S_2 dia luogo ad un sistema K singolare; abbiamo osservato allora (n.° 7) che si hanno le relazioni

$$\left.\begin{aligned} n \lambda_1 - m \lambda_2 &= a X_1 + b Y_1 + c Z_1 , \\ n \mu_1 - m \mu_2 &= a X_2 + b Y_2 + c Z_2 , \\ n w_1 - m w_2 &= a X_3 + b Y_3 + c Z_3 , \\ n \psi_1 - m \psi_2 &= a x + b y + c z + h , \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

con a, b, c, h costanti arbitrarie, e quindi

$$n \psi_1 \sigma_1 + m \psi_2 \sigma_2 - (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2 m n} \cdot \tag{75}$$

Nel caso attuale le (44) e (47) s'integrano immediatamente e danno

$$\left.\begin{aligned} A &= -(n-m)(\psi_2\,\sigma_2 + K_2), \\ B &= (n-m)(\psi_1\,\sigma_1 + K_1), \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

essendo K_1 e K_2 costanti legate dalla relazione

$$n\,K_1 + m\,K_2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2\,m\,n} = 0. \tag{77}$$

Ne segue

$$\left.\begin{aligned} A + (n-m)\,\psi_2\,\sigma_1 &= (n-m)\,[\psi_2\,(\sigma_1-\sigma_2) - K_2], \\ B - (n-m)\,\psi_1\,\sigma_2 &= (n-m)\,[\psi_1\,(\sigma_1-\sigma_2) + K_1], \\ AB + (n-m)^2\,\psi_1\,\sigma_1\,\psi_2\,\sigma_2 &= -(n-m)^2\,[K_2\,\psi_1\,\sigma_1 + K_1\,\psi_2\,\sigma_2 + K_1\,K_2], \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

e risultano in conseguenza i valori (54) di M, N, H sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{1}{m\,n}\,\frac{\psi_1\,\psi_2\,(\sigma_1-\sigma_2)\,(n\,\lambda_1 - m\,\lambda_2) + n\,K_1\,\lambda_1\,\psi_2 + m\,K_2\,\lambda_2\,\psi_1}{K_1\,\psi_2\,\sigma_2 + K_2\,\psi_1\,\sigma_1 + K_1\,K_2} \\ N &= \frac{1}{m\,n}\,\frac{\psi_1\,\psi_2\,(\sigma_1-\sigma_2)\,(n\,\mu_1 - m\,\mu_2) + n\,K_1\,\mu_1\,\psi_2 + m\,K_2\,\mu_2\,\psi_1}{K_1\,\psi_2\,\sigma_2 + K_2\,\psi_1\,\sigma_1 + K_1\,K_2} \\ H &= \frac{1}{m\,n}\,\frac{\psi_1\,\psi_2\,(\sigma_1-\sigma_2)\,(n\,w_1 - m\,w_2) + n\,K_1\,w_1\,\psi_2 + m\,K_2\,w_2\,\psi_1}{K_1\,\psi_2\,\sigma_2 + K_2\,\psi_1\,\sigma_1 + K_1\,K_2} \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Vediamo così che in modo analogo al numero precedente si ha il teorema:

Se il sistema di superficie S, S_1, S_2 dà luogo ad un sistema K singolare, le superficie S' (ciascuna delle quali con S, S_1, S_2 forma la quarta superficie del teorema di permutabilità) si ottengono tutte in termini finiti.

Nell'ipotesi presente dalle (55) e (76) si ricavano le relazioni

$$\varepsilon'\,\varphi'_1 = \frac{K_1\,\varphi_1}{\psi_1\,\sigma_1}; \quad \varepsilon''\,\Omega'_1 = \frac{K_1\,\Omega_1}{\psi_1\,\sigma_1}.$$

16. Consideriamo la superficie S', che è data dalle formole

$$x' = x - M\,X_1 - N\,X_2 - H\,X_3 \tag{80}$$

ove M, N, H hanno ora i valori (79), ed operiamo una simmetria rispetto al piano

$$a\,x + b\,y + c\,z + h = 0;$$

otteniamo una superficie S'', le cui equazioni indichiamo con

$$x'' = x - M' X_1 - N' X_2 - H' X_3 . \tag{81}$$

Si ha così

$$M' = M - \rho\,(a X_1 + b Y_1 + c Z_1),$$
$$N' = N - \rho\,(a X_2 + b Y_2 + c Z_2),$$
$$H' = H - \rho\,(a X_3 + b Y_3 + c Z_3),$$

ed inoltre

$$\rho\,(a^2 + b^2 + c^2) = 2 M (a X_1 + b Y_1 + c Z_1) + 2 N (a X_2 + b Y_2 + c Z_2) +$$
$$+ 2 H (a X_3 + b Y_3 + c Z_3) - 2 (a x + b y + c z + h).$$

Portando questo valore di ρ nelle precedenti, tenendo conto delle espressioni (79) di M, N, H ed osservando le (74), si ha con facile calcolo

$$\left.\begin{aligned}
M' &= \frac{1}{n K_1 + m K_2} \frac{(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1)(K_1 \psi_2 + K_2 \psi_1)}{K_1 \psi_2 \sigma_2 + K_2 \psi_1 \sigma_1 + K_1 K_2},\\
N' &= \frac{1}{n K_1 + m K_2} \frac{(K_1 \mu_2 + K_2 \mu_1)(K_1 \psi_2 + K_2 \psi_1)}{K_1 \psi_2 \sigma_2 + K_2 \psi_1 \sigma_1 + K_1 K_2},\\
H' &= \frac{1}{n K_1 + m K_2} \frac{(K_1 w_2 + K_2 w_1)(K_1 \psi_2 + K_2 \psi_1)}{K_1 \psi_2 \sigma_2 + K_2 \psi_1 \sigma_1 + K_1 K_2},
\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

e poichè nella (77) le costanti a, b, c possono essere qualunque, potremo ritenere K_1 e K_2 costanti del tutto arbitrarie.

Le formole ora ottenute mostrano che la superficie S'' coincide con la superficie Σ e si ha perciò il teorema: *se il sistema di superficie S, S_1, S_2 dà luogo ad un sistema K singolare, si ottiene nel modo più generale una superficie S' assumendo una superficie Σ e trasformandola mediante una simmetria rispetto ad un conveniente piano.*

Il piano rispetto al quale occorre operare la simmetria è quello a cui si mantengono ortogonali i circoli $P\,P_1\,P_2$ considerati nel paragrafo primo.

§ VI. — Le trasformazioni di Darboux generalizzate.

17. Vogliamo applicare i risultati precedenti ad una notevole classe di superficie che definiamo nel modo seguente:

Esprimiamo, come è lecito in generale, i coefficienti dell'elemento lineare di una superficie data S riferita alle linee di curvatura sotto la forma

$$\sqrt{E} = e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta, \quad \sqrt{G} = e^{\xi} \cosh \Theta, \tag{83}$$

ed imponiamo che *esista una trasformata di* Combescure *di S soddisfacente alla relazione*

$$\cosh \Theta \cdot \sqrt{E_0} - \operatorname{senh} \Theta \cdot \sqrt{G_0} = 1. \tag{84}$$

Le coordinate x_0, y_0, z_0 del punto di tale trasformata S_0 debbono soddisfare a relazioni della forma

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = h \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = l \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{85}$$

per la cui integrabilità sono necessarie e sufficienti le condizioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= (l - h)\left(\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\cosh \Theta}{\operatorname{senh} \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right), \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= (h - l)\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\operatorname{senh} \Theta}{\cosh \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right). \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Dovendo essere soddisfatta la (84) si dovrà avere

$$h - l = \frac{e^{-\xi}}{\operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta}, \tag{87}$$

donde segue facilmente

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u} &= -\frac{e^{-\xi}}{\operatorname{senh}^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \\ \frac{\partial h}{\partial v} &= -\frac{e^{-\xi}}{\operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{e^{-\xi}}{\operatorname{senh}^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Fra queste eliminando h si trova l'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\cosh \Theta}{\operatorname{senh} \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\operatorname{senh} \Theta}{\cosh \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v}. \tag{89}$$

Inversamente se questa è soddisfatta si deduce per quadrature dalle (88) la funzione h, indi si ottiene l in termini finiti; le condizioni di integrabilità per le (85) sono soddisfatte e si ha una superficie S_0 nella relazione richiesta, per la quale i coefficienti dell'elemento lineare sono espressi dalle formole

$$\sqrt{E_0} = h\, e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta, \qquad \sqrt{G_0} = l\, e^{\xi} \cosh \Theta. \tag{90}$$

Chiamiamo per brevità *superficie G* ogni superficie le cui linee di curvatura soddisfano alla condizione (89); chiamiamo inoltre *superficie I coniugata alla G* la trasformata di Combescure della G soddisfacente la (84).

Noi vogliamo applicare alle superficie G le trasformazioni di Ribaucour non proprio nella forma generale, ma in guisa che la trasformata di una superficie G sia ancora una superficie G.

A tale scopo osserviamo che in forza delle equazioni (89), insieme alle equazioni di trasformazione (1) e (2), coesistono le altre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi \frac{\partial \xi}{\partial u} + \Omega \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{2\psi}{\operatorname{senh} \Theta} e^{-\xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} - 2\lambda$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega \frac{\partial \xi}{\partial v} + \varphi \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{2\psi}{\cosh \Theta} e^{-\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} + 2\mu;$$

ne risulta così il sistema *illimitatamente integrabile*

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -\left(\frac{\operatorname{senh}\Theta}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)\mu + \frac{D}{\sqrt{E}} w + m\varphi \\
\frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \left(\frac{\cosh\Theta}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)\mu
\end{aligned}\right\} \\
&\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \left(\frac{\operatorname{senh}\Theta}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)\lambda \\
\frac{\partial \mu}{\partial v} &= -\left(\frac{\cosh\Theta}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)\lambda + \frac{D''}{\sqrt{G}} w + m\Omega
\end{aligned}\right\} \\
&\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u} &= -\frac{D}{\sqrt{E}}\lambda \\
\frac{\partial w}{\partial v} &= -\frac{D''}{\sqrt{G}}\mu
\end{aligned}\right\} \\
&\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^{\xi} \operatorname{senh}\Theta \,.\, \lambda \\
\frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^{\xi} \cosh\Theta \,.\, \mu
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\lambda}{\psi}(\varphi - \sigma e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta) \\
&\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\mu}{\psi}(\Omega - \sigma e^{\xi} \cosh \Theta) \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi \frac{\partial \xi}{\partial u} + \Omega \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{2\psi}{\operatorname{senh} \Theta} e^{-\xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} - 2\lambda \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\operatorname{senh} \Theta}{\cosh \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) \Omega \\
&\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \left(\frac{\cosh \Theta}{\operatorname{senh} \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) \varphi \\
&\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \Omega \frac{\partial \xi}{\partial v} + \varphi \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{2\psi}{\cosh \Theta} e^{-\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} + 2\mu
\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

a cui si deve sempre aggiungere la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \psi\, \sigma.$$

È questa la trasformazione di cui ci occuperemo in tutto il seguito di questo lavoro; essa porta da una superficie data G ad una superficie S_1, per la quale i coefficienti dell'elemento lineare hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{E_1} &= \varepsilon' \left(\frac{\varphi}{\sigma} - e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta\right), \\
\sqrt{G_1} &= \varepsilon'' \left(\frac{\Omega}{\sigma} - e^{\xi} \cosh \Theta\right).
\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Qui importa anche studiare come si trasforma la superficie I coniugata alla G mediante la relazione (84). Sappiamo dalla teoria generale che occorre determinare per quadrature una funzione ψ' dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \psi'}{\partial u} &= h\, e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta \,.\, \lambda, \\
\frac{\partial \psi'}{\partial v} &= l\, e^{\xi} \cosh \Theta \,.\, \mu,
\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

ed i coefficienti dell'elemento lineare della superficie $S_0^{(1)}$, trasformata della I, sono dati dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{E_0^{(1)}} &= -\varepsilon'' \left(\frac{\varphi\, \psi'}{\psi\, \sigma} - h\, e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta\right), \\
\sqrt{G_0^{(1)}} &= -\varepsilon' \left(\frac{\Omega\, \psi'}{\psi\, \sigma} - l\, e^{\xi} \cosh \Theta\right).
\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Ora si riconosce con facile calcolo che l'integrale delle (93) è in termini finiti

$$2\psi' = \Omega \operatorname{senh}\Theta - \varphi\cosh\Theta + 2\psi l \cosh^2\Theta - 2\psi h \operatorname{senh}^2\Theta + \text{cost.};$$

noi assumeremo la costante al secondo membro in guisa che quando la trasformazione si riduce all'identità la superficie $S_0^{(1)}$ coincida con la I, per il che basta porre

$$2\psi' = \Omega \operatorname{senh}\Theta - \varphi\cosh\Theta + 2\psi l \cosh^2\Theta - 2\psi h \operatorname{senh}^2\Theta. \tag{95}$$

18. La questione essenziale che dobbiamo risolvere è di stabilire sotto quale condizione la trasformata della G è ancora una superficie G.

Dalle (92) e (94) osservando la precedente si ha

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{G_1}\sqrt{E_0^{(1)}} - \sqrt{E_1}\sqrt{G_0^{(1)}} = -\frac{1}{2}\frac{e^\xi}{\psi\sigma}(\Omega\operatorname{senh}\Theta - \varphi\cosh\Theta)^2 - \\ -\frac{\varphi}{\sigma}\operatorname{senh}\Theta + \frac{\Omega}{\sigma}\cosh\Theta - e^\xi; \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

indi

$$(\sqrt{G_1}\sqrt{E_0^{(1)}} - \sqrt{E_1}\sqrt{G_0^{(1)}})^2 + E_1 - G_1 = \frac{1}{4}\frac{e^{2\xi}}{\psi^2\sigma^2}\cdot M(\Omega\operatorname{senh}\Theta - \varphi\cosh\Theta)^2, \tag{97}$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} M = \Omega^2\operatorname{senh}^2\Theta + \varphi^2\cosh^2\Theta - 2\Omega\varphi\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta + 4\psi^2 e^{-2\xi} + \\ + 4\varphi\psi e^{-\xi}\operatorname{senh}\Theta - 4\Omega\psi e^{-\xi}\cosh\Theta + 4\psi\sigma. \end{aligned}$$

Ora in forza delle equazioni (91) sono nulle le derivate di M rispetto ad u e v; essa è perciò una costante e possiamo disporre delle condizioni iniziali in guisa che sia nulla. Per una tale scelta dei valori iniziali la trasformata della superficie G è ancora una G.

Abbiamo così il teorema:

Partendo da una superficie G e integrando il sistema completo (91) *in guisa da aversi*

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2m\psi\sigma, \\ \Omega^2\operatorname{senh}^2\Theta + \varphi^2\cosh^2\Theta - 2\Omega\varphi\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta + 4\psi^2 e^{-2\xi} + \\ + 4\varphi\psi e^{-\xi}\operatorname{senh}\Theta - 4\Omega\psi e^{-\xi}\cosh\Theta + 4\psi\sigma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

si deducono infinite superficie G_1 dipendenti da cinque costanti arbitrarie.

Il passaggio dalla superficie G ad una superficie G_1, nel modo ora detto, lo diciamo una *trasformazione di Darboux generalizzata,* o brevemente una *trasformazione* D_m, mettendo così in vista la costante m che esplicitamente comparisce nelle formole.

19. Dalle formole generali abbiamo subito le espressioni di ζ_1 e Θ_1 sotto la forma:

$$
\left.\begin{aligned}
e^{\xi_1} &= e^{\xi} - \frac{\Omega}{\sigma}\cosh\Theta + \frac{\varphi}{\sigma}\operatorname{senh}\Theta + 2\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi},\\
e^{\xi_1}\operatorname{senh}\Theta_1 &= \varepsilon'\left(\frac{\varphi}{\sigma} - e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\right),\\
e^{\xi_1}\cosh\Theta_1 &= \varepsilon''\left(\frac{\Omega}{\sigma} - e^{\xi}\cosh\Theta\right),
\end{aligned}\right\} \tag{99}
$$

donde seguono facilmente le relazioni

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon'\cosh\Theta_1\left(e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta - \frac{\varphi}{\sigma} - 2\frac{\psi}{\sigma}\frac{e^{-\xi}}{\operatorname{senh}\Theta}\right) -\\
&\qquad -\varepsilon''\operatorname{senh}\Theta_1\left(\frac{\varphi}{\sigma}\frac{\cosh\Theta}{\operatorname{senh}\Theta} - e^{\xi}\cosh\Theta\right) =\\
&\qquad = -\varepsilon'\varepsilon''\left(\frac{\Omega}{\sigma}\operatorname{senh}\Theta - \frac{\varphi}{\sigma}\cosh\Theta - 2\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\frac{\cosh\Theta}{\operatorname{senh}\Theta}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon'\cosh\Theta_1\left(\frac{2\lambda}{\sigma} - \frac{\lambda}{\psi}\frac{\varphi}{\sigma}e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta + \frac{\lambda}{\psi}\frac{\varphi}{\sigma}\cdot\frac{\varphi}{\sigma}\right) +\\
&\qquad + \varepsilon''\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\Omega\lambda}{\psi\sigma}\left(\frac{\varphi}{\sigma} - e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\right) =\\
&\qquad = \varepsilon'\varepsilon''e^{\xi}\frac{\lambda}{\psi}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\operatorname{senh}^2\Theta - \frac{\varphi}{\sigma}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - 2\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\cosh\Theta\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon'\cosh\Theta_1\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\operatorname{senh}\Theta}{\cosh\Theta} - e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\right) +\\
&\qquad + \varepsilon''\operatorname{senh}\Theta_1\left(e^{\xi}\cosh\Theta - \frac{\Omega}{\sigma} + \frac{2\psi}{\sigma}\frac{e^{-\xi}}{\cosh\Theta}\right) =\\
&\qquad = -\varepsilon'\varepsilon''\left(\frac{\Omega}{\sigma}\operatorname{senh}\Theta - \frac{\varphi}{\sigma}\cosh\Theta - 2\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\frac{\operatorname{senh}\Theta}{\cosh\Theta}\right),
\end{aligned}
$$

$$-\varepsilon' \cosh \Theta_1 \frac{\varphi}{\psi}\frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{\Omega}{\sigma} - e^{\xi}\cosh\Theta\right) +$$

$$+\varepsilon'' \operatorname{senh}\Theta_1\left(-2\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\Omega\,\mu}{\psi\,\sigma}e^{\xi}\cosh\Theta + \frac{\Omega\,\mu}{\psi\,\sigma}\cdot\frac{\Omega}{\sigma}\right) =$$

$$= \varepsilon'\varepsilon'' e^{\xi}\frac{\mu}{\psi}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \frac{\varphi}{\sigma}\cosh^2\Theta - 2\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\operatorname{senh}\Theta\right),$$

$$e^{\xi_1}(\cosh\Theta_1 + \varepsilon''\cosh\Theta) = -\varepsilon''\left(\frac{\Omega}{\sigma}\operatorname{senh}^2\Theta - \frac{\varphi}{\sigma}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - 2\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\cosh\Theta\right),$$

$$e^{\xi_1}(\operatorname{senh}\Theta_1 + \varepsilon'\operatorname{senh}\Theta) = -\varepsilon'\left(\frac{\Omega}{\sigma}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \frac{\varphi}{\sigma}\cosh^2\Theta - 2\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\operatorname{senh}\Theta\right).$$

Ciò premesso deriviamo la seconda e terza dalle (99); otteniamo

$$e^{\xi_1}\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + e^{\xi_1}\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u} = \varepsilon'\varepsilon'' e^{\xi_1}\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta}{\partial u} - \varepsilon'\frac{\partial\xi}{\partial u}\left(e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta - \frac{\varphi}{\sigma} - \frac{2\psi}{\sigma}\frac{e^{-\xi}}{\operatorname{senh}\Theta}\right) - \varepsilon'\left(\frac{2\lambda}{\sigma} - \frac{\lambda\varphi}{\psi\sigma}e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta + \frac{\lambda\varphi}{\psi\sigma}\cdot\frac{\varphi}{\sigma}\right),$$

$$e^{\xi_1}\cosh\Theta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + e^{\xi_1}\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u} = \varepsilon'\varepsilon'' e^{\xi_1}\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta}{\partial u} + \varepsilon''\frac{\partial\xi}{\partial u}\left(\frac{\varphi}{\sigma}\frac{\cosh\Theta}{\operatorname{senh}\Theta} - e^{\xi}\cosh\Theta\right) - \varepsilon''\frac{\Omega\lambda}{\psi\sigma}\left(\frac{\varphi}{\sigma} - e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\right).$$

Eliminando $\dfrac{\partial\xi_1}{\partial u}$ e tenendo conto delle relazioni precedenti troviamo

$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial u} = \varepsilon'\varepsilon''\frac{\partial\Theta}{\partial u} - \varepsilon'\left(e^{\xi}\frac{\lambda}{\psi} - \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)(\cosh\Theta_1 + \varepsilon''\cosh\Theta), \tag{100}$$

e similmente

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} = \varepsilon' \varepsilon'' \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \varepsilon'' \left(e^{\xi} \frac{\mu}{\psi} - \frac{1}{\cosh \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) (\operatorname{senh} \Theta_1 + \varepsilon' \operatorname{senh} \Theta); \tag{101}$$

e per le derivate della funzione ξ_1 si hanno le espressioni

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = -\varepsilon' \operatorname{senh} \Theta_1 \left[\frac{1}{\operatorname{senh} \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\lambda}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) \right],$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = -\varepsilon'' \cosh \Theta_1 \left[\frac{1}{\cosh \Theta} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\mu}{\psi} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) \right].$$

§ VII. — Il teorema di permutabilità per le superficie G.

20. Per le trasformazioni D_m delle superficie G, come per le trasformazioni di Ribaucour in generale, sussiste il teorema di permutabilità nel senso che se da una superficie G si deducono due superficie G_1 e G_2 rispettivamente per trasformazioni D_m e D_n esistono ∞^1 superficie S' tali che ogni superficie S' è contigua alle medesime superficie G_1 ed G_2 per trasformazioni di Ribaucour.

Ma qui ha luogo una interessante questione; cioè: *Può accadere che qualcuna delle dette superficie S' sia ancora una superficie G?*

Per rispondere a tale domanda è utile premettere che la seconda delle relazioni (98) si può anche scrivere

$$\left(\frac{\Omega}{\psi \sigma}\right)^2 \operatorname{senh}^2 \Theta_1 + \left(\frac{\varphi}{\psi \sigma}\right)^2 \cosh^2 \Theta_1 - 2 \frac{\varepsilon'' \Omega}{\psi \sigma} \frac{\varepsilon' \varphi}{\psi \sigma} \operatorname{senh} \Theta_1 \cosh \Theta_1 + \frac{4}{\sigma^2} e^{-2\xi_1} +$$
$$+ 4 \frac{\varepsilon' \varphi}{\psi \sigma} \frac{1}{\sigma} e^{-\xi_1} \operatorname{senh} \Theta_1 - 4 \frac{\varepsilon'' \Omega}{\psi \sigma} \frac{1}{\sigma} e^{-\xi_1} \cosh \Theta_1 + \frac{4}{\psi \sigma} = 0;$$

si deduce che le funzioni

$$\varepsilon' \frac{\varphi}{\psi \sigma}, \quad \frac{\varepsilon'' \Omega}{\psi \sigma}, \quad -\varepsilon' \frac{\lambda}{\psi \sigma}, \quad -\varepsilon'' \frac{\mu}{\psi \sigma}, \ldots.$$

soddisfano al sistema analogo a (91) in cui le superficie G e G_1 si scambino tra loro; ed allora possiamo affermare *a priori* che sono soddisfatte le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \varphi \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \varepsilon' \varepsilon'' \Omega \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} + \varepsilon' \frac{2\psi}{\operatorname{senh} \Theta_1} e^{-\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + 2\lambda + \frac{\varphi^2 \lambda}{\psi \sigma}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= \Omega \frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \varepsilon' \varepsilon'' \varphi \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \varepsilon'' \frac{2\psi}{\cosh \Theta_1} e^{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} - 2\mu + \frac{\Omega^2 \mu}{\psi \sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Ciò premesso, partendo da una superficie G, assumiamo due trasformate G_1 e G_2 mediante due trasformazioni D_m e D_n, ed indichiamo come al n° 2 con

$$\lambda_1, \quad \mu_1, \quad w_1, \quad \psi_1, \quad \sigma_1, \quad \varphi_1, \quad \Omega_1,$$

le funzioni trasformatrici relative al passaggio da G a G_1, e con

$$\lambda_2, \quad \mu_2, \quad w_2, \quad \psi_2, \quad \sigma_2, \quad \varphi_2, \quad \Omega_2,$$

quelle relative al passaggio da G a G_2; indi introduciamo per comodità di calcolo la funzione

$$\left.\begin{aligned} H = {} & \Omega_1 \Omega_2 \operatorname{senh}^2 \Theta + \varphi_1 \varphi_2 \cosh^2 \Theta - \\ & - (\Omega_1 \varphi_2 + \Omega_2 \varphi_1) \operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta + 4 \psi_1 \psi_2 e^{-\xi} + \\ & + 2 (\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1) e^{-\xi} \operatorname{senh} \Theta - 2 (\Omega_1 \psi_2 + \Omega_2 \psi_1) e^{-\xi} \cosh \Theta \ (*) . \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Tenendo presenti le equazioni fondamentali a cui si soddisfano le funzioni trasformatrici, deduciamo con facile calcolo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= - 2 (\lambda_1 \varphi_2 + \lambda_2 \varphi_1), \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= - 2 (\mu_1 \Omega_2 + \mu_2 \Omega_1). \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Ed allora mantenendo le notazioni del n.° 8, vediamo subito che il sistema (44) (47) e (49) s'integra colle funzioni

$$\left.\begin{aligned} A &= \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 + \frac{n}{2} (H + c), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c = \text{cost}^{\text{te}} \\ B &= \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + w_1 w_2 + \frac{m}{2} (H + c). \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Inoltre dalle (42) e (55) si ha

$$\left.\begin{aligned} - \varepsilon' (\varphi_1 \lambda'_1 + \varphi'_1 \lambda_1) &= \frac{\varphi_1 \lambda_1}{\psi_1 \sigma_1} \cdot \frac{n - m}{2} (H + c) + n - m (\varphi_1 \lambda_2 + \varphi_2 \lambda_1), \\ - \varepsilon' \Omega_1 \lambda'_1 - \varepsilon'' \Omega'_1 \lambda_1 &= \frac{\Omega_1 \lambda_1}{\psi_1 \sigma_1} \frac{n - m}{2} (H + c) + (n - m) (\Omega_1 \lambda_2 + \Omega_2 \lambda_1), \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

(*) Si può scrivere identicamente

$$H = - 2 \psi_1 \sigma_2 - 2 \psi_2 \sigma_1 - \frac{1}{2 \psi_1 \psi_2} \Big[\operatorname{senh} \Theta (\Omega_1 \psi_2 - \Omega_2 \psi_1) - \cosh \Theta (\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1) \Big]^2 .$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\varepsilon''\varphi_1\mu'_1-\varepsilon'\varphi'_1\mu_1=\frac{\varphi_1\mu_1}{\psi_1\sigma_1}\frac{n-m}{2}(H+c)+(n-m)(\varphi_1\mu_2+\varphi_2\mu_1),\\
&-\varepsilon''(\Omega_1\mu'_1+\Omega'_1\mu_1)=\frac{\Omega_1\mu_1}{\psi_1\sigma_1}\frac{n-m}{2}(H+c)+(n-m)(\Omega_1\mu_2+\Omega_2\mu_1),\\
&\varphi_1\psi'_1-\varepsilon'\varphi'_1\psi_1=\frac{\varphi_1\psi_1}{\psi_1\sigma_1}\frac{n-m}{2}(H+c)+(n-m)(\varphi_1\psi_2+\varphi_2\psi_1),\\
&\Omega_1\psi'_1-\varepsilon''\Omega'_1\psi_1=\frac{\Omega_1\psi_1}{\psi_1\sigma_1}\frac{n-m}{2}(H+c)+(n-m)(\Omega_1\psi_2+\Omega_2\psi_1),\\
&\varepsilon'\Omega_1\varphi'_1-\varepsilon''\Omega'_1\varphi_1=(n-m)(\varphi_2\Omega_2-\varphi_2\Omega_1).
\end{aligned}
\right\}
\tag{108}
$$

Esprimiamo che le funzioni trasformatrici λ'_1, $\mu'_1,\cdots$, soddisfino al sistema fondamentale relativo alla superficie G_1. Se teniamo presenti le equazioni a cui soddisfano λ_1, $\mu_1,\cdots$ e λ_2, $\mu_2,\cdots$, osservando anche le (104), si avrà

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(\varepsilon'\Omega_1\varphi'_1-\varepsilon''\Omega'_1\varphi_1)&=(\varepsilon'\Omega_1\varphi'_1-\varepsilon''\Omega'_1\varphi_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial u}+\\
&+\frac{2\varepsilon'}{\operatorname{senh}\Theta_1}e^{-\xi_1}(\Omega_1\psi'_1-\varepsilon''\Omega'_1\psi_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial u}+(\varepsilon'\Omega_1\varphi'_1-\varepsilon''\Omega'_1\varphi_1)\frac{\varphi_1\lambda_1}{\psi_1\sigma_1}-\\
&-2(\varepsilon'\Omega_1\lambda'_1+\varepsilon''\Omega'_1\lambda_1),
\end{aligned}
$$

e dovendo l'espressione al secondo membro coincidere con la derivata rispetto ad u della funzione $(n-m)(\varphi_1\Omega_2-\varphi_2\Omega_1)$, si trova a calcoli fatti

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(\varphi_1\Omega_2-\varphi_2\Omega_1)-\operatorname{senh}\Theta\,.\,(\varphi_1\Omega_2-\varphi_2\Omega_1)(\Omega_1\cosh\Theta-\varphi_1\operatorname{senh}\Theta-2\psi_1e^{-\xi})+\\
&+\Omega_1(H+c)+2(\Omega_1\psi_2-\Omega_2\psi_1)e^{-\xi}\,.\,(\Omega_1\cosh\Theta-\varphi_1\operatorname{senh}\Theta-2\psi_1e^{-\xi})+4\Omega_2\psi_1\sigma_1=0.
\end{aligned}
$$

Sostituendo in questa per H la sua espressione effettiva (105) si vede che affinchè essa sia verificata si dovrà avere

$$c=0. \tag{109}$$

Alla stessa conclusione si perviene considerando la derivata rispetto a v della espressione $\varepsilon'\Omega_1\varphi'_1-\varepsilon''\Omega'_1\varphi_1$; sicchè le (107) si dovranno scrivere

$$
\left.
\begin{aligned}
A&=\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+w_1w_2+\frac{n}{2}H,\\
B&=\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+w_1w_2+\frac{m}{2}H.
\end{aligned}
\right\}
\tag{110}
$$

Inversamente se la condizione $c=0$ è soddisfatta, le funzioni λ'_1, $\mu'_1, \ldots$ (ove per A e B si intendano le espressioni (110)) soddisfano al sistema fondamentale analogo a (91) relativo alla superficie G_1. Ne viene che l'espressione

$$\Omega'^2_1 \operatorname{senh}^2 \Theta_1 + \varphi'^2_1 \cosh^2 \Theta_1 - 2\,\Omega'_1\,\varphi'_1 \operatorname{senh} \Theta_1 \cosh \Theta_1 + 4\,\psi'^2_1\, e^{-2\xi} + \\ + 4\,\varphi'_1\,\psi'_1\, e^{-\xi_1} \operatorname{senh} \Theta_1 - 4\,\Omega'_1\,\psi'_1\, e^{-\xi_1} \cosh \Theta_1 + 4\,\psi'_1\,\sigma'_1$$

è una costante, e si verifica col calcolo diretto che essa costante è nulla. Quindi la quarta superficie del teorema di permutabilità, che si ottiene in corrispondenza ai valori (110) di A e B, è ancora una superficie G.

Per completare la dimostrazione consideriamo le funzioni

$$\varepsilon'\,\varphi'_2 = \frac{A}{\psi_2\,\sigma_2}\,\varphi_2 - (m-n)\,\varphi_1\,,$$

$$\varepsilon''\,\Omega'_2 = \frac{A}{\psi_2\,\sigma_2}\,\Omega_2 - (m-n)\,\Omega_1\,,$$

che insieme alle (46) dànno il sistema di funzioni trasformatrici nel passaggio da G_2 alla nuova superficie S'; avendosi

$$\varphi_2\,(\varphi_2\,\Omega_1 - \varphi_1\,\Omega_2) - \operatorname{senh}\Theta\,(\varphi_2\,\Omega_1 - \varphi_1\,\Omega_2)\,(\Omega_2 \cosh\Theta - \varphi_2 \operatorname{senh}\Theta - 2\,\psi_2\,e^{-\xi}) + \\ + \Omega_2\,H + 2\,(\Omega_2\,\psi_1 - \Omega_1\,\psi_2)\,e^{-\xi}\,(\Omega_2 \cosh\Theta - \varphi_2 \operatorname{senh}\Theta - 2\,\psi_2\,e^{-\xi}) + \\ + 4\,\Omega_1\,\psi_2\,\sigma_2 = 0,$$

saranno soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial \varphi'_2}{\partial u} = \varphi'_2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial u} + \Omega'_2\,\frac{\partial \Theta_2}{\partial u} + \frac{2\,\psi'_2}{\operatorname{senh}\Theta_2}\,e^{\xi_2}\,\frac{\partial \xi_2}{\partial u} - 2\,\lambda_2\,,$$

$$\frac{\partial \Omega'_2}{\partial v} = \Omega'_2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial v} + \varphi'_2\,\frac{\partial \Theta_2}{\partial v} - \frac{2\,\psi'_2}{\cosh\Theta_2}\,e^{-\xi_2}\,\frac{\partial \xi_2}{\partial v} + 2\,\mu_2\,.$$

Si conclude che la trasformazione che porta da G_2 alla nuova superficie è ancora una D_m, sicchè detta G' la quarta superficie così determinata si passa da G a G' in due differenti maniere; operando cioè:

una trasformazione D_m che porta G in G_1,
ed una trasformazione D_n che porta G_1 in G';

oppure

una trasformazione D_n che porta G in G_2,
ed una trasformazione D_m che porta G_2 in G'.

Frattanto nel caso attuale il teorema di permutabilità prende la forma seguente:

Se di una superficie G si ottengono due nuove superficie G_1 e G_2 mediante le trasformazioni D_n e D_m, esiste una quarta superficie G', pienamente determinata e costruibile in termini finiti, che è legata alla sua volta alle medesime G_1 e G_2 da due trasformazioni D_m e D_n colle costanti n, m invertite (*).

21. Terminiamo questo lavoro osservando che dalle formole precedenti si deduce un metodo di trasformazioni per le superfici di Guichard (superficie N), pensando una superficie di Guichard come una superficie G coniugata alla sua rappresentazione sferica.

Per una superficie N sussiste la trasformazione esposta ai numeri (17) e (18); se inoltre assumiamo

$$\sqrt{E_0} = \frac{D}{\sqrt{E}}, \qquad \sqrt{G_0} = \frac{D''}{\sqrt{G}},$$

la (95) prende la forma

$$2\,w + \Omega \operatorname{senh}\Theta - \varphi \cosh\Theta + 2\,\psi\, e^{-\xi}\left(\cosh\Theta \frac{D''}{\sqrt{G}} - \operatorname{senh}\Theta \frac{D}{\sqrt{E}}\right) = 0,$$

e la trasformata della superficie N è ancora una N.

Si ritrova così la trasformazione di Eisenhart per le superficie N, fatta conoscere dall'autore nella memoria *Transformations of Surfaces of Guichard and Surfaces applicable to quadrics* [Annali di Matematica, T. XXII della serie III, pag. 191 e seguenti].

Messina, 15 Dicembre 1918.

(*) Si confronti per analogia il teorema dato dal Bianchi nella Memoria: *Ricerche sulle superficie isoterme, ecc.*, sopra citata.

Sulle trasformazioni delle superficie di Guichard.

(*Di* Pasquale Calapso, *a Messina.*)

In una Memoria: *Sulla teoria generale delle trasformazioni di Ribaucour*, ho stabilito una notevole configurazione a cui danno luogo le quattro superficie del teorema di permutabilità, che si riassume nei seguenti risultati:

I. *Se S ed S_1 sono le due falde di un inviluppo di Ribaucour, le tangenti isotrope nei punti corrispondenti P e P_1 si tagliano in due punti P_0 e P'_0; la retta $P_0 P'_0$ descrive una congruenza ciclica e i puuti P_0 e P'_0 descrivono due superficie formanti alla loro volta le due falde focali di un nuovo inviluppo di sfere* (*).

Se S, S_1, S_2, S' sono quattro superficie del teorema di permutabilità e tali che diano luogo ad un sistema K di seconda specie, siano:

P_0 e P'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S ed S_1,
Q_0 e Q'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S ed S_2,
M_0 e M'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S_1 ed S',
N_0 e N'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di S_2 ed S',

e si indichino rispettivamente con

$$\Sigma_1,\quad \Sigma_2,\quad \Sigma_3,\quad \Sigma_4$$

le sfere che danno origine agli inviluppi

$$(S_2,\, S');\quad (S_1,\, S');\quad (S,\, S_2);\quad (S,\, S_1);$$

(*) Il sistema ortogonale comune alle superficie descritte dai punti P_0 e P'_0 non corrisponde alle linee di curvatura di S se non in casi particolari.

considerando le coppie di punti

$$P_0 \text{ e } P'_0; \quad Q_0 \text{ e } Q'_0; \quad M_0 \text{ e } M'_0; \quad N_0 \text{ e } N'_0;$$

si ha:

II. *Le rette $P_0 P'_0$, $Q_0 Q'_0$, $M_0 M'_0$, $N_0 N'_0$ concorrono in un punto O' situato sul raggio della congruenza K.*

III. *Il prodotto delle distanze che il punto O' ha dai punti di ciascuna coppia è uguale al quadrato della distanza del punto O' da un punto qualunque del cerchio K.*

IV. *I sei punti ottenuti sopprimendo la r^{ma} coppia appartengono alla sfera Σ_r.*

V. *I quattro punti, che si ottengono prendendo ad arbitrio due punti di una coppia e due punti di un'altra coppia, appartengono sempre ad un circolo.*

In questo lavoro è fatta un'applicazione al caso particolare delle superficie di Guichard (*superficie N*); per queste superficie si ha una trasformazione fatta conoscere da Eisenhart in una importante Memoria (*), la quale è una particolare trasformazione di Ribaucour. Essa trasforma una superficie di Guichard in infinite nuove superficie di Guichard, e si effettua mediante l'integrazione di un sistema completo contenente esplicitamente nelle formole una costante arbitraria m, per il chè la trasformazione è qui indicata con E_m.

L'autore ha fatto conoscere per queste trasformazioni il teorema di permutabilità sotto la forma seguente:

Se di una superficie N si ottengono due nuove superficie N_1 e N_2 mediante le trasformazioni E_m ed E_n, esiste una quarta superficie N' pienamente determinata e costruibile in termini finiti che è legata alla sua volta alle medesime superficie N_1 e N_2 da due trasformazioni E_n ed E_m colle costanti n, m invertite.

Le quattro superficie N, N_1, N_2, N' formano evidentemente una quaterna di superficie per la quale sussistono i teoremi sopra enunciati.

Prendiamo $n = -\frac{1}{2}$ ed attribuiamo alla costante m un valore qualunque $\left(\text{diverso da } -\frac{1}{2}\right)$; si sa che i punti Q_0 e Q'_0 descrivono due superficie iso-

(*) Eisenhart, *Transformations of surfaces of Guichard and surfaces applicable to quadrics* [Annali di Matematica, Tomo XXII della serie III, pag. 191 e seguenti].

terme corrispondentisi per trasformazione di DARBOUX $\left(D_{\frac{1}{2}}\right)$ (*) e similmente i punti M_0 ed M'_0.

Ma si ha ancora una circostanza notevole; le normali alle superficie (Q_0) ed (M_0) si tagliano in un punto equidistante da Q_0 ed M_0 e quindi le superficie descritte dai punti Q_0 ed M_0 si corrispondono in un nuovo inviluppo di sfere. Similmente per Q'_0 ed M'_0.

Questo teorema fu da me osservato nel 1917; e si presentò così spontanea la questione di caratterizzare la trasformazione che porta da (Q_0) in (M_0).

In tale occasione la detta questione fu da me proposta al mio Assistente E. RAGAZZI nella sua tesi di laurea, in cui con procedimento analitico diretto ha ritrovato il teorema sotto la forma seguente:

Due superficie N ed N_1, corrispondentisi per trasformazione E_m, si portano per convenienti trasformazioni G (di Guichard) in due superficie isoterme I ed I_1 corrispondentisi per trasformazione di Darboux D_{-m}.

Ritornando dunque alla configurazione delle quattro superficie N, N_1, N_2, N' vediamo ora che essa dà luogo a quattro superficie isoterme (Q_0), (M_0), (Q'_0), (M'_0) tali che:

si passa da (Q_0) ad (M_0) con una trasformazione D_{-m},

si passa da (Q_0) a (Q'_0) con una trasformazione $D_{\frac{1}{2}}$,

si passa da (M'_0) ad (M_0) con una trasformazione $D_{\frac{1}{2}}$,

si passa da (M'_0) a (Q'_0) con una trasformazione D_{-m};

in altri termini *le quattro superficie N, N_1, N_2, N' danno luogo colla costruzione suddetta ad una quaterna di superficie isoterme del teorema di permutabilità di Bianchi* (**), *ed il circolo dei quattro punti Q_0, Q'_0, M_0, M'_0 descrive un nuovo sistema K di seconda specie.*

Si osserva infine che il passaggio da N a N_1 si ottiene pure operando dapprima una G che porta la superficie N in una superficie isoterma (Q_0), indi una D_{-m} che porta (Q_0) in (M_0) e poi una G^{-1} che porta (M_0) in N_1.

(*) Vedasi GUICHARD, *Sur les surfaces isothermiques* [Comptes Rendus, vol. 130, pag. 159].

(**) BIANCHI, *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche* [Annali di Matematica, Tomo XI della serie III, pag. 93 e seguenti].

Se in particolare $m = -\frac{1}{2}$ possiamo ritenere che le superficie N_1 ed N_2 coincidano, e così pure N ed N'; in tal caso i punti Q_0 ed M_0 coincidono rispettivamente in P_0 e P'_0 e la trasformazione $E\left(-\frac{1}{2}\right)$ si identifica con quella da me osservata nel 1905 e indicata con $G\,\overline{G}^{-1}$ (*).

Nella presente Memoria sono altresì esposte alcune ricerche complementari sulle trasformazioni delle superficie N; in particolare è stabilita una nuova classe di trasformazioni che si collegano colle trasformazioni E_m.

L'andamento di tali ricerche è inspirato sulle ricerche analoghe del Bianchi nella Memoria: *Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme* (**).

Il teorema fondamentale è che *una coppia di superficie N, N_1, legate da una trasformazione E_m, determina intrinsecamente un'altra coppia Σ, $\overline{\Sigma}$ corrispondentisi per trasformazione parallela di Guichard.*

Il passaggio dalle superficie N, N_1 della prima coppia alle corrispondenti Σ, $\overline{\Sigma}$ della seconda si dirà la *trasformazione C_m, associata alla E_m.*

Il teorema è invertibile, cioè: *Da due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ corrispondentisi per trasformazione parallela di Guichard sono sempre deducibili, per trasformazione C_m^{-1}, due superficie N ed N_1 corrispondentisi in una E_m.*

La trasformazione C_m è suscettibile di una importante generalizzazione che si fonda sull'osservazione seguente.

Il passaggio dalla superficie N alla trasformata N_1 è definito da cinque funzioni trasformatrici

$$\lambda, \quad \mu, \quad w, \quad \psi, \quad \sigma$$

assoggettate a soddisfare ad un sistema illimitatamente integrabile [il sistema (1) della presente Memoria] ed inoltre all'equazione in termini finiti

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\, m\, \psi\, \sigma. \tag{I}$$

Ora se si considera un sistema di funzioni che soddisfi al sistema (1) *senza verificare la* (I), ne risulta determinata intrinsecamente una superficie di Guichard, la quale però, invece che nello spazio euclideo, ha esistenza in uno spazio di curvatura costante.

(*) Vedasi la mia Memoria: *Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni* [Annali di Matematica, Tomo XI della serie III, pag. 201 e seguenti; formole (76), (77), (78)].

(**) Vedasi *Annali di Matematica*, Tomo XII della serie III, pag. 19 e seguenti.

Ho creduto allora opportuno di estendere agli spazi di curvatura costante la teoria delle trasformazioni delle superficie di GUICHARD, precedentemente stabilita nel caso euclideo. Ho dimostrato così che esiste per le superficie Σ (di GUICHARD) dello spazio di curvatura costante una trasformazione analoga alla E_m, che ho espresso in coordinate di WEIERSTRASS; tale trasformazione fa passare da una superficie Σ ad una superficie Σ' formante con la Σ la superficie focale completa di un inviluppo di sfere.

Procedendo nello studio di tali trasformazioni nello spazio di curvatura costante (che ho ancora chiamato trasformazioni E_m), ho anche formato l'immagine di una E_m dello spazio di curvatura costante nello spazio euclideo e sono pervenuto al seguente teorema:

Se due superficie Σ, Σ_1 dello spazio di curvatura costante sono legate da una trasformazione E_m, le loro immagini nello spazio euclideo N ed N_1 sono pure legate da una trasformazione E_m (con la stessa costante m).

Anche nello spazio di curvatura costante sussiste la trasformazione C_m associata alla E_m; *essa conduce ad una superficie N dello spazio euclideo* (*), ma con una opportuna generalizzazione si ottiene una superficie di GUICHARD esistente in uno spazio di curvatura costante K_1 arbitrariamente assegnata.

Ho infine stabilito una trasformazione che porta una superficie Σ di GUICHARD dello spazio di curvatura costante in superficie isoterma dello stesso spazio. Tale trasformazione analoga alla G (di GUICHARD) è ancora chiamata *trasformazione G* (**).

Ho dimostrato che *l'immagine nello spazio euclideo di una trasformazione G dello spazio di curvatura costante è ancora una trasformazione G, e viceversa.*

Come conseguenza rimangono estesi agli spazi di curvatura costante i teoremi relativi alla decomposizione di una trasformazione E_m in trasformazioni di GUICHARD e di DARBOUX.

Infatti siano Σ, Σ' due superficie di GUICHARD dello spazio di curvatura costante legate tra loro da una trasformazione E_m, e formiamo le immagini dello spazio euclideo che indichiamo con N, N'. Sappiamo che queste superficie N ed N' si portano per convenienti trasformazioni G in due superficie isoterme I ed I', corrispondenti per trasformazione di DARBOUX.

(*) Vedasi il teorema analogo del BIANCHI della Memoria: *Complementi, ecc.*, sopra citata; pag. 49.

(**) La trasformazione G nello spazio euclideo fu da me studiata ampiamente nella citata Memoria [*Alcune superficie di Guichard, ecc.*].

Se ora si formano le immagini delle superficie

$$N, \quad I, \quad I', \quad N'$$

nello spazio di curvatura costante otteniamo le quattro superficie

$$\Sigma, \quad I_1, \quad I'_1, \quad \Sigma',$$

in cui I_1 ed I'_1 sono ancora isoterme e si corrispondono per inviluppo conforme di sfere; inoltre si è detto che I_1 ed I'_1 si deducono rispettivamente da Σ e Σ' per trasformazioni G. Dunque anche nello spazio di curvatura costante *due superficie Σ e Σ', corrispondentisi per trasformazione E_m, si portano per convenienti trasformazioni G (di Guichard) in due superficie isoterme corrispondentisi per inviluppo conforme di sfere.*

§ 1. — Le trasformazioni di Eisenhart.

1. Abbiasi una superficie N di Guichard, per la quale denotiamo con x, y, z le coordinate del punto che descrive la superficie e con X_i, Y_i, Z_i i coseni direttori degli spigoli del triedro principale; inoltre manteniamo secondo l'uso le notazioni

$$\sqrt{E} = e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta, \quad \sqrt{G} = e^{\xi} \cosh \Theta,$$

$$\frac{D}{\sqrt{E}} = \cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta, \quad \frac{D''}{\sqrt{G}} = \operatorname{senh} \Theta + H \cosh \Theta.$$

Per ottenere una trasformata N_1 di Eisenhart basta assumere una soluzione del sistema

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -\left(\operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) \mu + (\cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta)\, w + m\, \varphi \\
\frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \left(\coth \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) \mu \\
\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \left(\operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) \lambda \\
\frac{\partial \mu}{\partial v} &= -\left(\coth \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) \lambda + (\operatorname{senh} \Theta + H \cosh \Theta)\, w + m\, \Omega
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u} &= -(\cosh\Theta + H\,\mathrm{senh}\,\Theta) \\
\frac{\partial w}{\partial v} &= -(\mathrm{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta)\,\mu \\
\frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^{\xi}\,\mathrm{senh}\,\Theta\,\lambda \\
\frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^{\xi}\cosh\Theta\,\mu \\
\frac{\partial \sigma}{\partial u} &= \frac{\lambda}{\psi}(\varphi - \sigma e^{\xi}\,\mathrm{senh}\,\Theta) \\
\frac{\partial \sigma}{\partial v} &= \frac{\mu}{\psi}(\Omega - \sigma e^{\xi}\cosh\Theta)
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

in cui φ ed Ω hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \mathrm{senh}\,\Theta\left[\sigma e^{\xi} + \psi e^{-\xi} + \psi e^{-\xi}\left(H + e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2\right] + \\
&\qquad + 2\psi e^{-\xi}\cosh\Theta\left(H + e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right), \\
\Omega &= \cosh\Theta\left[\sigma e^{\xi} + \psi e^{-\xi} + \psi e^{-\xi}\left(H + e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2\right] + \\
&\qquad + 2\psi e^{-\xi}\,\mathrm{senh}\,\Theta\left(H + e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

e tale che si abbia

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2\,m\,\psi\,\sigma. \tag{3}$$

La superficie trasformata N_1 è data dalle equazioni

$$x_1 = x - \frac{1}{m\,\sigma}(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3), \tag{4}$$

e gli elementi N_1 della nuova superficie di Guichard N_1 si hanno subito dalle formole generali (5) e (6) della citata Memoria, adottando i segni

$$\varepsilon' = -1\,; \quad \varepsilon'' = 1$$

e si ha:

$$\left.\begin{aligned} e^{\xi_1}\operatorname{senh}\Theta_1 &= -\operatorname{senh}\Theta\left[\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}+\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2\right]- \\ &\qquad -2\cosh\Theta\,\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right), \\ e^{\xi_1}\cosh\Theta_1 &= \cosh\Theta\left[\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}+\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2\right]+ \\ &\qquad +2\operatorname{senh}\Theta\,\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right), \end{aligned}\right\}\quad (5$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\xi_1} &= \frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}-\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2, \\ H_1 &= H+\frac{w}{\psi\sigma}\left[\sigma e^{\xi}-\psi e^{-\xi}+\psi e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\}\quad (6)$$

Nelle formole di trasformazione comparisce una costante arbitraria m (diversa da zero) onde la trasformazione viene indicata con E_m.

2. Notiamo fin da ora che alle equazioni di trasformazione si può dare altra forma, introducendo le funzioni ausiliarie

$$\left.\begin{aligned} l &= e^{\xi}\frac{\lambda}{\psi}-\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u}, \\ h &= e^{\xi}\frac{\mu}{\psi}-\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial v}; \end{aligned}\right\}\quad (7)$$

si ottiene allora per le funzioni Θ_1, l, h il sistema illimitatamente integrabile

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Theta_1}{\partial u} &= -\frac{\partial\Theta}{\partial u}+l(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta) \\ \frac{\partial\Theta_1}{\partial v} &= -\frac{\partial\Theta}{\partial v}-h(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta) \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}-h\frac{\partial\Theta}{\partial v}-\frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta\,(l^2-h^2+2W)- \\ &\qquad -\frac{(2m+1)\operatorname{senh}\Theta_1}{\cosh(\Theta_1+\Theta)+1} \\ \frac{\partial l}{\partial v} &= h\frac{\partial\Theta}{\partial u}-\cosh\Theta\,.\,l\,h \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\}\quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial u} &= l\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \operatorname{senh}\Theta\,.\,l\,h \\
\frac{\partial h}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - l\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\cosh\Theta\,(l^2 - h^2 + 2W) + \\
&\qquad + \frac{(2m+1)\cosh\Theta_1\ (*)}{\cosh(\Theta_1+\Theta)+1}\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \tag{8}$$

Inversamente da una soluzione di questo sistema si deduce un sistema di funzioni trasformatrici nel seguente modo: esiste e si determina per quadrature una funzione ψ dalle equazioni

$$\frac{\partial \log\psi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial u} + l\operatorname{senh}\Theta\,,$$

$$\frac{\partial \log\psi}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial v} + h\cosh\Theta\,;$$

indi si porrà

$$= \psi\, e^{-\xi}\left(l + \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\right),$$

$$\mu = \psi\, e^{-\xi}\left(h + \frac{1}{\cosh\Theta}\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\right),$$

$$w = -\,\psi\, e^{-\xi}\left[H + \frac{\operatorname{senh}(\Theta_1+\Theta)}{\cosh(\Theta_1+\Theta)+1}\right],$$

$$\sigma = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + w^3}{2\,m\,\psi}\,.$$

3. Le trasformazioni E_m si possono anche dedurre dalle trasformazioni delle superficie G da me studiate nella precedente Memoria, osservando che una superficie N si può considerare come una G, che ammetta come superficie coniugata la sua rappresentazione sferica. Sussiste inoltre, come per le superficie G, il teorema di permutabilità, e cioè:

Se di una superficie N si ottengono due nuove superficie N_1 e N_2 mediante le trasformazioni E_m ed E_n, esiste una quarta superficie N' pienamente determinata e costruibile in termini finiti che è legata alla sua volta alle medesime superficie N_1 ed N_2 da due trasformazioni E_n ed E_m colle costanti n, m invertite.

(*) Con W intendesi la funzione che io ho introdotto nella Memoria: ***Alcune superficie di Guichard***, ecc., a pag. 212.

Il teorema sotto questa forma è dovuto ad EISENHART, ed è stato dimostrato sulla traccia del teorema analogo del BIANCHI per le trasformazioni delle superficie isoterme.

Qui interessa il caso

$$n = -\frac{1}{2}\,; \quad m = -\frac{1}{2}\,.$$

Indichiamo al solito con

$$\lambda_1\,, \quad \mu_1\,, \quad w_1\,, \quad \psi_1\,, \quad \sigma_1$$

il sistema di funzioni trasformatrici nel passaggio da N ad N_1, e con

$$\lambda_2\,, \quad \mu_2\,, \quad w_2\,, \quad \psi_2\,, \quad \sigma_2$$

quello relativo al passaggio da N ad N_2; il sistema di funzioni trasformatrici nel passaggio da N_1 ad N' è dato da espressioni della forma

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_1 &= \frac{A}{\psi_1\,\sigma_1}\,\lambda_1 + (n-m)\,\lambda_2\,, \\ \mu'_1 &= -\frac{A}{\psi_1\,\sigma_1}\,\mu_1 - (n-m)\,\mu_2\,, \\ w'_1 &= \frac{A}{\psi_1\,\sigma_1}\,w_1 + (n-m)\,w_2\,, \\ \psi'_1 &= \frac{A}{\psi_1\,\sigma_1}\,\psi_1 + (n-m)\,\psi_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Per il valore particolare che abbiamo attribuito alla costante n possiamo ritenere per A il valore

$$A = \lambda_1\,\lambda_2 + \mu_1\,\mu_2 + \frac{1}{2}\,(\psi_1\,\sigma_2 + \psi_2\,\sigma_1) + \frac{1}{2}\,w_1^2\,\frac{\psi_2}{\psi_1} + \frac{1}{2}\,w_2^2\,\frac{\psi_1}{\psi_2}\,; \tag{10}$$

ne risulta facilmente la relazione

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{\psi_2\,\psi'_1}{(\lambda_2 + i\,\mu_2)\,(\lambda'_1 + i\,\mu'_1)}\,\frac{\sigma_1}{\psi_1} - \frac{\psi_2\,\psi'_1}{(\lambda_2 + i\,\mu_2)\,(\lambda'_1 + i\,\mu'_1)}\,\frac{w_1^2}{\psi_1^2} - \\ - \frac{\psi'_1}{\lambda'_1 + i\,\mu'_1}\,\frac{\lambda_1 - i\,\mu_1}{\psi_1} - \frac{\psi_2}{\lambda_2 + i\,\mu_2}\,\frac{\lambda_1 + i\,\mu_1}{\psi_1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

4. Da questa discendono conseguenze importanti; se si pone cioè

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2} e^{\xi_1} \frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2} \frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1} + \frac{1}{2} e^{-\xi}(1 - H^2) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2} \frac{\lambda_1 - i\mu_1}{\psi_1} (e^{\xi_1} - e^{\xi}),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

e si tiene conto della relazione

$$e^{-\xi_1}(1 - H_1^2) - e^{-\xi}(1 - H^2) = -(e^{\xi_1} - e^{\xi})\left(\frac{\sigma_1}{\psi_1} + \frac{w_1^2}{\psi_1^2}\right)$$

e della (11), si ottiene per ρ l'espressione equivalente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2} e^{\xi} \frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2} \frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1} + \frac{1}{2} e^{-\xi_1}(1 - H_1^2) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1} \frac{\lambda_1 + i\mu_1}{\psi_1} (e^{\xi_1} - e^{\xi}),\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ed anche

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2} e^{\xi_1} \frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1} \frac{\lambda_1 + i\mu_1}{\psi_1} - \frac{1}{2} \frac{w_1^2}{\psi_1^2} (e^{\xi_1} - e^{\xi}) + \\ + H \frac{w_1}{\psi_1} - \frac{1}{2} e^{\xi} \frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2} \frac{\lambda_1 - i\mu_1}{\psi_1}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ciò premesso indichiamo come al solito con Q_0 e Q'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di N ed N_2, e con M_0 ed M'_0 i punti comuni alle tangenti isotrope di N_1 e N'; le coordinate di Q_0 ed M_0 sono rispettivamente

$$x - \frac{\psi_2}{\lambda_2 + i\mu_2}(X_1 + iX_2),$$

$$x_1 - \frac{\psi'_1}{\lambda'_1 + i\mu'_1}(X_1^{(1)} + iX_2^{(1)}) \text{ (*)}.$$

Si sa che i punti Q_0 ed M_0 descrivono due superficie isoterme; i coseni

(*) Con $X_i^{(1)}$, $Y_i^{(1)}$, $Z_i^{(1)}$ indichiamo al solito i coseni direttori degli spigoli del triedro principale di N_1.

direttori della normale alla superficie (Q_0) sono dati dalle formole

$$X_3^{(0)} = -\frac{1}{2}e^{-\xi}\frac{\psi_2}{\lambda_2 + i\mu_2}(1 - H^2)(X_1 + iX_2) - \\ - \frac{1}{2}e^{\xi}\frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2}(X_1 - iX_2) + HX_3,$$

e quelli della normale alla superficie (M_0) sono dati dalle formole

$$X'^{(0)}_3 = -\frac{1}{2}e^{-\xi_1}\frac{\psi'_1}{\lambda'_1 + i\mu'_1}(1 - H_1^2)(X_1^{(1)} + iX_2^{(1)}) - \\ - \frac{1}{2}e^{\xi_1}\frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1}(X_1^{(1)} - iX_2^{(1)}) + H_1 X_3^{(1)}.$$

Prendiamo sulla normale alla superficie (Q_0) il punto situato alla distanza ρ dal punto Q_0; tenendo conto dell'espressione (12) di ρ si vede che il punto richiesto ha le coordinate

$$\frac{x_0}{\rho} = \frac{x}{\rho} + \left[\frac{1}{2}e^{\xi_1}\frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_1 - i\mu_1}{\psi_1}(e^{\xi_1} - e^{\xi}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}e^{\xi}\frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2}\right]X_1 + \\ + \left[\frac{1}{2}e^{\xi_1}\frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1} - \frac{1}{2}\frac{\lambda_1 - i\mu_1}{\psi_1}(e^{\xi_1} - e^{\xi}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}e^{\xi}\frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2}\right]iX_2 - HX_3.$$

Similmente prendiamo sulla normale alla superficie (M_0) il punto situato alla medesima distanza ρ; per la espressione (13) di ρ abbiamo

$$\frac{x'_0}{\rho} = \frac{x_1}{\rho} + \left[\frac{1}{2}e^{\xi}\frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_1 + i\mu_1}{\psi_1}(e^{\xi_1} - e^{\xi}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}e^{\xi_1}\frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1}\right]X_1^{(1)} + \\ + \left[\frac{1}{2}e^{\xi}\frac{\lambda_2 + i\mu_2}{\psi_2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_1 + i\mu_1}{\psi_1}(e^{\xi_1} - e^{\xi}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}e^{\xi_1}\frac{\lambda'_1 + i\mu'_1}{\psi'_1}\right]iX_2^{(1)} - H_1 X_3^{(1)}.$$

Se ora esprimiamo in queste ultime x_1, $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$ mediante le quantità analoghe relative alla superficie N, ed osserviamo le (6) e la terza espressione di ρ, riconosciamo subito

$$x'_0 = x_0 .$$

Dunque: *Le normali alle superficie* (Q_0) *ed* (M_0) *si tagliano in un punto equidistante dai punti* Q_0 *ed* M_0, *e perciò le superficie isoterme descritte dai punti* Q_0 *ed* M_0 *si corrispondono in un nuovo inviluppo di sfere.*

Si dimostra col calcolo diretto che il passaggio da (Q_0) ad (M_0) è proprio una trasformazione di Darboux D_{-m}; segue allora facilmente che

si passa da (Q_0) *a* (M_0) *con una* D_{-m},
si passa da (Q_0) *a* (Q'_0) *con una* $D_{\frac{1}{2}}$,
si passa da (M'_0) *a* (M_0) *con una* $D_{\frac{1}{2}}$,
si passa da (M'_0) *a* (Q'_0) *con una* D_{-m};

in altri termini *le quattro superficie isoterme* (Q_0), (Q'_0), (M_0), (M'_0) *formano una quaterna di superficie del teorema di permutabilità di Bianchi, ed il circolo dei quattro punti* Q_0, Q'_0, M_0, M'_0 *descrive un nuovo sistema* K *di seconda specie.*

I teoremi precedenti mostrano altresì che il passaggio da N ad N_1 si ottiene pure operando dapprima una trasformazione G che porta la superficie N in una superficie isoterma (Q_0), indi una D_{-m} che porta (Q_0) in (M_0), ed infine una G^{-1} che porta (M_0) in N_1.

