ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Giuseppe Jung** in Milano
Ulisse Dini in Pisa | **Corrado Segre** in Torino

SERIE III. * TOMO XVIII.

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA REBESCHINI DI TURATI E C.

OFFICINA CARTE VALORI

1911.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XVIII.° (SERIE III.ª)

Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche.

(*Di* LUIGI BIANCHI, *a Pisa.*)

INTRODUZIONE.

La presente Memoria porta un nuovo contributo alla teoria delle superficie a curvatura costante negativa (pseudosferiche) collo studio di una notevole classe di deformazioni continue di cui tali superficie sono suscettibili. In queste deformazioni *le trajettorie descritte dai singoli punti sono inclinate sopra ciascuna superficie del sistema di un angolo costante* σ, che può del resto essere una costante assoluta (non retto però nè nullo (*)); ovvero, ciò che è il caso più generale, l'angolo σ può variare in modo continuo dall'una all'altra superficie del sistema.

Una tale serie ∞^1 di superficie pseudosferiche si dirà anche *un sistema di deformate isogonali della pseudosfera,* o più brevemente *un sistema* (Σ).

Il problema di costruire questi sistemi (Σ) conduce, trattato analiticamente, ad un sistema simultaneo di equazioni alle derivate parziali (§§ 6, 8 della Memoria), sulle quali i teoremi generali noti permetterebbero di riconoscere il grado di arbitrarietà dei detti sistemi (Σ) e di stabilire la proposizione seguente:

Per definire un sistema (Σ) *di deformate isogonali della pseudosfera si può dare ad arbitrio una configurazione iniziale della superficie pseudosferica, assegnando pure arbitrariamente la trajettoria che deve descrivere un punto della superficie; il sistema* (Σ) *ne risulta individuato.*

(*) Il caso $\sigma = \frac{\pi}{2}$ deve essere escluso come impossibile; l'altro caso $\sigma = 0$ lo sarà nel seguito per maggior chiarezza. Questo non è però propriamente un caso d'eccezione, poichè esistono ancor qui le deformazioni corrispondenti e sono date dalle flessioni continue della superficie in sè medesima.

Questi sistemi (Σ) dipendono adunque da quattro funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna, precisamente come le famiglie di LAMÉ costituite di superficie colla medesima curvatura costante (sistemi di WEINGARTEN). Ma se la teoria generale dei sistemi di equazioni a derivate parziali consente di stabilire il teorema fondamentale d'esistenza, essa non permetterebbe, nello stato attuale dell'analisi, di conseguire effettivi risultati pel problema d'integrazione. Tanto più notevole sembra quindi che, anche in questo caso dei sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera, si possano applicare i metodi geometrici della trasformazione complementare e di BÄCKLUND e si arrivi così a costruire di tali sistemi (Σ) dipendenti da un numero grande ad arbitrio di costanti arbitrarie, con sole quadrature, ed anzi, coll'uso ulteriore del teorema di permutabilità, *con sole operazioni algebriche e di derivazione.*

Insomma i sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera si comportano, rispetto alle trasformazioni, affatto analogamente come i sistemi di WEINGARTEN.

Riguardo anzi alla trasformazione *complementare*, è notevole che gli attuali sistemi (Σ) dimostrano un comportamento ancor più semplice: lo stesso delle superficie pseudosferiche isolate. È noto invero che un sistema di WEINGARTEN ammette *due* soli sistemi contigui per trasformazione complementare, mentre si vedrà che ciascun sistema (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera possiede una *semplice infinità* di sistemi complementari (§§ 11, 12).

Per la trasformazione generale di BÄCKLUND il comportamento è il medesimo nei due casi, cioè anche qui ad ogni sistema (Σ) sono contigui per trasformazioni di BÄCKLUND una *doppia infinità* di sistemi trasformati. Soltanto nel caso che l'angolo σ sia assolutamente costante vi ha una speciale trasformazione di BÄCKLUND, che si comporta in modo singolare, ed ha carattere involutorio. Essa si effettua *in termini finiti* appena dato il sistema (Σ), mentre per le generali occorre integrare un'equazione di RICCATI.

Nel confronto fra le proprietà delle famiglie di LAMÉ di superficie pseudosferiche e quelle degli attuali sistemi (Σ) non è da tacersi una circostanza che produceva, per la ricerca nel caso attuale, una maggiore difficoltà. Nelle famiglie di LAMÉ la legge di corrispondenza fra i punti delle superficie della famiglia trasformata resta semplicemente fissata dalle trajettorie ortogonali del nuovo sistema, e si ottiene quindi senz'altro da quella relativa alle superficie della famiglia iniziale applicando la trasformazione stessa di BÄCKLUND.

Nel caso invece dei sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera la trasformazione di BÄCKLUND, come pure la complementare, non possono cangiare direttamente le trajettorie isogonali del primo sistema nelle trajettorie isogonali del secondo, poichè la legge di corrispondenza stabilita dalla trasformazione fra i punti delle due falde focali della congruenza non è una relazione di applicabilità fra queste due falde. Occorreva invece in questo caso combinare la trasformazione di Bäcklund colla speciale legge di applicabilità delle due falde che corrisponde all'affinità d'Ivory per due quadriche omofocali. Per la trasformazione complementare poi è un'osservazione analitica che suggerisce l'opportuna legge di corrispondenza.

In questa Memoria mi sono limitato alla ricerca delle deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante *nello spazio euclideo.* Per altro i medesimi metodi si applicano a risolvere le questioni analoghe negli spazî a curvatura costante. Di queste tratterò in una seconda Memoria, dove verrà particolarmente rilevato il caso delle deformazioni isogonali delle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica, per le quali si presentano circostanze affatto speciali.

Ma di un'altra maggiore estensione delle presenti ricerche voglio qui da ultimo far cenno: essa riguarda la teoria della deformazione delle quadriche generali esposta nel Vol. III delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (*). Anche in questo caso si hanno delle deformazioni continue delle superficie applicabili sulle quadriche, che sono da riguardarsi come la naturale estensione di quelle isogonali qui trattate per le superficie pseudosferiche (**). Ed appunto la teoria generale delle trasformazioni per le deformate delle quadriche da me costruita può applicarsi allo studio di queste deformazioni continue, nel medesimo modo come nel presente lavoro vengono utilizzate la trasformazione complementare e quella di Bäcklund per le deformazioni isogonali continue delle superficie pseudosferiche.

(*) Le citazioni relative al mio libro saranno contrassegnate nel seguito colla semplice indicazione del Volume.

(**) Un accenno alle deformazioni *infinitesime* di questa specie è già dato a pag. 113. Vol. III.

§ 1.

Formole preliminari.

Alla ricerca delle deformazioni isogonali *continue* delle superficie pseudosferiche, di cui vogliamo occuparci nel presente lavoro, dobbiamo far precedere uno studio sulle deformazioni *infinitesime* di questa specie. Qui diventano di fondamentale importanza le osservazioni già esposte nel mio libro (Vol. II, pag. 397), che collegano queste deformazioni infinitesime colle trasformazioni di Bäcklund.

Data una qualunque superficie pseudosferica S, il cui raggio R porremo sempre nel seguito per semplicità $=1$, consideriamo una sua trasformata S' per la trasformazione B_σ di Backlund, sicchè S ed S' sono le due falde focali di una congruenza pseudosferica, costituita dai raggi FF' che uniscono i punti corrispondenti F, F' di S, S' (fuochi). In questa congruenza è costante ogni segmento focale $FF' = \cos\sigma$, ed è costante altresì $= \frac{\pi}{2} - \sigma$, l'angolo dei piani focali. Ricordiamo allora (*Lezioni*, l. c.) che la superficie S è suscettibile di una deformazione infinitesima nella quale ciascun punto F di S si sposta parallelamente alla normale nel punto corrispondente F' all'altra falda. Tale deformazione è quindi appunto isogonale, e σ è l'angolo corrispondente. Siccome poi, fissata la S, resta arbitraria per un suo punto iniziale F la grandezza e l'orientazione del segmento focale FF', ne risulta che in queste deformazioni infinitesime isogonali della S resta affatto arbitraria *per un punto iniziale F* la direzione dello spostamento, fissata la quale viene individuata la deformazione.

Ma quello che più importa al nostro scopo è di provare che per tal modo si ottengono *tutte* le deformazioni infinitesime isogonali delle superficie pseudosferiche. Dobbiamo perciò dimostrare il teorema seguente, che al luogo citato delle *Lezioni* trovasi soltanto enunciato.

Ad ogni deformazione infinitesima isogonale di una superficie pseudosferica S corrisponde una congruenza pseudosferica i cui raggi si ottengono tirando, per ogni punto di S e nel piano tangente, la retta normale alla direzione dello spostamento del punto stesso.

Nella dimostrazione che qui daremo di questa proprietà fondamentale verranno insieme nuovamente dimostrate le altre proprietà sopra ricordate.

Riferiamo la nostra superficie pseudosferica S (il cui raggio R abbiamo posto $= 1$) al sistema ortogonale (u, v) formato da un sistema di *oricicli* paralleli $u = \text{cost.}$ e dalle loro geodetiche normali $v = \text{cost.}$ (parallele fra loro nel senso non-euclideo), e prendiamo i parametri u, v per modo che il quadrato dell'elemento lineare della S assuma la forma normale (parabolica)

$$d s^2 = \frac{d u^2 + d v^2}{u^2}. \tag{1}$$

Per fissare la configurazione attuale della S basterà dare ancora, in funzione di u, v, i coefficienti

$$D, \ D', \ D''$$

della sua seconda forma quadratica fondamentale, i quali dovranno unicamente soddisfare alle due equazioni di Codazzi, che qui assumono la forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} = 0 \\ &\frac{\partial D'}{\partial v} - \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{D + D''}{u}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ed insieme alla equazione di Gauss:

$$D'^2 - D D'' = \frac{1}{u^4}. \tag{3}$$

Supposta così fissata la S, indichiamo, come al solito, con x, y, z le coordinate di un punto variabile, sopra S, espresse per le variabili u, v, ed introduciamo come *triedro principale* quello formato in ogni punto di S: 1.° dalla tangente alla geodetica (v), 2.° dalla tangente all'oriciclo (u), 3.° dalla normale alla superficie.

Denotando allora con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) i coseni di queste rispettive direzioni, varranno le formole fondamentali del seguente quadro (cf. *Lezioni*, Vol. II, pag. 91).

$$\left.\begin{gathered} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{X_1}{u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{X_2}{u} \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} = u D . X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = u D' . X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = - u D . X_1 - u D' . X_2 \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} = - \frac{X_2}{u} + u D' . X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = \frac{X_1}{u} + u D'' X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial v} = - u D' . X_1 - u D'' . X_2, \end{gathered}\right\} \tag{a}$$

colle analoghe in (y, Y), (z, Z), che omettiamo, come sempre in seguito, di scrivere.

Supponiamo ora che la superficie S ammetta *una deformazione isogonale infinitesima*, nella quale ciascun punto $F \equiv (x, y, z)$ di S si sposti in una direzione, di coseni X', Y', Z', inclinata dell'angolo costante σ sulla superficie. Potremo assumere questi coseni come dati dalle formole

$$X' = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \,.\, X_1 - \cos\sigma\cos\varphi \,.\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma \,.\, X_3 \tag{4}$$

(e analoghe per Y', Z'), dove $\varphi = \varphi(u, v)$ è l'angolo che la direzione normale alle (X', Y', Z'), nel piano tangente di S, forma colla geodetica (v). I raggi condotti in quest'ultima direzione formano una congruenza rettilinea di cui S è la prima falda focale, mentre la seconda S' ha in ogni punto F' per normale la direzione (X', Y', Z') dello spostamento e sulle due falde S, S' si corrispondono le asintotiche (*Lezioni*, Vol. II, pag. 52). Indicando con ρ la distanza focale FF', per le coordinate x', y', z' del secondo fuoco F' avremo:

$$x' = x + \rho(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2), \tag{5}$$

e il teorema enunciato si riduce a provare che ρ deve essere costante, precisamente $\rho = \cos\sigma$.

§ 2.

Dimostrazione del teorema fondamentale.

Cominciamo dal derivare le (4), (5) rapporto ad u, v, osservando il quadro (a); otteniamo dapprima

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X'}{\partial u} &= \left[\cos\sigma\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} - u\,D\operatorname{sen}\sigma\right]X_1 + \\
&+ \left[\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} - u\,D'\operatorname{sen}\sigma\right]X_2 + u\cos\sigma\,(D\operatorname{sen}\varphi - D'\cos\varphi)\,X_3 \\
\frac{\partial X'}{\partial v} &= \left[\cos\sigma\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{u}\right) - u\,D'\operatorname{sen}\sigma\right]X_1 + \\
&+ \left[\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{u}\right) - u\,D''\operatorname{sen}\sigma\right]X_2 + u\cos\sigma(D'\operatorname{sen}\varphi - D''\cos\varphi)X_3
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial u}&=\left[\frac{1}{u}+\cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial u}-\rho\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right]X_1+\\&+\left[\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\rho}{\partial u}+\rho\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right]X_2+u\rho(D\cos\varphi+D'\operatorname{sen}\varphi)X_3\\\frac{\partial x'}{\partial v}&=\left[\cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial v}-\rho\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{1}{u}\right)\right]X_1+\\&+\left[\frac{1}{u}+\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\rho}{\partial v}+\rho\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{1}{u}\right)\right]X_2+u\rho(D'\cos\varphi+D''\operatorname{sen}\varphi)X_3.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Ora, siccome la normale alla superficie S' ha la direzione (X', Y', Z'), debbono sussistere le due equazioni

$$\sum X'\frac{\partial x'}{\partial u}=0,\quad \sum X'\frac{\partial x'}{\partial v}=0\ (*),$$

le quali, calcolate mediante le (4), (7), dànno

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}&=u\operatorname{tg.}\sigma\,(D\cos\varphi+D'\operatorname{sen}\varphi)+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho u}\\\frac{\partial\varphi}{\partial v}&=u\operatorname{tg.}\sigma\,(D'\cos\varphi+D''\operatorname{sen}\varphi)-\frac{\cos\varphi}{\rho u}+\frac{1}{u}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Indichiamo ora con εH, essendo $H=H(u, v)$ una funzione di u, v ed ε una costante infinitesima, l'ampiezza dello spostamento infinitesimo che subisce il punto (x, y, z) di S nella deformazione isogonale supposta. Le componenti dello spostamento secondo gli assi saranno

$$\varepsilon HX',\quad \varepsilon HY',\quad \varepsilon HZ',$$

e dovranno per ciò sussistere le tre equazioni caratteristiche delle deformazioni infinitesime (*Lezioni*, Vol. II, pag. 4)

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(HX')}{\partial u}=0,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(HX')}{\partial v}=0$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(HX')}{\partial v}+\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(HX')}{\partial u},$$

(*) Il segno Σ indica, qui ed in seguito, la somma di tre termini simili rispetto ai tre assi.

le quali, calcolate mediante le formole del quadro (a) e le (6), ci dànno le tre equazioni

$$\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log H}{\partial u} + \cos\sigma\cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - u\, D \operatorname{sen}\sigma = 0$$

$$-\cos\sigma\cos\varphi \frac{\partial \log H}{\partial v} + \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi}{u} - u\, D'' \operatorname{sen}\sigma = 0$$

$$\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log H}{\partial v} - \cos\sigma\cos\varphi \frac{\partial \log H}{\partial u} + \cos\sigma\cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} +$$

$$+ \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\cos\sigma\cos\varphi}{u} - 2\, u\, D' \operatorname{sen}\sigma = 0.$$

Se in queste introduciamo i valori (8) di $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, le due prime dànno

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log H}{\partial u} &= u \operatorname{tg}\sigma\,(D \operatorname{sen}\varphi - D' \cos\varphi) - \frac{\cos\varphi}{\rho u} \\ \frac{\partial \log H}{\partial v} &= u \operatorname{tg}\sigma\,(D' \operatorname{sen}\varphi - D'' \cos\varphi) - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho u}\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

e la terza, con questi valori di $\frac{\partial \log H}{\partial u}$, $\frac{\partial \log H}{\partial v}$, si risolve in un'identità.

Prendiamo ora le (8), (9) e costruiamo le rispettive condizioni d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \log H}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \log H}{\partial v}\right) = 0,$$

servendoci delle (8), (9) stesse, nonchè delle equazioni (2), (3) di Codazzi e Gauss. Troviamo così dapprima le due equazioni

$$\cos\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{1}{u}\left(\frac{\rho^2}{\cos^2\sigma} - 1\right)$$

$$\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \rho}{\partial u} - \cos\varphi \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

ovvero

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{\cos\varphi}{u}\left(\frac{\rho^2}{\cos^2\sigma} - 1\right), \qquad \frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{u}\left(\frac{\rho^2}{\cos^2\sigma} - 1\right).$$

Se per queste costruiamo nuovamente la condizione d'integrabilità, troviamo

$$\frac{1}{u}\left(\frac{\rho^2}{\cos^2\sigma}-1\right)\left[\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{u}\right]=0,$$

ed osservando le (8), abbiamo semplicemente

$$\left(\frac{\rho^2}{\cos^2\sigma}-1\right)(D\cos^2\varphi+2\,D'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+D''\operatorname{sen}^2\varphi)=0. \tag{10}$$

È facile vedere che il secondo fattore $D\cos^2\varphi+2D'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+D''\operatorname{sen}^2\varphi$ non può essere nullo. E invero, se ciò avvenisse, lungo le linee inviluppate dai raggi della congruenza, che hanno l'equazione differenziale

$$d\,u:d\,v=\cos\varphi:\operatorname{sen}\varphi,$$

avremmo $D\,d\,u^2+2\,D'\,d\,u\,d\,v+D''\,d\,v^2=0$, e queste linee sarebbero dunque asintotiche, onde le due falde focali coinciderebbero e sarebbe $\rho=0$, $\sigma=\frac{\pi}{2}$ contro l'ipotesi.

Dunque nella (10) è nullo necessariamente il primo fattore, e si ha quindi $\rho=\pm\cos\sigma$, risultato che dimostra il nostro teorema. Si osservi di più che potremo supporre senz'altro $\rho=\cos\sigma$, bastando cangiare nel caso opposto σ in $-\sigma$ e φ in $\varphi+\pi$.

§ 3.

Formole per le deformazioni infinitesime isogonali.

Se nelle formole precedenti introduciamo ora il valore trovato per ρ, $\rho=\cos\sigma$, otteniamo le formole fondamentali per le deformazioni infinitesime isogonali delle superficie pseudosferiche. Intanto le (5) e le (8) diventano rispettivamente

$$\ldots\ x'=x+\cos\sigma\,(\cos\varphi\,X_1+\operatorname{sen}\varphi\,X_2) \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}&=u\operatorname{tg}\sigma\,(D\cos\varphi+D'\operatorname{sen}\varphi)+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{u\cos\sigma}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}&=u\operatorname{tg}\sigma\,(D'\cos\varphi+D''\operatorname{sen}\varphi)+\frac{\cos\sigma-\cos\varphi}{u\cos\sigma}\,.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dal calcolo eseguito al paragrafo precedente risulta poi che, essendo soddisfatte le equazioni (2), (3) di Codazzi e di Gauss, le (12) formano un sistema illimitatamente integrabile, e scelta una qualunque loro soluzione φ, le (11) definiscono la seconda falda S' della congruenza pseudosferica.

Le (12) ci dànno le formole per la trasformazione B_σ di Bäcklund, per la superficie S riferita al sistema geodetico u, v, precisamente sotto la forma osservata nel Vol. III delle *Lezioni* (pag. 143-144), ove furono trovate come caso particolare delle trasformazioni per le superficie applicabili sulle quadriche. Qui invece le abbiamo dedotte direttamente come espressione delle proprietà inerenti alle deformazioni infinitesime isogonali delle superficie pseudosferiche, ovvero, ciò che torna lo stesso, quale espressione delle proprietà metriche delle congruenze pseudosferiche.

È da osservarsi poi che l'ampiezza εH dello spostamento infinitesimo viene determinata, secondo le (9), dalle formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \log H}{\partial u} &= u \operatorname{tg}\sigma\,(D \operatorname{sen}\varphi - D' \cos\varphi) - \frac{\cos\varphi}{u\cos\sigma}\\ \frac{\partial \log H}{\partial v} &= u \operatorname{tg}\sigma\,(D' \operatorname{sen}\varphi - D'' \cos\varphi) - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{u\cos\sigma}\,.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dalle (12), (13) è facile ora dedurre la proprietà per noi importante che: *le due funzioni H, φ di u, v soddisfano due equazioni simultanee alle derivate parziali del primo ordine, affatto indipendenti dalla speciale configurazione di S.* Queste equazioni vengono così a caratterizzare tutte le congruenze pseudosferiche corrispondenti ad un dato angolo dei piani focali.

Per ottenere le indicate equazioni cominciamo dal combinare la prima delle (12) colla prima delle (13), e medesimamente la seconda colla seconda, e risolviamole rispetto alle coppie (D, D'), (D', D''); otteniamo così le formole

$$\left.\begin{aligned}D &= \frac{\cot\sigma}{u}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial \log H}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),\\ D' &= \frac{\cot\sigma}{u}\left(-\cos\varphi\frac{\partial \log H}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{u\cos\sigma}\right),\\ D' &= \frac{\cot\sigma}{u}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial \log H}{\partial v} + \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1-\cos\sigma\cos\varphi}{u\cos\sigma}\right),\\ D'' &= \frac{\cot\sigma}{u}\left(-\cos\varphi\frac{\partial \log H}{\partial v} + \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{u}\right),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

che giova anche scrivere sotto la forma equivalente:

$$\left.\begin{aligned}
D &= \frac{\cot\sigma}{Hu}\frac{\partial}{\partial u}(H \operatorname{sen}\varphi), \qquad D' = -\frac{\cot\sigma}{Hu}\left[\frac{\partial}{\partial u}(H\cos\varphi) + \frac{H}{u\cos\sigma}\right], \\
D' &= \frac{\cot\sigma}{Hu}\left[\frac{\partial}{\partial v}(H\operatorname{sen}\varphi) + H\frac{1-\cos\sigma\cos\varphi}{u\cos\sigma}\right], \\
D'' &= -\frac{\cot\sigma}{Hu}\left[\frac{\partial}{\partial v}(H\cos\varphi) + \frac{H\operatorname{sen}\varphi}{u}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{14*}$$

Paragonando i due valori di D', si ha intanto una delle due equazioni di primo ordine fra H e φ, e cioè

$$\cos\varphi\frac{\partial\log H}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\log H}{\partial v} - \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{2-\cos\sigma\cos\varphi}{u\cos\sigma} = 0, \tag{15}$$

ovvero anche

$$\frac{\partial}{\partial u}(H\cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial v}(H\operatorname{sen}\varphi) + H\frac{2-\cos\sigma\cos\varphi}{u\cos\sigma} = 0. \tag{15*}$$

La seconda delle accennate equazioni si ottiene esprimendo che i valori (14) o (14*) di D, D', D'' debbono soddisfare le due equazioni (2) di Codazzi; sostituendo, ne segue questa unica relazione fra H, φ

$$\frac{\partial\log H}{\partial u} + \frac{1}{u} = u\left(\frac{\partial\log H}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\log H}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

e scrivendola insieme alle (15) si ha il sistema richiesto

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}(H\cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial v}(H\operatorname{sen}\varphi) + H\frac{2-\cos\sigma\cos\varphi}{u\cos\sigma} = 0 \\
&\frac{\partial\log H}{\partial u} + \frac{1}{u} = u\left(\frac{\partial\log H}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\log H}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

È immediata l'osservazione che, se si risolve questo sistema rispetto a $\frac{\partial\log H}{\partial u}$, $\frac{\partial\log H}{\partial v}$ e si scrive la corrispondente condizione d'integrabilità, si ottiene per la funzione φ un'equazione del secondo ordine equivalente al sistema (16).

Più importanti pel nostro scopo attuale sono le osservazioni seguenti. Risulta dalla nostra analisi che: *ad ogni congruenza pseudosferica corrisponde una coppia di funzioni H, φ di u, v soluzioni del sistema* (16).

Ma dimostriamo subito che inversamente: *Ogni coppia* (H, φ) *di soluzioni del sistema* (16) *individua una corrispondente congruenza pseudosferica coll'angolo* $\frac{\pi}{2} - \sigma$ *dei piani focali.*

Abbiamo già visto invero che coi valori (14) di D, D', D'' risultano allora soddisfatte le equazioni (2) di Codazzi. Ma è facile dimostrare che anche la equazione (3) di Gauss rimane verificata, perchè se si costruisce dalle (14) il binomio

$$D'^2 - D D'' = \frac{\cot^2 \sigma}{u^2} \Big\{ \left(-\cos\varphi \frac{\partial \log H}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{u \cos\sigma} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log H}{\partial v} + \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1 - \cos\sigma \cos\varphi}{u \cos\sigma} \right) -$$

$$- \left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log H}{\partial u} + \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \cdot \left(-\cos\varphi \frac{\partial \log H}{\partial v} + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{u} \right) \Big\}$$

e si eseguiscono le riduzioni, ponendo mente alle (16), si trova appunto

$$D'^2 - D D'' = \frac{1}{u^4},$$

Dunque i valori (14) di D, D', D'', soddisfacendo insieme alle equazioni di Codazzi e di Gauss, determinano intrinsecamente una superficie pseudosferica S ed una corrispondente congruenza pseudosferica, o, se si vuole, una deformazione infinitesima isogonale, sotto l'angolo σ, della S. Questo è appunto quanto sopra abbiamo asserito.

§ 4.

Applicabilità delle due falde della congruenza pseudosferica.

Se consideriamo la seconda falda S' della congruenza pseudosferica e nelle formule (7) poniamo per ρ il suo valore $\rho = \cos\sigma$, e per $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ le espressioni (12), otteniamo le altre

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= \left[\frac{\cos^2\varphi}{u} - u \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi\,(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\right] X_1 + \\
&\quad + \left[\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{u} + u\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\right] X_2 + \\
&\quad + u\cos\sigma\,(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\,X_3 \\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= \left[\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{u} - u\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,(D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\right] X_1 + \\
&\quad + \left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{u} + u\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,(D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\right] X_2 + \\
&\quad + u\cos\sigma\,(D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\,X_3 ,
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

che possiamo compendiare in queste pel differenziale totale $d\,x'$

$$d\,x' = \left\{\frac{\cos\varphi}{u}(\cos\varphi\,d\,u + \operatorname{sen}\varphi\,d\,v) - \right.$$

$$\left. - u\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,[(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\,d\,u + (D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\,d\,v]\right\} X_1 +$$

$$+ \left\{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{u}(\cos\varphi\,d\,u + \operatorname{sen}\varphi\,d\,v) + \right.$$

$$\left. + u\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,[(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\,d\,u + (D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\,d\,v]\right\} X_2 +$$

$$+ u\cos\sigma\,[(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\,d\,u + (D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)]\,d\,v\,X_3 .$$

Immaginiamo scritte le analoghe pei differenziali $d\,y'$, $d\,z'$ e, quadrando e sommando, formiamo il $d\,s'^2$ della superficie S'; avremo

$$d\,s'^2 = \frac{1}{u^2}(\cos\varphi\,d\,u + \operatorname{sen}\varphi\,d\,v)^2 +$$
$$+ u^2\,[(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\,d\,u + (D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\,d\,v]^2 .$$

Sappiamo già (e verifichiamo anche coi calcoli seguenti) che questa seconda falda focale S' della congruenza ha la curvatura $K = -1$, come la prima S, ed è quindi applicabile sopra S in ∞^3 modi. Ma fra queste ∞^3 applicabilità delle due falde S, S' ve ne ha *una*, di fondamentale importanza per le ricerche attuali, formulata nella costruzione a pag. 410. Vol. II, delle *Lezioni.* Le formole relative a questa applicabilità, proprio sotto la forma che ora ci occorre, sono date a pag. 146, Vol. III (formole (48)), ove furono dedotte come caso particolare delle formole per *l'affinità* d'Ivory fra due quadriche omofocali. Qui noi faremo una verifica diretta di queste formole che scriviamo

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{u \operatorname{sen} \sigma}{1 - \cos\sigma \cos\varphi} \\ v' &= v + \frac{u \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi}{1 - \cos\sigma\cos\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

e dovremo dunque dimostrare che, con questa trasformazione di variabili, l'elemento lineare (18) della S' si cangia appunto in

$$d s'^2 = \frac{d u'^2 + d v'^2}{u'^2}. \tag{18*}$$

Se formiamo dalle (19) le derivate parziali di u', v', sostituendo per le derivate di φ le espressioni (12), troviamo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial u} &= \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi-\cos\sigma}{1-\cos\sigma\cos\varphi} - \\
&\quad - \frac{u^2\operatorname{sen}\sigma(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi} \\
\frac{\partial v'}{\partial u} &= \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi} + \\
&\quad + \frac{u^2\operatorname{sen}\sigma(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi-\cos\sigma}{1-\cos\sigma\cos\varphi} \\
\frac{\partial u'}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi-\cos\sigma}{1-\cos\sigma\cos\varphi} - \\
&\quad - \frac{u^2\operatorname{sen}\sigma(D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi} \\
\frac{\partial v'}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi} + \\
&\quad + \frac{u^2\operatorname{sen}\sigma(D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi-\cos\sigma}{1-\cos\sigma\cos\varphi},
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

formole che possiamo scrivere nei differenziali

$$d\,u' = \frac{\operatorname{sen}\sigma\,(\cos\varphi\,d\,u + \operatorname{sen}\varphi\,d\,v)}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi-\cos\sigma}{1-\cos\sigma\cos\varphi} -$$

$$-\frac{u^2\operatorname{sen}\sigma\,[(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\,d\,u + (D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\,d\,v]}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi}$$

$$d\,v' = \frac{\operatorname{sen}\sigma\,(\cos\varphi\,d\,u + \operatorname{sen}\varphi\,d\,v)}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi} +$$

$$+\frac{u^2\operatorname{sen}\sigma\,[(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\,d\,u + (D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\,d\,v]}{1-\cos\sigma\cos\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi-\cos\sigma}{1-\cos\sigma\cos\varphi}.$$

Quadrando e sommando queste ultime, coll'osservare che si ha identicamente

$$(\cos\varphi-\cos\sigma)^2 + \operatorname{sen}^2\sigma\operatorname{sen}^2\varphi = (1-\cos\sigma\cos\varphi)^2, \tag{21}$$

otteniamo

$$d\,u'^2 + d\,v'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{(1-\cos\sigma\cos\varphi)^2}\Big\{(\cos\varphi\,d\,u + \operatorname{sen}\varphi\,d\,v)^2 +$$

$$+ u^4\,[(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)\,d\,u + (D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)\,dv]^2\Big\},$$

e questa, per la prima delle (19) prova appunto l'identità dei due elementi lineari (18) e (18*), che era quanto volevamo dimostrare.

Importa altresì che calcoliamo per la seconda falda S' della congruenza pseudosferica i coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale, che indicheremo con

$$\overline{D} = -\sum\frac{\partial x'}{\partial u}\,\frac{\partial X'}{\partial u},\quad \overline{D'} = -\sum\frac{\partial x'}{\partial u}\,\frac{\partial X'}{\partial v} = -\sum\frac{\partial x'}{\partial v}\,\frac{\partial X'}{\partial u},$$

$$\overline{D''} = -\sum\frac{\partial x'}{\partial v}\,\frac{\partial X'}{\partial v}.$$

Per ciò, ponendo nelle (6) per $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ i valori (12), abbiamo dapprima

$$\frac{\partial X'}{\partial u} = \Big\{\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{u} - u\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,(D\operatorname{sen}\varphi - D'\cos\varphi)\Big\}X_1 +$$

$$+\Big\{\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{u} + u\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,(D\operatorname{sen}\varphi - D'\cos\varphi)\Big\}X_2 +$$

$$+ u\cos\sigma\,(D\operatorname{sen}\varphi - D'\cos\varphi)\,X_3$$

$$\frac{\partial X'}{\partial v} = \left\{ -\frac{\cos^2 \varphi}{u} - u \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \varphi \,(D' \operatorname{sen} \varphi - D'' \cos \varphi) \right\} X_1 +$$

$$+ \left\{ -\frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{u} + u \operatorname{sen} \sigma \cos \varphi \,(D' \operatorname{sen} \varphi - D'' \cos \varphi) \right\} X_2 +$$

$$+ u \cos \sigma \,(D' \operatorname{sen} \varphi - D'' \cos \varphi)\, X_3 ;$$

con queste formole e colle (17) formando i valori superiori di D, D', D'', troviamo

$$\left.\begin{aligned}
\overline{D} &= -\frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{u^2} + u^2 (D \cos \varphi + D' \operatorname{sen} \varphi)(D' \cos \varphi - D \operatorname{sen} \varphi) \\
\overline{D'} &= \quad \frac{\cos^2 \varphi}{u^2} + u^2 (D \cos \varphi + D' \operatorname{sen} \varphi)(D'' \cos \varphi - D' \operatorname{sen} \varphi) \\
D'' &= \quad \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{u^2} + u^2 (D' \operatorname{sen} \varphi + D'' \operatorname{sen} \varphi)(D'' \cos \varphi - D' \operatorname{sen} \varphi).
\end{aligned}\right\} \quad (21^*)$$

Se nei primi termini di queste al posto di $\frac{1}{u^2}$ poniamo la quantità equivalente, a causa della (3), $u^2 (D'^2 - D D'')$ possiamo scrivere

$$\overline{D} = u^2 \left\{ (D'' - D) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + D' \cos 2\varphi \right\} \cdot D$$

$$\overline{D'} = u^2 \left\{ (D'' - D) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + D' \cos 2\varphi \right\} \cdot D'$$

$$D'' = u^2 \left\{ (D'' - D) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + D' \cos 2\varphi \right\} \cdot D''.$$

Come si vede, $\overline{D}$, $\overline{D'}$, $\overline{D''}$, risultano proporzionali a D, D', D'', ciò che conferma la ben nota proprietà: *sulle due falde focali S, S' della congruenza pseudosferica si corripondono le linee asintotiche.*

§ 5.

Preliminari sulle deformazioni isogonali continue.

Premesse queste ricerche sulle deformazioni isogonali infinitesime delle superficie pseudosferiche, passiamo ora allo studio delle loro deformazioni isogonali *continue*, dove la superficie S percorrerà una semplice infinità di configurazioni, deformandosi in guisa che le trajettorie descritte dai singoli punti incontrino ciascuna superficie S del sistema sotto il medesimo angolo σ, variabile in generale colla superficie.

Facciamo prima alcune considerazioni *infinitesimali* dirette a stabilire il teorema di esistenza dei sistemi (Σ), come l'abbiamo enunciato nella introduzione.

Sia data una superficie pseudosferica iniziale qualunque S, ed una curva C *affatto arbitraria* uscente da un punto P di S, ma che non sia nè tangente nè normale in P alla superficie. Se consideriamo l'elemento lineare $P P_1$ di C, uscente dal punto P di S, sappiamo dai teoremi dei paragrafi precedenti che esiste una ed una sola deformazione isogonale infinitesima della S, nella quale il punto P descrive l'elemento $P P_1$, e la S si deforma quindi in una superficie S_1 infinitamente vicina ad S, uscente da P_1. Partendo ora da questa nuova superficie pseudosferica S_1, esisterà similmente una sua deformazione isogonale infinitesima, nella quale il punto P_1 descriverà l'elemento lineare successivo $P_1 P_2$ di C. Così continuando, è manifesto che troveremo una ed una sola deformazione isogonale continua della S nella quale il punto descriverà la trajettoria prescritta C, conformemente al teorema enunciato nell'introduzione.

Ben inteso, le considerazioni infinitesimali precedenti hanno soltanto un valore indicativo; ma esse possono sostituirsi con dimostrazioni analitiche rigorose tratte dalle proprietà dei sistemi di equazioni a derivate parziali, dai quali faremo ora dipendere la determinazione dei sistemi (Σ).

Supponiamo adunque che la superficie pseudosferica iniziale S subisca una deformazione isogonale continua. Nel passaggio di S da una configurazione alla infinitamente vicina, dovranno certo valere tutte le formole stabilite nei paragrafi precedenti per le deformazioni infinitesime. Dovremo per ciò pensare che tutte le quantità introdotte

$$D,\ D',\ D'';\quad H,\ \varphi;\quad x,\ y,\ z;\quad X_1,\ Y_1,\ Z_1;\dots$$

siano funzioni, oltre che di u, v, di una terza variabile w, i cui singoli valori individuano le successive configurazioni che la S assume deformandosi. È poi da notarsi che l'angolo σ sarà in generale una funzione di w, che potrà ridursi in particolare ad una costante.

Nel passaggio della superficie S dalla configurazione corrispondente al valore w della variabile w alla successiva, ove w si accresca di $d\,w$, gli incrementi infinitesimi delle coordinate sono

$$\frac{\partial x}{\partial w}\,d\,w,\qquad \frac{\partial y}{\partial w}\,d\,w,\qquad \frac{\partial z}{\partial w}\,d\,w,$$

e, per le formole del § 2, si ha quindi

$$\frac{\partial x}{\partial w}=H\,X'=H\,(\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,X_1-\cos\sigma\cos\varphi\,X_2+\mathrm{sen}\,\sigma\,X_3),$$

colle analoghe per $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$. Pel differenziale totale $d\,x$ si ha adunque

$$d\,x=\frac{d\,u}{u}\,X_1+\frac{d\,v}{u}\,X_2+H\,(\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,X_1-\cos\sigma\cos\varphi\,X_2+\mathrm{sen}\,\sigma\,X_3)\,d\,w,$$

e analogamente per $d\,y$, $d\,z$. Quadrando e sommando, abbiamo per l'elemento lineare $d\,s$ dello spazio in coordinate u, v, w

$$\left.\begin{aligned} d\,s^2=\frac{d\,u^2+d\,v^2}{u^2}+H^2\,d\,w^2+2\,\frac{H\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi}{u}\,d\,u\,d\,w\,-\\ -\,2\,\frac{H\cos\sigma\cos\varphi}{u}\,d\,v\,d\,w.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Le due funzioni H, φ di u, v, w, che figurano nei coefficienti dovranno soddisfare alle condizioni necessarie e sufficienti perchè questo $d\,s^2$ appartenga allo spazio euclideo; e queste consistono come si sa (*Lezioni*, Vol. I, pag. 75) nell'annullarsi dei sei simboli Riemanniani a quattro indici

$$(12,\ 12),\quad (23,\ 23),\quad (31,\ 31),$$
$$(21,\ 13),\quad (32,\ 21),\quad (13,\ 32),$$

costruiti per la forma differenziale ternaria del secondo membro della (22).

Ma importa osservare per il seguito che inversamente, se H, φ soddisfano a queste condizioni, dalla forma (22) dell'elemento lineare dello spazio risulterà *individuato* un sistema (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera sotto l'angolo σ. E infatti si legge in primo luogo nella (22) che tutte le superficie $w=$ cost. hanno l'elemento lineare della pseudosfera. Ma dimostriamo ora di più come dalla (22) risulti ancora che le linee (w) descritte da un punto (u, v) della superficie pseudosferica nella deformazione sono inclinate dell'angolo σ sulle superficie stesse $w=$ cost. Questo deduciamo dalla formola generale seguente:

Se

$$d s^2 = a_{11}\, d x_1^2 + a_{22}\, d x_2^2 + a_{33}\, d x_3^2 + 2\, a_{12}\, d x_1\, d x_2 +$$

$$+ 2\, a_{13}\, d x_1\, d x_3 + 2\, a_{23}\, d x_2\, d x_3$$

è il quadrato dell'elemento lineare di uno spazio qualunque a tre dimensioni, l'angolo d'inclinazione τ delle linee coordinate (x_3) sulle superficie $x_3=$ cost. è dato dalla formola

$$\operatorname{sen} \tau = \frac{1}{\sqrt{a_{33}\, A_{33}}}\,, \tag{23}$$

dove A_{33} è il complemento algebrico di a_{33} nel discriminante $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, *diviso pel discriminante A stesso* (*).

(*) La formola (23) del testo risulta subito dalle prime considerazioni di metrica angolare negli spazî curvi (Vol. I, § 184). E invero le costanti di direzione ξ_1, ξ_2, ξ_3 della linea (x_3) sono

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}$$

e quello η_1, η_2, η_3 della normale alla superficie $x_3=$ cost. hanno i valori (l. c., pag. 332).

$$\eta_1 = \frac{A_{31}}{\sqrt{A_{33}}}\,, \quad \eta_2 = \frac{A_{32}}{\sqrt{A_{33}}}\,, \quad \eta_3 = \frac{A_{33}}{\sqrt{A_{33}}}\,.$$

Dunque, indicando con ω l'angolo fra le due direzioni; si ha

$$\cos \omega = \operatorname{sen} \tau = \sum_{i,k} a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = \frac{1}{\sqrt{a_{33}\, A_{33}}} \sum_k a_{3k}\, A_{3k} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}\, A_{33}}}\,.$$

Ora nella forma (22) del ds^2 si ha

$$a_{33} = H^2, \qquad A_{33} = \frac{1}{H^2 \operatorname{sen}^2 \sigma},$$

onde dalla (23) $\tau = \sigma$.

La determinazione dei sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera dipende dunque univocamente dalle coppie di funzioni H, φ che soddisfano al sistema di equazioni a derivate parziali ottenuto dall'eguagliare a zero i sei simboli di Riemann, costruiti per la (22). Due di queste equazioni sono già state costruite al § 3, e sono le equazioni del primo ordine (16). Le altre potrebbero formarsi per la via ora indicata; ma sarà più utile per la nostra analisi seguire un procedimento, in fondo equivalente, che ci fornirà insieme le derivate rapporto ad u, v, w dei nove coseni di direzione del triedro principale in ogni punto (u, v, w) dello spazio. Le formole del quadro (a) § 1 dànno già intanto le derivate rispetto alle due prime variabili; resta che calcoliamo similmente quelle rapporto alla terza w.

§ 6.

Equazioni a derivate parziali pei sistemi (Σ).

Se prendiamo le tre formole

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{X_1}{u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{X_2}{u}, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = H(\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma \cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3),$$

ne deduciamo per le condizioni d'integrabilità

$$\frac{1}{u}\frac{\partial X_1}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{ H(\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma \cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3) \right\}$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial X_2}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{ H(\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma \cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3) \right\}.$$

Se si eseguiscono le derivazioni nel secondo membro, colle formole del quadro (a) § 1, e si osservano le (14*) § 3, si ottiene subito

$$\frac{\partial X_1}{\partial w} = H X_2 + \left(\frac{u}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial u} + H \cot\sigma \cos\varphi\right) X_3$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial w} = - H X_1 + \left(\frac{u}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial v} + H \cot\sigma \operatorname{sen}\varphi\right) X_3 .$$

Dopo di ciò, osservando le condizioni di ortogonalità, si ha anche immediatamente il valore di $\frac{\partial X_3}{\partial w}$, e riunendo tutte le formole relative a queste derivate otteniamo il quadro seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{X_1}{u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{X_2}{u}, \\
&\qquad \frac{\partial x}{\partial w} = H(\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma\cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3) \\
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = u D X_3, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{X_2}{u} + u D' X_3, \\
&\qquad \frac{\partial X_1}{\partial w} = H X_2 + \left(\frac{u}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial u} + H\cot\sigma\cos\varphi\right) X_3 \\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = u D' X_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = \frac{X_1}{u} + u D'' X_3, \\
&\qquad \frac{\partial X_2}{\partial w} = - H X_1 + \left(\frac{u}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial v} + H\cot\sigma\operatorname{sen}\varphi\right) X_3 \\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = - u D X_1 - u D' X_2, \qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = - u D' X_1 - u D'' X_2, \\
&\qquad \frac{\partial X_3}{\partial w} = -\left(\frac{u}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial u} + H\cot\sigma\cos\varphi\right) X_1 - \\
&\qquad\qquad -\left(\frac{u}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial v} + H\cot\sigma\operatorname{sen}\varphi\right) X_2 .
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Ma affinchè l'elemento lineare (22) appartenga allo spazio euclideo è necessario e sufficiente che il sistema simultaneo (b) sia *illimitatamente integrabile*, come risulta dall'osservare che l'orientazione del triedro principale per un punto ($u_0\, v_0\, w_0$) dello spazio deve restare affatto arbitraria. Di queste condizioni d'integrabilità basta scrivere soltanto le nuove, ove figurano derivazioni rapporto a w

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial X_1}{\partial w}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial X_1}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial X_1}{\partial w}\right)\ldots,$$

ed avendo riguardo alle (b) stesse ed alle equazioni del § 3, si trova che alle equazioni già calcolate vengono ad aggiungersi soltanto le tre nuove seguenti

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial D}{\partial w}&=\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}-\frac{H}{u^2}\\ \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial D'}{\partial w}&=\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial v}\\ \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial D''}{\partial w}&=\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}-\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}-\frac{H}{u^2}\ldots, \end{aligned}\right\}\qquad (B)$$

Queste, insieme alle equazioni (16) § 3 che torniamo a scrivere

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \log H}{\partial u}+\frac{1}{u}=u\left(\frac{\partial \log H}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \log H}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\\ &\frac{\partial}{\partial u}(H\cos\varphi)+\frac{\partial}{\partial v}(H\operatorname{sen}\varphi)+H\,\frac{2-\cos\sigma\cos\varphi}{u\cos\sigma}=0, \end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

dànno il sistema di equazioni a derivate parziali per le due funzioni H, φ di u, v, w, da cui dipende la ricerca dei sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera.

Si noti che le (A) sono equazioni del primo ordine, mentre le (B), ove per D, D', D'' si pongano i loro valori (14) o (14*) § 3, sono manifestamente del secondo ordine. Per la compatibilità del sistema (A), (B) è essenziale osservare che se dalle (B) si formano le due condizioni d'integrabilità

$$\operatorname{sen}\sigma\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial D}{\partial w}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial D'}{\partial w}\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}-\frac{H}{u^2}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial v}\right)=0$$

$$\operatorname{sen}\sigma\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial D'}{\partial w}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial D''}{\partial w}\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}-\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}-\frac{H}{u^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}-\frac{2H}{u^2}\right),$$

osservando che per le equazioni di CODAZZI soddisfatte da D, D', D'', il primo membro della prima è identicamente nullo e quello della seconda equivale a

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{u}\frac{\partial}{\partial w}(D+D''),$$

si vede bene che le due condizioni calcolate sono conseguenze del sistema (A), (B) stesso.

Applicando alle equazioni simultanee (A), (B) i teoremi generali della teoria dei sistemi di equazioni a derivate parziali, si potrebbe dimostrare in tutto rigore il teorema d'esistenza che nel paragrafo precedente abbiamo reso plausibile mediante considerazioni infinitesimali (*). Ma noi non ci tratteremo qui su tale dimostrazione, avendo piuttosto di mira in questa Memoria lo sviluppo dei metodi geometrici che ci permetteranno d'andare ben più oltre.

A proposito ancora delle equazioni (B), che porremo fra breve sotto una forma invariantiva notevole (Vedi § 8), osserviamo ancora che le due prime di esse possono scriversi

$$\frac{\partial D}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{H}{u}\right),\quad \frac{\partial D'}{\partial w}=\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{H}{u}\right),$$

ed associate alla prima equazione di CODAZZI

$$\frac{\partial D}{\partial v}=\frac{\partial D'}{\partial u},$$

dimostrano che

L'espressione $D\,du+D'\,dv+\dfrac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u}+\dfrac{H}{u}\right)dw$ *è un differenziale esatto,*

Questo risultato, nell'applicazione della trasformazione complementare ai sistemi (Σ), diventerà fra breve di fondamentale importanza (Vedi § 11).

(*) Cf. la dimostrazione del teorema d'esistenza per le famiglie di LAMÉ di superficie a curvatura costante (*Lezioni*, Vol. II, § 430).

§ 7.

Le formole per la trasformazione di Bäcklund in coordinate qualunque.

Nello stabilire il sistema (A), (B) di equazioni a derivate parziali caratteristico pei sistemi (Σ) noi ci siamo serviti di uno speciale sistema ortogonale scelto sulla S, che dà al ds^2 la forma normale (parabolica)

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{u^2},$$

ed è in effetto il più opportuno per molte delle ricerche seguenti.

Sarà però utile che vediamo come si scrivono in generale le equazioni stesse quando il sistema coordinato (u, v) scelto sulla S sia ancora ortogonale, ma *qualunque.*

Supponiamo che si abbia pel ds^2 della S

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

ciò che implica fra E, G la relazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = \sqrt{EG},$$

a causa del valore $K = -1$ della curvatura di S.

Riprendendo i calcoli eseguiti nei primi paragrafi nel caso particolare

$$E = G = \frac{1}{u^2},$$

basterà qui rapidamente indicare come si perviene alle formole generali.

Mantenendo per la superficie S le notazioni del § 254 delle *Lezioni* (Volume II, pag. 90-91), le equazioni di Codazzi e di Gauss si scrivono

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) + \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D' + \frac{1}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D'' = 0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) + \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D' + \frac{1}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

$$D'^2 - D D'' = E G. \tag{β}$$

Sia ora S' una trasformata di Bäcklund della S per mezzo della B_σ e scriviamo, nel solito modo, per le coordinate x', y', z' del punto di S' corrispondente al punto (x, y, z) di S.

$$x' = x + \cos\sigma\,(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2),$$

mentre i coseni di direzione X', Y', Z' della normale alle S' saranno

$$X' = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma\cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3 .$$

Di qui si deduce, procedendo come al § 2 e servendosi delle formole delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 90), che la funzione $\varphi(u, v)$ deve soddisfare il sistema simultaneo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} &= \operatorname{tg}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\cos\varphi + \frac{D'}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right) + \frac{\sqrt{E}\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} &= \operatorname{tg}\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\cos\varphi + \frac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{sen}\varphi\right) - \frac{\sqrt{G}\cos\varphi}{\cos\sigma};
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

queste sono adunque le formole per la trasformazione di Bäcklund in coordinate ortogonali qualunque. L'ampiezza εH dello spostamento infinitesimo che i punti di S subiscono nella corrispondente deformazione infinitesima, parallelamente alla normale ad S', viene determinata per quadrature delle formole

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\log H}{\partial u} &= \operatorname{tg}\sigma\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\varphi - \frac{D'}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right) - \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{\cos\sigma}\\
\frac{\partial\log H}{\partial v} &= \operatorname{tg}\sigma\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\operatorname{sen}\varphi - \frac{D''}{\sqrt{G}}\cos\varphi\right) - \frac{\sqrt{G}\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Risolvendo le (24), (25) rispetto alle coppie (D, D'), (D', D'') si ottengono le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D}{\sqrt{E}} &= \cot\sigma\left\{\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial\log H}{\partial u}\right\}\\
\frac{D'}{\sqrt{G}} &= \cot\sigma\left\{\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) - \cos\varphi\,\frac{\partial\log H}{\partial u}\right\} - \frac{\sqrt{E}}{\operatorname{sen}\sigma}
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D'}{\sqrt{E}} &= \cot\sigma \left\{ \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log H}{\partial v} \right\} + \frac{\sqrt{G}}{\operatorname{sen}\sigma} \\
\frac{D''}{\sqrt{G}} &= \cot\sigma \left\{ \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) - \cos\varphi \frac{\partial \log H}{\partial v} \right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (26^*)$$

Paragonando i due valori di D' si ha una prima equazione del 1.° ordine fra H, φ, ed un'unica seconda equazione si ha sostituendo questi valori di D, D', D'' nelle equazioni di Codazzi; così si ottiene il sistema di 1.° ordine

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{E} \left\{ \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log H}{\partial v} \right\} - \\
&- \sqrt{G} \left\{ \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) - \cos\varphi \frac{\partial \log H}{\partial u} \right\} + \frac{2\sqrt{EG}}{\cos\sigma} = 0 \\
&\frac{\partial \log H}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) - \frac{\partial \log H}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) = \sqrt{EG}.
\end{aligned}\right\} \quad (A^*)$$

Viceversa, quando H, φ soddisfano a queste (A^*), i valori (26), (26*) di D, D', D'' soddisfano non solo alle equazioni (α) di Codazzi, ma ben anche a quella (β) di Gauss, talchè la coppia di funzioni H, φ individua una corrispondente congruenza pseudosferica.

§ 8.

Le formole pei sistemi (Σ) in coordinate (ortogonali) qualunque.

Supponiamo che la superficie S subisca una deformazione isogonale continua e descriva un sistema (Σ). Le funzioni H, φ, D, D', D'' dipenderanno da u, v e da una terza variabile w (cfr. § 5), e per le derivate di x, y, z avremo

$$\frac{\partial x}{du} = \sqrt{E}\, X_1, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial w} = H (\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma \cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3),$$

e quindi per l'elemento lineare dello spazio in coordinate u, v, w

$$d s^2 = d x^2 + d y^2 + d z^2 = E d u^2 + G d v^2 + H^2 d w^2 +$$
$$+ 2 H \sqrt{E} \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi \, d u \, d w - 2 H \sqrt{G} \cos \sigma \cos \varphi \, d v \, d w \,,$$

dove è ben da notarsi che i coefficienti E, G non contengono w.

Introduciamo anche qui il triedro principale formato dalle direzioni

$$(X_1, Y_1, Z_1), \qquad (X_2, Y_2, Z_2), \qquad (X_3, Y_3, Z_3)$$

della rispettiva tangente alla linea (v), alla linea (u) e della normale alla superficie S.

Colle citate formole delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 91), procedendo come al § 6 per calcolare le derivate rapporto ad u, v, w dei coseni di direzione del triedro principale, si hanno le formole del quadro seguente

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} X_3, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}} X_3, \\
&\qquad \frac{\partial X_1}{\partial w} = H X_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial u} + H \cot \sigma \cos \varphi \right) X_3, \\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}} X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3, \\
&\qquad \frac{\partial X_2}{\partial w} = -H X_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{G} \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial v} + H \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi \right) X_3, \\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}} X_2, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}} X_2, \\
&\qquad \frac{\partial X_3}{\partial w} = -\left(\frac{1}{\sqrt{E} \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial u} + H \cot \sigma \cos \varphi \right) X_1 - \\
&\qquad\qquad -\left(\frac{1}{\sqrt{G} \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial v} + H \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi \right) X_2 .
\end{aligned}\right\} \quad (6^*)$$

Costruendo ora le condizioni di (illimitata) integrabilità per questo sistema, troviamo che, oltre le (A^*), debbono ancora essere soddisfatte le tre equazioni seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen} \sigma \frac{\partial D}{\partial w} &= \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} - \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial H}{\partial v} - E H \\
\operatorname{sen} \sigma \frac{\partial D'}{\partial w} &= \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial H}{\partial v} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v} \\
\operatorname{sen} \sigma \frac{\partial D''}{\partial v} &= \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + \frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial H}{\partial v} - G H.
\end{aligned}\right\} \quad (B^*)$$

Così abbiamo effettivamente formate le equazioni a derivate parziali (A^*), (B^*) caratteristiche per i nostri sistemi (Σ), in coordinate ortogonali (u, v) qualunque.

Osserviamo infine che i secondi membri delle ultime equazioni (B^*), prescindendo dai termini lineari in H, non sono altro che le *derivate seconde covarianti* (Vol. I, pag. 67)

$$H_{11}, \quad H_{12}, \quad H_{22}$$

della funzione H rispetto al $d s^2 = E\, d u^2 + G\, d v^2$. Il sistema ($B^*$) si scrive dunque, sotto forma invariantiva,

$$\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial D}{\partial w} = H_{11} - E H, \quad \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial D'}{\partial w} = H_{12} - F H, \quad \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial D''}{\partial w} = H_{22} - G H, \quad (C)$$

dove per simmetria abbiamo scritto anche il termine medio $-F H$ sebbene qui $F = 0$. Ma, appunto in grazia della loro forma invariantiva, è chiaro che le (C) valgono in coordinate (u, v) *oblique* qualunque (*).

§ 9.

Sistemi (Σ) di elicoidi congruenti.

Prima di procedere all'oggetto principale di questa Memoria, ai metodi di trasformazione, sarà utile che ci procuriamo la conoscenza di qualche particolare sistema (Σ), e qui noi ne troveremo uno ben semplice in un sistema

(*) Anche su queste equazioni generali (C), servendosi delle proprietà dei simboli a quattro indici di 2.ª specie (Vol. I, pag. 72), e ponendo mente che la forma $E\, d u^2 + 2 F\, d u\, d v + G\, d v^2$ è a curvatura $= -1$, le condizioni d'integrabilità

$$\operatorname{sen}\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial D}{\partial w}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial D'}{\partial w}\right) \right\} = \frac{\partial}{\partial v}(H_{11} - E H) - \frac{\partial}{\partial u}(H_{12} - F H)$$

$$\operatorname{sen}\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial D''}{\partial w}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial D'}{\partial w}\right) \right\} = \frac{\partial}{\partial u}(H_{22} - G H) - \frac{\partial}{\partial v}(H_{12} - F H)$$

risultano identicamente soddisfatte a causa delle formole di Codazzi (cf. § 6).

di elicoidi pseudosferiche congruenti per moto elicoidale attorno all'asse, esempio notevole, come si vedrà, sotto più rapporti.

Cerchiamo anzi dapprima di risolvere in generale il problema seguente:

Trovare le superficie elicoidali (o di rotazione) che, in un conveniente movimento elicoidale attorno al loro asse, generano una famiglia di superficie tagliata sotto angolo σ costante dalle eliche trajettorie dei loro punti.

Intendiamo però escluso il caso che il movimento elicoidale faccia strisciare l'elicoide sopra sè stessa, chè allora qualunque elicoide soddisferebbe alla questione.

Scriviamo le equazioni dell'elicoide sotto la consueta forma (*Lezioni*, Vol. I, pag. 236)

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \operatorname{sen} v, \quad z = \varphi(\rho) + m\, v,$$

essendo m il parametro del moto generatore elicoidale, e pei coseni di direzione X, Y, Z della normale dell'elicoide avremo

$$X = \frac{m \operatorname{sen} v - \rho \cos v\, \varphi'(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}}, \quad Y = -\frac{m \cos v + \rho\, v \operatorname{sen} v\, \varphi'(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}},$$

$$Z = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2 \varphi'^2(\rho)}}.$$

In un movimento elicoidale attorno all'asse di parametro n, che supponiamo, come si è detto, diverso da m, ogni punto dello spazio si sposta nella direzione che ha i coseni proporzionali a

$$-y, \quad x, \quad n$$

e quindi i coseni α, β, γ di direzione dello spostamento di un punto (ρ, v) dell'elicoide sono

$$\alpha = -\frac{\rho \operatorname{sen} v}{\sqrt{\rho^2 + m^2}}, \quad \beta = \frac{\rho \cos v}{\sqrt{\rho^2 + n^2}}, \quad \gamma = \frac{n}{\sqrt{\rho^2 + n^2}}.$$

Nella nostra ipotesi deve essere

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = \operatorname{sen} \sigma,$$

ciò che determina il profilo meridiano $z = \varphi(\rho)$ dell'elicoide con una quadratura dalla formola

$$\frac{\rho\,(n-m)}{\sqrt{\rho^2+m^2+\rho^2\,\varphi'^2(\rho)}}=\operatorname{sen}\sigma\sqrt{\rho^2+n^2}.$$

Se poniamo

$$\frac{n-m}{\operatorname{sen}\sigma}=R,$$

la precedente si scrive

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+m^2+\rho^2\,\varphi'^2(\rho)}}=\frac{\sqrt{\rho^2+n^2}}{R}. \tag{27}$$

Ma, essendo l'elemento lineare dell'elicoide dato dalla formola (*Lezioni*, Vol. I, pag. 236)

$$ds^2=\frac{\rho^2+m^2+\rho^2\,\varphi'^2(\rho)}{\rho^2+m^2}\,d\rho^2+(\rho^2+m^2)\,d\omega^2,$$

per la curvatura K dell'elicoide si ha

$$K=-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+m^2+\rho^2\,\varphi'^2(\rho)}}\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+m^2+\rho^2\,\varphi'^2(\rho)}}\right), \tag{28}$$

e nel caso delle nostre elicoidi (27) risulta quindi $K=-\frac{1}{R^2}$, onde si vede che: *le elicoidi cercate sono necessariamente pseudosferiche.*

Viceversa se supponiamo l'elicoide a curvatura costante negativa $K=-\frac{1}{R^2}$, la (28) integrata dà

$$\frac{\rho^2}{\rho^2+m^2+\rho^2\,\varphi'^2(\rho)}=\frac{\rho^2+C}{R^2}\qquad (C \text{ costante arbitraria}), \tag{27*}$$

formola che combina colla (27) se si prende $C=n^2$. Concludiamo:

Tutte e sole le elicoidi pseudosferiche, sottoposte ad un conveniente movimento elicoidale attorno al loro asse, tagliano sotto angolo costante le eliche descritte dai loro punti e generano quindi un sistema (Σ), *nel quale la flessione continua della superficie pseudosferica si riduce ad un puro movimento.*

Si osservi per altro che, per ottenere un tale sistema (Σ) *reale*, occorre che nella (27*) la costante C sia positiva (o nulla), altrimenti il parametro $n=\sqrt{C}$ del movimento elicoidale sarebbe immaginario.

In questo risultato generale si possono osservare due casi particolari notevoli.

1.° Se supponiamo $m=0$, indi $n=R \operatorname{sen} \sigma$ l'elicoide diventa una superficie pseudosferica di rotazione del tipo ellittico, coll'angolo σ d'apertura al vertice. Essa è l'unica superficie di rotazione che, sottoposta ad un moto elicoidale attorno al suo asse, taglia sotto angolo costante le eliche descritte dai suoi punti. Il parametro del moto elicoidale è qui $n=R \operatorname{sen} \sigma$. Si noti che, negli altri due tipi di superficie pseudosferiche di rotazione, il parametro n è nullo per la pseudosfera ($C=0$) e la superficie striscia sopra sè stessa, per l'altra del tipo iperbolico $C<0$, il parametro n è (puramente) immaginario.

2.° Si può invece supporre $n=0$, e allora il movimento da imprimersi all'elicoide è una pura rotazione attorno all'asse. Le elicoidi corrispondenti sono quelle del Dini, i cui profili meridiani *trattrici* sono linee di curvatura. Siccome i piani meridiani di questi profili tagliano l'elicoide sotto angolo costante, e d'altra parte nel movimento di rotazione i punti si dirigono normalmente a questi piani, è bene evidente che i circoli trajettorie tagliano appunto le elicoidi sotto angolo costante.

§ 10.

Proprietà caratteristiche dei sistemi (Σ) elicoidali.

Nei sistemi (Σ) ora trovati di elicoidi avviene che la flessione della superficie pseudosferica dentro al sistema si riduce ad un puro movimento. Dimostreremo che non esistono altri sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera nei quali avvenga questa circostanza, nemmeno supponendo che l'angolo σ possa essere variabile.

Basterà applicare per ciò le formole generali pei sistemi (Σ) stabilite ai §§ 6, 8, ammettendo adunque soltanto che la flessione della superficie pseudosferica avvenga per puro movimento. Questo porta che anche i coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale siano indipendenti da w. Allora le equazioni (C) § 8 si riducono al noto sistema di Weingarten (*Lezioni*, Vol. II, pag. 567)

$$H_{11}-EH=0, \quad H_{12}-FH=0, \quad H_{22}-GH=0 \qquad (C^*)$$

e dimostrano che sopra una superficie S del sistema le linee $H=$ cost. sono circoli geodeticamente paralleli (*). Se prendiamo queste $H=$ cost. per linee $u=$ cost. e le geodetiche ortogonali per linee $v=$ cost., avremo da distinguere rispetto al ds^2 della S i tre casi tipici (**)

$$1.^o)\quad ds^2=\frac{du^2+dv^2}{u^2}\quad \text{(forma parabolica)},$$

$$2.^o)\quad ds^2=du^2+\operatorname{senh}^2 u\, dv^2\quad \text{(forma ellittica)},$$

$$3.^o)\quad ds^2=du^2+\cosh^2 u\, dv^2\quad \text{(forma iperbolica)};$$

in qualunque dei tre casi sarà sempre per ipotesi H funzione della sola u, ed eventualmente di w, indi $\frac{\partial H}{\partial v}=0$.

1.° caso. Le tre equazioni di Weingarten, essendo $\frac{\partial H}{\partial v}=0$, dànno

---

(*) Se si assume p. e. l'elemento lineare di S sotto la forma normale parabolica

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{u^2}$$

il sistema di equazioni diventa

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}-\frac{H}{u^2}=0,\quad \frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}+\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}-\frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}-\frac{H}{u^2}=0$$

e possiede le tre soluzioni linearmente indipendenti

$$\frac{1}{u},\quad \frac{v}{u},\quad \frac{u^2+v^2}{u}$$

e quindi la soluzione generale

$$H=\frac{a\,(u^2+v^2)+b\,v+c}{u},$$

con a, b, c, costanti. Interpretando u, v come coordinate cartesiane ortogonali in un piano, si ha la consueta rappresentazione conforme della pseudosfera sul semipiano (*Lezioni*, Vol. I, § 174).

Su questo piano le linee $H=$ cost. dànno un fascio di circoli, il cui asse radicale è la retta limite $u=0$; perciò sulla superficie pseudosferica le linee $H=$ cost. sono circoli geodetici paralleli.

(**) Nel piano rappresentativo della nota precedente, i tre casi corrispondono ordinatamente, pel fascio di circoli $H=$ cost. a queste tre circostanze: 1.° fascio di circoli tangenti, 2.° fascio a punti-base immaginarii, 3.° fascio a punti-base reali distinti.

subito

$$H = \frac{W}{u},$$

con W funzione della sola w; ma cangiando il parametro w, si può fare senz'altro $W = 1$, cioè $H = \frac{1}{u} \cdot$ Dopo ciò le equazioni del 1.° ordine (A) § 6 dànno

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}(\cos \sigma \cos \varphi) + 2\,\frac{1 - \cos \sigma \cos \varphi}{u} = 0,$$

da cui integrando

$$1 - \cos \sigma \cos \varphi = \psi(w) \,.\, u^2,$$

con $\psi(w)$ funzione della sola w. Ora se si ricorda che D, D', D'' debbono essere *indipendenti da* w, e dalle formole (14) § 3 si calcolano i valori di D', D''

$$D' = \frac{\psi(w)}{\operatorname{sen} \sigma}, \quad D'' = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{u^2 \operatorname{sen} \sigma} = -\frac{\sqrt{2\,\psi(w)\,u^2 - \psi^2(w)\,u^4 - \operatorname{sen}^2 \sigma}}{u^2 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma},$$

si vede subito che tanto σ quanto $\psi(w)$ debbono essere costanti assolute. Dunque H e φ sono funzioni di u soltanto e medesimamente D, D', D''. Il $d s^2$ dello spazio, dato dalla formola (22) § 5 ammette quindi i due gruppi ad un parametro di trasformazioni in sè (movimenti)

$$v' = v + \text{cost.}, \quad w' = w + \text{cost.},$$

e questi due gruppi sono inoltre fra loro *permutabili.* Pel movimento continuo (elicoidale) del primo gruppo le superficie pseudosferiche S strisciano ciascuna in sè medesima e sono perciò elicoidi coassiali. Il secondo movimento le scambia fra loro ed è quindi un movimento elicoidale attorno al medesimo asse. Siamo adunque nel caso dei sistemi (Σ) elicoidali del paragrafo precedente, e precisamente in quello pel quale le eliche di un'elicoide del sistema sono oricicli paralleli.

In modo del tutto analogo si procederà negli altri due casi, come basterà rapidamente indicare.

2.° caso. Avendosi qui $E = 1$, $G = \operatorname{senh}^2 u$, le equazioni (C^*) di Weingarten, ricordando che H non deve contenere v, danno $H = W \,.\, \cosh u$, e senza alterare la generalità possiamo fare $W = 1$, $H = \cosh u$. Dopo di ciò le equazioni (A^*) § 7 dànno

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \quad \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 2 \cos \varphi \frac{\cosh 2u}{\operatorname{senh} 2u} + \frac{2}{\cos \sigma}, \tag{29}$$

da cui integrando

$$\cos \varphi = \frac{\psi(w) - \cosh 2u}{\cos \sigma \operatorname{senh} 2u},$$

con $\psi(w)$ funzione della sola w. Dalle (26*) § 7 segue ora

$$D' = \frac{\psi(w) - 1}{\operatorname{sen} \sigma}, \quad D'' = \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{senh} u \cosh u,$$

e poichè D', D'' non debbono contenere w, si vede che anche qui necessariamente tanto σ quanto $\psi(w)$ sono costanti, e valgono per ciò le medesime conclusioni come al caso precedente, coll'unica differenza che le eliche dell'elicoide sono ora circoli geodetici a centro reale. Si osservi ancora che, ponendo nel caso attuale $\psi(w) = 1$, risulta $D' = 0$ e la superficie S è di rotazione del tipo ellittico (cf. paragrafo precedente).

3.° caso. $E = 1$, $G = \cosh^2 u$. Si può prendere qui $H = \operatorname{senh} u$ e le (A^*) § 7 dànno ancora per φ le equazioni (29), onde si traggono le medesime conclusioni. In questo tipo le eliche sono circoli geodetici a centro ideale e le superficie non si riducono mai a superficie reali di rotazione.

Così abbiamo dimostrato effettivamente: *Gli unici sistemi* (Σ) *nei quali la flessione continua della superficie pseudosferica S si riduce ad un puro movimento sono i sistemi elicoidali del § 9.*

Da ultimo osserveremo un'altra proprietà, che è ancora caratteristica per questi sistemi (Σ) elicoidali: *ciascun sistema* (Σ) *elicoidale è nello stesso tempo una famiglia di* Lamé (*un sistema di* Weingarten). Questa proprietà segue dalle ricerche al § 443 delle *Lezioni* (Vol. II). Direttamente risulta dalle formole attuali, osservando che la distanza *normale* infinitesima di una superficie S in un sistema (Σ) dalla successiva è data da $\varepsilon H \operatorname{sen} \sigma$, poichè $\frac{\pi}{2} - \sigma$ è l'angolo che la trajettoria forma colla normale; nei sistemi elicoidali essa soddisfa quindi alle equazioni di Weingarten e perciò anche alla equazione caratteristica di Cayley per le famiglie di Lamé (*Lezioni*, Vol. II, pag. 486). Ma ora possiamo invertire il risultato e dimostrare: *Gli unici sistemi di* Weingarten *che siano al tempo stesso sistemi* (Σ) *di deformate isogonali della* *pseudosfera sono i sistemi elicoidali.* E infatti, se il sistema appartiene alle due specie insieme, la distanza normale infinitesima $\varepsilon H \operatorname{sen} \sigma$ fra una superficie e la successiva deve soddisfare alle equazioni di WEINGARTEN; perciò anche H vi soddisfa e le formole (C) § 8 dànno

$$\frac{\partial D}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial D'}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial D''}{\partial w} = 0,$$

cioè D, D', D'' indipendenti da w; siamo dunque nel caso di elicoidi congruenti.

§ 11.

La trasformazione complementare pei sistemi (Σ).

Abbandoniamo ora la ricerca diretta di sistemi (Σ) particolari e volgiamoci alla parte essenziale delle nostre ricerche: *ai metodi di trasformazione dei sistemi generali* (Σ), nei quali l'angolo σ potrà essere variabile con w, o in particolare costante.

Cominciando dalla trasformazione complementare, ci proponiamo di stabilire il semplice teorema seguente:

Se sopra una superficie pseudosferica S, che in una deformazione isogonale continua descrive un sistema (Σ), *si traccia un sistema qualunque di linee geodetiche g parallele* (*nel senso non-euclideo*), *anche la superficie pseudosferica S_1 complementare di S rispetto alle geodetiche g descriverà un analogo sistema* (Σ_1).

Sopra la S, in una sua particolare configurazione, assumiamo a linee coordinate (v) le geodetiche parallele g ed a linee (u) gli oricicli ortogonali, dando all'elemento lineare di S la consueta forma

$$ds^2 = \frac{d u^2 + d v^2}{u^2}.$$

Il sistema (Σ) descritto dalla S sarà definito dalla forma (22) § 5 dell'elemento lineare dello spazio e varranno le altre formole fondamentali del § 6.

Se al punto (x, y, z) di S corrisponde sulla S_1 il punto (x_1, y_1, z_1)

avremo semplicemente

$$x_1 = x + X_1, \quad y_1 = y + Y_1, \quad z_1 = z + Z_1. \tag{30}$$

Derivando queste rapporto ad u, v, w colle formule del quadro (b) § 6, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{X_1}{u} + u\,D\,X_3, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = u\,D'\,X_3, \\ \frac{\partial x_1}{\partial w} = H \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 + H(1 - \cos\sigma\cos\varphi)\,X_2 + L\,X_3, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

colle analoghe per y_1, z_1, avendo posto per brevità

$$L = \frac{u}{\operatorname{sen}\sigma}\,\frac{\partial H}{\partial u} + H\cot\sigma\cos\varphi + H\operatorname{sen}\sigma. \tag{32}$$

Le formole (30) ci definiscono una serie ∞^1 di superficie pseudosferiche S_1 ($w = \text{cost.}$), delle quali noi vogliamo dimostrare che costituiscono ancora un sistema (Σ_1) di deformate isogonali della pseudosfera, *corrispondente al medesimo angolo* σ.

Intanto, cominciando dal calcolare colle (31) l'elemento lineare $d\,s_1$ dello spazio

$$d\,s_1^2 = d\,x_1^2 + d\,y_1^2 + d\,z_1^2$$

in coordinate u, v, w, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} d\,s_1^2 = \frac{d\,u^2}{u^2} + u^2\,(D\,d\,u + D''\,d\,v)^2 + \\ + 2\,u\,L\,(D\,d\,u + D'\,d\,v)\,d\,w + 2\,\frac{H\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{u}\,d\,u\,d\,w + \\ + \left\{ H^2\,(1 + \cos^2\sigma - 2\cos\sigma\cos\varphi) + L^2 \right\} d\,w^2. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Per dimostrare il teorema dovremo provare che cangiando convenientemente le variabili u, v nelle nuove u_1, v_1, mantenendo la stessa w, si potrà ridurre l'elemento lineare (33) alla forma tipica (22) § 6

$$\left.\begin{aligned} d\,s_1^2 = \frac{d\,u_1^2 + d\,v_1^2}{u_1^2} + H_1^2\,d\,w^2 + \frac{2\,H_1\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi_1}{u_1}\,d\,u_1\,d\,w - \\ - \frac{2\,H_1\cos\sigma\cos\varphi_1}{u_1}\,d\,v_1\,d\,w, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

con H_1, φ_1 convenienti funzioni di u_1, v_1, w. L'indicata trasformazione di variabili, una volta trovata, ci definirà geometricamente la legge della deformazione continua isogonale della S_1 nel suo sistema (Σ_1).

Ora l'osservazione finale del § 6, che assicura essere l'espressione

$$D\,d\,u + D'\,d\,v + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) d\,w$$

un differenziale esatto, ci suggerisce l'opportuna trasformazione di variabili, che diciamo esser data dalle formole seguenti (*):

$$u_1 = \frac{1}{u}\,, \quad v_1 = \int \left\{ D\,d\,u + D'\,d\,v + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) d\,w \right\}. \tag{35}$$

Da queste abbiamo

$$\frac{du}{u} = -\frac{d\,u_1}{u_1}\,, \quad D\,d\,u + D'\,d\,v = d\,v_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) d\,w,$$

indi sostituendo nella (33)

$$d\,s_1^2 = \frac{d\,u_1^2}{u_1^2} + \frac{1}{u_1^2}\left\{ d\,v_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) d\,w \right\}^2 +$$

$$+ 2\,u\,L \left\{ d\,v_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) d\,w \right\}.\, d\,w -$$

$$\frac{2\,H \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi}{u_1}\, d\,u_1\, d\,w + \left\{ H^2 (1 + \cos^2\sigma - 2\cos\sigma\cos\varphi) + L^2 \right\} d\,w^2,$$

(*) Alle verifiche che seguono nel testo aggiungeremo qui alcune osservazioni le quali, nell'ipotesi che il teorema sussista, rendono ragione *a priori* delle formole (35). Ammesso che i due sistemi complementari (Σ), (Σ_1) si comportino simmetricamente rispetto alle congruenze pseudosferiche le cui falde sono due superficie corrispondenti (complementari) S, S', si osservi che le linee inviluppate sopra S dai raggi della congruenza sono le geodetiche parallele (v) e queste, variando S, si corrispondono nella deformazione continua; lo stesso accade poi degli oricicli ortogonali (u). Ora, nella trasformazione complementare, le linee geodetiche parallele inviluppate sopra S_1 dai raggi della congruenza corrispondono alle linee sopra S a tangenti coniugate delle (v) coll'equazione differenziale $D\,d\,u + D'\,d\,v = 0$, o in termini finiti $v_1 = \text{cost.}$ Le loro traiettorie ortogonali (oricicli) corrispondono poi agli oricicli (u).

e noi la scriviamo ora

$$d s_1^2 = \frac{d u_1^2 + d v^2}{u_1^2} + H_1^2 d w^2 + 2 A \, d u_1 \, d w + 2 B \, d v_1 \, d w, \tag{36}$$

avendo posto

$$\left.\begin{aligned} H_1^2 = \frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right)^2 - \frac{2 u L}{\operatorname{sen} \sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) + \\ + H^2 (1 \cos^2 \sigma - 2 \cos \sigma \cos \varphi) + L^2 \\ A = -\frac{H \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi}{u_1}, \quad B = \frac{L - \dfrac{u}{\operatorname{sen} \sigma}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u} + \dfrac{H}{u}\right)}{u_1}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Per quanto si è osservato al § 5, nella deduzione della formola (23), sarà dimostrato il teorema se proviamo che fra le quantità A, B, H_1^2, date dalle (37), intercede la relazione

$$\frac{u_1^2}{\cos^2 \sigma}(A^2 + B^2) = H_1^2. \tag{38}$$

Ma si ha dalla (37_1)

$$H_1^2 = \left\{ L - \frac{u}{\operatorname{sen} \sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) \right\}^2 + H^2 (1 + \cos^2 \sigma - 2 \cos \sigma \cos \varphi),$$

mentre dal valore (32) di L segue

$$L - \frac{u}{\operatorname{sen} \sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) = H \cot \sigma (\cos \varphi - \cos \sigma), \tag{37*}$$

e per ciò

$$H_1^2 = H^2 \left\{ \frac{\cos^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 \sigma} (\cos \varphi - \cos \sigma)^2 + (\cos \varphi - \cos \sigma)^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi \right\} =$$

$$= \frac{H^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma} \left\{ (\cos \varphi - \cos \sigma)^2 + \operatorname{sen}^2 \sigma \operatorname{sen}^2 \varphi \right\},$$

onde abbiamo in fine

$$H_1^2 = \frac{H^2 (1 - \cos \sigma \cos \varphi)^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma}.$$

Siccome poi dalle (37), (37*) abbiamo

$$\frac{u_1}{\cos \sigma} A = - H \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{u_1}{\cos \sigma} B = \frac{H (\cos \varphi - \cos \sigma)}{\operatorname{sen} \sigma},$$

quadrando e sommando queste ultime, ne segue appunto l'identità (38).

§ 12.

Applicazione della trasformazione complementare ai sistemi (Σ).

Dimostrato così il teorema fondamentale per la trasformazione complementare in relazione coi sistemi (Σ), passiamo a svilupparne le conseguenze.

In primo luogo è da osservarsi che i due sistemi (Σ), (Σ_1) sono in relazione perfettamente reciproca, poichè ciascuna superficie pseudosferica S del primo sistema (Σ) è alla sua volta complementare di S_1 rispetto alle geodetiche parallele di questa $v_1 = \text{cost.}$

Possiamo anche calcolare colle nostre formole i valori delle funzioni H_1, φ_1, che sono pel sistema (Σ_1) le analoghe delle H, φ pel sistema (Σ). I calcoli eseguiti al paragrafo precedente ci dànno subito le formole

$$H_1 = H \frac{1 - \cos\sigma\cos\varphi}{\operatorname{sen}\sigma}, \quad \operatorname{sen}\varphi_1 = -\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi}{1 - \cos\sigma\cos\varphi},$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\sigma - \cos\varphi}{1 - \cos\sigma\cos\varphi},$$

che traggono seco le inverse

$$H = H_1 \frac{1 - \cos\sigma\cos\varphi_1}{\operatorname{sen}\sigma}, \quad \operatorname{sen}\varphi = -\frac{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi_1}{1 - \cos\sigma\cos\varphi_1},$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\sigma_1 - \cos\varphi_1}{1 - \cos\sigma\cos\varphi_1},$$

e la simmetria di questi due gruppi di formole conferma la relazione reciproca dei due sistemi (Σ), (Σ_1).

Due sistemi come (Σ), (Σ_1) si diranno perciò complementari l'uno dell'altro. Siccome la scelta del sistema g di geodetiche parallele sopra *una* superficie iniziale S di (Σ) rimane arbitraria, si vede che:

Ogni sistema (Σ) *di deformate isogonali della pseudosfera possiede* ∞^1 *sistemi* (Σ_1) *complementari.*

È manifesto poi che, dato il sistema (Σ), per costruirne effettivamente i complementari (Σ_1) occorre e basta conoscere sopra una superficie S di (Σ)

le linee geodetiche, con che, per la legge stessa di deformazione continua, saranno note altresì le linee geodetiche su tutte le altre superficie del sistema, e i sistemi complementari (Σ_1) si avranno allora in termini finiti. D'altra parte, eseguita la quadratura che dà

$$v_1 = \int \left\{ D\,d\,u + D'\,d\,v + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{H}{u}\right) d\,w \right\},$$

conosceremo senz'altro le linee geodetiche dei sistemi trasformati (Σ_1), ai quali potremo applicare nuovamente la trasformazione complementare e dedurne in termini finiti ∞^2 nuovi sistemi (Σ). Così continuando, vediamo che basteranno *successive quadrature* per l'applicazione ripetuta illimitatamente di queste trasformazioni.

Insomma la trasformazione complementare si applica nel medesimo modo ai sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera come alle superficie pseudosferiche isolate, ed in questo, come già abbiamo avvertito nell'introduzione, i sistemi (Σ) si comportano più semplicemente di quelli di WEINGARTEN. Per essi la trasformazione complementare, ripetutamente applicata, basta a dedurre, partendo da un sistema noto (Σ), un'infinità di tali sistemi dipendenti da un numero comunque grande di costanti arbitrarie.

Se partiamo ad esempio dai sistemi elicoidali (Σ) del § 9, potremo costruirne senz'altro i sistemi complementari in termini finiti; con una quadratura avremo i sistemi complementari di questi nuovi, e così via. In particolare osserviamo che se il sistema (Σ) iniziale è di superficie di rotazione del tipo ellittico, il complementare (Σ_1) (che qui evidentemente è unico) consterà, per note proprietà (*Lezioni*, Vol. II, § 388), di superficie d'ENNEPER con un sistema di linee di curvatura in piani per l'asse, e queste superficie d'ENNEPER saranno nuovamente congruenti per lo stesso movimento elicoidale attorno all'asse col quale la superficie pseudosferica di rotazione descrive il sistema (Σ). È ben da avvertire per altro che la deformazione continua isogonale della superficie d'ENNEPER nel generare il sistema complementare (Σ) non coincide con questo movimento, ma è accompagnata da un'effettiva flessione della superficie in sè medesima. A questi sistemi (Σ) composti di superficie d'ENNEPER congruenti, le loro linee geodetiche essendo note (*Lezioni*, Vol. II, pag. 553), potremo applicare nuovamente, in termini finiti, la trasformazione complementare e i nuovi sistemi trasformati avranno le superficie pseudosferiche con un sistema di linee di curvatura sferiche.

§ 13.

La trasformazione singolare B_σ di Bäcklund per σ costante.

Dalle trasformazioni complementari passiamo ora alle trasformazioni generali di Bäcklund per esaminare se anche esse possono utilizzarsi come trasformazioni dei sistemi (Σ). Ma dapprima tratteremo, in questo e nel seguente paragrafo, di un caso particolarmente notevole di trasformazione di Bäcklund che si presenta per quei sistemi (Σ) *nei quali l'angolo σ è assolutamente costante.* Esiste in questo caso una semplice trasformazione di Bäcklund che si dirà *singolare,* la cui applicazione si fa senz'altro in termini finiti colla costruzione del seguente teorema:

Se in un sistema (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera, ad angolo σ costante, si costruisce per ogni superficie S del sistema la congruenza (pseudosferica) dei raggi tangenti alla S e normali alle direzioni delle trajettorie, le seconde falde S' di queste congruenze formano nuovamente un sistema (Σ') di deformate isogonali della pseudosfera sotto il medesimo angolo σ.

Per dimostrare questo teorema cominciamo dallo scrivere le formole relative alle singole trasformate S' delle S per mezzo della B_σ indicata nella costruzione; queste sono le formole (11) § 3

$$x' = x + \cos\sigma\,(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2),$$

colle analoghe per y', z'. Conviene dapprima calcolare l'elemento lineare dello spazio

$$d\,s'^2 = d\,x'^2 + d\,y'^2 + d\,z'^2$$

in coordinate u, v, w, analogamente a quanto si è fatto al § 11 per la trasformazione complementare. Al § 4 abbiamo già formato le derivate di x' rapporto ad u, v (formole (17)), alle quali aggiungiamo ora quella rapporto a w, calcolata dal quadro (b) § 6, ciò che dà

$$\frac{\partial x'}{\partial w} = -\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_1 + \cos\sigma \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_2 + \Omega\, X_3, \tag{38*}$$

dove si ponga

$$\Omega = u \cot\sigma \cos\varphi \frac{\partial H}{\partial u} + u \cot\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial H}{\partial v} + \frac{H}{\operatorname{sen}\sigma}\cdot \tag{39}$$

Scrivendo

$$\left.\begin{aligned} d s'^2 = a_{11}\, d u^2 + a_{22}\, d v^2 + a_{33}\, d w^2 + 2\, a_{12}\, d u\, d v + \\ + 2\, a_{13}\, d u\, d w + 2\, a_{23}\, d v\, d w, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

pei valori dei coefficienti abbiamo le formole

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\cos^2\varphi}{u^2} + u^2 (D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)^2, \\ a_{22} &= \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{u^2} + u^2 (D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi)^2, \quad a_{33} = \Omega^2 + \cos^2\sigma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 \\ a_{12} &= \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{u} + u^2 (D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi)(D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi) \\ a_{13} &= u\cos\sigma\left(\Omega + \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)(D\cos\varphi + D'\operatorname{sen}\varphi), \\ a_{23} &= u\cos\sigma\left(\Omega + \operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)(D'\cos\varphi + D''\operatorname{sen}\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Come già nel caso della trasformazione complementare (§ 11), il teorema si dimostrerà trovando una conveniente trasformazione delle variabili u, v nelle nuove u', v' (mantenendo la stessa w), per la quale l'elemento lineare (40) si trasformi nell'altro

$$d s'^2 = \frac{d u'^2 + d v'^2}{u'^2} + H'^2\, d w^2 + 2\, A'\, d u'\, d w + 2\, B'\, d v'\, d w, \tag{42}$$

dove fra i coefficienti A', B', H' sussista la relazione

$$\frac{u'^2}{\cos^2\sigma}(A^2 + B^2) = H'^2, \tag{43}$$

caratteristica pei sistemi (Σ') di deformate isogonali della pseudosfera sotto l'angolo σ.

Mentre nel caso della trasformazione complementare l'opportuna trasformazione di variabili era data *con una quadratura* dalle formole (35), dimostreremo che nel caso attuale essa ci viene fornita più semplicemente, in termini finiti, dalla legge d'applicabilità delle due falde focali di una congruenza pseudosferica equivalente all'affinità d'Ivory, cioè dalle formole

(19) § 4

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{u \operatorname{sen} \sigma}{1 - \cos \sigma \cos \varphi} \\ v' &= v + \frac{u \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi}{1 - \cos \sigma \cos \varphi} . \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Dobbiamo dunque verificare che, con questa sostituzione di variabili, l'elemento lineare (40) si trasforma nel (42), *trovandosi soddisfatta la relazione* (43).

§ 14.

Verifiche relative alla trasformazione singolare B_σ.

Abbiamo già calcolato, al § 4, nelle formole (20), le derivate di u', v' rapporto ad u, v, ed aggiungendovi ora quelle rapporto a w abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial w} &= - \frac{u \cos \sigma}{1 - \cos \sigma \cos \varphi} \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \varphi}{1 - \cos \sigma \cos \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial v'}{\partial w} &= \frac{u \cos \sigma}{1 - \cos \sigma \cos \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi - \cos \sigma}{1 - \cos \sigma \cos \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial w} . \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Dalle citate (20) § 4 e dalle ultime scritte si deducono con semplice calcolo le seguenti

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{u'^2} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2\right] = \frac{\cos^2 \varphi}{u^2} + u^2 (D \cos \varphi + D' \operatorname{sen} \varphi)^2 = a_{11} \\ &\frac{1}{u'^2} \left[\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v}\right] = \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{u^2} + \\ &\qquad + u^2 (D \cos \varphi + D' \operatorname{sen} \varphi)(D' \cos \varphi + D'' \operatorname{sen} \varphi) = a_{12} \\ &\frac{1}{u'^2} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2\right] = \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{u^2} + u^2 (D' \cos \varphi + D'' \operatorname{sen} \varphi)^2 = a_{22} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{u'^2} \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial w}\right)^2\right] = \cot^2 \sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 \\ &\frac{1}{u'^2} \left[\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial w} + \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial w}\right] = u \cot \sigma (D \cos \varphi + D' \operatorname{sen} \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ &\frac{1}{u'^2} \left[\frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial u'}{\partial w} + \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial w}\right] = u \cot \sigma (D' \cos \varphi + D'' \operatorname{sen} \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial w} . \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Per il seguito ci occorrono ancora le tre formole seguenti che dànno i valori dei tre determinanti funzionali $\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,w)}$, $\frac{\partial(u',v')}{\partial(v,w)}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)}=u'^2\left[\cos\varphi(D'\cos\varphi+D''\operatorname{sen}\varphi)-\operatorname{sen}\varphi(D\cos\varphi+D'\operatorname{sen}\varphi)\right]\\
&\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,w)}=\frac{u\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{(1-\cos\sigma\cos\varphi)^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\cos\varphi\\
&\frac{\partial(u',v')}{\partial(v,w)}=\frac{u\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma}{(1-\cos\sigma\cos\varphi)^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\operatorname{sen}\varphi.
\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

Se si osservano i due gruppi di formole (46), (47), si vede che, per identificare i due elementi lineari (40) e (42), basta determinare le tre quantità A', B', H'^2 dalle relazioni

$$A'\frac{\partial u'}{\partial u}+B'\frac{\partial v'}{\partial u}=a_{13}-u\cot\sigma\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}(D\cos\varphi+D'\operatorname{sen}\varphi)$$

$$A'\frac{\partial u'}{\partial v}+B'\frac{\partial v'}{\partial v}=a_{23}-u\cot\sigma\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}(D'\cos\varphi+D''\operatorname{sen}\varphi)$$

$$H'^2=a_{33}-\cot^2\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2-2\left(A'\frac{\partial u'}{\partial w}+B'\frac{\partial v'}{\partial w}\right),$$

le quali, sostituendo ad a_{13}, a_{23}, a_{33} i loro valori effettivi (41), diventano

$$\left.\begin{aligned}
&A'\frac{\partial u'}{\partial u}+B'\frac{\partial v'}{\partial u}=u\cos\sigma\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)(D\cos\varphi+D'\operatorname{sen}\varphi)\\
&A'\frac{\partial u'}{\partial v}+B'\frac{\partial v'}{\partial v}=u\cos\sigma\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)(D'\cos\varphi+D''\operatorname{sen}\varphi)
\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

$$H'^2=\Omega^2-\frac{\cos^4\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2-2\left(A'\frac{\partial u'}{\partial w}+B'\frac{\partial v'}{\partial w}\right).\tag{50}$$

Risolvendo rapporto ad A', B' le equazioni lineari (49), osservando la prima delle (48) e le formole (20) § 4, si trovano per A', B' i valori

$$\left.\begin{aligned}
&A'=-\frac{\cot\sigma}{u}\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\cdot\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\\
&B'=\frac{\cot\sigma}{u}\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\cdot(\cos\varphi-\cos\sigma).
\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

Formando di qui la quantità $A\frac{\partial u'}{\partial w}+B'\frac{\partial v'}{\partial w}$, che figura nella (50), abbiamo

$$A'\frac{\partial u'}{\partial w}+B'\frac{\partial v'}{\partial w}=\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

e quindi

$$H'^2=\Omega^2-\frac{\cos^4\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2-2\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial w}=\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2.$$

In fine dalle (51) stesse deduciamo

$$A'^2+B'^2=\frac{\cot^2\sigma}{u^2}(1-\cos\sigma\cos\varphi)^2\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2,$$

od anche

$$\frac{u'^2}{\cos^2\sigma}(A'^2+B'^2)=\left(\Omega-\frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2=H'^2.$$

L'identità (43) è così dimostrata, e con essa il teorema enunciato al § 12.

Ora osserviamo che la relazione fra i due sistemi (Σ), (Σ') è perfettamente reciproca, poichè la relazione d'applicabilità fra le due falde di una congruenza pseudosferica data dall'affinità d'Ivory è di natura involutoria.

Possiamo del resto confermare questo col calcolo, provando che la direzione della trajettoria isogonale del sistema (Σ') nel punto $P'\equiv(x', y', z')$ è quella della normale (X_3, Y_3, Z_3) alla S nel punto corrispondente (x, y, z), sicchè la costruzione del teorema al § 12, eseguita sul sistema (Σ'), riconduce al primitivo (Σ). Per ciò osserviamo che la direzione delle dette trajettorie è quella lungo la quale

$$u'=\text{cost.},\quad v'=\text{cost.},$$

ossia, in coordinate u, v, w, quella lungo la quale gli incrementi du, dv, dw sono legati dalle relazioni

$$\frac{\partial u'}{\partial u}du+\frac{\partial u'}{\partial v}dv+\frac{\partial u'}{\partial w}dw=0$$

$$\frac{\partial v'}{\partial u}du+\frac{\partial v'}{\partial v}dv+\frac{\partial v'}{\partial w}dw=0,$$

cioè dalle proporzioni equivalenti

$$du:dv:dw=\frac{\partial(u',v')}{\partial(v,w)}:-\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,w)}:\frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)},$$

le quali, osservando le (48), si scrivono

$$du : dv : dw = \frac{\cot\sigma}{u}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w} : -\frac{\cot\sigma}{u}\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w} :$$

$$: \left[\cos\varphi\,(D'\cos\varphi + D''\,\mathrm{sen}\,\varphi) - \mathrm{sen}\,\varphi\,(D\cos\varphi + D'\,\mathrm{sen}\,\varphi)\right].$$

Ne segue che i corrispondenti incrementi dx', dy', dz' sono proporzionali alla espressione

$$\frac{\cot\sigma}{u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\left(\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{\partial x'}{\partial u} - \cos\varphi\,\frac{\partial x'}{\partial v}\right) +$$

$$+\left[\cos\varphi\,(D'\cos\varphi + D''\,\mathrm{sen}\,\varphi) - \mathrm{sen}\,\varphi\,(D\cos\varphi + D'\,\mathrm{sen}\,\varphi)\right]\frac{\partial x'}{\partial w}$$

e alle due analoghe. Ora queste, a causa dei valori di $\frac{\partial x'}{\partial u}$, $\frac{\partial x'}{\partial v}$, $\frac{\partial x'}{\partial w}$ dati dalle (17) § 4 e (38*) § 12, risultano appunto proporzionali a X_3, Y_3, Z_3.

Si noti ancora che i valori delle funzioni H', φ' appartenenti al sistema trasformato (Σ') sono dati dalle formole seguenti

$$\left.\begin{aligned} H' = \Omega - \frac{\cos^2\sigma}{\mathrm{sen}\,\sigma}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w} = u\cot\sigma\cos\varphi\,\frac{\partial H}{\partial u} + u\cot\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{\partial H}{\partial v} + \\ + \frac{H}{\mathrm{sen}\,\sigma} - \frac{\cos^2\sigma}{\mathrm{sen}\,\sigma}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w} \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

$$\mathrm{sen}\,\varphi' = -\frac{\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi}, \quad \cos\varphi' = \frac{\cos\sigma\cos\varphi}{1-\cos\sigma\cos\varphi}, \quad (52^*)$$

le quali ultime due sono da porsi a riscontro delle analoghe al § 12 per la trasformazione complementare.

Così abbiamo stabilito per i sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera l'esistenza e la proprietà di questa trasformazione singolare B_σ, colla quale, appena noto un sistema (Σ), se ne ha *in termini finiti* un secondo, ma da questo però si ritorna al primo. Nel confronto coi sistemi di Weingarten essa è assimilabile, per questa sua proprietà involutoria, alla trasformazione complementare pei sistemi di Weingarten a flessione costante, e nella deduzione di nuovi sistemi (Σ) è quindi ben lungi dall'assumere l'importanza della trasformazione complementare che permette di moltiplicare all'infinito i nuovi sistemi (Σ). Ora andremo a considerare le trasformazioni *generali* di Bäcklund che permettono di raggiungere, in grado ancor maggiore, il medesimo effetto.

§ 15.

Formole per le trasformazioni generali di Bäcklund.

La trasformazione singolare B_σ sopra studiata era applicabile soltanto nel caso di un angolo σ assolutamente costante. Noi qui riprendiamo lo studio dei sistemi (Σ) generali, con angolo σ che può variare colla superficie pseudosferica del sistema, e ci proponiamo di stabilire che ad essi sono pure applicabili le trasformazioni generali di Bäcklund, nello stesso grado di arbitrarietà come per le superficie pseudosferiche isolate, o pei sistemi di Weingarten.

