HANDBUCH

DER

THEORETISCHEN PHYSIK

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

HANDBUCH

DER

THEORETISCHEN PHYSIK

VON

W. THOMSON UND P. G. TAIT.

AUTORISIRTE DEUTSCHE ÜBERSETZUNG

VON

DR. H. HELMHOLTZ UND G. WERTHEIM.

ERSTER BAND.

ERSTER THEIL.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1 8 7 1.

VORREDE.

> Les causes primordiales ne nous sont point connues; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation, et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle.
>
> Fourier.

Der Ausdruck „Natural Philosophy" *) wurde von Newton gebraucht und wird noch jetzt auf den britischen Universitäten angewandt, um die Erforschung der Gesetze der materiellen Welt und die Herleitung nicht direct beobachteter Resultate aus ihnen zu bezeichnen. Beobachtung, Classification und Beschreibung der Erscheinungen muss der Theorie in jedem Theile der Naturwissenschaften nothwendig vorhergehen. Diese frühere Stufe wird in einzelnen Zweigen der Wissenschaft Naturgeschichte genannt und könnte mit demselben Rechte auch in allen übrigen diesen Namen führen.

Unsere Aufgabe ist eine zweifache: einen einigermaassen vollständigen Bericht über die jetzt bekannten Resultate dieser Wissenschaft in einer dem nichtmathematischen Leser verständlichen Sprache zu geben, und denen, welche des Privilegiums tieferer mathematischer Kenntnisse theilhaftig sind, einen zusammenhängenden Umriss der analytischen Processe zu liefern, durch welche die meisten jener Resultate auch in Gebiete ausgedehnt worden sind, deren die experimentelle Untersuchung sich noch nicht hat bemächtigen können.

---

*) Dies ist der englische Titel des Buches, entsprechend dem Titel von Newton's berühmten Werke „Philosophiae Naturalis Principia"; im Deutschen entspricht diesem Begriffe etwa der der „theoretischen Naturwissenschaft", oder auch in noch speciellerem Sinne geradezu: „Physik".

In dem vorliegenden Bande nimmt die (durch kleineren Druck unterschiedene) mathematische Entwicklung nothwendig weit mehr Raum ein, als der experimentelle und beschreibende Theil.

Wir beginnen mit einem Capitel über die Bewegung, einem von der Existenz der Materie und der Kraft völlig unabhängigen Gegenstande. Wir werden darin naturgemäss zur Betrachtung der Krümmung und Windung von Curven, der Krümmung von Flächen und verschiedener anderer rein geometrischer Gegenstände geführt.

Die Gesetze der Bewegung, das Gesetz der Gravitation und der elektrischen und magnetischen Attraction, Hooke's Gesetz und andere direct auf experimentellem Wege hergeleitete Fundamentalprincipien führen mittels mathematischer Operationen zu manchen interessanten und nützlichen Resultaten, für deren Prüfung freilich auch unsere feinsten Versuchsmethoden bis jetzt völlig ungenügend sind. Ein grosser Theil unseres ersten Bandes ist diesen Entwicklungen gewidmet, die zwar nicht unmittelbar experimentell bestätigt werden können, aber so sicher wahr sind, wie die elementaren Gesetze, aus denen sie durch die mathematische Analysis hergeleitet wurden.

Wir wenden in der Regel diejenigen analytischen Processe an, welche am directesten zu den herzuleitenden Resultaten führen. Das Verständniss des Werkes wird daher für den gewöhnlichen Leser oft schwierig sein. Ein kleineres Buch, welches einen grossen Theil der nichtmathematischen Entwicklungen des vorliegenden Bandes und von den mathematischen Entwicklungen nur so viel enthält, als sich leicht mittels der elementaren Geometrie und Algebra herleiten lässt, wird in Kurzem erscheinen.

Nach Ampère's Vorschlag bedienen wir uns für die rein geometrische Bewegungslehre des Ausdrucks Kinematik. Ferner wenden wir den Ausdruck Dynamik in seinem etymologisch richtigen Sinne an, bezeichnen also damit die Wissenschaft, welche von der Wirkung der Kraft handelt, mag letztere nun relative Ruhe unterhalten oder eine Beschleunigung der relativen Bewegung hervorbringen. Die diesen beiden Fällen entsprechenden Theile der Dynamik werden zweckmässig Statik und Kinetik genannt.

Ein Gegenstand, den wir beständig im Auge behalten haben, ist das wichtige Princip der Erhaltung der Energie. Die Resultate neuerer experimenteller Forschungen, besonders die von Joule, lehren übereinstimmend, dass die Energie ebenso real und unzerstörbar ist, wie die Materie. Es gewährt uns hohe Befriedigung, zu finden, dass Newton, soweit es der Zustand der experimentellen Wissenschaft seiner Zeit gestattete, diese herrliche moderne Verallgemeinerung anticipirte.

Wir bitten zu beachten, dass an vielen Stellen unseres Werkes, wo es scheinen könnte, als hätten wir heutzutage allgemein angenommene Methoden und Beweisarten rasch und unnöthiger Weise verlassen, wir nicht sowohl Neuerer als vielmehr Wiederhersteller sind.

In unserem einleitenden Capitel über Kinematik führt uns die Betrachtung der harmonischen Bewegung naturgemäss zum Fourier'schen Satze, der, was den Nutzen für die Wissenschaft der Physik betrifft, zu den wichtigsten aller analytischen Resultate gehört. In den Anhängen zu diesem Capitel haben wir eine Ausdehnung des Green'schen Satzes und eine kurze Abhandlung über die bemerkenswerthen Functionen gegeben, die unter dem Namen von Laplace's Coefficienten bekannt sind. Ueber die Eleganz und den Nutzen dieser Analyse von Laplace kann nur eine Ansicht herrschen. Aber die Art und Weise, in der sie bis jetzt dargestellt wurde, ist den fähigsten Mathematikern abstossend und den minder fähigen allzu schwierig erschienen. Man wird finden, dass sie in der vereinfachten und symmetrischen Form, in der wir sie geben, völlig im Bereiche derjenigen Leser liegt, die nur einigermaassen mit den neueren mathematischen Methoden vertraut sind.

Im zweiten Capitel geben wir Newton's Bewegungsgesetze in seinen eigenen Worten und mit einigen seiner eigenen Commentare. In der That ist jeder Versuch, diese Gesetze bei Seite zu drängen, völlig misslungen. Vielleicht in keiner Wissenschaft ist jemals einem System eine so einfache und zu gleicher Zeit so umfassende Grundlage gegeben worden. Die Anwendung der Lagrange'schen allgemeinen Coordinaten auf die Dynamik, Hamilton's variirende Wirkung und damit in Zusammenhang stehende Gegenstände vervollständigen das Capitel.

Das dritte Capitel, „Erfahrung", handelt kurz von der Beobachtung und dem Experiment als den Grundlagen der Naturlehre.

Das vierte Capitel hat es mit den bei der Messung der Zeit, des Raumes und der Kraft gebrauchten Fundamentaleinheiten und mit den wichtigsten Instrumenten zu thun.

Damit schliesst der erste Theil des Werkes, welcher streng genommen nur die Einleitung bildet.

Der zweite Theil ist der abstracten Dynamik gewidmet (die in neuerer Zeit nicht gerade passend Mechanik genannt wird). Sein Gegenstand ist in dem einleitenden (fünften) Capitel kurz dargelegt. Der Rest des vorliegenden Bandes behandelt die Statik.

Im sechsten Capitel gehen wir, nachdem wir die Statik eines materiellen Punktes kurz behandelt haben, sehr ausführlich auf das wichtige Thema der Attraction ein. Das siebente Capitel enthält die Statik der festen und flüssigen Körper, und finden darin verschiedene wichtige Gegenstände, wie die Deformation elastischer fester Körper, die statische Theorie der Ebbe und Fluth, die Gestalt und Festigkeit der Erde eine eingehende Berücksichtigung.

Im zweiten Bande wird der zweite Theil durch Capitel über die Kinetik eines materiellen Punktes und über die Kinetik der festen und der flüssigen Körper vervollständigt werden. Wir werden darin auch die Vibrationen fester Körper und die Wellenbewegung im Allgemeinen behandeln. Dieser Band wird wahrscheinlich auch den dritten Theil: „Ueber die Eigenschaften der Materie" enthalten.

Wir glauben, dass der mathematisch gebildete Leser hauptsächlich durch die Lectüre des gross gedruckten Theils dieses

Bandes Nutzen haben wird; denn er wird dadurch genöthigt werden, durch eigenes Nachdenken das zu finden, was er zu oft gewohnt war, vermittels einer bloss mechanischen Anwendung der Analysis zu erreichen. Nichts kann für den Fortschritt verhängnissvoller sein, als ein zu grosses Vertrauen auf mathematische Symbole; denn der Studirende ist nur zu sehr geneigt, den bequemeren Weg einzuschlagen und die Formel, nicht die Thatsache als die physikalische Realität anzusehen.

Der vorliegende Band enthält eine Menge anscheinend zweckloses Material. Es wird sich jedoch zeigen, dass dasselbe sich direct auf Abschnitte der drei übrigen Bände bezieht. Die Nothwendigkeit, die Bedürfnisse der folgenden Bände so zu anticipiren, ist eine der Hauptursachen des langsamen Erscheinens dieses Bandes, dessen Druck seit dem November 1862 in unregelmässigen Intervallen vorgeschritten ist.

[Folgen Bemerkungen über den Druck der englischen Ausgabe.]

Juli 1867.

W. Thomson. P. G. Tait.

VORREDE

ZUR

DEUTSCHEN ÜBERSETZUNG.

Im vorliegenden Bande wird dem deutschen naturwissenschaftlichen und mathematischen Publicum der Anfang eines Werkes von hoher wissenschaftlicher Bedeutung übergeben, welches eine in der Literatur sehr fühlbare Lücke in ausgezeichnetester Weise ausfüllen wird. Während es an zweckmässigen populären Lehrbüchern der Physik nicht fehlte, musste sich jeder, der ein eingehendes wissenschaftliches Verständniss auch nur einzelner Theile dieser Wissenschaft suchte, ein Verständniss, wie es ohne mathematische Behandlung eben nicht zu gewinnen ist, dem Studium der einzelnen Original-Abhandlungen zuwenden. Diese sind aber fast alle in akademischen Denkschriften oder anderen wenig verbreiteten periodischen Schriften enthalten und gewöhnlich nur in grösseren Bibliotheken zu finden, selbst wenn man weiss, wo man zu suchen hat. Strengere mathematische Studien werden im Allgemeinen freilich nie ein sehr grosses Publicum finden, aber es ist wohl nicht zu bezweifeln, dass die genannte rein äusserliche Schwierigkeit einen wesentlichen Theil der Schuld davon trägt, dass mathematisch-physikalische Kenntnisse auch bei uns in Deutschland nur eine sehr geringe Verbreitung haben, trotzdem an deutschen Universitäten einige der ausgezeichnetesten Vertreter dieser Richtung gelehrt haben und noch lehren.

Wenigstens der eine der Verfasser des vorliegenden Buches, Sir William Thomson, ist längst auch in Deutschland bekannt als einer der durchdringendsten und erfindungsreichsten Denker, welche sich unserer Wissenschaft je zugewendet haben. Wenn ein solcher es unternimmt, uns gleichsam in die Werkstatt seiner Gedanken einzuführen und die Anschauungsweisen zu enthüllen, die leitenden Fäden auseinander zu wickeln, die ihm in seinen kühnen Gedankencombinationen geholfen haben, den widerstrebenden und verwirrten Stoff zu beherrschen und zu ordnen, so sind wir ihm alle dafür den höchsten Dank schuldig. Er hat dabei in Herrn P. G. Tait, Professor der Physik in Edinburg, für dieses Werk, welches sonst die Kräfte eines einzelnen vielbeschäftigten Mannes übersteigen würde, einen höchst geeigneten und talentvollen Helfer gefunden. Nur durch eine solche glückliche Vereinigung war die Aufgabe vielleicht überhaupt zu lösen.

Das Werk arbeitet auf eine möglichst allseitige und eindringende Einsicht in die Wechselbeziehungen der Naturkräfte hin, wobei es wesentlich die Hervorhebung des physikalischen Zusammenhangs im Gegensatz zu der Eleganz der mathematischen Methoden bevorzugt. Wird die Wissenschaft einst vollendet sein, so werden die physikalische und mathematische Consequenz vielleicht zusammenfallen. Bei den ausserordentlich mannigfaltigen Wechselbeziehungen der Naturkräfte zu einander liegt es in der Natur der Sache, dass man sie nur verstehen kann, wenn man sich die Verhältnisse von den mannigfaltigsten Gesichtspunkten aus betrachtet, und sich jedesmal denjenigen sucht, der am tiefsten in den Kern der gerade vorliegenden Frage blicken lässt. Dadurch wird allerdings die Einheit der Methode gestört, die die besseren französischen Lehrbücher so bequem und angenehm macht, und es wird dem Leser, wie auch die Verfasser in der Vorrede zum Original anerkennen, mehr Arbeit eigenen Denkens zugemuthet. Der Leser aber, der diese Arbeit nicht scheut, wird reichlichen Lohn davon haben; er wird sich zu eigener Erweiterung seines Verständnisses viel besser ausgerüstet finden, als durch die einseitig consequenten

Methoden, die meist nicht weiter führen, als bis zu dem Ziel, auf das sie berechnet sind.

Dieser Richtung ihrer Arbeit entsprechend haben die Verfasser sich auch bemüht, wo es anging, mathematische Methoden zu gebrauchen und Begriffe einzuführen, welche einer Anschauung fähig sind. Eine solche sich herauszuarbeiten, ist im Anfang allerdings oft schwerer, als den gegebenen analytischen Methoden in der Rechnung einfach zu folgen; aber es bleibt durch die dabei gewonnene grössere Uebersichtlichkeit des Verfahrens auch ein dauernder Gewinn bestehen.

Die Uebersetzung eines solchen Buches, wo die grösste Genauigkeit im Ausdrucke nöthig ist, während die Wörter der beiden Sprachen sich nicht immer vollständig decken, ist keine ganz leichte Sache. Dazu kam, dass die Verfasser selbst eine Reihe neuer englischer Wörter in die wissenschaftlichen Ausdrucksweisen eingeführt haben. Die Hauptarbeit ist Herrn G. Wertheim zugefallen. Der Unterzeichnete glaubte bei der Einführung eines so wichtigen Werkes in die deutsche wissenschaftliche Literatur seine Hilfe trotz starker Ueberladung mit Arbeiten nicht versagen zu dürfen, so weit sie von den übrigen Betheiligten, den ihm nahe befreundeten Verfassern, dem Herrn Verleger und dem Uebersetzer, in Anspruch genommen wurde. Ich habe deshalb eine Correctur gelesen, und namentlich in den schwierigeren Fällen der Accommodation zum Theil neuer deutscher Ausdrücke an die englischen zu helfen gesucht, so gut ich konnte.