Se in particolare $m = -\frac{1}{2}$ possiamo ritenere che le superficie N_1 ed N_2 coincidano e così pure N ed N'; in tal caso i punti Q_0 ed M_0 coincidono coi punti comuni alle tangenti isotrope di N ed N_1 e la trasformazione si riduce alla $G\,\overline{G}^{-1}$.

Ciò risulta pure dalle (8), che per $m = -\frac{1}{2}$ si riducono appunto alle (76), (77) e (78) della mia citata Memoria [*Alcune superficie di Guichard, ecc.*].

§ 2. — La trasformazione C_m associata alla E_m.

5. In questo paragrafo faremo conoscere una nuova trasformazione per le superficie di Guichard, che si comporta in modo analogo alla trasformazione delle superficie isoterme associata alla D_m di Darboux.

Consideriamo una superficie N ed una sua trasformata N_1 mediante una E_m $\left(m \neq -\frac{1}{2}\right)$. Siano

$$\lambda, \quad \mu, \quad w, \quad \psi, \quad \sigma$$

le corrispondenti funzioni trasformatrici che soddisfano al sistema differenziale (1) ed all'equazione (3). Dimostreremo che:

Esiste una nuova superficie di Guichard Σ, il cui elemento lineare riferito alle linee di curvatura è

$$d s^2 = \frac{e^{2\xi}}{\psi^2} (\operatorname{senh}^2 \Theta \, d u^2 + \cosh^2 \Theta \, d v^2), \tag{15}$$

ed i coefficienti della seconda forma fondamentale hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= e^{\xi'} \operatorname{senh} \Theta \, . \sqrt{2 m + 1} \, (\cosh \Theta + H' \operatorname{senh} \Theta), \\ \Delta'' &= e^{\xi'} \cosh \Theta \, . \sqrt{2 m + 1} \, (\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

in cui

$$e^{\xi'} = \frac{e^{\xi}}{\psi}, \qquad H' = H + e^{\xi} \frac{w}{\psi}. \tag{17}$$

Per la dimostrazione occorre provare che sono soddisfatte le equazioni di Codazzi e l'equazione di Gauss relative all'elemento lineare (15).

Dalle (16) per derivazione si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2 m + 1}} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\Delta}{e^{\xi'} \operatorname{senh} \Theta}\right) = (\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial v} +$$
$$+ \operatorname{senh} \Theta \left[(\operatorname{tgh} \Theta + H') \frac{\partial \xi}{\partial v} - e^{\xi} \frac{\mu}{\psi} (\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta)\right]$$

che si riduce subito alla forma

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\Delta}{e^{\xi'} \operatorname{senh} \Theta}\right) = \frac{\Delta''}{e^{\xi'} \cosh \Theta} \left(\operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial \xi'}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right).$$

Analogamente si prova che è soddisfatta l'altra equazione di CODAZZI.

In quanto all'equazione di GAUSS, partendo dalle (17) e tenendo conto delle equazioni differenziali (1) e delle espressioni (2) di φ ed Ω (*e nulla affatto appoggiandoci sulla* (3)), otteniamo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + \coth \Theta \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + \operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial^2 \xi'}{\partial v^2} - \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \xi'}{\partial u} + \\ &+ \frac{1}{\cosh^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial \xi'}{\partial v} + (2m+1)(\cosh \Theta + H' \operatorname{senh} \Theta)(\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta) = \\ &= \frac{e^{2\xi}}{\psi^2} \operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta \, (\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2 m \psi \sigma). \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

E così se ora teniamo conto della (3), l'equazione di GAUSS è pure soddisfatta e il teorema è stabilito.

Il passaggio dalla coppia (N, N_1) di superficie trasformate di EISENHART alla nuova superficie di GUICHARD Σ si dirà la *trasformazione* C_m *associata alla* E_m.

§ 3. — EFFETTO DELLA TRASFORMAZIONE C_m SULLA COPPIA (N, N_1).

6. Le considerazioni svolte nel precedente paragrafo si possono ripetere assumendo come superficie di partenza la N_1; si sa che le funzioni trasformatrici relative al passaggio inverso da N_1 ad N sono

$$\frac{\lambda}{\psi \sigma}, \quad -\frac{\mu}{\psi \sigma}, \quad \frac{w}{\psi \sigma}, \quad \frac{1}{\sigma}, \quad \frac{1}{\psi},$$

e si ha allora una seconda superficie di GUICHARD $\overline{\Sigma}$, il cui elemento lineare ha la forma

$$d s^2 = \sigma^2 e^{2\xi_1} (\operatorname{senh}^2 \Theta_1 \, d u^2 + \cosh^2 \Theta_1 \, d v^2),$$

ed i coefficienti della seconda forma fondamentale hanno le espressioni

$$\overline{\Delta} = \sigma e^{\xi_1} \operatorname{senh} \Theta_1 (\cosh \Theta_1 + H' \operatorname{senh} \Theta_1),$$

$$\overline{\Delta}'' = \sigma e \quad \cosh \Theta_1 (\operatorname{senh} \Theta_1 + H' \cosh \Theta_1).$$

Avendosi

$$\cosh \Theta_1 + H' \operatorname{senh} \Theta_1 = \cosh \Theta + H' \operatorname{senh} \Theta,$$

$$\operatorname{senh} \Theta_1 - H' \cosh \Theta_1 = \operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta,$$

risulta subito che le superficie Σ e Σ *hanno la stessa rappresentazione sferica delle linee di curvatura.*

Inoltre denotando con r_1 ed r_2 i raggi principali di curvatura di Σ e con r'_1 ed r'_2 i raggi di $\overline{\Sigma}$, si ha

$$r_2 = \frac{-\frac{e^{\xi}}{\psi} \operatorname{senh} \Theta}{\sqrt{2m+1}\,(\cosh \Theta + H' \operatorname{senh} \Theta)},$$

$$r_1 = \frac{-\frac{e^{\xi}}{\psi} \cosh \Theta}{\sqrt{2m+1}\,(\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta)},$$

$$r'_2 = \frac{-\sigma e^{\xi_1} \operatorname{senh} \Theta_1}{\sqrt{2m+1}\,(\cosh \Theta + H' \operatorname{senh} \Theta)},$$

$$r'_1 = \frac{\sigma e^{\xi_1} \cosh \Theta_1}{\sqrt{2m+1}\,(\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta)};$$

donde segue facilmente

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = -\frac{2}{2m+1}. \tag{19}$$

Siamo così condotti al teorema seguente:

La trasformazione C_m cangia la coppia di superficie N ed N_1, corrispondentisi per trasformazione $E_m \left(m \neq -\frac{1}{2}\right)$, in due superficie Σ e $\overline{\Sigma}$ corrispondentisi per trasformazione parallela di Guichard.

§ 4. — Inversione del risultato precedente.

7. Siano Σ e $\overline{\Sigma}$ due superficie di Guichard corrispondentisi per trasformazione parallela con la relazione (19); possiamo ritenere la Σ definita dalle tre funzioni fondamentali Θ, ξ', H' soddisfacenti al sistema fonda-

mentale

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2\Theta\left(\frac{\partial \xi'}{\partial v}\right)^2 + \coth\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi'}{\partial u} - \operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi'}{\partial v} - \\
&\quad - \frac{2m+1}{2}\operatorname{senh}^2\Theta\,(1+H'^2) - (2m+1)\,H'\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \\
&\quad - \operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + W\operatorname{senh}^2\Theta \\
\frac{\partial^2 \xi'}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial \xi'}{\partial u}\,\frac{\partial \xi'}{\partial v} + \coth\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi'}{\partial u} + \operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi'}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 \xi'}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\coth^2\Theta\left(\frac{\partial \xi'}{\partial u}\right)^2 + \operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi'}{\partial v} - \coth\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi'}{\partial u} - \\
&\quad - \frac{2m+1}{2}\cosh^2\Theta\,(1+H'^2) - (2m+1)\,H'\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \\
&\quad - \coth\Theta\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} - W\cosh^2\Theta
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H'}{\partial u} &= (H' + \coth\Theta)\,\frac{\partial \xi'}{\partial u}\,, \\
\frac{\partial H'}{\partial v} &= (H' + \operatorname{tgh}\Theta)\,\frac{\partial \xi'}{\partial v}\,;
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

e possiamo ritenere la Σ definita dalle funzioni Θ_1, ξ'', H'' date dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
e^{\xi''} &= e^{-\xi'}(1 - H'^2) \\
\operatorname{senh}\Theta_1 &= \frac{-1}{1-H'^2}\left[\operatorname{senh}\Theta\,(1+H'^2) + 2H'\cosh\Theta\right] \\
\cosh\Theta_1 &= \frac{1}{1-H'^2}\left[\cosh\Theta\,(1+H'^2) + 2H'\operatorname{senh}\Theta\right] \\
H'' &= H'.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Se si pone

$$l = -\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial \xi'}{\partial u}, \quad h = -\frac{1}{\cosh\Theta}\,\frac{\partial \xi'}{\partial v}, \tag{23}$$

si verifica con facile calcolo che sono verificate le equazioni del sistema (8) da queste funzioni l, h e dalla funzione Θ_1 data dalle (22).

8. Ciò premesso deduciamo dalla superficie Σ una superficie N, integrando il sistema completo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \coth\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} \\
&\quad - \frac{1}{2}\operatorname{senh}^2\Theta(1+H^2) - H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + W\operatorname{senh}^2\Theta \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \coth\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\coth^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \coth\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\cosh^2\Theta(1+H^2) - H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \coth\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} - W\cosh^2\Theta
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u} &= (H + \coth\Theta)\frac{\partial \xi}{\partial u} \\
\frac{\partial H}{\partial v} &= (H + \operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial \xi}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

in cui per Θ e W si pongano le stesse funzioni che compariscono nelle (20) e (21).

La superficie N si potrà ritenere definita dalla funzione Θ e dalle funzioni ξ, H dedotte dall'integrazione; inoltre per il risultato conseguito al n.° 2 si deduce subito per la N un sistema di funzioni trasformatrici determinando per quadrature una funzione ψ dalle equazioni

$$\frac{\partial \log\psi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi'}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log\psi}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi'}{\partial v},$$

e si ha

$$\psi = e^{\xi - \xi'}; \tag{26}$$

e poi si assume

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{e^{\xi'}\operatorname{senh}\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi'}{\partial u}\right), \\
\mu &= \frac{1}{e^{\xi'}\cosh\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi'}{\partial v}\right), \\
w &= -e^{-\xi'}(H - H'), \\
\sigma &= \frac{\lambda^2 + \mu^2 + w^2}{2\,m\,\psi}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

È facile vedere che il passaggio dalla superficie Σ alla N è da indicare con C_m^{-1}; giacchè se si parte dalla superficie N e si applica la trasformazione C_m, relativa alle funzioni trasformatrici (26), (27) si ricade appunto nella Σ.

Si osserva in fine che se si considera la superficie N_1, trasformata di N mediante il sistema di funzioni trasformatrici (26), (27) e si applica la trasformazione C_m alla coppia (N, N_1) si ottiene la superficie Σ e la sua trasformata per trasformazione parallela, la quale (essendo individuata) coincide con la $\overline{\Sigma}$.

Dunque: *Da due superficie Σ e $\overline{\Sigma}$, corrispondentisi per trasformazione parallela di Guichard, sono sempre deducibili per trasformazione C_m^{-1} due superficie N ed N_1 corrispondentisi in una E_m.*

§ 5. — La trasformazione C_m generalizzata.

9. La trasformazione C_m delle superficie di Guichard richiede la conoscenza di cinque funzioni

$$\lambda, \quad \mu, \quad w, \quad \psi, \quad \sigma$$

soddisfacenti alle equazioni differenziali (1) ed all'equazione in termini finiti (3).

Supponiamo ora di conoscere cinque funzioni soddisfacenti alle equazioni differenziali (1), *ma non all'equazione* (3). Dimostreremo che *le* (15) *e* (16) *definiscono una superficie in uno spazio di curvatura costante.*

Infatti le equazioni di Codazzi, anche nelle attuali ipotesi, sono soddisfatte; inoltre chiamando K la curvatura dell'elemento lineare (15), la (18) si può scrivere

$$\frac{1}{r_1\, r_2} = K + \lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2\, m\, \psi\, \sigma.$$

Ma il sistema differenziale (1) possiede l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2\, m\, \psi\, \sigma = \text{cost.}$$

onde indicando con $-K_0$ il valore della costante del secondo membro, la precedente diventa:

$$\frac{1}{r_1\, r_2} = K - K_0$$

dunque: *Se le funzioni* λ, μ, w, ψ, σ *soddisfano le equazioni differenziali* (1) *e danno all'espressione* $\lambda^2+\mu^2+w^2-2\,m\,\psi\,\sigma$ *il valore costante* $-K_0$, *le* (15) *e* (16) *definiscono una superficie* Σ *riferita alle linee di curvatura che ha esistenza nello spazio di curvatura costante* K_0.

Per gli elementi fondamentali della Σ si ha la relazione

$$\sqrt{G}\,\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\,\frac{D''}{\sqrt{G}}=\sqrt{2\,m+1}\cdot\sqrt{G-E}\,,$$

e quindi la Σ è per analogia chiamata una *superficie di Guichard nello spazio di curvatura costante* K_0.

§ 6. — Immagine di una superficie di Guichard dello spazio di curvatura costante nello spazio euclideo.

10. Partiamo ora da una superficie di Guichard dello spazio di curvatura costante K_0, e trasformiamola in una superficie di Guichard dello spazio euclideo.

La superficie proposta Σ è definita dall'elemento lineare

$$d\,s^2=e^{2\xi}\,(\operatorname{senh}^2\Theta\,d\,u^2+\cosh^2\Theta\,d\,v^2), \tag{28}$$

e dai coefficienti della seconda forma fondamentale

$$\frac{D}{e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta}=\cosh\Theta+H\operatorname{senh}\Theta\,;\quad \frac{D''}{e^{\xi}\cosh\Theta}=\operatorname{senh}\Theta+H\cosh\Theta. \tag{29}$$

Per fissare le idee poniamo $K_0=-1$, per il che le funzioni ξ, Θ, H sono legate dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial u}=(H+\coth\Theta)\,\frac{\partial\xi}{\partial u}\,,\\
&\frac{\partial H}{\partial v}=(H+\operatorname{tgh}\Theta)\,\frac{\partial\xi}{\partial v}\,,\\
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}+\coth\Theta\,\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}+\operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}-\\
&\qquad-\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\,\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{1}{\cosh^2\Theta}\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\,\frac{\partial\xi}{\partial v}+\\
&+(\cosh\Theta+H\operatorname{senh}\Theta)\,(\operatorname{senh}\Theta+H\cosh\Theta)=e^{2\xi}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Introduciamo le funzioni ausiliarie

$$\lambda', \quad \mu', \quad w', \quad \psi'$$

soddisfacenti al sistema illimitatamente integrabile

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda'}{\partial u} &= -\left(\operatorname{tgh}\Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)\mu' + (\cosh\Theta + H \operatorname{senh}\Theta)\, w' + e^{\xi} \operatorname{senh}\Theta \,.\, \psi' \\
\frac{\partial \lambda'}{\partial v} &= \left(\coth\Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)\mu' \\
\frac{\partial \mu'}{\partial u} &= \left(\operatorname{tgh}\Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)\lambda' \\
\frac{\partial \mu'}{\partial v} &= -\left(\coth\Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)\lambda' + (\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\, w' + e^{\xi}\cosh\Theta \,.\, \psi' \\
\frac{\partial w'}{\partial u} &= -(\cosh\Theta + H \operatorname{senh}\Theta)\,\lambda' \\
\frac{\partial w'}{\partial v} &= -(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\,\mu' \\
\frac{\partial \psi'}{\partial u} &= e^{\xi} \operatorname{senh}\Theta\, \lambda' \\
\frac{\partial \psi'}{\partial v} &= e^{\xi} \cosh\Theta\, \mu'
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

e poniamo

$$e^{\xi'} = \frac{e^{\xi}}{\psi'}, \quad H' = H + e^{\xi}\frac{w'}{\psi'}; \tag{32}$$

si avrà

$$\frac{\partial H'}{\partial u} = (H' + \coth\Theta)\frac{\partial \xi'}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H'}{\partial v} = (H' + \operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial \xi'}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + \coth\Theta \frac{\partial^2 \xi'}{\partial u^2} + \operatorname{tgh}\Theta \frac{\partial^2 \xi'}{\partial v^2} - \frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi'}{\partial u} +$$

$$+ \frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi'}{\partial v} + (\cosh\Theta + H' \operatorname{senh}\Theta)(\operatorname{senh}\Theta + H'\cosh\Theta) =$$

$$= \frac{e^2}{\psi'^2}(\lambda'^2 + \mu'^2 + w'^2 - \psi'^2)\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta.$$

Intanto il sistema (31) ammette l'integrale quadratico

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + w'^2 - \psi'^2 = \text{cost.};$$

quindi se si prendono le condizioni iniziali in guisa che la costante al secondo membro sia nulla, rimane individuata nello spazio euclideo una superficie di Guichard il cui elemento lineare è

$$d s^2 = \frac{e^{2\xi}}{\psi'^2} (\operatorname{senh}^2 \Theta \, d u^2 + \cosh^2 \Theta \, d v^2),$$

ed i coefficienti della seconda forma fondamentale hanno le espressioni

$$\frac{\Delta}{e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta} = \cosh \Theta + H' \operatorname{senh} \Theta, \quad \frac{\Delta''}{e^{\xi} \cosh \Theta} = \operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta.$$

È chiaro che se x, y, z indicano le coordinate del punto dell'immagine di Σ, e X_i, Y_i, Z_i i coseni del triedro principale si può porre

$$z = \frac{1}{\psi'}, \quad Z_1 = -\frac{\lambda'}{\psi'}, \quad Z_2 = -\frac{\mu'}{\psi'}, \quad Z_3 = -\frac{w'}{\psi'}.$$

§ 7. Le trasformazioni E_m nello spazio di curvatura costante.

11. Prendiamo nello spazio di curvatura costante una superficie di Guichard Σ, per la quale adottiamo le notazioni del precedente paragrafo, e consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -\left(\operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)\mu + (\cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta)\, w + m\,\varphi + e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta\, \psi \\
\frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \left(\coth \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)\mu \\
\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \left(\operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)\lambda \\
\frac{\partial \mu}{\partial v} &= -\left(\coth \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)\lambda + (\operatorname{senh} \Theta + H \cosh \Theta)\, w + m\,\Omega + e^{\xi} \cosh \Theta\, \psi \\
\frac{\partial w}{\partial u} &= -(\cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta) \\
\frac{\partial w}{\partial v} &= -(\operatorname{senh} \Theta + H \cosh \Theta)\, \mu
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial u} &= e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta\, \lambda \\
\frac{\partial \psi}{\partial v} &= e^{\xi} \cosh \Theta\, \mu \\
\frac{\partial \sigma}{\partial u} &= \frac{\lambda}{\psi} (\varphi - \sigma e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta) \\
\frac{\partial \sigma}{\partial v} &= \frac{\mu}{\psi} (\Omega - \sigma e^{\xi} \cosh \Theta)
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

in cui φ ed Ω hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \operatorname{senh} \Theta \left[\sigma e^{\xi} + \psi e^{-\xi} + \psi e^{-\xi} \left(H + e^{\xi} \frac{w}{\psi}\right)^2\right] + \\
&\qquad + 2 \psi e^{-\xi} \cosh \Theta \left(H + e^{\xi} \frac{w}{\psi}\right) \\
\Omega &= \cosh \Theta \left[\sigma e^{\xi} + \psi e^{-\xi} + \psi e^{-\xi} \left(H + e^{\xi} \frac{w}{\psi}\right)^2\right] + \\
&\qquad + 2 \psi e^{-\xi} \operatorname{senh} \Theta \left(H + e^{\xi} \frac{w}{\psi}\right) .
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Tali espressioni (33) in base alle equazioni del sistema (32) ed alle (33) stesse, soddisfano le relazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) \Omega ,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \left(\coth \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) \varphi ;$$

per il che, tenendo presenti le (30) risulta subito che il sistema (32) è illimitatamente integrabile.

Inoltre il sistema (32) ammette l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - \psi^2 - 2 m \psi \sigma = \text{cost.},$$

e possiamo scegliere i valori iniziali in guisa che si annulli la costante del secondo membro, e si abbia cioè

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - \psi^2 = 2 m \psi \sigma. \tag{34}$$

Assumiamo ora una soluzione del sistema (32) soddisfacente la (34), e chiamando con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di Weierstrass del punto P di Σ, deduciamo una seconda superficie Σ' colle formole

$$x'_i = \left(1 + \frac{\psi}{m\,\sigma}\right) x_i - \frac{1}{m\,\sigma}(\lambda\,\eta_i + \mu\,\zeta_i + w\,\xi_i). \tag{35}$$

Se introduciamo i coseni di direzione delle tangenti alle linee $v = \text{cost.}$ e $u = \text{cost.}$, abbiamo

$$\left.\begin{aligned}
\eta'_i &= \varepsilon'\left[-\frac{\lambda}{m\,\sigma}x_i + \left(\frac{\lambda^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right)\eta_i + \frac{\lambda\,\mu}{m\,\psi\,\sigma}\zeta_i + \frac{\lambda\,w}{m\,\psi\,\sigma}\xi_i\right],\\
\zeta'_i &= \varepsilon''\left[-\frac{\mu}{m\,\sigma}x_i + \frac{\lambda\,\mu}{m\,\psi\,\sigma}\eta_i + \left(\frac{\mu^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right)\zeta_i + \frac{\mu\,w}{m\,\psi\,\sigma}\xi_i\right],\\
\xi'_i &= \varepsilon'\,\varepsilon''\left[-\frac{w}{m\,\sigma}x_i + \frac{\lambda\,w}{m\,\psi\,\sigma}\eta_i + \frac{\mu\,w}{m\,\psi\,\sigma}\zeta_i + \left(\frac{w^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right)\xi_i\right],
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

e per l'elemento lineare della superficie Σ' si ha

$$F' = 0, \quad \sqrt{E'} = \varepsilon'\left(\frac{\varphi}{\sigma} - e^{\xi}\,\text{senh}\,\Theta\right), \quad \sqrt{G'} = \varepsilon''\left(\frac{\Omega}{\sigma} - e^{\xi}\cosh\Theta\right). \tag{37}$$

Inoltre derivando le ξ'_i si ha

$$-\varepsilon''\frac{\partial \xi'_i}{\partial u} = \left(\cosh\Theta + H\,\text{senh}\,\Theta + \frac{\varphi\,w}{\psi\,\sigma}\right)\cdot\eta'_i,$$

$$-\varepsilon'\frac{\partial \xi'_i}{\partial v} = \left(\text{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta + \frac{\Omega\,w}{\psi\,\sigma}\right)\cdot\zeta'_i,$$

e quindi per la seconda forma fondamentale si ha:

$$\left.\begin{aligned}
D' = 0, \quad \frac{\Delta}{\sqrt{E'}} &= \varepsilon''\left(\cosh\Theta + H\,\text{senh}\,\Theta + \frac{\varphi\,w}{\psi\,\sigma}\right),\\
\frac{\Delta''}{\sqrt{G'}} &= \varepsilon'\left(\text{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta + \frac{\Omega\,w}{\psi\,\sigma}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Si vede intanto che le linee u e v sono ancora linee di curvatura per la superficie trasformata, ed inoltre si riconosce facilmente la relazione

$$\sqrt{G'}\frac{\Delta}{\sqrt{E'}} - \sqrt{E'}\frac{\Delta''}{\sqrt{G'}} = \sqrt{G' - E'}.$$

Frattanto la trasformazione delle superficie di GUICHARD dello spazio di curvatura costante, ora stabilita, è ancora da indicarsi con E_m.

Per completare la ricerca consideriamo le normali alle due superficie Σ e Σ' in punti corrispondenti P e P'; se prendiamo sulla normale a Σ nel punto P il punto alla distanza δ data da

$$\operatorname{tgh} \delta = -\frac{\psi}{w}$$

vediamo subito che esso appartiene anche alla normale a Σ' e dista della medesima lunghezza δ dal punto P'; si conclude che Σ e Σ' sono le due falde di un inviluppo di sfere.

§ 8. — NUOVA FORMA DEI RISULTATI PRECEDENTI.

12. Deduciamo, come al n. 10, dalla superficie Σ una superficie N dello spazio euclideo; se introduciamo come al n. 2 la funzione W relativa alla superficie N, si avrà

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \coth\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\operatorname{senh}^2\Theta\,.\,(1+H^2) - H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + \\
&\quad + W\operatorname{senh}^2\Theta + \frac{1}{2}e^{2\xi}\operatorname{senh}^2\Theta \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \coth\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u} + \operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\coth^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v} - \coth\Theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\cosh^2\Theta\,.\,(1+H^2) - H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \coth\Theta\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} - \\
&\quad - W\cosh^2\Theta + \frac{1}{2}e^{2\xi}\cosh^2\Theta
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u} &= (H + \coth\Theta)\frac{\partial \xi}{\partial u} \\
\frac{\partial H}{\partial v} &= (H + \operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial \xi}{\partial v}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Le condizioni d'integrabilità di questo sistema sono

$$\frac{\partial W}{\partial u}=\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-$$
$$-\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u\,\partial v^2}-2\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}W,$$
$$\frac{\partial W}{\partial v}=-\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}-\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}+$$
$$+\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\,\partial v}-2\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}W,$$

e coincidono perfettamente con quelle delle superficie N dello spazio euclideo.
Introducendo poi le funzioni ausiliarie

$$\left.\begin{aligned}
e^{\xi_1}&=\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}-\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2,\\
e^{\xi_1}\operatorname{senh}\Theta_1&=-\operatorname{senh}\Theta\left[\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}+\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2\right]-\\
&\qquad-2\cosh\Theta\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right),\\
e^{\xi_1}\cosh\Theta_1&=\cosh\Theta\left[\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}+\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2\right]+\\
&\qquad+2\operatorname{senh}\Theta\frac{\psi}{\sigma}e^{-\xi}\left(H+e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)\text{(*)},
\end{aligned}\right\}\qquad(41)$$

$$l=e^{\xi}\frac{\lambda}{\psi}-\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u},$$
$$h=e^{\xi}\frac{\mu}{\psi}-\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial v},$$

si perviene con facile calcolo alle equazioni

$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}=-\frac{\partial\Theta}{\partial u}+l(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta),$$
$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}=-\frac{\partial\Theta}{\partial v}-h(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta),$$

(*) Adottiamo al solito i segni $\varepsilon'=-1$; $\varepsilon''=1$.

$$\frac{\partial l}{\partial u}=\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}-h\frac{\partial\Theta}{\partial v}-\frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta\,(l^2-h^2+2W)-\frac{(2m+1)\operatorname{senh}\Theta_1}{\cosh(\Theta_1+\Theta)+1},$$

$$\frac{\partial l}{\partial v}=h\frac{\partial\Theta}{\partial u}-\cosh\Theta\,.\,l\,h,$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}=l\frac{\partial\Theta}{\partial v}-\operatorname{senh}\Theta\,.\,l\,h,$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}=\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-l\frac{\partial\Theta}{\partial u}+\frac{1}{2}\cosh\Theta\,(l^2-h^2+2W)+\frac{(2m+1)\cosh\Theta_1}{\cosh(\Theta_1+\Theta)+1},$$

e si vede che esse coincidono perfettamente con le (8) stabilite al n. 2 nel caso euclideo.

§ 9. — Immagine della trasformazione E_m dello spazio di curvatura costante nello spazio euclideo.

13. L'identità delle formole precedenti con le (8) del n. 2 mostra già che la immagine di una trasformazione E_m dello spazio di curvatura costante nello spazio euclideo è ancora una E_m, a meno di operazioni del gruppo conforme.

Ora mostreremo che l'immagine di una E_m è precisamente una E_m.

Infatti deduciamo, come al n. 10, da una superficie Σ di Guichard dello spazio di curvatura costante una superficie N dello spazio euclideo, e deduciamo per questa superficie un sistema di funzioni trasformatrici utilizzando il procedimento osservato al n. 2. Si dovrà porre

$$\frac{\partial\log\psi_1}{\partial u}=\frac{\partial\xi}{\partial u}-\frac{\partial\log\psi'}{\partial u}+l\operatorname{senh}\Theta,$$

$$\frac{\partial\log\psi_1}{\partial v}=\frac{\partial\xi}{\partial v}-\frac{\partial\log\psi'}{\partial v}+h\cosh\Theta;$$

ma si ha pure

$$\frac{\partial\log\psi}{\partial u}=\frac{\partial\xi}{\partial u}+l\operatorname{senh}\Theta,$$

$$\frac{\partial\log\psi}{\partial v}=\frac{\partial\xi}{\partial v}+h\cosh\Theta,$$

dunque

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\psi}{\psi'},\\ \lambda_1 &= \lambda - \frac{\psi}{\psi'}\lambda',\\ \mu_1 &= \mu - \frac{\psi}{\psi'}\mu',\\ w_1 &= w - \frac{\psi}{\psi'}w',\\ m\,\sigma_1 &= m\,\psi'\,\sigma - (\lambda\lambda' + \mu\mu' + w\,w' - \psi\psi').\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Da queste espressioni delle funzioni trasformatrici si ottengono subito gli elementi della superficie N_1 trasformata di N; in particolare

$$e^{\xi'_1} = \frac{\psi}{\sigma_1} e^{-\xi}\left[1 - \left(H + e^{\xi}\frac{w'}{\psi'} + e^{\xi}\frac{w_1}{\psi}\right)^2\right].$$

Ma dalle precedenti sappiamo che

$$\frac{w_1}{\psi} + \frac{w'}{\psi'} = \frac{w}{\psi},$$

quindi

$$e^{\xi'_1} = \frac{\psi}{\sigma_1} e^{-\xi}\left[1 - \left(H + e^{\xi}\frac{w}{\psi}\right)^2\right]. \tag{43}$$

Se ora vogliamo formare l'immagine di N_1 nello spazio di curvatura costante, la quantità analoga di $e^{\xi'_1}$ si ottiene dividendo quest'ultima per l'ordinata della superficie N_1. Per questa si ha:

$$z_1 = z - \frac{1}{m\,\sigma_1}(\lambda_1 Z_1 + \mu_1 Z_2 + w_1 Z_3),$$

e per le espressioni osservate alla fine del n. 10 si può scrivere

$$z_1 = \frac{1}{\psi'} + \frac{1}{m\,\sigma_1}\left(\lambda_1\frac{\lambda'}{\psi'} + \mu_1\frac{\mu'}{\psi'} + w_1\frac{w'}{\psi'}\right).$$

donde per le (42) si ha semplicemente

$$z_1 = \frac{\sigma}{\sigma_1}.$$

Si trova così, osservando la (43) e la prima delle (41), la relazione

$$e^{\xi_1} = \frac{e^{\xi'_1}}{z_1}$$

e si può enunciare il seguente teorema:

Se due superficie Σ, Σ_1 dello spazio di curvatura costante sono legate da una trasformazione E_m, le loro immagini nello spazio euclideo N ed N_1 sono pure legate da una trasformazione E_m (con la stessa costante m).

§ 10. — La trasformazione C_m associata alla E_m nello spazio di curvatura costante.

14. — In questo paragrafo vogliamo ripigliare la considerazione di due superficie Σ, Σ' dello spazio di curvatura costante, legate da una trasformazione E_m, per studiare l'effetto della trasformazione C_m associata alla E_m.

Dimostreremo che: *esiste nello spazio euclideo una superficie N di Guichàrd coll'elemento lineare*

$$d s^2 = \frac{e^{2\xi}}{\psi^2}(\operatorname{senh}^2 \Theta \, d u^2 + \cosh^2 \Theta \, d v^2),$$

ed i cui coefficienti della seconda forma fondamentale hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= e^{\xi'} \operatorname{senh} \Theta \,.\, \sqrt{2m+1}\,(\cosh \Theta + H' \operatorname{senh} \Theta), \\ \Delta'' &= e^{\xi'} \cosh \Theta \,.\, \sqrt{2m+1}\,(\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta), \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

in cui

$$e^{\xi'} = \frac{e^{\xi}}{\psi}, \quad H' = H + e^{\xi} \frac{w}{\psi} \,. \tag{45}$$

Infatti dalle (44) per derivazione si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{2m+1}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\Delta}{e^{\xi'} \operatorname{senh} \Theta}\right) = (\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial v} +$$

$$+ \operatorname{senh} \Theta \left[(\operatorname{tgh} \Theta + H') \frac{\partial \xi}{\partial v} - e^{\xi} \frac{\mu}{\psi} (\operatorname{senh} \Theta + H' \cosh \Theta)\right]$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Delta}{e^{\xi'}\operatorname{senh}\Theta}\right)=\frac{\Delta''}{e^{\xi'}\cosh\Theta}\left(\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\xi'}{\partial v}+\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right).$$

Analogamente si prova che è soddisfatta l'altra equazione di Codazzi.

In quanto all'equazione di Gauss partendo dalle (45) e tenendo conto delle equazioni differenziali (32) e dalle espressioni (33) di φ ed Ω (senza appoggiarsi all'integrale quadratico) otteniamo

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}+\coth\Theta\frac{\partial^2\xi'}{\partial u^2}+\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\xi'}{\partial v^2}-\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi'}{\partial u}+$$

$$+\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi'}{\partial v}+(2m+1)(\cosh\Theta+H'\operatorname{senh}\Theta)(\operatorname{senh}\Theta+H'\cosh\Theta)=$$

$$=\frac{e^{2\xi}}{\psi^2}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta(\lambda^2+\mu^2+w^2-\psi^2-2m\psi\sigma).$$

Se ora teniamo conto della (34) vediamo che l'equazione di Gauss è pure soddisfatta, e il teorema è stabilito.

È da osservare che se le funzioni λ, μ, w, ψ, σ soddisfacessero al sistema differenziale (32), ma non alla (34), e rendessero

$$\lambda^2+\mu^2+w^2-\psi^2=2m\psi\sigma-K_1$$

la superficie N esisterebbe nello spazio di curvatura costante K_1.

§ 11. — Le trasformazioni G (di Guichard) dello spazio di curvatura costante, e loro immagini nello spazio euclideo.

15. Assumiamo nello spazio di curvatura costante una superficie Σ, per la quale conserviamo le notazioni del n. 10; e consideriamo il sistema di equazioni differenziali nella funzione incognita ω

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial u}+i\frac{\partial\Theta}{\partial v}&=-\operatorname{senh}\Theta\cosh(\omega-\xi)-i\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\xi}{\partial v}+\\&+\frac{1}{2}e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\,.\,e^{\omega}-\frac{1}{2}e^{\omega-\xi}(H^2\operatorname{senh}\Theta+2H\cosh\Theta),\end{aligned}\right\}\qquad(46)$$

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial\Theta}{\partial u} &= \cosh\Theta\,\mathrm{senh}\,(\omega-\xi)-\coth\Theta\,\frac{\partial\xi}{\partial u}- \\ &-\frac{1}{2}\,e^{\xi}\cosh\Theta\,.\,e^{\omega}+\frac{1}{2}\,e^{\omega-\xi}\,(H^2\cosh\Theta+2\,H\,\mathrm{senh}\,\Theta). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Questo sistema è illimitatamente integrabile; e dimostreremo che per una qualunque soluzione di esso *esiste* nello spazio di curvatura costante una superficie isoterma I coll'elemento lineare

$$d\,s^2 = e^{2\omega}\,(d\,u^2+d\,v^2). \tag{47}$$

Infatti introduciamo le funzioni ausiliarie

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta}{e^{\omega}} &= -\frac{1}{\mathrm{senh}\,\Theta}\,\frac{\partial\xi}{\partial u}-\cosh(\omega-\xi)+\frac{1}{2}\,e^{\omega-\xi}\,H^2-\frac{e^{\xi}}{2}\,e^{\omega}, \\ \frac{\Delta''}{e^{\omega}} &= i\,\frac{1}{\cosh\Theta}\,\frac{\partial\xi}{\partial v}-\mathrm{senh}\,(\omega-\xi)+\frac{1}{2}\,e^{\omega-\xi}\,H^2-\frac{e^{\xi}}{2}\,e^{\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

e teniamo anzitutto conto che derivando le (46), ed osservando le (46) stesse e le (39), si ottiene a riduzioni fatte la relazione

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{\Delta\,\Delta''}{e^{2\omega}}=e^{2\omega}.$$

Inoltre si verifica con facile calcolo che sono verificate le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Delta}{e^{\omega}}\right)=\frac{\Delta''}{e^{\omega}}\,\frac{\partial\omega}{\partial v},\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Delta''}{e^{\omega}}\right)=\frac{\Delta}{e^{\omega}}\,\frac{\partial\omega}{\partial u};$$

dunque rimane stabilita la proposizione.

Frattanto le formole (46) sono l'espressione analitica di una trasformazione che porta le superficie di Guichard dello spazio di curvatura costante in superficie isoterme del medesimo spazio, ed è perciò da chiamarsi ancora una *trasformazione G.*

16. Vogliamo ora studiare l'immagine di una siffatta trasformazione nello spazio euclideo.

A tale scopo formiamo come al n. 10 l'immagine di Σ, e scriviamo il sistema differenziale che porta la superficie trasformata N in superficie isoterma; si ha:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+i\frac{\partial\Theta}{\partial v}&=-\operatorname{senh}\Theta\left[\frac{e^{\varphi}}{2}\cdot\psi' e^{-\xi}+\frac{e^{-\varphi}}{2}\frac{e^{\xi}}{\psi'}\right]-\\&\qquad-i\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\xi}{\partial v}+i\frac{\mu'}{\psi'}e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta-\\&-\frac{e^{\varphi}}{2}\cdot\psi' e^{-\xi}\left[\operatorname{senh}\Theta\left(H+e^{\xi}\frac{w'}{\psi'}\right)^2+2\cosh\Theta\left(H+e^{\xi}\frac{w'}{\psi'}\right)\right],\\ i\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\Theta}{\partial u}&=\cosh\Theta\left[\frac{e^{\varphi}}{2}\psi' e^{-\xi}-\frac{e^{-\varphi}}{2}\frac{e^{\xi}}{\psi'}\right]-\\&\qquad-\coth\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\lambda'}{\psi'}e^{\xi}\cosh\Theta+\\&+\frac{e^{\varphi}}{2}\psi' e^{-\xi}\left[\cosh\Theta\left(H+e^{\xi}\frac{w'}{\psi'}\right)^2+2\operatorname{senh}\Theta\left(H+e^{\xi}\frac{w'}{\psi'}\right)\right].\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

Ora questo sistema è soddisfatto dalla funzione

$$e^{-\varphi}=\psi' e^{-\omega}+(\lambda'+i\mu'),\tag{50}$$

quindi *esiste nello spazio euclideo una superficie isoterma coll'elemento lineare*

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{\left[\psi' e^{-\omega}+(\lambda'+i\mu')\right]^2}.$$

Se ora vogliamo formare l'immagine di questa nello spazio di curvatura costante, dobbiamo dividere e^{φ} per l'ordinata della superficie.

Ma per questa si ha

$$z'=z+e^{\varphi}(Z_1+iZ_2),$$

ossia pei valori osservati al n. 10

$$z'=\frac{1}{\psi'}-\frac{e^{\varphi}}{\psi'}(\lambda'+i\mu');$$

si ha così

$$\frac{e^{\varphi}}{z'}=e^{\omega}.$$

Dunque: *l'immagine nello spazio euclideo di una trasformazione G dello spazio di curvatura costante è ancora una trasformazione G.*

17. Inversamente partiamo da una superficie N dello spazio euclideo, i cui elementi indichiamo con ξ', Θ, H' e deduciamo una superficie isoterma per trasformazione G. Occorre determinare una soluzione del sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \Theta}{\partial v} &= -\operatorname{senh}\Theta\left(\frac{e^{\varphi-\xi'}}{2} + \frac{e^{\xi'-\varphi}}{2}\right) - i\operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial \xi'}{\partial v} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\, e^{\varphi\ \xi'}\,(H'^2 \operatorname{senh}\Theta + 2\,H'\cosh\Theta), \\
i\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial u} &= \cosh\left(\frac{e^{\varphi-\xi'}}{2} - \frac{e^{\xi'-\varphi}}{2}\right) - \coth\Theta\,\frac{\partial \xi'}{\partial u} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\, e^{\varphi-\xi}\,(H'^2\cosh\Theta + 2\,H'\operatorname{senh}\Theta).
\end{aligned}$$

Formiamo l'immagine Σ di N nello spazio di curvatura costante; se x, y, z indicano le coordinate del punto che descrive la superficie N e X_i, Y_i, Z_i i coseni del triedro principale, possiamo esprimere gli elementi di Σ con le formole

$$e^{\xi'} = e^{\xi} z; \qquad H' = H - e^{\xi} Z_3,$$

e le equazioni precedenti si potranno scrivere

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \Theta}{\partial v} &= -\operatorname{senh}\Theta\left(\frac{e^{\varphi}}{2}\frac{e^{-\xi}}{z} + \frac{e^{-\varphi}}{2}\, e^{\xi} z\right) - \\
&\quad - i\operatorname{tgh}\Theta\,\frac{\partial \xi}{\partial v} - i\,e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\,.\,Z_2 - \\
&\quad - \frac{e^{\varphi}}{2}\frac{e^{-\xi}}{z}\left[\operatorname{senh}\Theta\,(H - e^{\xi} Z_3)^2 + 2\cosh\Theta\,(H - e^{\xi} Z_3)\right], \\
i\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial u} &= \cosh\Theta\left(\frac{e^{\varphi}}{2}\frac{e^{-\xi}}{z} - \frac{e^{-\varphi}}{2}\, e^{\xi} z\right) - \\
&\quad - \coth\Theta\,\frac{\partial \xi}{\partial u} - e^{\xi}\cosh\Theta\,.\,Z_1 + \\
&\quad + \frac{e^{\varphi}}{2}\frac{e^{-\xi}}{z}\left[\cosh\Theta\,(H - e^{\xi} Z_3)^2 + 2\operatorname{senh}\Theta\,(H - e^{\xi} Z_3)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Ciò premesso deduciamo dalla superficie Σ una superficie isoterma dello spazio di curvatura costante mediante una trasformazione G; dobbiamo integrare il sistema (46). Ora tenendo conto delle precedenti si verifica facilmente che le (46) sono soddisfatte dalla funzione

$$e^{-\omega} = e^{-\varphi} z + (Z_1 + i\,Z_2),$$

e ne risulta così una superficie I dello spazio di curvatura costante.

Intanto se prendiamo la superficie isoterma dello spazio euclideo che abbiamo dedotta dalla N e vogliamo formarne l'immagine nello spazio di curvatura costante, dobbiamo dividere e^φ per l'ordinata della superficie, che è

$$z' = z + e^\varphi (Z_1 + i Z_2);$$

si ha così nuovamente

$$e^\omega = \frac{e^\varphi}{z'}$$

e quindi *l'immagine nello spazio di curvatura costante di una trasformazione G dello spazio euclideo è ancora una trasformazione G.*

Osservazione. È qui il caso di estendere agli spazi di curvatura costante il teorema relativo alla decomposizione di una trasformazione E_m in trasformazioni di Guichard e di Darboux.

Siano Σ e Σ' due superficie di Guichard dello spazio di curvatura costante legate tra loro da una trasformazione E_m, e formiamo le immagini dello spazio euclideo che indichiamo con N ed N'. Sappiamo che queste superficie N ed N' si portano per convenienti trasformazioni G in due superficie isoterme I ed I', corrispondentisi per trasformazione di Darboux.

Se ora si formano le immagini delle superficie

$$N, \quad I, \quad I', \quad N'$$

nello spazio di curvatura costante otteniamo le quattro superficie

$$\Sigma, \quad I_1, \quad I'_1, \quad \Sigma',$$

in cui I_1 ed I'_1 sono ancora isoterme e si corrispondono per inviluppo conforme di sfere; inoltre abbiamo visto che I_1 ed I'_1 si deducono rispettivamente da Σ e Σ' per trasformazioni G. Si conclude che anche nello spazio di curvatura costante sussiste il teorema:

Due superficie Σ e Σ', corrispondentisi per trasformazione E_m, si portano per convenienti trasformazioni G (di Guichard) in due superficie isoterme corrispondentisi per inviluppo conforme di sfere.

Messina, 13 Gennaio 1919.

Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di 1ª specie e su alcune loro rappresentazioni spaziali.

(*Di* Corrado Segre, *a Torino.*)

Le corrispondenze quadrilineari tra forme di 1ª specie furon già considerate ripetutamente. Mi limiterò a ricordare, perchè solo ad esse dovremo riferirci, una Nota di C. Le Paige (1) e la Memoria di R. De Paolis sulle corrispondenze plurilineari in generale (2). Nessuno però, ch'io sappia, ha rilevato le particolarità che può presentare una corrispondenza quadrilineare, pel fatto che le omografie tra due dei quattro campi binari, da essa associate alle varie coppie di elementi degli altri due campi, possono esser legate linearmente fra loro, cioè stare in una rete fissa, od in un fascio, ecc. Si ha in ciò un primo criterio razionale di classificazione per le quadrilinearità. D'altra parte uno strumento nuovo, se non sbaglio, del presente lavoro, consiste nel riferire i campi fra cui si han le corrispondenze quadrilineari ai sistemi di generatrici di due quadriche, distinte o sovrapposte (3). Ne derivano dei notevoli legami fra quelle corrispondenze e le quadriche. Basti, come esempio, citare il fatto che, con solo una riserva di generalità, lo studio delle quadrilinearità viene ad equivalere a quello del sistema di due quadriche. Ciò fornisce un metodo elegante, sì per studiare le corrispondenze quadrilineari, che per classificarle. Ma non intendo qui dare esplici-

(1) *Sur la forme quadrilinéaire.* Atti Acc. Torino, t. 17, 1881-82, p. 299.

(2) *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie.* Mem. Acc. Torino (2) 42, 1892, p. 495.

(3) Si tratta di un concetto generale, che può servire sempre nello studio delle corrispondenze, plurilineari, od anche di ordini qualunque, fra più campi razionali. Veggasi una mia Nota di prossima pubblicazione nei Rend.i della R. Accad.a dei Lincei.

tamente una classificazione completa, che sarebbe cosa troppo lunga e minuziosa. Certo è che essa si può dire contenuta implicitamente in quel che verrà esposto.

Prime nozioni sulle quadrilinearità.

1. Una *corrispondenza quadrilineare*, o, più brevemente, una *quadrilinearità*, tra 4 campi razionali ∞^1 (per esempio, forme fondamentali di 1ª specie) — ossia fra 4 campi binari C_1 C_2 C_3 C_4, — è definita da un'equazione algebrica

$$f(x;\ y;\ z;\ u)=0 \tag{1}$$

lineare in ciascuna delle coordinate non omogenee x y z u degli elementi appartenenti rispettivamente ai 4 campi; o lineare ed omogenea rispetto ad ognuna delle coppie $x_1\,x_2$, $y_1\,y_2$, $z_1\,z_2$, $u_1\,u_2$ di coordinate omogenee degli elementi stessi.

Essa raggruppa gli elementi dei 4 campi in ∞^3 *quaterne.*

Dati tre elementi *generici,* rispettivamente in tre campi, è individuato dalla (1) l'elemento residuo della quaterna che contiene i primi tre. — Così, fissati due elementi *generici* rispettivamente in due campi, la (1) determina una corrispondenza bilineare, ossia una projettività fra i due campi rimanenti: la quale accoppia due elementi di questi che, coi due elementi che s'eran fissati, forman quaterna della quadrilinearità. Indicheremo con ϑ_{ik} le projettività che così nascono fra i campi C_i, C_k: *projettività residue* delle coppie di elementi degli altri due campi ([4]). — Infine, se si dà un elemento *generico* in uno dei 4 campi, si hanno come suoi resti, per la (1), le terne di una corrispondenza trilineare, o trilinearità, fra i tre campi rimanenti.

2. La locuzione *generici* che abbiamo scritto in corsivo negli ultimi enunciati, allude al caso eccezionale che la terna di elementi, o la coppia, o l'elemento singolo, dei dati campi, che ivi si supponeva di fissare nella quadrilinearità, rendano la (1) soddisfatta *identicamente*: qualunque sia l'elemento, o la coppia, o la terna, che si assumono come resti.

([4]) Non faremo distinzione tra ϑ_{ik} e ϑ_{ki}: considereremo cioè una sola corrispondenza fra gli elementi dell'insieme $C_i + C_k$.

In tal caso eccezionale si suol dire che la terna fissata, o la coppia, o il singolo elemento, sono *neutri* per la quadrilinearità. Il De Paolis li diceva *apolari*: perchè svanisce quella corrispondenza tra i residui elementi, che egli chiamava *polare* dei dati.

Terne neutre esiston sempre, per tre qualunque dei 4 campi (v. il n. 3). Esse si presentano anche in quest'altro modo. Se gli elementi x y z di C_1 C_2 C_3 formano terna neutra, la projettività $\mathcal{P}_{34}$ dei resti di x y ha z come elemento *singolare* in C_3; ossia z è tale che il suo omologo in C_4, per quella projettività, è indeterminato. Di passaggio, ne deriva che la coppia x y di C_1 C_2 forma terna neutra anche con un elemento u di C_4 (l'altro elemento singolare della $\mathcal{P}_{34}$: la quale sarà *degenere,* o *singolare*; cioè rappresentata da una forma bilineare prodotto di due forme lineari).

3. Sia, mettendo in evidenza gli elementi z, u:

$$f \equiv A z_1 u_1 + B z_2 u_1 + C z_1 u_2 + D z_2 u_2 , \tag{2}$$

ove $A \cdot B$ C D saran forme bilineari di $x_1 x_2$, $y_1 y_2$. Una terna $x\,y\,z$ sarà neutra se

$$A z_1 + B z_2 = 0, \qquad C z_1 + D z_2 = 0, \tag{3}$$

donde:

$$A D - B C = 0. \tag{4}$$

Quest'equazione rappresenta una corrispondenza (2, 2) fra gli elementi x, y dei campi C_1, C_2: la quale accoppia due di essi nel caso della fine del n. 2, ossia quando la loro $\mathcal{P}_{34}$ residua è degenere.

Le ∞^1 terne neutre di C_1 C_2 C_3, ad esempio, contengono le coppie di elementi di due qualunque di questi due campi, associati in una corrispondenza (2, 2).

Fra i 4 campi dati, combinandoli a due a due, abbiamo così 6 corrispondenze (2, 2). Quelle relative a C_1, C_2, e a C_1, C_3 sono riferite tra loro biunivocamente, associando coppie x y e x z che stiano in una stessa terna neutra x y z di C_1 C_2 C_3. Applicando quest'osservazione ripetutamente, si vede che le 6 corrispondenze (2, 2) saranno in generale enti ellittici collo stesso invariante assoluto ([5]).

4. Dire che una coppia x y di elementi di C_1 C_2 è neutra (n. 2) equivarrà a dire che ogni coppia z u di C_3 C_4 forma quaterna di f colla x y,

([5]) Cfr. Le Paige cit.° in ([1]), § I.

ossia che *tutte le projettività* $\mathfrak{P}_{12}$ *han comune la coppia* $x\, y$. Posta la (2), la coppia $x\, y$ dovrà annullare A, B, C, D. Non esiste dunque in generale una tal coppia. (Se vi son *due* coppie neutre, le $\mathfrak{P}_{12}$ formano fascio).

Similmente non esiste in generale un elemento neutro. La sua esistenza, per esempio in C_1, significherebbe che f si può scrivere come prodotto di una forma lineare di $x_1\, x_2$ per una forma trilineare nelle altre coppie di variabili. Escluderemo nel seguito questo caso, come anche quello che f sia il prodotto di due forme bilineari: *supporremo cioè che la quadrilinearità sia irriducibile.*

Quadrilinearità, per le quali le omografie residue stanno in reti, od in fasci.

5. Poniamo ora

$$f \equiv \sum a_{iklm}\, x_i\, y_k\, z_l\, u_m\,, \tag{5}$$

ove ognuno degl'indici prenda i valori 1, 2; sicchè i termini della somma sono 16.

Le omografie $\mathfrak{P}_{12}$, provenienti dal fissare z, u, sono combinazioni lineari delle quattro

$$\sum a_{ik11}\, x_i\, y_k = 0, \quad \sum a_{ik12}\, x_i\, y_k = 0, \quad \sum a_{ik21}\, x_i\, y_k = 0, \quad \sum a_{ik22}\, x_i\, y_k = 0. \tag{6}$$

In conseguenza esse stanno in una rete quando queste quattro sono in una rete; vale a dire quando è nullo il determinante (invariante della f)

$$L = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1211} & a_{2111} & a_{2211} \\ a_{1112} & a_{1212} & a_{2112} & a_{2212} \\ a_{1121} & a_{1221} & a_{2121} & a_{2221} \\ a_{1122} & a_{1222} & a_{2122} & a_{2222} \end{vmatrix}.$$

Similmente le $\mathfrak{P}_{12}$ saranno in un fascio, se son nulli tutti i minori del 3° ordine di L; e coincideranno se son nulli tutti quelli di 2° ordine.

Ora, quando le $\mathfrak{P}_{12}$ presentano i detti fatti, le $\mathfrak{P}_{34}$ presenteranno la stessa particolarità: perchè, scambiando i campi $C_1\, C_2$ con $C_3\, C_4$, il determinante L non muta, altrimenti che per lo scambiarsi delle linee orizzontali colle colonne. Ossia: *è la stessa cosa dire che sono in una rete le* $\mathfrak{P}_{12}$, *o le* $\mathfrak{P}_{34}$; *che sono in un fascio le* $\mathfrak{P}_{12}$, *o le* $\mathfrak{P}_{34}$; *che coincidono le* $\mathfrak{P}_{12}$, *o le* $\mathfrak{P}_{34}$.

6. Lo stesso fatto risulta anche subito così.

L'ipotesi che le $\mathcal{P}_{12}$ siano in una rete equivale a dire che le forme primi membri delle (6) son combinazioni lineari (a coefficienti costanti) di tre forme φ, ψ, χ bilineari nelle $x\,y$. Poichè la f (5) si ha da quelle (6) moltiplicandole pei 4 prodotti $z_l u_m$ e sommando, ne viene che in questo caso è:

$$f \equiv \varphi(x\,y)\,\alpha(z\,u) + \psi(x\,y)\,\beta(z\,u) + \chi(x\,y)\,\gamma(z\,u). \tag{7}$$

E similmente, se le $\mathcal{P}_{12}$ sono in un fascio, si potrà porre:

$$f \equiv \varphi(x\,y)\,\alpha(z\,u) + \psi(x\,y)\,\beta(z\,u); \tag{8}$$

e se le $\mathcal{P}_{12}$ coincidono:

$$f \equiv \varphi(x\,y)\,\alpha(z\,u). \tag{9}$$

Ora le (7), (8), (9) mostrano appunto che le $\mathcal{P}_{34}$ presentano sempre la stessa particolarità che le $\mathcal{P}_{12}$.

Nel 3° caso, corrispondente alla (9), si vede che la quadrilinearità si spezza nelle due projettività $\varphi = 0$, $\alpha = 0$, che saranno la $\mathcal{P}_{12}$ e la $\mathcal{P}_{34}$; ma, come s'è già detto alla fine del n. 4, questo caso verrà escluso.

Nel 2° caso, in cui le $\mathcal{P}_{12}$, e così le $\mathcal{P}_{34}$, forman due fasci, la (8) mostra che questi fasci si posson rappresentare così:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\,\varphi(x\,y) + \mu\,\psi(x\,y) = 0 \\ \lambda\,\beta(z\,u) - \mu\,\alpha(z\,u) = 0 \end{array}\right\} \tag{10}$$

e che il porre $f = 0$ viene a dire che la $\mathcal{P}_{12}$ contenente la coppia $x\,y$ di elementi omologhi, e la $\mathcal{P}_{34}$ rispetto a cui sono omologhi z e u, si corrispondono in un riferimento projettivo dei due fasci. Ossia: *la quadrilinearità si ottiene da due fasci di omografie fra $C_1\,C_2$ e fra $C_3\,C_4$, riferiti fra loro projettivamente, raggruppando insieme le coppie di elementi omologhi di omografie che si corrispondono in quel riferimento projettivo.*

7. Analoghi al determinante (invariante) L sono questi altri, i quali si riferiscono invece rispettivamente alle $\mathcal{P}_{13}$ o $\mathcal{P}_{24}$, e alle $\mathcal{P}_{14}$ o $\mathcal{P}_{23}$:

$$M = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{2111} & a_{1121} & a_{2121} \\ a_{1112} & a_{2112} & a_{1122} & a_{2122} \\ a_{1211} & a_{2211} & a_{1221} & a_{2221} \\ a_{1212} & a_{2212} & a_{1222} & a_{2222} \end{vmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{2111} & a_{2112} \\ a_{1121} & a_{1122} & a_{2121} & a_{2122} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{2211} & a_{2212} \\ a_{1221} & a_{1222} & a_{2221} & a_{2222} \end{vmatrix}.$$

Ora si ha la relazione, identica:

$$L + M + N = 0. \tag{11}$$

Se dunque si annullano due dei tre determinanti, s'annullerà pure il terzo. Ne segue questo teorema:

Se le $\mathcal{P}_{12}$ *sono in una rete, e così pure le* $\mathcal{P}_{13}$, *saranno in una rete anche le* $\mathcal{P}_{14}$, *e per conseguenza* (*n.* 5) *saranno in reti tutti i 6 sistemi di projettività* $\mathcal{P}_{ik}$.

Seguito. Ricorso alle projettività armoniche alle $\mathcal{P}_{ik}$.

8. Ricorrendo al concetto delle projettività binarie *armoniche* (o *conjugate*, od *apolari*) (6), potremo ritrovare i risultati precedenti, e completarli.

Il fatto che le $\mathcal{P}_{12}$ stiano in una rete equivale, com'è noto, all'essere quelle projettività *armoniche* ad una projettività fissa $\mathcal{R}$ tra C_1 e C_2. Se questa è degenere, le $\mathcal{P}_{12}$ hanno comune una coppia di elementi, composta degli elementi singolari di $\mathcal{R}$ (coppia neutra per f).

Siano $a_1\, b_1$ due elementi distinti di C_1, e $a_2\, b_2$ rispettivamente i loro omologhi in C_2, per $\mathcal{R}$. Ogni projettività fra $C_1\, C_2$ che sia armonica ad $\mathcal{R}$ e contenga la coppia $a_1\, b_2$, conterrà pure di conseguenza la coppia $b_1\, a_2$. Applichiamo ciò all'ipotesi che le $\mathcal{P}_{12}$ sian tutte armoniche ad $\mathcal{R}$. Avremo che tutte quelle fra esse che contengono una data coppia *generica* $a_1\, b_2$ di elementi ne contengon di conseguenza *un'altra* $b_1\, a_2$. Quelle $\mathcal{P}_{12}$ son le residue delle coppie di elementi di $C_3\, C_4$ omologhi nella $\mathcal{P}_{34}$ residua di $a_1\, b_2$. Abbiamo dunque che questa $\mathcal{P}_{34}$ è pure residua di $b_1\, a_2$.