Dato un sistema (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera, applichiamo a ciascuna superficie pseudosferica S del sistema una trasformazione di Bäcklund B_{c_1}, *a costante* c_1 *fissa per tutte le superficie del sistema,* e domandiamo: *È possibile fra le* ∞^1 *trasformate per la* B_{c_1} *della* S *sceglierne una* S', *per ciascuna* S, *in guisa che le* ∞^1 *superficie* S' *formino un nuovo sistema* (Σ') *di deformate isogonali della pseudosfera?*

Noi dimostreremo che ciò è sempre in effetto possibile, ed anzi si vedrà che per *una* superficie iniziale S del sistema si può prendere ad arbitrio la trasformata S', restando con ciò individuato l'intero sistema (Σ') trasformato, precisamente come accadeva per la trasformazione complementare (§ 12). La ricerca di questi ∞^1 sistemi trasformati di (Σ) per una data B_{c_1} dipende ancora dalla integrazione di un'equazione ai differenziali totali del tipo di Riccati. Per trattare il problema noi procederemo al solito, supponendolo risolubile, a trovare le formole relative, sulle quali poi dovremo fare le opportune verifiche.

Indichiamo con

$$\omega_1 = \omega_1(u, v, w)$$

l'angolo che il raggio FF' della congruenza pseudosferica congiungente due punti corrispondenti $F \equiv (x, y, z)$, $F' \equiv (x', y', z')$ di S, S' forma colle geodetiche (v) di S; avremo (§ 3):

$$x' = x + \cos c_1 (\cos \omega_1 X_1 + \operatorname{sen} \omega_1 X_2). \tag{53}$$

La funzione incognita ω_1 di u, v, w dovrà intanto soddisfare alle due equazioni per la trasformazione B_{c_1} di Bäcklund (formole (12) § 3):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial u} &= u \operatorname{tg} c_1 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1) + \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{u \cos c_1}\\ \frac{\partial \omega_1}{\partial v} &= u \operatorname{tg} c_1 (D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1) + \frac{\cos c_1 - \cos \omega_1}{u \cos c_1},\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

e resterà poi da esaminare a quali altre condizioni dovremo assoggettare ω_1 affinchè abbia luogo la proprietà richiesta.

Calcolando in primo luogo le derivate di x', y', z' rapporto ad u, v, w, troviamo (cf. §§ 4, 13)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial u} &= \left[\frac{\cos^2 \omega_1}{u} - u \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1)\right] X_1 +\\ &+ \left[\frac{\operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_1}{u} + u \operatorname{sen} c_1 \cos \omega_1 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1)\right] X_2 +\\ &+ u \cos c_1 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1) X_3,\\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= \left[\frac{\operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_1}{u} - u \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1 (D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1)\right] X_1 +\\ &+ \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \omega_1}{u} + u \operatorname{sen} c_1 \cos \omega_1 (D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1)\right] X_2 +\\ &+ u \cos c_1 (D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1) X_3,\\ \frac{\partial x'}{\partial w} &= \left[- \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} + H (\cos \sigma \operatorname{sen} \varphi - \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1)\right] X_1 +\\ &+ \left[\cos c_1 \cos \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} - H (\cos \sigma \cos \varphi - \cos c_1 \cos \omega_1)\right] X_2 +\\ &+ M X_3,\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

dove abbiamo posto

$$\left.\begin{aligned}M = {} & \frac{u \cos c_1 \cos \omega_1}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{u \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial v} +\\ & + H \cot \sigma \cos c_1 \cos (\omega_1 - \varphi) + H \operatorname{sen} \sigma.\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Dopo ciò possiamo calcolare dalle (55) l'elemento lineare (cf. §§ 11, 13)

$$\left.\begin{aligned} d s'^2 = a_{11}\, d u^2 + a_{22}\, d v^2 + a_{33}\, d w^2 + 2\, a_{12}\, d u\, d v + \\ + 2\, a_{13}\, d v\, d w + 2\, a_{23}\, d v\, d w, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

e troveremo per i coefficienti a_{ik} i valori seguenti

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\cos^2 \omega_1}{u^2} + u^2 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1)^2, \\ a_{12} &= \frac{\operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_1}{u} + u^2 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1)(D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1), \\ a_{22} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \omega_1}{u^2} + u^2 (D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1)^2, \\ a_{33} &= \cos^2 c_1 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2 + 2\, H \cos \sigma_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} \Big[\cos c_1 - \cos \sigma \cos (\omega_1 - \varphi)\Big] + \\ &\quad + H^2 \Big[\cos^2 c_1 + \cos^2 \sigma - 2 \cos c_1 \cos \sigma \cos (\omega_1 - \varphi)\Big] + M^2, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

e inoltre

$$\left.\begin{aligned} a_{13} &= \Phi (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1) - \frac{H \cos \sigma}{u} \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) \cos \omega_1 \\ a_{23} &= \Phi (D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1) - \frac{H \cos \sigma}{u} \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) \operatorname{sen} \omega_1 , \end{aligned}\right\} \tag{58*}$$

dove si è posto

$$\Phi = u \cos c_1 M + u \operatorname{sen} c_1 \left\{ \cos c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} + H \Big[\cos c_1 - \cos \sigma \cos (\omega_1 - \varphi)\Big]\right\}. \tag{59}$$

Ora, perchè il sistema (Σ') sia nuovamente un sistema di deformate isogonali della pseudosfera sotto il medesimo angolo σ, occorre e basta (cf. § 11) che, mediante un conveniente cangiamento delle variabili u, v nelle nuove u', v' (mantenendo la stessa w), l'elemento lineare (57) si trasformi in

$$d s'^2 = \frac{d u'^2 + d v'^2}{u'^2} + H'^2\, d w^2 + 2\, \alpha\, d u'\, d w + 2\, \beta\, d v'\, d w, \tag{57*}$$

e fra i coefficienti α, β, H'^2 abbia luogo la relazione

$$\frac{u'^2}{\cos^2 \sigma} (\alpha^2 + \beta^2) = H'^2. \tag{60}$$

Ricordando i risultati dei §§ 13, 14 per la trasformazione singolare B_σ è da pensare che anche qui la conveniente sostituzione sulle variabili sia quella stessa che dà la relazione d'applicabilità fra le due falde focali S, S' della congruenza pseudosferica e le relative formole si scrivano quindi, come le (44) § 13:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{u \operatorname{sen} c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \\ v' &= v + \frac{u \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Così è infatti; ma mentre nel caso della trasformazione singolare B_σ del § 13 si avevano solo da eseguire dei calcoli di verifica in termini finiti, qui invece il procedimento indicato fornisce appunto le equazioni differenziali da cui dipendono le trasformazioni generali di Bäcklund pei sistemi (Σ).

§ 16.

Equazione quadratica per $\dfrac{\partial \omega_1}{\partial w}$.

Per identificare i due elementi lineari (57) e (57*) occorre in primo luogo calcolare le derivate di u', v' rapporto ad u, v, w. Tali formole sono già stabilite ai §§ 4, 14, ma sarà opportuno richiamarle qui nelle notazioni attuali:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial u} &= \frac{\operatorname{sen} c_1 \cos \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{\cos \omega_1 - \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} - \\ &\quad - \frac{u^2 \operatorname{sen} c_1 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1)}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} &= \frac{\operatorname{sen} c_1 \cos \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} + \\ &\quad + \frac{u^2 \operatorname{sen} c_1 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1)}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{\cos \omega_1 - \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1}. \end{aligned}\right\} \tag{62$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{\cos \omega_1 - \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} - \\
&\qquad - \frac{u^2 \operatorname{sen} c_1 \,(D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1)}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \\
\frac{\partial v'}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} + \\
&\qquad + \frac{u^2 \operatorname{sen} c_1 \,(D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1)}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \cdot \frac{\cos \omega_1 - \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1}
\end{aligned}\right\} \quad (62)_2$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial w} &= -\frac{u \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial w} \cdot \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \\
\frac{\partial v'}{\partial w} &= \frac{u \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial w} \cdot \frac{\cos \omega_1 - \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \,.
\end{aligned}\right\} \quad (62)_3$$

Da queste formole seguono poi le altre (cf. § 14):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{u'^2}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2\right] = a_{11}\,, \quad \frac{1}{u'^2}\left[\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}\right] = a_{12}\,, \\
&\frac{1}{u'^2}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2\right] = a_{22}\,, \quad \frac{1}{u'^2}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial w}\right)^2\right] = \cot^2 c_1 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2, \\
&\frac{1}{u'^2}\left[\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial w} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial w}\right] = u \cot c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}(D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1), \\
&\frac{1}{u'^2}\left[\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial w} + \frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial w}\right] = u \cot c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}(D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1).
\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Identificando ora i due elementi lineari (57), (57*) si ottengono le tre equazioni seguenti che definiscono α, β, H'^2:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha \frac{\partial u'}{\partial u} + \beta \frac{\partial v'}{\partial u} &= a_{13} - u \cot c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}(D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1) \\
\alpha \frac{\partial u'}{\partial v} + \beta \frac{\partial v'}{\partial v} &= a_{23} - u \cot c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}(D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1)
\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

$$H'^2 = a_{33} - \cot^2 c_1 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2 - 2\left(\alpha \frac{\partial u'}{\partial w} + \beta \frac{\partial v'}{\partial w}\right). \quad (65)$$

Le (64), a causa delle (58*), si scrivono anche

$$\left.\begin{aligned} \alpha\frac{\partial u'}{\partial u}+\beta\frac{\partial v'}{\partial u} &= \left(\Phi - u\cot c_1\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)(D\cos\omega_1 + D'\,\text{sen}\,\omega_1) - \\ &\qquad - \frac{H\cos\sigma}{u}\text{sen}\,(\omega_1-\varphi)\cos\omega_1 \\ \alpha\frac{\partial u'}{\partial v}+\beta\frac{\partial v'}{\partial v} &= \left(\Phi - u\cot c_1\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)(D'\cos\omega_1 + D''\,\text{sen}\,\omega_1) - \\ &\qquad - \frac{H\cos\sigma}{u}\text{sen}\,(\omega_1-\varphi)\,\text{sen}\,\omega_1, \end{aligned}\right\} \quad (64^*)$$

e risolute rapporto ad u, v, coll'osservare che si ha (§ 14)

$$\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)} = u'^2\left\{\cos\omega_1(D'\cos\omega_1 + D''\,\text{sen}\,\omega_1) - \right.$$
$$\left. - \text{sen}\,\omega_1(D\cos\omega_1 + D'\,\text{sen}\,\omega_1)\right\},$$

dànno per α, β i valori

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\Phi - u\cot c_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial w}}{u^2\,\text{sen}\,c_1}\text{sen}\,c_1\,\text{sen}\,\omega_1 - \\ &\qquad - \frac{H\cos\sigma\,\text{sen}\,(\omega_1-\varphi)}{u\,\text{sen}\,c_1}(\cos\omega_1 - \cos c_1) \\ \beta &= \frac{\Phi - u\cot c_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial w}}{u^2\,\text{sen}\,c_1}(\cos\omega_1-\cos c_1) - \\ &\qquad - \frac{H\cos\sigma\,\text{sen}\,(\omega_1-\varphi)}{u\,\text{sen}\,c_1}\cdot\text{sen}\,c_1\,\text{sen}\,\omega_1, \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

donde, quadrando e sommando, risulta

$$\frac{u'^2}{\cos^2\sigma}(\alpha^2+\beta^2) = \frac{\left(\Phi - u\cot c_1\dfrac{\partial\omega_1}{\partial w}\right)^2}{u^2\cos^2\sigma} + H^2\,\text{sen}^2\,(\omega_1-\varphi). \quad (67)$$

D'altra parte dalle (66) e dalle $(62)_3$ deduciamo

$$\alpha\frac{\partial u'}{\partial w}+\beta\frac{\partial v'}{\partial w} = \frac{\cot c_1}{u}\left(\Phi - u\cot c_1\frac{\partial\omega_1}{\partial w}\right)\frac{\partial\omega_1}{\partial w},$$

e sostituendo nella (65) per a_{33} il valore (58) e per $\alpha \frac{\partial u'}{\partial w} + \beta \frac{\partial v'}{\partial w}$ quello ora calcolato, viene

$$\left.\begin{aligned} H'^2 = M^2 - \frac{\cos^4 c_1}{\operatorname{sen}^2 c_1}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2 + 2\,H \cos c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}\Big[\cos c_1 - \cos\sigma \cos(\omega_1 - \varphi)\Big] + \\ + H^2\Big[\cos^2 c_1 + \cos^2 \sigma - 2\cos c_1 \cos\sigma \cos(\omega_1 - \varphi)\Big] - \\ - 2\,\frac{\cot c_1}{u}\,\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\left(\Phi - u \cot c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

A causa del valore (59) di Φ, abbiamo

$$\frac{\Phi - u \cot c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}}{u} = M \cos c_1 + H \operatorname{sen} c_1 \Big[\cos c_1 - \cos\sigma \cos(\omega_1 - \varphi)\Big] - \\ - \frac{\cos^3 c_1}{\operatorname{sen} c_1}\,\frac{\partial \omega_1}{\partial w},$$

e sostituendo nelle (67), (68), l'equazione (60) che resta ancora a soddisfare si traduce nella seguente:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\cos^2 \sigma}\Big\{ M \cos c_1 + H \operatorname{sen} c_1 \Big[\cos c_1 - \cos\sigma\cos(\omega_1 - \varphi)\Big]\Big\}^2 - \\ &- 2\,\frac{\cos^3 c_1}{\operatorname{sen} c_1 \cos^2\sigma}\,\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\Big\{ M \cos c_1 + H \operatorname{sen} c_1 \Big[\cos c_1 - \cos\sigma\cos(\omega_1 - \varphi)\Big]\Big\} + \\ &+ \frac{\cos^6 c_1}{\cos^2\sigma \operatorname{sen}^2 c_1}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2 + 2 \cot c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}\Big\{ M \cos c_1 + \\ &+ H \operatorname{sen} c_1 \Big[\cos c_1 - \cos\sigma\cos(\omega_1 - \varphi)\Big] - \frac{\cos^3 c_1}{\operatorname{sen} c_1}\,\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\Big\} + \\ &+ \frac{\cos^4 c_1}{\operatorname{sen}^2 c_1}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2 - 2\,H\cos c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w}\Big[\cos c_1 - \cos\sigma\cos(\omega_1 - \varphi)\Big] - \\ &- H^2\Big[\cos^2 c_1 + \cos^2\sigma - 2\cos c_1\cos\sigma\cos(\omega_1 - \varphi)\Big] + \\ &+ H^2 \operatorname{sen}^2(\omega_1 - \varphi) - M^2 = 0. \end{aligned}$$

Questa, sviluppata, è in generale un'equazione quadratica per $\frac{\partial \omega_1}{\partial w}$, che scriviamo

$$p\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2 - 2q\frac{\partial \omega_1}{\partial w} + r = 0, \tag{69}$$

e calcolandone effettivamente i coefficienti p, q, r troviamo

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{\cos^4 c_1 (\operatorname{sen}^2 \sigma - \operatorname{sen}^2 c_1)}{\cos^2 \sigma \operatorname{sen}^2 c_1}, \\
q &= \frac{\cos^2 c_1 (\operatorname{sen}^2 \sigma - \operatorname{sen}^2 c_1)}{\cos^2 \sigma \operatorname{sen} c_1} \cdot M + \frac{\cos^3 c_1}{\cos^2 \sigma}\left[\cos c_1 - \cos\sigma \cos(\omega_1 - \varphi)\right] . H, \\
r &= \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma - \operatorname{sen}^2 c_1}{\cos^2 \sigma} M^2 + 2\frac{\operatorname{sen} c_1 \cos c_1}{\cos^2 \sigma}\left[\cos c_1 - \cos\sigma \cos(\omega_1 - \varphi)\right] . \\
&\quad . MH + H^2 \operatorname{sen}^2(\omega_1 - \varphi) + \\
&\quad + \frac{\operatorname{sen}^2 c_1}{\cos^2 \sigma}\left[\cos c_1 - \cos\sigma \cos(\omega_1 - \varphi)\right]^2 . H^2 - \\
&\quad - \left[\cos^2 c_1 + \cos^2 \sigma - 2\cos c_1 \cos\sigma \cos(\omega_1 - \varphi)\right] . H^2.
\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Escludiamo pel momento il caso particolare in cui si abbia, con σ costante, $\operatorname{sen}^2 c_1 = \operatorname{sen}^2 \sigma$, dove l'equazione quadratica (69) si riduce lineare; occorre allora qualche osservazione complementare che si farà più oltre.

Per l'equazione quadratica (69) si presenta la circostanza semplificante che il suo discriminante $q^2 - pr$ è un quadrato perfetto; si trova invero calcolando

$$q^2 - pr = \frac{H^2 \cos^4 c_1 \operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 c_1 \cos^2 \sigma}\left[\cos\sigma - \cos c_1 \cos(\omega_1 - \varphi)\right]^2;$$

per ciò le due radici in $\dfrac{\partial \omega_1}{\partial w}$ si ottengono razionalmente e si ha

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial w} = \frac{\operatorname{sen} c_1}{\cos^2 c_1} M + \frac{H}{p}\,\frac{\cos^3 c_1}{\cos^2 \sigma}\left[\cos c_1 - \cos\sigma \cos(\omega_1 - \varphi)\right] +$$
$$+ \frac{\varepsilon H}{p}\,\frac{\cos^2 c_1 \operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen} c_1 \cos\sigma}\left[\cos\sigma - \cos c_1 \cos(\omega_1 - \varphi)\right],$$

dove ε indica l'unità, positiva o negativa ($\varepsilon = \pm 1$).

Sostituendo per M il suo valore effettivo (56), possiamo scrivere la formola superiore per $\frac{\partial \omega_1}{\partial w}$ così:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial w} = \frac{u \operatorname{tg} c_1}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \omega_1 \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{u \operatorname{tg} c_1}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \omega_1 \frac{\partial H}{\partial v} + a\, H \cos(\omega_1 - \varphi) + b\, H, \tag{71}$$

dove i coefficienti a, b dipendono solo da σ (da w) ed hanno i valori seguenti

$$a = -\frac{\cos \sigma \operatorname{sen}^2 c_1}{\operatorname{sen} \sigma \cos c_1 (\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_1)}, \quad b = \frac{\operatorname{sen} c_1}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_1}, \quad \text{per } \varepsilon = +1 \tag{72}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\cos \sigma \operatorname{sen} c_1 (2 \operatorname{sen} \sigma + \operatorname{sen} c_1)}{\operatorname{sen} \sigma \cos c_1 (\operatorname{sen} \sigma + \operatorname{sen} c_1)}, \\ b &= \frac{2 \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} c_1}{\cos^2 c_1} - \frac{\operatorname{sen} c_1}{\operatorname{sen} \sigma + \operatorname{sen} c_1}, \quad \text{per } \varepsilon = -1. \end{aligned}\right\} \tag{72*}$$

E qui, a riguardo del caso escluso $\operatorname{sen}^2 c_1 = \operatorname{sen}^2 \sigma$, cominciamo dall'osservare che l'equazione (69), allora ridotta lineare, dà ancora per $\frac{\partial \omega_1}{\partial w}$ un valore della formola (71) con valori convenienti di a, b.

Resta ora da esaminare la compatibilità della equazione differenziale (71) per ω_1 colle altre (54) § 15 della trasformazione B_{c_1} di Bäcklund, cui deve pur soddisfare ω_1. Vedremo che scegliendo $\varepsilon = +1$, cioè per a, b i valori (72), il sistema di equazioni differenziali per ω_1 risulta *illimitatamente integrabile*, mentre ciò più non accade per $\varepsilon = -1$; così la scelta da farsi pei valori di a, b resta determinata in quella dei primi (72), con esclusione degli altri (72*).

§ 17.

Esame delle condizioni d'integrabilità.

Nello studio della compatibilità della (71) colle (54) § 25 è utile lasciare da principio indeterminati i coefficienti a, b, perchè appunto dall'esame stesso delle condizioni di (illimitata) integrabilità vedremo risultarne per a, b necessariamente i valori (72) con esclusione degli altri.

Cominciamo dal costruire l'espressione

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right),$$

ossia

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial w}\left\{ u \operatorname{tg} c_1 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1) + \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{u \cos c_1} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial u}\left\{ \frac{u \operatorname{tg} c_1}{\operatorname{sen} \sigma} \cos \omega_1 \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{u \operatorname{tg} c_1}{\operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \omega_1 \frac{\partial H}{\partial v} + \right.$$

$$\left. + a H (\cos \omega_1 \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \omega_1 \cos \varphi) + b H \right\}.$$

Eseguendo e sostituendo per $\frac{\partial \omega_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial w}$ i loro valori (54), (71) e per $\frac{\partial D}{\partial w}$, $\frac{\partial D'}{\partial w}$ i valori dati dalle (B) § 6, è chiaro che, ordinando Θ rispetto a $\cos \omega_1$, $\operatorname{sen} \omega_1$, Θ avrà la forma

$$\Theta = P \operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_1 + Q \cos \omega_1 + R \operatorname{sen} \omega_1 + l \cos^2 \omega_1 + m \operatorname{sen}^2 \omega_1 + n,$$

e per la illimitata integrabilità sarà necessario che i coefficienti

$$P,\ Q,\ R,\ l,\ m,\ n$$

soddisfino alle condizioni seguenti:

$$P = Q = R = 0$$

$$l = m - - n.$$

Intanto il calcolo di P, eseguito nel modo indicato, dà effettivamente $P = 0$. Pel coefficiente Q troviamo dapprima

$$Q = \frac{b H}{u \cos c_1} + b H u \operatorname{tg} c_1 D' + u \operatorname{tg} c_1 \left(\frac{1}{u \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{H}{u^2 \operatorname{sen} \sigma}\right) -$$

$$- \frac{\operatorname{tg} c_1}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial u} - a \cos \varphi \frac{\partial H}{\partial u} + a H \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

e ponendovi per $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial H}{\partial u}$ i valori dati dalle (12), (13) § 3, troviamo

$$Q = H u D' (b \operatorname{tg} c_1 + a \operatorname{tg} \sigma) + \frac{H}{u}\left(\frac{a}{\cos \sigma} + \frac{b}{\cos c_1} - \frac{\operatorname{sen} c_1}{\cos c_1 \operatorname{sen} \sigma}\right).$$

Ora perchè Q si annulli, occorre che si annullino separatamente il coefficiente di D' al secondo membro ed il termine indipendente da D', onde seguono fra a, b le due relazioni

$$\left.\begin{aligned} a \operatorname{tg} \sigma + b \operatorname{tg} c_1 &= 0 \\ b (\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_1) &= \operatorname{sen} c_1 , \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

e queste (supposto $\operatorname{sen} \sigma \gtrless \operatorname{sen} c_1$) dànno per a, b i primi valori (72). Ma, con questi valori di a, b, calcolando similmente il coefficiente R, si trova che è pure identicamente nullo.

Ed ora se si calcolano gli altri coefficienti l, m, n si trova

$$l = m = \left(\frac{1}{u \cos c_1} + u \operatorname{tg} c_1 D'\right)\left(\frac{u \operatorname{tg} c_1}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial u} + a H \cos \varphi\right) - \\ - \frac{u^2 \operatorname{tg}^2 c_1}{\operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial H}{\partial v} D - a H u \operatorname{tg} c_1 \operatorname{sen} \varphi D$$

$$n = - b \frac{\partial H}{\partial u} .$$

Sostituendo, come sopra, per $\frac{\partial H}{\partial u}$, $\frac{\partial H}{\partial v}$ i valori dati dalle (14) § 3, e ricordando che per l'equazione di Gauss $D'^2 - D D'' = \frac{1}{u^4}$, si verifica facilmente che, coi detti valori (72) di a, b, anche l'altra condizione

$$l + n = 0$$

risulta identicamente soddisfatta. Così adunque con questi valori di a, b, le condizioni d'integrabilità provenienti dalla

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right) = 0$$

si trovano verificate. In modo del tutto simile si prova che anche l'altra condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right) = 0$$

è soddisfatta, onde si conclude che i valori (72) di a, b rendono il sistema di equazioni differenziali per la funzione incognita ω_1 illimitatamente integrabile.

Ora è facile completare la discussione coll'esame del caso fin qui escluso

$$\mathrm{sen}^2\, c_1 = \mathrm{sen}^2\, \sigma.$$

Si osservi dapprima che se $\mathrm{sen}\,\sigma = \mathrm{sen}\, c_1$ le condizioni d'integrabilità non sono certo soddisfatte, perchè la seconda delle (73), che abbiamo ottenuta come condizione necessaria, darebbe

$$\mathrm{sen}\,\sigma = \mathrm{sen}\, c_1 = 0$$

e questo è escluso. Si vede quindi che per $\mathrm{sen}\,\sigma = \mathrm{sen}\, c_1$ non possono esistere che singoli valori di ω_1 soddisfacenti al problema. Un tale valore è appunto $\omega_1 = \varphi$, ovvero $\omega_1 = \varphi + \pi$, secondo che $\cos c_1 = \pm \cos\sigma$, poichè in effetto i coefficienti p, q, r dati dalle (70) sono tutti nulli e la (69) è identicamente soddisfatta; ma di più sono anche verificate le equazioni differenziali (54), che si riducono alle (12) § 3. Così ritroviamo nuovamente quella particolare trasformazione di Bäcklund B_σ (per σ costante) che abbiamo studiata ai §§ 13, 14 sotto il nome di trasformazione singolare, denominazione che rimane ora analiticamente giustificata.

Resta ora da considerare il caso di $\mathrm{sen}\,\sigma = -\,\mathrm{sen}\, c_1$; ma si vede subito che questo rientra nel caso generale, poichè il valore che ne segue per $\frac{\partial \omega_1}{\partial w}$ dalla (69) combina precisamente con quello dato dalla (71), avendo a, b le espressioni (72) corrispondenti ad $\varepsilon = +1$.

§ 18.

Le trasformazioni generali di Bäcklund pei sistemi (Σ).

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nella discussione sopra effettuata colle conclusioni seguenti:

Dato un sistema (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera sotto l'angolo σ, definito dalle formole del § 6, si fissi una costante c_1 arbitraria (coll'unica esclusione che per σ costante sia $\mathrm{sen}\,\sigma + \mathrm{sen}\, c_1$) e si costruisca il sistema di equazioni differenziali simultanee per la funzione incognita ω_1 di

u, v, w

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\omega_1}{\partial u} &= u \operatorname{tg} c_1 (D\cos\omega_1 + D'\operatorname{sen}\omega_1) + \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{u\cos c_1} \\
\frac{\partial\omega_1}{\partial v} &= u \operatorname{tg} c_1 (D'\cos\omega_1 + D''\operatorname{sen}\omega_1) + \frac{\cos c_1 - \cos\omega_1}{u\cos c_1} \\
\frac{\partial\omega_1}{\partial w} &= \frac{u\operatorname{tg} c_1}{\operatorname{sen}\sigma}\cos\omega_1 \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{u\operatorname{tg} c_1}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{sen}\omega_1 \frac{\partial H}{\partial v} + \\
&\quad + \frac{H\operatorname{sen} c_1}{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} c_1} - \frac{H\cos\sigma\operatorname{sen}^2 c_1}{\operatorname{sen}\sigma\cos c_1(\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen} c_1)}\cdot\cos(\omega_1 - \varphi).
\end{aligned}\right\} (D)$$

Queste formano, per qualunque valore della costante c_1, un sistema illimitatamente integrabile, e posseggono quindi una soluzione generale contenente, oltre c_1, una costante arbitraria. Se si sceglie una qualunque soluzione ω_1 del sistema (D), le formole

$$x' = x + \cos c_1 (\cos\omega_1 X_1 + \operatorname{sen}\omega_1 X_2)$$

e analoghe per y', z', definiscono un nuovo sistema (Σ') di deformate isogoali della pseudosfera sotto il medesimo angolo σ, e ciascuna superficie pseuosferica S' del nuovo sistema è una trasformata di Bäcklund, per mezzo della B_{c_1}, della corrispondente S' del primitivo.

Per trovare le trajettorie isogonali descritte dai punti della S' nella deformazione continua, partendo da quelle del sistema primitivo, bisogna associare alla legge di corrispondenza dei punti di S, S', come falde focali di una congruenza pseudosferica, quella della speciale loro applicabilità data dall'affinità d'Ivory.

Diremo che il nuovo sistema (Σ') è dedotto dal primitivo (Σ) per mezzo della trasformazione B_{c_1} di Bäcklund. È ora evidente che:

Ogni sistema (Σ) *ammette una semplice infinità di sistemi trasformati* (Σ') *per mezzo della* B_{c_1}, *restando arbitraria per una superficie pseudosferica iniziale* S *di* (Σ) *la scelta della trasformata* S'. *Se si fa poi variare anche la costante* c_1 *si ottiene così da ogni sistema* (Σ) *una doppia infinità di sistemi trasformati.*

Importa anche osservare che se il sistema (Σ') deriva da (Σ) per mezzo della trasformazione B_{c_1}, inversamente (Σ) deriva da (Σ') ancora con una B_{c_1}. Questo è ben noto per le singole superficie corrispondenti, e per i sistemi risulta dall'osservare che la legge di corrispondenza dei punti fornita dall'affinità d'Ivory ha carattere invertibile.

Ritornando alle equazioni differenziali (D) per le trasformazioni B_{c_1} dei sistemi (Σ), osserviamo che esse possono compendiarsi in un'equazione ai differenziali totali per ω_1, la quale, assumendo per funzione incognita $\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2}$, ha la forma di Riccati, onde segue che, nota una sua soluzione particolare, si ottiene la generale con quadrature. Di qui si deduce nel solito modo:

Se di un sistema (Σ) si conoscono i sistemi derivati (Σ') per mezzo della trasformazione di Bäcklund *B_{c_1}, si potrà applicare la medesima trasformazione ai nuovi sistemi (Σ') con sole quadrature.*

Così, eseguendo soltanto successive quadrature, si potrà applicare indefinitamente il processo di trasformazione che farà conoscere un numero illimitato di sistemi (Σ) dipendenti da quante si vogliano costanti arbitrarie.

Un'ultima osservazione possiamo fare sulle equazioni differenziali (D). Benchè esse siano state ottenute nei paragrafi precedenti supponendo la costante c_1 non nulla, cioè con esclusione delle trasformazioni complementari, si vede ora che valgono ancora per queste. E invero se facciamo nelle (D) $c_1 = 0$, queste diventano semplicemente

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial u} = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{u}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial v} = \frac{1 - \cos \omega_1}{u}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial w} = 0;$$

ω_1 diventa indipendente da w e le linee inviluppate sulla superficie S dalle direzioni fissate dall'angolo ω_1 formano un sistema di geodetiche parallele, onde le formole

$$x' = x + \cos \omega_1 X_1 + \operatorname{sen} \omega_1 X_2$$

dànno, secondo i risultati dei §§ 11, 12, i sistemi (Σ') complementari di (Σ).

Sebbene le equazioni differenziali (D) comprendano tanto il caso delle trasformazioni generali di Bäcklund B_{c_1} quanto quello delle complementari B_0, come ora si è visto, era per altro necessario una trattazione diversa dei due casi, perchè la legge d'applicabilità per le superficie del sistema derivato è affatto differente nei due casi. Per le trasformazioni B_{c_1} di Bäcklund essa è data in termini finiti delle formole (61) dell'affinità d'Ivory, le quali perdono ogni significato nel caso della trasformazione complementare e debbono sostituirsi colle (35) § 11 che dipendono da una quadratura.

Come si vede, l'analogia di tutti questi risultati ottenuti pei sistemi (Σ) con quelli relativi alle superficie pseudosferiche isolate, od ai sistemi di Wein-

GARTEN, è perfetta. Resta soltanto che introduciamo anche qui il perfezionamento del metodo di trasformazione dovuto al *teorema di permutabilità*, ciò che andiamo ora rapidamente ad indicare.

§ 19.

Formole relative al sistema trasformato.

Dal sistema (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera supponiamo dedotto, per mezzo della trasformazione di BÄCKLUND B_{c_1}, il sistema trasformato (Σ') e proponiamoci di calcolare gli elementi relativi a (Σ'), ciò che diventa necessario per stabilire le formole del teorema finale di permutabilità.

Calcoliamo prima di tutto i coseni di direzione del triedro principale relativo al punto $F' \equiv (x', y', z')$ di S' cogli spigoli diretti secondo le tangenti alle geodetiche (v'), agli oricicli (u') e secondo la normale alla S'. Indicando questi coseni con

$$(X'_1,\ Y'_1,\ Z'_1),\quad (X'_2,\ Y'_2,\ Z'_2),\quad (X'_3,\ Y'_3,\ Z'_3),$$

abbiamo subito intanto

$$X'_3 = \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1 X_1 - \cos c_1 \cos \omega_1 X_2 + \operatorname{sen} c_1 X_3,$$

colle analoghe per Y'_3, Z'_3. Per calcolare

$$X'_1 = u' \frac{\partial x'}{\partial u'},\quad X'_2 = u' \frac{\partial x'}{\partial v'},\quad \text{ecc.}$$

conviene dedurre i valori di $\frac{\partial x'}{\partial u'}$, $\frac{\partial x'}{\partial v'}$ da quelli già calcolati al § 15 colle formole (55) per $\frac{\partial x'}{\partial u}$, $\frac{\partial x'}{\partial v}$. Perciò bisogna osservare che, se $\Phi(u, v, w)$ è una funzione di u, v, w che si esprime per u', v', w, si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v'} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right),$$

dove Δ indica il determinante funzionale $\dfrac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)}$ che ha il valore ((48) § 14)

$$\Delta = u'^2 \left\{ \cos\omega_1 (D' \cos\omega_1 + D'' \operatorname{sen}\omega_1) - \operatorname{sen}\omega_1 (D \cos\omega_1 + D' \operatorname{sen}\omega_1) \right\}.$$

Servendosi di queste formole, delle citate (55) e dei valori (62) § 16 per le derivate di u', v', troviamo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
X'_1 = {} & \frac{\cos\omega_1(\cos\omega_1 - \cos c_1) + \operatorname{sen}^2 c_1 \operatorname{sen}^2\omega_1}{1 - \cos c_1 \cos\omega_1} X_1 + \\
& + \frac{\operatorname{sen}\omega_1(\cos\omega_1 - \cos c_1) - \operatorname{sen}^2 c_1 \operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega_1}{1 - \cos c_1 \cos\omega_1} X_2 - \\
& - \frac{\operatorname{sen} c_1 \cos c_1 \operatorname{sen}\omega_1}{1 - \cos c_1 \cos\omega_1} X_3 \\
X'_2 = {} & \frac{\operatorname{sen} c_1 \cos c_1 \operatorname{sen}\omega_1}{1 - \cos c_1 \cos\omega_1} X_1 + \frac{\operatorname{sen} c_1 (1 - \cos c_1 \cos\omega_1)}{1 - \cos c_1 \cos\omega_1} X_2 + \\
& + \frac{\cos c_1 (\cos\omega_1 - \cos c_1)}{1 - \cos c_1 \cos\omega_1} X_3 \\
X'_3 = {} & \cos c_1 \operatorname{sen}\omega_1 X_1 - \cos c_1 \cos\omega_1 X_2 + \operatorname{sen} c_1 X_3 .
\end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Si è già osservato che il sistema (Σ) si deduce alla sua volta da (Σ') con una B_{c_1}; se indichiamo con ω'_1 la funzione trasformatrice in questa trasformazione inversa, analoga alla ω_1 nella diretta da (Σ) a (Σ'), avremo

$$x = x' + \cos c_1 (\cos\omega'_1 X'_1 + \operatorname{sen}\omega'_1 X'_2),$$

e confrontando coll'altra

$$x' = x + \cos c_1 (\cos\omega_1 X_1 + \operatorname{sen}\omega_1 X_2),$$

ne dedurremo l'identità

$$\cos\omega_1 X_1 + \operatorname{sen}\omega_1 X_2 + \cos\omega'_1 X'_1 + \operatorname{sen}\omega'_1 X'_2 = 0$$

e le due analoghe. Sostituendo in questa per X'_1, X'_2 i valori (74), otteniamo

$$\cos\omega'_1 = \frac{\cos c_1 - \cos\omega_1}{1 - \cos c_1 \cos\omega_1}, \quad \operatorname{sen}\omega'_1 = - \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen}\omega_1}{1 - \cos c_1 \cos\omega_1}. \qquad (75)$$

Calcoliamo in fine pel nuovo sistema (Σ') le quantità H', φ' analoghe alle H, φ del sistema (Σ), per le quali si ha

$$d s'^2 = \frac{d u'^2 + d v'^2}{u'^2} + H'^2 d w^2 + 2 \frac{H' \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi'}{u'} d u' d w -$$

$$- 2 \frac{H' \cos \sigma \cos \varphi'}{u'} d v' d w.$$

Confrontando colla (57*) § 15 e osservando i valori (66), (68) per α, β, H', ove per $\frac{\partial \omega_1}{\partial w}$ si ponga il suo valore, si arriva alle formole seguenti

$$H' = H \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} c_1 - 1 + \cos \sigma \cos c_1 \cos (\omega_1 - \varphi)}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_1} \tag{76}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{H'}{H} \cos \varphi' &= \frac{\cos \sigma \cos c_1 + (\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} c_1 - 1) \cos (\omega_1 - \varphi)}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_1} \,. \\ &\quad \cdot \frac{\cos \omega_1 - \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} + \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \\ \frac{H'}{H} \operatorname{sen} \varphi' &= \frac{\cos \sigma \cos c_1 + (\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} c_1 - 1) \cos (\omega_1 - \varphi)}{\operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} c_1} \,. \\ &\quad \cdot \frac{\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} - \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) \,. \frac{\cos \omega_1 - \cos c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1} \,. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Queste ultime, osservando le (75), possono anche scriversi sotto la forma seguente

$$\left.\begin{aligned} \cos (\omega'_1 - \varphi') &= \frac{(1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \sigma) \cos (\omega_1 - \varphi) - \cos c_1 \cos \sigma}{\cos c_1 \cos \sigma \cos (\omega_1 - \varphi) - (1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \sigma)} \\ \operatorname{sen} (\omega'_1 - \varphi') &= \frac{(\operatorname{sen} c_1 - \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi)}{\cos c_1 \cos \sigma \cos (\omega_1 - \varphi) - (1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \sigma)} \,, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

o ancora sotto la forma semplice equivalente:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega'_1 - \varphi'}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_1 - \varphi}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{c_1 - \sigma}{2}}{\cos \frac{c_1 + \sigma}{2}} \,. \tag{78*}$$

Non sarebbe difficile verificare con queste formole che la funzione ω'_1 soddisfa alle equazioni differenziali (D) relative al passaggio inverso da (Σ') a (Σ).

§ 20.

Il teorema di permutabilità.

Come per le superficie pseudosferiche isolate, e per le famiglie di Lamé costituite di superficie pseudosferiche, così anche per i sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera i metodi di trasformazione sono suscettibili di un importante perfezionamento dovuto al sussistere ancora in questo caso del teorema di permutabilità :

Se di un sistema (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera si considerano due sistemi contigui (Σ'), (Σ'') derivati da (Σ) mediante due trasformazioni di Bäcklund B_{c_1}, B_{c_2} a costanti c_1, c_2 differenti, esiste un quarto sistema $(\overline{\Sigma})$ legato a (Σ'), (Σ'') rispettivamente da trasformazioni B_{c_2}, B_{c_1} colle costanti invertite. Questo quarto sistema $(\overline{\Sigma})$ è costruibile in termini finiti appena noti (Σ), (Σ'), (Σ'').

Consideriamo tre superficie pseudosferiche corrispondenti S, S', S'' dei tre sistemi (Σ), (Σ'), (Σ''); esse determinano perfettamente una quarta superficie pseudosferica $\overline{S}$ che completa S, S', S'' ad una quaderna $(S, S', S'', \overline{S})$ del teorema di permutabilità (*Lezioni*, Vol. II, pag. 411). Il teorema enunciato consiste in questo, che la quarta superficie $\overline{S}$ descrive alla sua volta un sistema $(\overline{\Sigma})$ di deformate isogonali della pseudosfera.

Intanto per trovare le formole relative a questo quarto sistema $(\overline{\Sigma})$ servono le considerazioni stesse svolte ai §§ 383, 384 delle *Lezioni* (Vol. II, pag. 411 e segg.) a proposito delle superficie pseudosferiche isolate. Indicando con

$$F \equiv (x, y, z), \quad F' \equiv (x', y', z'), \quad F'' \equiv (x'', y'', z'')$$

tre punti corrispondenti di (Σ), (Σ'), (Σ''), e con ω_1, ω_2 le rispettive funzioni trasformatrici nel rispettivo passaggio da (Σ) a (Σ'), e da (Σ) a (Σ''), avremo

$$\begin{aligned} x' &= x + \cos c_1 \cos \omega_1 X_1 + \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1 X_2 \\ x'' &= x + \cos c_2 \cos \omega_2 X_1 + \cos c_2 \operatorname{sen} \omega_2 X_2 , \end{aligned}$$

e le rispettive normali a S', S'' avranno i coseni di direzione

$$\begin{aligned} X'_3 &= \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1 X_1 - \cos c_1 \cos \omega_1 X_2 + \operatorname{sen} c_1 X_3 \\ X''_3 &= \cos c_2 \operatorname{sen} \omega_2 X_1 - \cos c_2 \cos \omega_2 X_2 + \operatorname{sen} c_2 X_3 . \end{aligned}$$

Il punto $\overline{F} \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ corrispondente del quarto sistema $(\overline{\Sigma})$ si trova sulla retta intersezione dei due piani tangenti in F', F'' a S', S'', che esce da F. I coseni di direzione di questa retta sono quindi proporzionali alle tre quantità α, β, γ date da

$$\left.\begin{aligned}\alpha = (\operatorname{sen} c_1 \cos c_2 \cos \omega_2 - \operatorname{sen} c_2 \cos c_1 \cos \omega_1) X_1 + \\ + (\operatorname{sen} c_1 \cos c_2 \operatorname{sen} \omega_1 - \operatorname{sen} c_2 \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_2) X_2 - \\ - \cos c_1 \cos c_2 \operatorname{sen} (\omega_1 - \omega_2) X_3\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

e dalle analoghe per β, γ. Per le coordinate $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ di $\overline{F}$ si hanno le formole

$$\overline{x} = x + \Lambda . \alpha, \quad \overline{y} = y + \Lambda \beta, \quad \overline{z} = z + \Lambda \gamma, \tag{80}$$

dove resta da determinare Λ, ciò che si fa dalle due condizioni

$$\Sigma (\overline{x} - x')^2 = \cos^2 c_2, \quad \Sigma (\overline{x} - x'')^2 = \cos^2 c_1,$$

onde si ricava facilmente

$$\Lambda = \frac{\operatorname{sen} c_1 - \operatorname{sen} c_2}{1 - \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2 - \cos c_1 \cos c_2 \cos (\omega_1 - \omega_2)} . \tag{81}$$

Introducendo nelle (80) per α, β, γ i valori (79) e per Λ il valore precedente, si hanno le formole cercate che definiscono, in termini finiti, il quarto sistema $(\overline{\Sigma})$.

Per verificare poi che questo quarto sistema $(\overline{\Sigma})$ è alla sua volta di deformate isogonali della pseudosfera conviene procedere nel modo seguente. Indichi θ_1 la funzione trasformatrice nel passaggio da (Σ') a $(\overline{\Sigma})$ per mezzo della B_{c_2}; avremo

$$\overline{x} = x' + \cos c_2 \cos \theta_1 X'_1 + \cos c_2 \operatorname{sen} \theta_1 X'_2 ,$$

e confrontando colle precedenti ne risulta l'identità

$$\cos c_1 \cos \omega_1 X_1 + \cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1 X_2 + \cos c_2 \cos \theta_1 X'_1 + \\ + \cos c_2 \operatorname{sen} \theta_1 X'_2 = \Lambda \alpha$$

colle analoghe. Se si osservano le formole (74), (79), (81), si trova con facile calcolo

$$\left.\begin{aligned}
\cos\theta_1 &= \frac{(1-\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2)\cos(\omega_1-\omega_2)-\cos c_1\cos c_2}{1-\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen} c_2-\cos c_1\cos c_2\cos(\omega_1-\omega_2)}\cdot\frac{\cos\omega_1-\cos c_1}{1-\cos c_1\cos\omega_1}+\\
&+\frac{(\operatorname{sen} c_1-\operatorname{sen} c_2)\operatorname{sen}(\omega_1-\omega_2)}{1-\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen} c_2-\cos c_1\cos c_2\cos(\omega_1-\omega_2)}\cdot\frac{\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen}\omega_1}{1-\cos c_1\cos\omega_1}\\
\operatorname{sen}\theta_1 &= \frac{(1-\operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} c_2)\cos(\omega_1-\omega_2)-\cos c_1\cos c_2}{1-\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen} c_2-\cos c_1\cos c_2\cos(\omega_1-\omega_2)}\cdot\frac{\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen}\omega_1}{1-\cos c_1\cos\omega_1}-\\
&-\frac{(\operatorname{sen} c_1-\operatorname{sen} c_2)\operatorname{sen}(\omega_1-\omega_2)}{1-\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen} c_2-\cos c_1\cos c_2\cos(\omega_1-\omega_2)}\cdot\frac{\cos\omega_1-\cos c_1}{1-\cos c_1\cos\omega_1}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(82)$$

Queste, avendo riguardo alle formole (75) che definiscono la funzione trasformatrice ω'_1 nel passaggio inverso da (Σ') a (Σ), possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\theta_1-\omega'_1) &= \frac{\cos c_1\cos c_2+(\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen} c_2-1)\cos(\omega_1-\omega_2)}{1-\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen} c_2-\cos c_1\cos c_2\cos(\omega_1-\omega_2)}\\
\operatorname{sen}(\theta_1-\omega'_1) &= \frac{(\operatorname{sen} c_1-\operatorname{sen} c_2)\operatorname{sen}(\omega_1-\omega_2)}{1-\operatorname{sen} c_1\operatorname{sen} c_2-\cos c_1\cos c_2\cos(\omega_1-\omega_2)}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(83)$$

od anche compendiarsi nella semplice formola

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1-\omega'_1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{c_1-c_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c_1+c_2}{2}\right)} \qquad (83^*)$$

Non sarebbe difficile verificare su queste formole che la funzione trasformatrice θ_1 soddisfa in effetto alle equazioni differenziali caratteristiche (D) § 18 per la trasformazione B_{c_2} di Bäcklund rispetto al sistema (Σ') ed alle nuove variabili u', v'. Con ciò sarebbe appunto provato che la quarta superficie $\bar{S}$ subisce entro il sistema (Σ) una deformazione isogonale. Ma noi ometteremo qui questo calcolo e ci limiteremo a dimostrare la proprietà in discorso nel caso che una delle due trasformazioni B_{c_1}, B_{c_2} sia una trasformazione complementare, nel qual caso, come ora si vedrà, la verifica è quasi immediata. Suppongasi per es. che (Σ'') sia un sistema complementare di (Σ). Senza alterare la generalità possiamo supporre che le superficie S'' di (Σ'') siano le complementari delle S rispetto alle geodetiche (v), con che dovremo porre nelle nostre formole $c_2=0$, $\omega_2=0$. Ma allora segue, per es., dalle (82), che si ha $\cos\theta_1=1$, $\operatorname{sen}\theta_1=0$, cioè $\theta_1=0$; dunque le superficie $\bar{S}$ sono le complementari delle S' rispetto alle geodetiche (v') e, per quanto abbiamo dimostrato al § 11, esse descrivono appunto un sistema $(\overline{\Sigma})$ di deformate isogonali della pseudosfera, come si era asserito.

In fine osserviamo che, sussistendo per i sistemi (Σ) di deformate isogonali della pseudosfera il teorema di permutabilità, ne valgono anche tutte le conseguenze e per ciò:

Se la prima equazione di RICCATI, *equivalente al sistema* (D) *§ 18, si sa integrare per un valore qualunque della costante* c_1, *l'applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni di* BÄCKLUND *ai nuovi sistemi derivati di deformate isogonali della pseudosfera si effettua con soli calcoli algebrici e di derivazione.*

Cascio di Garfagnana, Agosto 1910.

INDICE DEI PARAGRAFI

Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse.

(*Di* EUGENIO ELIA LEVI, *a Genova.*)

---

1. In una Memoria pubblicata in questo stesso periodico (*) ho dimostrato la proposizione seguente:

Siano $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$ *due variabili complesse. Nello spazio a 4 dimensioni in cui sono coordinate* $x_1\, x_2\, y_1\, y_2$ *sia data un'ipersuperficie* S

$$\varphi(x_1\, x_2\, y_1\, y_2) = 0; \tag{1}$$

e si supponga che la $\varphi(x_1\, x_2\, y_1\, y_2)$ *possegga le derivate prime e seconde finite e continue.*

Affinchè esista una funzione analitica delle due variabili complesse x *ed* y *monodroma in uno dei campi in cui* S *divide lo spazio, è necessario che l'espressione*

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{C}\varphi \equiv &\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right\} + \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right\} - \\ &- 2\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right\}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_2}\right\} - \\ &- 2\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right\}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

conservi sulla (1) *un segno determinato.*

E precisamente: *se su* (1) *è* $\mathfrak{C}\varphi \leqq 0$, *una funzione* $f(x\, y)$ *che abbia* S *come frontiera può solo esistere nel campo* $\varphi > 0$; *mentre se* $\mathfrak{C}\varphi \geqq 0$, *una tale funzione può esistere solo nel campo* $\varphi < 0$.

(*) *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni di una o più variabili complesse.* Annali di Matematica, 1909. Tomo XVII della Serie III, pag. 61 e ss. Cfr. § III.

Cercando di invertire questo teorema sono riuscito in quel lavoro a dimostrare che: *se S è tale che nei suoi punti sia soddisfatta la* $\mathfrak{C}\varphi = 0$, *essa consta di una semplice infinità di superficie caratteristiche* — e cioè di superficie a due dimensioni determinate da un legame analitico tra le variabili complesse x ed y —; *ed allora, preso un pezzo sufficientemente piccolo $\bar{S}$ di S, si può sempre costruire una funzione analitica nel campo $\varphi > 0$ ed una nel campo $\varphi < 0$ regolari entrambe nei punti che appartengono ad un intorno sufficientemente piccolo di $\bar{S}$ che non appartengono ad S, e che ammettono entrambe $\bar{S}$ come frontiera.*

In quanto segue io voglio mostrare, seguendo un metodo di poco differente, come si possa analogamente dimostrare la proposizione seguente:

Supposto che nei punti di una ipersuperficie S data da (1) *sia sempre*

$$\mathfrak{C}\varphi < 0, \tag{3}$$

preso un pezzo $\bar{S}$ sufficientemente piccolo di essa, si può trovare una funzione analitica di x ed y monodroma regolare nei punti dell'intorno di S in cui è $\varphi > 0$, la quale abbia $\bar{S}$ come frontiera. Tale proposizione insieme coll'ultima ora richiamata servirà così ad invertire in certa misura la proposizione fondamentale enunciata sopra: precisamente la proprietà, relativa all'espressione (2), ivi richiesta come *necessaria* perchè una ipersuperficie sia frontiera di una funzione di due variabili complesse, sarà dimostrata *sufficiente in quanto proprietà infinitesimale*, mentre resterà dubbio se essa lo sia pure in un campo comunque esteso. Qualche considerazione su questo problema più difficile aggiungeremo nel n. 6.

2. Per fissare le idee supporrò che nel campo che si considera, l'equazione (1) si possa risolvere rapporto a x_1. Potremo allora scrivere l'equazione della ipersuperficie S nella forma

$$x_1 - \psi(x_2\, y_1\, y_2) = 0. \tag{4}$$

Preso un punto qualunque $x_2\, y_1\, y_2$ indicherò (*) con

$$a = a_1 + i\, a_2, \qquad b = b_1 + i\, b_2 \tag{5}$$

(*) Cfr. per le notazioni che seguono le analoghe notazioni della pag. 77 e ss. della mia citata Memoria. Le quantità A, B, C sono le quantità A_1, B_1, C_1, delle formule (4) pag. 78 di quel lavoro calcolate per il caso presente in cui φ assume la forma $x_1 - \psi$, e cambiate di segno.

Per rendere più agevole la lettura di quanto segue, avverto che il concetto direttivo è quello di invertire la costruzione che nel n. 12 della mia Memoria serve a dedurre il teorema enunciato in principio.

le quantità — funzioni di x_2, y_1, y_2 — che si ottengono risolvendo i due sistemi di equazioni

$$a_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} a_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} a_1 + a_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial y_2} \tag{6}$$

e

$$b_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} b_2 = \frac{A - C}{2}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} b_1 + b_2 = -B \tag{7}$$

dove si è posto

$$\left.\begin{aligned} 2A &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} a_2^2 + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial y_1} a_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} \\ B &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} a_1 a_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial y_1} a_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial y_2} a_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial y_2} \\ 2C &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} a_1^2 + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial y_2} a_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Supporremo — e lo si potrà fare cambiando, ove occorra, il senso sull'asse delle x_1 — che il campo in cui si vuole costruire la funzione analitica sia il campo

$$x_1 > \psi(x_2\, y_1\, y_2), \tag{9}$$

con che la condizione (3) si potrà scrivere, mediante le (8) e (6),

$$A + C > 0 \tag{10}$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2} + 2a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial y_2} + 2a_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial y_1} + (a_1^2 + a_2^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} > 0. \tag{10^{bis}}$$

Supporremo più precisamente che il primo membro di (10) o (10^{bis}) resti, nel campo che si considera, sempre superiore ad un numero positivo d.

Dall'ipotesi che le derivate prime e seconde di ψ siano finite e continue nel campo che consideriamo, segue facilmente che tali sono pure a_1, a_2, b_1, b_2. Diremo l un numero maggiore del massimo valore assoluto delle derivate prime e seconde della ψ; diremo m un numero maggiore di 1 e del massimo valore assoluto di a_1, a_2, b_1, b_2. Ciò posto è chiaro che noi potremo restringere il campo che si considera per modo che, detti $x_1\, x_2\, y_1\, y_2$, $x'_1\, x'_2\, y'_1\, y'_2$ due punti qualunque di esso:

1.° si abbia

$$|y_1 - y'_1| < \delta, \qquad |y_2 - y'_2| < \delta$$

δ essendo un numero < 1 e $< \dfrac{d}{128\, m^2\, l^2}$;

2.° indicando con A', B', C' i valori di A, B, C, quando le derivate seconde di ψ siano calcolate in $x'_1\, x'_2\, y'_1\, y'_2$, e le a_1, a_2, siano calcolate in $x_1\, x_2\, y_1\, y_2$, sia

$$|A - A'| < \frac{d}{4}, \qquad |B - B'| < \frac{d}{4}, \qquad |C - C'| < \frac{d}{4}; \tag{11}$$

3.° il campo sia convesso, e cioè il segmento congiungente due punti del campo sia tutto di punti interni al campo.

Diremo Γ questo campo, Γ_0 la parte di esso soddisfacente a (9), S il pezzo di S interno a Γ.

Occorre dalle ipotesi fatte su Γ trarre una facile conseguenza.

Se $\delta_1\, \delta_2$ sono due variabili reali entrambe minori di δ si ha sempre

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1^2 \pm \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 > \\ &\quad > \frac{4}{d} |b_2 \delta_1^2 + 2 b_1 \delta_1 \delta_2 - b_2 \delta_2^2| \cdot \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_2^2} (2 a_2 \delta_1 + 2 a_1 \delta_2 + b_2 \delta_1^2 + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + 2 b_1 \delta_1 \delta_2 - b_2 \delta_2^2) + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_2 \partial y_1} \delta_1 + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_2 \partial y_2} \delta_2 \right|. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Infatti se supponiamo per es. $|\delta_2| \leq |\delta_1| \leq \delta$, ricordando che $\delta < 1$ avremo

$$\delta_1^2 \pm \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 > \frac{3}{4} \delta_1^2,$$

$$|b_2 \delta_1^2 + 2 b_1 \delta_1 \delta_2 - b_2 \delta_2^2| < 4 m \delta_1^2,$$

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_2^2} (2 a_2 \delta_1 + 2 a_1 \delta_2 + b_2 \delta_1^2 + 2 b_1 \delta_1 \delta_2 - b_2 \delta_2^2) + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_2 \partial y_1} \delta_1 + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x_2 \partial y_2} \delta_2 \right| <$$
$$< 6 l^2 m \delta_1 \leq 6 l^2 m \delta;$$

dalle quali, per essere $\delta < \dfrac{d}{128 \cdot m^2 \cdot l^2}$, segue (12).

3. Ciò posto chiameremo punto razionale di S un punto le cui coordinate $x_2\, y_1\, y_2$ siano razionali: l'insieme dei punti razionali di $\overline{S}$ è un insieme numerabile, denso su $\overline{S}$. Fissata in modo arbitrario una numerazione dei punti di questo insieme, indichiamo l'ennesimo punto con $(\xi_n\, \eta_n) \equiv (\xi_{1,n},\, \xi_{2,n},\, \eta_{1,n},\, \eta_{2,n})$. Ad ognuno di questi punti connettiamo una superficie caratteristica Σ_n data dall'equazione tra le variabili complesse

$$x - \xi_n = \frac{1}{n} + a_n (y - \eta_n) + b_n (y - \eta_n)^2 \tag{13}$$

dove $a_n\, b_n$ indicano i valori di a, b nel punto $(\xi_n\, \eta_n)$.

Tale superficie si ottiene sottoponendo ad una traslazione di ampiezza $\frac{1}{n}$ nel verso delle x_1 positive, e cioè verso l'interno del campo (9), una delle superficie costruite a pag. 79 del mio citato lavoro le quali passano per il punto $(\xi_n,\, \eta_n)$, ed inoltre, grazie all'ipotesi (3) o (10), nell'intorno di questo punto giacciono totalmente fuori di (9) e cioè nel campo $x_1 < \psi\,(x_2\, y_1\, y_2)$ (*).

Tale insieme di superficie ammette come punti di condensazione tutti i punti di $\overline{S}$; basta osservare che Σ_n passa per il punto $\left(\xi_n + \frac{1}{n},\, \eta_n\right)$, e che l'insieme di questi punti ha come punti di condensazione tutti i punti di $\overline{S}$. Dimostreremo ora di più che queste superficie caratteristiche non hanno all'interno di Γ punti di condensazione appartenenti al campo Γ_0. Costruiremo poi una funzione analitica la quale si annulli sopra tutte queste superficie caratteristiche: una tale funzione avrà certamente $\overline{S}$ come frontiera.

4. Per dimostrare quanto ora si è enunciato proveremo anzitutto la proposizione seguente: Se ξ, η indica un punto di $\overline{S}$, $x\, y$ un punto di Γ, esiste un numero h indipendente da x, y, ξ, η e tale che, se la funzione

$$\pi\,(x\, y) = (x - \xi) - a\,(y - \eta) - b\,(y - \eta)^2 \tag{14}$$

— a, b essendo calcolati nel punto $(\xi\, \eta)$ — soddisfa alla disuguaglianza

$$\pi\,(x\, y)\,| < \sigma, \tag{15}$$

(*) Quando accadesse che la forma $A\,\delta_1^2 + B\,\delta_1\,\delta_2 + C\,\delta_2^2$ fosse senz'altro già essa stessa una forma definita, in luogo delle (13) si potrebbero assumere più semplicemente delle superficie piane ponendo $b = 0$: cfr. il n. 6.

pel punto $x\,y$ si ha

$$x_1 - \psi(x_2\,y_1\,y_2) < h\,\sigma. \tag{16}$$

Infatti posto $\pi(x\,y) = \pi_1 + i\,\pi_2$ avremo da (14) e (15)

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \xi_1 + \pi_1 + a_1(y_1 - \eta_1) - a_2(y_2 - \eta_2) + b_1(y_1 - \eta_1)^2 - \\
&\qquad - b_1(y_2 - \eta_2)^2 - 2\,b_2(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) \\
x_2 &= \xi_2 + \pi_2 + a_2(y_1 - \eta_1) + a_1(y_2 - \eta_2) + b_2(y_1 - \eta_1)^2 - \\
&\qquad - b_2(y_2 - \eta_2)^2 + 2\,b_1(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2) \\
&|\pi_1| < \sigma, \qquad |\pi_2| < \sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Sviluppando la funzione $\psi(x_2\,y_1\,y_2)$ nel punto $\xi_2\,\eta_1\,\eta_2$ mediante la formula di Taylor arrestata ai termini di secondo ordine avremo, ricordando che $\xi_1 = \psi(\xi_2\,\eta_1\,\eta_2)$:

$$\begin{aligned}
x_1 - \psi(x_2\,y_1\,y_2) &= \\
&= x_1 - \xi_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_2 - \xi_2) - \frac{\partial\psi}{\partial y_1}(y_1 - \eta_1) - \frac{\partial\psi}{\partial y_2}(y_2 - \eta_2) - \\
&- \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2^2}(x_2 - \xi_2)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial y_1^2}(y_1 - \eta_1)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial y_2^2}(y_2 - \eta_2)^2 - \\
&- \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_1}(x_2 - \xi_2)(y_1 - \eta_1) - \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_2}(x_2 - \xi_2)(y_2 - \eta_2) - \frac{\partial^2\psi'}{\partial y_1\,\partial y_2}(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2)
\end{aligned}$$

dove coll'apice pensiamo indicare che le derivate debbono essere prese in un conveniente punto intermedio tra $(x\,y)$ e $(\xi\,\eta)$, e senza l'apice intendiamo che siano calcolate nel punto $(\xi\,\eta)$. Sostituiamo a $x_1 - \xi_1$, $x_2 - \xi_2$ i loro valori dati da (17) e poniamo per brevità $\delta_1 = y_1 - \eta_1$, $\delta_2 = y_2 - \eta_2$; avremo allora tenendo conto di (5) (6) (7) (8):

$$\begin{aligned}
x_1 - \psi(x_2\,y_1\,y_2) &= \\
&= \pi_1 - \pi_2\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2^2}(\pi_2 + 2a_2\delta_1 + 2a_1\delta_2 + 2b_2\delta_1^2 - 2b_2\delta_2^2 + 4b_1\delta_1\delta_2) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\,\partial y_1}\delta_1 + \frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\,\partial y_2}\delta_2\right] + \\
&+ \delta_1^2\left[\frac{A - C}{2} - A'\right] + \delta_1\,\delta_2\,[B - B'] + \delta_2^2\left[\frac{C - A}{2} - C'\right] -
\end{aligned}$$

$$-[b_2\delta_1^2-b_2\delta_2^2+2b_1\delta_1\delta_2]\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2^2}(2a_2\delta_1+2a_1\delta_2+b_2\delta_1^2-b_2\delta_2^2+2b_1\delta_1\delta_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_1}\delta_1+\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_2}\delta_2\right].$$

E potremo anche scrivere, indicando per brevità con D il coefficiente di π_2:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1-\psi(x_2y_1y_2)=\pi_1-\pi_2 D-\\
&-\delta_1^2\left[\frac{A+C}{2}+A'-A\right]+\delta_1\delta_2[B-B']-\delta_2^2\left[\frac{A+C}{2}+C'-C\right]-\\
&-[b_2\delta_1^2-b_2\delta_2^2+2b_1\delta_1\delta_2]\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2^2}(2a_1\delta_2+2a_1\delta_1+b_2\delta_1^2-b_2\delta_2^2+2b_1\delta_1\delta_2)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_1}\delta_1+\frac{\partial^2\psi'}{\partial x_2\partial y_2}\delta_2\right].
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Ora per le ipotesi fatte nel n. 2 si avrà per (11) che finchè $(x\,y)$ è in Γ

$$\frac{A+C}{2}+A'-A>\frac{A+C}{2}-|A'-A|>\frac{d}{2}-\frac{d}{4}=\frac{d}{4}$$

$$|B-B'|<\frac{d}{4}$$

$$\frac{A+C}{2}+C'-C>\frac{A+C}{2}-\ C'-C\ >\frac{d}{2}-\frac{d}{4}=\frac{d}{4}.$$

Quindi dalla formula (12) si ha che la somma degli ultimi quattro termini di (18) è negativa: onde segue

$$x_1-\psi(x_2\,y_1\,y_2)<\pi_1-\pi_2\,D. \tag{19}$$

Ora D è una quantità che, quando $x_2\,y_1\,y_2$ è in Γ, resta sempre in modulo inferiore a $l\,m\left[1+8\,\delta+\frac{\sigma}{2}\right]$. Quindi posto $h=l\,m\left[1+8\,\delta+\frac{\sigma}{2}\right]+1$, avremo

$$x_1-\psi(x_2\,y_1\,y_2)<h\,\sigma$$

come avevamo enunciato.

5. Risulta subito dalla proposizione precedente che fissato un numero positivo ρ piccolo a piacere esiste soltanto un numero finito di superficie Σ_n

le quali abbiano dei punti appartenenti al campo Γ_ρ in cui è

$$x_1 - \psi(x_2 y_1 y_2) > \rho; \tag{20}$$

invero per (13) su Σ_n è

$$\pi_n(x y) = \frac{1}{n} \quad \text{dove} \quad \pi_n(x y) = x - \xi_n + a_n(y - \eta_n) + b_n(y - \eta_n)^2, \tag{21}$$

e quindi perchè una tale superficie abbia punti interni a Γ_ρ occorre sia $n < \frac{h}{\rho}$ (*). E con ciò risulta senz'altro provato che l'insieme di superficie Σ_n non ha punti di condensazione in Γ interni al campo Γ_0.

Per costruire ora una funzione analitica regolare nel campo Γ_0 la quale si annulli nei punti delle Σ_n, consideriamo, seguendo il noto procedimento di Weierstrass, il prodotto infinito

$$\prod_n \left(1 - \frac{1}{n\,\pi_n(x y)}\right) e^{p_n(xy)} \tag{22}$$

dove si è posto

$$p_n(x y) = -\left[\frac{1}{n\,\pi_n(x y)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2\,\pi_n^2(x y)} + \cdots + \frac{1}{n}\,\frac{1}{n^n\,\pi_n^n(x y)}\right]. \tag{23}$$

È facile vedere che tale prodotto infinito è convergente uniformemente in un qualunque campo Γ_ρ; esso rappresenta quindi in Γ_0 una funzione analitica regolare la quale ha $\bar{S}$ per frontiera.

Per dimostrare che il prodotto (12) è uniformemente convergente in ogni campo Γ_ρ fissiamo un numero arbitrario positivo $\varepsilon < 1$, e distinguiamo i numeri n in due classi a seconda che $\frac{h}{n\rho} \geqq 1 - \varepsilon$ o $\frac{h}{n\rho} < 1 - \varepsilon$. I valori di n appartenenti alla prima classe sono in numero finito, noi potremo trascurare i fattori corrispondenti nella dimostrazione di convergenza. Per dimostrare che il prodotto dei fattori residui è convergente basterà dimostrare la convergenza della serie dei logaritmi. Ora per (23) tale serie è

$$-\sum_n \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{n+m}\,\frac{1}{n^{n+m}\,\pi_n^{n+m}(x y)}\right). \tag{24}$$

(*) Riferendoci alla (19) ed osservando che qui è $\pi_2 = 0$ potremmo porre $h = 1$.

Ma se $(x\,y)$ è in Γ_ρ, per il n. precedente si ha

$$\pi_n(x\,y) > \frac{\rho}{h}$$

quindi sarà

$$\left|\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{n+m}\,\frac{1}{n^{n+m}\,\pi_n^{n+m}(x\,y)}\right| < \frac{h^{n+1}}{n^{n+1}\,\rho^{n+1}} \sum_0^\infty \frac{h^m}{n^m\,\rho^m} \leq \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{h^{n+1}}{n^{n+1}\,\rho^{n+1}}\,.$$

E quindi la serie dei moduli di (24) converge più rapidamente della serie

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum (1-\varepsilon)^{n+1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\,.$$

E questo dimostra il nostro enunciato.

6. Il ragionamento precedente non è sufficiente ad invertire la proposizione iniziale del n. 1 in un campo comunque esteso per questa ragione soltanto, che non possiamo asserire che le superficie Σ_n da noi costruite non abbiano come punti di condensazione punti appartenenti a regioni sufficientemente lontane dal punto $(\xi_n\,\eta_n)$ cui esse corrispondono ed in cui sia $\varphi > 0$. Ogni qual volta si possa escludere questo caso si potrà completare il ragionamento, e ciò avverrà ben sovente in casi particolari: così avverrà se l'ipersuperficie è tale che giace sempre tutta da una parte di un qualunque suo iperpiano tangente ed abbia comune con questo il solo punto di contatto: tali sono ad esempio le ipersfere, le ipersuperficie ellissoidiche, ecc. Chiamiamo S l'ipersuperficie: chiamiamo interna all'ipersuperficie la regione che non contiene punti degli iperpiani tangenti (*). Osserviamo che presa una tale iper-

---

(*) È interessante mostrare direttamente che una tale ipersuperficie S soddisfa alle condizioni necessarie esposte al principio del n. 1. Supponiamo invero che il campo interno ad S sia il campo $\varphi > 0$: il gruppo dei termini di secondo grado dello sviluppo di φ in un suo punto qualunque deve allora costituire una forma definita negativa. Essa è

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}u_1^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}u_2^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}u_3^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}u_4^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}u_1u_2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1}u_1u_3 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2}u_1u_4 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}u_2u_3 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_2}u_2u_4 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\,\partial y_2}u_3u_4\,.$$

Ora l'espressione $\mathfrak{C}\varphi$ si ottiene precisamente sommando le due quantità che si hanno superficie S, fissato un numero positivo ε piccolo a piacere, si può trovare un numero $\delta(\varepsilon)$ tale che, se Π è un iperpiano parallelo all'iperpiano tangente in un punto P di S condotto per un qualunque punto P' della normale ad S in P che disti da P di meno di $\delta(\varepsilon)$, i punti di Π interni ad S siano tutti interni ad un'ipersfera di centro P' e raggio ε (*).

Ciò posto si fissi di nuovo sopra S un insieme numerabile di punti denso sull'S: si chiami $P_n \equiv (\xi_n \eta_n)$ l'n-esimo punto di tale insieme, e come superficie caratteristica Σ_n si assuma il piano caratteristico perpendicolare alla normale ad S condotto per il punto P'_n di questa normale che è interno ad S e dista da $(\xi_n \eta_n)$ di $\frac{1}{n}\cdot$ È facile mostrare che non esistono punti limiti di questo insieme di piani caratteristici interni ad S; in altri termini che preso un campo chiuso Δ tutto di punti interni ad S esiste solo un numero finito di piani Σ_n che abbiano punti comuni con Δ. Infatti dicasi γ la minima distanza di punti di Δ da punti di S e si calcoli $\delta\left(\frac{\gamma}{2}\right)$; i piani caratteristici Σ per cui n è maggiore del massimo dei due numeri $\frac{2}{\gamma}$ e $\frac{1}{\delta\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$ non hanno

---

facendo successivamente in detta forma le posizioni:

$$u_1 = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}}, \quad u_2 = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}}, \quad u_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}, \quad u_4 = 0$$

$$u_1 = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}}, \quad u_2 = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2}}, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2};$$

quindi è certamente $\mathfrak{C}\varphi < 0$.

(*) Invero se un tal numero $\delta(\varepsilon)$ non esistesse potremmo costruire una successione di punti $P_1 P_2 \dots P_n \dots$ tali che l'iperpiano Π_n parallelo all'iperpiano tangente in P_n condotto per un punto P'_n della normale ad S in P_n volta verso l'interno per cui $P_n P'_n < \frac{1}{n}$ contiene punti interni ad S distanti da P'_n più di ε. Sia P un punto limite di questo insieme, l'iperpiano tangente in P è l'iperpiano limite degli iperpiani Π_n; esso conterrebbe quindi punti interni all'ipersuperficie S od almeno di S stessa distanti da P almeno della lunghezza ε; e quindi diversi da P; ciò contraddice alla ipotesi fatta per l'ipersuperficie S.

punti comuni con Δ. Invero un tale Σ_n appartiene totalmente all'iperpiano parallelo all'iperpiano tangente ad S in P_n condotto per il punto P'_n: ed essendo $P_n P'_n = \frac{1}{n} < \delta\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, i suoi punti interni ad S sono tutti interni all'ipersfera di centro P'_n e raggio $\frac{\gamma}{2}$ e quindi non possono distare da S più di $\frac{1}{n} + \frac{\gamma}{2} < \gamma$: essi sono quindi tutti esterni a Δ, c. v. d.

Presi dunque questi piani caratteristici Σ_n come varietà di zero di una funzione analitica di x ed y che si può costruire con metodi analoghi a quelli del n. 5, questa sarà una funzione analitica regolare all'interno di S, la quale ha S come frontiera.

Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche.

(*Di* Ruggiero Torelli, *a Pisa*.)

Nella Memoria del Severi: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (*) trovasi una formula che assegna, in generale, un legame fra la postulazione di una varietà spezzata in due parti e le postulazioni di queste parti.

Nel presente lavoro io estendo quella formola (**); e mostro poi (§ 6) come si possa utilmente applicarla nello studio delle condizioni di rappresentabilità di una forma algebrica in $r+1$ variabili per combinazione lineare di altre h, aventi più che ∞^{r-h} zeri comuni.

§ 1. Generalità.

1. Chiameremo *varietà semplice* l'insieme di un numero finito di varietà irriducibili, di dimensioni qualsiansi, tali che nessuna di esse sia contenuta in un'altra dell'insieme stesso.

L'insieme di alcune (anche una sola) di tali varietà irriducibili si dirà una *parte* della varietà semplice considerata. Parlando di una varietà V senz'altro, sottintenderemo sempre che sia semplice. Allorquando invece parleremo di una varietà *di dimensione* i, o di una V_i, intenderemo che si tratti di una varietà semplice, le cui parti irriducibili han tutte la dimensione i.

Più varietà si dicono *distinte* fra loro, quando ogni parte irriducibile di una qualunque di esse non è contenuta in una parte irriducibile di qualcuna delle altre.

(*) *Rend. Palermo*, t. XXVIII (1909), n.° 3.

(**) Cfr. la nota (*) a pag. 84.

Date più varietà distinte, si dirà *somma* di esse, e si indicherà cogli ordinarî simboli di addizione, la varietà semplice che è l'insieme di tutte le loro parti irriducibili.

Date due varietà distinte V, V', gli eventuali punti che esse hanno in comune si distribuiranno in un numero finito di varietà irriducibili distinte. L'insieme di esse è una varietà semplice che indicheremo con $V\,V'$. Adunque, se V, V' sono due varietà di dimensioni i, i', essendo $i+i'$ non inferiore alla dimensione r dello spazio ambiente; e se, come allora generalmente avviene, $V\,V'$ è una varietà di dimensione $i+i'-r$, non può affermarsi senz'altro che $V\,V'$ è l'*intersezione*, nell'ordinario senso algebrico, di V, V'. Ciò avverrà solo quando, nell'intersezione, ciascuna parte irriducibile di $V\,V'$ vada computata *una* volta.

2. Indicheremo con $\chi_l(V)$ la postulazione che una varietà V offre alle ipersuperficie di ordine l che debbono contenerla; e, quando avremo da considerarla, supporremo sempre l così alto che essa sia espressa dalla nota formula di HILBERT.

Ricordiamo che $\chi_l(V)$ non dipende dalla dimensione dello spazio in cui si considera immersa la V.

Il sistema lineare delle ipersuperficie di ordine l passanti per V si indicherà con $[V]_l$; la sua dimensione vale:

$$\binom{l+r}{r} - 1 - \chi_l(V);$$

dove r indica, come nel seguito, la dimensione dello spazio ambiente.

3. Se V, V' sono due varietà distinte, i due sistemi lineari $[V]_l$, $[V']$ hanno manifestamente come sistema d'intersezione il sistema $[V+V']_l$. Quale sarà il loro sistema congiungente? *A priori*, come osserva il SEVERI, può dirsi soltanto che esso è contenuto (*) nel sistema $[V\,V']_l$; ossia che si ha la relazione:

$$\chi_l(V)+\chi_l(V') \geqq \chi_l(V+V')+\chi_l(V\,V'). \tag{1}$$

Quand'è che si potrà affermare l'eguaglianza dei due membri?

O, in altri termini, quand'è che i due sistemi $[V]_l$, $[V']_l$ *apparterranno* al sistema $[V\,V']_l$?

(*) Parlando di un sistema d'ipersuperficie dell'S_r (o di V_{i-1} su una V_i irriducibile) *contenuto* in un altro, sottintendiamo ora e nel seguito (salvo a dire espressamente il contrario) *totalmente*.

Noi ricercheremo appunto ciò. Nei § 2, 3 tratteremo il caso in cui V' sia una ipersuperficie; nel § 4 quello in cui V sia una curva; nel § 5 quello in cui V sia una varietà irriducibile, di dimensione >1, priva di punti multipli, e la varietà $V\,V'$ consti di parti della stessa dimensione (*); e mostreremo appunto che nella (1) può togliersi il segno $>$ quando l sia abbastanza alto, e V' seghi *semplicemente* V, nel senso che verrà in seguito precisato.

Facciamo subito alcune osservazioni:

I. Se V è un gruppo di punti, la varietà $[V'\,V]$ non esiste: convenendo di porre allora $\chi_l[V\,V'] = 0$ (**), si riconosce immediatamente, per l abbastanza alto, che è appunto

$$\chi_l(V) + \chi_l(V') = \chi_l(V + V') + \chi_l(V\,V'). \tag{2}$$

II. Si è detto che la (2) sarà dimostrata per l abbastanza alto. È chiaro però che, qualunque sia il limite inferiore che avremo imposto a l nel corso della dimostrazione, *la* (2) *varrà per tutti quei valori di l pei quali le postulazioni delle varietà V, V', $V+V'$, $V\,V'$ son date dalla formula di* Hilbert. Ciò dipende dal fatto che tali postulazioni sono espresse allora da polinomî in l.

III. Si può dare alla (2), quando V è irriducibile, un'altra interpretazione che giova tener presente. Consideriamo i sistemi lineari Σ', Σ'', segati su V risp. da $[V']_l$, $[V\,V']_l$: le loro dimensioni valgono risp.:

$$\chi_l(V+V') - \chi_l(V') - 1, \qquad \chi_l(V) - \chi_l(V\,V') - 1,$$

e il sistema Σ'' contiene certo Σ'. Orbene la (2) afferma appunto che *il sistema Σ'' segato su V da $[V\,V']_l$* **coincide** *col sistema Σ' segato da* $[V']_l$. Ciò è già noto allorquando V sia uno spazio lineare situato genericamente rispetto a V': si rientra allora in un teorema ben conosciuto sui sistemi lineari di ipersuperficie definiti da un gruppo base (***).

(*) Allorquando si tolgano queste restrizioni, si presentano delle condizioni assai involute, cui non ho ancora saputo dare una forma semplice.

(**) Una simile convenzione si intende fatta nel seguito, quando qualcuna delle varietà considerate venga a mancare.

(***) Cfr. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî* [Pisa, Spoerri, 1907], pag. 256.

§ 2. Caso in cui V' sia una ipersuperficie, e V sia irriducibile.

4. In questo paragrafo tratteremo il caso in cui V' sia una ipersuperficie di un certo ordine n (qualunque), e V sia irriducibile.

Dimostreremo cioè il seguente teorema:

Se V è una varietà irriducibile di dimensione $i \geqq 1$, ed F una **generica** *ipersuperficie di ordine n, il sistema residuo della varietà $F\,V$ rispetto al sistema Σ_l segato su V da tutte le ipersuperficie di ordine abbastanza alto l, coincide col sistema Σ_{l-n} segato da tutte le ipersuperficie di ordine $l-n$: o in altri termini si ha la relazione*:

$$\chi_l(V) = \chi_{l-n}(V) + \chi_l(F\,V) \text{ (*)}. \tag{3}$$

Questo teorema afferma insomma che se una varietà X ad $i-1$ dimensioni (anche dotata di parti multiple o avente parti a comune con $F\,V$) giacente su V, costituisce, insieme colla $F\,V$, la completa intersezione di V con una ipersuperficie di ordine l, la X sarà la completa intersezione di V con una ipersuperficie di ordine $l-n$. E poichè la cosa è vera per $n=1$ (come si è osservato al n.° 3) potremo, nel dimostrarla per l'ordine n di F, supporla vera per un ordine $< n$.

Prendiamo allora una generica ipersuperficie F' di ordine $n-1$, e un generico iperpiano F''; è chiaro che il residuo di $F'\,V + F''\,V$ rispetto al si-

(*) Relazione identica all'altra $\chi_l(V) + \chi_l(F) = \chi_l(V+F) + \chi_l(V\,F)$; poichè si ha $\chi_l(F) = \binom{l+v}{v} - \binom{l-n+r}{r}$, $\chi_l(V+F) = \binom{l+r}{r} - \binom{l-n+r}{r} + \chi_{l-n}(V)$. Si noti che, per la genericità di F, l'intersezione di F con V è priva di parti multiple: ossia è proprio la varietà $F\,V$ (cfr. n.° 1). Ed è chiaro che questa condizione è *necessaria* per la validità del teorema.

Le formole (2) (3) si trovano dimostrate, simultaneamente per induzione, nella citata Memoria del Severi, sotto le seguenti ipotesi:

a) che le varietà V, V' siano irriducibili (è osservato però che l'ipotesi della irriducibilità di V' non è essenziale);

b) che la V sia priva di singolarità (ipotesi richiesta dall'applicazione dell'*Oss. III* del n.° 2 di quella Memoria);

c) che la varietà $V\,V'$ sia una varietà ad $i-1$ dimensioni, se i è la dimensione di V; e che l'intersezione delle V, V' avvenga genericamente, in guisa che siano soddisfatte le condizioni precisate nel presente lavoro.

stema Σ_l è appunto il sistema Σ_{l-n}. Se infatti X è una varietà di questo residuo, se cioè $F' V + F'' V$ ed X costituiscono una varietà di Σ_l, in virtù del teorema, vero per l'ordine 1, avverrà che $F' V$ ed X costituiranno una varietà di Σ_{l-1}; e, ancora pel teorema, ammesso per l'ordine $n-1$, sarà X una varietà di Σ_{l-n}.

Orbene, poichè la varietà $F' V + F'' V$ del sistema segato su V dalle ipersuperficie di ordine n ammette come residuo rispetto a Σ_l il sistema Σ_{l-n}, la *generica* varietà $F V$ del primo sistema avrà un residuo di dimensione $\leqq$ a quella di Σ_{l-n} (*): ma dunque tal residuo è proprio Σ_{l-n}: c. v. d.

5. Facciamo adesso alcune considerazioni sul precedente teorema:

I. Esso, *se la V è priva di singolarità*, si può dedurre senz'altro dal fatto che il sistema Σ_{l-n}, l essendo sufficientemente alto, è completo (**). Anzi questo mostra, più in generale, che il residuo dell'*intersezione* di V con una F **qualunque,** rispetto a Σ_l è Σ_{l-n}, e che perciò, se tale intersezione è priva di parti multiple, si può senz'altro applicare la (3).

II. Allorchè V è completa intersezione di $r-i$ ipersuperficie, di equazioni

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \ldots, \quad \Phi_{r-i} = 0,$$

si può dimostrare la (3) *imponendo a F la sola restrizione che essa seghi V in una varietà priva di parti multiple, e inoltre togliendo la restrizione che V sia irriducibile.*

Infatti se n_i è l'ordine di Φ_i, e se si indica con A, A_i una forma arbitraria di ordine $l-n$, $l-n_i$ (nelle coordinate dell'S_r ambiente), il sistema lineare:

$$A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2 + \cdots + A_{r-i} \Phi_{r-i} + A F = 0 \text{ (***)} \tag{4}$$

(*) Avendosi su una V_i irriducibile un sistema lineare ∞^x, Σ, di V_{i-1}, contenuto parzialmente in un altro Σ', la dimensione del residuo di una V_{i-1} variabile genericamente in Σ, rispetto a Σ', è costante; e possono solo esistere in Σ sistemi di dimensione $< x$, le cui varietà hanno, rispetto a Σ', un residuo di dimensione *maggiore.*

(**) Cfr. Severi, loc. cit., n.° 2.

(***) In questo lavoro le ipersuperficie saranno indicate colle lettere F, Φ affette da indici, o da apici; e, secondo un uso comune, le stesse lettere indicheranno le forme che, eguagliate a zero, ne danno l'equazione. Così nella (4), F indica il primo membro dell'equazione della ipersup. F. E parleremo indifferentemente di forme o di ipersuperficie.

ha, in virtù di un teorema del SEVERI (*), la dimensione:

$$\binom{l+r}{r}-1-\chi_l(F\,V).$$

D'altronde esso sistema è il sistema che congiunge i due:

$$A_1\,\Phi_1+\cdots+A_{r-i}\,\Phi_{r-i}=0, \qquad A\,F=0,$$

aventi rispettivamente le dimensioni:

$$\binom{l+r}{r}-1-X_l(V), \qquad \binom{l-n+r}{r}-1,$$

e segantisi, come risulta subito dallo stesso teorema del SEVERI or ora applicato, in un sistema di dimensione:

$$\binom{l-n+r}{r}-1-\chi_{l-n}(V).$$

E allora, in virtù di una notissima formula di geometria iperspaziale, si ha

$$\chi_l(F\,V)=\chi_l(V)-\chi_{l-n}(V),$$

che è appunto la (3).

E si noti che nel caso attuale la (3) è valida *per ogni valore di l maggiore di n*; sempre pel ricordato teorema del SEVERI.

III. Secondo l'enunciato del n.° 4, la formula (3) è stata dimostrata per una **generica** F di ordine n: è utile notare che entro al sistema, di dimensione $\binom{n+r}{r}-1$, delle F possono effettivamente esistere sistemi di dimensione $\binom{n+r}{r}-2$, per le cui ipersuperficie il teorema cade in difetto.

Oltre al caso ovvio che V sia una curva (talchè per le F che la toccano non è applicabile il teorema: cfr. la nota (*) a pag. 84), noteremo il seguente esempio:

Consideriamo in S_4 una superficie V_2 dotata di un punto P doppio biplanare, tali che i due piani ivi tangenti abbiano a comune solo P (il quale sarà adunque un punto doppio *improprio di 1.ª specie*, secondo la locuzione

(*) *Rend. Lincei*, 1902.

del SEVERI (*)). Una ipersuperficie di S_4 passante per P ha il punto P almeno doppio: mentre un S_3 generico per P sega V_2 in una curva C di cui P è doppio; epperò il sistema delle superficie di ordine l del detto S_3, passanti per la C, non ha in generale il punto P come doppio.

Dunque tal sistema è più ampio di quello segato sull'S_3 da $[V_2]_l$; epperò non si può applicare la (3) alla V_2 e al detto S_3. Ad un'analoga conclusione si perviene se si prende, invece di un S_3, una generica V_3, di ordine qualsiasi, passante per P.

§ 3. Estensione del teorema precedente.

6. Estendiamo adesso il precedente teorema al caso che la varietà semplice V consti di più parti; dimostreremo il seguente teorema:

Se V è una varietà semplice, e F una **generica** *ipersuperficie di ordine n, si ha, per l abbastanza alto:*

$$\chi_l(F\,V) = \chi_l(V) - \chi_{l-n}(V). \tag{3}$$

Sia dunque la V composta di più parti irriducibili $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(m)}$.

Nel dimostrare la (3), potremo supporla vera per la varietà

$$\overline{V} = V^{(1)} + V^{(2)} + \cdots + V^{(m-1)}:$$

perchè la (3) è già dimostrata pel caso $m = 1$. Adunque, per ipotesi, le coppie di sistemi lineari $[F]_l$, $[\overline{V}]_l$; $[F]_l\,[V^{(m)}]_l$ ammettono come sistemi congiungenti, se l è abbastanza alto, risp. i sistemi $[F\,\overline{V}]_l$, $[F\,V^{(m)}]_l$; e si tratta di dimostrare che i sistemi $[F]_l$, $[\overline{V} + V^{(m)}]_l$ (il secondo dei quali è l'intersezione di $[\overline{V}]_l$, $[V^{(m)}]_l$) hanno come sistema congiungente il sistema $[F\,V]_l$, ossia il sistema $[F\,\overline{V} + F\,V^{(m)}]_l$, intersezione dei due $[F\,\overline{V}]_l$, $[F\,V^{(m)}]_l$; le cui varietà base, per la genericità di F, sono distinte. Si tratta in altri termini di dimostrare che il sistema $[F]_l$ è in posizione regolare (nel senso di BERTINI (**)) rispetto ai due $[\overline{V}]_l$, $[V^{(m)}]_l$.

(*) Cfr. SEVERI, *Intorno ai punti doppî improprî, ecc.* [Rend. Palermo, 1901], n.° 5.

(**) BERTINI dice che un S_a è in *posizione regolare* rispetto a due altri spazî S_b, S_c, quando gli spazî intersezione di S_a con S_b, S_c appartengono allo spazio in cui S_a sega il congiun-

Perciò basterà far vedere che i due sistemi $[\overline{V}+F]_l$, $[V^{(m)}+F]_l$, intersezioni di $[F]_l$ con $[\overline{V}]_l$, $[V^{(m)}]_l$, appartengono al sistema X intersezione di $[F]_l$ col sistema Y congiungente i due $[\overline{V}]_l$, $[V^{(m)}]_l$.

Ora la dimensione di quest'ultimo vale:

$$\binom{l+r}{r}-1-\chi_l(\overline{V}\,V^{(m)})-\varepsilon_l$$

ove ε_l è un intiero non negativo; e la dimensione del sistema congiungente i due $[\overline{V}+F]_l$, $[V^{(m)}+F]_l$ vale, come è facile vedere, quella del sistema congiungente $[\overline{V}]_{l-n}$, $[V^{(m)}]_{l-n}$: cioè

$$\binom{l-n+r}{r}-1-\chi_{l-n}(\overline{V}\,V^{(m)})-\varepsilon_{l-n};$$

si ha certamente, quindi

$$\dim X \geqq \binom{l-n+r}{r}-1-\chi_{l-n}(\overline{V}\,V^{(m)})-\varepsilon_{l-n}, \qquad (a)$$

e si tratta di far vedere che in questa relazione vale il segno $=$.

Il sistema X si ottiene imponendo alle ipersuperficie del sistema Y di contenere la ipersuperficie F: questa d'altronde impone alle ip. di $[\overline{V}\,V^{(m)}]_l$

$$\binom{l+r}{r}-\binom{l-n+r}{r}+\chi_{l-n}(\overline{V}\,V^{(m)})-\chi_l(\overline{V}\,V^{(m)})$$

condizioni; quindi al sistema Y, contenuto in $[\overline{V}\,V^{(m)}]_l$, ne imporrà

$$\binom{l+r}{r}-\binom{l-n+r}{r}+\chi_{l-n}(\overline{V}\,V^{(m)})-\chi_l(\overline{V}\,V^{(m)})-\eta_{ln}$$

ove η_{ln} è un intiero non negativo; e così la dimensione di X varrà

$$\binom{l-n+r}{r}-1-\chi_{l-n}(\overline{V}\,V^{(m)})-\varepsilon_l+\eta_{ln}$$

gente S_b, S_c: o, ciò che torna lo stesso, quando gli spazî congiungenti S_a con S_b, S_c si segano secondo lo spazio che da S_a proietta l'intersezione di S_b, S_c. In tal caso anche S_b (o S_c) è in posizione regolare rispetto agli altri due spazî. Cfr. il citato libro di Bertini, pag. 14.

La nozione di spazio in posizione regolare rispetto a più altri, si presenta spontaneamente in varie questioni; ed è servita al Bertini per stabilire una nota formula di geometria iperspaziale (loc. cit., pag. 16). Si veda anche la Nota dello stesso Autore: *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche* (Rend. Lincei, 1909, Nota 2.ª), in fine della quale sono enunciate in modo semplice e preciso le condizioni sufficienti per la validità della detta formula.

e sarà per la (a):

$$\eta_{l n} \geqq \varepsilon_l - \varepsilon_{l-n} . \tag{b}$$

Si osservi ora che se $n = 1$, il teorema che vogliamo dimostrare è vero; e quindi

$$\eta_{l 1} = \varepsilon_l - \varepsilon_{l-1} .$$

Si potrà quindi procedere per induzione, ammettendo che per $n' < n$ sia

$$\eta_{l n'} = \varepsilon_l - \varepsilon_{l-n'} .$$

Ed allora, se prendiamo una ipersuperficie di ordine n composta da una generica ipers. di ordine $n-1$ e un generico iperpiano, essa offre al sistema Y precisamente

$$\binom{l+r}{r} - \binom{l-n+r}{r} + \chi_{l-n}(\overline{V}\, V^{(m)}) - \chi_l(\overline{V}\, V^{(m)}) - (\varepsilon_l - \varepsilon_{l-n})$$

condizioni: ne segue che tante, o di più, ne offre la *generica* ipersuperficie di ordine n: e cioè:

$$\eta_{l n} \leqq \varepsilon_l - \varepsilon_{l-n}$$

che confrontata colla (b) dà

$$\eta_{l n} = \varepsilon_l - \varepsilon_{l-n}$$

e quindi

$$\dim X = \binom{l-n+r}{r} - 1 - \chi_{l-n}(\overline{V}\, V^{(m)}) - \varepsilon_{l-n} ,$$

come volevasi dimostrare.

Osservazione. Se V è una curva qualunque, si può applicare la (3) *sotto la sola restrizione che la F seghi in punti distinti V* (supposto sempre, beninteso, l abbastanza alto). Ciò si dimostra assai facilmente per induzione da $n-1$ a n. Se infatti F', F'' indicano una generica ipersup. di ordine $n-1$ e un generico iperpiano, da

$$\chi_l(V) - \chi_{l-n+1}(V) = \chi_l(F'\, V), \quad \chi_{l-n+1}(V) - \chi_{l-n}(V) = \chi_l(F''\, V)$$

segue

$$\chi_l(V) - \chi_{l-n}(V) = \chi_l(F'\, V) + \chi_l(F''\, V) = \chi_l(F\, V).$$

§ 4. Caso in cui la V sia una curva.

7. Tratteremo adesso il caso in cui V sia una curva. Diremo che una varietà semplice V' *sega semplicemente* una curva V (riducibile o no) distinta da essa, allorquaudo esiste una ipersuperficie passante per V' e segante in punti distinti V. Si noterà subito che:

a) se $\bar{q}$ è l'ordine di una tale ipersuperficie, anche la generica ipersuperficie di ordine $q \geqq \bar{q}$ passante per V' sega V in punti distinti;

b) se V' è anch'essa una curva, la condizione di cui si parla nella precedente definizione non involge simmetricamente V, V'. Ad es., se è $r \geqq 3$ e V, V' hanno a comune un punto, semplice per V, doppio per V', V' in generale segherà semplicemente V; ma non viceversa.

8. Ciò premesso andiamo a dimostrare che

Se la varietà semplice V' sega semplicemente la curva V distinta da essa, si ha:

$$\chi_l(V) + \chi_l(V') = \chi_l(V + V') + \chi_l(V V'). \tag{2}$$

Supponiamo dapprima che V sia irriducibile, e indichiamo con F una ipersuperficie di ordine q passante per V' e segante V in punti distinti: tale intersezione sarà appunto il gruppo $F V$, e consterà del gruppo $V' V$ e di un altro gruppo Z.

I due sistemi $[V']_{l+q}$, $[V' V]_{l+q}$ segano su V due serie lineari Σ', Σ'' di dimensioni

$$\chi_{l+q}(V + V') - \chi_{l+q}(V') - 1, \qquad \chi_{l+q}(V) - \chi_{l+q}(V V') - 1;$$

e si tratta di dimostrare (n.° 3, III) che queste due serie, delle quali certo la prima è contenuta nella seconda, coincidono.

Consideriamo perciò la serie Σ, segata su V dal sistema $[V' + Z]_{l+q}$: la sua dimensione sarà:

$$\chi_{l+q}(V + V') - \chi_{l+q}(V' + Z) - 1;$$

e, poichè tra le ipersuperficie di $[V' + Z]_{l+q}$ vi sono le ipersuperficie costituite dalla F, e da una ipersuperficie qualunque di ordine l, la dimensione di Σ sarà superiore o uguale a quella della serie segata su V da tutte le ipersuperficie di ordine l; ossia sarà:

$$\dim \Sigma \geqq \chi_l(V) - 1. \tag{5}$$

Avremo poi (n.° 3, I):

$$\dim \Sigma' - \dim \Sigma = \chi_{l+q}(V' + Z) - \chi_{l+q}(V') = \chi_{l+q}(Z),$$

e per la (5):

$$\dim \Sigma' \geqq \chi_{l+q}(Z) + \chi_l(V) - 1.$$

Si ha d'altronde:

$$\chi_{l+q}(Z + V\,V') = \chi_{l+q}(Z) + \chi_{l+q}(V\,V')$$

che, combinata con la precedente, dà:

$$\dim \Sigma' \geqq \chi_{l+q}(Z + V\,V') - \chi_{l+q}(V\,V') + \chi_l(V) - 1.$$

Ed essendo (n.° 6, Oss.)

$$\chi_{l+q}(V) = \chi_l(V) + \chi_{l+q}(Z + V\,V'),$$

risulta

$$\dim \Sigma' \geqq \chi_{l+q}(V) - \chi_{l+q}(V\,V') - 1,$$

ossia:

$$\dim \Sigma' \geqq \dim \Sigma''.$$

Dovendo, come si sa, essere anche $\dim \Sigma' \leqq \dim \Sigma''$, risulta che queste due dimensioni sono eguali, il che dimostra nel caso attuale la (2) (*).