Endlich ist auch noch eine Reihe Correcturbogen von den Verfassern selbst durchgesehen worden, um dadurch möglichste Sicherung gegen Missverständnisse oder Ungenauigkeiten des Ausdrucks zu erzielen.

Der Herr Verleger, indem er seinerseits eine so verwickelte und zeitraubende Art der Controlle möglich machte, hat sich ohne Zweifel dadurch den Dank der deutschen Leser in hohem Grade verdient.

Berlin, im Mai 1871.

Helmholtz.

Verzeichniss neuer oder in deutschen Büchern weniger gebrauchter Benennungen mit Angabe des Ortes ihrer Erklärung.

Grösse der Windung (*Tortuosity*) einer Curve, § 7 bis 9.

Gesammtkrümmung und mittlere Krümmung (*Integral curvature* und *average curvature*) einer Curve, § 10 bis 13.

Hodograph eines bewegten Punktes, § 37 bis 39.

Verfolgungscurve (*Curve of Pursuit*), § 40.

Einfache harmonische Bewegung, § 52 bis 57, ist gleich dem, was sonst einfache Schwingung, pendelartige oder Sinusbewegung genannt worden ist. Der englische Ausdruck musste wegen der darauf gebauten weiteren Terminologie hier beibehalten werden.

Harmonische Kugelfunctionen (*Spherical Harmonics*), S. 156.

Vorrückende Rotation (*Precessional Rotation*), § 104.

Hooke's Schlüssel, § 109.

Gleiten, Rollen, Kreiseln (*sliding*, *rolling*, *spinning*) eines Körpers auf einem anderen, § 110.

Drillung oder Torsion (*twist*), § 119.

Synclastische und anticlastische Flächen, § 128.

Sphärischer Excess, § 134.

Gesammtkrümmung, mittlere Krümmung, specifische Krümmung und Horograph einer Fläche, § 136.

Wendungscurve einer Fläche (*Edge of regression*), § 148.

Deformation (*strain*) eines Körpers, § 154.

Einfache Schiebung (*Simple shear*), § 171.

Reine Deformation oder Verzerrung (*Pure strain*), § 183.

Tangentiale Verschiebung einer Curve, § 186.

Verschiebungsfunction (*Displacement function*), § 190, 1.

Grade der Freiheit, § 195 bis 201.

Kinetische Energie, § 213, gleich „Lebendige Kraft", auch § 280.

Potentielle Energie, § 241, § 269.

Trägheitsmittelpunkt (*Centre of Inertia*), § 230, gleich „Schwerpunkt", oder besser als letzterer Ausdruck.

Conservatives System von Körpern, § 271.

Gyrationsradius, § 281.

Wirkung (*Action*), § 318.

Charakteristische Function (W. R. Hamilton's), § 323.

INHALTSVERZEICHNISS
DES
ERSTEN THEILS.

Erstes Capitel.
Kinematik.

Zweites Capitel.

Gesetze und Principien der Dynamik.

Drittes Capitel.

Erfahrung.

Viertes Capitel.

Maasse und Messinstrumente.

Druckfehler.

Seite 60, Zeile 10 v. u., lies $\frac{\pi}{2}$ statt π.

„ 199, „ 10 v. o. „ Energie statt Kraft.

ERSTER THEIL.

EINLEITENDE BEGRIFFE.

Erstes Capitel.

Kinematik.

1. Es giebt viele Eigenschaften der Bewegung, der Orts- und Formveränderung, welche völlig unabhängig von physikalischen Begriffen, wie Kraft, Masse, Elasticität, Temperatur, Magnetismus, Elektricität, betrachtet werden können. Da eine vorläufige abstracte Untersuchung dieser Eigenschaften von grossem Nutzen für die theoretische Physik ist, so widmen wir ihr das ganze erste Capitel. Dieselbe wird gewissermaassen die Geometrie unseres Gegenstandes ausmachen und Alles umfassen, was rücksichtlich der vorhandenen Bewegungen beobachtet oder durch Schlüsse entdeckt werden kann, so lange nicht nach der Ursache gefragt wird.

2. Mit dieser Beschränkung werden wir zuerst die freie Bewegung eines Punktes, darauf die Bewegung eines an einem unausdehnsamen Faden befestigten Punktes, dann die Bewegungen und Verschiebungen starrer Systeme, und endlich die Formveränderungen von Flächen und festen oder flüssigen Massen betrachten. Beiläufig werden wir auch veranlasst sein, einen grossen Theil des Gebietes der elementaren Geometrie zu berühren, das mit der Krümmung der Linien und Flächen im Zusammenhange steht.

3. **Bewegung eines Punktes.** — Wenn sich ein Punkt aus einer Lage in eine andere bewegt, so muss er offenbar eine continuirliche Linie beschreiben, welche krumm oder gerade sein kann, oder die auch wohl aus Theilen von geraden und krummen Linien besteht, welche unter irgend welchen Winkeln zusammentreffen. Bei der Bewegung eines materiellen Punktes jedoch kann eine solche

plötzliche Richtungsänderung, ausser wo die Geschwindigkeit Null ist, nicht vorkommen, da dies (wie wir später sehen werden) die Wirkung einer unendlich grossen Kraft voraussetzen würde. Es ist zweckmässig, beim Beginn einige Sätze ins Auge zu fassen, die aus dem geometrischen Begriff der von einem bewegten Punkte beschriebenen Bahn abzuleiten sind; diese Sätze wollen wir jetzt folgen lassen und die Betrachtung der Geschwindigkeit, die schon in näherer Beziehung zu physikalischen Begriffen steht, auf einen spätern Paragraphen verschieben.

4. Die Richtung der Bewegung eines Punktes ist in jedem Augenblick die an seine Bahn gezogene Tangente, falls diese Bahn gekrümmt ist. Ist die Bahn eine Gerade, so ist die Bewegungsrichtung diese Gerade selbst.

5. **Krümmung einer ebenen Curve.** — Wenn die Bahn nicht gerade ist, so ändert sich die Bewegungsrichtung von Punkt zu Punkt, und der verhältnissmässige Betrag dieser Aenderung, für die Längeneinheit der Curve berechnet, wird Krümmung genannt.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, nehmen wir an, es seien zwei Tangenten an einen Kreis gezogen und die Berührungspunkte derselben mit dem Mittelpunkte verbunden. Der von den Tangenten eingeschlossene Winkel ist die verlangte Richtungsänderung, und die Grösse der Krümmung ist demnach durch das Verhältniss zwischen diesem Winkel und der Länge des zugehörigen Kreisbogens zu messen. Bezeichnet nun ϑ den Winkel, s den Bogen und ϱ den Radius, so sehen wir auf der Stelle (da der von den Radien gebildete Winkel dem zwischen den Tangenten enthaltenen gleich ist), dass

$$\varrho \vartheta = s,$$

und folglich $\frac{\vartheta}{s} = \frac{1}{\varrho}$ das Maass der Krümmung ist. Danach ist die Krümmung eines Kreises dem Radius umgekehrt proportional; sie ist einfach gleich dem reciproken Werth des Radius, wenn wir als Einheit der Krümmung die Krümmung eines Kreises annehmen, dessen Radius gleich der Längeneinheit ist.

6. Jedes kleine Stück einer Curve kann näherungsweise als ein Kreisbogen angesehen werden, und diese Annahme kommt der Wahrheit desto näher, je kleiner der betrachtete Bogen ist. Die Krümmung desselben ist dann der reciproke Werth des Radius dieses Kreises.

Ist $\delta\vartheta$ der Winkel zwischen zwei Tangenten einer Curve, deren Berührungspunkte um den Curvenbogen δs von einander abstehen, so giebt uns die Definition der Krümmung sofort das Maass derselben: es ist der Grenzwerth, welchen $\frac{\delta \vartheta}{\delta s}$ hat, wenn δs unbegrenzt abnimmt, oder nach der in der Differentialrechnung üblichen Bezeichnung $\frac{d\vartheta}{ds}$. Wir haben aber

$$tan\, \vartheta = \frac{dy}{dx},$$

wenn wir die Curve, die als eben vorausgesetzt wird, nach **Cartesius'** Methode auf zwei rechtwinklige Axen OX, OY beziehen und die Neigung, welche ihre Tangente in irgend einem Punkte x, y gegen die Axe OX hat, mit ϑ bezeichnen. Daraus folgt

$$\vartheta = arctan \frac{dy}{dx},$$

und die Differentiation in Beziehung auf irgend eine unabhängig Veränderliche t liefert:

$$d\vartheta = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2}.$$

Da nun

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

ist, so erhalten wir, wenn ϱ den Krümmungsradius bezeichnet, wenn also $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\vartheta}{ds}$ ist,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}.$$

Obwohl es im Allgemeinen gut ist, in kinematischen und kinetischen Formeln die Zeit als die unabhängig Veränderliche anzusehen und alle veränderlichen geometrischen Elemente als Functionen derselben zu betrachten, so giebt es doch auch Fälle, in denen es sich empfiehlt, die Länge des Bogens oder Weges, den ein Punkt beschreibt, zur unabhängig Veränderlichen zu nehmen. Unter dieser Voraussetzung haben wir

$$d(ds^2) = d(dx^2 + dy^2) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn durch Anfügung eines Index an den Buchstaben d ausgedrückt wird, nach welcher Grösse differentiirt werden soll,

$$\frac{d_s^2 y}{dx} = -\frac{d_s^2 x}{dy} = \frac{\{(d_s^2 y)^2 + (d_s^2 x)^2\}^{1/2}}{(dx^2 + dy^2)^{1/2}},$$

oder

$$\frac{dx}{d_s^2 y} \cdot \frac{\{(d_s^2 x)^2 + (d_s^2 y)^2\}^{1/2}}{(dy^2 + dx^2)^{1/2}} = -\frac{dy}{d_s^2 x} \cdot \frac{\{(d_s^2 x)^2 + (d_s^2 y)^2\}^{1/2}}{(dy^2 + dx^2)^{1/2}} = 1.$$

Diese beiden der Einheit gleichen Ausdrücke benutzen wir, um den oben für $\frac{1}{\varrho}$ erhaltenen Werth auf eine andere Form zu bringen. Mit dem erstern multipliciren wir $dx\, d^2y$, mit dem zweiten $dy\, d^2x$ und gelangen auf diese Weise zu dem Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\{(d_s^2 y)^2 + (d_s^2 x)^2\}^{1/2}}{ds^2},$$

oder nach der gewöhnlichen kurzen, obwohl nicht ganz vollständigen Bezeichnung

$$\frac{1}{\varrho} = \left\{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

7. **Gewundene Curve.** — Wenn alle Punkte der Curve in einer Ebene liegen, so heisst sie eine ebene Curve; ebenso sprechen wir von einem ebenen Polygon oder einer ebenen gebrochenen Linie. Wenn verschiedene Punkte der Linie nicht in einer Ebene liegen, so haben wir im einen Falle eine sogenannte Curve doppelter Krümmung, im andern ein unebenes Polygon. Der Ausdruck „Curve doppelter Krümmung" ist sehr schlecht gewählt, und obgleich man sich desselben allgemein bedient, so hoffen wir doch, dass er wird beseitigt werden können. Es sind nämlich nicht zwei Krümmungen vorhanden, sondern nur eine einzige (nach der obigen Definition), deren Ebene beständig eine andere wird oder sich um die Tangente dreht und auf diese Weise eine Windung darstellt. Der Lauf einer solchen Curve wird im gewöhnlichen Leben treffend „gewunden" genannt, und daher empfiehlt es sich, das Maass der entsprechenden Eigenschaft die „Grösse der Windung" zu nennen.

8. Das Wesen der Windung wird am besten verstanden werden, wenn wir die Curve als ein Polygon mit unendlich kleinen Seiten ansehen. Jede zwei auf einander folgenden Seiten liegen natürlich in einer Ebene, und in dieser Ebene wird die Krümmung wie oben gemessen. Bei einer Curve, die nicht eben ist, wird aber die dritte Polygonseite mit den beiden ersten nicht in derselben Ebene liegen, und daher ist die neue Ebene, in welcher die Krümmung gemessen werden muss, von der alten verschieden. Die Ebene, in welcher man die Krümmung einer gewundenen Curve zu beiden Seiten irgend eines Punktes misst, wird zuweilen die diesem Punkte zugehörige osculatorische Ebene der Curve genannt. Da zwei aufeinander folgende Lagen dieser Ebene die zweite Seite des oben erwähnten Polygons enthalten, so leuchtet ein, dass die osculatorische Ebene von einer Lage in die nächstfolgende durch eine Drehung um die an die Curve gezogene Tangente übergeht.

9. **Krümmung und Windung.** — Verfolgen wir den Lauf einer solchen Curve, so sehen wir, dass die Krümmung im Allgemeinen sich ändert, und dass zu gleicher Zeit die Ebene, in welcher die Krümmung liegt, sich um die Curventangente dreht. Der verhältnissmässige Betrag dieser Drehung, oder die Windung, muss daher gemessen werden durch das Verhältniss der Grösse der Drehung der osculatorischen Ebene zur Längeneinheit der Curve.

Um den Krümmungsradius, die Richtungscosinus der osculatorischen Ebene und die Grösse der Windung einer nicht ebenen Curve mittels Cartesius'scher Raumcoordinaten auszudrücken, bezeichnen wir wieder mit $\delta\vartheta$ den Winkel zwischen den Tangenten an zwei Punkten der Curve, zwischen welchen der Curvenbogen δs liegt. Ferner sei $\delta\varphi$ der Winkel zwischen den diesen Punkten zugehörigen osculatorischen Ebenen. Stellt dann ϱ den Krümmungsradius und τ die Grösse der Windung dar, so haben wir

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\vartheta}{ds}, \tag{1}$$

$$\tau = \frac{d\varphi}{ds}, \tag{2}$$

wenn, wie es gewöhnlich geschieht, die Grenzwerthe von $\frac{\delta\vartheta}{\delta s}$, $\frac{\delta\varphi}{\delta s}$ für ein unbegrenzt abnehmendes δs mit $\frac{d\vartheta}{ds}$, $\frac{d\varphi}{ds}$ bezeichnet werden.