(6) Si veda su ciò (anche per quel che occorrerà in seguito), ad esempio: C. Segre, *Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux*, Journal f. Mathem. 100 (1887), p. 317; oppure Th. Reye, *Die Geometrie der Lage*, 4e Auflage, 3e Abtheilung, Leipzig, 1910, p. 189 e seg.

D'altronde, quando due coppie di elementi di $C_1\ C_2$, non coincidenti completamente, hanno la stessa $\mathcal{P}_{34}$ residua; le $\mathcal{P}_{34}$ stanno necessariamente in una rete, e per conseguenza anche le $\mathcal{P}_{12}$. Si assumano infatti quelle due coppie di elementi come elementi fondamentali delle coordinate su $C_1\ C_2$; o, se in uno di questi campi i due elementi dati coincidessero, si prenda quest'elemento come uno dei due elementi fondamentali di quel campo. Come le $\mathcal{P}_{12}$ erano al n. 5 combinazioni lineari delle (6), così le $\mathcal{P}_{34}$ son combinazioni lineari di 4 proiettività, residue delle coppie formate cogli elementi fondamentali di $C_1\ C_2$, combinati fra loro in tutti i 4 modi possibili. Per l'ipotesi due di queste 4 projettività coincidono; onde le dette combinazioni lineari stanno in una rete.

Dunque: *Condizione necessaria e sufficiente perchè le $\mathcal{P}_{12}$ stiano in una rete (o, ciò che è lo stesso, le $\mathcal{P}_{34}$), è che esistano due coppie distinte (almeno parzialmente) di elementi di $C_1\ C_2$ che abbiano la stessa $\mathcal{P}_{34}$ residua* (7).

9. *Se le $\mathcal{P}_{12}$ sono armoniche ad una projettività $\mathfrak{R}$ fra C_1 e C_2, e le $\mathcal{P}_{23}$ sono armoniche ad una $\mathcal{S}$ fra C_2 e C_3, saranno le $\mathcal{P}_{13}$ armoniche alla projettività prodotto di $\mathfrak{R}$ e $\mathcal{S}$: sempre che questo prodotto sia determinato.*

Supponiamo da prima, per semplicità, che $\mathfrak{R}$ e $\mathcal{S}$ non siano degeneri. Diciamo $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$ due coppie qualunque di elementi omologhi per $\mathfrak{R}$; e siano poi a_3 e b_3 gli omologhi di a_2 e b_2 per $\mathcal{S}$: cosicchè il prodotto $\mathfrak{R}\,\mathcal{S}$ muterà a_1 e b_1 in a_3 e b_3. Si tratterà di dimostrare (n. 8) che: avendo $a_1\,b_2$ e $b_1\,a_2$ la stessa $\mathcal{P}_{34}$ residua, e così $a_2\,b_3$ e $b_2\,a_3$ la stessa $\mathcal{P}_{14}$ residua, dovranno di conseguenza $a_1\,b_3$ e $b_1\,a_3$ avere la stessa $\mathcal{P}_{24}$ residua.

Fissiamo su C_4 un elemento qualunque u, che poi si farà variare; e consideriamo la trilinearità $\mathcal{T}$ fra $C_1\ C_2\ C_3$ che raggruppa i resti di u rispetto alla data quadrilinearità. La considerazione dell'omologo di u su C_1, C_2, C_3 nelle $\mathcal{P}_{14}$, $\mathcal{P}_{24}$, $\mathcal{P}_{34}$ testè nominate riduce ciò che ivi s'è asserito alla seguente proposizione da dimostrare, per la trilinearità $\mathcal{T}$:

Se $a_1\,b_2$ e $b_1\,a_2$ forman terne di $\mathcal{T}$ con uno stesso elemento n_3 di C_3, e così $a_2\,b_3$ e $b_2\,a_3$ forman terne con uno stesso elemento m_1 di C_1, anche $a_1\,b_3$ e $b_1\,a_3$ avranno lo stesso resto su C_2 rispetto a $\mathcal{T}$.

Ora questo teorema per le trilinearità si verifica facilmente. Una dimostrazione semplice consiste nel trasformare $C_1\ C_2\ C_3$ in tre punteggiate complanari, su cui la $\mathcal{T}$ è segata dalle rette del piano; il che sempre si può

(7) Non si esclude che questa $\mathcal{P}_{34}$ possa esser degenere.

fare [8]. Dopo ciò il teorema equivale a quello di PASCAL per l'esagono $a_1 n_3 b_1 a_3 m_1 b_3$ avente i vertici alternativamente sulle rette C_1 e C_3; la C_2 è la retta di PASCAL.

10. Consideriamo ora il caso che una almeno delle due projettività $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ sia degenere: per esempio la $\mathfrak{R}$. Diciamo e_1, f_2 i suoi elementi singolari, rispettivamente su C_1, C_2. Il prodotto $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}$ sarà ancora determinato, a meno che $\mathfrak{S}$ abbia, essa pure, f_2 per elemento singolare su C_2. Escluso questo caso (nel quale ogni elemento di C_1 avrebbe nel prodotto $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}$ l'omologo indeterminato), sarà $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}$ la projettività degenere fra C_1 e C_3 che ha per elementi singolari e_1 e l'omologo f_3 di f_2 su C_3 rispetto a $\mathfrak{S}$.

L'ipotesi che le $\mathfrak{P}_{12}$ siano armoniche ad $\mathfrak{R}$ significa ora che $e_1 f_2$ è una coppia neutra della quadrilinearità; e ciò che si vuol dimostrare è che anche $e_1 f_3$ sarà una coppia neutra. Ora, se u è un elemento qualunque di C_4, $e_1 f_2 u$ formeranno quaterna della quadrilinearità con ogni elemento di C_3: ossia la $\mathfrak{P}_{23}$ residua di $e_1 u$ ha f_2 come elemento singolare, ed è perciò degenere. Ma $\mathfrak{S}$ è armonica a tutte le $\mathfrak{P}_{23}$; in particolare dunque conterrà come coppia di elementi omologhi i due elementi singolari di quella $\mathfrak{P}_{23}$ degenere. E poichè abbiam chiamato f_3 l'omologo per $\mathfrak{S}$ di f_2, sarà dunque f_3 il 2° elemento singolare della detta $\mathfrak{P}_{23}$, residua di $e_1 u$. Ossia: $e_1 f_3 u$ forman quaterna con ogni elemento di C_2. E, poichè u è arbitrario su C_4, $e_1 f_3$ sarà una coppia neutra della quadrilinearità: come s'era detto.

Così il teorema del n. 9 è pienamente stabilito. Il solo caso da escludersi è, come avvertimmo, quello in cui $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{S}$ hanno uno stesso elemento singolare su C_2. Allora le $\mathfrak{P}_{13}$ saranno ancora (pel n. 7) armoniche ad una projettività fissa; ma questa non si potrà più definire come il prodotto di $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{S}$.

DETERMINAZIONE DI TUTTI I CASI POSSIBILI.

11. Il risultato ottenuto ci permetterà di determinare quali sono tutti i casi possibili, rispetto all'essere le $\mathfrak{P}_{ik}$ in reti o in fasci.

Supponiamo che, ad esempio, le $\mathfrak{P}_{12}$ formino un fascio, mentre le $\mathfrak{P}_{23}$ stiano in una rete.

---

[8] Cfr. ad es.° la dimostrazione (del fatto duale) a p. 381-385 della Mem.ª di F. LONDON, *Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde*. Math. Annalen 44 (1894), p. 375.

Saranno le $\mathcal{P}_{12}$ armoniche alle projettività $\mathfrak{R}$, fra C_1 e C_2, di un altro fascio; e le $\mathcal{P}_{23}$ armoniche ad una projettività $\mathcal{S}$ tra C_2 e C_3.

Le $\mathfrak{R}$ non saran tutte degeneri; se no, essendo in un fascio, avrebbero comune l'elemento singolare su C_1, o su C_2; e le $\mathcal{P}_{12}$ avrebbero, esse pure, quell'elemento come singolare; il che è escluso (fine del n. 4).

Se nemmeno la $\mathcal{S}$ non è degenere, i prodotti di ogni $\mathfrak{R}$ (non degenere) per $\mathcal{S}$ saran projettività tutte distinte fra loro (e non degeneri). Pel teorema del n. 9 le $\mathcal{P}_{13}$ saranno armoniche a tutte queste projettività; e però formeranno un fascio, e non saranno in generale degeneri. I prodotti $\mathfrak{R}\,\mathcal{S}$ formeranno a loro volta un fascio.

Se quindi applichiamo di nuovo il teorema del n. 9, scambiando fra loro gli indici 1 e 2; e considerando, invece della $\mathcal{S}$ del n. 9, ciascuna delle infinite projettività non degeneri a cui sono armoniche le $\mathcal{P}_{13}$; concluderemo che le $\mathcal{P}_{23}$ sono armoniche *ad infinite* projettività (non solo alla $\mathcal{S}$); e di conseguenza stanno anch'esse in un fascio, non soltanto in una rete. La $\mathcal{S}$ da cui siam partiti è variabile nel fascio armonico a quello.

12. Prima di proceder oltre converrà, sempre restando nell'ipotesi del n.° prec.°, precisare ulteriormente il risultato ottenuto.

Ciascuno dei due fasci di projettività $\mathfrak{R}$ ed $\mathcal{S}$ si compone di projettività con due coppie comuni, distinte o coincidenti, di elementi omologhi. Pel fatto che i prodotti $\mathfrak{R}\,\mathcal{S}$ devono anch'essi costituire un fascio, accadrà che i due elementi che le coppie comuni alle $\mathfrak{R}$ hanno su C_2 coincideranno coi due elementi di C_2 appartenenti alle coppie comuni alle $\mathcal{S}$.

In fatti se un elemento a_2 di C_2, omologo per tutte le $\mathfrak{R}$ di uno stesso elemento a_1 di C_1, avesse come omologo su C_3 rispetto ad una $\mathcal{S}$ un elemento a_3 *variabile colla $\mathcal{S}$*, i prodotti $\mathfrak{R}\,\mathcal{S}$ delle diverse $\mathfrak{R}$ per questa $\mathcal{S}$ avrebbero in comune la coppia $a_1\,a_3$ di elementi omologhi. E poichè le $\mathfrak{R}\,\mathcal{S}$ formano un fascio, la coppia $a_1\,a_3$ sarebbe una coppia base del fascio: il che è assurdo, poichè a_3 è variabile, e si tratta di un fascio non degenere.

Adunque, se indichiamo con $a_1\,a_2$ e $b_1\,b_2$ le coppie, distinte o coincidenti, comuni alle $\mathfrak{R}$, si potranno rappresentare con $a_2\,a_3$, $b_2\,b_3$ le coppie base delle $\mathcal{S}$; sicchè le coppie comuni alle $\mathfrak{R}\,\mathcal{S}$ saranno $a_1\,a_3$, $b_1\,b_3$.

I fasci delle $\mathcal{P}_{12}$, $\mathcal{P}_{23}$, $\mathcal{P}_{13}$, essendo armonici rispettivamente ai fasci delle $\mathfrak{R}$, delle $\mathcal{S}$, delle $\mathfrak{R}\,\mathcal{S}$, avranno per coppie basi:

$$a_1\,b_2\,,\ b_1\,a_2\,;\quad a_2\,b_3\,,\ b_2\,a_3\,;\quad a_1\,b_3\,,\ b_1\,a_3\,.$$

Le due coppie basi di ognuno saranno, o sempre distinte, o sempre coincidenti.

Scambiando l'indice 3, o 2, coll'indice 4, si dedurrà che esistono in C_4 due elementi $a_4 b_4$ tali che i fasci delle $\mathfrak{P}_{14}$, $\mathfrak{P}_{24}$, $\mathfrak{P}_{34}$ avran per coppie basi:

$$a_1 b_4,\ b_1 a_4;\quad a_2 b_4,\ b_2 a_4;\quad a_3 b_4,\ b_3 a_4.$$

13. Ritornando al n. 11, supponiamo ora che la projettività $\mathfrak{S}$ ivi considerata sia degenere, cogli elementi singolari $m_2\, m_3$ rispettivamente su C_2, C_3. Il prodotto di una delle $\mathfrak{R}$ per $\mathfrak{S}$ sarà ancora, per una $\mathfrak{R}$ generica, ben determinato; poichè, come s'è detto (n. 11), la $\mathfrak{R}$ generica non è degenere. Questo prodotto sarà la projettività degenere frà C_1 e C_3 che ha su C_3 per elemento singolare m_3 e su C_1 per elemento singolare l'omologo m_1 di m_2 nell'inversa della $\mathfrak{R}$ considerata.

Se m_1 non fosse fisso, al variare della $\mathfrak{R}$, quel prodotto $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}$ sarebbe variabile, avendo fisso l'elemento singolare m_3. Le $\mathfrak{P}_{13}$, essendo armoniche a tutte le projettività prodotti $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}$, avrebbero anch'esse comune quest'elemento singolare: contro l'ipotesi che la corrispondenza quadrilineare sia irriducibile (n. 4).

Dunque m_1 è fisso: ossia una delle due coppie (distinte o coincidenti) comuni alle projettività $\mathfrak{R}$ contiene l'elemento singolare m_2 di $\mathfrak{S}$.

Il fascio delle $\mathfrak{P}_{12}$ ha per coppie di elementi base le coppie basi del fascio ad esso armonico delle $\mathfrak{R}$, *invertite.* Le $\mathfrak{P}_{23}$ poi contengon tutte la coppia $m_2\, m_3$. Cosicchè il caso attuale è quello in cui la coppia unica comune alle $\mathfrak{P}_{23}$ ha su C_2 lo stesso elemento che ha ivi una delle due coppie (distinte o no) comuni alle $\mathfrak{P}_{12}$. E si vede che anche le $\mathfrak{P}_{13}$ conterranno una stessa coppia, composta dell'elemento di C_1 che fa parte dell'altra coppia base delle $\mathfrak{P}_{12}$, e dell'elemento di C_3 che è nella coppia comune alle P_{23}.

14. Ora possiamo concludere:

Per quadrilinearità irriducibili, i casi che si posson presentare riguardo allo stare le projettività $\mathfrak{P}_{ik}$ in reti (9), *o in fasci, sono i seguenti:*

1.° *Solo due dei 6 sistemi di projettività sono in reti, per esempio solo le $\mathfrak{P}_{12}$ e le $\mathfrak{P}_{34}$.*

(9) Per brevità qui, dicendo che stanno *in reti*, intendiamo: « in reti ben determinate, e non in fasci ».

2.° *Sono in reti tutti i 6 sistemi di projettività.*

3.° *Le $\mathcal{P}_{12}$, ad esempio, formano un fascio; le $\mathcal{P}_{23}$ e le $\mathcal{P}_{13}$ sono in reti, in quanto che le $\mathcal{P}_{23}$ hanno una coppia comune, e così le $\mathcal{P}_{13}$* [10]. Delle due coppie, distinte o no, che son base per le $\mathcal{P}_{12}$, una ha l'elemento che sta su C_1 in comune colla coppia base delle $\mathcal{P}_{13}$; l'altra ha comune l'elemento di C_2 colla coppia base delle $\mathcal{P}_{23}$. Le due coppie base rispettivamente delle $\mathcal{P}_{13}$ e delle $\mathcal{P}_{23}$ han lo stesso elemento su C_3.

4.° *Tutti i 6 sistemi di $\mathcal{P}_{ik}$ son fasci.* Le coppie di elementi, base di questi fasci, son così disposte. Se $a_1 b_2$, $b_1 a_2$ son le due coppie (distinte o coincidenti) base per le $\mathcal{P}_{12}$, si potranno indicare con $a_i b_k$ e $b_i a_k$ le coppie base per le $\mathcal{P}_{ik}$, per tutte le sei combinazioni ik degli indici 1, 2, 3, 4.

5.° Come caso particolare del precedente, coincidono a_i e b_i per ogni i. Nei 4 campi C_i stanno rispettivamente 4 elementi a_i tali che a due a due costituiscono coppie neutre per la quadrilinearità.

15. La rappresentazione analitica conferma questi risultati, e può fornire equazioni canoniche per le quadrilinearità dei vari casi.

Mi limiterò al 4° e 5° caso. Nel 4°, se si prendono in C_i come elementi fondamentali delle coordinate rispettivamente a_i *e* b_i, il fatto che ogni coppia $a_i b_k$ con i e k diversi è neutra dà che nella (5) (n. 5) i coefficienti a con due indici disuguali son tutti nulli; sicchè quell'equazione si riduce alla forma semplicissima [11]

$$x_1 y_1 z_1 u_1 + x_2 y_2 z_2 u_2 = 0. \tag{12}$$

Secondo l'osservazione finale del n. 6, questa corrispondenza quadrilineare si potrà ottenere con due fasci di projettività fra $C_1 C_2$ e fra $C_3 C_4$, riferiti tra loro projettivamente, *introducendo la particolarità* che alle due projettività degeneri dell'un fascio rispondan nell'altro fascio le projettività degeneri.

Nel 5° caso siano $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $u_1 = 0$ i 4 elementi che a due a due forman coppia neutra. Mancheranno nella (5) i termini con due indici (almeno) $= 2$. Resta dunque un'equazione della forma

$$a_1 x_2 y_1 z_1 u_1 + a_2 x_1 y_2 z_1 u_1 + a_3 x_1 y_1 z_2 u_1 + a_4 x_1 y_1 z_1 u_2 + a_0 x_1 y_1 z_1 u_1 = 0$$

---

[10] Quindi anche le $\mathcal{P}_{34}$ formeranno un fascio, e le $\mathcal{P}_{14}$, $\mathcal{P}_{24}$ staranno in reti, dotate di coppia base, ecc.

[11] Cfr. Le Paige cit.° in [1], § III.

o, se si vuole, in coordinate non omogenee

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 u + a_0 = 0. \tag{13}$$

Su essa si vede subito che le ϑ_{ik} formano 6 fasci colle due coppie base coincidenti (rispettivamente nelle 6 coppie neutre).

Rappresentazione delle quadrilinearità su due quadriche fisse, per mezzo delle reciprocità spaziali.

16. Fissiamo due quadriche non degeneri Q, Q'; e, riferendole a due convenienti sistemi di coordinate omogenee, che indicheremo con

$$X_{11}\ X_{12}\ X_{21}\ X_{22},\quad \text{e}\ X'_{11}\ X'_{12}\ X'_{21}\ X'_{22},$$

rappresentiamole parametricamente con

$$X_{ik} = x_i y_k\,,\quad X'_{lm} = z_l u_m \qquad (i,\ k,\ l,\ m = 1,\ 2) \tag{14}$$

(Ci accadrà poi anche in seguito di scrivere $X_1 X_2 X_3 X_4$ invece di $X_{11} X_{12} X_{21} X_{22}$; ecc.). Saranno $x_1 x_2$ coordinate omogenee nel campo binario costituito dalle generatrici di un 1º *regolo* (o schiera rigata) di Q; $y_1 y_2$ analogamente pel 2º regolo: le X_{ik} saran le coordinate del punto X di Q per cui passan le generatrici x e y dei due regoli. Similmente $z_1 z_2$ e $u_1 u_2$ saran le coordinate interne ai due regoli di Q'; e precisamente quelle delle generatrici passanti pel punto X'.

Assumendo quei 4 regoli, rispettivamente, come i 4 campi $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$, la quadrilinearità

$$f \equiv \sum a_{iklm}\, x_i\, y_k\, z_l\, u_m = 0, \tag{15}$$

grazie alle (14), equivarrà alla relazione

$$\Phi \equiv \sum a_{iklm}\, X_{ik}\, X'_{lm} = 0\,; \tag{16}$$

la quale dice che X, X' son punti reciproci in una determinata reciprocità Φ fra gli spazi di Q, Q'. I 16 coefficienti della quadrilinearità sono gli stessi che i 16 coefficienti della reciprocità. *Le quadrilinearità tra 4 campi binari vengon così riferite linearmente alle reciprocità fra 2 spazi ordinari.*

17. Ciò che è risultato immediatamente per via algebrica, trasformando l'una nell'altra le (15) e (16) per mezzo delle (14), si può anche riconoscere per via geometrica.

Data cioè una reciprocità Φ tra gli spazi di Q, Q', raggruppiamo due generatrici x e y dei due regoli C_1 C_2 di Q e due generatrici z e u dei regoli C_3 C_4 di Q', quando il punto xy e il punto zu sono reciproci in Φ. Si riconosce subito che, date due qualunque di quelle 4 rette, le altre due si corrispondono in una determinata projettività. Così, date z e u, e quindi il loro punto comune, il piano corrispondente a questo in Φ sega Q secondo una conica, su cui s'incontrano le generatrici x, y dei due regoli C_1 C_2 di Q, omologhe in una projettività $\mathcal{P}_{12}$ ([12]). Se invece diamo, ad esempio, y e u rispettivamente nei regoli C_2 e C_4 di Q e di Q', le coppie di punti di queste rette che son reciproci nella Φ formano due punteggiate projettive: e i regoli C_1 e C_3, riferiti a queste punteggiate per sezione, risultano così legati da una projettività $\mathcal{P}_{13}$.

Ne deriva (De Paolis ([2]) n. 51) che l'aggruppamento delle generatrici dei 4 regoli in quaterne è una quadrilinearità.

Viceversa, se si dà una corrispondenza quadrilineare fra i 4 regoli di Q, Q'; e si associano due punti di Q, Q' quando le generatrici passanti per essi forman quaterna in quella; saranno tali punti coppie di punti reciproci in una reciprocità. Dato cioè uno di essi, per esempio zu, l'altro dovrà stare su una conica di Q, generata dai due regoli di questa, riferiti in una determinata projettività $\mathcal{P}_{12}$, residua di quella coppia zu; ecc., ecc.

18. Sebbene nel seguito non ne facciamo uso, possiamo qui accennare come questa rappresentazione spaziale metta in evidenza il fatto che *una corrispondenza quadrilineare tra 4 forme di 1ª specie equivale, in certo senso, ad un legame bilineare fra le projettività che si posson porre tra due di quelle forme e le projettività tra le altre due.* Basta in fatti, per avere quel legame bilineare, considerare i punti X del 1° spazio come imagini delle projettività fra i regoli C_1, C_2 di Q (associando cioè due rette di questi quando sono in un piano con X), e i punti X' del 2° spazio come imagini delle projettività fra i regoli C_3, C_4 di Q'; indi associare due tali projettività, quando i loro punti imagini X, X' sono reciproci in Φ. Se X, X' sono su

([12]) Per la rappresentazione delle projettività binarie sulle sezioni piane di una quadrica, v. C. Stéphanos, *Mém. sur la représentation des homographies binaires*, etc., Math. Annalen 22, 1883, p. 299.

Q, Q', le corrispondenti projettività, essendo degeneri, si posson sostituire colle loro coppie di elementi singolari x e y, z e u; e nascono le quaterne di elementi della corrispondenza quadrilineare. Si vede subito che il legame bilineare tra le projettività $\mathcal{M}$ di C_1 e C_2, $\mathcal{N}$ di C_3 e C_4, si può enunciare così: $\mathcal{N}$ è armonica a quella projettività $\mathcal{N}'$ fra C_3 e C_4 che associa due elementi la cui $\mathcal{P}_{12}$ residua nella quadrilinearità è armonica a $\mathcal{M}$. Oppure nel modo analogo, scambiando C_1 e C_2 con C_3 e C_4, la $\mathcal{M}$ con $\mathcal{N}$. Se, simbolicamente, si rappresenta la quadrilinearità con $\alpha_x \beta_y \gamma_z \delta_u = 0$ (ove solo i prodotti $\alpha_i \beta_k \gamma_l \delta_m$ hanno senso), e la $\mathcal{M}$ con $a_x b_y = 0$, la $\mathcal{N}$ con $c_z d_u = 0$ (avendo senso solo i prodotti $a_i b_k$, $c_l d_m$); quel legame bilineare fra le $\mathcal{M}$ e le $\mathcal{N}$ si esprime così:

$$(\alpha\, a)(\beta\, b)(\gamma\, c)(\delta\, d) = 0.$$

Invece di esso si può considerare l'una o l'altra di due corrispondenze, generalmente biunivoche, lineari, fra le projettività di C_1 e C_2, C_3 e C_4: una delle quali si ha facendo corrispondere a ciascuna $\mathcal{M}$ quella projettività $\mathcal{N}'$ di C_3 e C_4, prima nominata, che è armonica a tutte le $\mathcal{N}$ legate alla $\mathcal{M}$ nel modo detto; e l'altra in maniera analoga.

19. Ritornando al n. 17, osserviamo che la reciprocità Φ può essere *degenere* (o *singolare*) semplicemente, o doppiamente, o triplamente: ossia ridursi rispettivamente a una reciprocità fra due stelle S, S', o ad una projettività fra due fasci s, s' di piani, o infine spezzarsi nella condizione che o X, o X' stiano in due piani determinati σ, σ'. Ciò corrisponde rispettivamente: all'essere nullo il determinante L (n. 5) della Φ; o all'annullarsi dei suoi minori di 3° ordine; o di quelli di 2° ordine.

Ora questi fatti algebrici rispondevano, per la quadrilinearità (n. 5), all'essere le $\mathcal{P}_{12}$ o le $\mathcal{P}_{34}$ projettività di una rete, o di un fascio, o tutte coincidenti. E si vede bene la ragione geometrica di questa corrispondenza. Perchè, se la reciprocità è semplicemente, o doppiamente degenere, a punti generici $X' \equiv zu$ di Q' rispondono per Φ piani della stella S, o del fascio s del 1° spazio; e si sa che le coniche segate su Q dai piani di una stella, o di un fascio, determinano fra le generatrici x, y dei due regoli le projettività $\mathcal{P}_{12}$ di una rete, oppure di un fascio. Ecc.

E l'osservazione finale del n. 5 trova ora un'altra prova in ciò, che se una reciprocità Φ ha nel 1° spazio un punto singolare, od una retta, o piano, di punti singolari, la stessa singolarità essa deve avere nel 2° spazio.

20. Una terna $x\,y\,z$ di generatrici è neutra per la quadrilinearità f, se il punto $x\,y$ di Q ha come piano omologo nella reciprocità Φ un piano passante per z, e quindi tangente a Q'. Se Φ non è degenere, i piani tangenti a Q' son gli omologhi, per Φ, dei punti di una quadrica Q_1 del 1° spazio. I punti $x\,y$ ora considerati saran quelli della quartica comune a Q e Q_1 [13]. La corrispondenza (2, 2) del n. 3 fra elementi di C_1 C_2 è rappresentata da questa quartica.

Una coppia $x\,y$ di generatrici dei due regoli di Q sarà neutra per f, quando il loro punto d'incontro abbia rispetto a Φ un piano omologo indeterminato: ossia solo quando Φ è degenere e un suo punto singolare del 1° spazio è nel punto $x\,y$ di Q. — Invece una coppia neutra $x\,z$ di generatrici rispettivamente di Q e di Q' sarà tale che ogni punto di x e ogni punto di z son reciproci nella Φ: vale a dire sarà una coppia di rette corrispondenti per la Φ.

21. Una reciprocità Φ degenere è caratterizzata da ciò: che si posson trovare due punti distinti di uno spazio, aventi lo stesso piano per omologo nell'altro spazio. Basta prendere infatti due punti allineati con un punto singolare. Ne deriva di nuovo la proposizione finale del n. 8.

Inoltre, se S è punto singolare per Φ nel 1° spazio, le $\mathfrak{P}_{12}$ saran rappresentate dalle sezioni fatte su Q con piani passanti per S. La projettività fra C_1 e C_2, che al principio del n. 8 s'indicava con $\mathfrak{R}$, armonica a tutte le $\mathfrak{P}_{12}$, sarà rappresentata dalla conica sezione di Q col piano polare di S rispetto alla stessa Q. E si vede di nuovo che, se le rette $a_1\,b_1$ del regolo C_1 incontrano su quella conica le rette $a_2\,b_2$ di C_2, saranno i punti $a_1\,b_2$ e $b_1\,a_2$ allineati con S; ossia le coppie di elementi a_1 e b_2, b_1 e a_2, di C_1 e C_2 avranno la stessa $\mathfrak{P}_{34}$ residua.

Anche la classificazione che s'è conclusa al n. 14 si rappresenta bene col metodo ora introdotto. I casi 1° e 2° vengon da sè (il 2° si ritroverà al n. 23). Il 3° caso si ha, ad esempio, se Φ degenera in una projettività tra due fasci di piani s, s', per la quale siano omologhi un piano del 1° fascio tangente a Q e un piano del 2° fascio tangente a Q'. Il 4° e il 5° caso si hanno se entrambi i piani del 1° fascio tangenti a Q (distinti o coincidenti) han per omologhi i due piani del 2° tangenti a Q'.

---

[13] Se Q_1 coincidesse con Q, ossia se Q e Q' fossero omologhe nella Φ, si avrebbero due projettività fisse, rispettivamente tra i regoli di queste quadriche; e la corrispondenza quadrilineare si spezzerebbe nell'insieme di queste due projettività.

Rappresentazione delle quadrilinearità aventi le $\mathcal{P}_{12}$ legate linearmente, per mezzo di due coniche e di una reciprocità fra i loro piani.

22. Quando si rappresenta una quadrilinearità su Q, Q' per mezzo di una reciprocità Φ come nel Cap.° prec.ᵉ, se avviene che le $\mathcal{P}_{12}$ (o $\mathcal{P}_{34}$) stiano in una rete, cioè che Φ sia degenere, la rappresentazione si può semplificare, sostituendo a Q, Q' i coni circoscritti ad esse dai punti singolari S, S' di Φ.

I 4 campi binari che rappresentavamo coi 4 regoli di Q, Q' vengono allora dati da quei due coni quadrici, come inviluppi di piani: contando ogni piano due volte, ossia come elemento di due dei 4 campi binari.

Se inoltre seghiamo le due stelle S, S' con due piani, otteniamo la seguente rappresentazione della nostra particolare quadrilinearità:

Su due piani son fissate due coniche irriducibili γ, γ', da riguardarsi come inviluppi. Si consideri γ come la sovrapposizione di due coniche (inviluppi) C_1, C_2, e γ' come la sovrapposizione di due C_3, C_4. Le quadrilinearità colle $\mathcal{P}_{12}$ (o $\mathcal{P}_{34}$) in una rete si posson rappresentare con quadrilinearità fra le coniche C_1 C_2 C_3 C_4, aventi questa particolarità: che due tangenti di γ' riguardate come elementi rispettivamente di C_3 e C_4, oppure le medesime riguardate come elementi rispettivamente di C_4 e C_3, hanno sempre la stessa projettività $\mathcal{P}_{12}$ residua fra gli elementi di γ: non vi è da far distinzione di *ordine* fra C_3 e C_4; e così fra C_1 e C_2. La projettività a cui sono armoniche le $\mathcal{P}_{12}$ è l'identità: vale a dire le $\mathcal{P}_{12}$ sono *involuzioni;* e così le $\mathcal{P}_{34}$.

Le quadrilinearità di tal natura tra le due coniche proverranno dalle reciprocità tra i loro piani: in quanto che, se le tangenti a_1 a_2 e a_3 a_4, rispettivamente di γ e γ', formano una quaterna della quadrilinearità, il punto $a_1 a_2$ e il punto $a_3 a_4$ saran reciproci in una determinata reciprocità piana φ. Viceversa, associando 4 tangenti a_1 a_2 a_3 a_4 quando i punti $a_1 a_2$ e $a_3 a_4$ son reciproci in una data reciprocità φ, si verrà a porre una quadrilinearità tra C_1 C_2 C_3 C_4.

Le corrispondenze quadrilineari che in questo modo si posson rappresentare su due coniche sono anche caratterizzate così. Esse sono fra due campi sovrapposti C_1 C_2, e fra altri due campi sovrapposti C_3 C_4; simmetriche, o involutorie, rispetto ai primi due, come pure rispetto agli altri due. La forma quadrilineare f (irriducibile) è una combinazione lineare dei 9 prodotti delle tre espressioni $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_1 y_2 + x_2 y_1$ per le tre $z_1 u_1$, $z_2 u_2$, $z_1 u_2 + z_2 u_1$.

23. Se si esclude che le $\mathcal{P}_{12}$ (o le $\mathcal{P}_{34}$) formino fascio, la reciprocità piana φ non sarà degenere. Essa muterà la conica inviluppo $C_1 \equiv C_2$ in una conica-luogo $D_1 \equiv D_2$ del 2^0 piano. E la quadrilinearità, che ne deriva, fra D_1 D_2 C_3 C_4, o, più brevemente, fra $D (\equiv D_1 \equiv D_2)$ e $\Gamma \equiv C_3 \equiv C_4$, si potrà definire così: *Forman quaterna della quadrilinearità due punti di D e due tangenti di Γ, se la retta dei due punti e il punto d'incontro delle due tangenti sono incidenti.*

Domandiamo ora quando è che questa quadrilinearità sarà tale che le $\mathcal{P}_{13}$ (come già le $\mathcal{P}_{12}$ e le $\mathcal{P}_{34}$) stiano in una rete (e così di conseguenza tutte le $\mathcal{P}_{ik}$ stiano in reti, qualunque siano i k).

Occorre e basta (n. 8) che, presi ad arbitrio un punto S su D e una tangente s di Γ, esistano altri due elementi S' di D e s' di Γ, tali che la projettività residua di $S s$ sia la stessa che quella di $S' s'$. La projettività residua di $S s$ è la corrispondenza fra i punti P di D e le tangenti p di Γ, tali che la retta $S P$ passi pel punto $s p$: ossia tali che il fascio di centro S descritto da $S P$ abbia per sezione la punteggiata che segna su s la tangente mobile p di Γ. Dire che questa projettività non muta sostituendo S' e s' a S e s viene a dire: *i due fasci projettivi di centri S, S' generatori della conica D han per sezioni sulle rette s, s' due punteggiate projettive che generano Γ come inviluppo.*

È questa la particolarità che presentano le coniche D e Γ, quando la quadrilinearità che abbiam definito fra esse ha tutte le projettività residue giacenti in reti. E si vede che: basta che esistan due fasci projettivi generatori di D e due punteggiate generatrici di Γ, che sian rispettivamente prospettivi, perchè di tali forme ne esistano ∞^2: potendosi prendere ad arbitrio il centro S di un fascio sulla D, e una tangente di Γ come sostegno s di una punteggiata.

24. Le due coniche D e Γ saranno in una relazione ben nota. In fatti, colle notazioni già usate, poniamo che P si prenda precisamente in uno M dei due punti d'intersezione di s' con D. La retta $S P$, che diventa $S M$, taglierà s nel punto che è omologo di M, quando M si consideri come punto della punteggiata s' projettiva ad s: sicchè $S M$ sarà tangente a Γ. Così, se

N è l'altra intersezione di s' con D, sarà SN tangente a Γ. Esiste dunque un triangolo SMN iscritto in D e circoscritto a Γ.

Viceversa, si abbia un triangolo ABC iscritto in D e coi lati abc (rispettivamente opposti a quei vertici) tangenti a Γ. La quadrilinearità fra D e Γ, definita come s'è detto sul principio del nº 23, sarà tale che per essa ABc, aBc saranno evidentemente due terne neutre; ossia la projettività residua di Bc è quella degenere che ha per elementi singolari Aa. E questa stessa projettività degenere sarà, analogamente, quella residua della coppia Cb. Onde, pel teorema del n. 8, le $\mathcal{P}_{13}$ staranno in una rete; e si avrà il caso attuale.

Questo caso è dunque caratterizzato dalla esistenza di uno e quindi infiniti triangoli iscritti in D e circoscritti a Γ. [14] –

Se ora si vuole ritornare al modo più generale del nº 22 di ottenere la corrispondenza quadrilineare fra le due coniche $C_1 \equiv C_2$, $C_3 \equiv C_4$, mediante una reciprocità piana Φ; basterà applicare il risultato ora ottenuto per concludere: *Tutte le $\mathcal{P}_{13}$ di quella quadrilinearità staranno in una rete, quando le due coniche e la reciprocità tra i loro piani saranno così legate, che esistano due triangoli circoscritti rispettivamente alle due coniche, i quali si corrispondano in quella reciprocità.* [15] – Di tali coppie di triangoli ne esisteranno ∞^1 se ve n'è una.

Quadrilinearità rappresentate su due quadriche sovrapposte.

25. In un altro modo possiamo rappresentare opportunamente le quadrilinearità fra 4 campi binari, che a coppie sian sovrapposti: e ciò senza introdurre (come invece s'era fatto nel Cap.º prec.ᵉ) condizioni speciali per la corrispondenza.

---

[14] La corrispondenza projettiva, che avrà luogo (tra i punti S e le tangenti s', ossia) tra i vertici e i lati opposti di quei triangoli è — come risulta dal n. 23 — la projettività armonica a tutte le $\mathcal{P}_{13}$.

[15] Poichè nell'enunciare questa relazione, non vi è da distinguere fra le due coniche sovrapposte C_1 e C_2, avremo che: posta l'ipotesi di tutto questo Capit.º che le $\mathcal{P}_{12}$ stiano in una rete, se avviene che anche le $\mathcal{P}_{13}$ siano in una rete, lo stesso accadrà delle $\mathcal{P}_{23}$; e così delle $\mathcal{P}_{14}$, ecc. Si ritrova cioè il teorema del n. 7. — E anche quello del n. 9 diventa evidente, in base alla [14].

Basterà che nei n.[1] 16 e seg.[1] si assumano le due quadriche Q e Q' sovrapposte. Così i campi C_1, C_3, ad esempio, saranno uno stesso regolo di Q; e C_2, C_4 saranno l'altro regolo.

Se x e z son due generatrici del 1° regolo, e y, u due generatrici del 2° regolo, sì che $x\ y\ z\ u$ sia una quaterna della quadrilinearità f; il punto xy ed il punto zu di Q saran reciproci per la reciprocità Φ.

Con questa rappresentazione si risolveranno facilmente alcuni problemi sulle quadrilinearità tra *due* campi.

Così dai due noti casi in cui la reciprocità Φ è involutoria: polarità ordinarie, e sistemi nulli, si trae:

Le quadrilinearità fra due campi doppi $C_1\ (\equiv C_3)$, $C_2\ (\equiv C_4)$, che hanno carattere parzialmente involutorio, nel senso che se gli elementi xz di C_1 e yu di C_2 forman quaterna, sempre anche formin quaterna le stesse due coppie invertite, zx e uy ([16]), costituiscono due diversi sistemi: uno ∞^9 dato da una forma quadrilineare che non muta per gli scambi simultanei di x e z, di y e u; l'altro ∞^5 dato da una forma quadrilineare che muta segno per tali scambi.

E poichè le reciprocità nulle si presentano anche come quelle in cui ogni punto è reciproco di sè stesso; così si è condotti a chiedere fra le quadrilinearità dei campi $C_1\ (\equiv C_3)$, $C_2\ (\equiv C_4)$, quelle che contengon tutte le quaterne composte di due elementi coincidenti di C_1 e di due elementi coincidenti di C_2. Si avranno allora tutte le ∞^6 reciprocità per le quali Q è luogo di punti uniti (reciproci di sè stessi). Esse formano il sistema lineare che congiunge la polarità rispetto a Q al sistema lineare ∞^5 delle reciprocità nulle. E similmente le quadrilinearità richieste formano il sistema lineare ∞^6 che unisce il sistema ∞^5 poc'anzi nominato colla quadrilinearità riducibile $(x-z)(y-u)=0$, che si spezza nelle due identità entro a C_1 e a C_2.

26. Fermiamoci un momento sulle quadrilinearità del detto sistema ∞^5; e consideriamo una di esse come definita sulla quadrica Q da un sistema nullo. Vorrà dire che associamo le generatrici $x\ z$ del regolo C_1 e $y\ u$ del regolo C_2, quando la retta dei punti xy, zu sta in un dato complesso lineare di rette.

È chiaro che una retta a di C_1, che stia nel complesso lineare, quando si consideri come la sovrapposizione di due rette $x\ z$, formerà quaterna con

([16]) Il carattere involutorio richiesto al n. 22 (v. la fine) era più restrittivo.

due rette *qualunque* y u del regolo C_2: ossia due rette sovrapposte in a formeranno coppia neutra di C_1 e C_3. Ora in generale il regolo C_1 conterrà due rette del complesso lineare; e così anche C_2. Perciò vi saranno in generale due coppie neutre di C_1 e C_3, composte di elementi coincidenti; e così per C_2 e C_4. In altri termini: le projettività $\mathcal{P}_{13}$ formano un fascio di projettività cogli stessi due elementi uniti, e così pure le $\mathcal{P}_{24}$.

In generale, quando la quadrilinearità presenta questo fatto, le due rette unite di ciascuno dei due regoli essendo tali che, su ognuna, due punti qualunque son sempre reciproci per Φ, questa reciprocità ha le 4 rette come rette unite. Si prendan queste rette di Q come spigoli del tetraedro di riferimento, rispetto al quale Q è rappresentata (n. 16) dalle formole:

$$X_1 = x\,y, \quad X_2 = x, \quad X_3 = y, \quad X_4 = 1. \tag{17}$$

La reciprocità Φ sarà allora:

$$a\,X_1\,X'_4 + b\,X_2\,X'_3 + c\,X_3\,X'_2 + d\,X_4\,X'_1 = 0. \tag{18}$$

E la quadrilinearità che essa definisce fra i due regoli, ponendo oltre alle (17) le analoghe

$$X'_1 = z\,u, \quad X'_2 = z, \quad X'_3 = u, \quad X'_4 = 1,$$

si avrà sostituendo nella (18):

$$a\,x\,y + b\,x\,u + c\,y\,z + d\,z\,u = 0. \tag{19}$$

Posto $z = \rho\,x$, $u = \sigma\,y$, questa si può scrivere

$$a + b\,\sigma + c\,\rho + d\,\rho\,\sigma = 0; \tag{20}$$

ed esprime un riferimento projettivo tra i due fasci di omografie ad elementi uniti fissi $z = \rho\,x$, $u = \sigma\,y$, entro ai due regoli C_1 C_2 (d'accordo colla fine del n. 6).

La Φ, data da (18), si riduce ad un sistema nullo se $a + d = 0$, $b + c = 0$. Si osservi poi che i valori $\rho = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$, danno rispettivamente nei due fasci di omografie le identità e le involuzioni; e che quelle relazioni tra i coefficienti della (20) fanno corrispondere tra loro questi valori di ρ e σ. Dunque:

Una quadrilinearità definita su una quadrica da un sistema nullo si può generare così: Su due campi binari C_1 C_2 si hanno, rispettivamente, due fasci di omografie con elementi uniti fissi. Si ponga tra questi fasci una corrispondenza bilineare, o projettività, tale che siano omologhe nei due fasci le iden-

tità (come particolari omografie dei fasci); ed anche le involuzioni rispettive dei due fasci. Dopo ciò, aggruppando sempre due coppie di elementi corrispondenti di due omografie omologhe, si otterranno le quaterne della quadrilinearità ([17]).

Con calcoli simili a quelli accennati si estende il risultato al caso che coincidano, in un regolo, od in entrambi, le due rette unite considerate. Si terrà presente che, in ognuno dei due fasci di omografie, se accade che i due elementi uniti fissi coincidano, l'involuzione del fascio sarà parabolica, cioè sarà l'unica omografia degenere del fascio.

Infine osserviamo che, se nel campo binario C_1, al posto del birapporto caratteristico ρ dei due elementi uniti fissi con due elementi corrispondenti nella omografia, introduciamo la funzione $\frac{1+\rho}{1-\rho}$ (che può convenire di sostituire al birapporto ρ di una quaterna d'elementi, ogni volta che sono associati in qualche modo i primi due elementi e quindi gli altri due); e similmente nel campo C_2 al posto del birapporto σ; la corrispondenza bilineare (20), nel caso attuale di $a+d=b+c=0$, si potrà scrivere:

$$\frac{1+\rho}{1-\rho}=k\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \tag{21}$$

ove k è una costante ([18]).

Equivalenza projettiva delle quadrilinearità binarie ai sistemi di due quadriche.

27. *Considereremo d'or innanzi solo quadrilinearità tali che l'invariante L del n. 5 non si annulli, ossia che le $\mathfrak{P}_{12}$ (o $\mathfrak{P}_{34}$) non stiano in una rete.* Ciò è come dire che la ***reciprocità spaziale*** Φ dei n.[i] 16 e seg.[i] *non è degenere.*

([17]) Se la corrispondenza bilineare posta tra i due fasci di omografie fosse tale che all'identità e all'involuzione dell'un fascio fossero omologhe nell'altro rispettivamente l'involuzione e l'identità; verrebbe una quadrilinearità definita su Q da una polarità ordinaria, invece che da un sistema nullo. [Nella (20) si avrebbe $a=d$, $b=c$].

([18]) Nel caso $a=d$, $b=c$ della nota precedente verrebbe invece

$$\frac{1+\rho}{1-\rho}\,\frac{1+\sigma}{1-\sigma}=k.$$

Potremo allora rendere più immediata la rappresentazione delle corrispondenze quadrilineari per mezzo di due quadriche (distinte o sovrapposte) Q, Q' e della reciprocità Φ, sostituendo Q' colla quadrica Q_1, di cui essa è l'omologa per mezzo di Φ. In fatti il dire, come prima (n. 17), che un punto xy di Q e uno zu di Q' son reciproci per Φ, equivarrà a dire che quel punto xy di Q sta nel piano, tangente a Q_1, che congiunge le generatrici di Q_1 omologhe di z e u. Così (chiamando ancora z e u queste rette di Q_1) avremo la seguente rappresentazione della quadrilinearità:

Quattro campi binari son rappresentati rispettivamente sui due regoli C_1 C_2 di una quadrica Q e sui due regoli C_3 C_4 di un'altra quadrica Q_1. Forman quaterna della quadrilinearità 4 rette x y z u di C_1 C_2 C_3 C_4, quando il punto xy sta nel piano zu.

Data una quadrilinearità qualunque (colla sola riserva posta al principio di questo n°), la si potrà sempre rappresentare in questo modo: basterà ricorrere anzitutto al procedimento del n. 16, e poi sostituire alla quadrica Q' la Q_1 come ora s'è detto. Ma anche direttamente, una volta fissata Q, si otterrà la Q_1. In fatti un piano zu tangente a Q_1 sega Q secondo la conica luogo dei punti di incontro delle rette x y di C_1 C_2 che forman quaterna colle z u: ossia secondo la conica che è imagine su Q della projettività $\mathcal{P}_{12}$ residua di z u. Viene dunque Q_1 come *inviluppata dai piani delle coniche che sono imagini su Q per le ∞^2 $\mathcal{P}_{12}$ della nostra quadrilinearità.*

Viceversa, date due quadriche Q, Q_1, si porrà una corrispondenza quadrilineare fra i loro regoli, associando due generatrici x y di Q e due z u di Q_1, quando il punto xy sta nel piano zu.

28. Su questa rappresentazione delle quadrilinearità si ritrovan facilmente alcune proprietà di queste. Così le $\mathcal{P}_{12}$ degeneri proverranno dai piani tangenti comuni alle due quadriche Q, Q_1; e le $\mathcal{P}_{34}$ degeneri dai punti della quartica intersezione di Q, Q_1. Le rette dei due regoli di Q, che s'incontrano su questa quartica, si corrispondono nella corrispondenza (2, 2) di cui s'è accennato al n. 3. Due tali rette insieme con una generatrice di Q_1 concorrente con esse danno una delle ∞^1 terne neutre; ecc. ecc. –

Il tetraedro polare che (in generale) è comune a Q, Q_1 ci darà nuovi fatti per la quadrilinearità.

Anzi tutto fissiamo la nostra attenzione su due spigoli opposti di quel tetraedro. Essi sono le diagonali di due quadrilateri giacenti rispettivamente in Q e in Q_1. Diciamo $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, e $c_1 c_2$, $d_1 d_2$ le coppie di lati opposti di questi quadrilateri, appartenenti rispettivamente ai regoli C_1, C_2 di Q, e C_3, C_4 di Q_1: sicchè i quadrilateri stessi, ordinati, saranno $a_1 b_1 a_2 b_2$ e $c_1 d_1 c_2 d_2$. Due vertici opposti del 1° stanno (su una diagonale e quindi) su due facce opposte del 2°; e poi gli altri due vertici del 1° sulle altre due facce del 2°. Possiamo, eventualmente con uno scambio di a_1 e a_2, supporre che i vertici opposti $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ stiano precisamente sulle facce $c_1 d_2$, $c_2 d_1$. Ricordando allora che l'essere il punto comune a due rette di C_1 C_2 situato nel piano di due rette di C_3 C_4 significa che le 4 rette forman quaterna della quadrilinearità f, concludiamo che son quaterne di f quelle che si ottengon prendendo $a_1 b_1$, o $a_2 b_2$, con $c_1 d_2$, o con $c_2 d_1$; ed anche (dall'altra diagonale comune) $a_1 b_2$, oppure $a_2 b_1$, con $c_1 d_1$, o con $c_2 d_2$: insomma le quaterne $a_i b_k c_l d_m$, ove siano in numero dispari gl'indici uguali (a 1 od a 2).

Assumiamo allora nei quattro campi binari rispettivamente $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2$ come elementi fondamentali delle coordinate. Vorrà dire che l'equazione (5) di f (n. 5) è soddisfatta ponendo nulle una x, una y, una z, una u, con un numero dispari d'indici uguali; ossia che son nulli i coefficienti a_{iklm} con un numero dispari d'indici uguali. Dunque: *In generale si può ridurre l'equazione* (5) *di una quadrilinearità a contenere solo i termini con tutti gl'indici uguali e quelli con due indici* 1 *e due indici* 2; *in altre parole, in coordinate non omogenee si può ridurre l'equazione a contenere solo il termine in* $x y z u$, *quelli coi prodotti delle 4 coordinate a due a due, e un termine costante.* (19)

Se nella considerazione dei due quadrilateri avessimo supposto che i vertici $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ stessero sulle facce $c_1 d_1$, $c_2 d_2$, saremmo giunti nello stesso modo a questo risultato: che l'equazione (5) della quadrilinearità si può ridurre a contenere solo i termini con un numero *dispari* (cioè uno o tre) d'indici uguali; o, in coordinate non omogenee, a contenere solo i termini in x, y, z, u e nei prodotti di queste a tre a tre. Questa equazione canonica equivale perfettamente alla precedente: si passa dall'una all'altra scambiando, ad esempio, fra loro le coordinate omogenee x_1 x_2; o mutando la non omogenea x in $\frac{1}{x}$.

Se nell'equazione canonica generale

$$a x y + a' z u + b x z + b' y u + c x u + c' y z + d x y z u + d' = 0 \qquad (22)$$

(19) Quest'equazione canonica è ottenuta dal Le Paige (a pag. 304) col computo delle costanti. Da questo non appare — come invece risulta col metodo seguìto nel testo, — che essa può cessar di valere in casi speciali.

(i cui coëfficienti sian $=|=0$) si pongono le $x\ y\ z\ u$ uguali a delle nuove variabili moltiplicate rispettivamente pei fattori $r\sqrt{a' b' c'}$, $r\sqrt{a' b c}$, $r\sqrt{a b' c}$, $r\sqrt{a b c'}$, ove $r^4 . d\, a\, a' b\, b' c\, c' = d'$, l'equazione stessa prende la forma più semplice

$$\alpha\,(x\,y + z\,u) + \beta\,(x\,z + y\,u) + \gamma\,(x\,u + y\,z) + \delta\,(x\,y\,z\,u + 1) = 0. \qquad (23)$$

Qui i rapporti dei 4 coefficienti $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ daranno i tre invarianti assoluti essenziali della quadrilinearità: cfr. la (24).

Calcolando gl'invarianti $L\ M\ N$ per la (22) e per la (23), si trova:

$$\left.\begin{aligned} L &= (d\,d' - a\,a')\,(b\,b' - c\,c') = (\delta^2 - \alpha^2)\,(\beta^2 - \gamma^2) \\ M &= (d\,d' - b\,b')\,(c\,c' - a\,a') = (\delta^2 - \beta^2)\,(\gamma^2 - \alpha^2) \\ N &= (d\,d' - c\,c')\,(a\,a' - b\,b') = (\delta^2 - \gamma^2)\,(\alpha^2 - \beta^2) \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

29. Pel seguito ci farà comodo avere l'equazione canonica della quadrilinearità in relazione con quelle delle due quadriche Q, Q_1. Ritroveremo così il risultato di dianzi.

Scriviamo le due quadriche in forma canonica così ($X_1 \ldots$ indicando le 4 coordinate omogenee di punti):

$$Q \equiv \Sigma\, a_h^2 X_h^2, \quad Q_1 \equiv \Sigma\, b_h^2 X_h^2. \qquad (25)$$

Si potrà allora rappresentare parametricamente Q, ponendo, ad esempio (con $i = \sqrt{-1}$),

$$\left.\begin{aligned} a_1 X_1 &= x\,y + 1, & a_2 X_2 &= i\,(x\,y - 1), \\ a_3 X_3 &= i\,(x + y), & a_4 X_4 &= x - y. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

I parametri x, y son coordinate projettive entro i due regoli di Q. Similmente, se Q_1, quale è data da (25), si rappresenta come inviluppo di piani ξ, si potrà porre, analogamente alle (26), per questi piani di Q_1:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= b_1\,(z\,u + 1), & \xi_2 &= i\,b_2\,(z\,u - 1), \\ \xi_3 &= i\,b_3\,(z + u), & \xi_4 &= b_4\,(z - u), \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

ove z, u son parametri projettivi per le rette dei due regoli di Q_1.

La quadrilinearità, che noi consideriamo fra i regoli di Q, Q_1, nasce se obblighiamo il punto $X \equiv x\,y$ di Q a stare nel piano $\xi \equiv z\,u$ di Q_1; ossia se poniamo $\Sigma\, X_h\, \xi_h = 0$; o sostituendo le (26) e (27), e scrivendo ρ_h invece che $\frac{b_h}{a_h}$:

$$\left.\begin{array}{l}(\rho_1-\rho_2)(x\,y\,z\,u+1)+(\rho_1+\rho_2)(x\,y+z\,u)+\\ +(\rho_4-\rho_3)(x\,z+y\,u)-(\rho_3+\rho_4)(x\,u+y\,z)=0.\end{array}\right\} \tag{28}$$

Ritroviamo la forma canonica (23).

30. L'equazione (22), o (23), non si altera se mutiamo il segno simultaneamente a $x\ y\ z\ u$. Essa proveniva da una delle tre coppie di spigoli opposti del tetraedro polare di Q e Q_1. Dunque:

Una quadrilinearità fra i campi $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ determina, in generale, in tre modi diversi, quattro involuzioni, rispettivamente entro quei 4 campi: le quali involuzioni mutano in sè la quadrilinearità, ossia trasformano 4 elementi qualunque associati in questa in 4 elementi pure associati.

Queste involuzioni sono generate, entro ai regoli di Q, Q_1, dalle involuzioni spaziali che hanno per assi le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro. Ne deriva che *le tre involuzioni che si hanno in ciascuno dei 4 campi sono a due a due armoniche.* —

Invece delle dette involuzioni biassiali si considerino nello spazio le omologie armoniche definite dai vertici e facce opposte del tetraedro polare. Una di esse trasforma l'un nell'altro (non più in se stessi) i due regoli $C_1\ C_2$ di Q, e così pure quelli $C_3\ C_4$ di Q_1; e ancora muta quaterne di generatrici $x\ y\ z\ u$ in cui il punto $x\,y$ sta nel piano $z\,u$ in simili quaterne. Ne deduciamo:

Data una quadrilinearità fra i campi $C_1 \ldots C_4$, esiste in generale — e ciò in 4 modi diversi — un'omografia tra due di questi, per esempio tra C_1 e C_2, e una fra gli altri due, C_3 e C_4, le quali mutano ogni quaterna della quadrilinearità in una quaterna. ([20])

Le 4 omografie che così si hanno, ad esempio, fra C_1 e C_2, sono a due a due armoniche: avendo come prodotti rispettivamente le involuzioni dianzi considerate su C_1 e su C_2. –

Rappresentando di nuovo i 4 campi binari sui regoli di Q, Q_1, sicchè le

([20]) S'intende qui, analogamente a ciò che s'era fatto nella nota ([4]), che un'omografia tra due campi distinti C_1 e C_2 si applica in pari tempo a trasformare gli elementi di C_1 in quelli di C_2, e gli elementi di C_2 in quelli di C_1: ossia si abbracciano l'omografia e la sua inversa in un'unica corrispondenza (involutoria) per l'insieme dei due campi.

omografie considerate tra C_1 e C_2, e tra C_3 e C_4 rispondano alle suddette omologie armoniche; si ha che invece le analoghe omografie tra C_1 e C_3 e tra C_2 e C_4, che mutano in sè la quadrilinearità, sono prodotte da 4 delle 8 polarità ordinarie, rispetto a cui si corrispondono le due quadriche Q e Q_1; e così le 4 omografie tra C_1 e C_4, e tra C_2 e C_3, dalle altre 4 di quelle polarità. Il prodotto di due polarità di una stessa quaterna è la collineazione involutoria che ha per assi due spigoli opposti del tetraedro. In conseguenza i prodotti di due omografie di una stessa quaterna son sempre le stesse tre involuzioni, che già si son considerate su ciascun campo binario. ([21])

31. L'esistenza di omografie fra due dei 4 campi binari, e fra gli altri due, tali da mutare in sè la quadrilinearità, prova che *ogni fatto projettivo relativo alla corrispondenza quadrilineare riman vero se si scambiano due dei 4 campi binari rispettivamente cogli altri due* ([22]); *sempre che le projettività residue fra i primi due campi, e quindi fra gli altri due, non stiano in una rete.* Così se il sistema delle projettività residue $\mathcal{P}_{12}$, senza essere in una rete ($L = \mid = 0$), presenta qualche altra particolarità, la stessa particolarità si presenterà nel sistema delle $\mathcal{P}_{34}$.

Si può obbiettare che le considerazioni del n.° prec.e ammettevano l'esistenza di un tetraedro polare comune a Q, Q_1: mentre in casi particolari un tal tetraedro può mancare. Ma anche in quei casi si sa ([23]) che esiste sempre almeno una reciprocità che scambia fra loro quelle due quadriche. Ed essa produce fra i quattro regoli (cioè fra C_1 e C_3, C_2 e C_4; oppure fra C_1 e C_4, C_2 e C_3) le omografie che dimostrano quanto ora abbiamo asserito.

([21]) Quelle tre involuzioni, e quindi anche le loro tre coppie di elementi doppi, a due a due armoniche, avranno una speciale importanza per la quadrilinearità.

Ad esempio, suppongasi che le $\mathcal{P}_{12}$ debbano stare in *una* rete, cioè essere armoniche ad *una* projettività fissa $\mathfrak{R}$. Due involuzioni associate, rispettivamente di C_1 e di C_2, muteranno $\mathfrak{R}$ in sè stessa. Sicchè, se P_1 è un punto doppio della 1ª involuzione, $\mathfrak{R}$ lo trasformerà in un punto P_2 di C_2 che dovrà essere mutato in sè dalla 2ª involuzione; ossia sarà punto doppio di questa. Si vede così che $\mathfrak{R}$ sarà determinata (in un numero finito di modi) dal fatto che deve far corrispondere alle 3 coppie di elementi doppi delle involuzioni di C_1 le 3 coppie di elementi doppi delle involuzioni di C_2.

([22]) In un ordine che può *non* essere arbitrario: come risulterà tosto.

([23]) C. Segre, *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche,* Giornale di matem.e, 22 (1884), p. 29. Veggasi il principio della p. 32.

32. In base alla rappresentazione del n. 27 e seg.[1] delle quadrilinearità, si può dire che *la geometria projettiva delle forme binarie quadrilineari, o quadrilinearità (ad invariante L non nullo), equivale alla geometria projettiva del sistema di due quadriche (non degeneri).* Intendiamo in questo enunciato che i 4 campi binari delle quadrilinearità sian soggetti a sostituzioni lineari *indipendenti.*

Si abbiano 4 campi binari rappresentati rispettivamente dai regoli C_1 C_2, C_3 C_4 di due quadriche Q, Q_1; e 4 campi binari rappresentati rispettivamente dai regoli D_1 D_2, D_3 D_4 di due quadriche R, R_1. Fra C_1 C_2 C_3 C_4 si consideri la quadrilinearità f determinata nel modo di cui ci stiamo occupando (n. 27); e tra D_1 D_2 D_3 D_4 la quadrilinearità g definita analogamente.

Se una collineazione muta Q, Q_1 in R, R_1, essa subordina 4 omografie tra i loro regoli, per esempio tra C_1 e D_1, C_2 e D_2, C_3 e D_3, C_4 e D_4, le quali mutano evidentemente f in g.