9. Per estendere la (2) al caso in cui V sia una curva composta di più parti irriducibili $V^{(1)}\,V^{(2)} \ldots V^{(m)}$, si potrebbe (vedi n.° 6) ammetterla per le coppie di varietà V', $V^{(1)} + \cdots + V^{(m-1)}$; V', $V^{(m)}$; e poi far vedere che dei sistemi lineari:

$$[V']_l, \quad [V^{(1)} + \cdots + V^{(m-1)}]_l, \quad [V^{(m)}]_l$$

uno si trova in posizione regolare rispetto agli altri due.

Ma più semplicemente si può osservare che *la dimostrazione del n.° precedente vale anche se V è riduttibile.*

(*) Questa dimostrazione rientra nella dimostrazione del SEVERI. Si noti per es. che se V' è anch'essa una curva, e se nessuna delle due curve V', V sega semplicemente l'altra, il teorema cade in difetto; come è facile vedere, Chiamando infatti *serie lineare* su una curva riduttibile V, l'insieme dei gruppi segnati su essa dalle ipersuperficie di un sistema lineare S dello spazio ambiente (*), è sempre vero che la dimensione di una tal serie vale

$$x - x' - 1.$$

dove x è la dimensione di S, e x' la dimensione del sistema costituito dalle ipersuperficie di S contenenti V.

§ 5.

10. Passiamo adesso al caso che V sia una varietà irriducibile di dimensione i maggiore di 1 (e $< r - 1$); aggiungeremo, come s'è detto al n.º 3, la restrizione che essa sia priva di singolarità, e che la varietà $V' V$ consti di parti tutte della stessa dimensione ε ($\leqq i - 1$). E cominciamo dal definire cosa significa che V' *sega semplicemente* V.

Sia dapprima $\varepsilon = i - 1$. Consideriamo le ipersuperficie di un certo ordine q, abbastanza alto, passanti per V': una generica di esse sega V nelle componenti irriducibili della $V' V$, contata ciascuna un certo numero di volte, e in una varietà a $i - 1$ dimensioni Z, irriducibile, priva di punti multipli variabili; se $X^{(\nu)}$ è una componente irriducibile della $V V'$, la varietà $X^{(\nu)} Z$ sarà a $i - 2$ dimensioni. Orbene noi diremo che V' *sega semplicemente* V quando *per un conveniente valore* q *di* q *(e quindi pei valori superiori) la* $V V'$ *sia parte fissa* **semplice** *pel sistema lineare segato su* V *da* $[V']_q$, *e inoltre il sistema residuo* R *sia privo di punti base.*

Vediamo subito che se ciò avviene, V' *segherà semplicemente anche* Z. Infatti su $X^{(\nu)}$ il sistema R sega un sistema lineare: ne segue che Z non può toccare $X^{(\nu)}$ nel generico punto di $X^{(\nu)} Z$. E dunque su Z l'insieme delle varietà (tra loro distinte) $X^{(\nu)} Z$ è parte fissa semplice pel sistema segato da $[V']_q$; e inoltre il sistema residuo non ha punti base, perchè essi sarebbero anche punti base di R. Ciò prova l'asserto.

(*) Tra tali gruppi ve ne saranno di quelli (degeneri) costituiti da componenti di V e da un effettivo gruppo della rimanente curva. Per la geometria su una curva riducibile, vedi NOETHER, *Acta Math.*, vol. VIII, Sia ora $\varepsilon < i-1$. Il sistema $[V']_q$, per q abbastanza alto, sega su V un sistema lineare R che, insieme ai suoi sistemi caratteristici (*) 1.°, 2.°,..., $(i-\varepsilon-2)^{\text{esimo}}$, è irriducibile: noi diremo che V' *sega semplicemente* V quando *per un conveniente valore* $\bar{q}$ *di* q (*e quindi pei valori superiori*) *l'intersezione di* $i-\varepsilon-1$ *varietà generiche di* R *è una varietà* (*a* $\varepsilon+1$ *dimensioni, irriducibile*) *priva di singolarità, e* V' *la sega semplicemente*, nel senso sopra definito. Si vede subito che *se questa condizione è soddisfatta,* V' *sega semplicemente anche la generica varietà* Z (*priva di singolarità*) *del sistema* R (**).

Se V' è una varietà a j dimensioni $(0<j<r-1)$, perchè essa seghi semplicemente V è sufficiente (ma non necessario) che *ogni punto della varietà a* ε *dimensioni* $(0 \leqq \varepsilon \leqq i-1)$ VV' *sia semplice per* VV', V', *e in esso le due varietà* V, V' *presentino il* **caso semplice** (cioè i due spazî tangenti S_i, S_j abbiano a comune solo l'S_ε tangente a VV').

In particolare, *se* V', V *si segano in una varietà a* $j+i-r$ *dimensioni, priva di singolarità,* ciascuna delle V', V sega semplicemente l'altra.

11. Adesso, mantenendo le notazioni del n.° prec., andiamo a dimostrare che: *se* V' *sega semplicemente* V, *vale la formula* (2).

Potremo nel corso della dimostrazione supporre vero il teorema per V' e per una varietà di dimensione $<i$; esso infatti è stato dimostrato quando tale dimensione sia 1.

Estendendo la dimostrazione del n.° 8, consideriamo su V i due sistemi lineari Σ', Σ'', segati da $[V']_{l+q}$, $[VV']_{l+q}$, dove $q \geqq \bar{q}$ e l è un intiero qualunque; si ha:

$$\left.\begin{aligned} \dim \Sigma' &= \chi_{l+q}(V'+V) - \chi_{l+q}(V') - 1, \\ \dim \Sigma'' &= \chi_{l+q}(V) - \chi_{l+q}(VV') - 1; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

e si tratta di dimostrare che queste due dimensioni, delle quali la prima non supera certo la seconda, sono eguali. Prendiamo perciò la generica ipersuperficie F di $[V']_q$ e la relativa varietà Z del sistema R: pel sistema Σ, segato su V da $[V'+Z]_{l+q}$, si ha:

$$\dim \Sigma = \chi_{l+q}(V'+V) - \chi_{l+q}(V'+Z) - 1 \tag{7}$$

(*) Cfr. Rosati, *Sugli spazî normali delle varietà algebriche* [Atti Ist. Ven., LXVIII (1908)], n.° 4.

(**) Se manca VV, si può anche dire che V' sega semplicemente V.

e anche, evidentemente:

$$\dim \Sigma \geqq \chi_l(V) - 1. \tag{8}$$

Dalle (6) (7) segue:

$$\dim \Sigma' - \dim \Sigma = \chi_{l+q}(V' + Z) - \chi_{l+q}(V'). \tag{9}$$

Ora alle varietà V', Z può ben applicarsi la (2), perchè Z ha la dimensione $i-1$, e V' la sega semplicemente (n.º 10); segue perciò:

$$\dim \Sigma' - \dim \Sigma = \chi_{l+q}(Z) - \chi_{l+q}(V\ Z),$$

e per la (8)

$$\dim \Sigma' \geqq \chi_l(V) + \chi_{l+q}(Z) - \chi_{l+q}(V' Z) - 1. \tag{10}$$

Indichiamo ora con X la varietà, a ε dimensioni, $V V'$; e distinguiamo due casi, secondo che sia $\varepsilon = i-1$, o $\varepsilon < i-1$.

Se $\varepsilon = i-1$, applicando la (3) alla V e alla ipersup. F (n.º 5, I), abbiamo:

$$\chi_{l+q}(V) = \chi_l(V) + \chi_{l+q}(X+Z),$$

che, combinata colla precedente, dà:

$$\dim \Sigma' \geqq \chi_{l+q}(V) - \chi_{l+q}(X+Z) + \chi_{l+q}(Z) - \chi_{l+q}(V'Z) - 1.$$

Ora alle varietà X, Z possiamo applicare la (1) (*); e poichè la XZ coincide colla $V'Z$, abbiamo:

$$\chi_{l+q}(X+Z) \leqq \chi_{l+q}(X) + \chi_{l+q}(Z) - \chi_{l+q}(V'Z)$$

che sostituita nella precedente dà:

$$\dim \Sigma' \geqq \chi_{l+q}(V) - \chi_{l+q}(X) - 1,$$

ossia

$$\dim \Sigma' \geqq \dim \Sigma''.$$

Dovendo essere anche, come si sa, $\dim \Sigma' \leqq \dim \Sigma''$, segue

$$\dim \Sigma' = \dim \Sigma''$$

il che dimostra, nel nostro caso, il teorema.

(*) Si potrebbe anche applicare addirittura la (2), essendo evidente che X sega semplicemente Z.

Se poi $\varepsilon < i - 1$, la varietà $V'Z$ coincide colla $V'V$, e inoltre per la (3) si ha:

$$\chi_{l+q}(V) = \chi_l(V) + \chi_{l+q}(Z);$$

talchè dalla (10) segue senz'altro:

$$\dim \Sigma' \geqq \chi_{l+q}(V) - \chi_{l+q}(VV') - 1,$$

ossia, come prima, $\dim \Sigma' \geqq \dim \Sigma''$, e quindi $\dim \Sigma' = \dim \Sigma''$.

La nostra formula resta così dimostrata (*).

§ 6. Applicazione alla rappresentabilità di una forma per combinazione lineare di più altre.

12. Le condizioni perchè una forma algebrica F in $r+1$ variabili si possa rappresentare per combinazione lineare di più altre $F_1 F_2 \dots F_h$, sono state finora, quasi esclusivamente, studiate nel caso in cui sia $h \leqq r$, e le F_i si seghino in una V_{r-h} (**). Se in particolare questa è priva di parti multiple, si ha, come è stato ricordato al n.° 5, la nota condizione, necessaria e sufficiente, che F passi per la detta V_{r-h}.

Mostreremo qui come la (2) possa utilmente applicarsi a ricercare le dette condizioni di rappresentabilità quando le F_i si seghino in una varietà costituita da parti di dimensioni diverse. Daremo tre esempî.

13. *Siano $F_1 F_2 \dots F_h$ $(h > r)$ ipersuperficie di S_r tali che r di esse si seghino in un gruppo di punti distinti, e per una parte V di questi passino tutte le altre, senza che vi siano, oltre V, altri punti comuni a tutte. La condizione necessaria e sufficiente perchè una forma F di ordine l abbastanza alto appartenga al modulo $(F_1 \dots F_h)$, è che essa passi per V.*

Le $F_1 \dots F_r$ si seghino in punti distinti, il cui insieme denoteremo con $V + V'$, e supponiamo dapprima $h = r + 1$; allora la F_{r+1} non passerà per alcun punto di V'. Per far vedere che ogni forma F, di ordine l abbastanza

(*) Questa dimostrazione è all'incirca quella del SEVERI.

(**) Nella Nota del GIAMBELLI: *Alcune estensioni del Fundamentalsatz di* NOETHER, etc. [Atti di Torino, 1906] è studiato il caso in cui le F_i siano i minori di una generica matrice, a 2 linee, di forme.

alto, passante per V, appartiene al modulo

$$(F_1\, F_2 \ldots F_r\, F_{r+1}),$$

basterà mostrare che, detto n_i l'ordine di F_i, e A_i una forma arbitraria di ordine $l - n_i$, il sistema lineare

$$A_1\, F_1 + \cdots + A_r\, F_r + A_{r+1}\, F_{r+1} = 0 \tag{11}$$

ha la dimensione

$$\binom{l+r}{r} - 1 - \chi_l(V).$$

E infatti tal sistema è quello che congiunge i due:

$$A_1\, F_1 + \cdots + A_r\, F_r = 0, \qquad A_{r+1}\, F_{r+1} = 0,$$

aventi risp. le dimensioni:

$$\binom{l+r}{r} - 1 - \chi_l(V + V'), \qquad \binom{l - n_{r+1} + r}{r} - 1$$

e segantisi in un sistema di dimensione

$$\binom{l - n_{r+1} + r}{r} - 1 - \chi_l(V')$$

(vedi il ragionamento fatto al n.° 5, II). La dimensione di (11) vale adunque:

$$\binom{l+r}{r} - 1 - \chi_l(V + V') + \chi_l(V') = \binom{l+r}{r} - 1 - \chi_l(V), \quad \text{c. d. d.}$$

Con identico ragionamento il teorema si estende, per induzione da $h - 1$ ad h, al caso di h qualunque.

Osservazione. La restrizione che l sia abbastanza alto è *essenziale*: p. es. nel caso $h = r + 1$ se è $l < n_{r+1}$, il teorema cade evidentemente in difetto, giacchè le forme, d'ordine $l < n_{r+1}$, del modulo $(F_1 \ldots F_r\, F_{r+1})$ sono del modulo $(F_1 \ldots F_r)$, e quindi, oltre che per V, passano per V'.

Valga la stessa osservazione pei due teoremi successivi.

14. *Siano $F_1\, F_2 \ldots F_r$ ipersuperficie di S_r, tali che le prime $r - 1$ si seghino in una curva priva di parti multiple $V + V'$ (V, V' potendo a lor volta essere riduttibili), e F_r passi per V e seghi V' in un gruppo di punti distinti $V V' + Z$. La condizione necessaria e sufficiente perchè una forma F, di or-*

dine l abbastanza alto, appartenga al modulo $(F_1 \dots F_r)$ è che essa passi per $V+Z$.

Adoperando le stesse notazioni e lo stesso metodo del n.° preced., basterà dimostrare che la dimensione x del sistema lineare

$$A_1 F_1 + \cdots + A_r F_r = 0, \tag{12}$$

la quale è certo non superiore a

$$\binom{l+r}{r} - 1 - \chi_l(V+Z) \tag{13}$$

eguaglia precisamente questo numero. D'altronde considerando (12) come il sistema congiungente i due

$$A_1 F_1 + \cdots + A_{r-1} F_{r-1} = 0, \qquad A_r F_r = 0,$$

si trova

$$x = \binom{l+r}{r} - 1 - \chi_l(V+V') + \chi_{l-nr}(V').$$

E allora, poichè si ha:

$$\chi_l(V+V') - \chi_{l-nr}(V') \leqq \chi_l(V) - \chi_l(V V') + \chi_l(V') - \chi_{l-nr}(V')\,(*) =$$
$$= \chi_l(V) - \chi_l(V V') + \chi_l(V V' + Z) = \chi_l(V+Z),$$

segue che x ha appunto il valore (13): c. d. d.

15. *Siano $F_1 F_2 \dots F_h$ ipersuperficie di S_r $(h<r)$ segantisi in una varietà ∞^{r-h}, priva di parti multiple, $V+V'$; V' essendo irriducibile e priva di singolarità; la varietà $V V'$ consti di parti tutte della stessa dimensione $(r-h-1)$.*

Sia poi F_{h+1} un'altra ipersuperficie passante per V, e segante V', oltre che nella $V V'$ contata una volta, in una varietà Z (a $r-h-1$ dimensioni) irriducibile e priva di singolarità; la varietà VZ consti di parti tutte della stessa dimensione.

Se V sega semplicemente Z, la condizione necessaria e sufficiente perchè una forma F, di ordine l abbastanza alto, appartenga al modulo $(F_1 \dots F_h F_{h+1})$, è che essa passi per $V+Z$.

(*) Si potrebbe mettere anche il segno $=$, essendo evidente che V sega semplicemente V'. Una analoga osservazione si può fare nel teorema seguente.

Basterà dimostrare che:

$$\chi_l(V+Z) \geqq \chi_l(V+V') - \chi_{l \;\; n_{h+1}}(V').$$

E infatti, chiamando X la varietà VV', e osservando che VZ coincide con XZ, si ha nelle nostre ipotesi:

$$\chi_l(V+Z) = \chi_l(V) + \chi_l(Z) - \chi_l(VZ) \geqq \chi_l(V+V') - \chi_l(V') +$$

$$+ \chi_l(X) + \chi_l(Z) - \chi_l(VZ) = \chi_l(V+V') - \chi_{l-n_{h+1}}(V') - \chi_l(X+Z) +$$

$$+ \chi_l(X) + \chi_l(Z) - \chi_l(VZ) \geqq \chi_l(V+V') - \chi_{l-n_{h+1}}(V')$$

c. d. d.

Osservazione. Nel caso $h = r - 2$, è inutile supporre che la curva Z sia irriducibile, e priva di singolarità.

Pisa, Ottobre 1910.

Sulle serie di funzioni analitiche della forma $\sum a_n(x)\, x^n$.

(*Di* LEONIDA TONELLI, *a Bologna.*)

Qui studiamo le serie della forma

$$\sum a_n(x)\, x^n, \tag{1}$$

dove $a_n(x)$ è una funzione analitica, in quanto sono atte a rappresentare, in un campo contenente l'origine, rami di funzioni analitiche regolari. Queste serie si presentano come generalizzazioni delle ordinarie serie di potenze: qui i coefficienti costanti vengono sostituiti da funzioni analitiche.

Daremo, sotto diverse forme, condizioni — sempre relative alle $a_n(x)$ — sotto le quali potrà affermarsi l'esistenza di una stella di convergenza assoluta ed uniforme per la (1); vale a dire, di una stella nell'interno della quale la serie considerata rappresenta un ramo monodromo di funzione analitica, regolare. Questa stella è ciò che sostituisce il cerchio di convergenza delle già ricordate serie di potenze.

Studieremo poi la sviluppabilità di una qualsiasi funzione analitica, regolare nell'intorno di un certo punto x_0, in serie della forma

$$\sum c_n\, a_n(x)\, (x - x_0)^n, \tag{2}$$

dove i c_n sono costanti; e mostreremo che tale sviluppabilità sussiste sempre sotto la sola condizione che il rapporto tra il minimo ed il massimo modulo di $a_n(x)$ sia, in un intorno arbitrariamente piccolo dell'origine, in cui questa funzione è regolare, superiore ad un numero positivo, indipendente da n. Se questa condizione è soddisfatta, la funzione rappresentata dalla (1), nella sua stella di convergenza, è continuabile analiticamente fuori di tale stella mediante serie della forma (2); vale a dire, mediante serie di potenze di $(x - x_0)^n$; i cui coefficienti differiscono da quelli della (1) solo per delle costanti, Faremo anche un confronto tra la serie (1) e la

$$\sum a'_n(x)\,x^n,$$

i cui coefficienti non sono altro che le derivate di quelli della (1); e mostreremo che — sotto determinate condizioni — la nuova serie converge anch'essa assolutamente ed uniformemente nella stella di convergenza relativa alla serie primitiva.

Il presente lavoro si riattacca naturalmente ad alcuni studi dei professori PINCHERLE e DELL'AGNOLA. Il primo di essi, in due Memorie: *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi* (*), dopo aver dato un metodo generale per trovare i campi di convergenza della serie $\sum c_n p_n(x)$ — essendo $p_n(x)$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$ un sistema di funzioni analitiche definite dallo sviluppo di una funzione di due variabili $T(x, y)=\sum y^n p_n(x)$, che diventa singolare nei posti (x, y) soddisfacenti ad un'equazione $f(x, y)=0$ — studia la sviluppabilità di una funzione analitica, regolare nell'intorno dell'origine, in serie del tipo considerato. Poi, in due Note successive, inserite nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (**), riprende la medesima questione relativamente agli sviluppi $\sum c_n p_n(x)$, dove le funzioni $p_n(x)$ sono polinomi definiti dalla relazione ricorrente

$$p_{n+1}(x)=(x-\alpha_{n+1})(x-\beta_{n+1})\,p_n(x).$$

Ma la Memoria cui più si avvicina il nostro lavoro è quella (***), cronologicamente anteriore alle precedenti, nella quale il citato Autore, dopo uno studio sulle serie $\sum \varphi_n(x)\,f_n(x)$, dove φ_n e f_n sono funzioni analitiche, si occupa degli sviluppi $\sum c_n x^n f_n(x)$, nell'ipotesi che le $f_n(x)$ siano tutte in modulo inferiori ad un numero fisso, e dimostra che qualunque funzione analitica, regolare nell'intorno del punto x_0, è sviluppabile in serie

$$\sum c_n f_n(x)\,(x-x_0)^n,$$

quando sia soddisfatta la condizione, da noi già data più sopra, relativa al rapporto tra il minimo ed il massimo modulo della $f_n(x)$. Di questa propo-

---

(*) *Annali di Matematica*, Serie II, Tomo XII, anni 1883 e 84.

(**) PINCHERLE, *I sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado. Nuove osservazioni sui sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado* (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1889).

(***) PINCHERLE, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche* (Mem. della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1881).

sizione e della stessa dimostrazione data dal chiarissimo Autore noi ci gioveremo per stabilire la proposizione analoga, già enunciata, e nella quale non poniamo la finitezza delle funzioni $f_n(x)$.

Dobbiamo, infine, menzionare un altro lavoro: quello del Dell'Agnola: *Sulle serie di polinomi che rappresentano un ramo di funzione analitica monogena* (*).

L'Autore studia la serie

$$\sum a_n(x) x^n, \tag{3}$$

dove le $a_n(x)$ sono polinomi, e definisce per essa una stella di convergenza assoluta, ed un'altra, concentrica, nella quale la (3) dovrebbe convergere uniformemente e rappresentare, perciò, una funzione analitica. La dimostrazione che di questa convergenza uniforme dà l'A. non sembra accettabile; nè pare che possa essere sostituita con altra scevra da pecche. Il Dell'Agnola si fonda sopra una proposizione relativa alle successioni di funzioni razionali intere (vedi pag. 237 della Mem. citata) che, sussistendo, porterebbe alla conclusione che la convergenza uniforme, in ogni area interna a quella di convergenza, è condizione necessaria (e sufficiente) affinchè una successione di funzioni analitiche regolari tenda ad una funzione limite, pure analitica, regolare (**): conclusione questa che, come è noto (vedi per es. Runge: *Zur Theorie der analytischen Functionen.* Acta Mathematica, 6), è contraria al vero.

(*) *Annali di Matematica*, Serie III, Tomo VI, 1901.

(**) Sia, infatti $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots g_n(x), \ldots$ una successione di funzioni analitiche, regolari, convergente, in un'area A, verso una funzione $G(x)$, pure analitica, regolare. Detto M un numero maggiore del massimo modulo di $G(x)$ in A, ad ogni $\bar{x}$ di A corrisponde un $n_{\bar{x}}$ tale che per ogni $n > n_{\bar{x}}$ è

$$|g_n(x)| < M.$$

Scelta una successione di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$, sia $f_n(x)$ un polinomio soddisfacente, in tutto A, alla disuguaglianza

$$|g_n(x) - f_n(x)| < \varepsilon_n.$$

La serie $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ tende, allora, in tutto A, verso la $G(x)$ ed è, per ogni $n > n_{\bar{x}}$,

$$|f_n(x)| < M + \varepsilon_n.$$

Applicando, perciò, la proposizione del Dell'Agnola (pag. 237) (prendendo per a_n il numero

I.

1. Sia

$$a_0(x), \qquad a_1(x), \ldots, \qquad a_n(x), \ldots \tag{4}$$

una successione di funzioni analitiche, regolari in tutti i punti interni ad un dato campo A, fra i quali è l'origine del piano complesso in cui varia la x. Inoltre, le funzioni dette soddisfino tutte alle due seguenti condizioni:

I. la successione

$$a_0(x), \qquad a_1(x), \qquad \sqrt{a_2(x)}, \ldots, \qquad \sqrt[n]{a_n(x)}, \ldots \tag{5}$$

sia, in ogni punto interno ad A, ugualmente continua;

II. i valori che le funzioni (5) assumono nell'origine siano tutti inferiori ad un numero fisso.

2. Ricordiamo, per comodità del lettore, che una varietà

$$\{F(x)\}$$

di funzioni continue in un dato campo A si dice ugualmente continua in un punto x di questo campo se, preso un numero positivo ε arbitrario, si può sempre, corrispondentemente, trovarne un altro δ tale che, per ogni x' interno ad A ed al cerchio (x, δ) di centro x e raggio δ, e per ogni funzione $F(x)$ delle varietà, sia

$$|F(x) - F(x')| < \varepsilon.$$

La varietà $\{F(x)\}$ si dice poi ugualmente continua in tutto il campo A se, preso un ε positivo, arbitrario, si può sempre, corrispondentemente, determinare un δ tale che, per qualsiasi coppia x, x' di punti di A (contorno compreso) soddisfacenti alla disuguaglianza

$$|x - x'| < \delta,$$

$M + \varepsilon_n$) si avrebbe, per ogni n maggiore di un certo m_0 e per ogni punto x di un'area A' interna ad A, $|f_n(x)| < M + \varepsilon_n$, e quindi $|g_n(x)| < M + 2\varepsilon_n < M + 2\varepsilon$. Le $g(x)$, risultando in modulo tutte inferiori ad un numero fisso, tenderebbero, per un noto teorema, uniformemente verso la $G(x)$, in ogni area interna ad A.

L'errore del DELL'AGNOLA sta nell'osservazione della pag. 236.

si abbia, qualunque sia la $F(x)$ della varietà,

$$|F(x) - F(x')| < \varepsilon.$$

Ricordiamo anche che, se una varietà $\{F(x)\}$ è ugualmente continua in tutti i punti del campo A — contorno compreso — è anche ugualmente continua su tutto A (*); e, inoltre, che l'uguale continuità su tutto A è condizione necessaria e sufficiente affinchè, da ogni successione estratta da $\{F(x)\}$, se ne possa estrarre sempre un'altra uniformemente convergente su tutto il campo considerato.

3. Mediante la successione (4) costruiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\, x^n, \tag{6}$$

la quale si presenta come una generalizzazione delle ordinarie serie di potenze.

Questa serie dovrà considerarsi nel campo A nel quale sono definiti i coefficienti $a_n(x)$; nei punti di tal campo essa potrà essere convergente o no, a seconda del comportamento asintotico della successione (4). Ci proponiamo, in ciò che segue, di definire una stella, avente il centro nell'origine ed interna ad A, nella quale la (6) converga assolutamente ed uniformemente.

4. Condotto per l'origine un raggio arbitrario, esistono certamente su di esso dei punti $\bar{x}$ di A che soddisfano alle due seguenti condizioni: 1) tutto il segmento $O\bar{x}$ è *interno* (**) ad A; 2) per ogni x appartenente ad $O\bar{x}$, $|x|$ risulta inferiore all'inverso del massimo limite della successione (5), calcolata nello stesso punto x.

Nel caso peggiore, siamo certi che per lo meno il punto O (origine) soddisfa alle condizioni richieste, e ciò in grazia dell'ipotesi II del n. 1.

Si consideri, su un dato raggio, l'insieme di questi $\bar{x}$. Si ha, evidentemente, che tutti i punti di un qualunque segmento $O\bar{x}$ appartengono al gruppo detto; il quale, poi, ammette per limite inferiore l'origine, e per limite superiore un certo punto P, interno o sul contorno di A. Al rotare del raggio considerato tutto intorno ad O, varia la lunghezza del vettore OP: vogliamo mostrare che tale lunghezza ammette un limite inferiore diverso da zero. Sia,

(*) Beninteso i punti interni ad A insieme a quelli del contorno devono formare un gruppo chiuso.

(**) Non sul contorno.

infatti, M un numero di cui rimangono inferiori le funzioni (5) nell'origine. Per l'uguale continuità di tali funzioni, esiste, allora, un intorno dell'origine stessa nel quale le (5) rimangono tutte minori di $2M$, vale a dire, un intorno nel quale l'inversa del massimo limite della (5) è maggiore di $\frac{1}{2M}\cdot$ Da ciò segue che, se ρ è inferiore a $\frac{1}{2M}$ ed alla minima distanza di O dal contorno di A, tutti i punti di un qualsiasi raggio uscente dall'origine e da questa distanti al più di ρ, appartengono all'insieme dei punti x detti. Il limite inferiore delle lunghezze dei vettori $\overline{OP}$ non è, perciò, minore del numero ρ.

Al rotare del raggio su cui si è considerato il vettore OP, questo vettore descrive ciò che noi, secondo una denominazione introdotta dal Mittag-Leffler, chiameremo *stella* S *di centro* O. Per le proprietà che stabiliremo ai numeri seguenti, la S la diremo anche *stella di convergenza della serie* (6).

Chiameremo *contorno* della stella l'insieme dei punti P precedentemente definiti.

Un punto x del campo A lo diremo *interno alla stella* qualora il raggio Ox ne incontri il contorno in un punto esterno al segmento Ox. Dalla definizione di S si ha che condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto x sia interno ad S è che ciascun punto di Ox sia interno ad A e, in modulo, inferiore all'inverso del massimo limite della corrispondente successione (5).

5. Indichiamo con $M(x)$ il massimo limite della successione (5) nei punti di A. Dall'uguale continuità della (5) e dalla condizione II del n. 1, risulta, per note proposizioni, che questa $M(x)$ è funzione finita e continua in tutti i punti interni ad A. Perciò, se x_1 appartiene ad A ed è interno ad S, la funzione $|x|M(x)$, considerata in tutti i punti del segmento Ox_1, ammette un massimo η. Ed essendo, in tutto il segmento, $|x|M(x)<1$, è $\eta<1$. Ne segue che, indicando con η_1 un numero soddisfacente alle disuguaglianze $\eta<\eta_1<1$, si ha su tutto Ox_1,

$$x|M(x)<\eta_1<1.$$

Indichiamo, poi, con δ la minima distanza dei punti del segmento Ox_1 dal contorno di A. Questo δ esiste ed è certamente maggiore di zero: infatti la distanza detta, essendo una funzione continua, ammette un minimo sicuramente positivo. Per la continuità di $|x\, M(x)$, potremo quindi determinare un $\delta_1<\delta$ tale che, in tutti i punti che distano da uno qualsiasi del segmento Ox_1 per meno di δ_1, sia sempre

$$|x|M(x)<\eta_1<1.$$

Da ciò risulta che tutti questi punti sono interni alla stella S, e perciò che, *se un punto è interno ad S, esiste sempre un suo intorno anch'esso completamente interno alla stella.*

Segue anche che *la stella S costituisce un campo semplicemente connesso.* È connesso, perchè, potendosi andare da un punto qualunque x, interno ad S, al centro O, rimanendo sempre dentro la S (basta percorrere il segmento Ox), due punti qualsiansi della stella possono sempre congiungersi con un cammino tutto interno ad essa. È poi semplicemente connesso per la costruzione medesima della stella.

6. Da quanto precede segue immediatamente la seguente proposizione: *la serie*

$$\sum a_n(x)x^n \tag{6}$$

è assolutamente convergente in tutti i punti interni alla stella S.

Si ha, infatti, in un punto interno ad S, $x\ M(x)$ minore di un certo numero positivo η, a sua volta inferiore ad 1; e perciò, da un certo n in poi,

$$x\ \ \sqrt[n]{a_n(x)} < \eta_1 < 1,$$
$$x^n\ \ a_n(x) < \eta_1^n < 1.$$

Segue che, da un certo punto in poi i termini della serie $\sum\ a_n(x)x^n \mid$ si mantengono inferiori a quelli di una progressione geometrica di ragione positiva minore di 1: la convergenza assoluta della serie (6) è così dimostrata.

7. Se x_1 è un punto interno ad S, si ha, come si è visto,

$$M(x_1)\,|\,x_1 < \eta_1 < 1,$$

e quindi, da un certo n in poi,

$$\left|\sqrt{a_n(x_1)}\right|\ \ x_1\,| < \eta_1 < 1.$$

Poichè le $\left|\sqrt[n]{a_n(x)}\right|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sono funzioni ugualmente continue, tali sono pure le $\left|\sqrt[n]{a_n(x)}\right| \cdot\ x\,|$, e si può, perciò, determinare un intorno del punto x_1 per ogni punto x del quale sia

$$\left|\sqrt[n]{a_n(x)}\ \ |\,x\,\right| < \eta_2 < 1,$$

e ciò per ogni $n > \bar{n}$. Da questa disuguaglianza segue

$$|\,a_n(x)\,|\,|\,x\,|^n < \eta_2^n < 1$$

$$\sum_{\bar{n}+1}^{\infty} |\,a_n(x)x^n\,| < \sum_{\bar{n}+1}^{\infty} \eta_2^n$$

per ogni punto dell'intorno detto di x_1. Resta, dunque, dimostrato che *nell'intorno di ciascun punto interno alla stella S la serie* (6) *converge uniformemente.* — Segue che *la serie* (6) *converge uniformemente in qualsiasi campo chiuso interno alla stella S.*

Per un noto teorema di WEIERSTRASS, possiamo, dopo ciò, affermare che *la serie*

$$\sum a_n(x)\, x^n$$

rappresenta nell'interno della stella S un ramo monodromo di funzione analitica regolare.

8. Ci proponiamo, ora, di sostituire alle condizioni I e II, del n. 1, altre più restrittive, ma praticamente più comode.

Se la successione $\left|\sqrt[n]{a_n(x)}\right|$ è convergente uniformemente in tutti i punti interni ad A, in tali punti essa successione è ugualmente continua; di più, è verificata anche la condizione II. Onde possiamo dire che *le proposizioni dei numeri precedenti sussistono se nel campo A, in cui i coefficienti $a_n(x)$ sono funzioni analiliche, regolari, la successione* (5) *converge in modo uniforme.*

9. Supponiamo che le funzioni (4) non ammettano radici nell'interno del campo A e che, in questo campo, sia, per qualunque n,

$$\left|\sqrt[n]{a_n(x)}\right| < M, \tag{7}$$

vale a dire, le $\sqrt[n]{a_n(x)}$ siano in modulo tutte ugualmente limitate. La condizione II è allora di per sè soddisfatta. Vediamo se lo è anche la I. Essendo le $a_n(x)$ prive di radici in A, le funzioni $\sqrt[n]{a_n(x)}$ sono anch'esse analitiche, regolari in tutti i punti del nostro campo. La condizione I risulta, perciò, come conseguenza della (7), in forza del seguente noto teorema (*): « Se si ha, in un campo A, una successione di funzioni analitiche regolari

$$f_1, \quad f_2, \ldots, \quad f_n, \ldots$$

tutte, in modulo, inferiori ad un numero fisso, le funzioni dette sono ugualmente continue in ogni punto interno ad A ». Questa proposizione si può brevemente dimostrare così: Scelto un punto x', interno ad A, sia (x', R) un

(*) Vedi M. FRÉCHET, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Rend. del Circolo Matem. di Palermo), n. 73; ed anche P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions* (Annales de l'École Norm. Sup. 1907), n. 44.

cerchio di centro x' e raggio R tutto contenuto in A. Detta C la circonferenza di questo cerchio, si ha in esso

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-x}\, d\, t$$

e quindi

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \frac{M}{2\pi}\int_C \left|\frac{1}{t-x'} - \frac{1}{t-x}\right| |d\, t| = \frac{M}{2\pi}\int_C \frac{|x'-x|}{|t-x'|\,|t-x|} |d\, t|,$$

dove M indica il numero fisso di cui rimangono inferiori tutti i moduli delle f_n, nel cerchio detto. Si ha, allora, in ogni cerchio di centro x' e raggio $R' < \frac{R}{2}$,

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \frac{2M}{R}|x'-x|.$$

Questa disuguaglianza mostra che, prendendo R' abbastanza piccolo, si può rendere $f_n(x') - f_n(x)$, qualunque sia n, minore di un ε positivo arbitrario. L'uguale continuità in x' è così stabilita.

Da questo teorema si ha, per le (7), che le $\sqrt[n]{a_n(x)}$ sono funzioni ugualmente continue in ogni punto interno ad A; tali, perciò, sono pure le $|\sqrt[n]{a_n(x)}|$, come risulta dalla disuguaglianza

$$\Big|\, |\sqrt[n]{a_n(x')}| - |\sqrt[n]{a_n(x)}| \,\Big| \leq \Big|\sqrt[n]{a_n(x')} - \sqrt[n]{a_n(x)}\Big|.$$

10. Le condizioni del numero precedente si possono rendere più larghe, senza nuocere alla loro praticità.

Prima di tutto, si può sostituire la condizione (7) con l'altra più generale che le $\sqrt[n]{a_n(x)}$ siano, in modulo, ugualmente limitate non in tutto A, ma in ogni campo *interno* (*) ad A; cioè che, per ogni campo A' interno ad A, esista un numero M — che può variare con A' — tale che sia, in tutto A',

$$|\sqrt[n]{a_n(x)}| < M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Si può poi togliere la condizione che le $a_n(x)$ non si annullino mai in A:

(*) Vale a dire, tale che la minima distanza del suo contorno da quello di A sia maggiore di zero.

basta porre che si abbia, almeno da un certo n in poi,

$$a_n(x) = \{\varphi_n(x)\}^{n+r}\,.\,\psi_n(x),$$

dove φ_n e ψ_n sono funzioni analitiche, regolari in A, delle quali la seconda è, nel medesimo campo, priva di zeri; r, poi, è un intero positivo o negativo, fisso. Per vedere questo, basta osservare che, essendo in ogni campo A' interno ad A verificata la (8), è anche, nel medesimo campo,

$$\left|\sqrt[n]{a_{n-r}(x)}\right| < M' \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{9}$$

(dove è $a_{n-r}(x) \equiv 0$ per ogni $n < r$), ed il massimo limite di

$$\left|\sqrt[n]{a_n(x)}\right| \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

coincide con quello di

$$\left|\sqrt[n]{a_{n-r}(x)}\right| \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)\ (*);$$

e, inoltre, notare che le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\,x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-r}(x)\,x^n$$

convergono assolutamente ed uniformemente negli stessi punti di A (**). Da

(*) Infatti, è

$$\left|\sqrt[n]{a_{n-r}(x)}\right| = \left|a_{n-r}(x)^{\frac{n-r}{(n-r)n}}\right| = \left|\sqrt[n-r]{a_{n-r}(x)}\right|^{\frac{n-r}{n}}$$

e, per la (8),

$$\left|\sqrt[n]{a_{n-r}(x)}\right| < M^{\frac{n-r}{n}} < M'.$$

Inoltre

$$\text{Mass. lim.}\left|\sqrt[n]{a_{n-r}(x)}\right| = \text{Mass. lim.}\left|\sqrt[n-r]{a_{n-r}(x)}\right|^{\frac{n-r}{n}} =$$

$$= \left\{\text{Mass. lim.}\left|\sqrt[n-r]{a_{n-r}(x)}\right|\right\}^{\text{lim.}\frac{n-r}{n}} = \text{Mass. lim.}\left|\sqrt[n-r]{a_{n-r}(x)}\right|.$$

(**) Nell'intorno dell'origine, se le $a_n(x)$ fossero comunque, potrebbero le due serie non essere convergenti insieme. Ma nel nostro caso la convergenza assoluta ed uniforme delle due serie è assicurata, dalle (8) e (9), in ogni cerchio di centro l'origine e raggio minore dei due numeri $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{M'}$.

ciò segue, infatti, in primo luogo, che la stella S di centro O, relativa alla serie $\sum a_n(x)x^n$, coincide con quella relativa all'altra $\sum a_{n-r}(x)\,x^n$. Si ha, poi, che la successione (5) corrispondente a quest'ultima serie è

$$\sqrt[n]{a_{n-r}(x)} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{10}$$

con

$$\sqrt[n]{a_{n-r}(x)} = \sqrt[n]{\{\varphi_{n-r}(x)\}^n \cdot \psi_{n-r}(x)} = \varphi_{n-r}(x)\sqrt[n]{\psi_{n-r}(x)}$$

funzione analitica, regolare in A, e soddisfacente alla (9); la (10) risulta quindi, per il teorema già ricordato, composta di funzioni ugualmente continue, in ogni punto interno ad A, e perciò soddisfacente alle condizioni I e II del n. 1. Si possono così applicare alla serie $\sum a_{n-r}(x)\,x^n$ i ragionamenti dei numeri precedenti e concludere alla sua convergenza assoluta ed uniforme in tutti i punti interni alla stella S: nei quali punti risulta, in pari tempo, dimostrata la convergenza assoluta ed uniforme della serie primitiva $\sum a_n(x)\,x^n$.

11. Fino ad ora, per stabilire la convergenza delle nostre serie, ci siamo giovati del fatto che, nei punti interni alla stella S, la radice ennesima del loro termine generale si mantiene in modulo inferiore ad un numero positivo minore dell'unità: ci siamo cioè giovati del cosidetto criterio della radice. Si capisce, perciò, la possibilità della costruzione, per la serie (6), di una nuova stella S', di convergenza assoluta ed uniforme, in modo da sfruttare il criterio di convergenza del rapporto. La nuova stella S' si definirà in maniera perfettamente analoga a quella usata per S, sostituendo solo alla radice $\sqrt[n]{a_n(x)}$ il rapporto $\dfrac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}$. E ripetendo ragionamenti simili ai precedenti si avrà la seguente proposizione:

Se le

$$a_0(x), \qquad a_1(x),\ldots, \qquad a_n(x),\ldots$$

sono funzioni analitiche, regolari in tutti i punti interni ad A, e in ogni campo A' interno ad A è, almeno da un certo indice in poi,

$$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| < M, \tag{11}$$

con M numero finito, indipendente da n, ma non necessariamente lo stesso per tutti gli A', allora la serie

$$\sum a_n(x)\,x^n$$

converge assolutamente ed uniformemente in tutti i punti interni alla stella S',

nella quale rappresenta, perciò, un ramo monodromo di funzione analitica, regolare.

12. Ci si può domandare quale relazione passa tra le stelle S ed S'. Supponiamo verificate tanto le ipotesi del n. 10 quanto quelle del n. 11: allora esistono ambedue le stelle S ed S'. Potranno porzioni dell'una essere esterne all'altra? È facile far vedere che la S' è contenuta nella S. Basta, a questo scopo, mostrare che il massimo limite di $|\sqrt[n]{a_n(\bar{x})}|$ è inferiore od uguale a quello di $\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|$. Sia $M(x)$ il massimo limite di $\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|$ ed n_0 il valore dell'indice n a partire dal quale è verificata la (11). Preso un ε positivo, arbitrariamente piccolo, e fissato un x di A, si ha, da un certo $\bar{n} > n_0$ in avanti,

$$\left|\frac{a_{n+1}(\bar{x})}{a_n(\bar{x})}\right| < M(x) + \varepsilon$$

$$|\sqrt[n]{a_n(x)}| = \sqrt[n]{|a_{\bar{n}}(x)|\left|\frac{a_{\bar{n}+1}(x)}{a_{\bar{n}}(x)}\right|\cdots\left|\frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)}\right|} < \sqrt[n]{|a_{\bar{n}}(x)|}\,(M(x)+\varepsilon)^{\frac{n-\bar{n}}{n}}$$

$$< \sqrt[n]{|a_{\bar{n}}(\bar{x})|}\,(M(x)+\varepsilon)^{-\frac{\bar{n}}{n}} \cdot (M(x)+\varepsilon).$$

Poichè l'ultima espressione tende a $M(x)+\varepsilon$ al crescere indefinito di n, si vede che il massimo limite di $|\sqrt[n]{a_n(x)}|$ non può superare $M(x)+\varepsilon$, e quindi neppure $M(\bar{x})$.

13. Si può osservare che, affinchè sia soddisfatta la condizione (11) del n. 11, è necessario che, almeno da un certo punto in poi, tutti gli zeri di $a_n(x)$ siano anche zeri di tutte le successive $a(x)$, di ordini non inferiori. Questa condizione non è, invece, necessaria affinchè siano verificate le ipotesi del n. 10; qui, per altro, viene imposta una limitazione di natura diversa sugli ordini degli zeri delle $a_n(x)$: è necessario che quest'ordine sia sempre un multiplo intero del numero $n - r$, dove r (intero positivo o negativo) è qualunque — però sempre lo stesso per tutti gli n.

Si possono presentare dei casi in cui non sono soddisfatte nè le condizioni del n. 11 nè quelle del n. 10: allora si ricorre — possibilmente — al n. 1. Ciò si fa, p. es., se si deve considerare la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(x-\alpha)^{m_n}x^n$, dove è $m_n = \frac{n}{2}$, se n è pari, $m_n = \frac{n-3}{2}$, se n è dispari. Qui, per quanto grande sia p, l'ordine dello zero α di $(x-\alpha)^{m_{2p}}$ è sempre maggiore di quello di $(x-\alpha)^{m_{2p+1}}$; e non è possibile soddisfare alle condizioni del n. 10, perchè, qualunque sia r, non può essere, per tutti i valori di p, $m_{2p}=p=2p+r$. Sono, al contrario, verificate le ipotesi del n. 1, perchè le funzioni

$$\left|\sqrt{x-\alpha}\right|,\quad 1,\quad \left|\sqrt{x-\alpha}\right|,\quad \left|\sqrt[5]{x-\alpha}\right|,\ldots,\quad \left|\sqrt[n]{(x-\alpha)^{m_n}}\right|,\ldots$$

convergono uniformemente, in ogni punto del piano complesso, verso la funzione $\left|\sqrt{x-\alpha}\right|$: infatti è

$$\left|\sqrt[2p]{(x-\alpha)^{m_{2p}}}\right|=\left|\sqrt[2p]{(x-\alpha)^{p}}\right|=\left|\sqrt{x-\alpha}\right|,$$

$$\lim_{p=\infty}\left|\sqrt[2p+1]{(x-\alpha)^{m_{2p+1}}}\right|=\lim_{p=\infty}\left|x-\alpha\right|^{\frac{p-1}{2p+1}}=\left|\sqrt{x-\alpha}\right|.$$

14. Supponiamo che la $a_n(x)$ sia la potenza n^{esima} di un polinomio $p_n(x)$, di grado r fisso, indipendente da n. Supponiamo, inoltre, che si possano determinare $r+1$ punti, in ciascuno dei quali la successione

$$p_0(x),\quad p_1(x),\ldots,\quad p_n(x),\ldots$$

rimanga inferiore ad un numero finito. Dico, allora, che la successione scritta è, in ogni campo finito, in modulo superiormente limitata. Infatti, detti x_1, $x_2,\ldots$, x_{r+1} gli $r+1$ punti di cui sopra, si ha, essendo

$$p_n(x)=c_{n,0}+c_{n,1}x+\cdots+c_{n,r}x^r,$$

$$c_{n,0}+c_{n,1}x_i+\cdots+c_{n,r}x_i^r=p_n(x_i)\qquad(i=1,\ 2,\ldots,\ r+1)$$

e quindi, per la regola di Cramer,

$$c_{n,s}=\frac{\begin{vmatrix}1 & x_1 & \ldots x_1^{s-1}, & p_n(x_1), & x_1^{s+1}, & \ldots, & x_1^r\\ 1 & x_2 & \ldots x_2^{s-1}, & p_n(x_2), & x_2^{s+1}, & \ldots, & x_2^r\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & x_{r+1} & \ldots x_{r+1}^{s-1}, & p_n(x_{r+1}), & x_{r+1}^{s+1}, & \ldots, & x_{r+1}^r\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_1 & \ldots x_1^{s-1}, & x_1^s, & x_1^{s+1}, & \ldots, & x_1^r\\ 1 & x_2 & \ldots x_2^{s-1}, & x_2^s, & x_2^{s+1}, & \ldots, & x_2^r\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & x_{r+1} & \ldots x_{r+1}^{s-1}, & x_{r+1}^s, & x_{r+1}^{s+1}, & \ldots, & x_{r+1}^r\end{vmatrix}}\quad(s=0,\ 1,\ldots,\ r),$$

e ponendo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^r \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{r+1} & \dots & x_{r+1}^r \end{vmatrix}$$

ed indicando con N il massimo modulo dei minori di ordine r di questo determinante e con M un numero maggiore di tutti i moduli dei polinomi $p_n(x)$ nei punti $x_1, x_2, \dots, x_{r+1}$, si ha

$$|c_{n,s}| < \frac{N\,M}{D};$$

e questa disuguaglianza vale per ogni s ed ogni n. Da qui segue che se R è un numero positivo maggiore di 1 e del massimo modulo degli x di un campo finito A', è in tutto questo campo

$$|p_n(x)| \leq |c_{n,0}| + |c_{n,1}|\,|x| + \dots + |c_{n,r}|\,|x|^r$$

$$|p_n(x)| < \frac{N\,M}{D} R^r;$$

ciò prova quanto abbiamo più sopra asserito. Abbiamo dunque dimostrato la seguente proposizione:

Se una successione di polinomi

$$p_0(x), \quad p_1(x), \dots, \quad p_n(x), \dots$$

di grado fisso r, è, in almeno $r+1$ punti, in modulo superiormente limitata, per ogni campo finito si può assegnare un numero positivo M tale che sia

$$|p_n(x)| < M,$$

per ogni n e per ogni x del campo considerato; nel quale, perciò, i $p_n(x)$ sono funzioni ugualmente continue.

Combinando questa proposizione con quella ricordata al n. 2 si ha quest'altra: *Se una successione di polinomi di grado fisso r è convergente in almeno $r+1$ punti, è anche tale in tutti i punti del piano complesso; e la convergenza è uniforme in qualsiasi campo finito.*

Si può osservare che le proposizioni precedenti sussistono anche se ai polinomi di grado fisso si sostituiscono delle combinazioni lineari

$$c_0\,\varphi_0(x)+c_1\,\varphi_1(x)+\cdots+c_r\,\varphi_r(x)$$

di $r+1$ funzioni fisse $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\ldots,$ $\varphi_r(x)$, soddisfacenti alla condizione di essere analitiche, intere, e tali da non annullare mai il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1), & \varphi_1(x_1) & ,\ldots, & \varphi_r(x_1) \\ \varphi_0(x_2), & \varphi_1(x_2) & ,\ldots, & \varphi_r(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_{r+1}), & \varphi_1(x_{r+1}) & ,\ldots, & \varphi_r(x_{r+1}) \end{vmatrix},$$

qualunque siano i punti $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{r+1}$.

15. Da quanto si è detto al n. precedente scende che le radici $\sqrt[n]{a_n(x)}=p_n(x)$ soddisfano in tutto il piano complesso alle ipotesi I e II del n. 1, e quindi che, se in tal piano si costruisce la stella di convergenza S, la serie $\sum a_n(x)\,x^n$ converge ivi assolutamente ed uniformemente. Si può dunque enunciare la seguente proposizione:

Se le funzioni $a_n(x)$ sono potenze n^{esime} di polinomi di grado fisso r, e se la successione

$$a_0(x)\ ,\qquad a_1(x)\ ,\qquad \sqrt{a_2(x)}\ ,\ldots,\qquad \sqrt[n]{a_n(x)}\ ,\ldots$$

è limitata in almeno $r+1$ punti del piano complesso, la serie

$$\sum a_n(x)\,x^n$$

converge assolutamente ed uniformemente in tutti i punti interni alla sua stella S, rappresentando ivi un ramo monodromo di funzione analitica regolare.

16. Vogliamo, ora, fare qualche considerazione sul contorno della stella S. Come si è detto, questo contorno è dato dall'insieme dei punti P segnati, uno ad uno, sui raggi uscenti da O. Se indichiamo con θ l'angolo che un raggio uscente dall'origine forma con la direzione positiva dell'asse reale, e con $\rho(\theta)$ la distanza che il punto P del raggio considerato ha da O, otteniamo una funzione $\rho(\theta)$, univoca per tutti i valori di θ dell'intervallo $0\leq\theta<2\pi$, nel quale ammette, come già abbiamo osservato, un limite inferiore maggiore di zero. È facile vedere che, fissato un valore $\overline{\theta}$ dell'angolo θ e preso un ε positivo arbitrariamente piccolo, si può poi sempre determinare un δ in modo che, in tutto l'intervallo $\overline{\theta}-\delta\ldots\overline{\theta}+\delta$, la $\rho(\theta)$ si mantenga superiore a

$\rho(\bar\theta)-\varepsilon$, vale a dire, soddisfi alla disuguaglianza

$$\rho(\theta) > \rho(\bar\theta)-\varepsilon. \tag{12}$$

Supponiamo, infatti, che ciò non si verifichi. Indicato con $m(\rho,\sigma)$ il limite inferiore della funzione $\rho(\theta)$ nell'intervallo $\bar\theta-\sigma\ldots\bar\theta+\sigma$, questo m è una funzione che non decresce al diminuire di σ e che perciò tende ad un limite $\overline{m}$, al tendere di σ a zero. Allora, preso sul raggio corrispondente a $\bar\theta$ *il punto* P' *distante dall'origine di* $\overline{m}$, in ogni intorno di P' cadono infiniti punti del contorno di S. Ma, d'altra parte, nel caso nostro il limite $\overline{m}$ dovrebbe essere minore di $\rho(\bar\theta)$, perchè altrimenti la condizione (12) sarebbe soddisfatta in un certo intorno di $\bar\theta$. Il punto P' risulterebbe, perciò, interno alla stella di convergenza e (n. 5) in un suo intorno conveniente non potrebbero cadere punti del contorno. La proprietà è dunque dimostrata e la funzione $\rho(\theta)$ è *semicontinua inferiormente.*

17. Poniamoci nelle ipotesi del n. 10. Le funzioni

$$a_0(x),\qquad a_1(x),\qquad \sqrt{a_2(x)}\,,\ldots,\qquad \sqrt[n]{a_n(x)}\,,\ldots, \tag{13}$$

essendo analitiche, regolari ed ugualmente continue in tutti i punti interni ad A, ammetteranno una o più funzioni limiti, alle quali convergeranno uniformemente, in ogni campo interno ad A, delle successioni estratte dalla (13). Queste funzioni limiti saranno, di conseguenza, anch'esse funzioni analitiche, regolari in A. Supponiamo che il loro numero sia finito, ed indichiamole con

$$\Phi_1(x)\,,\qquad \Phi_2(x)\,,\ldots,\qquad \Phi_r(x).$$

Le equazioni

$$|x\,\Phi_1(x)|=1\,,\qquad |x\,\Phi_2(x)|=1\,,\ldots,\qquad |x\,\Phi_r(x)|=1 \tag{14}$$

definiscono delle curve analitiche

$$C_1=0\,,\qquad C_2=0\,,\ldots,\qquad C_r=0, \tag{15}$$

ciascuna delle quali divide il piano complesso in due regioni, l'una di punti interni, l'altra di punti esterni, nella prima delle quali è $|x\,\Phi(x)|<1$, e nella seconda $|x\,\Phi(x)|>1$. La regione dei punti interni relativa ad una delle curve (15) sarà in generale non connessa. Prendiamo, per ogni curva, la parte della regione interna connessa con l'origine e consideriamo la porzione del piano complesso che è comune a tutte queste parti: tale porzione conterrà nel suo interno l'origine. Indichiamo con C il suo contorno: C risulterà composto di pezzi di curve (15). Dentro C saranno sempre soddisfatte le disuguaglianze

$$|x\Phi_1(x)| < 1\,, \qquad |x\Phi_2(x)| < 1\,, \ldots, \qquad |x\Phi_r(x)| < 1\,;$$

nei punti della curva C sarà invece verificata almeno una delle uguaglianze (14); nell'intorno di un qualunque punto di C si troveranno sempre punti soddisfacenti ad almeno una delle disuguaglianze

$$|x\Phi_1(x)| > 1\,, \qquad |x\Phi_2(x)| > 1\,, \ldots, \qquad |x\Phi_r(x)| > 1. \tag{16}$$

I punti interni alla stella S sono tutti punti interni alla curva C. Infatti nei punti interni ad S è $|xM(x)| < 1$ e perciò $|x\Phi_s(x)| < 1$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$; inoltre, S contiene l'origine.

I punti del contorno della stella S, interni ad A, non sono altro che punti di C. Sia, infatti, $\bar{x}$ un punto interno ad A ed appartenente al contorno di S. $\bar{x}$ non è esterno a C: se lo fosse, si potrebbe determinare un cerchio $(\bar{x}, R)$ tutto esterno a C; e ciò è assurdo perchè su tal cerchio esisterebbero sempre — per essere $\bar{x}$ sul contorno di S — punti interni ad S e quindi anche a C. $\bar{x}$ non può essere neppure interno a C: qualora lo fosse, si potrebbe determinare un cerchio (x, R) tutto interno a C; in tutti i punti della parte del raggio $O\bar{x}$ interna a questo cerchio si avrebbe $|x\Phi_s(x)| < 1$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ e quindi $|xM(x)| < 1$, ed $\bar{x}$ non potrebbe essere del contorno di S. — Se i rami delle curve (15) che circondano l'origine sono convessi, anche C risulta convessa: allora, se C è interna ad A, C dà il contorno della stella S e la funzione $\rho(\theta)$, oltre essere semicontinua inferiormente, è anche continua.

Se ciascun ramo delle (15) che circonda l'origine è tale che la distanza di un suo punto qualunque dall'origine stessa sia funzione univoca dell'angolo θ che il raggio, su cui esso punto si trova, forma con la direzione positiva dell'asse reale, allora anche la C sarà tale e darà ancora — se è interna ad A — il contorno della stella S.

In tutti i casi si può stabilire la seguente notevole proprietà:

i punti del contorno della stella S, interni ad A, sono limiti tanto di punti di convergenza quanto di quelli di non convergenza della serie $\sum a_n(x)x^n$. Vale a dire, se si descrive un cerchio avente il centro in un punto P del contorno di S, interno ad A, ed il raggio piccolo a piacere, su questo cerchio cadono sempre punti di convergenza e punti di non convergenza, *a*) P è limite di punti del segmento OP che sono, P escluso, interni alla stella S, e quindi punti di convergenza.

b) P, essendo interno ad A, è un punto della curva C: in ogni intorno di P cadono, dunque, sempre punti nei quali è verificata almeno una delle disuguaglianze (16).

Sia $\bar{x}$ uno di questi punti, e sia, p. es.,

$$|\bar{x}\, \Phi_s(\bar{x})| > 1.$$

Essendo, poi,

$$\sqrt[n_1]{a_{n_1}(x)}, \qquad \sqrt[n_2]{a_{n_2}(x)}, \ldots, \qquad \sqrt[n_m]{a_{n_m}(x)}, \ldots$$

la successione estratta da $\sqrt[n]{a_n(x)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ e convergente in modo uniforme a $\Phi_s(x)$, avremo, da un certo punto in poi,

$$|\bar{x}\, \sqrt[n_m]{a_{n_m}(\bar{x})}| > 1,$$

$$|a_{n_m}(\bar{x})\, \bar{x}^{n_m}| > 1.$$

Resta così dimostrato che il termine generale della serie $\sum a_n(\bar{x})\, \bar{x}^n$ non tende a zero, e quindi che tal serie è divergente assolutamente e non convergente neppure semplicemente.

18. Per quanto precede possiamo enunciare il seguente risultato:

Se nei punti interni ad un campo A si ha una successione di funzioni analitiche, regolari

$$a_0(x), \qquad a_1(x), \ldots, \qquad a_n(x), \ldots$$

tutte soddisfacenti alle due condizioni: 1.^{a}) *è* $a_n(x) = \{\varphi_n(x)\}^{n+r} \cdot \psi_n(x)$, *dove* φ_n *e* ψ_n *sono funzioni analitiche regolari, delle quali la seconda è priva di zeri in A, ed r è un intero, positivo o negativo, indipendente da n;*

2.^{a} *in ogni campo interno ad A le*

$$a_0(x), \qquad a_1(x), \qquad \sqrt{a_2(x)}, \ldots, \qquad \sqrt[n]{a_n(x)}, \ldots \tag{17}$$

sono ugualmente limitate; allora si definisce in A, per la serie

$$\sum a_n(x) \,.\, x^n,$$

una stella S di convergenza assoluta ed uniforme, nella quale, perciò, la serie scritta rappresenta un ramo monodromo di funzione analitica regolare. Se poi *le funzioni limiti della successione* (17) *sono un numero finito, ogni punto del contorno di* S, *interno ad* A, *è limite di punti di convergenza e di punti di non convergenza.*

II.

19. Volendoci occupare ora della continuazione analitica della funzione definita dalla serie (6), al di fuori della stella di convergenza S, mediante serie della forma $\sum c_n\, a_n(x)\,(x-x_0)^n$, dobbiamo studiare la sviluppabilità di una qualsiasi funzione analitica, regolare nell'intorno dello zero, in serie

$$\sum c_n\, a_n(x)\, x^n, \tag{18}$$

dove i c_n sono coefficienti indipendenti dalla x, e le $a_n(x)$ sono funzioni analitiche, regolari in un certo campo contenente l'origine.

È facile vedere che, se le $a_n(x)$ non si assoggettano ad alcuna condizione, non è sempre possibile sviluppare una funzione analitica, regolare in vicinanza dello zero, in serie della forma (18); e si può vedere che non basta neppure fare sulla $a_n(x)$ le ipotesi del n. 1. Si consideri, p. es., il caso in cui si prendono per le $a_n(x)$ le potenze x^n: allora la serie (18) diventa

$$\sum c_n\, x^{2n},$$

ed esistono infinite funzioni analitiche non sviluppabili in serie di questa forma.

20. Siano le $a_n(x)$ tali che il rapporto $\frac{a_n(0)}{A_n}$ abbia per ogni n un valore determinato, soddisfacente alla disuguaglianza

$$\left|\frac{a_n(0)}{A_n}\right| > p\ (*); \tag{19}$$

qui A_n indica il massimo modulo di $a_n(x)$ in un cerchio $(0, r)$ di raggio r piccolo a piacere, ma indipendente da n, e p è un numero positivo, pure arbitrariamente piccolo e indipendente da n. Questa condizione permette, come ora vedremo, di asserire la sviluppabilità di una qualsiasi funzione analitica $F(x)$,

(*) Si noti che p non può essere maggiore di 1.

regolare nell'interno dello zero, in serie della forma (18), assolutamente ed uniformemente convergente.

Cominciamo con l'osservare che, potendosi scrivere

$$\sum c_n\,a_n(x)\,x^n = \sum c_n\,a_n(0)\cdot\frac{a_n(x)}{a_n(0)}\,x^n,$$

ossia, ponendo

$$\left.\begin{aligned} c_n\,a_n(0) &= b_n\,,\\ \frac{a_n(x)}{a_n(0)} &= \alpha_n(x), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\sum c_n\,a_n(x)\,x^n = \sum b_n\,\alpha_n(x)\,x^n,$$

basta occuparci della sviluppabilità di $F(x)$ in serie della forma

$$\sum b_n\,\alpha_n(x)\,x^n,$$

dove $\alpha_n(x)$ soddisfa alle due condizioni

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n(0) &= 1\\ |\,\alpha_n(x)\,| &< \frac{1}{p} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

in tutto il cerchio (O, r), come risulta dalle (19) e (20). Siamo così ricondotti al caso studiato dal prof. PINCHERLE nella Memoria citata (*).

Poniamo

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\,x^n \tag{22}$$

$$\alpha_n(x) = 1 + \alpha_{n,1}\,x + \alpha_{n,2}\,x^2 + \cdots \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{23}$$

e indichiamo con R il raggio di un cerchio di centro O, nel quale convergono tutte le serie (22) e (23); questo R lo prenderemo anche in modo che nel cerchio (O, R) siano verificate le disuguaglianze (19).

Giovandoci del solito metodo dei coefficienti indeterminati, troveremo, dapprima, la forma dello sviluppo

$$\sum b_n\,\alpha_n(x)\,x^n \tag{24}$$

della $F(x)$; poi ne dimostreremo la validità.

(*) *Mem. della R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, 1881. La dimostrazione che segue è quella stessa del PINCHERLE.

21. *a*) Supposta la convergenza uniforme della (24) abbiamo, sostituendo alle $\alpha_n(x)$ le espressioni date dalle (23) ed ordinando secondo le potenze di x — in forza di un noto teorema della teoria delle funzioni analitiche —

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha_n(x) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{0n} b_0 + \alpha_{1n-1} b_1 + \cdots + \alpha_{n-1,1} b_{n-1} + b_n) x^n. \tag{25}$$

Se questo sviluppo deve rappresentare la funzione $F(x)$, devono i coefficienti della seconda serie essere rispettivamente uguali a quelli della (22); deve essere cioè

$$\left.\begin{array}{l} h_0 = b_0 \\ h_1 = \alpha_{01} b_0 + b_1 \\ h_2 = \alpha_{02} b_0 + \alpha_{11} b_1 + b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_n = \alpha_{0n} b_0 + \alpha_{1n-1} b_1 + \cdots + \alpha_{n-1,1} b_{n-1} + b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{26}$$

Questo è un sistema di infinite equazioni lineari dal quale è facile ricavare i valori delle infinite incognite b_0, $b_1, \ldots$ Si ha, infatti, considerando solo le prime $n+1$ equazioni, le quali non contengono che le prime $n+1$ incognite, ed applicando la regola di Cramer

$$b_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & h_0 \\ \alpha_{01} & 1 & 0 & \ldots & 0 & h_1 \\ \alpha_{02} & \alpha_{11} & 1 & \ldots & 0 & h_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{0n} & \alpha_{1n-1} & \alpha_{2n-2} & \ldots & \alpha_{n-1,1} & h_n \end{vmatrix}, \tag{27}$$

ossia, sviluppando secondo gli elementi dell'ultima colonna,

$$b_n = h_n - d_{1,n} h_{n-1} + d_{2,n} h_{n-2} - \cdots + (-1)^n d_{n,n} h_0\,, \tag{28}$$

dove $d_{r,n}$ indica il determinante che si ottiene sopprimendo in (27) la $(n+1-r)^{esima}$ linea e l'ultima colonna. Sopprimendo in questo determinante, che è di ordine n, le prime $n-r$ linee e le prime $n-r$ colonne, si ottiene

$$d_{r,n} = \begin{vmatrix} \alpha_{n-r,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-r,2} & \alpha_{n-r+1,1} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-r,r} & \alpha_{n-r+1,r-1} & \alpha_{n-r+1,r-1} & \dots & \alpha_{n-1,1} \end{vmatrix},$$

e sviluppando qui secondo gli elementi dell'ultima linea

$$\left.\begin{aligned} d_{r,n} &= \alpha_{n-1,1}\, d_{r-1,n-1} - \alpha_{n-2,2}\, d_{r-2,n-2} + \cdots \\ &\cdots + (-1)^r \alpha_{n-r+1,r-1}\, d_{1,n-r+1} + (-1)^{r+1} \alpha_{n-r,r}\,; \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

questa uguaglianza dà il determinante $d_{r,n}$ in funzione di altri determinanti d di ordine inferiore e relativi a valori inferiori dell'indice n.

Abbiamo dunque trovato che — nell'ipotesi della sviluppabilità della $F(x)$ in serie uniformemente convergente della forma (24) — i coefficienti b di questa serie sono dati dalle formole (28). Non abbiamo però ancora dimostrato che $F(x)$ è effettivamente sviluppabile. Per questo basta far vedere che, quando si prendono per coefficienti dello sviluppo (24) i valori dati dalle (28), lo sviluppo stesso converge uniformemente in un certo intorno dell'origine. Infatti, quando ciò fosse, le uguaglianze (25), (26) e (22) mostrerebbero l'identità

$$F(x) = \sum b_n\, \alpha_n(x)\, x^n.$$

b) Per la nota formola del valore maggiorante dei coefficienti di una serie di potenze, abbiamo, indicando con ρ un numero positivo minore di R, e in forza delle (21)

$$|\alpha_{n,m}| < \frac{1}{p\,\rho^m},$$

la quale disuguaglianza vale per qualunque n ed m. Da ciò segue che, se poniamo

$$\beta_m = \frac{1}{p\,\rho^m},$$

è, per qualunque valore di n ed m,

$$|\alpha_{n,m}| < \beta_m \tag{30}$$

e la serie

$$T(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r\, x^r$$

è convergente per ogni $|x| < \rho$. Poichè è $T(0) = 0$, si potrà trovare un cerchio $(0,\ R')$, con $R' < \rho$, nel quale sia

$$|T(x)| < 1\,;$$

e in questo nuovo cerchio il quoziente $\frac{T}{1-T}$ si potrà sviluppare in serie di potenze di x ed avere

$$\frac{T}{1-T} = \sum_{n=1}^{\infty} k_r\, x^r,$$

dove i coefficienti k_r sono tutti positivi, come i numeri β coi quali si formano.

Dalla precedente identità si deduce, ponendo per $T(x)$ il suo sviluppo

$$\sum_1^{\infty} \beta_r\, x^r = \left(\sum_1^{\infty} k_r\, x^r\right)(1 - \sum \beta_r\, x^r),$$

ed anche, uguagliando i coefficienti di x^r,

$$k_r = \beta_1\, k_{r-1} + \beta_2\, k_{r-2} + \cdots + \beta_{r-1}\, k_1 + \beta_r\,. \tag{31}$$

Mostriamo, ora, che il determinante $d_{r,n}$ si mantiene, in modulo, qualunque sia il valore dell'indice n, inferiore a k_r: vale a dire che è

$$|d_{r,n}| < k_r\,. \tag{32}$$

Osserviamo subito che questa disuguaglianza è verificata per il valore 1 dell'indice r, perchè, essendo $d_{1,n} = \alpha_{n-1,1}$, è, per le (30) e (31)

$$|d_{1,n}| = |\alpha_{n-1,1}| < \beta_1 = k_1\,.$$

Basterà, perciò, in forza del principio dell'induzione completa, dimostrare che, se la (32) è verificata per i valori

$$1,\ 2, \ldots,\ r-1$$

dell'indice r, è vera anche per il valore r. Ricorriamo, a tal uopo, alla relazione (29): essa ci dà

$$|d_{r,n}| \leq |\alpha_{n-1,1}|\,|d_{r-1,n-1}| + |\alpha_{n-2,2}|\,|d_{r-2,n-2}| + \cdots$$
$$\cdots + |\alpha_{n-r+1,r-1}|\,|d_{1,n-r+1}| + |\alpha_{n-r,r}|$$

e, per la (30) e la (32), supposte verificate fino ad $r-1$,

$$|d_{r,n}| < \beta_1 k_{r-1} + \beta_2 k_{r-2} + \cdots + \beta_{r-1} k_1 + \beta_r .$$

Ma la somma che qui figura non è altro, per le (31), che k_r: si conclude così con la disuguaglianza

$$|d_{r,n}| < k_r$$

che è appunto quella che dovevamo dimostrare.

c) Ciò premesso, la convergenza della serie $\sum b_n \alpha_n(x)\,x^n$, dove i b_n sono dati dalle (28), si ottiene immediatamente. Si ha, infatti,

$$|b_n| < |h_n| + |d_{1,n}|\,|h_{n-1}| + |d_{2,n}|\,|h_{n-2}| + \cdots + |d_{n,n}|\,|h_0|$$

e, per la (32),

$$|b_n| < |h_n| + k_1 |h_{n-1}| + k_2 |h_{n-2}| + \cdots + k_n |h_0| .$$

Ma il secondo membro di questa disuguaglianza non è altro che il coefficiente del termine generale del prodotto delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n, \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n,$$

prodotto che è convergente nel cerchio $(0, R')$: in questo cerchio è quindi convergente la serie $\sum b_n x^n$ ed anche l'altra $\sum b_n \alpha_n(x)\,x^n$, perchè, per la (21) è

$$|b_n \alpha_n(x)| < \frac{1}{p}\,|b_n| .$$

Resta così dimostrato che, almeno nel cerchio $(0, R')$, la serie (24), per i valori dei coefficienti b ricavati dalle (28), è convergente assolutamente ed uniformemente. La sviluppabilità delle $F(x)$ in serie della forma (24), e quindi anche della forma (18), è ora pienamente stabilita.

Dalle formole (26) si ricava poi che lo sviluppo della forma (24) è unico: tale è, perciò, anche quello (18).

22. Dopo quanto precede possiamo enunciare la seguente proposizione:

Data una successione

$$a_0(x), \qquad a_1(x), \ldots, \qquad a_n(x), \ldots$$

di funzioni analitiche, regolari in ogni punto di un intorno dell'origine, nel *quale soddisfano tutte alle condizioni*

$$A_n > 0, \qquad \left| \frac{a_n(0)}{A_n} \right| > p$$

— *essendo* A_n *il massimo modulo di* $a_n(x)$ *nell'intorno detto — ogni funzione analitica* $F(x)$, *regolare in un'area contenente nel suo interno l'origine, è, in un intorno di questa, sviluppabile, e in modo unico, in serie assolutamente ed uniformemente convergente, della forma*

$$\sum c_n\, a_n(x)\, x^n.$$

I coefficienti c_n *di questo sviluppo si calcolano mediante la formola*

$$c_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!\, a_n(0)} - \frac{d_{1,n}\, F^{(n-1)}(0)}{n-1!\, a_{n-1}(0)\, a_n(0)} + \frac{d_{2,n}\, F^{(n-2)}(0)}{n-2!\, a_{n-2}(0)\, a_{n-1}(0)\, a_n(0)} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} \frac{d_{n-1,n}\, F^{(1)}(0)}{1!\, a_1(0)\, a_2(0) \ldots a_n(0)} + (-1)^n \frac{d_{n,n}\, F(0)}{a_0(0)\, a_1(0) \ldots a_n(0)}.$$

dove $d_{1,n}, d_{2,n}, \ldots, d_{n,n}$, *che sono sempre gli stessi per tutte le funzioni* $F(x)$, *sono dati da*

$$d_{r,n} = \begin{vmatrix} \frac{a^{(1)}_{n-r}(0)}{1!} & a_{n-r+1}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a^{(2)}_{n-r}(0)}{2!} & \frac{a^{(1)}_{n-r+1}(0)}{1!} & a_{n-r+2}(0) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a^{(r)}_{n-r}(0)}{r!} & \frac{a^{(r-1)}_{n-r+1}(0)}{r-1!} & \frac{a^{(r-2)}_{n-r+2}(0)}{r-2!} & \ldots & \frac{a^{(1)}_{n-1}(0)}{1!} \end{vmatrix} \text{(*)}.$$

Queste costanti $d_{r,n}$ *sono poi legate tra loro dalla relazione*

$$d_{r,n} = \frac{a^{(1)}_{n-1}(0)}{1!} d_{r-1,n-1} - \frac{a^{(2)}_{n-2}(0)\, a_{n-1}(0)}{2!} d_{r-2,n-2} + \frac{a^{(3)}_{n-3}(0)\, a_{n-2}(0)\, a_{n-1}(0)}{3!} d_{r-3,n-3} -$$

$$- \cdots + (-1)^r \frac{a^{(r-1)}_{n-r+1}(0)\, a_{n-r+2}(0)\, a_{n-r+3}(0) \ldots a_{n-1}(0)}{r-1!} d_{1,n-r+1} +$$

$$+ (-1)^{r+1} \frac{a^{(r)}_{n-r}(0)\, a_{n-r+1}(0)\, a_{n-r+2}(0) \ldots a_{n-1}(0)}{r!}.$$

(*) Abbiamo qui leggermente modificate le notazioni in confronto del numero precedente: il $d_{r,n}$ di tal numero sarebbe il $d_{r,n}$ attuale moltiplicato per il fattore $a_0(0)\, a_1(0) \ldots a_{n-r-1}(0)$; $a_t^{(s)}(0)$ indica, poi, la derivata *sesima* di $a_t(x)$ calcolata nel punto 0.

23. Nell'enunciato precedente si può sostituire l'origine con un punto x_0 qualunque, purchè interno all'area comune di regolarità delle funzioni $F(x)$, $a_0(x)$, $a_1(x)$,...; si ottiene così la sviluppabilità di $F(x)$ nell'intorno di un punto x_0 in serie della forma

$$\sum c_n\,a_n(x)\,(x-x_0)^n$$

tutte le volte che x_0, interno all'area di regolarità detta, è tale che in esso sia soddisfatta la disuguaglianza

$$\left|\frac{a_n(x_0)}{A_n}\right| > p$$

per tutti i valori dell'indice n. Abbiamo dunque la seguente proposizione:

Data in un'area A una successione

$$a_0(x)\,, \qquad a_1(x)\,, \ldots$$

di funzioni analitiche, regolari e soddisfacenti alle condizioni

$$A_n > 0 \qquad \frac{\alpha_n}{A_n} > p$$

— dove α_n e A_n indicano, rispettivamente, il minimo ed il massimo del modulo di $a_n(x)$ in A — ogni funzione $F(x)$ analitica, regolare in tutti i punti dell'area detta, è, ed in modo unico, sviluppabile, nell'intorno di qualsiasi punto x_0 di A, in serie

$$\sum c_n\,a_n(x)\,(x-x_0)^n$$

assolutamente ed uniformemente convergente.

24. Possiamo dare un'espressione maggiorante per il coefficiente c_n.

Riprendiamo la disuguaglianza

$$|b_n| < |h_n| + k_1\,|h_{n-1}| + k_2\,|h_{n-2}| + \cdots + k_n\,|h_0|$$

del n. 21. Essendo h_n il coefficiente generale dello sviluppo di $F(x)$ in serie di potenze di x, è, per una nota disuguaglianza

$$|h_n| < \frac{M}{\rho^n}\,,$$

dove M indica il massimo modulo di $F(x)$ in $(0, \rho)$ e ρ è un numero positivo sufficientemente piccolo. Per la stessa ragione è

$$|k_n| < \frac{N}{\rho^n},$$

dove N rappresenta il massimo modulo di $\frac{T}{1-T}$ in $(0, \rho)$. Si conclude

$$|b_n| < (n+1)\,N\frac{M}{\rho^n}$$

e

$$|c_n| < \frac{(n+1)\,N}{|a_n(0)|}\cdot\frac{M}{\rho^n};$$

qui il coefficiente $\frac{(n+1)\,N}{|a_n(0)|}$ è indipendente dalla funzione $F(x)$. Quest'eguaglianza, che dà un'espressione maggiorante per i coefficienti dello sviluppo $\sum c_n a_n(x)\,x^n$ di $F(x)$, vale evidentemente anche per quelli di $\sum c_n a_n(x)\,(x-x_0)^n$. Possiamo dunque dire che

Se x_0 è un punto interno al campo A dell'enunciato del n. precedente, e c_n è il coefficiente dello sviluppo $\sum c_n a_n(x)\,(x-x_0)^n$ di $F(x)$, è

$$|c_n| < \frac{(n+1)\,N}{|a_n(x_0)|}\,\frac{M}{\rho^n},$$

dove M è il massimo modulo di $F(x)$ in (x_0, ρ); N quello di $T(x)$ nello stesso cerchio, essendo $T(x)$ indipendente da $F(x)$; e ρ è un numero positivo tale che sia, in tutto (x_0, ρ),

$$|T| = \left|\frac{1}{p}\sum_1^\infty\left(\frac{x}{\rho_1}\right)^n\right| < 1$$

per almeno un ρ_1 maggiore di ρ e minore della minima distanza di x_0 dal contorno di A.

25. Ritornando alle ipotesi del n. 1, alle quali aggiungiamo quelle del n. 23

$$A_n > 0, \qquad \frac{a_n}{A_n} > p,$$

consideriamo di nuovo la serie $\sum a_n(x)\,x^n$. Questa, per quanto si è detto al § I, converge assolutamente ed uniformemente in tutta la stella S contenuta nel campo A, nella quale rappresenta, perciò, un ramo monodromo di funzione analitica regolare: $F(x)$. Detta funzione avrà, generalmente, un campo di regolarità maggiore di quello dato dalla stella S. Or bene, la proposizione del n. 23 permette di dare la continuazione analitica di $F(x)$, mediante serie della forma

$$\sum c_n\, a_n(x)\,(x - x_0)^n,$$

al di fuori della stella S (beninteso, sempre internamente ad A).

Sia $\bar{x}$ un punto interno ad A e tale che si possa congiungere con un punto $\bar{\bar{x}}$ interno ad S mediante un cammino C tutto costituito da punti di regolarità della $F(x)$ e completamente contenuto in A. Se x' è un punto qualunque di C, in un suo intorno $F(x)$ è (n. 23) sviluppabile in serie

$$\sum c_n\, a_n(x)\,(x - x')^n. \tag{33}$$

Indichiamo con $R_{x'}$ il raggio del massimo cerchio di centro x', di convergenza uniforme della (33). $R_{x'}$ è funzione continua di x' e perciò ammette, in tutto il cammino C, un minimo che indicheremo con R e che risulta essenzialmente positivo. Ne segue che, se si fissa comunque su C una successione finita di punti

$$x_1 = \bar{\bar{x}}, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, \quad x_m = \bar{x},$$

in modo che il primo e l'ultimo coincidano rispettivamente con $\bar{\bar{x}}$ e $\bar{x}$, e che due consecutivi distino tra loro per meno di R, si ottiene mediante le $m-1$ serie

$$\sum c_n^{(r)}\, a_n(x)\,(x - x_r)^n \qquad (r = 1, 2, \ldots, m-1),$$

il valore di $F(x)$ in ogni punto del cammino C.

III.

26. Possiamo domandarci quale relazione passa, relativamente alla convergenza, tra le serie

$$\sum a_n(x)\, x^n, \qquad \sum a'_n(x)\, x^n,$$

dove $a'_n(x)$ indica la derivata di $a_n(x)$.

Poniamoci nelle ipotesi del n. 1. Allora la serie $\sum a_n(x)\, x^n$, essendo convergente uniformemente in ogni campo chiuso A' contenuto nell'interno della stella S, è ivi, per un noto teorema, derivabile termine a termine, e la serie delle derivate

$$\sum \{ a'_n(x)x^n + n\, a_n(x)x^{n-1} \}$$

converge essa pure uniformemente. Prendendo a considerare la serie $\sum_1^\infty n\, a_n(x)x^{n-1}$, possiamo scrivere

$$x \,.\, \sum n\, a_n(x)x^{n-1} = \sum n\, a_n(x)x^n.$$

Ora, indicando con $M(x)$ il massimo limite della successione

$$\left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

abbiamo, in tutti i punti di A'

$$|x|\, M(x) < 1;$$

ed essendo $M(x)$ funzione continua in A, possiamo trovare un η positivo, minore di 1, tale che sia, in tutto A',

$$|x|\, M(x) < \eta < 1.$$

Per essere poi le $\left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right|$, e quindi anche le $\left| x \sqrt[n]{a_n(x)} \right|$, ugualmente continue in A, possiamo (*), scelto un η_1 compreso tra η e l'unità, determinare un $\bar{n}$ in modo che sia, per ogni $n > \bar{n}$ e per ogni x di A',

$$\left| x \sqrt[n]{a_n(x)} \right| < \eta_1 < 1$$

$$|x^n\, a_n(x)| < \eta_1^n < 1\,.$$

In tutto A' abbiamo così

$$\sum |n\, a_n(x)x^n| < \sum n\, \eta_1^n\,.$$

Per essere $\sum n\, \eta_1^n$ convergente, è $\sum n\, a_n(x)x^n$ convergente assolutamente ed uniformemente in tutto il campo A'. Ne segue che togliendo da A' un intorno piccolo a piacere dell'origine, in tutta la parte rimanente converge assolutamente ed uniformemente la serie $\sum n\, a_n(x)x^{n-1}$ $\left(= \dfrac{\sum n\, a_n(x)x^n}{x}\right)$. Ma, se

(*) Vedi P. Montel, *Sur les suites infinies de fonctions* (Annales de l'École Norm. Sup., 1907), n. 20.

una serie di funzioni analitiche, regolari in tutto un campo A', contorno compreso, converge uniformemente su questo contorno, converge anche uniformemente in ogni campo A_1 *interno* ad A' (*). Ne concludiamo che $\sum n\, a_n(x)\, x^{n-1}$ è convergente uniformemente in tutto A' e che tale è pure

$$\sum a'_n(x)\, x^n = \sum \{ a'_n(x)\, x^n + n\, a_n(x)\, x^{n-1} \} - \sum n\, a_n(x)\, x^n.$$

Possiamo, perciò, dire che, *nelle ipotesi del n. 1, la serie*

$$\sum a'_n(x)\, x^n,$$

dove $a'_n(x)$ *indica la derivata di* $a_n(x)$, *è uniformemente convergente in ogni campo chiuso contenuto nella stella* S *relativa a* $\sum a_n(x)\, x^n$; *e quindi rappresenta in* S *un ramo monodromo di funzione analitica, regolare.*

27. Supponiamo, ora, che le $a_n(x)$ soddisfino alle seguenti condizioni: 1.°) sia

$$a_n(x) = \{ \varphi_n(x) \}^{n+r}\, \psi_n(x)$$

dove $\varphi_n(x)$ e $\psi_n(x)$ sono due funzioni analitiche regolari in A, delle quali la seconda non ha zeri in A e la prima ha solo radici semplici; 2.°) in ogni campo A' interno ad A sia

$$\sqrt[n]{a_n(x)}\, | < M,$$

dove M varia solo con A' e non con n. Considerato un cerchio $(\bar{x}, R)$ tutto interno ad A, il teorema di Cauchy dà

$$a'_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a_n(t)}{(t-x)^2}\, dt,$$

dove C indica la circonferenza di $(\bar{x}, R)$ e x è un punto interno a C; ne segue, per ogni x di $\left(x, \frac{R}{2}\right)$,

$$a'_n(x) < \frac{4\, M^n}{R}$$

$$\sqrt[n]{a'_n(x)}\, | < M \sqrt[n]{\frac{4}{R}} < M_1,$$

(*) Cfr. C. Severini, *Sulle serie di funzioni analitiche* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1903); ed anche: P. Montel, loc. cit., p. 77.

con M_1 finito, indipendente da n. Ciò mostra che la successione

$$|\sqrt[n]{a'_n(x)}| \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

è ugualmente limitata in ogni campo A' interno ad A.

Aggiungiamo l'ipotesi che la $a'_n(x)$ si annulli in A solo nei posti di zero della $a_n(x)$; allora, essendo

$$a'_n(x)=\{\varphi_n(x)\}^{n+r-1}\{\varphi_n(x)\psi'_n(x)+(n+r)\varphi'_n(x)\psi_n(x)\},$$

il secondo fattore di $a'_n(x)$ risulta sempre diverso da zero in A: infatti, se fosse

$$\varphi_n(\bar{x})\psi'_n(x)+(n+r)\varphi'_n(\bar{x})\psi_n(\bar{x})=0,$$

dovendo essere $a_n(\bar{x})=\{\varphi_n(\bar{x})\}^{n+r}.\psi_n(\bar{x})=0$, sarebbe $\varphi_n(\bar{x})=0$ e quindi $\varphi'_n(\bar{x})\psi_n(\bar{x})=0$, $\varphi'_n(\bar{x})=0$, il che contraddice all'ipotesi fatta che $\varphi_n(x)$ abbia solo radici semplici in A. Si deduce da ciò che la successione

$$|\sqrt[n]{a'_n(x)}| \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

è composta di funzioni ugualmente continue (cfr. n. 9). Esiste dunque in A una stella S' di convergenza assoluta ed uniforme per la serie $\sum a'_n(x)x^n$. E se le funzioni limiti della successione $|\sqrt[n]{a'_n(x)}|$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ sono in numero finito si ha (n. 17) che ogni punto del contorno di S' è limite di punti di convergenza ed anche di quelli di non convergenza per la serie $\sum a'_n(x)x^n$. Ne risulta che i punti del contorno di S' non possono essere interni alla stella S, perchè, per quello che si è dimostrato al numero precedente, in quest'ultima stella la serie $\sum a'_n(x)x^n$ converge sempre uniformemente.

Resta così stabilita la seguente proposizione: *se alle condizioni* (1) e (2) *poste al principio di questo numero aggiungiamo le altre due: che la* $a'_n(x)$ *si annulli solo nei punti di zero di* $a_n(x)$ *e che la successione* $|\sqrt[n]{a'_n(x)}|$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$ *abbia in* A *un numero finito di funzioni limiti; allora: 1) la successione*

$$a'_n(x), \qquad a'_1(x),\ldots$$

soddisfa alle condizioni del n. 10; 2) la serie

$$\sum a'_n(x)x^n \tag{34}$$

converge assolutamente ed uniformemente in tutta la stella S *relativa a* $\sum a_n(x)x^n$; *3) la stella* S *è tutta contenuta nella stella* S' *relativa alla* (34).

IV.

28. Determineremo, in questo paragrafo, la stella di convergenza di alcune serie del tipo studiato, in alcuni casi molto semplici.

Consideriamo la serie

$$\sum_0^\infty (1 - a_n x)^n x^n,$$

dove è

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

La funzione $(1 - a_n x)^n$ è analitica, regolare in tutto il piano complesso, nel quale la radice ennesima $\sqrt[n]{(1 - a_n x)^n}$ tende in modulo, per $n = \infty$, all'unità; e la convergenza è uniforme in ogni campo finito. Sono dunque verificate le ipotesi del n. 1 ed anche quelle del n. 10 in tutto il piano. La stella di convergenza è (n. 17) data dal cerchio di centro 0 e raggio 1. Fuori di questa stella la serie considerata non è mai convergente.

29. Si abbia la serie

$$\sum_0^\infty (b_n - x)^n x^n$$

dove è

$$\lim_{m=\infty} b_{2m} = 1$$

$$\lim_{m=\infty} b_{2m+1} = -1.$$

Essendo

$$\lim_{m=\infty} \left| \sqrt[2m]{(b_{2m} - x)^{2m}} \right| = 1 - x$$

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[2m+1]{(b_{2m+1} - x)^{2m+1}} = 1 + x \;,$$

sono anche qui verificate le ipotesi del n. 1 e del n. 10 in tutto il piano. Per il n. 17 la stella di convergenza risulta costituita dei punti comuni ai due campi limitati dalle curve

$$|(1 - x)\,x| = 1, \qquad |(1 + x)\,x| = 1:$$

questi campi sono due cassinoidi aventi per fuochi, la prima, 0 ed 1, la seconda, 0 e -1. Fuori della stella di convergenza la serie non converge mai, perchè il suo termine generale non tende a zero.

30. Si consideri la serie

$$\sum (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})^n\, x^n.$$

È qui

$$\left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| = \left| 1 + x + \cdots + x^{n-1} \right| = \left| \frac{1 - x^n}{1 - x} \right|,$$

onde

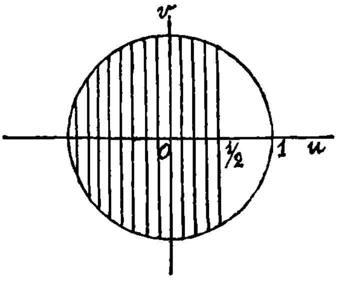
$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| = \frac{1}{|1 - x|}, \quad \text{se è} \quad |x| < 1.$$

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| \geqq \lim_{n=\infty} \frac{|x|^n - 1}{|1 - x|} = \infty, \quad \text{se è} \quad |x| > 1.$$

Ne segue, intanto, che, per $|x| > 1$, il termine generale della nostra serie tende all'infinito e la serie non converge. Per $|x| < 1$ risultano verificate le ipotesi del n. 1 e del n. 10. Il campo A coincide dunque col cerchio (0, 1), e la stella S di convergenza è data dall'insieme dei punti di tal cerchio che soddisfano alla condizione

$$|x| \frac{1}{|1 - x|} < 1 \quad \text{ossia} \quad |x| < |1 - x|.$$

Tale disuguaglianza conviene a tutti i punti del semipiano contenente l'origine che è limitato dall'asse del segmento di estremi 0 e 1. La stella S risulta perciò costituita della regione tratteggiata dalla qui unita figura. Fuori di questa stella la serie scritta non è mai convergente perchè il suo termine generale tende, per $n = \infty$, all'infinito (*).



31. Sia la serie

$$\sum \frac{x^n}{(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})^n}.$$

È qui

$$a_n = \frac{1}{(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})^n}$$

(*) La stella di convergenza assoluta ed uniforme qui determinata risulta così più ampia di quella trovata dal Dell'Agnola (p. 243, Mem. citata).

e questa funzione ha dei poli nei punti che dànno le radici ennesime dell'unità, eccettuato 1. Il campo A non potrà, per questo, uscire dal cerchio di centro l'origine e raggio uno.

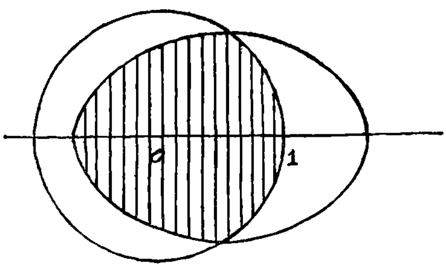
In questo cerchio è poi

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| = \lim_{n=\infty} \frac{1}{|1 + x + \cdots + x^{n-1}|} = |1 - x|,$$

onde sono in esso verificate le ipotesi dei nn. 1 e 8. La stella S risulta così costituita dei punti interni al cerchio (0, 1) ed alla curva definita dall'equazione

$$|x(1 - x)| = 1,$$

curva che è una cassinoide, di fuochi 0 ed 1. Nei punti interni al cerchio ed esterni alla cassinoide la nostra serie non converge, perchè il suo termine generale tende, per $n = \infty$, all'infinito. Nei punti della circonferenza interni alla cassinoide la serie non può venire considerata, perchè essi sono poli di infiniti termini della serie stessa, oppure punti limiti di tali poli. Fuori del cerchio (0, 1) la serie considerata converge ancora, ed uniformemente in ogni campo completamente esterno al cerchio: ciò perchè è, per $|x| > 1$,



$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| \leq \lim_{n=\infty} \frac{|1 - x|}{|x^n| - 1} = 0.$$

Ne segue che anche in tutta la porzione del piano esterna al cerchio (0, 1) la serie studiata rappresenta una funzione analitica: questa, però, non sarà quella rappresentata dalla medesima serie nella stella S.

32. Consideriamo infine la serie

$$\sum a_n(x)\, x^n$$

dove è

$$a_n(x) = (x - \alpha_0)(x - \beta_0)(x - \alpha_1)(x - \beta_1) \cdots (x - \alpha_n)(x - \beta_n)$$

con

$$\lim_{m=\infty} \alpha_{2m} = 1, \qquad \lim_{m=\infty} \beta_{2m} = -1$$

$$\lim_{m=\infty} \alpha_{2m+1} = i, \qquad \lim_{m=\infty} \beta_{2m+1} = -i.$$

Qui le $a_n(x)$ sono funzioni analitiche, regolari in tutto il piano complesso e si ha

$$\frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)} = (x - \alpha_n)(x - \beta_n).$$

Quindi in tutto il piano complesso è

$$\lim_{m=\infty} \frac{a_{2m}(x)}{a_{2m-1}(x)} = \lim_{m=\infty} (x - \alpha_{2m})(x - \beta_{2m}) = (x-1)(x+1),$$

$$\lim_{m=\infty} \frac{a_{2m+1}(x)}{a_{2m}(x)} = \lim_{m=\infty} (x - \alpha_{2m+1})(x - \beta_{2m+1}) = (x-i)(x+i),$$

la convergenza essendo uniforme in ogni parte finita del piano; nella quale, perciò, è, per ogni $n > \bar{n}$,

$$\left| \frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)} \right| < M$$

dove M è un numero positivo opportunamente scelto. Sono, dunque, in tutto il piano complesso verificate le condizioni del n. 11, e la stella di convergenza assoluta ed uniforme per la nostra serie è data dalla parte comune alle due aree limitate dalle curve

$$|x(x-1)(x+1)| = 1$$

$$|x(x-i)(x+i)| = 1.$$

Infatti nell'interno di questa parte comune è

$$|x| \,.\, \text{Mass. lim.} \left| \frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)} \right| < 1.$$

Fuori di quest'area è, invece,

$$|x| \; \text{Mass. lim.} \left| \frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)} \right| > 1;$$

quindi fuori della stella di convergenza la serie considerata non è mai convergente.

Studii sulle equazioni differenziali lineari in relazione ai loro integrali normali, pel caso di alcune equazioni del 2.° ordine. Polinomii integrali.

(*Del Prof.* Ulisse Dini, *a Pisa.*)

1. Nella Memoria pubblicata nel Tomo XVII di questi *Annali*, che è seguito di altre pubblicate nei volumi anteriori e relative tutte alle equazioni differenziali lineari, abbiamo fatte considerazioni speciali sugli integrali normali di queste equazioni, con particolare riguardo al caso di quelle del second'ordine; e noi le applicheremo ora ad alcune classi speciali di queste equazioni.

Consideriamo perciò una equazione

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0 \tag{1}$$

nella quale supporremo senz'altro che per x reale fra a e b (a e b incl.) i coefficienti siano finiti e continui *insieme alle loro derivate di qualunque ordine*, e come nella Memoria precedente si abbia $a_2 = g\,\varphi(z) + l$; e per semplicizzare i nostri studii supporremo anche senz'altro che, partendo da un valore particolare reale o complesso α di x (pel quale poi prenderemo quello reale che avremo da considerare fra a e b (a e b incl.)) e facendo prendere ad x i valori reali e complessi nell'intorno di α, i coefficienti a_0, a_1 e a_2 siano funzioni olomorfe di x in un intorno finito o infinito di questo punto α. E sotto queste ipotesi daremo per prima cosa alcuni casi nei quali siamo sicuri che per infiniti valori di z la nostra equazione ammette per integrali polinomii razionali interi in x quand'anche a_0 divenga infinitesimo in uno o più punti x fra a e b (a e b incl.).

Derivando m volte questa equazione colla regola di Leibnitz si ottiene la formola seguente

$$\left.\begin{aligned} &a_0\, y^{(m+2)} + (m_1\, a'_0 + a_1)\, y^{(m+1)} + (m_2\, a''_0 + m_1\, a'_1 + a_2)\, y^{(m)} + \cdots + \\ &\quad + (m_h\, a_0^{(h)} + m_{h-1}\, a_1^{(h-1)} + m_{h-2}\, a_2^{(h-2)})\, y^{(m-h+2)} + \cdots + \\ &\quad + (m_m\, a_0^{(m)} + m_{m-1}\, a_1^{(m-1)} + m_{m-2}\, a_2^{(m-2)})\, y'' + \\ &\quad + (m_m\, a_1^{(m)} + m_{m-1}\, a_2^{(m-1)})\, y' + a_2^{(m)}\, y = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

indicando al solito con m_s i coefficienti binomiali; e facendovi $x = \alpha$, essendo α quel valore qualsiasi al quale accennavamo sopra, avremo formole che il più spesso varranno a determinare successivamente i valori per $x = \alpha$ della funzione y e delle sue derivate tranne tutt'al più quelli di due fra esse; e con queste avremo un integrale della equazione (1) per mezzo della serie di Cauchy $\sum \frac{y_\alpha^{(n)}}{\pi(n)} (x - \alpha)^n$, quando questa serie risulti convergente in tutto il piano dei valori reali e complessi di x o anche soltanto entro un certo cerchio di convergenza (*).