Es seien nun OL, OL' zwei Gerade, welche durch einen beliebigen festen Punkt O irgend zwei aufeinander folgenden Lagen einer in Bewegung befindlichen Geraden PT parallel gezogen sind, jede in der durch die Folge der Buchstaben angegebenen Richtung. Auf diesen Geraden errichten wir eine Senkrechte OS, der wir eine solche Richtung ertheilen, dass OL, OL', OS in Beziehung aufeinander im Raum ebenso geordnet sind, wie die positiven Coordinatenaxen OX, OY, OZ. Ferner möge OQ den Winkel LOL' und OR den Winkel halbiren, welchen OL' mit der Verlängerung von OL bildet. Endlich seien a, b, c die Richtungscosinus von OL; a', b', c' diejenigen von OL'; l, m, n diejenigen von OQ; α, β, γ diejenigen von OR und λ, μ, ν diejenigen von OS, und es werde der Winkel LOL' mit $\delta\vartheta$ bezeichnet. Dann ist nach den Elementen der analytischen Geometrie

$$\cos\delta\vartheta = aa' + bb' + cc', \tag{3}$$

$$l = \frac{a+a'}{2\cos\frac{1}{2}\delta\vartheta},\quad m = \frac{b+b'}{2\cos\frac{1}{2}\delta\vartheta},\quad n = \frac{c+c'}{2\cos\frac{1}{2}\delta\vartheta}, \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{a'-a}{2\sin\frac{1}{2}\delta\vartheta},\quad \beta = \frac{b'-b}{2\sin\frac{1}{2}\delta\vartheta},\quad \gamma = \frac{c'-c}{2\sin\frac{1}{2}\delta\vartheta}, \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{bc'-b'c}{\sin\delta\vartheta},\quad \mu = \frac{ca'-c'a}{\sin\delta\vartheta},\quad \nu = \frac{ab'-a'b}{\sin\delta\vartheta}. \tag{6}$$

Sind jetzt die beiden aufeinander folgenden Lagen von PT Tangenten an eine Curve, deren Berührungspunkte durch einen Curvenbogen von der Länge δs von einander getrennt sind, so hat man

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\delta\vartheta}{\delta s} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\delta\vartheta}{\delta s} = \frac{\sin\delta\vartheta}{\delta s}, \tag{7}$$

wenn δs unendlich klein ist. In demselben Grenzfall ist

$$l = \frac{dx}{ds},\quad m = \frac{dy}{ds},\quad n = \frac{dz}{ds},$$

$$a'-a = d\frac{dx}{ds},\quad b'-b = d\frac{dy}{ds},\quad c'-c = d\frac{dz}{ds}, \tag{8}$$

$$bc'-b'c = \frac{dy}{ds}\,d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\frac{dy}{ds},\ \text{u. s. w.}, \tag{9}$$

und α, β, γ werden die Richtungscosinus der nach dem Krümmungsmittelpunkt hin gezogenen Normale PC, während λ, μ, ν die Richtungscosinus der Geraden sind, welche senkrecht auf der osculatorischen Ebene nach derselben Richtung in Beziehung auf PT und PC hin gezogen ist, welche OZ in Beziehung auf OX und OY inne hat. Durch Anwendung der Formeln (7), (8) und (9) erhält man aus (5) und (6)

$$(10) \qquad \alpha = \frac{d\frac{dx}{ds}}{\varrho^{-1}ds}, \quad \beta = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\varrho^{-1}ds}, \quad \gamma = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\varrho^{-1}ds},$$

$$(11) \qquad \lambda = \frac{\frac{dy}{ds}\, d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\, d\frac{dy}{ds}}{\varrho^{-1}ds}, \quad \mu = \text{u. s. w.}, \quad \nu = \text{u. s. w.}$$

Wenn die Wahl der unabhängig Veränderlichen unserm Belieben überlassen ist, so erhält man aus (10) den einfachsten Ausdruck für die Krümmung. Es ist folgender:

$$(12) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\left\{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}^{1/2}}{ds}.$$

Werden die Brüche $\frac{dx}{ds}$, u. s. w. wirklich differentiirt, so geht dieser Ausdruck, bei Anwendung der Formel

$$(13) \qquad ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z,$$

über in

$$(14) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2\}^{1/2}}{ds^2}.$$

Aus (11) ergiebt sich unmittelbar noch ein anderer Ausdruck für $\frac{1}{\varrho}$, nämlich

$$(15) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2 + (dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2\}^{1/2}}{ds^3}.$$

Wir werden sehen, dass jeder dieser Ausdrücke eine besondere Bedeutung in der Kinetik eines materiellen Punktes und der Statik einer biegsamen Schnur hat.

Um die Grösse der Windung $\frac{d\varphi}{ds}$ zu ermitteln, haben wir nur λ, μ, ν statt l, m, n und $\frac{d_t\lambda}{ds}, \frac{d_t\mu}{ds}, \frac{d_t\nu}{ds}$ statt α, β, γ zu setzen. Wir erhalten

$$\tau = \left\{\left(\mu\frac{d_t\nu}{ds} - \nu\frac{d_t\mu}{ds}\right)^2 + \left(\nu\frac{d_t\lambda}{ds} - \lambda\frac{d_t\nu}{ds}\right)^2 + \left(\lambda\frac{d_t\mu}{ds} - \mu\frac{d_t\lambda}{ds}\right)^2\right\}^{1/2},$$

und darin bezeichnen λ, μ, ν die durch die vorhergehenden Formeln bestimmten Richtungscosinus der osculatorischen Ebene.

10. Gesammtkrümmung. — Die Gesammtkrümmung oder die ganze Richtungsänderung eines Bogens einer ebenen Curve ist der Winkel, um welchen die Tangente sich gedreht hat, wenn wir vom einen Ende des Bogens zum andern gehen. Die mittlere Krümmung irgend eines Theils ist gleich der ganzen Krümmung dieses Theils, dividirt durch seine Länge. Nehmen wir an, eine von einem festen Punkte aus gezogene Gerade bewege sich so, dass sie der Bewegungsrichtung eines die Curve beschreibenden Punktes beständig parallel sei, so stellt der Winkel, durch welchen die Gerade sich während der Bewegung des Punktes dreht, das dar, was wir eben als *Gesammtkrümmung definirt* haben. Bei der Bestimmung derselben müssen wir uns natürlich an den modernen umfassendern Begriff des Winkels halten, der auch Winkel, die grösser als zwei Rechte sind, und ebenso negative Winkel in sich schliesst. So ist die Gesammtkrümmung irgend einer geschlossenen Curve, mag dieselbe irgendwo, von aussen betrachtet, concav erscheinen oder nicht, vier rechte Winkel, vorausgesetzt, dass die Curve sich nicht selbst schneidet. Die Gesammtkrümmung einer Lemniscate oder der Figur 8 ist Null, die der Epicycloide  acht Rechte, u. s. w.

11. Die im letzten Paragraphen gegebene Definition kann offenbar auf ein ebenes Polygon ausgedehnt werden. Die gesammte Richtungsänderung oder der Winkel zwischen der ersten und letzten Seite ist dann gleich der Summe der Aussenwinkel, und zwar ist jede Seite in der Richtung zu verlängern, in welcher sie von dem das Polygon beschreibenden Punkte durchlaufen wird. Dies ist richtig, das Polygon mag geschlossen sein oder nicht. Ist dasselbe geschlossen, so ist diese Summe vier Rechte, so lange keine Seite von einer andern durchkreuzt wird — eine Ausdehnung des Euclid'schen Satzes, der die Polygone mit einspringenden Ecken nicht umfasst. Im Falle der sternförmigen Figur  ist die Summe zehn Rechte weniger der Summe der fünf spitzen Winkel der Figur, also acht Rechte, u. s. w.

12. Die Gesammtkrümmung und die mittlere Krümmung einer nicht ebenen Curve können in folgender Weise definirt werden: — Wir denken uns von einem festen Punkte aus gerade Linien gezogen, welche den Tangenten der Curve parallel und gleichgerichtet sind. Diese Linien werden eine Kegelfläche bilden. Weiter nehmen wir an, diese Kegelfläche werde von einer Kugel geschnitten, deren Mittelpunkt der feste Punkt und deren Radius die Längeneinheit ist. Dann misst die Länge der Durchschnittslinie beider Flächen die Gesammtkrümmung der gegebenen Curve, und wenn wir diese Gesammtkrümmung durch die Länge der Curve dividiren, so erhalten wir, wie im Falle einer ebenen Curve, die mittlere Krümmung.

13. Zwei aufeinander folgende Tangenten liegen in der osculatorischen Ebene. Diese Ebene ist daher der Tangentialebene an die im vorhergehenden Paragraphen beschriebene Kegelfläche parallel, und so kann die Windung mittels derselben sphärischen Curve gemessen werden, die wir soeben zur Definition der Gesammtkrümmung benutzt haben. Wir können dies jetzt nicht vollständig darlegen, da dazu die erst später zu behandelnde Theorie der auf Oberflächen gezogenen Curven nöthig sein würde. Wir werden aber Folgendes sehen: Wenn eine Ebene so auf der Kugel rollt, dass sie dieselbe beständig längs der in Rede stehenden Curve berührt, und dass die augenblickliche Axe beständig senkrecht gegen die Curve gerichtet und für die Kugel selbst Tangente ist, so ist die Gesammtkrümmung der Berührungscurve oder der Spur des Rollens auf der Ebene ein genaues Maass der g a n z e n D r e h u n g oder Gesammtwindung. Weiter werden wir uns überzeugen, dass die Krümmung dieser ebenen Curve in jedem Punkte oder, was dasselbe ist, die Projection der Krümmung der sphärischen Curve auf eine Tangentialebene der Kugel gleich der Windung, dividirt durch die Krümmung der gegebenen Curve ist.

Es sei $\frac{1}{\varrho}$ die Krümmung, τ die Grösse der Windung der gegebenen Curve und ds ein Element ihrer Länge. Dann sind $\int \frac{ds}{\varrho}$ und $\int \tau\, ds$ beziehungsweise die Gesammtkrümmung und Gesammtwindung, vorausgesetzt, dass jede Integration sich über irgend eine festgesetzte Länge l der Curve erstreckt. Die mittlere Krümmung und die mittlere Windung sind beziehungsweise

$$\frac{1}{l}\int \frac{ds}{\varrho} \text{ und } \frac{1}{l}\int \tau\, ds.$$

Unendliche Windung wird leicht verstanden werden durch Betrachtung einer Schraubenlinie, die unter einem Steigungswinkel α auf einem geraden Cylinder beschrieben ist, dessen Basis ein Kreis vom Radius r ist. Da die Krümmung im Kreise $\frac{1}{r}$ ist, so ist die der Schraubenlinie natürlich $\frac{\cos^2 \alpha}{r}$. Die Grösse der Windung ist $\frac{\sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{r}$ oder gleich dem Product der Krümmung in $\tan\alpha$. Krümmung und Windung sind folglich einander gleich, wenn $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ist.

Wir wollen die Krümmung wieder mit $\frac{1}{\varrho}$ bezeichnen, so dass $\cos^2\alpha = \frac{r}{\varrho}$ ist. Die H ö h e eines S c h r a u b e n g a n g e s ist $2\pi r \tan\alpha$ $= 2\pi \sqrt{r\varrho}\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)^{1/2}$ und wird folglich, wenn ϱ endlich bleibt, aber r unbegrenzt abnimmt, im Grenzfall gleich $2\pi\sqrt{r\varrho}$, d. h. unendlich klein. Danach wird die Bewegung eines Punktes in der Curve, obgleich sie unendlich wenig von der Bewegung in einer Geraden verschieden ist (die Bahn ist beständig in dem unendlich kleinen Abstande r von der festen Geraden, der Axe des Cylinders), eine endliche Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ besitzen. Die Windung, die gleich $\frac{1}{\varrho}\ \mathit{tan}\ \alpha$ oder $\frac{1}{\sqrt{\varrho r}}\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)^{1/2}$ ist, wird im Grenzfall eine mittlere Proportionale zwischen der unendlichen Krümmung der kreisförmigen Cylinderbasis und der endlichen Krümmung der Curve sein.

Die Beschleunigung (oder Kraft), welche erforderlich ist, um eine solche Bewegung eines materiellen Punktes zu erzeugen, wird später untersucht werden.

14. **Biegsame Linien.** — Eine Kette, Schnur, ein feiner Draht, eine feine Faser oder ein Haar führen uns zu dem Begriff einer vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Linie, die sich weder in der Natur vorfindet, noch künstlich hergestellt werden kann.

Die elementare Kinematik dieses Gegenstandes erfordert keine Untersuchung. Die mathematische Bedingung, die in jedem Falle derselben auszudrücken ist, besteht einfach darin, dass die längs der Linie gemessene Entfernung irgend eines Punktes von irgend einem andern Punkte constant bleibe, wie auch immer die Linie gebogen sei.

15. Der Gebrauch einer Schnur bei Maschinen liefert uns viele praktische Anwendungen dieser Theorie, die im Allgemeinen sehr einfach sind, obgleich merkwürdige und nicht immer sehr leichte geometrische Probleme in Verbindung damit vorkommen. Wir wollen hier bei solchen Fällen, wie Knoten, Weben, Stricken, u. s. w., nicht verweilen, da die allgemeine Entwicklung äusserst schwierig ist, während die gewöhnlichen Fälle allzu einfach sind, als dass eine Erklärung erforderlich wäre.

16. Bei der mechanischen Zeichnung von Curven wird oft eine biegsame und unausdehnbare Schnur vorausgesetzt. Will man z. B. eine Ellipse ziehen, so zeigt die Eigenschaft der Brennpunkte der Curve, dass, wenn man die Enden einer solchen Schnur an diese Punkte befestigt und die Schnur durch einen Stift beständig gespannt hält, der Stift die Curve verzeichnen wird.

Mittels eines um einen Brennpunkt beweglichen Lineals und einer an den andern Brennpunkt und einen Punkt des Lineals befestigten Schnur kann mit Rücksicht auf die analoge Eigenschaft ihrer Brennpunkte die Hyperbel beschrieben werden, u. s. w.

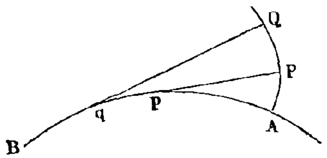
17. **Evolute.** — Von einiger Wichtigkeit in der theoretischen Physik, namentlich in gewissen Fragen der Optik, ist die Betrachtung der Evoluten, und daher wollen wir dieser Anwendung der Kinematik einige Paragraphen widmen.

Definition. — Wenn ein an einem Punkte einer ebenen Curve befestigter biegsamer und unausdehnbarer Faden längs der Curve gespannt und darauf in der Ebene der Curve abgewickelt wird, so beschreibt sein Endpunkt eine Evolvente der Curve. Die ursprüngliche Curve wird mit Rücksicht auf die neu entstandene die Evolute genannt.