Viceversa si abbiano 4 omografie binarie tra $C_1 D_1$, $C_2 D_2$, $C_3 D_3$, $C_4 D_4$, le quali mutino f in g. Le prime due definiranno una collineazione spaziale che muta Q (di cui C_1 C_2 sono i regoli) in R (di regoli D_1 D_2). Per ipotesi, se x y z u sono elementi di C_1 C_2 C_3 C_4 che formin quaterna di f, i loro omologhi x' y' z' u' in D_1 D_2 D_3 D_4 formeranno una quaterna di g. Teniamo fissi z u, e quindi z' u'; e lasciamo variare gli altri elementi. Avremo che nella collineazione considerata i punti $x y$ di Q situati nel piano di due generatrici fissate di Q_1, han per omologhi i punti $x' y'$ di R siti nel piano di due determinate generatrici di R_1. Onde in quella collineazione ai piani tangenti di Q_1 rispondono i piani tangenti di R_1. La coppia di quadriche Q Q_1 risulta collineare alla coppia di quadriche R R_1. –

Questo teorema ([24]) ci assicura che ogni particolarità projettiva di posizione delle due quadriche Q, Q_1 si rispecchierà in una particolarità projettiva della quadrilinearità f; e viceversa. Accenneremo tosto alcune di queste particolarità.

([24]) Si accorda con esso il fatto che gl'invarianti assoluti indipendenti di una quadrilinearità (poichè le costanti di questa sono 15, e quelle delle 4 sostituzioni lineari sono 12) sono 3 (cfr. n. 28): quanti appunto son quelli del sistema di due quadriche.

DEDUZIONE DI ALCUNI CASI SPECIALI DI QUADRILINEARITÀ.

33. Se le due quadriche Q, Q_1 son tali che esista un tetraedro iscritto in Q e circoscritto a Q_1, dicendo $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ le coppie di generatrici dei due regoli di Q che passan pei vertici del tetraedro, e $z_1 u_1$, $z_2 u_2$, $z_3 u_3$, $z_4 u_4$ le coppie di rette dei due regoli di Q_1 che stanno nelle facce rispettivamente opposte a quei vertici; avremo che son quaterne della quadrilinearità tutte le quaterne di elementi $x_i\ y_i\ z_k\ u_k$ con $i \neq k$. Quindi un noto teorema relativo alle due quadriche ci dà quest'altro per le quadrilinearità:

Se una quadrilinearità è tale che esistan 4 coppie di elementi rispettivamente di due campi, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$, e 4 coppie di elementi degli altri due campi $z_1 u_1$, $z_2 u_2$, $z_3 u_3$, $z_4 u_4$, tali che sian quaterne della corrispondenza tutte le $x_i\ y_i\ z_k\ u_k$ con $i \neq k$, allora esisteranno infinite tali configurazioni di elementi. Perchè ciò accada deve annullarsi un invariante di f.

Analogamente dal teorema sull'esistenza di tetraedri polari rispetto a Q e circoscritti a Q_1, considerando che i piani tangenti a Q_1 segnano su Q le coniche imagini delle projettività $\mathcal{P}_{12}$, si trae:

Data una corrispondenza quadrilineare, nel sistema delle projettività residue delle coppie di elementi di due campi non esistono in generale 4 projettività che siano a due a due armoniche. Ma se esiste una tal quaterna di projettività (per il che dovrà annullarsi un certo invariante della corrispondenza) *ne esisteranno infinite.* (E lo stesso fatto accadrà per le projettività residue degli altri due campi).

34. Le particolarità nella intersezione di Q, Q_1 ci conducono ad altri casi speciali di corrispondenze quadrilineari.

Se Q, Q_1 si toccano in un punto, le 4 generatrici uscenti da questo sono, per la quadrilinearità, così fatte che a tre a tre danno terne neutre. — Viceversa se $x\ y\ z\ u$ son rette dei 4 regoli tali che a tre a tre danno una terna neutra, ciò significherà che il punto xy e ogni piano per z sono incidenti; ossia il punto xy sta su z; e similmente starà su u. Dualmente le 4 rette stanno in uno stesso piano. Dunque Q e Q_1 si toccano. —

Se Q, Q_1 hanno una retta comune, se per esempio coincidono la retta x di C_1 e la z di C_3, ogni punto xy sta in ogni piano zu: la coppia $x\ z$

è neutra. Viceversa se due rette x, z di C_1, C_3 costituiscono una coppia neutra, esse dovranno sovrapporsi ([25]).

35. Se Q, Q_1 si tagliano in due coniche, ad intersezioni distinte, sicchè le due quadriche saranno bitangenti; avremo nella quadrilinearità due diverse quaterne, tali, come al n.° preced.^e, che gli elementi di ognuna combinati a tre a tre danno terne neutre. Se gli elementi delle due quaterne si prendon come fondamentali per le coordinate rispettivamente nei 4 campi, dovrà f annullarsi identicamente quando si annullano tre coordinate $x\ y\ z\ u$ collo stesso indice; sicchè le a_{iklm} con tre o quattro indici uguali saran nulle. Restano in f solo i termini con due indici 1 e due indici 2. O, se si fa uso di coordinate non omogene, f si riduce a contenere solo i 6 prodotti di queste 4 coordinate combinate a due a due.

Effettivamente l'equazione (28) quando si supponga $\rho_1 = \rho_2$, sicchè Q, Q_1 si segano in due coniche, si riduce a

$$2\rho_1 (x\,y + z\,u) + (\rho_4 - \rho_3)(x\,z + y\,u) - (\rho_3 + \rho_4)(x\,u + y\,z) = 0. \qquad (29)$$

Questo caso si può anche caratterizzare così: che, senza che esistan coppie neutre, la corrispondenza (2, 2) fra C_1 C_2, di cui al n. 3, si spezza in due projettività. In fatti quella corrispondenza è data (n. 28) dalla quartica comune a Q, Q_1: la quale dunque si spezzerà in due coniche; ecc. ecc.

Un caso più speciale si ha quando Q, Q_1 si tagliano in un quadrilatero. Se due lati opposti di questo si considerano come comuni ai regoli C_1 C_3 e gli altri due ai regoli C_2 C_4, si avrà una quadrilinearità con due coppie neutre su C_1 C_3, e con due coppie neutre su C_2 C_4. Se si tratta di coppie distinte, e le si prendono come elementi di riferimento nei 4 campi, la f si riduce a contenere solo i termini in $x_1\,y_1\,z_2\,u_2$, $x_1\,y_2\,z_2\,u_1$, $x_2\,y_1\,z_1\,u_2$, $x_2\,y_2\,z_1\,u_1$; o, in coordinate non omogenee, a

$$a\,x\,y + a'\,z\,u + c\,x\,u + c'\,y\,z = 0. \qquad (30)$$

Sarebbe il caso che nell'equazione (29) di prima sia $\rho_3 = \rho_4$.

Merita pure rilievo l'altro caso speciale che Q e Q_1 si tocchino lungo

([25]) Il fatto che, se i regoli C_1 C_3 han comuni *due* rette, anche gli altri due regoli C_2 C_4 avran comuni due rette, corrisponde all'altro: che se le $\mathcal{P}_{13}$ forman fascio, anche le $\mathcal{P}_{24}$ forman fascio.

una conica; si può allora porre nella (28) $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, sicchè diventa:

$$2\rho_1(xy+zu)+(\rho_4-\rho_1)(xz+yu)-(\rho_1+\rho_4)(xu+yz)=0, \tag{31}$$

equazione che equivale alla:

$$\alpha(xy+zu)+\beta(xz+yu)+\gamma(xu+yz)=0, \tag{32}$$

quando sia

$$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

Alle proprietà speciali di questa corrispondenza quadrilineare, che derivano subito dalle cose precedenti, si può aggiungere quest'altra. *Esistono* ∞^3 *quaterne di omografie, interne rispettivamente ai 4 campi, tali che sempre 4 omografie di una quaterna mutano la quadrilinearità in sè stessa. Si può prendere ad arbitrio un'omografia in un campo, e restan determinate le tre degli altri tre campi.* Ciò risulta fissando ad arbitrio un'omografia fra i punti della conica di contatto di Q, Q_1; riferendo i regoli di queste prospettivamente a quella conica, ne vengon 4 omografie entro a quei regoli; e si riconosce subito che la collineazione spaziale determinata dalle omografie dei due regoli di Q muterà pure in sè ciascuno dei regoli di Q_1, subordinandovi le date omografie.

Le quadriche nella relazione rilevata da G. Kohn.

36. Cerchiamo qualche proprietà di due quadriche Q, Q_1, tali che la corrispondenza quadrilineare, ottenuta al modo dei n.i 27 e seg.i, abbia, fra un regolo C_1 di Q e uno C_3 di Q_1, le projettività residue $\mathcal{P}_{13}$ in una rete [26].

Ragioneremo in modo analogo al n. 23, e otterremo un risultato simile.

Diciamo y e u due rette qualunque di C_2, C_4. La residua projettività $\mathcal{P}_{13}$ fra rette di C_1, C_3 nasce considerando come omologhe due rette x, z di questi regoli, sempre quando il punto xy è nel piano zu. Ossia: riferita prospettivamente la punteggiata y al fascio di piani u, si riferisce poi il re-

([26]) Non vi è luogo a supporre che le $\mathcal{P}_{12}$ o $\mathcal{P}_{34}$ siano in una rete: perchè ciò si è dovuto escludere al n. 27. In conseguenza l'ipotesi che le $\mathcal{P}_{13}$ (e quindi anche le $\mathcal{P}_{24}$) stiano in una rete, toglie (n. 7) che lo stesso fatto accada per le $\mathcal{P}_{14}$ o per le $\mathcal{P}_{23}$.

golo C_1 prospettivamente alla y, e il regolo C_3 al fascio di piani u. Ora l'essere le $\mathfrak{P}_{13}$ in una rete equivale (n. 8) a dire che per ogni coppia arbitraria yu di rette di C_2, C_4 ve n'è sempre un'altra $y'u'$ che ha la stessa P_{13} residua. Dunque: se riferiamo prospettivamente anche la punteggiata y' al fascio di piani u'; e poi il regolo C_1, non solo alla punteggiata y, ma anche alla y'; ne risulta un riferimento prospettivo di C_3 *simultaneamente* ai due fasci di piani u, u'. In altre parole, riguardando i due regoli C_1, C_3 come generati: C_1 da due punteggiate projettive y, y', e C_3 da due fasci projettivi di piani u, u'; si ha che la punteggiata y è sezione del fascio u, e la y' è sezione del fascio u'. *Le quadriche Q, Q_1 son tali che esistono (in ∞^2 modi) due fasci projettivi di piani generatori di Q_1, i quali son prospettivi rispettivamente a due punteggiate projettive generatrici di Q* [27].

Risulta dal nostro ragionamento che basta che in un modo si possan generare le due quadriche come s'è detto, perchè ciò si possa fare in ∞^2 modi: potendosi prendere ad arbitrio in C_2 e C_4 le rette y e u, sostegni di una punteggiata, e di un fascio di piani, prospettivi. Le rette y' e u' sostegni delle altre due forme saranno tali che y ha per corrispondente u' e y' ha per corrispondente u in una ben determinata projettività: quella a cui saranno armoniche tutte le $\mathfrak{P}_{24}$.

Poichè è lo stesso dire che sono in una rete le $\mathfrak{P}_{13}$, o le $\mathfrak{P}_{24}$, si potran prendere i sostegni delle due punteggiate projettive in C_1, anzi che in C_2, e nello stesso tempo i sostegni dei due fasci di piani in C_3, anzi che in C_4.

37. G. Kohn [28] aveva già considerato espressamente il caso di due quadriche, generabili rispettivamente con due fasci projettivi di piani, e con due punteggiate projettive, sezioni di quei fasci; ed aveva dimostrato che se ciò è possibile, sarà in ∞^2 modi.

Egli aggiunge la seguente osservazione. Indichiamo ancora, come al n.° prec.^{e}, con y, y' le due punteggiate, e con u, u' i due fasci di piani; diciamo poi A', B' i punti d'incontro di y' con Q_1, ed A, B i loro omologhi

---

(27) Questo risultato e l'altro, simile, del n. 23, portano, per analogia, a domandare se, date due quadriche Q, Q_1, si possa sempre, o no, generare, simultaneamente, Q con due stelle reciproche e Q_1 (come inviluppo) con due piani reciproci sezioni di quelle stelle. Si trova facilmente che la cosa è sempre possibile, in generale: ossia, a differenza del caso dei fasci e punteggiate projettive, non si ha qui una particolarità di posizione delle due quadriche.

(28) *U. eine besondere Lagenbeziehung von zwei Oberflächen zweiter Ordnung.* Monatshefte für Math. u. Phys., Bd. 11 (1900), p. 102.

su y. I piani uA', $u'A'$ dei due fasci saranno pure omologhi, perchè projettano uno stesso punto A' di Q_1; e d'altra parte $u'A'$ deve avere per omologo il piano uA: sicchè questo piano contiene anche A'. Dunque la retta AA', che è generatrice di Q, incontra u in un punto E; e similmente BB' incontrerà u in un punto F. Il quadrilatero semplice $EA'B'F$ avrà i suoi 4 vertici, evidentemente, sulla quartica comune a Q, Q_1; e avrà un lato ($EF \equiv u$) in Q_1, gli altri tre (EAA', $A'B' = y'$, FBB') giacenti in Q. *Le quadriche* Q, Q_1 *di* KOHN *sono caratterizzate dall'esistenza di un quadrilatero semplice iscritto nella quartica comune, con tre lati in Q e il 4° lato in Q_1.* Dall'esistenza di un tal quadrilatero si deduce che ne esistono ∞^1 (e che ha luogo anche il fatto duale, scambiando le due quadriche). Anzi, per l'osservazione finale del n.° prec.^{e}, vi saranno due specie di tali quadrilateri: gli uni con due lati opposti nel regolo C_1, uno in C_2 e uno in C_4; gli altri con due lati opposti in C_2, uno in C_1 e uno in C_3 (29).

38. Cerchiamo la condizione algebrica che caratterizza due quadriche Q, Q_1 nella relazione considerata.

Supposto anzi tutto che le quadriche siano, in forma canonica,

$$Q \equiv \Sigma a_{hh} X_h^2, \qquad Q_1 \equiv \Sigma b_{hh} X_h^2, \tag{33}$$

e posto $b_{hh} = \rho_h^2 a_{hh}$ (cfr. n. 29), l'equazione della quadrilinearità si potrà scrivere nella forma (28). Calcolando per questa gl'invarianti L, M, N, in base alla 2ª parte delle formole (24), si trova:

$$L = 16\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$$
$$M = -(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4)(\rho_1+\rho_2-\rho_3-\rho_4)(\rho_1-\rho_2+\rho_3-\rho_4)(\rho_1-\rho_2-\rho_3+\rho_4)$$
$$N = -(-\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4)(\rho_1-\rho_2+\rho_3+\rho_4)(\rho_1+\rho_2-\rho_3+\rho_4)(\rho_1+\rho_2+\rho_3-\rho_4).$$

Per conseguenza la condizione affinchè le $\mathcal{S}_{13}$ o le $\mathcal{S}_{14}$ stiano in una rete, ossia Q e Q_1 sian quadriche di KOHN, che è data dall'annullare M o N, si potrà scrivere così:

$$\sqrt{\frac{b_{11}}{a_{11}}} + \sqrt{\frac{b_{22}}{a_{22}}} + \sqrt{\frac{b_{33}}{a_{33}}} + \sqrt{\frac{b_{44}}{a_{44}}} = 0, \tag{34}$$

ove i segni dei radicali non sono determinati.

(29) Colla rappresentazione ellittica dei punti della quartica si ritrovan subito questi fatti.

Prendendo questi segni in tutti i modi possibili, si hanno 8 equazioni distinte; che, moltiplicate insieme, danno:

$$\left[\Sigma\left(\frac{b_{hh}}{a_{hh}}\right)^2 - 2\,\Sigma\frac{b_{hh}}{a_{hh}}\frac{b_{kk}}{a_{kk}}\right]^2 = 64\,\frac{b_{11}}{a_{11}}\frac{b_{22}}{a_{22}}\frac{b_{33}}{a_{33}}\frac{b_{44}}{a_{44}}, \tag{35}$$

ove la 2ª somma si riferisce alle 6 combinazioni binarie degl'indici.

Ora supponiamo che le equazioni di Q e Q_1 come luoghi si abbiano sotto forma generale; e indichiamo di nuovo con Q e Q_1 queste forme generali. Si sa che nella forma canonica (33) i rapporti $\frac{b_{hh}}{a_{hh}}$ risultan le radici dell'equazione in σ del discriminante di $\sigma Q - Q_1$. Diciamo Δ e Δ' i discriminanti di Q e Q_1, e poi $J_1\ J_2\ J_3$ i noti invarianti simultanei di Q, Q_1 rispettivamente di 1°, 2°, 3° grado rispetto ai coefficienti di Q, e di 3°, 2°, 1° grado rispetto a quelli di Q_1; sicchè la detta equazione discriminante di $\sigma Q - Q_1$ sia

$$\Delta\,\sigma^4 - J_3\,\sigma^3 + J_2\,\sigma^2 - J_1\,\sigma + \Delta' = 0.$$

Sarà dunque:

$$\Sigma\frac{b_{hh}}{a_{hh}} = \frac{J_3}{\Delta}, \qquad \Sigma\frac{b_{hh}}{a_{hh}}\frac{b_{kk}}{a_{kk}} = \frac{J_2}{\Delta}, \qquad \Sigma\left(\frac{b_{hh}}{a_{hh}}\right)^2 = \frac{J_3^2 - 2\,\Delta\,J_2}{\Delta^2}$$

$$\frac{b_{11}}{a_{11}}\frac{b_{22}}{a_{22}}\frac{b_{33}}{a_{33}}\frac{b_{44}}{a_{44}} = \frac{\Delta'}{\Delta},$$

e la condizione (35) diverrà:

$$\left(\frac{J_3^2 - 4\,\Delta\,J_2}{\Delta^2}\right)^2 - 64\,\frac{\Delta'}{\Delta} = 0$$

ossia

$$(J_3^2 - 4\,\Delta\,J_2)^2 - 64\,\Delta^3\,\Delta' = 0. \tag{36}$$

È questa, sotto forma invariantiva, la condizione cercata ([30]).

39. Se le due quadriche si segano in un quadrilatero, si può supporre $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_3 = \rho_4$; e risulta $M = 0$: ossia le due quadriche sono *sempre* nella relazione di Kohn. (Cfr. n. 35).

([30]) J. H. Grace, *Tetrahedra in Relation to Spheres and Quadrics* (Proceedings London Math. Soc. (2) 17, 1919, p. 259), incontra (a p. 263) questa condizione (36), per esprimere un'altra relazione fra le quadriche Q, Q_1. Ma questa lo conduce pure all'esistenza di quadrilateri di generatrici, come quelli del n. 37: donde un legame colla relazione di Kohn.

Se le due quadriche si toccano lungo una conica, si può porre $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$; e si ha che è nullo M od N solo se $\rho_4^2 = 9\rho_1^2$: ossia se, entro al fascio determinato da Q, Q_1, il birapporto di queste, del piano doppio, e del cono circoscritto comune, vale 9.

In generale, se una quadrilinearità ammette una quaterna $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ tale che 3 elementi qualunque fra i quattro formino sempre una terna neutra (come le 4 generatrici di Q, Q_1 in un punto di contatto: v. n. 34), la $\mathcal{P}_{13}$ residua di $a_2\, a_4$ ha a_1 e a_3 come elementi singolari. Quindi se $M = 0$, ossia se le $\mathcal{P}_{13}$ sono armoniche ad una projettività fissa, questa avrà a_1 e a_3 come elementi omologhi. Quest'osservazione si può applicare alle quaterne di generatrici di Q, Q_1 passanti per un punto di contatto. In particolare, se Q e Q_1 si toccano lungo una conica e presentano il caso or ora accennato, la projettività armonica a tutte le $\mathcal{P}_{13}$ sarà quella fra i regoli $C_1\, C_3$ in cui si corrispondono rette che s'incontrano sulla detta conica.

Le quadrilinearità segate su quattro rette dai piani dello spazio.

40. Fissate 4 rette $C_1\, C_2\, C_3\, C_4$, se si associano quattro loro punti, sempre quando siano complanari, si ottiene una quadrilinearità, il cui studio è molto ovvio ([31]).

Essa presenta particolarità che si riconoscono subito. Limitandoci al caso che le 4 rette siano a due a due sghembe, è chiaro che una retta incidente a tutte quattro segnerà su essa quattro punti che a tre a tre formano terna neutra per la corrispondenza. Perciò nel caso generale che son due le rette incidenti alle C, la quadrilinearità offrirà la singolarità di cui al principio del n. 35, corrispondente al caso che le quadriche Q, Q_1 si taglino in due coniche. La corrispondenza (2, 2) del n. 3 fra C_1 e C_2 si ha qui ac-

([31]) Cfr. Le Paige, § III. Ivi si trova, fra altro, rilevato che, se le quattro rette sono i lati di un quadrilatero sghembo, l'equazione della corrispondenza si può mettere sotto la forma (12). -

Sono anche molto facili da studiare (e non staremo a discorrerne) le particolari corrispondenze quadrilineari che i piani dello spazio segnano su una cubica sghemba e una retta; su due coniche non complanari; su una conica e due rette (esterne al piano della conica).

coppiando punti di queste due rette, tali che la loro congiungente incontri C_3, oppure C_4: sicchè si spezza in due projettività, come in quel caso. Ecc. ecc.

Il caso che le 4 rette C ammettano una sola retta quadrisecante risponde al caso che le coniche comuni a Q, Q_1 si tocchino; e quello in cui le quadrisecanti sono infinite, ossia le 4 rette C stanno in un regolo, risponde al caso, con cui finiva il n. 35, che Q e Q_1 si tocchino lungo una conica.

Se vi sono almeno due quadrisecanti distinte, prendiamo i 4 punti fondamentali delle coordinate nelle loro intersezioni con C_1, C_2. Si potranno rappresentare le coordinate dei punti di $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ in funzione rispettivamente di 4 parametri variabili x, y, z, u, così:

$$(1\ x\ 0\ 0),\ (0\ 0\ 1\ y),\ (1\ z\ a\ b z),\ (1\ u\ 1\ u).$$

Annullandone il determinante, porremo la condizione di complanarità di quei punti; ossia otterremo l'equazione della corrispondenza quadrilineare. Viene:

$$(a-1)\,x\,y+(b-1)\,z\,u-b\,x\,z-a\,y\,u+x\,u+y\,z=0. \tag{37}$$

Si riconosce subito che l'equazione contenente i soli 6 prodotti di $z\ y\ z\ u$ combinate a due a due si può, in generale, ridurre a questa forma. Dunque: *la quadrilinearità segata su 4 rette generiche dai piani dello spazio rappresenta il caso generale di corrispondenza quadrilineare con due quaterne speciali come al n. 35, ossia colle corrispondenze* (2, 2) *spezzate in coppie di projettività.*

I due invarianti assoluti di quella specie particolare di quadrilinearità sono qui dati dai birapporti a, b delle due quaterne di punti in cui le 4 rette C si appoggiano sulle due quadrisecanti.

41. *Come devon essere le 4 rette $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ affinchè le projettività residue, per es. le $\mathcal{P}_{12}$, stiano in una rete?* Ciò è come dire che l'invariante L s'annulla. Ora dalla 1ª delle (24), relativa alla forma (22), applicandola alla forma (37) si ha:

$$L=-(a-1)\,(b-1)\,(a\,b-1).$$

Porre $a=1$, oppure $b=1$, significherebbe che le rette C_3, C_4 sono incidenti, il che escludiamo. Resta $a\,b=1$: ossia *i birapporti delle due quaterne di punti che le 4 rette C segnano sulle due trasversali comuni sono fra loro reciproci.*

Ciò si può vedere anche geometricamente. Diciamo $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ e $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ quelle due quaterne di punti. Se le $\mathfrak{P}_{12}$ sono in una rete, cioè sono armoniche ad una projettività fissa $\mathfrak{R}$; poichè fra le $\mathfrak{P}_{12}$ (che son segnate su C_1 e C_2 dai fasci di piani aventi per assi le rette appoggiate a C_3 e C_4) vi è evidentemente la projettività degenere che ha per punti singolari a_1 e a_2, e similmente quella che ha per punti singolari b_1 e b_2; saranno omologhi nella $\mathfrak{R}$ tanto a_1 e a_2, quanto b_1 e b_2. Quindi quelle $\mathfrak{P}_{12}$ in cui si corrispondono a_1 e b_2 avranno pure per corrispondenti b_1 e a_2. Ciò è come dire che le rette appoggiate a C_3, C_4 e alla retta $a_1\ b_2$ si appoggiano pure alla $b_1\ a_2$. Ossia: C_3, C_4, $a_1 b_2$, $b_1 a_2$ son 4 rette di uno stesso regolo. Considerando le due trasversali comuni alle C (e a queste), si deduce che la quaterna di punti $a_1 a_2 a_3 a_4$ è projettiva alla $b_2 b_1 b_3 b_4$.

La proposizione resta vera anche quando quelle due trasversali comuni alle C coincidono: come prova un calcolo diretto. È il caso che la quaterna dei punti d'incontro delle C coll'unica trasversale sia projettiva alla quaterna dei piani congiungenti le rette stesse a questa trasversale. La proposizione si riduce allora a questa: che le dette quaterne sono armoniche. Anche se le 4 rette C sono in un regolo, esse dovranno entro questo formare un gruppo armonico, se le $\mathfrak{P}_{12}$ han da stare in una rete.

42. Al n. 40 è risultato che la corrispondenza segnata su 4 rette dai piani dello spazio è della stessa natura di quella che avevamo considerato fra i regoli delle due quadriche Q, Q_1, quando queste si segano in due coniche. Riferendo questi regoli a quelle 4 rette punteggiate in modo che le due quadrilinearità si corrispondano, si viene a porre una notevole corrispondenza, ad esempio, fra le coppie composte di un punto di Q e un piano tangente di Q_1, incidenti, ed i piani dello spazio, con cui si segan le 4 rette, oppure i punti dello spazio come intersezioni di una retta appoggiata a due di quelle e di una retta appoggiata alle altre due. — Ai due punti di contatto delle due quadriche (distinti o no) vengono a corrispondere, come già appariva, le due quadrisecanti delle 4 rette. Se le quadriche hanno una conica di contatto, le 4 rette stanno in un regolo.

Sulla teoria generale delle trasformazioni delle superficie per inviluppo di sfere.

(*Di* Pasquale Calapso, *a Messina.*)

Fin da quando intrapresi lo studio delle trasformazioni di Ribaucour e della loro composizione, che ho esposto in una Memoria precedente (*), mi si presentò l'idea di ritornare sul problema da un punto di vista più generale, considerando cioè ***trasformazioni per inviluppo di sfere senza la necessaria corrispondenza delle linee di curvatura tra le due falde.***

Nel presente lavoro è fatto un primo studio su tale generalizzazione, fermandomi principalmente alle congruenze (G') ed alle congruenze (K) per quanto le loro proprietà si presentano generalizzabili.

Siano S ed S_1 le due superficie focali di un inviluppo di sfere, in cui si considerano al solito come corrispondenti i punti P e P_1 in cui la sfera tocca il suo inviluppo.

Se nel punto P della superficie S si considera una tangente t, ***esiste*** una ben determinata tangente $\overline{t}$ nel punto P_1 di S_1 che incontra la t. Le direzioni t e $\overline{t}$ non sono in generale corrispondenti, mentre ***esiste*** una ben determinata tangente t' nel punto P di S che corrisponde alla $\overline{t}$.

Diciamo la tangente t' *associata* alla tangente t.

Se la tangente t' è associata alla t, ***non*** è in generale t associata a t'; una tangente t che coincide con la propria associata la chiamiamo ***direzione principale*** rispetto alla trasformazione della superficie S in S_1.

Presi sopra S due sistemi di linee α, β diciamo che ***il sistema di linee*** β ***è associato al sistema di linee*** α, quando in ogni punto P la tangente alla linea β che vi passa è associata alla tangente alla linea α che vi passa.

(*) ***Sulla teoria generale delle trasformazioni di Ribaucour, e sue applicazioni alla generalizzazione delle trasformazioni di Darboux.*** Annali di Matematica, Serie III, Tomo XXIX, pag. 17.

Una linea è detta *principale* se la tangente in ogni suo punto è una direzione principale. *Per ogni trasformazione di una data superficie S per inviluppo di sfere, esiste* in generale *sopra S un doppio sistema di linee principali* (*).

Alla teoria delle trasformazioni considerate si connettono due congruenze rettilinee (G) e (G'); la prima descritta dalla retta $G \equiv PP_1$ che congiunge le coppie dei punti corrispondenti, la seconda descritta dalla retta G' polare di G rispetto alla sfera dell'inviluppo.

Osserviamo più chiaramente le proprietà di queste congruenze introducendo la rappresentazione di Gauss delle superficie S ed S_1 sopra una sfera fissa Σ, e riguardando in questa come corrispondenti i punti M ed M_1 immagini rispettive dei punti P e P_1.

Si genera così una trasformazione sulla sfera Σ, che diciamo *immagine sferica* della trasformazione che porta S in S_1.

Definiamo con analogo criterio le linee principali di tale trasformazione sferica, e le congruenze (g) e (g') descritte rispettivamente dalla retta $\overline{MM_1}$ e dalla sua polare rispetto alla sfera Σ.

Se la retta g incontra una retta $\overline{g}$, infinitamente vicina, lo stesso avviene di g'; si conclude che *le sviluppabili delle congruenze (g) e (g') si corrispondono.*

Di più se $\overline{M}'$ ed $\overline{M}'_1$ sono le intersezioni di $\overline{g}$ colla sfera Σ, le rette $M\overline{M}'$ ed $M_1\overline{M}'_1$ stanno in un piano; dunque *le sviluppabili della congruenza (g') corrispondono alle linee principali della trasformazione sferica.*

Risalendo poi alla trasformazione T della superficie S in S_1 si hanno i teoremi:

Le sviluppabili della congruenza (G) corrispondono alle linee principali della trasformazione T; le sviluppabili della congruenza (G') corrispondono alle linee principali della trasformazione sferica.

Si può domandare *esistono trasformazioni T rispetto alle quali le linee principali della trasformazione sferica risultano ortogonali?*

La risposta è affermativa, se non che si cade in un caso ben noto; cioè *soltanto per le trasformazioni di Ribaucour le linee principali della trasformazione sferica risultano ortogonali.*

Qui si presenta la questione fondamentale: *Data comunque una trasformazione sulla sfera Σ, esiste una trasformazione per inviluppo di sfere la cui immagine sferica coincide con la data?*

(*) Questo teorema e tutti i successivi sono valevoli sotto ipotesi poco ristrettive, che sono espressamente dichiarate nel testo della Memoria.

Anche a questa questione si risponde affermativamente, e si soddisfa al problema in infiniti modi mediante l'integrazione di un'equazione alle derivate parziali di secondo ordine.

Abbiamo sopra osservato che le sviluppabili delle congruenze (G') e (g') si corrispondono; di più è chiaro che le rette G' e g' sono parallele, quindi le congruenze (G') e (g') sono parallele nel senso di GUICHARD (*).

Un'analisi accurata della questione mostra che il passaggio di (g') in (G') è una *qualunque* trasformazione parallela; ne risulta:

Per ottenere nel modo più generale un inviluppo di sfere avente un'assegnata immagine sferica, si trasformi la congruenza (g') *in una congruenza parallela* (G') *e per ogni retta* G' *si conducano i piani* π *e* π_1 *rispettivamente paralleli ai piani tangenti alla sfera* Σ *passanti per* g'. *Variando la retta* G' *nella congruenza, i piani* π *e* π_1 *inviluppano due superficie che sono le due falde dell'inviluppo richiesto.*

Un'altra questione che si presenta nell'attuale ricerca è la seguente: *Esistono trasformazioni* T *che ammettono due sistemi di linee involutoriamente associati?*

Si dimostra che se per una trasformazione T esiste una coppia di sistemi di linee involutoriamente associati, esistono infinite tali coppie; e si può prendere ad arbitrio uno dei due sistemi, e dedurre l'altro mediante l'integrazione di un'equazione differenziale di primo ordine.

Per caratterizzare questo caso si osserva che la congruenza (G) nell'ipotesi presente è ciclica, e perciò due superficie S^0, S_1^0 ortogonali ai circoli sono le due falde di un inviluppo di RIBAUCOUR; inoltre il punto P di S è l'intersezione delle tangenti isotrope alle superficie S^0, S_1^0 e similmente per il punto P_1.

Sicchè se denotiamo con T_R una trasformazione di RIBAUCOUR e con $T_{R'}$ una trasformazione che ammette due sistemi di linee involutoriamente associati, si ha:

Una $T_{R'}$ *è sempre deducibile da una* T_R *mediante una trasformazione di Guichard.*

Vediamo inoltre che la congruenza (G) della $T_{R'}$ è congruenza (G') per la T_R, quindi le sviluppabili della congruenza (G) corrispondono alle linee principali della trasformazione sferica di T_R (e perciò alle linee principali della stessa T_R, essendo questa di RIBAUCOUR); si conclude:

(*) Secondo GUICHARD due congruenze sono parallele quando le sviluppabili si corrispondono e le rette corrispondenti sono parallele.

Le linee principali di $T_{R'}$ corrispondono alle linee principali di T_R, cioè alle linee di curvatura delle superficie S_0 ortogonali ai circoli.

Le ultime questioni qui trattate si riferiscono alla composizione di due trasformazioni sulla sfera Σ, o di due trasformazioni T.

Assumiamo sulla sfera Σ un sistema (M) ed un suo trasformato (M_1) mediante una trasformazione qualsiasi che diciamo H_1. Per ciascun punto M prendiamo il simmetrico M'_1 del punto M_1 rispetto al centro della sfera, e nel circolo $M M_1 M'_1$ prendiamo il punto medio dell'arco (minore) $\widehat{M M'_1}$.

Detto $\overline{M}$ tale punto consideriamo il sistema $(\overline{M})$ che si ottiene facendo variare M nel sistema iniziale.

Intendiamo più chiaramente il significato geometrico dei risultati che si ottengono, introducendo nel piano tangente in M due rette ortogonali t_1^0, t_2^0, scelte con legge arbitraria, e nel piano tangente in $\overline{M}$ le direzioni a_0, b_0 rispettivamente ortogonali a t_1^0, t_2^0.

Nel piano tangente in $\overline{M}$ formiamo ancora una terza direzione nel seguente modo: si consideri il cono, avente per asse a_0, descritto dalla retta inclinata dell'angolo $\widehat{a_0 t_2^0}$ su tale asse, e si consideri il cono analogo avente per asse b_0.

Proiettando ortogonalmente, nel piano tangente alla sfera in $\overline{M}$, la generatrice comune ai due coni, si ha la retta cercata.

Per individuare le varie tangenti alla sfera nel punto $\overline{M}$, adoperiamo come sistema di riferimento i raggi a, b rispettivamente perpendicolari ad a_0, b_0 e la terza direzione d ora costruita.

Noi vogliamo considerare sulla sfera due trasformazioni distinte, la prima H_1 che porta il sistema (M) in (M_1) ed una seconda H_2 che porta il sistema (M) in un nuovo sistema (M_2).

Prendiamo come prima il simmetrico di M_2 rispetto al centro della sfera, indi assumiamo il punto medio dell'arco $\widehat{M M'_2}$ che chiamiamo $\overline{M}_1$.

Nel piano tangente alla sfera nel punto $\overline{M}_1$ ripetiamo la costruzione analoga a quella operata in $\overline{M}$ per dedurre il sistema di riferimento a', b', d' analogo ad a, b, d. Penseremo allora le coppie di tangenti t e t' rispettivamente nei punti $\overline{M}$ ed $\overline{M}_1$, variabili nella proiettività

$$\left[(a,\ a');\quad (b,\ b');\quad (d,\ d')\right].$$

Questo modo di riferire proiettivamente le tangenti nei punti $\overline{M}$ ed $\overline{M}_1$

sembra importante, perchè tale proiettività dipende unicamente dalle trasformazioni H_1 ed H_2, essendo *invariante* per un cambiamento della legge con cui si scelgono le direzioni ortogonali t_1^0, t_2^0.

Ciò premesso le due trasformazioni H_1 ed H_2 sulla sfera Σ, traggono seco una terza trasformazione, cioè quella che porta $(\overline{M})$ in $(\overline{M}_1)$. In questa terza trasformazione le direzioni t e t' non sono in generale corrispondenti; nel caso che lo siano diciamo t una *direzione* K relativa alle due trasformazioni H_1 ed H_2.

Diciamo che il punto $\overline{M}$ descrive una *linea* K, quando la tangente in ogni punto della linea è una direzione K. *Per ogni coppia di trasformazioni sulla sfera esiste* in generale *un doppio sistema di linee* K.

Un caso notevole si ha quando le due trasformazioni H_1 ed H_2 ammettono lo stesso sistema principale; in tal caso *le linee* K *descritte dal punto* $\overline{M}$ *corrispondono al sistema principale comune alle due trasformazioni* H_1 *ed* H_2.

Considerando poi le trasformazioni di una superficie S per inviluppo di sfere, assumiamo due trasformate S_1 ed S_2; allora per ogni punto P di S si hanno in corrispondenza due punti P_1 e P_2 appartenenti rispettivamente alle superficie S_1 ed S_2 e si ha così il circolo $P P_1 P_2$. Variando P sulla superficie S si genera un sistema ∞^2 di cerchi che chiamiamo *sistema* K *generalizzato;* chiamiamo altresì *congruenza* K *generalizzata*, la congruenza formata dagli assi dei circoli.

Tali denominazioni si introducono perchè gli elementi considerati generalizzano i sistemi K e le congruenze K studiate nel caso delle trasformazioni di Ribaucour; nondimeno per ragioni di brevità diciamo ancora *sistema* K, *congruenza* K invece di sistema K generalizzato, congruenza K generalizzata.

Considerando insieme alle trasformazioni T_1 e T_2, che portano la superficie S in S_1 ed S_2, le rispettive immagini sferiche che chiamiamo H_1 ed H_2, si ottiene il teorema:

Le *sviluppabili della congruenza* K *corrispondono alle linee sferiche* K *relative alle trasformazioni* H_1 *ed* H_2.

Si ottengono in particolare i teoremi di Demoulin; per esempio *se* T_1 e T_2 sono trasformazioni di Ribaucour, le immagini sferiche H_1 ed H_2 ammettono lo stesso sistema principale (che nell'ipotesi attuale corrisponde alle linee di curvatura di S). Sappiamo allora che le linee K corrispondono al sistema principale comune, e si deduce che *nel caso di due trasformazioni di Ribaucour le sviluppabili della congruenza* K *corrispondono alle linee di curvatura di* S.

§ 1. — Formole fondamentali.

1. Il problema della trasformazione delle superficie per inviluppo di sfere, nella sua forma generale, si presenta nel seguente modo:

Data una superficie S dedurre una nuova superficie S_1, che formi con la prima la superficie focale completa di un inviluppo di sfere.

Per ogni punto P di S conduciamo la normale e stacchiamo a partire da P una lunghezza ρ (essendo ρ una funzione delle coordinate di P, presa ad arbitrio); considerando la sfera di raggio ρ passante per P, si ottiene al variare di P un sistema ∞^2 di sfere di cui S è una superficie focale; la seconda superficie focale è appunto la trasformata di S che si vuole determinare.

Per stabilire le formole fondamentali di questa trasformazione, riferiamo la superficie data S ad un sistema di coordinate curvilinee del tutto generale, ed introduciamo secondo l'uso (per ogni punto della superficie) un triedro trirettangolo di cui uno spigolo coincida con la normale, e gli altri due spigoli siano due direzioni ortogonali situate nel piano tangente e scelte con legge arbitraria.

Denotiamo con x, y, z le coordinate del punto che descrive la superficie, con X_3, Y_3, Z_3 i coseni direttori della normale e con X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2)$ i coseni direttori delle rette ortogonali situate nel piano tangente ed orientate in guisa che il determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

risulti ortogonale destrorso. È noto che le funzioni

$$x, \quad y, \quad z, \quad X_i, \quad Y_i, \quad Z_i$$

soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \xi X_1 + \eta X_2, &&\frac{\partial x}{\partial v} = \xi_1 X_1 + \eta_1 X_2 \\
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = r X_2 - q X_3, &&\frac{\partial X_1}{\partial v} = r_1 X_2 - q_1 X_3 \\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = - r X_1 + p X_3, &&\frac{\partial X_2}{\partial v} = - r_1 X_1 + p_1 X_3 \\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = q X_1 - p X_2, &&\frac{\partial X_3}{\partial v} = q_1 X_1 - p_1 X_2
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

colle analoghe in y e z, in cui le funzioni ausiliarie

$$\xi, \quad \eta, \quad \xi_1, \quad \eta_1, \quad p, \quad q, \quad r, \quad p_1, \quad q_1, \quad r_1 \tag{2}$$

sono legate dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial v}-\frac{\partial p_1}{\partial u}=q\,r_1-q_1\,r, && \frac{\partial \xi}{d v}-\frac{\partial \xi_1}{\partial u}=\eta\,r_1-\eta_1\,r \\
&\frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q_1}{\partial u}=r\,p_1-r_1\,p, && \frac{\partial \eta}{\partial v}-\frac{\partial \eta_1}{\partial u}=-\xi\,r_1+\xi_1\,r \\
&\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}=p\,q_1-p_1\,q, && p\,\eta_1-p_1\,\eta=q\,\xi_1-q_1\,\xi
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Inversamente si possono dare ad arbitrio le funzioni (2), purchè soddisfacenti le (3) e dedurre la superficie dalle equazioni (1) per integrazione.

2. Assegniamo il raggio $\rho\,(u,\, v)$ della sfera tangente alla superficie S nel punto P, ed escludiamo che ρ sia uguale all'uno od all'altro dei raggi di curvatura della superficie. Esistono allora due funzioni

$$\frac{\lambda}{w}, \quad \frac{\mu}{w}$$

che verificano il sistema

$$\left.\begin{aligned}
&(\xi+q\,\rho)\frac{\lambda}{w}+(\eta-p\,\rho)\frac{\mu}{w}+\frac{\partial \rho}{\partial u}=0 \\
&(\xi_1+q_1\,\rho)\frac{\lambda}{w}+(\eta_1-p_1\,\rho)\frac{\mu}{w}+\frac{\partial \rho}{\partial v}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dedotte tali funzioni, introduciamo ancora due ausiliarie ponendo

$$\left.\begin{aligned}
&\psi=-\rho\,w \\
&\sigma=\frac{\lambda^2+\mu^2+w^2}{2\,m\,\psi}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(essendo m una costante arbitraria diversa da zero); in questo modo le coordinate del punto P_1 che descrive la seconda superficie focale hanno le espressioni

$$x_1=x-\frac{1}{m\,\sigma}\,(\lambda\,X_1+\mu\,X_2+w\,X_3). \tag{6}$$

§ 2. — Le funzioni trasformatrici.

3. La funzione fondamentale su cui si basa il passaggio dalla superficie S alla nuova superficie S_1 è il raggio $\rho(u, v)$ della sfera e può essere dato ad arbitrio; abbiamo poi introdotto le funzioni

$$\lambda, \quad \mu, \quad w, \quad \psi, \quad \sigma$$

che sono perfettamente determinate quando è assegnato ρ. Per esprimere poi comodamente gli elementi relativi alla superficie trasformata, introdurremo ancora le funzioni

$$\varphi, \quad \varphi_1, \quad \Omega, \quad \Omega_1, \quad h, \quad h_1, \quad \Theta, \Theta_1$$

ponendo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = r\mu - q w + m\varphi & &\frac{\partial \lambda}{\partial v} = r_1 \mu - q_1 w + m\varphi_1 \\
&\frac{\partial \mu}{\partial u} = -r\lambda + p w + m\Omega, & &\frac{\partial \mu}{\partial v} = -r_1\lambda + p_1 w + m\Omega_1 \\
&\frac{\partial w}{\partial u} = q\lambda - p\mu + m h, & &\frac{\partial w}{\partial v} = q_1\lambda - p_1\mu + m h_1
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi}{\partial u} = \xi\lambda + \eta\mu + \Theta w \\
&\frac{\partial \psi}{\partial v} = \xi_1\lambda + \eta_1\mu + \Theta_1 w
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

e si avrà

$$m h = \frac{\Theta\, w^2}{\psi}, \qquad m h_1 = \frac{\Theta_1\, w^2}{\psi}; \tag{9}$$

inoltre per le derivate della funzione σ si ottiene.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\lambda}{\psi}(\varphi - \sigma\xi) + \frac{\mu}{\psi}(\Omega - \sigma\eta) + \frac{w}{\psi}(h - \sigma\quad) \\
&\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\lambda}{\psi}(\varphi_1 - \sigma\xi_1) + \frac{\mu}{\psi}(\Omega_1 - \sigma\eta_1) + \frac{w}{\psi}(h_1 - \sigma\Theta_1).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

4. Per completare queste generalità occorre ancora fissare il triedro fondamentale per la superficie trasformata S_1.

A tale scopo consideriamo rispettivamente sulle superficie S ed S_1 le coppie di punti P e P_1 individuati dai medesimi valori (u, v) delle coordinate curvilinee, e che sono perciò tra loro corrispondenti; indi al triedro fondamentale T col vertice in P sopra stabilito ne facciamo corrispondere uno nuovo T_1 col vertice in P_1 che si costruisce nel seguente modo.

Per il punto P_1 costruiamo la retta che incontra la normale ad S in un punto C equidistante da P e da P_1 (*che coincide evidentemente con la normale alla superficie* S_1); indi nel piano per P_1 perpendicolare a tale retta costruiamo le rette che incontrano i rimanenti spigoli del triedro T. È chiaro geometricamente che il nuovo triedro T_1 è individuato ed è pure trirettangolo.

È facile vedere che i coseni direttori degli spigoli del triedro T_1 hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned}
X'_1 &= \left(\frac{\lambda^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right) X_1 + \frac{\lambda\,\mu}{m\,\psi\,\sigma} X_2 + \frac{\lambda\,w}{m\,\psi\,\sigma} X_3 \\
X'_2 &= \frac{\lambda\,\mu}{m\,\psi\,\sigma} X_1 + \left(\frac{\mu^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right) X_2 + \frac{\mu\,w}{m\,\psi\,\sigma} X_3 \\
X'_3 &= \frac{\lambda\,w}{m\,\psi\,\sigma} X_1 + \frac{\mu\,w}{m\,\psi\,\sigma} X_2 + \left(\frac{w^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right) X_3
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Infatti si riconosce subito che le quantità

$$\begin{matrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{matrix}$$

formano i coefficienti di una sostituzione ortogonale destrorsa; inoltre un punto della retta X'_3, Y'_3, Z'_3 ha le coordinate della forma

$$x' = x - \frac{1}{m\,\sigma}(\lambda\,X_1 + \mu\,X_2 + w\,X_3) +$$
$$+ t\left[\frac{\lambda\,w}{m\,\psi\,\sigma} X_1 + \frac{\mu\,w}{m\,\psi\,\sigma} X_2 + \left(\frac{w^2}{m\,\psi\,\sigma} - 1\right) X_3\right].$$

Se si prende

$$t = \frac{\psi}{w}$$

le precedenti diventano

$$x' = x - t X_3;$$

si vede cioè che le rette (X_3, Y_3, Z_3) ed (X'_3, Y'_3, Z'_3) si tagliano in un punto equidistante da P e da P_1, come si voleva.

Similmente per le rette (X'_1, Y'_1, Z'_1) ed (X'_2, Y'_2, Z'_2).

§ 3. — Elementi relativi alla superficie trasformata.

5. Siamo ora al caso di esprimere in forma semplice gli elementi relativi alla superficie S_1.

A tale scopo deriviamo le (6) osservando le espressioni (1) delle derivate di x, X_1, X_2, X_3, tenendo conto altresì delle (7) e (10) e delle espressioni dei coseni direttori degli spigoli di T_1; dopo riduzione otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left(\frac{\varphi}{\sigma} - \xi - \frac{h\lambda}{w\sigma}\right) X'_1 + \left(\frac{\Omega}{\sigma} - \eta - \frac{h\mu}{w\sigma}\right) X'_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \left(\frac{\varphi_1}{\sigma} - \xi_1 - \frac{h_1\lambda}{w\sigma}\right) X'_1 + \left(\frac{\Omega_1}{\sigma} - \eta_1 - \frac{h_1\mu}{w\sigma}\right) X'_2 ; \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

e con analogo procedimento si ha ancora

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X'_1}{\partial u} &= \left(r + \frac{\varphi\mu}{\psi\sigma} - \frac{\Omega\lambda}{\psi\sigma}\right) X'_2 - \left(q + \frac{h\lambda}{\psi\sigma} - \frac{\varphi w}{\psi\sigma}\right) X'_3 \\ \frac{\partial X'_2}{\partial u} &= -\left(r + \frac{\varphi\mu}{\psi\sigma} - \frac{\Omega\lambda}{\psi\sigma}\right) X'_1 + \left(p + \frac{\Omega w}{\psi\sigma} - \frac{h\mu}{\psi\sigma}\right) X'_3 \\ \frac{\partial X'_3}{\partial u} &= \left(q + \frac{h\lambda}{\psi\sigma} - \frac{\varphi w}{\psi\sigma}\right) X'_1 - \left(p + \frac{\Omega w}{\psi\sigma} - \frac{h\mu}{\psi\sigma}\right) X'_2 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X'_1}{\partial v} &= \left(r_1 + \frac{\varphi_1\mu}{\psi\sigma} - \frac{\Omega_1\lambda}{\psi\sigma}\right) X'_2 - \left(q_1 + \frac{h_1\lambda}{\psi\sigma} - \frac{\varphi_1 w}{\psi\sigma}\right) X'_3 \\ \frac{\partial X'_2}{\partial v} &= -\left(r_1 + \frac{\varphi_1\mu}{\psi\sigma} - \frac{\Omega_1\lambda}{\psi\sigma}\right) X'_1 + \left(p_1 + \frac{\Omega_1 w}{\psi\sigma} - \frac{h_1\mu}{\psi\sigma}\right) X'_3 \\ \frac{\partial X'_3}{\partial v} &= \left(q_1 + \frac{h_1\lambda}{\psi\sigma} - \frac{\varphi_1 w}{\psi\sigma}\right) X'_1 - \left(p_1 + \frac{\Omega_1 w}{\psi\sigma} - \frac{h_1\mu}{\psi\sigma}\right) X'_2 . \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Queste relazioni confrontate con le formole fondamentali (1) danno subito gli elementi relativi alla superficie trasformata sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}
\xi' &= \frac{\varphi}{\sigma} - \xi - \frac{h\lambda}{w\sigma}, & \xi'_1 &= \frac{\varphi_1}{\sigma} - \xi_1 - \frac{h_1\lambda}{w\sigma}\\
\eta' &= \frac{\Omega}{\sigma} - \eta - \frac{h\mu}{w\sigma}, & \eta'_1 &= \frac{\Omega_1}{\sigma} - \eta_1 - \frac{h_1\mu}{w\sigma}
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
p' &= p + \frac{\Omega w}{\psi\sigma} - \frac{h\mu}{\psi\sigma}, & p'_1 &= p_1 + \frac{\Omega_1 w}{\psi\sigma} - \frac{h_1\mu}{\psi\sigma}\\
q' &= q + \frac{h\lambda}{\psi\sigma} - \frac{\varphi w}{\psi\sigma}, & q'_1 &= q_1 + \frac{h_1\lambda}{\psi\sigma} - \frac{\varphi_1 w}{\psi\sigma}\\
r' &= r + \frac{\varphi\mu}{\psi\sigma} - \frac{\Omega\lambda}{\psi\sigma}, & r'_1 &= r_1 + \frac{\varphi_1\mu}{\psi\sigma} - \frac{\Omega_1\lambda}{\psi\sigma}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

È interessante osservare le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
\xi + \xi' &= \frac{\psi}{w}(q - q'); & \xi_1 + \xi'_1 &= \frac{\psi}{w}(q_1 - q'_1)\\
\eta + \eta' &= -\frac{\psi}{w}(p - p'); & \eta_1 + \eta'_1 &= -\frac{\psi}{w}(p_1 - p'_1)
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

che saranno in seguito utilizzate.

§ 4. — Effetto di un cambiamento del triedro mobile fondamentale.

6. Il metodo precedentemente usato nel dedurre da una superficie S una sua trasformata S_1 per inviluppo di sfere presuppone che si sia prefissato il triedro fondamentale per ogni punto di S, e quindi dedotto un sistema di funzioni trasformatrici per formare la S_1.

Intanto è chiaro *a priori* che se si cambia il triedro fondamentale relativo alla S, la superficie S_1 sopra determinata resta sempre deducibile da S *mediante un nuovo conveniente sistema di funzioni trasformatrici.*

Noi qui ci proponiamo appunto di formare il nuovo sistema di funzioni, supponendo noto il sistema primitivo $\lambda, \mu, \ldots, \Theta, \Theta_1$.

Operiamo sulla superficie S un cambiamento del triedro fondamentale, che nella sua forma più generale possiamo scrivere

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_{11} X_1^0 + a_{12} X_2^0 \\ X_2 &= a_{21} X_1^0 + a_{22} X_2^0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

essendo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

il modulo di una sostituzione ortogonale destrorsa.

Gli elementi della superficie S vengono cambiati e dobbiamo anzitutto stabilirne la forma.

Si ha dalle (1)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \xi\,(a_{11} X_1^0 + a_{12} X_2^0) + \eta\,(a_{21} X_1^0 + a_{22} X_2^0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \xi_1\,(a_{11} X_1^0 + a_{12} X_2^0) + \eta_1\,(a_{21} X_1^0 + a_{22} X_2^0)$$

donde risultano subito le espressioni

$$\left.\begin{aligned} \xi^0 &= a_{11}\,\xi + a_{21}\,\eta, \qquad & \eta^0 &= a_{12}\,\xi + a_{22}\,\eta \\ \xi_1^0 &= a_{11}\,\xi_1 + a_{21}\,\eta_1, \qquad & \eta_1^0 &= a_{12}\,\xi_1 + a_{22}\,\eta_1 . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Se operiamo in modo analogo per la formazione degli altri elementi della superficie S, troviamo con facile calcolo

$$\left.\begin{aligned} p^0 &= -a_{12}\,q + a_{22}\,p \\ p_1^0 &= -a_{12}\,q_1 + a_{22}\,p_1 \\ q^0 &= a_{11}\,q - a_{21}\,p \\ q_1^0 &= a_{11}\,q_1 - a_{21}\,p_1 \\ r^0 &= r + a_{12}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial u} + a_{22}\,\frac{\partial a_{21}}{\partial u} \\ r_1^0 &= r_1 + a_{12}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + a_{22}\,\frac{\partial a_{21}}{\partial v} . \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ora si verifica subito che come sistema di funzioni trasformatrici, relativo ai nuovi elementi della superficie S, si può prendere:

$$\lambda_0 = a_{11}\lambda + a_{21}\mu\,, \qquad \mu_0 = a_{12}\lambda + a_{22}\mu$$
$$w_0 = w\,, \qquad \psi_0 = \psi\,, \qquad \sigma_0 = \sigma$$
$$\varphi^0 = a_{11}\varphi + a_{21}\Omega\,, \qquad \varphi_1^0 = a_{11}\varphi_1 + a_{21}\Omega_1$$
$$\Omega^0 = a_{12}\varphi + a_{22}\Omega\,, \qquad \Omega_1^0 = a_{12}\varphi_1 + a_{22}\Omega_1$$
$$h_0 = h\,, \qquad h_1^0 = h_1\,, \qquad \Theta^0 = \Theta\,, \qquad \Theta_1^0 = \Theta_1$$

e per la superficie trasformata si ha

$$x - \frac{1}{m\,\sigma_0}(\lambda_0 X_1^0 + \mu_0 X_2^0 + w_0 X_3^0) =$$
$$= x - \frac{1}{m\,\sigma}(\lambda X_1 + m X_2 + w X_3)$$

cioè la superficie trasformata coincide appunto con S_1.

§ 5. — Linee principali; congruenze (G) e (G'); immagine sferica della trasformazione.

7. Nell'introduzione abbiamo dato il concetto di *tangente t' associata ad una data tangente t nel punto P della superficie S.*

Per stabilire la relazione analitica partiamo dal punto $P(u, v)$ della superficie, e immaginiamo formati due elementi lineari ai punti infinitamente vicini $(u + d\,u,\ v + d\,v)$ ed $(u + \delta\,u,\ v + \delta\,v)$.

Per esprimere che il secondo di questi elementi è associato al primo basta porre la relazione

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ d\,x & d\,y & d\,z \\ \delta\,x_1 & \delta\,y_1 & \delta\,z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Avendosi

$$(\xi' X'_1 + \eta' X'_2)\,\delta\,u + (\xi'_1 X'_1 + \eta'_1 X'_2)\,\delta\,v = -$$
$$-(\xi'_1 X_1 + \eta' X_2)\,\delta\,u - (\xi'_1 X_1 + \eta'_1 X_2)\,\delta\,v +$$
$$+ \frac{1}{m\,\psi\,\sigma}\Big[(\lambda\,\xi' + \mu\,\eta')\,\delta\,u + (\lambda\,\xi'_1 + \mu\,\eta'_1)\,\delta\,v\Big](\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3)$$

facilmente la (21) si riduce alla forma

$$\begin{vmatrix} \xi\, du + \xi_1\, dv & \eta\, du + \eta_1\, dv \\ \xi' \delta u + \xi'_1 \delta v & \eta' \delta u + \eta'_1 \delta v \end{vmatrix} = 0 \qquad (22)$$

oppure distesamente

$$\left.\begin{aligned} (\xi\eta' - \xi'\eta)\, du\, \delta u + (\xi\eta'_1 - \xi'_1\eta)\, du\, \delta v + (\xi_1\eta' - \xi'\eta_1)\, dv\, \delta u + \\ + (\xi_1\eta'_1 - \xi'_1\eta_1)\, dv\, \delta v = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Mediante questa equazione, dato che sia un sistema di linee

$$\alpha(u, v) = \text{cost},$$

si forma subito l'equazione differenziale del sistema associato; in particolare per una linea principale si dovrà avere

$$\left.\begin{aligned} (\xi\eta' - \xi'\eta)\, du^2 + (\xi\eta'_1 - \xi'_1\eta + \xi_1\eta' - \xi'\eta_1)\, du\, dv + \\ + (\xi_1\eta'_1 - \xi'_1\eta_1)\, dv^2 = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

dunque: ***Per ogni trasformazione di una data superficie S, per inviluppo di sfere, esiste sopra S un doppio sistema di linee principali.***

8. Agli elementi ora osservati si connettono due congruenze rettilinee (G) e (G'); la prima descritta dalla retta $G \equiv \overline{P}\overline{P}_1$ che congiunge le coppie di punti corrispondenti, la seconda descritta dalla retta G' polare di G rispetto alla sfera dell'inviluppo.

Osserviamo più chiaramente le proprietà di queste congruenze introducendo la rappresentazione di Gauss delle superficie S ed S_1 sopra una sfera fissa Σ, e riguardando in questa come corrispondenti i punti

$$(X_3,\ Y_3,\ Z_3) \text{ e } (-X'_3,\ -Y'_3,\ -Z'_3) \qquad (25)$$

che chiamiamo rispettivamente con M ed M_1.

Si genera così una trasformazione sulla sfera Σ, che diciamo *immagine sferica* della trasformazione che porta S in S_1.

Definiamo con analogo criterio le linee principali di tale trasformazione sferica e le congruenze (g) e (g') descritte rispettivamente dalla retta $\overline{M}\overline{M}_1$ e dalla sua polare rispetto alla sfera Σ.

È chiaro che l'equazione differenziale delle linee principali della trasformazione sferica è

$$\left.\begin{aligned}(p\,q' - p'\,q)\,d\,u^2 + (p\,q'_1 - p'_1\,q + p_1\,q' - p'\,q_1)\,d\,u\,d\,v +\\ + (p_1\,q'_1 - p'_1\,q_1)\,d\,v^2 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

9. Determiniamo le sviluppabili della congruenza (G); a tale scopo basta esprimere l'esistenza di due quantità t e t' tali che

$$d\,x + t \cdot d\,(\lambda\,X_1 + \mu\,X_2 + w\,X_3) = t'\,(\lambda\,X_1 + \mu\,X_2 + w\,X_3).$$

L'eliminazione di t e t' fra questa e le analoghe in y e z, conduce senza difficoltà all'equazione

$$\begin{vmatrix} \xi\,d\,u + \xi_1\,d\,v & \eta\,d\,u + \eta_1\,d\,v & 0 \\ \frac{\varphi}{\sigma}\,d\,u + \frac{\varphi_1}{\sigma}\,d\,v & \frac{\Omega}{\sigma}\,d\,u + \frac{\Omega_1}{\sigma}\,d\,v & \frac{h}{\sigma}\,d\,u + \frac{h_1}{\sigma}\,d\,v \\ & \mu & w \end{vmatrix} = 0;$$

se sottragghiamo dalla prima colonna l'ultima moltiplicata per $\frac{\lambda}{w}$, e sottragghiamo parimenti dalla seconda colonna l'ultima moltiplicata per $\frac{\mu}{w}$, il determinante si riduce al secondo ordine, ed in forza delle (15) è equivalente alla (24); dunque:

Le sviluppabili della congruenza (G) corrispondono alle linee principali della trasformazione.