2. Le formule (2) però che dànno queste quantità successivamente risultano molto complicate se col farvi $x = \alpha$ ci restano parecchi termini; ma qui, in vista delle applicazioni che poi vogliamo fare alle equazioni del second'ordine più interessanti, senza affatto richiedere che a_0 sia diverso da zero per $x = \alpha$, ci limiteremo a considerare quelle equazioni che portano al caso più semplice; il caso cioè in cui qualunque sia m, da un certo valore m_0 in poi (che potrà anche essere lo zero), non restano al più nelle formole (2) altro che due termini successivi o, anche più generalmente, due termini sempre equidistanti fra loro, per es. i due corrispondenti a $y^{(m+2-h)}$ e $y^{(m+2-h-p)}$ con h e p interi e $h \geqq 0$ e $p \geqq 1$.

Allora, per qualunque valore intero di m uguale o superiore a m_0, per

---

(*) Che la serie $\sum \frac{y_\alpha^{(n)}}{\pi(n)} (x - \alpha)^n$ venga ad essere un integrale della equazione (1) risulta subito dall'osservare che, essendo per le nostre ipotesi le a_0, a_1 e a_2 funzioni olomorfe di x intorno al punto α, la funzione $a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y$ nella quale sia $y = \sum \frac{y_\alpha^{(n)}}{\pi(n)} (x - \alpha)^n$ sarà essa pure olomorfa in un certo intorno di α, e quindi sarà sviluppabile anch'essa in serie di Cauchy; e poichè pel modo di determinazione delle $y_\alpha^{(n)}$ la funzione stessa $a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y$ risulterà zero nel punto α insieme alle sue derivate di tutti gli ordini, così essa sarà sempre zero e quindi la nostra funzione y sarà un integrale della equazione (1) in un certo intorno di α che sarà il cerchio di centro α nel quale si mantengono simultaneamente olomorfe a_0, a_1, a_2 e y.

$x = \alpha$ avremo la formola

$$\left.\begin{aligned}(m_h\, a_0^{(h)} + m_{h-1}\, a_1^{(h-1)} + m_{h-2}\, a_2^{(h-2)})\, y_\alpha^{(m+2-h)} = \\ = -(m_{h+p}\, a_0^{(h+p)} + m_{h+p-1}\, a_1^{(h+p-1)} + m_{h+p-2}\, a_2^{(h+p-2)})\, y_\alpha^{(m+2-h-p)},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

per avere la quale basterà supporre, come appunto faremo, che per $x = \alpha$ siano zero tutte le derivate di a_0, a_1 e a_2 all'infuori *tutt'al più* di quelle degli ordini h e $h + p$ per a_0, $h - 1$ e $h + p - 1$ per a_1 e $h - 2$ e $h + p - 2$ per a_2, per le quali però ammetteremo che non siano contemporaneamente zero le tre $a_0^{(h)}$, $a_1^{(h-1)}$ e $a_2^{(h-2)}$, nè le tre $a_0^{(h+p)}$, $a_1^{(h+p-1)}$ e $a_2^{(h+p-2)}$; e intendendo sempre che al posto dei coefficienti binomiali con indici negativi, come per le derivate d'ordine negativo che si presentassero nelle nostre formole, debba essere messo lo zero.

3. Con queste ipotesi verremo a limitare le nostre considerazioni alle equazioni per le quali a_0, a_1 e a_2 sono della forma seguente

$$\left.\begin{aligned}a_0 &= (x-\alpha)^h \{A_0 + B_0 (x-\alpha)^p\}, \\ a_1 &= (x-\alpha)^{h-1} \{A_1 + B_1 (x-\alpha)^p\}, \\ a_2 &= (x-\alpha)^{h-2} \{A_2 + A'_2\, \varphi(z) + (B_2 + B'_2\, \varphi(z))\, (x-\alpha)^p\},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dove le varie quantità A e B sono costanti qualsiansi, alcune delle quali (ma non le A_0 e B_0 insieme nè le A'_2 e B'_2 insieme) possono anche essere zero; e poichè può escludersi il caso in cui la equazione data fosse tutta divisibile per $x - \alpha$, così evidentemente basterà limitarsi a considerare i tre casi di $h = 0$, $h = 1$ e $h = 2$, restando sempre p un numero intero e positivo qualsiasi, e intendendo, — onde a_0, a_1 e a_2 non siano infiniti per $x = \alpha$ —, che quando $h = 0$ debba essere $A_1 = A_2 = A'_2 = 0$ con A_0 diverso da zero e $p \geqq 2$, e quando $h = 1$ debba essere $A_2 = A'_2 = 0$ e $p \geqq 1$ senza che siano zero insieme A_0 e A_1, e quando $h = 2$ non debbano essere zero insieme A_2 e A'_2; e tutto questo quando si faccia astrazione dal caso in cui si considerino valori speciali di z pei quali venga ad annullarsi il fattore $A_2 + A'_2\, \varphi(z)$ in z che moltiplica $(x-\alpha)^{h-2}$ in a_2.

4. Supponendo dunque che queste condizioni siano soddisfatte, e cambiando per comodo nelle (3) m in $m + m_0$ e facendo $k = m_0 + 2 - (h + p)$, si vede che questo numero intero k dovrà essere zero o positivo, e quando nella (3) stessa il coefficiente di $y_\alpha^{(m+m_0+2-h)}$ o $y_\alpha^{(m+k+p)}$, che ora a causa delle (4) diviene

$$(m+m_0)_h\pi(h)A_0+(m+m_0)_{h-1}\pi(h-1)A_1+(m+m_0)_{h-2}\pi(h-2)(A_2+A'_2\varphi(z)), \tag{5}$$

non sarà zero, avremo la formola

$$\left.\begin{array}{c} y_\alpha^{(m+k+p)} = - \\ -\dfrac{(m+m_0)_{h+p}\pi(h+p)B_0+(m+m_0)_{h+p-1}\pi(h+p-1)B_1+(m+m_0)_{h+p-2}\pi(h+p-2)(B_2+B'_2\varphi(z))}{(m+m_0)_h\pi(h)A_0+(m+m_0)_{h-1}\pi(h-1)A_1+(m+m_0)_{h-2}\pi(h-2)(A_2+A'_2\varphi(z))}\, y_\alpha^{(m+k)} \end{array}\right\} \quad (6)$$

per tutti i valori zero o interi e positivi di m; e quindi ammettendo che per nessuno di questi valori di m la espressione (5) sia zero, questa formola esprimerà le derivate nel punto α di un ordine qualsiasi uguale o superiore a $k+p$ per quelle che sono di un ordine inferiore per un multipo di p ma non inferiore a k; e se una di queste derivate, ad es. quella dell'ordine $i\ (\geqq k)$, sarà zero, lo stesso accadrà di tutte le derivate seguenti il cui ordine è superiore ad i per un multiplo di p.

Nel supposto dunque che, per mezzo delle m_0 equazioni che si hanno dalla (3) per $m=0, 1, 2,\ldots, m_0-1$ quando $m_0 \geqq 1$, i valori di $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha,\ldots, y_\alpha^{(k+p-1)}$ (o y^{m_0+1-h}) si siano potuti determinare tutti, all'infuori tutt'al più di uno o di due che potranno restare arbitrarii, e non siano venuti tutti uguali a zero, prendendo la serie $\sum \dfrac{y_\alpha^{(n)}}{\pi(n)}(x-\alpha)^n$ che dovrà rappresentare l'integrale e considerandola a partire dal termine corrispondente a $n=k$, si vede che se $p=1$ questa serie si ridurrà a un polinomio di grado $i-1$ al più quando si trovi una derivata $y_\alpha^{(i)}$ con $i \geqq k$ che sia zero, e se $p \geqq 2$ la serie stessa potremo considerarla spezzata nelle p serie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y_\alpha^{(k+np)}}{\pi(k+np)}(x-\alpha)^{k+np},\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y_\alpha^{(k+1+np)}}{\pi(k+1+np)}(x-\alpha)^{k+1+np},\ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y_\alpha^{(k+p-1+np)}}{\pi(k+p-1+np)}(x-\alpha)^{k+p-1+np},$$

una o più delle quali potranno anche ridursi a polinomii.

5. Per quelle quindi fra queste serie che non si ridurranno a polinomii, il rapporto di un termine al precedente tanto nel caso dell'unica serie che si avrà quando $p=1$, quanto per una qualsiasi delle precedenti quando $p \geqq 2$, rientrerà sempre nella forma $\dfrac{y_\alpha^{(m+k+p)}}{y_\alpha^{(m+k)}}\ \dfrac{\pi(m+k)}{\pi(m+k+p)}(x-\alpha)^p$, ovvero per la (6)

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{(m+m_0)_{h+p}\pi(h+p)B_0+(m+m_0)_{h+p-1}\pi(h+p-1)B_1+(m+m_0)_{h+p-2}\pi(h+p-2)(B_2+B'_2\varphi(z))}{(m+m_0)_h\pi(h)A_0+(m+m_0)_{h-1}\pi(h-1)A_1+(m+m_0)_{h-2}\pi(h-2)(A_2+A'_2\varphi(z))} \times \\ \times \dfrac{(x-\alpha)^p}{(m+k+1)(m+k+2)\ldots(m+k+p)} \end{array}\right\} \quad (7)$$

quindi, tralasciando il caso di $A_0 = 0$ quando le serie non si riducono a polinomii (perchè se fosse $A_0 = 0$ non potendo essere contemporaneamente $B_0 = 0$, e neppure potendo aversi $h = 0$ perchè allora i denominatori sarebbero tutti zero, questo rapporto crescerebbe all'infinito con m), si vede che negli altri casi esso o tende a zero qualunque sia x o si riduce alla forma $\left(1+\frac{p_m}{m}\right)\left(\frac{x-\alpha}{r}\right)^p$ essendo p_m un numero che al crescere indefinito di m non supera mai un numero finito, e essendo r un numero finito diverso da zero che potrà facilmente trovarsi cercando il limite per $m = \infty$ del rapporto precedente; quindi tutte le serie medesime quando A_0 non è zero sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini in tutto il piano delle x, o almeno dentro un certo cerchio di raggio r diverso da zero e col centro in α.

Quando dunque si abbia una equazione (1), nella quale a_0, a_1 e a_2 siano date dalle (4) e in queste le varie costanti A e B soddisfino alle condizioni che furono poste sopra a seconda dei valori che si avranno per h e p, se le m_0 equazioni che si hanno dalla (2) per $m = 0, 1, 2, \ldots, m_0 - 1$ quando $m_0 \geqq 1$ determineranno i valori delle $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \ldots, y_\alpha^{(k+p-1)}$ (o $y_\alpha^{(m_0+1-h)}$) all'infuori tutt'al più di una o due di esse che potranno rimanere arbitrarie, e questi valori non risulteranno tutti eguali a zero, allora per la osservazione che ora abbiamo fatta intorno al rapporto (7) si può affermare che la espressione corrispondente $\sum \frac{y_\alpha^{(n)}}{\pi(n)}(x-\alpha)^n$ rappresenterà sempre un integrale (particolare o generale) della equazione stessa (1) in tutto il piano o almeno entro un certo cerchio di raggio r diverso da zero e col centro in α quando non sia $A_0 = 0$; mentre quando sia $A_0 = 0$ lo rappresenterà soltanto nel caso che la espressione stessa si riduca ad un polinomio.

E tutto questo, ben inteso, nel supposto che la espressione (5) non risulti mai zero pei valori zero o interi e positivi di m; che se la stessa espressione risultasse zero per un valore speciale m_1 di m o per due m_1 e m_2 con $m_2 > m_1$ (*), bisognerebbe cambiare m_0 in $m_0 + m_1 + 1$ nel primo caso e in $m_0 + m_2 + 1$ nel secondo.

6. E quando la espressione $\sum \frac{y_\alpha^{(n)}}{\pi(n)}(x-\alpha)^n$ che rappresenta l'integrale sia effettivamente una serie e il suo cerchio di convergenza abbia un raggio

(*) Naturalmente, sia perchè $h \leqq 2$, sia per la forma che ha l'espressione (5), questa non può annullarsi per più di due valori di m se, come appunto si esclude, A_0, A_1, A_2 e A'_2 non sono tutti zero.

finito r, allora, per un teorema noto (V. § 4 della mia Memoria del Vol. XII di questi *Annali*), i moduli dell'integrale stesso o almeno quelli delle sue derivate (che si otterranno sempre colla derivazione per serie), a partire da quelle di un certo ordine, coll'avvicinarsi indefinitamente al cerchio di convergenza finiranno per prendere anche valori grandi quanto si vuole; mentre inversamente i suoi integrali successivi fra due punti *interni* del cerchio di convergenza, per es. da α ad x, si otterranno essi pure colla integrazione per serie, e dopo un conveniente numero d'integrazioni condurranno sempre ad una serie che sarà certamente convergente indipendentemente dall'ordine dei termini *anche al contorno del cerchio di convergenza;* e conseguentemente alla serie che allora si troverà si potrà applicare la integrazione termine a termine da α ad x *anche quando* x *sia al contorno.*

7. Avendo poi riguardo ai valori particolari che il numero da noi indicato con m_0 potrà avere nei singoli casi, osserviamo che dovendo essere sempre k o $m_0+2-h-p$ un numero positivo o nullo, e dovendo essere soddisfatte le condizioni poste sopra, si vede subito che se $m_0=0$ potremo supporre soltanto $h=0$ con $p=2$, o $h=1$ con $p=1$; e nel primo di questi due casi la equazione (1) da considerarsi verrà ad essere la seguente

$$\{A_0+B_0(x-\alpha)^2\}y''+B_1(x-\alpha)y'+\{B_2+B'_2\varphi(z)\}y=0 \tag{8}$$

con A_0 e B'_2 diverse da zero; e B_0, B_1 e B_2 costanti qualsiansi; e in questo caso restando indeterminate y_α e y'_α l'integrale trovato sopra verrà ad essere l'integrale generele.

Nel secondo caso poi di $h=1$ con $p=1$, la equazione stessa (1) si ridurrà alla seguente

$$(x-\alpha)\{A_0+B_0(x-\alpha)\}y''+\{A_1+B_1(x-\alpha)\}y'+\{B_2+B'_2\varphi(z)\}y=0 \tag{9}$$

nella quale B'_2 dovrà ancora essere diversa da zero, e A_0 non potrà essere zero altro che nel caso che l'integrale si riduca ad un polinomio, come, volendo mantenere l'ipotesi che si cominci da $m_0=0$, non potrà essere un numero intero e negativo il rapporto $\frac{A_1}{A_0}$, onde non si annulli mai la espressione corrispondente (5). E neppure potrà essere $A_1=0$ a meno che z non abbia un valore particolare pel quale $B_2+B'_2\varphi(z)$ sia zero, perchè altrimenti non si potrebbe avere un integrale olomorfo nell'intorno di $x=\alpha$, altro che con $y_\alpha=0$ e l'integrale risulterebbe sempre zero. Per questa equazione poi, non restandovi d'indeterminato altro che una delle due quantità y_α e y'_α, l'integrale trovato sopra sarà soltanto un integrale particolare.

Similmente supponendo $m_0 = 1$, si vede che i soli casi *distinti dai precedenti* che possono considerarsi sono quello di $h = 0$ e $p = 3$, che corrisponde alla equazione

$$\{ A_0 + B_0 (x - \alpha)^3 \} y'' + B_1 (x - \alpha)^2 y' + \{ B_2 + B'_2 \varphi (z) \} (x - \alpha) y = 0 \quad (10)$$

con A_0 e B'_2 diversi da zero, e quello di $h = 1$ e $p = 2$ che corrisponde all'altra

$$(x - \alpha) \{ A_0 + B_0 (x - \alpha)^2 \} y'' + \{ A_1 + B_1 (x - \alpha)^2 \} y' + \{ B_2 + B'_2 \varphi (z) \} y = 0, \quad (11)$$

non essendo da considerare il caso di $h = 2$ con $p = 1$ che non darebbe luogo a un integrale olomorfo diverso da zero altro che quando fosse $A_2 + A'_2 \varphi (z) = 0$; e intendendo nel caso di questa equazione (11), come già nel caso della (9), che non sia $A_0 = 0$ altro che quando l'integrale si riduca ad un polinomio, e il rapporto $\frac{A_1}{A_0}$, se si vuole tenere ferma l'ipotesi di $m_0 = 1$, non sia un numero intero e negativo.

E di queste equazioni (10) e (11) l'integrale che si trova per la prima è generale e in essa mancano tutti i termini con esponenti della forma $3i - 1$ perchè $y''_\alpha = 0$, mentre per la seconda si ha soltanto un integrale particolare perchè non vi resta d'indeterminata altro che una delle due quantità y_α e y'_α.

Così si potrebbero considerare i casi di $m_0 = 2$, $m_0 = 3$, ecc.

8. Osserviamo ora che negli integrali che abbiamo trovato per le equazioni che consideriamo, i coefficienti che figurano in $y^{(n)}_\alpha$ a causa della (6) saranno tutti funzioni razionali di $\varphi (z)$; e se, come d'ora innanzi *ammetteremo che sempre debba essere*, i denominatori non conterranno z, ciò che avverrà quando sia $h = 0$ o $h = 1$ o quando potendo essere $h = 2$ sarà $A'_2 = 0$ senza che sia $B'_2 = 0$, allora gli stessi coefficienti saranno anche funzioni intere di $\varphi (z)$.

E se per valori particolari di z o di una o più delle quantità y_α, $y'_\alpha, \ldots$, $y^{(k+p-1)}$ uno dei detti coefficienti si annullerà, allora (come già notammo) lo stesso avverrà di tutti i coefficienti seguenti di p in p nel medesimo integrale.

In particolare dunque limitandoci sempre d'ora innanzi al caso delle *equazioni per le quali o si ha $p = 1$, o se $p \geq 2$ esse sono tali che per valori particolari dati a y_α o a y'_α vengono ad avere integrali particolari nei quali le potenze di $x - \alpha$ procedono di p in p,* è certo che per tutti quei valori particolari di z pei quali un termine verrà ad annullarsi si annulleranno pure tutti i termini seguenti e l'integrale si ridurrà ad un polinomio razionale intero in $x-\alpha$.

Ora, avendo riguardo alla formola (6) si vede che questi valori speciali di z o di $\varphi(z)$ saranno quelli pei quali si avrà

$$\left.\begin{array}{l}(m+m_0)_{h+p}\,\pi(h+p)\,B_0+(m+m_0)_{h+p-1}\,\pi(h+p-1)\,B_1+\\ \quad+(m+m_0)_{h+p-2}\,\pi(h+p-2)\,(B_2+B'_2\,\varphi(z))=0,\end{array}\right\}\quad(12)$$

e poichè le nostre ipotesi sulle (4) escludono il caso di $h+p-2$ negativo, così *ammettendo che B_0 e B_1 non siano entrambi zero e B'_2 sia diverso da zero,* è certo che *per ogni valore di m* vi saranno questi valori speciali di $\varphi(z)$ o di z e saranno quelli che soddisfano alla equazione

$$\begin{array}{l}(m+m_0+2-h-p)\,(m+m_0+1-h-p)\,B_0+\\ \quad+(m+m_0+2-h-p)\,B_1+B_2+B'_2\,\varphi(z)=0\end{array}$$

ovvero, ricordando che ponemmo $m_0+2-h-p=k$,

$$(m+k)\,(m+k-1)\,B_0+(m+k)\,B_1+B_2+B'_2\,\varphi(z)=0;\qquad(13)$$

e per questi valori speciali di $\varphi(z)$ o di z i coefficienti dell'integrale si annulleranno tutti a incominciare da quello del termine di grado $m+k+p$ (o $m+m_0+2-h$) e quindi l'integrale si ridurrà ad un polinomio che sarà al più di grado $m+k$ (o $m+m_0+2-h-p$) in $x-\alpha$.

9. Questi integrali speciali la cui esistenza per le equazioni e nei casi ora indicati viene assicurata si diranno *polinomii integrali.*

Ed è da notare che quando B_0 e B_1, contrariamente a quanto abbiamo supposto, fossero zero insieme senza che lo fosse B'_2, i polinomii integrali si ridurrebbero a uno solo, cioè a quello corrispondente ai valori di z pei quali fosse $B_2+B'_2\,\varphi(z)=0$, come nel caso in cui fosse $B'_2=0$ si ridurrebbero a quelli corrispondenti ai valori interi e positivi di m (zero incluso) che rendessero soddisfatta la espressione

$$(m+k)\,(m+k-1)\,B_0+(m+k)\,B_1+B_2=0,$$

che non sarebbero mai più di due e potrebbero anche non esserci; e noi, riservandoci di occuparci in seguito di questi casi, li intenderemo per ora sempre esclusi, volendo dapprima considerare soltanto equazioni che possono avere un numero infinito di polinomii integrali.

10. Ammesso questo, osserviamo anche che quando vi fossero due valori distinti m e m_1 di m che colla (13) conducessero allo stesso valore di $\varphi(z)$, dovremmo avere evidentemente

$$(m+k)\{(m+k)-1\}B_0+(m+k)B_1=$$
$$=(m_1+k)\{(m_1+k)-1\}B_0+(m_1+k)B_1$$

ovvero, riducendo, $(m+m_1+2k-1)B_0+B_1=0$, e il coefficiente $m+m_1+2k-1$ non potrebbe essere negativo; si dedurrà di qui che i due suddetti valori distinti di m e m_1 non potranno aversi altro che quando B_0 sia diverso da zero e al tempo stesso il rapporto $\frac{B_1}{B_0}$ sia un numero intero o negativo o nullo $-q$, e purchè in corrispondenza al valore intero positivo o nullo m si abbia un altro numero diverso da m ma esso pure intero e positivo o nullo m_1 che differisca da m per un multiplo intero di p e pel quale si abbia $m+m_1=q+1-2k$; e questo richiederà che il secondo membro τ di questa formola, cioè il numero $q+1-2k$ sia diverso da zero e positivo e che togliendovi $2m$ divenga un multiplo intero di p. E in questo caso il grado del polinomio integrale sarà precisamente $m+k$ se m è il più piccolo dei due numeri m_1 e m, e il polinomio integrale di grado m_1+k verrà a mancare, per modo che si può anche affermare che per ogni valore di $\varphi(z)$ che dà luogo a polinomii integrali non si ha che un polinomio integrale di grado uguale o superiore a k.

Dovendo poi essere $m+m_1=\tau$, e supponendosi τ diverso da zero e positivo, non solo si vede subito che per m superiore a τ non vi sarà più nessun valore m_1 di m che condurrà allo stesso valore di $\varphi(z)$, ma si vede anche che i soli casi possibili di coppie di valori di m e m_1 che conducono agli stessi valori di $\varphi(z)$ saranno al più $\frac{\tau}{2}$ o $\frac{\tau+1}{2}$ secondochè τ è pari o dispari e corrisponderanno al più alle seguenti $\frac{\tau}{2}$ o $\frac{\tau+1}{2}$ coppie di valori $m=0$ con $m_1=\tau$, $m=1$ con $m_1=\tau-1$, $m=2$ con $m_1=\tau-2,\ldots$; e infine $m=\frac{\tau}{2}-1$ con $m_1=\frac{\tau}{2}+1$ per τ pari e $m=\frac{\tau-1}{2}$ con $m_1=\frac{\tau+1}{2}$ per τ dispari, ma se $p\geqq 2$ fra queste coppie di valori di m e m_1 bisognerà escludere tutte quelle per le quali la differenza m_1-m non è un multiplo intero di p, mentre se $p=1$ tutte queste coppie di valori di m e m_1 saranno possibili.

E così in particolare se $p = 1$, sempre nel supposto che τ sia diverso da zero e positivo, avremo polinomii integrali *di tutti i gradi* ma soltanto a incominciare da quello corrispondente a $m = \tau + 1$ cioè da quello di grado $\tau + 1 + k$ o $q + h + p - m_0$, perchè fra quelli di grado inferiore a $\tau + 1$ verranno a mancare quelli corrispondenti a $m = \frac{\tau}{2} + 1$, $m = \frac{\tau}{2} + 2, \ldots, m = \tau$ quando τ è pari e quelli corrispondenti a $m = \frac{\tau + 1}{2}$, $m = \frac{\tau + 1}{2} + 1, \ldots,$ $m = \tau$ quando τ è dispari.

11. Ciò premesso, prendiamo — nel cerchio di convergenza della serie integrale $\Sigma \frac{y_\alpha^{(n)}}{\pi(n)}(x - \alpha)^n$ che si considera — un intervallo reale (a, b) che con uno o tutti e due i suoi estremi a e b potrà anche terminare al cerchio di convergenza, e supponendo che a questo intervallo appartenga il punto α, indichiamo con P_i gli infiniti polinomii integrali della equazione data

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

dei quali abbiamo dimostrata la esistenza quando, come sempre supponiamo, i coefficienti a_0, a_1 e a_2 e i numeri p e h soddisfano alle varie condizioni che successivamente abbiamo poste, intendendo che i sia il grado dei polinomii medesimi, e ponendo senz'altro anche la limitazione che l'integrale y o $\Sigma \frac{y_\alpha^{(n)}}{\pi(n)}(x - \alpha)^n$ per qualsiasi valore di z *non possa avere che* i termini corrispondenti ai gradi dei varii polinomii integrali P_i.

Indicando poi con X la solita nostra funzione delle Memorie precedenti, continua o no nello stesso intervallo (a, b), ma sempre finita e atta alla integrazione, supponiamo di avere verificato che *per ciascuno dei polinomii integrali P_i, coll'intervallo speciale (a, b) che è stato scelto*, si abbia $\int_a^b \Theta_c X P_i \, dx = 0$, essendo Θ_c la solita quantità $\frac{1}{a_0} e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0} dx}$ relativa alla equazione data, con c numero scelto a piacere fra a e b; e nel supposto che questa quantità Θ_c anche se diventa infinita fra a e b (per es. per $x = \alpha$ quando a_0 si annulli per questo valore di x) sia atta alla integrazione, e si mantenga tale anche moltiplicandola per $X P_i$.

Allora evidentemente considerando i successivi polinomii integrali P_i corrispondenti ai valori che successivamente potrà avere i, che differiranno l'uno dall'altro per multipli di p, e ammettendo ora che di questi polinomii non ne manchi nessuno (*), si vede subito che sarà $\int_a^b \Theta_c X (x-\alpha)^i dx = 0$ *per tutti i detti valori di i;* e poichè per le nostre ipotesi i varii termini dello sviluppo in serie dell'integrale y che si considera, per qualsiasi valore di z non possono avere per esponenti di $x-\alpha$ altro che i varii valori di i ora indicati, si potrà conchiudere rigorosamente che anche per l'integrale y sarà $\int_a^b \Theta_c X y\, dx = 0$ per qualunque valore di z quando i punti estremi a e b di quell'intervallo pel quale si hanno le condizioni precedenti $\int_a^b \Theta_c X P_i\, dx = 0$ siano *interni* al cerchio di convergenza relativo all'integrale y; e, per quanto si disse al § 6, quando uno o tutti e due questi estremi a e b siano sul cerchio, questa conclusione potrà trarsi ancora, ma soltanto nel caso che la serie che rappresenta l'integrale y sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini anche sul cerchio.

12. E così quando saremo nel caso, in cui, per essere rimaste indeterminate y_α e y'_α nel nostro integrale y, si avranno due integrali distinti y_1 e y_2 che considerati insieme conducano all'integrale generale y, basterà che la suddetta condizione $\int_a^b \Theta_c X P_i\, dx = 0$ sia soddisfatta per tutti i polinomii integrali per poter dire che si avranno altresì le altre $\int_a^b \Theta_c X y_1\, dx = 0$, $\int_a^b \Theta_c X y_2\, dx = 0$ e $\int_a^b \Theta_c X y\, dx = 0$ qualunque sia z quando i punti a e b sono

(*) S'intende dire con questo che se P_j è il primo polinomio integrale (cioè quello di grado più basso), gli altri siano P_{j+p}, P_{j+2p}, $P_{j+3p}, \ldots$, e di questi nessuno manchi. E per la ipotesi fatta che l'integrale y per qualsiasi valore di z non possa avere che i termini corrispondenti ai gradi dei varii polinomii integrali, se sarà $j > 0$ nessuno di questi polinomii potrà contenere potenze di $x-\alpha$ di grado inferiore ad j. come non può contenerne alcuna che non sia della forma $(x-\alpha)^{j+kp}$ con k numero intero.

interni al cerchio di convergenza; e lo stesso avverrà anche se uno o tutti e due questi punti sono sul cerchio quando le serie che corrispondono a questi integrali saranno convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini anche sul cerchio.

D'altra parte, nel caso di a_0 finito e diverso da zero fra a e b (a e b incl.), se si suppone che per gli integrali y da considerarsi pei varii valori di z sia data la condizione $h_0 y + h_1 y' = 0$ al limite b, essendo data o no anche la condizione analoga pel limite a, pel fatto che ora è soddisfatta la equazione $\int_a^b \Theta_c X y \, dx = 0$ per qualunque valore di z e per qualunque integrale y della equazione data e quindi anche per quello che soddisfa alla condizione $h_0 y + h_1 y' = 0$ al limite b, resta assicurata la esistenza di un integrale normale della equazione completa $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = X$ che sia funzione intera di z (§ 36 della Mem. del Vol. XII di questi *Annali*); come nel caso che a_0 sia zero in uno o in tutti e due gli estremi a e b, sotto le condizioni indicate al principio del § 11 della Memoria precedente (*) resta pure assicurata la esistenza di un tale integrale; quindi, per gli studii generali della citata Mem. del Vol. XII (§ 43) e per quelli della Memoria precedente, si può ora senz'altro concludere che in questi casi l'essere soddisfatta la indicata condizione $\int_a^b \Theta_c X P_i \, dx = 0$ per tutti i polinomii P_i relativi alle equazioni ora considerate *porta di necessità che sia* $X = 0$, all'infuori di una funzione d'integrale nullo se X potrà essere anche discontinua.

13. Questo quando i polinomii integrali P_i della nostra equazione vi siano dei varii gradi ma soltanto di p in p, essendo p un determinato numero dato intero e positivo, che però potrà essere qualsiasi e quindi anche diverso da uno.

(*) Queste condizioni, nel caso che si abbiano i due integrali y_1 e y_2 e questi presentino le particolarità indicate sopra, si riducono a quella che gli integrali $\int \Theta_c X y_1 \, dx$ e $\int \Theta_c X y_2 \, dx$ oltre ad avere un significato (come già si ammette) quando siano estesi agli intorni dei punti a e b tendano a zero anche moltiplicati respettivamente per y_2 e y'_2 e per y_1 e y'_1 all'impiccolire indefinito di quegli intorni.

Se poi degli integrali y_1 e y_2 se ne ha uno solo bisogna trovare anche l'altro (ciò che potrà farsi coi processi noti) e assicurarsi che siano soddisfatte le condizioni *A*), *B*) e *C*) del § 11 della Memoria precedente.

Quando però per una data equazione questi polinomii integrali ***siano di tutti i gradi a incominciare da quello di grado zero***, e per un dato intervallo (a, b) siasi in qualche modo potuto assicurare che si ha la formola $\int_a^b \Theta_c X P_i dx = 0$ per tutti i polinomii medesimi e questo anche se Θ_c sarà infinita fra a e b purchè in tal caso resti atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti, allora è facile vedere che, indipendentemente da quello che sarà la equazione data, *si avrà sempre* $X = 0$ (all'infuori di una funzione d'integrale nullo) *per tutti i valori di x nell'intervallo* (a, b) pel quale si suppone che si abbia la formola precedente.

In questo caso infatti quando i polinomii integrali P_i saranno ordinati per potenze intere e positive di $x - \alpha$, nulla ci impedisce di ridurli invece ordinati per quelle di $x - \beta$ essendo β un numero qualsiasi, e questo porta evidentemente che per qualunque valore di β si abbia la formola

$$\int_a^b \Theta_c X (x - \beta)^i dx = 0$$

per tutti i valori interi e positivi di i ($i = 0$ incl.).

Presa ora una equazione qualsiasi

$$\alpha_0 \eta'' + \alpha_1 \eta' + \alpha_2 \eta = 0 \tag{14}$$

con $\alpha_2 = g_1 \varphi(z) + l_1$, nella quale i coefficienti α_0, α_1, g_1 e l_1, per semplicità li supporremo costanti con α_0 diverso da zero, il suo integrale generale si svilupperà in tutto il piano colla formola di Cauchy

$$\eta = \Sigma \frac{\eta_\beta^{(n)}}{\pi(n)} (x - \beta)^n$$

partendo dal punto β; e moltiplicando i due membri di questa formola per $\Theta_c X$ e integrando come potrà sempre farsi da a a b, a causa della formola precedente avremo evidentemente, qualunque sia z e *qualunque sia l'integrale* η, $\int_a^b \Theta_c X \eta \, dx = 0$.

Indicando poi con $\overline{\Theta}_c$ la quantità corrispondente alla Θ_c per la nuova equazione (14) che sarà $\frac{1}{\alpha_0} e^{\frac{\alpha_1}{\alpha_0}(x-c)}$, potremo scrivere la precedente sotto la forma $\int_a^b \Theta_c \frac{\Theta_c}{\Theta_c} X\eta\, dx = \alpha_0 \int_a^b \Theta_c \Theta_c e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}(x-c)} X\eta\, dx = 0$; e questa, pei teoremi generali della citata Memoria del Vol. XII (§ 43) applicati al caso della equazione (14), porterà che sia $\Theta_c e^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}(x-c)} X = 0$, e quindi anche come volevamo $X = 0$, sempre all'infuori di una funzione d'integrale nullo, per tutti i valori di x fra a e b, dovendo naturalmente intendere che questo sia anche per quei punti fra a e b (a e b incl.) nei quali per essere $a_0 = 0$ potrebbe essere $\Theta_c = 0$.

14. Osserviamo che siccome tutte le conclusioni degli ultimi due paragrafi si basano sulla formola $\int_a^b \Theta_c X (x-\alpha)^i\, dx = 0$ che viene a sussistere per tutti i valori interi e positivi di i ($i = 0$ incl.), che devono considerarsi, così nel caso delle equazioni che mancano dei polinomii integrali di alcuni gradi o anche di tutti, basterà assicurarsi in qualche modo della validità di quella formola anche per tutti quei valori di i pei quali occorre, mentre non si hanno i polinomii integrali dei gradi i corrispondenti.

E così ad es. quando si abbiano soltanto i polinomii integrali di grado pari P_0, P_2, P_4,..., e per essi si sappia che si ha $\int_a^b \Theta_c X P_{2i}\, dx = 0$, basterà in qualche modo assicurarsi che si ha anche la formola $\int_a^b \Theta_c X (x-\alpha)^{2k+1} dx = 0$ per gli infiniti valori 0, 1, 2, 3,... di k, per poter dire che continuano a sussistere tutti quelli fra i risultati precedenti la cui dimostrazione (come pei risultati del paragrafo precedente) fu fatta valendosi della formola $\int_a^b \Theta_c X (x-\alpha)^i\, dx = 0$ per tutti i valori interi e positivi di i e per $i = 0$.

Del resto, appunto perchè la dimostrazione del paragrafo precedente si basa tutta sulla formola $\int_a^b \Theta_c X (x-\beta)^i\, dx = 0$ alla quale ci ha condotto la considerazione dei polinomii integrali, così per le conclusioni alle quali allora si giunse si può fare del tutto astrazione anche da questi polinomii, ricadendo allora in un teorema noto (del quale si ha così una nuova dimostrazione); quello cioè che si enuncia col dire che quando per tutti i valori interi e positivi di i ($i=0$ incl.) si ha la formola $\int_a^b f(x)(x-\beta)^i\,dx=0$ nella quale per $f(x)$ si sa che è finita e atta alla integrazione fra a e b, dovrà essere $f(x)=0$ per tutti i valori di x fra a e b, facendo sempre astrazione da una funzione d'integrale nullo quando non è escluso che $f(x)$ possa essere discontinua fra a e b.

15. Applicheremo ora i risultati ottenuti ad alcune delle equazioni speciali del second'ordine che nei paragrafi precedenti abbiamo detto potersi considerare, mutando, ove faccia comodo, le notazioni; e incominceremo dalla seguente

$$(x-a)(b-x)y''+(\mu+\nu x)y'+\{g\varphi(z)+l\}y=0 \tag{15}$$

dove a, b, μ, ν, g e l sono costanti reali qualunque, e a è diverso da b ed è ad es. $a<b$, e $\varphi(z)$ è una funzione intera di z che volendo potrà mutarsi in z o in z^2.

Prendendo pel punto α dei paragrafi precedenti uno dei punti a e b, si vede che questa equazione non è altro che la (9) scritta con altre notazioni, e siamo quindi nel caso di $h=1$, $p=1$.

Conservando dunque le notazioni dei primi paragrafi che ora sono più comode, colle quali si ha $a_0=(x-a)(b-x)$, $a_1=\mu+\nu x$, $a_2=g\varphi(z)+l$, e ponendo per abbreviare $\frac{\mu+\nu a}{b-a}=q$, la formola (3) ci darà la seguente

$$(q+m)y_a^{(m+1)}=-\{a_2-m(m-1-\nu)\}\frac{y_a^{(m)}}{b-a}, \tag{16}$$

per tutti i valori di m a incominciare da $m=0$; e quindi, *quando q non sia zero nè un numero intero negativo,* l'integrale corrispondente sarà

$$y_a\left\{1+\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{\pi(n)}\frac{[a_2-1(0-\nu)][a_2-2(1-\nu)][a_2-3(2-\nu)]\ldots[a_n-(n-1)(n-2-\nu)]}{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n\right\}, \tag{17}$$

e quando è una serie avrà il cerchio di convergenza di raggio $b-a$ col centro in a.

16. Esso però si ridurrà a un polinomio P_n per quei valori di z pei quali si avrà $a_2 - n(n-1-\nu) = 0$, cioè per le equazioni della forma

$$(x-a)(b-x)\,y'' + (\mu + \nu x)\,y' + n(n-1-\nu)\,y = 0,$$

e per le quali il rapporto $\frac{\mu+\nu a}{b-a}$ non è zero nè un numero intero negativo; e questo polinomio sarà precisamente di grado n, salvo il caso che ci sia un altro valore n, zero o intero e positivo e inferiore ad n, pel quale collo stesso valore di z (o di a_2) si abbia $a_2 - n_1(n_1 - 1 - \nu) = 0$, nel qual caso invece di un polinomio integrale di grado n se ne avrà uno di grado nferiore n_1 corrispondente allo stesso valore di z o di $\varphi(z)$.

E poichè onde questo accada bisognerà che si abbia $n_1(n_1-1-\nu) = n(n-1-\nu)$ ovvero $n + n_1 = \nu + 1$, così questo caso non potrà presentarsi altro che *quando* ν *sia zero o un numero intero e positivo*, e allora si presenterà effettivamente. E difatti mentre allora non mancherà nessuno dei polinomii integrali di grado superiore a $\nu+1$, nel caso di ν zero o pari dopo trovati i polinomii integrali P_0, P_1, $P_2, \ldots$, $P_{\frac{\nu}{2}}$ verranno a mancare quelli dei gradi $\frac{\nu}{2}+1$, $\frac{\nu}{2}+2, \ldots$, $\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}+1 = \nu+1$ che corrisponderanno respettivamente a quelli già trovati scritti in ordine inverso, e nel caso di ν dispari dopo trovati P_0, P_1, $P_2, \ldots$, $P_{\frac{\nu+1}{2}}$ verranno a mancare quelli dei gradi $\frac{\nu+1}{2}+1$, $\frac{\nu+1}{2}+2, \ldots$, $\frac{\nu+1}{2}+\frac{\nu+1}{2} = \nu+1$, che corrisponderanno essi pure respettivamente a quelli già trovati che precedono $P_{\frac{\nu+1}{2}}$ scritti in ordine inverso. Però *per tutti gli altri valori positivi o negativi di* ν (esclusi quindi soltanto il valore zero e i valori interi e positivi di ν), e sotto la ipotesi che abbiamo fatta che q non sia zero nè un numero intero negativo, *i polinomii integrali vi saranno di tutti i gradi a incominciare da quello costante o di grado zero senza che ne manchi nessuno;* e tutto questo concorda con quello che dicemmo in generale al § 9.

17. Quando poi il numero q sia zero o intero e negativo, indicando con $-h$ questo valore di q, e supponendo dapprima che z non abbia valori che annullino i coefficienti di $y_a^{(m)}$ nella (16) per $m = 0, 1, 2, \ldots, h-1, h$, ba-

sterà fare $m = h$ nella (16) stessa per vedere subito che $y_a^{(h)}$ dovrà essere zero, e questo per le formule corrispondenti ai valori precedenti di m porterà che come $y_a^{(h)}$ anche y_a, y'_a, y''_a..., $y_a^{(h-1)}$ siano zero; mentre la stessa formola (16) pei valori seguenti $h+1$, $h+2$,... di m determinerà i valori successivi di $y_a^{(m)}$ all'infuori di $y_a^{(h+1)}$ che rimarrà indeterminato.

Giungeremo così a un integrale come il precedente, colla sola differenza che invece di incominciare dal termine di grado zero incomincierà da quello di grado $h+1$, e nei numeratori come nei denominatori dei singoli coefficienti saranno soppressi i primi $h+1$ fattori (cioè fino a quello che nel denominatore sarebbe zero) e sarà pure soppresso il divisore $(b-a)^{h+1}$; cioè per rappresentare l'integrale si avrà la espressione

$$y_a^{(h+1)}(x-a)^{h+1}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\pi(h+1)}+ \\ +\sum_1^\infty(-1)^n\dfrac{[a_2-(h+1)(h-\nu)][a_2-(h+2)(h+1-\nu)]\dots[a_2-(h+n)(h+n-1-\nu)]}{\pi(n)\pi(n+h+1)}\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n\end{array}\right\} \tag{18}$$

che si ridurrà a polinomii integrali nei soliti casi, cioè pei valori di z pei quali si annulli un fattore nei numeratori dei coefficienti dei varii termini.

18. Considerando poi anche i valori di z che sopra escludemmo, cioè quelli che per uno o due dei valori 0, 1, 2,..., $h-1$, h di m soddisfano alla condizione $a_2 - m(m-1-\nu) = 0$, e avendo riguardo alle formole che si hanno dalla (16) per gli stessi valori di m, si vede che per quei valori di z si avranno anche polinomii integrali dei gradi n inferiori a $h+1$, senza che cessi di aversi per gli stessi valori di z anche l'integrale (18); con questo però che, nel caso di $\nu = 0$ o ν intero e positivo, quando i numeri n e n_1 pei quali $n + n_1 = \nu + 1$ siano ambedue inferiori o ambedue superiori a $h+1$ mancheranno sempre i polinomii integrali di alcuni gradi, mentre se dei due valori n e n_1 uno sarà inferiore o uguale e l'altro uguale o superiore a $h+1$, allora vi saranno entrambi i polinomii integrali P_n e P_{n_1}. E così in particolare quando, essendo ν pari o zero, h sia uguale a $\frac{\nu}{2}$ o essendo ν dispari h sia uguale a $\frac{\nu-1}{2}$ o a $\frac{\nu+1}{2}$ dei polinomii integrali non ne mancherà nessuno.

È poi da notare (sempre per gli ultimi casi qui considerati di ν zero o numero intero e positivo, e q zero o numero intero e negativo $-h$), che *per certi valori di* z oltre all'integrale (18) avremo anche polinomii integrali di grado inferiore ad $h+1$, e quand'anche il medesimo integrale (18) per gli stessi valori di z si riduca esso pure ad un polinomio integrale (di grado uguale o superiore ad $h+1$) l'integrale stesso (18) sarà sempre distinto dal primo; e così in questo caso il detto polinomio integrale di grado inferiore ad $h+1$ e l'integrale (18) daranno due integrali distinti della equazione data e saranno ambedue senza singolarità nel punto a sebbene in questo punto si abbia $a_0 = 0$. Questi integrali condurranno dunque subito all'integrale generale.

19. Aggiungiamo che anche la serie (18), quando non si riduce a un polinomio integrale, avrà per cerchio di convergenza quello di centro a e di raggio $b-a$ precisamente come la (17), e quindi, qualunque sia q, la equazione data (15) ammetterà sempre un integrale che sarà una funzione olomorfa di x entro questo cerchio e che per certi valori di z si ridurrà ad un polinomio, e quando q sia zero o un numero intero negativo potrà anche ammettere due di tali integrali olomorfi, uno dei quali in questo caso sarà sempre un polinomio.

E siccome evidentemente nelle serie (17) e (18) i coefficienti sono tutti reali e, quando non divengono zero, col crescere di n finiscono per essere tutti dello stesso segno, così, per quanto dicemmo al § 6, gli integrali stessi (quando non si riducono a polinomii) o le loro derivate al di là di quelle di un certo ordine coll'andare di x per valori reali verso il punto b cresceranno indefinitamente, e nel punto b saranno infinite.

Partendo poi dal punto b invece che dal punto a si avranno altre serie per potenze di $x-b$ che potranno ottenersi dalle precedenti col semplice cambiamento di a in b, di b in a e di q in $-(q+\nu)$; e queste serie, che valendosi di queste indicazioni potrebbero scriversi immediatamente, avranno ancora gli stessi numeratori nei coefficienti de'varii termini, e condurranno quindi anche a polinomii integrali, che naturalmente dovranno essere quegli stessi ai quali conducono le serie precedenti, salvo a fare ora pel caso di $q+\nu$ nullo o intero e positivo le osservazioni che facemmo sopra pel caso di q nullo o intero e negativo.

Inoltre le nuove serie avranno un cerchio di convergenza che sarà ancora di raggio $b-a$ ma avranno il centro in b, e l'integrale corrispondente (quando non si riduce a un polinomio) o le sue derivate a partire da quelle di un certo ordine diverranno infinite nel punto a (*), ciò che mostra che questo nuovo integrale sarà distinto da quello corrispondente alle serie precedenti; e questi due integrali insieme condurranno all'integrale generale in quella parte del piano delle x che è comune ai due cerchi di raggio $b-a$ che hanno i centri in a e b.

20. Così, fuori del caso in cui ν sia zero o un numero intero e positivo, qualunque siano q e $q+\nu$ le equazioni (15) che ora consideriamo ammetteranno polinomii integrali di tutti i gradi a incominciare da quello di grado zero; mentre nel caso di ν zero o intero e positivo ne mancheranno talvolta alcuni.

D'altra parte poichè per la stessa equazione si ha

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{\mu+\nu x}{(x-a)(b-x)}=\frac{1}{b-a}\left\{\frac{\mu+\nu a}{x-a}+\frac{\mu+\nu b}{b-x}\right\}=\frac{q}{x-a}+\frac{q+\nu}{b-x},$$

e quindi

$$\Theta_c=\frac{1}{a_0}\,e^{\int_c^x \frac{a_1}{a_0}dx}=k\,\frac{(x-a)^{q-1}}{(b-x)^{q+\nu+1}}, \tag{19}$$

con k quantità costante diversa da zero, si vede che se $q>0$ o $\mu+\nu a>0$, Θ_c sarà integrabile anche nell'intorno del punto a; come se $q+\nu<0$ o $\mu+\nu b<0$, Θ_c sarà integrabile nell'intorno del punto b, e se avremo ad un tempo $q>0$ e $q+\nu<0$, ciò che porterà che sia $\nu<0$, Θ_c sarà integrabile tanto nell'intorno di a quanto in quello del punto b; quindi per quanto si disse in generale nel § 13 si può ora affermare che se per un certo intervallo (a_1, b_1) che appartiene all'intervallo (a, b) si sarà in qualche modo potuto dimostrare che si ha $\int_{a_1}^{b_1}\Theta_c X P_i\,dx=0$ per tutti i polinomii integrali P_i

(*) Il rapporto di un termine al precedente nelle serie che si hanno quando si parte dal punto a e in quelle analoghe che si hanno partendo dal punto b sui cerchi di convergenza, in valore assoluto può porsi respettivamente sotto le forme

$$\left(1-\frac{2+q+\nu}{n}+\frac{c}{n^2}\right),\quad \text{e}\quad 1-\frac{2-q}{n}+\frac{c_1}{n^2},$$

essendo c e c_1 quantità finite e quindi le corrispondenti serie integrali saranno convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini anche sul cerchio e su questo l'integrale sarà finito quando sia respettivamente $1+q+\nu>0$ e $q<1$, e saranno divergenti e l'integrale sarà infinito sul cerchio quando sia $1+q+\nu\leqq 0$ e $q\geqq 1$.

della equazione data, allora basterà che in questa equazione ν non sia zero nè un numero intero e positivo per poter dire che, sempre all'infuori di una funzione d'integrale nullo, *si ha* $X=0$ *in tutto l'intervallo* (a_1, b_1) *quando questo intervallo non termina ai punti estremi* a *e* b*;* e questo intervallo potrà terminare anche a uno degli estremi a o b ma non all'altro quando sia soddisfatta una sola delle due condizioni $q>0$ e $q+\nu<0$, mentre *se queste due condizioni* $q>0$ *e* $q+\nu<0$ *o* $\mu+\nu a>0$ *e* $\mu+\nu b<0$ *saranno soddisfatte tutte e due*, nel qual caso, come già abbiamo detto, ν sarà di necessità diverso da zero e negativo, allora *l'intervallo* (a_1, b_1) *potrà terminare anche a tutti e due gli estremi* a e b, cioè potrà essere l'intero intervallo (a, b).

21. Le equazioni (15) che stiamo studiando non sono altro che quelle delle ordinarie funzioni ipergeometriche, e i polinomii integrali che abbiamo trovati per esse, salvo le notazioni, sono i polinomii detti di Jacobi perchè trovansi considerati insieme ad altre funzioni in una Memoria postuma da lui pubblicata nel Vol. 56.° del *Journal für die reine und angewandte Mathem.* Gli stessi polinomii furono poi considerati anche da Tchébicheff e da altri, e in particolare in ultimo dal sig. Stekloff in una Memoria pubblicata a pag. 207 e segg. del Vol. 125 dello stesso *Journal für die reine*, ecc., e nel caso di $a=-1$, $b=1$, $\mu=0$, $\nu=-2$, $g=1$, $l=0$, $\varphi(z)=z(z+1)$ si riducono alle note funzioni di Legendre X_n.

Queste funzioni X_n si presentano così come casi particolari degli integrali della equazione

$$(1-x^2)\,y''-2\,x\,y'+z\,(z+1)\,y=0 \tag{20}$$

per la quale sono evidentemente soddisfatte anche le condizioni $q>0$, $q+\nu<0$ del paragrafo precedente; e per essi con semplici sostituzioni le formole precedenti dànno subito le espressioni in serie seguenti

$$\left.\begin{aligned} &y_{-1}+y_{-1}\sum_1^\infty(-1)^n\frac{z(z+1)[z(z+1)-1.2][z(z+1)-2.3]\dots[z(z+1)-(n-1)n]}{2^n\pi^2(n)}(x+1)^n,\\ &y_1+y_1\sum_1^\infty\frac{z(z+1)[z(z+1)-1.2][z(z+1)-2.3]\dots[z(z+1)-(n-1)n]}{2^n\pi^2(n)}(x-1)^n, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

le quali per $z=n$ o per $z=-(n+1)$ con n intero e positivo si riducono a due polinomii interi di grado n, dando allora due espressioni distinte delle funzioni di Legendre X_n all'infuori di un fattore costante, e si riducono precisamente alle X_n prendendo $y_{-1}=(-1)^n$ e $y_1=1$ perchè come è noto $X_n(-1)=(-1)^n$ e $X_n(1)=1$. E fuori dei casi qui indicati, e quindi per tutti i valori non interi di z queste serie valgono entro due cerchii di raggio 2 coi centri nei punti -1 e 1 respettivamente, e naturalmente nella parte comune a questi due cerchii le due serie valgono entrambe.

22. Merita poi di essere notato, sempre per le equazioni (15), che se invece di partire dai punti a e b e avere così gli integrali delle stesse equazioni in serie di potenze di $x-a$ e di $x-b$ o avere i polinomii integrali corrispondenti ordinati per queste potenze, si parte da un altro punto α fra a e b, si trovano altri sviluppi notevoli per potenze di $x-\alpha$.

Così in particolare partendo dal punto $\alpha = \frac{a+b}{2}$, cioè dal punto di mezzo dell'intervallo (a, b), e per semplicità limitandosi al caso in cui nelle nostre equazioni (15) il coefficiente a_1 si annulla per $x=\alpha$, cioè al caso in cui si ha $a_1 = \nu(x-\alpha)$, allora essendo $a_0 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - (x-\alpha)^2$, $a_1 = \nu(x-\alpha)$, $a_2 = g\varphi(z)+l$ si vede che si rientra nel caso delle equazioni (8) che corrispondono a $h=0$ e $p=2$; e difatti colla formola generale (2) del § 1 si vede subito che avremo in questo caso

$$y_\alpha^{(m+2)} = -\frac{a_2 - m(m-1-\nu)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\, y_\alpha^{(m)}$$

per modo che l'integrale generale della attuale equazione

$$(x-a)(b-x)y'' + \nu(x-\alpha)y' + a_2 y = 0 \tag{22}$$

dove $\alpha = \frac{a+b}{2}$ viene dato dalla formola

$$\left.\begin{aligned} &y_\alpha \left\{1+\sum_1^\infty(-1)^n \frac{a_2[a_2-2(1-\nu)][a_2-4(3-\nu)]\ldots[a_2-(2n-2(2n-3-\nu)]}{\pi(2n)}\left(\frac{2(x-\alpha)}{b-a}\right)^{2n}\right\}+\\ &+y'_\alpha(x-\alpha)\left\{1+\sum_1^\infty(-1)^n \frac{[a_2-1(0-\nu)][a_2-3(2-\nu)]\ldots[a_2-(2n-1)(2n-2-\nu]}{\pi(2n+1)}\left(\frac{2(x-\alpha)}{b-a}\right)^{2n}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

che quando è una serie vale nel cerchio di centro α $\left(\text{cioè } \frac{a+b}{2}\right)$ e di raggio $\frac{b-a}{2}$, e si riduce ad un polinomio quando si prende $y'_\alpha = 0$ e z ha quei valori speciali pei quali $a_2 = 2n(2n-1-\nu)$, e anche quando si prende $y_\alpha = 0$ e z ha uno di quegli altri valori speciali pei quali $a_2 = (2n+1)(2n-\nu)$, essendo n zero o un numero intero e positivo e $a_2 = g\,\varphi(z) + l$ con g e l costanti. E quando ν sia zero o intero e positivo alcuni di questi polinomii integrali mancheranno.

23. E così nel caso particolare della equazione (20), pel suo integrale generale entro il cerchio di raggio 1 col centro nel punto $x = 0$ avremo lo sviluppo seguente

$$\left.\begin{array}{l} y_0 \left\{ 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \dfrac{z(z+1)[z(z+1)-2.3][z(z+1)-4.5]\ldots[z(z+1)-(2n-2)(2n-1)]}{\pi(2n)} x^{2n} \right\} + \\ + y'_0 x \left\{ 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \dfrac{[z(z+1)-1.3][z(z+1)-3.4][z(z+1)-5.6]\ldots[z(z+1)-(2n-1)2n]}{\pi(2n+1)} x^{2n} \right\}, \end{array}\right\} \tag{24}$$

che si ridurrà a un polinomio di grado pari $2n$ e precisamente alla X_{2n} all'infuori di un fattore costante quando $z = 2n$ o $z = -(2n+1)$ e $y'_0 = 0$, e si ridurrà a un polinomio di grado dispari e precisamente a X_{2n+1} sempre all'infuori di un fattore costante quando $z = 2n+1$ o $z = -(2n+2)$ e $y_0 = 0$.

Così per la equazione attuale (20) per qualunque valore reale o complesso di z che non dia luogo a polinomii integrali avremo una espressione in serie dell'integrale generale per mezzo della precedente (24) che varrà, come abbiamo detto, per tutti i valori reali e complessi di x nel cerchio di raggio uno col centro nel punto $x = 0$, come si hanno i due integrali particolari (21) che valgono entro altri cerchi più ampii nei quali però è contenuto tutto il cerchio attuale, per modo che entro questo cerchio valgono tutti e tre questi sviluppi.

24. Prendiamo ora a considerare anche la equazione

$$(x - a)\,y'' + (\mu + \nu x)\,y' + a_2\,y = 0, \tag{25}$$

dove al solito $a_2 = g\,\varphi(z) + l$, e troviamo un suo integrale in serie di potenze $x - a$.

Siccome ora si ha $a_0 = x - a$, $a_1 = \mu + \nu x$, $a_2 = g\,\varphi(z) + l$, saremo ancora in un caso della equazione (9) che corrisponde a $h = 1$ e $p = 1$; e difatti la (2) del § 1 ci darà ora

$$(m + \chi)\,y^{(m+1)} + (m\nu + a_2)\,y^{(m)} = 0 \tag{26}$$

essendo $\chi = \mu + \nu a$, e se χ non sarà zero nè un numero intero negativo avremo il seguente integrale

$$y_a \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{a_2 (a_2 + \nu)(a_2 + 2\nu) \dots (a_2 + (n-1)\nu)}{\chi(\chi+1)(\chi+2)\dots(\chi+n)} \frac{(x-a)^n}{\pi(n)} \right\} \qquad (27)$$

che sarà valido in tutto il piano delle x e che *se* ν *non sarà zero* darà luogo a polinomii integrali di tutti i gradi n, a incominciare da quello di grado zero, pei valori di z pei quali $a_2 + n\nu = 0$; mentre se $\nu = 0$ avremo il solo polinomio integrale di grado zero pei valori di z pei quali $a_2 = 0$.

Se poi χ sarà zero o un numero intero negativo, posto ad es. $\chi = -h$ avremo ancora un integrale valido in tutto il piano che sarà della stessa forma del precedente, solo incomincierà dalla potenza $(h+1)^a$ di $x - a$, e sarà precisamente

$$\left. \begin{aligned} & y_a^{(h+1)} (x-a)^{h+1} \left\{ \frac{1}{\pi(h+1)} + \right. \\ & \left. + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{[a_2 + (h+1)\nu][a_2 + (h_2+2)\nu]\dots[a_2 + (h+n)\nu]}{\pi(n+h+1)} \frac{(x-a)^n}{\pi(n)} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

e per la (25) si vede che si avranno ancora polinomii integrali di tutti i gradi quando non sia $\nu = 0$.

Avendosi poi per la equazione attuale (25)

$$\Theta_c = \frac{1}{x-a} e^{\int_c^x \frac{\mu + \nu x}{x-a} dx} = k(x-a)^{\chi - 1} e^{\nu(x-a)}, \qquad (29)$$

con k costante, si vede che Θ_c sarà atto alla integrazione anche nell'intorno di a soltanto quando il numero χ è diverso da zero e positivo; e quindi, supponendo ora senz'altro che ν non sia zero, per le considerazioni generali che facemmo al § 13, si può affermare che se per un certo intervallo (a_1, b) tutto a destra o tutto a sinistra del punto a si sarà potuto dimostrare in qualche modo che deve essere $\int_{a_1}^{b} (x-a)^{\chi-1} e^{\nu(x-a)} X P_i \, dx = 0$ per tutti i polinomii integrali P_i della stessa equazione (25), allora *la solita nostra funzione* X *sarà zero*, sempre all'infuori di una funzione d'integrale nullo, *per tutti i valori di* x *da* a_1 *a* b *quando* a_1 *sia diverso da* a, e questo qualunque sia χ e quindi anche nel caso in cui χ è zero o negativo; e quando χ sia diverso da zero e positivo allora potrà essere anche $a_1 = a$, cioè l'intervallo (a_1, b) *potrà avere un estremo nel punto* a.

25. Un'altra equazione che conduce in modo semplicissimo a polinomii integrali di tutti i gradi è la seguente

$$a_0\, y'' + \nu\,(x-\alpha)\, y' + a_2\, y = 0 \tag{30}$$

dove a_0 è una costante che potrebbe supporsi uguale ad uno, e a_2 è al solito $g\,\varphi(z) + l$, essendo ν, g e l pure costanti.

Confrontando questa equazione colla (8) del § 5 si vede che essa ne è un caso particolare e siamo quindi nel caso di $h=0$ e $p=2$, e difatti la formola (2) del § 1 ci dà ora la seguente

$$y_\alpha^{(m+2)} = -\frac{a_2 + m\,\nu}{a_0}\, y_\alpha^{(m)},$$

per la quale si vede che l'integrale generale della nostra equazione (30) sarà il seguente

$$\left.\begin{array}{l} y_\alpha \left\{ 1 + \sum\limits_1^\infty (-1)^n \dfrac{a_2(a_2+2\nu)(a_2+4\nu)\ldots(a_2+2(n-1)\nu)}{a_0^n}\, \dfrac{(x-\alpha)^{2n}}{\pi(2n)} \right\} + \\ + y'_\alpha(x-\alpha) \left\{ 1 + \sum\limits_1^\infty (-1)^n \dfrac{(a_2+\nu)(a_2+3\nu)\ldots(a_2+(2n-1)\nu)}{a_0^n}\, \dfrac{(x-\alpha)^{2n}}{\pi(2n+1)} \right\}, \end{array}\right\} \tag{31}$$

che sarà valido in tutto il piano, e quando ν non sia zero darà luogo a polinomii integrali di grado pari $2n$ in $x-\alpha$ quando $y'_\alpha = 0$ e z ha valori tali da fare sì che si abbia $a_2 + 2n\nu = 0$, mentre darà luogo a polinomii integrali di grado dispari $2n+1$ in $x-\alpha$ quando $y_\alpha = 0$ e z è preso in modo che si abbia $a_2 + (2n+1)\nu = 0$; talchè anche in questo caso della equazione (30) quando in essa ν non è zero si hanno polinomii integrali di tutti i gradi.

Essendo poi in questo caso

$$\Theta_c = \frac{1}{a_0}\, e^{\int_c^x \frac{\nu}{a_0}(x-\alpha)dx} = k\, e^{\frac{\nu(x-\alpha)^2}{2a_0}}, \tag{32}$$

con k quantità costante, si concluderà ancora che se sarà $\int_a^b e^{\frac{\nu}{2a_0}(x-\alpha)^2} X P_i\, dx = 0$

per tutti i polinomii integrali della nostra equazione (30) quando ν non è zero, *la solita nostra funzione X sarà zero,* sempre all'infuori di una funzione d'integrale nullo, *per tutti i valori di x fra a e b, qualunque siano ora questi* *numeri a e b* perchè la funzione Θ_c è integrabile in qualunque intervallo finito.

26. Come abbiamo considerato i casi speciali più notevoli che possono presentare le equazioni (8) e (9) (*), così potremmo ora studiare quelli ai quali dànno luogo le (10) e (11) e anche le altre equazioni di second'ordine che rientrino fra quelle per le quali i coefficienti hanno la forma (4) quando, come abbiamo supposto nel § 8, B_0 e B_1 non sono zero insieme e B''_2 è diverso da zero.

Anche questi studii si farebbero con tutta facilità cogli stessi processi che qui abbiamo tenuto; ma noi appunto per questo tralascieremo di farli, e solo ci fermeremo un momento sulla equazione (10)

$$\{ A_0 + B_0 (x-\alpha)^3 \} y'' + B_1 (x-\alpha)^2 y' + \{ B_2 + B'_2 \varphi(z) \} (x-\alpha) y = 0 \quad (33)$$

che corrisponde al caso di $h=0$ e $p=3$ e nella quale A_0 è diverso da zero, e ricorderemo quanto dicemmo in fine del § 7, cioè che per essa le nostre formole conducono al suo integrale generale; e questo integrale quando non si riduce a un polinomio è una serie ordinata per le potenze di $x-\alpha$ nella quale mancano tutti i termini cogli esponenti della forma $3i-1$.

La stessa equazione poi quando $B_0=0$, e quando, essendo B_0 diverso da zero, il rapporrto $\frac{B_1}{B_0}$ non è zero nè un numero intero negativo ammette polinomii integrali di tutti i gradi esclusi soltanto come nell'integrale quelli dei gradi della forma $3i-1$; e quindi se, essendo X la solita nostra funzione, e essendo a e b due numeri reali compresi nel cerchio di convergenza, si avrà la solita formola $\int_a^b \Theta_c X P_n dx = 0$ per tutti i polinomii integrali della

(*) I polinomii integrali che abbiamo trovato nei paragrafi precedenti per le equazioni da noi considerate (15), (25) e (30) (dei quali i primi, come già dicemmo, sono i polinomii di Jacobi e le funzioni di Legendre X_n) corrispondono precisamente a quelli che il sig. Stekloff nella citata Mem. della pag. 207 del Vol. 125 del *Journal für die reine und angewandte Math.* ha chiamato *polinomii (o funzioni) di* Tchébicheff, e le tre funzioni Θ_c date dalle nostre formole (19), (29) e (32) e relative alle equazioni suddette corrispondono precisamente a quelle che il sig. Stekloff ha chiamato col sig. Sonine *funzioni speciali di* Tchébicheff.

Vedremo in altro lavoro che spero di poter pubblicare fra breve che i risultati qui ottenuti conducono con tutta facilità a dimostrare la possibilità degli sviluppi di funzioni date arbitrariamente in serie di questi polinomii di Tchébicheff, nei casi generali delle funzioni per le quali sono possibili gli sviluppi di Fourier, generalizzando così immensamente i risultati ottenuti dal sig. Stekloff nella Memoria testè ricordata.

nostra equazione (30), per le considerazioni generali dei §§ 11 e 12 si potrà ancora affermare che *la stessa funzione X*, all'infuori sempre di una funzione d'integrale nullo, ***è zero per tutti i valori di x fra a e b***, quando il coefficiente a_0 o $A_0 + B_0 (x - \alpha)^3$ non si annulla mai nell'intervallo (a, b).

Se poi questo coefficiente a_0 si annullerà nell'intervallo (a, b) bisognerà limitarsi ai casi nei quali Θ_c resta ancora atta alla integrazione, e bisognerà verificare se sono soddisfatte le altre condizioni alle quali accennammo in fine del § 12. E intanto poichè per la equazione attuale sarà

$$\Theta_c = \frac{1}{A_0 + B_0 (x - \alpha)^3} e^{\int_c^x \frac{B_1 (x-\alpha)^2}{A_0 + B_0 (x-\alpha)^3} dx},$$

e se sarà $B_0 = 0$ avremo con k costante

$$\Theta_c = \frac{k}{A_0} e^{\frac{B_1}{3A_0}(x-\alpha)^3}, \tag{34}$$

mentre se B_0 sarà diverso da zero, sarà

$$\Theta_c = \frac{k}{A_0 + B_0 (x - \alpha)^3} e^{\frac{B_1}{3B_0} \log(A_0 + B_0 (x-\alpha)^3)} = k \left(A_0 + B_0 (x - \alpha)^3\right)^{\frac{B_1}{3B_0} - 1}, \tag{35}$$

così in quest'ultimo caso converrà supporre che $\frac{B_1}{B_0}$ sia un numero diverso da zero e positivo perchè Θ_c possa essere integrabile fra a e b se $A_0 + B_0 (x - \alpha)^3$ si annullerà nell'intervallo (a, b).

27. Tornando a considerare le equazioni della forma (8) o (9), o in modo generale le equazioni

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{36}$$

nelle quali a_0 e a_1 sono tutt'al più respettivamente del secondo e del primo grado in x, e a_2 è una costante rispetto ad x ma può contenere il parametro z (che ora potrebbe supporsi contenuto anche in a_0 e a_1), presenteremo alcune osservazioni molto notevoli su queste equazioni.

Osserviamo perciò, indipendentemente dagli studii che già abbiamo fatti, che colla derivazione della equazione (36) si ha subito l'altra per qualunque valore intero di m

$$a_0 y^{(m+2)} + (m a'_0 + a_1) y^{(m+1)} + (m_2 a''_0 + m a'_1 + a_2) y^{(m)} = 0, \tag{37}$$

cui ora, per le nostre ipotesi, si riduce la (2) del § 1, e nella quale $m_2 = \frac{m(m-1)}{2}$; e quindi se si vuole che la equazione data (36) ammetta un polinomio integrale di grado n, dovendo essere per questo integrale $y^{(n+2)} = y^{(n+1)} = 0$ e $y^{(n)}$ diverso da zero, dovremo avere

$$n_2 a''_0 + n a'_1 + a_2 = 0 \tag{38}$$

cioè z dovrà avere valori tali da soddisfare a questa equazione; per modo che, quando a_0 e a_1 non contengono z, il nostro studio verrà ad essere relativo alle equazioni della forma

$$a_0 y'' + a_1 y' - \left(\frac{n(n-1)}{2} a''_0 + n a'_1\right) y = 0,$$

nelle quali n è zero o intero e positivo, e a_0 e a_1 sono funzioni di x tutt'al più del secondo e primo grado respettivamente.

Viceversa quando questo accade, se nessuna delle equazioni

$$m_2 a''_0 + m a'_1 + a_2 = 0 \tag{39}$$

corrispondenti ai valori $n-1$, $n-2, \ldots, 2, 1, 0$ di m inferiori ad n sarà soddisfatta per quei valori di z che soddisfano alla (38), si può affermare che esisterà sempre un polinomio integrale di grado n in corrispondenza a quei valori di z, e non ne esisterà che uno.

Si osservi infatti che le n equazioni che si hanno dalla (36) con n derivazioni successive costituiscono, insieme colla stessa (36), un sistema di $n+1$ equazioni che, scritte in ordine inverso, sono le seguenti

$$\left.\begin{aligned}
&a_0 y^{(n+2)} + (n a'_0 + a_1) y^{(n+1)} + (n_2 a''_0 + n a'_1 + a_2) y^{(n)} = 0,\\
&a_0 y^{(n+1)} + [(n-1) a'_0 + a_1] y^{(n)} + [(n-1)_2 a''_0 + (n-1) a'_1 + a_2] y^{(n-1)} = 0,\\
&a_0 y^{(n)} + [(n-2) a'_0 + a_1] y^{(n-1)} + [(n-2)_2 a''_0 + (n-2) a'_1 + a_2] y^{(n-2)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0 y^{(1)} + (a'_0 + a_1) y'' + (a'_1 + a_2) y' = 0,\\
&a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

e ognuna di esse può riguardarsi come l'integrale della precedente all'infuori di una costante.

Ora la prima di queste a causa della (38) è soddisfatta dal valore di y

$$y = c_n (x-\alpha)^n + c_{n-1} (x-\alpha)^{n-1} + c_{n-2} (x-\alpha)^{n-2} + \cdots + c_1 (x-\alpha) + c_0, \quad (41)$$

qualunque siano le costanti $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$; e questo stesso valore di y soddisferà anche a quella che viene colla integrazione dalla stessa equazione quando la costante che l'integrazione introduce sia presa in modo conveniente. Se si vuole invece che resti soddisfatta la seconda delle precedenti (40), ciò che corrisponde a prendere la costante d'integrazione uguale a zero, basterà determinare convenientemente la costante c_{n-1} nella (41), e questo potrà sempre farsi perchè, nella seconda delle (40), c_{n-1} all'infuori di un fattoriale, avrà il coefficiente $(n-1)_2 a''_0 + (n-1) a'_1 + a_2$ che per le ipotesi fatte è diverso da zero.

Al modo stesso colla integrazione della seconda delle (40) si introduce una nuova costante, e volendo che questa sia zero, cioè volendo che sia soddisfatta anche la terza delle stesse (40), basterà determinare convenientemente anche c_{n-2}, e questo pure potrà farsi perchè in questa equazione c_{n-2} all'infuori di un fattoriale avrà il coefficiente $(n-2)_2 a''_0 + (n-2) a'_1 + a_2$ che è pure diverso da zero; e così continuando si vede che giungeremo a determinare tutti i coefficienti $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_2, c_1, c_0$, che risulteranno tutti proporzionali a c_n che rimarrà arbitrario, e il polinomio (41) che rimarrà così determinato, venendo a soddisfare all'ultima delle equazioni (40) che è l'equazione data (36), sarà il polinomio integrale di grado n cercato.

Invece se in una delle equazioni (40), per es. in quella che si ha dalla (37) facendovi $m = n_1$ (con $n_1 < n$), che sarà la $(n - n_1 + 1)^a$ delle (40), il coefficiente $\frac{n_1 (n_1 - 1)}{2} a''_0 + n_1 a'_1 + a_2$ dell'ultimo termine sarà zero per quei valori stessi di z che soddisfano alla (38), allora quella equazione non servirà più a determinare, come nel caso precedente, il coefficiente c_{n_1} di $(x-\alpha)^{n_1}$ nel polinomio (41), e questo coefficiente rimarrà del tutto indeterminato; mentre perchè la stessa equazione risulti soddisfatta bisognerà che la parte rimanente di essa si annulli per $x = \alpha$, e questo si otterrà sempre prendendo $c_n = 0$; ma talvolta, in seguito a certe relazioni che potranno esservi fra i coefficienti della equazione data, potrà darsi che nella parte rimanente della detta equazione risulti zero il fattore che moltiplica c_n, e quindi la parte stessa sia zero anche indipendentemente dal valore di c_n.

Al tempo stesso poi le equazioni fra le (40) che seguono quella ora considerata determineranno e in un sol modo i coefficienti seguenti $c_{n_1-1}, c_{n_1-2}, \ldots,$

c_2, c_1, c_0 del polinomio (41) tutti proporzionalmente a c_{n_1} se avremo dovuto prendere $c_n = 0$, mentre se avremo potuto lasciare c_n arbitraria, questi coefficienti risulteranno la somma di due parti l'una col coefficiente c_n e l'altra col coefficiente c_{n_1} ambedue arbitrarii; nè fra le stesse equazioni (40) dopo la $(n - n_1 + 1)^a$ potrà darsi che se ne trovi un'altra nella quale il coefficiente dell'ultimo termine risulti zero, perchè, essendo la equazione (39) del secondo grado in m, non si potranno avere più di due valori di m (che qui sarebbero n e n_1) che la soddisfino cogli stessi valori di z, a meno che non si abbia ad un tempo $a''_0 = 0$, $a'_1 = 0$, $a_2 = 0$, il qual caso sarà da noi escluso perchè dà luogo al solo polinomio integrale $y = \text{cost.}$; talchè avremo sempre così un polinomio integrale della (36) di grado n_1 invece di quello di grado n quando siasi dovuto prendere $c_n = 0$, e ne avremo uno di grado n ma con due coefficienti arbitrarii c_n e c_{n_1}, e quindi avremo due polinomii integrali distinti, uno di grado n_1 e l'altro di grado n, quando anche c_n sia rimasto arbitrario.

E si può osservare che questo caso di due valori n e n_1 di m pei quali è soddisfatta la equazione (39) per gli stessi valori di z non può presentarsi altro che quando a''_0 sia diverso da zero, cioè quando a_0 sia effettivamente del secondo grado, e pei valori di n e n_1 pei quali possa essere $n + n_1 = 1 - \frac{2\,a'_1}{a''_0}$, ciò che richiederà che il rapporto $\frac{2\,a'_1}{a''_0}$ sia zero o un numero negativo e intero; e in questo caso alcuni polinomii integrali potranno mancare ma soltanto fra quelli di grado inferiore a $1 - \frac{2\,a'_1}{a''_0}$.

Questi risultati, come è facile a vedersi considerando i varii casi, concordano precisamente con quanto dicemmo in generale ai §§ 8, 9 e 18.

28. Osserviamo poi che quando è soddisfatta la condizione (38), e esiste in conseguenza un polinomio integrale, la (37) dà luogo all'altra

$$a_0\, y^{(n+2)} + (n\, a'_0 + a_1)\, y^{(n+1)} = 0$$

alla quale perciò dovrà soddisfare ogni integrale della (36); se ne dedurrà subito colla integrazione

$$y^{(n+1)} = b\, e^{-\int_\alpha^x \left(n \frac{a'_0}{a_0} + \frac{a_1}{a_0}\right) dx} = c\, \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n},$$

essendo α un valore di x qualsiasi ma pel quale non si abbia $a_0(\alpha) = 0$, e essendo b e c due costanti; e di qui integrando successivamente e indicando con $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_1, \gamma_0$ successive costanti avremo

$$y^{(n)} = c \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n} dx + \gamma_n,$$

$$y^{(n-1)} = c \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n} dx + \gamma_n (x - \alpha) + \gamma_{n-1},$$

$$y^{(n-2)} = c \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n} dx + \frac{\gamma_n}{2} (x - \alpha)^2 + \gamma_{n-1} (x - \alpha) + \gamma_{n-2},$$

$$y = c \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x \cdots \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n} dx + \frac{\gamma_n}{\pi(n)} (x - \alpha)^n + \frac{\gamma_{n-1}}{\pi(n-1)} (x-\alpha)^{n-1} +$$

$$+ \frac{\gamma_{n-2}}{\pi(n-2)} (x - \alpha)^{n-2} + \cdots + \gamma_1 (x - \alpha) + \gamma_0,$$

l'integrale multiplo che figura in y essendo dell'ordine $n+1$, per modo che si può ora affermare che quando il parametro z che figura nella (36) soddisfa all'equazione (38), l'integrale generale di questa equazione viene a presentarsi sotto la forma

$$c \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x dx \ldots \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n} dx + G_n \tag{42}$$

dove l'integrale multiplo è dell'ordine $n+1$, c è una costante e G_n è un polinomio di grado n i cui coefficienti si determineranno in dipendenza della costante c per mezzo della equazione data o successivamente per mezzo delle (40), e uno di essi rimarrà indeterminato insieme a c. E quando c sia preso uguale a zero, e il parametro z che per ipotesi soddisfa alla (38) non soddisfi a *nessuna* delle equazioni simili (39) corrispondenti a valori di m inferiori ad n, allora il polinomio G_n si ridurrà al polinomio integrale *di grado n* che certamente esisterà, come risulta anche dall'osservare che allora le equazioni (40) che determinano i coefficienti di G_n si riducono appunto a quelle stesse che servono alla determinazione dei coefficienti del polinomio integrale; mentre se collo stesso valore di z oltre alla (38) sarà soddisfatta anche un'altra delle equazioni (39) corrispondenti a un valore n_1 di m inferiore ad n, allora G_n sarà ancora un polinomio integrale ma potrà essere soltanto di grado n_1.

S'intende poi che, in questo ultimo caso in cui i valori di z pei quali viene soddisfatta la equazione (38) soddisfano anche ad un'altra equazione della stessa forma ma corrispondente a un valore inferiore n_1 di n, allora all'integrale di ordine $n+1$ che figura nella (42) si potrà anche sostituire l'altro

$$\int_\alpha^x d\,x \int_\alpha^x d\,x \ldots \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^{n_1}}\, d\,x$$

di ordine n_1+1, sostituendo al tempo stesso a G_n un altro polinomio G_n di grado n_1.

Nel caso particolare poi di $a_1 = a'_0$ e sempre nel supposto che a_0 non sia zero per $x=\alpha$, l'integrale multiplo che figura nella (42) si ridurrà all'altro $\int_\alpha^x d\,x \int_\alpha^x d\,x \ldots \int_\alpha^x \frac{d\,x}{a_0^{n+1}}$; e così in particolare nel caso delle funzioni X_n questo integrale sarà $\int_\alpha^x d\,x \int_\alpha^x d\,x \ldots \int_\alpha^x \frac{d\,x}{(1-x^2)^{n+1}}$.

Del resto poi, siccome, se P_n è il polinomio integrale di grado n della equazione (36) e α è un punto pel quale esso non è zero, l'integrale generale della stessa equazione potrà sempre, come è noto, porsi anche sotto la forma

$$\lambda\, P_n \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{P_n^2}\, d\,x + \mu\, P_n$$

essendo λ e μ due costanti arbitrarie, si può dire evidentemente che considerando la differenza

$$\int_\alpha^x d\,x \int_\alpha^x d\,x \ldots \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^{n}}\, d\,x - \lambda\, P_n \int_\alpha^x \frac{e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{P_n^2}\, d\,x$$

dove λ è una costante che potrà determinarsi fissando i valori iniziali nel punto α di un integrale che non sia il polinomio integrale e della sua derivata, si troverà che questa differenza sarà sempre un polinomio razionale intero di grado n che risulterà esso pure determinato dai detti valori iniziali.

29. Come applicando derivazioni successive alla nostra equazione di second'ordine (36), cioè

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{43}$$

giungemmo ai suoi polinomii integrali, applicandole invece integrazioni successive si otterranno altri risultati notevoli.

Indicando perciò con y un suo integrale qualsiasi, poniamo per abbreviare

$$\int_\alpha^x y\,dx = Q_1\,,\quad \int_\alpha^x Q_1\,dx = Q_2\,,\quad \int_\alpha^x Q_2\,dx = Q_3\,,\ldots,\quad \int_\alpha^x Q_{k-1}\,dx = Q_k\,,\ldots \tag{44}$$

essendo α un valore di x che poi sceglieremo nel modo che più ci tornerà comodo fra quelli pei quali l'integrale y e la sua derivata sono finiti; e osserviamo intanto per prima cosa che per $x = \alpha$ queste quantità Q_1, Q_2, Q_3,..., Q_k,... saranno tutte zero, e insieme a Q_2 sarà zero anche Q'_2; insieme a Q_3 saranno zero anche Q'_3 e Q''_3;... e in generale insieme a Q_k saranno zero anche Q'_k, Q''_k,..., e $Q_k^{(k-1)}$.

Integrando fra α e x la nostra equazione, e facendo alcune integrazioni per parti otterremo l'altra

$$a_0 y' + (a_1 - a'_0)\,y + (a''_0 - a'_1 + a_2)\int_\alpha^x y\,dx = \beta,$$

essendo β il valore di $a_0 y' + (a_1 - a'_0)\,y$ per $x = \alpha$ che per le nostre ipotesi sarà finito; e questa col porre

$$a_{1,1} = a_1 - a'_0\,,\quad a_{2,1} = a''_0 - a'_1 + a_2\,,$$

dà luogo all'altra in Q_1

$$a_0\,Q''_1 + a_{1,1}\,Q'_1 + a_{2,1}\,Q_1 = \beta\,,$$

che sarà precisamente della forma della equazione data quando sia $\beta = 0$.

Integrando di nuovo si giungerà al modo stesso alla equazione

$$a_0\,Q''_2 + a_{1,2}\,Q'_2 + a_{2,2}\,Q_2 = \beta\,(x - \alpha) + \gamma,$$

essendo γ il valore per $x = \alpha$ di $a_0\, Q''_2 + a_{1,2}\, Q'_2$ che si riduce a quello di $a_0\, y$ (*), e avendo posto

$$a_{1,2} = a_{1,1} - a'_0\,, \quad a_{2,2} = a''_0 - a'_{1,1} + a_{2,2}\,.$$

Integrando di nuovo si giunge all'altra equazione

$$a_0\, Q''_3 + a_{1,3}\, Q'_3 + a_{2,3}\, Q_3 = \frac{\beta\,(x-\alpha)^2}{1\,.\,2} + \gamma\,(x-\alpha),$$

senza che vi sia più bisogno di aggiungere altre costanti che sarebbero zero perchè per $x = \alpha$ le Q_3, Q'_3 e Q''_3 sono zero; e così continuando, dopo k integrazioni giungeremo alla seguente equazione

$$a_0\, Q''_k + a_{1,k}\, Q'_k + a_{2,k}\, Q_k = \frac{\beta\,(x-\alpha)^{k-1}}{\pi\,(k-1)} + \frac{\gamma\,(x-\alpha)^{k-2}}{\pi\,(k-2)}\,, \tag{45}$$

essendo ora $a_{1,k} = a_{1,k-1} - a'_0$, $a_{2,k} = a''_0 - a'_{1,k-1} + a_{2,k-1}$, per modo che scrivendo successivamente i valori di $a_{1,1}$, $a_{1,2}, \ldots, a_{1,k}$ e $a_{2,1}$, $a_{2,2}, \ldots, a_{2,k}$ si troverà

$$a_{1,k} = a_1 - k\,a'_0\,, \quad a_{2,k} = k\,a''_0 - (a'_1 + a'_{1,1} + a'_{1,2} + \cdots + a'_{1,k-1}) + a_2 =$$
$$= k\,a''_0 - [k\,a'_1 - (1 + 2 + \cdots + k - 1)\,a''_0] + a_2\,,$$

cioè

$$a_{1,k} = a_1 - k\,a'_0\,, \quad a_{2,k} = \frac{k\,(k+1)}{2}\,a''_0 - k\,a'_1 + a_2\,. \tag{46}$$

Si consideri ora la nostra equazione (43) per quei valori di z o di a_2 pei quali per un certo valore di k si ha $a_{2,k} = 0$.

La equazione precedente (45) si ridurrà all'altra

$$a_0\, Q''_k + a_{1,k}\, Q'_k = \frac{\beta\,(x-\alpha)^{k-1}}{\pi\,(k-1)} + \frac{\gamma\,(x-\alpha)^{k-2}}{\pi\,(k-2)}\,,$$

nella quale, come nelle formole che seguono, nel caso di $k = 1$ deve trala-

---

(*) Se nel punto α il coefficiente a_0 non è zero, potendo aversi sempre un integrale della nostra equazione (43) con valori y_α e y'_α di y e y' in questo punto α dati ad arbitrio, le due costanti β e γ potranno allora considerarsi come due costanti arbitrarie, perchè ad ogni sistema di valori β_0 e γ_0 che si scelga ad arbitrio per queste costanti corrisponderanno due valori di y_α e y'_α che potranno sempre determinarsi per mezzo delle due equazioni

$$a_0\, y'_\alpha + (a_1 - a'_0)\, y_\alpha = \beta_0\,, \quad a_0\, y_\alpha = \gamma_0\,.$$

sciarsi l'ultimo termine $\frac{\gamma(x-\alpha)^{k-2}}{\pi(k-2)}$; e questa può subito integrarsi e ci dà

$$Q'_k = Q_{k-1} = e^{-\int \frac{a_{1,k}}{a_0} dx} \left[\int \left\{ \frac{\beta(x-\alpha)^{k-1}}{\pi(k-1)} + \frac{\gamma(x-\alpha)^{k-2}}{\pi(k-2)} \right\} \frac{e^{\int \frac{a_{1,k}}{a_0} dx}}{a_0} dx + c \right],$$

ovvero

$$Q_{k-1} = a_0^k e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \left[\int \left\{ \frac{\beta(x-\alpha)^{k-1}}{\pi(k-1)} + \frac{\gamma(x-\alpha)^{k-2}}{\pi(k-2)} \right\} \frac{e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^{k+1}} dx + c \right],$$

giacchè per essere $a_{1,k} = a_1 - k a'_0$ si può prendere $\int \frac{a_{1,k}}{a_0} dx = \int \frac{a_1}{a_0} dx - \log a_0^k$; e in questo valore di Q_{k-1}, quando non sia $k=1$ che allora per Q_0 dovrebbe prendersi y, il secondo membro dovrà ridursi a zero per $x=\alpha$, e questo, quando a_0 non si annulli per $x=\alpha$, si otterrà sostituendo alla quantità fra le parentesi l'integrale $\int_\alpha^x \left\{ \frac{\beta(x-\alpha)^{k-1}}{\pi(k-1)} + \frac{\gamma(x-\alpha)^{k-2}}{\pi(k-2)} \right\} \frac{e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^{k+1}} dx.$

Da questa derivando $k-1$ volte si troverà subito per l'integrale y della nostra equazione (43) quando in essa (come abbiamo supposto) z ha valori tali da soddisfare alla equazione $a_{2,k} = \frac{k(k+1)}{2} a''_0 - k a'_1 + a_2 = 0$, la formola seguente

$$y = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(a_0^k e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \left[\int \left\{ \frac{\beta(x-\alpha)^{k-1}}{\pi(k-1)} + \frac{\gamma(x-\alpha)^{k-2}}{\pi(k-2)} \right\} \frac{e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^{k+1}} dx + c \right] \right), \quad (47)$$

che varrà anche quando $k=1$, senza più stare ora a richiedere che la quantità fra parentesi alla quale per $k \geqq 2$ dovrà applicarsi la derivazione divenga zero per $x=\alpha$, bastando che al tendere di x ad α abbia un limite determinato e finito, e sempre nel supposto che nel punto α sì y che y' siano finiti onde siano tali β e γ.

30. In particolare quindi se sarà $a_0 = (x-a)(b-x)$, o $a_0 = x-a$, cioè se saremo nel caso delle equazioni dei §§ 15 e segg. o di quelle del § 24, limitandoci a considerare l'integrale che è regolare nel punto a, che per quanto vedemmo ai paragrafi indicati esisterà sempre per qualunque valore di z, e prendendo allora $\alpha = a$, avremo $\gamma = 0$ e β sarà il valore di

$(a_1 - a'_0)\, y$ per $x = a$; e quindi pel detto integrale di quella fra le equazioni medesime che corrisponde ai valori di z pei quali si ha

$$\frac{k\,(k+1)}{2}\, a''_0 - k\, a'_1 + a_2 = 0,$$

oltre alla espressione in serie o per mezzo di un polinomio integrale che trovammo nei paragrafi precedenti, avremo la formola

$$y = \frac{d^{k-1}}{d\,x^{k-1}} \left(a_0^k\, e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \cdot \left[\frac{\beta}{\pi\,(k-1)} \int \frac{(x-\alpha)^{k-1}\, e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^{k+1}}\, d\,x + c \right] \right), \tag{48}$$

e in questa la quantità fra le parentesi dovrà tendere a un limite determinato e finito al tendere di x ad a.

Se poi avremo anche $(a_1 - a'_0)_a = 0$, o se in qualche modo sapremo che $y_a = 0$, ciò che, avendo riguardo alla equazione data, si vede che sarà sempre e soltanto nel caso di $a_1(\alpha) = 0$ perchè insieme ad $y_a = 0$ non può essere $y'_a = 0$, allora venendo ad essere $\beta = 0$, avremo più semplicemente in ambedue i casi la formola seguente

$$y = \frac{c\, d^{k-1} \left(a_0^k\, e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \right)}{d\,x^{k-1}}, \tag{49}$$

nella quale se saremo nel caso di $y_a = 0$ la quantità fra parentesi si annullerà sempre (anche per $k = 1$) per $x = a$ qualunque sia la costante c, perchè allora essendo $a_1(a) = 0$ l'integrale dell'esponenziale sarà sempre finito anche per $x = a$; mentre se sarà $(a_1 - a'_0)_a = 0$, potendo scrivere

$$y = \frac{c\, d^{k-1} \left(a_0^{k-1}\, e^{-\int \frac{a_1 - a'_0}{a_0} dx} \right)}{d\,x^{k-1}}, \tag{50}$$

e l'integrale dell'esponenziale attuale essendo finito per $x = a$, la quantità fra parentesi per $k > 1$ si annullerà per $x = a$ qualunque sia la costante c.

Più particolarmente ancora se sarà $a_1 = a'_0$ per qualunque valore di x, avremo dalla (49)

$$y = \frac{c\, d^{k-1}\, (a_0^{k-1})}{d\,x^{k-1}}. \tag{51}$$

31. Le formole che qui abbiamo trovato per rappresentare l'integrale

della equazione generale (43) nei varii casi da noi considerati servono per quell'integrale della stessa equazione che è regolare nel punto a e quando z o a_2 hanno quei valori pei quali è soddisfatta la equazione

$$\frac{k\,(k+1)}{2}\,a''_0 - k\,a'_1 + a_2 = 0, \tag{52}$$

se di tali integrali regolari nel punto a non ve ne sarà che uno; mentre se ve ne saranno due allora bisognerà tenere conto dei valori delle costanti che figurano in quelle formole per stabilire a quale integrale esse vengano precisamente a corrispondere, o per farle corrispondere all'uno o all'altro di quegli integrali.

Dalle stesse formole dunque avremo anche il polinomio integrale di grado n della equazione medesima quando per gli stessi valori di z si abbia anche

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\,a''_0 + n\,a'_1 + a_2 = 0 \tag{53}$$

essendo n un numero zero o intero e positivo pel quale questa equazione cogli indicati valori di z risulti soddisfatta, e escludendo ora il caso in cui di valori di n che soddisfino a questa equazione se ne abbiano due perchè, come ora vedremo, questo caso non può presentarsi quando deve essere soddisfatta anche la (52).

Ora quando per gli stessi valori di z devono essere soddisfatte insieme per valori interi e positivi di n e di k ($n=0$ incl.) la (52) e la (53), si vede che dovremo avere $[k\,(k+1) - n\,(n-1)]\,a''_0 - 2\,(k+n)\,a'_1 = 0$, ovvero

$$k - n + 1 = \frac{2\,a'_1}{a''_0}, \tag{54}$$

quando, se non sarà al tempo stesso $a'_1 = 0$, si escluda il caso di $a''_0 = 0$; quindi quando questa condizione (54) sia soddisfatta le formole trovate, col determinare convenientemente, occorrendo, le costanti che vi figurano, daranno sempre il polinomio integrale di grado n della (43).

E poichè per potere soddisfare alla (54) si richiederà che $\frac{2\,a'_1}{a''_0}$ sia intero e si abbia $n - 1 + \frac{2\,a'_1}{a''_0} > 0$, questo escluderà, come dicemmo, che oltre ad n vi possa essere un altro valore intero e positivo n_1 che soddisfi alla (53), perchè allora dovendo essere $n + n_1 = 1 - \frac{2\,a'_1}{a''_0}$ ne verrebbe $n_1 < 0$.

Nel caso poi, che abbiamo detto di escludere, nel quale si ha $a''_0 = 0$ senza che sia al tempo stesso $a'_1 = 0$, la (52) e (53) non potrebbero essere soddisfatte insieme altro che quando fosse $n = k = 0$, e allora si avrebbe il solo polinomio integrale $y = \text{cost.}$ di grado zero.

Così pure il caso nel quale si abbia contemporaneamente $a''_0 = 0$ e $a'_1 = 0$ non può dare luogo che al polinomio integrale corrispondente a $a_2 = 0$ che sarà ancora quello di grado zero o $y = \text{cost.}$

32. Nel caso dunque delle equazioni del § 15, cioè di quelle della forma

$$(x - a)(b - x)\, y'' + (\mu + \nu x)\, y' + a_2 y = 0, \tag{55}$$

essendo allora $a''_0 = -2$, $a'_1 = \nu$, le formole del § 30 a causa delle (54) daranno un polinomio integrale solo quando si possa avere $k = n - (1 + \nu)$ con k intero e positivo (zero escl.), ciò che richiederà che ν sia un numero intero e sia $n \geqq 2 + \nu$; mentre quando questo non possa essere daranno soltanto quell'integrale della stessa equazione che è regolare per $x = a$.

Ora, nel caso della equazione (55), avendosi colle notazioni del § 15

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{\mu + \nu x}{(x - a)(b - x)} = \frac{1}{b - a}\left[\frac{\mu + \nu a}{x - a} + \frac{\mu + \nu b}{b - x}\right] = \frac{q}{x - a} + \frac{q + \nu}{b - x},$$

e quindi potendo prendere, come già facemmo altra volta,

$$\int \frac{a_1}{a_0}\, dx = q \log (x - a) - (q + \nu) \log (b - x),$$

il valore (48) di y viene a presentarsi sotto la forma

$$y = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left((x - a)^{k-q}(b - x)^{k+q+\nu}\left[\frac{\beta}{\pi (k - 1)} \int \frac{(x - a)^{q-2}}{(b - x)^{k+1+q+\nu}}\, dx + c\right]\right), \tag{56}$$

e rappresenta sempre un integrale regolare di quella equazione (55) che corrisponde ai valori di z o di a_2 pei quali si ha $k(k + 1) - k\nu + a_2 = 0$; e così in particolare quando ν sia zero o un numero intero qualsiasi (positivo o negativo), pei valori zero o interi e positivi di n pei quali sia $n \geqq 2 + \nu$, facendo nella precedente $k = n - (1 + \nu)$, si avrà la formola seguente

$$y = \frac{d^{n-2-\nu}}{dx^{n-2-\nu}}\left((x - a)^{n-(1+\nu+q)}(b - x)^{n-1+q}\left[\frac{\beta}{\pi(n - 2 - \nu)} \int \frac{(x - a)^{q-2}}{(b - x)^{n+q}}\, dx + c\right]\right); \tag{57}$$

che allora rappresenterà il polinomio integrale di grado n della nostra equazione (55). Ciò sempre, bene inteso, quando questa formola per $x = a$ dia valori finiti per y e per y' almeno per un valore conveniente della costante c e risulti inoltre $\beta = (a_1 - a'_0)_a \, y_a$.

In particolare quindi quando debba essere $y_a = 0$, ciò che oltre a darci $\beta = 0$ porterà, come dicemmo sopra al § 30, che sia $a_1 = \nu(x-a)$ o $\mu + \nu a = 0$ e quindi $q = 0$, avremo

$$y = c \frac{d^{n-2-\nu}}{d x^{n-2-\nu}} \left((x-a)^{n-1-\nu} (b-x)^{n-1}\right) \tag{58}$$

pei polinomii integrali di grado n, per $n \geqq 2 + \nu$, della equazione

$$(x-a)(x-b) y'' + \nu (x-a) y' + a_2 y = 0; \tag{59}$$

e, più particolarmente ancora, per la equazione

$$(x-a)(x-b) y'' + a_2 y = 0 \tag{60}$$

che corrisponde a $\nu = 0$ avremo

$$y = c \frac{d^{n-2}}{d x^{n-2}} \left((x-a)^{n-1} (b-x)^{n-1}\right), \tag{61}$$

pei polinomii integrali di grado superiore al primo.

E se saremo nell'altro caso particolare che porta pure $\beta = 0$, cioè in quello di $(a_1 - a'_0)_a = 0$ pel quale si ha $\mu + \nu a = b - a$ e quindi $q = 1$, e la equazione (55) viene ad essere la seguente

$$(x-a)(b-x) y'' + \{ b - a + \nu (x-a) \} y' + a_2 y = 0, \tag{62}$$

allora pei polinomii integrali di grado n di questa equazione a incominciare da quelli pei quali $n \geqq 2 + \nu$ avremo

$$y = c \frac{d^{n-2-\nu}}{d x^{n-2-\nu}} \left((x-a)^{n-2-\nu} (b-x)^{n}\right). \tag{63}$$

E così quando ν è un numero intero negativo qualsiasi inferiore a -1 avremo da questa formola i polinomii integrali di tutti i gradi, e lo stesso potremo dire anche pel caso di $\nu = -1$ perchè allora questa formola tralascierà di darci solo quello di grado zero sul quale non è il caso di fermarsi essendo esso una costante.