18. In der vorstehenden Definition sprechen wir von einer Evolvente und von der Evolute einer Curve. Es lässt sich nämlich leicht einsehen, dass eine Curve nur eine Evolute haben kann, während sie unendlich viele Evolventen besitzt. Denn um eine andere und andere Evolvente zu erhalten, haben wir nur den Curvenpunkt zu ändern, von welchem der zeichnende Punkt seinen Ausgang nimmt, oder die Evolvente zu betrachten, die jeder Punkt des Fadens beschreibt, und diese werden im Allgemeinen verschiedene Curven sein. Dagegen zeigt der folgende Paragraph, dass es nur eine Evolute giebt.

19. Es seien AB irgend eine Curve, PQ ein Theil einer Evolvente und pP, qQ Lagen des freien Theils des Fadens. Man sieht auf der Stelle, dass pP, qQ Tangenten an den Bogen AB in den Punkten p, q sein müssen. Auch dreht sich der Faden in jeder Lage wie pP um den Punkt p, so dass das in P liegende unendlich kleine Curvenelement als Bogen eines Kreises anzusehen ist, der den Mittelpunkt p und den Radius pP hat: folglich ist pP eine Normale der Curve PQ. Danach ist die Evolute von PQ eine ganz bestimmte Curve, nämlich die einhüllende Linie der in allen Punkten von PQ errichteten Normalen oder, was dasselbe ist, der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Curve PQ. Wir erwähnen nur noch einen Satz, der sich auf der Stelle aus der Entstehungsart von PQ ergiebt, nämlich dass der Bogen qp gleich der Differenz von qQ und pP, oder dass der Bogen pA gleich pP ist.

Fig. 1.



20. Geschwindigkeit. — Die Intensität der Bewegung eines Punktes heisst seine Geschwindigkeit. Dieselbe wird offenbar grösser oder kleiner sein, je nachdem der in einer gegebenen Zeit durchlaufene Weg grösser oder kleiner ist. Die Geschwindigkeit kann gleichförmig, d. h. in jedem Augenblick dieselbe, oder veränderlich sein.

Eine gleichförmige Geschwindigkeit wird durch den während der Zeiteinheit zurückgelegten Weg gemessen und im Allgemeinen durch die Anzahl der auf die Secunde kommenden Fuss ausgedrückt. Wenn sie sehr gross ist, wie beim Licht, so drückt man sie durch die Anzahl der auf die Secunde kommenden Meilen aus. Es ist zu bemerken, dass die Zeit hier in dem abstracten Sinne einer gleichförmig zunehmenden Grösse gebraucht wird, was man in der Differentialrechnung eine unabhängig Veränderliche nennt; ihre physikalische Definition wird im nächsten Capitel gegeben werden.

21. Wenn danach v die Geschwindigkeit eines in gleichförmiger Bewegung begriffenen Punktes ist, so legt derselbe jede Secunde einen Weg von v Fuss, also in t Secunden, wo t irgend eine Zahl bezeichnet, einen Weg von vt Fuss zurück, und wenn der durchlaufene Weg mit s bezeichnet wird, so haben wir

$$s = vt.$$

Die Einheit der Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher während der Zeiteinheit die Raumeinheit zurücklegt.

22. Es ist gut, Folgendes zu beachten: Da unsere Formel uns allgemein

$$v = \frac{s}{t}$$

liefert, und da wir durchaus keine Voraussetzung über die Grösse von s und t gemacht haben, so können wir s und t so klein, als wir nur wollen, annehmen. Wir erhalten also dasselbe Resultat, mögen wir nun v von dem in 1000000 Secunden oder von dem in $^1/_{1000000}$ Secunden zurückgelegten Wege herleiten. Dieser Gedanke ist von grossem Nutzen, da er uns Vertrauen in das Ergebniss eines spätern Paragraphen einflössen wird, in welchem wir, um eine veränderliche Geschwindigkeit zu messen, genöthigt sein werden, uns dem Werthe derselben durch Betrachtung des Weges zu nähern, der während einer so kurzen Zeit durchlaufen ist, dass die Geschwindigkeit während derselben ihre Grösse nicht merklich ändert.

23. Wenn der Punkt sich nicht gleichförmig bewegt, so ist die Geschwindigkeit veränderlich oder zu verschiedenen aufeinander folgenden Augenblicken verschieden. Wir verstehen dann unter der mittleren Geschwindigkeit während irgend einer Zeit den während dieser Zeit zurückgelegten Weg, dividirt durch die Zeit. Ferner definiren wir die wirkliche Geschwindigkeit, die der Punkt zu irgend einer Zeit besitzt, als den Weg, den er während einer Secunde zurückgelegt haben würde, wenn er für diese Zeit seine Geschwindig-

keit unverändert beibehalten hätte. Dass jeder in Bewegung befindliche Körper in jedem Augenblick eine bestimmte Geschwindigkeit hat, ist Allen einleuchtend und Gegenstand des täglichen Gesprächs. So nimmt die Schnelligkeit eines Eisenbahnzuges vom Augenblick der Abfahrt an nach und nach zu, und wir halten es nicht für ungereimt, zu sagen, er bewege sich in einem bestimmten Augenblick mit einer Geschwindigkeit von 10 oder 50 Meilen die Stunde, obgleich er sich während einer Stunde vielleicht überhaupt keine Meile fortbewegt hat. In der That können wir voraussetzen, in irgend einem Augenblick während der Bewegung werde der Dampf so adjustirt, dass er den *Zug* einige Zeit hindurch sich mit vollkommen gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen lasse. Dies würde die Geschwindigkeit sein, welche der Zug in dem in Rede stehenden Moment besässe. Aber auch ohne vorauszusetzen, dass die bewegende Kraft in dieser Weise adjustirt werde, können wir offenbar diese augenblickliche Geschwindigkeit näherungsweise erhalten, indem wir die Bewegung während einer so kurzen Zeit betrachten, dass die während derselben wirklich erfolgte Geschwindigkeitsänderung klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können.

24. Bezeichnet v die Geschwindigkeit, die der Punkt beim Beginn oder beim Ende oder zu irgend einem Augenblicke während der Bewegung besitzt, und s den während der Zeit t wirklich zurückgelegten Weg, so ist die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ um so mehr annähernd richtig, je mehr die Geschwindigkeit während der Zeit t eine annähernd gleichförmige ist. Nehmen wir also t als $^1/_{10}$ Secunde an, und ergiebt sich, dass der während dieser Zeit zurückgelegte Weg s_1 ist, so ist $\frac{s_1}{^1/_{10}}$ oder $10\,s_1$ ein Näherungswerth der in jedem Augenblick während der Zeit t stattfindenden Geschwindigkeit. Nehmen wir für t $^1/_{100}$ Secunde und ist s_2 der entsprechende Weg, so ist $\frac{s_2}{^1/_{100}}$ oder $100\,s_2$ ein schon genauerer Näherungswerth. Die Reihe der Werthe:

der in einer Secunde zurückgelegte Weg,
das Zehnfache des im ersten Zehntel einer Sec. zurückgelegt. Weges,
d. Hundertfache „ „ „ Hundertel „ „ „ „,

u. s. w., bringen uns also der beim Beginn der ersten Secunde stattfindenden Geschwindigkeit immer näher. Die *ganze* Grundlage der Differentialrechnung ist thatsächlich in der einfachen Frage enthalten: „Welches ist der verhältnissmässige Betrag der Zunahme des zurückgelegten Weges?", d. h.: Was ist die Geschwindigkeit des in Bewegung befindlichen Punktes?

Ein Punkt, welcher während der Zeit t einen Weg s zurückgelegt hat, möge seine Bewegung noch einen Zeittheil δt hindurch fortsetzen und während desselben den Weg δs beschreiben. Ist dann v_1 die grösste und v_2 die kleinste Geschwindigkeit, welche der Punkt während δt besitzt, so hat man offenbar:

$$\delta s < v_1 . \delta t, \quad \delta s > v_2 . \delta t,$$

also

$$\frac{\delta s}{\delta t} < v_1, \quad \frac{\delta s}{\delta t} > v_2.$$

Je mehr aber δt abnimmt, desto mehr nähern sich v_1 und v_2, und im Grenzfall fallen beide Grössen mit der zur Zeit t stattfindenden Geschwindigkeit zusammen; folglich ist

$$v = \frac{d s}{d t}.$$

25. **Zerlegung einer Geschwindigkeit.** — Die obige Definition der Geschwindigkeit ist stets auf dieselbe Weise anwendbar, der Punkt mag sich in einer geraden oder in einer krummen Linie bewegen. Da aber im letztern Falle sich die Bewegungsrichtung beständig ändert, so ist der blosse Betrag der Geschwindigkeit nicht hinreichend, die Bewegung vollständig zu bestimmen, und wir müssen in jedem solchen Falle noch andere Data haben, um die Unbestimmtheit zu beseitigen.

In allen Fällen dieser Art, mögen wir es wie hier mit Geschwindigkeiten, oder wie später mit Beschleunigungen und Kräften zu thun haben, besteht die gewöhnlich angewandte Methode vornehmlich darin, dass man nicht die Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft direct studirt, sondern sich mit den Theilen derselben beschäftigt, die parallel zu irgend drei auf einander senkrechten Geraden genommen sind. Wenn z. B. ein Zug auf einer geneigten Bahn nach Nord-Westen hin ansteigt, so kann die ganze Geschwindigkeit und die Neigung der Bahn gegeben sein. Dieselben Begriffe lassen sich aber auch so ausdrücken: der Zug bewegt sich zugleich nach Norden, nach Westen und nach oben, und die Bewegung wird sowohl der Grösse wie der Richtung nach vollkommen bekannt sein, wenn wir die in diesen Richtungen stattfindenden Geschwindigkeiten einzeln kennen. Diese Geschwindigkeiten werden die nach den drei auf einander senkrechten Richtungen: Norden, Westen, Oben genommenen Componenten der ganzen Geschwindigkeit genannt.

Im Allgemeinen ist (wie wir gesehen haben) die Geschwindigkeit eines in x, y, z befindlichen Punktes gleich $\frac{ds}{dt}$, oder, was dasselbe ist:

$$\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Nun ist $\frac{dx}{dt}$ die verhältnissmässige Zunahme von x, oder die der x Axe parallele Geschwindigkeit, die wir mit v_x bezeichnen wollen. Eine analoge Bedeutung hat jeder der Ausdrücke $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Sind also α, β, γ die Winkel, welche die Bewegungsrichtung mit den Axen bildet, so ist

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{v_x}{v},$$

folglich

$$v_x = v\cos\alpha,$$

und diese Gleichung lehrt Folgendes: —

26. Eine Geschwindigkeit von beliebiger Richtung kann nach jeder andern Richtung und senkrecht zu derselben zerlegt werden. Die erstere dieser beiden Componenten erhält man dadurch, dass man die Geschwindigkeit mit dem Cosinus des von beiden Richtungen eingeschlossenen Winkels multiplicirt; bei der Bestimmung der zweiten Componente hat man den Sinus dieses Winkels als Factor zu benutzen. Ferner kann jede Geschwindigkeit in drei Componenten zerlegt werden, die zu drei beliebigen auf einander senkrechten Geraden parallel sind, und jede Componente wird gebildet durch Multiplication der ganzen Geschwindigkeit mit dem Cosinus des zwischen den Richtungen der Geschwindigkeit und der betreffenden Componente enthaltenen Winkels.

Es ist nützlich, zu beachten, dass, wenn die Axen der x, y, z nicht senkrecht auf einander stehen, die den Axen parallelen Geschwindigkeiten immer noch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sein werden. Es ist dann aber nicht mehr

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Wir überlassen es dem Leser, in diesem Falle die ganze Geschwindigkeit durch ihre Componenten genau auszudrücken.

Wenn wir die Geschwindigkeit längs einer Geraden zerlegen, die mit den Axen die Winkel λ, μ, ν und mit der Bewegungsrichtung den Winkel ϑ bildet, so ergeben sich, je nachdem wir direct v oder die Componenten v_x, v_y, v_z von v zerlegen, zwei Ausdrücke, die natürlich einander gleich sein müssen, nämlich

$$v\cos\vartheta = v_x\cos\lambda + v_y\cos\mu + v_z\cos\nu.$$

Werden in diese Gleichung die (§. 25) schon gegebenen Werthe von v_x, v_y, v_z eingesetzt, so erhalten wir den bekannten geometrischen Satz:

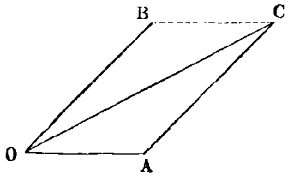
$$\cos \vartheta = \cos \alpha \,.\, \cos \lambda + \cos \beta \,.\, \cos \mu + \cos \gamma \,.\, \cos \nu$$

über den Winkel zwischen zwei Geraden, die mit den Axen gegebene Winkel bilden. Aus dem obigen Ausdruck ersehen wir auf der Stelle Folgendes: —

27. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. — Die nach irgend einer Richtung genommene Componente einer Geschwindigkeit ist die Summe der nach derselben Richtung genommenen Theile der drei rechtwinkligen Componenten der ganzen Geschwindigkeit. Dieser Satz behält seine Gültigkeit, wenn die Bewegung auf eine Ebene beschränkt ist; nur haben wir dann bloss zwei rechtwinklige Componenten. Diese Resultate führen zu der folgenden an sich klaren geometrischen Construction: —

Es sollen zwei beliebige Geschwindigkeiten, wie OA, OB, zusammengesetzt werden. Man ziehe von A aus AC parallel und gleich OB und verbinde O mit C, so ist OC die resultirende Geschwindigkeit in Grösse und Richtung.

Fig. 2.



OC ist augenscheinlich die Diagonale des Parallelogramms, welches OA und OB zu Seiten hat.

Hieraus ergeben sich weiter folgende Sätze: —

Die Resultante von Geschwindigkeiten, welche durch die sämmtlich in demselben Sinne genommenen Seiten irgend eines geschlossenen Polygons dargestellt werden, ist Null, das Polygon mag eben sein oder nicht.

Wenn alle Seiten eines Polygons, mit Ausnahme einer einzigen, Geschwindigkeiten darstellen, so wird die Resultante dieser Geschwindigkeiten durch die eine ausgeschlossene Seite dargestellt, vorausgesetzt, dass letztere im entgegengesetzten Sinne wie alle übrigen genommen wird.

Sind zwei oder drei Geschwindigkeiten in zwei oder drei auf einander senkrechten Richtungen gegeben, so ist die Resultante die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate, und die Cosinus der Winkel, welche die Resultante mit den gegebenen Richtungen bildet, sind die Verhältnisse der Componenten zur Resultante.