In quanto alla congruenza (g), le sue sviluppabili corrispondono alle linee principali della trasformazione sferica, come è chiaro geometricamente.

10. Veniamo ora alla congruenza (G'), di cui vogliamo pure ottenere le sviluppabili.

Prendiamo sulla retta G' il punto P_0 dato dalle coordinate

$$x_0 = x - \frac{\psi}{\lambda}\,X_1\,. \qquad (27)$$

Si ha:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_0}{\partial u} = \left[\frac{\psi}{\lambda^2}\,(r\,\mu - q\,w + m\,\varphi) - \frac{1}{\lambda}\,(\eta\,\mu + \Theta\,w)\right]X_1 +\\ \left((\eta - \frac{\psi\,r}{\lambda}\right)X_2 + q\,\frac{\psi}{\lambda}\,X_3\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x_0}{\partial v} = \left[\frac{\psi}{\lambda^2}(r_1\,\mu - q_1\,w + m\,\varphi_1) - \frac{1}{\lambda}(\eta_1\,\mu + \Theta_1\,w)\right] X_1 + \\ + \left(\eta_1 - \frac{\psi\, r_1}{\lambda}\right) X_2 + q_1 \frac{\psi}{\lambda} X_3.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Se P_0 è un fuoco si dovrà avere

$$d\,x_0 = t\,(\mu\,X_1 - \lambda\,X_2);$$

ed esprimendo in questa il differenziale $d\,x_0$ mediante le (28) e semplificando si ottiene

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{\psi}{\lambda^2}(r\,\mu - q\,w + m\,\varphi) - \frac{1}{\lambda}(\eta\,\mu + \Theta\,w)\right] d\,u + \\ &+ \left[\frac{\psi}{\lambda^2}(r_1\,\mu - q_1\,w + m\,\varphi_1) - \frac{1}{\lambda}(\eta_1\,\mu + \Theta_1\,w)\right] d\,v - t\,\mu = 0, \\ &\left(\eta - \frac{\psi\,r}{\lambda}\right) d\,u + \left(\eta_1 - \frac{\psi\,r_1}{\lambda}\right) d\,v + t\,\lambda = 0, \\ &q\,d\,u + q_1\,d\,v = 0.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

A questo sistema possiamo sostituire quello che si deduce eliminando t, che osservando le (16) prende la forma

$$\left[(m\,\psi\,\sigma - w^2)\,q - m\,\psi\,\sigma\,q'\right] d\,u + \left[(m\,\psi\,\sigma - w^2)\,q_1 - m\,\psi\,\sigma\,q'_1\right] d\,v = 0$$

$$q\,d\,u + q_1\,d\,v = 0$$

e quindi semplicemente

$$q\,d\,u + q_1\,d\,v = 0$$
$$q'\,d\,u + q'_1\,d\,v = 0.$$

Se P_0 non è un fuoco, queste ultime saranno verificate per una conveniente rotazione del triedro mobile attorno alla normale di S; avremo allora per le (20)

$$a_{21}\,(p\,d\,u + p_1\,d\,v) = a_{11}\,(q\,d\,u + q_1\,d\,v)$$
$$a_{21}\,(p'\,d\,u + p'_1\,d\,v) = a_{11}\,(q'\,d\,u + q'_1\,d\,v).$$

Eliminando fra queste a_{21} e a_{11} si ottiene

$$\begin{vmatrix} p\,d\,u + p_1\,d\,v & q\,d\,u + q_1\,d\,v \\ p'\,d\,u + p'_1\,d\,v & q'\,d\,u + q'_1\,d\,v \end{vmatrix} = 0, \tag{30}$$

che coincide con la (26); dunque *le sviluppabili della congruenza* (G') *corrispondono alle linee principali della trasformazione sferica.*

11. Terminiamo questo paragrafo osservando la forma particolare che prendono le (28) quando come variabili u, v si prendano *in particolare* i parametri delle linee principali della trasformazione sferica.

Per procedere con rigore escludiamo che la (30) si riduca all'identità, e facciamo espressamente la ipotesi che le quantità

$$p\lambda + q\mu, \qquad p_1\lambda + q_1\mu$$

siano diverse da zero.

Scriviamo le relazioni esprimenti che u e v sono i parametri delle linee principali della trasformazione sferica, cioè

$$p\,q' - p'\,q = 0; \qquad p_1\,q'_1 - p'_1\,q_1 = 0 \tag{31}$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} h\,(p\lambda + q\mu) &= w\,(p\varphi + q\,\Omega) \\ h_1\,(p_1\lambda + q_1\mu &= w\,(p_1\varphi_1 + q_1\,\Omega_1) \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

e poniamo

$$\xi\,q_1 - \eta\,p_1 = H \tag{33}$$

donde per l'ultima delle (3)

$$\xi_1\,q - \eta_1\,p = H. \tag{34}$$

Da queste due ultime e dalle (4) si ricavano i valori di ξ, η, ξ_1, η_1 sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{H\mu}{p_1\lambda + q_1\mu} - p_1\,\frac{\rho\,(q\lambda - p\mu) + w\dfrac{\partial\rho}{\partial u}}{p_1\lambda + q_1\mu} \\ \eta &= \frac{-H\lambda}{p_1\lambda + q_1\mu} - q_1\,\frac{\rho\,(q\lambda - p\mu) + w\dfrac{\partial\rho}{\partial u}}{p_1\lambda + q_1\mu} \\ \xi_1 &= \frac{H\mu}{p\lambda + q\mu} - p\,\frac{\rho\,(q_1\lambda - p_1\mu) + w\dfrac{\partial\rho}{\partial v}}{p\lambda + q\mu} \\ \eta_1 &= \frac{-H\lambda}{p\lambda + q\mu} - q\,\frac{\rho\,(q_1\lambda - p_1\mu) + w\dfrac{\partial\rho}{\partial v}}{p\lambda + q\mu} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

essendo $\rho = -\dfrac{\psi}{w}$.

Sostituendo tali espressioni di ξ, η, ξ_1, η_1 nelle equazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{\partial \xi_1}{\partial u}&=\eta\, r_1-\eta_1\, r\\ \frac{\partial \eta}{\partial v}-\frac{\partial \eta_1}{\partial u}&=-\xi\, r_1+\xi_1\, r\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

si ottengono due relazioni differenziali, che combinate linearmente tenendo conto delle (32), danno

$$\Big[(p\lambda+q\mu)(p'_1\lambda+q'_1\mu)-(p_1\lambda+q_1\mu)(p'\lambda+q'\mu)\Big]\times$$
$$\times\Big[H+\rho(p\,p_1+q\,q_1)\Big]=0.$$

Essendo per le (31)

$$p'=t\,p,\qquad q'=t\,q,\qquad p'_1=t_1\,p_1,\qquad q'_1=t_1\,q_1$$

segue

$$(p\lambda+q\mu)(p'_1\lambda+q'_1\mu)-(p_1\lambda+q_1\mu)(p'\lambda+q'\mu)=$$
$$=(t_1-t)(p\lambda+q\mu)(p_1\lambda+q_1\mu)$$

e risulta che questa espressione non può annullarsi senza che la (30) si riduca all'identità. Dunque

$$H+\rho(p\,p_1+q\,q_1)=0$$

cioè

$$\xi\, q_1-\eta\, p_1=-\rho(p\,p_1+q\,q_1)\tag{37}$$

$$\xi_1\, q-\eta_1\, p=-\rho(p\,p_1+q\,q_1).\tag{38}$$

Dalla (37) si ha:

$$p_1=T\left(\xi-q\frac{\psi}{w}\right),\qquad q_1=T\left(\eta+p\frac{\psi}{w}\right)$$

essendo T un fattore di proporzionalità; segue

$$\frac{q_1\, w}{p_1\lambda+q_1\mu}\,\frac{\partial\rho}{\partial u}=-\left(\eta+p\frac{\psi}{w}\right).\tag{39}$$

Ciò posto introduciamo i parametri direttori X, Y, Z della retta G', che sono dati dalle formole

$$X = \mu X_1 - \lambda X_2 \tag{40}$$

ed analoghe. Si ha:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= (p w + m \Omega) X_1 + (q w - m \varphi) X_2 - (p \lambda + q \mu) X_3 \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= (p_1 w + m \Omega_1) X_1 + (q_1 w - m \varphi_1) X_2 - (p_1 \lambda + q_1 \mu) X_3 ; \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

ed allora se teniamo presente la (39) troviamo con facile calcolo

$$- \frac{q \psi}{\lambda (p \lambda + q \mu)} \frac{\partial X}{\partial u} +$$

$$+ \left[\frac{1}{\lambda} \frac{q_1 w}{p_1 \lambda + q_1 \mu} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\psi}{w \lambda} \left(p + \frac{w r}{\lambda} - \frac{q w}{\lambda} \cdot \frac{q w - m \varphi}{p \lambda + q \mu} \right) \right] X = \frac{\partial x_0}{\partial u} .$$

Perveniamo così alle formole

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u} &= - \frac{q \psi}{\lambda (p \lambda + q \mu)} \frac{\partial X}{\partial u} + \\ &\quad + \left[\frac{1}{\lambda} \frac{q_1 w}{p_1 \lambda + q_1 \mu} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\psi}{w \lambda} \left(p + \frac{w r}{\lambda} - \frac{q w}{\lambda} \cdot \frac{q w - m \varphi}{p \lambda + q \mu} \right) \right] X \\ \frac{\partial x_0}{\partial v} &= - \frac{q_1 \psi}{\lambda (p_1 \lambda + q_1 \mu)} \frac{\partial X}{\partial v} + \\ &\quad + \left[\frac{1}{\lambda} \frac{q w}{p \lambda + q \mu} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \frac{\psi}{w \lambda} \left(p_1 + \frac{w r_1}{\lambda} - \frac{q_1 w}{\lambda} \cdot \frac{q_1 w - m \varphi_1}{p_1 \lambda + q_1 \mu} \right) \right] X \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

che sono le espressioni cercate.

12. Osserviamo infine che se le linee sferiche u, v sono ortogonali, avendosi per le (37) e (38)

$$\xi q_1 - \eta p_1 = 0$$

$$\xi_1 q - \eta_1 p = 0$$

si deduce

$$\xi \xi_1 + \eta \eta_1 = 0$$

e le linee sferiche u, v sono le immagini delle linee di curvatura di S.

Possiamo allora porre, per una conveniente rotazione del triedro mobile,

$$p = 0, \qquad q_1 = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \xi_1 = 0$$

dalle quali per le (31) segue

$$p' = 0, \qquad q'_1 = 0$$

e per le (17)

$$\eta' = 0, \qquad \xi'_1 = 0;$$

dunque *soltanto per le trasformazioni di* RIBAUCOUR *le linee principali della trasformazione sferica risultano ortogonali.*

§ 6. — FORMAZIONE DEGL'INVILUPPI DI SFERE AVENTI UN'ASSEGNATA TRASFORMAZIONE SFERICA.

13. Per definire nel modo più generale una trasformazione sulla sfera fissa Σ, partiamo da un sistema di funzioni

$$p,\ q,\ r,\ p_1,\ q_1,\ r_1$$

soddisfacenti le equazioni

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q\, r_1 - q_1\, r$$

$$\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r\, p_1 - r_1\, p$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p\, q_1 - p_1\, q$$

e dal relativo determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix};$$

indi consideriamo sulla sfera il sistema (M) descritto dal punto $(X_3,\ Y_3,\ Z_3)$.

Un nuovo sistema (M_1) è sempre deducibile dal sistema (M) con relazioni della forma

$$X'_3 = \frac{\lambda\, w}{m\, \psi\, \sigma} X_1 + \frac{\mu\, w}{m\, \psi\, \sigma} X_2 + \left(\frac{w^2}{m\, \psi\, \sigma} - 1\right) X_3 \text{ (*)} \tag{43}$$

(*) Qui per definire la corrispondenza sulla sfera come coordinate di M_1 si prendono le funzioni $(-X'_3,\ -Y'_3,\ -Z'_3)$.

in cui

$$2\, m\, \psi\, \sigma = \lambda^2 + \mu^2 + w^2, \tag{44}$$

e se la trasformazione sulla sfera è qualunque le funzioni λ, μ, w possono darsi ad arbitrio.

Il nuovo determinante ortogonale relativo al sistema (M_1) ha le espressioni (11), ed è definito dalla proprietà geometrica che la tangente (X'_1, Y'_1, Z'_1) incontra (X_1, Y_1, Z_1) e similmente la tangente (X'_2, Y'_2, Z'_2) incontra (X_2, Y_2, Z_2).

Possiamo allora porre le (7) e le seguenti che si deducono

$$\frac{\partial (\psi \sigma)}{\partial u} = \lambda\, \varphi + \mu\, \Omega + w\, h,$$

$$\frac{\partial (\psi \sigma)}{\partial v} = \lambda\, \varphi_1 + \mu\, \Omega_1 + w\, h_1,$$

dalle quali per gli elementi del sistema trasformato risultano le (16).

14. Assumiamo sulla sfera Σ la trasformazione T così definita, e ci domandiamo: *esiste una trasformazione per inviluppo di sfere la cui immagine sferica coincida con la T?*

Per rispondere a questa domanda supponiamo riferita la trasformazione T alle sue linee principali; allora gli elementi della superficie S dell'inviluppo richiesto avranno, per le (35), le espressioni (*)

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \quad q\,\rho - \frac{p_1\, w}{p_1 \lambda + q_1 \mu} \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\
\eta &= p\,\rho \quad\; \frac{q_1\, w}{p_1 \lambda + q_1 \mu} \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\
\xi_1 &= - q_1\, \rho - \frac{p\, w}{p \lambda + q \mu} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \\
\eta_1 &= p_1\, \rho - \frac{q\, w}{p \lambda + q \mu} \frac{\partial \rho}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Inversamente supponiamo che per una *conveniente funzione* ρ esista una superficie S, avente per immagine sferica (X_3, Y_3, Z_3), i cui elementi siano le ξ, η, ξ_1, η_1 date dalle (45); ed operiamo una trasformazione di S per in-

---

(*) S'intende sempre ripetuta l'ipotesi che le quantità $p\lambda + q\mu$, $p_1\lambda + q_1\mu$ siano diverse da zero, e che la (30) non si riduca all'identità.

viluppo di sfere col metodo del n.° 2 del § 1, assumendo come funzione trasformatrice fondamentale la medesima ρ che entra nelle (45). Allora la risoluzione del sistema (4) condurrà alle funzioni λ, μ, w da cui siamo partiti, e la rappresentazione sferica della superficie trasformata S_1 coinciderà con (X'_3, Y'_3, Z'_3).

Siamo così ridotti ad esprimere che le (45) soddisfano alle equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - \eta_1 r \\ &\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = -\xi r_1 + \xi_1 r \\ &\xi q_1 - \eta p_1 = \xi_1 q - \eta_1 p ; \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

la terza è verificata qualunque sia ρ, esprimendo che sono verificate le due altre si perviene alle due equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu (p q_1 - p_1 q)}{(p\lambda + q\mu)(p_1 \lambda + q_1 \mu)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = &\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{p_1 w}{p_1 \lambda + q_1 \mu}\right) - \right. \\ &\left. - q_1 \frac{p_1 \lambda + q_1 \mu + r_1 w}{p_1 \lambda + q_1 \mu}\right] \frac{\partial \rho}{\partial u} - \\ - \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{p w}{p\lambda + q\mu}\right) - q \frac{p\lambda + q\mu + r w}{p\lambda + q\mu}\right] &\frac{\partial \rho}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda (p q_1 - p_1 q)}{(p\lambda + q\mu)(p_1 \lambda + q_1 \mu)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} = &\left[- \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{q_1 w}{p_1 \lambda + q_1 \mu}\right) - \right. \\ &\left. - p_1 \frac{p_1 \lambda + q_1 \mu + r_1 w}{p_1 \lambda + q_1 \mu}\right] \frac{\partial \rho}{\partial u} + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{q w}{p\lambda + q\mu}\right) + p \frac{p\lambda + q\mu + r w}{p\lambda + q\mu}\right] &\frac{\partial \rho}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

che si riducono ad una sola in base alle (32) per ipotesi soddisfatte.

Rimane così dimostrato che *per ottenere nel modo più generale un inviluppo di sfere avente per immagine sferica la trasformazione T, basta assumere una soluzione* ρ *dell'equazione differenziale* (47) *e dedurre per quadrature la superficie S cogli elementi* ξ, η, ξ_1, η_1 *dati dalle* (45). *Trasformando la superficie S in una nuova S_1, mediante la funzione* ρ, *la coppia S, S_1 dà le due falde dell'inviluppo richiesto.*

§ 7. — Nuovo metodo di trattare il problema.

15. Assegnata come al n.° 13 la trasformazione sferica rimane individuata la congruenza (g'); deducendo poi il corrispondente inviluppo di sfere e considerando la congruenza (G'), abbiamo visto che le sviluppabili delle congruenze (g') e (G') si corrispondono e che le rette corrispondenti g' e G' sono parallele.

Il passaggio dalla congruenza (g') alla (G') è perciò una *trasformazione parallela* nel senso di Guichard; ma qui si presenta la questione: *è essa la trasformazione più generale del tipo ora detto?*

Per rispondere a questa domanda consideriamo il punto

$$X_0 = X_3 - \frac{w}{\lambda} X_1 ;$$

si ha:

$$\frac{\partial X_0}{\partial u} = \left[\frac{w}{\lambda^2}(r\mu - q w + m\varphi) + \frac{1}{\lambda}(p\mu - m h)\right] X_1 -$$

$$- \left(p + \frac{w r}{\lambda}\right) X_2 + q \frac{w}{\lambda} X_3 ,$$

$$\frac{\partial X_0}{\partial v} = \left[\frac{w}{\lambda^2}(r_1 \mu - q_1 w + m\varphi_1) + \frac{1}{\lambda}(p_1 \mu - m h_1)\right] X_1 -$$

$$- \left(p_1 + \frac{w r_1}{\lambda}\right) X_2 + q_1 \frac{w}{\lambda} X_3 ;$$

esistono inoltre in base alle (32) due funzioni t e t' tali che

$$(p\lambda + q\mu)\left[\frac{w}{\lambda^2}(r\mu - q w + m\varphi) + \frac{1}{\lambda}(p\mu - m h)\right] +$$

$$+ q \frac{w}{\lambda}(p w + m\Omega) = t\mu ,$$

$$-(p\lambda + q\mu)\left(p + \frac{w r}{\lambda}\right) + q \frac{w}{\lambda}(q w - m\varphi) = -t\lambda ,$$

$$(p_1\lambda + q_1\mu)\left[\frac{w}{\lambda^2}(r_1\mu - q_1 w + m\varphi_1) + \frac{1}{\lambda}(p_1\mu - m h_1)\right] +$$

$$+ q_1 \frac{w}{\lambda}(p_1 w + m\Omega_1) = t'\mu ,$$

$$-(p_1\lambda + q_1\mu)\left(p_1 + \frac{w r_1}{\lambda}\right) + q_1 \frac{w}{\lambda}(q_1 w - m\varphi_1) = -t'\lambda ,$$

donde seguono le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_0}{\partial u} &= a\frac{\partial X}{\partial u} + b \, . \, X \\ \frac{\partial X_0}{\partial v} &= c\frac{\partial X}{\partial v} + d \, . \, X \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

in cui

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{q\,w}{\lambda\,(p\,\lambda + q\,\mu)}, \qquad b = \frac{t}{p\,\lambda + q\,\mu}, \\ c &= -\frac{q_1\,w}{\lambda\,(p_1\,\lambda + q_1\,\mu)}, \qquad d = \frac{t'}{p_1\,\lambda + q_1\,\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Ciò posto sia

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial X}{\partial u} + Q\frac{\partial X}{\partial v} + R\,X \tag{51}$$

l'equazione di LAPLACE per X, Y, Z; uguagliando i due valori di $\frac{\partial^2 X_0}{\partial u\,\partial v}$ si ottengono le relazioni

$$a\,P + \frac{\partial a}{\partial v} = c\,P + d$$

$$a\,Q + b = c\,Q + \frac{\partial c}{\partial u}$$

$$a\,R + \frac{\partial b}{\partial v} = c\,R + \frac{\partial d}{\partial u}$$

da cui si ricavano i valori di P, Q, R sotto la forma

$$P = -\frac{\frac{\partial a}{\partial v} - d}{a - c}, \quad Q = \frac{\frac{\partial c}{\partial u} - d}{a - c}, \quad R = \frac{\frac{\partial d}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v}}{a - c}. \tag{52}$$

16. Sappiamo dalle formole di GUICHARD che per ottenere una trasformazione parallela della congruenza (g'), occorre prendere una soluzione A, B, C, D del sistema

$$\left.\begin{aligned} A\,P + \frac{\partial A}{\partial v} &= C\,P + D \\ A\,Q + B &= C\,Q + \frac{\partial C}{\partial u} \\ A\,R + \frac{\partial B}{\partial v} &= C\,R + \frac{\partial D}{\partial u} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

e le coordinate di un punto del raggio della congruenza trasformata si hanno per quadrature dalle formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overline{x}_0}{\partial u} &= A\frac{\partial X}{\partial u} + B X\\ \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial v} &= C\frac{\partial X}{\partial v} + D X\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Ora è chiaro che senza alterare la congruenza trasformata, si può cambiare il punto sul raggio in guisa da ridurre A e C proporzionali ad a e c. Possiamo quindi senza ledere la generalità integrare le (53) ponendo

$$A = K a, \qquad C = K c; \tag{55}$$

le due prime delle (53) dànno allora

$$\left.\begin{aligned}D &= a\frac{\partial K}{\partial v} + K d\\ B &= c\frac{\partial K}{\partial u} + K b\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

e sostituendo questi valori di A, B, C, D nella terza si perviene all'equazione differenziale

$$(a - c)\frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial c}{\partial v} - d\right)\frac{\partial K}{\partial u} - \left(\frac{\partial a}{\partial u} - b\right)\frac{\partial K}{\partial v}. \tag{57}$$

Concludiamo perciò che per ottenere nel modo più generale una congruenza parallela alla (g'), basta assumere una soluzione K dell'equazione (57) e dedurre per quadrature le funzioni $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$ dalle formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overline{x}_0}{\partial u} &= K a\frac{\partial X}{\partial u} + \left(c\frac{\partial K}{\partial u} + K b\right) X,\\ \frac{\partial \overline{x}_0}{\partial v} &= K c\frac{\partial X}{\partial v} + \left(a\frac{\partial K}{\partial v} + K d\right) X;\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

conducendo pel punto $(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0)$ il raggio parallelo a g', si ottiene la congruenza cercata.

Ora si tratta di dimostrare che questa congruenza (G') è anche deducibile col metodo del precedente paragrafo.

Infatti si trova subito che l'equazione (57) coincide colla (48) e quindi possiamo soddisfare a quest'ultima ponendo

$$\rho = - K;$$

ma allora le (42) coincidono con le (58) e il teorema è dimostrato.

Ne risulta che *per ottenere nel modo più generale un inviluppo di sfere avente un'assegnata immagine sferica, si trasformi la congruenza* (g') *in una congruenza parallela* (G') *e per ogni retta* G' *si conducano i piani* π *e* π_1 *rispettivamente paralleli ai piani tangenti alla sfera* Σ *passanti per* g'. *Variando la retta* G' *nella congruenza, i piani* π *e* π' *inviluppano due superficie che sono le due falde dell'inviluppo richiesto.*

§ 8. — Caso di due sistemi di linee involutoriamente associati.

17. Terminiamo questo lavoro caratterizzando le trasformazioni che *ammettano* due sistemi di linee *involutoriamente associati.*

A tale scopo partiamo, come al n. 7, dal punto $P\ (u, v)$ della superficie S e consideriamo due elementi lineari distinti ai punti infinitamente vicini $(u + du,\ v + dv)$ ed $(u + \delta u,\ v + \delta v)$.

La relazione esprimente che il secondo di questi elementi è associato al primo è la (23); se questi elementi sono associati involutoriamente si dovrà avere altresì

$$\left.\begin{aligned}(\xi\eta' - \xi'\eta)\, du\, \delta u + (\xi\eta'_1 - \xi'_1\eta)\, dv\, \delta u + (\xi_1\eta' - \xi'\eta_1)\, du\, \delta v +\\ + (\xi_1\eta'_1 - \xi'_1\eta_1)\, dv\, \delta v = 0\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

e confrontando colla (23) risulta la relazione

$$\xi\eta'_1 - \xi'_1\eta = \xi_1\eta' - \xi'\eta_1. \quad (60)$$

Inversamente se questa è soddisfatta la (59) diventa simmetrica rispetto ai differenziali d, δ ed esistono in infiniti modi due sistemi di linee involutoriamente associati; potendo prendere ad arbitro uno dei due sistemi e dedurre l'altro sistema dalla (59) stessa per integrazione.

18. Per interpretare la (60) geometricamente, osserviamo anzitutto che essa può considerarsi come la condizione d'integrabilità del sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial u}&=-\cosh\alpha\cdot q+i\ \mathrm{senh}\ \alpha\cdot p+i\,r+\\&\quad+\xi\left(i\frac{\mu}{\psi}+\cosh\alpha\cdot\frac{w}{\psi}\right)-i\,\eta\left(\frac{\lambda}{\psi}-\mathrm{senh}\ \alpha\cdot\frac{w}{\psi}\right)\\\frac{\partial\alpha}{\partial v}&=-\cosh\alpha\cdot q_1+i\ \mathrm{senh}\ \alpha\cdot p_1+i\,r_1+\\&\quad+\xi_1\left(i\frac{\mu}{\psi}+\cosh\alpha\cdot\frac{w}{\psi}\right)-i\,\eta_1\left(\frac{\lambda}{\psi}-\mathrm{senh}\ \alpha\cdot\frac{w}{\psi}\right)\\&\qquad(i=\sqrt{-1})\end{aligned}\right\}\tag{61}$$

nella funzione incognita α; se ne deduce che la congruenza (G) è *ciclica* e le superficie ortogonali ai circoli sono date dalle equazioni

$$\overline{x}=x-\psi\,\frac{X_1\ \mathrm{senh}\ \alpha+i\,X_2\cosh\alpha+X_3}{\lambda\ \mathrm{senh}\ \alpha+i\,\mu\cosh\alpha+w}\ (*)\tag{62}$$

essendo α una soluzione qualunque delle (61).

Se consideriamo due superficie S^0, S^0_1 ortogonali ai circoli, corrispondentemente a due soluzioni distinte α', α'' delle (61), per un teorema ben noto S^0, S^0_1 sono le due falde di un inviluppo di Ribaucour; inoltre le (62) esprimono che il punto P di S è l'intersezione delle tangenti isotrope alle superficie S^0, S^0_1. Similmente per il punto P_1.

Denotando per facilità di linguaggio con T_R una trasformazione di Ribaucour e con $T_{R'}$ una trasformazione che ammette due sistemi di linee involutoriamente associati, possiamo enunciare il risultato conseguito sotto la forma seguente:

Una trasformazione $T_{R'}$ è sempre deducibile da una T_R mediante una trasformazione di Guichard.

(*) Direttamente se si considerano i parametri direttori della tangente al circolo

$$\overline{X}=-(\mu-w\,i\cosh\alpha)\,X_1+(\lambda-w\ \mathrm{senh}\,\alpha)\,X_2+(\mu\ \mathrm{senh}\ \alpha-i\,\lambda\cosh\alpha)\,X_3$$

si verificano facilmente le relazioni

$$\Sigma\,\overline{X}\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}=0,\qquad\Sigma\,\overline{X}\frac{\partial\overline{x}}{\partial v}=0.$$

Nè risultano importanti conseguenze. La congruenza (G) della $T_{R'}$ è congruenza (G') per la T_R, quindi le sviluppabili della congruenza (G) corrispondono alle linee principali della trasformazione sferica di T_R (*e perciò alle linee principali della stessa T_R, essendo questa di Ribaucour*); si conclude:

Le linee principali della trasformazione $T_{R'}$ corrispondono alle linee principali della T_R, cioè alle linee di curvatura delle superficie S_0 ortogonali ai circoli.

§ 9. — Composizione delle trasformazioni sulla sfera.

18. Definiamo come al n.° 13 una trasformazione sulla sfera fissa Σ che porti da un sistema dato (M) in un nuovo sistema (M_1); indi prendiamo il simmetrico M'_1 del punto M_1 rispetto al centro della sfera, e nel circolo M, M_1, M'_1 assumiamo il punto medio dell'arco (minore) $\widehat{M M'_1}$.

Detto $\overline{M}$ tale punto, consideriamo il sistema $(\overline{M})$ che si ottiene facendo variare M nel sistema iniziale; le coordinate del punto $\overline{M}$ hanno le espressioni

$$\overline{X}_3 = \frac{\sqrt{2\, m\, \psi\, \sigma}}{2\, w}\,(X_3 + X'_3)\ (*), \tag{63}$$

da cui si ha

$$\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{2\, m\, \psi\, \sigma}}{2\, w}\,(q\, X_1 - p\, X_2 + q'\, X'_1 - p'\, X'_2) + \\ + (X_3 + X'_3)\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{2\, m\, \psi\, \sigma}}{2\, w}\right)$$

ed osservando le (11) si ottiene ancora

$$\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{2\, m\, \psi\, \sigma}}{2\, w}\Big[(q - q')\, X_1 - (p - p')\, X_2\Big] + T\, X_3 \tag{64}$$

essendo

$$T = \frac{q'\,\lambda - p'\,\mu}{w} + \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{\sqrt{2\, m\, \psi\, \sigma}}{2\, w}\right).$$

(*) Il radicale s'intenda preso collo stesso segno di w.

Analogamente

$$\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = \frac{\sqrt{2 m \psi \sigma}}{2 w} \left[(q_1 - q'_1) X_1 - (p_1 - p_1') X_2 \right] + T_1 X_3 . \tag{65}$$

Nel piano tangente alla sfera nel punto $\overline{M}$ costruiamo la direzione $\overline{X}_1$, $\overline{Y}_1$, $\overline{Z}_1$ ortogonale alla X_1, Y_1, Z_1 e costruiamo altresì la direzione $\overline{X}_2$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Z}_2$ ortogonale alla X_2, Y_2, Z_2. Si ha:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_1 &= \frac{w X_2 - \mu X_3}{\sqrt{\mu^2 + w^2}} \\ \overline{X}_2 &= \frac{w X_1 - \lambda X_3}{\sqrt{\lambda^2 + w^2}} ; \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

formiamo ancora nel piano tangente in $\overline{M}$ una terza direzione (*costruibile in termini finiti*) (*), tale che se Θ_1 e Θ_2 indicano gli angoli della medesima con le direzioni $\overline{X}_1$, $\overline{Y}_1$, $\overline{Z}_1$ ed $\overline{X}_2$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Z}_2$ si abbia

$$\frac{\cos \Theta_1}{\cos \Theta_2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + w^2}}{\sqrt{\mu^2 + w^2}} .$$

19. Per individuare le varie tangenti alla sfera nel punto $\overline{M}$, adoperiamo come sistema di riferimento i raggi a, b rispettivamente perpendicolari alle direzioni $\overline{X}_1$, $\overline{Y}_1$, $\overline{Z}_1$ e $\overline{X}_2$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Z}_2$ ed il raggio d ora costruito; presa una tangente t che va al punto $(u + du, v + dv)$, si avrà

$$\operatorname{sen} a\, t = \Sigma \overline{X}_1 \frac{d \overline{X}_3}{d s} = - \frac{\sqrt{2 m \psi \sigma}}{2 \sqrt{\mu^2 + w^2}} \left[(p - p') \frac{d u}{d s} + (p_1 - p'_1) \frac{d v}{d s} \right]$$

$$\operatorname{sen} b\, t = \Sigma \overline{X}_2 \frac{d \overline{X}_3}{d s} = \frac{\sqrt{2 m \psi \sigma}}{2 \sqrt{\lambda^2 + w^2}} \left[(q - q') \frac{d u}{d s} + (q_1 - q'_1) \frac{d v}{d s} \right]$$

$$\frac{\operatorname{sen} a\, d}{\operatorname{sen} b\, d} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + w^2}}{\sqrt{\mu^2 + w^2}} .$$

(*) Se α_1 indica l'angolo delle direzioni X_2, Y_2, Z_2, e $\overline{X}_1$, $\overline{Y}_1$, $\overline{Z}_1$ ed α_2 indica l'angolo delle direzioni X_1, Y_1, Z_1, e $\overline{X}_2$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Z}_2$, si consideri il cono avente per asse $\overline{X}_1$, $\overline{Y}_1$, $\overline{Z}_1$ descritto dalla retta inclinata dell'angolo α_1 su tale asse; si consideri il cono analogo avente per asse $\overline{X}_2$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Z}_2$. Proiettando ortogonalmente nel piano tangente in $\overline{M}$ la generatrice comune ai due coni, si ha la retta cercata.

Ne risulta subito per il rapporto anarmonico delle rette a, b, t, d l'espressione

$$(a\,b\,t\,d) = -\frac{(p-p')\,du + (p_1 - p'_1)\,dv}{(q-q')\,du + (q_1 - q'_1)\,dv}. \tag{67}$$

20. Ciò premesso immaginiamo sulla sfera due trasformazioni H_1 ed H_2, la prima delle quali porti il sistema (M) in un sistema (M_1) e l'altra porti il sistema (M) in un nuovo sistema (M_2); distinguiamo con un solo accento le funzioni trasformatrici del passaggio da (M) ad (M_1) e con due accenti quelle relative al passaggio da M ad M_2; inoltre per ragioni di simmetria introduciamo nelle formole analoghe a (7), relative alla trasformazione H_2, una costante n diversa da m.

Ripetiamo la costruzione del n.° 18 relativamente alla trasformazione H_2; cioè prendiamo il simmetrico di M_2 rispetto al centro della sfera, indi assumiamo il punto medio dell'arco $\widehat{M M'_2}$ che chiamiamo $\overline{M}_1$.

Nel piano tangente alla sfera nel punto $\overline{M}_1$ ripetiamo la costruzione analoga a quella operata in $\overline{M}$ per dedurre il sistema di riferimento a', b', d' analogo ad a, b, d; presa allora una tangente t' che va al punto $(u + \delta u, v + \delta v)$ sarà

$$(a'\,b'\,t'\,d') = -\frac{(p-p'')\,\delta u + (p_1 - p''_1)\,\delta v}{(q-q'')\,\delta u + (q_1 - q''_1)\,\partial v}. \tag{68}$$

Noi penseremo la coppia di tangenti t e t' variabile nella proiettività

$$\left[(a,\ a');\quad (b,\ b');\quad (d,\ d')\right]$$

per il che i differenziali d e δ sono legati dalla relazione

$$\begin{vmatrix} (p-p')\,du + (p_1 - p'_1)\,dv & (q-q')\,du + (q_1 - q'_1)\,dv \\ (p-p'')\,\delta u + (p_1 - p''_1)\,\delta v & (q-q'')\,\delta u + (q_1 - q''_1)\,\delta v \end{vmatrix} = 0. \tag{69}$$

Importa osservare che questa equazione è *invariante* per un cambiamento del triedro mobile fondamentale in M; infatti sappiamo dal § 4 che per un tale cambiamento si ha:

$$p^0 = -a_{12}\,q + a_{22}\,p, \quad p'^0 = -a_{12}\,q' + a_{22}\,p', \quad p''^0 = -a_{12}\,q'' + a_{22}\,p''$$
$$q^0 = a_{11}\,q - a_{21}\,p, \quad q'^0 = a_{11}\,q' - a_{21}\,p', \quad q''^0 = a_{11}\,q'' - a_{21}\,p''$$

e le analoghe coll'indice 1, e l'equazione

$$\begin{vmatrix} (p^0 - p'^0)\,du + (p_1^0 - p_1'^0)\,dv & (q^0 - q'^0)\,du + (q_1^0 - q_1'^0)\,dv \\ (p^0 - p''^0)\,du + (p_1^0 - p_1''^0)\,dv & (q^0 - q''^0)\,du + (q_1^0 - q_1''^0)\,dv \end{vmatrix} = 0$$

si trasforma subito nella (69).

21. Consideriamo ora sulla sfera una terza trasformazione, cioè quella che porta il sistema $(\overline{M})$ in $(\overline{M}_1)$ e riguardiamo in essa come corrispondenti i punti $\overline{M}$ ed $\overline{M}_1$. In tale trasformazione le direzioni t e t' sopra considerate non sono in generale corrispondenti; nel caso che lo siano diciamo t una *direzione* K relativa alle due trasformazioni H_1 ed H_2.

Diciamo che il punto $\overline{M}$ descrive una *linea* K, quando la tangente in ogni punto della linea è una direzione K; l'equazione differenziale delle linee K si ha subito dalla (69) ponendo δu, δv proporzionali a du, dv e si ottiene

$$\begin{vmatrix} (p - p')\,du + (p_1 - p'_1)\,dv & (q - q')\,du + (q_1 - q'_1)\,dv \\ (p - p'')\,du + (p_1 - p''_1)\,dv & (q - q'')\,du + (q_1 - q''_1)\,dv \end{vmatrix} = 0 \quad (70)$$

dunque *per ogni coppia di trasformazioni sulla sfera esiste in generale un doppio sistema di linee* K.

22. Un caso notevole si ha quando le due trasformazioni H_1 ed H_2 ammettono lo stesso sistema principale; in tal caso prendendo come variabili u e v i parametri di tale sistema si avrà

$$p\,q' - p'\,q = 0; \quad p_1\,q'_1 - p'_1\,q_1 = 0$$
$$p\,q'' - p''\,q = 0; \quad p_1\,q''_1 - p_1''\,q_1 = 0$$

donde

$$(p - p')\,(q - q'') - (p - p'')\,(q - q') = 0$$
$$(p_1 - p'_1)\,(q_1 - q_1'') - (p_1 - p_1'')\,(q_1 - q'_1) = 0$$

e ne risulta subito il teorema: *se le trasformazioni H_1 ed H_2 ammettono lo stesso sistema principale, le linee K descritte dal punto $\overline{M}$ corrispondono al sistema principale comune alle due trasformazioni H_1 ed H_2.*

§ 10. — Composizione di due trasformazioni per inviluppo di sfere.

23. Assumiamo due trasformate S_1 ed S_2 di una medesima superficie S, e come abbiamo dichiarato al n.° 20 distinguiamo con un solo accento le funzioni trasformatrici del passaggio da S a S_1 e con due accenti quelle relative al passaggio da S ad S_2; inoltre supponiamo espressamente che le quantità

$$\mu' w'' - \mu'' w', \quad w' \lambda'' - w'' \lambda', \quad \psi' w'' - \psi'' w' \tag{71}$$

siano diverse da zero.

Per ogni punto P di S si hanno in corrispondenza due punti P_1 e P_2 appartenenti rispettivamente alle superficie S_1 ed S_2; i punti P, P_1, P_2 non sono in linea retta e individuano perciò un cerchio. Si genera così un sistema ∞^2 di cerchi che chiameremo *sistema K generalizzato;* chiameremo altresì *congruenza K generalizzata* la congruenza formata dagli assi dei circoli (*).

I parametri direttori del raggio della congruenza K sono

$$X = (\mu' w'' - \mu'' w') X_1 + (w' \lambda'' - w'' \lambda') X_2 + (\lambda' \mu'' - \lambda'' \mu') X_3 \tag{72}$$

con le analoghe in Y, Z; e tale raggio resta individuato dalla direzione e dal suo punto

$$x'_0 = x - \frac{\psi' w'' - \psi'' w'}{\mu' w'' - \mu'' w'} X_2 + \frac{\psi' \mu'' - \psi'' \mu'}{\mu' w'' - \mu'' w'} X_3 \tag{73}$$

Chiamiamo T_1 e T_2 le trasformazioni che portano S in S_1 ed S_2; indichiamo inoltre con H_1 e H_2 le rispettive immagini sferiche di T_1 e T_2 (**).

24. Per studiare il comportamento della congruenza K, conviene formare le espressioni delle derivate di $\mu' w'' - \mu'' w'$, $w' \lambda'' - w'' \lambda'$, ..., osser-

---

(*) Tali denominazioni vengono qui introdotte perchè gli elementi considerati generalizzano i sistemi K e le congruenze K studiate nel caso delle trasformazioni di Ribaucour.

Nondimeno per ragioni di brevità diremo ancora *sistema K*, *congruenza K* invece di sistema K generalizzato, congruenza K generalizzata.

(**) Secondo i risultati del § 6, una delle trasformazioni sferiche, per es. H_1, può darsi ad arbitrio.

vando le (7), (8), (9), (10). Si ha:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}(\psi'\lambda''-\psi''\lambda') = r(\psi'\mu''-\psi''\mu') - q(\psi' w''-\psi'' w') - \eta(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') - \\
&\qquad\qquad - m\varphi'\psi'' + n\varphi''\psi' + \Theta' w'\lambda'' - \Theta'' w''\lambda' \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\psi'\lambda''-\psi''\lambda') = r_1(\psi'\mu''-\psi''\mu') - q_1(\psi' w''-\psi'' w') - \eta_1(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') - \\
&\qquad\qquad - m\varphi'_1\psi'' + n\varphi''_1\psi' + \Theta'_1 w'\lambda'' - \Theta''_1 w''\lambda' \\
&\frac{\partial}{\partial u}(\psi'\mu''-\psi''\mu') = -r(\psi'\lambda''-\psi''\lambda') + p(\psi' w''-\psi'' w') + \xi(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') - \\
&\qquad\qquad - m\Omega'\psi'' + n\Omega''\psi' + \Theta' w'\mu'' - \Theta'' w''\mu' \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\psi'\mu''-\psi''\mu') = -r_1(\psi'\lambda''-\psi''\lambda') + p_1(\psi' w''-\psi'' w') + \xi_1(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') - \\
&\qquad\qquad - m\Omega'_1\psi'' + n\Omega''_1\psi' + \Theta'_1 w'\mu'' - \Theta''_1 w''\mu' \\
&\frac{\partial}{\partial u}(\psi' w''-\psi'' w') = q(\psi'\lambda''-\psi''\lambda') - p(\psi'\mu''-\psi''\mu') - \xi(w'\lambda''-w''\lambda') + \\
&\qquad\qquad + \eta(\mu' w''-\mu'' w') - m h'\psi'' + n h''\psi' + w' w''(\Theta'-\Theta'') \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\psi' w''-\psi'' w') = q_1(\psi'\lambda''-\psi''\lambda') - p_1(\psi'\mu''-\psi''\mu') - \xi_1(w'\lambda''-w''\lambda') + \\
&\qquad\qquad + \eta_1(\mu' w''-\mu'' w') - m h'_1\psi'' + n h''_1\psi' + w' w''(\Theta'_1-\Theta''_1) \\
&\frac{\partial}{\partial u}(\mu' w''-\mu'' w') = -q(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') + r(w'\lambda''-w''\lambda') - \\
&\qquad\qquad - m h'\mu'' + n h''\mu' + m\Omega' w'' - n\Omega'' w' \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\mu' w''-\mu'' w') = -q_1(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') + r_1(w'\lambda''-w''\lambda') - \\
&\qquad\qquad - m h'_1\mu'' + n h''_1\mu' + m\Omega'_1 w'' - n\Omega''_1 w' \\
&\frac{\partial}{\partial u}(w'\lambda''-w''\lambda') = -r(\mu' w''-\mu'' w') + p(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') - \\
&\qquad\qquad - m\varphi' w'' + n\varphi'' w' + m h'\lambda'' - n h''\lambda' \\
&\frac{\partial}{\partial v}(w'\lambda''-w''\lambda') = -r_1(\mu' w''-\mu'' w') + p_1(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') - \\
&\qquad\qquad - m\varphi'_1 w'' + n\varphi''_1 w' + m h'_1\lambda'' - n h''_1\lambda' \\
&\frac{\partial}{\partial u}(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') = -p(w'\lambda''-w''\lambda') + q(\mu' w''-\mu'' w') - \\
&\qquad\qquad - m\Omega'\lambda'' + n\Omega''\lambda' + m\varphi'\mu'' - n\varphi''\mu' \\
&\frac{\partial}{\partial v}(\lambda'\mu''-\lambda''\mu') = -p_1(w'\lambda''-w''\lambda') + q_1(\mu' w''-\mu'' w') - \\
&\qquad\qquad - m\Omega'_1\lambda'' + n\Omega''_1\lambda' + m\varphi'_1\mu'' - n\varphi''_1\mu'.
\end{aligned}\right\} \quad (74)
$$

Mediante queste relazioni si trovano facilmente le espressioni delle derivate di x'_0, y'_0, z' sotto la forma

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'_0}{\partial u} &= \frac{1}{(\mu' w'' - \mu'' w')^2}\Big[\xi(\mu' w'' - \mu'' w') + q(\psi'\mu'' - \psi''\mu') + r(\psi' w'' - \psi'' w')\Big] X \\
&+ \frac{\psi' w'' - \psi'' w'}{(\mu' w'' - \mu'' w')^2}\Big[-m w'' \frac{\psi'\sigma'}{w'}(p - p') + n w' \frac{\psi''\sigma''}{w''}(p - p'')\Big] X_2 \\
&+ \frac{\psi' w'' - \psi'' w'}{(\mu' w'' - \mu'' w')^2}\Big[m \mu'' \frac{\psi'\sigma'}{w'}(p - p') - n \mu' \frac{\psi''\sigma''}{w''}(p - p'')\Big] X_3 \\
\frac{\partial x'_0}{\partial v} &= \frac{1}{(\mu' w'' - \mu'' w')^2}\Big[\xi_1(\mu' w'' - \mu'' w') + q_1(\psi'\mu'' - \psi''\mu') + r_1(\psi' w'' - \psi'' w')\Big] X \\
&+ \frac{\psi' w'' - \psi'' w'}{(\mu' w'' - \psi'' w')^2}\Big[-m w'' \frac{\psi'\sigma'}{w'}(p_1 - p'_1) + n w' \frac{\psi''\sigma''}{w''}(p_1 - p''_1)\Big] X_2 \\
&+ \frac{\psi' w'' - \psi'' w'}{(\mu' w'' - \mu'' w')^2}\Big[m \mu'' \frac{\psi'\sigma'}{w'}(p_1 - p'_1) - n \mu' \frac{\psi''\sigma''}{w''}(p_1 - p''_1)\Big] X_3
\end{aligned}\right\} \quad (75)
$$

25. Ciò posto formiamo le sviluppabili della congruenza K.
Se il punto $(x'_0\ y'_0\ z'_0)$ è un fuoco si dovrà avere

$$d x'_0 = t X$$

essendo X, Y, Z date dalle (72). Esprimendo in questa il differenziale $d x'_0$ mediante le (75) e semplificando si ottiene

$$
\begin{aligned}
& m w'' \frac{\psi'\sigma'}{w'}\Big[(p - p') d u + (p_1 - p'_1) d v\Big] - \\
&\qquad - n w' \frac{\psi''\sigma''}{w''}\Big[(p - p'') d u + (p_1 - p''_1) d v\Big] = 0 \\
& m \mu'' \frac{\psi'\sigma'}{w}\Big[(p - p') d u + (p - p'_1) d v\Big] - \\
&\qquad - n \mu' \frac{\psi''\sigma''}{w''}\Big[(p - p'') d u + (p_1 - p''_1) d v\Big] = 0
\end{aligned}
$$

e quindi dovrà essere separatamente

$$
\begin{aligned}
(p - p') d u + (p_1 - p'_1) d v &= 0 \\
(p - p'') d u + (p_1 - p''_1) d v &= 0.
\end{aligned}
$$

Se il punto $(x'_0\ y'_0\ z'_0)$ non è un fuoco, queste ultime saranno verificate per una conveniente rotazione del triedro mobile attorno alla normale di S; avremo allora per le (20)

$$a_{22}\Big[(p-p')\,du+(p_1-p'_1)\,dv\Big]-a_{12}\Big[(q-q')\,du+(q_1-q'_1)\,dv\Big]=0$$

$$a_{22}\Big[(p-p'')\,du+(p_1-p''_1)\,dv\Big]-a_{12}\Big[(q-q'')\,du+(q_1-q''_1)\,dv\Big]=0.$$

Eliminando fra queste a_{22} ed a_{12} si ottiene

$$\begin{vmatrix} (p-p')\,du+(p_1-p'_1)\,dv & (q-q')\,du+(q_1-q'_1)\,dv \\ (p-p'')\,du+(p_1-p''_1)\,dv & (q-q'')\,du+(q_1-q''_1)\,dv \end{vmatrix}=0, \qquad (76)$$

che dà le sviluppabili della congruenza K. Dunque *le sviluppabili della congruenza K corrispondono alle linee sferiche K relative alle trasformazioni H_1 ed H_2.*

Si ottengono in particolare i teoremi di DEMOULIN; per esempio se T_1 e T_2 sono trasformazioni di RIBAUCOUR, le immagini sferiche H_1 ed H_2 ammettono lo stesso sistema principale (che nell'ipotesi attuale corrisponde alle linee di curvatura di S). Allora, per quanto abbiamo visto al n.° 22, le linee K corrispondono al sistema principale comune, e si deduce che *nel caso di due trasformazioni di Ribaucour le sviluppabili della congruenza K corrispondono alle linee di curvatura di S.*

Messina, 28 Ottobre 1919.

Proprietà delle equazioni Abeliane di grado p^2.

(*Di* Giulio Darbi, *a Napoli*.)

Facendo seguito ad uno studio (*), sulle equazioni Abeliane di grado primo p, mi propongo, con la presente Nota, di dare alcune proprietà delle equazioni Abeliane di grado p^2, essendo p un numero primo.

Il gruppo di tali equazioni, essendo composto di sostituzioni a periodo divisore di p^2, può essere ciclico, oppure può essere formato di sostituzioni aventi lo stesso periodo p. Poichè, in altra Nota (**), mi sono occupato delle equazioni Abeliane a gruppo ciclico, tratterò solo il caso di equazioni Abeliane di grado p^2 a gruppo non ciclico, determinando le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'equazione di grado p^2, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, sia Abeliana a gruppo non ciclico.

Tali equazioni godono della proprietà che, ogni funzione razionale in (C) delle radici può esprimersi in funzione omogenea intera di secondo grado nelle radici, con coefficienti appartenenti a (C). Vengono inoltre determinate le condizioni necessarie e sufficienti affinchè ogni funzione razionale in (C) delle radici possa esprimersi come una combinazione lineare omogenea nelle radici con coefficienti appartenenti a (C).

Riunendo i risultati ottenuti in questa Nota con altri di una Nota precedente, viene esaminato a parte il caso delle equazioni Abeliane di 9° grado.

1. Abbiasi l'equazione Abeliana di grado p^2:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

(*) Cfr. *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli.* Marzo 1903.

(**) Cfr. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 1917.

irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti; siano:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_{p^2}$$

le radici di (1).

Essendo l'ordine del gruppo di Galois della (1) uguale a p^2, il periodo ϑ di una sostituzione di (G) è un divisore di p^2. Se fosse $\vartheta = p$, il gruppo (G) sarebbe formato di sostituzioni aventi lo stesso periodo p. Noi tratteremo questo caso, escludendo l'altro in cui $\vartheta = p^2$, relativo al gruppo ciclico.

Denotando con (S) e (T) due sostituzioni del gruppo Abeliano (G) permutabili fra loro, cioè:

$$S = (x_1\, x_2 \ldots x_p)\,(x_{p+1}\, x_{p+2} \ldots x_{2p}) \ldots (x_{p(p-1)+1}\, x_{p(p-1)+2} \ldots x_{p^2}),$$
$$T = (x_1,\ x_{p+1},\ldots,\ x_{p(p-1)+1})\,(x_2,\ x_{p+2},\ldots,\ x_{p(p-1)+2}) \ldots (x_p,\ x_{2p},\ldots,\ x_{p^2}),$$

sappiamo (*) che il gruppo (G) si genera con le due sostituzioni elementari S e T; le sue p^2 sostituzioni sono date dalla formola:

$$u = S^\beta\, T^\alpha \begin{cases} \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ldots,p-1 \\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ldots,p-1. \end{cases}$$

Costruiamo una funzione razionale delle radici che sia inalterata nel valore numerico dalle sostituzioni del gruppo ciclico $S,\ S^2,\ldots,\ S^p = 1$ ed alterata dalle altre sostituzioni di (G). Analogamente si costruisca una funzione che appartenga al gruppo $T,\ T^2,\ldots,\ T^p = 1$.

Tali funzioni, che denoteremo con Y_1, Z_1, sono radici ciascuna di un'equazione ciclica di grado p irriducibile nel campo (C). Se a questo campo aggiungiamo le funzioni Y_1, Z_1 sappiamo (**) che il gruppo (G) dell'equazione (1) si riduce a quelle sostituzioni che lasciano invariate numericamente Y_1, Z_1, cioè si riduce alla sostituzione identica, che è l'unica sostituzione comune ai gruppi ciclici, generati dalle sostituzioni S e T. Onde, le radici della (1) sono funzioni razionali in (C) delle funzioni Y_1, Z_1.

Denotiamo con $F(Y) = 0$, $\varphi(Z) = 0$ le equazioni cicliche di grado p, irriducibili in (C). Siano:

$$Y_1,\ Y_2,\ldots,\ Y_p$$
$$Z_1,\ Z_2,\ldots,\ Z_p$$

(*) Cfr. Netto, *Teoria delle sostituzioni*, 1885, pag. 130.

(**) Cfr. Luigi Bianchi, *Teoria dei Gruppi di sostituzioni*, 1889, pag. 152.

le radici di tali equazioni. Aggiungendo al campo (C) le radici dell'equazione:

$$\varepsilon^{p-1} + \varepsilon^{p-2} + \cdots + \varepsilon + 1 = 0,$$

le equazioni $F(Y) = 0$, $\varphi(Z) = 0$, continuano, per il teorema di Jordan (*), ad essere irriducibili nel nuovo campo $(C; \varepsilon)$. L'espressione:

$$u_1 = Y_1 + \varepsilon Y_2 + \varepsilon^2 Y_3 + \cdots + \varepsilon^{p-1} Y_p$$

assume per le sostituzioni del gruppo ciclico:

$$\Gamma = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_p), \ \Gamma^2, \ \Gamma^3, \ldots, \Gamma^p = 1,$$

appartenente all'equazione $F(Y) = 0$, i seguenti valori:

$$u_1, \ \varepsilon u_1, \ \varepsilon^2 u_1, \ldots, \ \varepsilon^{p-1} u_1,$$

che sono distinti fra loro, essendo u_1 diverso da zero.

Onde u_1 è radice dell'equazione binomia:

$$u^p = a, \tag{2}$$

essendo a un numero del campo $(C; \varepsilon)$.

Ampliando il campo $(C; \varepsilon)$ coll'aggiunzione di u_1, il gruppo dell'equazione $F(Y) = 0$ si riduce alla sostituzione identica; ciò significa che le radici della precedente equazione si possono esprimere in funzione razionale di u_1 con coefficienti del campo $(C; \varepsilon)$.

Analogamente, si ricava che le radici dell'equazione $\varphi(Z) = 0$ possono esprimersi in funzione razionale delle radici dell'equazione binomia:

$$v^p = b, \tag{3}$$

essendo b un numero del campo $(C; \varepsilon)$.

Da quanto precede risulta che le radici della (1) possono esprimersi in funzione razionale delle radici delle equazioni binomie (2) (3) con coefficienti appartenenti al campo $(C; \varepsilon)$; ciò significa che l'aggiunzione al campo $(C; \varepsilon)$ delle radici di tali equazioni binomie riduce il gruppo (G) della (1) alla sostituzione identica. Sappiamo che, invece di aggiungere due irrazionali algebrici d'ordine p rispetto ad un determinato campo di razionalità, possiamo

(*) Cfr. Luigi Bianchi, citata opera, pag. 178.

aggiungere un solo irrazionale d'ordine p^2 del tipo:

$$\rho_1 = m\,u + n\,v, \tag{4}$$

essendo m, n numeri del campo $(C;\ \varepsilon)$, scelti in modo tale che tutti i valori:

$$\rho_1,\ \rho_2, \ldots,\ \rho_{p^2}, \tag{5}$$

che l'espressione (4) assume quando ad u e v si sostituiscono le radici delle equazioni binomie (2), (3), siano differenti fra loro.

Fatte tali sostituzioni, le espressioni che figurano in (3) possono rappresentarsi col seguente quadro:

$$\begin{array}{llll} \rho_1 & \varepsilon\rho_1 \cdots & \varepsilon^{p-1}\rho_1 \\ \rho_2 & \varepsilon\rho_2 \cdots & \varepsilon^{p-1}\rho_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \rho_p & \varepsilon\rho_p \ldots & \varepsilon^{p-1}\rho_p. \end{array}$$

Esse sono radici di un'equazione del tipo:

$$\rho^{p^2} + \alpha_1\,\rho^{p(p-1)} + \alpha_2\,\rho^{p(p-2)} + \cdots + \alpha_{p-1}\,\rho^p + \alpha_p = 0, \tag{6}$$

di grado p^2, irriducibile nel campo $(C;\ \varepsilon)$, a cui appartengono i coefficienti $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_p$.

Per determinare i coefficienti della (6) basta eliminare dalle equazioni (2) (3) (4) le radici u, v; la risultante così ottenuta è un'equazione Abeliana di grado p^2 in ρ, irriducibile nel campo $(C;\ \varepsilon)$, con gruppo formato di sostituzioni a periodo p.

2. Riassumendo i risultati fin qui ottenuti, potremo enunciare il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un'equazione di grado p^2, essendo p un numero primo, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, sia Abeliana a gruppo non ciclico, è che le sue radici siano funzioni razionali, con coefficienti appartenenti al campo $(C;\ \varepsilon)$, delle radici di un'equazione Abeliana del tipo (6).

Reciprocamente: se le radici di un'equazione $f(x) = 0$ di grado p^2, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti sono funzioni razionali, con coefficienti appartenenti al campo

$(C;\ \varepsilon)$, delle radici di un'equazione del tipo (6), l'equazione $f(x)=0$ è Abeliana, con gruppo formato di sostituzioni a periodo p.

3. Se indichiamo con S una sostituzione del gruppo (G), in questo esistono le sostituzioni $S^2, S^3, \ldots, S^p=1$.

Sia T una sostituzione di (G) diversa dalle precedenti; esisteranno nel gruppo (G) le sostituzioni $T^2, T^3, \ldots, T^p=1$.

È facile vedere che le precedenti sostituzioni sono differenti fra loro. Se fosse:

$$S^\lambda = T^\beta, \tag{7}$$

risolvendo la congruenza:

$$\beta x \equiv 1 \pmod{p},$$

ed elevando ambo i membri della (7) all'esponente x, si otterrebbe:

$$S^{\lambda x} = T^{\beta x} = T;$$

il che è impossibile, avendo supposto che T non sia uguale ad una potenza di S.

Da quanto si è detto, risulta chiaro che dal gruppo (G) possiamo estrarre $(p+1)$ sostituzioni distinte, tali che esse e le loro potenze ricostruiscono il gruppo (G).

Di tali $(p+1)$ sostituzioni, consideriamo i cicli contenenti la stessa lettera x_1. Se uno dei menzionati cicli è formato dalle lettere $x_1, x_2, \ldots, x_p$, consideriamo la somma:

$$y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_p \tag{8}$$

e le altre analoghe alla precedente, ottenute sommando le lettere di ciascun ciclo che contiene l'elemento x_1.

Le menzionate somme, che rappresentiamo con

$$y_1,\quad y_2, \ldots,\quad y_{p+1}, \tag{9}$$

non possono avere due lettere comuni, perchè i cicli, dei cui elementi ci siamo serviti per costruire le precedenti somme, hanno in comune la sola lettera x_1.

Si ha evidentemente:

$$p\,x_1 + \sum_{i=1}^{i=p^2} x_i = \sum_{i=1}^{i=p+1} y_i\,.$$

Denotando con q il coefficiente del secondo termine dell'equazione data (1), la precedente uguaglianza si può scrivere così:

$$x_1 = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{i=p+1} y_i + q\right). \tag{10}$$

Avendo supposto che l'equazione data (1) è irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, dalla (10) si ricava che almeno una delle espressioni:

$$y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_{p+1}$$

non appartiene al campo (C), per esempio y.

Poichè l'espressione y_1, uguale ad $(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)$, rimane inalterata dalle sostituzioni del gruppo ciclico:

$$S, \quad S^2, \ldots, \quad S^p = 1,$$

ed alterata nel valore numerico dalle sostituzioni di (G), è radice di un'equazione ciclica di grado p, irriducibile in (C). Aggiungendo al campo (C) l'espressione y_1, il gruppo (G) di Galois si riduce al gruppo ciclico generato dalla sostituzione S, mentre il primo membro dell'equazione data (1) si scinde in p fattori, ciascuno di grado p in x, con coefficienti appartenenti al campo $(C; y_1)$. Si ha quindi:

$$f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \ldots \varphi_p(x). \tag{11}$$

Ricordiamo il seguente teorema (*):

Affinchè un'equazione ciclica di grado n, irriducibile in un certo campo (K) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, goda della proprietà che, ogni funzione razionale in (K) delle sue radici si può esprimere in funzione lineare delle potenze di grado λ delle radici con coefficienti appartenenti a (K), è necessario e sufficiente che fra le radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non esista alcuna relazione del tipo:

$$x_1^\lambda + x_2^\lambda + \cdots + x_d^\lambda = c,$$

essendo c un numero di (K); d un divisore di n; $d < n$; λ un numero intero positivo o negativo fissato ad arbitrio.