In particolare quando sia $\nu = -2$, ciò che corrisponde ad essere $a'_1 = a''_0$ e ci porta quindi nel caso della equazione

$$(x-a)(b-x) y'' + (b + a - 2x) y' + a_2 y = 0, \tag{64}$$

si avranno i polinomii integrali di tutti i gradi per mezzo della formola

$$y = c \frac{d^n}{d x^n} \left((x-a)^n (b-x)^n \right) \cdot \tag{65}$$

E più particolarmente ancora nel caso delle funzioni X_n, per le quali $a = -1$, $b = 1$ e $a_2 = n(n+1)$, si ritrova la formola notissima

$$X_n = c \frac{d^n (1-x^2)^n}{d x^n},$$

33. Nel caso poi delle equazioni del § 24, cioè di quelle della forma

$$(x-a) y'' + (\mu + \nu x) y' + a_2 y = 0 \tag{66}$$

osservando che si ha $\frac{a_1}{a_0} = \frac{\mu + \nu x}{x-a} = \frac{\mu + \nu a}{x-a} + \nu$, e quindi si può prendere $\int \frac{a_1}{a_0} d x = (\mu + \nu a) \log (x-a) + \nu x = \log (x-a)^\chi + \nu x$ quando si ponga come al § 24 $\chi = \mu + \nu a$, si vede per la (48) che la formola

$$y = \frac{d^{k-1}}{d x^{k-1}} \left\{ (x-a)^{k-\chi} e^{-\nu x} \left[\frac{\beta}{\pi (k-1)} \int (x-a)^{\chi-2} e^{\nu x} d x + c \right] \right\} \tag{67}$$

darà l'integrale regolare nel punto $x = a$ della stessa equazione pei valori di z pei quali si ha ora

$$a_2 = k \nu, \tag{68}$$

nel supposto che per $x = a$ i valori di y e di y'_a risultino finiti.

E poichè questa equazione $a_2 = k \nu$ con $k \geq 1$ non può sussistere insieme all'altra $a_2 + n \nu = 0$ alla quale si riduce quella relativa ai polinomii integrali altro che quando sia $\nu = 0$ e $a_2 = 0$, nel qual caso si ha allora il solo polinomio integrale di grado zero, così, tolto questo caso di $\nu = 0$, la formola (67) relativa alla equazione (66) corrispondente ai valori di z pei quali $a_2 = k \nu$ non darà mai un polinomio integrale della stessa equazione, come del resto risulta in generale anche da quanto dicemmo in fine del § 31.

Essa poi nel caso in cui si abbia $\beta = 0$ per essere $y_a = 0$, ciò che porta che sia $\chi = \mu + \nu a = 0$ e corrisponde quindi alla equazione

$$(x-a) y'' + \nu (x-a) y' + a_2 y = 0 \tag{69}$$

dà luogo all'integrale di questa equazione

$$y = \frac{c\, d^{k-1} \{ (x-a)^k e^{-\nu x} \}}{d x^{k-1}} \tag{70}$$

che è regolare nel punto a sempre nel caso che z soddisfi alla condizione $a_2 = k\nu$; e quando si abbia $\beta = 0$ per essere $(a_1 - a'_0)_a = 0$ o $\chi = \mu + \nu a = 1$, cioè quando si abbia la equazione

$$(x-a)\,y'' + \{1 + \nu(x-a)\}\,y' + a_2\,y = 0 \tag{71}$$

dà luogo alla formola

$$y = c\,\frac{d^{k-1}\{(x-a)^{k-1}\,e^{-\nu x}\}}{d\,x^{k-1}} \tag{72}$$

che dà l'integrale che è regolare nel punto a per la stessa equazione (71) quando a_2 soddisfa alla condizione precedente $a_2 = k\nu$.

34. Prendiamo infine a trattare anche il caso della equazione

$$a_0\,y'' + \nu(x-\alpha)\,y' + a_2\,y = 0 \tag{73}$$

nella quale a_0 è una costante, e che noi già considerammo nel § 25 trovando che essa ha polinomii integrali di tutti i gradi quando ν non è zero.

Osservando che per questa equazione si può prendere $\int \frac{a_1}{a_0}\,dx = \frac{\nu(x-\alpha)^2}{2a_0}$, si vede per la (47) che avremo la formola

$$y = \frac{d^{k-1}}{d\,x^{k-1}}\left(\frac{e^{-\frac{\nu(x-\alpha)^2}{2a_0}}}{a_0}\int_\alpha^x \left\{\frac{\beta\,(x-\alpha)^{k-1}}{\pi\,(k-1)} + \frac{\gamma\,(x-\alpha)^{k-2}}{\pi\,(k-2)}\right\} e^{\frac{\nu(x-\alpha)^2}{2a_0}}\,d\,x\right), \tag{74}$$

nella quale il termine $\frac{\gamma\,(x-\alpha)^{k-2}}{\pi\,(k-2)}$ dovrà tralasciarsi quando sia $k = 1$, e questa formola ci darà l'integrale della equazione (73) corrispondente ai valori di z pei quali avremo $a_2 = k\nu$ con k diverso da zero e intero e positivo; e questo integrale sarà l'integrale generale della medesima equazione perchè per essa avremo $\beta = a_0\,y'_\alpha$ e $\gamma = a_0\,y_\alpha$, e β e γ potranno considerarsi come costanti arbitrarie.

Però, per quanto dicemmo in generale in fine del § 31, questi integrali (74) non corrisponderanno mai a polinomii integrali quando come al § 25 si escluda il caso di $\nu = 0$.

35. Dopo avere limitato i nostri studii alle equazioni lineari del second'ordine per le quali risultano soddisfatte le varie condizioni poste nel § 2, il che portò che i coefficienti a_0, a_1 e a_2 dovessero rientrare nelle formole (4) del § 3 colle condizioni che allora si posero per le costanti A e B

e per h, volendo poi nel § 8 considerare i casi di esistenza di un numero infinito di polinomii integrali per queste equazioni dovemmo porre anche la condizione (che dopo fu sempre ammessa) che le costanti B_0 e B_1 che figurano in a_0 e a_1 non fossero zero insieme, e neppure fosse zero l'altra B'_2 che figura in a_2.

Ora vogliamo considerare anche i principali fra questi casi di $B_0 = B_1 = 0$ che finora escludemmo pei quali non si hanno mai infiniti polinomii integrali.

36. Prendendo perciò ora con $B_0 = B_1 = 0$, $A_0 = 1$ e $\alpha = 0$, cosa che evidentemente può farsi senza scemare la generalità, e cambiando per semplicità $A_2 + A'_2 \varphi(z)$, $B_2 + B'_2 \varphi(z)$, e A_1 in α, β e ν, si vede che i casi che ora possono presentarsi sono soltanto i tre seguenti:

1.° per $h = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \beta x^{p-2}$ con $p \geqq 2$,

2.° per $h = 1$, $a_0 = x$, $a_1 = \nu$, $a_2 = \beta x^{p-1}$ con $p \geqq 1$,

3.° per $h = 2$, $a_0 = x^2$, $a_1 = \nu x$, $a_2 = \alpha + \beta x^p$ con $p \geqq 1$,

dovendo ora però il β, nei due primi casi, e una almeno delle due quantità α e β, nel terzo, dipendere da z, senza escludere ora, quando si voglia, che anche il ν nei due casi possa pure contenere z; e poichè nel primo caso i due integrali della equazione corrispondente sono evidentemente funzioni intere di x perchè $a_0 = 1$ e p è intero e positivo e non inferiore a 2 non ci fermeremo punto su esso.

Quanto poi al terzo caso (che comprende quello delle note funzioni di Bessel $I_n(xz)$ che corrisponde a $\nu = 1$, $\alpha = -n^2$, $\beta = z^2$, $p = 2$) osserveremo che col porre $y = x^g u$, con g costante da determinarsi e u nuova funzione incognita, la equazione corrispondente si riduce subito alla stessa forma di quella che corrisponde al secondo caso, perchè si riduce all'altra

$$x u'' + (2g + \nu) u' + \beta x^p u = 0,$$

quando la costante g si determini prendendo per essa una delle radici della equazione di secondo grado $g(g-1) + g\nu + \alpha = 0$ (che nel caso delle funzioni di Bessel dà $g = \pm n$); quindi basterà che noi ci limitiamo a considerare le equazioni della forma

$$x y'' + \nu y' + \beta x^\gamma y = 0 \tag{75}$$

con γ zero o intero e positivo, intendendo ora che la quantità finora indicata con p pel secondo dei tre casi indicati sopra corrisponda in questa equazione (75) a $\gamma+1$, e nel terzo caso corrisponda precisamente a γ, nel qual caso la quantità che trovasi ora indicata con ν nella (75) corrisponde a quella che già avevamo indicata pure con ν nello stesso caso ma aumentata di $2g$, essendo g quella delle due radici della equazione precedente che sarà stata scelta per fare il cambiamento di y in $x^g y$.

Se poi, per semplicizzare ancora, cambieremo la variabile x in t^λ, con che la equazione precedente, valendosi delle solite formole del cambiamento della variabile indipendente, diverrà

$$t y'' + (1-\lambda-\lambda\nu) y' + \lambda^2 \beta t^{\lambda(\gamma+1)-1} y = 0,$$

allora prendendo $\lambda = \dfrac{1}{\gamma+1}$ (cosa che potrà sempre farsi perchè γ è zero o un numero intero positivo) la equazione precedente (75) si trasformerà nell'altra

$$t y'' + \frac{\gamma+\nu}{\gamma+1} y' + \frac{\beta}{(\gamma+1)^2} y = 0,$$

e qualunque sia ν potremo prenderla sotto la forma

$$t y'' + \mu y' + \chi y = 0$$

ponendo $\mu = \dfrac{\gamma+\nu}{\gamma+1}$ o $\nu = \mu(\gamma+1)-\gamma$ e $\dfrac{\beta}{(\gamma+1)^2} = \chi$; e potendo quindi μ avere qualunque valore, e anche dipendere da z in relazione al valore primitivo che avevamo per ν.

37. Ridotti così i varii casi da considerarsi a quello di questa equazione semplicissima nella quale μ e x non contengono la variabile t (ma una almeno di esse conterrà z), basta osservare che colla derivazione dà luogo immediatamente alle altre

$$t y''' + (\mu+1) y'' + \chi y' = 0,$$
$$t y^{\text{IV}} + (\mu+2) y''' + \chi y'' = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$t y^{(n)} + (\mu+n-2) y^{(n-1)} + \chi y^{(n-2)} = 0,$$

per vedere subito che partendo dal punto $t=0$ essa rientra fra quelle del § 2, e se μ non è zero nè un numero intero negativo si ha subito per un suo integrale

$$y = y_0 \left\{ 1 - \frac{\chi t}{\mu \pi(1)} + \frac{\chi^2 t^2}{\mu(\mu+1)\pi(2)} - \frac{\chi^3 t^3}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\pi(3)} + \dots \right\}$$

in serie convergente in tutto il piano delle t; mentre se μ è un numero intero negativo o zero $-m$, allora la derivata $y^{(m)}$, come tutte le derivate precedenti $y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$ e la funzione y, saranno zero per $t=0$, e l'integrale avrà la forma

$$y = -y_0^{(m+1)} \chi\, t^{m+1} \left\{ \frac{1}{\pi(m+1)} - \frac{\chi t}{\pi(1)\pi(m+2)} + \frac{\chi^2 t^2}{\pi(2)\pi(m+3)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\chi^3 t^3}{\pi(3)\pi(m+4)} + \cdots \right\};$$

e quindi riponendo $x^{\frac{1}{\lambda}}$ o $x^{\gamma+1}$ al posto di t per ritornare alla equazione (75) e continuando ad indicare con χ il rapporto $\frac{\beta}{(\gamma+1)^2}$ e con μ l'altro $\frac{\gamma+\nu}{\gamma+1}$, e osservando che quando $\mu = \frac{\gamma+\nu}{\gamma+1} = -m$ si ha $(m+1)(\gamma+1) = 1-\nu$, si vede che quando μ non è zero nè un numero intero negativo la equazione (75) ha un integrale funzione intera di x dato dalla formola

$$y = y_0 \left\{ 1 - \frac{\chi x^{\gamma+1}}{\mu\,\pi(1)} + \frac{\chi^2 x^{2(\gamma+1)}}{\mu(\mu+1)\pi(2)} - \frac{\chi^3 x^{3(\gamma+1)}}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\pi(3)} + \cdots \right\}, \qquad (76)$$

e quando μ è zero o un numero intero negativo $-m$, ciò che porta che ν sia un numero diverso da zero e intero e negativo della forma $-\gamma - m(\gamma+1)$ o $1-(m+1)(\gamma+1)$, la stessa equazione avrà pure un integrale funzione intera di x pel quale si avrà

$$\left.\begin{aligned} y = -y_0^{(m+1)} \chi\, x^{1-\nu} \Big\{ \frac{1}{\pi(m+1)} - \frac{\chi x^{\gamma+1}}{\pi(1)\pi(m+2)} + \frac{\chi^2 x^{2(\gamma+1)}}{\pi(2)\pi(m+3)} - \\ - \frac{\chi^3 x^{3(\gamma+1)}}{\pi(3)\pi(m+4)} + \cdots \Big\}, \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

per modo che in tutti i casi esiste sempre un integrale della equazione (75) che è una funzione intera di x, o se si vuole anche funzione intera di $\chi^{\frac{1}{\gamma+1}} x$.

38. Trovato ora per ogni caso questo integrale della equazione (75), se ne potrà sempre avere un secondo coi processi noti pei quali indicando con P_ν l'integrale trovato, e con $\overline{P}_\nu$ l'altro integrale corrispondente, avremo

$$\overline{P}_\nu = P_\nu \int \frac{dx}{x^\nu P_\nu^2}, \qquad (78)$$

e siccome per proprietà note delle equazioni lineari del second'ordine (che si riscontrano anche subito), gli infinitesimi che il P_ν avesse *fuori del punto* $x=0$ non possono essere che del prim'ordine, e sotto l'integrale lo stesso P_ν figura nel denominatore al quadrato mentre fuori vi figura come fattore, è certo (come del resto risulta anche dalle teorie generali) che il secondo integrale $\bar{P}_\nu$ non potrà avere singolarità altro che nel punto $x=0$.

Ora se il rapporto $\mu=\frac{\gamma+\nu}{\gamma+1}$ è un numero intero e negativo o zero $-m$, ciò che corrisponde ad essere $\nu=-\gamma-m(\gamma+1)$ o $\nu=1-(m+1)(\gamma+1)$, allora essendo P_ν dato dalla (77) il denominatore sotto l'integrale della formola (78) verrà ad essere della forma $x^{1+(m+1)(\gamma+1)}\,G(x^{\gamma+1})$, essendo $G(x^{\gamma+1})$ una funzione intera di $x^{\gamma+1}$ che per $x=0$ è diversa da zero e uguale a $\left(\frac{y_0^{(m+1)}\chi}{\pi(m+1)}\right)^2$; quindi poichè per questo la funzione $\frac{1}{G(x^{\gamma+1})}$ entro un certo cerchio col centro nel punto $x=0$ si svilupperà in serie della forma

$$A_0+A_1x^{\gamma+1}+A_2x^{2(\gamma+1)}+A_3x^{3(\gamma+1)}+\cdots$$

nella quale $A_0=\left(\frac{\pi(m+1)}{y_0^{(m+1)}\chi}\right)^2$, così calcolando l'integrale che figura nella (78) e avendo riguardo al valore (77) di P_ν nel quale $1-\nu=(m+1)(\gamma+1)$, si può intanto evidentemente affermare che in questo caso in cui ν è un numero diverso da zero ma intero e negativo della forma $-\gamma-m(\gamma+1)$ o $1-(m+1)(\gamma+1)$ con m zero o intero e positivo, l'integrale P_ν potrà porsi sotto la forma

$$\bar{P}_\nu=L_\nu+A_{m+1}\,P_\nu\log x,\tag{79}$$

essendo L_ν una funzione fratta di x che procede secondo le potenze intere negative e positive di $x^{\gamma+1}$ a incominciare dalla potenza negativa $x^{-(m+1)(\gamma+1)}$ o $x^{\nu-1}$, cioè essendo precisamente

$$L_\nu=-\frac{A_0}{(m+1)(\gamma+1)\,x^{(m+1)(\gamma+1)}}-\frac{A_1}{m(\gamma+1)\,x^{m(\gamma+1)}}-\cdots$$
$$-\frac{A_m}{(\gamma+1)\,x^{\gamma+1}}+\frac{A_{m+2}\,x^{\gamma+1}}{\gamma+1}+\frac{A_{m+3}\,x^{2(\gamma+1)}}{2(\gamma+1)}+\cdots$$

dove i coefficienti $A_0, A_1,\ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1},\ldots$ sono quelli dello sviluppo precedente di $\frac{1}{G(x^{\gamma+1})}$ nel quale A_0 ha il valore diverso da zero $\left(\frac{\pi(m+1)}{y_0^{(m+1)}\chi}\right)^2$.

Se poi μ non sarà zero nè un numero intero e negativo $-m$, allora per P_ν avremo la formola (76) che per $x=0$ non si annulla, quindi per la (78) quando sia $\nu = 1 + k(\gamma+1)$ con k diverso da zero e intero e positivo qualsiasi, $\overline{P}_\nu$ sarà della forma

$$\overline{P}_\nu = \left(\frac{A_0 + A_1 x^{\gamma+1} + A_2 x^{2(\gamma+1)} + \cdots + A_{k-1} x^{(k-1)(\gamma+1)}}{x^{\nu-1}} + A_k \log x\right) P_\nu + L_\nu, \quad (80)$$

e per $\nu = 1$ sarà

$$\overline{P}_\nu = A_0 P_1 \log x + L_1, \quad (81)$$

col coefficiente A_0 in ambedue questi casi diverso da zero; mentre per tutti gli altri valori positivi o negativi di ν (zero incluso) che non rientrano nella prima forma considerata sopra di $\nu = 1 - (m+1)(\gamma+1)$ con m zero o intero e positivo, avremo invece

$$\overline{P}_\nu = \frac{L_\nu}{x^{\nu-1}}, \quad (82)$$

essendo anche in queste ultime tre formole la L_1 e le L_ν funzioni intere di x ordinate ancora per le potenze intere e positive di $x^{\gamma+1}$, e delle quali quella che figura nella (82) per $x=0$ non si annulla; per modo che, avendo riguardo alla (82), si può ora anche affermare che *quando* ν *sia zero o un numero intero negativo che* non *rientri nella prima forma indicata sopra* $-\gamma - m(\gamma+1)$ o $1-(m+1)(\gamma+1)$ *con* m *zero o intero e positivo,* anche questo integrale $\overline{P}_\nu$ sarà, come P_ν, una funzione intera di x, e si annullerà per $x=0$, cioè: i *due integrali* P_ν e $\overline{P}_\nu$ della nostra equazione *saranno ambedue funzioni intere di* x *nell'intorno di* $x=0$.

39. Ciò premesso, riportiamoci agli studii generali della Memoria precedente sulle equazioni del second'ordine e, come in quella Memoria, prendiamo a considerare il solito integrale $\int_a^b \Theta_c \overline{y} X \, dx$, essendo $\overline{y}$ un integrale normale della equazione (75) che ora consideriamo, che si mantiene regolare in tutto l'intervallo (a, b) e pel quale le condizioni ai limiti a e b sono le solite due

$$h_0 \overline{y}_b + h_1 \overline{y}'_b = 0 \text{ per } x=b, \quad \text{e} \quad k_0 \overline{y}_a + k_1 \overline{y}'_a = 0 \text{ per } x=a, \quad (83)$$

supponendo che l'intervallo (a, b) sia tutto dalla parte positiva o tutto dalla parte negativa onde non abbia nel suo *interno* il punto $x=0$ nel quale il coefficiente a_0 di y'' è zero, ma possa terminare a questo punto, nel qual caso non si porrà la seconda condizione (quella relativa al punto a) la quale però, dovendo $\overline{y}$ essere regolare anche per $x=a$ insieme alle derivate prima e seconda, potremo dire ancora che vi sia e sia quella che viene dalla equazione stessa (75), cioè la $\nu y'_a=0$, quando non è $\nu=0$ e anche γ è diverso da zero.

Intendiamo ora per semplicità che nelle nostre formole sia cambiato β in z o meglio in $z^{\gamma+1}$ e quindi χ in $\frac{z^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^2}$, cioè intendiamo che la equazione (75) da considerarsi sia la seguente

$$x y'' + \nu y' + z^{\gamma+1} x^\gamma y = 0, \tag{84}$$

e nel caso di $\nu = 1-(m+1)(\gamma+1)$ cambiamo nella (77) la costante $y_0^{(m+1)}$ nell'altra $y_0^{(m+1)}\chi^m$. Allora in ogni caso la funzione che abbiamo indicata con P_ν oltre ad essere sempre una funzione intera di x sarà funzione intera anche di xz e di z; e così, moltiplicandola ove occorra per una potenza adattata di z potremo ridurre funzione intera di z (se non di x e di xz a causa dei termini logaritmici e delle potenze negative di x che talvolta possono esserci) anche la $\overline{P}_\nu$.

40. Seguendo ora i procedimenti generali della Memoria precedente, prendiamo per quegli integrali che allora indicammo con w_1 e w_2 respettivamente le funzioni P_ν e $\overline{P}_\nu$ così modificate, e osserviamo che per l'attuale equazione (75) si avrà $\Theta_c = \frac{1}{x} e^{\int_c^x \frac{\nu}{x} dx}$, e quindi si potrà prendere $\Theta_c = x^{\nu-1}$ supponendo $c=1$.

Allora se l'intervallo (a, b) che consideriamo non comprenderà il punto $x=0$ neppure agli estremi, le nostre funzioni Θ_c, P_ν e $\overline{P}_\nu$ non presenteranno nessuna singolarità fra a e b e potremo applicare senz'altro i risultati della Memoria del Tomo XII di questi *Annali*, ma se l'intervallo stesso comprenderà il punto $x=0$ e sarà ad es. $a=0$ con b numero positivo qualsiasi, allora bisognerà limitarsi ai casi nei quali per l'intorno a destra di $x=0$ sono soddisfatte le condizioni A), B) e C) del § 11 della Memoria precedente relative ai prodotti $\Theta_c \overline{P}_\nu X$ e $\Theta_c P_\nu X$ e ai loro integrali moltiplicati respettivamente per P_ν e P'_ν, e per $\overline{P}_\nu$ e $\overline{P}'_\nu$.

Ora, osservando che quando ν è positivo e qualsiasi si ha sempre per P_ν la formula (76), mentre per $\overline{P}_\nu$ si hanno le (80), (81) o (82) basta considerare separatamente i varii casi nei quali per P_ν si hanno queste formole per riscontrare subito che le ricordate condizioni *A*), *B*) e *C*) del § 11 della Memoria precedente sono sempre soddisfatte quando, come supponiamo, X è sempre finita e atta alla integrazione anche nell'intorno a destra del punto $x=0$.

Invece se ν è intero e negativo della forma considerata dapprima $1-(m+1)(\gamma+1)$, come anche se ν è zero o ha un altro valore negativo qualsiasi, i prodotti stessi $\Theta_c P_\nu X$ e $\Theta_c \overline{P}_\nu X$ non sono entrambi integrabili nell'intorno a destra di $x=0$, a meno che non si ponga la condizione che X per $x=0$ a destra divenga infinitesimo almeno di un certo ordine; e in particolare se $\nu=0$ o ha un valore negativo che non rientri nella solita forma $1-(m+1)(\gamma+1)$, allora basterà che X divenga infinitesimo per $x=0$ a destra di un ordine superiore a $-\nu$ anche soltanto per una potenza superiore alla prima di $\frac{1}{\log x}$.

41. Tutto questo ammesso, basta ora ricordare quanto si disse al § 43 della Memoria del Vol. XII di questi *Annali*, e ai §§ 10 e 11 della Memoria precedente per potere affermare che *nel caso di* $a>0$ *si avrà* $X=0$ *in tutto l'intervallo* (a, b) se la espressione

$$\left.\begin{array}{l}[k_0 P_\nu(a z)+k_1 z P'_\nu(a z)]\,(h_0 \overline{P}_\nu+h_1 \overline{P}'_\nu)_b - \\ -(k_0 \overline{P}_\nu+k_1 P'_\nu)_a\,[h_1 P_\nu(b z)+h_1 z P_\nu(b z)]\end{array}\right\} \tag{85}$$

non sarà identicamente nulla qualunque sia z e i suoi infinitesimi a distanza finita α_i saranno tutti del prim'ordine e al tempo stesso per ciascuno di questi infinitesimi α_n si avrà sempre

$$\int_a^b x^{\nu-1}\,\overline{y}_i X\,d x=0 \tag{86}$$

essendo $\overline{y}_i$ l'integrale normale della equazione (84) corrispondente al valore α_i di z quando le condizioni ai limiti a e b degli integrali normali sono le due (79). E s'intende nella (85) che le derivate $P'_\nu(a z)$ e $P'_\nu(b z)$ sieno prese rispetto ad $a z$ e a $b z$ respettivamente come se $a z$ o $b z$ corrispondessero ad una variabile t.

E se il determinante (85) sarà identicamente nullo, allora avremo ancora $X=0$ per tutti i valori di x da a a b quando si abbia la condizione

$\int_a^b x^{\nu-1} \bar{y} X d x = 0$ per gli integrali normali della equazione (84) per qualunque valore di z.

42. Nel caso poi di $a = 0$, allora poichè per quanto si disse ai §§ 10 e 11 della Memoria precedente è assicurata l'esistenza di un integrale normale funzione intera di z per la equazione completa $x y'' + \nu y' + z^{\gamma+1} x^{\gamma} y = X$ nella quale ora supporremo $\nu > 0$ si potrà affermare che anche *in questo caso di* $a = 0$ *si avrà sempre* $X = 0$ *per tutti i valori di* x *da* a *a* b quando per tutti gli infinitesimi α_i della funzione

$$h_0 P_\nu (b z) + h_1 z P'_\nu (b z) \tag{87}$$

si abbia

$$\int_0^b x^{\nu-1} P_\nu (x . \alpha_i) X d x = 0;$$

nè vi ha bisogno ora di richiedere che gli infinitesimi di questa funzione (87) siano tutti del prim'ordine perchè, come dicemmo, l'esistenza dell'integrale normale della equazione completa è assicurata per le considèrazioni fatte nella Memoria precedente. E se nella equazione data (84) considereremo anche il caso in cui ν sarà zero o avrà un valore negativo compreso fra 0 e $-\gamma$ ($-\gamma$ escl.), quest'ultimo teorema sussisterà ancora quando in qualche modo si sappia che la funzione X nell'intorno a destra del punto $x = 0$ deve divenire infinitesimo di un ordine che è superiore a $-\nu$ anche soltanto logaritmicamente per una potenza di $\frac{1}{\log x}$ superiore alla prima.

43. Aggiungiamo infine che gli infinitesimi diversi da zero della espressione (87) che evidentemente sono sempre del prim'ordine quando uno dei coefficienti h_0 e h_1 è zero, hanno questa particolarità anche quando nè h_0 nè h_1 sono zero quando se ne eccettuino tutt'al più $\gamma + 1$.

Ammettendo infatti che la espressione avesse un infinitesimo z di ordine superiore al primo, per questo valore di z dovremmo avere contemporaneamente le due equazioni

$$h_0 P_\nu (b z) + h_1 z P'_\nu (b z) = 0,$$

$$(h_0 b + h_1) P'_\nu (b z) + h_1 b z P''_\nu (b z) = 0,$$

le derivate intendendosi prese rispetto a $b z$; e siccome quando le derivate siano così intese la (84) ci dà l'altra

$$b\,z\,P''_\nu(b\,z) + \nu\,P'_\nu(b\,z) + b^\nu z^\gamma P_\nu(b\,z) = 0,$$

sostituendo si vede che dovremmo avere insieme le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} h_1\,z\,P'_\nu(b\,z) + h_0\,P_\nu(b\,z) = 0, \\ (h_0\,b + h_1 - h_1\,\nu)\,P'_\nu(b\,z) - h_1\,b^\gamma z^\gamma P_\nu(b\,z) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

e queste, non potendo essere zero insieme per z diverso da zero le $P_\nu(b\,z)$ e $P'_\nu(b\,z)$, dànno luogo all'altra

$$h_1^2\,b^\gamma z^{\gamma+1} = -\,h_0\,(h_0\,b + h_1 - h_1\,\nu),$$

la quale determina completamente il valore di $(b\,z)^{\gamma+1}$ dandoci

$$(b\,z)^{\gamma+1} = -\,\frac{h_0\,b\,(h_0\,b + h_1 - h_1\,\nu)}{h_1^2},$$

e conduce quindi a $\gamma+1$ valori diversi di z, dovendo escludere il caso di $h_0\,b + h_1 - h_1\,\nu = 0$ che darebbe $z=0$; e così, poichè la prima delle precedenti (88) moltiplicata per b non ha altro che termini con potenze intere di $(b\,z)^{\gamma+1}$, basterà sostituirvi il valore precedente per trovare la relazione che deve sussistere fra h_0, h_1, b e $\gamma+1$ perchè la espressione (86) possa avere effettivamente i detti $\gamma+1$ infinitesimi di ordine superiore al primo; mentre quando non sussista questa relazione non potranno aversi mai infinitesimi di ordine superiore al primo per la detta espressione (87).

Pisa, Agosto 1910.

Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

Mi sono occupato in una precedente Memoria (Vedi questi *Annali*, Tomo XVIII, pag. 1) (*) di quelle deformazioni continue delle superficie pseudosferiche, nelle quali le trajettorie descritte dai singoli punti tagliano sotto angolo costante σ ciascuna superficie del sistema (**), ed ho ivi dimostrato che a questi sistemi (Σ) di *deformate isogonali della pseudosfera* sono applicabili i metodi della trasformazione complementare e di quella di Bäcklund, nella stessa arbitrarietà come alle superficie pseudosferiche isolate.

In questa seconda Memoria estendo le ricerche, nel senso già indicato nella prima, ai sistemi di deformate isogonali delle superficie a curvatura costante in uno spazio qualunque di curvatura costante K, positiva o negativa. La trattazione analitica del problema differisce ben poco, come si vedrà, da quella che ci ha servito nel caso di $K=0$ (spazio euclideo), e basterà indicare le differenze, che provengono dalla curvatura dello spazio. Come risultato finale della ricerca, si trova che, *eccettuato il caso dei sistemi* (Σ) *di superficie a curvatura assoluta nulla in geometria ellittica*, i sistemi (Σ) di deformate isogonali delle superficie a curvatura costante, in geometria ellittica ed iperbolica, derivano *biunivocamente* da quelli delle deformate della pseudosfera in geometria euclidea. Le singole superficie corrispondenti dei due sistemi nei due spazii sono *coniugate in deformazione*, nel senso stabilito

(*) Le citazioni che si riferiscono a questa Memoria si indicheranno con (M).

(**) Ricordo che l'angolo σ può essere una costante assoluta, ma anche, più in generale, può variare con continuità dall'una all'altra superficie pseudosferica.

al Vol. III delle mie *Lezioni* (Cap. V, cf. § 78), cioè si corrispondono per sistemi coniugati *attuali e virtuali.* Le proprietà di quella trasformazione, che ivi ho chiamato la *trasformazione H*, vengono così estese, dalle superficie a curvatura costante isolate, ai loro sistemi (Σ) di deformate isogonali, e le costruzioni date dalla trasformazione complementare, come dalla generale di Bäcklund, si trasportano dai sistemi (Σ) dello spazio euclideo ai coniugati in deformazione nello spazio a curvatura costante, semplicemente conducendo i raggi delle nuove congruenze nelle direzioni corrispondenti a quelle delle primitive. Ha poi luogo la proprietà fondamentale che i rispettivi sistemi trasformati sono, alla loro volta, coniugati in deformazione, ciò che si può esprimere brevemente così: *La trasformazione H, che dai sistemi di deformate isogonali della pseudosfera nello spazio euclideo conduce ai sistemi corrispondenti degli spazî a curvatura costante, è permutabile colla trasformazione complementare e con quella di* Bäcklund.

In tutto ciò che finora abbiamo detto debbono intendersi dapprima esclusi i sistemi (Σ) di superficie a curvatura assoluta nulla in geometria ellittica, vale a dire i sistemi di deformate isogonali della superficie di Clifford, poichè di questa ultima superficie non esiste coniugata in deformazione nello spazio euclideo. Però la effettiva ricerca, che per questi sistemi (Σ) deve compiersi direttamente, dimostra che sussistono ancora, come nel caso generale, i risultati relativi alle trasformazioni, ed altre nuove proprietà vengono ad aggiungersi, che appartengono esclusivamente a questo caso singolare.

Negli ultimi paragrafi di questa Memoria si ritorna ancora al soggetto della prima nello spazio euclideo per trattare un caso limite ivi trascurato, e cioè quello delle *deformazioni isogonali delle sviluppabili.* I corrispondenti sistemi (Σ) esistono sempre nello stesso grado d'arbitrarietà come per le superficie pseudosferiche; ma spariscono in questo caso le trasformazioni complementari e di Bäcklund, venendo allontanate a distanza infinita le corrispondenti seconde falde focali delle congruenze. Abbiamo invece per questi sistemi la *trasformazione parallela*, che s'incontra anche pei sistemi (Σ) di superficie a curvatura nulla in geometria ellittica, ed un'altra trasformazione, di diversa specie, che fa cangiare arbitrariamente l'angolo σ delle trajettorie colle sviluppabili.

§ 1.

Formole preliminari.

Cominciamo anche qui, in geometria ellittica od iperbolica, dallo studio delle deformazioni isogonali *infinitesime* delle superficie a curvatura costante. Basterà considerare il caso ellittico, dal quale, con leggeri cambiamenti nelle formole, si passerà al caso iperbolico.

Nello spazio ellittico, la cui curvatura K prenderemo per semplicità $=1$, abbiasi una superficie S, a curvatura *assoluta* k costante, riferita ad un sistema curvilineo (u, v) ortogonale che dia all'elemento lineare di S la forma

$$d s^2 = e\, d u^2 + g\, d v^2. \tag{1}$$

La curvatura assoluta k è quella che compete alla forma differenziale nel secondo membro della (1), e si ha quindi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right) = - k \sqrt{e g}. \tag{2}$$

Insieme alla assoluta k, conviene anche considerare la curvatura *relativa* k_0 (*Lezioni*, Vol. I, pag. 492), che è data da

$$k_0 = k - 1. \tag{3}$$

Indicando poi con

$$\Delta\, d u^2 + 2 \Delta'\, d u\, d v + \Delta''\, d v^2$$

la seconda forma quadratica fondamentale della S, i coefficienti $\Delta, \Delta', \Delta''$ dovranno unicamente soddisfare alle due equazioni di Codazzi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \cdot \frac{\Delta'}{\sqrt{g}} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \cdot \frac{\Delta''}{\sqrt{g}} \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \cdot \frac{\Delta'}{\sqrt{e}} + \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \cdot \frac{\Delta}{\sqrt{e}}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ed insieme alla equazione di Gauss

$$\Delta \Delta'' - \Delta'^2 = k_0 \,.\, e g. \tag{5}$$

Riferendo i punti dello spazio ellittico ad un sistema di coordinate di WEIERSTRASS, indichiamo con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di un punto $F \equiv (u, v)$ mobile sopra S, ed introduciamo come *triedro principale* in F quello formato rispettivamente dalle tangenti in F alle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ e dalla normale alla superficie. Se denotiamo con

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

i loro rispettivi coseni di direzione (cioè le coordinate di WEIERSTRASS dei piani del triedro principale), abbiamo le formole fondamentali del quadro seguente

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{e}\,.\,\eta, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{g}\,.\,\zeta, \\
&\frac{\partial \eta}{\partial u} = -\sqrt{e}\,.\,x - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\cdot\zeta + \frac{\Delta}{\sqrt{e}}\,\xi, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\cdot\eta + \frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\cdot\xi, \\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\cdot\eta - \frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\,\zeta, \\
&\frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\cdot\zeta + \frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\cdot\xi, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = -\sqrt{g}\,.\,x - \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\cdot\eta + \frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\cdot\xi, \\
&\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\cdot\eta - \frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\cdot\zeta,
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

dove, per brevità, si sono soppressi gli indici alle lettere x, η, ζ, ξ, intendendo che le formole valgono attribuendo alle lettere un medesimo indice $i \; (i = 0, 1, 2, 3)$.

Ciò premesso, supponiamo che la superficie S ammetta una *deformazione isogonale infinitesima*, nella quale ciascun punto (x_i) si sposti nella direzione di coseni (ξ'_i) inclinata dell'angolo costante α sulla superficie. Potremo assumere questi coseni ξ' come dati dalle formole

$$\ldots\; \xi' = \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta - \cos\alpha\cos\varphi\,.\,\zeta + \operatorname{sen}\alpha\,.\,\xi, \tag{6}$$

dove $\varphi = \varphi(u, v)$ è l'angolo che la direzione normale alla (ξ'_i) nel piano tangente di S, cioè quella di coseni $(\cos\varphi\,.\,\eta_i + \operatorname{sen}\varphi\,.\,\zeta_i)$, forma colla linea $v = \text{cost.}$ I raggi condotti in questa direzione dànno una congruenza rettilinea, di cui S è la prima falda focale, mentre la seconda S' ha in ogni punto F' per piano tangente il piano normale nel punto corrispondente F

alla direzione dello spostamento (*). Indicando con τ la distanza focale FF', per le coordinate x'_i di F' avremo

$$\ldots x' = \cos\tau \,.\, x + \operatorname{sen}\tau\,(\eta\cos\varphi + \zeta\operatorname{sen}\varphi)\,; \tag{7}$$

noi dovremo dimostrare che, insieme all'angolo $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dei piani focali, è necessariamente costante anche la distanza focale τ.

Le formole pel caso dello spazio iperbolico, la cui curvatura K si assumerà $= -1$, offrono solo leggiere differenze dalle superiori, che qui appresso indichiamo. In primo luogo la (3) si scrive ora

$$k_0 = k + 1\,; \tag{3)*}$$

la modificazione nelle formole del quadro (a) porta soltanto sulle espressioni di $\frac{\partial \eta}{\partial u}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial v}$, ove i termini lineari in x nei secondi membri debbono cangiarsi di segno. In fine poi nelle formole (7), che dànno la seconda falda focale S', alle funzioni circolari di τ dobbiamo sostituire le iperboliche:

$$x' = \cosh\tau \,.\, x + \operatorname{senh}\tau \,.\, (\eta\cos\varphi + \zeta\operatorname{sen}\varphi). \tag{7)*}$$

(*) Questo si può desumere da un teorema dimostrato in altra mia Memoria (*Annali*, Tom. X (1904), pag. 137) o si può dedurre dalle due proposizioni seguenti:

1.ª *In ogni congruenza rettilinea i piani tangenti della seconda falda sono i piani osculatori delle caustiche della prima falda* (*linee inviluppate dai raggi della congruenza*).

E infatti la sviluppabile delle tangenti ad una caustica della prima falda è circoscritta alla seconda falda (lungo una linea a tangenti coniugate delle caustiche di questa) ed il piano tangente alla sviluppabile è il piano osculatore del suo spigolo di regresso.

2.ª *In ogni deformazione infinitesima di una superficie flessibile ed inestendibile gli spostamenti dei punti avvengono secondo le binormali di quelle curve della superficie che sono normali alle direzioni degli spostamenti.*

Tanto risulta dalle formole di Frenet per qualunque spazio a curvatura costante; segue invero da queste formole che se una curva subisce una deformazione infinitesima *che ne conservi la lunghezza d'arco*, e se gli spostamenti avvengono *normalmente* alla curva, essi hanno necessariamente la direzione della binormale.

§ 2.

Dimostrazione del teorema fondamentale.

Derivando le (6), (7) rapporto ad u, v, ed osservando le formole del quadro (a), si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi'}{\partial u} &= -\sqrt{e}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot x + \left\{\cos\alpha\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right) - \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\right\}\cdot\eta + \\
&+ \left\{\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right) - \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\right\}\zeta + \\
&+ \cos\alpha\left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\cos\varphi\right)\cdot\xi, \\
\frac{\partial \xi'}{\partial v} &= \sqrt{g}\cos\alpha\cos\varphi\cdot x + \left\{\cos\alpha\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right) - \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\right\}\cdot\eta + \\
&+ \left\{\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right) - \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\right\}\zeta + \\
&+ \cos\alpha\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\cos\varphi\right)\cdot\xi,
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= -\,\mathrm{sen}\,\tau\left(\frac{\partial\tau}{\partial u} + \sqrt{e}\cos\varphi\right)\cdot x + \\
&+ \left\{\sqrt{e}\cos\tau + \cos\tau\cos\varphi\frac{\partial\tau}{\partial u} - \mathrm{sen}\,\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)\right\}\cdot\eta + \\
&+ \left\{\cos\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial\tau}{\partial u} + \mathrm{sen}\,\tau\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)\right\}\cdot\zeta + \\
&+ \mathrm{sen}\,\tau\left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\cos\varphi + \frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\cdot\xi, \\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= -\,\mathrm{sen}\,\tau\left(\frac{\partial\tau}{\partial v} + \sqrt{g}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\cdot x + \\
&+ \left\{\cos\tau\cos\varphi\frac{\partial\tau}{\partial v} - \mathrm{sen}\,\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)\right\}\cdot\eta +
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}&+\left\{\sqrt{g}\cos\tau+\cos\tau\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\tau}{\partial v}+\operatorname{sen}\tau\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)\right\}\cdot\zeta+\\&\quad+\operatorname{sen}\tau\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\cos\varphi+\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\operatorname{sen}\varphi\right)\cdot\xi.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Esprimendo che il piano tangente in (x') alla superficie S' è il piano (ξ'), abbiamo le due equazioni

$$\Sigma\,\xi'\frac{\partial x'}{\partial u}=0,\qquad \Sigma\,\xi'\frac{\partial x'}{\partial v}=0,$$

le quali, calcolate colle (6), (9), ci dànno le formole

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}=\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\cos\varphi+\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\operatorname{sen}\varphi\right)+\sqrt{e}\cot\tau\operatorname{sen}\varphi\\&\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}=\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\cos\varphi+\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\operatorname{sen}\varphi\right)-\sqrt{g}\cot\tau\cos\varphi.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Si indichi ora con εh, dove $h=h(u,\,v)$ è una funzione di u, v ed ε una costante infinitesima, l'ampiezza dello spostamento che, nella deformazione infinitesima, subisce il punto (x_i) nella direzione (ξ'_i); saranno $\varepsilon h\,\xi'_i\ (i=0,1,2,3)$ le componenti dello spostamento, e dovranno sussistere le tre equazioni:

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(h\,\xi')}{\partial u}=0,\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(h\,\xi')}{\partial v}=0,\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(h\,\xi')}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(h\,\xi')}{\partial u}=0.$$

Calcolandole mediante il quadro (a), e le formole (8), otteniamo

$$\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\log h}{\partial u}+\cos\alpha\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)-\operatorname{sen}\alpha\frac{\Delta}{\sqrt{e}}=0$$

$$-\cos\alpha\cos\varphi\frac{\partial\log h}{\partial v}+\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)-\operatorname{sen}\alpha\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}=0$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{e}\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\log h}{\partial v}-\sqrt{g}\cos\alpha\cos\varphi\frac{\partial\log h}{\partial u}+\\&\qquad+\sqrt{e}\left\{\cos\alpha\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)-\operatorname{sen}\alpha\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\right\}+\\&\qquad+\sqrt{g}\left\{\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)-\operatorname{sen}\alpha\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\right\}=0,\end{aligned}$$

ed introducendo in queste i valori (10) dei binomii

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u},$$

le prime due diventano

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\log h}{\partial u}&=\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\operatorname{sen}\varphi-\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\cos\varphi\right)-\sqrt{e}\cot\tau\cos\varphi\\ \frac{\partial\log h}{\partial v}&=\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\operatorname{sen}\varphi-\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\cos\varphi\right)-\sqrt{g}\cot\tau\operatorname{sen}\varphi,\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

mentre la terza risulta una conseguenza di queste due.

Ora si costruisca la condizione d'integrabilità delle (10) derivando la prima rapporto a v, la seconda rapporto ad u e sottraendo, coll'aver riguardo alle (2), (4), (5) e alle (10) stesse; si ottiene

$$\sqrt{g}\cos\varphi\frac{\partial\tau}{\partial u}+\sqrt{e}\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{eg}\left(\frac{k_0\operatorname{sen}^2\tau}{\cos^2\alpha}+1\right)=0.$$

Similmente operando sulle (11), abbiamo l'altra

$$\sqrt{g}\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\tau}{\partial u}-\sqrt{e}\cos\varphi\frac{\partial\tau}{\partial v}=0,$$

e combinando colla superiore si trae

$$\frac{\partial\tau}{\partial u}+\sqrt{e}\cos\varphi\left(\frac{k_0\operatorname{sen}^2\tau}{\cos^2\alpha}+1\right)=0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial v}+\sqrt{g}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{k_0\operatorname{sen}^2\tau}{\cos^2\alpha}+1\right)=0.$$

E da queste, costruendo nuovamente la condizione d'integrabilità, deduciamo

$$\left(\frac{k_0\operatorname{sen}^2\tau}{\cos^2\alpha}+1\right)\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{g}\operatorname{sen}\varphi)-\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{e}\cos\varphi)\right\}=0.\tag{12}$$

È facile vedere che il secondo fattore nella (12) non può essere nullo. Calcolandolo dalle (10), abbiamo infatti

$$\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{g}\operatorname{sen}\varphi)-\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{e}\cos\varphi)=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\left\{\Delta\frac{\sqrt{g}}{e}\cos^2\varphi+2\Delta'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\Delta''\frac{\sqrt{e}}{g}\operatorname{sen}^2\varphi\right\},$$

mentre $\operatorname{tg} \alpha \mid 0$, e se si annullasse l'altro fattore, lungo le caustiche colla equazione

$$\sqrt{e}\, d\, u : \sqrt{g}\, d\, v = \cos \varphi : \operatorname{sen} \varphi,$$

risulterebbe

$$\Delta\, d\, u^2 + 2\, \Delta'\, d\, u\, d\, v + \Delta''\, d\, v^2 = 0.$$

Le caustiche della congruenza sarebbero per ciò sulla S le asintotiche di un sistema, onde le due falde coinciderebbero ed avremmo $\tau = 0$, $\alpha = \frac{\tau}{2}$, ciò che è escluso.

Concludiamo che nella (12) si annulla di necessità il primo fattore, ed è quindi τ *costante*, ed inoltre

$$k_0 \operatorname{sen}^2 \tau = -\cos^2 \alpha. \tag{13}$$

Di qui si vede intanto che fra le superficie a curvatura costante dello spazio ellittico possono ammettere deformazioni isogonali infinitesime solo quelle che hanno la curvatura relativa k_0 *negativa*, diciamo

$$k_0 = -\frac{1}{a^2}, \tag{14}$$

con a costante reale. Ma dal calcolo eseguito risulta anche inversamente che, se k_0 è negativa, la superficie ammette in effetto deformazioni isogonali infinitesime.

E invero se leghiamo le costanti τ, α, conformemente alla (13), colla relazione

$$\operatorname{sen} \tau = a \cos \alpha, \tag{13)*$$

il sistema simultaneo (10) per la funzione incognita φ è illimitatamente integrabile; e se per φ scegliamo una sua qualunque soluzione, le (11) definiscono, con una quadratura, una corrispondente deformazione isogonale infinitesima. Come si vede, la deformazione è individuata fissando, per un punto iniziale della superficie S, la direzione dello spostamento, che può essere arbitraria, purchè inclinata dell'angolo α sul piano tangente.

Se dal caso dello spazio ellittico passiamo a quello dello spazio iperbolico, per le osservazioni alla fine del paragrafo precedente, si hanno ancora i medesimi risultati; soltanto nelle formole finali (10), (11) è da cangiarsi $\cot \tau$ in $\coth \tau$, mentre la distanza focale τ è determinata dalla formola

$$\operatorname{senh} \tau = a \cos \alpha. \tag{13)**$$

Sulle formole (13)*, (13)** è da osservarsi che per lo spazio ellittico, quando $a > 1$, l'angolo acuto α non può scendere al di sotto di arc cos $\left(\frac{1}{a}\right)$, mentre se $a \leq 1$ nel caso ellittico, o per qualunque a nel caso iperbolico, α può prendersi arbitrariamente fra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

§ 3.

Deformazioni isogonali infinitesime coniugate.

Andiamo ora a ricercare, pel caso attuale degli spazî a curvatura costante, le formole che corrispondono a quelle stabilite in (M) ai §§ 3, 7 per le deformazioni isogonali infinitesime delle superficie pseudosferiche nello spazio euclideo.

Risolvendo le (10), (11) rispetto alle coppie $\left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}}, \frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\right)$, $\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}, \frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\right)$, troviamo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta}{\sqrt{e}} &= \cot\alpha \left\{ \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log h}{\partial u} \right\} \\
\frac{\Delta'}{\sqrt{g}} &= \cot\alpha \left\{ \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) - \cos\varphi \frac{\partial \log h}{\partial u} \right\} - \sqrt{e} \cot\alpha \cot\tau
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta'}{\sqrt{e}} &= \cot\alpha \left\{ \cos\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log h}{\partial v} \right\} + \sqrt{g} \cot\alpha \cot\tau \\
\frac{\Delta''}{\sqrt{g}} &= \cot\alpha \left\{ \operatorname{sen}\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) - \cos\varphi \frac{\partial \log h}{\partial v} \right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (14)^*$$

Di qui seguono, come in (M) § 7, due equazioni di primo ordine fra h e φ. La prima si ottiene paragonando i due valori superiori di Δ', la seconda esprimendo che questi valori di Δ, Δ', Δ'' soddisfano le equazioni (4) di Co-

DAZZI; si trova così il sistema:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{e}\left\{\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)+\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\log h}{\partial v}\right\}-\\
&\quad-\sqrt{g}\left\{\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)-\cos\varphi\frac{\partial\log h}{\partial u}\right\}+2\cot\tau\sqrt{eg}=0,\\
&\frac{\partial\log h}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)-\frac{\partial\log h}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)=k\sqrt{eg}.
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

Viceversa se h, φ verificano le (A), i valori (14), 14)* di Δ, Δ', Δ'' soddisfano non solo alle equazioni (4) di CODAZZI, ma anche alla (5) di GAUSS, onde ne risulta intrinsecamente individuata una superficie S a curvatura assoluta k costante nello spazio ellittico, ed una sua corrispondente deformazione isogonale infinitesima sotto l'angolo α. Per lo spazio iperbolico si ha il medesimo risultato, modificando soltanto le formole superiori col porre al solito $\coth\tau$ al posto di $\cot\tau$. Come si vede, queste formole offrono la più stretta analogia con quelle relative alle deformazioni isogonali delle superficie pseudosferiche nello spazio euclideo. Ma tale analogia si può spingere ben più oltre, sino ad identificare i due sistemi di formole, quando però si escluda, in geometria ellittica, il caso delle superficie a curvatura assoluta k nulla.

Si osservi che la curvatura assoluta k della S è data, per le (3), (3)* e per la (14), da

$$k=1-\frac{1}{a^2}\quad \text{nel caso ellittico,}$$

e invece da

$$k=-1-\frac{1}{a^2}$$

nel caso iperbolico. Perciò k è sempre negativa in quest'ultimo caso, nell'ellittico soltanto quando $a<1$. Se poniamo

$$k=-\frac{1}{R^2},$$

sarà dunque R sempre reale salvo nel caso ellittico con $a>1$, ove risulterà R puramente immaginaria. Comunque, noi possiamo ora identificare le (A) e le (14) (14)* colle corrispondenti $(A)^*$ e (26), (26)* del § 7 (M), *conservando l'angolo* φ *il medesimo valore nei due casi.*

E invero, se poniamo

$$E = \frac{e}{R^2}, \quad G = \frac{g}{R^2}, \tag{15}$$

l'elemento lineare

$$d\,s^2 = E\,d\,u^2 + G\,d\,v^2$$

apparterrà ad una superficie pseudosferica di raggio $= 1$. Ponendo inoltre

$$D = \frac{a}{R^2}\,\Delta, \quad D' = \frac{a}{R^2}\,\Delta', \quad D'' = \frac{a}{R^2}\,\Delta'', \tag{16}$$

verremo con questi valori di D, D', D'' a soddisfare le equazioni di Codazzi ed insieme quella di Gauss

$$D\,D'' - D'^2 = -E\,G$$

per lo spazio euclideo. Ne risulta dunque intrinsecamente definita una superficie pseudosferica dello spazio euclideo, che si indicherà con S_0, le cui forme differenziali fondamentali sono proporzionali alle corrispondenti della S per fattori costanti; le due superficie S, S_0 sono dunque *coniugate in deformazione.* Possiamo ora identificare completamente le formole per le deformazioni isogonali infinitesime della S sotto l'angolo α con quelle della superficie pseudosferica coniugata in deformazione S_0, sotto un angolo conveniente σ. Basterà perciò legare a e σ colla relazione

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{R}{a}\operatorname{tg}\alpha \tag{17}$$

ed assumere H eguale, o proporzionale per un fattor costante ad h. E infatti, se siamo nel caso ellittico, si ha

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{a^2} - 1, \quad \operatorname{sen}\tau = a\cos\alpha,$$

e colla (17) si può scrivere la relazione concordante

$$\frac{1}{\cos\sigma} = R\cot\tau; \tag{18}$$

nel caso iperbolico invece è

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{a^2} + 1, \quad \operatorname{senh}\tau = a\cos\alpha,$$

indi

$$\frac{1}{\cos \sigma} = R \coth \tau. \tag{18)*$$

Dopo ciò le (A) attuali vengono a coincidere colle $(A)^*$ in (M) § 7, e medesimamente le (14), (14)* colle (26), (26)* ibid. Possiamo adunque concludere:

Ad ogni deformazione isogonale infinitesima sotto l'angolo σ della superficie pseudosferica S_0 dello spazio euclideo corrisponde una deformazione isogonale sotto l'angolo α della superficie S a curvatura costante dello spazio ellittico od iperbolico, coniugata in deformazione della S_0, ed inversamente; basta porre fra gli angoli costanti α, σ la relazione (17).

Si vedrà poi fra breve (§ 5) che anche le rispettive superficie deformate, infinitamente vicine a S, S_0, sono nuovamente coniugate in deformazione, onde si può dire che le due deformazioni isogonali infinitesime sono *coniugate.* È ancora da notarsi che in due tali deformazioni isogonali infinitesime coniugate le ampiezze dei rispettivi spostamenti sono eguali (o proporzionali), mentre le loro projezioni ortogonali sui piani tangenti seguono direzioni corrispondenti.

§ 4.

Congruenze pseudosferiche coniugate.

Consideriamo ora nello spazio a curvatura costante la congruenza formata dai raggi tangenti alla S e normali alla direzione dello spostamento del punto di contatto. Essa è una congruenza (pseudosferica) nella quale è costante $= \frac{\pi}{2} - \alpha$ l'angolo dei piani focali ed è pur costante $= \tau$ la distanza focale. La sua seconda falda focale S' è data dalle formole (7) o (7)*, e noi ne calcoleremo gli elementi fondamentali per verificare che essa è nuovamente a curvatura assoluta k, ed è inoltre coniugata in deformazione della corrispondente seconda falda S'_0 nella congruenza pseudosferica euclidea. Per miglior confronto colle formole in (M) § 4, riferiamo qui la superficie S ad un sistema (v) di geodetiche parallele ed ai loro oricicli ortogonali (u), anche l'elemento lineare di S prenderà la forma

$$d s^2 = R^2 \frac{d u^2 + d v^2}{u^2},$$

e le formole (10) della trasformazione di Bäcklund diventeranno

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{u \operatorname{tg} \alpha}{R} (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi) + \frac{R}{u} \cot \tau \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{1}{u} = \frac{u \operatorname{tg} \alpha}{R} (\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi) - \frac{R}{u} \cot \tau \cos \varphi.$$

Le formole (8), (9) § 2 si scrivono ora:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi'}{\partial u} = & -\frac{R \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi}{u} \cdot x + \\ & + \left\{ \frac{R}{u} \cos \alpha \cot \tau \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \frac{u \operatorname{sen} \alpha}{R} \operatorname{sen} \varphi (\Delta \operatorname{sen} \varphi - \Delta' \cos \varphi) \right\} \cdot \eta + \\ & + \left\{ \frac{R}{u} \cos \alpha \cot \tau \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{u \operatorname{sen} \alpha}{R} \cos \varphi (\Delta \operatorname{sen} \varphi - \Delta' \cos \varphi) \right\} \cdot \zeta + \\ & + \frac{u \cos \alpha}{R} (\Delta \operatorname{sen} \varphi - \Delta' \cos \varphi) \cdot \xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi'}{\partial v} = & \frac{R \cos \alpha \cos \varphi}{u} \cdot x + \\ & + \left\{ -\frac{R}{u} \cos \alpha \cot \tau \cos^2 \varphi - \frac{u \operatorname{sen} \alpha}{R} \operatorname{sen} \varphi (\Delta' \operatorname{sen} \varphi - \Delta'' \cos \varphi) \right\} \cdot \eta + \\ & + \left\{ -\frac{R}{u} \cos \alpha \cot \tau \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{u \operatorname{sen} \alpha}{R} \cos \varphi (\Delta' \operatorname{sen} \varphi - \Delta'' \cos \varphi) \right\} \zeta + \\ & + \frac{u \cos \alpha}{R} (\Delta' \operatorname{sen} \varphi - \Delta'' \cos \varphi) \xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial u} = & -\frac{R \operatorname{sen} \tau \cos \varphi}{u} \cdot x + \\ & + \left\{ \frac{R \cos \tau}{u} \cos^2 \varphi - \frac{u}{R} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \varphi (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi) \right\} \cdot \eta + \\ & + \left\{ \frac{R \cos \tau}{u} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{u}{R} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \tau \cos \varphi (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi) \right\} \cdot \zeta + \\ & + \frac{u \operatorname{sen} \tau}{R} (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi) \xi\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = -\frac{R \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \varphi}{u} \cdot x +$$

$$+ \left\{ \frac{R \cos \tau}{u} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \frac{u}{R} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \varphi (\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi) \right\} \cdot \eta +$$

$$+ \left\{ \frac{R \cos \tau}{u} \operatorname{sen}^2 \tau + \frac{u}{R} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \tau \cos \varphi (\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi) \right\} \xi +$$

$$+ \frac{u \operatorname{sen} \tau}{R} (\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi) \xi.$$

Se formiamo di qui il quadrato dell'elemento lineare $d s'$ della S', abbiamo

$$d s'^2 = \frac{R^2}{u^2} (\cos \varphi \, d u + \operatorname{sen} \varphi \, d v)^2 +$$

$$+ \frac{a^2 u^2}{R^2} \left\{ (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi) \, d u + (\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi) \, d v \right\}^2,$$

e paragonando questo col $d s'^2_0$ della superficie pseudosferica euclidea S'_0, dato secondo la formola (18) § 4 (M) da

$$d s'^2_0 = \frac{1}{u^2} (\cos \varphi \, d u + \operatorname{sen} \varphi \, d v)^2 +$$

$$+ u^2 \left\{ (D \cos \varphi + D' \operatorname{sen} \varphi) \, d u + (D' \cos \varphi + D'' \operatorname{sen} \varphi) \, d v \right\}^2,$$

vediamo che si ha semplicemente

$$d s'^2 = R^2 \, d s'^2_0 .$$

Questo dimostra intanto che la superficie S' ha la curvatura assoluta $k = -\frac{1}{R^2}$, quella di S'_0 essendo $= -1$.

Se calcoliamo poi i coefficienti $\overline{\Delta}$, Δ', $\overline{\Delta}''$ della seconda forma quadratica fondamentale di S'

$$\overline{\Delta} = -\Sigma \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial \xi'}{\partial u}, \quad \Delta' = -\Sigma \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial \xi'}{\partial v} = -\Sigma \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial \xi'}{\partial u}, \quad \Delta'' = -\Sigma \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial \xi'}{\partial v},$$

troviamo

$$\overline{\Delta} = -\frac{R^2}{a}\,\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{u^2} + \frac{a\,u^2}{R^2}\,(\Delta\cos\varphi + \Delta'\operatorname{sen}\varphi)(\Delta'\cos\varphi - \Delta\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\overline{\Delta}' = \frac{R^2}{a}\,\frac{\cos^2\varphi}{u^2} + \frac{a\,u^2}{R^2}\,(\Delta\cos\varphi + \Delta'\operatorname{sen}\varphi)(\Delta''\cos\varphi - \Delta'\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\overline{\Delta}'' = \frac{R^2}{a}\,\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{u^2} + \frac{a\,u^2}{R^2}\,(\Delta'\cos\varphi + \Delta''\operatorname{sen}\varphi)(\Delta''\cos\varphi - \Delta'\operatorname{sen}\varphi).$$

Queste, confrontate colle analoghe ottenute in (M) § 3 nelle (21)* per i coefficienti $\overline{D}$, $\overline{D}'$, $\overline{D}''$ della S'_0, dimostrano che, ancora per le (16), si ha

$$\overline{D} = \frac{a}{R^2}\,\Delta, \quad \overline{D}' = \frac{a}{R^2}\,\overline{\Delta}', \quad \overline{D}'' = \frac{a}{R^2}\,\Delta''.$$

Tanto le prime quanto le seconde forme differenziali delle due superficie S', S'_0 differiscono dunque solo per fattori costanti e quindi: *Le due seconde falde S', S'_0 delle congruenze pseudosferiche corrispondenti nello spazio a curvatura costante e in quello euclideo sono coniugate in deformazione, come le prime S, S_0.*

Da ultimo osserviamo che le proprietà dimostrate in questo paragrafo valgono anche per $\alpha = 0$. La trasformazione di Bäcklund diventa allora la complementare e la congruenza pseudosferica (normale) è costituita dalle tangenti ad un sistema di geodetiche parallele. Essendo in questo caso $\alpha = 0$, dobbiamo fare $\operatorname{sen}\tau = a$, $\operatorname{tg}\tau = R$, e si può porre semplicemente nelle nostre formole $\varphi = 0$. Nel caso ellittico però la trasformazione sarà reale soltanto per $a < 1$.

§ 5.

Deformazioni isogonali continue coniugate.

Passiamo ora a trattare delle deformazioni isogonali *continue* delle superficie S a curvatura costante in geometria ellittica od iperbolica avvertendo che, sino a dichiarazione contraria, non escluderemo il caso delle superficie a curvatura k nulla in geometria ellittica.

Dovremo ora supporre (cf. (M) § 5) che le funzioni

$$h,\ \varphi;\quad \Delta,\ \Delta'\ \Delta'';\quad x,\ \eta,\ \zeta,\ \xi$$

contengano, oltre u, v, una terza variabile w, ai cui singoli valori corrispondono le singole configurazioni di S. Nel passaggio dalla configurazione (w) di S alla infinitamente prossima $(w + d\,w)$ gli incrementi delle coordinate sono dati da

$$\varepsilon\,\frac{\partial x_i}{\partial w}\,d\,w \quad (i = 0, 1, 2, 3);$$

si ha per ciò

$$\frac{\partial x}{\partial w} = h\,\xi' = h\,(\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta - \cos\alpha\cos\varphi\,.\,\zeta + \operatorname{sen}\alpha\,.\,\xi).$$

Da questa e dalle

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{e}\,.\,\eta,\quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{g}\,.\,\zeta$$

troviamo per l'elemento lineare $d\,s$ dello spazio in coordinate u, v, w

$$\left.\begin{aligned} d\,s^2 &= e\,d\,u^2 + g\,d\,v^2 + h^2\,d\,w^2 + \\ &+ 2\,h\cos\alpha\sqrt{e}\operatorname{sen}\varphi\,d\,u\,d\,w - 2\,h\cos\alpha\sqrt{g}\cos\varphi\ d\,v\,d\,w. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Procedendo ora come in (M) § 6 per calcolare anche le derivate rapporto a w dei coseni di direzione del triedro principale, risultano le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial w} &= -h\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\,.\,x + h\cos\alpha\cot\tau\,.\,\zeta + \\ &\qquad + \left(\frac{1}{\sqrt{e}\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial u} + h\,\frac{\cos^2\alpha\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\tau}\cos\varphi\right)\xi \\ \frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \quad h\cos\alpha\cos\varphi\,.\,x - h\cos\alpha\cot\tau\,.\,\eta + \\ &\qquad + \left(\frac{1}{\sqrt{g}\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial v} + h\,\frac{\cos^2\alpha\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\tau}\operatorname{sen}\varphi\right)\xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} &= -h\operatorname{sen}\alpha\,x - \left(\frac{1}{\sqrt{e}\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial u} + h\,\frac{\cos^2\alpha\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\tau}\cos\varphi\right)\eta - \\ &\qquad - \left(\frac{1}{\sqrt{g}\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial v} + h\,\frac{\cos^2\alpha\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\tau}\operatorname{sen}\varphi\right)\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Aggiungendo a queste formole quelle del quadro (a) § 1, e scrivendo le condizioni di illimitata integrabilità del sistema, si trova che alle equazioni (A) già ottenute vengono unicamente ad aggiungersi le tre seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta}{\partial w} &= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} - \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{1}{2g}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{e}{R^2}h\\
\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta'}{\partial w} &= \frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}\\
\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta''}{\partial w} &= \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{1}{2e}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{g}{R^2}h.
\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

A queste equazioni (B) possiamo anche dare la solita forma invariantiva

$$\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta}{\partial w} = h_{11} + k\,e\,.\,h,\quad \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta'}{\partial w} = h_{12} + k\,f\,.\,h,\quad \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta''}{\partial w} = h_{22} + k\,g\,.\,h\,;$$

esse, associate alle (A), dànno il sistema di equazioni a derivate parziali da cui dipende la ricerca dei sistemi (Σ) di deformate isogonali della superficie S a curvatura costante k nello spazio ellittico od iperbolico, *non escluso il caso* $k=0$ *in geometria ellittica.*

A questo punto della ricerca escludiamo nuovamente il caso $k=0$, e paragoniamo le formole superiori (B) colle analoghe (B)* in (M) § 8, avendo riguardo alle (5), (6) e (17). Vediamo allora che i due sistemi di formole si identificano completamente col disporre soltanto del fattor costante di proporzionalità ponendo

$$H = \frac{a}{R^2}\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot h. \tag{22}$$

Ogni sistema (Σ_0) di deformate isogonali della pseudosfera nello spazio euclideo, sotto l'angolo σ, determina adunque univocamente un sistema (Σ) di deformate isogonali, sotto l'angolo α, della superficie S a curvatura relativa costante negativa $k_0 = -\dfrac{1}{a^2}$ nello spazio ellittico od iperbolico, e ciascuna S_0 in (Σ_0) è coniugata in deformazione della corrispondente S in (Σ). Quando la S_0 subisce entro (Σ_0) la deformazione isogonale continua d'angolo σ, la coniugata in deformazione S subisce la deformazione continua d'angolo α entro (Σ). I due sistemi (Σ_0), (Σ) si diranno perciò opportunamente *coniugati in deformazione*, ed in particolare risultano così dimostrate le proprietà delle deformazioni isogonali infinitesime coniugate, che abbiamo accennato alla fine del § 3.

Paragoniamo ancora l'elemento lineare (20) dello spazio a curvatura costante, riferito al sistema (Σ), coll'altro dello spazio euclideo (M) § 8

$$\left.\begin{aligned} d s_0^2 = E\, d u^2 + G\, d v^2 + H^2\, d w^2 + 2 H \sqrt{E} \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, d u\, d w - \\ - 2 H \sqrt{G} \cos\sigma \cos\varphi\, d v\, d w \end{aligned}\right\} \quad (20)^*$$

riferito al sistema (Σ_0) coniugato in deformazione. I due spazii sono posti in corrispondenza di punto a punto in guisa che le superficie $w = \text{cost.}$ corrispondenti sono superficie a curvatura costante coniugate in deformazione, che subiscono deformazioni isogonali coniugate, ed inoltre: *gli archi descritti dai punti corrispondenti nella deformazione continua sono proporzionali nei due spazii.*

Quando poi l'angolo σ sia assolutamente costante, e quindi anche α, si ha un'altra notevole proprietà di questa corrispondenza: *essa conserva il rapporto dei volumi corrispondenti nello spazio a curvatura costante e nell'euclideo.* E infatti i due discriminanti delle forme ternarie quadratiche (20), (20)* sono allora in rapporto costante.

§ 6.

Trasformazione complementare.

Le ricerche precedenti ci hanno dimostrato che, escluso il caso $k = 0$ in geometria ellittica, i due problemi di costruire i sistemi di deformate isogonali delle superficie a curvatura costante nello spazio ellittico od iperbolico, ovvero i sistemi di deformate isogonali della pseudosfera nello spazio euclideo sono problemi analiticamente equivalenti. È quindi facile prevedere che tutte le proprietà dei sistemi (Σ) in relazione colle trasformazioni complementare e di Bäcklund, dimostrate in (M) per lo spazio euclideo, si trasporteranno invariate ai coniugati in deformazione negli spazii a curvatura costante. Questo dobbiamo ora confermare col calcolo, principalmente per riconoscere il modo geometrico come questo trasporto si effettua; così verremo a dimostrare che le proprietà della trasformazione H si estendono dalle superficie a curvatura costante isolate (§ 4) ai loro sistemi di deformate isogonali.

Cominciando dalla trasformazione complementare, avremo anche qui il teorema:

Se delle superficie pseudosferiche S di un sistema (Σ), nello spazio a curvatura costante, si prendono le complementari S', rispetto a sistemi qualunque di geodetiche parallele corrispondenti nella deformazione continua, queste superficie complementari S' formano nuovamente un sistema di deformate isogonali, sotto il medesimo angolo α.

Come al § 4, prendiamo l'elemento normale di S sotto la forma normale

$$d s^2 = R^2 \frac{d u^2 + d v^2}{u^2},$$

e scriviamo le corrispondenti equazioni di Codazzi e di Gauss

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta}{\partial v} - \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = 0 \\ &\frac{\partial \Delta''}{\partial u} - \frac{\partial \Delta'}{\partial v} + \frac{\Delta + \Delta''}{u} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\Delta'^2 - \Delta \Delta'' = \frac{R^4}{a^2 u^4}. \tag{24}$$

Le formole (A) § 3 diventano qui

$$\left.\begin{aligned} &\cos\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{1}{u}\right) - \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log h}{\partial v} + \\ &\qquad\qquad + \cos\varphi \frac{\partial \log h}{\partial u} + 2\frac{R}{u}\cot\tau = 0 \\ &\frac{\partial \log h}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{1}{u}\right) - \frac{\partial \log h}{\partial v}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1}{u^2} \end{aligned}\right\} \tag{$A*$

e le (14), (14)* dànno le altre

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{R}{u}\cot\alpha\left(\cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log h}{\partial u}\right), \\ \Delta' &= \frac{R}{u}\cot\alpha\left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \cos\varphi \frac{\partial \log h}{\partial u}\right) - \frac{R^2}{u^2}\cot\alpha\cot\tau, \\ \Delta' &= \frac{R}{u}\cot\alpha\left\{\cos\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{1}{u}\right) + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log h}{\partial v}\right\} + \frac{R^2}{u^2}\cot\alpha\cot\tau, \\ \Delta'' &= \frac{R}{u}\cot\alpha\left\{\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{1}{u}\right) - \cos\varphi \frac{\partial \log h}{\partial v}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Le equazioni (B) § 5 dànno poi le seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta}{\partial w}&=\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial h}{\partial u}-\frac{h}{u^2}\\
\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta'}{\partial w}&=\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u}\frac{\partial h}{\partial v}\\
\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta''}{\partial w}&=\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}-\frac{1}{u}\frac{\partial h}{\partial u}-\frac{h}{u^2}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad (B)^*$$

Dalle due prime di queste e dalla (23_1) segue (cf. (M) § 6) che: *l'espressione* $\Delta\,du+\Delta'\,dv+\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{\partial h}{\partial u}+\dfrac{h}{u}\right)dw$ *è un differenziale esatto.*

Conviene ancora che scriviamo, nelle coordinate attuali, le formole che dànno le derivate di x, η, ζ, ξ rispetto alle variabili; abbiamo così:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{R}{u}\cdot\eta,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{R}{u}\cdot\zeta,\\
&\qquad\frac{\partial x}{\partial w}=h(\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta-\cos\alpha\cos\varphi\,.\,\zeta+\operatorname{sen}\alpha\,.\,\xi),\\
&\frac{\partial\eta}{\partial u}=-\frac{R}{u}\cdot x+\frac{u\Delta}{R}\cdot\xi,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial v}=-\frac{\zeta}{u}+\frac{u\Delta'}{R}\cdot\xi,\\
&\qquad\frac{\partial\eta}{\partial w}=-h\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\,.\,x+h\cos\alpha\cot\tau\,.\,\zeta+\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{u}{R\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{h\cos^2\alpha\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\tau}\cos\varphi\right).\,\xi,\\
&\frac{\partial\zeta}{\partial u}=\frac{u\Delta'}{R}\cdot\xi,\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial v}=-\frac{R}{u}\cdot x+\frac{\eta}{u}+\frac{u\Delta''}{R}\cdot\xi,\\
&\qquad\frac{\partial\zeta}{\partial w}=h\cos\alpha\cos\varphi\,.\,x-h\cos\alpha\cot\tau\,.\,\eta+\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{u}{R\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{h\cos^2\alpha\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\tau}\operatorname{sen}\varphi\right)\cdot\xi,\\
&\frac{\partial\xi}{\partial u}=-\frac{u\Delta}{R}\cdot\eta-\frac{u\Delta'}{R}\cdot\zeta,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial v}=-\frac{u\Delta'}{R}\cdot\eta-\frac{u\Delta''}{R}\cdot\zeta,\\
&\qquad\frac{\partial\xi}{\partial w}=-h\operatorname{sen}\alpha\,.\,x-\left(\frac{u}{R\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{h\cos^2\alpha\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\tau}\cos\varphi\right)\eta-\\
&\qquad\qquad-\left(\frac{u}{R\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{h\cos^2\alpha\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\tau}\operatorname{sen}\varphi\right)\zeta.
\end{aligned}\right\}\qquad (b)$$

Premesse queste formole, prendiamo ora di ciascuna superficie pseudosferica S del sistema (Σ) la complementare S' rispetto alle geodetiche parallele (v). Nella corrispondente congruenza pseudosferica (normale) l'angolo dei piani focali è retto, cioè $\alpha = 0$, e chiamando quindi b la distanza dei fuochi, si ha per la (13) § 2

$$\operatorname{sen} b = a, \quad \text{indi} \quad \operatorname{tg} b = R. \tag{26}$$

Per le coordinate (x'_i) di un punto di S' abbiamo

$$x' = \cos b \,.\, x + \operatorname{sen} b \,.\, \eta, \tag{27}$$

e derivando coll'osservare le formole del quadro (b) e le (26) deduciamo

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = -\frac{R}{u} \operatorname{sen} b \,.\, x + \frac{R}{u} \cos b \,.\, \eta + \frac{u\,\Delta}{R} \operatorname{sen} b \,.\, \xi$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{u\,\Delta'}{R} \operatorname{sen} b \,.\, \xi$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial w} = & - h \operatorname{sen} b \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \,.\, x + h \cos b \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \,.\, \eta + \\ & + h (\operatorname{sen} b \cos\alpha \cot\tau - \cos b \cos\alpha \cos\varphi)\, \zeta + L\, \xi,\end{aligned}$$

dove si è posto

$$L = \frac{u \operatorname{sen} b}{R \operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial h}{\partial u} + h \cos\tau \cot\alpha \cos\varphi + h \cos b \operatorname{sen}\alpha. \tag{28}$$

Da queste formole calcoliamo l'elemento lineare dello spazio: $d s'^2 = \sum d x'^2$ in coordinate u, v, w; troviamo:

$$\left.\begin{aligned} d s'^2 = & \frac{R^2}{u^2} d u^2 + \frac{u^2 \operatorname{sen}^2 b}{R^2} (\Delta\, d u + \Delta'\, d v)^2 + \\ & + \frac{2 h R}{u} \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi\, d u\, d w + 2 L \frac{\operatorname{sen} b}{R} u\, d w\, (\Delta\, d u + \Delta'\, d v) + \\ & + \left\{ h^2 \cos^2\alpha\, [\operatorname{sen}^2\varphi + (\operatorname{sen} b \cot\tau - \cos b \cos\varphi)^2] + L^2 \right\} d w^2. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Per dimostrare il teorema enunciato conviene (cf. (M) § 11) cangiare le variabili u, v nelle nuove u_1, v_1, mantenendo la stessa w, in guisa da ridurre il $d s'^2$ dato dalla (29) alla forma caratteristica dello spazio a curvatura costante riferito ad un sistema (Σ') corrispondente all'angolo α.

La trasformazione opportuna di variabili è data come in (M) § 11, tenendo conto dell'osservazione fatta al paragrafo precedente, dalle formole

$$u_1 = \frac{1}{u}$$

$$v_1 = \frac{a}{R^2}\int \left\{ \Delta\, d\, u + \Delta'\, d\, v + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{h}{u}\right) d\, w \right\}.$$

Con questa sostituzione la (29) diventa

$$d\, s'^2 = \frac{R^2\, d\, u_1^2}{u_1^2} + \frac{a^2}{R^2\, u_1^2} \left\{ \frac{R^2}{a}\, d\, v_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{h}{u}\right) d\, w \right\}^2 -$$

$$- \frac{2\, h\, R}{u_1} \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi\, d\, u_1\, d\, w +$$

$$+ 2\, \frac{a\, L}{R\, u_1} \left\{ \frac{R^2}{a} d\, v_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{h}{u}\right) d\, w \right\} d\, w +$$

$$+ \left\{ h^2 \cos^2\alpha\, [\operatorname{sen}^2\varphi + (\operatorname{sen} b \cot\tau - \cos b \cos\varphi)^2] + L^2 \right\} d\, w^2,$$

e questa si può scrivere sotto la forma

$$d\, s'^2 = R^2\, \frac{d\, u_1^2 + d\, v_1^2}{u_1^2} + h_1^2\, d\, w^2 + 2\, A\, d\, u_1\, d\, w + 2\, B\, d\, v_1\, d\, w, \tag{30}$$

ove si prendano h_1^2, A, B nel modo seguente:

$$h_1^2 = \left\{ L - \frac{a}{R\, u_1 \operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{h}{u}\right) \right\}^2 +$$

$$+ h^2 \cos^2\alpha \left[\operatorname{sen}^2\varphi + (\operatorname{sen} b \cot\tau - \cos b \cos\varphi)^2 \right]$$

$$A = -\frac{h\, R}{u_1} \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi, \quad B = \frac{R}{u_1} \left\{ L - \frac{a}{R\, u_1 \operatorname{sen}\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{h}{u}\right) \right\}.$$

Ora, a causa del valore (28) di L e delle formole $\operatorname{sen} b = a$, $\operatorname{tg} b = R$, si ha

$$L - \frac{a}{R\, u_1 \operatorname{sen}\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{h}{u}\right) = h \cot\alpha\, (\cos\tau \cos\varphi - \cos b \cos\alpha),$$

e quindi

$$h_1^2 = h^2 \Big\{ \cot^2 \alpha (\cos \tau \cos \varphi - \cos b \cos \alpha)^2 +$$

$$+ \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \alpha (\operatorname{sen} b \cot \tau - \cos b \cos \varphi)^2 \Big\}$$

$$A = -\frac{hR}{u_1} \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi, \quad B = \frac{hR}{u_1} \cot \alpha (\cos \tau \cos \varphi - \cos b \cos \alpha).$$

Tenendo conto della relazione $\operatorname{sen} \tau = \operatorname{sen} b \cos \alpha$, risulta di qui l'identità

$$\frac{u_1^2}{R^2}(A^2 + B^2) = h_1^2,$$

e questa, osservando la (30) e ricordando quanto si disse in (M) § 5 a proposito della formola ivi segnata (23), dimostra che le trajettorie descritte dai punti della complementare S_1 nella sua deformazione continua tagliano le superficie S_1 sotto l'angolo α.

Dimostrato così il teorema, confrontiamo il sistema complementare (Σ') di (Σ) nello spazio a curvatura costante col complementare (Σ'_0) di (Σ_0) nello spazio euclideo. Siccome ciascuna superficie S è coniugata in deformazione della corrispondente S_0, e le loro complementari S', S'_0 sono prese rispetto a sistemi di geodetiche parallele corrispondenti, anche S', S'_0 sono coniugate in deformazione (§ 4). Possiamo dunque concludere: *La trasformazione H cangia due sistemi (Σ) complementari dello spazio euclideo in due sistemi complementari dello spazio a curvatura costante.*

§ 7.

Trasformazione singolare di Bäcklund B_α.

Se consideriamo quei particolari sistemi (Σ) nei quali *l'angolo α è assolutamente costante*, possiamo dimostrare che vale per essi il teorema analogo a quello del § 13 (M): *Se per ciascuna superficie S di un tale sistema (Σ) si costruisce la congruenza dei raggi tangenti alla S e normali alle direzioni delle trajettorie, le seconde falde focali S' di queste congruenze formano un nuovo sistema (Σ') corrispondente al medesimo angolo α.*

Queste superficie S' sono date dalle formole (7) § 1

$$x' = \cos\tau \,.\, x + \operatorname{sen}\tau\,(\eta\cos\varphi + \zeta\operatorname{sen}\varphi),$$

le quali dànno per derivazione, secondo il quadro (b), le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= -\frac{R\operatorname{sen}\tau}{u}\cos\varphi\,.\,x + \\
&+\left\{\frac{R\cos\tau}{u}\cos^2\varphi - \frac{u}{R}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\varphi\,(\Delta\cos\varphi + \Delta'\operatorname{sen}\varphi)\right\}\cdot\eta + \\
&+\left\{\frac{R\cos\tau}{u}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \frac{u}{R}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\tau\cos\varphi\,(\Delta\cos\varphi + \Delta'\operatorname{sen}\varphi)\right\}\cdot\zeta + \\
&+\frac{u\operatorname{sen}\tau}{R}(\Delta\cos\varphi + \Delta'\operatorname{sen}\varphi)\,.\,\xi, \\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= -\frac{R\operatorname{sen}\tau}{u}\operatorname{sen}\varphi\,.\,x + \\
&+\left\{\frac{R\cos\tau}{u}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{u}{R}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\varphi\,(\Delta'\cos\varphi + \Delta''\operatorname{sen}\varphi)\right\}\cdot\eta + \\
&+\left\{\frac{R\cos\tau}{u}\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{u}{R}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\tau\cos\varphi\,(\Delta'\cos\varphi + \Delta''\operatorname{sen}\varphi)\right\}\cdot\zeta + \\
&+\frac{u\operatorname{sen}\tau}{R}(\Delta'\cos\varphi + \Delta''\operatorname{sen}\varphi)\,.\,\xi, \\
\frac{\partial x'}{\partial w} &= -\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\eta + \operatorname{sen}\tau\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\zeta + \Omega\cdot\xi,
\end{aligned}\right\}\quad (30)^*$$

dove si è posto

$$\Omega = \frac{u\operatorname{sen}\tau}{R\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial u}\cos\varphi + \frac{u\operatorname{sen}\tau}{R\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial v}\operatorname{sen}\varphi + h\,\frac{\cos\tau}{\operatorname{sen}\alpha}\,.$$

Calcolando da queste formole il $d\,s'^2 = \sum d\,x'^2$ e scrivendo

$$\left.\begin{aligned}
d\,s'^2 = a_{11}\,d\,u^2 + a_{22}\,d\,v^2 + a_{33}\,d\,w^2 + 2\,a_{12}\,d\,u\,d\,v + \\
+ 2\,a_{13}\,d\,u\,d\,w + 2\,a_{23}\,d\,v\,d\,w,
\end{aligned}\right\}\quad (31)$$

si trova

$$a_{11} = \frac{R^2}{u^2}\cos^2\varphi + \frac{a^2\,u^2}{R^2}(\Delta\cos\varphi + \Delta'\operatorname{sen}\varphi)^2,$$

$$a_{22} = \frac{R^2}{u^2}\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{a^2\,u^2}{R^2}(\Delta'\cos\varphi + \Delta''\operatorname{sen}\varphi)^2,$$

$$a_{12} = \frac{R^2}{u^2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{a^2 u^2}{R^2} (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi)(\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi),$$

$$a_{13} = \frac{u \operatorname{sen} \tau}{R} \left(\Omega + a \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi),$$

$$a_{23} = \frac{u \operatorname{sen} \tau}{R} \left(\Omega + a \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) (\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi),$$

$$a_{33} = \Omega^2 + \operatorname{sen}^2 \tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^2.$$

Precisamente come nel caso della trasformazione complementare, il teorema si dimostra cangiando le variabili u, v in opportune nuove u', v', in guisa che la (31) si trasformi nell'altra

$$d s'^2 = R^2 \frac{d u'^2 + d v'^2}{u'^2} + h'^2 d w^2 + 2 A' d u' d w + 2 B' d v' d w, \tag{31)*}$$

ove tra i coefficienti A', B', h' abbia luogo la relazione

$$A'^2 + B'^2 = \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{u'^2} h'^2. \tag{32}$$

Se si ricordano i risultati del § 5, si è condotti a pensare che le opportune formole di trasformazione siano quelle stesse dello spazio euclideo, e cioè le (44) (M) § 13

$$u' = \frac{u \operatorname{sen} \sigma}{1 - \cos \sigma \cos \varphi}, \quad v' = v + \frac{u \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi}{1 - \cos \sigma \cos \varphi},$$

dove l'angolo σ è legato ad α dalla relazione (17)

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{R}{a} \operatorname{tg} \alpha.$$

Basta invero utilizzare i calcoli stessi già eseguiti in (M) § 14 per vedere che l'elemento lineare (31) si trasforma in (31)*, e la relazione caratteristica (32) è soddisfatta.

§ 8.

Trasformazione generale B_{α_1} di Bäcklund.

Ritornando ai sistemi (Σ) generali, dimostriamo che essi ammettono ancora, come nel caso euclideo, le trasformazioni generali B_{α_1} di Bäcklund *ad angolo* α_1 *assolutamente costante.*

Di ciascuna superficie S del sistema (Σ) prendiamo una trasformata S' di Bäcklund per mezzo della B_{α_1}. Se indichiamo con τ_1 la distanza focale nella corrispondente congruenza pseudosferica, avremo

$$\operatorname{sen} \tau_1 = a \cos \alpha_1 \tag{33}$$

e per la superficie trasformata S' le formole

$$x' = \cos \tau_1 \,.\, x + \operatorname{sen} \tau_1 \,(\eta \cos \omega_1 + \zeta \operatorname{sen} \omega_1), \tag{34}$$

dove la funzione *trasformatrice* ω_1 è intanto assoggettata a soddisfare le due equazioni della trasformazione di Bäcklund

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial u} = \frac{u \operatorname{tg} \alpha_1}{R} (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1) + \frac{R}{u} \cot \tau_1 \operatorname{sen} \omega_1$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial v} - \frac{1}{u} = \frac{u \operatorname{tg} \alpha_1}{R} (\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1) - \frac{R}{u} \cot \tau_1 \cos \omega_1 \,.$$

Queste, introducendo il sistema (Σ_0) coniugato in deformazione di (Σ) nello spazio euclideo, possono scriversi sotto la forma stessa (M) § 15 (formole (54))

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial u} &= u \operatorname{tg} c_1 (D \cos \omega_1 + D' \operatorname{sen} \omega_1) + \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{u \cos c_1} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial v} &= u \operatorname{tg} c_1 (D' \cos \omega_1 + D'' \operatorname{sen} \omega_1) - \frac{\cos \omega_1}{u \cos c_1}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

dove c_1 si esprime per α_1 colla formola

$$\operatorname{tg} c_1 = \frac{R}{a} \operatorname{tg} \alpha_1 \,.$$

Dalle (24) derivando, secondo il quadro (b), abbiamo le formole:

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = -\frac{R \operatorname{sen} \tau_1}{u} \cos \omega_1 \cdot x +$$

$$+ \left\{ \frac{R \cos \tau_1}{u} \cos^2 \omega_1 - \frac{u}{R} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{sen} \tau_1 \operatorname{sen} \omega_1 (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1) \right\} \cdot \eta +$$

$$+ \left\{ \frac{R \cos \tau_1}{u} \operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_1 + \frac{u}{R} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{sen} \tau_1 \cos \omega_1 (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1) \right\} \cdot \zeta +$$

$$+ \frac{u \operatorname{sen} \tau_1}{R} (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1) \cdot \xi,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = -\frac{R \operatorname{sen} \tau_1}{u} \operatorname{sen} \omega_1 \cdot x +$$

$$+ \left\{ \frac{R \cos \tau_1}{u} \operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_1 - \frac{u}{R} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{sen} \tau_1 \operatorname{sen} \omega_1 (\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1) \right\} \cdot \eta +$$

$$+ \left\{ \frac{R \cos \tau_1}{u} \operatorname{sen}^2 \omega_1 + \frac{u}{R} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{sen} \tau_1 \cos \omega_1 (\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1) \right\} \cdot \zeta +$$

$$+ \frac{u \operatorname{sen} \tau_1}{R} (\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1) \cdot \xi,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial w} = h \cos \alpha \operatorname{sen} \tau_1 \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) +$$

$$+ \left\{ -\operatorname{sen} \tau_1 \operatorname{sen} \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} + h \cos \alpha (\cos \tau_1 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \tau_1 \cot \tau \operatorname{sen} \omega_1) \right\} \cdot \eta +$$

$$+ \left\{ \operatorname{sen} \tau_1 \cos \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} - h \cos \alpha (\cos \tau_1 \cos \varphi - \operatorname{sen} \tau_1 \cot \tau \cos \omega_1) \right\} \cdot \zeta + M \xi,$$

dove si è posto

$$M = \frac{u \operatorname{sen} \tau_1}{R \operatorname{sen} \alpha} \cos \omega_1 \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{u \operatorname{sen} \tau_1}{R \operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} \omega_1 \frac{\partial h}{\partial v} +$$

$$+ h \cot \alpha \cos \alpha_1 \cos \tau \cos (\omega_1 - \varphi) + h \cos \tau_1 \operatorname{sen} \alpha.$$

Ed ora da queste, pei valori dei coefficienti a_{ik} nel $d s'^2$ scritto sotto la forma (31), si hanno le altre:

$$a_{11} = \frac{R^2}{u^2} \cos^2 \omega_1 + \frac{a^2 u^2}{R^2} (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1)^2,$$

$$a_{22} = \frac{R^2}{u^2} \operatorname{sen}^2 \omega_1 + \frac{a^2 u^2}{R^2} (\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1)^2,$$

$$a_{12} = \frac{R^2}{u^2} \operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_1 + \frac{a^2 u^2}{R^2} (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1)(\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1),$$

$$a_{33} = h^2 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \tau_1 \operatorname{sen}^2 (\omega_1 - \varphi) + \operatorname{sen}^2 \tau_1 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2 +$$

$$+ M^2 - 2h \operatorname{sen} \tau_1 \cos \alpha \frac{\partial \omega_1}{\partial w} \Big[\cos \tau_1 \cos (\omega_1 - \varphi) - \operatorname{sen} \tau_1 \cot \tau \Big] +$$

$$+ h^2 \cos^2 \alpha \Big[\cos^2 \tau_1 + \operatorname{sen}^2 \tau_1 \cot^2 \tau - 2 \operatorname{sen} \tau_1 \cos \tau_1 \cot \tau \cos (\omega_1 - \varphi) \Big],$$

ed in fine, ponendo

$$\Phi = \frac{u \operatorname{sen} \tau_1}{R} M +$$

$$+ \frac{u}{R} \operatorname{sen} \tau_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \Big\{ \operatorname{sen} \tau_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} + h \cos \alpha \Big[\operatorname{sen} \tau_1 \cot \tau - \cos \tau_1 \cos (\omega_1 - \varphi) \Big] \Big\},$$

abbiamo per a_{13}, a_{23} i valori

$$a_{13} = \Phi (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1) - \frac{h R}{u} \cos \alpha \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) \cos \omega_1$$

$$a_{23} = \Phi (\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1) - \frac{h R}{u} \cos \alpha \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) \operatorname{sen} \omega_1 .$$

L'ulteriore condizione cui deve soddisfare ω_1 si ottiene, come in (M) § 16, esprimendo che colla sostituzione di variabile

$$u' = \frac{u \operatorname{sen} c_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1}, \quad v' = v + \frac{u \cos c_1 - \operatorname{sen} \omega_1}{1 - \cos c_1 \cos \omega_1}$$

il ds'^2 acquista la forma (31)*, essendo soddisfatta la relazione (32). Eseguendo i calcoli per mezzo dei valori sopra riportati delle a_{ik}, si trova un'equazione quadratica in $\frac{\partial \omega_1}{\partial w}$, la cui opportuna radice si trova precisamente data dalla terza delle formole (D) in (M) § 18. Così il sistema delle equazioni di trasformazione è lo stesso come nel caso euclideo, onde si conclude che anche per i sistemi (Σ) degli spazî a curvatura costante esistono le trasformazioni di Bäcklund come per l'euclideo e si ottengono da quelle relative a quest'ultimo spazio semplicemente applicando la trasformazione H.

§ 9.

Trasformazione polare.

Abbiamo osservato che i sistemi (Σ) dello spazio ellittico si distinguono in due specie, secondo che la curvatura assoluta k delle superficie S che li compongono è negativa ($a < 1$), ovvero positiva ($a > 1$). I sistemi (Σ) della prima specie derivano per trasformazione *reale* H dai sistemi (Σ_0) di deformate isogonali della pseudosfera nello spazio euclideo, mentre pei sistemi (Σ) di seconda specie la trasformazione H corrispondente è immaginaria. Ma si può evitare l'uso di trasformazioni immaginarie riducendo la determinazione dei sistemi (Σ) di seconda specie a quella dei sistemi di prima per mezzo del semplice teorema seguente:

Se di ciascuna superficie S di un sistema (Σ) dello spazio ellittico, si prende la superficie polare $\overline{S}$ (parallela ad S alla distanza di un quadrante) le nuove superficie $\overline{S}$ formano un sistema (Σ) di specie opposta a quella del primo (Σ).

I due sistemi (Σ), ($\overline{\Sigma}$) possono dirsi polari l'uno dell'altro e si dirà *trasformazione polare* la trasformazione involutoria che li scambia fra loro.

Per dimostrare il teorema enunciato, cominciamo dal ricordare che le curvature *relative* di due superficie polari in punti corrispondenti sono reciproche, e perciò le loro curvature assolute hanno appunto segno contrario.

Abbiasi ora un sistema (Σ) dell'una o dell'altra specie, e sia S una sua superficie generica, S' la seconda falda focale della congruenza formata dai raggi tangenti ad S normali alle direzioni delle trajettorie. Siano $\overline{S}$, $\overline{S}'$ le rispettive superficie polari di S, S', ed F, F', $\overline{F}$, $\overline{F}'$ quattro punti corrispondenti di S, S', $\overline{S}$, $\overline{S}'$. Le rette FF' formano una congruenza colle falde focali S, S' e l'angolo dei piani focali, come pure la distanza focale, sono costanti. Le rette $\overline{F}\overline{F}'$, polari delle FF', formano la congruenza polare della precedente colle due falde focali $\overline{S}$, $\overline{S}'$, e in ciascuna delle due congruenze l'angolo dei piani focali eguaglia la distanza focale nell'altra. Queste proprietà, che seguono subito da considerazioni geometriche, si confermano colle formole, osservando che si ha con notazioni evidenti

$$\overline{x} = \xi, \quad \overline{x'} = \xi', \quad \overline{\xi} = x, \quad \overline{\xi'} = x',$$

e quindi le formole

$$\Sigma \overline{x'}\, \overline{\xi} = 0, \quad \Sigma \overline{x}\, \overline{\xi'} = 0, \quad \Sigma \overline{x}\, \overline{x'} = \Sigma \xi\, \xi', \quad \Sigma \overline{\xi}\, \overline{\xi'} = \Sigma x\, x',$$

delle quali le due prime dicono che la retta $\overline{F}\,\overline{F'}$ tocca in $\overline{F}$ la $\overline{S}$, in $\overline{F'}$ la $\overline{S'}$, e le seconde esprimono che nel passaggio dall'una all'altra congruenza l'angolo dei piani focali si scambia colla distanza focale.

Ciò premesso, come la S ammette una deformazione (isogonale) infinitesima nella quale ciascun punto F si sposta normalmente al piano tangente in F' alla S', così la $\overline{S}$ avrà una deformazione infinitesima analoga e noi cominciamo dal dimostrare il lemma:

Le ampiezze h, $\overline{h}$ di queste due rispettive deformazioni infinitesime sono eguali, o proporzionali.