Da δs im Grenzfall in δr und $r \delta \vartheta$ zerlegt werden kann, wo r und ϑ Polarcoordinaten einer ebenen Curve sind, so ist leicht zu sehen, dass $\frac{dr}{dt}$ und $r \frac{d\vartheta}{dt}$ die in der Richtung des Radiusvector und senkrecht zu dieser Richtung genommenen Componenten der Geschwindigkeit sind. Wir können dasselbe Resultat noch auf eine andere Weise erlangen. Es ist

$$x = r \cdot \cos\vartheta,\ y = r \cdot \sin\vartheta,$$

folglich

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta + r\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Nach §. 26 ist aber die ganze in der Richtung von r genommene Geschwindigkeitscomponente

$$\frac{dx}{dt}\cos\vartheta + \frac{dy}{dt}\sin\vartheta,$$

und dieser Ausdruck hat, den letzten Formeln zufolge, den Werth $\frac{dr}{dt}$. In derselben Weise erhält man für die zu r senkrechte Componente

$$\frac{dy}{dt}\cos\vartheta - \frac{dx}{dt}\sin\vartheta,\ \text{oder}\ r\frac{d\vartheta}{dt}.$$

28. **Beschleunigung.** — Man nennt die Geschwindigkeit eines Punktes beschleunigt oder verzögert, je nachdem dieselbe zu- oder abnimmt. Es ist jedoch üblich, in beiden Fällen das Wort Beschleunigung zu gebrauchen, und dieselbe im erstern Falle als positive, im zweiten Falle als negative Grösse anzusehen. Die Beschleunigung einer Geschwindigkeit kann natürlich gleichförmig oder veränderlich sein. Sie heisst gleichförmig, wenn der Punkt in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszunahmen empfängt, und wird dann gemessen durch die während der Zeiteinheit wirklich erfolgte Geschwindigkeitszunahme. Wenn wir als Einheit der Beschleunigung die Beschleunigung annehmen, welche der Geschwindigkeit eines Punktes während der Zeiteinheit eine Einheit der Geschwindigkeit hinzufügt, so wird eine Beschleunigung α in der Zeiteinheit α und somit in t Zeiteinheiten αt Einheiten der Geschwindigkeit hinzufügen. Bezeichnet also V die während der Zeit t erfolgte Geschwindigkeitsänderung, so ist

$$V = \alpha t.$$

29. Wenn der Punkt in aufeinander folgenden gleichen Zeitabschnitten nicht gleiche Geschwindigkeitszunahmen empfängt, so ist die Beschleunigung veränderlich. Sie wird dann durch die Geschwindigkeitszunahme gemessen, welche in der Zeiteinheit erzeugt sein würde, wenn die Beschleunigung während derselben ihren anfänglichen Werth unverändert beibehalten hätte. Die mittlere Beschleunigung für irgend eine Zeit ergiebt sich, wenn man die

ganze während dieser Zeit gewonnene Geschwindigkeit durch die Zeit dividirt.

Es sei v die Geschwindigkeit zur Zeit t, δv die Geschwindigkeitsänderung während des Zeitraums δt, und α_1, α_2 beziehungsweise der grösste und der kleinste Werth der während δt eingetretenen Beschleunigung. Dann ist offenbar

$$\delta v < \alpha_1 \delta t, \; \delta v > \alpha_2 \delta t,$$

oder

$$\frac{\delta v}{\delta t} < \alpha_1, \; \frac{\delta v}{\delta t} > \alpha_2.$$

Wird δt immer kleiner und kleiner angenommen, so nähern sich die Werthe von α_1 und α_2 immer mehr einander, und im Grenzfall fallen sie mit der zur Zeit t stattfindenden Beschleunigung α zusammen. Es ist also

$$\frac{dv}{dt} = \alpha.$$

Es ist von Nutzen, zu bemerken, dass wir (bei Annahme einer andern unabhängig Veränderlichen) auch

$$\alpha = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

schreiben können.

Da $v = \frac{ds}{dt}$, so haben wir $\alpha = \frac{d^2 s}{dt^2}$, und aus Betrachtungen, die den oben angestellten ganz analog sind, erhellt, dass

$$\alpha_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \text{ u. s. w.}$$

die den Axen parallelen Beschleunigungen sind. Man übersehe aber durchaus nicht, dass $\frac{d^2 s}{dt^2}$ nicht die vollständige Resultante von $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ist; denn wir haben im Allgemeinen nicht

$$\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2.$$

Die Richtungscosinus der in irgend einem Punkte x, y, z an die Bahn gezogenen Tangente sind

$$\frac{1}{v}\frac{dx}{dt}, \; \frac{1}{v}\frac{dy}{dt}, \; \frac{1}{v}\frac{dz}{dt}.$$

Diejenigen der Geraden, welche die resultirende Beschleunigung darstellt, sind

$$\frac{1}{f}\frac{d^2 x}{dt^2}, \; \frac{1}{f}\frac{d^2 y}{dt^2}, \; \frac{1}{f}\frac{d^2 z}{dt^2},$$

wo die resultirende Beschleunigung der Kürze wegen mit f bezeichnet ist. Die Richtungscosinus der Ebene dieser beiden Linien sind daher

$$\frac{dy\, d^2 z - dz\, d^2 y}{\{(dy\, d^2 z - dz\, d^2 y)^2 + (dz\, d^2 x - dx\, d^2 z)^2 + (dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)^2\}^{1/2}}, \text{ u. s. w.}$$

Diese Ausdrücke zeigen (§ 9), dass diese Ebene die osculatorische Ebene der Curve ist. Bezeichnet ferner ϑ den von jenen beiden Geraden eingeschlossenen Winkel, so ist

$$sin\,\vartheta = \frac{\{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2\}^{1/2}}{v f\,d t^3},$$

oder mit Rücksicht auf den in § 9 erhaltenen Ausdruck der Krümmung

$$sin\,\vartheta = \frac{ds^3}{\varrho v f\,dt^3} = \frac{v^2}{f\varrho}.$$

Es ist folglich

$$f\,sin\,\vartheta = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Weiter ist

$$cos\,\vartheta = \frac{1}{vf}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{ds\,d^2s}{vf\,dt^3} = \frac{d^2s}{f\,dt^2}$$

also

$$f\,cos\,\vartheta = \frac{d^2s}{dt^2},$$

und wir erhalten somit folgenden Satz: —

30. **Zerlegung und Zusammensetzung von Beschleunigungen.** — Die nach irgend einer Richtung genommene Gesammtbeschleunigung ist die Summe der (nach jener Richtung genommenen) Componenten der zu drei beliebigen auf einander senkrechten Axen parallelen Beschleunigungen; jede Componente einer Beschleunigung wird auf dieselbe Weise wie die Componente einer Geschwindigkeit gefunden, nämlich durch Multiplication mit dem Cosinus des Winkels zwischen der Richtung der Beschleunigung und der Geraden, längs welcher dieselbe genommen werden soll.

31. Wenn sich ein Punkt in einer Curve bewegt, so kann die Gesammtbeschleunigung in zwei Theile zerlegt werden, von denen der eine die Richtung der Bewegung hat und der Beschleunigung der Geschwindigkeit gleich ist; der andere ist gegen den Krümmungsmittelpunkt hin (also senkrecht gegen die Bewegungsrichtung) gerichtet, und seine Grösse ist dem Quadrate der Geschwindigkeit und zugleich der Krümmung der Bahn proportional. Der erstere dieser Theile ändert die Geschwindigkeit, der zweite wirkt nur auf die Gestalt der Bahn oder auf die Bewegungsrichtung ein. Ist demnach ein in Bewegung befindlicher Punkt einer constanten oder veränderlichen Beschleunigung unterworfen, die beständig senkrecht zur Bewegungsrichtung ist, so erleidet die Geschwindigkeit keine Aenderung, und die Wirkung der Beschleunigung besteht einzig und allein darin, dass sie den Punkt sich in einer Curve bewegen lässt, deren Krümmung in jedem Augenblick der Beschleunigung proportional ist.

32. Es lässt sich dies noch in anderer Weise ausdrücken: Wenn sich ein Punkt mit gleichförmiger oder veränderlicher Geschwindigkeit in einer Curve bewegt, so ist seine Richtungsänderung als gleichbedeutend mit einer gegen den Krümmungsmittelpunkt hin gerichteten Beschleunigung anzusehen, deren Grösse gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser ist. Die Gesammtbeschleunigung ist in jedem Falle die Resultante der die Richtungsänderung in der angegebenen Weise ersetzenden Beschleunigung und der Beschleunigung der längs der Curve wirklich stattfindenden Geschwindigkeit.

Wenn die Bewegung in einer ebenen Curve erfolgt, so können wir die Beschleunigung noch auf eine andere Weise zerlegen, die zuweilen von Nutzen ist, nämlich längs der Richtung des Radiusvector und senkrecht zu dieser Richtung. Durch eine der in § 27 angewandten ganz ähnliche Methode finden wir ohne Mühe für die nach der Richtung des Radiusvector genommene Componente

$$\frac{d^2 r}{d t^2} - r \left(\frac{d \vartheta}{d t}\right)^2,$$

und für die zum Radiusvector senkrechte Componente

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d t}\left(r^2 \frac{d \vartheta}{d t}\right).$$

33. **Bestimmung der Bewegung aus der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung.** — Wenn in irgend einem Falle der Bewegung eines Punktes die ganze Geschwindigkeit und deren Richtung, oder einfach die nach drei auf einander senkrechten Richtungen genommenen Geschwindigkeitscomponenten für irgend eine Zeit, oder, wie es meist geschieht, für irgend eine Lage gegeben sind, so ist es eine Aufgabe der reinen Mathematik, die Gestalt der beschriebenen Bahn und andere die Bewegung betreffende Umstände zu bestimmen, und diese Aufgabe kann in allen Fällen, wenn auch nicht ganz exact, so doch mit jedem nur wünschenswerthen Grade der Genauigkeit gelöst werden.

Ebenso verhält es sich, wenn in jedem Augenblick die Gesammtbeschleunigung und deren Richtung, oder einfach deren rechtwinklige Componenten gegeben sind, vorausgesetzt, dass in irgend einem Augenblicke die Geschwindigkeit, die Bewegungsrichtung und zugleich die Lage des Punktes bekannt sind.

Denn wir haben im ersteren Falle

$$\frac{d x}{d t} = v_x = v \cos \alpha, \text{ u. s. w.},$$

und da diese drei simultanen Gleichungen nur x, y, z und t enthalten können, so werden wir nach Integration derselben im Stande sein, x, y, z als Functionen von t auszudrücken. Wird aus den letzterhaltenen Gleichungen t eliminirt, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x, y und z, von denen jede eine Oberfläche darstellt, auf welcher die vom Punkte beschriebene Bahn liegt; letztere ist daher durch den Schnitt dieser beiden Oberflächen vollständig bestimmt.

Im zweiten Falle haben wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha_x, \text{ u. s. w.,}$$

und auch für diese Gleichungen gelten die obigen Bemerkungen; nur ist hier jede Gleichung zweimal zu integriren.

Die durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten lassen sich sofort bestimmen, wenn die Coordinaten des Punktes und die Componenten seiner Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick bekannt sind.

34. **Beispiele von Geschwindigkeiten.** — Aus den dargelegten Principien lassen sich eine Menge interessanter Resultate herleiten, von denen wir einige der wichtigsten anführen wollen:

a. Wenn die Geschwindigkeit eines in Bewegung befindlichen Punktes gleichförmig ist, und wenn die Richtung derselben sich gleichförmig in einer Ebene dreht, so ist die Bahn, welche der Punkt beschreibt, ein Kreis.

b. Wenn sich ein Punkt in einer Ebene bewegt und die jeder von zwei rechtwinkligen Axen parallelen Geschwindigkeitscomponenten ihren Entfernungen von diesen Axen beziehungsweise proportional sind, so ist die Bahn ein Kegelschnitt, dessen Hauptdurchmesser mit jenen Axen zusammenfallen; ausserdem ist die Beschleunigung beständig gegen den Anfangspunkt der Coordinaten hin oder von diesem Punkte weggerichtet.

c. Wenn jede der beiden je einer Axe parallelen Geschwindigkeitscomponenten das nämliche Vielfache ihres Abstandes von der andern Axe ist, so ist die Bahn eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade.

d. Wenn die Geschwindigkeit gleichförmig ist, sich aber, was ihre Richtung betrifft, gleichförmig um einen geraden Kegel von kreisförmiger Basis dreht, so bewegt sich der Punkt in einer Schraubenlinie, auf einem Cylinder von kreisförmiger Basis, dessen Axe der des Kegels parallel ist.

a. Es sei a die Geschwindigkeit und α der Winkel, durch welchen ihre Richtung sich während der Zeiteinheit dreht; dann haben wir bei passender Wahl der Axen

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin \alpha t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos \alpha t,$$

und daraus ergiebt sich

$$(x-A)^2+(y-B)^2=\frac{a^2}{\alpha^2}.$$

b. Aus

$$\frac{dx}{dt}=\mu y,\ \frac{dy}{dt}=\nu x$$

folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mu\nu x,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\mu\nu y;$$

die ganze Beschleunigung ist also gegen den Anfangspunkt hin oder von diesem Punkte weg gerichtet.

Ferner ist $\frac{dy}{dx}=\frac{\nu}{\mu}\frac{x}{y}$, mithin $\mu y^2-\nu x^2=C$, und dies ist die Gleichung eines auf seine Hauptaxen bezogenen Kegelschnitts.

c. Ist

$$\frac{dx}{dt}=\mu x,\ \frac{dy}{dt}=\mu y,$$

so erhalten wir

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

oder

$$y=Cx.$$

35. **Beispiele von Beschleunigungen.** — **a.** Wenn sich ein Punkt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit V in einem Kreise vom Radius R bewegt, so ist die ganze Beschleunigung gegen den Mittelpunkt hin gerichtet und hat den constanten Werth $\frac{V^2}{R}$. (S. § 31.)

b. Bei gleichförmiger Beschleunigung in der Richtung der Bewegung beschreibt ein Punkt Wege, welche den Quadraten der seit Beginn der Bewegung verflossenen Zeiten proportional sind.

Der während irgend eines Zeitraums zurückgelegte Weg ist in diesem Falle gleich dem Wege, der in derselben Zeit beschrieben sein würde, wenn die Bewegung gleichförmig mit der in der Mitte des in Rede stehenden Zeitraums stattfindenden Geschwindigkeit erfolgt wäre. Mit anderen Worten: die mittlere Geschwindigkeit während irgend einer Zeit ist (bei gleichförmiger Beschleunigung) das arithmetische Mittel aus der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit. Dies ist der Fall bei einem in verticaler Richtung fallenden Steine.