(*) Cfr. *Annali di Matematica*, 1917.

Giova notare che il menzionato teorema sussiste se le equazioni che danno le radici primitive t^{me} dell'unità, essendo t un divisore del grado n della data equazione ciclica, siano irriducibili nel dato campo (K) di razionalità.

È facile comprendere che qualunque funzione lineare nelle potenze di grado λ delle radici, si può esprimere in funzione lineare omogenea di tali potenze, se si ha:

$$x_1^\lambda + x_2^\lambda + \cdots + x_n^\lambda \neq 0.$$

Per applicare il menzionato teorema alle equazioni cicliche di grado p, cioè alle equazioni:

$$\varphi_1(x) = 0; \quad \varphi_2(x) = 0, \ldots, \quad \varphi_p(x) = 0, \tag{12}$$

che figurano in (11), è necessario provare che l'equazione che dà le radici primitive p^{me} dell'unità, cioè:

$$\varepsilon^{p-1} + \varepsilon^{p-2} + \cdots + \varepsilon + 1 = 0, \tag{13}$$

la quale è (*) irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, è anche irriducibile nel campo ampliato $(C; y)$, in cui sono irriducibili le equazioni (12), essendo y radice di un'equazione ciclica di grado p, irriducibile in (C). Tale dimostrazione è semplice, tenuto conto del teorema di Jordan (**) e che i gradi p, $(p-1)$ sono numeri primi fra loro.

Consideriamo l'equazione ciclica di grado p:

$$\varphi_1(x) = 0, \tag{14}$$

irriducibile nel campo $(C; y_1)$, essendo:

$$y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_p,$$

ove $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sono radici della (14); inoltre y_1 è differente da zero.

Poichè il coefficiente del secondo termine della (14) è diverso da zero, ogni funzione razionale delle radici della (14) si può esprimere in funzione lineare omogenea di tali radici con coefficienti appartenenti al campo $(C; y_1)$. Essendo l'equazione data (1) Abeliana, qualunque funzione razionale delle

(*) *Istituzioni di analisi algebrica di Alfredo Capelli*, 1902, pag. 638.

(**) Cfr. Bianchi, opera citata, pag. 178.

radici $x_1, x_2, \ldots, x_{p^2}$ con coefficienti appartenenti a (C), si può esprimere in funzione razionale di una sola radice, per esempio x_1.

Onde, denotando con $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{p^2})$ il simbolo di una tale funzione, per quanto si è detto, possiamo scrivere:

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{p^2}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_p x_p, \tag{15}$$

essendo $a_1, a_2, \ldots, a_p$ numeri del campo $(C; y_1)$; $x_1, x_2, \ldots, x_p$ radici della (14); y_1 è radice di un'equazione ciclica di grado p, irriducibile nel campo (C), a cui appartengono i suoi coefficienti. Le radici di tale equazione hanno forma analoga alla (8), da cui si ricavano scambiando le radici $x_1, x_2, \ldots, x_p$ con le sostituzioni del gruppo (G).

Applicando all'equazione in y il teorema testè enunciato, avremo che i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_p$, che figurano in (15), possono esprimersi in funzione lineare omogenea di $x_1, x_2, \ldots, x_{p^2}$, con coefficienti appartenenti a (C).

Dalla (15) si ricava che la funzione $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{p^2})$ si può esprimere in funzione omogenea di secondo grado nelle radici $x_1, x_2, \ldots, x_{p^2}$ con coefficienti appartenenti a (C), avendo supposto che il coefficiente del secondo termine della data equazione sia diverso da zero.

4. Da quanto si è detto in questo articolo, possiamo enunciare il seguente teorema:

Un'equazione Abeliana di grado p^2, a gruppo non ciclico, essendo p un numero primo, la quale sia irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, gode della seguente proprietà:

i numeri del corpo algebrico $(C; x_1, x_2, \ldots, x_{p^2})$ possono esprimersi come forme quadratiche ennarie nelle radici $x_1, x_2, \ldots, x_{p^2}$ considerate come variabili che soddisfano ad una data equazione, essendo $n = p^2$.

5. Determiniamo le condizioni necessarie e sufficienti affinchè i numeri del corpo algebrico:

$$(C; x_1, x_2, \ldots, x_{p^2})$$

possano esprimersi in funzione lineare omogenea delle radici con coefficienti appartenenti a (C).

Sappiamo (*) che, perchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che le

(*) Cfr. citata nota, *Rendiconti R. Accademia*, nonchè *Giornale di Matematiche di Battaglini*, Anno 1903.

radici della data equazione siano linearmente ed omogeneamente indipendenti nel campo (C). Supponiamo che si abbia:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{p^2} x^{p^2} = 0, \tag{16}$$

essendo $a_1, a_2, \ldots, a_{p^2}$ numeri di (C).

Applicando alla (16) le sostituzioni del gruppo ciclico:

$$S = (x_1, x_2, \ldots, x_p)\,(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{2p}) \ldots (x_{p(p-1)+1}, x_{p(p-1)+2}, \ldots, x_{p^2}) \tag{17}$$
$$S^2, \quad S^3, \ldots, \quad S^p = 1,$$

sommando le p relazioni ottenute, si ottiene:

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_p y_p = 0, \tag{18}$$

essendo

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_p \\
b_2 &= a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{2p} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_p &= a_{p(p-1)+1} + a_{p(p-1)+2} + \cdots + a_{p^2} \\
y_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_p \\
y_2 &= x_{p+1} + x_{p+2} + \cdots + x_{2p} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_p &= x_{p(p-1)+1} + x_{p(p-1)+2} + \cdots + x_{p^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Possono appartenere le espressioni $y_1, y_2, \ldots, y_p$ al campo (C), oppure non essere numeri del detto campo. Nel primo caso ha luogo una relazione del tipo:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = d, \tag{19'}$$

essendo d un numero di (C). Nel secondo caso le espressioni $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sono radici di un'equazione ciclica di grado p, irriducibile in (C), con coefficienti appartenenti a questo campo. Per il teorema testè enunciato, la (18) non può sussistere se non sono verificate le seguenti uguaglianze, tenuto conto che il coefficiente del secondo termine della (1) è diverso da zero:

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_p = 0,$$

cioè:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 0 \\ a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{2p} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{p(p-1)+1} + a_{p(p-1)+2} + \cdots + a_{p^2} = 0. \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Al principio dell' articolo 3 abbiamo detto che dal gruppo (G) possiamo estrarre $p+1$ sostituzioni distinte, tali che esse e le loro potenze ricostruiscono il gruppo (G). Applicando alla (16) tali sostituzioni e ragionando come si è fatto precedentemente per dedurre il sistema (20), avremo in tutto $p+1$ sistemi, ciascuno di p equazioni, analoghe alle precedenti. Di tali equazioni consideriamo solo quelle che contengono l'elemento a_1, le quali sono in numero di $p+1$. Sommando tali $p+1$ equazioni, si ha che l'elemento a_1 viene ripetuto $p+1$ volte, mentre tutti gli altri elementi a_2, $a_3, \ldots, a_{p^2}$ figurano ciascuno una sola volta.

Si ha così una relazione del tipo seguente:

$$\sum_{i=1}^{i=p^2} a_i + p\, a_1 = 0. \qquad (21)$$

Applicando alla (16) le p^2 sostituzioni del gruppo (G) e sommando le relazioni ottenute, avremo:

$$\sum_{i=1}^{i=p^2} x_i \times \sum_{i=1}^{i=p^2} a_i = 0.$$

Avendo supposto diverso da zero il coefficiente del 2° termine dell'equazione (1), dalla precedente relazione si ricava:

$$\sum_{i=1}^{i=p^2} a_i = 0.$$

Onde la (21) diventa:

$$a_1 = 0.$$

In modo analogo si dimostrano le seguenti uguaglianze:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{p^2} = 0.$$

Da quanto si è detto in questo articolo risulta che, se non si ha una relazione del tipo:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = d,$$

essendo d un numero appartenente a (C), non può sussistere alcuna altra relazione lineare fra le radici.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema, analogo ad altro (*), già dimostrato, relativo alle equazioni Abeliane a gruppo ciclico:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione Abeliana di grado p^2, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, goda della proprietà, che i numeri del corpo algebrico:

$$(C;\ x_1, x_2, \ldots, x_{p^2})$$

possano esprimersi in funzione lineare omogenea delle radici $x_1, x_2, \ldots, x_{p^2}$ con coefficienti appartenenti a (C), è che fra queste non esista alcuna relazione lineare del tipo:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = d,$$

essendo d un numero di (C), e che il coefficiente del 2° termine dell'equazione data sia diverso da zero.

6. Applichiamo i risultati ottenuti in questa ed altra (*) Nota, alle equazioni Abeliane di 9° grado.

Ponendo $m = n = 1$, la formola (4) diventa:

$$\rho = u + v, \tag{22}$$

ove u, v sono radici delle equazioni:

$$u^3 = a; \quad v^3 = b. \tag{23}$$

È facile costruire l'equazione Abeliana di 9° grado, le cui radici sono:

$$\rho_1 = u + v; \quad \rho_2 = u + \varepsilon v; \quad \rho_3 = u + \varepsilon^2 v; \quad \rho_4 = \varepsilon \rho_1; \quad \rho_5 = \varepsilon^2 \rho_1;$$
$$\rho_6 = \varepsilon \rho_2; \quad \rho_7 = \varepsilon^2 \rho_2; \quad \rho_8 = \varepsilon \rho_3; \quad \rho_9 = \varepsilon^2 \rho_3,$$

essendo ε radice dell'equazione:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0. \tag{24}$$

(*) Cfr. citati *Annali di Matematica*, 1917.

Se supponiamo a^2, b^2 diverse da zero e non uguali fra loro, le precedenti espressioni sono distinte, com'è facile verificare. Elevando a cubo la (22), si ottiene:

$$u^3 + v^3 + 3\,u\,v\,(u + v) = \rho^3.$$

Tenuto conto della (22) e della (23), la precedente equazione si può scrivere così:

$$3\,u\,v = \rho^3 - a - b,$$

ossia:

$$27\,a\,b\,\rho^3 = (\rho^3 - a - b)^3,$$

la quale si deduce dalla (6) dell'articolo 1, facendo $p = 3$.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Un'equazione Abeliana di 9° grado, a gruppo non ciclico, irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, gode delle seguenti proprietà:

1) *le sue radici sono funzioni razionali delle radici dell'equazione Abeliana:*

$$27\,a\,b\,\rho^3 = (\rho^3 - a - b)^3,$$

con coefficienti appartenenti al campo (C; ε), a cui appartengono i numeri a, b, essendo ε radice dell'equazione

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

a, b diversi da zero ed inoltre a^2 differente di b^2;

2) *ogni funzione razionale delle radici, con coefficienti appartenenti a (C), può esprimersi in funzione omogenea di 2° grado nelle radici, con coefficienti appartenenti a (C).*

7. Esaminiamo ora il caso in cui il gruppo dell'equazione Abeliana sia ciclico, cioè formato dalle sostituzioni:

$$S = (x_1, x_2, \ldots, x_9), \quad S^2, S^3, \ldots, S^9 = 1.$$

Sappiamo (*) che, se fra le radici della data equazione non esiste una

(*) Cfr. *Annali di Matematica*, già citati, 1917.

relazione lineare del tipo:

$$x_1 + x_4 + x_7 = a, \tag{25}$$

essendo a un numero di (C), i numeri del corpo algebrico:

$$(C;\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_9)$$

possono esprimersi in funzione lineare omogenea delle radici. Se fra queste non esiste una relazione del tipo:

$$x_1^2 + x_4^2 + x_7^2 = b, \tag{26}$$

essendo b un numero di (C), i numeri del menzionato corpo algebrico possono esprimersi in funzione lineare omogenea dei quadrati delle radici. Se sussistono insieme (25) e (26), il 1° membro della data equazione ciclica si può mettere sotto forma di funzione di funzione.

In questo caso non si può avere una relazione del tipo:

$$x_1^3 + x_4^3 + x_7^3 = d, \tag{27}$$

essendo d un numero di (C), perchè l'equazione data è irriducibile in (C); nè, per la stessa ragione, si può avere una relazione del tipo:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_7} = m, \tag{28}$$

essendo m un numero di (C).

Da quanto si è detto in questo articolo, risulta il seguente teorema:

Un'equazione Abeliana a gruppo ciclico, la quale sia irriducibile nel campo assoluto (C) di razionalità, a cui appartengono i suoi coefficienti, gode di una delle seguenti proprietà:

1) *Il primo membro dell'equazione si può mettere sotto forma di funzione di funzione; in questo caso, ogni funzione razionale in (C) delle radici si può esprimere in funzione lineare dei cubi di queste, come anche in funzione lineare delle inverse delle radici con coefficienti appartenenti a (C).*

2) *Il primo membro dell'equazione non si può mettere sotto forma di funzione di funzione; in questo caso ogni funzione razionale delle radici si può esprimere o in funzione lineare di queste, oppure in funzione lineare dei quadrati delle radici con coefficienti appartenenti a (C).*

22 Novembre 1919.

Spazi a tre dimensioni con una curvatura nulla e le altre due eguali ed opposte (*).

(*Di* Attilio Palatini, *a Padova.*)

PREFAZIONE.

Chiamo, col Bianchi, normale uno spazio curvo S_3 a tre dimensioni, definito dal quadrato del suo elemento lineare

$$d s^2 = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs}\, d x_r\, d x_s ,$$

quando con le linee delle sue tre congruenze principali si può costruire un sistema triplo di superficie ortogonali.

Mi propongo lo studio del seguente problema: *Trovare tutti gli spazi normali S_3 dotati di una curvatura nulla e le altre due eguali ed opposte.*

L'esame delle formule che reggono il problema mi ha condotto a suddividere gli spazi, che soddisfanno alle condizioni dichiarate, in due classi A) e B). La prima è caratterizzata dal fatto che le superficie coordinate $x_3 = cost.$ sono a curvatura gaussiana nulla. Per la seconda classe invece le medesime superficie sono a curvatura gaussiana costante (variabile in generale da superficie a superficie) essenzialmente positiva.

In ambedue le classi la congruenza [3] è *isotropa* e le linee delle congruenze [1] e [2] formano, sopra le superficie $x_3 = cost.$, un reticolato isotermo.

La costruzione effettiva dei $d s^2$ ricercati dipende naturalmente dalla integrazione di determinati sistemi di equazioni differenziali.

Tanto nel caso A), quanto nel caso B), il sistema integrale generale — che ho completamente determinato, passando attraverso il campo complesso

(*) Della prima parte di questa Memoria fu pubblicato un riassunto nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* [Vol. XXVIII, 1919, pp. 334-338].

— dipende dalla scelta arbitraria di una funzione di variabile complessa. E da ciò si inferisce, rientrando nel campo reale, che infiniti sono i $d s^2$ soddisfacenti alle condizioni volute, il grado di arbitrarietà essendo quello di una funzione armonica di due variabili.

È noto che diconsi superficie d'area minima le superficie per le quali in ogni punto i raggi principali di curvatura sono eguali e di segno contrario, o, ciò che è lo stesso, quelle superficie che sono dotate di curvatura media nulla.

Ricordando ora che dicesi curvatura media di un S_3 la somma delle tre curvature riemanniane principali, risulta che gli spazi che io studio nella presente Memoria sono a curvatura media nulla. Avendo, d'altra parte, tali spazi, eguali ed opposte due curvature, si possono ritenere come una generalizzazione delle superficie d'area minima. E con la teoria di queste superficie la risoluzione del mio problema presenta anche una analogia formale, inquantochè essa viene ottenuta, come ho più sopra dichiarato, passando attraverso il campo complesso.

I miei spazi non hanno però il comportamento geometrico delle superficie minime: queste sono immerse nell'ordinario spazio euclideo, quelli non possono invece costituire in alcun caso delle ipersuperficie di un S_4 euclideo. Ciò risulta immediatamente dall'osservazione che se un S_3 con una curvatura nulla è immerso in un S_4 euclideo, deve aver nulla necessariamente anche una seconda curvatura (*) e ciò è evidentemente incompatibile con la proprietà che caratterizza gli spazi che io ricerco.

* * *

Il presente lavoro ebbe la seguente origine.

Il Levi-Civita, ponendosi dal punto di vista della relatività generale, ha classificato (**) tutti i $d s^2$ einsteiniani corrispondenti all'ipotesi di una di-

(*) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale* [Pisa, Spoerri, 1902]. Per avere la semplice dimostrazione del mio asserto, basta, nelle prime formule del § 169, supporre $K_0 = 0$ e $K_3 = 0$.

(**) T. Levi-Civita, *$d s^2$ einsteiniani in campi newtoniani* [Rend. della R. Accad. dei Lincei, Note I^a^, Vol. XXVI, 1917, pp. 307-317; II^a^, Vol. XXVII, 1918, pp. 3-12; III^a^, ibidem, pp. 183-191; IV^a^, ibidem, pp. 220-229; V^a^, ibidem, pp. 240-248; VI^a^, ibidem, pp. 283-292; VII^a^, ibidem, pp. 343-351; VIII^a^, Vol. XXVIII, 1919, pp. 3-13; IX^a^, ibidem, pp. 101-109.

stribuzione statica di masse in un campo, che, nella meccanica classica, diremmo senz'altro newtoniano. In tale classificazione, i ds^2 einsteiniani vanno dapprima divisi in due categorie di cui una, certo la più interessante, comprende tutti gli spazi per i quali le congruenze principali sono normali. Questa categoria si suddivide poi in tre sottoclassi, che dirò, col LEVI-CIVITA, B_1), B_2), B_3), caratterizzate rispettivamente dalle ipotesi che le curvature riemanniane principali siano distinte, o due eguali, o tutte e tre eguali tra loro. Il caso B_3) si esaurisce immediatamente, perchè i ds^2 corrispondenti sono euclidei. La discussione del caso B_2) ha portato il LEVI-CIVITA alla determinazione di tutti i ds^2 che vi appartengono. La integrazione del caso B_1) presenta invece delle difficoltà notevoli e non sembra agevole il poterla conseguire. Il LEVI-CIVITA ne dà in compenso un esempio notevolissimo ricercando le soluzioni per cui tutti gli elementi del problema sono indipendenti da una coordinata, ciò che porta alla determinazione dell'analogo einsteiniano degli ordinari potenziali simmetrici.

Ora data la difficoltà della integrazione completa del caso B_1), sarebbe stato interessante discutere qualche altro caso particolare. Il LEVI-CIVITA mi ha proposto così di ricercare le soluzioni della classe B_1) per le quali una delle curvature principali è nulla e (quindi, per essere sempre eguale a zero la curvatura media degli spazi einsteiniani statici) le altre due uguali ed opposte.

La mia ricerca fu completamente negativa, perchè l'ipotesi ora ricordata porta, come necessaria conseguenza, la linearità del corrispondente ds^2, si cade cioè nel caso euclideo.

Essendo andata a vuoto tale ricerca, io mi sono proposto quella che forma oggetto della presente Memoria.

L'ultimo paragrafo del lavoro è dedicato alla dimostrazione del risultato negativo al quale ho or ora accennato.

§ I.

Impostazione del problema.

Sia S_3 uno spazio qualunque a tre dimensioni, i cui punti siano riferiti ad un sistema di coordinate generali (x_1, x_2, x_3) e sia S_3 definito dal quadrato del suo elemento lineare

$$d s^2 = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs}\, d x_r\, d x_s ,$$

i coefficienti a_{rs} essendo funzioni finite e continue delle tre variabili x_1, x_2, x_3.

Si supponga ora che S_3 sia normale nel senso definito sopra: il suo $d s^2$ si potrà presentare sotto la forma normale

$$d s^2 = H_1^2\, d x_1^2 + H_2^2\, d x_2^2 + H_3^2\, d x_3^2 , \tag{1}$$

assumendo come linee coordinate le linee delle congruenze principali.

Denotiamo con α_{rs} i simboli di Ricci (*) relativi alla forma differenziale (1) e con ω_1, ω_2, ω_3 le tre curvature riemanniane principali. Per il fatto che le congruenze principali sono normali si ha notoriamente

$$\alpha_{rs} = 0\ (r \neq s) ; \qquad \alpha_{ii} = H_i^2\, \omega_i ,$$

ossia le funzioni H_1, H_2, H_3 di x_1, x_2, x_3 devono soddisfare alle sei equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_2\, \partial x_3} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} , \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3\, \partial x_1} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} , \\
\frac{\partial^2 H_3}{\partial x_1\, \partial x_2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} ,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(*) I simboli α_{rs} di Ricci sostituiscono con vantaggio, per gli spazi a tre dimensioni, i simboli $a_{rs,tu}$ di Riemann. Essi non sono altro che gli elementi del sistema reciproco di quello definito dalle posizioni

$$\alpha^{(rs)} = a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2} : a ,$$

dove si ritengono equivalenti gli indici che differiscono fra loro per multipli di 3 ed a è il discriminante della forma quadratica $d s^2$.

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}+\omega_1 H_2 H_3=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}+\omega_2 H_3 H_1=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}+\omega_3 H_1 H_2=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)
$$

A queste equazioni aggiungiamo le conseguenze differenziali del Bianchi (*), che, nel caso presente, si possono scrivere sotto la forma seguente

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}+(\omega_1-\omega_2)\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+(\omega_1-\omega_3)\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}+(\omega_2-\omega_3)\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}+(\omega_2-\omega_1)\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}=0,\\
&\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}+(\omega_3-\omega_1)\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}+(\omega_3-\omega_2)\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(4)
$$

Supposto ora che sia

$$\omega_1=-\omega_2=\omega;\qquad \omega_3=0,$$

si tratta di vedere se il sistema differenziale (2), (3) ammette delle soluzioni e, nel caso affermativo, di determinare le soluzioni più generali.

Prima di procedere, si noti che ω deve ritenersi essenzialmente diverso da zero, altrimenti si cadrebbe ovviamente nel caso euclideo. Si noti inoltre, che le linee di curvatura per le quali il ds^2 del nostro S_3 assume la forma normale (1), sono uniche e determinate, perchè le tre curvature sono essenzialmente distinte.

(*) L. Bianchi, l. c., § 161.

§ II.

Prime conseguenze.

Si faccia ora nelle (4) $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$ e $\omega_3 = 0$. Si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + 2\omega \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \omega \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + 2\omega \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \omega \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}.
\end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

L'ultima di queste equazioni ci dice che la congruenza [3], oltre ad esser normale, è anche *isotropa.*

Formando poi le condizioni di integrabilità delle prime due, si deduce

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{H_2}{H_1}}{\partial x_1 \, \partial x_2} = 0,$$

la quale, assieme all'ultima delle (4'), sta ad esprimere che *le linee delle congruenze* [1] e [2] *formano,* sopra ogni superficie $x_3 = \text{cost.}$, *un reticolato isotermo.*

Scegliendo dunque opportunamente i parametri delle linee [1] e [2], senza cambiar le linee stesse, si può porre il $d s^2$ sotto la forma

$$d s^2 = e^{2h}(d x_1^2 + d x_2^2) + W^2 d x_3^2 .$$

Possiamo quindi ripigliare in esame le (2) e (3), ponendovi

$$H_1 = H_2 = e^{2h} \quad \text{e} \quad H_3 = W.$$

Tali equazioni divengono allora

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 h}{\partial x_2\, \partial x_3} = \frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{\partial \log W}{\partial x_2},\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\, \partial x_3} = \frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{\partial \log W}{\partial x_1},\\
&\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_2},
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
&e^{-2h}\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}-\frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2}+\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1}\right\}+\\
&\qquad+\frac{1}{W}\left\{\frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2}+\left(\frac{\partial h}{\partial x_3}\right)^2-\frac{1}{W}\frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{\partial W}{\partial x_3}\right\}+\omega W=0,\\
&e^{-2h}\left\{\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}-\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1}+\frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2}\right\}+\\
&\qquad+\frac{1}{W}\left\{\frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2}+\left(\frac{\partial h}{\partial x_3}\right)^2-\frac{1}{W}\frac{\partial h}{\partial x_3}\frac{\partial W}{\partial x_3}\right\}-\omega W=0,\\
&e^{-2h}\left\{\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}\right\}+\frac{1}{W^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x_3}\right)^2=0.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Relativamente alle equazioni (4'), si noti che l'ultima risulta identicamente soddisfatta e le altre due dànno

$$\frac{\partial \log \omega}{\partial x_1}+2\frac{\partial h}{\partial x_1}+\frac{\partial \log W}{\partial x_1}=0,$$

$$\frac{\partial \log \omega}{\partial x_2}+2\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial \log W}{\partial x_2}=0,$$

dalle quali, eseguendo una evidente integrazione, si ottiene

$$\omega\, e^{2h} W=\eta\,(x_3)\tag{7}$$

denotando con η una funzione della sola x_3, essenzialmente diversa da zero, perchè ciò implicherebbe $\omega=0$.

Per procedere ora nella discussione del nostro problema, divideremo i $d\,s^2$, che soddisfanno alle nostre condizioni, in due classi:

A) quelli per cui è $\dfrac{\partial h}{\partial x_3}=0$ e quindi h funzione dei due soli argomenti x_1 e x_2,

B) quelli per cui è $\dfrac{\partial h}{\partial x_3}\neq 0$.

§ III.

Determinazione dei ds^2 appartenenti alla classe A).

1. Cominciamo dunque dall'esaminare il caso A).

Le prime due delle (5) restano identicamente soddisfatte. La terza delle (5) e le (6) dànno invece

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_1}-\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_2}=0,\\
&\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}-\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1}+\frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2}-\eta=0,\\
&\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}-\frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2}+\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1}+\eta=0,\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

L'ultima di queste equazioni ci dice che h (la quale, per la classe A), dipende da x_1 e x_2 solamente) è *funzione armonica* delle due variabili x_1, x_2. La medesima equazione esprime poi che *le superficie* $x_3 = cost.$, di elemento lineare $e^{2h}(dx_1^2 + dx_2^2)$, *sono a curvatura gaussiana nulla.*

Formando ora le condizioni di integrabilità del sistema (8) si riesce a delle identità. Il sistema stesso è quindi completamente integrabile.

I ds^2 della classe A) sono dunque caratterizzati dal sistema (8).

2. Vogliamo ora occuparci della sua effettiva integrazione e quindi della determinazione di tutti i ds^2 appartenenti alla detta classe A).

Noi dimostreremo che ad ogni funzione della variabile complessa $z = x_1 + i x_2$ resta associata una soluzione del sistema (8) e che vi sono dunque infiniti ds^2 della classe A), il grado di arbitrarietà essendo appunto quello di una funzione di variabile complessa, ossia quello di una funzione armonica di due variabili.

Passiamo allo sviluppo dei calcoli.

Sommando a membro a membro la seconda e la terza delle (8) si deduce intanto

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0,$$

cioè la funzione W delle tre variabili x_1, x_2, x_3 è armonica rispetto a x_1, x_2.

Posto ora

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad W_2 = \frac{\partial W}{\partial x_2},$$

$$h_1 = \frac{\partial h}{\partial x_1}, \quad h_2 = \frac{\partial h}{\partial x_2},$$

il sistema (8) si può scrivere anche così

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W_1}{\partial x_2} &= h_2 W_1 + h_1 W_2, \\
\frac{\partial W_1}{\partial x_1} &= h_1 W_1 - h_2 W_2 + \eta, \\
\frac{\partial W_2}{\partial x_1} &= h_2 W_1 + h_1 W_2, \\
\frac{\partial W_2}{\partial x_2} &= h_2 W_2 - h_1 W_1 - \eta,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

avendo scritto due volte, sotto forma differente e per comodità, la prima e tralasciando di scrivere la quarta, il che è inutile se ci ricordiamo che h deve ritenersi armonica.

Ora si moltiplichi la prima delle (9) per $d x_2$ e la si aggiunga alla seconda moltiplicata per $d x_1$. Del pari si aggiunga alla terza moltiplicata per $d x_1$, la quarta moltiplicata per $d x_2$. Si ottengono le due equazioni seguenti

$$\left.\begin{aligned}
d W_1 &= (h_1 W_1 - h_2 W_2 + \eta)\, d x_1 + (h_2 W_1 + h_1 W_2)\, d x_2, \\
d W_2 &= (h_2 W_1 + h_1 W_2)\, d x_1 - (h_1 W_1 - h_2 W_2 + \eta)\, d x_2,
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

le quali, per l'arbitrarietà di $d x_1$ e $d x_2$, costituiscono un sistema equivalente alle (9).

Si ponga ora

$$\left.\begin{aligned}
z &= x_1 + i x_2, \\
W_1 - i W_2 &= w, \\
h_1 - i h_2 &= \mathfrak{h}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Per l'armonicità di W e h, w e $\mathfrak{h}$ risultano notoriamente funzioni della variabile complessa z, la funzione w dipendendo però eventualmente anche da x_3.

Ciò premesso, si moltiplichi la seconda delle (10) per $-i$ e la si aggiunga alla prima. Si ottiene l'equazione

$$d\,w = (h_1 W_1 - h_2 W_2 + \eta)\,d\,z - i\,(h_1 W_2 + h_2 W_1)\,d\,z,$$

o, ciò che è lo stesso, in virtù delle posizioni (11),

$$d\,w = (\eta + w\,\mathfrak{h})\,d\,z,$$

equazione che compendia evidentemente ambedue le (10).

Indicando con w' la derivata di w rispetto a z, l'integrazione del sistema (8) viene ricondotta a quella dell'unica equazione

$$w'(z;\,x_3) = \eta\,(x_3) + w\,(z;\,x_3)\,.\,\mathfrak{h}\,(z), \tag{12}$$

nella quale x_3 comparisce solamente come parametro.

3. La (12) si presenta come una equazione differenziale che lega tra loro le due funzioni $\mathfrak{h}$ e w, l'una della sola z e la seconda di z ed x_3. Data l'una o l'altra delle due funzioni, la (12) serve così a determinare la seconda. Ora si noti che mentre $\mathfrak{h}$ si può dare completamente ad arbitrio, la scelta di w è invece subordinata ad una opportuna dipendenza da x_3, in modo cioè che la $\mathfrak{h}$ risulti indipendente dal medesimo argomento. Ma appunto una maggiore convenienza si ha scegliendo a piacere w, ciò che apparisce anche dal fatto che la funzione $\mathfrak{h}$ si ottiene allora senza quadrature. Conviene quindi studiare la natura della dipendenza di w da x_3 e procedere come segue.

Considerando la (12) come un'equazione differenziale lineare in w ed imaginando di scrivere l'integrale generale, si vede che la funzione w si può presentare sotto la forma

$$w\,(z;\,x_3) = \eta\,(x_3) \left\{ \alpha\,(z) + \xi\,(x_3)\,\beta\,(z) \right\}.$$

La funzione $\xi\,(x_3)$ o è costante e allora si può assumere eguale a zero (conglobando la funzione β nella α) o è una vera funzione e allora la si può senz'altro assumere eguale ad x_3 (scegliendo opportunamente il parametro delle linee [3]).

La funzione w può quindi esser scritta sotto la forma

$$w = \eta\,(\alpha + x_3\,\beta), \tag{13}$$

il caso precedente essendo incluso per $\beta = 0$.

Esprimendo ora che w deve soddisfare alla (12), si deduce che α e β sono determinate dalle equazioni

$$\alpha' = 1 + \alpha\,\mathfrak{h}, \tag{14}$$

$$\beta' = \beta\,\mathfrak{h}. \tag{15}$$

Scelta ad arbitrio una delle tre funzioni α, β, $\mathfrak{h}$, le altre due restano ovviamente determinate a meno di una costante, per mezzo di quadrature evidenti.

In generale conviene scegliere ad arbitrio α (la quale evidentemente deve assumersi diversa da zero); la (14) fornisce allora il valore di $\mathfrak{h}$ e la (15) alla sua volta quello di β, qualora non si voglia assumere questa funzione eguale a zero.

Dato α e determinato $\mathfrak{h}$, si ponga

$$\int \mathfrak{h}\,(z)\,d\,z = u + i\,v. \tag{16}$$

Risulta allora

$$\beta = c\,e^{u+iv},$$

denotando con c una costante, in generale complessa, capace di assumere anche il valore zero (includendo così il caso $\beta = 0$).

Per la monogeneità della funzione $\mathfrak{h}$, dalla (16) si ha poi

$$\mathfrak{h}\,(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\,,$$

quindi, in virtù della seconda delle (11),

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,, \qquad \frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}\,,$$

cioè, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$h = u. \tag{17}$$

Conosciuti i valori di α e β, la (13) determina w. Ponendo allora

$$\int w\, d z = U + i\, V, \tag{18}$$

si ha, per la monogeneità della funzione w,

$$w = \frac{\partial U}{\partial x_1} - i \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

e quindi, per la prima delle (11),

$$W = U + \text{cost.} \tag{19}$$

La costante di integrazione, che comparisce nel secondo membro, può dipendere, in generale, anche da x_3. Noi la denoteremo in seguito con $\eta\, a$.

Determinati così h e W, restano completamente determinati tutti i $d s^2$ della classe A). Il nostro procedimento conferma l'affermazione fatta che si ha un $d s^2$, soddisfacente alle nostre condizioni ed appartenente alla classe A), in corrispondenza ad ogni funzione della variabile complessa $z = x_1 + i\, x_2$, scelta ad arbitrio.

4. Riassumiamo i nostri calcoli.

Indicando con $\mathfrak{R}$ la parte reale di una funzione di variabile complessa, le (16), (17), (18) e (19) si compendiano nelle due formule seguenti

$$\left.\begin{aligned} h &= \mathfrak{R}\left[\log \alpha - \int \frac{d z}{\alpha}\right], \\ W &= \eta\,(x_3) \left\{ \mathfrak{R} \int \alpha \left(1 + c\, x_3\, e^{-\int \frac{dz}{\alpha}}\right) d z + a \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

In queste formule α è una funzione arbitraria di z, diversa da zero.

Per compiere il minor numero possibile di integrazioni sarà opportuno scegliere ad arbitro invece che la funzione α un'altra funzione γ (diversa da una costante) definita dalla posizione

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma}.$$

Allora la prima delle (20) diventa

$$h = - \mathfrak{R} \log \gamma'$$

e quindi, per essere $\Re \log \gamma' = \log |\gamma'|$, le (20) stesse in definitiva diventano

$$\left.\begin{array}{c} e^{-h} = |\gamma'|, \\ W = \eta(x_3) \left\{ \Re \int \frac{1}{\gamma'} (\gamma + c\, x_3)\, d z + a \right\}. \end{array}\right\} \tag{21}$$

Per determinare quindi un $d s^2$ soddisfacente alle nostre condizioni ed appartenente alla classe *A*), si può seguire il seguente algoritmo: Si prenda ad arbitrio una funzione γ della variabile complessa $z = x_1 + i\, x_2$. Denotando con a una funzione reale di x_3 (in particolare una costante) e con c una costante (anche complessa), nulla o no a piacere, si costruiscano le due funzioni h e W mediante le (21). L'espressione

$$e^{2h} (d x_1^2 + d x_2^2) + W^2\, d x_3^2$$

esprime allora il quadrato dell'elemento lineare dello spazio cercato.

Il valore della curvatura ω viene determinato, a norma della (7) sotto la forma

$$\omega = \frac{\eta\, e^{2h}}{W}. \tag{22}$$

5. Vogliamo ora illustrare le formule ottenute nel n. precedente con due esempi, i quali conducono a tipi di $d s^2$ particolarmente semplici.

a) Si ponga $\gamma = z$. Poichè $\gamma' = 1$, risulta dalle (21)

$$e^{-h} = 1,$$

$$W = \eta \left\{ \Re \int (z + c\, x_3)\, d z + a \right\} = \eta \left\{ \Re \left(\frac{1}{2} z^2 + c\, x_3\, z \right) + a \right\},$$

e di conseguenza, ponendo $c = \frac{1}{2}(c_1 - i\, c_2)$, (con c_1 e c_2 reali),

$$e^h = 1 \;\text{ e }\; W = \frac{1}{2} \eta \left\{ (x_1^2 - x_2^2) + (c_1\, x_1 + c_2\, x_2)\, x_3 + a \right\}.$$

Ritenendo dunque W dato dall'ultima formula, si ha un $d s^2$ della classe *A*) sotto la forma

$$d s^2 = d x_1^2 + d x_2^2 + W^2\, d x_3^2.$$

Il reticolato isotermo formato dalle linee [1] e [2] risulta qui costituito dalle linee, che, nello spazio euclideo, diremmo senz'altro cartesiane ortogonali.

La curvatura ω a' norma della (22), ha il valore dato dalla formula

$$\omega = \frac{2}{x_1^2 - x_2^2 + (c_1 x_1 + c_2 x_2) x_3 + a}.$$

b) Si ponga $\gamma = e^z$. Per essere $\gamma' = e^z$, le (21) offrono

$$e^{-h} = | e^z | = e^{x_1},$$

$$W = \eta \left\{ \Re (z - c x_3 e^{-z}) + a \right\},$$

da cui, posto $c = c_1 e^{-ic_2}$ (con c_1 e c_2 reali),

$$e^h = e^{-x_1}, \quad W = \eta \left\{ x_1 - c_1 x_3 e^{-x_1} \cos (x_2 + c_2) + a \right\}.$$

Prendendo, in particolare, $c_1 = a = 0$ e scegliendo opportunamente il parametro delle linee [3], si ha il seguente semplicissimo $d s^2$

$$d s^2 = e^{-2x_1} (d x_1^2 + d x_2^2) + x_1^2 d x_3^2.$$

Il valore della curvatura ω, per quest'ultimo spazio, è

$$\omega = \frac{e^{2x_1}}{x_1}.$$

§ IV.

Determinazione dei ds^2 appartenenti alla classe B).

1. Veniamo ora alla discussione del caso B) in cui deve ritenersi $\frac{\partial h}{\partial x_3}$ diverso da zero.

Le equazioni da esaminare sono sempre le (5) e (6).

Dalle prime due delle (5) si deduce intanto, mediante una integrazione evidente,

$$\frac{1}{W}\frac{\partial h}{\partial x_3}=\zeta(x_3), \tag{23}$$

denotando con ζ una costante di integrazione, in generale funzione di x_3, essenzialmente diversa da zero per esserlo $\frac{\partial h}{\partial x_3}$.

In virtù della (23), la terza delle (5) può esser scritta come segue:

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}=\frac{\partial h}{\partial x_2}\,\frac{\partial h}{\partial x_1\,\partial x_3}+\frac{\partial h}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_3},$$

ossia anche

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial h}{\partial x_1}\,\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)=0.$$

Denotando con $-\Psi(x_1, x_2)$ una funzione dei soli argomenti x_1 e x_2, a priori qualunque, dall'ultima equazione scritta, integrando, si deduce

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial h}{\partial x_1}\,\frac{\partial h}{\partial x_2}=-\Psi(x_1,\ x_2). \tag{24}$$

Sempre in virtù della (23), con l'aiuto anche della (7), le prime due delle (6) diventano

$$\left.\begin{aligned}
&e^{-2h}\left\{\zeta\eta+\frac{\partial^3 h}{\partial x_3\,\partial x_2^2}+\frac{\partial h}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_3}-\frac{\partial h}{\partial x_2}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_3}\right\}+\zeta\zeta'+\zeta^2\frac{\partial h}{\partial x_3}=0,\\
&e^{-2h}\left\{-\zeta\eta+\frac{\partial^3 h}{\partial x_3\,\partial x_1^2}+\frac{\partial h}{\partial x_2}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_3}-\frac{\partial h}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_3}\right\}+\zeta\zeta'+\zeta^2\frac{\partial h}{\partial x_3}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

e la terza diviene invece

$$e^{-2h}\left\{\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}\right\}+\zeta^2=0, \tag{26}$$

avendo denotato con ζ' la derivata di ζ rispetto ad x_3.

L'equazione (26) esprime che *le superficie* $x_3 = cost.$, di elemento lineare $e^{2h}(d x_1^2 + d x_2^2)$, *sono a curvatura costante positiva ed eguale a* ζ^2 (in generale variabile da superficie a superficie).

Si ponga ora

$$\theta(x_3) = \int \zeta \eta \, d x_3 \tag{27}$$

e si noti esplicitamente che questa funzione $\theta(x_3)$ non può mai ridursi ad una costante per essere le funzioni ζ ed η essenzialmente diverse da zero. Si potrebbe allora assumere senz'altro $\theta(x_3)$ come parametro delle linee [3]. Lo sviluppo ulteriore dei calcoli ci consiglia però di lasciare a θ la sua completa arbitrarietà.

Le (25) si possono ora scrivere anche così

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{ 2\theta + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \zeta^2 e^{2h} \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{ -2\theta + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \zeta^2 e^{2h} \right\} = 0,$$

da cui integrando e denotando con $2\Phi_2(x_1, x_2)$, $2\Phi_1(x_1, x_2)$ le costanti di integrazione (in generale funzioni di x_1 e x_2)

$$\left.\begin{aligned} 2\theta + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \zeta^2 e^{2h} &= 2\Phi_2(x_1, x_2), \\ -2\theta + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \zeta^2 e^{2h} &= 2\Phi_1(x_1, x_2). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Sommando a membro a membro queste due equazioni si ottiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} + \zeta^2 e^{2h} = \Phi_1 + \Phi_2$$

e da qui, in virtù della (26),

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

Le due funzioni Φ_1 e Φ_2 a priori arbitrarie sono dunque eguali ed opposte. Denoteremo con Φ il valore di Φ_1 e quindi con $-\Phi$ quello di Φ_2.

Riassumendo ora i nostri calcoli, possiamo concludere che le equazioni (5) e (6) vanno sostituite con le (23), (24) e (28), (la (26) risultando superflua per essere una semplice conseguenza delle (28)).

Riunendo in un unico specchio tali equazioni e ripetendo anche la (7), abbiamo

$$\omega\, W = \eta\,(x_3)\, e^{-2h}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_3} = \zeta\,(x_3)\, W, \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\,\frac{\partial h}{\partial x_2} = -\,\Psi\,(x_1\, x_2),\\
&2\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \zeta^2\, e^{-2h} = 2\left\{\Phi\,(x_1,\, x_2) + \theta\,(x_3)\right\},\\
&2\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \zeta^2\, e^{-2h} = -\,2\left\{\Phi\,(x_1,\, x_2) + \theta\,(x_3)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Se dunque esistono $d\,s^2$ della classe *B*) essi devono esser determinati dalle equazioni (30) e (31). Notiamo subito che se le (31) sono atte a determinare h, la (30) fornisce la conoscenza di W, la (29) quella di (ω).

2. Si formino ora le condizioni di integrabilità delle (31). Si trovano facilmente le due equazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1},$$

quindi le funzioni Φ e Ψ, a priori arbitrarie, devono essere armoniche associate. Soddisfatta questa condizione il sistema (31) è completamente integrabile ed ammette, per teoremi generali ben noti, una sola soluzione dipendente da tre costanti arbitrarie (in generale funzioni di x_3).

Il sistema (31), unitamente alla (30), caratterizza quindi completamente tutti i $d\,s^2$ della classe *A*) e poichè vi compariscono le due funzioni armoniche associate Φ e Ψ, possiamo affermare, come nel caso *A*), che vi sono pure qui infiniti $d\,s^2$ soddisfacenti alle nostre condizioni, il grado di arbitrarietà essendo ancora quello di una funzione armonica di due variabili.

§ V.

Integrazione del sistema (31).

1. La integrazione del sistema (31) non si può ricondurre a quella di un'unica equazione differenziale, come è riuscito per il sistema (8), che caratterizzava tutti i ds^2 della classe A). Tuttavia, come ora mostreremo, una opportuna trasformazione complessa permette in certo modo di separare le variabili e di ottenere in seguito l'integrale generale del sistema (31).

Cominciamo col cambiare la funzione incognita, ponendo

$$\chi = e^{-h}. \tag{32}$$

Le ultime due equazioni del sistema (31) diventano

$$2\chi\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)^2 - \zeta^2 = -\,2\chi^2\left\{\theta + \Phi(x_1, x_2)\right\},$$

$$2\chi\frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)^2 - \zeta^2 = \;\;2\chi^2\left\{\theta + \Phi(x_1, x_2)\right\}.$$

A queste poi possiamo sostituire, qualora ciò convenga, la loro differenza e la loro somma. Tutto il sistema (31) si muta così nel sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1\,\partial x_2} = \chi\,\Psi(x_1, x_2), \\ &\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} = -\,2\chi\left\{\theta + \Phi(x_1, x_2)\right\}, \\ &\chi\left\{\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2}\right\} - \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)^2 = \zeta^2. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Poniamo ora

$$z = x_1 + i\,x_2, \qquad \bar{z} = x_1 - i\,x_2,$$

e trasformiamo le (33) nelle nuove variabili, complesse coniugate, z e $\bar{z}$.

Poichè è

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_1} = \frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}; \qquad \frac{\partial\chi}{\partial x_2} = i\left\{\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\chi}{\partial\bar{z}}\right\},$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial z\,\partial\bar{z}} + \frac{\partial^2\chi}{\partial\bar{z}^2},$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial z\,\partial\bar{z}} - \frac{\partial^2\chi}{\partial\bar{z}^2},$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1\,\partial x_2} = i\left\{\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial\bar{z}^2}\right\},$$

il sistema (33) assume l'aspetto seguente

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{z}^2} = -i\chi\Psi, \\
&\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{z}^2} = -\chi(\theta + \Phi), \\
&4\chi\frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \bar{z}} - 4\frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = \zeta^2,
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

le funzioni Φ e Ψ intendendosi naturalmente espresse per le variabili z e $\bar{z}$ e la θ (funzione di x_3) rimanendo una costante rispetto alle variabili medesime.

Sommando e sottraendo le prime due delle (34) si ottiene

$$2\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = -\chi\left\{\theta + \Phi + i\Psi\right\},$$

$$2\frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{z}^2} = -\chi\left\{\theta + \Phi - i\Psi\right\}.$$

Ricordando ora che Φ e Ψ sono funzioni armoniche associate delle (sole) variabili x_1 e x_2, risulta che $\Phi + i\Psi$ è una funzione della sola variabile complessa z e $\Phi - i\Psi$ la sua coniugata.

Posto

$$\Phi + i\Psi = F,$$

e quindi, denotando in generale con $\bar{\alpha}$ la coniugata di una funzione α,

$$\Phi - i\Psi = \bar{F},$$

il sistema (34) si può presentare sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(\theta + F)\chi = 0, \\
&\frac{\partial^2 \chi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{1}{2}(\theta + \bar{F})\chi = 0, \\
&4\chi\frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \bar{z}} - 4\frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = \zeta^2.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Si noti ora che la funzione χ dipende dalle due variabili complesse coniugate z e $\bar{z}$, ma che, in ogni modo, deve essere una funzione reale, ossia, ciò che è lo stesso, coincidere con la sua coniugata. Scambiando allora nella seconda delle (35) i in $-i$, tale equazione si muta nella precedente;

quindi ove si siano soddisfatte le equazioni prima e terza con una funzione *reale* χ, anche la seconda risulta automaticamente soddisfatta e si può così prescindere da essa.

Restano pertanto, per caratterizzare la funzione χ, le due sole equazioni

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(\theta + F)\chi = 0, \tag{36}$$

$$4\chi \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \bar{z}} - 4 \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = \zeta^2, \tag{37}$$

con la condizione qualitativa della realità di χ.

Da queste equazioni, dipendendo F dalla sola z, apparisce quella certa separazione di variabili alla quale più sopra abbiamo accennato.

2. Siano ora $Z(z;\, x_3)$ e $Z_1(z;\, x_3)$ due integrali particolari della (36). Denotando con $\bar{\gamma}$ e $\bar{\gamma}_1$ due costanti rispetto a z e quindi due funzioni di $\bar{z}$ (e di x_3), l'integrale generale della stessa equazione è notoriamente

$$\chi = \bar{\gamma} Z + \bar{\gamma}_1 Z_1 .$$

Scambiando in questa i in $-i$, ricordando che χ rimane invariato, si ottiene

$$\chi = \gamma \bar{Z} + \gamma_1 \bar{Z}_1 , \tag{38}$$

avendo denotato con γ e γ_1 le complesse coniugate di $\bar{\gamma}$ e $\bar{\gamma}_1$, che risultano per tal modo funzioni di z.

Questa espressione di χ deve naturalmente soddisfare ancora alla (36) e ciò esige evidentemente che vi soddisfino separatamente γ e γ_1.

Denotando quindi con c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} quattro costanti arbitrarie, in generale funzioni di x_3, sarà

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= c_{11} Z + c_{12} Z_1 , \\ \gamma_1 &= c_{21} Z + c_{22} Z_1 , \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

e la (38) dà così per χ l'espressione

$$\chi = c_{11} Z\bar{Z} + c_{12} Z\bar{Z}_1 + c_{21} \bar{Z} Z_1 + c_{22} Z_1 \bar{Z}_1 . \tag{40}$$

Scambiando ancora una volta i in $-i$, poichè i fattori $Z\bar{Z}$ e $Z_1\bar{Z}_1$ sono reali e $Z Z_1$, $\bar{Z} Z_1$ sono complessi coniugati, risulta che per la realità di χ è *necessario che le costanti* c_{11} *e* c_{22} *siano reali e* c_{12}, c_{21} *complesse coniugate.*

Per caratterizzare completamente la χ non rimane ora da esprimere che essa deve verificare anche la (37).

Assumendo per χ l'espressione (38), la (37) diventa

$$4(\gamma\gamma'_1 - \gamma'\gamma_1)(\bar{Z}\bar{Z}'_1 - \bar{Z}'\bar{Z}_1) = \zeta^2,$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\begin{vmatrix} \gamma & \gamma_1 \\ \gamma' & \gamma'_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{Z} & \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}' & \bar{Z}'_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\zeta^2, \tag{41}$$

gli accenti avendo il manifesto significato di derivazioni rispetto a z per le funzioni di z e rispetto a $\bar{z}$ per le funzioni di $\bar{z}$.

Ora nei due fattori che stanno a primo membro della (4) si riconoscono i wronskiani formati con le γ e $\bar{Z}$, che indicheremo con W_γ e $W_{\bar{z}}$ rispettivamente.

Ma dalle (39) scende subito che

$$W_\gamma = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} W_z,$$

quindi la (41) diventa

$$4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \,.\, W_z \,.\, W_{\bar{z}} = \zeta^2.$$

Essendo ora Z e Z_1 due integrali dell'equazione lineare di secondo ordine (36), pel teorema di Liouville sui wronskiani delle equazioni differenziali lineari (*), segue che

$$W_z = W_0, \tag{42}$$

denotando con W_0 una costante, che però si può sempre far in modo da esser eguale all'unità. Risultando allora anche $W_{\bar{z}} = 1$, la (42) dà in definitiva

$$4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = \zeta^2. \tag{43}$$

Questo risultato conferma, sotto un certo aspetto, l'esattezza dei nostri calcoli. Infatti la (43) è una semplice relazione fra le 4 costanti c_{11}, c_{12},

(*) Per le equazioni differenziali di ordine n

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

il teorema di Liouville sui wronskiani è espresso dall'equazione

$$W = W_0 \, e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx}, \quad (W_0 \text{ costante}),$$

la quale, se $p_1 = 0$, come avviene nel caso del testo, dà in particolare $W = W_0$.

Cfr., p. es., E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique* [Paris, Gauthier-Villars, II Édit.], Tom. II, p. 419.

c_{21}, c_{22} e ciò esprime che tre solamente sono indipendenti tra loro, ossia, che l'integrale generale del sistema (36), (37) dipende da tre sole costanti arbitrarie (funzioni di x_3), in armonia con teoremi generali ben noti, come del resto più sopra abbiamo richiamato.

La (40), unitamente alla (43), dà l'integrale generale del sistema (36), (37).

Per mantenersi nel campo reale bisogna però avere un'ulteriore avvertenza. Il primo membro della (43) risulta senz'altro reale, dovendo assumersi, come abbiamo detto, c_{11}, c_{22} reali e c_{12}, c_{21} complesse coniugate. Ma tale primo membro deve pure risultare positivo, quindi bisogna scegliere le costanti c_{rs} in modo che sia

$$c_{11}\, c_{22} > c_{12}\, c_{21}\,,$$

il caso dell'eguaglianza essendo escluso, perchè porterebbe alla condizione $\zeta = 0$, ciò che, come sappiamo, non può avvenire.

In particolare si deduce che c_{11}, c_{22} devono assumersi diverse da zero, mentre possono porsi eguali a zero o c_{12}, o c_{21}, o tutte e due.

Osservazione. La espressione di χ fornita dalla (40) dipende dalla conoscenza di due integrali particolari della (36). È noto però che basta conoscerne uno, per ottenerne, mediante una quadratura, anche un secondo. D'altra parte si noti che nella (36) comparisce la funzione F, la quale è completamente arbitraria, cosicchè sembra che alla scelta di F si possa sostituire quella di un integrale particolare Z della equazione medesima. Senonchè vi è nel far ciò una restrizione non lieve. Infatti la funzione F deve dipendere dalla sola z e θ deve dipendere da x_3 senza mai ridursi ad una costante od, in particolare, a zero. Quindi la scelta di $Z(z;\, x_3)$ è subordinata al fatto che il quoziente

$$\frac{1}{Z}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

risulti eguale ad una effettiva funzione della sola x_3, più una funzione della sola z (quest'ultima potendosi però ridurre ad una costante od anche a zero). Come si possa soddisfare a questa condizione, nulla si può dire a priori e converrà quindi, nella risoluzione del nostro problema, attenersi alla via diretta, cioè alla scelta preventiva della funzione F (*).

(*) Il Picard [*Traité d'Analyse*, Paris, Gauthier-Willars, 1908, II Edit., Tom. III, Cap. V e VI] ha stabilito alcuni teoremi intorno agli integrali delle equazioni differenziali lineari contenenti un parametro arbitrario, ma, salvo uno studio approfondito, con tali teoremi non viene risoluta la questione posta nel testo.

3. Riassumendo tutte le nostre operazioni, possiamo anche qui stabilire il seguente algoritmo per la costruzione di un $d s^2$ appartenente alla classe B).

Si scelgano ad arbitrio due funzioni F e θ, l'una del solo argomento $z = x_1 + i x_2$ e la seconda della sola x_3 e si determinino due integrali particolari Z e Z_1 dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(\theta + F)\chi = 0, \tag{44}$$

tali che il loro wronskiano risulti eguale ad 1.

Denotando con c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} quattro funzioni qualunque di x_3, legate fra loro dalla relazione

$$4(c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) = \zeta^2, \tag{45}$$

(con ζ funzione pure qualunque di x_3), si costruisca la funzione

$$\chi = c_{11} Z \overline{Z} + c_{12} Z \overline{Z}_1 + c_{21} \overline{Z} Z_1 + c_{22} Z_1 \overline{Z}_1 . \tag{46}$$

Si ponga in seguito [v. formule (30) e (32)]

$$W = -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \log \chi}{\partial x_3} . \tag{47}$$

Il quadrato dell'elemento lineare di uno spazio appartenente alla categoria B) è allora della forma

$$\frac{1}{\chi^2}(d x_1^2 + d x_2^2) + W^2 d x_3^2 ,$$

la curvatura ω risultando espressa dalla formula [v. le (29) e (32)],

$$\omega = \frac{\eta \chi^2}{W} . \tag{48}$$

η denota una funzione della sola x_3, legata a θ e ζ dalla relazione

$$\theta = \int \zeta \eta \, d x_3 . \tag{49}$$

4. Vogliamo ora illustrare le nostre formule con un esempio, come abbiamo fatto nel caso A).

Si assuma $F = C$, essendo C una costante in generale complessa e si ponga per brevità

$$a^2 = -2(\theta + C). \tag{50}$$

L'equazione (44) prende la forma

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{a^2}{4}\chi = 0,$$

la quale, poichè a non dipende da z, ammette i due integrali particolari

$$Z = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{\frac{1}{2} a z} \quad \text{e} \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{1}{2} a z},$$

avendo ad ambedue premesso il fattore $\frac{1}{\sqrt{a}}$ affinchè il loro wronskiano risulti eguale a 1.

Dalla (46) si ricava per χ l'espressione

$$\left.\begin{aligned}\chi = \frac{1}{|a|}\Big\{ & c_{11}\, e^{\frac{1}{2} a z}\, e^{\frac{1}{2} \bar{a} \bar{z}} + c_{12}\, e^{\frac{1}{2} a z}\, e^{-\frac{1}{2} \bar{a} \bar{z}} + \\ & + c_{21}\, e^{\frac{1}{2} \bar{a} \bar{z}}\, e^{-\frac{1}{2} a z} + c_{22}\, e^{-\frac{1}{2} a z}\, e^{-\frac{1}{2} \bar{a} \bar{z}} \Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Si ponga ora

$$a = a_1 + i\, a_2$$

e, ricordando che c_{11} e c_{22} devono essere reali e c_{12}, c_{21} complesse coniugate,

$$c_{11} = \frac{1}{2}\, |a|\, m\, e^{b_1}; \qquad c_{22} = \frac{1}{2}\, |a|\, m\, e^{-b_1};$$

$$c_{12} = \frac{1}{2}\, |a|\, n\, e^{i b_2}; \qquad c_{21} = \frac{1}{2}\, |a|\, n\, e^{-i b_2};$$

con a_1, a_2, b_1, b_2, m, n reali.

La (51) diventa allora

$$\chi = m \cosh(a_1 x_1 - a_2 x_2 + b_1) + n \cos(a_2 x_1 + a_1 x_2 + b_2), \tag{52}$$

alla quale dobbiamo aggiungere la (45), che qui assume l'aspetto

$$|a|^2 (m^2 - n^2) = \zeta^2. \tag{53}$$

Ottenuto così il valore di χ, si potrebbero ottenere quelli di W ed ω dalle (47) e (48) rispettivamente e di conseguenza il $d s^2$ dello spazio corrispondente.

Per particolarizzare ancora le nostre formule, si scelga $n = b_1 = a_2 = 0$ (e quindi $a = a_1$) ed $m = 1$.

Si noti ora che dovendo essere θ una effettiva funzione di x_3, lo dovrà pur essere a in virtù della (50). Sarà quindi possibile scegliere il parametro delle linee [3], in modo che risulti

$$a = a_1 = x_3 .$$

Con tutto ciò la (52) dà

$$\chi = \cosh (x_1 x_3)$$

e la (53)

$$\zeta = x_3 .$$

Di conseguenza dalla (47) si ha

$$W = -\frac{x_1}{x_3} \frac{\sinh (x_1 x_3)}{\cosh (x_1 x_3)} .$$

Si ottiene perciò un $d s^2$ della forma

$$\frac{d x_1^2 + d x_2^2 + \frac{x_1^2}{x_3^2} \sinh^2 (x_1 x_3)\, d x_3^2}{\cosh^2 (x_1 x_3)} .$$

Per calcolare la curvatura ω, si noti prima di tutto che per la (50) si ha

$$x_3^2 = -2(\theta + C) ,$$

da cui derivando rispetto ad x_3 e ricordando [form. (49)] che $\theta' = \zeta \eta = x_3 \eta$, risulta

$$\eta = -1 .$$

Per la (48) si ha quindi

$$\omega = \frac{x_3}{x_1} \frac{\cosh^3 (x_1 x_3)}{\sinh (x_1 x_3)} .$$

§ VI.

Incompatibilità delle nostre condizioni con la teoria di relatività.

Abbiamo accennato nella Prefazione all'origine che ebbe questo nostro lavoro ed abbiamo affermato che i nostri spazi S_3 non possono essere einsteiniani, ossia che non esiste alcuna distribuzione statica di masse che — secondo la teoria di relatività — faccia atteggiare lo spazio ambiente in modo che una curvatura riemanniana risulti nulla e le altre due eguali ed opposte.

Ora passiamo alla dimostrazione del nostro asserto, nel modo più breve possibile.

A tal uopo ci sarà sufficiente richiamare le seguenti equazioni stabilite dal Levi-Civita (*)

$$\frac{d\,\omega_k}{d\,l_i} + (\omega_i - \omega_k)\,\gamma_{kik} + \frac{d\,\nu}{d\,l_i}(\omega_k - \omega_j) = 0, \tag{54}$$

che sono condizioni di integrabilità delle equazioni gravitazionali di Einstein.

In queste equazioni i, j, k sono tre indici distinti; le γ_{ikh} sono i coefficienti di rotazione di Ricci; $d\,l_i$ l'elemento d'arco della linea i; e ν risulta definito dalla posizione $V = V_0\,e^{\nu}$ (V velocità della luce, V_0 costante). Le equazioni stesse si intendono riferite alla terna principale di curvatura.