Nelle (11) § 2 abbiamo le formole che definiscono h, e similmente dovremo calcolare $\overline{h}$ dalle tre condizioni

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial (\overline{h}\, x')}{\partial u} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial (\overline{h}\, x')}{\partial v}, \\ &\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial (\overline{h}\, x')}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial (\overline{h}\, x')}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Ora si ha dalle (a) § 1

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{\Delta}{\sqrt{e}} \eta - \frac{\Delta'}{\sqrt{g}} \zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{\Delta'}{\sqrt{e}} \eta - \frac{\Delta''}{\sqrt{g}} \zeta,$$

e dalle (9) § 2, a causa delle (10) ibid., abbiamo

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = -\sqrt{e} \operatorname{sen} \tau \cos \varphi \cdot x +$$

$$+ \left\{ \sqrt{e} \cos \tau \cos^2 \varphi - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \varphi \left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}} \cos \varphi + \frac{\Delta'}{\sqrt{g}} \operatorname{sen} \varphi \right) \right\} \cdot \eta +$$

$$+\left\{\sqrt{e}\cos\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\tau\cos\varphi\left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\cos\varphi+\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\right\}\cdot\zeta+$$

$$+\,\mathrm{sen}\,\tau\left(\frac{\Delta}{\sqrt{e}}\cos\varphi+\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\cdot\xi,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v}=-\sqrt{g}\,\mathrm{sen}\,\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot x+$$

$$+\left\{\sqrt{g}\cos\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\tau\,\mathrm{sen}\,\varphi\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\cos\varphi+\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\right\}\cdot\eta+$$

$$+\left\{\sqrt{g}\cos\tau\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\tau\cos\varphi\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\cos\varphi+\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\right\}\cdot\zeta+$$

$$+\,\mathrm{sen}\,\tau\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}\cos\varphi+\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\cdot\xi.$$

Sostituendo nelle due prime (36), troviamo per $\frac{\partial\log\overline{h}}{\partial u}$, $\frac{\partial\log\overline{h}}{\partial v}$ precisamente i valori stessi assegnati dalle (11) § 2 per $\frac{\partial\log h}{\partial u}$, $\frac{\partial\log h}{\partial v}$, mentre la terza delle (36) si risolve in una identità. Così resta in effetto dimostrato che la $\overline{S}$ ammette la indicata trasformazione infinitesima, e inoltre che $\overline{h}$, h differiscono solo per un fattor costante di proporzionalità, scriviamo $\overline{h}=\lambda h$ (λ costante).

Consideriamo dopo ciò le due superficie S_1, S_1 infinitamente vicine ad S, $\overline{S}$, nelle quali queste due rispettivamente si cangiano per le dette deformazioni infinitesime, e dimostriamo questo secondo lemma: *Se si prende in modo conveniente il fattore costante λ di proporzionalità fra $\overline{h}$, h, le due nuove superficie S_1, $\overline{S_1}$ sono ancora polari l'una dell'altra.*

Indichiamo con P, $\overline{P}$ i punti di S_1, $\overline{S_1}$ in cui vanno rispettivamente F, $\overline{F}$ per le deformazioni infinitesime, e siano (X_i) le coordinate di P e $(\overline{X_i})$ quelle di $\overline{P}$; avremo

$$X=x+\varepsilon h\,\xi'$$

$$\overline{X}=\xi+\varepsilon\lambda h\,x'.$$

Spostiamo ora p. es. il punto P sopra S_1 di infinitamente poco in $P'\equiv(u+\delta u,\ v+\delta v)$, ove δu, δv sono infinitesimi dell'ordine di ε, e dimostriamo che, ove si determinino in modo conveniente λ, δu, δv, si potrà far sì che il punto $\overline{P}$ sia situato sulla normale in P' alla S_1 e distante da P' di un quadrante, con che sarà provato appunto che S_1, $\overline{S}_1$ sono polari l'una dell'altra. Ora le coordinate di P', a meno di infinitesimi d'ordine superiore, sono

$$X' = x + \sqrt{e}\, \eta\, \delta u + \sqrt{g}\, \zeta\, \delta v + \varepsilon\, h\, \xi',$$

e le condizioni che dobbiamo imporre a λ, δu, δv si scrivono evidentemente

$$\sum X' \overline{X} = 0, \quad \sum X' \frac{\partial \overline{X}}{\partial u} = 0, \quad \sum X' \frac{\partial \overline{X}}{\partial v} = 0. \tag{37}$$

Ma la prima di queste dà

$$\lambda\, h \sum x\, x' + h \sum \xi\, \xi' = 0,$$

cioè il valor *costante* per λ

$$\lambda = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \tau}.$$

Quanto alle due altre (37) individuano i valori di δu, δv da un sistema lineare col determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\Delta}{\sqrt{e}} & \dfrac{\Delta'}{\sqrt{g}} \\[2ex] \dfrac{\Delta'}{\sqrt{e}} & \dfrac{\Delta''}{\sqrt{g}} \end{vmatrix} = k_0 \sqrt{eg} \neq 0;$$

il secondo lemma è così dimostrato.

Dopo ciò se ritorniamo al sistema (Σ) e di ciascuna superficie S prendiamo la polare $\overline{S}$, vediamo che mentre S subisce la deformazione isogonale continua entro (Σ), la sua polare $\overline{S}$ subisce una corrispondente deformazione isogonale continua e descrive un sistema $(\overline{\Sigma})$, come si è enunciato nel teorema.

§ 10.

Sistema (Σ) di superficie a curvatura k nulla.

Nelle ricerche fatte fin qui sulle trasformazioni dei sistemi (Σ) in geometria ellittica od iperbolica abbiamo sempre escluso il caso delle superficie a curvatura assoluta nulla nello spazio ellittico, caso che non si può ricondurre, mediante la trasformazione H, a quelle delle deformate isogonali della pseudosfera nello spazio euclideo. Ma se procediamo qui direttamente, troviamo che sussistono ancora in questo caso tutte le proprietà delle trasformazioni, ed altre se ne aggiungono appartenenti esclusivamente a questo caso singolare.

Cominciamo dallo scrivere le formole relative ai sistemi (Σ) di deformate isogonali della superficie di CLIFFORD, deducendole da quelle generali stabilite nei §§ 3, 5, dove dovremo fare $k=0$, $a=1$, indi per la (13)* $\operatorname{sen}\tau=\cos\alpha$ e conseguentemente $\cos\tau=\pm\operatorname{sen}\alpha$. Per fissare le idee sceglieremo uno dei segni prendendo $\cos\tau=\operatorname{sen}\alpha$, ma avvertiamo bene che la scelta dell'altro segno dà un'altra schiera di deformazioni isogonali della superficie di CLIFFORD affatto distinta dalla prima (cf. la fine del paragrafo). Per semplicità prenderemo inoltre l'elemento lineare della superficie di CLIFFORD sotto la forma cartesiana ortogonale del piano euclideo

$$d s^2 = d u^2 + d v^2,$$

e dovremo quindi porre $e=g=1$. Le equazioni di CODAZZI prendono la forma semplice

$$\frac{\partial \Delta}{\partial v}=\frac{\partial \Delta'}{\partial u},\quad \frac{\partial \Delta''}{\partial u}=\frac{\partial \Delta'}{\partial v}, \tag{38}$$

e l'equazione di GAUSS si scrive

$$\Delta'^2-\Delta\Delta''=1. \tag{39}$$

Osserviamo ancora che le asintotiche di un sistema hanno l'equazione differenziale

$$\Delta\, d u+(\Delta'-1)\, d v=0, \tag{40}$$

o l'equivalente

$$(\Delta'+1)\, d u+\Delta''\, d v=0, \tag{40*}$$

mentre quelle dell'altro sistema hanno l'equazione differenziale

$$\Delta\, d u+(\Delta'+1)\, d v=0, \tag{41}$$

ovvero

$$(\Delta'-1)\, d u+\Delta''\, d v=0. \tag{41*}$$

Il primo sistema d'asintotiche (40) si distingue dal secondo (41) per ciò che lungo un'asintotica del primo le normali alla superficie sono parallele *destrorse* (nel senso di CLIFFORD), e invece parallele sinistrorse lungo un'asintotica del secondo. Rammentiamo ancora (*Lezioni,* Vol. I, § 220) che tutte le asintotiche di un medesimo sistema sono congruenti fra loro, e la superficie si genera collo scorrimento di un'asintotica di un sistema lungo un'asintotica del sistema opposto.

Secondo i risultati generali dei §§ 3, 5, ogni sistema (Σ) di deformate isogonali sotto l'angolo α della superficie di Clifford sarà definito dalla forma

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2 + 2h\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \, du\, dw - 2h\cos\alpha\cos\varphi\, dv\, dw \quad (42)$$

dell'elemento lineare dello spazio ellittico, dove le funzioni h, φ di u, v, w soddisfano alle due equazioni del 1.° ordine

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}(h\cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial v}(h\operatorname{sen}\varphi) + 2h\operatorname{tg}\alpha = 0 \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\log h}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\log h}{\partial u} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (A')$$

ed alle tre del 2.° ordine

$$\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta}{\partial w} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}, \quad \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta'}{\partial w} = \frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}, \quad \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\Delta''}{\partial w} = \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}, \quad (B')$$

i coefficienti Δ, Δ', Δ'' essendo dati dalle formole

$$\left.\begin{aligned} &\Delta = \frac{\cot\alpha}{h}\frac{\partial}{\partial u}(h\operatorname{sen}\varphi), && \Delta' = \frac{\cot\alpha}{h}\frac{\partial}{\partial v}(h\operatorname{sen}\varphi) + 1 \\ &\Delta' = -\frac{\cot\alpha}{h}\frac{\partial}{\partial u}(h\cos\varphi) - 1, && \Delta'' = -\frac{\cot\alpha}{h}\frac{\partial}{\partial v}(h\cos\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Scriviamo ancora esplicitamente le formole

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \operatorname{tg}\alpha\left\{\Delta\cos\varphi + (\Delta'+1)\operatorname{sen}\varphi\right\} \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \operatorname{tg}\alpha\left\{(\Delta'-1)\cos\varphi + \Delta''\operatorname{sen}\varphi\right\} \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\log h}{\partial u} = \operatorname{tg}\alpha\left\{\Delta\operatorname{sen}\varphi - (\Delta'+1)\cos\varphi\right\} \\ &\frac{\partial\log h}{\partial v} = \operatorname{tg}\alpha\left\{(\Delta'-1)\operatorname{sen}\varphi - \Delta''\cos\varphi\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

dalle quali risulta che lungo ciascuna asintotica (40) o (40)* del primo sistema sono nulli i differenziali di φ e di $\log h$, e perciò h e φ sono costanti lungo queste linee ed in particolare funzioni l'una dell'altra, come è espresso anche dalla seconda delle (A').

Per le ricerche seguenti occorre ancora scrivere le formole per le derivate di x, η, ζ, ξ, che raccogliamo nel quadro seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\eta, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=\zeta,\\
&\quad\frac{\partial x}{\partial w}=h\,(\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta-\cos\alpha\cos\varphi\,.\,\zeta+\operatorname{sen}\alpha\,.\,\xi),\\
&\frac{\partial \eta}{\partial u}=-x+\Delta\,\xi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v}=\Delta'\,\xi,\\
&\quad\frac{\partial \eta}{\partial w}=-h\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\,.\,x+h\operatorname{sen}\alpha\,.\,\zeta+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial u}+h\cos\alpha\cos\varphi\right).\,\xi,\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial u}=\Delta'\,\xi, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v}=-x+\Delta''\,\xi,\\
&\quad\frac{\partial \zeta}{\partial w}=h\cos\alpha\cos\varphi\,.\,x-h\operatorname{sen}\alpha\,.\,\eta+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial v}+h\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\right).\,\xi,\\
&\frac{\partial \xi}{\partial u}=-\Delta\,\eta-\Delta'\,\zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v}=-\Delta'\,\eta-\Delta''\,\zeta,\\
&\quad\frac{\partial \xi}{\partial w}=-h\operatorname{sen}\alpha\,.\,x-\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial u}+h\cos\alpha\cos\varphi\right)\eta-\\
&\qquad\qquad-\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial v}+h\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\right).\,\zeta.
\end{aligned}\right\}\quad (a')$$

Insieme ai coseni di direzione (η), (ζ), (ξ) degli spigoli del triedro principale introduciamo anche i loro *parametri di scorrimento* (Vol. I, pag. 450), e dapprima consideriamo quelli *destrorsi*, che indicheremo rispettivamente con

$$(A_1,\ A_2,\ A_3),\quad (B_1,\ B_2,\ B_3),\quad (C_1,\ C_2,\ C_3);$$

avremo

$$A_1=\begin{vmatrix} x_0 & x_1\\ \eta_0 & \eta_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix},\qquad B_1=\begin{vmatrix} x_0 & x_1\\ \zeta_0 & \zeta_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ \zeta_2 & \zeta_3\end{vmatrix}$$

$$C_1=\begin{vmatrix} x_0 & x_1\\ \xi_0 & \xi_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & x_3\\ \xi_2 & \xi_3\end{vmatrix},$$

colle altre analoghe che si deducono permutando circolarmente gli indici 1, 2, 3. Derivando le A, B, C rapporto ad u, v, w, utilizzando le formole del quadro (a') e le note proprietà del determinante ortogonale destrorso

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix},$$

si ottengono le altre

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial u} = \Delta\, C, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = (\Delta' - 1)\, C, \\
&\qquad \frac{\partial A}{\partial w} = 2\, h \operatorname{sen} \alpha \,.\, B + \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial u} + 2\, h \cos \alpha \cos \varphi\right) . \, C, \\
&\frac{\partial B}{\partial u} = (\Delta' + 1)\, C, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \Delta''\, C, \\
&\qquad \frac{\partial B}{\partial w} = -\, 2\, h \operatorname{sen} \alpha \,.\, A + \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial v} + 2\, h \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi\right) . \, C, \\
&\frac{\partial C}{\partial u} = -\, \Delta\, A - (\Delta' + 1)\, B, \quad \frac{\partial C}{\partial v} = -\, (\Delta' - 1)\, A - \Delta''\, B, \\
&\qquad \frac{\partial C}{\partial w} = -\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial u} + 2\, h \cos \alpha \cos \varphi\right) . \, A \, - \\
&\qquad\qquad\qquad - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial v} + 2\, h \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi\right) . \, B.
\end{aligned}\right\} \quad (b')$$

Del tutto similmente si procede per trovare le formole corrispondenti pei parametri ***sinistrorsi*** che indicheremo con $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ e si trovano le altre

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{A}}{\partial u} = \Delta\, \overline{C}, \quad \frac{\partial \overline{A}}{\partial v} = (\Delta' + 1)\, \overline{C}, \quad \frac{\partial \overline{A}}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial u}\, \overline{C} \\
&\frac{\partial \overline{B}}{\partial u} = (\Delta' - 1)\, \overline{C}, \quad \frac{\partial \overline{B}}{\partial v} = \Delta''\, \overline{C}, \quad \frac{\partial \overline{B}}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial v}\, \overline{C} \\
&\frac{\partial \overline{C}}{\partial u} = -\, \Delta\, \overline{A} - (\Delta' - 1)\, \overline{B}, \quad \frac{\partial \overline{C}}{\partial v} = -\, (\Delta' + 1)\, \overline{A} - \Delta''\, \overline{B}, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial \overline{C}}{\partial w} = -\, \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial u}\, \overline{A} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial v}\, \overline{B}.
\end{aligned}\right\} \quad (b'')$$

Se infine indichiamo con X_1, X_2, X_3 i parametri di scorrimento destrorsi delle tangenti alle trajettorie (w), avremo

$$X = \cos\alpha \,\mathrm{sen}\,\varphi \,.\, A - \cos\alpha\cos\varphi \,.\, B + \mathrm{sen}\,\alpha \,.\, C,$$

e quindi derivando colle (b')

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= \left(\Delta\,\mathrm{sen}\,\varphi - (\Delta' + 1)\cos\varphi\right) . \\
&\qquad .\left\{ -\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi \,.\, A + \mathrm{sen}\,\alpha\cos\varphi \,.\, B + \cos\alpha \,.\, C \right\} \\
\frac{\partial X}{\partial v} &= \left((\Delta' - 1)\,\mathrm{sen}\,\varphi - \Delta''\cos\varphi\right) . \\
&\qquad .\left\{ -\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi \,.\, A + \mathrm{sen}\,\alpha \,.\, \cos\varphi \,.\, B + \cos\alpha \,.\, C \right\} \\
\frac{\partial X}{\partial w} &= \left(\cos\alpha\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w} - \frac{\partial h}{\partial u} - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{d\alpha}{dw}\right)\cdot A + \\
&\qquad + \left(\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w} - \frac{\partial h}{\partial v} + \mathrm{sen}\,\alpha\cos\varphi\,\frac{d\alpha}{dw}\right)\cdot B + \\
&\qquad + \left\{\cot\alpha\left(\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{\partial h}{\partial u} - \cos\varphi\,\frac{\partial h}{\partial v}\right) + \cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dw}\right\}\cdot C.
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Le formole della terza linea nel quadro (b') dimostrano che sopra ogni superficie a curvatura nulla $w = \mathrm{cost.}$ i parametri C_1, C_2, C_3 della normale sono costanti lungo ogni asintotica del sistema (40), cioè le normali alla superficie lungo una tale asintotica sono parallele nel senso destrorso, come sopra si è asserito. Ma se guardiamo alle (46), vediamo che lo stesso accade delle tangenti alle trajettorie, onde possiamo riassumere una parte dei risultati fin qui ottenuti così:

In ogni deformazione isogonale infinitesima di una superficie a curvatura nulla nello spazio ellittico le direzioni degli spostamenti lungo ciascuna asintotica di un determinato sistema sono parallele nel senso stesso delle binormali a questa asintotica; inoltre l'ampiezza dello spostamento infinitesimo è costante.

Da ciò risulta anche la distinzione geometrica fra le due schiere di deformazioni isogonali di cui sopra è discorso; le une appartengono al sistema destrorso, le altre al sistema sinistrorso di asintotiche.

§ 11.

Caso in cui la deformazione si riduce ad un puro movimento.

Prima di procedere oltre, facciamo per gli attuali sistemi (Σ) di deformate isogonali della superficie di Clifford la ricerca analoga a quella compiuta in (M) §§ 9, 10 per lo spazio euclideo, e domandiamo di trovare tutti i casi nei quali un tale sistema (Σ) è generato da un movimento continuo della superficie S', dove però per semplificare si ammetterà senz'altro che l'angolo α sia una costante assoluta. Occorre e basta, perchè la flessione di S si riduca ad un movimento, che Δ, Δ', Δ'' siano indipendenti da w, e questo porta, per le formole (B'), che h sia una funzione lineare intera di u, v, con coefficienti funzioni di w, o costanti. Distinguiamo due casi, secondo che h contiene u, v, oppure ne è indipendente.

1.° caso. Se h contiene almeno una delle variabili u, v, le linee $h = \text{cost.}$ sopra una superficie iniziale S sono geodetiche parallele ed assumendole per es. per le $u = \text{cost.}$, potremo fare (cangiando eventualmente il parametro w)

$$h = u + \theta(w),$$

indicando $\theta(w)$ una funzione della sola w. La seconda delle (A') dimostra che, insieme a $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0$, si ha $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, onde l'ultima delle (43) dà $\Delta'' = 0$, cioè le geodetiche $u = \text{cost.}$ sono asintotiche e per ciò rettilinee: *la superficie S è necessariamente rigata.* Le formole (b''), essendo $\Delta'' = 0$, $\Delta' = 1$, $\dfrac{\partial h}{\partial v} = 0$, dimostrano che i parametri di scorrimento sinistrorsi B_1, B_2, B_3 delle generatrici di tutte le S sono costanti, onde tutte queste rette sono parallele sinistrorse e formano una congruenza (sinistrorsa) di Clifford, e nello scorrimento secondo queste rette ciascuna superficie S striscia in sè medesima.

Prendiamo ora la prima delle (A'), che integrata dà subito

$$\cos\varphi = \frac{\psi(w) - (u + \theta(w))^2 \operatorname{tg}\alpha}{u + \theta(w)},$$

con $\varphi(w)$ funzione di w. Calcolando di qui Δ secondo la (43_1) viene

$$\Delta = \frac{2\{\psi(w) - (u+\theta(w))^2 \operatorname{tg}\alpha\} + \cot\alpha}{\sqrt{(u+\theta(w))^2 - [\psi(w) - (u+\theta(w))^2 \operatorname{tg}\alpha]^2}},$$

e la condizione che Δ sia indipendente da w richiede che tanto $\theta(w)$ quanto $\varphi(w)$ siano costanti, onde h e φ risultano funzioni di u soltanto. Perciò l'elemento lineare (42) dello spazio ammette i due gruppi ad un parametro permutabili di movimenti

$$v' = v + \text{cost.}, \quad w' = w + \text{cost.}$$

Il primo gruppo lascia fissa ciascuna retta della congruenza di Clifford e non è quindi altro che lo scorrimento sopra ricordato, l'altro è il movimento elicoidale continuo che fa generare alla superficie S il sistema (Σ). E poichè in questo movimento le generatrici di S restano nella congruenza di Clifford anche i due assi del movimento elicoidale (*) appartengono a questa congruenza, cioè sono paralleli alle generatrici di S. La determinazione degli attuali sistemi (Σ) viene quindi ricondotta al problema seguente: *Assegnato un movimento elicoidale attorno ad un asse nello spazio ellittico, trovare una rigata colle generatrici parallele all'asse che tagli sotto angolo costante le trajettorie del movimento.* Basta ricercare per es. la forma della sezione prodotta nella superficie da un piano normale all'asse per vedere che il problema si risolve per quadrature. I sistemi (Σ) così determinati corrispondono agli elicoidali dello spazio euclideo ((M) §§ 9, 10).

2.° caso. Sia ora h funzione solo di w; cangiando il parametro w potremo fare senz'altro $h = 1$. La seconda delle (A') è identica e la prima dà per φ l'equazione

$$\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 2 \operatorname{tg}\alpha. \tag{47}$$

Se si esprime poi che i valori di Δ, Δ', Δ''

$$\left.\begin{aligned} \Delta = \cot\alpha\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \Delta' = \cot\alpha\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} + 1 = \cot\alpha \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} - 1, \\ \Delta'' = \cot\alpha \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

(*) È ben noto che ogni movimento dello spazio ellittico, diverso da uno scorrimento, è elicoidale e possiede due assi polari l'uno dell'altro.

sono indipendenti da w, si trova subito che deve essere insieme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial w}=0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial w}=0,$$

indi $\frac{\partial \varphi}{\partial w}=0$, poichè la (47), essendo $\operatorname{tg}\alpha = 0$, esclude l'annullarsi simultaneo di $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$. Viceversa se φ è una qualunque funzione di u, v che soddisfi la (47), prendendo $h=1$, ne resta individuato un sistema (Σ) di superficie a curvatura nulla generato da un puro movimento. Nel caso attuale abbiamo dunque un'intera classe di tali sistemi (Σ), dipendenti non più da costanti, ma da una funzione arbitraria.

Per caratterizzare geometricamente questi sistemi cominciamo dall'osservare che, essendo qui per le (48)

$$\Delta \operatorname{sen}\varphi - (\Delta'+1)\operatorname{sen}\varphi = 0, \quad (\Delta'-1)\operatorname{sen}\varphi - \Delta''\cos\varphi = 0,$$

ed inoltre $h=1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial w}=0$, $\frac{d\alpha}{dw}=0$, le formole (46) dimostrano che X_1, X_2, X_3 sono costanti assolute, e per ciò le trajettorie del movimento sono rette di una congruenza destrorsa di CLIFFORD: il movimento è un semplice scorrimento destrorso (*). Resta a vedersi quali sono le superficie S che in questo

(*) A questo punto si può proseguire per quest'altra via dimostrando insieme la seguente proposizione per sè notevole: *Ogni superficie che nello spazio ellittico tagli sotto angolo costante α i raggi di una congruenza di* CLIFFORD *è a curvatura nulla.*

Sia S la superficie supposta, sulla quale prendiamo un sistema ortogonale (u, v) nel quale, p. e., le linee $u=\text{cost}$ siano ortogonali ai raggi della congruenza di CLIFFORD, che supporremo destrorse.

Adoperando le solite notazioni, siano come al § 10 (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3) i parametri destrorsi delle tre direzioni principali; avremo le formole

$$\frac{\partial A}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}B+\frac{\Delta}{\sqrt{e}}C, \quad \frac{\partial B}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}A+\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}+\sqrt{e}\right)C,$$
$$\frac{\partial C}{\partial u}=-\frac{\Delta}{\sqrt{e}}A-\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{g}}+\sqrt{e}\right)B$$

$$\frac{\partial A}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}B+\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}-\sqrt{g}\right)C, \quad \frac{\partial B}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}A+\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}C,$$
$$\frac{\partial C}{\partial v}=-\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}}-\sqrt{g}\right)A-\frac{\Delta''}{\sqrt{g}}C.$$

scorrimento generano un sistema (Σ). Per ciò calcoliamo, colla formola di Bonnet, la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ delle asintotiche sinistrorse (41)

$$\cos\varphi\, du + \operatorname{sen}\varphi\, dv;$$

abbiamo

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial \cos\varphi}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{sen}\varphi}{\partial v},$$

cioè per la (47) $\frac{1}{\rho} = 2\operatorname{tg}\alpha$. Dunque le asintotiche sinistrorse di S, colla torsione $\frac{1}{T} = -1$ hanno costante anche la flessione $\frac{1}{\rho} = 2\operatorname{tg}\alpha$. La curva C determinata da queste equazioni intrinseche non è altro che una delle trajet-

---

I raggi della congruenza di Clifford, giacendo nel piano della tangente alla linea $v=\text{cost.}$ e della normale alla superficie, avranno parametri destrorsi X_1, X_2, X_3 di scorrimento dati dalle formole

$$X = \cos\alpha\, A + \operatorname{sen}\alpha\, C$$

che dovranno essere costanti. Ma dalle formole precedenti si ricava

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\operatorname{sen}\alpha \frac{\Delta}{\sqrt{e}} A + \left\{\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{g}} + \sqrt{e}\right) - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{g}} \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right\} B + \cos\alpha \frac{\Delta}{\sqrt{e}} C$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}} - \sqrt{g}\right) A + \left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{e}} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} - \operatorname{sen}\alpha \frac{\Delta''}{\sqrt{g}}\right) B + \cos\alpha\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{e}} - \sqrt{g}\right) C$$

e debbono annullarsi nei secondi membri di queste due espressioni i coefficienti di A, B, C, onde seguono le formole

$$\Delta = 0, \quad \Delta' = \sqrt{eg}, \quad \Delta'' = \cot\alpha \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{e}} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = 2\operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$

La prima delle (1) dice che le linee $v=\text{cost.}$ sono asintotiche, la (2) che la loro curvatura geodetica, od assoluta, è costante $=2\operatorname{tg}\alpha$. Siccome $\Delta' = \sqrt{eg}$, per la curvatura relativa k_0 della S si ha

$$k_0 = \frac{\Delta\Delta'' - \Delta'^2}{eg} = -1,$$

cioè *la superficie S è a curvatura assoluta k nulla* c. d. d. Le formole stesse dànno anche immediatamente le proprietà inverse e si ottengono così nuovamente i risultati del testo.

torie ortogonali delle generatrici sinistrorse in una superficie di CLIFFORD. Arriviamo ora a caratterizzare perfettamente i sistemi (Σ) del caso attuale dimostrando che:

Ogni superficie S a curvatura nulla di cui una delle asintotiche generatrici C abbia costante anche la flessione genera, in un conveniente scorrimento, un sistema (Σ).

Sia Γ l'asintotica generatrice dell'altro sistema, affatto arbitraria. Se osserviamo che nella superficie di CLIFFORD, sulla quale C è trajettoria ortogonale delle generatrici sinistrorse, le generatrici destrorse sono inclinate di un angolo costante sulle sinistrorse, che sono le binormali di C, vediamo che nello scorrimento continuo sinistrorso di C lungo Γ, col quale la superficie S viene generata, le dette generatrici destrorse generano una congruenza di CLIFFORD i cui raggi sono tutti inclinati di un medesimo angolo sulle normali di S, o binormali di C. Dunque nello scorrimento destrorso lungo i raggi di questa congruenza la S genera un sistema (Σ) c. d. d.

§ 12.

Trasformazione complementare e trasformazione parallela.

Riprendendo la considerazione dei sistemi (Σ) generali di superficie a curvatura nulla, occupiamoci ora delle loro trasformazioni, cominciando dalla complementare. Abbiamo ancora qui il medesimo teorema fondamentale come nello spazio euclideo ((M) § 11), ovvero come per gli altri sistemi (Σ) di superficie a curvatura costante nello spazio ellittico od iperbolico (cf. sopra § 6).

Per dimostrarlo, prendiamo ad esempio la complementare S' di S rispetto alle geodetiche parallele $v = \text{cost}$. Le coordinate x'_i del punto di S' corrispondente a (x_i) sopra S sono date semplicemente da $x' = \eta$. Dalle formole del quadro (a'), formando il quadrato dell'elemento lineare dello spazio

$$d s^2 = \sum d x'^2 = \sum d \eta^2,$$

abbiamo

$$\left.\begin{aligned} d s'^2 = d u^2 + (\Delta\, d u + \Delta'\, d v)^2 + \\ + (h^2 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + L^2)\, d w^2 + \\ + 2 h \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi\, d u\, d w + 2 L (\Delta\, d u + \Delta'\, d v)\, d w, \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

dove si è posto

$$L = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial u} + h\cos\alpha\cos\varphi. \tag{50}$$

A causa della (38_1) e della prima delle (B'), l'espressione

$$\Delta\, d\,u + \Delta'\, d\,v + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}\, d\,w$$

è un differenziale esatto, e se si pone

$$v_1 = \int\left(\Delta\, d\,u + \Delta'\, d\,v + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}\, d\,w\right),$$

l'elemento lineare (49), calcolato in coordinate u, v_1, w diventa

$$\begin{aligned} d\,s_1^2 = d\,u^2 + \left(d\,v_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}\, d\,w\right)^2 + \\ + (h^2\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\varphi + h^2\operatorname{sen}^2\alpha + L^2)\, d\,w^2 + 2\,h\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\, d\,u\, d\,w + \\ + 2\,L\left(d\,v_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\frac{\partial h}{\partial u}\, d\,w\right) d\,w, \end{aligned}$$

e sostituendovi per L il suo valore (50), e riducendo

$$d\,s'^2 = d\,u^2 + d\,v_1^2 + h^2\, d\,w^2 + 2\,h\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi\, d\,u\, d\,w + 2\,h\cos\alpha\cos\varphi\, d\,v_1\, d\,w. \tag{51}$$

Questa è la forma caratteristica per un sistema (Σ') di deformate isogonali sotto l'angolo α della superficie di Clifford, ciò che dimostra il teorema. Siccome poi nella (51) il coefficiente di $d\,w^2$ è ancora h^2, vediamo che: *Nella trasformazione complementare dei sistemi* (Σ) *di superficie a curvatura nulla gli archi delle trajettorie isogonali si conservano in lunghezza.*

Un'altra osservazione di qualche interesse è la seguente che conduce a riconoscere qui l'esistenza di una *trasformazione parallela.* Due sistemi (Σ'), (Σ'') complementari di un medesimo (Σ) hanno le loro superficie corrispondenti $S'\,S''$ parallele a distanza costante, onde risulta: *Se di ciascuna superficie S di un sistema* (Σ) *si prende la parallela* $\overline{S}$, *a distanza costante arbitraria* δ, *le superficie* $\overline{S}$ *formano nuovamente un sistema* (Σ).

Come si vede, questa trasformazione parallela si compone di due complementari successive; in particolare per $\delta = \frac{\pi}{2}$ abbiamo la trasformazione polare che esiste anche per gli altri sistemi (Σ) di superficie a curvatura costante nello spazio ellittico (§ 9). Ma possiamo anche, senza passare per le trasformazioni complementari, riconoscere direttamente l'esistenza della trasformazione parallela.

Possiamo scrivere per le coordinate $\bar{x}_i$ di un punto di $\bar{S}$

$$\bar{x} = x \cos\delta - \xi \operatorname{sen}\delta,$$

e differenziando coll'osservare le formole del quadro (a'), abbiamo

$$d x = \eta\, d u + \zeta\, d v + h (\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \,.\, \eta - \cos\alpha \cos\varphi \,.\, \zeta + \operatorname{sen}\alpha \,.\, \xi)\, d w$$

$$- d\xi = \left\{ \Delta\, d u + \Delta'\, d v + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial u} + h \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi\right) d w \right\} . \eta +$$

$$+ \left\{ \Delta'\, d u + \Delta''\, d v + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial v} + h \cos\alpha \cos\varphi\right) d w \right\} . \zeta + h \operatorname{sen}\alpha \,.\, x\, d u.$$

D'altra parte le due espressioni

$$\Delta\, d u + \Delta'\, d v + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial h}{\partial u} d w$$

$$\Delta'\, d u + \Delta''\, d v + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial h}{\partial v} d w$$

sono due differenziali esatti, che indichiamo con $d\,U$, $d\,V$, e ponendo

$$\bar{u} = u \cos\delta + U \operatorname{sen}\delta, \quad \bar{v} = v \cos\delta + V \operatorname{sen}\delta,$$

abbiamo quindi

$$d\bar{x} = h \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\delta \,.\, x\, d w + (d\bar{u} + h \cos\alpha \operatorname{sen}(\varphi + \delta)\, d w)\, \eta +$$

$$+ (d\bar{v} - h \cos\alpha \cos(\varphi + \delta)\, d w) \,.\, \zeta + h \operatorname{sen}\alpha \cos\delta \,.\, \xi\, d w.$$

Formando di qui $\overline{d s^2} = \sum d\bar{x}^2$, si ottiene

$$\overline{d s}^2 = d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2 + h^2\, d w^2 +$$

$$+ 2 h \cos\alpha \operatorname{sen}(\varphi + \delta)\, d\bar{u}\, d w - 2 h \cos\alpha \cos(\varphi + \delta)\, d\bar{v}\, d w,$$

che ha la solita forma caratteristica, onde il teorema è dimostrato.

§ 13.

Trasformazione singolare B_α per α costante.

Pei punti di ciascuna superficie S tiriamo i raggi tangenti, normali alle trajettorie, e considerando le seconde falde S', a curvatura nulla, di queste congruenze dimostriamo: *Se l'angolo α è costante, queste superficie S' formano un nuovo sistema* (Σ') (cf. sopra § 7 ed (M) § 13).

Le formole che dànno queste S' sono le (7) § 1, dove, essendo ora $\alpha = 1$, dobbiamo fare

$$\operatorname{sen} \tau = \cos \alpha, \quad \cos \tau = \operatorname{sen} \alpha,$$

e quindi

$$x' = \operatorname{sen} \alpha \,.\, x + \cos \alpha \,(\eta \cos \varphi + \zeta \operatorname{sen} \varphi).$$

Derivando otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} = &- \cos \alpha \cos \varphi \,.\, x + \operatorname{sen} \alpha \left\{ \cos^2 \varphi - \operatorname{sen} \varphi \,(\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi) \right\} . \,\eta + \\
&+ \operatorname{sen} \alpha \left\{ \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \,(\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi) \right\} . \,\zeta + \\
&+ \cos \alpha \,(\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi) \,.\, \xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial v} = &- \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi \,.\, x + \operatorname{sen} \alpha \left\{ \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \,(\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi) \right\} . \,\eta + \\
&+ \operatorname{sen} \alpha \left\{ \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos \varphi \,(\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi) \right\} . \,\zeta + \\
&+ \cos \alpha \,(\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi) \,.\, \xi
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial w} = - \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \eta + \cos \alpha \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \zeta + \Omega \,\xi,$$

dove si è posto

$$\Omega = \cot \alpha \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial u} + \cot \alpha \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial h}{\partial v} + h.$$

Calcolando l'elemento lineare $d s'^2 = \sum d x'^2$ dello spazio in coordinate u,

v, w, e ponendo

$$\left.\begin{aligned} d s'^2 = a_{11}\, d u^2 + a_{22}\, d v^2 + a_{33}\, d w^2 + 2\, a_{12}\, d u\, d v + \\ + 2\, a_{13}\, d u\, d w + 2\, a_{23}\, d v\, d w, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

troviamo quindi

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \cos^2 \varphi + (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi)^2, \\ a_{12} &= \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + (\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi)\,(\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi), \\ a_{22} &= \operatorname{sen}^2 \varphi + (\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi)^2, \\ a_{13} &= \cos \alpha \left(\Omega + \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)(\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi), \\ a_{23} &= \cos \alpha \left(\Omega + \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)(\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi), \\ a_{33} &= \Omega^2 + \cos^2 \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Il teorema sarà dimostrato se troviamo una trasformazione di variabili u, v nelle nuove u', v' per modo che risulti

$$d s'^2 = d u'^2 + d v'^2 + h'^2\, d w^2 + 2\, l\, d u'\, d w + 2\, m\, d v'\, d w, \tag{55}$$

e fra h'^2, l, m sussista la relazione

$$l^2 + m^2 = h'^2 \cos^2 \alpha. \tag{55)*}$$

L'opportuna trasformazione di variabili corrisponde anche qui alla relazione d'applicabilità delle due falde contenuta nell'affinità d'Ivory; le formole si scrivono semplicemente

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + \cot \alpha \cos \varphi \\ v' &= v + \cot \alpha \operatorname{sen} \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Per verificarle deduciamo per derivazione

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial u} &= \cos^2 \varphi - \operatorname{sen} \varphi\,(\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi), \\ \frac{\partial u'}{\partial v} &= \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi\,(\Delta \cos \varphi + \Delta' \operatorname{sen} \varphi), \\ \frac{\partial v'}{\partial u} &= \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \cos \varphi\,(\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi), \\ \frac{\partial v'}{\partial v} &= \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos \varphi\,(\Delta' \cos \varphi + \Delta'' \operatorname{sen} \varphi), \\ \frac{\partial u'}{\partial w} &= -\cot \alpha \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w}, \quad \frac{\partial v'}{\partial w} = \cot \alpha \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w}. \end{aligned}\right\} \tag{56)*}$$

Eguagliando le due forme (53), (55) del $d s'^2$, si ottengono per determinare l, m le due equazioni seguenti

$$l \frac{\partial u'}{\partial u} + m \frac{\partial v'}{\partial u} = \cos\alpha \left(\Omega - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) (\Delta \cos\varphi + \Delta' \operatorname{sen}\varphi)$$

$$l \frac{\partial u'}{\partial v} + m \frac{\partial v'}{\partial v} = \cos\alpha \left(\Omega - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) (\Delta' \cos\varphi + \Delta'' \operatorname{sen}\varphi),$$

indi risolvendo, coll'osservare le (56)*

$$\left.\begin{aligned} l &= -\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \left(\Omega - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right), \\ m &= \cos\alpha \cos\varphi \left(\Omega - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right), \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

e per ciò

$$l \frac{\partial u'}{\partial w} + m \frac{\partial v'}{\partial w} = \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \left(\Omega - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) \tag{58}$$

D'altra parte pel coefficiente h'^2 si ha

$$h'^2 = \Omega^2 + \cos^2\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 - \cot^2\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 - 2\left(l \frac{\partial u'}{\partial w} \; m \frac{\partial v'}{\partial w}\right),$$

e questa, per la (58), si trasforma nell'altra

$$h'^2 = \left(\Omega - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2.$$

Basta paragonare quest'ultima colle (57) per vedere che sussiste la relazione (55)*, ed il teorema è dimostrato.

§ 14.

Trasformazione generale B_{c_1} di Bäcklund.

Ritornando ai sistemi (Σ) con angolo α in generale variabile con w, prendiamo di ciascuna superficie S una trasformata S', secondo la trasformazione B_{c_1} di Bäcklund *a costante* c_1 *fissa*, data dalle formole

$$x' = \operatorname{sen} c_1 \,.\, x + \cos c_1 (\eta \cos\omega_1 + \zeta \operatorname{sen}\omega_1). \tag{59}$$

La funzione trasformatrice ω_1 è assoggettata in primo luogo a soddisfare le due equazioni della trasformazione B_{c_1} di Bäcklund

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial u} &= \operatorname{tg} c_1 \left\{ \Delta \cos \omega_1 + (\Delta' + 1) \operatorname{sen} \omega_1 \right\}, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial v} &= \operatorname{tg} c_1 \left\{ (\Delta' - 1) \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1 \right\},\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

ed ora ricerchiamo le ulteriori condizioni che dobbiamo imporre ad ω_1 affinchè le superficie trasformate S' compongano un nuovo sistema (Σ') corrispondente al medesimo angolo α. Basterà che indichiamo il procedimento affatto simile a quello tenuto in (M) §§ 15, 17 pel caso euclideo. Se si calcolano le derivate delle x' dalle (59) e si forma il corrispondente $d s'^2 = \sum d x'^2$, ponendo

$$M = \frac{\cos c_1 \cos \omega_1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\cos c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial v} +$$
$$+ h \cos c_1 \cos \alpha \cos (\omega_1 - \varphi) + h \operatorname{sen} c_1 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\Omega = \cos c_1\, M + \operatorname{sen} c_1 \cos c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} +$$
$$+ h \operatorname{sen} c_1 \left[\operatorname{sen} \alpha \cos c_1 - \cos \alpha \operatorname{sen} c_1 \cos (\omega_1 - \varphi) \right],$$

pei valori dei coefficienti a_{ik} nel $d s'^2$ scritto sotto la forma (53) si trova

$$a_{11} = \cos^2 \omega_1 + (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1)^2,$$
$$a_{12} = \operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_1 + (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1)(\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1),$$
$$a_{22} = \operatorname{sen}^2 \omega_1 + (\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1)^2$$
$$a_{13} = \Omega\, (\Delta \cos \omega_1 + \Delta' \operatorname{sen} \omega_1) - h \cos \alpha \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) \cos \omega_1,$$
$$a_{23} = \Omega\, (\Delta' \cos \omega_1 + \Delta'' \operatorname{sen} \omega_1) - h \cos \alpha \operatorname{sen} (\omega_1 - \varphi) \operatorname{sen} \omega_1$$
$$a_{33} = h^2 \cos^2 \alpha \cos^2 c_1 \operatorname{sen}^2 (\omega_1 - \varphi) + \cos^2 c_1 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial w}\right)^2 +$$
$$+ h^2 \left\{ \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 c_1 + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 c_1 - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} c_1 \cos c_1 \cos (\omega_1 - \varphi) \right\} +$$
$$+ M^2 + 2 h \cos c_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial w} \left[\operatorname{sen} \alpha \cos c_1 - \cos \alpha \operatorname{sen} c_1 \cos (\omega_1 - \varphi) \right].$$

Se si esprime ora che, mediante la trasformazione di variabili

$$u' = u + \cot c_1 \cos \omega_1 , \quad v' = v + \cot c_1 \operatorname{sen} \omega_1 ,$$

la (53) si trasforma nella (55), sussistendo la relazione caratteristica (55)*, si trova (cf. (M) § 16) un'equazione quadratica in $\frac{\partial \omega_1}{\partial w}$. La radice conveniente al nostro problema è data dalla formola

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial w} &= \frac{\operatorname{tg} c_1 \cos \omega_1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\operatorname{tg} c_1 \operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\partial h}{\partial v} + \\ &+ 2h \frac{\operatorname{sen}^3 c_1 \cos \alpha}{\cos c_1 (\cos^2 \alpha - \cos^2 c_1)} \cos(\omega_1 - \varphi) - 2h \frac{\operatorname{sen}^2 c_1 \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 c_1} . \end{aligned}\right\} (60)^*$$

Questa, aggregata alle (60), dà un sistema illimitatamente integrabile, sicchè la soluzione generale ω_1 del sistema contiene una costante arbitraria. Ogni tale soluzione ω_1, introdotta nelle formole (59), dà un sistema (Σ') trasformato del primitivo (Σ) per mezzo della B_{c_1}.

§ 15.

Deformazioni isogonali infinitesime delle sviluppabili.

Terminiamo la presente Memoria ritornando al caso euclideo per ricercare le deformazioni isogonali delle superficie sviluppabili (*). Potremmo in questa ricerca procedere direttamente coll'analisi usata nei primi paragrafi in (M); ma qui preferiamo per brevità dedurre le formole relative a questo caso considerandolo come caso limite delle superficie pseudosferiche di raggio R, per R crescente all'infinito. Perciò nelle formole al § 7 in (M) segnate (24), (25), negli ultimi termini a destra, si scriverà ai denominatori $R \cos \sigma$ al posto di $\cos \sigma$, poi facendo crescere R all'infinito i termini stessi si annulleranno.

(*) Le sviluppabili dello spazio ellittico od iperbolico (superficie a curvatura relativa k_0 nulla) non ammettono invece deformazioni isogonali, come segue subito dal § 2.

Applicando questo procedimento, si trovano i risultati che andiamo ora ad esporre.

Si prenda l'elemento lineare della sviluppabile S sotto la forma cartesiana ortogonale del piano

$$d s^2 = d u^2 + d v^2,$$

e supposto che sia

$$D\, d u^2 + 2 D'\, d u\, d v + D''\, d v^2$$

la seconda forma fondamentale, si avranno le equazioni di Codazzi e di Gauss

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{\partial D'}{\partial u}, \quad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{\partial D'}{\partial v} \tag{61}$$

$$D'^2 - D D'' = 0, \tag{61*}$$

e, nelle solite notazioni, le formole

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = D X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = D' X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = - D X_1 - D' X_2, \\ &\frac{\partial x}{\partial v} = X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = D' X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = D'' X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = - D' X_1 - D'' X_2. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Si abbia ora una deformazione isogonale infinitesima della S sotto l'angolo σ, nella direzione (X', Y', Z') data dalle formole

$$X' = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma \cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3. \tag{63}$$

L'angolo φ dovrà soddisfare al sistema simultaneo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \operatorname{tg}\sigma\,(D\cos\varphi + D' \operatorname{sen}\varphi), \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \operatorname{tg}\sigma\,(D'\cos\varphi + D'' \operatorname{sen}\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Viceversa, se φ è una soluzione delle (64), esiste la corrispondente deformazione isogonale infinitesima della sviluppabile S e la sua ampiezza εH è determinata dalle formole

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \log H}{\partial u} = \operatorname{tg}\sigma\,(D \operatorname{sen}\varphi - D'\cos\varphi), \\ &\frac{\partial \log H}{\partial v} = \operatorname{tg}\sigma\,(D' \operatorname{sen}\varphi - D''\cos\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Di qui si vede intanto che ogni sviluppabile S ammette ∞^1 deformazioni isogonali infinitesime sotto l'angolo σ e, per fissare la deformazione, basta fissare per un punto della superficie la direzione dello spostamento.

Formando ora dalle (63) le derivate di X', abbiamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X'}{\partial u} &= (D \operatorname{sen}\varphi - D'\cos\varphi)\left\{-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi X_1 + \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi X_2 + \cos\sigma X_3\right\},\\ \frac{\partial X'}{\partial v} &= (D' \operatorname{sen}\varphi - D''\cos\varphi)\left\{-\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi X_1 + \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi X_2 + \cos\sigma X_3\right\},\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

ed osservando che le generatrici di S hanno l'equazione differenziale

$$D\,du + D'\,dv = 0, \quad \text{o} \quad D'\,du + D''\,dv = 0,$$

segue dalle (66) che X', Y', Z' sono costanti lungo ogni generatrice, e dalle (65) segue che anche h è costante. Dunque: *In ogni deformazione isogonale infinitesima di una sviluppabile, lungo ciascuna generatrice le direzioni degli spostamenti sono parallele e la loro ampiezza è costante.*

Dalle formole (64), (65) deduciamo

$$\left.\begin{aligned}D &= \frac{\cot\sigma}{H}\frac{\partial}{\partial u}(H\operatorname{sen}\varphi), & D' &= -\frac{\cot\sigma}{H}\frac{\partial}{\partial u}(H\cos\varphi)\\ D' &= \frac{\cot\sigma}{H}\frac{\partial}{\partial v}(H\operatorname{sen}\varphi), & D'' &= -\frac{\cot\sigma}{H}\frac{\partial}{\partial v}(H\cos\varphi),\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

e le funzioni H, φ sono legate dalle due equazioni del 1.° ordine

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial\log H}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\log H}{\partial v} = 0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\log H}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\log H}{\partial u} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Viceversa se H, φ soddisfano le due equazioni (α), i valori (67) di D, D', D'' verificano le equazioni (61), (61)* di Codazzi e Gauss, e ne resta individuata una sviluppabile con una sua deformazione isogonale infinitesima.

È notevole che nel caso attuale delle sviluppabili le due equazioni (α) sono affatto indipendenti dall'angolo σ, sicchè ad ogni tale coppia (H, φ) corrispondono ∞^1 sviluppabili, ciascuna essendo individuata dal valore arbitrario di σ. Quale relazione esiste fra due di queste sviluppabili corrispondenti a due valori di σ, diciamo σ, σ_1? Esse sono intanto applicabili con conserva-zione delle generatrici e per ciò i loro spigoli di regresso si corrispondono ad arco eguale *con eguale flessione.* Dal confronto poi delle loro seconde forme fondamentali risulta che le torsioni $\frac{1}{T}, \frac{1}{T_1}$ di questi spigoli di regresso stanno fra loro nel rapporto costante di $\cot\sigma$ a $\cot\sigma_1$.

§ 16.

Sistemi (Σ) di sviluppabili e loro trasformazioni.

Partendo dai risultati sopra ottenuti, ed applicando le medesime considerazioni infinitesimali come in (M) § 5, si dimostra che: data una qualunque sviluppabile S ed una curva arbitraria C uscente da un suo punto, obliquamente sulla superficie, esiste una ed una sola deformazione isogonale *continua* di S, nella quale il punto P descrive la trajettoria prescritta C.

Per formare il sistema di equazioni a derivate parziali, da cui dipende la ricerca di questi sistemi (Σ) di sviluppabili, basta procedere come ai §§ 5, 6 in (M). Si supponga che gli elementi della sviluppabile dipendano, oltre che da u, v, da una terza variabile w; avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = X_2, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = H(\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma\cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3).$$

Se si scrivono le condizioni di integrabilità relative a queste equazioni, si trovano le altre formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial u}X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial v}X_3, \qquad&\\ \frac{\partial X_3}{\partial w} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial u}X_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial H}{\partial v}X_2,&\end{aligned}\right\} \quad (62)^*$$

che sono da aggiungersi alle (62) e da queste deduciamo ancora le

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X'}{\partial w} = \left(\cos\sigma\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w} - \sigma'\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi - \frac{\partial H}{\partial u}\right)X_1 +&\\ +\left(\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial w} + \sigma'\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi - \frac{\partial H}{\partial v}\right)X_2 +&\\ \left\{\cot\sigma\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial h}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial h}{\partial v}\right) + \sigma'\cos\sigma\right\}X_3&\end{aligned}\right\} \quad (66)^*$$

che aggreghiamo alle (66). Infine esprimendo che il sistema (62), (62)* è illimitatamente integrabile, si vede che, oltre le (α), debbono verificarsi le tre equazioni seguenti:

$$\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial D}{\partial w} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}, \quad \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial D'}{\partial w} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}, \quad \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial D''}{\partial w} = \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}; \tag{β}$$

queste, insieme colle (α), dànno appunto il sistema di equazioni a derivate parziali da cui dipende la ricerca dei sistemi (Σ) di sviluppabili.

La trasformazione complementare e di Bäcklund perdono nel caso attuale ogni significato, le corrispondenti seconde falde focali allontanandosi a distanza infinita. Però vediamo subito che esiste qui la *trasformazione parallela* come pei sistemi (Σ) di superficie a curvatura assoluta in geometria ellittica (§ 12). Per dimostrarlo scriviamo le formole per la sviluppabile S' parallela alla S e distante da questa della lunghezza arbitraria a

$$x' = x + a X_3 .$$

Differenziando coll'osservare le (62), (62)*, e introducendo i due differenziali esatti

$$d U = D\, d u + D'\, d v + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma} \frac{\partial H}{\partial u} d w$$

$$d V = D'\, d u + D''\, d v + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma} \frac{\partial H}{\partial v} d w,$$

infine ponendo

$$u' = u - a U, \quad v' = v - a V,$$

si trova

$$d x' = X_1\, d u' + X_2\, d v' + H(\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, X_1 - \cos\sigma\cos\varphi\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3)\, d w,$$

colle analoghe per $d y'$, $d z'$. Quadrando e sommando, viene

$$d s'^2 = d u'^2 + d v'^2 + H^2\, d w^2 + 2 H \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\, d u'\, d w - 2 H \cos\sigma \cos\varphi\, d v'\, d w,$$

e questa formola pone appunto in evidenza che le sviluppabili S' formano un nuovo sistema (Σ') sotto l'angolo σ. Si vede inoltre che: *Nella trasformazione parallela gli archi delle trajettorie isogonali si conservano in lunghezza.*

Si ottiene poi una trasformazione di diversa natura pei sistemi (Σ) di sviluppabili *ad angolo σ costante* dall' osservazione alla fine del paragrafo precedente, applicata alle deformazioni continue. Vediamo facilmente che ogni sistema (Σ) di sviluppabili, con σ costante, ne determina intrinsecamente un altro (Σ_1) con un angolo σ_1 diverso arbitrario, conservando alla funzione φ il medesimo valore e cangiando H in

$$H_1 = \frac{\cos\sigma_1}{\cos\sigma} H.$$

E infatti i nuovi valori (67) di D, D', D''

$$D_1 = \frac{\cot\sigma_1}{\cot\sigma} D, \quad D'_1 = \frac{\cot\sigma_1}{\cot\sigma} D', \quad D'' = \frac{\cot\sigma_1}{\cot\sigma} D''$$

vengono a soddisfare alle corrispondenti equazioni (β):

$$\operatorname{sen}\sigma_1 \frac{\partial D_1}{\partial w} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial u^2}, \quad \operatorname{sen}\sigma_1 \frac{\partial D'_1}{\partial w} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial u\, \partial v}, \quad \operatorname{sen}\sigma_1 \frac{\partial D''_1}{\partial w} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial v^2}.$$

§ 17.

Casi particolari.

Terminiamo coll'addurre alcuni semplici esempî di sistemi (Σ) di sviluppabili ad angolo σ costante.

Ricerchiamo in primo luogo i casi in cui la deformazione della sviluppabile si riduce ad un puro movimento. Avremo anche qui (cf. § 11) che D, D', D'' dovranno essere indipendenti da w, onde segue per le (β) che H sarà una funzione lineare di u, v. Come al § 11, dovremo distinguere due casi secondo che H contiene effettivamente u, v, oppure ne è indipendente.

1.° Caso. Si può prendere (cf. § 11)

$$H = u + \Theta(w),$$

indi, essendo $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$, è anche per la (a_2) $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, e per le (67)

$$D' = 0, \qquad D'' = 0.$$

Le asintotiche (generatrici) della S sono dunque le $u = \text{cost.}$, e la S è un cilindro. La prima delle (α) integrata dà

$$\cos\varphi = \frac{\psi(w)}{u + \theta(w)},$$

da cui

$$D = \frac{\cot \sigma}{\sqrt{[u + \theta(w)]^2 - \psi^2(w)}},$$

e poichè D non deve contenere w, saranno $\theta(w)$, $\psi(w)$ costanti. Senza alterare la generalità possiamo fare

$$\theta(w) = 0, \qquad \psi(w) = c,$$

indi avremo

$$\cos \varphi = \frac{c}{u}, \qquad D = \frac{\cot \sigma}{\sqrt{u^2 - c^2}}.$$

Le formole (66_2) dimostrano che le direzioni degli spostamenti lungo ogni generatrice sono parallele, onde segue che l'asse del movimento elicoidale, che fa descrivere al cilindro S il sistema (Σ), è parallelo alle generatrici. Si trova subito per quadrature la sezione retta del cilindro dalla condizione che le sue normali debbono tagliare sotto angolo costante le eliche descritte dai suoi punti. Per es. se il movimento è una pura rotazione, la sezione retta è una spirale logaritmica col polo sull'asse. Del resto si osservi che il valore superiore di D combina colla flessione $\frac{1}{\rho}$ della sezione retta, la cui equazione intrinseca è adunque

$$\rho = \operatorname{tg} \sigma \sqrt{u^2 - c^2},$$

essendo u l'arco della sezione stessa. Per $c = 0$ questa definisce appunto una spirale logaritmica, mentre per $c \neq 0$ si hanno quelle curve a cui si è dato il nome di *pseudocicloidi* (cf. CESÀRO, *Geometria intrinseca*, pag. 12); l'asse del moto elicoidale passa pel polo della curva (Vedi anche LORIA, *Spezielle Ebene Kurven* (pag. 504).

2.° caso. Se H è funzione solo di w si può fare $H = 1$. La seconda delle (α) è identica e la prima dà per φ l'equazione

$$\cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,$$

onde risultano per D, D', D'' i valori

$$D = \cot \sigma \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad D' = \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad D'' = \cot \sigma \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Dovendo D, D', D'' essere indipendenti da w, sarà φ stesso indipendente da w, ovvero funzione di w soltanto. Sono quindi da distinguersi due sottocasi:

Sottocaso a) $\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0$. Le (66), (66)* dimostrano che X', Y', Z' sono costanti assolute ed il movimento è una traslazione in direzione fissa. La superficie S, dovendo tagliare sotto angolo costante le parallele a questa direzione, è una sviluppabile il cui spigolo di regresso è elica di un cilindro colle generatrici in quella direzione. Inversamente è chiaro che ogni tale sviluppabile, per movimento traslatorio secondo le generatrici del cilindro, descrive un sistema (Σ).

Sottocaso b) $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$. Ne risulta $D = D' = D'' = 0$ e la superficie S è un piano. Il sistema (Σ) si ottiene dando al piano una traslazione continua che faccia descrivere ad un suo punto un'elica tracciata sopra un cilindro normale al piano.

Da ultimo ricerchiamo quei sistemi (Σ) di sviluppabili, nei quali l'angolo φ è funzione di w soltanto, ovvero una costante. Le equazioni (α) si riducono all'unica

$$\cos\varphi \frac{\partial \log H}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \log H}{\partial v} = 0,$$

onde segue che se si pone

$$\tau = u \operatorname{sen}\varphi - v\cos\varphi,$$

deve essere H funzione di τ e di w, diciamo

$$H = F(\tau, w).$$

Ne seguono le formole

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial F}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = -\cos\varphi \frac{\partial F}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \operatorname{sen}^2\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2},$$

$$D = \cot\sigma \operatorname{sen}^2\varphi \frac{\partial \log F}{\partial \tau}, \quad D' = -\cot\sigma \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \frac{\partial \log F}{\partial \tau},$$

$$D'' = \cot\sigma \cos^2\varphi \frac{\partial \log F}{\partial \tau},$$

e le formole (β) dànno quindi

$$\cos\sigma \frac{\partial}{\partial w}\left(\operatorname{sen}^2\varphi \frac{\partial \log F}{\partial \tau}\right) = \operatorname{sen}^2\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2},$$

$$\cos\sigma \frac{\partial}{\partial w}\left(\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \frac{\partial \log F}{\partial \tau}\right) = \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2},$$

$$\cos\sigma \frac{\partial}{\partial w}\left(\cos^2\varphi \frac{\partial \log F}{\partial \tau}\right) = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}.$$

Sommando la prima e la terza viene

$$\cos\sigma \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial \log F}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2},$$

dopo di che restano le due

$$\operatorname{sen} 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{\partial \log F}{\partial \tau} = 0, \quad \cos 2\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{\partial \log F}{\partial \tau} = 0.$$

Ora se fosse $\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0$, cioè H funzione solo di w, si potrebbe fare $H = 1$, ciò che rientra in un caso precedente (sottocaso b); escluso questo, resta $\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 0$, cioè φ *costante assoluta*. Senza alterare la generalità (cangiando u, v con una sostituzione ortogonale) possiamo rendere $\varphi = 0$, dopo di che si ha

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad D = D' = 0, \quad D'' = -\cot\sigma \frac{\partial \log H}{\partial v},$$

e per l'elemento lineare dello spazio

$$d s^2 = d u^2 + d v^2 + H^2 d w^2 - 2 H \cos\sigma\, d v\, d w, \tag{68}$$

dove la funzione H di v, w deve unicamente soddisfare l'equazione

$$\cos\sigma \frac{\partial^2 \log H}{\partial v\, \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 0, \tag{69}$$

poichè a questa sola si riducono le (β). Esistono dunque sistemi (Σ) della classe ora considerata, dipendenti da due funzioni arbitrarie; cerchiamo di caratterizzarli geometricamente. Segue dalle (62), (62)* che X_1, Y_1, Z_1 sono costanti assolute e per ciò le linee $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$ sono rette tutte parallele, sicchè le superficie S sono cilindri paralleli. Le superficie $u = \text{cost.}$

normali a queste rette sono dunque piani paralleli e sopra uno qualunque di essi le sezioni rette $w =$ cost. dei cilindri e le trajettorie $v =$ cost. descritte dai singoli punti nella deformazione continua, tracciano un sistema curvilineo che dà all'elemento lineare del piano la forma

$$d s^2 = d v^2 + H^2 d w^2 - 2 H \cos \sigma \, d v \, d w, \tag{70}$$

dove il parametro v è l'arco delle sezioni rette. Dunque: *Nel sistema curvilineo piano* (v, w) *le curve dei due sistemi si tagliano sotto angolo costante* σ *e le linee* $v =$ cost. *intercettano archi eguali sulle* $w =$ cost.

Viceversa è chiaro geometricamente che se si ha un tale doppio sistema (v, w) di curve piane, le superficie cilindriche aventi le $w =$ cost. per sezioni rette costituiscono un sistema (Σ) di sviluppabili nel quale le trajettorie sono le curve dell'altro sistema.

L'equazione (69), da cui dipende la ricerca di questi sistemi, dà appunto la condizione perchè l'elemento lineare (70) appartenga al piano, esprimendo l'annullarsi della curvatura.

Cascio di Garfagnana, Settembre 1910.

INDICE DEI PARAGRAFI

ERRATA-CORRIGE ALLA MEMORIA DI R. TORELLI

Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche,

pubblicata nel fascicolo 2.°-3.° di questo volume a pag. 91 e 92.

Si sostituisca al n. 9 (*) quanto segue:

9. Estenderemo adesso la (2) al caso in cui V sia una curva composta di più parti irriducibili $V^{(1)}$, $V^{(2)}, \ldots, V^{(m)}$; e nel far ciò potremo (analogamente a quanto si è fatto al n. 6) supporre vera la (2) stessa per le varietà

$$V' \text{ e } \overline{V} = V^{(1)} + V^{(2)} + \cdots + V^{(m-1)}.$$

Ora, in questa ipotesi, affermare che la (2) sussiste per le varietà V' V, equivale ad affermare che le due serie Σ, Σ' segate su $V^{(m)}$ dai sistemi $[\overline{V} + V' \, V^{(m)}]_l$ e $[\overline{V} + V']_l$ (la prima delle quali contiene certo la seconda) coincidono. Eguagliando infatti le dimensioni di Σ, Σ' si ha:

$$\chi_l(\overline{V} + V^{(m)}) - \chi_l(\overline{V} + V' \, V^{(m)}) = \chi_l(\overline{V} + V' + V^{(m)}) - \chi_l(\overline{V} + V')$$

la quale, poichè

$$\chi_l(\overline{V} + V' \, V^{(m)}) = \chi_l(\overline{V}) + \chi_l(V' \, V^{(m)}),$$

$$\chi_l(V' \, \overline{V}) + \chi_l(V' \, V^{(m)}) = \chi_l(V' \, \overline{V} + V' \, V^{(m)}),$$

e (per ipotesi)

$$\chi_l(\overline{V} + V') = \chi_l(\overline{V}) + \chi_l(V') - \chi_l(\overline{V} \, V'),$$

equivale alla

$$\chi_l(\overline{V} + V^{(m)} + V') = \chi_l(\overline{V} + V^{(m)}) + \chi_l(V') - \chi_l(V' \, \overline{V} + V' \, V^{(m)}),$$

che è appunto la (2), applicata alle varietà V' e $V = \overline{V} + V^{(m)}$.

Ora per dimostrare che Σ e Σ' coincidono, prendiamo una ipersuperficie F, passante per V' e segante semplicemente V, e sia $F \, V^{(m)} = V' \, V^{(m)} + Z$; e consideriamo su $V^{(m)}$ le tre serie g, g', g'', segate rispettivamente da

$$[\overline{V} + V' \, V^{(m)} + Z]_l, \quad [\overline{V} + V' + Z]_l, \quad [\overline{V} + F]_l.$$

La g contiene certo la g': ma vediamo subito che queste due serie coincidono. Infatti la g'' è evidentemente contenuta nella g'; e d'altronde, essendo applicabile la (2) alle varietà F, $\overline{V} + V^{(m)}$, le serie g e g'' coincidono, per quanto poco fa si è detto; dunque coincidono g e g'.

Ne segue infine che coincidono Σ e Σ'; poichè:

$$\dim \Sigma = \dim g + \chi_l(Z), \quad \dim \Sigma' = \dim g' + \chi_l(Z).$$

(*) L'affermazione fatta in fine di quel n.° è errata.

Successioni ricorrenti in un campo di Galois.

(*Di* U. Scarpis, *a Bologna.*)

Scopo del presente studio è di esporre alcune notevoli proprietà delle successioni del tipo

$$0,\quad 1,\quad \alpha,\quad \alpha^2+1,\quad \alpha^3+2\alpha,\ldots, \tag{α}$$

dove α è uno qualunque dei p^n elementi di un campo di Galois (p^n) (*) generato da una funzione modulare dell'indeterminata x di grado n irriducibile nel campo (p):

$$0,\quad 1,\quad 2,\ldots,\quad (p-1)$$

essendo p un numero primo dispari.

Nella prima parte (§ 1-8), dimostrato che la (α) è periodica, si constata subito che il periodo può assumere solo tre forme distinte (A), (B), (C). In (A) nessuno dei suoi termini, ad eccezione manifestamente di quello iniziale, può esser nullo; in (B) il periodo vien diviso in due semi-periodi da un termine nullo centrale; ed in (C) s'incontrano tre zeri intermedi uniformemente distribuiti.

Segue l'esposizione delle più semplici relazioni tra i termini di un periodo; e quindi vengono dati alcuni criteri, desunti dal carattere quadratico di certi elementi speciali, per decidere a priori nella maggior parte dei casi della natura del periodo.

Nella seconda parte (§ 9-17), posta la restrizione che (-1) abbia in (p^n) carattere quadratico negativo, nel qual caso possono presentarsi pel periodo le sole forme (A), (B), si dimostra che il numero dei termini del periodo nel caso (A) o la sua metà nel caso (B), sono rispettivamente divisori di p^n-1

(*) Conserviamo le stesse notazioni usate nella nota: *Esposizione elementare della teoria del campo di Galois* (Giornale di Matematiche, Volume XLV) in cui si è trovato conveniente sostituire il segno di eguaglianza a quello di congruenza.

e di p^n+1; e che se σ è divisore pari di p^n-1 od un divisore di p^n+1 a quoziente dispari, vi sono $\varphi(\sigma)$ elementi del campo a periodo o semiperiodo σ, cioè, come diremo per maggior semplicità, appartenenti all'indice σ.

Segue che gli elementi di (p^n) si distribuiscono in due classi: l'una ne contiene $\frac{p^n-1}{2}$ a periodo divisore di p^n-1 e pei quali (α) assume la forma (A) ed α^2+4 è un residuo quadratico (elementi ellittici); l'altra $\frac{p^n+1}{2}$ pei quali (α) è del tipo (B) con periodo divisore di p^n+1 e con α^2+4 non residuo (elementi iperbolici).

Vengono poi date le equazioni cui soddisfano gli elementi ellittici od iperbolici appartenenti ad un indice σ o ad un suo divisore, e quindi quelle le cui radici danno i soli elementi d'indice σ.

In fine (§ 18-19) si dimostra l'esistenza di un sistema di operazioni razionali formanti un gruppo abeliano tali che eseguite sopra un elemento α d'indice σ generano il sistema di quelli appartenenti a σ o ad un suo divisore.

Nella terza parte verrà poi discusso il caso che il campo sia di natura tale da contenere (-1) tra i suoi residui quadratici.

1) Sia α un elemento qualsiasi del campo di Galois (p^n) generato da una funzione razionale intera di grado n irriducibile mod p, essendo p un numero primo dispari (*).

Si consideri quindi la successione ricorrente

$$0,\quad 1,\quad \alpha^2,\quad \alpha^2+1,\quad \alpha^3+2\alpha,\ldots, \tag{α}$$

i cui termini, od indifferentemente i loro residui mod $(p, f(x))$, indicheremo con

$$x_1,\quad x_2,\ldots,\quad x_\lambda,\ldots, \tag{α}$$

Si dirà che due termini consecutivi x_r, x_{r+1} costituiscono una coppia: due coppie si considereranno eguali quando, e solo quando, sia:

$$x_r=x_s\quad x_{r+1}=x_{s+1}\,.$$

Essendo p^n il numero degli elementi del campo, quello di tutte le possibili coppie tra loro diverse sarà manifestamente p^{2n}, per cui percorrendo la (α), essendo finito il numero di quelle differenti, si dovrà sempre trovare,

(*) Il caso $p=2$ va trattato a parte.

prima o dopo, una di quelle incontrate precedentemente. Supponiamo che le due prime coppie che risultano eguali sieno

$$(x_r,\ x_{r+1}),\quad (x_s,\ x_{s+1}):$$

dico che sarà $r=1$, vale a dire che la prima a riprodursi sarà la coppia iniziale $(0,\ 1)=(x_1,\ x_2)$.

Invero, per il modo di costruzione della (α) si ha che in (p^n) sussisteranno le:

$$x_{r+1}=\alpha\, x_r + x_{r-1} \qquad x_{s+1}=\alpha\, x_s + x_{s-1}$$

e poichè $x_r=x_s$, $x_{r+1}=x_{s+1}$ segue $x_{r-1}=x_{s-1}$.

Se quindi sono eguali le coppie $(x_r,\ x_{r+1})$, $(x_s,\ x_{s+1})$ lo saranno pure le precedenti $(x_{r-1},\ x_r)$, $(x_{s-1},\ x_s)$, per cui se le due date sono le prime che risultino eguali deve necessariamente aversi

$$x_r=x_1=0 \qquad x_{r+1}=x_2=1.$$

Le coppie:

$$(x_1\, x_2)\,,\quad (x_2\, x_3)\,,\dots,\quad (x_{s-1}\, x_s)$$

sono allora manifestamente tutte tra loro diverse, e siccome se due sono eguali lo sono pure le successive, ne viene di conseguenza che la successione delle coppie

$$(x_1\, x_2)\ (x_2\, x_3)\dots(x_m\, x_{m+1})\dots$$

è periodica con un periodo di s termini e che nelle stesse condizioni si trova la (α).

2) Consideriamo ora il periodo di (α):

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3\dots x_s;\quad x_{s+1}=0,\quad x_{s+2}=1\,,\dots$$

Dalla legge di costruzione si ricava:

$$x_s=1=x_2;\quad x_{s-1}=-\alpha=-x_3;\quad x_{s-2}=\alpha^2+1=x_4\dots$$

per cui si conclude che due termini x_{s-r}, x_{r+2} simmetrici rispetto ai due zeri che aprono e chiudono il periodo, sono tra loro eguali o complementari rispetto alla funzione modulare $f(x)$, secondochè r è pari o dispari.

Si deduce subito da questa osservazione: qualora sia $s=2k+1$, i due termini $x_{s-\frac{s-3}{2}}=x_{k+2}$, $x_{\frac{s-3}{2}+2}=x_{k+1}$ saranno rispettivamente eguali o complementari secondochè $\frac{s-3}{2}=k-1$ è pari o dispari: se $s=2k$ il termine $x_{k+1}=x_{s-\frac{s-2}{2}}$ è simmetrico di se stesso, per cui se $\frac{s-2}{2}=k-1$ è dispari

$$x_{k+1}=-x_{k+1}$$

e quindi, nell'ipotesi $p>2$,

$$x_{k+1}=0.$$

Supponiamo ora che nel periodo s'incontrino uno o più elementi nulli oltre, ben inteso, quello iniziale e consideriamo lo schema:

$$0\,a\,b\,c\ldots\,m\,n\,p\,0\,q\,r\,s\ldots\,t\,u\,v\,0\ldots$$

Si ricava subito:

$$p=q \quad n=-r \quad m=s\ldots$$

e come a sinistra si perviene ad a, a destra s'incontra un termine eguale o complementare e quando si raggiunge da una parte l'elemento nullo, lo stesso si verifica dall'altra, per cui il numero dei termini

$$a\,b\,c\ldots\,m\,n\,p$$

tutti diversi da zero, è uguale a quello degli elementi

$$q,\ r,\ s,\ldots,\ t,\ u,\ v$$

pure tutti diversi da zero.

Concludiamo quindi che « se nel periodo esistono zeri intermedi, essi sono uniformemente distribuiti ed inoltre che i termini simmetrici rispetto ad un qualsiasi zero sono alternativamente eguali o complementari. »

3) Proviamo ora che il numero degli zeri intermedii non può essere che uno o tre. Snpponiamo infatti che ve ne sieno due e si consideri lo schema della successione (α):

$$0\,a_1\,a_2\ldots\;a_r\,0\,a'_1\,a'_2\ldots\,a'_r\,0\,a''_1\,a''_2\ldots\,a''_r\,0\,a_1\,a_2\ldots$$

Da quanto precede (§ 2) si ha intanto:

$$a_r=a'_1,\quad a'_2=-a_{r-1},\ldots,\quad a'_r=\pm a_1=\pm 1.$$

Ma $a'_r=1$ non è ammissibile, poichè allora, contro l'ipotesi, vi sarebbe un solo zero intermedio, per cui sarà allora $a'_r = -a_1 = -1$, dal che segue intanto che r dev'essere pari. Parimenti $a'_r = a''_1$, $a'_{r-1} = -a''_2, \ldots$, e siccome r è pari: $a''_r = -a'_1$. Ma $a''_r = 1$, e quindi $a'_1 = -1 = a_r$ e le due coppie $(a_r 0)$, $(a'_r 0)$ sarebbero eguali perchè entrambe coincidenti con $(-1, 0)$, il che non può essere. È quindi inammissibile l'ipotesi di due soli zeri intermedi.

Dimostriamo pure che non ve ne possono essere più di tre:

$$0\, a_1\, a_2 \ldots a_r \underset{1^o}{0}\, a'_1\, a'_2 \ldots a'_r \underset{2^o}{0}\, a''_1\, a''_2 \ldots a''_r \underset{3^o}{0}\, a'''_1\, a'''_2 \ldots a'''_r\, 0 \ldots$$

Come precedentemente si ricava che r dev'essere pari ed $a'_r = -1$. Considerando poi i termini simmetrici rispetto al 2^o zero, si trova

$$a'''_r = \pm a_1 = \pm 1.$$

Ma $a'''_r = -1$ non è accettabile, poichè allora risulterebbero, prima della chiusura del periodo, eguali le coppie:

$$(a'_r 0) = (a'''_r 0) = (-1, 0),$$

il che non può essere, per cui $a'''_r = 1$.

Riassumendo, la successione (α) non può presentarsi, per quanto concerne gli elementi nulli interni al periodo, che sotto tre forme (A), (B), (C) secondochè il periodo manca di zeri intermedi, o ne ha uno, o tre.

Esempio:

$(p) = (7) = (0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$

$\alpha = 2 \qquad 0\,1\,2\,5\,5\,1\,0\,1 \ldots \qquad (A)$

$\alpha = 3 \qquad 0,\ 1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 6,\ 0,\ 6,\ 4,\ 4,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 0,\ 1 \ldots \qquad (B)$

$p = 3; \quad (f(x) = x^2 - x - 1;\ (3^2) = (0,\ \pm 1,\ \pm x,\ \pm(x+1),\ \pm(x-1))$

$\alpha = x \qquad 0,\ 1,\ x,\ x-1,\ x+1,\ 0,\ x+1,\ -x+1,\ x,\ -1,\ 0\ -1,$
$-x,\ -x+1,\ -x-1,\ 0,\ -x-1,\ x-1,\ -x,\ 1,\ 0,\ 1 \ldots \qquad (C)$

$\alpha = x+1 \qquad 0,\ 1,\ x+1,\ 0,\ x+1,\ -1,\ 0,\ -1,\ -x-1,\ 0,$
$-x-1,\ 1,\ 0,\ 1 \ldots \qquad (C)$

$\alpha = -1 \qquad 0,\ 1,\ -1,\ -1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1 \ldots \qquad (B)$

4) Proviamo ora che se (α) ha la forma (A), il numero degli elementi compresi tra due zeri consecutivi non può esser pari.

Supponiamo che ciò sia: i due termini centrali come simmetrici rispetto ai due zeri saranno (§ 2) eguali o complementari.

Se eguali

$$0\,1\,\alpha \ldots\, c,\ b,\ a,\ x,\ x,\ a',\ b',\ c' \ldots\, 1,\, 0\,1 \ldots$$

per costruzione sarà:

$$a' = \alpha x + x$$
$$a = x - \alpha x$$

e poichè a, a' sono allora complementari

$$a + a' = 0 = 2x$$

dovrebbe essere $x = 0$, il che è assurdo.

Se complementari

$$0,\ 1,\ \alpha, \ldots\, c,\ b,\ a,\ x,\ -x,\ a' b' c' \ldots\, 1,\, 0\,1 \ldots$$

$$a' = -\alpha x + x \qquad a = -\alpha x - x$$

e poichè $a = a'$, seguirebbe come prima $2x = 0$.

Tale numero dev'essere quindi dispari e poichè il termine centrale diverso da zero non può essere complementare di se stesso, ne deriva che esso dovrà esser preceduto e seguito nel periodo da un numero pari di termini non nulli, per cui il numero degli elementi tra due zeri consecutivi sarà della forma $4k + 1$ e quindi

$$s = 4k + 2 = 8k' \pm 2.$$

5) Il periodo abbia la forma (B)

$$0\,1\,\alpha \ldots\, c\,b\,a\,0\,a'\,b'\,c' \ldots\, 1\,0\,1 \ldots$$

Dalla simmetria rispetto allo zero centrale si ricava:

$$a' = a \qquad b' = -b \qquad c' = c \ldots$$

da cui segue che gli elementi tra due zeri consecutivi devono essere in numero dispari.

Mettendo ora a riscontro i due semiperiodi:

$$\begin{array}{ll} 0\,1\,\alpha\,(\alpha^2 + 1) \ldots & c\,b\,a \\ 0\,a'\,b'\,c' \ldots & \quad 1 \end{array}$$

si trova, per la solita legge di costruzione, che un termine del secondo è eguale al corrispondente del primo moltiplicato per a', dal che risulta:

$$1 = a \, . \, a' = a^2$$

e quindi $a = \pm 1$ e poichè è da escludersi $a = 1$, ne segue $a = a' = -1$ e quindi « i termini della seconda metà del periodo sono ordinatamente i complementi di quelli della prima. »

Dall'esame del semiperiodo:

$$0 \, 1 \, \alpha \ldots \, c \, b \, (-1) \, 0$$

risulta subito

$$b = \alpha, \quad c = -(\alpha^2 + 1), \ldots$$

e siccome il termine centrale non nullo non può essere complementare di se stesso, segue che il numero degli elementi tra due zeri consecutivi, oltre che dispari, dev'essere della forma

$$2\,(2\,k + 1) + 1 = 4\,k + 3$$

ed s quindi del tipo:

$$s = 2\,(4\,k + 3) + 2 = 8\,(k + 1) = 8 \, . \, k'.$$

6) Si presenti ora il periodo nella forma (C).

Si è già notato (§ 3) che se nel periodo vi è più d'un termine nullo, i termini tra due zeri consecutivi sono in numero pari, per cui

$$s = 8\,k + 4.$$

Inoltre gli elementi adiacenti allo zero centrale sono eguali a (-1), e la seconda metà del periodo eguaglia la prima cambiata di segno. Considerando il semiperiodo

$$0 \, 1 \, \alpha \, (\alpha^2 + 1) \ldots \, c \, b \, a \, 0 \, a' \, b' \, c' \ldots (-1) \, 0$$

e ponendo a riscontro i due quarti:

$$\begin{array}{l} 0 \, 1 \, \alpha \, (\alpha^2 + 1) \ldots \, c \, b \, a \\ 0 \, a' \, b' \, c' \ldots \, -1 \end{array}$$

si scorge che i termini del 2.° sono eguali ai corrispondenti del 1.° moltiplicati per a', per cui:

$$-1 = a \, . \, a'.$$

Ma $a' = a$ e quindi

$$-1 = a^2$$

vale a dire «i termini adiacenti al primo ed al terzo degli zeri intermedii sono le radici di .

$$y^2 + 1 = 0 ».$$

Considerando ora l'intervallo

$$0\,1\,\alpha\,(\alpha^2 + 1)\ldots\,c\,b\,a\,0$$

si ricava:

$$a = 1\,.\,a;\quad b = \alpha\,(-a);\quad c = (\alpha^2 + 1)\,.\,a\ldots$$

cioè che gli elementi di destra a, b, c,.. sono rispettivamente eguali ai loro simmetrici di sinistra moltiplicati alternativamente per $\pm a$. Se quindi u, v sono simmetrici da

$$u = \pm\, a\, v$$

discende:

$$u^2 + v^2 = (a^2 + 1)\, v^2 = 0.$$

Si può ancora aggiungere che se nella (α) si cambia α in $-\alpha$ la successione non muta per quanto concerne il tipo del periodo.

Di più, se il campo è tale che in esso sia insolubile la

$$y^2 + 1 = 0$$

non potrà presentarsi nel periodo la forma (C) e si avrà quindi secondo i casi la (A) o la (B).

Nell'ipotesi particolare che il campo di Galois sia quello costituito dai p elementi

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ (p-1)$$

la precedente equazione (congruenza mod p nel senso ordinario) sarà insolubile ogni qual volta sia

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$$

cioè p sia della forma $4k - 1$.

Esempio «$p = 11$

$$\alpha = 1 \qquad 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 2,\ 10,\ 1,\ 0\,1\ldots$$

$$\alpha = 2 \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 7,\ 4,\ 4,\ 1,\ 6,\ 2,\ -1,\ 0,\ -1,\ -2\ldots\ 1,\ 0\,1\ldots$$

7) Se la:

$$y^2 + 1 = 0$$

è insolubile in (p^n), vale a dire se (-1) è un non residuo in (p^n) per indicare la qualcosa adotteremo la notazione

$$\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = -1 \tag{1}$$

dove $f(x)$ è la funzione modulare, si è già visto che la (α) deve assumere la forma (A) o (B); ma se invece

$$\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = +1$$

il caso è ambiguo e dipendentemente da p, $f(x)$ ed α possono presentarsi tutti e tre i tipi.

Vediamo ora, in primo luogo, quando nell'ipotesi (1) si abbia la (A) e quando la (B).

Si verifichi la (A): esisterà allora un termine centrale non nullo ω

$$0,\ 1,\ \alpha \ldots c,\ b,\ a,\ \omega,\ a',\ b',\ c' \ldots -\alpha,\ 1,\ 0\,1 \ldots$$

e confrontando tra loro:

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2 + 1, \ldots b,\ a,\ \omega \ldots \\ a,\ \omega,\ a',\ b', \ldots - \alpha,\ 1 \end{array}$$

si ha:

$$\begin{aligned} a' &= \omega \,.\, \alpha + a \\ b' &= a' \alpha + \omega = (\alpha^2 + 1)\, \omega + a\, \alpha \\ c' &= b' \alpha + a' = (\alpha^3 + 2\,\alpha)\, \omega + (\alpha^2 + 1)\, a \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

e così di seguito, cioè un termine della seconda linea è uguale al corrispondente della prima moltiplicato per ω più quello che gli precede moltiplicato per a, per cui sarà in fine:

$$1 = \omega^2 + a^2.$$

Ma $a' = \alpha\,\omega + a$, ed essendo $a' = -a$

$$a = -\frac{\alpha\,\omega}{2}$$

per cui sostituendo:

$$1 = \omega^2 + \frac{\alpha^2 . \omega^2}{4}$$

$$(4 + \alpha^2)\,\omega^2 = 4.$$

Se quindi si verifica la (A), dovrà essere:

$$\left(\frac{4 + \alpha^2}{f(x)}\right) = 1. \tag{2}$$

Se invece si presenta la (B) nello stesso modo considerando il semiperiodo risulta

$$(4 + \alpha^2)\,\omega = -4$$

e quindi

$$\left(\frac{4 + \alpha^2}{f(x)}\right) = -1. \tag{3}$$

Possiamo quindi concludere:

« Qualora sia

$$\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = -1$$

la condizione necessaria e sufficiente perchè si verifichi la (A) o la (B) è data da

$$\left(\frac{\alpha^2 + 4}{f(x)}\right) = \pm 1 \text{ ».}$$

Osserviamo poi che nell'ipotesi (1) non è possibile la

$$4 + \alpha^2 = 0$$

essendo (-4) un non residuo.

8) Qualora sia invece

$$\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = 1 \quad \left(\frac{4 + \alpha^2}{f(x)}\right) = -1$$

restano escluse (A) (B), non essendo in questo caso solubile la

$$\pm 4 = y^2\,(4 + \alpha^2)$$

a cui deve soddisfare il termine centrale ω, e si avrà quindi la forma (C).

Rimane però ancora incerto il caso in cui si abbia contemporaneamente

$$\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = \left(\frac{4+\alpha^2}{f(x)}\right) = 1 \tag{4}$$

e dimostriamo che in tale ipotesi «condizione necessaria perchè si verifichi la (C) è che:

$$\left(\frac{2+\rho\,\alpha}{f(x)}\right) = \left(\frac{2-\rho\,\alpha}{f(x)}\right) = 1$$

essendo ρ radice di

$$y^2 + 1 = 0 \text{ ».}$$

Poniamo infatti che la (α) sia della forma (C) e si consideri il primo quarto di periodo:

$$0\ 1\ \alpha \dots\ q\ u\ v\ x\ y \dots\ \rho\ 0.$$

Gli elementi compresi tra i due zeri sono in numero pari, e sieno u, v i due centrali. Ponendo a riscontro le due successioni:

$$\begin{array}{ll} 0\ 1\ \alpha\,(\alpha^2+1) \dots & q,\ u \\ u\ v\ x\ y \dots & \rho \end{array}$$

si trova, come altra volta, che un termine della 2ª eguaglia il corrispondente della 1ª moltiplicato per v più il precedente per u, e quindi

$$\rho = u\,v + q\,u = u\,v + (v - u\,\alpha)\,u = 2\,u\,v - \alpha\,u^2.$$

Ma (§ 6) tra due termini simmetrici ha luogo la relazione:

$$v = \pm\,\rho\,u$$

e sostituendo e quadrando per eliminare ρ:

$$\begin{gathered}
\rho = \pm\,2\,\rho\,u^2 - \alpha\,u^2 \\
u^2\,\alpha = \rho\,(-1 \pm 2\,u^2) \\
u^4\,\alpha^2 = (-1)\,(4\,u^4 \mp 4\,u^2 + 1) \\
u^4\,(\alpha^2+4) \pm 4\,u^2 + 1 = 0 \\
u^4\,(\alpha^2+4)^2 \pm 4\,u^2\,(\alpha^2+4) + 4 = 4 - (\alpha^2+4) \\
(u^2\,(\alpha^2+4) \pm 2)^2 = -\,\alpha^2 \\
(u^2\,(\alpha^2+4) \pm 2)^2 - \rho^2\,\alpha^2 = 0
\end{gathered}$$

che si scinde nelle due

$$\left.\begin{aligned} u^2(\alpha^2+4) &= \mp 2 - \rho\,\alpha \\ u^2(\alpha^2+4) &= \mp 2 + \rho\,\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Se quindi si presenta la (C) dovrà verificarsi una almeno delle (5).

Ma, d'altra parte, essendo:

$$\alpha^2+4 = (\mp 2 - \rho\,\alpha)(\mp 2 + \rho\,\alpha)$$

ed α^2+4 residuo quadratico, i fattori del secondo membro dovranno avere egual carattere, per cui dovendo esser solubile una almeno delle (5), tale carattere sarà l'unità positiva, e lo saranno quindi entrambe. Se quindi insieme a (4) si ha:

$$\left(\frac{\mp 2 - \rho\,\alpha}{f(x)}\right) = \left(\frac{\mp 2 + \rho\,\alpha}{f(x)}\right) = -1$$

non riuscendo solubile nè l'una nè l'altra delle (5) resta esclusa la possibilità della forma (C); mentre invece se

$$\left(\frac{\mp 2 - \rho\,\alpha}{f(x)}\right) = \left(\frac{\mp 2 + \rho\,\alpha}{f(x)}\right) = 1$$

può aversi il tipo (C) senza escludere che possano presentarsi (A) o (B).

I risultati fino a qui ottenuti si possono riassumere nel seguente schema.

(a) $$\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = -1.$$

Insolubile la $y^2+1=0$ e quindi esclusa la (C).

Se $\left(\dfrac{\alpha^2+4}{f(x)}\right) = 1$, è solubile:

$$(4+\alpha^2)\,y^2 = 4$$

ed insolubile:

$$(4+\alpha^2)\,y^2 = -4$$

per cui si presenterà la (A).

Se $\left(\dfrac{4+\alpha^2}{f(x)}\right) = -1$, avviene il contrario e si verificherà la (B).

Non è possibile: $4+\alpha^2=0$.

$b)$ $$\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = 1 \qquad \left(\frac{4+\alpha^2}{f(x)}\right) = -1.$$

Sono insolubili le:

$$(4+\alpha^2)\, y^2 = \pm 4$$

e restano esclusi (A) e (B).

Alla stessa conclusione si giunge qualora sia

$$4+\alpha^2 = 0.$$

$$c)\quad \left(\frac{-1}{f(x)}\right) = 1, \qquad \left(\frac{4+\alpha^2}{f(x)}\right) = 1, \qquad \left(\frac{\pm 2 + \rho\,\alpha}{f(x)}\right) = \left(\frac{\pm 2 - \rho\,\alpha}{f(x)}\right) = -1.$$

Insolubili le:

$$(4+\alpha^2)\, y^2 = \pm 2 \pm \rho\,\alpha$$

e quindi possibili solo (A), (B)

$$d)\quad \left(\frac{-1}{f(x)}\right) = 1, \qquad \left(\frac{4+\alpha^2}{f(x)}\right) = 1, \qquad \left(\frac{\pm 2 \pm \rho\,\alpha}{f(x)}\right) = 1.$$

Possono presentarsi tutte e tre le forme.

Esempi

$$(p) = (11) = (0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 10), \qquad \left(\frac{-1}{11}\right) = -1.$$

Residui quadratici 1, 3, 4, 5, 9

Non residui 2, 6, 7, 8, 10

$$\left(\frac{\alpha^2+4}{11}\right) = 1 \quad \text{per} \quad \alpha = 0,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10$$

$$\left(\frac{\alpha^2+4}{11}\right) = -1 \quad \text{per} \quad \alpha = 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9$$

Per ciò (α) assumerà la forma (A) per $\alpha = 0,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10$ e la (B) per $\alpha = 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9$

$$\alpha = 1 \qquad 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 2,\ 10,\ 1,\ 0,\ 1 \ldots \qquad (A)$$

$$\alpha = 2 \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 7,\ 4,\ 4,\ 1,\ 6,\ 2,\ -1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -5,\ -1,\ -7,$$
$$-4,\ -4,\ -1,\ -6,\ -2,\ 1,\ 0,\ 1 \ldots \qquad (B)$$

$$(p^n) = (3^2) \quad f(x) = x^2 - x - 1 \quad \left(\frac{-1}{f(x)}\right) = +1.$$

Resti: $\pm 1 \quad \pm(x+1)$.
Non resti: $\pm x \quad \pm(x-1) \quad \rho = \pm(x+1)$

$$\left(\frac{\alpha^2+4}{f(x)}\right) = +1 \quad \text{per} \quad \alpha = 0, \pm 1$$

$$\left(\frac{\alpha^2+4}{f(x)}\right) = -1 \quad \text{per} \quad \alpha = \pm x, \quad \pm(x-1)$$

$$(\alpha^2+4) = 0 \quad \text{per} \quad \alpha = \pm(x+1).$$

Per $\alpha = \pm x$, $\pm(x-1)$, $\pm(x+1)$ si presenteranno perciò soltanto successioni del tipo (C) (§ 3)

$$\left(\frac{\pm 2 \pm \rho\alpha}{f(x)}\right) = 1 \qquad \text{per} \quad \alpha = 0$$

$$\left(\frac{\pm 2 \pm \rho\alpha}{f(x)}\right) = -1 \quad \text{per} \quad \alpha = \pm 1.$$

Per $\alpha = 0$ si ha la

$$0\,1\,0\,1\,0\ldots$$

del tipo (A); e per $\alpha = \pm 1$ le due

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1\ldots$$

$$0,\ 1,\ -1,\ -1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1\ldots$$

entrambe (§ 7) del tipo (B).

9) Consideriamo, supposto $\alpha \neq 0$, insieme alla (α), la frazione continua periodica

$$\alpha + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\alpha\ldots}} \tag{1}$$

le cui successive ridotte

$$\frac{\alpha}{1} \quad \frac{\alpha^2+1}{\alpha} \quad \frac{\alpha^3+2\alpha}{\alpha^2+1} \tag{2}$$

hanno per numeratore un termine di (α) e per denominatore il precedente.

Manifestamente dalla periodicità di (α) segue che anche le (2) costituiscono nna successione periodica tra cui figureranno le ridotte:

$$\frac{0}{\pm 1} = 0 \quad \frac{\pm 1}{0} = \infty$$

indicando con quest'ultimo simbolo un elemento che viene aggiunto a quelli costituenti il campo e definito dalla eguaglianza (*)

$$\frac{\mu}{0} = \infty$$

qualunque sia $\mu \neq 0$ poichè $\frac{1}{0} = \frac{\mu \,.\, 1}{\mu \,.\, 0} = \frac{\mu}{0}$, e che si suppone combinato con gli altri elementi del campo stesso secondo le leggi: $\infty + \lambda = \lambda + \infty = \infty$; $\lambda \,.\, \infty = \infty \,.\, \lambda = \infty$

$$\frac{\lambda}{\infty} = 0 \quad \frac{\infty}{\lambda} = \infty$$

nel mentre che la frazione indeterminata

$$\frac{\alpha \,.\, \infty + \beta}{\gamma \,.\, \infty + \sigma}$$

si assume eguale ad $\frac{\alpha}{\gamma}$.

Notiamo intanto che se la (α) ha la forma (B) le ridotte provenienti dalla seconda metà del periodo sono eguali alle corrispondenti della prima (§ 5); e se ha la forma (C) basta considerare quelle formate con gli elementi del primo quarto di periodo (§ 6).

Ciò premesso, proviamo che le ridotte di un periodo o di una parte aliquota, devono esser tutte tra loro diverse.

Posto infatti che $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$ e che la seconda segua la prima, si trova subito che $\frac{b'}{a'}$ non può essere nulla poichè, ove ciò fosse, sarebbe pure nulla $\frac{b}{a}$ e $b = 0$, il che non può essere poichè nel periodo pel caso (A) o nella parte aliquota di periodo pei casi (B) (C) non vi sono altri termini nulli oltre quello iniziale. Parimenti $\frac{b'}{a'}$ non può essere ∞, non potendolo essere $\frac{b}{a}$. Se le due ridotte che si suppongono eguali sono entrambe diverse da 0 e da ∞, si avrà:

$$b = a \,.\, k \quad b' = a' \,.\, k$$

(*) L. E. Dickson, *Linear groups with an exposition of the Galois field theorie.* Leipzig, Teubner, § 239, pag. 260.

e detti c, c' i termini di (α) seguenti b, b' ne risulterebbe:

$$c = b\,\alpha + a \quad c' = b'\,\alpha + a'$$
$$c = a\,(k\,\alpha + 1) \quad c' = a'\,(k\,\alpha + 1)$$

e quindi:

$$\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}.$$

Se due ridotte intermedie sono eguali, risultano eguali le successive e così di seguito. Ma tra quelle che seguono $\frac{b'}{a'}$ s'incontra in ogni caso una ridotta nulla $\left(\frac{0}{1}, \frac{0}{-1}, \frac{0}{\rho}\right)$ secondochè (α) ha la forma (A) (B) (C) per cui nuovamente ne verrebbe l'esistenza di una ridotta nulla intermedia, il che non può essere.

Esempio $p = 11$ $\alpha = 2$

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 7,\ 4,\ 4,\ 1,\ 6,\ 2,\ -1,\ 0,\ -1$$

$$\frac{2}{1} = 2 \quad \frac{5}{2} = 8 \quad \frac{1}{5} = 9 \quad \frac{7}{1} = 7 \quad \frac{4}{7} - 10 \quad \frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{1}{4} = 3 \quad \frac{6}{1} = 6 \quad \frac{2}{6} = 4 \quad \frac{-1}{2} = 5 \quad \frac{0}{-1} = 0 \quad \frac{-1}{0} = \infty$$

$p = 13$ $\alpha = 1$

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 0,\ 8,\ 8,\ 3,\ 11,\ 1,\ -1,\ 0,\ -1\ldots$$

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{3}{2} = 8 \quad \frac{5}{3} = 6 \quad \frac{8}{5} = -1 \quad \frac{0}{8} = 0 \quad \frac{8}{0} = \infty.$$

10) Detto σ il numero dei termini del periodo di (α) se esso ha la forma (A), o la metà o la quarta parte se ha la forma (B) o (C), pongasi:

$$\frac{\alpha}{1} = q_1 \quad \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = q_2 \ldots \quad q_{\sigma-1} = 0 \quad q_\sigma = \infty$$

e si consideri l'espressione:

$$\alpha + \frac{1}{z} = \frac{\alpha z + 1}{z}. \tag{1}$$

Se in essa al posto di z poniamo successivamente

$$q_1\ q_2 \ldots\ q_\sigma$$

assume i valori

$$q_2\ q_3 \dots q_\sigma\ q_1$$

vale a dire la sostituzione (1) del gruppo lineare totale sopra i $p^n + 1$ indici (*)

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \dots, \quad x_\lambda \dots \infty$$

contiene il ciclo:

$$(q_1\ q_2 \dots q_\sigma).$$

Indicando quindi con D il discriminante $\alpha^2 + 4$ dell'equazione

$$z^2 - \alpha z - 1 = 0 \tag{2}$$

si trova che se $\left(\frac{D}{f(x)}\right) = 1$, la (2) nel campo (p^n) ha due radici distinte z_1, z_2 per cui la (1) (**) lascia fissi i due elementi z_1, z_2 ed il suo periodo è divisore di $(p^n - 1)$.