Es sei nämlich die Beschleunigung der x Axe parallel, so haben wir

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha,$$

folglich

$$\frac{dx}{dt}=v=\alpha t \text{ und } x=\tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Nach § 29 können wir die obige Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$v\frac{dv}{dx}=\alpha,$$

und daraus ergiebt sich

$$\frac{v^2}{2} = \alpha x.$$

Wenn der Punkt zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit V besass, so gehen diese Gleichungen über in

$$v = V + \alpha t,\ x = Vt + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \text{ und } \frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2} + \alpha x.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist also $= V$,
die Endgeschwindigkeit $= V + \alpha t$,
das arithmetische Mittel beider Werthe $= V + \tfrac{1}{2}\alpha t$
$= \frac{x}{t}$,

und dies beweist die Richtigkeit des zweiten Theils der obigen Behauptung.

c. Wenn die Beschleunigung gleichförmig und von constanter Richtung ist, so beschreibt der Punkt eine Parabel, deren Axe jener Richtung parallel ist. Dies ist der Fall eines im leeren Raum sich bewegenden Projectils.

Denn wenn die y Axe der Beschleunigung α parallel ist und die Bewegung zu irgend einer Zeit in der xy Ebene erfolgt, so ist

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0,\ \frac{dz}{dt} = 0,\ z = 0,$$

die Bewegung folglich ganz auf die xy Ebene beschränkt.

Dann ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha,$$

und wenn

$$\frac{dx}{dt} = const. = U$$

ist, so erhalten wir sofort

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha}{U^2},$$

oder

$$y = \frac{\alpha x^2}{2U^2} + Cx + C',$$

und

$$y = \frac{\alpha x^2}{2U^2} + \frac{Vx}{U},$$

vorausgesetzt, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ und $\frac{dy}{dt} = V$ ist. Die letzte Gleichung kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$\frac{2U^2}{\alpha}\left(y + \frac{V^2}{2\alpha}\right) = \left(x + \frac{UV}{\alpha}\right)^2$$

und stellt eine Parabel dar, deren Axe parallel der y Axe, deren Parameter gleich $\frac{U^2}{2\alpha}$, und deren Scheitel der durch die Coordinaten

$$x = -\frac{UV}{\alpha},\ y = -\frac{V^2}{2\,\alpha}$$

bestimmte Punkt ist.

d. Als Beispiel einer Beschleunigung in einer gewundenen Curve nehmen wir den Fall des § 13 oder des § 34, d.

Ein Punkt bewege sich in einem Kreise vom Radius r mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω (in Beziehung auf den Mittelpunkt); zugleich möge sich dieser Kreis senkrecht gegen seine Ebene mit der Geschwindigkeit V bewegen. Dann beschreibt der Punkt eine Schraubenlinie auf einem Cylinder vom Radius r, und der Steigungswinkel oder die Neigung α wird durch die Formel

$$\tan\alpha = \frac{V}{r\,\omega}$$

bestimmt. Die Krümmung der Bahn ist

$$\frac{1}{r}\,\frac{r^2\,\omega^2}{V^2+r^2\,\omega^2} \text{ oder } \frac{r\,\omega^2}{V^2+r^2\,\omega^2},$$

und das Maass der Windung

$$\frac{\omega}{V}\cdot\frac{V^2}{V^2+r^2\,\omega^2} = \frac{V\omega}{V^2+r^2\,\omega^2}.$$

Die Beschleunigung ist senkrecht gegen die Axe des Cylinders gerichtet und gleich $r\,\omega^2$. Wird dieselbe mit A bezeichnet, so ist

$$\text{die Krümmung} = \frac{A}{V^2+Ar} = \frac{A}{V^2+\frac{A^2}{\omega^2}},$$

$$\text{die Windung} = \frac{V}{\sqrt{Ar}}\cdot\frac{A}{V^2+Ar} = \frac{V\omega}{V^2+\frac{A^2}{\omega^2}}.$$

Nehmen wir nun an, A bleibe endlich und r werde unendlich klein, also ω unendlich gross, so ist im Grenzfall

$$\text{die Krümmung} = \frac{A}{V^2},$$

$$\text{die Windung} = \frac{\omega}{V}.$$

Wenn wir danach einen materiellen Punkt haben, der sich in der dargelegten Weise bewegt, und die Kraft (s. das zweite Capitel) betrachten, welche erforderlich ist, um die Beschleunigung hervorzubringen, so finden wir, dass eine endliche, zur Bewegungsbahn senkrechte Kraft, deren Richtung sich mit einer unendlich grossen Winkelgeschwindigkeit dreht, eine constante unendlich kleine Abweichung (in einer ihrer eigenen entgegengesetzten Richtung) von der Linie der ungestörten Bewegung, sowie endliche Krümmung und unendliche Windung unterhält.

e. Wenn die Beschleunigung senkrecht gegen eine gegebene Ebene und der Entfernung von derselben proportional ist, so ist die Bahn eine ebene Curve, und zwar die harmonische Linie, wenn die Beschleunigung gegen die Ebene hin gerichtet ist, dagegen eine mehr oder weniger gestreckte Kettenlinie, wenn die Beschleunigung von der Ebene abgewandt ist.

Wenn die z Axe in irgend einem Augenblick senkrecht gegen die Beschleunigung und gegen die Bewegungsrichtung ist, so haben wir, wie im Falle c,

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{d z}{d t} = z = 0.$$

Wird der Anfangspunkt der Coordinaten in der Ebene angenommen, so ist auch

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0, \ \frac{d^2 y}{d t^2} = \mu y,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = const. = a,$$

und

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\mu}{a^2} y = \mp \frac{y}{b^2}.$$

Hieraus folgt, wenn μ negativ ist,

$$y = P \cos\left(\frac{x}{b} + Q\right),$$

die Gleichung der harmonischen oder Sinus-Linie. Für ein positives μ erhält man

$$y = P e^{\frac{x}{b}} + Q e^{-\frac{x}{b}},$$

und dieser Gleichung können wir durch Verschiebung des Anfangspunktes längs der x Axe die Form

$$y = R(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}})$$

geben. Wenn $2R = b$ ist, so stellt diese Gleichung die gemeine, sonst eine in der Richtung der y gestreckte oder verbreiterte Kettenlinie dar.

36. Beschleunigung, gegen einen festen Punkt gerichtet. — a. Wenn die Beschleunigung gegen einen festen Punkt gerichtet ist, so liegt die Bahn in einer durch diesen Punkt gehenden Ebene, und die vom Radiusvector in dieser Ebene beschriebenen Flächenstücke sind den verflossenen Zeiten proportional. Dies umfasst den Fall eines Trabanten oder eines Planeten, der sich um sein Hauptgestirn bewegt.

Offenbar findet keine Beschleunigung senkrecht gegen die Ebene statt, welche in irgend einem Augenblicke den festen und den beweglichen Punkt, sowie die Bewegungsrichtung des letztern enthält, und da beim Beginn der Bewegung keine senkrecht gegen diese Ebene gerichtete Geschwindigkeit vorhanden ist, so findet eine solche auch während der ganzen Bewegung nicht statt; der Punkt bewegt sich also in der Ebene. Wäre nun keine Beschleunigung vorhanden, so würde der Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine gerade Linie beschreiben, und in diesem Falle wären die vom Radiusvector beschriebenen Flächen der Zeit proportional. Auch hängt die Grösse der in irgend einem Augenblick wirklich beschriebenen Fläche von der Länge des Radiusvector und der zu demselben senkrechten Geschwindigkeit ab und erleidet, wie unten gezeigt wird, durch eine dem Radiusvector parallele Beschleunigung keine Aenderung. Dies beweist den zweiten Theil des Satzes.

Wir haben

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = P\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = P\frac{y}{r}, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = P\frac{z}{r},$$

wenn der feste Punkt der Anfangspunkt der Coordinaten und P eine Function von x, y, z ist. (In der Natur hängt P nur von r ab.) Es ergiebt sich daraus

$$x\frac{d^2 y}{d t^2} - y\frac{d^2 x}{d t^2} = 0, \text{ u. s. w.},$$

und eine Integration liefert jetzt

$$y\frac{d z}{d t} - z\frac{d y}{d t} = C_1,$$

$$z\frac{d x}{d t} - x\frac{d z}{d t} = C_2,$$

$$x\frac{d y}{d t} - y\frac{d x}{d t} = C_3.$$

Hieraus erhält man sofort

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0,$$

d. h. die Bewegung findet in einer durch den Anfangspunkt gehenden Ebene statt. Wird diese Ebene als xy Ebene angenommen, so haben wir nur die eine Gleichung

$$x\frac{d y}{d t} - y\frac{d x}{d t} = C_3 = h.$$

In Polarcoordinaten ist dies

$$h = r^2\frac{d\vartheta}{d t} = 2\frac{d A}{d t},$$

wenn A die von der Curve, einem festen Radiusvector und dem Radiusvector des in Bewegung befindlichen Punktes begrenzte Fläche bezeichnet. Diese Fläche nimmt daher gleichmässig mit der Zeit zu.

b. In demselben Falle ist die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte dem vom festen Punkte auf die augenblickliche Bewegungsrichtung, die Tangente an die Bahn, gefällten Lothe umgekehrt proportional.

Denn das Product dieses Lothes in die Geschwindigkeit ist offenbar das Doppelte der während einer Secunde um den festen Punkt beschriebenen Fläche.

Man kann dies auch auf folgende Weise darthun: —

Wird das Loth auf die Tangente mit p bezeichnet, so ist

$$p = x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds},$$

folglich

$$p\frac{ds}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = h.$$

Wenn wir die Bewegung auf Coordinaten in ihrer eigenen Ebene beziehen, so haben wir nur die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Px}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Py}{r},$$

und daraus ergiebt sich, wie oben,

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = h.$$

Wenn wir mittels der letzten Gleichung t aus

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Px}{r}$$

eliminiren, indem wir Polarcoordinaten statt der rechtwinkligen einsetzen, so gelangen wir zur Differentialgleichung der Bahn in Polarcoordinaten.

Der Abwechslung wegen wollen wir dieselbe aus den Formeln des § 32 herleiten. Diese geben

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = P, \quad r^2\frac{d\vartheta}{dt} = h,$$

oder, wenn $\frac{1}{r} = u$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{u}\right)}{dt^2} - \frac{1}{u}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = P \text{ und } \frac{d\vartheta}{dt} = hu^2.$$

Es ist aber

$$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = hu^2\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\vartheta} = -h\frac{du}{d\vartheta},$$

folglich

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{u}\right)}{dt^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\vartheta^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{u}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = h^2u^3,$$

und die Einsetzung dieser Werthe liefert uns die verlangte Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{P}{h^2u^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung enthält ausser h noch zwei willkürliche Constanten. Die den beiden obigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung noch zukommende vierte Constante ist einzuführen, wenn man die Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{dt} = hu^2$$

integrirt, nachdem darin u durch seinen mittels der Gleichung der Bahn in ϑ ausgedrückten Werth ersetzt worden ist.

Andere Beispiele dieser Principien werden wir in den Capiteln über die Kinetik antreffen.

37. **Hodograph.** — Wenn sich ein Punkt irgend wie in irgend einer Bahn bewegt und von einem beliebigen festen Punkte aus Linien gezogen werden, welche die Geschwindigkeit des bewegten Punktes für jeden Augenblick in Grösse und Richtung darstellen, so bilden die Endpunkte dieser Linien eine Curve, welche Hodograph genannt wird. Die Erfindung dieser Construction verdanken wir W. R. Hamilton, und der schönste unter den vielen bemerkenswerthen Sätzen, zu denen sie führt, ist folgender: Der Hodograph für die Bewegung eines Planeten oder Kometen ist immer ein Kreis, welches auch die Form und Ausdehnung der Bahn sein mögen.

Da der Radiusvector des Hodographen in jedem Augenblick die Geschwindigkeit darstellt, so muss (§ 27) ein Bogenelement die Beschleunigung, also ein endlicher Bogen die während der entsprechenden Zeit stattgefundene Gesammtbeschleunigung des in Bewegung befindlichen Punktes darstellen. Auch leuchtet ein, dass die Tangente an den Hodographen parallel der Richtung ist, welche die Beschleunigung eines Punktes in der entsprechenden Stelle seiner Bahn hat.

Wenn x, y, z die Coordinaten des in Bewegung befindlichen und ξ, η, ζ die Coordinaten des entsprechenden Hodographenpunktes sind, so hat man offenbar

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt}, \quad \zeta = \frac{dz}{dt},$$

folglich

$$\frac{d\xi}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{d\eta}{\frac{d^2y}{dt^2}} = \frac{d\zeta}{\frac{d^2z}{dt^2}},$$

oder die Tangente an den Hodographen ist der Beschleunigung in der Bahn parallel. Bezeichnet ferner σ den Bogen des Hodographen, so ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

oder die Geschwindigkeit im Hodographen ist gleich der Grösse der Beschleunigung in der Bahn.

38. Im Falle eines Planeten oder Kometen ist die Beschleunigung gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet. Die Geschwindig-

keit ist also (§ 36, b.) dem von jenem Punkte auf die Tangente an die Bahn gefällten Lothe umgekehrt proportional. Die Bahn nehmen wir als Kegelschnitt und den Mittelpunkt der Sonne als einen Brennpunkt desselben an. Nun wissen wir aber, dass, wenn die Bahn eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, die Punkte, in welchen die vom Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lothe die Tangenten schneiden, auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesser die grössere Axe ist; im Falle einer Parabel liegen diese Punkte in der im Scheitel errichteten Tangente. Wird also auf jedem dieser Lothe ein Stück abgetragen, welches eine dritte Proportionale zur Länge des Lothes und einer beliebigen constanten Länge ist, so wird die abgetragene Strecke die Geschwindigkeit der Grösse nach darstellen, während ihre Richtung zu derjenigen der Geschwindigkeit senkrecht ist. Der geometrische Ort der Endpunkte dieser auf den Lothen abgetragenen Stücke ist daher der um einen rechten Winkel gedrehte Hodograph. Die Geometrie lehrt aber, dass die fraglichen Punkte immer in einem Kreise liegen, und damit ist der in § 37 erwähnte Satz bewiesen. Der Hodograph umgiebt seinen festen Punkt, wenn die Bahn eine Ellipse ist; er geht durch den festen Punkt im Falle einer Parabel; der feste Punkt liegt endlich ausserhalb des Hodographen, wenn die Bahn eine Hyperbel ist.

Für ein Projectil, das durch die Luft keinen Widerstand erfährt, haben wir, wie in der Kinetik gezeigt werden wird, die (im § 35, c. vorausgesetzten) Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0, \frac{d^2 y}{d t^2} = -g,$$

wenn die y Axe vertical nach oben angenommen wird. Für den Hodographen ist also

$$\frac{d \xi}{d t} = 0, \frac{d \eta}{d t} = -g,$$

oder $\xi = C$, $\eta = C' - g t$, d. h. der Hodograph ist eine verticale Gerade, längs welcher der beschreibende Punkt sich gleichförmig bewegt.