Se le congruenze principali sono normali, le γ a tre indici distinti sono nulle e le altre si riducono allo schema γ_{ikk}. Queste alla lor volta, se il $d\,s^2$ è ridotto alla forma normale

$$H_1^2\,d\,x_1^2 + H_2^2\,d\,x_2^2 + H_3^2\,d\,x_3^2,$$

si possono esprimere mediante le H sotto la forma

$$\gamma_{ikk} = \frac{1}{H_k}\,\frac{d\,H_k}{d\,l_i}.$$

Aggiungiamo ora le ipotesi caratterizzanti i $d\,s^2$ normali, che abbiamo

(*) Cfr. T. Levi-Civita, loc. cit., Nota II[a], p. 9.

studiato nella presente Memoria e cioè

$$\omega_1 = -\omega_2 = \omega, \quad \omega_3 = 0,$$

ciò che conduce, come abbiamo visto, ad un $d s^2$ del tipo

$$d s^2 = H^2 (d x_1^2 + d x_2^2) + W^2 d x_3^2. \tag{55}$$

Facciamo ora nelle (54) successivamente

$$\begin{array}{lll} k = 3, & i = 1, 2, & j = 2, 1, \\ j = 3, & k = 2, 1, & i = 1, 2, \\ i = 3, & j = 1, 2, & k = 2, 1. \end{array}$$

Se si introducono le condizioni precedenti, con referenza al $d s^2$ dato dalla (55) e si sostituisce contemporaneamente a $d l_i$ il suo valore $H_i d x_i$, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \nu}{\partial x_i} - \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0, \\ &\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{2\omega}{H} \frac{\partial H}{\partial x_i} + \omega \frac{\partial \nu}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2) \\ &\frac{\partial \omega}{\partial x_3} + \frac{\omega}{H} \frac{\partial H}{\partial x_3} + 2\omega \frac{\partial \nu}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}$$

da cui con integrazioni evidenti

$$\begin{aligned} e^{\nu} &= \xi_1 (x_3)\, W, \\ \omega\, e^{\nu} H^2 &= \xi_2 (x_3), \\ \omega\, e^{2\nu} H &= \mathfrak{H} (x_1\, x_2), \end{aligned}$$

denotando ξ_1 e ξ_2 due funzioni della sola x_3 ed $\mathfrak{H}$ una funzione di x_1, x_2 solamente.

Dividendo ora il prodotto delle due prime equazioni per la terza e disponendo del parametro x_3 in modo che risulti $\xi_1 \xi_2 = 1$, si ottiene

$$\frac{H}{W} = \mathfrak{H} (x_1\, x_2)$$

e da ciò segue che il ds^2 fornito dalla (55) si può mettere sotto la forma

$$W^2 \left\{ d\sigma^2 + dx_3^2 \right\}, \tag{56}$$

con $d\sigma^2$ *binario,* dipendente cioè soltanto da x_1 e x_2.

Ora il Levi-Civita ha dimostrato (*) che quando l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di uno spazio einsteiniano si può presentare sotto la forma (56), le due curvature ω_1 ed ω_2 sono necessariamente eguali tra loro. Ciò è naturalmente incompatibile con la condizione che sia $\omega_1 = -\omega_2$, amenochè il loro valore comune non sia lo zero. Questa ipotesi per noi condurrebbe alla linearità degli spazi S_3, quindi resta provato che non esistono ds^2 einsteiniani appartenenti ai tipi studiati in questo lavoro (**).

Padova, Gennaio 1920.

(*) Cfr. T. Levi-Civita, loc. cit., Nota IV, p. 229.

(**) La dimostrazione, contenuta in quest'ultimo paragrafo, della incompatibilità delle condizioni $\omega_1 = -\omega_2$, $\omega_3 = 0$ con la teoria di relatività si riferisce ai ds^2 einsteiniani *normali,* perchè a tali ds^2 solamente era limitata la mia ricerca.

Dopo terminata la presente Memoria, mi sono preoccupato di vedere se eventualmente esistessero ds^2 einsteiniani *anormali* soddisfacenti alla solita condizione. Ancor qui la risposta è negativa. Lo si potrà constatare partendo nuovamente dalle equazioni (54) del testo e dalle

$$(\omega_{i+1} - \omega_i)\gamma_{i+1\,i\,i+2} = (\omega_{i+2} - \omega_i)\gamma_{i+2\,i\,i+1}$$

[form. (12), p. 8, Nota II di Levi-Civita, l. c. a pag. 192].

Da tali condizioni in particolare si ricava

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\nu}{dl_1} = \gamma_{133}, \qquad \frac{d\nu}{dl_2} = \gamma_{233}, \\ \gamma_{311} = \gamma_{322}; \qquad 2\gamma_{123} = \gamma_{321} = \gamma_{132}. \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Dalle equazioni gravitazionali [form. (II*), pag. 12, loco sopra citato] per $i = k = 1$, $i = k = 2$, si ha di conseguenza

$$\omega + \frac{d\gamma_{133}}{dl_1} + \gamma_{133}^2 + \gamma_{211}\gamma_{233} + \gamma_{311}\frac{d\nu}{dl_3} = 0,$$

$$-\omega + \frac{d\gamma_{233}}{dl_2} + \gamma_{233}^2 + \gamma_{122}\gamma_{133} + \gamma_{311}\frac{d\nu}{dl_3} = 0,$$

da cui sottraendo a membro a membro

$$2\omega + \frac{d\gamma_{133}}{d\,l_1} - \frac{d\gamma_{233}}{d\,l_2} + \gamma_{133}^2 - \gamma_{233}^2 + \gamma_{211}\gamma_{233} - \gamma_{122}\gamma_{133} = 0. \qquad (\beta)$$

D'altra parte, dalle $\gamma_{hi,kl}$ a quattro indici [cfr. RICCI e LEVI-CIVITA, ***Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications***, Mathematische Annalen, B. 54, 1901, pag. 157] per $h = k = 3$ e $i = l = 2$; $h = k = 1$ e $i = l = 3$, si ha, con le semplificazioni portate dalle (α),

$$\omega + \frac{d\gamma_{311}}{d\,l_3} + \frac{d\gamma_{233}}{d\,l_2} + \gamma_{311}^2 + \gamma_{233}^2 + \gamma_{122}\gamma_{133} - 4\gamma_{123}^2 = 0,$$

$$-\omega + \frac{d\gamma_{311}}{d\,l_3} + \frac{d\gamma_{133}}{d\,l_1} + \gamma_{311}^2 + \gamma_{133}^2 + \gamma_{211}\gamma_{233} - 4\gamma_{123}^2 = 0.$$

Da qui, per differenza, si ha

$$2\omega + \frac{d\gamma_{233}}{d\,l_2} - \frac{d\gamma_{133}}{d\,l_1} + \gamma_{233}^2 - \gamma_{133}^2 + \gamma_{122}\gamma_{133} - \gamma_{211}\gamma_{233} = 0.$$

Il confronto di quest'ultima equazione con la (β) porge senz'altro $\omega = 0$, ciò che implica l'euclidicità dello spazio S_3.

Sulla riduzione dei problemi di geodesia ellissoidica alla sfera.

(*Di* A. Bette, *a Voghera*).

§ 1.°

Espongo in questa Nota un metodo da me seguìto nella risoluzione del problema di Gauss sulla rappresentazione conforme dell'ellissoide di rotazione sulla sfera.

Supposto di volere rappresentare sulla sfera una parte della superficie ellissoidica, stabiliamo il complesso delle conformità in modo che ad un sistema di meridiani e di paralleli dell'ellissoide corrisponda sulla sfera un sistema di meridiani e di paralleli: il modulo di riduzione lineare sarà in tal caso, adoprando le consuete notazioni

$$n = \frac{c\, R \cos \Phi}{r} \cdot$$

Consideriamo l'arco $A\,B$ di una geodetica g dell'ellissoide, e siano φ_0, ω_0 la latitudine e la longitudine del punto A; ad esso corrisponde sulla sfera l'arco $A_1\,B_1$ di una linea g' che non coinciderà in generale con un arco di cerchio massimo; imponiamo la condizione che la curvatura geodetica h' della g' sia una quantità piccola del secondo ordine. Allora, indicando con: $d\,s_1$ la lunghezza dell'elemento lineare di g', $\delta\,\alpha$ l'incremento che riceve l'azimut su questa linea, $d\,\alpha$ l'incremento che esso riceve sul cerchio massimo tangente alla g' nel punto A_1, avremo:

$$h' = -\frac{\delta \alpha}{d\,s_1} + \frac{d\,\alpha}{d\,s_1} \cdot \tag{1}$$

L'equazione di Gauss per le geodetiche ci dà nel nostro caso

$$\frac{d\,\alpha}{d\,s_1} = \frac{\sin \Phi \sin \alpha}{R \cos \Phi}$$

ed indicando con $d\,s$ la lunghezza dell'elemento lineare della geodetica g potremo porre:

$$\frac{\delta\,\alpha}{d\,s_1} = \frac{\delta\,\alpha}{d\,s} \cdot \frac{d\,s}{d\,s_1}$$

per cui l'espressione di h' diventa:

$$h' = \frac{\sin \alpha}{R \cos \Phi} \left(\sin \Phi - \frac{\sin \varphi}{c} \right). \tag{2}$$

Per le condizioni imposte ad h' dovranno essere soddisfatte le due relazioni:

$$(h')_{\varphi=\varphi_0} = 0 \qquad \left(\frac{d\,h'}{d\,\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0\,;$$

dalla (2) deduciamo:

$$c \sin \Phi_0 - \sin \varphi_0 = 0 \tag{3}$$

ed ancora:

$$\frac{d\,h'}{d\,\varphi} = \frac{\sin \alpha}{R \cos \Phi} \left(\cos \Phi \frac{d\,\Phi}{d\,\varphi} - \frac{\cos \varphi}{c} \right) + \left(\sin \Phi - \frac{\sin \varphi}{c} \right) \frac{d}{d\,\varphi} \left(\frac{\sin \alpha}{R \cos \Phi} \right).$$

Osserviamo che si ha:

$$\frac{d\,\Phi}{d\,\varphi} = \frac{d\,\Phi}{d\,V}\,\frac{d\,V}{d\,v}\,\frac{d\,v}{d\,\varphi} = \frac{c\,\rho}{r} \cos \Phi$$

e quindi

$$\left(\frac{d\,h'}{d\,\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = \frac{\sin \alpha_0}{R \cos \Phi_0} \left(c \frac{\rho_0}{r_0} \cos^2 \Phi_0 - \frac{\cos \varphi_0}{c} \right) = 0$$

da cui

$$c^2 \cos^2 \Phi_0 \frac{\rho_0}{r_0} - \cos \varphi_0 = 0. \tag{4}$$

Se supponiamo che r_0 sia il raggio del parallelo normale (per cui è $n = 1$) avremo:

$$c\,R \cos \Phi_0 = r_0$$

e sostituendo nella (4) il valore di $c^2 \cos^2 \Phi_0$ ricavato da questa relazione,

$$R^2 = \frac{r_0}{\cos \varphi_0}\,\rho_0\,.$$

Poniamo per r_0 e ρ_0 i noti valori in funzione di φ_0

$$r_0 = \frac{a \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \qquad \rho_0 = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}} \tag{5}$$

(dove a è il semiasse maggiore dell'ellissoide, e l'eccentricità), ricaviamo l'espressione di R

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi_0}. \tag{6}$$

Per il calcolo della costante c, dalla (3) ricaviamo:

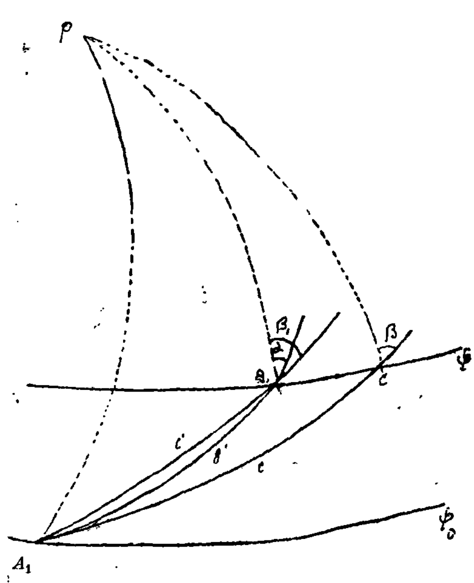
$$\cos^2\Phi_0 = \frac{c^2-\sin^2\varphi_0}{c^2};$$

sostituendo questo valore nella relazione $c^2\cos^2\Phi_0 = \frac{r_0^2}{R^2}$ e ponendo per R ed r_0 i valori dati dalle (5) e (6) otteniamo:

$$c = \sqrt{1+\frac{e^2\cos^4\varphi_0}{1-e^2}}. \tag{7}$$

§ 2.º

Stabilito in questo modo il complesso delle conformità, risolviamo il problema nel caso particolare di un arco di geodetica dell'ellissoide avente un estremo sul parallelo normale.



Sia $\varphi = \varphi_0$ il parallelo normale e sia $A_1 B_1$ l'arco di linea g' che corrisponde sulla sfera all'arco $A\,B$ di geodetica. Consideriamo il cerchio massimo c tangente in A_1 alla g' e sia C il punto in cui esso interseca il parallelo passante per B_1. Indichiamo con: α_0 l'azimut in A_1, α l'azimut in B_1, β l'azimut in C; calcoliamo la differenza di azimut $\beta-\alpha$ e la differenza delle longitudini in B_1 e C.

Il teorema di Clairaut ci dà rispettivamente per l'ellissoide e per la sfera:

$$\left.\begin{aligned} r \sin \alpha &= r_0 \sin \alpha_0 \\ R \cos \Phi \sin \beta &= R \cos \Phi_0 \sin \alpha_0 . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ricordando l'espressione del modulo di riduzione lineare, e tenuto conto che per $\varphi = \varphi_0$ è $n = 1$ si avrà dalle (1)

$$n \sin \beta = \sin \alpha. \tag{2}$$

Possiamo subito vedere che, se il punto B è poco discosto dal parallelo normale, la n differisce di poco dall'unità. Infatti posto $\varphi = \varphi_0 + \delta$ avremo:

$$n = n_0 + \delta \left(\frac{d\,n}{d\,\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{d^2 n}{d\,\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_0} + \frac{\delta^3}{6} \left(\frac{d^3 n}{d\,\varphi^3}\right)_{\varphi=\varphi_0} + \cdots \tag{3}$$

La relazione che lega le curvature geodetiche delle g e g' ci dà:

$$-\frac{1}{n^2} \frac{d\,n}{d\,\varphi} \frac{\sin \alpha}{\rho} = \frac{\sin \alpha}{R \cos \Phi} \left(\sin \Phi - \frac{\sin \varphi}{c}\right)$$

ovvero:

$$\frac{1}{n} \frac{d\,n}{d\,\varphi} = \frac{\rho}{r} (\sin \varphi - c \sin \Phi). \tag{4}$$

Derivando rispetto a φ questa relazione si ottiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n^2} \left(\frac{d\,n}{d\,\varphi}\right)^2 + \frac{1}{n} \frac{d^2 n}{d\,\varphi^2} &= (\sin \varphi - c \sin \Phi) \frac{d}{d\,\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right) + \\ &+ \frac{\rho}{r} \left(\cos \varphi - c \cos \Phi \frac{d\,\Phi}{d\,\varphi}\right) = (\sin \varphi - c \sin \Phi) \frac{d}{d\,\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right) + \\ &+ \frac{\rho}{r} \left(\cos \varphi - \frac{n^2\, r\, \rho}{R^2}\right) \end{aligned}$$

e derivando ancora:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{n^3} \left(\frac{d\,n}{d\,\varphi}\right)^3 - \frac{3}{n^2} \frac{d\,n}{d\,\varphi} \frac{d^2 n}{d\,\varphi^2} + \frac{1}{n} \frac{d^3 n}{d\,\varphi^3} = \\ &\quad = (\sin \varphi - c \sin \Phi) \frac{d^2}{d\,\varphi^2} \left(\frac{\rho}{r}\right) + 2 \left(\cos \varphi - \frac{n^2\, r\, \rho}{R^2}\right) \frac{d}{d\,\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right) - \\ &\quad - \frac{\rho}{r} \left[\sin \varphi + \frac{2\, n\, r\, \rho}{R^2} \frac{d\,n}{d\,\varphi} + \frac{n^2}{R^2} \frac{d}{d\,\varphi} (r\, \rho)\right] \end{aligned}$$

ma per $\varphi = \varphi_0$ si ha:

$$n_0 = 1 \qquad \left(\frac{d\,n}{d\,\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0 \qquad \left(\frac{d^2\,n}{d\,\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

$$(h')_{\varphi=\varphi_0} = 0 \qquad \left(\frac{d\,h'}{d\,\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

e quindi si ottiene:

$$\left(\frac{d^3\,n}{d\,\varphi^3}\right)_{\varphi=\varphi_0} = -\frac{\rho_0}{r_0}\left[\sin\varphi_0 - \frac{\rho_0^2 \sin\varphi_0}{R^2} + \frac{r_0}{R^2}\left(\frac{d\,\rho}{d\,\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0}\right].$$

Sostituiamo ad r_0, ρ_0 ed R i valori già dati in funzione di φ_0; l'espressione fra parentesi diviene:

$$\sin\varphi_0 - \frac{\rho_0^2 \sin\varphi_0}{R^2} + \frac{r_0}{R^2}\left(\frac{d\,\rho}{d\,\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = \sin\varphi_0 - \frac{(1-e^2)\sin\varphi_0}{1-e^2\sin^2\varphi_0} + \frac{3\,e^2\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0}{1-e^2\sin^2\varphi_0} =$$

$$= \frac{4\,e^2\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0}{1-e^2\sin^2\varphi_0}$$

e quindi:

$$\left(\frac{d^3\,n}{d\,\varphi^3}\right)_{\varphi=\varphi_0} = -\frac{4\,e^2\,(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}.$$

Sostituendo questa espressione nella (3) avremo, a meno di termini in $(\varphi-\varphi_0)^4$

$$n = 1 - \frac{e^2\,(1-e^2)\sin 2\,\varphi_0}{3\,(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}\,(\varphi-\varphi_0)^3. \tag{5}$$

La (2) potrà allora porsi sotto la forma

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1 - k\,\delta^3$$

essendo

$$k = \frac{e^2\,(1-e^2)\sin 2\,\varphi_0}{3\,(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}.$$

Ponendo allora $\beta = \alpha + x$, e sviluppando in serie

$$\sin\beta = \sin\alpha + x\cos\alpha + \cdots$$

da cui, a meno di termini in δ^4

$$x = k\,\mathrm{tang}\,\alpha\;\delta^3$$

ovvero:

$$x = \frac{e^2(1-e^2)\sin 2\varphi_0 \operatorname{tang}\alpha}{3(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}(\varphi-\varphi_0)^3.$$

Con la stessa approssimazione possiamo porre $\operatorname{tang}\alpha_0$ in luogo di $\operatorname{tang}\alpha$ e notando che $\varphi - \varphi_0 = \frac{s\cos\alpha_0}{\rho_0}$, sarà:

$$x = \frac{s^3 e^2(1-e^2)\sin 2\varphi_0 \operatorname{tang}\alpha_0}{3(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}\,\frac{\cos^3\alpha_0}{\rho_0^3}$$

ed a meno di termini in e^4

$$x = \beta - \alpha = \frac{s^3 e^2 \sin 2\varphi_0 \sin 2\alpha_0 \cos\alpha_0}{6a^3}. \tag{6}$$

Indichiamo con Ω ed Ω' le longitudini rispettivamente di B_1 e di C. Avremo:

$$\frac{d\Omega}{d\Phi} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\Phi} \qquad \frac{d\Omega'}{d\Phi'} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\cos\Phi}$$

e

$$\frac{d(\Omega-\Omega')}{d\Phi} = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{\cos\Phi}$$

dalla $\beta = \alpha + x$ deduciamo

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha + x\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

e quindi

$$\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha = k\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\delta^3.$$

D'altra parte poi

$$\frac{d(\Omega-\Omega')}{d\varphi} = \frac{d(\Omega'-\Omega')}{d\Phi}\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{\rho n}{R}\,\frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{\cos\Phi} =$$

$$= -\frac{\rho n}{R}k\frac{\sin\alpha}{\cos\Phi\cos^5\alpha}\delta^3 + \cdots = -k\frac{\rho n \sin\alpha}{R\cos\Phi\cos^3\alpha}(\varphi-\varphi_0)^3$$

ed integrando:

$$\Omega - \Omega' = -k\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\rho n\sin\alpha}{R\cos\Phi\cos^3\alpha}(\varphi-\varphi_0)^3\,d\varphi + \cdots$$

Possiamo considerare $\frac{\rho\, n \sin \alpha}{R \cos \Phi \cos^3 \alpha}$ come una funzione $F(\varphi)$ di φ ed allora

$$\Omega - \Omega' = -k\, F(\varphi_m)\, \frac{(\varphi - \varphi_0)^4}{4}$$

e colla stessa approssimazione

$$\Omega - \Omega' = -k\, F(\varphi_0)\, \frac{(\varphi - \varphi_0)^4}{4}$$

ovvero:

$$\Omega - \Omega' = -\frac{e^2 (1 - e^2) \sin 2\varphi_0}{12 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^2} \cdot \frac{\rho_0 \sin \alpha_0}{R \cos \Phi_0 \cos^3 \alpha_0} (\varphi - \varphi_0)^4 \tag{7}$$

sostituendo a ρ_0 ed R i valori dati dalle (5) e (6) del § 1.° e trascurando i termini in e^4 si ha:

$$\Omega - \Omega' = -\frac{e^2 \sin \varphi_0 \sin \alpha_0}{6 \cos^3 \alpha_0} (\varphi - \varphi_0)^4$$

e con la stessa appossimazione, ricordando che: $\varphi - \varphi_0 = \frac{s \cos \alpha_0}{\rho_0}$ potremo porre:

$$\Omega - \Omega' = -\frac{s^4 e^2 \sin \varphi_0 \sin 2\alpha_0}{12 a^4}\,. \tag{8}$$

§ 3.°

Congiungiamo ora i punti $A_1 B_1$ con un arco di cerchio massimo c'; cerchiamo la differenza di lunghezza degli archi di g' e c' compresi fra i punti $A_1 B_1$ e gli angoli che in questi due punti fanno fra loro le due linee.

Sia P il polo dell'equatore (v. figura a pag. 223) e consideriamo i triangoli sferici $P A_1 C$, $P A_1 B_1$. Del primo conosciamo due lati, $P A_1 = 90^\circ - \Phi_0$, $P C = 90^\circ - \Phi$ e l'angolo compreso $A_1 P C = \Omega'$. Potremo quindi determinare l'angolo $P C A_1 = 180^\circ - \beta$ e l'arco $A_1 C = \sigma$. Facciamo subìre all'angolo in P la variazione $\Omega' - \Omega$ e calcoliamo le variazioni che subiscono gli elementi del triangolo $P A_1 C$; cioè le differenze fra gli elementi di questo triangolo e quelli del triangolo $P A_1 B_1$.

Le formule differenziali di trigonometria sferica ci dànno, essendo $PB_1 = PC$:

$$\left.\begin{aligned}\delta c &= R\cos\Phi_0 \sin\alpha_0 (\Omega' - \Omega)\\ \delta\alpha &= \frac{\cos\beta\sin\alpha_0}{\sin\Omega'}(\Omega' - \Omega)\\ \delta\beta &= -\frac{\sin\beta\cos\alpha_0}{\sin\Omega'}(\Omega' - \Omega)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ed introducendo per $\Omega' - \Omega$ l'espressione trovata nel paragrafo precedente:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma &= R\,\frac{e^2\sin\varphi_0\cos\Phi_0\sin^2\alpha_0}{6\cos^3\alpha_0}(\varphi-\varphi_0)^4\\ \alpha_1 - \alpha &= \frac{e^2\sin\varphi_0\cos\beta\sin^2\alpha_0}{6\sin\Omega'\cos^3\alpha_0}(\varphi-\varphi_0)^4\\ \beta_1 - \beta &= -\frac{e^2\sin\varphi_0\sin\beta\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{6\cos^3\alpha_0\sin\Omega'}(\varphi-\varphi_0)^4\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dove α_1 e β_1 sono gli azimut della linea c' nei punti A_1, B_1, e σ_1 è l'arco di c' compreso fra gli stessi punti.

Con la stessa approssimazione possiamo sostituire $\sin\alpha_0$, $\cos\alpha_0$ a $\sin\beta$, $\cos\beta$, ponendo $\varphi - \varphi_0 = \frac{s\cos\alpha_0}{\rho_0}$ e trascurando i termini in e^4, le (2) diventano

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma &= R\,\frac{s^4 e^2\sin\varphi_0\cos\Phi_0\sin^2\alpha_0\cos\alpha_0}{6a^4}\\ \alpha_1 - \alpha_0 &= \frac{s^4 e^2\sin\varphi_0\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0}{6a^4\sin\Omega'}\\ \beta_1 - \beta &= -\frac{s^4 e^2\sin\varphi_0\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0}{6a^4\sin\Omega'}\,.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ma per il triangolo PA_1C abbiamo: $\dfrac{\sin\frac{1}{R}}{\sin\Omega'} = \dfrac{\cos\Phi}{\sin\alpha_0}$ e quindi:

$$\frac{s\sin\alpha_0}{\sin\Omega'} = R\cos\Phi + T_1$$

per cui la 2ª e la 3ª delle (3) diventano:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_0 &= \frac{s^3 e^2 \sin \varphi_0 \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0}{6 a^4} R \cos \Phi\\ \beta_1 - \beta &= -\frac{s^3 e^2 \sin \varphi_0 \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0}{6 a^4} R \cos \Phi.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Con la stessa approssimazione potremo porre $\cos \Phi_0$ in luogo di $\cos \Phi$ e ricordando che $R \cos \Phi_0 = \frac{r_0}{c}$ avremo, trascurando i termini in e^4:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_0 &= \frac{s^3 e^2 \sin 2 \varphi_0 \sin 2 \alpha_0 \cos \alpha_0}{24 a^3}\\ \beta_1 - \beta &= -\frac{s^3 e^2 \sin 2 \varphi_0 \sin 2 \alpha_0 \cos \alpha_0}{24 a^3}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

La prima delle (5) ci dà l'angolo che le linee c', g' fanno in A_1; l'angolo che queste due linee fanno in B_1 è dato dalla somma

$$\beta_1 - \alpha = (\beta_1 - \beta) + (\beta - \alpha) = \frac{s^2 e^2 \sin 2 \varphi_0 \sin 2 \alpha_0 \cos \alpha_0}{8 a^3} \tag{6}$$

Per trovare la differenza $s_1 - \sigma_1$ fra le lunghezze degli archi di g' e c' consideriamo le due relazioni

$$d s_1 = R \frac{d \Phi}{\cos \alpha} \qquad d \sigma_1 = R \frac{d \Phi}{\cos \beta_1};$$

da esse si ricava:

$$d (s_1 - \sigma_1) = R \, d \Phi \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \beta_1} \right). \tag{7}$$

Poniamo $\beta_1 - \alpha = \varepsilon$, avremo:

$$\frac{1}{\cos \beta_1} = \frac{1}{\cos \alpha} - \varepsilon \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

e sostituendo nella (7)

$$d (s_1 - \sigma_1) = R \varepsilon \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - d \Phi;$$

ma d'altra parte

$$\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha_0} = \frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} + (\Phi - \Phi_0)\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)_0 + \cdots$$

e quindi, a meno di termini di ordine superiore al primo potremo scrivere:

$$d(s_1 - \sigma_1) = R\,\varepsilon\,\frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}\,d\Phi$$

ed integrando

$$s_1 - \sigma_1 = R\frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\varepsilon\,d\Phi. \tag{8}$$

Ma dalla (6)

$$\varepsilon = \frac{s^3 e^2 \sin 2\varphi_0 \sin 2\alpha_0 \cos\alpha_0}{8a^3},$$

e quindi, ricordando che

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{s\cos\alpha_0}{\rho_0}$$

sarà

$$\varepsilon = \frac{e^2 \sin 2\varphi_0 \sin 2\alpha_0}{8\cos^2\alpha_0}(\varphi - \varphi_0)^3$$

e sostituendo nella (8)

$$s_1 - \sigma_1 = \frac{R e^2 \sin 2\varphi_0 \sin^2\alpha_0}{4\cos^3\alpha_0}\int_{\varphi_0}^{\varphi}(\varphi - \varphi_0)^3\frac{d\Phi}{d\varphi}\,d\varphi:$$

ma $\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{n\rho}{R}$; a meno di termini di ordine superiore al primo potremo porre $\frac{\rho_0}{R}$ in luogo di $\frac{n\rho}{R}$; eseguendo la sostituzione ed integrando, avremo:

$$s_1 - \sigma_1 = \frac{e^2 \sin 2\varphi_0 \sin^2\alpha_0\,\rho_0}{16\cos^3\alpha_0}(\varphi - \varphi_0)^4.$$

Sostituendo ancora a $\varphi - \varphi_0$, $\frac{s\cos\alpha_0}{\rho_0}$ e trascurando i termini in e^4 si ha:

$$s_1 - \sigma_1 = \frac{s^4 e^2 \sin 2\varphi_0 \sin 2\alpha_0 \cos\alpha_0}{8a^3}. \tag{9}$$

§ 4.°

Consideriamo ora il caso di una geodetica qualunque g dell'ellissoide e la linea g' che ad essa corrisponde sulla sfera in una rappresentazione conforme.

Indicando con h' la curvatura geodetica della g' abbiamo:

$$h' = - \frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial s'} = \frac{1}{n^2} \frac{d n}{d \varphi} \frac{\sin \alpha}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{d n}{d \Phi} \cdot \frac{\sin \alpha}{R} \tag{1}$$

dove s' è una direzione normale alla g'.

Eseguiamo sulla sfera un cambiamento di coordinate, assumendo come equatore il cerchio massimo che congiunge gli estremi $A_1 B_1$ della g'. Poniamo l'origine delle coordinate in A_1, prendiamo la latitudine positiva dalla parte in cui si trova il polo Nord, ed indichiamo con $\Phi' \Omega'$ le nuove coordinate. Siano, ϑ l'angolo che la g' forma con i nuovi meridiani ed S l'arco di questa linea; avremo:

$$\frac{d \vartheta}{d S} = \frac{\sin \Phi' \sin \vartheta}{R \cos \Phi'} + h. \tag{2}$$

Sviluppiamo in serie, lungo c', la latitudine, assumendo come variabile la longitudine, avremo:

$$0 = \Omega' \left(\frac{d \Phi'}{d \Omega'}\right)_0 + \frac{\Omega'^2}{2} \left(\frac{d^2 \Phi'}{d \Omega'^2}\right)_0 + \frac{\Omega'^3}{6} \left(\frac{d^3 \Phi'}{d \Omega'^3}\right)_0 + \cdots, \tag{3}$$

Calcoliamo i coefficienti di questo sviluppo:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d \Phi'}{d \Omega'} = \operatorname{cotg} \vartheta \cos \Phi' \qquad \frac{d \Omega'}{d S} = \frac{\sin \vartheta}{R \cos \Phi'} \\ &\frac{d^2 \Phi'}{d \Omega'^2} = - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cos \Phi' \frac{d \vartheta}{d \Omega'} - \operatorname{cotg} \vartheta \sin \Phi' \frac{d \Phi'}{d \Omega'}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ma

$$\frac{d \vartheta}{d \Omega'} = \frac{d \vartheta}{d S} \cdot \frac{d S}{d \Omega'} = \sin \Phi' + h R \frac{\cos \Phi'}{\sin \vartheta}$$

e quindi

$$\frac{d^2\,\Phi'}{d\,\Omega'^2} = -\frac{\cos\Phi'}{\sin^2\vartheta}\left(\sin\Phi' + \frac{h\,R\cos\Phi'}{\sin\vartheta} - \cos^2\vartheta\sin\Phi'\right). \tag{5}$$

Prendiamo il valore di queste dèrivate nel punto A_1; in tal punto è $\Phi' = 0$, $\vartheta_1 = 90^0 - \psi_1$ dove ψ_1 è una quantità del terzo ordine come appare dal suo valore (formula (6) § 3.°).

Potremo porre quindi ψ_1 in luogo di $\operatorname{tang}\psi_1$.

Fuori del punto A_1 la Φ' è del quarto ordine; infatti

$$\Phi' = \Omega'\left(\frac{d\,\Phi'}{d\,\Omega'}\right)_0 + \cdots \quad \text{ma} \quad \left(\frac{d\,\Phi'}{d\,\Omega'}\right)_0 = \operatorname{tang}\psi_1$$

quindi, a meno di quantità del primo ordine potremo porre $\left(\frac{d\,\Phi'}{d\,\Omega'}\right)_0 = \psi_1$ ed in conseguenza $\Phi' = \Omega'\psi_1$ è del 4.° ordine.

La h' è del 2.° ordine; infatti, in prossimità del parallelo normale abbiamo

$$n = 1 + (\Delta\,\varphi)^3\,H$$

e dalle (1) si vede che in tal caso h è dell'ordine di $\frac{d\,n}{d\,\varphi}$ cioè del 2.°. Ancora, $\cos\Phi'$ differisce dall'unità di quantità dell'8.° ordine; e $\sin\vartheta = \cos\psi$ ne differisce di quantità del 6.° ordine.

Avremo allora

$$\left(\frac{d^2\,\Phi'}{d\,\Omega'^2}\right)_0 = -h'R + T_{18}. \tag{6}$$

Calcoliamo $\left(\frac{d^3\,\Phi'}{d\,\Omega'^3}\right)_0$. Dovendo prendere il valore di questa derivata nel punto A_1 in cui è $\Phi' = 0$ potremo tralasciare nel calcolo tutti i termini che derivati dànno $\sin\Phi'$. Allora

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^3\,\Phi'}{d\,\Omega'^3}\right)_0 &= \left(\frac{2}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\cos\Phi'\frac{d\,\vartheta}{d\,\Omega'}\cdot h'\,R\,\frac{\cos\Phi'}{\sin\vartheta}\right)_0 - \\ &- \left\{\frac{1}{\sin^2\vartheta}\cos\Phi'\left[\cos\Phi'\frac{d\,\Phi'}{d\,\Omega'} - \frac{h'R}{\sin^2\vartheta}\cdot\sin\vartheta\cos\Phi'\frac{d\,\vartheta}{d\,\Omega'} + \frac{R\cos\Phi'}{\sin\vartheta}\,\frac{d\,h'}{d\,\Phi'}\right]\right\}_0 - \\ &- \left(\operatorname{cotg}^2\vartheta\cos^2\Phi'\frac{d\,\Phi'}{d\,\Omega'}\right)_0 = -R\left(\frac{d\,h'}{d\,\Omega'}\right)_0 + T_{17}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Sostituendo nella (3) abbiamo:

$$0 = \Omega' \psi_1 - \frac{\Omega'^2}{2} h'_1 R - \frac{\Omega'^3}{6} R \left(\frac{d h'}{d \Omega'}\right)_0 + \cdots$$

cioè anche

$$\psi_1 = \frac{R \Omega'}{6} \left[3 h'_1 + \Omega' \left(\frac{d h'}{d \Omega'}\right)_0\right]. \tag{8}$$

Se supponiamo di sviluppare anche h' in serie di potenze di Ω', avremo, indicando con h'_2 la curvatura geodetica della g' nel punto B_1:

$$h'_2 = h'_1 + \Omega' \left(\frac{d h'}{d \Omega'}\right)_0 + \cdots$$

e quindi la (8) diventa

$$\psi_1 = \frac{R \Omega'}{6} (2 h'_1 + h'_2). \tag{9}$$

Il valore di ψ per il punto B_1 si calcola subito, invertendo le funzioni dei punti A e B, ciò che porta che i due angoli ψ_1 e ψ_2 sono eguali e di segno contrario e del 3.° ordine.

Calcoliamo la lunghezza dell'arco S della g'.

Abbiamo:

$$\frac{d S}{d \Omega'} = \frac{R \cos \Phi'}{\sin \vartheta}$$

da cui:

$$S = R \int_0^{\Omega'} \frac{\cos \Phi'}{\sin \vartheta} \cdot d \Omega'.$$

Abbiamo visto che lungo tutto l'arco di g' la Φ' è del 4.° ordine, per cui $\cos \Phi'$ differisce dall'unità di quantità dell'8.° ordine; d'altra parte $\sin \vartheta$ differisce dall'unità di quantità del 6.° ordine; potremo dire dunque, eseguendo l'integrazione per serie

$$S = R \Omega' + T_7 .$$

Possiamo paragonare ancora l'arco S della g' con l'arco s della g. Abbiamo:

$$S = n_1 s + \frac{s^2}{2} \left(\frac{d n}{d s}\right) + \cdots \tag{10}$$

essendo n_1 il valore del modulo di riduzione lineare nel punto A_1, ma d'altra parte, indicando con n_2 il modulo di riduzione lineare nel punto B_1 si ha

$$n_2 = n_1 + s \left(\frac{d\,n}{d\,s}\right)_0 + \cdots$$

ed ancora

$$\sqrt{n_1\,n_2} = n_1 \sqrt{1 + \frac{s}{n_1}\left(\frac{d\,n}{d\,s}\right)_0 + \cdots} = n_1 + \frac{s}{2}\left(\frac{d\,n}{d\,s}\right)_0 + \cdots$$

e quindi, sostituendo nella 10, avremo

$$S = s\sqrt{n_1\,n_2}$$

ovvero

$$s = \frac{S}{\sqrt{n_1\,n_2}}\,. \tag{11}$$

Voghera, Maggio 1919.

Sulla dipendenza lineare delle funzioni di una variabile reale.

(*Di* ONORATO NICOLETTI, *a Pisa.*)

1. Siano n funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$ (reali o complesse) di una variabile reale x, le quali in un intervallo I (finito od infinito) abbiano le derivate determinate e finite, fino all'ordine $n-1$ almeno.

Come è noto, le funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$ si dicono *linearmente dipendenti o legate linearmente nell'intervallo* I, quando è possibile determinare n costanti (reali o complesse) $c_1, c_2, \dots, c_n$, non tutte nulle, per le quali si ha, per ogni valore finito della x nell'intervallo I, la relazione identica:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0; \tag{1}$$

quando questo non sia possibile, le $u_1, u_2, \dots, u_n$ si dicono invece *linearmente indipendenti* nell'intervallo I.

Le $u_1, u_2, \dots, u_n$ siano legate linearmente nell'intervallo I; e si abbiano tra esse p relazioni lineari omogenee *indipendenti:*

$$c_{1\alpha} u_1 + c_{2\alpha} u_2 + \cdots + c_{n\alpha} u_n = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, p), \qquad (1)'$$

tali cioè che la matrice

$$|c_{rs}| \qquad (r = 1, 2, \dots, n;\ s = 1, 2, \dots, p) \tag{2}$$

abbia la caratteristica p. Dalle (1) derivando si ha

$$c_{1\alpha} u_1^{(t)} + c_{2\alpha} u_2^{(t)} + \cdots + c_{n\alpha} u_n^{(t)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p;\ t = 1, 2, \dots, n-1) \tag{3}$$

e quindi ciascuna matrice

$$M_\lambda(u) \equiv \left| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(\lambda)} & u_2^{(\lambda)} & \dots & u_n^{(\lambda)} \end{matrix} \right|, \qquad (\lambda = 0, 1, \dots, n-1) \tag{4}$$

o, come scriveremo brevemente,

$$M_\lambda(u) \equiv |u_i^{(t)}|, \qquad (i=1, 2, \ldots, n; \ t=0, 1, \ldots, \lambda) \tag{4'}$$

avrà, in ogni punto di I, una caratteristica non maggiore di $n-p$.

In particolare, per $p \geq 1$, $\lambda = n-1$, si ha, che se le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono legate linearmente nell'intervallo I il loro Wronskiano

$$W(u_1 u_2 \ldots u_n) = |u_i^{(t)}|, \qquad (i=1, 2, \ldots, n; \ t=0, 1, \ldots, n-1)$$

è identicamente nullo in I.

2. *a*) Questo teorema, in varî buoni trattati di analisi infinitesimale, è parzialmente invertito nel modo seguente:

Se il Wronskiano $W(u_1 u_2 \ldots u_n)$ è identicamente nullo nell'intervallo I, ed in ogni punto di I la matrice $M_{n-2}(u)$ ha la caratteristica $n-1$, le u_1, $u_2, \ldots, u_n$ sono legate, nell'intervallo I, da una ed una sola relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, non tutti nulli.

E la dimostrazione di questo teorema è, sostanzialmente, dovuta al Peano ed al Vivanti (*).

b) Si dimostra anche subito, ed in modo noto, che:

Se nell'intervallo I la matrice M_μ è nulla, ma vi è un minore della matrice $M_{\mu-1}$, che si mantiene diverso da zero in tutto l'intervallo I, le u_1, $u_2, \ldots, u_n$ sono legate in I da $n-\mu$ (e non oltre) relazioni indipendenti.

c) Un corollario notevole di questo teorema è il seguente:

Siano le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *analitiche* nell'intervallo I ed in questo la matrice $M_{\mu-1}$ non sia identicamente nulla, ma lo sia la M_μ (con $\mu \leq n-1$); e sia x_0 un punto di I nel quale un minore di $M_{\mu-1}$, ad es. $W(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)$, sia diverso da zero; per la continuità, si manterrà tale in un intorno K, sufficientemente piccolo, di x_0. Nell'intorno K le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono allora legate da $n-\mu$ (e non oltre) relazioni lineari indipendenti

$$C_\alpha(u) = c_{\alpha 1} u_1 + c_{\alpha 2} u_2 + \cdots + c_{\alpha n} u_n = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-\mu).$$

Ma, colle u, anche le $C_\alpha(u)$ sono analitiche nell'intervallo I, e poichè sono nulle nell'intorno K del punto x_0, sono nulle identicamente in tutto l'intervallo I. Abbiamo dunque:

(*) Cfr. *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (Serie V, Tomo VI (1° semestre 1897; pagg. 413-415) e Tomo VII (1° semestre, 1898; pagg. 194-197).

Condizione necessaria e sufficiente perchè n funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ di una variabile reale x, definite in un intervallo I ed analitiche in questo intervallo, siano legate da $n - \mu$, e non oltre, relazioni indipendenti, è che la matrice $M_\mu(u)$ sia identicamente nulla in I, ma (per $\mu \geq 1$) non lo sia la $M_{\mu-1}(u)$.

In particolare ne segue:

Condizione necessaria e sufficiente perchè n funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ della variabile reale x, analitiche in un intervallo I, siano in questo legate linearmente, è che il loro Wronskiano sia nullo.

Ed è anche chiaro che:

Le caratteristiche delle successive matrici $M_\lambda(u)$, ($\lambda = 0, 1, \ldots$) vanno continuamente aumentando fino ad un massimo, minore od uguale ad $n - 1$.

Si ha così un teorema che il BIANCHI (*) ha dimostrato (come corollario di uno più generale) nelle sue lezioni sulla teoria dei gruppi continui di trasformazioni, traendolo dalla teoria dei sistemi di equazioni lineari colle derivate parziali.

3. La questione dell'indipendenza lineare di più funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$, di una variabile reale x, *non analitiche*, fu poi ripresa dal BOCHER (**) e dal CURTISS (***); ma i loro ragionamenti ed i loro risultati non sono semplici; ritengo quindi opportuno riprendere ancora la questione da un punto di vista elementare, e che conduce a risultati notevoli.

Premettiamo perciò alcune osservazioni.

a) Sia una funzione $f(x)$ di una variabile reale x, definita in un intorno di un punto x_0, e la $f(x)$ abbia in x_0 le prime n derivate determinate e finite; sia inoltre $f(x_0) = f'(x_0) \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Per h sufficientemente piccolo in valore assoluto si ha allora:

$$f(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} \left\{ f^{(n)}(x_0) + \varepsilon_n \right\}$$

dove ε_n è nullo o è infinitesimo con h. Ne segue, che si può determinare un intorno sufficientemente piccolo di x_0, nel quale, tranne nel punto x_0, $f(x)$ è sempre diversa da zero.

(*) Cfr. BIANCHI, *Lezioni sui gruppi continui di trasformazioni.* (Pisa, Spoerri 1918, pagg. 30 e seg.).

(**) *Transactions of the Math. Am. Society,* Vol. 2°, 1901, pagg. 139-149.

(***) *Mathematische Annalen,* Bd. 65, pag. 282.

Se quindi una funzione $f(x)$, definita in un intervallo I, si annulla in un gruppo *infinito* G di punti, di cui sia x_0 un punto limite ed ha in x_0 le derivate 1^a, $2^a, \ldots, r^{ma}$, determinate e finite, queste derivate sono tutte nulle nel punto x_0.

b) Siano n funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ della x definite in un intervallo I ed in questo finite e continue colle loro derivate fino ad un certo ordine $n+l-1$, con $l>0$ (*). Il loro Wronskiano

$$W(u_1 u_2 \ldots u_n) = | u_i^{(t)} |, \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ t=0, 1, \ldots, n-1)$$

ha allora in I le derivate fino all'ordine l; e per s qualunque, $\leq l$, si ha la formula:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^s W}{d x^s} &= \sum_{t_1 \ldots t_n} A_{t_1 t_2 \ldots t_n} \begin{vmatrix} u_1^{(t_1)} & u_2^{(t_1)} & \ldots & u_n^{(t_1)} \\ u_1^{(t_2)} & u_2^{(t_2)} & \ldots & u_n^{(t_2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(t_n)} & u_2^{(t_n)} & \ldots & u_n^{(t_n)} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{t_1 t_2 \ldots t_n} A_{t_1 t_2 \ldots t_n} | u_i^{(\varrho)} |, \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dove la somma è estesa a tutte le soluzioni in numeri interi, positivi e nulli, dell'equazione

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n-1)}{2} + s \tag{6}$$

per le quali è anche

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \tag{6'}$$

e le $A_{t_1 t_2 \ldots t_n}$ sono numeri interi *positivi* determinati.

Il teorema è vero per $s=1$; ammettiamo quindi il teorema per un valore $s<l$ e dimostriamolo per $s+1$.

Derivando perciò la (5) abbiamo:

$$\frac{d^{s+1} W}{d x^{s+1}} = \sum A_{t_1 t_2 \ldots t_n} \frac{d}{dx} | u_i^{(\varrho)} |;$$

ed è chiaro che ogni derivata $\frac{d}{dx} | u_i^{(\varrho)} |$ è uguale ad una somma di n de-

(*) In un estremo di I (quando esista) le u e le loro derivate potranno esistere ed essere continue solo a destra (o a sinistra).

terminanti, di cui quelli che non sono nulli hanno ancora la forma superiore cambiatovi s in $s+1$; poichè inoltre ogni soluzione della $(6)_{s+1}$ può ottenersi, in uno o più modi, da una soluzione della $(6)_s$, aumentando una t di una unità, ne segue la nostra asserzione.

c) Le $u_i\,(i=1, 2,\ldots, n)$ abbiano ora in un punto x_0 di I le derivate determinate e finite fino ad un certo ordine k; e poniamo:

$$\left(\frac{d^t u_i}{d x^t}\right)_{x=x_0} = v_i^{(t)};$$

diremo *caratteristica del sistema delle funzioni* $u_1, u_2,\ldots, u_n$ *nel punto* x_0 la caratteristica μ della matrice

$$| v_i^{(t)} |, \quad (i=1, 2,\ldots, n; \quad t=0, 1,\ldots, k);$$

è chiaramente

$$\mu \leq n, \quad \mu \leq k+1.$$

Il sistema (u) abbia in x_0 la caratteristica $\mu > 0$; e sia $\rho_1 \geq 0$ il minimo intero, per il quale una almeno delle $v_i^{(\rho_1)}$ non è nulla; cioè la matrice

$$| v_i^{(t)} |, \quad (i=1, 2,\ldots, n, \quad t=0, 1,\ldots, \rho_1)$$

abbia la caratteristica 1, ma (se $\rho_1 > 0$) la precedente

$$| v_i^{(t)} |, \quad (i=1, 2,\ldots, n, \quad t=0, 1,\ldots, \rho_1 - 1)$$

abbia la caratteristica zero. Cambiando al più il nome delle u, potremo supporre $v_1^{(\rho_1)} \neq 0$.

Sia poi $\rho_2 \geq \rho_1 + 1$ il minimo intèro, per il quale la matrice

$$| v_i^{(t)} |, \quad (i=1, 2,\ldots, n; \quad t=0, 1,\ldots, \rho_2)$$

ha la caratteristica 2 (la precedente

$$| v_i^{(t)} |, \quad (i=1, 2,\ldots, n; \quad t=0, 1,\ldots, \rho_2 - 1)$$

avrà quindi la caratteristica 1) e supponiamo che sia

$$H_{\rho_1\rho_2} = \begin{vmatrix} v_1^{(\rho_1)} & v_2^{(\rho_1)} \\ v_1^{(\rho_2)} & v_2^{(\rho_2)} \end{vmatrix} \neq 0;$$

e così seguitiamo; per $\lambda \leq \mu$, sia $\rho_\lambda \geq \rho_{\lambda-1} + 1$ il minimo intero, per il quale la matrice

$$| v_i^{(t)} |, \quad (i=1, 2,\ldots, n; \quad t=0, 1,\ldots, \rho_\lambda)$$

ha la caratteristica λ e sia il minore

$$H_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_\lambda} = | v_i^{(\rho_i)} | =|= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda_1).$$

Diremo che il sistema (u) ha nel punto x_0 il *carattere* $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu)$ (e sarà $\rho_\mu \leqq k$); e quando sia $\rho_t = t - 1$, per $t = 1, 2, \ldots, \lambda$, diremo che il punto x_0 è ***regolare per il sistema*** (u) ***sino all'ordine*** λ.

d) Nel punto x_0 il sistema (u) abbia il carattere $(\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_\mu)$, con $\mu > 0$; e, detto λ un intero $\leqq \mu$, consideriamo la matrice

$$K_{t_1 t_2, \ldots, t_\lambda} = | v_i^{(t_r)} |, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad r = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

dove le t_r sono interi arbitrarî crescenti, $t_1 < t_2 <, \ldots, < t_\lambda \leqq k$. Se non è $t_1 \geqq \rho_1$, $t_2 \geqq \rho_2, \ldots, t_\lambda \geqq \rho_\lambda$ la matrice $K_{t_1 \ldots t_\lambda}$ ha una caratteristica minore di λ.

Questo è evidente se $t_1 < \rho_1$; se è poi $t_1 \geqq \rho_1$, ma $t_2 < \rho_2$, la matrice delle due prime righe di $K_{t_1 t_2 \ldots t_\lambda}$ ha la caratteristica 1; analogamente, se $t_h < \rho_h$ la matrice $K_{t_1 t_2 \ldots t_h}$ ha caratteristica $h - 1$ (con $h \leqq \lambda$).

In particolare una t_h sarà minore nella ρ_h corrispondente, quando sia $\sum_1^\lambda{}_\alpha t_\alpha < \sum_1^\lambda{}_\alpha \rho_\alpha$; in questo caso dunque ogni minore di ordine λ di $K_{t_1 t_2 \ldots t_\lambda}$ è nullo.

Sia invece $\sum_1^\lambda t_\alpha = \sum_1^\lambda \rho_\alpha$; la matrice $K_{t_1 t_2 \ldots, t_\lambda}$ non sarà nulla, allora ed allora soltanto che sia $t_\alpha = \rho_\alpha$; in questo caso il primo minore $H_{\rho_1 \ldots \rho_\lambda}$ di ordine λ di $K_{\rho_1 \ldots \rho_\lambda}$ è diverso da zero.

e) Consideriamo ora, con $\lambda \leqq \mu$, il Wronskiano delle $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$

$$W(u_1 \ldots u_\lambda) = | u_i^{(t)} |, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda, \quad t = 0, 1, \ldots, \lambda - 1);$$

può determinarsi un intorno finito del punto x_0 (al quale x_0 è interno, se è interno ad I), nel quale il Wronskiano $W(u_1 u_2 \ldots u_\lambda)$ ***si mantiene sempre diverso da zero*** (tranne al più nel punto x_0).

Questo è chiaro, per la continuità delle $u_i^{(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda, t < \lambda)$ nel punto x_0, quando questo sia regolare per il sistema (u) fino all'ordine λ; è infatti allora $[W(u_1 \ldots u_\lambda)]_{x_0} =|= 0$; nel caso che il punto x_0 non sia regolare per il sistema (u) sino all'ordine λ, basterà dimostrare (per *a*)) che esiste una derivata di $W(u_1 u_2 \ldots u_\lambda)$ che non è nulla nel punto x_0. È questa la derivata di ordine h, con

$$h = \sum_1^\lambda \rho_\alpha - \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2};$$

infatti per la (5) (in cui sia fatto $n = \lambda$) e per d) si ha che $W(u_1 \ldots u_\lambda)$ e tutte le sue derivate di ordine minore di h sono nulle nel punto x_0; per la derivata di ordine h un solo termine non è nullo, quello che ha il minore $H_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_\lambda}$; è quindi

$$\left| \frac{d^h W(u_1 \ldots u_\lambda)}{d x^h} \right|_{x_0} = A_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_\lambda} \quad H_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_\lambda},$$

donde, poichè le $A_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_\lambda}$ sono tutte *positive*, segue la nostra asserzione. Abbiamo così il teorema:

Se il sistema (u) *ha in un punto* x_0 *una caratteristica* $\mu > 0$, *può determinarsi un intorno del punto* x_0, *tale che in esso il sistema* (u) *ha* sempre *una caratteristica* $\geqq \mu$; *si ha inoltre il caso regolare fino all'ordine* μ *almeno* (il punto x_0 al più escluso).

Notiamo esplicitamente che queste considerazioni valgono anche quando ci si limiti a considerare le derivate delle u da una parte di x_0, ad es. a destra; naturalmente l'intorno di cui al teorema sarà a destra di x_0.

f) Per la legge dei contrarî si ha:

Se x_0 *è punto limite di un gruppo* G *di punti* (*di* I) *nel quale la caratteristica del sistema* (u) *è minore di un numero* $\bar{\mu}$, *anche in* x_0 *il sistema* (u) *avrà una caratteristica* $< \bar{\mu}$; in particolare: *se in un intorno di* x_0 (*questo escluso*) *le* u *hanno caratteristica* $< \mu$ *e presentano il caso regolare, nel punto* x_0 *la caratteristica delle* (u), qualunque sia k, *sarà minore di* μ.

4. Sia ora I_1 un intervallo contenuto in I; ed in *tutti i punti di* I_1, gli estremi inclusi, quando I_1 li abbia, le u_i abbiano derivate determinate e finite fino all'ordine k, ed il sistema (u) abbia la caratteristica μ; diremo che il sistema (u) ha in I_1 la caratteristica μ.

Per $\mu = n$ le u sono indipendenti in I; *supponiamo dunque* $\mu < n$ *ed insieme* $\mu < k + 1$.

Abbiamo il teorema:

Nell'intervallo I_1 *le* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *sono legate da* $n - \mu$ (*e non oltre*) *relazioni lineari omogenee indipendenti, a coefficienti costanti, non tutti nulli.*

Quando l'intervallo I_1 sia infinito, queste relazioni varranno per tutti i punti a distanza finita dell'intervallo I_1.

a) Se $\mu = 0$, il teorema è evidente; sia dunque $\mu > 0$, e consideriamo un intervallo I', finito, qualunque, contenuto in I_1; la matrice $M_{\mu-1}(u)$ può avere caratteristica minore di μ solo in un numero finito di punti di I' (gli estremi inclusi); cioè solo in un numero finito di punti di I', le (u) possono non presentare il caso regolare.

Se è possibile, la matrice $M_{\mu-1}(u)$ abbia caratteristica minore di μ in un gruppo infinito G di I', e sia x_0 un punto limite di G; x_0 apparterrà ad I' ed in esso, per il n.° 3, e) il sistema u avrebbe una caratteristica minore di μ, contro l'ipotesi.

b) Consideriamo ora i punti di I', nei quali la matrice $M_{\mu-1}(u)$ ha una caratteristica minore di μ: questi dividono l'intervallo I' in un numero finito d'intervalli $L_1, L_2, \dots, L_r$; nell'interno di ciascuno di questi intervalli il sistema (u) ha la caratteristica μ e presenta il caso regolare.

Siano x_{h-1}, x_h gli estremi dell'intervallo L_h; per il n.° 3, e) potremo determinare un intorno a destra di x_{h-1} $(x_{h-1}, x_{h-1}+\delta_{h-1})$ ed uno a sinistra di x_h $(x_h - \delta'_h, x_h)$ tale che in ciascuno di essi vi sia almeno un minore di $M_{\mu-1}(u)$ di ordine μ, il quale si mantenga diverso da zero in tutto l'intorno (escluso il punto x_{h-1} ed il punto x_h); nell'intorno residuo $K_h \equiv (x_{h-1}+\delta_{h-1}, x_h - \delta'_h)$, gli estremi inclusi, la matrice $M_{\mu-1}(u)$ ha la caratteristica μ. Diciamo ora M^2 il quadrato per righe della matrice $M_{\mu-1}(u)$, quando le $u_1, u_2, \dots, u_n$ siano reali; quando siano complesse, diciamo M^2 il prodotto per righe della $M_{\mu-1}(u)$ per la coniugata $\overline{M}_{\mu-1}(\overline{u})$; M^2 sarà una funzione *continua e positiva* in K_h, avrà quindi un minimo positivo, che indichiamo con $\binom{n}{\mu}\sigma_\mu^2$, dove σ_μ è un numero positivo determinato. In ogni punto di K_h vi sarà un minore almeno di ordine μ della $M_{\mu-1}(u)$ il quale sarà numericamente maggiore di σ_μ (e quindi diverso da zero); e poichè i minori di $M_{\mu-1}$ sono funzioni della x *uniformemente* continue in K_h, è possibile determinare un numero positivo ε, tale che in ogni intervallo di ampiezza non maggiore di ε contenuto in K_h vi sia un minore (almeno) di ordine μ di $M_{\mu-1}(u)$, che nell'intervallo sia ad es. numericamente maggiore di $\frac{1}{2}\sigma_\mu$, e quindi diverso da zero.

Dividiamo allora ciascun intervallo K_h in intervalli parziali di ampiezza non superiore ad ε; verremo in ultimo ad aver diviso l'intervallo I' in un numero finito di intervalli parziali $J_1, J_2, \dots, J_t$, in ciascuno dei quali (*gli estremi al più esclusi*) vi è un minore almeno di ordine μ della $M_{\mu-1}(u)$, che è sempre diverso da zero nell'intervallo.

c) Consideriamo uno, J_α, di questi intervalli; *poichè è* $\mu < n$, $\mu < k+1$, saranno nulli in J_α tutti i minori di ordine $\mu+1$ di $M_\mu(u)$ e quindi per il n.° 2, b) in qualunque intervallo intorno ad J_h le $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono legate da $n-\mu$ (e non oltre) relazioni lineari indipendenti a coefficienti costanti, non tutti nulli

$$C_\varrho^{(\alpha)}(u) = c_{\varrho 1}^{(\alpha)} u_1 + c_{\varrho 2}^{(\alpha)} u_2 + \cdots + c_{\varrho n}^{(\alpha)} u_n = 0, \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n-\mu) \qquad (7)_\alpha$$

la cui matrice

$$| c_{\varrho i}^{(\alpha)} |, \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n-\mu,\ i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7)'_\alpha$$

ha cioè la caratteristica $n-\mu$; e poichè le u sono continue (a destra od a sinistra) negli estremi di J_α, le (7) varranno anche in questi estremi.

d) Consideriamo ora, ad es., l'intervallo $J_{\alpha+1}$ contiguo a destra di J_α e sia x_α l'estremo comune. Nell'intervallo $J_{\alpha+1}$ le u, per le ipotesi fatte, saranno legate ancora da $n-\mu$ relazioni lineari indipendenti:

$$C_\varrho^{(\alpha+1)}(u) = c_{\varrho 1}^{(\alpha+1)} u_1 + c_{\varrho 2}^{(\alpha+1)} u_2 + \cdots + c_{\varrho n}^{(\alpha+1)} u_n = 0, \ (\rho = 1, 2, \ldots, n-\mu) \quad (7)_{\alpha+1}$$

le quali varranno anche nell'estremo x_α; in questo si avranno dunque insieme le $(7)_\alpha$ e $(7)_{\alpha+1}$ e con esse, per la continuità delle derivate $u_i^{(t)}$, con $t < k+1$, tutte quelle che si hanno derivandole fino all'ordine k; avremo cioè le relazioni:

$$\sum_1^n{}_i\, c_{\varrho i}^{(\alpha)} u_i^{(t)}(x_\alpha) = 0, \quad \sum_1^n{}_i\, c_{\varrho i}^{(\alpha+1)} u_i^{(t)}(x_\alpha) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n-\mu) \quad (t = 0, 1, \ldots, k),$$

ma poichè la matrice

$$| u_i^{(t)}(x_\alpha) |, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \ t = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

ha la caratteristica μ e le due matrici

$$| c_{\varrho i}^{(\alpha)} |, \qquad | c_{\varrho i}^{(\alpha+1)} |, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n,\ \ \rho = 1, 2, \ldots, n-\mu)$$

hanno ambedue la caratteristica $n-\mu$, le due matrici precedenti sono *equivalenti,* e quindi le relazioni (7_α) sono equivalenti alle $(7)_{\alpha+1}$.