Ma il predetto ciclo fa parte della sostituzione che è regolare, per cui ne viene che σ sarà un divisore di $(p^n - 1)$.

Se $D = \alpha^2 + 4 = 0$, la (2) ha una radice doppia ed (1) lascia fisso un solo elemento ed è a periodo p, per cui eguale a p sarà anche σ. In fine se $\left(\frac{D}{f(x)}\right) = -1$, la (2) è insolubile in (p^n), la (1) sposta tutti gli indici ed il suo periodo è divisore insieme con σ di $p^n + 1$.

11) Ciò premesso, dimostriamo il

Teorema: « Se $\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = -1$, esistono $\varphi(p^n - 1)$ termini α pei quali

$$\sigma = p^n - 1.$$

Se α è uno qualunque di essi, i $\sigma - 2$ elementi

$$q_1 = \frac{\alpha}{1}, \quad q_2 = \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha}, \dots, \quad q_{\sigma-2}$$

sono radici dell'equazione:

$$z^{\sigma-2} + \alpha z^{\sigma-3} + (\alpha^2 + 1) z^{\sigma-4}, \dots + 1 = 0$$

(*) L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni*, ecc. Pisa, § 39, pag. 87.
(**) Dickson, l. c.

i cui coefficienti, ad eccezione dell'ultimo, coincidono coi primi $\sigma - 2$ elementi della successione:

$$1 \quad \alpha \quad \alpha^2 + 1 \quad \alpha^3 + 2\alpha \ldots »$$

Poichè (-1) è per ipotesi un non resto, l'insieme dei complementi dei non residui coincide con quello dei resti, e poichè le radici primitive di (p^n) appartengono ai primi, saranno solubili tutte le equazioni del tipo

$$z^2 = -g_i \tag{1}$$

dove g_i è una qualunque delle $\varphi\,(p^n - 1)$ radici primitive.

Sieno $\pm r_i$ le soluzioni di (1) e si determini $\pm s_i$ in modo che

$$(\pm r_i)\;(\pm s_i) = -1. \tag{2}$$

Posto quindi:

$$\alpha = r_i + s_i \qquad -\alpha = -r_i - s_i$$

(r_i, s_i), $(-r_i, -s_i)$ saranno rispettivamente le soluzioni di

$$z^2 \mp \alpha z - 1 = 0. \tag{3}$$

Se ora si considerano le sostituzioni:

$$\frac{\alpha z + 1}{z} \quad \frac{(-\alpha)\,z + 1}{z} \tag{4}$$

essendo, per costruzione, solubile (3), si ha che $D = (\pm \alpha)^2 + 4$ è un residuo, cioè sono entrambe ellittiche (a periodo divisore di $p^n - 1$) e che la prima lascia fissi gli indici r_i, s_i, e la seconda $-r_i$, $-s_i$.

Se poi si trasformano le (4) mediante le sostituzioni:

$$\frac{z - r_i}{z - s_i}, \quad \frac{z + r_i}{z + s_i}$$

le trasformate lasciano fermi gli elementi $0, \infty$ assumendo la forma:

$$-s_i^2 . z = -(-s_i)^2\, z \tag{5}$$

con periodo in forza di (1) e (2) eguale a $p^n - 1$.

Ma le (4) come simili alle (5) avranno pure per periodo $(p^n - 1)$, e siccome spostano effettivamente $p^n - 1$ indici, devono constare di un unico ciclo.

Se ora si considerano le successioni (manifestamente del tipo (A)), poichè $(\pm\alpha)^2+4$ è un residuo (§ 8 a))

$$0,\ 1,\ \pm\alpha,\ \alpha^2+1,\ \pm\alpha^3\pm 2\alpha,\dots$$

detto σ il loro periodo, si ha (§ 10) che i cicli

$$(q_1\ q_2 \dots q_\sigma),\quad (q'_1\ q'_2 \dots q'_\sigma)$$

fanno parte rispettivamente delle (4), ed essendo quest'ultime regolari ed a periodo (p^n-1) segue che

$$\sigma = p^n - 1.$$

Dividendo ora $z^{p^n-1}-1$ per $z^2\pm\alpha z-1$ si ottiene manifestamente per resto zero e, come è facile provare, i quozienti sono dati da

$$Q(z) = z^{p^n-3} + \alpha z^{p^n-4} + (\alpha^2+1) z^{p^n-5} \dots + 1$$

$$Q'(z) = z^{p^n-3} - \alpha z^{p^n-4} + (\alpha^2+1) z^{p^n-5} \dots + 1$$

per cui le due:

$$Q(z) = 0 \qquad Q'(z) = 0$$

avranno rispettivamente per radici

$$q_1,\ q_2,\dots,\ q_{\sigma-2};\quad q'_1,\ q'_2,\dots,\ q'_{\sigma-2}.$$

Per ogni radice primitiva g_i esistono due elementi $\pm\alpha$ che soddisfano all'enunciato del Teorema.

Notando poi che le radici primitive sono due a due reciproche, si scorge che le radici di:

$$z^2 = -\frac{1}{g_i}$$

sono $\pm\dfrac{1}{r_i} = \pm s_i$ per cui si scambiano tra loro r con s ed alle due g_i, $\dfrac{1}{g_i}$ corrisponde la stessa coppia $\pm\alpha$.

Parimenti da due radici primitive g_i, g_j diverse, e non reciproche, non può derivare la stessa coppia.

Infatti, qualora ciò fosse, dovrebbero sussistere le:

$$r_i + s_i = \alpha \qquad r_j + s_j = \alpha$$

$$r_i \,.\, s_i = -1 \qquad r_j \,.\, s_j = -1$$

e quindi o sarebbe $r_i = r_j$ e $g_i = g_j$ (*); oppure $r_i = s_j = -\frac{1}{r_j}$ e quindi $\frac{1}{r_j^2} = -g_i$ cioè, in fine, $\frac{1}{-g_j} = -g_i$ in ogni caso contro l'ipotesi.

Ma nel campo esistono $\frac{\varphi(p^n - 1)}{2}$ coppie di radici primitive reciproche, per cui ne esisteranno altrettante di elementi $\pm\alpha$ tali che per essi la successione (α) del tipo (A) ha per periodo $\sigma = p^n - 1$.

Esempio.

$$p = 11, \quad g_1 = 2, \quad g_2 = \frac{1}{g_1} = 6, \quad g_3 = 7, \quad g_4 = \frac{1}{g_3} = 8$$

$$\begin{array}{llll} z^2 = -2 & r_1 = \pm 3 & s_1 = \pm 7 & \pm\alpha_1 = \pm 1 \\ z^2 = -7 & r_2 = \pm 2 & s_2 = \pm 5 & \pm\alpha_2 = \pm 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} +1) & 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 2,\ 10,\ 1,\ 0\ldots \\ -1) & 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -3,\ 5,\ -8,\ 2,\ -10,\ 1,\ 0\ldots \\ +4) & 0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 6,\ 8,\ 5,\ 7,\ 1,\ 0\ldots \\ -4) & 0,\ 1,\ -4,\ 6,\ -6,\ 8,\ -5,\ 6,\ -7,\ 1,\ 0\ldots \end{array}$$

$$q_1 = 1 \quad q_2 = 2 \quad q_3 = 7 \quad q_4 = 9 \quad q_5 = 6 \quad q_6 = 3 \quad q_7 = 5 \quad q_8 = 10$$

che sono radici di:

$$Q(z) = z^8 + z^7 + 2z^6 + 3z^5 + 5z^4 + 8z^3 + 2z^2 + 10z + 1 = 0$$

mentre

$$q'_1 = -1 \quad q'_2 = -2 \quad q'_3 = -7 \ldots \quad q'_8 = -10$$

soddisfano a:

$$Q'(z) = z^8 - z^7 + 2z^6 - 3z^5 + 5z^4 - 8z^3 + 2z^2 - 10z + 1 = 0.$$

12) Per passare all'estensione del precedente risultato, facciamo notare che nell'ipotesi $\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = -1$ se un elemento α del campo è un non resto, l'esponente λ cui appartiene dev'essere pari.

(*) Essendo (-1) un non-resto, rimane escluso per quanto si è notato in principio che possa essere $g_i = -g_j$.

Ammesso infatti il contrario, λ come divisore dispari di $p^n - 1$, lo sarebbe pure di $\frac{p^n-1}{2}$; e quindi α radice di

$$Z^{\frac{p^n-1}{2}} = 1$$

sarebbe, contro l'ipotesi, un resto.

Inoltre se

$$S = \frac{\alpha z + 1}{z}$$

è una sostituzione ellittica che lascia fermi gli indici z_1, z_2 la sua trasformata mediante

$$T = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

si riduce alla forma:

$$T^{-1} S\, T = - s^2 . z$$

il cui periodo coincidendo con l'esponente cui appartiene $(- s^2)$ non residuo, dev'essere necessariamente divisore pari di $p^n - 1$.

Riferendoci ora al § 11 si può enunciare il Teorema: « Se δ è un divisore pari di $p^n - 1$, esistono $\varphi(\delta)$ elementi α pei quali

$$\sigma = \delta.$$

Se α è uno qualunque di essi, i $\sigma - 2$ elementi:

$$q_1 = \alpha_1, \quad q_2 = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}, \ldots, \quad q_{\sigma-2}$$

sono radici di

$$z^{\sigma-2} + \alpha\, z^{\sigma-3} \cdots + 1 = 0$$

i cui coefficienti, ad eccezione dell'ultimo, coincidono coi primi $\sigma - 2$ termini di

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2 + 1,\ \alpha^3 + 2\alpha, \ldots »$$

La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente: basta solo ricordare che una sostituzione frazionaria è regolare.

Premesso ora che, nell'ipotesi $\left(\frac{-1}{f(x)}\right) = -1$, oltre ad essere p della forma $4k - 1$, il grado n della funzione modulare non può esser pari poichè, ove ciò fosse,

sarebbe divisibile per
$$\frac{z^{2\frac{p^n-1}{2}}-1}{z^2+1}$$

e (-1) quindi un residuo, segue immediatamente che p^n-1 è il doppio d'un numero dispari e che se si fa percorrere a δ la serie dei divisori pari di p^n-1 si ha:

$$\Sigma\,\varphi(\delta)=\frac{p^n-1}{2}$$

da cui risulta che vi sono $\frac{p^n-1}{2}$ elementi α pei quali α^2+4 è un quadrato e la $\frac{\alpha z+1}{2}$ ellittica. Ma qualora sia α^2+4 un resto la (α) assume la forma (A) (§ 7) per cui esisteranno altrettante successioni dello stesso tipo tra le quali sarà da comprendersi la

$$0\ 1\ 0\ 1\ldots$$

per $\alpha=0$ corrispondente a $\delta=2$. Stabilito così che dei p^n elementi del campo ve ne sono $\frac{p^n-1}{2}$ pei quali (α) assume la forma (A), si domanda qual forma prenderà la (α) pei rimanenti e di qual tipo sarà la corrispondente sostituzione.

La questione è subito risolta ove si consideri che se (-1) è un non resto e si comprenda lo zero tra i quadrati, vi sono

$$1+\frac{p^n-3}{2}=\frac{p^n-1}{2}$$

elementi α pei quali α^2+4 è un quadrato, e $\frac{p^n+1}{2}$ pei quali non lo è (*), per cui esisteranno rispettivamente altrettante sostituzioni $\frac{\alpha z+1}{z}$ ellittiche e successioni (A), od iperboliche e successioni (B).

13. Sempre nell'ipotesi che (-1) sia un non resto, se $x_{\sigma+1}$ è il primo termine di (α) che, dopo l'iniziale, sia nullo, si dirà che α *appartiene all'in-*

(*) Dickson, *Linear groups.* Cap. IV, § 67.

dice σ. Come è noto

$$x_\sigma = \pm 1$$

secondo che (α) ha la forma (A) o (B) e rispettivamente $\sigma = s$ o $\sigma = \frac{1}{2} s$.

Si presenti il caso (A): si avrà allora $x_\sigma = 1$, $\sigma = s$ e σ divisore pari di $p^n - 1$ (§ 10) ed inoltre (§ 4) della forma $8k \pm 2$. Reciprocamente se σ è un divisore pari di $p^n - 1$ sappiamo (§ 12) che esistono $\varphi(\sigma)$ elementi α cui corrisponde una successione di periodo σ e del tipo (A), per cui sarà $\sigma = 8k \pm 2$.

Notiamo inoltre che il termine di posto ($m + 2$) in (α) ha la forma:

$$\alpha^m + \binom{m-1}{1} \alpha^{m-2} + \binom{m-2}{2} \alpha^{m-4} + \cdots \binom{m-\nu}{\nu} \alpha^{m-2\nu} + \cdots = \lambda^{(m)}(\alpha)$$

come si ricava facilmente anche senza ricorrere all'equazione caratteristica della successione (*), e per semplicità si convenga di chiamare ellittico od iperbolico un termine α secondochè per esso la (α) assume la forma (A) o (B).

Ciò premesso dimostriamo il

Teorema: « Se σ è divisore pari di ($p^n - 1$) e se applicando alle due funzioni dell'indeterminata z:

$$\lambda_{(z)}^{(\sigma-1)}, \quad \lambda_{(z)}^{\sigma-2} - 1$$

il procedimento delle successive divisioni si ottengono ν resti della forma:

$$R_i = \lambda_{(z)}^{\sigma-(i+2)} - (-1)^i \lambda_{(z)}^i \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

rispettivamente di grado $\sigma - (i + 2)$ ed aventi l'unità come coefficiente del termine più elevato, anche il resto successivo, qualora non sia identicamente nullo, avrà la stessa forma soddisfacendo alla stessa condizione. »

Sia da prima ν dispari: dalla relazione

$$\lambda_{(z)}^k = z \,.\, \lambda_{(z)}^{k-1} + \lambda_{(z)}^{(k-2)}$$

e dall'ipotesi per cui il grado di un resto supera di un'unità quello del seguente ed è sempre eguale ad uno il coefficiente del termine più alto, si ricava

$$R_{\nu+1} = R_{\nu-1} - z\, R_\nu = \lambda_{(z)}^{\sigma-(\nu+1+2)} - \lambda_{(z)}^{(\nu+1)}$$

in cui o sarà $\sigma-(\nu+1+2)=\nu+1$ e quindi $R_{\nu+1} = 0$, oppure $\sigma-(\nu+1+2)>\nu+1$

(*) Pincherle, *Lezioni di Algebra complementare.* Volume II, § 461.

nei quali casi resta provato quanto si voleva: mentre invece è da escludersi che sia

$$\sigma-(\nu+1+2)<\nu+1$$

poichè, dovendo aversi

$$\sigma-(\nu+2)>\nu$$

senza di che R_ν, contro l'ipotesi, o non sarebbe di grado $\sigma-(\nu+2)$ o non avrebbe eguale ad 1 il coefficiente del termine più elevato, ne verrebbe di conseguenza che dovrebbero sussistere le disuguaglianze:

$$\sigma<2(\nu+1)+2\,; \quad \sigma>2(\nu+1)$$

e quindi

$$\sigma=2(\nu+1)+1$$

inammissibile per σ pari.

Analogamente, se ν è pari, nel qual caso si ha:

$$R_{\nu+1}=\lambda_{(z)}^{\sigma-(\nu+1+2)}+\lambda_{(z)}^{(\nu+1)}$$

non può essere

$$\sigma-(\nu+1+2)<\nu+1$$

e così pure non può verificarsi

$$\sigma-(\nu+1+2)=\nu+1$$

perchè porterebbe di conseguenza $\sigma\equiv 0 \pmod 4$ da escludersi poichè (p^n-1) è, come si è visto (§ 12), il doppio d'un numero dispari.

Resta così provato che in ogni caso $R_{\nu+1}$ soddisfa alle richieste condizioni.

Da quanto precede risulta che, non potendo prolungarsi indefinitamente la serie dei resti e non potendo chiudersi con un resto di posto dispari, ciò accadrà per uno di posto pari e precisamente per

$$\nu=\frac{\sigma-2}{2}$$

per cui si conclude che:

$$R_{\nu-1}=\lambda_{(z)}^{\sigma-\left(\frac{\sigma-2}{2}+1\right)}+\lambda_{(z)}^{\frac{\sigma-2}{2}-1}=\lambda_{(z)}^{\frac{\sigma}{2}}+\lambda_{(z)}^{\left(\frac{\sigma}{2}-2\right)}$$

è il massimo comun divisore delle due funzioni

$$\lambda_{(z)}^{\sigma-1}, \quad \lambda_{(z)}^{(\sigma-2)}-1.$$

Ciò premesso, se α è ellittico ed appartiene a σ o ad un suo divisore dovrà essere una radice dei sistemi

$$\lambda_{(z)}^{\sigma-2}=1,\ \lambda_{(z)}^{\sigma-1}=0;\quad \lambda_{(z)}^{2\sigma-2}=1,\ \lambda_{(z)}^{(2\sigma-1)}=0;\ldots$$
$$\lambda_{(z)}^{p^n-3}=1,\ \lambda_{(z)}^{p^n-2}=0.$$

Cercando ora il massimo comun divisore tra le due funzioni

$$\lambda_{(z)}^{(p^n-1)-1};\quad \lambda_{(z)}^{(p^n-1)-2}-1$$

si ricava dal Teorema testè dimostrato, facendo $\sigma=p^n-1$ ed osservando che in ogni caso

$$R_1=\lambda_{(z)}^{p^n-4}+\lambda_{(z)}^{(1)}$$

soddisfa alle prescritte condizioni, che esso vien dato dalla somma

$$\lambda_{(z)}^{\frac{p^n-1}{2}}+\lambda_{(z)}^{\frac{p^n-5}{2}}=Z^{\frac{p^n-1}{2}}.$$

Di conseguenza tutti gli elementi ellittici saranno radici di

$$Z^{\frac{p^n-1}{2}}=0$$

e siccome (§ 12) essi sono in numero di $\frac{p^n-1}{2}$, il loro insieme dovrà coincidere con quello delle radici stesse.

Parimenti se σ è divisore di p^n-1 della forma 2δ con δ dispari, sappiamo (§ 12) che esistono $\varphi(\sigma)=\varphi(2\delta)=\varphi(\delta)$ elementi ellittici d'indice σ, e siccome ciò avrà luogo per ogni $\sigma'=2\delta'$ divisore di σ, segue che facendo percorrere a σ' la serie dei divisori di σ del tipo $2\delta'$ si ha:

$$\Sigma\varphi(\sigma')=\frac{\sigma}{2}$$

e si conclude che se σ soddisfa alla predetta condizione, gli elementi ellittici appartenenti a σ o ad un suo divisore della stessa forma sono in numero di σ. Se ora si osserva che ogni α ellittico appartenente a σ o ad un suo divisore 2δ deve soddisfare alle due

$$z^{\sigma-2}+\binom{\sigma-3}{1}z^{\sigma-4}+\cdots=1$$
$$z^{\sigma-1}+\binom{\sigma-2}{1}z^{\sigma-3}+\cdots=0$$

cercando il m. c. d. tra le due

$$\lambda_{(z)}^{(\sigma-2)} - 1\,; \quad \lambda_{(z)}^{(\sigma-1)}$$

si trova come prima che esso vien dato da:

$$Z^{\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = \lambda_{(z)}^{\left(\frac{\sigma}{2}\right)} + \lambda_{(z)}^{\left(\frac{\sigma-1}{2}\right)} \text{ (*)}$$

e si conclude quindi che gli elementi ellittici in questione coincidono con le radici di

$$Z^{\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = 0.$$

È poi palese che il polinomio $Z^{\left(\frac{p^n-1}{2}\right)}$ sarà divisibile per $Z^{\left(\frac{\sigma}{2}\right)}$.

14) Si ponga ora

$$p^n - 1 = 2\, p_1^{\nu_1}\, p_2^{\nu_2} \dots\, p_r^{\nu_2}$$

e sia $\sigma = 2\,\delta$ un suo divisore.

Come è noto (**) le due serie di numeri:

$$Q, \quad \frac{Q}{p_i\, p_j}, \quad \frac{Q}{p_i\, p_j\, p_h\, p_k}, \dots$$

$$\frac{Q}{p_i}, \quad \frac{Q}{p_i\, p_j\, p_h}, \dots$$

dove si è fatto $\frac{p^n-1}{2} = Q$, e di cui la prima si ottiene dividendo Q per tutti i prodotti dei fattori primi p presi due a due, quattro a quattro, ecc., e la seconda per tutti i prodotti degli stessi fattori presi uno ad uno, tre a tre, ecc., contengono un egual numero di termini divisibili per $\delta = \frac{\sigma}{2}$.

Ciò premesso, si consideri l'espressione:

$$Z^{(\varphi(Q))} = \frac{Z^{(Q)} \,.\, \Pi \,.\, Z^{\left(\frac{Q}{p_i p_j}\right)} \,.\, \Pi \,.\, Z^{\left(\frac{Q}{p_i p_j p_h p_k}\right)} \dots}{\Pi\, Z^{\left(\frac{Q}{p_i}\right)} \,.\, \Pi\, Z^{\left(\frac{Q}{p_i p_j p_h}\right)} \dots}$$

(*) A questo risultato si perviene pure valendosi solo delle relazioni stabilite nei primi paragrafi tra gli elementi di un periodo o sottoperiodo. Analogamente pel caso iperbolico (§ 17).

(**) Dirichlet, *Zahlentheorie*. Supplement, § 138.

in cui i prodotti del numeratore e del denominatore s'intendono estesi a tutti gli indici rispettivamente delle due serie precedenti. Si consideri ora uno qualunque dei fattori del numeratore (o denominatore), p. e. $Z^{\left(\frac{Q}{p_i p_j}\right)}$: egualiato a zero ci darà un'equazione di grado $\frac{Q}{p_i\, p_j} = \frac{p^n - 1}{2 \,.\, p_i\, p_j}$ le cui radici coincidono con l'insieme degli elementi ellittici appartenenti a $\sigma = \frac{p^n - 1}{p_i\, p_j}$ o ad un suo divisore doppio d'un numero dispari.

Sia α uno qualunque di essi, ed appartenga a $\sigma' = 2\,\delta'$. Ciascuna delle predette serie conterrà un egual numero di termini multipli di δ', ed in $Z^{(\varphi(Q))}$ esisteranno sia al numeratore come al denominatore un egual numero di fattori Z divisibili per $(z - \alpha)$ e ciò corrispondentemente a tutti quegli indici multipli di δ'. Risulta da ciò che $Z^{(\varphi(Q))}$ è un'espressione intera di grado

$$Q - \Sigma \frac{Q}{p_i} + \Sigma \frac{Q}{p_i\, p_j} \cdots = \varphi\,(Q) = \varphi\left(\frac{p^n - 1}{2}\right)$$

che si annullerà per tutti e solo quegli elementi ellittici appartenenti all'indice $\sigma = p^n - 1$ e che abbiamo precedentemente stabilito essere in numero di $\varphi\,(p^n - 1) = \varphi\left(\frac{p^n - 1}{2}\right)$.

Del pari, se $\sigma = 2\,\delta$ è divisore di $p^n - 1$ si potrà costruire l'equazione:

$$Z^{(\varphi(\sigma))} = 0$$

di grado $\varphi\,(\sigma)$ le cui radici coincideranno con l'insieme degli analoghi elementi d'indice σ.

Esempio. $p = 31$, $\sigma = 10$

$$Z^{(\varphi(\sigma))} = \frac{Z^{\left(\frac{\sigma}{2}\right)}}{Z^{(1)}}$$

$$Z^{\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = Z^{(5)} = \lambda^{(5)}\,(z) + \lambda^{(3)}\,(z) = z^5 + 5\,z^3 + 5\,z$$

$$Z^{(1)} = z$$

$$Z^{\varphi(\sigma)} = z^4 + 5\,z^2 + 5$$

$$z^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-5 \pm 6}{2} \quad z = \pm 4 \quad z = \pm 14$$

$\pm 4)$ $\quad 0,\ 1,\ \pm 4,\ 17,\ \pm 10,\ 26,\ \pm 21,\ 17,\ \pm 27,\ 1,\ 0,\ 1 \ldots$

$\pm 14)$ $\quad 0,\ 1,\ \pm 14,\ 11,\ \pm 13,\ 7,\ \pm 18,\ 11,\ \pm 17,\ 1,\ 0,\ 1 \ldots$

15) Sia ora α un elemento iperbolico appartenente quindi ad un indice σ divisore di $p^n + 1 = 2^\mu . q$. Il numero s dei termini del periodo completo della (α) sarà in questo caso eguale a 2σ e della forma $8k$ (§ 5), per cui $\sigma = 2^{\mu'} . \delta$ dove $\mu' \geqq 2$ e δ dispari.

Dimostriamo, in primo luogo, che $\mu' = \mu$, cioè che σ è contenuto in $p^n + 1$ un numero dispari di volte.

Poniamo che ciò non sia, e che si abbia invece $p^n + 1 = 2\,q' . \sigma$. I termini di posto 2σ, $3\sigma, \ldots, 2\,q' . \sigma$ saranno alternativamente eguali a ± 1 ed i successivi nulli, per la qual cosa α dovrebbe esser radice comune delle equazioni:

$$\lambda_{(z)}^{(p^n-1)} = 1 \qquad \lambda_{(z)}^{(p^n)} = 0.$$

Ma applicando alle due funzioni:

$$\lambda_{(z)}^{(p^n-1)} - 1\,; \qquad \lambda_{(z)}^{(p^n)}$$

l'algoritmo delle successive divisioni, si trova come altrove la catena di resti:

$$R_1 = \lambda_{(z)}^{(p^n-2)} + \lambda_{(z)}^{(1)} \qquad R_2 = \lambda_{(z)}^{(p^n-3)} - \lambda_{(z)}^{(2)}$$

$$R_3 = \lambda_{(z)}^{(p^n-4)} + \lambda_{(z)}^{(3)} \qquad R_4 = \lambda_{(z)}^{(p^n-5)} - \lambda_{(z)}^{(4)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_{2k+1} = \lambda_{(z)}^{p^n-(2k+2)} + \lambda_{(z)}^{(2k+1)} \qquad R_{2k} = \lambda_{(z)}^{p^n-(2k+1)} - \lambda_{(z)}^{(2k)}.$$

I resti di posto dispari non possono annullarsi, e perchè ciò avvenga di uno di posto pari è necessario che sia:

$$p^n - (2k+1) = 2k\,; \quad k = \frac{p^n - 1}{4}$$

che non può verificarsi essendo $p^n - 1$ il doppio d'un numero dispari (§ 14).

Le due predette funzioni sono quindi prime tra di loro e cade l'ipotesi relativa ad α.

16) Appartenga α a $\sigma = 2^\mu . \delta$ e per brevità si rappresentino i termini di

$$0 \;\; 1 \;\; \alpha \;\; \alpha^2+1 \;\;\; \alpha^3+2\,\alpha \ldots \;\; \left(\alpha^{\sigma-2} + \binom{\sigma-3}{1}\alpha^{\sigma-4} + \cdots\right) \qquad (\alpha)$$

con

$$0,\ 1,\ \alpha^{(1)},\ \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(\sigma-2)} = -1,\ \alpha^{\sigma-1} = 0 \ldots$$

e si ponga

$$\frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(i-1)}} = q_i\,.$$

In virtù del § 10 si ha che il ciclo

$$C = (\infty, q_1, q_2, \ldots, q_{\sigma-2}, q_{\sigma-1}) \quad (q_{\sigma-1} = 0)$$

fa parte della

$$S = \frac{\alpha z + 1}{z}.$$

La S pure iperbolica e regolare ha per periodo σ, e con lo stesso periodo sarà:

$$S^\nu = \frac{\alpha^{(\nu)} z + \alpha^{(\nu-1)}}{\alpha^{(\nu-1)} z + \alpha^{(\nu-2)}}$$

qualora sia ν primo con σ.
La S^ν conterrà quindi il ciclo:

$$C^\nu = (\infty, q_\nu, q_{2\nu}, \ldots, q_{(\sigma-1)\nu})$$

dove gli indici sono presi mod σ.

Si trasformi ora la S^ν in modo che C^ν si cambi in un altro che, cominciando ancora con ∞, si chiuda con l'elemento nullo $q_{\sigma-1}$.

A tal uopo bisognerà trasformare S^ν con una sostituzione T del gruppo lineare in modo che ad ∞ sostituisca ∞ e lo 0 a $q_{(\sigma-1)\nu}$, come è sempre possibile data la transitività multipla del gruppo.

Per determinare $q_{(\sigma-1)\nu}$, basta osservare che in S^ν esso viene rimpiazzato da ∞, per cui coinciderà con quell'elemento che in $S^{-\nu}$ sostituisce l'∞.

Ma

$$S^{-\nu} = \frac{\alpha^{(\nu-2)} \cdot z - \alpha^{(\nu-1)}}{-\alpha^{(\nu-1)} \cdot z + \alpha^{(\nu)}}$$

e si ricava quindi:

$$q_{(\sigma-1)\nu} = \frac{\alpha^{(\nu-2)}}{-\alpha^{(\nu-1)}} = -\frac{1}{q_{\nu-1}}$$

per cui la T che trasforma C^ν nel modo richiesto sarà la $T = k \cdot z + \lambda$ dove k, λ vengono determinati da:

$$k\left(-\frac{\alpha^{(\nu-2)}}{\alpha^{(\nu-1)}}\right) + \lambda = 0.$$

Ora:

$$T^{-1} \cdot S^\nu \cdot T = \frac{z - \lambda}{k} \cdot S^\nu \cdot (z + \lambda)$$

ed eseguendo le operazioni:

$$T^{-1} \,.\, S^{\nu} \,.\, T = \frac{(\alpha^{(\nu)} \,.\, k + \alpha^{(\nu-1)} \,.\, \lambda)\, z + \alpha^{(\nu-1)} (k^2 - \lambda^2) + (\alpha^{(\nu-2)} - \alpha^{(\nu)})\, \lambda \,.\, k}{\alpha^{(\nu-1)} \,.\, z + \alpha^{(\nu-2)} \,.\, k - \alpha^{(\nu-1)} \,.\, \lambda}$$

e sostituendo $k \dfrac{\alpha^{(\nu-2)}}{\alpha^{(\nu-1)}}$ a λ, dopo facili riduzioni si ottiene:

$$T^{-1}\, S^{\nu}\, T = \frac{\dfrac{\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}}{\alpha^{(\nu-1)}} \cdot k \,.\, z + \dfrac{(\alpha^{(\nu-1)})^2 - \alpha^{(\nu)}\, \alpha^{(\nu-2)}}{(\alpha^{(\nu-1)})^2}\, k^2}{z} \,.$$

Ma per la nota proprietà delle ridotte di una frazione continua, essendo ν dispari:

$$(\alpha^{(\nu-1)})^2 - \alpha^{(\nu)}\, \alpha^{(\nu-2)} = 1$$

e ponendo $k = \alpha^{(\nu-1)}$ risulta infine:

$$T^{-1}\, S^{\nu}\, T = \frac{(\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-1)})\, z + 1}{z}$$

sostituzione dello stesso periodo σ della $\dfrac{\alpha\, z + 1}{z}$ ed a cui corrisponde la successione pure iperbolica:

$$0,\ 1,\ (\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}), \ldots$$

Dico in primo luogo che per $\nu < \sigma - 1$, $\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}$ sarà sempre diverso da α. Se infatti ciò non avesse luogo, sarebbe:

$$S^{\nu} \,.\, T = T \,.\, S$$

vale a dire

$$(T^{-1})^{-1} \,.\, S \,.\, T^{-1} = S^{\nu}.$$

Ma T^{-1} non può coincidere con una potenza di S poichè non sposta l'indice ∞, e quindi (*) dev'essere di second'ordine e così pure la T.

Ora la

$$T = \alpha^{(\nu-1)}\, z + \alpha^{(\nu-2)}$$

(*) Serret, *Algèbre supérieure*. Tom. II, § 483. Quivi la condizione che T sia di second'ordine è data come necessaria nell'ipotesi che S sia dell'ordine $p \pm 1$ e limitatamente al campo (p). Essendo σ pari, la stessa dimostrazione si adatta al caso più generale considerato.

allo 0 sostituisce $\alpha^{(\nu-2)}$, e poichè è di second'ordine, ad $\alpha^{(\nu-2)}$ deve sostituire l'elemento nullo, cioè dev'essere:

$$\alpha^{(\nu-2)} \cdot (\alpha^{(\nu-1)} + 1) = 0.$$

Ma $\alpha^{(\nu-2)} = 0$ non è ammissibile per $1 < \nu < \sigma - 1$, e d'altra parte la: $\alpha^{(\nu-1)} + 1 = 0$ combinata con

$$\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)} = \alpha$$

darebbe:

$$\alpha^{(\nu)} + \alpha \cdot \alpha^{(\nu-1)} + \alpha^{(\nu-2)} = \alpha + \alpha \cdot \alpha^{(\nu-1)}$$

$$2\,\alpha^{(\nu)} = \alpha\,(1 + \alpha^{(\nu-1)})$$

e quindi $\alpha^{(\nu)} = 0$ che è pure da escludersi per $\nu < \sigma - 1$.

Per $\nu = \sigma - 1$ si ha:

$$T = \alpha^{(\nu-1)} \cdot z + \alpha^{(\nu-2)} = \alpha^{(\sigma-2)} \cdot z + \alpha^{(\sigma-3)}$$

dove

$$\alpha^{(\sigma-2)} = x_\sigma = -1; \quad \alpha^{(\sigma-3)} = x_{\sigma_{-1}} = \alpha$$

per cui: $T = -z + \alpha$, la quale trasforma effettivamente S in $S^{\sigma-1} = S^{-1}$ risultando, poichè $\alpha^{(\sigma-1)} = x_{\sigma+1} = 0$:

$$\alpha^{(\sigma-1)} + \alpha^{(\sigma-3)} = \alpha.$$

Insieme ad α esiste quindi un altro elemento $\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}$ dello stesso indice e pure iperbolico.

Ora se $\mu < \sigma - 1$ è primo con σ e diverso da $(\sigma - \nu)$, $\alpha^{(\mu)} + \alpha^{(\mu-2)}$ sarà pure un nuovo elemento iperbolico d'indice σ e diverso da $\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}$. Se infatti:

$$\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)} = \alpha^{(\mu)} + \alpha^{(\mu-2)}$$

posto $T_1 = \alpha^{(\mu-1)} \cdot z + \alpha^{(\mu-2)}$ dovrebbe aversi:

$$T^{-1}\,S^\nu\,T = \frac{(\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)})\,z + 1}{z}$$

$$T_1^{-1}\,S^\mu\,T_1 = \frac{(\alpha^{(\mu)} + \alpha^{(\mu-2)})\,z + 1}{z}$$

da cui:

$$S^\mu = (T \cdot T_1^{-1})^{-1} \cdot S^\nu \cdot (T\,T_1^{-1}).$$

Ma essendo μ, ν entrambi primi con σ ordine di S, S^μ si può considerare come una potenza di S^ν, per cui, come prima, la $T\,T_1^{-1}$ dev'essere di second'ordine, cioè $(T\,T_1^{-1})^2 = 1$. Posto ora in luogo di T e T_1 le loro espressioni ed eseguiti i calcoli risulta:

$$(T\,T_1^{-1})^2 = \frac{\left(\alpha^{(\nu-1)}\right)^2 + \left(\alpha^{(\nu-2)} - \alpha^{(\mu-2)}\right)\left(\alpha^{(\nu-1)} + \alpha^{(\mu-1)}\right)}{\left(\alpha^{(\mu-1)}\right)^2}.$$

Perchè quest'ultima si riduca all'identità è necessario e sufficiente che si abbia:

$$\left(\alpha^{(\nu-2)} - \alpha^{(\mu-2)}\right)\left(\alpha^{(\nu-1)} + \alpha^{(\mu-1)}\right) = 0$$

$$\left(\alpha^{(\nu-1)}\right)^2 = \left(\alpha^{(\mu-1)}\right)^2.$$

Cominciamo dal far vedere che non è ammissibile

$$\alpha^{(\nu-2)} - \alpha^{(\mu-2)} = 0$$

poichè, ove ciò fosse, in base alla precedente ipotesi dovrebbe aversi:

$$\alpha^{(\nu)} = \alpha^{(\mu)}$$

che, in virtù della relazione fondamentale tra i termini di (α), non è compatibile con

$$\alpha^{(\nu-1)} = \pm\, \alpha^{(\mu-1)}$$

tanto che si adotti il segno $+$, come il segno $-$.

Dovrà quindi essere

$$\alpha^{(\nu-1)} + \alpha^{(\mu-1)} = 0$$

senza che sia nullo l'altro fattore, ed allora da questa e dalla

$$\alpha^{(\mu)} + \alpha^{(\mu-2)} = \alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}$$

discende:

$$\alpha\,.\,\alpha^{(\mu-1)} + 2\,.\,\alpha^{(\mu-2)} = \alpha\,.\,\alpha^{(\nu-1)} + 2\,.\,\alpha^{(\nu-2)}$$

$$\alpha\,.\,\alpha^{(\mu-1)} + \alpha^{(\mu-2)} = \alpha^{(\nu-2)}$$

$$\alpha^{(\mu)} = \alpha^{(\nu-2)}$$

e quindi anche:

$$\alpha^{(\nu)} = \alpha^{(\mu-2)}.$$

Dalle:

$$\alpha^{(\mu)} = \alpha\,.\,\alpha^{(\mu-1)} + \alpha^{(\mu-2)}$$

$$\alpha^{(\nu)} = \alpha\,.\,\alpha^{(\nu-1)} + \alpha^{(\nu-2)}$$

in forza dei risultati precedenti si ricava:

$$\alpha^{(\mu-1)} = \frac{\alpha^{(\mu)} - \alpha^{(\mu-2)}}{\alpha} = \frac{\alpha^{(\nu-2)} - \alpha^{(\nu)}}{\alpha} = -\alpha^{(\nu-1)}.$$

Parimenti:

$$\alpha^{(\nu-3)} = -\alpha \,.\, \alpha^{(\nu-2)} + \alpha^{(\nu-1)} = -\alpha \,.\, \alpha^{(\mu)} - \alpha^{(\mu-1)} = -\alpha^{(\mu+1)}$$

$$\alpha^{(\nu-4)} = -\alpha \,.\, \alpha^{(\nu-3)} + \alpha^{(\nu-2)} = \alpha \,.\, \alpha^{(\mu+1)} + \alpha^{(\mu)} = \alpha^{(\mu+2)}$$

. . . .

da cui si ricava, supposto $\mu > \nu$, che gli elementi di (α) simmetrici ad $\alpha^{(\mu)}$ ed $\alpha^{(\nu-2)}$ alla destra del primo ed alla sinistra del secondo sono alternativamente complementari ed eguali, per cui quando da una parte si raggiunga lo zero, lo stesso avviene dall'altra parte, per cui si conclude che alla lor volta $\alpha^{(\mu)}$ ed $\alpha^{(\nu-2)}$ sono simmetrici rispetto ai due zeri che aprono e chiudono il semiperiodo di (α). Ma $\alpha^{(\mu)}$ ed $\alpha^{(\nu-2)}$ occupano rispettivamente i posti d'indice $\mu+2$ e ν per cui (§ 2) dovrà essere

$$\mu + 2 + \nu = \sigma + 2.$$

Resta così provato che per $\mu \gtrless \sigma - \nu$, $\alpha^{(\mu)} + \alpha^{(\mu-2)}$ è diverso da $\alpha^{(\nu)} + {}^{(\nu-2)}$. Reciprocamente, se $\mu = \sigma - \nu$, sono nella predetta simmetria i termini:

$$x_{\mu+2} = \alpha^{(\mu)} \quad x_\nu = \alpha^{(\nu-2)} = x_{\sigma-\mu}$$

$$x_{\nu+2} = \alpha^{(\nu)} \quad x_\mu = x_{\sigma-\nu} = \alpha^{(\mu-2)}.$$

Ma essendo la (α) del tipo (B) due termini di un semiperiodo simmetrici rispetto ai due zeri che lo comprendono, quali $x_{\sigma-\nu}$ ed $x_{\nu+2}$ sono complementari od eguali secondochè ν è pari o dispari e così pure dicasi di $x_{\sigma-\mu}$ ed $x_{\mu+2}$ per cui essendo μ, ν entrambi dispari, risulta:

$$\alpha^{(\mu)} = \alpha^{(\nu-2)}$$

$$\alpha^{(\mu-2)} = \alpha^{(\nu)}$$

ed in fine:

$$\alpha^{(\mu)} + \alpha^{(\mu-2)} = \alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}.$$

Se quindi

$$\nu_0 = 1,\ \nu_1,\ \nu_2, \ldots \nu_{\varphi\frac{(\sigma)}{2}-1}$$

sono i primi $\frac{\varphi(\sigma)}{2}$ numeri inferiori a σ e primi con esso, le $\frac{\varphi(\sigma)}{2}$ successioni (α)

$$0,\ 1,\ (\alpha^{(\nu_i)} + \alpha^{(\nu_i-2)})\ldots \tag{1}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \varphi \frac{(\sigma)}{2} - 1$$

saranno tutte tra loro diverse e dello stesso semiperiodo σ.

Se ora ad α si sostituisce $(-\alpha)$, la S e la T si cambiano in

$$S_1 = \frac{-\alpha z + 1}{z} \quad T_1 = \alpha^{(\nu-1)} - \alpha^{(\nu-2)}$$

e si ottiene:

$$T_1^{-1} S_1^{\nu} \cdot T_1 = \frac{(-\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\nu-2)}) z + 1}{z}$$

e con lo stesso procedimento si viene a constatare l'esistenza di $\frac{\varphi(\sigma)}{2}$ successioni

$$0,\ 1,\ (-\alpha^{(\nu)} - \alpha^{(\nu-2)}), \ldots \tag{2}$$

tutte tra loro diverse ed a semiperiodo σ.

Inoltre le (2) sono tutte distinte dalle (1).

Per provare ciò, basta in primo luogo osservare che le sostituzioni del tipo $T_1 S_1^{\nu} T_1$ si possono anche ricavare trasformando le potenze di S con la

$$T'_1 = -\alpha^{(\nu-1)} z - \alpha^{(\nu-2)}$$

per cui se una delle (2) coincidesse con una delle (1) dovrebbe aversi per la biunivoca corrispondenza tra le successioni (α) e le sostituzioni del tipo $\frac{\alpha z + 1}{2}$:

$$T^{-1} S^{\mu} T = T_1'^{-1} S^{\nu} T'_1$$

$$S^{\mu} = (T'_1 T^{-1})^{-1} S^{\nu} (T'_1 T^{-1})$$

e quindi:

$$(T'_1 T^{-1})^2 = 1$$

e sostituendo a T'_1 e T le loro espressioni

$$T'_1 = -\alpha^{(\nu-1)} z - \alpha^{(\nu-2)} \quad T = \alpha^{(\mu-1)} . z + \alpha^{(\mu-2)}$$

$$(T'_1 T^{-1})^2 = \frac{(\alpha^{(\nu-1)})^2 z + (\alpha^{(\mu-2)} + \alpha^{(\nu-2)})(\alpha^{(\nu-1)} - \alpha^{(\mu-1)})}{(\alpha^{(\mu-1)})^2}$$

e ripetendo lo stesso ragionamento si prova, anche in questo caso, che ove non sieno μ e ν complementari mod σ, non può sussistere la:

$$(T'_1\, T^{-1})^2 = 1.$$

Le (2) sono quindi tutte distinte dalle (1).

Se quindi esiste un elemento iperbolico α d'indice σ, ne esistono altri $\varphi(\sigma) - 1$.

Resta a provarsi che non ve ne sono altri.

Supponiamo che tutti quelli esistenti sieno

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \dots \alpha_s$$

a cui corrisponderanno altrettante sostituzioni

$$S_i = \frac{\alpha_i \, . \, z + 1}{2}$$

di periodo σ, e si trasformino quest'ultime con tutte le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$ dove α, β possono assumere tutti i possibili valori (elementi del campo di Galois), escluso per α il valore 0 e che sono in numero di $p^n(p^n - 1)$.

Otterremo così un sistema di $p^n \, . \, (p^n - 1) \, . \, s$ sostituzioni a periodo σ del tipo:

$$\frac{(\alpha_i\, \alpha^2 + \alpha\, \beta)\, z + \alpha^2\, (\alpha^2 - \beta^2 - \alpha_i\, \alpha\, \beta)}{z - \alpha\, \beta} \tag{3}$$

Poniamo ora che due delle (3), la precedente e la

$$\frac{(\alpha_\lambda\, \alpha_1^2 + \alpha_1\, \beta_1)\, z + \alpha_1^2\, (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_\lambda\, \alpha_1\, \beta_1)}{z - \alpha_1\, \beta_1}$$

sieno eguali. Perchè ciò sia è necessario e sufficiente che i loro coefficienti sieno eguali, cioè che:

$$\alpha\, \beta = \alpha_1\, \beta_1 \quad \alpha_i\, \alpha^2 = \alpha_\lambda\, \alpha_1^2, \quad \alpha^4 = \alpha_1^4$$

dall'ultima delle quali risulta:

$$\alpha^4 - \alpha_1^4 = (\alpha^2 - \alpha_1^2)\,(\alpha^2 + \alpha_1^2) = 0.$$

Ma

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 = 0$$

non può sussistere poichè (-1) è un non resto; per cui allora tra α, α_1, qualora non sieno eguali, e con ciò $\beta = \beta_1$, $\alpha = \alpha_\lambda$, potrà aver luogo la sola relazione

$$\alpha = -\alpha_1$$

che trae con sè $\beta = -\beta_1$, $\alpha_i = \alpha_\lambda$.

Se due delle (3) sono eguali, α_1, β_1 sono rispettivamente complementari di α e β ed $\alpha_i = \alpha_\lambda$ e reciprocamente, per cui le (3) in numero di $\frac{1}{2} p^n (p^n - 1)$ sono tutte tra loro diverse.

Ma le sostituzioni a periodo σ sono in questo caso (*) in numero di $\frac{1}{2} p^n (p^n - 1) \varphi(\sigma)$, per cui si conclude che $s = \varphi(\sigma)$.

Per ogni $\sigma = 2^\mu . \delta$ esistono quindi $\varphi(\sigma)$ elementi iperbolici d'indice σ o non esiste alcuno.

Ma se σ percorre la serie dei divisori di $p^n + 1 = 2^\mu . q$ e del tipo $2^\mu . \delta$ si ha

$$\Sigma \varphi(\sigma) = \frac{p^n + 1}{2}$$

che è precisamente il totale degli elementi iperbolici, per cui se per un certo indice σ venissero a mancare, per qualche altro σ' dovrebbero essere in numero maggiore di $\varphi(\sigma')$ e questo non può essere.

Concludiamo quindi col seguente

Teorema: « Per ogni divisore σ di $p^n + 1 = 2^\mu . q$ e della forma $2^\mu . \delta$, esistono $\varphi(\sigma)$ elementi iperbolici d'indice σ.

Se α è uno qualunque di essi, il loro insieme viene rappresentato da:

$$(\pm \alpha_i)^{(\nu_i)} + (\pm \alpha_i)^{(\nu_i - 2)} \tag{4}$$

dove ν_i è uno qualunque dei primi $\frac{\varphi(\sigma)}{2}$ numeri inferiori a σ e primi con esso ».

Possiamo ancora aggiungere le seguenti considerazioni.

Si è dimostrato (§ 12) che se σ è divisore pari di $p^n - 1$, esistono $\varphi(\sigma)$ elementi ellittici d'indice σ: con lo stesso procedimento seguito pel caso iperbolico si può pure dimostrare che se α_i è uno di questi, il loro insieme vien

(*) Serret, *Algèbre supérieure*. T. II, § 470-471.

dato dall'espressione

$$\alpha_i^{(\nu_i)} + \alpha_i^{(\nu_i-2)} \tag{5}$$

dove ν_i percorre la serie dei $\varphi(\sigma)$ numeri inferiori a σ e primi con esso.

La ragione della non completa coincidenza della (4) con la (5) risiede in ciò che nel caso ellittico si ha:

$$\alpha^{(\mu)} = -\alpha^{(\nu-2)}$$

$$\alpha^{(\mu-2)} = -\alpha^{(\nu)}$$

$$\alpha^{(\mu)} + \alpha^{(\mu-2)} = -(\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)})$$

qualora sia $\mu + \nu = \sigma$ poichè due termini $\alpha^{(\mu)} = x_{\mu+2}$, $\alpha^{(\nu-2)} = x_\nu$ simmetrici rispetto ai due zeri che aprono e chiudono il periodo (il semi-periodo nel caso iperbolico) sono eguali o complementari secondochè μ è pari o dispari.

17. Posto $\sigma = p^n + 1$ applicando il procedimento del § 13 si trova subito che il massimo comun divisore tra le funzioni:

$$\lambda^{(\sigma-1)}(z) \quad \lambda^{(\sigma-2)}(z) + 1$$

è dato da:

$$Z^{\left(\frac{\sigma}{2}\right)} = \lambda^{\left(\frac{\sigma}{2}\right)}(z) + \lambda^{\left(\frac{\sigma-4}{2}\right)}z$$

e si trova che i $\frac{p^n+1}{2}$ elementi iperbolici appartenenti a p^n+1 o ad un suo divisore soddisfano all'equazione

$$Z^{\frac{p^n+1}{2}} = 0$$

che è appunto di grado $\frac{p^n+1}{2}$.

Parimenti se $\sigma = 2^\mu . \delta$, tutti gli elementi che appartengono a σ o ad un suo divisore $\sigma' = 2^\mu . \delta'$ saranno radici comuni delle due:

$$\lambda^{\sigma-1}(z) = 0 \quad \lambda^{\sigma-2}(z) + 1 = 0$$

i cui primi membri, con procedimento analogo a quello usato al § 13, ammettono il m. c. d.

$$\lambda^{\frac{\sigma}{2}}(z) + \lambda^{\frac{\sigma-4}{2}}(z) = Z^{\frac{\sigma}{2}}$$

di grado $\frac{\sigma}{2}$ eguale al numero degli elementi in questione.

Se poi σ, pur essendo divisore di p^n+1, non è della forma predetta, per le due funzioni

$$\lambda^{\sigma-1}(z) \quad \lambda^{\sigma-2}(z)+1$$

non valgono più le argomentazioni del § 13, ed in questo caso il loro m. c. d. eguagliato a zero non può esser solubile nel campo (p^n) poichè (§ 15) non esistono elementi iperbolici d'indice σ.

Egualmente, posto $p^n+1=2^\mu . p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots$ e $\frac{p^n+1}{2}=Q$, le due serie:

$$Q, \quad \frac{Q}{p_i p_\gamma}, \quad \frac{Q}{p_i p_\gamma p_h p_k}, \ldots$$

$$\frac{Q}{p_i}, \quad \frac{Q}{p_i p_\gamma p_h}, \ldots$$

contengono lo stesso numero di termini divisibili per $\frac{\sigma}{2}$ $(\sigma=2^\mu . \delta)$, e come al § 14 si prova che l'equazione:

$$Z^{(\varphi(2Q))}=\frac{Z^{(Q)} . \Pi Z^{\left(\frac{Q}{p_i p_\gamma}\right)} \ldots}{\Pi Z^{\left(\frac{Q}{p_i}\right)} \ldots}$$

in cui i prodotti del numeratore e denominatore s'intendono estesi a tutti gli indici delle due serie precedenti, sarà soddisfatta dagli elementi iperbolici d'indice $\sigma=p^n+1$ in numero di $\varphi(2Q)=\varphi(p^n+1)$.

Una equazione analoga, posto $Q=\frac{\sigma}{2}$, si avrà per ogni divisore σ soddisfacente alle volute condizioni.

Esempio: $p=23$.

L'equazione le cui radici sono i $\frac{p+1}{2}=12$ elementi iperbolici è:

$$Z^{(12)}=\lambda^{(12)}(z)+\lambda^{10}(z)=z^{12}+12z^{10}+8z^8-3z^6+13z^4+13z^2+2=0$$

che è soddisfatta da

$$z=\pm 1, \ \pm 6, \ \pm 8, \ \pm 11, \ \pm 4, \ \pm 7$$

ai quali corrispondono altrettante successioni iperboliche.

Esiste un solo divisore di $p+1$ della forma $\sigma=2^\mu . \delta$ e questo è $\sigma=8$, e l'equazione che ha per radici i $\varphi(8) = \frac{8}{2}$ elementi d'indice 8 è data da

$$Z^{(4)} = \lambda^{(k)}(z) + \lambda^2(z) = x^4 + 4x^2 + 2 = 0$$

che è soddisfatta da

$$z = \pm 4, \quad \pm 7$$

ai quali corrispondono successioni d'indice 8.

Posto $Q = \frac{p+1}{2} = 12$ l'equazione agli elementi d'indice 24 è:

$$Z^{\varphi(2Q)} = Z^8 = \frac{Z^{12}}{Z^{\frac{12}{3}}} = z^8 + 8z^6 - 3z^4 + 16z^2 + 1 = 0$$

e questi sono

$$z = \pm 1, \ \pm 6, \ \pm 8, \ \pm 11$$

a cui corrispondono successioni di semiperiodo $\sigma = 24$.

All'incontro per $\sigma = 4$ si trova:

$$Z^{(2)} = \lambda^2 + \lambda^0 = z^2 + 2 = 0$$

insolubile in (p) poichè essendo 23 della forma $8K - 1$, (-2) è un non residuo.

Così pure per $\sigma = 6$ si ha che il m. c. d. delle

$$\lambda^{(5)}(z); \ \lambda^4(z) + 1$$

è dato da: $2z^2 + 2$ che eguagliato a zero dà un'equazione insolubile perchè $\left(\frac{-1}{23}\right) = -1$.

18. Sia $S = \frac{\alpha z + 1}{z}$ iperbolica e di periodo $\sigma = 2^\mu . \delta$, contenente il ciclo

$$C = (\infty, \ q_1, \ q_2, \ldots \ q_{\sigma-1}).$$

Poniamo ora che ν non sia primo con σ ma che abbia con esso per m. c. d. un numero d dispari: S^ν apparterrà all'esponente $\frac{\sigma}{d} = 2^\mu . \delta'$ e conterrà tra i suoi fattori C^ν che risulta in questo caso decomposto nel prodotto di d

cicli ciascuno dei quali d'ordine $\frac{\sigma}{d}$ e tra i quali figurerà

$$\gamma = \left(\infty,\ q_\nu,\ q_{2\nu},\ldots\ q_{\left(\frac{\sigma}{d}-1\right)\nu}\right).$$

Si trasformi ora S^ν in modo che γ si cambi in un altro che cominci con ∞ e si chiuda con 0, per il che basta ricorrere alla sostituzione $T = \alpha^{(\nu-1)}.z + \alpha^{(\nu-2)}$ (§ 16) ottenendosi così

$$T^{-1}\,S^\nu\,T = \frac{(\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)})\,z + 1}{z}$$

avente per periodo $\frac{\sigma}{d}$ al pari di S^ν ed a cui corrisponde la successione iperbolica

$$0,\ 1,\ (\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}),\ldots$$

avente $\frac{\sigma}{d}$ per semi-periodo.

Con l'identico procedimento seguito al § 16 si dimostra che se

$$\nu_1 = d,\ \nu_2,\ \nu_3\ldots$$

sono la prima metà dei numeri inferiori a σ ed aventi con esso d per m. c. d., le $\frac{1}{2}\cdot\varphi\left(\frac{\sigma}{d}\right)$ successioni

$$0,\ 1,\ (\alpha^{(\nu_i)} + \alpha^{(\nu_i-2)}),\ldots \tag{1}$$

saranno tutte diverse e di semiperiodo $\frac{\sigma}{d}$, ed altrettanto dicasi delle

$$0,\ 1,\ (-\alpha^{(\nu_i)} - \alpha^{(\nu_i-2)})\ldots \tag{2}$$

Tutti gli elementi iperbolici d'indice $\frac{\sigma}{d}$ in numero di $\varphi\left(\frac{\sigma}{d}\right)$ sono dati da:

$$\pm\,\alpha^{(\nu_i)} \pm \alpha^{(\nu_i-2)}$$

essendo α d'indice σ. Facendo quindi variare d da 1 a δ risulta:

$$\Sigma\,\varphi\left(\frac{\sigma}{d}\right) = 2^{\mu-1}\,.\,\delta = \frac{\sigma}{2}.$$

Notando ora che gli elementi appartenenti all'indice σ o ad un suo divisore, i quali tutti sono in numero di $\frac{\sigma}{2}$ soddisfano all'equazione

$$Z^{\frac{\sigma}{2}} = 0$$

le cui radici sono razionalmente esprimibili in funzione di una qualunque di quelle appartenenti all'indice σ, si scorge come a quest'ultime convenga l'epiteto di «primitive».

Così, ad esempio, per $p = 23$ sappiamo già che ± 1 appartengono all'indice 24 e si ha il semiperiodo:

$$0,\ 1,\ \pm 1,\ 2,\ \pm 3,\ 5,\ \pm 8,\ 13,\ \pm 21,\ 11,\ \pm 9,\ 20,\ \pm 6$$
$$3,\ \pm 9,\ 12,\ \pm 21,\ 10,\ \pm 8,\ 18,\ \pm 3,\ 21,\ \pm 1.\ (-1),\ 0\ldots$$

e fatto $\nu = 1, 5, 7, 11$, l'espressione $\pm \alpha^{(\nu)} \pm \alpha^{(\nu-2)}$ fornisce gli elementi ± 1, ± 11, ± 6, ± 15 che sono quelli d'indice 24; mentre per $\nu = 3, 9$ ci dà gli elementi ± 4, ± 7 d'indice $\frac{\sigma}{d} = \frac{24}{3} = 8$.

Alle stesse conclusioni ottenute in questo paragrafo per gli elementi iperbolici, si giunge pure con analogo procedimento per quelli ellittici.

19. Sia α d'indice $\sigma = 2^\mu . \delta$ e $d = D(\sigma, \nu)$ un numero dispari: come s'è visto (§ 18)

$$\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}$$

appartiene all'indice $\frac{\sigma}{d}$

Indichiamo ora con $\theta^{(\nu)}$ l'operazione mediante la quale si passa da α ad $\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)} = \theta^{(\nu)}_{(\alpha)}$ e proviamo che tutte le $\theta^{(\nu)}$ corrispondenti a valori di ν primi con σ od aventi con σ per m. c. d. un numero dispari, costituiscono un gruppo abeliano.

Per ipotesi $S = \frac{\alpha z + 1}{z}$ è pure iperbolica e d'ordine σ e la S^ν trasformata con la $T = \alpha^{(\nu-1)} z + \alpha^{(\nu-2)}$ conduce alla

$$S_1 = \frac{(\alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)})\, z + 1}{z} = \frac{\alpha_1 z + 1}{z}$$

dove $\theta^{(\nu)}_{(\alpha)} = \alpha^{(\nu)} + \alpha^{(\nu-2)}$ è l'elemento generatore della corrispondente successione.

La S_1 d'ordine $\frac{\sigma}{d}$ ed iperbolica si elevi alla potenza ρ, essendo ρ tale che $d_1 = D\left(\frac{\sigma}{d}, \rho\right)$ sia ancora dispari, e si trasformi quindi mediante

$$T_1 = \alpha_1^{(\rho-1)} z + \alpha_1^{(\rho-1)}.$$

La

$$S_2 = T_1^{-1} S_1^\rho T_1 = \frac{(\alpha_1^{(\rho)} + \alpha_1^{(\rho-2)}) z + 1}{z}$$

parimenti iperbolica sarà di ordine $\frac{\sigma}{d \cdot d_1}$ e ad essa corrisponderà la successione analoga il cui elemento generatore sarà

$$\alpha_1^{(\rho)} + \alpha_1^{(\rho-2)} = \theta^{(\rho)}(\alpha_1) = \theta^{(\rho)} \cdot \theta^{(\nu)}(\alpha).$$

Si tratta ora di provare che:

$$\theta^{(\rho)} \cdot \theta^{(\nu)}(\alpha) = \theta^{(\nu)} \cdot \theta^{(\rho)}(\alpha).$$

Abbiamo infatti:

$$S_2 = T_1^{-1} S_1^\rho T_1 = T_1^{-1} (T^{-1} S^\nu T)^\rho T_1 =$$

$$= (T\, T_1)^{-1} S^{\nu\rho} (T\, T_1) = \frac{(\alpha_1^{(\rho)} + \alpha_1^{(\rho-2)}) z + 1}{z}.$$

Ma come risulta dallo stesso procedimento seguito nel determinarla (§ 16), la sostituzione atta a trasformare una potenza di $\frac{\alpha z + 1}{z}$ in un'altra sostituzione dello stesso tipo $\frac{\beta z + 1}{z}$, è unica, e tale sarà quindi la trasformata di $\left(\frac{\alpha z + 1}{z}\right)^{\nu \cdot \rho}$, per cui si dovrà giungere allo stesso risultato anche qualora s'inverta l'ordine delle operazioni rispetto agli esponenti ν, ρ. Poichè quindi:

$$\theta^\rho \cdot \theta^\nu(\alpha) = \alpha^{(\nu\rho)} + \alpha^{(\nu\rho-2)} = \theta^{\nu\rho}(\alpha) = \theta^\nu \cdot \theta^\rho(\alpha)$$

resta così provato che le θ^ν, ove ν soddisfi alle volute condizioni, costituiscono un gruppo abeliano.

Un'analoga dimostrazione per il caso ellittico.

Bologna, novembre 1910.

Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

(*Di* EUGENIO ELIA LEVI, *a Genova.*)

INTRODUZIONE.

1. Sia data un'equazione alle derivate parziali di secondo ordine in due variabili indipendenti

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0. \tag{1}$$

Accanto al classico teorema di esistenza delle soluzioni di una tale equazione rispondenti ai dati iniziali di CAUCHY sopra una curva assegnata, negli ultimi decenni si rivolse l'attenzione ad un gruppo di analoghi teoremi di esistenza in cui i dati iniziali sono assegnati su due curve diverse uscenti da un punto O. Il primo forse di essi fu quello che occorre nel metodo di RIEMANN per l'integrazione delle equazioni lineari iperboliche. Tale gruppo di teoremi di esistenza ha molta importanza nella teoria generale dell'equazione (1). Così teoremi di questo tipo, e precisamente del tipo più semplice in cui almeno una delle due curve sia una caratteristica di (1) (*), sono quelli che servono da una parte, come ho rammentato, nel metodo di RIEMANN per l'integrazione delle equazioni lineari, d'altra parte servono — seguendo il GOURSAT — a dimostrare in modo rigoroso che una caratteristica semplice di (1) appartiene ad infinite superficie soluzioni (**).

Ma tutti questi studii presentano ancora grandi lacune, sia dal punto di vista delle funzioni analitiche, sia da quello delle funzioni di variabili reali.

(*) Lo studio di questo caso è dovuto a RIEMANN, DARBOUX, PICARD e GOURSAT. Si noti però che anche in questo caso particolare il teorema per le equazioni non lineari è provato soltanto nel caso analitico.

(**) Su questa applicazione vedi ancora più oltre al n. 2 e il § III.

I risultati più completi ottenuti fin qui possono raccogliersi nei due enunciati seguenti:

I) *L'equazione sia lineare nelle derivate seconde con coefficienti funzioni di x ed y soltanto* (*) *ed a caratteristiche distinte; talchè con una conveniente trasformazione di variabili possa ridursi alla forma*

$$s = f(x\,y\,z\,p\,q). \tag{2}$$

Siano date sul piano $x\,y$ due curve γ_1 e γ_2 a tangente variabile con continuità che si taglino in un punto O: esiste in un campo attorno ad O una ed una sola soluzione di (2) *che su γ_1 e γ_2 si riduca a due funzioni assegnate (che prendono in O lo stesso valore), purchè il birapporto delle tangenti a γ_1 e γ_2 in O e degli assi* (che sono le caratteristiche di (2)) *sia in modulo* -1 (**).

(*) E cioè a caratteristiche *fisse sul piano $x\,y$*.

(**) Il lavoro principale è quello del GOURSAT: *Sur un problème relatif à la théorie des équations, etc.* (Annales de la Faculté de Toulouse, 1e Mém., vol. 5, serie 2.a, 1903, pag. 405-436, 2e Mém., vol. 6, serie 2.a, 1904, pag. 117-144). Sullo stesso argomento è tornato il GOURSAT recentemente nella Memoria *Sur un procédé alterné* (Annales de la Faculté de Toulouse, vol. 11, serie 2.a, 1909). Il metodo seguito in quest'ultimo lavoro è in sostanza assai simile a quello usato dal FUBINI nella Nota: *Di alcuni nuovi problemi al contorno, ecc.* (Atti della R. Accademia di Torino, 1905). Citerò ancora, tra i molti altri, i lavori di HADAMARD (*Résolution d'un problème aux limites, etc.* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1904, vol. 32); di MYLLER (*Randwerthaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen, etc.* Math. Annalen, vol. 68, 1910, pag. 75-106); di MASON (*On the linear differential equation of hyperbolic type,* Math. Annalen, vol. 65, 1908, pag. 570-575); del PICONE (*Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 39, 2.o sem. 1910, pag. 349-376, *Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono.* Ibid., vol. 31, 1.o sem. 1911). In tutti questi lavori il teorema di GOURSAT viene esteso ed approfondito, sia in quanto si generalizza la natura dei dati iniziali, sia in quanto si sostituiscono alle condizioni esposte per le curve γ_1 e γ_2 nel nostro enunciato altre condizioni che nel caso che γ_1 e γ_2 abbiano un punto O a comune includono quelle da noi poste, sia infine in quanto si determina con maggiore cura il campo in cui è possibile dimostrare l'esistenza.

Rimandiamo a questi lavori per tali studii che qui non ci interessano.

La sola cosa che ci importa giustificare è una lieve differenza che compare tra il nostro e l'enunciato del GOURSAT: il GOURSAT enuncia il teorema come noi abbiamo fatto più sopra solo nel caso che si tratti di funzioni analitiche, nel caso che si tratti di funzioni di variabili reali aggiunge l'ipotesi che le curve γ_1 e γ_2 non separino le caratteristiche. La ragione

È da notare che quest'ultima condizione è pure *necessaria* affinchè il teorema di esistenza sia vero.

II) *L'equazione e le funzioni di cui si tratta siano regolari analitiche. Si immagini che con un conveniente cambiamento delle variabili indipendenti e della funzione incognita le condizioni iniziali siano ridotte* (come sempre è possibile se γ_1 e γ_2 non sono tangenti nel punto di incontro O) *a chiedere che la funzione si annulli sugli assi, ed abbia anche derivate prime e seconde nulle nell'origine. Sia allora l'equazione ridotta nella forma* (*)

$$A(x\,y\,z\,p\,q\,r\,t)\,r + s + B(x\,y\,z\,p\,q\,r\,t)\,t = f(x\,y\,z\,p\,q). \tag{3}$$

Esiste una ed una sola soluzione analitica del problema purchè

$$A(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0)\,B(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0) < \frac{1}{4}\,{}^{(**)}\,. \tag{4}$$

Confrontiamo i due enunciati precedenti. Il campo funzionale in cui si applica il primo è assai più ampio del campo funzionale in cui si applica il secondo. Anche la condizione imposta in questo ultimo enunciato è di gran lunga più restrittiva di quella imposta nel primo: poichè con un cambiamento di variabili si può vedere che il supporre in modulo $=|-1$ il birapporto delle tangenti a γ_1 e γ_2 e delle direzioni caratteristiche nell'elemento iniziale equi-

---

di ciò devesi ricercare nel fatto che per il Goursat in questo caso γ_1 e γ_2 sono due curve che *escono dal punto O*, o più precisamente sono *due segmenti di curva che hanno un estremo comune nel punto O;* mentre noi abbiamo richiesto che γ_1 e γ_2 *si taglino in O*, cioè a dire siano *due segmenti di curva che hanno il punto O come punto interno comune*. Come si vede, questo secondo modo di intendere ristabilisce un perfetto parallelismo tra il caso reale ed il caso analitico. Per tutte queste osservazioni vedi la seconda delle citate Memorie del Picone.

(*) Perchè alla equazione si possa attribuire la forma (3) occorrerà che le direzioni caratteristiche nell' elemento iniziale (0000000) non siano nè coincidenti fra loro e colla direzione di uno degli assi, nè formino colle direzioni degli assi un birapporto uguale a -1.

(**) È questo teorema un caso particolare di un teorema assai generale del Riquier: *Sur l'existence dans certains systèmes différentiels des intégrales répondant à des conditions initiales données* (Annales de l'École Normale Sup., 1904). Questo lavoro è riprodotto nel Cap. X del volume *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Gauthier Villars, 1910), cfr. specialmente il n. 169. Altra dimostrazione assai simile in sostanza a quella del Riquier, ma esposta sotto forma assai nitida ed elegante, diede il Goursat nella Nota *Sur un théorème d'existence* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1906).

vale al supporre, colle notazioni del secondo enunciato, che non sia

$$A(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0)\,B(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0) \text{ reale } e \geqq \frac{1}{4}\ (*). \qquad (5)$$

Invece l'enunciato II) si riferisce ad una classe di equazioni assai più ampia che non l'enunciato I).

Resta quindi aperta anche dal punto di vista delle funzioni analitiche la questione di portare lo studio dell'equazione generale (1) quale in sostanza è studiata nell'enunciato II), allo stesso punto di compiutezza che quello dell'equazione (2); e ciò mi pare di tanto più importante in quanto che i metodi usati per l'equazione (2) non valgono affatto per la (1); e d'altra parte il trattare a fondo il caso dell'equazione (1) può indurre qualche speranza di poter portare anche qualche maggiore precisione nell'enunciato generale del Riquier di cui, come si disse, II) non è che un caso particolare (**).

Dal punto di vista poi delle funzioni di variabili reali resta da esaminare se e quando il teorema di esistenza è vero per equazioni di tipo diverso dalle (2).

I due primi paragrafi di questo lavoro sono dedicati per l'appunto a stabilire che la sola condizione richiesta per la risolubilità del problema, nel caso che (1) sia a caratteristiche distinte, è quella che compare nell'enunciato I).

(*) L'intima ragione per cui il metodo di Riquier-Goursat porta alla condizione (4) invece che alla (5), sta nel fatto che esso consiste essenzialmente, come pone in luce il Goursat, nello sviluppare la soluzione cercata di (3) in serie di potenze del parametro $\lambda = A(0000000)\,B(0000000)$. Ammesso quindi vero, come mostreremo nel presente lavoro, che la condizione di risolubilità sia la (5), si comprende come il Goursat ed il Riquier non riescano a provare il teorema che nell'ipotesi (4), poichè il cerchio $|\lambda| < \frac{1}{4}$ è realmente il cerchio di convergenza della loro serie di potenze.

(**) Il teorema del Riquier enuncia che un sistema di equazioni, soddisfacente a certe condizioni molto generali che non è qui il caso di descrivere, è sempre integrabile con certi tipi di condizioni iniziali, purchè i dati iniziali soddisfacciano a certe disuguaglianze. Se poniamo mente al caso particolare di tale teorema da noi esposto nel testo vediamo che un carattere delle disuguaglianze del Riquier è di escludere un insieme di dati iniziali dipendente da tanti parametri quanti sono quelli da cui dipende l'insieme dei dati per cui il problema è risolubile; talchè non si può dire che *in generale* esista la soluzione. Il sostituire la disuguaglianza (4) colla condizione (5) fa sì che l'insieme escluso venga a dipendere da un numero di parametri minore di quello da cui dipende l'insieme accettato. E fa sperare che qualcosa di analogo possa dirsi del teorema generale del Riquier.

2. Ho già accennato che il GOURSAT (*) fonda la dimostrazione del fatto che una curva di elementi di 2.° ordine caratteristica semplice per l'equazione (1) appartiene ad infinite superficie soluzioni di (1) appunto sopra il teorema precedente; egli costruisce dapprima una superficie soluzione di (1) la quale contenga la curva sostegno della curva di elementi caratteristica (**), ed un'altra curva arbitraria, e dimostra poi che gli elementi di 2.° ordine della superficie lungo la prima curva coincidono cogli elementi della caratteristica. Tale dimostrazione il GOURSAT non poteva fare che nel caso delle equazioni analitiche, poichè il teorema generale di esistenza mancava nel caso non analitico. Nel § III io applico il teorema dimostrato nei paragrafi precedenti appunto a completare dal punto di vista delle funzioni di variabili reali la teoria delle caratteristiche. Se associamo questo risultato colla possibilità di risolvere il problema di CAUCHY quando la curva di elementi iniziale non sia una caratteristica, da me dimostrata altrove (***), possiamo così conchiudere che *anche dal punto di vista delle funzioni di variabili reali tutte e sole le curve di elementi che possono essere curve di contatto di due superficie soluzioni di un'equazione* (1) *a caratteristiche semplici, sono le sue caratteristiche* (****).

3. In tutto quanto precede non ho mai parlato del caso delle equazioni paraboliche perchè nessun risultato io conosco appartenente a questo ordine di idee e relativo ad esse. Dedico il § IV, che costituirà la parte seconda di questo lavoro, a studiare questo caso. Vi mostro come, allo stesso modo che per il problema di CAUCHY, convenga distinguere una particolare classe tra queste equazioni; classe già studiata da GOURSAT e poi da E. von WEBER ($*_*$),

(*) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations du second ordre.* Vol. I, pag. 184 e ss. Vol. II, pag. 303 e ss.

(**) Se una caratteristica è data dalle equazioni $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$, $p = p(\tau)$, $q = q(\tau)$, $r = r(\tau)$, $s = s(\tau)$, $t = t(\tau)$, dico *curva sostegno di essa* la curva $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$.

(***) *Sul problema di* CAUCHY *per le equazioni a caratteristiche reali e distinte.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5.ª, vol. XVI, 1.° sem. 1908, pag. 330-339.

(****) La domanda cui così si risponde era già stata posta più volte. Vedi a questo proposito le osservazioni contenute nella Nota I (pag. 342-53) del volume di HADAMARD: *Leçons sur la propagation des ondes, etc.*

($*_*$) GOURSAT, *Sur une classe d'équations, etc.* Acta Mathematica, vol. 19, pag. 285-340: *Leçons sur les éq. du second ordre*, vol. I, pag. 205 e ss., vol. II, pag. 161 e ss.; E. VON WEBER, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, etc.* Comptes Rendus, vol. 124 (1897, per cui le caratteristiche dipendono da 7 costanti arbitrarie. Per le equazioni di questa classe il problema è risolubile purchè nessuna delle due curve sia tangente alla direzione delle caratteristiche nel loro punto di incontro.

Lungo e difficile mi sarebbe stato invece l'esaminare compiutamente il problema per il caso generale delle equazioni paraboliche. Sull'esempio dell'equazione del calore ho stabilito che il problema non ammette in generale soluzione dal punto di vista delle funzioni di variabili reali: ma non m'è riuscito di vedere pienamente se nel caso analitico invece il problema sia risolubile o no — fatta astrazione naturalmente dal caso che una delle due curve tocchi la caratteristica nell'origine: allora il problema è certamente in generale irresolubile.

4. I ragionamenti che seguono valgono quando esistono le derivate degli ordini che via via si richiederà. È però facile vedere che, se le funzioni da cui si parte sono analitiche e le condizioni ad esse relative sono verificate in un campo complesso, tutte le deduzioni successive valgono pure nel campo complesso e le funzioni cui si giunge in fine sono ancora analitiche. Pertanto si può condurre la dimostrazione senza mai distinguere i due casi. Tale osservazione sarà nel seguito costantemente sottintesa.

PARTE PRIMA

§ I.

In questo paragrafo noi ci occuperemo di tre problemi preliminari su cui si fondano i ragionamenti del § II.

1. *Problema I.* Siano $a(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ funzioni finite e continue per $|x| < \alpha$, è possibile determinare una funzione $h(x)$ tale che

$$h(x) - a(x)\, h(\psi(x)) = \varphi(x)\ ? \tag{1}$$

---

pag. 1215; GOURSAT, *Remarque sur une Note récente de* M. WEBER, ibid., pag. 1294. Vedi anche per il significato che nella teoria generale delle equazioni hanno le caratteristiche doppie del tipo di quelle appartenenti a questa classe di equazioni la mia Memoria *Caratteristiche multiple e problema di* CAUCHY. Annali di Matematica, vol. XVI, della serie 3.ª, pag. 161-202.

È facile vedere che, se si suppone che per $|x| < \alpha$ sia

$$|a(x)\psi(x)| \leq q_1 |x| \quad \text{con} \quad q_1 < 1 \tag{2$_a$}$$

$$|\psi(x)| \leq |x|, \tag{2$_b$}$$

se inoltre si suppone

$$|\varphi(x)| < M|x|^t \text{ con } t \geq 1, \quad \varphi(0) = 0, \tag{2$_c$}$$

la soluzione di (1) esiste sempre.

Infatti si costruiscano le funzioni

$$h_0(x) = \varphi(x), \quad h_1(x) = a(x)\, h_0(\psi(x)), \ldots, \quad h_i(x) = a(x)\, h_{i-1}(\psi(x)), \ldots; \tag{3}$$

esse esistono tutte per $|x| < \alpha$, grazie a $(2)_b$; ed inoltre soddisfanno per $(2)_c$ e $(2)_a$ alle disuguaglianze

$$|h_0(x)| < M|x|^t, \quad |h_1(x)| < q_1 M|x|^t, \ldots, \quad |h_i(x)| < q_1^i M|x|^t, \ldots \tag{4}$$

La serie $\sum\limits_0^\infty h_i(x)$ converge dunque uniformemente ed assolutamente per $|x| < \alpha$; essa rappresenta quindi una funzione $h(x)$ soluzione di (1)

$$h(x) = \sum_0^\infty h_i(x). \tag{5}$$

E per (4) soddisferà alla disuguaglianza

$$|h(x)| < \frac{M}{1 - q_1}|x|^t. \tag{6}$$

2. *Unicità della soluzione.* Dalla disuguaglianza (6) segue in particolare che la $h(x)$ così trovata soddisfa nell'origine alla condizione di Lipschitz. È facile vedere che, *se si suppone* $a(0) \neq 1$, essa è l'unica soluzione di (1) che soddisfaccia alla condizione di Lipschitz nell'origine. Invero se due tali soluzioni esistessero, la loro differenza sarebbe una funzione $H(x)$, per cui esiste un numero μ tale che $|H(x) - H(0)| < \mu|x|$, e che inoltre è soluzione dell'equazione

$$H(x) - a(x)\, H(\psi(x)) = 0. \tag{7}$$

Ma per essere $a(0) \neq 1$ da (7) segue, facendovi $x = 0$, $H(0) = 0$: onde si avrà

$$|H(x)| < \mu|x|. \tag{8}$$

Ma posto

$$\psi_0(x) = x, \quad \psi_1(x) = \psi(x), \quad \psi_2(x) = \psi(\psi_1(x)), \ldots, \quad \psi_i(x) = \psi(\psi_{i-1}(x)), \ldots, \tag{9}$$

si ha, insieme con (7),

$$H(x) = \left[\prod_0^n{}_i\, a(\psi_i(x))\right] H(\psi_{n+1}(x)),$$

onde per (8)

$$|H(x)| < \mu \left|\psi_{n+1}(x) \prod_0^n{}_i\, a(\psi_i(x))\right|. \tag{10}$$

Ma per $(2)_a$ è

$$|a(\psi_{i-1}(x))\, \psi_i'(x)| \leq q_1 |\psi_{i-1}(x)|,$$

onde da (10) segue

$$|H(x)| < \mu\, |a(\psi_n(x))\, (\psi_{n+1}(x))| \left|\prod_0^{n-1}{}_i\, a(\psi_i(x))\right|$$

$$\leq \mu\, q_1 \left|\psi_n(x) \prod_0^{n-1}{}_i\, a(\psi_i(x))\right| = \mu\, q_1\, |a(\psi_{n-1}(x))\, \psi_n(x)| \left|\prod_0^{n-2}{}_i\, a(\psi_i(x))\right| \leq$$

$$\leq \mu\, q_1^2 \left|\psi_{n-1}(x) \prod_0^{n-2}{}_i\, a(\psi_i(x))\right| \leq \cdots \leq$$

$$\leq \mu\, q_1^n |x|.$$

Essendo $q_1 < 1$ segue $|H(x)| = 0$ c. v. d.

Il caso $a(0) = 1$ è realmente un caso eccezionale poichè non è difficile vedere che in tale ipotesi esistono realmente soluzioni di (1) le quali assumono nell'origine un valore prefissato arbitrario, e sono quindi diverse dalla soluzione (5) che nell'origine è nulla.

3. *Sua derivabilità.* È da notare che la condizione fondamentale $(2)_a$ relativa ad $a(x)$ e $\psi(x)$, risulta senz'altro soddisfatta se si suppone che esista la derivata di $\psi(x)$ e che si abbia

$$|a(x)\, \psi'(x)| \leq q_1 < 1. \tag{11$_a$}$$

Se si suppone inoltre che anche $a(x)$ e $\varphi(x)$ abbiano le derivate e che sia

$$|a'(x)| < m \tag{11$_b$}$$

$$|\varphi'(x)| < \rho(|x|) \tag{11$_c$}$$

dove $\rho(|x|)$ è una funzione positiva non decrescente di $|x|$, è facile vedere che anche la funzione $h(x)$ costruita sopra ammette la derivata prima. Si osservi infatti che derivando le (3) e tenendo conto di (4), (11) si ha

$$|h'_0(x)| < \rho(|x|), \quad |h'_1(x)| < m M |x|^t + q_1 \rho(|x|), \ldots$$
$$|h'_i(x)| < i\, m\, q_1^{i-1} M |x|^t + q_1^i \rho(|x|), \ldots;$$

onde segue che la serie $\sum_0^\infty h'_i(x)$ converge uniformemente per $|x| < \alpha$; e la sua somma rappresenta quindi la derivata di (5). Si ha anzi precisamente

$$|h'(x)| < \frac{m}{(1-q_1)^2} M |x|^t + \frac{1}{1-q_1} \rho(|x|). \tag{12}$$

4. *Sulle soluzioni di un'equazione lineare alle derivate parziali.* Sulla risoluzione del problema precedente si fonda la risoluzione degli altri che tosto andremo a discutere. Ma prima di parlare di essi vogliamo rammentare alcune proprietà delle soluzioni delle equazioni del tipo

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \lambda(x y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} = f(x y). \tag{13}$$

È noto come tali soluzioni si ottengano. Si supponga $\lambda(x y)$ finita e continua insieme colle sue derivate prime per $|x| + |y| < \alpha_1$; si indichi con

$$y = \theta(x \eta) \tag{14}$$

la soluzione dell'equazione

$$\frac{d y}{d x} = \lambda(x y) \tag{15}$$

che per $x = 0$ dà $y = \eta$; sia $\eta = \psi(x y)$ la funzione che si ottiene risolvendo (14) rapporto a η e cioè la soluzione di

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \lambda(x y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{16}$$

che per $x = 0$ si riduce a y. La soluzione generale di (13) è allora data, se $f(x y)$ è finita e continua ed ammette le derivate prime, da

$$\left.\begin{aligned} \zeta(x y) &= F(x y) + h(\psi(x y)) \\ F(x y) &= \left[\int_0^x f(\xi, \theta(\xi \eta))\, d\xi\right]_{\eta = \psi(x y)} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

dove $h(x)$ indica una qualunque funzione derivabile.

Si supponga che $\lambda(xy)$, $f(xy)$ soddisfacciano alle disuguaglianze:

$$|f(xy)| < M_1 [|x| + |y|]^{t_1} \qquad (t_1 \geqq 0), \tag{18$_a$}$$

$$\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right] < M'_1 [|x| + |y|]^{t'_1} \qquad (t'_1 \geqq 0)\ (*), \tag{18$_b$}$$

$$|\lambda(xy)| \leqq q_2 < 1, \tag{18$_c$}$$

$$\left[\left|\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right|\right] < m_1. \tag{18$_d$}$$

Si vede facilmente che nel campo $|x| + |y| < \alpha_1$ le funzioni $\psi(xy)$, $F(xy)$ hanno le derivate e soddisfanno alle disuguaglianze seguenti:

$$|F(xy)| < k_1 \frac{1}{t_1 + 1} M_1 [|x| + |y|]^{t_1+1}, \tag{19$_a$}$$

$$\left[\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\right] < M_1 [|x| + |y|]^{t_1} + k_2^2 k_1 \frac{1}{t'_1 + 1} M'_1 [|x| + |y|]^{t'_1+1}, \tag{19$_b$}$$

$$|\psi(xy)| < |x| + |y|, \tag{19$_c$}$$

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right| < k_2, \qquad \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| < q_2 k_2, \tag{19$_d$}$$

dove

$$k_1 = \frac{1}{1 - q_2}, \qquad k_2 = e^{m_1 \alpha_1}\ (**).$$

(*) Colla notazione $[a, b, \ldots] < A$ indichiamo qui e nel seguito l'insieme delle disuguaglianze $a < A$, $b < A, \ldots$

(**) Infatti da (17) segue intanto che si può calcolare $F(xy)$ in tutto il campo in cui si può determinare la soluzione (14) di (15) e risolvere poi (14) rapporto a η. Ora per (18)$_c$ la soluzione (14) di (15) esiste finchè x ed η sono tali che $|x| + |y| < \alpha_1$, ed inoltre è per le (14) e (15) stesse

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = [\lambda(xy)]_{y=\theta(x\eta)}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = e^{\int_0^x \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi \\ y=\theta(\xi\eta)}} d\xi},$$

onde per (18)$_c$ e (18)$_d$ segue

$$\left|\frac{\partial \theta}{\partial x}\right| < q_2, \quad e^{-m_1|x|} < \left|\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right| < e^{m_1|x|}. \tag{α}$$

Con ciò si avrà immediatamente che per $|x| + |y| < \alpha_1$, (14) è risolubile rapporto a η:

Per dedurre dalle (19) delle limitazioni per $\zeta(xy)$ converrà conoscere delle limitazioni per $h(x)$; e ciò dipenderà dalla natura delle condizioni iniziali assegnate alla $\zeta(xy)$. Così se si chiede che per $x=0$, $\zeta(xy)$ si riduca

---

cioè esiste $\psi(xy)$ ed è

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right|} < e^{m_1|x|} \leq e^{m_1\alpha_1} = k_2, \tag{β}$$

e per (16)

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| < \left|\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| < q_2 k_2; \tag{γ}$$

queste disuguaglianze (β) e (γ) sono le $(19)_d$. Inoltre si ha, posto

$$\chi(xy) = \left[\int_0^x \lambda(\xi, \theta(\xi\eta))\, d\xi\right]_{\eta=\psi(xy)},$$

che $\chi(xy)$ è la soluzione dell'equazione $\frac{\partial\chi}{\partial x} + \lambda(xy)\frac{\partial\chi}{\partial y} = \lambda(xy)$ che si annulla per $x=0$: onde da (16) viene $\psi(xy) = -\chi(xy) + y$; ma per $(18)_c$ è $|\chi(xy)| < q_2|x| < |x|$ onde

$$|\psi(xy)| < |x| + |y|$$

che è $(19)_c$. Per trovare $(19)_a$ e $(19)_b$ si faccia anzitutto l'osservazione seguente: per (α) si ha che $\left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{|x| + |\theta(x\eta)|\right\}\right| > 1 - q_2$, ed anzi che tale derivata è sempre positiva per $x>0$, negativa per $x<0$; se quindi si vuol calcolare $\int_0^x \left[|x| + |\theta(x\eta)|\right]^\tau dx$ si può prendere come variabile $\mu = |x| + |\theta(x\eta)|$, e, si avrà l'integrale $\int_0^\mu \mu^\tau \frac{d\mu}{\frac{d}{dx}\left\{|x| + |\theta(x\eta)|\right\}}$; per la disuguaglianza precedente sarà quindi

$$\left|\int_0^\mu \frac{\mu^\tau\, d\mu}{\frac{d}{dx}\left\{|x| + |\theta(x\eta)|\right\}}\right| < \frac{1}{1-q_2}\left|\int_0^\mu \mu^\tau\, d\mu\right| = \frac{1}{(\tau+1)}\,\frac{1}{1-q_2}\cdot\mu^{\tau+1} =$$

$$= \frac{1}{\tau+1}\,\frac{1}{1-q_2}\left[|x| + |\theta(x\eta)|\right]^{\tau+1}.$$

Applicando tali disuguaglianze si otterrà subito da (17), $(18)_a$:

$$|F(xy)| = \left|\left[\int_0^x f(x, \theta(x\eta))\, dx\right]_{\eta=\psi(xy)}\right| \leq$$

$$\leq M_1\left[\left|\int_0^x \left\{|x| + |\theta(x\eta)|\right\}^{t_1} dx\right|\right]_{\eta=\psi(xy)} \leq$$

$$\leq M_1\frac{1}{t_1+1}\,\frac{1}{1-q_2}\left\{|x| + |\theta(x\eta)|\right\}^{t_1+1}_{\eta=\psi(x\eta)} = M_1\frac{1}{t_1+1}\,\frac{1}{1-q_2}\left[|x| + |y|\right]^{t_1+1}$$

ad una funzione assegnata $\varphi(y)$ la quale soddisfaccia alle disuguaglianze

$$|\varphi(y)| < M_2 |y|^{t_2}, \tag{20$_a$}$$

sarà

$$\zeta(xy) = F(xy) + \varphi(\psi(xy)),$$

e per $(19)_a$ $(19)_c$ si avrà

$$|\zeta(xy)| < k_1 \frac{1}{t_1+1} M_1 [|x|+|y|]^{t_1+1} + M_2 [|x|+|y|]^{t_2}. \tag{21$_a$}$$

E se la $\varphi(y)$ ha la derivata e questa soddisfa ad una limitazione del tipo

$$|\varphi'(y)| < M'_2 |y|^{t'_2} \tag{20$_b$}$$

si avrà per $(19)_b$ $(19)_c$ e $(19)_d$

$$\left.\begin{aligned} \left[\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|\right] &< M_1 [|x|+|y|]^{t_1} + \\ &+ k_2^2 k_1 \frac{1}{t'_1+1} M'_1 [|x|+|y|]^{t'_1+1} + k_2 M'_2 [|x|+|y|]^{t'_2}. \end{aligned}\right\} \tag{21$_b$}$$

Osservazione. È opportuno notare che se $f(xy)$ e $h(x)$ non avessero le derivate prime, non si potrebbe accertare che le $F(xy)$ e $h(\psi(xy))$ abbiano pure le derivate prime: tuttavia si potrebbe intendere che la $\zeta(xy)$ data da (7) soddisfaccia ancora a (13) nel senso che, posto in essa $y = \theta(x\eta)$ secondo (14) la fun-

---

che è $(19)_a$. Ed analogamente avendosi

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\left[\int_0^x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\substack{x=\xi \\ y=\theta(\xi\eta)}} d\xi\right]_{\eta=\psi(xy)},$$

sarà, ricordando (α) e (β) e $(18)_b$,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < k_2^2 \frac{1}{t'_1+1} \frac{1}{1-q_2} M'_1 \Big[|x|+|y|\Big]^{t'_1+1}. \tag{δ}$$

Ed in virtù dell'equazione (13) medesima sarà

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| &\leq \Big|f(xy)\Big| + \left|\lambda(xy)\frac{\partial F}{\partial y}\right| < \\ &< M_1\Big[|x|+|y|\Big]^{t_1} + q_2 k_2^2 \frac{1}{t'_1+1} \frac{1}{1-q_2} M'_1 \Big[|x|+|y|\Big]^{t'_1+1}. \end{aligned}\right\} \tag{ε}$$

È chiaro che (δ) ed (ε) si possono raccogliere insieme nell'unica disuguaglianza $(19)_b$.

zione $\zeta(xy)$ diviene una funzione $\overline{\zeta}(x\eta)$ tale che ha la derivata rapporto ad x (e non eventualmente quella rapporto a η) e soddisfa alla $\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x} = f(x\theta(x\eta))$. Naturalmente in questo caso non valgono più le $(18)_b$ e $(20)_b$ e corrispondentemente non valgono più le $(19)_b$ e $(21)_b$, ma tutte le altre conclusioni rimangono immutate (*).

5. *Problema II.* Consideriamo le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \lambda_1(xy)\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} &= f_1(xy) \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \lambda_2(xy)\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} &= f_2(xy). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

E supponiamo che nel campo $|x|+|y|<\alpha$, le $\lambda_1(xy)$, $\lambda_2(xy)$, $f_1(xy)$, $f_2(xy)$ siano finite e continue colle loro derivate prime: supponiamo precisamente che sia:

$$[\,|\lambda_1(xy)|,\ |\lambda_2(xy)|\,] \leqq q_2 < 1, \tag{23_a}$$

$$\left[\left|\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \lambda_1}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial \lambda_2}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right|\right] < m_1, \tag{23_b}$$

$$[\,|f_1(xy)|,\ |f_2(xy)|\,] < M_3[\,|x|+|y|\,]^{t_3}, \qquad (t_3,\ t'_3 \geqq 0) \tag{23_c}$$

$$\left[\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|\right] < M'_3[\,|x|+|y|\,]^{t'_3}. \tag{23_d}$$

Ci proponiamo di trovare due funzioni soluzioni di (22) tali che

$$\left.\begin{aligned} a_1(x)\zeta_1(x0) + \ \zeta_2(x0) &= \varphi_1(x) \\ \zeta_1(0x) + a_2(x)\zeta_2(0x) &= \varphi_2(x) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

dove $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ sono funzioni finite e continue insieme colle loro derivate per $|x|<\alpha$; ed anzi tali che ingrandendo, ove occorra, il numero M_3, che compare in $(23)_c$, si abbia

$$[\,|\varphi_1(x)|,\ |\varphi_2(x)|\,] < \frac{M_3}{t_3+1}|x|^{t_3+1} \text{ (**)}, \tag{25_a}$$

(*) Cfr. la mia Nota: *Sul problema di* CAUCHY *per le equazioni lineari in due variabili a caratteristiche reali.* Rendiconti dell'Istituto Lombardo, serie II, vol. XLI, 1908, pag. 408-428, § 2, n. 2.

(**) Sarebbe facile sostituire questa disuguaglianza con altra più generale del tipo di $(25)_b$; ma non ci occorre.

$$[|\varphi'_1(x)|,\quad |\varphi'_2(x)|] < \rho_1(|x|), \tag{25$_b$}$$

$$|a_1(x)\, a_2(y)| < m_2 \quad \text{con} \quad m_2^2\, q_2 < 1, \tag{25$_c$}$$

$$[|a_1(x)|,\quad |a'_1(x)|,\quad |a_2(x)|,\quad |a'_2(x)|] < m_3, \tag{25$_d$}$$

dove come nel n. 3 $\rho_1(|x|)$ indica una funzione finita positiva, non decrescente di $|x|$; ed inoltre m_3 si suppone, come è legittimo, $\geqq 1$. E supporremo inoltre

$$a_1(0)\, a_2(0) \neq 1. \tag{26}$$

Le (22) sono del tipo di (13) con ciò solo che l'ufficio di x ed y è, nella seconda di esse, scambiato: noi chiameremo, sempre tenendo conto di tale scambio che occorre fare in quanto riguarda la seconda delle (22), $\psi_1(x\,y)$, $\psi_2(x\,y)$, $F_1(x\,y)$, $F_2(x\,y)$ le funzioni che rispetto a queste equazioni hanno l'ufficio di $\psi(x\,y)$ e $F(x\,y)$ rispetto alla (13).

Con ciò le soluzioni cercate di (22) si otterranno cercando due funzioni $h_1(x)$, $h_2(x)$ derivabili e tali che

$$\left.\begin{aligned} a_1(x)\, h_1(\psi_1(x\,0)) + h_2(x) &= \varphi_1(x) - a_1(x)\, F_1(x\,0) \\ h_1(x) + a_2(x)\, h_2(\psi_2(0\,x)) &= \varphi_2(x) - a_2(x)\, F_2(0\,x), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

e ponendo poi

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1(x\,y) &= F_1(x\,y) + h_1(\psi_1(x\,y)) \\ \zeta_2(x\,y) &= F_2(x\,y) + h_2(\psi_2(x\,y)). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Eliminando dalle (27) una volta h_2 ed una volta h_1, avremo per h_1 ed h_2 le equazioni

$$\left.\begin{aligned} h_1(x) - a_2(x)\, a_1(\psi_2(0\,x))\, h_1(\psi_1(\psi_2(0\,x)\,0)) &= \varphi_3(x) \\ h_2(x) - a_1(x)\, a_2(\psi_1(x\,0))\, h_2(\psi_2(0\,\psi_1(x\,0))) &= \varphi_4(x) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

dove

$$\left.\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \varphi_2(x) - a_2(x) \left\{ F_2(0\,x) - \varphi_1(\psi_2(0\,x)) + a_1(\psi_2(0\,x))\, F_1(\psi_2(0\,x)\,0) \right\} \\ \varphi_4(x) &= \varphi_1(x) - a_1(x) \left\{ F_1(x\,0) - \varphi_2(\psi_1(x\,0)) + a_2(\psi_1(x\,0))\, F_2(0\,\psi_1(0\,x)) \right\} \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

Ed è facile vedere che, se alle (29) si possono applicare i risultati dei n. 1-3, talchè esse ammettano una soluzione formata da una coppia di funzioni finite e continue colle loro derivate prime, tale soluzione sarà per (26) totalmente determinata; ed inoltre soddisferà a (27) (*); onde (28) darà realmente la soluzione del problema proposto, ed anzi l'unica soluzione di esso.