Ebenso werden wir in der Kinetik sehen, dass die Bewegungsgleichungen eines Planeten oder Kometen in der Ebene ihrer Bahn folgende sind:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{\mu x}{r^3}, \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{\mu y}{r^3},$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ist. Hieraus folgt, wie in § 36,

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h \quad \text{. . . . .} \quad \text{(I)},$$

also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\mu x}{h} \cdot \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu}{h} \cdot \frac{(x^2 + y^2)\frac{dy}{dt} - y\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)}{r^3}$$

$$= \frac{\mu}{h} \cdot \frac{r^2\frac{dy}{dt} - yr\frac{dr}{dt}}{r^3}.$$

Eine Integration liefert jetzt

$$\frac{dx}{dt} + A = \frac{\mu}{h} \cdot \frac{y}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{dy}{dt} + B = -\frac{\mu}{h} \cdot \frac{x}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)},$$

und die Gleichung des Hodographen ist somit

$$(\xi + A)^2 + (\eta + B)^2 = \frac{\mu^2}{h^2},$$

d. h. der Hodograph ist ein Kreis, wie oben angegeben wurde. Wir erwähnen nur, dass die Gleichung der Bahn auf der Stelle erhalten wird, wenn man $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ aus den drei ersten obigen Integralen (I), (II), (III) eliminirt. Wir finden auf diese Weise

$$-h + Ay - Bx = \frac{\mu}{h} r,$$

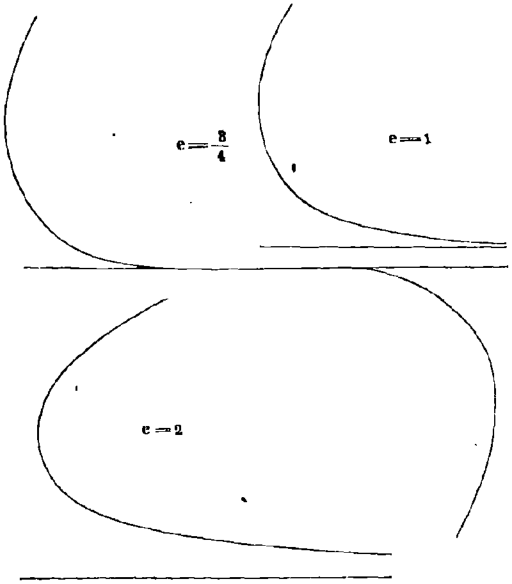
die Gleichung eines Kegelschnitts, auf einen Brennpunkt als Coordinatenanfangspunkt bezogen.

39. **Anwendungen des Hodographen.** — Die Intensität der Wärme und des Lichts, die von einem Punkte oder von einer gleichförmig strahlenden Kugeloberfläche ausströmen, nimmt nach demselben Gesetz wie die Schwerkraft mit zunehmender Entfernung ab. Die Wärme- und Lichtmenge, welche ein Planet während irgend einer Zeit von der Sonne empfängt, ist folglich der während dieser Zeit eintretenden Gesammtbeschleunigung, d. i. dem entsprechenden Bogen des Hodographen proportional. Hieraus ersieht man leicht, dass, wenn sich z. B. ein Komet in einer Parabel bewegt, die Wärmemenge, die er während irgend einer Zeit von der Sonne erhält, dem Winkel proportional ist, durch welchen seine Bewegungsrichtung sich während dieser Zeit dreht. Für einen in einer Ellipse sich bewegenden Planeten giebt es einen entsprechenden Satz, der aber etwas complicirter ist.

40. **Verfolgungscurve.** — Wenn einer von zwei Punkten, deren jeder eine bestimmte gleichförmige Geschwindigkeit besitzt, sich

in einer gegebenen Curve bewegt, während der zweite Punkt in jedem Augenblick seinen Weg nach dem erstern zu hinlenkt, so beschreibt der zweite Punkt eine Bahn, welche Verfolgungscurve genannt wird. Auf diesen Gedanken soll man durch die alte Regel gekommen sein, nach welcher ein Kaperschiff beständig auf das verfolgte Schiff hingesteuert wird (Bouguer, Mém. de l'Acad. 1732). Es ist die Curve, welche ein Hund beschreibt, der seinem Herrn nachsetzt.

Fig. 3.

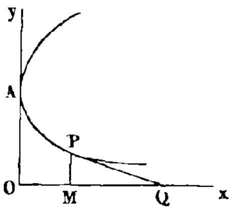


Die einfachsten Fälle sind natürlich diejenigen, in denen der erstere Punkt sich in einer geraden Linie bewegt. Solcher Fälle giebt es drei; denn die Geschwindigkeit des ersteren Punktes kann grösser oder kleiner als die des zweiten, oder gleich derselben sein. Die vorstehenden Figuren enthalten die diesen drei Fällen entsprechenden Curven; die Geschwindigkeit des nachsetzenden Punktes ist darin beziehungsweise $^4/_3$, 1, $^1/_2$ mal so gross, als die des verfolgten. Im zweiten und dritten Falle kann der zweite Punkt den ersteren nie einholen, und folglich ist die Gerade, in welcher der erstere Punkt sich bewegt, eine Asymptote an die Bahn des zweiten. Im ersten Falle holt der zweite Punkt den ersteren ein, und an der Stelle, wo dies geschieht, findet eine Berührung beider Bahnen statt. Der weitere Theil der Curve genügt einer etwas modificirten Fassung der ursprünglichen Frage und wird **Fluchtcurve** genannt.

Wir beschränken uns darauf, die Differentialgleichung der Curve zu bilden und ihr Integral anzugeben; die Integration selbst überlassen wir dem Leser.

Es sei Ox die Bahn des ersteren Punktes, der die Geschwindigkeit v besitzt, und AP die Curve, in welcher sich der nachsetzende Punkt mit der Geschwindigkeit u bewegt. Sind dann P und Q zwei gleichzeitige Lagen der beiden Punkte, so muss die in P an die Curve gelegte Tangente durch Q gehen. Eine augenblickliche Ueberlegung überzeugt uns, dass die Curve AP eine auf Ox senkrechte Tangente besitzen muss. Diese Tangente nehmen wir zur y Axe und setzen $OA = a$. Ist dann

Fig. 4.



$$OQ = \xi, \quad AP = s,$$

und bezeichnen x, y die Coordinaten von P, so haben wir

$$\frac{AP}{u} = \frac{OQ}{v},$$

da A, O ebenso wie P, Q ein Paar gleichzeitiger Lagen beider Punkte ist. Dies liefert

$$\frac{v}{u}s = es = x - y\frac{dx}{dy},$$

und wir erhalten, wenn e von 1 verschieden ist,

$$2\left(x + \frac{ae}{e^2 - 1}\right) = \frac{y^{e+1}}{a^e(e+1)} + \frac{a^e}{y^{e-1}(e-1)},$$

dagegen für $e = 1$

$$2\left(x + \frac{a}{4}\right) = \frac{y^2}{2a} - a \log nat \frac{y}{a}.$$

$e = 1$ ist der einzige Fall, in welchem sich keine algebraische Curve ergiebt. Wenn $e >$ oder $= 1$ ist, so sieht man leicht, dass die x Axe eine Asymptote an die Curve ist.

41. **Winkelgeschwindigkeit.** — Wenn sich ein Punkt in irgend einer Weise bewegt, so ändert die Gerade, die ihn mit einem festen Punkte verbindet, im Allgemeinen ihre Richtung. Der Einfachheit wegen betrachten wir eine Bewegung, die auf eine durch den festen Punkt gehende Ebene beschränkt ist. Der Winkel, den die beide Punkte verbindende Gerade mit einer in der Ebene festliegenden Geraden bildet, ändert sich beständig, und die verhältnissmässige Grösse der in irgend einem Augenblicke erfolgenden Aenderung wird die **Winkelgeschwindigkeit** des ersteren Punktes in Beziehung auf

den zweiten genannt. Wenn die Winkelgeschwindigkeit gleichförmig ist, so wird sie natürlich durch den in der Zeiteinheit beschriebenen Winkel gemessen; ist sie veränderlich, so misst man sie durch den Winkel, der in der Zeiteinheit beschrieben sein würde, wenn die in dem fraglichen Augenblick vorhandene Winkelgeschwindigkeit eine Zeiteinheit hindurch unverändert dieselbe geblieben wäre. In dieser Beziehung ist das Verfahren demjenigen völlig ähnlich, das wir bereits für die Messung einer linearen Geschwindigkeit und Beschleunigung dargelegt haben.

Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist die Winkelgeschwindigkeit eines Punktes, welcher während der Zeiteinheit in Beziehung auf einen festen Punkt die Winkeleinheit beschreibt oder beschreiben würde. Die gewöhnliche Winkeleinheit ist (wie in den Lehrbüchern der ebenen Trigonometrie dargelegt wird) der Winkel, dessen Schenkel aus einem um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kreise einen Bogen von der Länge des Radius ausschneiden. Es ist dies ein Winkel von $\frac{180^0}{\pi} = 57^0, 29578\ldots$, also ungefähr $57^0\, 17'\, 44{,}8''$.

42. Winkelbeschleunigung. — Wenn die Winkelgeschwindigkeit veränderlich ist, so wird die Intensität ihrer Zu- oder Abnahme Winkelbeschleunigung genannt. Sie wird auf dieselbe Weise und mittels derselben Einheit wie die Winkelgeschwindigkeit gemessen.

In ganz ähnlicher Weise, wie wir bei der linearen Geschwindigkeit und Beschleunigung verfuhren, sehen wir hier, dass, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, den der Radiusvector des beweglichen Punktes mit einer in der Ebene der Bewegung fest liegenden Geraden bildet,

$$\text{die Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\text{und die Winkelbeschleunigung } \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\vartheta}$$

ist.

Da (§ 27) $r\frac{d\vartheta}{dt}$ die zum Radiusvector senkrechte Geschwindigkeitscomponente ist, so erhalten wir den Satz:

Die Winkelgeschwindigkeit eines sich in einer Ebene bewegenden Punktes ist gleich der zum Radiusvector senkrechten Geschwindigkeitscomponente, dividirt durch die Länge des Radiusvector.

43. Winkelgeschwindigkeit. — Wenn ein Punkt um einen andern gleichförmig einen Kreis beschreibt und zur Zurücklegung der ganzen Peripherie die Zeit T nöthig hat, so wird der Winkel 2π in der Zeit T gleichförmig beschrieben, die Winkelgeschwindigkeit ist folglich $\frac{2\pi}{T}$. Auch wenn die Winkelgeschwindigkeit nicht gleichförmig ist, wie bei der Bewegung eines Planeten, so ist es doch nützlich, die Grösse $\frac{2\pi}{T}$ einzuführen, die dann mittlere Winkelgeschwindigkeit genannt wird.

Wenn sich ein Punkt gleichförmig in einer geraden Linie bewegt, so wird seine Winkelgeschwindigkeit offenbar immer kleiner, je weiter er sich von dem Punkte entfernt, in Beziehung auf welchen die Winkel gemessen werden.

Die Gleichung einer geraden Linie in Polarcoordinaten ist, wenn die Axe zur Geraden senkrecht steht und der Anfangspunkt den Abstand a von derselben hat,

$$r = a \sec \vartheta.$$

Die beiden Radiivectoren, welche den Winkeln 0 und ϑ entsprechen, schneiden aus der Geraden eine Strecke von der Länge $a \tan \vartheta$ aus, die mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v zunimmt. Es ist folglich

$$v = \frac{d}{dt}(a \tan \vartheta) = a \sec^2 \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{r^2}{a} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{av}{r^2}$$

dem Quadrat des Radiusvector umgekehrt proportional ist.

In ähnlicher Weise erhalten wir durch eine zweite Differentiation für die Winkelbeschleunigung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2 \tan \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 0,$$

d. h. es ist

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{2av^2}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2},$$

und die Winkelbeschleunigung ändert sich zuletzt umgekehrt wie die dritte Potenz des Radiusvector.

44. Winkelgeschwindigkeit einer Ebene. — Wir können auch von der Winkelgeschwindigkeit einer in Bewegung befindlichen Ebene in Beziehung auf eine feste Ebene sprechen, indem wir darunter die Geschwindigkeit der Zunahme des zwischen beiden Ebenen enthaltenen Winkels verstehen. Doch gilt diese Definition so ohne Weiteres nur, wenn die Durchschnittslinie beider Ebenen fest oder wenigstens parallel zu sich selbst bleibt; sonst ist eine etwas eingehendere Darlegung erforderlich, um bestimmte Auskunft zu geben. Wir werden hierauf in einem spätern Paragraphen zurückkommen.

45. **Relative Bewegung.** — Alle Bewegung, mit der wir bekannt sind oder bekannt sein können, ist nur relativ. Wir können aus astronomischen Daten berechnen, in welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit wir uns in irgend einem Augenblick mit Rücksicht auf die tägliche Umdrehung der Erde bewegen. Wir können dies zusammensetzen mit der gleichfalls berechenbaren Geschwindigkeit, welche die Erde in ihrer Bahn um die Sonne besitzt. Die dadurch erhaltene Resultante kann wieder vereinigt werden mit der (ungefähr bekannten) Geschwindigkeit der Sonne in Beziehung auf die sogenannten Fixsterne. Aber auch wenn alle diese Elemente ganz genau bekannt wären, so könnte man doch nicht sagen, dass wir dadurch eine Vorstellung von einer absoluten Geschwindigkeit erlangt hätten. Denn wir können nur die relative Bewegung der Sonne unter den Sternen beobachten, und aller Wahrscheinlichkeit nach bewegen sich Sonne und Sterne (vielleicht mit unfassbarer Geschwindigkeit) in Beziehung auf andere Körper des Weltraums. Wir müssen daher betrachten, wie man aus den wirklichen Bewegungen einer Anzahl von Punkten ihre relativen Bewegungen in Beziehung auf irgend einen derselben finden kann, und wie umgekehrt, wenn die wirkliche Bewegung eines Punktes und in Beziehung auf diesen einen Punkt die relativen Bewegungen aller übrigen gegeben sind, die wirklichen Bewegungen aller ermittelt werden können. Die Frage ist sehr leicht zu beantworten. Betrachten wir für einen Augenblick eine Anzahl Passagiere, die auf dem Verdeck eines Dampfschiffes umhergehen. Ihre relativen Bewegungen mit Rücksicht auf das Verdeck beobachten wir unmittelbar. Wird hiermit die Geschwindigkeit des Dampfschiffes selbst verbunden, so erhalten wir offenbar die wirklichen Bewegungen der Passagiere in Beziehung auf die Erde. Um wieder die relative Bewegung Aller in Beziehung auf das Verdeck zu erhalten, abstrahiren wir ganz und gar von der Bewegung des Dampfschiffes, d. h. wir ändern die Geschwindigkeit eines Jeden, indem wir sie mit der in entgegengesetzter Richtung genommenen wirklichen Geschwindigkeit des Schiffes verbinden.