Facciamo $\alpha = 1, 2, \ldots, t-1$; avremo che nell'intervallo I' (e quindi in I_1) le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono legate da $n-\mu$ (e non oltre) relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, non tutti nulli, come avevamo affermato.

e) Ne segue anche che ogni matrice $M_{\mu+\rho}(u)$ (per $\rho = 0, 1, \ldots, k-\mu-1$) ha in I_1 la caratteristica μ; e, *fatta eccezione di un numero finito di punti,* ogni matrice $M_\lambda(u)$, con $\lambda \leq \mu - 1$, ha in I_1 la caratteristica $\lambda + 1$.

f) Il ragionamento che precede cade in difetto, quando sia $\mu = k+1$;

non sappiamo infatti allora se è possibile considerare la matrice $M_k(u)$. Poichè si può supporre $\mu < n$, questo non è, quando sia $k+1 \geqq n$, cioè quando $k \geqq n-1$.

5. Quando le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono reali, la dimostrazione che precede può semplificarsi notevolmente.

Diciamo infatti $D_1, D_2, \ldots, D_p$ $\left(\text{con } p = \binom{n}{\mu}\right)$ i minori di ordine μ della $M_{\mu-1}(u)$, in un ordine determinato, $E_1, E_2, \ldots, E_p$ i minori corrispondenti della matrice che si ha dalla $M_\mu(u)$ sopprimendone la penultima riga; sarà $D'_\alpha = E_\alpha$; e poichè, in ogni intervallo L_h (gli estremi esclusi) la $M_{\mu-1}(u)$ ha la caratteristica μ, la $M_\mu(u)$ è invece nulla, per un teorema noto (*), la matrice

$$\begin{vmatrix} D_1 & D_2 & \ldots & D_\mu \\ D'_1 & D'_2 & \ldots & D'_\mu \end{vmatrix}$$

ha, nell'interno di ogni intervallo L_h, la caratteristica 1. Abbiamo posto ora (n.° 4, b)):

$$M^2 = \sum_1^p{}_\rho D_\rho^2; \tag{8}$$

ed è M diverso da zero *nell'interno di* L_h; derivando abbiamo

$$M\,M' = \sum_1^p{}_\rho D_\rho, \ D'_\rho;$$

quindi ciascun determinante $\begin{vmatrix} D_\rho & D'_\rho \\ M & M' \end{vmatrix}$ è nullo in L_h; donde, poichè $M \neq 0$, si trae, *nell'interno di* L_h:

$$D_\rho = c_\rho M, \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, p) \tag{9}$$

dove le c_ρ sono costanti opportune, non tutte nulle, in quanto dalla (8) si ha $\sum_1^p{}_\rho c_\rho^2 = 1$.

Sia ad es. $c_1 \neq 0$, sarà $D_1 \neq 0$ in tutto l'intervallo L_h, gli estremi esclusi (cioè gli intervalli $J_1, J_2, \ldots, J_t$, di cui al n.° 4, coincidono cogli $L_1, L_2, \ldots, L_h$).

(*) Cfr. ad es. Nicoletti, *Sulle matrici associate ad una matrice data* (Atti della R. Accademia di Torino, 15 Giugno 1902).

Possiamo ora continuare, come al n.° 4, c), o più semplicemente osservare che, poichè la matrice $M_\mu(u)$ è identicamente nulla in L_h, gli $n-\mu$ determinanti di ordine $\mu+1$

$$\begin{vmatrix} u_i, & u_\alpha \\ u_i^{(t)}, & u_\alpha^{(t)} \end{vmatrix} (i=1,\,2,\ldots,\,\mu,\ t=0,\ 1,\ldots,\,\mu-1,\ \alpha=\mu+1,\ \mu+2,\ldots,\,n)$$

sono evidentemente nulli in L_h; e sviluppando ciascuno di questi determinanti per gli elementi della prima riga, si hanno $n-\mu$ relazioni della forma:

$$D_1\,u_\alpha + D_{\alpha_1}\,u_1 + D_{\alpha_2}\,u_2 + \cdots + D_{\alpha_\mu}\,u_\mu = 0, \quad (\alpha=\mu+1,\ \mu+2,\ldots,\,n);$$

e, per le (9), queste relazioni, divise per M dànno, *nell'intorno di* L_h, $n-\mu$ relazioni indipendenti

$$c_1\,u_\alpha + c_{\alpha_1}\,u_1 + \cdots + c_{\alpha_\mu}\,u_\mu = 0, \quad (\alpha=\mu+1,\ldots,\,n)$$

(con $c_1 \neq 0$); e, per la continuità, queste relazioni varranno anche negli estremi di L_h.

6. Siano ora I_1, I_2 due intervalli consecutivi (in I), e sia x_0 l'estremo comune, destro per I_1, sinistro per I_2; ed in I_1 (il punto x_0 al più escluso) il sistema (u) abbia la caratteristica μ_1, in I_2 la caratteristica μ_2. Se è $\mu_1 < n$, $\mu_1 < k+1$, le (u) sono legate in I_1 da $n-\mu_1$ relazioni indipendenti

$$\underset{\alpha}{C}(u) = \sum_1^n{}_i\, c_{\alpha i}\, u_i = 0, \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ldots,\ n-\mu_1), \tag{10}$$

ed analogamente, se è $\mu_2 < n$, $\mu_2 < k+1$, avremo in I_2 $n-\mu_2$ relazioni indipendenti

$$\underset{\beta}{D}(u) = \sum_1^n{}_i\, d_{\beta i}\, u_i = 0, \qquad (\beta = 1,\ 2,\ldots,\ n-\mu_2). \tag{11}$$

Nel punto x_0 le u abbiano ora le derivate a sinistra (ed a destra) determinate e finite fino ad un ordine k_1 (k_2), potendo anche queste derivate avere in x_0 delle discontinuità di prima specie. Considerando la matrice delle derivate delle u in x_0 a sinistra fino all'ordine k_1 avremo una caratteristica a sinistra μ_-, una analoga a destra (colle derivate fino all'ordine k_2) μ_+; e per il n.° 3, b) sarà $\mu_- \leq \mu_1$, $\mu_+ \leq \mu_2$; diciamo $(\rho_1,\ \rho_2,\ldots,\ \rho_{\mu_-}) \equiv \rho$,

$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\mu_+}) \equiv \sigma$ i loro caratteri; le relazioni (10) varranno anche nel punto x_0 con quelle che si hanno derivandole, a sinistra, in x_0 fino all'ordine k_1; le (11) varranno in x_0 colle loro derivate a destra fino all'ordine k_2.

Questo è chiaro, per la continuità delle u e delle loro derivate fino all'ordine $k_1 - 1$ a sinistra di x_0: per le (10) e per le loro derivate fino all'ordine $k_1 - 1$; per le $\underset{\alpha}{C}(u^{(k_1)})$ osserviamo che le $\underset{\alpha}{C}(u^{(k_1-1)})$ sono nulle in I_1 ed hanno in x_0 una derivata a sinistra, determinata e finita; questa dunque è nulla; è cioè $\underset{\alpha}{C}(u^{(k_1)}) = 0$.

Si traggono di qui delle conclusioni notevoli.

a) Consideriamo la matrice *somma* delle due ρ, σ e ne sia

$$\nu = \mu_- + \mu_+ - h$$

(con $h \geqq 0$) la caratteristica; le due matrici ρ, σ possono trasformarsi in due, rispettivamente equivalenti, che abbiano h righe comuni. Detta

$$|\lambda_i^{(\sigma)}|; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, h)$$

la matrice di queste h righe (che avrà caratteristica h) si avranno le relazioni

$$\sum_1^n {}_i\, c_{\alpha i} \lambda_i^{(\sigma)} = 0, \qquad \sum_1^n {}_i\, d_{\beta i} \lambda_i^{(\sigma)} = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n - \mu_1; \quad \beta = 1, 2, \ldots, n - \mu_2; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, h)$$

e quindi la matrice di $2n - \mu_1 - \mu_2$ righe

$$\left| \begin{matrix} c_{\alpha_i} \\ d_{\beta_i} \end{matrix} \right|, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n - \mu_1; \quad \beta = 1, 2, \ldots, n - \mu_2)$$

avrà una caratteristica non maggiore di $n - h$; e quindi: *le* (10) *e* (11) *si riducono a non più di $n - h$ indipendenti.*

b) Sia in particolare $\mu_1 = \mu_2 = h$; le (10) e le (11) saranno allora equivalenti; e le une, o le altre, varranno in tutto l'intervallo $I = I_1 + I_2$.

Ora perchè sia $h = \mu$ (dove con μ abbiamo indicato il valore comune di μ_1 e μ_2) è necessario e sufficiente si abbia anche $\mu_- = \mu_+ = \nu = \mu$; cioè le due matrici delle derivate delle u nel punto x_0, a sinistra (a destra) sino all'ordine k_1 (k_2) devono avere la caratteristica μ ed essere tra loro equivalenti. Quando queste condizioni siano soddisfatte, diremo che il sistema (u) ha ancora in x_0 la caratteristica μ; e con questa estensione del concetto di caratteristica vale ancora il teorema dimostrato al n.° 4.

c) Le relazioni (10) ed (11) ***non*** siano equivalenti, e supponiamo che in x_0 le u abbiano derivate determinate e finite (uguali a destra ed a sinistra) fino all'ordine k_1. Una almeno delle $\underset{\alpha}{C}(u)$, $\underset{\beta}{D}(u)$ sarà allora nulla in x_0 colle sue derivate fino all'ordine k_1, senza esserlo in tutto l'intervallo $I = I_1 + I_2$.

Per la legge deì contrarî ne segue: Ammettiamo che qualunque combinazione lineare omogenea delle (u)

$$G(u) = \sum_1^n{}_i \, g_i \, u_i$$

a coefficienti costanti, la quale sia nulla nel punto x_0 colle sue derivate fino all'ordine k_1, sia nulla identicamente in $I = I_1 + I_2$; il caso superiore non può allora presentarsi e quindi necessariamente le (10) ed (11) sono equivalenti. E detta μ la caratteristica della matrice delle (u) e delle loro derivate fino all'ordine k_1 nel punto x_0, si avranno $n - \mu$ (e non oltre) relazioni indipendenti:

$$G_\alpha(u) = \sum g_{\alpha i} \, u_i = 0$$

le quali saranno soddisfatte *nel punto* x_0 colle loro derivate fino all'ordine k_1 e quindi per l'ipotesi fatta varranno anche in tutto l'intervallo I. In ogni punto di I il sistema (u) avrà una caratteristica non maggiore di μ; e per il n.° 3, *e*) si potrà determinare un intorno del punto x_0 nel quale la caratteristica del sistema è μ e si ha il caso regolare.

E se la ipotesi fatta nel punto x_0 vale per *ogni* punto dell'intervallo I, con un ragionamento noto, si avrà che un tale intorno avrà un minimo positivo; ne segue dunque che in tutto I il sistema (u) ha la caratteristica μ e presenta il caso regolare. Vale quindi ancora il teorema del n.° 4.

d) Le condizioni che precedono sono soddisfatte quando le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono integrali di una equazione differenziale lineare omogenea di un ordine $t \leq n$:

$$y^{(t)} = p_1 \, y^{(t-1)} + p_2 \, y^{(t-2)} + \ldots + p_t \, y \tag{12}$$

dove le $p_1, p_2, \ldots, p_t$ sono finite e continue nell'intervallo I; infatti un integrale della (12) che sia nullo in un punto di I colle sue prime $t-1$ derivate è identicamente nullo in I. È chiaro inoltre che, in questa ipotesi, qualunque matrice $M_\lambda(u)$ ha una caratteristica non superiore a t. Ne segue:

L'equazione (12) ***non può aver nell'intervallo I più di t integrali indipendenti.***

E per $n = t$ si ha ancora:

Condizione necessaria e sufficiente perchè t integrali $(u_1, u_2, \ldots, u_t)$ *della equazione* (12) *siano linearmente indipendenti (dipendenti) nello intervallo I è che in* un *punto di I il loro Wronskiano* sia diverso da zero (*sia nullo*).

e) Escluso il caso delle funzioni analitiche in un intervallo (n.° 1) e degli integrali di una equazione differenziale lineare omogenea, i teoremi che precedono assegnano delle condizioni *sufficienti* per la dipendenza lineare di n funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ di una variabile reale x.

Circa la ricerca di un sistema di condizioni *necessarie e sufficienti*, non sembra facile che possano assegnarsi *con sole derivazioni*. Si osservi infatti, che se n funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono, ad es., legate in un intervallo I da una relazione

$$C(u) = \sum_1^n{}_i\, c_i \overset{k}{u}_i = 0,$$

questa relazione varrà ancora, quando le u_i si moltiplichino per una funzione $\varphi(x)$, alla quale si imponga la sola condizione di essere definita e limitata nell'intervallo I; e prendendo opportunamente la funzione $\varphi(x)$, le nuove funzioni $v_i = \varphi . u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ potranno presentare in I, in un numero finito od anche infinito di punti, le particolarità più svariate e per esse e per le loro derivate, in guisa che non possano, ad es., applicarsi le considerazioni che precedono.

7. Consideriamo alcuni esempî.

a) Sia, in un intervallo I che contiene lo zero, $u_1 = u_2 = |x|$. Il sistema ha la caratteristica 1; questo è chiaro per $x \neq 0$; per $x = 0$, si hanno a sinistra ed a destra le due matrici equivalenti:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}. \quad \begin{vmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 1 \end{vmatrix}$$

b) Sia, con Peano, $u_1 = x^m$, $u_2 = x^{m-1}|x|$, con m intero positivo arbitrario; e l'intervallo I contenga lo zero. In qualunque punto $x_0 \neq 0$ il sistema (u) è regolare ed ha la caratteristica 1; per $x = 0$, conviene esaminare le derivate fino all'ordine m; e si ha ancora $\mu_- = \mu_+ = 1$, $\rho_1 = \sigma_1 = m$; ma le due matrici

$$| m!, \; -m! | \qquad | m!, \; m! |$$

non sono equivalenti; le u_1, u_2 devono quindi dirsi indipendenti in qualunque intervallo I che contenga lo zero come punto interno. Le due espressioni $u_1 + u_2$, $u_1 - u_2$ sono allora nulle in $x = 0$ colle loro derivate fino all'ordine $m - 1$; ma non lo sono identicamente in I.

c) Consideriamo l'esempio del BOCHER:

Sia:

$$\text{per } x > 0; \quad u_1 = 1 + e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad u_2 = 1 + e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad u_3 = 1$$

$$\text{per } x = 0; \quad u_1 = u_2 = u_3 = 1$$

$$\text{per } x < 0; \quad u_1 = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad u_2 = 1 + e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad u_3 = 1.$$

Per $k \geq 2$, e per $x \neq 0$ è $\mu = 2$ e si ha il caso regolare; per $x = 0$, è $\mu = 1$. Ed infatti si ha:

$$\text{per } x > 0; \quad u_1 = u_2$$

$$\text{per } x < 0; \quad u_1 + u_2 = 2\, u_3$$

$$\text{per } x = 0; \quad u_1 = u_2 = u_3$$

e le due prime relazioni sono equivalenti alle altre due. Le due relazioni $u_1 - u_2$, $u_1 + u_2 - 2u_3$ sono nulle in $x = 0$, con tutte le loro derivate; non lo sono identicamente in un intervallo I che contenga lo zero.

d) Sia l'esempio del CURTISS:

$$u_1 = -(x^4 + x^3 + x + 1); \quad u_2 = x + 1$$

$$u_3 = x^2 + x + 1; \quad u_4 = x^4 + x^3 - (x^2 + x + 1), \text{ per } x > 0$$

$$u_3 = x^4 + x^2 + x + 1; \quad u_4 = x^3 - (x^2 + x + 1), \text{ per } x \leq 0;$$

e l'intervallo I contenga lo zero. Per $k = 3$, è $\mu = 3$ in ogni punto di I ed infatti si ha in I

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$$

e) Consideriamo ancora l'esempio seguente:

Sia $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n + \ldots$ una serie a termini positivi convergente, la cui somma sia uguale ad 1; e poniamo $x_0 = 0$, $x_i = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_i$. Sia poi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ una successione arbitraria, tale che $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$; $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$, una successione di numeri interi e positivi, tutti maggiori od uguali ad un numero m determinato; e sia infine $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ una successione di funzioni, tale che la $f_i(x)$ è definita nell'intervallo $\delta_i = (x_{i-1} \ldots x_i)$ ed è finita e continua colle sue derivate fino all'ordine m_i almeno.

Definiamo due funzioni u, v della x al modo seguente: in δ_i sia

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= \{(x - x_{i-1})(x - x_i)\}^{m_i} f_i(x) \\ v(x) &= \{(x - x_{i-1})(x - x_i)\}^{m_i} \alpha_i f_i(x). \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Se $u(x)$, $v(x)$ sono, nell'intervallo $(0\,1)$, finite e continue colle loro derivate fino all'ordine m; sono legate linearmente in qualunque intervallo interno ad un intervallo δ_i dalla relazione $v = \alpha_i u$; non lo sono in ogni intervallo che abbia dei punti interni a più intervalli δ_i.

Se la successione delle m_i è divergente, ed è per $i \geq i_0$, $m_i > k$ (con k intero arbitrario), nello intervallo $(x_{i_0} \ldots 1)$ le u, v si annullano nei punti x_i colle loro derivate fino all'ordine $m_i - 1 \geq k$. Il sistema $(u\,v)$ ha in $(x_{i_0} \ldots 1)$ la caratteristica 1; ma nei punti x_i, a causa di $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, le matrici delle derivate di ordine m_i a destra e a sinistra non sono equivalenti.

Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante sviluppi in serie.

(*Di* G. Belardinelli, *a Jesi.*)

I.

1). Il prof. Capelli in tre Note, pubblicate nei *Rend. della R. Accademia delle Scienze Fisiche e mat. di Napoli* nel 1907, tratta della risoluzione delle equazioni algebriche mediante sviluppi in serie.

Considera l'equazione generale:

$$\theta(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0 \tag{1}$$

e dà delle variazioni $p_0 p_1 \dots p_n$ rispettivamente ai coefficienti $a_0 a_1 \dots a_n$ ed ottiene l'equazione trasformata:

$$f(y) = (a_n + p_n) y^n + (a_{n-1} + p_{n-1}) y^{n-1} + \cdots + (a_1 + p_1) y + (a_0 + p_0) = 0. \tag{2}$$

Indicando con ω_0 una radice semplice e finita dell'equazione 1) la 2) determina quel ramo monodromo finito e continuo della y considerato come funzione delle $p_0 p_1 \dots p_n$ che per $p_0 = p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ assume il valore ω_0; questo ramo in un campo che indica con (P) definito da

$$\operatorname{mod} p_i < R \; (i = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ n)$$

sarà rappresentato da uno sviluppo convergente della forma

$$y = \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} A_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \tag{3}$$

dove le α assumono valori interi positivi o nulli qualsivogliano.

Ciò premesso dalla teoria dei residui si ha:

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{y f'(y)\, dy}{f(y)}$$

esteso ad un cerchietto c circondante la radice ω_0 percorso nel senso positivo, purchè in esso non cadano altre radici della $\theta(y)$ e $p_0 \, p_1 \ldots p_n$ siano abbastanza piccoli.

Passa poi a determinare la forma del coefficiente $A_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}$ della (3) ed ottiene che:

$$A_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{\alpha - 1\,!}{\alpha_0\,!\, \alpha_1\,! \ldots \alpha_n\,!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_c y^\beta \left[-\theta(y) \right]^{-\alpha} d\,y \right) \tag{4}$$

ove

$$\beta = \alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \cdots + n\,\alpha_n$$

e

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

inoltre determina per il coefficiente (4) una forma puramente algebrica per modo che si ha riassumendo i risultati ottenuti dal Capelli:

« Se y è la funzione delle variabili indipendenti $p_0 \, p_1 \ldots p_n$ definita dall'equazione:

$$(a_n + p_n)\, y^n + (a_{n-1} + p_{n-1})\, y^{n-1} + \cdots + (a_0 + p_0) = 0$$

e precisamente quel ramo di tale funzione che per $p_0 = p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ assume il valore ω_0 radice semplice e finita dell'equazione:

$$\theta(y) = a_n\, y^n + a_{n-1}\, y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

si ha per lo sviluppo in serie di potenze delle $p_0 \, p_1 \ldots p_n$ convergenti per valori abbastanza piccoli dei moduli delle $p_0 \, p_1 \ldots p_n$

$$y = \omega_0 + \Sigma \frac{\alpha\,!}{\alpha_0\,! \ldots \alpha_n\,!} \bar{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} \, p_0^{\alpha_0} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

dove

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

e

$$\bar{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha}{\alpha\,!\, b_1^\alpha} \sum_{k<\alpha} \binom{\beta}{\alpha - k - 1} \omega_0^{\beta + k - \alpha - 1} \frac{(-1)^h\, h + \alpha - 1\,!}{b_1^h} \, \frac{b_2^{h_2}\, b_3^{h_3} \ldots b_n^{h_n}}{h_2\,!\; h_3\,! \ldots h_n\,!}$$

in cui

$$\beta = \alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \cdots + n\,\alpha_n \qquad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

$$k = h_2 + 2\,h_3 + \cdots + (\alpha - 1)\,h_n \qquad h = h_2 + h_3 + \cdots + h_n$$

e

$$b_\rho = \frac{\theta^{(\rho)}(\omega_0)}{\rho\,!} \text{ »}$$

ove $\theta^{(\rho)}(\omega_0)$ sta ad indicare la derivata ρ-esima di $\theta(y)$ calcolata nel punto ω_0

2). Del coefficiente però possiamo dare delle forme differenziali. Essendo

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha}{2\pi i \alpha} \int_c y^\beta (\theta(y))^{-\alpha}\, d y \tag{1}$$

ove le α e β e $\theta(y)$ sono date dalle relazioni del § 1, si ha che:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{1}{2\pi i \alpha!} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a_0^{\alpha-1}} \int_c y^\beta\, \theta(y)^{-1}\, d y \tag{2}$$

e ponendo:

$$\varphi(y) = \frac{\theta(y)}{y - \omega_0}$$

per la formula integrale di Cauchy si ha che:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a_0^{\alpha-1}} \left(\frac{\omega_0^\beta}{b_1}\right) \tag{3}$$

essendo

$$b_1 = n\, a_n\, \omega_0^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, \omega_0^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Detta formula (3) potevasi anche dedurre in altra maniera dalla (2) facendo una trasformazione nell'integrale, cioè ponendo $y = z + \omega_0$ si avrà:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha}{2\pi i \alpha!} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a_0^{\alpha-1}} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\beta} \binom{\beta}{\gamma} \omega_0^{\beta-\gamma} \int_c z^\gamma \left(b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n\right)^{-1} d z$$

e sviluppando per convenienti valori di z, il secondo termine dell'integrale secondo lo sviluppo binomiale si ha ponendo $\varphi(z) = b_2 z + b_3 z^2 + \cdots + b_n z^{n-1}$

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{1}{2\pi i \alpha!} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a_0^{\alpha-1}} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{\omega_0^{\beta-\gamma}}{b_1} \int_c z^{\gamma-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{b_1^k} \varphi(z)^k\, d z$$

ove l'integrale sarà nullo eccetto per $k = 0$, $\gamma = 0$ onde si avrà la formula (3)

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a_0^{\alpha-1}} \left(\frac{\omega_0^\beta}{b_1}\right). \tag{3}$$

Possiamo di essa ottenere una forma diversa. Consideriamo infatti

$$\int_c y^{\beta+1}\, \theta(y)^{-(\alpha+1)}\, \theta'(y)\, d y = -\frac{1}{\alpha} \int_c y^{\beta+1} \frac{\partial}{\partial y} \theta(y)^{-\alpha}\, d y = \frac{\beta+1}{\alpha} \int_c y^\beta\, \theta(y)^{-\alpha}\, d y$$

e si ha anche:

$$\int_c y^{\beta+1}\,\theta(y)^{-(\alpha+1)}\,\theta'(y)\,dy = \int_c y^{\beta+1}\frac{\varphi(y)^{-(\alpha+1)}}{(y-\omega_0)^{\alpha+1}}\,\theta'(y)\,dy = \frac{(-1)^\alpha\, 2\pi i}{\alpha!}\;\frac{\partial^\alpha}{\partial a_0^\alpha}\,\omega_0^{\beta+1}$$

essendo

$$\varphi(y) = \frac{\theta(y)}{y-\omega_0}$$

e quindi per la formula (3) si ha:

$$\frac{\beta+1}{\alpha}\left\{\frac{(-1)^\alpha\, 2\pi i}{\alpha!}\;\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a_0^{\alpha-1}}\,\frac{\omega_0^\beta}{b_1}\right\} = \frac{(-1)^\alpha\, 2\pi i}{\alpha!}\;\frac{\partial\,\alpha}{\partial a_0^\alpha}\,\omega_0^{\beta+1}$$

ed il coefficiente assumerà la forma:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = -\frac{1}{\alpha!\,\beta+1}\;\frac{\partial^\alpha}{\partial a_0^\alpha}\,\omega_0^{\beta+1} \tag{4}$$

e ricordando che:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha}{2\pi i\,\alpha}\int_c y^\beta\,(\theta(y))^{-\alpha}\,dy$$

e

$$A_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{\alpha!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_n!}\,\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}$$

si ha:

$$A_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = -\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{\dfrac{\partial^\alpha\,\omega_0^{\beta+1}}{\partial a_0^\alpha}}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_n!} \tag{5}$$

3). Diamo ora delle formule (3) e (4) delle applicazioni per la formazione dei coefficienti della serie nel caso che $\theta(y) = a_n y^n + a_0 = 0$.

Essendo a_n ed a_0 entrambi diversi dallo zero possiamo ritenere per la ω_0 uno qualunque fissati ad arbitrio degli n valori

$$\sqrt[n]{-\frac{a_n}{a_0}}$$

essendo in questo caso $b_1 = n\,\omega_0^{n-1}$ viene:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{1}{n\,\alpha!}\;\frac{\partial^{\,-1}}{\partial a_0^{\alpha-1}}\,\omega_0^{\beta+1-n}$$

cioè

$$\bar{A}_{\alpha_0\ldots\alpha_n}=\frac{1}{n\,\alpha\,!}\,\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial\, a_0^{\alpha-1}}\left(-\frac{a_0}{a_n}\right)^{\beta+1-n}$$

ed

$$\bar{A}_{\alpha_0\ldots\alpha_n}=\frac{\omega_0^{\beta+1}}{n\,a_0^{\alpha}\,\alpha}\begin{pmatrix}\frac{\beta+1}{n}-1\\ \alpha-1\end{pmatrix} \tag{1}$$

da cui

$$y=\omega_0+\sum_{\alpha>0}\frac{\alpha\,!}{\alpha_0\,!\,\alpha_1\,!\ldots\alpha_n\,!}\,\frac{\omega_0^{\beta+1}}{n\,a_0^{\alpha}\,\alpha}\begin{pmatrix}\frac{\beta+1}{n}-1\\ \alpha-1\end{pmatrix}p_0^{\alpha_0}\,p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Applichiamo invece la formula (4) del § 2; si ha:

$$\bar{A}_{\alpha_0\ldots\alpha_n}=-\frac{1}{\alpha\,!\;\beta+1}\,\frac{\partial^{\alpha}}{\partial\, a_0^{\alpha}}\left(-\frac{a_0}{a_n}\right)^{\frac{\beta+1}{n}}$$

e quindi:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}=-\frac{(-1)^{\alpha}}{n\,a_n^{\alpha}\,\alpha}\begin{pmatrix}\frac{\beta+1}{n}-1\\ \alpha-1\end{pmatrix}\left(-\frac{a_0}{a_n}\right)^{\frac{\beta+1}{n}-\alpha}$$

da cui

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}=\frac{\omega_0^{\beta+1}}{n\,a_0^{\alpha}\,\alpha}\begin{pmatrix}\frac{\beta+1}{n}-1\\ \alpha-1\end{pmatrix}$$

cioè la (1) prima determinata. Potevasi d'altronde fare una trasformazione nell'integrale come opera il Capelli, cioè essendo:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}=\frac{(-1)^{\alpha}}{2\,\pi\,i\,\alpha}\int_c\frac{y^{\beta}\,d\,y}{(a_n y^n+a_0)^{\alpha}}$$

e ponendo y in $\frac{y}{\omega}$ si ha:

$$A_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}=\frac{\omega_0^{\beta+1}}{2\,\pi\,i\,a_0^{\alpha}}\int_{c_1}\frac{y^{\beta}\,d\,y}{(y^n-1)^{\alpha}}$$

ove c_1 è un cerchio che ha per centro il punto $y=1$, per modo che si ottiene analogamente la formula determinata (1) e (2).

4). Consideriamo di nuovo l'integrale nel caso in $\theta(y)$ sia generale; in esso possiamo fare una trasformazione che ci permetterà nel seguito di determinare una sua proprietà funzionale.

Sia dunque il coefficiente:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha}{2\pi i \alpha}\int_c y^\beta (\theta(y))^{-\alpha}\, d\, y\,;$$

se indichiamo come al solito con

$$\varphi(y) = \frac{\theta(y)}{y-\omega_0} = a_n (y-\omega_1)(y-\omega_2)\ldots(y-\omega_{n-1})\,;$$

indicando con $\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_{n-1}$ le altre $n-1$ radici dell'equazione $\theta(y)=0$ possiamo scrivere il coefficiente nella forma seguente

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha}}{2\pi i \alpha}\int_c \frac{y^\beta (y-\omega_1)^{-\alpha}\ldots(y-\omega_{n-1})^{-\alpha}\, d\, y}{(y-\omega_0)^\alpha}$$

da cui vediamo che potendo applicare la formula integrale di Cauchy del coefficiente possiamo ottenere una forma finita.

Infatti

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha}}{\alpha\,!}\left[\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial y^{\alpha-1}}\, y^\beta (y-\omega_1)^{-\alpha}\ldots(y-\omega_{n-1})^{-\alpha}\right]_{\omega_0}$$

applicando la formola di Leibnitz per la derivazione di un prodotto ponendo

$$\varphi_1(y) = (y-\omega_1)^{-\alpha}(y-\omega_2)^{-\alpha}\ldots(y-\omega_{n-1})^{-\alpha}$$

si ha che:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha}}{\alpha\,!}\sum_{r=0}^{r=\alpha-1}\binom{\alpha-1}{r}\binom{\beta}{\alpha-1-r}\,\alpha-1-r\,!\;\omega_0^{\beta-(\alpha-1-r)}\, D^r\varphi_1(y)$$

ed essendo

$$\binom{\alpha-1}{r} = \frac{\alpha-1\,!}{r\,!\;\alpha-1-r\,!}$$

ne viene indicando con

$$\varphi_2(y) = (y-\omega_2)^{-\alpha}\ldots(y-\omega_{n-1})^{-\alpha}$$

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha}}{\alpha}\sum_{r=0}^{r=\alpha-1}\binom{\beta}{\alpha-1-r}\,\omega_0^{\beta-(\alpha-1-r)}\,\frac{1}{r\,!}\, D^r\Big((y-\omega_1)^{-\alpha}\varphi_2(y)\Big)_{\omega_0}$$

e così seguitando otterremo la formola finale

$$\left.\begin{aligned}\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^{\sigma}}{a_n^{\alpha}\,\alpha} \sum_{r=0}^{r=\alpha-1} \binom{\beta}{\alpha-1-r} \omega_0^{\beta-(\alpha-1-r)} \sum_{p=0}^{p=r} \binom{-\alpha}{r-p} (\omega_0-\omega_1)^{-\sigma-(r-p)} \ldots \\ \ldots \sum_{k=0}^{k=h} \binom{-\alpha}{h-k} \binom{-\alpha}{h} (\omega_0-\omega_{n-2})^{-\alpha-(h-k)} (\omega_0-\omega_{n-1})^{-\alpha-h}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

formula che ci dà un'espressione finita del coefficiente.

Però la determinazione di esso può ricondursi alla determinazione di altri più semplici; infatti se poniamo:

$$\int_c y^{\beta}\,\theta(y)^{-\sigma}\,d\,y = f(\alpha,\ \beta)$$

si ha immediatamente riferendoci all'equazione $\theta(y) = 0$ che

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r\, f(\alpha,\ \beta+r) = f(\alpha-1,\ \beta) \qquad (2)$$

ed essendo

$$\theta'(y) = a_1 + 2\,a_2\,y + \cdots + n\,a_n\,y^{n-1}$$

che

$$\sum_{r=1}^{r=n} r\,a_r\, f(\alpha,\beta+r-1) = \int_c y^{\beta}\,\theta(y)^{-\alpha}\theta'(y)\,d\,y = \frac{\beta}{\alpha-1} f(\alpha-1,\ \beta-1). \qquad (3)$$

Ora se l'eguaglianza (2) la moltiplichiamo per $\dfrac{\beta+1}{\alpha-1}$ e ne sottragghiamo la (3) dopo aver cambiato β in $\beta+1$ si ha:

$$\sum_{r=0}^{r=n} (\beta - r\,\alpha + r + 1)\,a_r.\,f(\alpha,\ \beta+r) = 0. \qquad (4)$$

Detta formula ottenuta per $\alpha \gtrless 1$ è valida anche per $\alpha = 1$, e ci dà una relazione fra i coefficienti che permette di ricondurre il calcolo di uno di essi $f(\alpha,\ \beta)$ alla determinazione degli integrali

$$f(\alpha,\ 0),\quad f(\alpha,\ 1),\ldots,\quad f(\alpha,\ n-1).$$

II.

1). Determiniamo in questa parte una proprietà funzionale dei coefficienti di cui nella prima abbiamo stabilito le diverse forme che possono assumere.

Consideriamo un'equazione differenziale lineare regolare nel senso di Fuchs:

$$A_0 \varphi^{(n)} + A_1 \varphi^{(n-1)} + A_2 \varphi^{(n-2)} + \cdots + A_n \varphi = 0 \tag{1}$$

e poichè possiamo ridurre i coefficienti ad avere il loro grado uguale all'indice di derivazione possiamo considerare anzichè la (1) l'equazione differenziale:

$$\Delta(\varphi) = B_n \varphi^{(n)} + B_{n-1} \varphi^{(n-1)} + \cdots + B_0 \varphi = 0 \tag{2}$$

ove ogni polinomio B_n è dello stesso grado del suo indice ed allora tale equazione si chiama equazione differenziale normale.

In questa equazione si definiscono due operazioni (*): la prima si rappresenta con D e consiste nel dedurre da $\Delta(\varphi)$ la:

$$D\Delta(\varphi) = B'_n \varphi^{(n-1)} + B'_{n-1} \varphi^{(n-2)} + \cdots + B'_1 \varphi$$

pure normale ed iterando l'operazione D si ha:

$$D^2 \Delta(\varphi) = B''_n \varphi^{(n-2)} + \cdots + B''_2 \varphi$$
$$D^3 \Delta(\varphi) = B'''_n \varphi^{(n-3)} + \cdots + B'''_3 \varphi$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

la seconda operazione viene indicata con $S_\sigma \Delta$ e si ha la definizione:

$$S_\sigma \Delta = \Delta + \sigma D \Delta + \binom{\sigma}{2} D^2 \Delta + \cdots + \binom{\sigma}{n} D^n \Delta$$

e si vede che anche $S_\sigma \Delta$ è normale e si può scrivere:

$$\left.\begin{aligned} S_\sigma \Delta = B_n \varphi^{(n)} + (B_{n-1} + \sigma B'_n) \varphi^{(n-1)} + \cdots \\ \cdots + \left(B_0 + \sigma B'_1 + \binom{\sigma}{2} B''_2 + \cdots + \binom{\sigma}{n} B_n^{(n)}\right) \varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(*) Pincherle, *Sulle funzioni ipergeometriche.* Giornale Battaglini, 1894, Pellerano, Napoli.

Nella Memoria citata il prof. PINCHERLE considera pure l'espressione:

$$\psi(\omega_0) = \int_\lambda \frac{\varphi(y)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}} \tag{4}$$

dove σ è non intero positivo e dove la linea c sia tale che il secondo membro abbia senso e che sia possibile l'integrazione per parti e la derivazione sotto il segno dell'integrale.

E dimostra che

$$\psi(\omega_0) = \int_\lambda \frac{\Delta\, \varphi(y)}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}} d\, y = S_\sigma\, \Delta(\varphi).$$

Per σ intero otteniamo analogamente con ovvie modificazioni di quella dimostrazione.

Consideriamo infatti:

$$\int_\lambda \frac{B_1(y)\, \varphi(y)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}}.$$

Essendo

$$B_1(y) = B_1(\omega_0) + B'_1(y - \omega_0)$$

e si avrà:

$$\int_\lambda \frac{B_1(y)\, \varphi'(y)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}} = B_1(\omega_0) \int_\lambda \frac{\varphi'(y)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}} + B'_1 \int_\lambda \frac{\varphi'(y)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma}}.$$

Ora si avrà

$$\int_\lambda \frac{\varphi'(y)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma}} = \sigma \int_\lambda \frac{\varphi(y)\, d\, y)}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}}$$

quindi

$$\int_\lambda \frac{B_1(y)\, \varphi'(y)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}} = B_1(\omega_0)\, \psi'(\omega_0) + \sigma\, B'\, \psi(\omega_0) = S_\sigma\, B_1(\omega_0)\, \psi(\omega_0)$$

analogamente:

$$\int_\lambda \frac{B_n(y)\, \varphi^n(y)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}} = S_\sigma\, B_n(\omega_0)\, \psi^n(\omega_0)$$

e per la proprietà distributiva di dette operazioni

$$\int_\lambda \frac{\Delta(\varphi)\, d\, y}{(y - \omega_0)^{\sigma+1}} = S_\sigma \Delta(\psi)$$

e così stabilisce il teorema:

« Se φ è un integrale di una equazione differenziale lineare $\Delta = 0$ l'espressione (4) ci darà un integrale dell'equazione trasformata $S_\sigma \Delta = 0$. L'integrale φ contiene lo stesso numero di costanti arbitrarie di φ e sarà quindi l'integrale generale di $\Delta = 0$ ».

Se $\Delta(\varphi) = B_n \varphi^{(n)} + B_{n-1} \varphi^{(n-1)} = 0$ integrando per parti la (4) $n-1$ volte ed essendo nulla la parte ai limiti ottiene:

$$\psi(\omega_0) = \frac{1}{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\dots(\sigma-n+1)} \int_\lambda \frac{\varphi^{(n+1)}(y)\,dy}{(y-\omega_0)^{\sigma-n+2}}$$

la funzione $\varphi^{(n-1)}(y)$ sarà l'integrale di una equazione differenziale del primo ordine e

$$\frac{1}{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\dots(\sigma-n+1)} \int_\lambda \frac{\varphi^{(n-1)}(y)\,dy}{(y-\omega_0)^{\sigma-n+2}} = S_\sigma \Delta(\psi) \tag{5}$$

dove

$$S_\sigma \Delta(\psi) = B_n \psi^n + \left(B_{n-1} + \binom{\sigma}{1} B'_n\right)\psi^{(n-1)} + \left(\sigma B'_{n-1} + \binom{\sigma-1}{2} B''_n\right)\psi^{n-2} + \cdots$$

$$\cdots + \left(\binom{\sigma}{n-1} B^{(n-1)}_{n-1} + \binom{\sigma}{n} B^{(n)}_n\right)\psi = 0$$

e conclude chiamando $S_\sigma \Delta(\psi)$ equazione differenziale regolare del POCHAMMER.

« Si può ottenere in forma d'integrale definito l'integrale dell'equazione differenziale lineare regolare del POCHAMMER $S_\sigma \Delta = 0$ ».

Essendo dunque $\varphi^{(n-1)}$ l'integrale di una equazione differenziale lineare del primo ordine $\Delta = 0$ l'espressione 5) sarà un integrale dell'equazione trasformata $S_\sigma \Delta = 0$ e chiamasi funzione ipergeometrica dell'ennesimo ordine o funzione ipergeometrica generalizzata nel senso di POCHAMMER (*).

Ponendo $B_n = y(y-\omega_1)(y-\omega_2)\dots(y-\omega_n)$ ed indicando con f una funzione tale che:

$$B_n f' + B_{n-1} f = 0$$

e si abbia:

$$-\frac{B_{n-1}}{B_n} = \frac{\beta}{y} - \frac{\alpha}{y-\omega_1} - \dots - \frac{\alpha}{y-\omega_{n-1}}$$

(*) POCHAMMER, *Journal de Crelle*, Tomo 71, pag. 324.

ove

$$B_{n-1} = -\beta \prod_{i=1}^{i=n-1} (y - \omega_i) +$$

$$+ \alpha y \sum_{i=1}^{i=n-1} (y - \omega_1)(y - \omega_2) \cdots (y - \omega_{i-1})(y - \omega_{i+1}) \cdots (y - \omega_{n-1})$$

ne viene:

$$f = y^\beta (y - \omega_1)^{-\alpha} \cdots (y - \omega_{n-1})^{-\alpha}$$

cioè

$$\psi(\omega_0) = \frac{1}{(\alpha + n - 2) \cdots (\alpha - 1)} \int_c \frac{y^\beta (y - \omega_1)^{-\alpha} (y - \omega_2)^{-\alpha} \cdots (y - \omega_{n-1})^{-\alpha} \, dy}{(y - \omega_0)^\alpha}$$

avendo posto $\alpha = \sigma - n + 2$ ed alla linea λ sostituito il cerchietto circondante la radice ω, come nella prima parte, e quindi:

$$\overline{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha} (\alpha + n - 2) \cdots (\alpha - 1)}{2 \pi i \alpha} \psi(\omega_0)$$

ed indicando con c il coefficiente di $\psi(\omega_0)$ si ha:

$$\overline{A}_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} = c \psi(\omega_0) \text{ ed } A_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{\alpha - 1\,!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \cdots \alpha_n!} c \psi(\omega_0).$$

Possiamo quindi enunciare il teorema:

I coefficienti dello sviluppo in serie di una radice di una equazioue algebrica di grado n, cioè $A_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}$, soddisfano ad una equazione differenziale ipergeometrica del Pochammer d'ordine n.

2). Se consideriamo una delle radici dell'equazione $\theta(\omega)$

$$\omega_0 \; \omega_1 \; \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$$

il ragionamento fatto nella prima parte può ripetersi partendo anzichè da ω_0, da $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ ed i coefficienti sarebbero funzioni ipergeometriche rispettivamente di $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$. E precisamente se fissiamo una di esse, per esempio ω_p, avremo che l'equazione differenziale d'ordine n a cui soddisfano i coefficienti sarà formata da espressioni in cui

$$B_n = y (y - \omega_0)(y - \omega_1)(y - \omega_2) \ldots (y - \omega_{p-1})(y - \omega_{p+1}) \ldots (y - \omega_{n-1})$$

e

$$B_{n-1} = -\beta (y - \omega_0)(y - \omega_1) \ldots (y - \omega_{p-1})(y + \omega_{p+1}) \ldots (y - \omega_{n-1}) +$$

$$+ \alpha \sum_{i=0}^{i=n-1} (y - \omega_0) \ldots (y - \omega_{i-1})(y - \omega_{i+1}) \ldots (y - \omega_{p-1})(y - \omega_{p+1}) \ldots$$

$$\ldots (y - \omega_{n-1}).$$

I punti singolari delle equazioni differenziali diverse a cui soddisfano detti coefficienti di posto identico delle diverse serie sono rispettivamente

$$0,\ \omega_0, \ldots, \omega_{p-1}, \ \omega_{p+1}, \ldots, \omega_{n-1}\ \infty$$

e le equazioni differenziali ipergeometriche a cui soddisfano detti coefficienti per valori di α crescenti varieranno secondo le variazioni di B_n e B_{n-1} ed avranno gli stessi punti singolari.

Inoltre per formare l'integrale generale di una equazione differenziale ipergeometrica potremo osservare che se pensiamo l'integrale esteso al cerchietto solito circondante ω_0 ad esempio e ad esso aggiungiamo gli $n-1$ lacci circondanti le altre radici dopo aver percorso uno di essi, la funzione sotto il segno d'integrale ritorna al valore primitivo, e quindi una combinazione lineare di essi sarà l'integrale generale dell'equazione differenziale ipergeometrica.

Possiamo inoltre osservare che analogamente a quanto abbiamo esposto nella prima parte, se invece di considerare l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{y f'(y)}{f(y)}\, d y$$

avessimo considerato

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{y^k f'(y)}{f(y)} . d y$$

esso ci avrebbe dato la potenza k-esima di una delle radici, se c è un cerchio che la circonda e soddisfa a delle condizioni imposte come nella prima parte ed avremo inoltre che i coefficienti del suo sviluppo in serie soddisfano a delle equazioni differenziali di ordine n. Se invece di considerare il cerchietto c di raggio sufficientemente piccolo purchè non abbia sul suo interno e nel suo contorno nessun'altra radice consideriamo un cerchio C grande perchè possa includere tutte le radici e ciò come si sa dall'algebra è sempre possibile, avremo che indicando con:

$$\omega'_0, \quad \omega'_1, \quad \omega'_2, \ldots, \quad \omega'_{n-1}$$

le radici dell'equazione trasformata $f(y)$ ottenuta dalla $\theta(y)$ per una trasformazione data ai coefficienti sarà:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \omega'^k_r = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{y^k f'(y)}{f(y)}\, d y$$

ed il coefficiente sarà uguale alla somma di funzioni ipergeometriche di $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, poichè quelli di posto α-esimo delle serie che dànno:

$$\omega'^k_0, \quad \omega'^k_1, \quad \omega'^k_2, \ldots, \quad \omega'^k_{n-1}$$

sono rispettivamente i residui delle funzioni:

$$y^{\beta+k}(y-\omega_0)^{-\alpha}(y-\omega_1)^{-\alpha}\ldots(y-\omega_{p-1})^{-\alpha}(y-\omega_p)^{-\alpha}\ldots(y-\omega_{n-1})^{-\alpha}$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

rispetto alle singolarità:

$$\omega_0, \quad \omega_1, \ldots, \quad \omega_{p-1}, \quad \omega_p, \ldots, \quad \omega_{n-1}$$

interne al cerchio C.

3). Essendo i coefficienti degli inviluppi in serie di una funzione ipergeometrica d'ordine n funzioni ipergeometriche d'ordine $n-1$, potremo determinare il coefficiente della serie in discorso ricorrendo a funzioni ipergeometriche d'ordine via via inferiore.

Facciamone un'applicazione per l'equazione di terzo grado.

Sia l'equazione:

$$\theta(y) = a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$$

e siano:

$$\omega_0 \quad \omega_1 \quad \omega_2$$

le radici, si avrà dando una variazione ai coefficienti dell'equazione:

$$f(y) = (a_3+p_3)y^3 + (a_2+p_2)y^2 + (a_1+p_1)y + (a_0+p_0) = 0$$

ed il valore delle radici di questa equazione sarà dato dalla serie:

$$y = \omega_0 + \sum_{\alpha>0} \frac{\alpha!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!} \bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\, p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$$

ove:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{(-1)^\gamma}{2\pi i \alpha}\int_c y^\beta (\theta(y))^{-\alpha}\, dy =$$

$$= \frac{(-1)^\alpha a_3^{-\alpha}}{2\pi i \alpha}\int_c \frac{y^\beta (y-\omega_1)^{-\alpha}(y-\omega_2)^{-\alpha}}{(y-\omega_0)^\alpha}\, dy$$

considerando la radice ω_0 il cerchietto passa infinitamente vicino alla radice più prossima ad ω_0, cioè per esempio ω_2, onde:

$$|y - \omega_2| < |\omega_1 - \omega_2|.$$

Ciò posto sviluppiamo in serie il binomio $(y - \omega_1)^{-\alpha}$ facendo la trasformazione

$$(y - \omega_2 - \omega_1 + \omega_2) = ((y - \omega_2) - (\omega_1 - \omega_2))^{-\alpha} =$$

$$= (\omega_2 - \omega_1)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{-\alpha}{k} (y - \omega_2)^k (\omega_1 - \omega_2)^{-k}$$

e sostituendo nell'integrale si ottiene una serie di potenze i cui coefficienti a meno di un fattore costante sono della forma:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{y^\beta (y - \omega_2)^{k-\alpha}}{(y - \omega_0)^\alpha} d\,y$$

che sono funzioni ipergeometriche di Gauss.

Possiamo inoltre determinare una forma generale del coefficiente in relazione allo sviluppo generale in serie delle funzioni ipergeometriche.

Prendiamone la forma generale

$$\overline{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha}}{2\pi i \alpha} \int_c \frac{y^\beta (y - \omega_1)^{-\alpha} (y - \omega_2)^{-\alpha} \ldots (y - \omega_{n-1})^{-\alpha}}{(y - \omega_0)^\alpha} \cdot d\,y.$$

Se pensiamo fissate nel piano (y) le radici possiamo prendere un cerchietto tale che:

$$|y - \omega_0| \quad < |\omega_0 - \omega_p| \quad p = (1, \ldots, n-1)$$

ed avremo:

$$\overline{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha} \rho(\omega_0)}{2\pi i \alpha} \int_c \frac{y^\beta}{(y - \omega_0)^\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\omega_0 - y}{\omega_0 - \omega_1}\right)^{-\alpha} \ldots$$

$$\ldots \left(1 - \frac{\omega_0 - y}{\omega_0 - \omega_{n-1}}\right)^{-\alpha} \cdot d\,y$$

essendo

$$\rho(\omega_0) = (\omega_0 - \omega_1)^{-\alpha} (\omega_0 - \omega_2)^{-\alpha} \ldots (\omega_0 - \omega_{n-1})^{-\alpha} = (\varphi_1(\omega_0))^{-\alpha}$$

Ora

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega_0 - y}{\omega_0 - \omega_p}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!} \left(\frac{\omega_0 - y}{\omega_0 - \omega_p}\right)^n \\ (p = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ed indicando con $c^{(1)}_{m_1}\, c^{(2)}_{m_2} \ldots c^{(n-1)}_{m_{n-1}}$ i coefficienti di dette serie avremo eseguendo il prodotto, che il coefficiente di esso sarà

$$c_k = \sum c^{(1)}_{m_1}\, c^{(2)}_{m_2} \ldots c^{(n-1)}_{m_{n-1}}$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i sistemi di valori per cui

$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{n-1} = k$$

essendo

$$c_1' = \frac{\alpha}{\omega_0 - \omega_1} + \frac{\alpha}{\omega_1 - \omega_2} + \cdots + \frac{\alpha}{\omega_0 - \omega_{n-1}}$$

e

$$c_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\omega_0-\omega_1)^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\omega_0-\omega_2)^2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\omega_0-\omega_{n-1})^2} + \frac{\alpha^2}{(\omega_0-\omega_1)(\omega_0-\omega_2)} + \cdots + \frac{\alpha^3}{(\omega_0-\omega_{n-2})(\omega_0-\omega_{n-1})}\,.$$

. . . .

Così verrà:

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha}}{2\pi i \alpha}\, \rho(\omega_0) \sum_{k=0}^{k=\alpha-1} (-1)^k c_k \int_c \frac{y^\beta}{(y-\omega)^{\alpha-k}} \cdot dy$$

cioè

$$\bar{A}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{(-1)^\alpha a_n^{-\alpha}\rho(\omega_0)}{\alpha}\binom{\beta}{\alpha-1} \times$$

$$\times\, \omega_0^{\beta-\alpha+1} \sum_{k=0}^{k=\alpha-1} (-1)^k c_k \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{(\beta-\alpha+1\ldots(\beta-\alpha+k)}\, \omega_0^k\,.$$

Se anzichè dare degli incrementi a tutti i coefficienti diamo un incremento ad uno solo, per esempio ad a_p un incremento p_p, avremo:

$$y = \omega + \sum_{\alpha>0} A_\alpha p_p^\alpha$$

e per quanto abbiamo determinato

$$y = \omega_0 \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha}\binom{p\alpha}{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{k=\alpha-1} (-1)^k c_k \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{(\beta-\alpha+1)\ldots(\beta-\alpha+k)}\,\omega_0^k \right) \left(\frac{p_p\,\omega_0^{p-1}}{a_n\,\varphi_1(\omega_0)} \right)^\alpha \right\}.$$

III.

1). Consideriamo l'equazione trinomia:

$$f(y) = y^n + p\,y^r + q = 0.$$

Indichiamo con ω_0 una delle n radici dell'equazione binomia

$$\theta(y) = y^n + q = 0$$

e supponiamo che la $f(y)$ si sia ottenuta dalla $\theta(y)$ per una variazione p al coefficiente della potenza enesima, che in $\theta(y)$ è uguale allo zero; per quanto abbiamo veduto nella prima parte si ha:

$$y = \omega_0 + \sum_{\alpha > 0} \frac{\omega_0^{r\alpha+1}}{\alpha\, q^\alpha\, n} \binom{\frac{r\alpha+1}{n} - 1}{\alpha - 1} \cdot p^\alpha \tag{1}$$

che ci dà la radice dell'equazione trinomia per una variazione data p tale da rendere convergente la serie. Essa serie sarà dunque convergente in un cerchietto di centro zero e raggio p conveniente, ma ciascun ramo di funzione algebrica è funzione analitica che prolungata dà sempre un ramo della funzione algebrica. Questa funzione algebrica ha su tutta la sfera complessa le singolarità che risultino dai punti critici o di diramazione, e la serie che la rappresenta in un intorno di uno di essi convergerà in un cerchio di convergenza che si estende sino al più prossimo punto critico.

Determiniamo i punti critici, cioè i punti che rendono:

$$f(y, p) = 0 \text{ e } \frac{\partial f(y, p)}{\partial y} = 0$$

nel nostro caso i valori di p che soddisfano al sistema:

$$y^n + p\,y^r + q = 0 \tag{1}$$

e

$$n\,y^{n-1} + r\,p\,y^{r-1} = 0 \tag{2}$$

la soluzione $y = 0$ della (2) è da escludersi, onde facendo una trasformazione

$p = - n p_1^r r^{r-1}$ dalla (2) si ha:

$$n y^{n-1} - n r^r p_1^r = 0 \tag{3}$$

e i punti critici sostituendo nella (1) il valore di y ricavato dalla (3) saranno dati da

$$p_1 = \frac{1}{r} \sqrt[nr]{\left(\frac{q r}{n - r}\right)^{n-r}}$$

e da questi valori i valori di p.

Determinati i punti critici possiamo applicare il Teorema di MITTAG-LEFFLER per ottenere una serie di polinomi che rappresenti la funzione in tutto il suo campo di validità.

Il Teorema di MITTAG-LEFFLER dice:

« La funzione $f(x)$ definita dalla serie $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$ può essere rappresentata da una serie di polinomi $\sum_{n=0}^{n=\infty} p_n(x)$ che converge nella stella relativa ai punti singolari di $f(x)$ ed uniformemente in tutte le aree interne ».

I punti singolari nel nostro caso sono i punti critici determinati che sono su una circonferenza, per modo che potremo formare la stella di MITTAG-LEFFLER e si avrà:

$$y = \sum_0^\infty \left(\lambda_{\alpha_0} c_0 + \lambda_{\alpha_1} c_1 p + \lambda_{\alpha_2} c_2 p^2 + \ldots + \lambda_{\alpha_{s_\alpha}} c_{s_\alpha} p^{s_\alpha} \right)$$

ove $\lambda_{\alpha_0}, \lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \ldots, \lambda_{\alpha_s}$ sono numeri che vengono una volta tanto determinati. $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{s_\alpha}$ saranno nel nostro caso funzioni ipergeometriche della forma

$$c_\alpha = \frac{\omega_0^{r\alpha+1}}{\alpha q^\alpha n} \begin{pmatrix} \frac{r\alpha+1}{n} - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$y = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{s_r=0}^{s_r=s_\alpha} \lambda_{\alpha s_r} \frac{\omega_0^{r s_r+1}}{\alpha q^\alpha n} \begin{pmatrix} \frac{r s_r + 1}{n} - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} p^{s_r}.$$

Poichè mediante la trasformazione di TSCHIRNÄUS, e mediante una sola equazione di terzo e quarto grado è possibile far sparire da un'equazione di 5.° grado i tre termini tra il primo e l'ultimo, l'equazione di 5° grado assume le 4 forme

$$y^5 + p\,y^h + q = 0$$
$$(h = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Per modo che potremo avere lo sviluppo in serie di una delle radici come applicazione della (4).

Consideriamo il primo caso, cioè

$$f(y) = y^5 + p\,y + q = 0,$$

la trasformazione sarà $p = -5\,p_1$ e quindi l'equazione diviene

$$y^5 - 5\,p_1\,y + q = 0$$

ed i punti critici saranno dati da:

$$p_1 = \sqrt[5]{\left(\frac{q}{4}\right)^4} \text{ e } p = -5\sqrt[5]{\left(\frac{q}{4}\right)^4}$$

ed in generale

$$y = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{s_r=0}^{s_r=s_\alpha} \lambda_{\alpha_{s_r}} \frac{\omega_k^{s_r+1}}{\alpha\, q^{\cdot} 5} \begin{pmatrix} \frac{s_r+1}{5} - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} p^{s_r}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

rappresenterà le 5 radici.

Nel caso che

$$f(y) = y^5 + p\,y + 1$$

$$y = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{s_r=0}^{s_r=s_\alpha} \lambda_{\alpha_{s_r}} \frac{\omega_k^{s_r+1}}{5\,\alpha} \begin{pmatrix} \frac{s_r+1}{5} - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} p^{s_r}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

che si può considerare come un caso particolare della

$$y^m - m\,p_1\,y + 1 = 0$$

per la quale

$$y = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \sum_{s_r=0}^{s_r=s_\alpha} \lambda_{\alpha_{s_r}} \frac{\omega_k^{s_r+1}}{m\,\alpha} \begin{pmatrix} \frac{s_r+1}{m} - 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} p^{s}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, m-1).$$

Naturalmente il metodo potrà servire a calcolare approssimativamente le radici delle equazioni e facciamo il caso di voler calcolare con approssimazione le radici dell'equazione, limitandoci ai primi tre termini,

$$y^7 + y + 1 = 0.$$

Calcolando le costanti si ha:

$$\begin{array}{lll} \lambda_{0_0} = 1 & \lambda_{1_0} = 0 & \lambda_{2_0} = 0 \\ & \lambda_{1_1} = 1 & \lambda_{2_1} = 0 \\ & & \lambda_{2_2} = \frac{1}{2} \\ & & \lambda_{2_3} = \frac{1}{8} \end{array}$$

da cui:

$$y = \omega_k + c_1 + \frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{8} c_3$$

ove

$$c_1 = \frac{\omega_k^2}{7} \quad c_2 = \frac{\omega_k^3}{14} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_3 = \frac{\omega_k^4}{21} \begin{pmatrix} \frac{4}{7} - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

dove ω_k è una delle $\sqrt[k]{-1}$, cioè

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{7}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

Determinata quindi sul cerchio di raggio 1 la radice da cui partiamo la y si otterrà sul cerchio che ha per centro ω_k, $\omega_k + \frac{\omega_k^2}{7}$, ecc.... e raggio che può a volta a volta determinarsi.

2). Se indichiamo dunque con:

$$\varphi_1(p), \quad \varphi_2(p), \ldots, \quad \varphi_n(p)$$

le radici dell'equazione trinomia

$$y^n + p\,y^r + q = 0,$$

quelle dell'equazione

$$y^n + m\,y^s + p\,y^r + q = 0,$$

si otterranno mediante sviluppi in serie di polinomi i cui coefficienti sono funzioni ipergeometriche di

$$\varphi_1(p),\ \varphi_2(p), \ldots,\ \varphi_n(p)$$

serie di polinomi procedenti secondo le potenze di m.

I coefficienti si determineranno secondo quanto è stato detto nella prima e seconda parte.

Se indichiamo con

$$\psi_1(p_1\,m),\ \psi_2(p_1\,m), \ldots,\ \psi_n(p_1\,m)$$

le n radici dell'equazione quadrinomia, quelle della seguente:

$$y^n + h\,y^k + m\,y^s + p\,y^r + q = 0$$

si otterranno analogamente ed i coefficienti dello sviluppo saranno pure funzioni ipergeometriche di

$$\psi_1(p_1\,m),\ \psi_2(p_1\,m), \ldots,\ \psi_n(p_1\,m)$$

così di seguito sino all'equazione di grado n della forma che vogliamo, per modo che avremo così un metodo generale per la risoluzione delle equazioni algebriche mediante sviluppi in serie.

Possiamo infine osservare che la relazione fra le radici di un'equazione algebrica e le funzioni del Pochhammer sussiste anche nel classico sviluppo di Lagrange ed in quello del Burmann quando la funzione della radice è una funzione razionale intera di essa

Jesi, Febbraio 1920.