Non rimane dunque che da esaminare la possibilità di applicare alle (29) i risultati dei n. 1-3. Ora intanto da $(19)_c$ e (23) segue

$$[\,|\psi_1(xy)|,\quad |\psi_2(xy)|\,] < |x| + |y|,$$

onde

$$[\,|\psi_1(x0)|,\quad |\psi_2(0x)|\,] < |x|, \tag{31}$$

e a fortiori sarà quindi

$$[\,|\psi_1(\psi_2(0x),\ 0)|,\quad |\psi_2(0,\ \psi_1(x0))|\,] < |x|. \tag{32}$$

Queste valgono per (29) quello che $(2)_b$ vale per (1).

Inoltre se chiamiamo con α_2 il minore dei numeri $\gamma_1, -\dfrac{1}{2m_1}\log(m_2^2 q_2)$ (**), otterremo che nel campo

$$|x| + |y| < \alpha_2, \tag{33}$$

è per $(19)_d$

$$\left[\left|\frac{d\psi_1(x0)}{dx}\right|,\quad \left|\frac{d\psi_2(0x)}{dx}\right|\right] < q_2 k_2 \leq \frac{\sqrt{q_2}}{m_2} \tag{34}$$

poichè è $k_2 = e^{m_1\alpha_2} \leq \dfrac{1}{m_2\sqrt{q_2}}$.

(*) Infatti se $h_1(x)$ e $h_2(x)$ soddisfanno a (29), posto

$$a_1(x)h_1(\psi_1(x0)) + h_2(x) - \varphi_1(x) + a_1(x)F_1(x0) = H_1(x)$$
$$h_1(x) + a_2(x)h_2(\psi_2(0x)) - \varphi_2(x) + a_2(x)F_2(0x) = H_2(x),$$

$H_1(x)$ e $H_2(x)$ hanno le derivate prime finite e soddisfanno le equazioni

$$H_1(x) - a_1(x)a_2(\psi_1(x0))H_1(\psi_2(0,\ \psi_1(x0)) = 0$$
$$H_2(x) - a_2(x)a_1(\psi_2(0x))H_2(\psi_1(\psi_2(0x),\ 0)) = 0.$$

Ora queste equazioni sono della stessa forma che le (29) e quindi applicando ad esse i risultati del n. 2 segue che $H_1(x) = H_2(x) = 0$ c. d. d.

(**) Si rammenti che per $(25)_c$ è $m_2^2 q_2 < 1$ e quindi $\log(m_2^2 q_2) < 0$, onde α_2 resta un numero positivo, come occorre perchè si possa scrivere la (33).

Quindi per le $(25)_c$ e (34) si avrà

$$\left.\begin{aligned}&\left| a_2(x)\, a_1(\psi_2(0\,x)) \frac{d}{dx}(\psi_1(\psi_2(0\,x),\ 0))\right| < q_2\,,\\ &\left| a_1(x)\, a_2(\psi_1(x\,0)) \frac{d}{dx}(\psi_2(0,\ \psi_1(x\,0)))\right| < q_2\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

che tengono per le (29) l'ufficio di $(11)_a$ per (1).

Dalle $(25)_d$ e (34) segue analogamente:

$$\left[\left|\frac{d}{dx}(a_2(x)\, a_1(\psi_2(0\,x)))\right|,\ \left|\frac{d}{dx}(a_1(x)\, a_2(\psi_1(x\,0)))\right|\right] < m_3^2 \frac{\sqrt{q_2}}{m_2}$$

e queste tengono per (29) l'ufficio di $(11)_b$ per (1).

Infine quanto ai secondi membri di (29) si osservi che per (30), $(23)_e$, $(25)_a$, $(25)_d$, (31), (32), $(19)_a$ è

$$[\,|\varphi_3(x)|,\ \ |\varphi_4(x)|\,] < k_1 \frac{(1+m_3)^2}{t_3+1} M_3\, |x|^{t_3+1} \qquad (36)_a$$

dove come nel numero precedente si pone $k_1 = \dfrac{1}{1-q_2} > 1$: queste sono per le (29) le analoghe delle $(2)_c$ per (1). Esisterà quindi la soluzione di (30) e soddisferà alle disuguaglianze

$$[\,|h_1(x)|,\ \ |h_2(x)|\,] < k_1^2 (1+m_3)^2 \frac{1}{t_3+1} M_3\, |x|^{t_3+1}. \qquad (37)_a$$

Supponiamo $\alpha_2 < 1$; ciò è sempre legittimo. Allora si vede subito che dalle $(25)_b$, $(19)_b$ con (34), $(25)_d$ segue che $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ hanno anche le derivate prime e che queste soddisfanno alle disuguaglianze

$$\left.\begin{aligned}&[\,|\varphi'_3(x)|,\ \ |\varphi'_4(x)|\,] < k_4 M_3\, |x|^{t_3} +\\ &\qquad + m_3 k_3 k_2^2 k_1 \frac{1}{t'_3+1} M'_3\, |x|^{t'_3+1} + k_3\, \rho_1(|x|)\end{aligned}\right\} \quad (36)_b$$

dove k_3 e k_4 sono due costanti dipendenti da q_2, m_2, m_3 soltanto, e precisamente ricordando che $m_3 > 1$ si può porre

$$k_3 = 1 + m_3 \frac{\sqrt{q_2}}{m_2}, \quad k_4 \leqq m_3 (k_1 + 1)(1 + m_3 k_3).$$

Questa si può ritenere come l'analoga di $(11)_c$ per le (29), quindi si deduce che esistono $h'_1(x)$ ed $h'_2(x)$, e che per (12) si ha

$$\left.\begin{aligned}[\,|h'_1(x)|,\quad |h'_2(x)|\,] < \left[m_3^2 \frac{\sqrt{q_2}}{m_2} k_1^3 (1+m_3)^2 + k_1 k_4\right] M_3 |x|^{t_3} + \\ + m_3 k_3 k_2^2 k_1^2 \frac{1}{t'_3+1} M'_3 |x|^{t'_3+1} + k_3 k_1 \rho_1(|x|).\end{aligned}\right\} \quad (37)_b$$

Portiamo queste funzioni h nelle (28), avremo per $(21)_a$ e $(21)_b$ che le $\zeta_1(xy)$, $\zeta_2(xy)$ soddisfanno a limitazioni della forma

$$[\,|\zeta_1(xy)|,\quad |\zeta_2(xy)|\,] < k_5 \frac{1}{t_3+1} M_3 [\,|x|+|y|\,]^{t_3+1} \qquad (38)_a$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\left|\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\right|\right] < \\ < k_5 \left\{ M_3 [\,|x|+|y|\,]^{t_3} + \frac{1}{t'_3+1} M'_3 [\,|x|+|y|\,]^{t'_3+1} + \rho_1(|x|+|y|)\right\}\end{aligned}\right\} \quad (38)_b$$

dove k_5 *è un conveniente numero che dipende soltanto, come* k_1, k_2, k_3, k_4, *da* q_2, m_2, m_3: precisamente, ricordando che si suppose $m_3 \geq 1$, e che per le espressioni date sopra è $[k_1, k_2, k_3, k_4] > 1$, si può prendere per k_5 il maggiore dei numeri

$$k_1 + k_1^2(1+m_3)^2,\quad 1 + m_3^2 \frac{\sqrt{q_2}}{m_2} k_1^3 k_2 (1+m_3)^2 + k_1 k_2 k_4,\quad k_2^2 k_1 + m_3 k_3 k_2^3 k_1^2 \,(*). \qquad (39)$$

Osservazione I. Forme particolarmente semplici assumono le disuguaglianze $(37)_b$, $(38)_b$ quando si assegnino alla funzione $\rho_1(|x|)$ forme speciali. Ad es. se si suppone

$$\rho_1(|x|) = \frac{1}{t'_3+1} M'_3 |x|^{t'_3+1} \qquad (25)'_b$$

chiamando ancora k_5 un numero che, oltre ad essere maggiore dei numeri (39), superi pure

$$k_2^2 k_1 + m_3 k_3 k_2^3 k_1^2 + k_2 k_3 k_1, \qquad (39)'$$

(*) Conviene nel verificare le (38) osservare che k_5 essendo maggiore dei numeri (39) è pure maggiore di $k_2 k_3 k_1$.

avremo che alla $(38)_b$ si può sostituire la

$$\left.\begin{array}{l}\left[\left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right|\right] < \\ \qquad < k_5 \left\{ M_3 [\,|x| + |y|\,]^{t_3} + \frac{1}{t'_3 + 1} M'_3 [\,|x| + |y|\,]^{t'_3+1} \right\}.\end{array}\right\} \qquad (38)'_b$$

Osservazione II. Essendo come si è notato $[m_3, k_1, k_2, k_3, k_4] > 1$, il numero k_5 che supera i numeri (39) e (39)′ è pure maggiore di 1, di $k_1 + 1$, $k_2^2 k_1$, $k_2^2 k_1 + k_2$.

Ne segue le $(19)_a$ e $(19)_b$ si possono sostituire colle

$$|F(xy)| < k_5 \frac{1}{t_1 + 1} M_1 [\,|x| + |y|\,]^{t_1+1}, \qquad (19)'_a$$

$$\left[\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\right] < k_5 \left\{ M_1 [\,|x| + |y|\,]^{t_1} + \frac{1}{t'_1 + 1} M'_1 [\,|x| + |y|\,]^{t'_1+1} \right\}. \qquad (19)'_b$$

E similmente $(21)_a$, $(21)_b$ si può sostituire, ove si supponga $M_2 = \frac{1}{t_1 + 1} M_1$ $t_2 = t_1 + 1$, colle

$$|\zeta(xy)| < k_5 \frac{1}{t'_1 + 1} M_1 [\,|x| + |y|\,]^{t_1+1}, \qquad (21)'_a$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|\right] < k_5 \left\{ M_1 [\,|x| + |y|\,]^{t_1} + \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{t'_1 + 1} M'_1 [\,|x| + |y|\,]^{t'+1} + M'_2 [\,|x| + |y|\,]^{t'_2} \right\}.\end{array}\right\} \qquad (21)'_b$$

E se si suppone inoltre $M'_2 = \frac{M'_1}{t'_1 + 1}$, $t'_2 = t'_1 + 1$, a $(21)_b$ si può sostituire

$$\left[\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|\right] < k_5 \left\{ M_1 [\,|x| + |y|\,]^{t_1} + \frac{1}{t'_1 + 1} M'_1 [\,|x| + |y|\,]^{t'_1+1} \right\}. \qquad (21)''_b$$

Osservazione III. Se non si facessero le ipotesi $(23)_d$ e $(25)_b$ i precedenti ragionamenti varrebbero ancora, con questa sola modificazione che potrebbero venire a mancare le derivate di F_1, F_2, e di h_1, h_2; e quindi in particolare non varrebbero più le $(37)_b$, nè le $(38)_b$. Resterebbe tuttavia vero che $h_1(x)$, $h_2(x)$ è l'unica soluzione di (29) che soddisfaccia ad una limitazione della forma $(37)_a$; e che parimenti le $\zeta_1(xy)$, $\zeta_2(xy)$ sono le sole soluzioni del nostro problema che soddisfacciano ad una limitazione della forma $(38)_a$; e solo si dovrebbe interpretare l'affermazione che $\zeta_1(xy)$, $\zeta_2(xy)$ soddisfanno alle equazioni (22) nel senso già spiegato nell'osservazione fatta alla fine del n. 4.

6. *Problema III.* Ci occorre nel seguito una generalizzazione del problema II. Si abbia un sistema di equazioni del tipo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \lambda_1(xy)\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = \sum_1^n{}_j\, c_{1j}(xy)\,\zeta_j(xy) + f_1(xy)\\
&\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \lambda_2(xy)\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = \sum_1^n{}_j\, c_{2j}(xy)\,\zeta_j(xy) + f_2(xy)\\
&\frac{\partial \zeta_i}{\partial x} + \lambda_i(xy)\frac{\partial \zeta_i}{\partial y} = \sum_1^n{}_j\, c_{ij}(xy)\,\zeta_j(xy) + f_i(xy) \qquad (i = 3\ldots n)
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

dove supponiamo che nel campo $|x| + |y| < \alpha_1$ le $\lambda_j(xy)$, $f_j(xy)$, $c_{jk}(xy)$ siano finite e continue colle loro derivate prime: ed anzi che siano soddisfatte le limitazioni seguenti

$$|\lambda_j(xy)| \leqq q_2 < 1 \qquad (41)_a$$

$$\left[\left|\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial \lambda_j}{\partial y}\right|\right] < m_1 \qquad (41)_b$$

$$|f_j(xy)| < M_4 \qquad (j, k = 1\ldots n) \qquad (41)_c$$

$$\left[\left|\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial f_j}{\partial y}\right|\right] < M'_4 \qquad (41)_d$$

$$\left[|c_{jk}|, \quad \left|\frac{\partial c_{jk}}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial c_{jk}}{\partial y}\right|\right] < m_4. \qquad (41)_e$$

Ci proponiamo di determinare delle funzioni soluzioni delle precedenti equazioni e tali che

$$\left.\begin{aligned}
&a_1(x)\,\zeta_1(x0) + \zeta_2(x0) = \sum_3^n{}_i\, l_i(x)\,\zeta_i(x0) + \varphi_1(x)\\
&\zeta_1(0x) + a_2(x)\,\zeta_2(0x) = \varphi_2(x)\\
&\zeta_i(0x) = \varphi_i(x); \qquad (i = 3\ldots n).
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

In queste condizioni supponiamo che le $a_1(x)$, $a_2(x)$, $l_i(x)$, $\varphi_j(x)$ siano funzioni finite e continue, ed ingrandendo, ove occorra, M_4 ed m_4 supponiamo precisamente che sia

$$|\varphi_j(x)| < M_4 |x| \qquad (43)_a$$

$$|\varphi'_j(x)| < M''_4 \qquad (j = 1\ldots n) \qquad (43)_b$$

$$|a_1(x)\,a_2(y)| < m_2 \quad \text{con} \quad m_2^2 q_2 < 1 \tag{43$_c$}$$

$$[\,|a_1(x)|,\ \ |a'_1(x)|,\ \ |a_2(x)|,\ \ |a'_2(x)|\,] < m_3 \tag{43$_d$}$$

$$[\,|l_i(x)|,\ \ |l'_i(x)|\,] < m_4 \qquad (i = 3\ldots n). \tag{43$_e$}$$

Per non complicare alcune disuguaglianze che seguono supporremo che sia $M_4 \leq M''_4 \leq M'_4$: tale ipotesi è sempre legittima, poichè basterà, ove non fosse soddisfatta, ingrandire M''_4 e M'_4.

Infine supporremo che si abbia la disuguaglianza

$$a_1(0)\,a_2(0) \neq 1. \tag{44}$$

Per risolvere questo problema procederemo per approssimazioni successive: determineremo perciò successivamente le soluzioni dei sistemi

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_{10}}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \zeta_{10}}{\partial y} = f_1(x\,y)\\
&\frac{\partial \zeta_{20}}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \zeta_{20}}{\partial x} = f_2(x\,y)\\
&\frac{\partial \zeta_{i0}}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial \zeta_{i0}}{\partial y} = f_i(x\,y) \qquad (i = 3\ldots n)
\end{aligned}\right\} \tag{45$_0$}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_{1t}}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \zeta_{1t}}{\partial y} = \sum_1^n{}_j\, c_{1j}\,\zeta_{jt-1} \equiv f_{1t}(x\,y)\\
&\frac{\partial \zeta_{2t}}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \zeta_{2t}}{\partial x} = \sum_1^n{}_j\, c_{2j}\,\zeta_{jt-1} \equiv f_{2t}(x\,y)\\
&\frac{\partial \zeta_{it}}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial \zeta_{it}}{\partial y} = \sum_1^n{}_j\, c_{ij}\,\zeta_{it} \equiv f_{it}(x\,y) \qquad (i = 3\ldots n)
\end{aligned}\right\} \tag{45$_t$}$$

che soddisfanno alle condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned}
a_1(x)\,\zeta_{10}(x\,0) + \zeta_{20}(x\,0) &= \varphi_1(x)\\
\zeta_{10}(0\,x) + a_2(x)\,\zeta_{20}(0\,x) &= \varphi_2(x)\\
\zeta_{i0}(0\,x) &= \varphi_i(x) \qquad (i = 3\ldots n)
\end{aligned}\right\} \tag{46$_0$}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1(x)\,\zeta_{1t}(x\,0) + \zeta_{2t}(x\,0) &= \sum_3^n{}_i\, l_i(x)\,\zeta_{it-1}(x\,0) \equiv \varphi_{1t}(x)\\
\zeta_{1t}(0\,x) + a_2(x)\,\zeta_{2t}(0\,x) &= 0\\
\zeta_{it}(0\,x) &= 0 \qquad (i = 3\ldots n).
\end{aligned}\right\} \tag{46$_t$}$$

La determinazione di questi varii sistemi di funzioni consta della risoluzione del problema di CAUCHY per quanto riguarda le ζ_{it}, della risoluzione di un problema del tipo del problema II per quanto riguarda la determinazione delle ζ_{1t}, ζ_{2t}: e per le limitazioni (41), (43), (44) è chiaro che almeno per quanto si riferisce ai coefficienti dei primi membri delle (45), (46) a tutti questi sistemi si possono applicare le considerazioni dei numeri precedenti: onde occorrerà soltanto mostrare che anche i termini noti delle (45), (46) soddisfanno alle condizioni imposte nel n. 5, e che le serie $\sum_0^\infty {}_t\, \zeta_{it}$ sono convergenti e rappresentano veramente le cercate soluzioni di (40), (42).

Ci limiteremo a considerare il campo

$$|x| + |y| < \alpha_2 \tag{47}$$

dove α_2 è il minore dei numeri 1, α_1, $\frac{-1}{2m_1}\log(m_2^2 q_2)$.

In questo campo per le formole $(38)_a$, $(38)_b$, $(21)'_a$, $(21)'_b$ (pag. 303-304), avremo subito, rammentando che $M_4 \leq M''_4$,

$$\left.\begin{aligned} & |\zeta_{j0}| < k_5 M_4 [|x| + |y|] \qquad\qquad (j = 1 \dots n) \\ & \left[\left|\frac{\partial \zeta_{j0}}{\partial x}\right|, \ \left|\frac{\partial \zeta_{j0}}{\partial y}\right|\right] < k_5 \left\{ M_4 + M'_4 [|x| + |y|] + M''_4 \right\} < \\ & \qquad < k_5 \left\{ 2M''_4 + M'_4 [|x| + |y|] \right\}. \end{aligned}\right\} \tag*{$(48)_0$}$$

Ponendo quindi

$$k_6 = m_4 n \, (> m_4(n-2)), \tag{49}$$

avremo, ricordando che in (47) $\alpha_2 < 1$

$$\left.\begin{aligned} & |f_{j1}| < k_6 k_5 M_4 [|x| + |y|] < k_6 k_5 M_4 \\ & |\varphi_{11}| < k_6 k_5 M_4 |x| \\ & \left[\left|\frac{\partial f_{j1}}{\partial x}\right|, \ \left|\frac{\partial f_{j1}}{\partial y}\right|\right] < k_6 \left\{ k_5 M_4 [|x| + |y|] + 2k_5 M''_4 + k_5 M'_4 [|x| + |y|] \right\} < \\ & \qquad < k_6 k_5 (3M''_4 + M'_4 [|x| + |y|]) \\ & |\varphi'_{11}| < k_6 \left\{ k_5 M_4 |x| + 2k_5 M''_4 + k_5 M'_4 |x| \right\} < \\ & \qquad < k_6 k_5 (3M''_4 + M'_4 |x|). \end{aligned}\right\} \tag*{$(50)_1$}$$

Da queste disuguaglianze di nuovo per $(38)_a$, $(38)_b$, $(21)'_a$, $(21)'_b$, avremo

$$\left.\begin{aligned}
&|\zeta_{j1}| < k_6 k_5^2 M_4 [|x| + |y|] \qquad\qquad (j = 1 \dots n)\\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{j1}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_{j1}}{\partial y}\right|\right] < k_5 \left\{ k_6 k_5 M_4 + 6 k_6 k_5 M''_4 + 2 k_6 k_5 M'_4 [|x| + |y|] \right\} < \\
&\qquad < k_6 k_5^2 (7 M''_4 + 2 M'_4 [|x| + |y|]).
\end{aligned}\right\} \quad (48)_1$$

Ma accanto a queste, che valgono per tutti i valori di j, conforme all'osservazione II del numero precedente, se ne possono dedurre altre più restrittive per le ζ_i, con $i \geq 3$, poichè tali funzioni non sono che le F_i del n. 4 relative alla i-esima delle (45), e ad esse si possono quindi applicare le formule $(19)'_a$, $(19)'_b$ (pag. 304). Si avrà quindi, usufruendo della prima disuguaglianza nella prima delle $(50)_1$, della seconda disuguaglianza nella terza delle $(50)_1$, e rammentando che $M_4 \leq M''_4 \leq M'_4$,

$$\left.\begin{aligned}
&|\zeta_{i1}| < \frac{1}{2} k_6 k_5^2 M_4 [|x| + |y|]^2 \qquad\qquad (i = 3 \dots n)\\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{i1}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_{i1}}{\partial y}\right|\right] < k_6 k_5^2 [|x| + |y|] \left\{ M_4 + 3 M''_4 + M'_4 \right\} < \\
&\qquad < 5 k_6 k_5^2 M'_4 [|x| + |y|].
\end{aligned}\right\} \quad (48)'_1$$

Ricordiamo che φ_{12} è composta solo mediante le ζ_{i1} con $i \geq 3$; dedurremo dalle $(48)_1$ e $(48)'_1$:

$$\left.\begin{aligned}
&|f_{j2}| < k_6^2 k_5^2 M_4 [|x| + |y|]\\
&|\varphi_{12}| < \frac{1}{2} k_6^2 k_5^2 M_4 |x|^2\\
&\left[\left|\frac{\partial f_j}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f_j}{\partial y}\right|\right] < k_6^2 k_5^2 \left\{ M_4 [|x| + |y|] + 7 M''_4 + 2 M'_4 [|x| + |y|] \right\} < \\
&\qquad < 10 k_6^2 k_5^2 M'_4\\
&|\varphi'_{12}| < k_6^2 k_5^2 |x| \left(\frac{1}{2} M_4 + 5 M'_4\right) < 6 k_6^2 k_5^2 M'_4 |x| < \\
&\qquad < 10 k_6^2 k_5^2 M'_4 |x|.
\end{aligned}\right\} \quad (50)_2$$

Partendo da queste formule $(50)_2$ si deducono agevolmente per via ricorrente le seguenti disuguaglianze

$$\left.\begin{aligned}
&|f_{j,2r}| && < \frac{1}{r!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r}\, M_4\, [\,|x| + |y|\,]^r \\
&|\varphi_{1,2r}| && < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r}\, M_4\, |x|^{r+1} \\
&\left[\left|\frac{\partial f_{j,2r}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial f_{j,2r}}{\partial y}\right|\right] && < \frac{4r+6}{(r-1)!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r}\, M'_4\, [\,|x| + |y|\,]^{r-1} \\
&|\varphi'_{1,2r}| && < \frac{4r+6}{r!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r}\, M'_4\, |x|^r
\end{aligned}\right\} \quad (50)_{2r}$$

$$\left.\begin{aligned}
&|\zeta_{j,2r}| && < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r+1}\, M_4\, [\,|x| + |y|\,]^{r+1} \\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{j,2r}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_{j,2r}}{\partial y}\right|\right] && < \frac{4r+7}{r!}\, k_6^{2r}\, k_5^{2r+1}\, M'_4\, [\,|x| + |y|\,]^r
\end{aligned}\right\} \quad (48)_{2r}$$

$$\left.\begin{aligned}
&|f_{j,2r+1}| && < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M_4\, [\,|x| + |y|\,]^{r+1} < \\
& && < \frac{1}{r!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M_4\, [\,|x| + |y|\,]^r \\
&|\varphi_{1,2r+1}| && < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M_4\, |x|^{r+1} \\
&\left[\left|\frac{\partial f_{j,2r+1}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial f_{j,2r+1}}{\partial y}\right|\right] && < \frac{4r+8}{r!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M'_4\, [\,|x| + |y|\,]^r < \\
& && < \frac{4r+8}{(r-1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M'_4\, [\,|x| + |y|\,]^{r-1} \\
&|\varphi'_{1,2r+1}| && < \frac{4r+8}{r!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+1}\, M'_4\, |x|^r
\end{aligned}\right\} \quad (50)_{2r+1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&|\zeta_{j,2r+1}| && < \frac{1}{(r+1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+2}\, M_4\, [\,|x| + |y|\,]^{r+1} \\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{j,2r+1}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_{j,2r+1}}{\partial y}\right|\right] && < \frac{4r+9}{r!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+2}\, M'_4\, [\,|x| + |y\,]^r
\end{aligned}\right\} \quad (48)_{2r+1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&|\zeta_{i,2r+1}| && < \frac{1}{(r+2)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+2}\, M_4\, [\,|x| + |y|\,]^{r+2} \\
&\left[\left|\frac{\partial \zeta_{i,2r+1}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \zeta_{i,2r+1}}{\partial y}\right|\right] && < \frac{4r+9}{(r+1)!}\, k_6^{2r+1}\, k_5^{2r+2}\, M'_4\, [\,|x| + |y|\,]^{r+1}
\end{aligned}\right\} \quad (48)'_{2r+1}$$

$$(j = 1,\ 2, \ldots\ n; \quad i = 3\,,\ 4\,, \ldots\ n).$$

Invero le $(48)_{2r}$ seguono dalle $(50)_{2r}$ mediante le $(38)_a$ e $(38)'_b$ e $(21)'_a$, $(21)''_b$; dalle $(48)_{2r}$ seguono le $(50)_{2r+1}$; e da queste $(50)_{2r+1}$, considerando nella prima e terza formola la seconda disuguaglianza, seguono di nuovo per $(38)_a$, $(38)'_b$, $(21)'_a$, $(21)''_b$ le $(48)_{2r+1}$; mentre le $(48)'_{2r+1}$ seguono dalla prima disuguaglianza della prima e terza formula di $(50)_{2r+1}$ mediante le formule $(19)'_a$, $(19)'_b$. Ed infine, ricordando che le $\varphi_{1,2(r+1)}$ sono formate mediante le sole $\zeta_{i,2r+1}$ con $i > 2$ dalle $(48)_{2r+1}$, $(48)'_{2r+1}$ seguono per le $f_{j,2(r+1)}$ $\varphi_{j,2(r+1)}$ formule pienamente analoghe alle $(50)_{2r}$ in cui solo r sia mutato in $r+1$. Siccome ora le $(50)_{2r}$ coincidono colle $(50)_2$ per $r=1$, segue che le formule (50) (48) sono vere qualunque sia r.

Le formule (48) bastano evidentemente a dimostrare la convergenza uniforme ed assoluta delle serie $\sum_t^{\infty}{}_0\, \zeta_{jt}(x\,y)$ e delle serie delle loro derivate in tutto il campo (47) in cui esse sono state dimostrate valide: le loro somme $\zeta_j(x\,y)$ rappresentano quindi una soluzione del problema proposto. Si hanno inoltre per queste soluzioni le disuguaglianze

$$\left.\begin{aligned} |\zeta_j(x\,y)| &< k_5(1+k_6k_5)M_4\left[e^{k_5^2k_6^2[|x|+|y|]}-1\right]< \\ &< k_7 M_4[|x|+|y|] \\ \left[\left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial y}\right|\right] &< k_8 M''_4 + k_9 M'_4[|x|+|y|] \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

dove k_7, k_8, k_9 sono numeri che, come k_6 e k_5, dipenderanno *soltanto* dai numeri q_2, m_1, m_2, m_3, m_4, n: si può, ricordando che $[|x|+|y|]<1$, porre

$$k_7 = \frac{1}{k_6^2k_5}(1+k_6k_5)e^{k_6^2k_5^2}; \quad k_8 = k_5(2+7k_6k_5);$$

$$k_9 = k_5\left\{[7+9k_6k_5+4k_6^2k_5^2+4k_6^3k_5^3]e^{k_6^2k_5^2}+1+2k_5k_6\right\}.$$

Seguendo un noto modo di ragionare gli stessi procedimenti che ora ci hanno permesso di dimostrare la convergenza delle successive approssimazioni ci dimostrerebbero che non esiste altra soluzione del problema proposto.

Osservazione. Anche qui è opportuno notare che, ove si togliessero le ipotesi $(41)_d$, $(43)_b$, $(43)_e$ ed anche la $(41)_e$ per quanto riguarda le $\frac{\partial c_{jk}}{\partial x}$, $\frac{\partial c_{jk}}{\partial y}$, si potrebbe ancora costruire le funzioni ζ_{jt} successive; però per esse non sarebbe sicura l'esistenza delle derivate, ma si saprebbe che soddisfanno alle equazioni (42) nel senso spiegato alla fine del n. 4 e nell'osservazione III del n. 5. Varrebbe però la prima di tutte le disuguaglianze $(48)_t$, le due prime di tutte le disuguaglianze (50); onde seguirebbe ancora che le serie $\sum\limits_0^\infty \zeta_{it}$ sono convergenti assolutamente ed uniformemente in (47) e le loro somme soddisfanno alla prima delle (51) e, sempre nel senso spiegato alla fine del n. 4, alle equazioni (40) e (42).

§ II.

1. *Enunciato del problema. Ipotesi.* Sia l'equazione

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0 \tag{1}$$

e se ne cerchi la soluzione che su due curve γ_1 e γ_2 che si incontrano in un punto O si riduca a funzioni assegnate, che in O prendano lo stesso valore (*). Tali condizioni determinano insieme con (1) i valori di p, q, r, s, t in O: od in altri termini determinano l'elemento di secondo ordine nel punto O della superficie da costruirsi: e quindi anche in particolare le direzioni delle caratteristiche della superficie nel punto O. Supporremo che tali direzioni siano distinte. Ci proponiamo di mostrare che se il birapporto delle direzioni delle caratteristiche e delle direzioni di γ_1 e γ_2 in O è in modulo $\neq 1$, il problema di costruire detta superficie è certo risolubile in un intorno sufficientemente piccolo del punto O, e che la soluzione è unica.

Ammetteremo che nel campo di valori di $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ che consideriamo la $F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$ abbia le derivate dei primi quattro ordini finite e continue; ammetteremo inoltre che le funzioni che determinano le curve γ_1 e γ_2 ed i valori di z su di esse abbiano le derivate dei primi sei ordini finite e continue (**). Si vede facilmente col calcolo effettivo che, mediante i dati iniziali, la equazione (1), e le equazioni che se ne deducono facendone le derivate totali dei primi 4 ordini rapporto a x od a y, tenendo conto che il birapporto delle tangenti in O a γ_1 e γ_2 e delle direzioni caratteristiche è $\neq 1$ (***), si pos-

(*) Geometricamente: la superficie soluzione che passa per due curve gobbe assegnate le quali passano per uno stesso punto.

(**) Le restrizioni imposte da queste condizioni si possono certo ridurre di qualche cosa, però una tale discussione ci porterebbe a troppe lunghezze.

(***) Per eseguire un tale calcolo è sufficiente sapere che detto birapporto non sia radice seconda, terza, quarta o quinta dell'unità.

sono trovare i valori che debbono assumere in O le derivate dei primi 6 ordini della funzione z richiesta.

Ciò posto, con un conveniente cambiamento delle variabili e della funzione incognita possiamo, secondo metodi noti, fare in modo che γ_1 e γ_2 coincidano cogli assi, e che si chieda che la soluzione si annulli sugli assi, che il suo elemento corrispondente all'origine sia l'elemento

$$x = y = z = p = q = r = s = t = 0\,;$$

ed anzi che pure le derivate terze e quarte della z siano nulle nell'origine.

Se rappresentiamo ancora con $x\,y\,z$ le nuove variabili e la nuova incognita, con (1) l'equazione cui deve soddisfare la z, ciò equivarrà a supporre che per

$$x = y = z = p = q = r = s = t = 0 \tag{2}$$

la funzione F e le sue derivate parziali prime e seconde rapporto a x ed y si annullino. Grazie al fatto che le equazioni di γ_1 e γ_2 ammettono le derivate dei primi 6 ordini, per F varranno ancora le ipotesi fatte da principio: per precisarle maggiormente noi supporremo che nel campo

$$[\,|x|,\ |y|,\ |z|,\ |p|,\ |q|,\ |r|,\ |s|,\ |t|\,] < \alpha \tag{3}$$

esistano le derivate dei primi 4 ordini di F e siano finite e continue.

2. *Continuazione.* Indicheremo con $f^{(0)}$ il valore che una funzione $f(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$ prende nell'elemento (2).

Abbiamo supposto che il birapporto delle tangenti alle caratteristiche e degli assi in (2) sia in modulo $\neq 1$: scambiando eventualmente le due caratteristiche possiamo supporre che sia < 1. Ma tale birapporto è dato dal rapporto delle due radici $\xi_1(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$, $\xi_2(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$ dell'equazione

$$\frac{\partial F}{\partial r}\,\xi^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\,\xi + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Supporremo quindi $\left|\dfrac{\xi_1^{(0)}}{\xi_2^{(0)}}\right| < 1$. Dico di più che, facendo al più un conveniente cambiamento di variabili x ed y, si può supporre $|\xi_1^{(0)}| < 1$, $|\xi_2^{(0)}| > 1$. Invero se così già non fosse basta porre

$$\text{se } |\xi_1^{(0)}| \neq 0 \quad |\xi_2^{(0)}| \neq \infty, \qquad x' = \sqrt{|\xi_1^{(0)}|}\,x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{|\xi_2^{(0)}|}}\,y,$$

$$\text{se } \xi_1^{(0)} = 0 \quad |\xi_2^{(0)}| < 1, \qquad x' = x, \qquad y' = \frac{1}{|\xi_2^{(0)}|^2}\,y,$$

$$\text{se } |\xi_1^{(0)}| > 1 \quad |\xi_2^{(0)}| = \infty, \qquad x' = |\xi_1^{(0)}|^2\,x, \quad y' = y.$$

Se quindi poniamo

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) &= \xi_1(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)\\ \lambda_2(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) &\doteq \frac{1}{\xi_2(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)}\ (^*)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

saranno λ_1 e λ_2 funzioni formate colle derivate prime di F, e quindi finite e continue colle loro derivate dei primi tre ordini (**); entrambe inferiori in modulo ad 1 nell'elemento (2) e quindi pure in un intorno conveniente di esso.

Si noti ancora che dalle (5) segue l'identità

$$\frac{\partial F}{\partial r}\xi^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\xi + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{1}{H}(\xi - \lambda_1)(\lambda_2\xi - 1); \tag{6}$$

dove $H(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)$ è una funzione finita e continua insieme colle derivate dei primi tre ordini (***).

Conchiudendo potremo dunque porci nelle seguenti ipotesi:

L'equazione

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0 \tag{1}$$

(*) Ove fosse $\xi_2 = \infty$, si porrà $\lambda_2 = 0$.

(**) Si osservi che la derivata parziale di $\lambda_1 \equiv \xi_1$ rapporto ad una qualunque ω delle quantità $x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t$ è data, per (4), da $-\dfrac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\omega}\xi_1^2 - \dfrac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial\omega}\xi_1 + \dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial\omega}}{2\dfrac{\partial F}{\partial r}\xi_1 - \dfrac{\partial F}{\partial s}}$; ora il denominatore di questa equazione è certo $\neq 0$ in (2) perchè ξ_1 non è radice doppia, e il numeratore è limitato perchè $|\xi_1| < 1$: onde segue che le derivate parziali prime sono certo finite nell'elemento (2) e quindi in un intorno di esso. Analogamente si ragiona per le derivate seconde e terze di λ_1 e per le derivate di λ_2.

(***) Devesi porre $H = \dfrac{\lambda_2}{\dfrac{\partial F}{\partial r}} = \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial s} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - 4\dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial F}{\partial t}}}{2\dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial F}{\partial t}}$. Da tale espressione di H risulta che H è sempre finita e continua insieme colle sue derivate dei primi 3 ordini, fatta eccezione al più per i punti in cui fosse $\dfrac{\partial F}{\partial r} = 0$ oppure $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$. In tali punti però dall'identità (6) medesima risulta che deve essere $H = \dfrac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial s}}$ od in altri termini che nella precedente espressione devesi scegliere il segno — davanti al radicale: e poichè (4) ha radici semplici, dove sia $\dfrac{\partial F}{\partial r} = 0$ oppure $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ sarà $\dfrac{\partial F}{\partial s} \neq 0$ onde ancora H sarà finito: e tali saranno pure le sue derivate.

è tale che, se si prende α sufficientemente piccolo, nel campo

$$[|x|, |y|, |z|, |p|, |q|, |r|, |s|, |t|] \leqq \alpha \tag{3}$$

sono soddisfatte le condizioni:

1.° F è finita e continua insieme colle sue derivate dei primi 4 ordini.

2.° F si annulla insieme colle derivate parziali dei primi due ordini rapporto a x ed y nell'elemento (2).

3.° Si ha identicamente

$$\frac{\partial F}{\partial r}\xi^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\xi + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{1}{H}(\xi - \lambda_1)(\lambda_2 \xi - 1) \tag{6}$$

dove λ_1 e λ_2 sono funzioni finite e continue colle loro derivate dei primi tre ordini in (3) ed ivi soddisfanno una limitazione della forma

$$[|\lambda_1|, |\lambda_2|] \leqq q < 1, \tag{7}$$

e similmente H è finita e continua insieme colle derivate dei primi tre ordini in (3).

In queste condizioni mostreremo l'esistenza di una soluzione di (1) *nulla sugli assi e che ammette le derivate dei primi cinque ordini.*

3. *Trasformazione del problema.* Consideriamo 3 numeri λ_3, λ_4, λ_5 diversi dai valori che $\xi_1 \equiv \lambda_1$ prende nel campo (3) e in modulo minori di 1: supponiamo anzi, ingrandendo, ove occorra, il numero q, che sia in (3)

$$[|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|, |\lambda_5|] \leqq q < 1; \tag{8}$$

e sia m un numero tale che le differenze $\lambda_1 - \lambda_3$, $\lambda_1 - \lambda_4$, $\lambda_1 - \lambda_5$, $\lambda_3 - \lambda_4$, $\lambda_3 - \lambda_5$, $\lambda_4 - \lambda_5$ e $\lambda_1\lambda_2 - 1$, $\lambda_3\lambda_2 - 1$, $\lambda_4\lambda_2 - 1$, $\lambda_5\lambda_2 - 1$ non divengano mai in modulo $< m$.

Operiamo su (1) colle operazioni $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_3\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_4\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_5\frac{\partial}{\partial y}$ ponendo, come è l'uso, $p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$. Otterremo che insieme con (1) deve essere soddisfatta l'equazione

$$A_0 p_{50} + A_1 p_{41} + A_2 p_{32} + A_3 p_{23} + A_4 p_{14} + A_5 p_{05} = F_1(x\, y\, z\, p_{10}\, p_{01} \ldots p_{04}) \tag{9}$$

dove F_1 è una funzione delle variabili da cui dipende finita e continua colle sue derivate parziali prime, finchè si resta nel campo (3) e le $p_{i,3-i}$, $p_{i,4-i}$ sono finite; e le A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sono funzioni di $x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{02}$ soltanto, le quali ammettono le derivate parziali dei primi 3 ordini e soddisfanno per (6) l'identità

$$\left.\begin{aligned} &A_0\,\xi^5 - A_1\,\xi^4 + A_2\,\xi^3 - A_3\,\xi^2 + A_4\,\xi - A_5 \equiv \\ &\qquad \equiv \frac{1}{H}(\xi-\lambda_1)(\lambda_2\,\xi - 1)(\xi-\lambda_3)(\xi-\lambda_4)(\xi-\lambda_5). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

E si dovrà cercare una soluzione di (9) la quale soddisfaccia alle condizioni

$$z\,(x\,0) = 0, \quad z\,(0\,x) = 0, \tag{11}$$

sia nulla colle sue derivate dei primi tre ordini nell'origine

$$(p_{10})_{\substack{x=0\\y=0}} = (p_{01})_{\substack{x=0\\y=0}} = \cdots = (p_{03})_{\substack{x=0\\y=0}} = 0; \tag{12}$$

ed infine soddisfaccia pure alle uguaglianze che si ottengono scrivendo ad esempio che le derivate totali seconde di (1) rapporto ad x ed y si annullano sull'asse delle y. Queste ultime condizioni assumeranno la forma

$$\left.\begin{aligned} &[B_0\,p_{40} + B_1\,p_{31} + B_2\,p_{22}]_{x=0} = [\Theta_1\,(x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{03})]_{x=0} \\ &[B_0\,p_{31} + B_1\,p_{22} + B_2\,p_{13}]_{x=0} = [\Theta_2\,(x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{03})]_{x=0} \\ &[B_0\,p_{22} + B_1\,p_{13} + B_2\,p_{04}]_{x=0} = [\Theta_3\,(x\,y\,z\,p_{10}\ldots p_{03})]_{x=0} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

dove Θ_1, Θ_2, Θ_3 sono quantità formate colle derivate prime e seconde di F, che ammettono quindi derivate dei primi due ordini finite e continue in (3) e sono nulle nell'elemento (2), (12); ed è $B_i \equiv \dfrac{\partial F}{\partial p_{i2-i}}$, onde è identicamente per (6):

$$B_0\,\xi^2 - B_1\,\xi + B_2 \equiv \frac{1}{H}(\xi-\lambda_1)(\lambda_2\,\xi - 1). \tag{14}$$

Inversamente ogni soluzione di (9) che soddisfaccia a (11), (12) e (13) è una soluzione di (1) che si annulla sugli assi (*).

(*) Invero se z è una soluzione di (9), (11), (12), (13), portato il suo valore in F, si avrà $F(x\,y\,z\ldots p_{02}) = \varphi\,(x\,y)$, dove per (9) è $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_3\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_4\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_5\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\varphi\,(x\,y) = 0$, e per (13) è $\dfrac{\partial^2\varphi\,(0\,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\varphi\,(0\,y)}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2\varphi\,(0\,y)}{\partial y^2} = 0$, ed inoltre nell'origine $\varphi\,(x\,y)$ e le sue derivate prime e seconde sono per (12) nulle. Segue che è identicamente $\varphi\,(0\,y) = \dfrac{\partial\varphi\,(0\,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2\varphi\,(0\,y)}{\partial x^2} = 0$; ed, essendo $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_3\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_4\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_5\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\varphi\,(x\,y) = 0$ un'equazione lineare a coefficienti costanti di terzo ordine che non ha l'asse delle y come caratteristica, si deduce che identicamente è $\varphi\,(x\,y) = 0$.

4. *Studio di un sistema ausiliare di equazioni.* Risolveremo il problema precedente relativo alle equazioni (9), (11), (12), (13) col metodo delle successive approssimazioni.

Perciò cominceremo collo studiare il caso in cui le funzioni A_i $(i = 0 \ldots 5)$ $B_h (h = 0, 1, 2)$, F_1, Θ_1, Θ_2, Θ_3, H sono tutte funzioni delle sole variabili indipendenti x ed y: le indicheremo allora colle corrispondenti lettere minuscole. Inoltre porremo

$$z_1 = p_{40}, \quad z_2 = p_{31}, \quad z_3 = p_{22}, \quad z_4 = p_{13}, \quad z_5 = p_{04}, \tag{15}$$

e prenderemo queste come nuove incognite. Con ciò ci ridurremo a studiare il sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&a_0(xy)\frac{\partial z_1}{\partial x} + a_1(xy)\frac{\partial z_1}{\partial y} + a_2(xy)\frac{\partial z_2}{\partial y} + a_3(xy)\frac{\partial z_3}{\partial y} + a_4(xy)\frac{\partial z_4}{\partial y} + a_5(xy)\frac{\partial z_5}{\partial y} = f(xy)\\
&\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial z_2}{\partial x}\\
&\frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{\partial z_3}{\partial x}\\
&\frac{\partial z_3}{\partial y} = \frac{\partial z_4}{\partial x}\\
&\frac{\partial z_4}{\partial y} = \frac{\partial z_5}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

che dovremo integrare colle condizioni iniziali

$$\left.\begin{aligned}
&z_1(x0) = 0 \qquad\qquad z_4(0y) = 0\\
&b_0(y) z_1(0y) + b_1(y) z_2(0y) + b_2(y) z_3(0y) = \theta_1(y)\\
&b_0(y) z_2(0y) + b_1(y) z_3(0y) + b_2(y) z_4(0y) = \theta_2(y)\\
&b_0(y) z_3(0y) + b_1(y) z_4(0y) + b_2(y) z_5(0y) = \theta_3(y).
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ed inversamente quando sia determinato un sistema di soluzioni di queste equazioni (16), (17), per le ultime 4 equazioni (16) esso consterà delle derivate quarte di una stessa funzione z; onde, ponendo

$$\left.\begin{aligned}
z = &\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int_0^{x_3} z_1(x_4 y)\, dx_4 + \frac{x^3}{6}\int_0^y z_2(0y_1)\, dy_1 +\\
&+ \frac{x^2}{2}\int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} z_3(0y_2)\, dy_2 + x\int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} z_4(0y_3)\, dy_3 +\\
&+ \int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \int_0^{y_2} dy_3 \int_0^{y_3} z_5(0y_4)\, dy_4
\end{aligned}\right\} \text{(18}$$

avremo la soluzione cercata.

Per risolvere (16), (17) fissiamo meglio le ipotesi relative ai coefficienti. In analogia alle (10) e (14) supporremo che sia

$$\left.\begin{array}{l} a_0(xy)\xi^5 - a_1(xy)\xi^4 + a_2(xy)\xi^3 - a_3(xy)\xi^2 + a_4(xy)\xi - a_5(xy) \equiv \\ \equiv \dfrac{1}{h(xy)}(\xi - \lambda_1(xy))(\lambda_2(xy)\xi - 1)(\xi - \lambda_3)(\xi - \lambda_4)(\xi - \lambda_5)\ (*) \end{array}\right\} \tag{19}$$

$$b_0(y)\xi^2 - b_1(y)\xi + b_2(y) \equiv \frac{1}{h(0y)}(\xi - \lambda_1(0y))(\lambda_2(0y)\xi - 1) \tag{20}$$

dove $\lambda_1(xy)$, $\lambda_2(xy)$ sono convenienti funzioni, λ_3, λ_4, λ_5 costanti. Supporremo che per

$$|x| + |y| < \alpha_1, \quad (\alpha_1 < 1), \tag{21}$$

1.° le $\lambda_1(xy)$, $\lambda_2(xy)$ abbiano le derivate finite e continue dei primi due ordini e esistano un numero $q_1 < 1$ ed un m_1 tali che

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_i| \leq q_1 < 1 \\ \left[\left|\dfrac{\partial \lambda_i}{\partial x}\right|, \left|\dfrac{\partial \lambda_i}{\partial y}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 \lambda_i}{\partial x^2}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 \lambda_i}{\partial x \partial y}\right|, \left|\dfrac{\partial^2 \lambda_i}{\partial y^2}\right|\right] < m_1, \end{array} \quad (i = 1, \ldots, 5)\right\} \tag{22}$$

2.° che esista un $m_2 > 0$ tale che

$$[|\lambda_2 \lambda_j - 1|, |\lambda_j - \lambda_i|] > m_2, \qquad (j, i \neq 2), \tag{23$_a$}$$

3.° le funzioni $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$, $f(xy)$ abbiano le derivate prime finite e continue ed esistano dei numeri M_1, M'_1, M''_1 tali che $M_1 \leq M''_1 \leq M'_1$ e che

$$|f(xy)| < M_1 \tag{24$_a$}$$

$$|\theta_i(x)| < M_1 |x| \tag{24$_b$}$$

$$\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right] < M'_1 \tag{24$_c$}$$

$$|\theta'_i(x)| < M''_1. \tag{24$_d$}$$

(*) Si noti che (19) (20) sono dissimmetriche rapporto a λ_1 e λ_2; ciò porta in tutti i calcoli che seguono una maggiore complicazione. Si ristabilirebbe la simmetria, ed anche i calcoli che seguono risulterebbero nell'andamento formale più eleganti e brevi se si ponesse $\frac{1}{\lambda_2}$ in luogo di λ_2: con ciò però si complicherebbero le disuguaglianze che ci occorrono.

4.° la funzione $h(xy)$ abbia le derivate prime e esista un numero ν_1 tale che

$$\left[|h(xy)|, \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| \right] < \nu_1. \qquad (23)_b$$

Facciamo un cambiamento di funzioni incognite ponendo:

$$\left.\begin{aligned}
z_1 &= g_1 \lambda_1^4 \zeta_1 + g_2 \zeta_2 + g_3 \lambda_3^4 \zeta_3 + g_4 \lambda_4^4 \zeta_4 + g_5 \lambda_5^4 \zeta_5 \\
z_2 &= -g_1 \lambda_1^3 \zeta_1 - g_2 \lambda_2 \zeta_2 - g_3 \lambda_3^3 \zeta_3 - g_4 \lambda_4^3 \zeta_4 + g_5 \lambda_5^3 \zeta_5 \\
z_3 &= g_1 \lambda_1^2 \zeta_1 + g_2 \lambda_2^2 \zeta_2 + g_3 \lambda_3^2 \zeta_3 + g_4 \lambda_4^2 \zeta_4 + g_5 \lambda_5^2 \zeta_5 \\
z_4 &= -g_1 \lambda_1 \zeta_1 - g_2 \lambda_2^3 \zeta_2 - g_3 \lambda_3 \zeta_3 - g_4 \lambda_4 \zeta_4 + g_5 \lambda_5 \zeta_5 \\
z_5 &= g_1 \zeta_1 + g_2 \lambda_2^4 \zeta_2 + g_3 \zeta_3 + g_4 \zeta_4 + g_5 \zeta_5
\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

con

$$\left.\begin{aligned}
g_1 &= \frac{1}{(\lambda_1\lambda_2-1)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)} \qquad g_2 = \frac{1}{(1-\lambda_2\lambda_1)(1-\lambda_2\lambda_3)(1-\lambda_2\lambda_4)(1-\lambda_2\lambda_5)} \\
g_3 &= \frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2\lambda_3-1)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_5)} \qquad g_4 = \frac{1}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4\lambda_2-1)(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)} \\
g_5 &= \frac{1}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5\lambda_2-1)(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_4)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Dalle (25) è facile ricavare risolvendo le ζ_i; precisamente esse risulteranno combinazioni lineari delle z_i con coefficienti formati con somme e prodotti delle λ: potremo scrivere simbolicamente tali formule così:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= (\lambda_2 z - 1)(z - \lambda_3)(z - \lambda_4)(z - \lambda_5) \\
\zeta_2 &= (z - \lambda_1)(z - \lambda_3)(z - \lambda_4)(z - \lambda_5) \\
\zeta_3 &= (z - \lambda_1)(\lambda_2 z - 1)(z - \lambda_4)(z - \lambda_5) \\
\zeta_4 &= (z - \lambda_1)(\lambda_2 z - 1)(z - \lambda_3)(z - \lambda_5) \\
\zeta_5 &= (z - \lambda_1)(\lambda_2 z - 1)(z - \lambda_3)(z - \lambda_4)
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

per passare alle espressioni effettive delle ζ_i devonsi sviluppare i prodotti e poi sostituire a z^r le z_{5-r} $(r = 0, 1, \ldots, 4)$.

Ricordando la (19), risulterà subito che le ζ così determinate soddisfanno, grazie a (16), ad un sistema di equazioni della forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \lambda_1(xy)\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = h(xy)\,f(xy) + \sum_1^5{}_j\, c_{1j}(xy)\,\zeta_j \\
&\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \lambda_2(xy)\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = h(xy)\,f(xy) + \sum_1^5{}_j\, c_{2j}(xy)\,\zeta_j \\
&\frac{\partial \zeta_3}{\partial x} + \lambda_3\quad\frac{\partial \zeta_3}{\partial y} = h(xy)\,f(xy) + \sum_1^5 c_{3j}(xy)\,\zeta_j \\
&\frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \lambda_4\quad\frac{\partial \zeta_4}{\partial y} = h(xy)\,f(xy) + \sum_1^5{}_j\, c_{4j}(xy)\,\zeta_j \\
&\frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \lambda_5\quad\frac{\partial \zeta_5}{\partial y} = h(xy)\,f(xy) + \sum_1^5{}_j\, c_{5j}(xy)\,\zeta_j
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

dove le c_{ij} sono funzioni formate con prodotti e somme dei coefficienti di (25), (27) e delle loro derivate prime; e quindi, grazie alle (22), (23)$_a$, (26), tutte inferiori insieme colle loro derivate prime ad un numero m_3 funzione di q_1, m_1, m_2 soltanto:

$$\left[\,|c_{ij}|,\quad \left|\frac{\partial c_{ij}}{\partial x}\right|,\quad \left|\frac{\partial c_{ij}}{\partial y}\right|\,\right] < m_3\,. \tag*{(29)$_a$}$$

E viceversa se si sostituisse in (28) l'effettiva espressione delle c_{ij}, si vedrebbe che ogni soluzione di (28) dà mediante (26) una soluzione di (19).

Le condizioni iniziali (17) che si hanno per le z_i dànno subito in modo analogo, grazie alle (26) e alla identità (20), le seguenti condizioni iniziali per le ζ_i

$$\left.\begin{aligned}
&\left[-\frac{\lambda_1^4(1-\lambda_2\lambda_3)(1-\lambda_2\lambda_4)(1-\lambda_2\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)}\right]_{y=0}\zeta_1(x0) + \zeta_2(x0) = \sum_3^5{}_i\, l_i(x)\zeta_i(x0) \\
&\zeta_1(0x) + \left[-\frac{\lambda_2^4(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)}{(1-\lambda_2\lambda_3)(1-\lambda_2\lambda_4)(1-\lambda_2\lambda_5)}\right]_{\substack{x=0\\ y=x}}\zeta_2(0x) = \varphi_1(x) \\
&\zeta_3(0x) = \varphi_3(x) \\
&\zeta_4(0x) = \varphi_4(x) \\
&\zeta_5(0x) = \varphi_5(x)
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

dove

$$\varphi_i(x) = s_{i1}(x)\,\theta_1(x) + s_{i2}(x)\,\theta_2(x) + s_{i3}\,\theta_3(x) \tag{31}$$

e dove $l_i(x)$, $s_{ij}(x)$ sono funzioni che sono ancora formate con prodotti e somme dei coefficienti (26) delle formule (25) e delle funzioni $h, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ e quindi tutte inferiori insieme colle loro derivate prime ad un numero dipendente solo da q_1, m_1, m_2, ν_1; ingrandendo, ove occorra, il numero m_3 che compare in $(29)_a$ ma indicando con m_3 un numero funzione di q_1, m_1, m_2, ν_1 soltanto, potremo scrivere

$$[\,|l_3(x)|, \quad |l_4(x)|, \quad |l_5(x)|, \quad |l'_3(x)|, \quad |l'_4(x)|, \quad |l'_5(x)|\,] < m_3 \qquad (29)_b$$

$$[\,|s_{ij}(x)|, \quad |s'_{ij}(x)|\,] < m_3 . \qquad (29)_c$$

Il problema così posto per le (28), (30) non è che il problema III del paragrafo precedente; occorre quindi vedere se sono soddisfatte le disuguaglianze là supposte.

Ora (22) e $(29)_a$ $(29)_b$ tengono qui il luogo di $(41)_a$, $(41)_b$, $(41)_e$, $(43)_e$ di quel paragrafo.

Inoltre da (31), $(29)_c$, (23), $(24)_b$, $(24)_d$ segue

$$|\varphi_i(x)| < m_4 M_1 |x|, \quad |\varphi'_i(x)| < m_4 M''_1$$

m_4 essendo un numero dipendente solo, come m_3, da q_1, m_1, m_2, ν_1: potremo supporre $m_4 \geqq 1$, $m_4 \geqq 2\nu_1$, ed allora ponendo $M_2 = m_4 M_1$, $M'_2 = m_4 M'_1$, $M''_2 = m_4 M''_1$ avremo ricordando $(24)_a$, $(24)_c$:

$$|h(xy)\, f(xy)| < M_2 \qquad (32)_a$$

$$|\varphi_i(x)| < M_2 |x| \qquad (32)_b$$

$$\left[\left|\frac{\partial (hf)}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial (hf)}{\partial y}\right|\right] < M'_2 \qquad (32)_c$$

$$|\varphi'_i(x)| < M''_2 \qquad (32)_d$$

le quali hanno l'ufficio delle $(41)_c$, $(41)_d$, $(43)_a$, $(43)_b$ di quel paragrafo: e si può notare che essendo per ipotesi $M_1 \leqq M''_1 \leqq M'_1$, sarà $M_2 \leqq M''_2 \leqq M'_2$ come appunto si chiede per analogia a quanto è supposto in quel luogo.

Non resta quindi da verificare che le proprietà relative alle quantità

$$\left.\begin{aligned} a_1(x) &= \left[-\frac{\lambda_1^4 (1-\lambda_2\lambda_3)(1-\lambda_2\lambda_4)(1-\lambda_2\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)}\right]_{y=0}, \\ a_2(x) &= \left[-\frac{\lambda_2^4 (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)}{(1-\lambda_2\lambda_3)(1-\lambda_2\lambda_4)(1-\lambda_2\lambda_5)}\right]_{\substack{x=0\\ y=x}}. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Intanto evidentemente esse sono derivabili ed inferiori colle loro derivate ad un numero m_5 funzione di q_1, m_1, m_2 soltanto:

$$[\,|a_1(x)|,\ |a_2(x)|,\ |a'_1(x)|,\ |a'_2(x)|\,] < m_5\,; \tag{34}$$

questa disuguaglianza ha l'ufficio di $(43)_a$. Inoltre è

$$|a_1(0)\,a_2(0)| = [\lambda_1^4\lambda_2^4]_{x=y=0} \leqq q_1^8 < 1 \tag{35}$$

che tiene il luogo di (44). Infine da (34) segue

$$|a_1(x)\,a_2(y)| < |a_1(0)\,a_2(0)| + m_5\,[\,|x| + |y|\,] + m_5^2\,|x|\cdot|y|\,.$$

Se quindi chiamiamo $\bar{\alpha}_1$ il minore dei due numeri $\alpha_1\,(<1)$ e $\dfrac{1-q_1^8}{m_5(m_5+1)}$, otterremo per (35) che nel campo

$$|x| + |y| < \bar{\alpha}_1\,, \tag{36}$$

in cui è certo $|x|\,|y| < [\,|x| + |y|\,]$, si ha pure

$$|a_1(x)\,a_2(y)| < 1, \tag{37}$$

la quale vale evidentemente la $(43)_c$.

Ne segue che nel campo (36) sono soddisfatte tutte le disuguaglianze occorrenti per poter applicare i risultati del § I: e quindi, chiamato α_2 il minore dei 3 numeri α_1, $\dfrac{1-q_1^8}{m_5(m_5+1)}$, $-\dfrac{1}{2\,m_1}\log q_1$ nel campo

$$|x| + |y| < \alpha_2 \tag{38}$$

esiste una ed una sola soluzione delle equazioni (28), (30) che in esso soddisfa alle limitazioni

$$\left.\begin{array}{l} |\zeta_i| < k_1 M_2\,[\,|x| + |y|\,] \\ \left[\left|\dfrac{\partial \zeta_i}{\partial x}\right|,\ \left|\dfrac{\partial \zeta_i}{\partial y}\right|\right] < k_2 M''_2 + k_3 M'_2\,[\,|x| + |y|\,] \end{array}\right\} \tag{39}$$

dove k_1 e k_2 sono funzioni di q_1, m_1, m_3, m_4, m_5 soltanto, e cioè soltanto di q_1, m_1, m_2, ν_1. E risalendo per mezzo delle (25) dalle (28), (30) alle (16), (17), e di qui per le (15), (18) alle equivalenti equazioni nell'incognita z, ricordando sempre che i coefficienti di (25) sono limitati insieme colle loro derivate prime in funzione dei numeri q_1, m_1, m_2, noi conchiuderemo che, quando nelle equazioni (9), (11), (12), (13) si immagina che i coefficienti A, B ed i termini noti siano funzioni di x ed y soltanto, e che lo stesso sia per F_1, Θ_1, Θ_2, Θ_3, e che più precisamente siano soddisfatte le disuguaglianze enunciate in principio di questo numero si ha che *esiste una ed una sola soluzione z di tali equazioni; e che per essa valgono le limitazioni*

$$\left.\begin{array}{l}
|z| < k_3 M_1 [|x| + |y|]^5 \\
[|p_{10}|, |p_{01}|] < k_3 M_1 [|x| + |y|]^4 \\
[|p_{20}|, |p_{11}|, |p_{02}|] < k_3 M_1 [|x| + |y|]^3 \\
[|p_{30}|, |p_{21}|, |p_{12}|, |p_{03}|] < k_3 M_1 [|x| + |y|]^2 \\
[|p_{40}|, |p_{31}|, |p_{22}|, |p_{13}|, |p_{04}|] < k_3 M_1 [|x| + |y|] \\
[|p_{50}|, |p_{41}|, \ldots, |p_{05}|] < k_3 \left\{ M''_1 + M'_1 [|x| + |y|] \right\}
\end{array}\right\} \qquad (40)$$

k_3 essendo una funzione di q_1, m_1, m_2, ν_1 soltanto.

Osservazione. Conforme a quanto si è osservato in fine ai n. 4, 5, 6 del § I possiamo notare qui che ove si trascurassero le ipotesi $(24)_c$, $(24)_d$ relative alle derivate prime della f e delle θ ed anche la (22) per quanto riguarda le derivate seconde delle λ_i, si otterrebbe ancora tutto quanto precede, ma le ζ_i non avrebbero più necessariamente le derivate, e mancherebbe la seconda delle (39). Però se per qualunque altra via si sa che le ζ_i hanno le derivate prime, si potrà sempre risalire dalle ζ_i alle z_i e da questa alla z, per cui quindi varranno le (40) toltane al più l'ultima.

5. *Applicazione del metodo delle successive approssimazioni.* L'applicazione allo studio dell'equazione primitiva dei risultati precedenti si compie ora seguendo il metodo delle successive approssimazioni per via affatto analoga a quella da me già seguita nel risolvere il problema di Cauchy (*).

(*) Cfr. la mia Nota già citata: *Sul problema di* Cauchy *per le equazioni a caratteristiche reali e distinte*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVII (1.° sem. 1909) (pag. 331-339). Colgo l'occasione per correggere una svista incorsa nella redazione di essa. La disuguaglianza (25) di pag. 338 deve essere introdotta a pag. 336. Per essa l'ultima delle (15) si può sostituire con $\left[|p_{2,n0}| \ldots |p_{2,0n}|\right] < 2\, \varkappa_n^{(1)} \Phi$: ed allora la seconda delle (16) diventa

$$\left[\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|\right] < 2\, \sigma\, \varkappa_n^{(1)} \Phi$$

e l'ultima delle (17) dà in generale $\left[|p_{i,n0}|, |p_{i,n-1\,1}| \ldots |p_{i,0n}|\right] < 2\, \varkappa_n^{(1)} \Phi$. Con ciò restano giustificati i calcoli successivi.

Completeremo perciò l'enunciato delle ipotesi formulate in principio del n. 3 col supporre che nel campo

$$[\,|x|,\ |y|,\ |z|,\ |p_{10}|, \ldots, |p_{02}|\,] \leqq \alpha,\ [\,|p_{i,3-i}|,\ |p_{i,4-i}|\,] < d_1 \tag{41}$$

oltre ad essere, come già si disse,

$$[\,|\lambda_1|,\ |\lambda_2|,\ |\lambda_3|,\ |\lambda_4|,\ |\lambda_5|\,] \leqq q < 1 \tag{8}$$

$$[\ \lambda_i - \lambda_j|,\ |\lambda_i \lambda_2 - 1|\,] < m \qquad (i, j = 1, 3, 4, 5) \tag{42}$$

sia μ il massimo valore delle funzioni F_1, Θ_1, Θ_2, A_h, B_k, H e delle loro derivate prime. Questa ipotesi non è che l'espressione analitica delle ipotesi 1.ª e 3.ª del n. 2. Ora, poichè λ_i, H sono formate colle derivate prime di F, e quindi le derivate totali prime e seconde di queste funzioni rapporto a x ed y dipendono solo dalle p_{ik} con $i + k \leqq 4$, noi potremo supporre μ tale che nel campo (41) sia

$$\left[\left|\frac{\delta \lambda_i}{\delta x}\right|,\ \left|\frac{\delta \lambda_i}{\delta y}\right|,\ \left|\frac{\delta^2 \lambda_i}{\delta x^2}\right|,\ \left|\frac{\delta^2 \lambda_i}{\delta x\, \delta y}\right|,\ \left|\frac{\delta^2 \lambda_i}{\delta y^2}\right|\right] < \mu \tag{42$_b$}$$

$$\left[\,|H|,\ \left|\frac{\delta H}{\delta x}\right|,\ \left|\frac{\delta H}{\delta y}\right|\right] < \mu. \tag{42$_c$}$$

Inoltre per l'ipotesi 2.ª di quel numero Θ_1, Θ_2, Θ_3 si annullano per valori tutti nulli delle variabili da cui dipendono: conforme a ciò noi potremo trovare un numero M funzione di μ soltanto tale che nel campo (41) si abbia sempre

$$|F_1| < M \tag{43}$$

$$[\,|\Theta_1|_{x=0},\ |\Theta_2|_{x=0}] < \frac{1}{11} M [\,|y| + |z|_{x=0} + |p_{10}|_{x=0} + \cdots + |p_{03}|_{x=0}]. \tag{44}$$

E similmente osservando che le derivate totali di F_1 rapporto a x ed y, $\dfrac{\delta F_1}{\delta x}$, $\dfrac{\delta F_1}{\delta y}$, sono funzioni lineari non omogenee delle derivate di quinto ordine di z aventi per coefficienti derivate parziali di F_1, esisterà un M' dipendente solo da μ tale che nel campo (41), se

$$[\,|p_{50}|,\ |p_{41}|,\ |p_{32}|,\ |p_{23}|,\ |p_{14}|,\ |p_{05}|\,] < d_2 \tag{45}$$

si abbia

$$\left[\left|\frac{\delta F_1}{\delta x}\right|,\ \left|\frac{\delta F_1}{\delta y}\right|\right] < M' (1 + d_2). \tag{46}$$

Inoltre per un'osservazione analoga osservando che le derivate totali di Θ_1, Θ_2, Θ_3 rapporto a y sono lineari nelle derivate quarte di z, potremo supporre M' tanto grande che nel campo (41) sia

$$\left[\left|\frac{\delta\,\Theta_1}{\delta\,y}\right|,\ \left|\frac{\delta\,\Theta_2}{\delta\,y}\right|\right] < M'. \tag{47}$$

E potremo supporre $M \leq M'$.

Ciò posto, noi determineremo una successione di funzioni $z^{(0)}$, $z^{(1)}$, $z^{(2)}$,..., $z^{(t)}$,... mediante le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} A_0^{(t-1)}(x\,y)\,p_{50}^{(t)} + A_1^{(t-1)}(x\,y)\,p_{41}^{(t)} + A_2^{(t-1)}(x\,y)\,p_{32}^{(t)} + \\ \quad + A_3^{(t-1)}(x\,y)\,p_{23}^{(t)} + A_4^{(t-1)}(x\,y)\,p_{14}^{(t)} + A_5^{(t-1)}(x\,y)\,p_{05}^{(t)} = F_1^{(t-1)}(x\,y) \end{array}\right\} \tag{48$_t$}$$

$$\left.\begin{array}{c} z^{(t)}(x\,0) = z^{(t)}(0\,x) = 0 \\ B_0^{(t-1)}(0\,y)\,p_{40}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t-1)}(0\,y)\,p_{31}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t-1)}(0\,y)\,p_{22}^{(t)}(0\,y) = \Theta_1^{(t-1)}(0\,y) \\ B_0^{(t-1)}(0\,y)\,p_{31}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t-1)}(0\,y)\,p_{22}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t-1)}(0\,y)\,p_{13}^{(t)}(0\,y) = \Theta_2^{(t-1)}(0\,y) \\ B_0^{(t-1)}(0\,y)\,p_{22}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t-1)}(0\,y)\,p_{13}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t-1)}(0\,y)\,p_{04}^{(t)}(0\,y) = \Theta_3^{(t-1)}(0\,y) \end{array}\right\} \tag{49$_t$}$$

dove per brevità indichiamo coll'apice $(t-1)$ le funzioni che si ottengono da quelle di ugual nome del n. 3 sostituendo a z ed alle sue derivate i valori di $z^{(t-1)}$ e delle sue derivate. Porremo inoltre $z^{(0)} = 0$.

Dimostreremo successivamente: 1.° che almeno in un campo sufficientemente piccolo attorno all'origine si possono determinare le $z^{(t)}$, 2.° che esse convergono ad una funzione z soluzione di (9), (11), (12), (13).

Ora intanto facendo in (48), (49) $t = 1$ avremo un sistema affatto analogo a quello del numero precedente in cui l'ufficio delle quantità α_1, q_1, m_1, m_2, M_1, M'_1, M''_1, ν_1 è tenuto dai numeri α, q, μ, m, M, M', M', μ; quindi, detto m_6 il numero che si ottiene da α, q, μ, m come nel numero precedente m_5 si ottiene da α_1, q_1, m_1, m_3, avremo che nel campo

$$|x| + |y| < \alpha' \tag{50}$$

dove α' è il minore dei numeri 1, α, $\dfrac{1-q^8}{m_6(m_6+1)}$, $\dfrac{1}{2\mu}\,|\log q|$ è

$$\left.\begin{array}{ll} |z^{(1)}| < k\,M[\,|x|+|y|\,]^5, & [\,|p_{10}^{(1)}|,\ |p_{01}^{(1)}|\,] < k\,M[\,|x|+|y|\,]^4, \\ |p_{i,2-i}^{(1)}| < k\,M[\,|x|+|y|\,]^3, & |p_{i,3-i}^{(1)}| < k\,M[\,|x|+|y|\,]^2, \\ |p_{i,4-i}^{(1)}| < k\,M[\,|x|+|y|\,], & |p_{i,5-i}^{(1)}| < k(M'+M'[\,|x|+|y|\,]) < 2k\,M' \end{array}\right\} \tag{51$_1$}$$

dove k è la stessa funzione di q, μ, m, μ, che k_3 di q_1, m_1, m_2, ν_1.

Supponiamo di restringere il campo di valori di $x\,y$ che consideriamo, limitandolo colla disuguaglianza

$$|x| + |y| < \alpha'' \tag{52}$$

dove α'' è il minore dei numeri α', $\sqrt{\frac{\alpha}{k\,M}}$, $\frac{d_1}{k\,M}$ ed anche, per una ragione che vedremo tosto, minore di $\frac{1}{1+2\,k\,M'}$, i valori della $z^{(1)}$ e delle sue derivate soddisfanno allora alle limitazioni (41); ed anche alla (45) ove si ponga $d_2 = 2\,k\,M'$; ne segue che, se sostituiamo $z^{(1)}$ nelle F, A, B, Θ onde calcolare la $z^{(2)}$, avremo che il sistema di equazioni (48), (49) in cui si faccia $t = 2$ è del tipo di quello del n. 4 ove l'ufficio dei numeri α_1, q_1, m_1, m_2, M_1, M'_1, M''_1, ν_1 è tenuto da α'', q, μ, m, M_1, $M'(1+2\,k\,M')$, M', μ. Quindi per le $z^{(2)}$ avremo le disuguaglianze

$$\left.\begin{array}{l} |z^{(2)}| < k\,M[|x|+|y|]^5, \qquad [|p^{(2)}_{10}|, |p^{(2)}_{01}|] < k\,M[|x|+|y|]^4, \\ |p^{(2)}_{i,2-i}| < k\,M[|x|+|y|]^3, \qquad |p^{(2)}_{i,3-i}| < k\,M[|x|+|y|]^2, \\ |p^{(2)}_{i,4-i}| < k\,M[|x|+|y|], \\ |p^{(2)}_{i,5-i}| < k\left\{M' + M'(1+2\,k\,M')[|x|+|y|]\right\} < 2\,k\,M' \end{array}\right\} \tag{51$_2$}$$

dove per dedurre l'ultima disuguaglianza conviene rammentare che

$$|x| + |y| < \alpha'' < \frac{1}{1+2\,k\,M'}. \tag{53}$$

Così proseguendo si vede in generale che si possono nel campo (52) determinare tutte le $z^{(t)}$, e che è

$$\left.\begin{array}{l} |z^{(t)}| < k\,M[|x|+|y|]^5, \qquad [|p^{(t)}_{10}|, |p^{(t)}_{01}|] < k\,M[|x|+|y|]^4, \\ |p^{(t)}_{i,2-i}| < k\,M[|x|+|y|]^3, \qquad |p^{(t)}_{i,3-i}| < k\,M[|x|+|y|]^2, \\ |p^{(t)}_{i,4-i}| < k\,M[|x|+y], \\ |p^{(t)}_{i,5-i}| < k\left\{M' + M'(1+2\,k\,M')[|x|+|y|]\right\} < 2\,k\,M'. \end{array}\right\} \tag{51$_t$}$$

6. *Continuazione: esistenza della soluzione.* Per mostrare poi che le $z^{(t)}$ tendono ad una funzione limite z, basta osservare che posto $\pi^{(t)} = z^{(t+1)} - z^{(t)}$, $\pi^{(t)}_{jk} = \frac{\partial^{i+k}\,\pi^{(t)}}{\partial\,x^i\,\partial\,y^k} = p^{(t+1)}_{ik} - p^{(t)}_{ik}$ si ha che le $\pi^{(t)}$ sono soluzioni delle equazioni

$$A^{(t)}_0\,\pi^{(t)}_{50} + A^{(t)}_1\,\pi^{(t)}_{41} + A^{(t)}_2\,\pi^{(t)}_{32} + A^{(t)}_3\,\pi^{(t)}_{23} + A^{(t)}_4\,\pi^{(t)}_{14} + A^{(t)}_5\,\pi^{(t)}_{50} = \overline{F}^{(t)}_1\,(x\,y) \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\pi^{(t)}(x\,0) = \pi^{(t)}(0\,x) = 0\\
&B_0^{(t)}(0\,y)\,\pi_{40}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t)}(0\,y)\,\pi_{31}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t)}(0\,y)\,\pi_{22}^{(t)}(0\,y) = \overline{\Theta}_1^{(t)}(0\,y)\\
&B_0^{(t)}(0\,y)\,\pi_{31}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t)}(0\,y)\,\pi_{22}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t)}(0\,y)\,\pi_{13}^{(t)}(0\,y) = \overline{\Theta}_2^{(t)}(0\,y)\\
&B_0^{(t)}(0\,y)\,\pi_{22}^{(t)}(0\,y) + B_1^{(t)}(0\,y)\,\pi_{13}^{(t)}(0\,y) + B_2^{(t)}(0\,y)\,\pi_{04}^{(t)}(0\,y) = \overline{\Theta}_3^{(t)}(0\,y)
\end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

dove

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{F}_1^{(t)}(x\,y) = F_1^{(t)}(x\,y) - F_1^{(t-1)}(x\,y) + \sum_0^5{}_i\,[A_i^{(t)}(x\,y) - A_i^{(t-1)}(x\,y)]\,p_{5-i,i}^{(t)}\\
&\overline{\Theta}_j^{(t)}(0\,y) = \Theta_j^{(t)}(0\,y) - \Theta_j^{(t-1)}(0\,y) + \sum_0^3{}_i\,[B_i^{(t)}(0\,y) - B_i^{(t-1)}(0\,y)]\,p_{5-i-j,i+j-1}^{(t)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (56)_t$$

Le equazioni (54), (55) sono della solita forma da noi studiata: anzi i primi membri non differiscono dai primi membri di (48), (49): esaminiamo i secondi membri. Ricordiamo che le derivate parziali di F_1, Θ_1, Θ_2, Θ_3, A_i, B_h sono tutte inferiori a μ, ricordiamo inoltre le definizioni di $F_1^{(t)}$, $\Theta_j^{(t)}\ldots$; avremo

$$\left.\begin{aligned}
&|F_1^{(t)}(x\,y) - F_1^{(t-1)}(x\,y)| = |F_1(x\,y\,z_1^{(t)}\,p_{10}^{(t)}\ldots p_{04}^{(t)}) - F_1(x\,y\,z_1^{(t-1)}\,p_{10}^{(t-1)}\ldots p_{04}^{(t-1)})| \leq\\
&\qquad\qquad \leq \mu\,[\,|\pi^{(t-1)}| + |\pi_{10}^{(t-1)}| + \cdots |\pi_{04}^{(t-1)}|\,]\\
&|\Theta_j^{(t)}(x\,y) - \Theta_j^{(t-1)}(0\,y)| = |\Theta_j(0\,y\,z_1^{(t)}\,p_{10}^{(t)}\ldots p_{03}^{(t)}) - \Theta_j(0\,y\,z_1^{(t-1)}\,p_{10}^{(t-1)}\ldots p_{03}^{(t-1)})| \leq\\
&\qquad\qquad \leq \mu\,[\,|\pi^{(t-1)}| + |\pi_{10}^{(t-1)}| + \cdots |\pi_{03}^{(t-1)}|\,]
\end{aligned}\right\} \qquad (57)_t$$

$$\left.\begin{aligned}
&|A_i^{(t)}(x\,y) - A_i^{(t-1)}(x\,y)| \leq \mu\,[\,|\pi^{(t-1)}| + \cdots + |\pi_{02}^{(t-1)}\,]\\
&|B_i^{(t)}(0\,y) - B_i^{(t-1)}(0\,y)| \leq \mu\,[\,|\pi^{(t-1)}| + \cdots + |\pi_{02}^{(t-1)}|\,].
\end{aligned}\right\} \qquad (58)_t$$

Ciò posto osserviamo che è $\pi^{(0)}(x\,y) = z^{(1)}(x\,y)$: per $\pi^{(0)}$ valgono dunque le $(51)_1$.

Passiamo alle $\pi^{(1)}$. Avremo da $(56)_1$, $(57)_1$, $(58)_1$

$$|\overline{F}_1^{(1)}(x\,y)| < 15\,\mu\,k\,M[\,|x| + |y|\,] + 72\,\mu\,k\,M'\,M[\,|x| + |y|\,]^2$$

$$|\overline{\Theta}_j^{(1)}(0\,y)| < 10\,\mu\,k\,M|y|^2 + 24\,\mu\,k\,M^2\,|y|^3.$$

Onde se noi ci limitiamo a considerare il campo

$$|x| + |y| < \alpha''' \qquad (59)$$

dove α''' è un numero $\leq \alpha''$ e tale che

$$15\,\mu\,k\left(1 + \frac{24}{5}\,M'\,\alpha'''\right)\alpha''' = \tau < 1,$$

avremo in (59)

$$|\overline{F}^{(1)}(xy)| < \tau M, \quad |\overline{\Theta}_j^{(1)}(0y)| < \tau M|y|. \tag{60$_1$}$$

Ricordiamo che $\pi^{(1)} = z^{(2)} - z^{(1)}$ ammette certo le derivate quinte: possiamo allora applicare a $\pi^{(1)}$ i risultati del n. 4, tenendo conto dell'osservazione finale di quel numero: ed otterremo per $(60)_1$ che, indicando con k lo stesso numero che precedentemente, si ha

$$\left.\begin{array}{c} |\pi^{(1)}| < k\tau M[|x|+|y|]^5, \quad [|\pi_{10}^{(1)}|, \quad |\pi_{01}^{(1)}|] < k\tau M[|x|+|y|]^4 \\ |\pi_{i,2-i}^{(1)}| < k\tau M[|x|+|y|]^3, \qquad |\pi_{i,3-i}^{(1)}| < k\tau M[|x|+|y|]^2 \\ |\pi_{i,4-i}^{(1)}| < k\tau M[|x|+|y|] \end{array}\right\} \tag{61$_1$}$$

mentre non potremo dedurre alcuna utile di limitazione per le $|\pi_{i,5-i}^{(1)}|$, che pure, come dicemmo, esistono, perchè nelle $(60)_1$ non abbiano dato limitazioni per le derivate di $\overline{F}^{(1)}$ e $\overline{\Theta}_j^{(1)}$.

Da $(61)_1$ e $(51)_2$ dedurremo in virtù di (58) che nel campo (59) è

$$\left.\begin{array}{c} |\overline{F}_1^{(2)}(xy)| < 15\mu k\tau M[|x|+|y|] + 72\mu k\tau M' M[|x|+|y|]^2 < \tau^2 M \\ |\overline{\Theta}_j^{(2)}(0y)| < (10\mu k\tau M + 24\mu k\tau M^2\alpha''')|y|^2 < \tau^2 M|y|. \end{array}\right\} \tag{60$_2$}$$

Onde seguirà analogamente a $(61)_1$

$$|\pi^{(2)}| < k\tau^2 M[|x|+|y|]^5, \ldots |\pi_{i,4-i}^{(2)}| < k\tau^2 M[|x|+|y|]. \tag{61$_2$}$$

Ed in generale così continuando si avrà

$$\left.\begin{array}{c} |\pi^{(t)}| < k\tau^t M[|x|+|y|]^5, \quad [|\pi_{10}|, |\pi_{01}|] < k\tau^t M[|x|+|y|]^4, \\ |\pi_{i,2-i}^{(t)}| < k\tau^t M|x|+|y|]^3, \qquad [|\pi_{i,3-i}^{(t)}|] < k\tau^t M[|x|+|y|]^2, \\ |\pi_{i,4-i}^{(t)}| < k\tau^t M[|x|+|y|]. \end{array}\right\} \tag{61$_t$}$$

Queste disuguaglianze ci permettono di affermare che le $z^{(t)}$ convergono uniformemente in (59) ad una funzione limite z, e che le derivate dei primi 4 ordini delle $z^{(t)}$ convergono del pari uniformemente a delle funzioni limiti che saranno per ciò stesso le derivate dei primi 4 ordini di z. Onde seguirà che z soddisfa alle (11), (12), (13) e cioè alle

$$z(x0) = z(0x) = 0$$

ed alle

$$\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\right)_{x=0} = \left(\frac{\delta^2 F}{\delta x\,\delta y}\right)_{x=0} = \left(\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}\right)_{x=0} = 0. \tag{62}$$

Inoltre si ha ancora uniformemente in

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t=\infty} A_i^{(t)}(x\,y) &= A_i(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{02})\\ \lim_{t=\infty} F_1^{(t)}(x\,y) &= F_1(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{04}).\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Non si può invece dimostrare propriamente l'esistenza delle derivate quinte di z; e quindi non si dimostra che essa soddisfa a (9). Ma si vede invece facilmente che essa soddisfa a (1). Invero si ha uniformemente in (59)

$$F(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{02}) = \lim_{t=\infty} F(x\,y\,z^{(t)}\,p_{10}^{(t)}\dots p_{02}^{(t)}).$$

D'altra parte per il modo in cui si dedusse la (9) sarà

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_5\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x\,y\,z^{(t)}\dots p_{02}^{(t)}) =$$

$$= \sum_0^5{}_i\, A_i^{(t)}(x\,y)\,p_{5-i,i}^{(t)} - F_1^{(t)}(x\,y).$$

Ma per le (51) si ha che le $p_{5-i,i}^{(t)}$ sono sempre in modulo inferiori a $2\,k\,M'$; onde per le (63) e (48) sarà uniformemente in (59)

$$\lim_{t=\infty}\left(\sum_0^5 A_i^{(t)}(x\,y)\,p_{5-i,i}^{(t)} - F_1^{(t)}(x\,y)\right) = \lim_{t=\infty}\left(\sum_0^5 A_i^{(t-1)}(x\,y)\,p_{5-i,i}^{(t)} - F_1^{(t-1)}(x\,y)\right) = 0.$$

Ne segue che in (59) è uniformemente

$$\lim_{t=\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_5\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x\,y\,z^{(t)}\dots p_{02}^{(t)}) = 0;$$

onde si deduce che su $F(x\,y\,z\dots p_{02})$ si può operare con

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_3\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_4\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_5\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

e che il risultato è lo zero. Questo insieme colle condizioni (61) ci dice che z soddisfa realmente alla (1).

Osservazione. Del resto si può osservare che se pure la z non ha le derivate quinte, tuttavia su di essa si può operare con

$$\sum_0^5{}_i\, A_i(x\,y\,z\,p_{10}\dots p_{02})\frac{\partial^4}{\partial x^{5-i}\,\partial y^i}$$

considerato come un operatore unico in modo analogo a quanto si vide nel n. 4 del § I.

7. *Unicità della soluzione.* Lo stesso procedimento di successive approssimazioni che ci ha servito a costruire la funzione z può servire, come è ben noto, a provare che non esiste altra soluzione di (1) che soddisfaccia alle condizioni iniziali da noi imposte e che abbia le derivate dei primi *cinque* ordini finite e continue; e quindi soddisfaccia realmente al sistema (9), (11), (12), (13). Tale risultato non costituisce però il teorema di unicità perfettamente corrispondente al teorema di esistenza dimostrato sopra: poichè in questo abbiamo solo provato che la z ammette le derivate quarte finite e continue.

Può quindi non essere privo di interesse il seguente ragionamento che dimostra il teorema di unicità in queste più ampie ipotesi.

Basta invero osservare che se oltre alla z esistesse un'altra soluzione z_1 la quale avesse le derivate dei primi 4 ordini finite e continue, la funzione $u = z - z_1$ sarebbe una soluzione, nulla sugli assi, finita e continua colle sue derivate dei primi 4 ordini dell'equazione lineare omogenea

$$\left.\begin{aligned} a(xy)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(xy)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c(xy)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(xy)\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + e(xy)\frac{\partial u}{\partial y} + f(xy)\,u = 0; \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

dove le $a(xy), \ldots$ sono funzioni che ammettono le derivate prime e seconde finite e continue; e per cui si ha l'identità

$$a(xy)\,\xi^2 - b(xy)\,\xi + c(xy) \equiv (\xi - \mu_1(xy))\,(\mu_2(xy)\,\xi - 1)$$

dove $\mu_1(xy)$ e $\mu_2(xy)$ sono funzioni finite e continue colle loro derivate prime e seconde, entrambe minori di 1 in un campo attorno all'origine (*).

Basterà quindi provare l'unicità per l'equazione (64): e perciò ci si potrebbe riferire ai risultati del Goursat e degli autori già citati relativi all'equazione (2) dell'introduzione, discutendo la trasformazione di variabili che porta (64) nella forma (2). Ma senza ricorrere a tale procedimento, si osservi che procedendo in modo analogo a quanto si fece al n. 4 di questo § II se u è una soluzione di (64) la quale abbia le derivate dei primi due ordini, posto $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ le funzioni u_1 ed u_2 avranno le derivate prime e

(*) Cfr. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, pag. 352 e ss.

saranno soluzioni di un sistema di equazioni della forma

$$\left.\begin{aligned} & a(x\,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}+b(x\,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}+c(x\,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}+\\ & \qquad\qquad +d(x\,y)\,u_1+e(x\,y)\,u_2+f(x\,y)\,u=0\\ & \frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{\partial u_2}{\partial x}\\ & u=\int_0^x u_1\,d\,x+u_2(0\,y) \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

colle condizioni iniziali

$$u_1(0\,x)=u_2(x\,0)=0. \tag{66}$$

È chiara l'analogia del sistema delle (65), (66) col sistema che si deduce da (9), (11), (12), (13) colle sostituzioni (15), (18); e come per quello si è sopra osservato potersi dimostrare il teorema di esistenza e quello di unicità per le soluzioni che ammettono le derivate prime, così cogli stessi procedimenti in base ai risultati generali del § I si dimostra il teorema di unicità delle soluzioni del sistema (65), (66) le quali ammettono le derivate prime. La funzione u non può quindi differire da zero.

8. *Conclusione.* — Possiamo quindi concludere:

Data l'equazione

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)=0, \tag{1}$$

se si suppone che F abbia le derivate dei primi 4 ordini rispetto alle variabili da cui dipende finite e continue, esiste nell'intorno dell'origine una ed una sola soluzione di essa che abbia le derivate dei primi 4 ordini e si annulli sugli assi, purchè il birapporto delle direzioni delle caratteristiche dell'equazione (1) *nell'elemento di superficie corrispondente all'origine* (il quale è pienamente determinato da (1) e dai dati iniziali) *e degli assi non sia in modulo eguale a* 1 (*). *Se l'equazione è analitica, la soluzione lo è pure.*

Con una trasformazione di variabili e di funzione incognita il precedente teorema dà luogo a quest'altro:

Data l'equazione

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t)=0, \tag{1}$$

(*) Nel caso reale ciò equivale a dire che le caratteristiche e gli assi non si separano armonicamente.

se si suppone che F abbia le derivate dei primi 4 ordini rispetto alle variabili da cui dipende finite e continue, esiste nell'intorno dell'origine una superficie soluzione di essa che passi per due curve gobbe le quali si incontrino senza toccarsi in un punto della retta $x = y = 0$, purchè il birapporto delle direzioni delle tangenti a tali curve gobbe e delle direzioni delle curve caratteristiche dell'equazione (1) *nell'elemento iniziale determinato da questi dati non sia in modulo uguale all'unità. Si ammette che le curve gobbe assegnate siano date da equazioni i cui primi membri hanno le derivate dei primi 6 ordini finite e continue: la soluzione costrutta avrà allora certamente le derivate dei primi 4 ordini finite e continue, e sarà l'unica funzione che gode di tali proprietà.*

Naturalmente è chiaro che la condizione relativa al birapporto è realmente essenziale: una dimostrazione di ciò relativa al caso analitico, è data dal Goursat nelle sue Memorie, ed è evidentemente di tale natura da applicarsi pure al caso delle funzioni di variabili reali, almeno quando si ammetta per queste l'esistenza di un numero conveniente di derivate.

§ III.

1. *La proprietà fondamentale delle caratteristiche semplici.* Si consideri un'equazione di secondo ordine a caratteristiche distinte

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0 \tag{1}$$

ed una curva di elementi di secondo ordine caratteristica per essa; sia ad es.:

$$y = z = p = q = r = s = t = 0. \tag{2}$$

Per dimostrare che essa appartiene ad infinite soluzioni di (1) il Goursat osserva che, assegnata una funzione $\psi(y)$ arbitraria nulla per $y = 0$, esiste pel teorema del paragrafo precedente una soluzione di (1) la quale si riduce a $\psi(y)$ per $x = 0$, e a 0 per $y = 0$; e verifica col calcolo effettivo delle derivate nel punto iniziale $x = y = 0$ che, se si suppone che la $\psi(y)$ si annulla colle sue derivate dei primi due ordini per $y = 0$, detta soluzione contiene tutta la caratteristica (2). Nel caso delle funzioni non analitiche è chiaro che il calcolo effettivo delle derivate nel punto iniziale non si può in generale fare, e che ove pure fosse possibile non basterebbe a provare che la (2) appartiene alla soluzione cercata.

È però semplicissimo indicare il ragionamento che devesi sostituire al ragionamento del Goursat. Per maggior semplicità si risolva la (1) rapporto ad s: e sia

$$s = f(x\,y\,z\,p\,q\,r\,t) \tag{3}$$

la nuova equazione: ciò si può sempre fare poichè si suppone che (2) è caratteristica di (1) e che le caratteristiche di (1) nell'elemento

$$x = y = z = p = q = r = s = t = 0$$

sono distinte.

L'ipotesi che (2) sia caratteristica di (1) porta inoltre che

$$f(x\,0\,0\ldots 0) = \frac{\partial f(x\,0\ldots 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x\,0\ldots 0)}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Ciò posto, sia dunque $z = \zeta(x\,y)$ una funzione soluzione di (3) che abbia le derivate dei primi tre ordini finite e continue, e tale che soddisfaccia alle condizioni iniziali

$$\zeta(x\,0) = 0, \quad \pi(0\,0) = \chi(0\,0) = \rho(0\,0) = \sigma(0\,0) = \tau(0\,0) = 0 \tag{5}$$

dove colle lettere greche π, χ, ρ, σ, τ indichiamo le derivate di ζ analoghe a p, q, r, s, t. Vogliamo dimostrare che sarà identicamente

$$\pi(x\,0) = \chi(x\,0) = \rho(x\,0) = \sigma(x\,0) = \tau(x\,0) = 0.$$

Ora da $\zeta(x\,0) = 0$ segue intanto $\pi(x\,0) = \rho(x\,0) = 0$. Si osservi ora che dall'essere $\zeta(x\,y)$ soluzione di (3) e $\dfrac{\partial \pi(x\,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial \chi(x\,y)}{\partial x} = \sigma(x\,y)$, $\dfrac{\partial \sigma(x\,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial \tau(x\,y)}{\partial x}$ segue che si hanno le equazioni

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} - f(x\,y\,\zeta\,\pi\,\chi\,\rho\,\tau) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \zeta}\pi - \frac{\partial f}{\partial \pi}\frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial \zeta}\chi - \frac{\partial f}{\partial \pi}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \chi}\tau - \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

Poniamo $\dfrac{\partial \tau}{\partial y} = \theta(x\,y)$; sarà per le nostre ipotesi $\theta(x\,y)$ una funzione finita e continua nell'intorno dell'origine.

Poniamo $\chi(x\,0) = \chi_1(x)$, $\tau(x\,0) = \tau_1(x)$; rammentando che

$$\zeta(x\,0) = \pi(x\,0) = \rho(x\,0) = \frac{\partial \pi(x\,0)}{\partial x} = \frac{\partial \rho(x\,0)}{\partial x} = 0,$$

le relazioni precedenti divengono, facendovi $y=0$, e tenendo conto di (4)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\chi_1}{dx}-f(x\,0\,0\,0\,\chi_1\,0\,\tau_1)=0\\&\frac{d^2\chi_1}{dx^2}-\frac{\partial f}{\partial\chi}\frac{d\chi_1}{dx}-\frac{\partial f}{\partial\tau}\frac{d\tau_1}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\\&\frac{d\tau_1}{dx}-\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{d^2\chi_1}{dx^2}-\frac{\partial f}{\partial\pi}\frac{d\chi_1}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\zeta}\chi_1+\frac{\partial f}{\partial\chi}\tau_1+\frac{\partial f}{\partial\tau}\theta(x\,0)\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

dove anche nelle derivate di f che stanno come coefficienti delle ultime due equazioni devesi porre $y=\zeta=\pi=\rho=0$, $\chi=\chi_1$, $\tau=\tau_1$. Tali equazioni costituiscono quando sia nota la funzione $\theta(x\,0)$ un sistema di equazioni differenziali per τ_1 e χ_1, regolare nell'intorno dei valori $x=\chi_1=\tau_1=0$, perchè grazie alle (4) il Jacobiano delle (6) rapporto a $\frac{d\chi_1}{dx}$, $\frac{d^2\chi_1}{dx^2}$, $\frac{d\tau_1}{dx}$ per $x=\chi_1=\tau_1=0$ è uguale a 1: quindi data la $\theta(x\,0)$ ed una coppia di valori dell'intorno della coppia (0, 0), quali valori iniziali di χ_1 e τ_1 per $x=0$, le χ_1 e τ_1 sono pienamente determinate. Ma per le (4) qualunque sia $\theta(x\,0)$ purchè finita, le funzioni $\chi_1(x)=0$, $\tau_1(x)=0$ sono soluzioni di (6) e quindi sono le sole soluzioni di (6) le quali si annullino per $x=0$. Ne segue per (5) che è necessariamente $\chi(x\,0)=\tau(x\,0)=0$ e quindi pure $\sigma(x\,0)=0$.

La soluzione $z=\zeta(x\,y)$ di (1) o (3) contiene quindi la caratteristica (2) c. v. d.

2. — Da questo teorema si potrebbe allo stesso modo che fa il Goursat nella seconda delle Memorie citate degli *Annales de la Faculté de Toulouse* completare il teorema del paragrafo precedente, provando che nel caso delle funzioni di variabili reali, se le due curve gobbe assegnate non si incrociano in un punto O dell'asse delle z, ma hanno O come estremo comune senza ivi toccarsi esiste una sola od infinite superficie soluzioni che contengono queste due curve a seconda che le direzioni delle tangenti ad esse non separano o separano le direzioni delle caratteristiche.

Réclamation de priorité.

(*Par* Konrad Zindler, *à Innsbruck.*)

Dans l'introduction du Mémoire : *Saggio di geometria differenziale dei complessi di rette*, de M. Sannia (Ann. di Mat. (3) XVII, 1910) se trouvent les propositions suivantes :

« Due forme differenziali quadratiche hanno pure adoperato il Fibbi ed il Fubini per rappresentare una congruenza (*) di raggi in uno spazio di curvatura costante; *ma nessun tentativo in questo senso è stato fatto finora per i complessi di rette.* »

« Per la prima volta sono qui studiati in modo sistematico i complessi definiti dalle espressioni esplicite delle coordinate di una retta generica in funzione di tre parametri indipendenti. »

Or dans ma : *Liniengeometrie mit Anwendungen*, Band II, parue en avril 1906, j'ai employé deux formes différentielles quadratiques ternaires (§§ 47, 48), qui ont précisément la même signification, que celles de M. Sannia. Le lecteur est prié de comparer ma formule 92) pour P (l. c., p. 184) avec la formule 33) de M. Sannia. En tous les deux cas les numérateurs représentent le moment des deux droites voisines et les dénominateurs l'angle. Et bien que je retiens toutes les trois variables du dénominateur, je remarque (p. 187), que ceci se décompose en deux formes linéaires. Toutes les applications de ces formes quadratiques s'appuient sur la représentation paramétrique des complexes, que j'ai introduite (l. c., p. 180) dans la géométrie différentielle et utilisée systématiquement dans les §§ 47, 48, 49, 55 de mon ouvrage. V. aussi mon *Bericht* (Jahresb. d. Deutschen Math. Vereinig. Bd. XV, 1906), Art. 14 et 15; Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. XVII, 1906.

Innsbruck, 16. août 1911.

(*) Quant aux congruences de droites, v. ma réclamation *Math. Annalen*, Bd. 69.