Um also die relativen Bewegungen einer beliebigen Anzahl von Punkten in Beziehung auf einen derselben zu finden, denken wir uns zu der Geschwindigkeit eines jeden eine Geschwindigkeit hinzugefügt, die der Geschwindigkeit dieses einen gleich und entgegengesetzt ist; dadurch wird der eine Punkt zur Ruhe gebracht, und die Bewegungen der übrigen Punkte in Beziehung auf ihn sind dieselben wie vorher.

So mögen, um ein einfaches Beispiel zu nehmen, zwei Eisenbahnzüge sich nach entgegengesetzten Richtungen, etwa nach Norden und Süden, bewegen, der erstere mit einer Geschwindigkeit von 10, der zweite mit einer Geschwindigkeit von 7 Meilen die Stunde. Um die relative Geschwindigkeit des zweiten in Beziehung auf den ersteren zu erhalten, ertheilen wir beiden Zügen eine nach Süden gerichtete Geschwindigkeit von 10 Meilen die Stunde. Die Folge davon ist, dass der erstere Zug zur Ruhe kommt und dass der zweite eine südwärts gerichtete Geschwindigkeit von 17 Meilen die Stunde erhält, was die gesuchte relative Bewegung ist.

Oder es bewege sich ein Zug nordwärts mit einer Geschwindigkeit von 7 Meilen die Stunde, und ein anderer Zug in Beziehung auf den erstern südwärts mit einer (relativen) Geschwindigkeit von 5 Meilen die Stunde, so ist die wirkliche Bewegung des zweiten 7 Meilen nach Norden und 5 Meilen nach Süden die Stunde, d. i. 2 Meilen nach Norden. Da jeder von selbst auf solche Beispiele kommen muss, so ist es unnöthig, deren noch weitere anzuführen.

46. **Relative Beschleunigung.** — Genau dieselben Bemerkungen passen für die relative Beschleunigung, verglichen mit der *absoluten*. Wir können dies leicht daraus erkennen, dass Beschleunigungen in allen Fällen nach ganz denselben Gesetzen wie Geschwindigkeiten zerlegt und zusammengesetzt werden.

Wenn x, y, z und x', y', z' die Coordinaten zweier Punkte in Beziehung auf Axen sind, die als fest angesehen werden, und ξ, η, ζ ihre relativen Coordinaten bezeichnen, so haben wir

$$\xi = x' - x,\ \eta = y' - y,\ \zeta = z' - z.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}, \text{ u. s. w.,}$$

und

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ u. s. w.}$$

Die erstere Reihe dieser Formeln drückt die relativen Geschwindigkeiten durch die absoluten aus, die zweite beweist unsere obige Behauptung über relative und absolute Beschleunigungen.

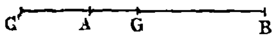
Die entsprechenden Ausdrücke in Polarcoordinaten sind etwas complicirter und durchaus nicht bequem. Der Leser kann sie leicht selbst niederschreiben.

47. **Relative Bewegung.** — Der folgende die relative Bewegung betreffende Satz ist von grosser Wichtigkeit:

Irgend zwei in Bewegung befindliche Punkte beschreiben ähnliche Bahnen relativ zu einander, oder relativ zu irgend einem

Punkt, welcher ihre Verbindungslinie in einem constanten Verhältnisse theilt.

Es seien A und B zwei beliebige gleichzeitige Lagen der Punkte. Wir nehmen auf AB einen Punkt G oder G' so an, dass das Verhältniss $\frac{GA}{GB}$ oder $\frac{G'A}{G'B}$ einen constanten Werth hat. Die

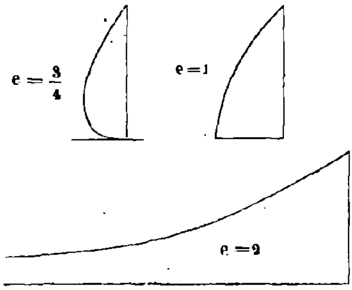


Gestalt der relativen Bahn hängt nur von der Länge und Richtung der Verbindungslinie der beiden Punkte in jedem Augenblick ab, und es liegt auf der Hand, dass diese Bestimmungsstücke für A in Beziehung auf B die nämlichen, wie für B in Beziehung auf A sind, ausser dass die Verbindungslinie im zweiten Falle die umgekehrte Richtung hat. Die Bahn, welche B in Beziehung auf A beschreibt, ist folglich nichts anderes, als die um zwei rechte Winkel gedrehte Bahn von A in Beziehung auf B. Was ferner G und G' betrifft, so ist es klar, dass die Richtungen dieselben bleiben, während die Längen sich in einem gegebenen Verhältniss ändern; dies ist aber die Definition ähnlicher Curven.

48. Als gutes Beispiel einer relativen Bewegung wollen wir die Bewegung der beiden Punkte betrachten, an welche wir in § 40 die Definition der Verfolgungscurve knüpften. Da wir, um die Lage und Bewegung des Verfolgers in Beziehung auf den Verfolgten zu finden, beiden Punkten eine der Geschwindigkeit des letztern gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilen müssen, so leuchtet auf der Stelle ein, dass die Aufgabe im Grunde mit der folgenden zusammenfällt: —

Ein einen Fluss durchkreuzendes Boot wird durch die Ruder mit gleichförmiger Geschwindigkeit in Beziehung auf das Wasser vorwärts getrieben und beständig auf einen festen Punkt am entgegengesetzten Ufer zugelenkt. Es wird aber auch mit gleichförmiger Geschwindigkeit den Strom hinunter getrieben. Man soll den Weg bestimmen, den es beschreibt, und die Zeit, die es zur Hinüberfahrt gebraucht. Wie in der frühern Aufgabe, so sind auch hier drei Fälle möglich, die durch die nebenstehenden Figuren dargestellt werden. Im ersten Falle bewegt sich das Boot

Fig. 5.



schneller als der Strom und erreicht den ersehnten Punkt. Im zweiten Falle, wo Boot und Strom gleiche Geschwindigkeit besitzen, gelangt das Boot, das eine Parabel beschreibt, erst nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit hinüber; es landet aber nicht an dem Punkte, wo es landen sollte; dieser Punkt ist nämlich der Brennpunkt der Parabel, während der Landungspunkt deren Scheitel ist. Im dritten Falle, in welchem die Geschwindigkeit des Bootes kleiner als diejenige des Wassers ist, erreicht es niemals das andere Ufer, sondern wird unbegrenzt stromabwärts getrieben. Der Vergleich der Figuren dieses Paragraphen mit denjenigen des § 40 ist sehr lehrreich. Sie sind nach demselben Maassstab und für dieselben relativen Geschwindigkeiten entworfen. Die Horizontallinien stellen das entfernte Flussufer und die Verticallinien den Weg dar, den das Boot nehmen würde, wenn keine Strömung vorhanden wäre.

Wir überlassen die Lösung dieser Frage dem Leser und bemerken nur, dass die Gleichung der Curve in jedem der drei Fälle $e \gtreqless 1$ folgende ist:

$$\frac{y^{1+e}}{a^e} = \sqrt{x^2 + y^2} - x.$$

Für $e = 1$ geht diese Gleichung in

$$y^2 = a^2 - 2\,a\,x$$

über, stellt also eine Parabel dar. Die zur Ueberfahrt erforderliche Zeit ist

$$\frac{a}{u\,(1 - e^2)};$$

da negative Werthe natürlich unzulässig sind, so ist dieser Ausdruck nur für $e \angle 1$ endlich.

49. Ein anderes ausgezeichnetes Beispiel für die Verwandlung der relativen in absolute Bewegung liefert uns die Familie der Cycloiden. Wir werden in einem spätern Paragraphen betrachten, wie diese Curven mechanisch beschrieben werden, dadurch dass ein Kreis auf einer festen Geraden oder auf einem festen Kreise rollt. Hier drücken wir inzwischen die Sache in einer andern Form aus, die jedoch zu genau demselben Ergebnisse führt.

Man soll die wirkliche Bahn eines Punktes bestimmen, welcher sich gleichförmig in einem Kreise um einen zweiten Punkt dreht, der zu gleicher Zeit sich mit constanter Geschwindigkeit auf einer derselben Ebene angehörenden Geraden oder Kreislinie fortbewegt.

Wir behandeln zunächst den erstern Fall. Es seien a der Radius der relativen Kreisbahn, ω die darin vorhandene Winkelgeschwindigkeit und v die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Mittelpunkt des Kreises längs der Geraden bewegt.

Die relativen Coordinaten des Punktes im Kreise sind $a \cos \omega t$ und $a \sin \omega t$, und die wirklichen Coordinaten des Mittelpunktes vt und 0. Wir haben daher für die wirkliche Bahn

$$\xi = vt + a \cos \omega t,$$
$$\eta = a \sin \omega t.$$

Daraus folgt

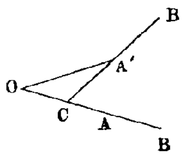
$$\xi = \frac{v}{\omega} \arcsin \frac{\eta}{a} + \sqrt{a^2 - \eta^2},$$

und dadurch, dass wir v und ω verschiedene Werthe ertheilen, können wir bewirken, dass diese Gleichung die Cycloide selbst oder jede der beiden Formen der Trochoide darstellt. Siehe § 92.

Was die Epicycloiden betrifft, so sei b der Radius des Kreises, den B um A beschreibt, ω_1 die darin vorhandene Winkelgeschwindigkeit, a der Radius des festen Kreises, auf welchem sich A bewegt, und ω die entsprechende Winkelgeschwindigkeit.

Ausserdem möge sich B zur Zeit $t = 0$ in dem Radius OA der Bahn von A befinden. Sind dann A' und B' die Lagen der beiden Punkte zur Zeit t, so ergiebt sich

Fig. 6.



$$\measuredangle\, AOA' = \omega t,$$
$$\measuredangle\, B'CA = \omega_1 t$$

und wenn wir OA zur x Axe nehmen, so ergiebt sich

$$x = a \cos \omega t + b \cos \omega_1 t,$$
$$y = a \sin \omega t + b \sin \omega_1 t.$$

Durch Elimination von t erhält man hieraus, wenn nur ω und ω_1 commensurabel sind, eine algebraische Gleichung zwischen x und y.

So haben wir für $\omega_1 = 2\omega$, wenn $\omega t = \vartheta$ gesetzt wird,

$$x = a \cos \vartheta + b \cos 2\vartheta,$$
$$y = a \sin \vartheta + b \sin 2\vartheta,$$

woraus durch eine leichte Reduction

$$(x^2 + y^2 - b^2)^2 = a^2 \{(x + b)^2 + y^2\}$$

folgt. Wird $x - b$ für x geschrieben, d. h. der Anfangspunkt um die Strecke AB zur Linken geschoben, so geht die Gleichung über in

$$a^2 (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2bx)^2,$$

oder, bei Anwendung von Polarcoordinaten, in

$$a^2 = (r - 2b \cos \vartheta)^2, \; r = a + 2b \cos \vartheta.$$

Für $2b = a$ hat man die Gleichung

$$r = a(1 + \cos \vartheta),$$

welche die Cardioide darstellt (siehe § 94).

50. Resultirende Bewegung. — Als erläuternden Zusatz zu diesem Theile unseres Gegenstandes geben wir folgende Definition: —

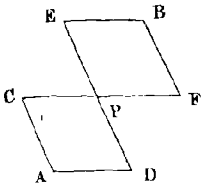
Wenn ein Punkt A irgend eine Bewegung in Beziehung auf einen zweiten Punkt B, dieser wieder irgend eine Bewegung in Beziehung auf einen dritten Punkt C ausführt, u. s. w., so sagt man, der erste Punkt führe in Beziehung auf den letzten eine Bewegung aus, welche die Resultante dieser verschiedenen Bewegungen ist.

Die relative Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind in solch einem Falle die nach den früher gegebenen Regeln aus den verschiedenen Componenten zusammengesetzten geometrischen Resultanten.

51. Die folgenden Methoden, solch eine Zusammensetzung in dem einfachen Falle der Bewegungen zweier Punkte praktisch auszuführen, sind sowohl in wissenschaftlichen Erläuterungen, als auch in gewissen mechanischen Anordnungen von Nutzen. Zwei bewegliche Punkte seien durch eine elastische Schnur mit einander verbunden; dann wird der Mittelpunkt der Schnur eine Bewegung ausführen, welche offenbar halb so gross als die Resultante der Bewegungen der beiden Punkte ist. Zum Zeichnen oder Graviren oder zu anderen mechanischen Anwendungen ist aber die folgende Methode vorzuziehen: —

CF und ED sind Stäbe von gleicher Länge, welche sich um einen durch ihre Mitte P gehenden Zapfen frei bewegen. CA, AD, EB und BF sind Stäbe von der halben Länge der ersteren und so mit denselben verbunden, dass sie ein Paar gleiche Rhomben CD, EF bilden, deren Winkel nach Belieben geändert werden können. Welche Bewegungen man dann auch A und B ertheilt, gleichgültig ob dieselben auf eine Ebene beschränkt sind oder nicht, so ist die Bewegung von P offenbar stets die halbe Resultante jener Bewegungen von A und B.

Fig. 7.

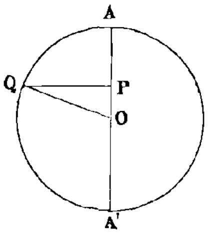


52. **Harmonische Bewegung.** — Von den wichtigsten Arten der Bewegungen, die wir in der theoretischen Physik zu betrachten haben, ist eine, nämlich die harmonische Bewegung, nicht nur in der gemeinen Kinetik, sondern auch in der Theorie des Schalls, des Lichts, der Wärme, u. s. w. von so ungeheurer Bedeutung, dass eine ganz eingehende Behandlung derselben gerechtfertigt erscheint.

53. **Einfache harmonische Bewegung.** — Definition. Wenn sich ein Punkt gleichförmig in einem Kreise bewegt und in irgend einem Augenblick die Lage Q einnimmt, so schneidet die von Q auf einen festen Durchmesser $A A'$ des Kreises gefällte Senkrechte den

Durchmesser in einem Punkte P, und die Aenderung der Lage von P wird eine **einfache harmonische Bewegung** genannt.

Fig. 8.



Setzen wir voraus, dass ein Planet, oder ein Trabant, oder einer der Himmelskörper, die einen Doppelstern ausmachen, sich um seinen Hauptstern gleichförmig in einem Kreise bewege, so scheint es, wenn man ihn von einem sehr entlegenen Punkte der Ebene seiner Bahn aus betrachtet, als gehe er in einer Geraden hin und zurück und sei dabei in einer einfachen harmonischen Bewegung begriffen. Dies ist nahezu bei Körpern, wie den Trabanten des Jupiter der Fall, wenn sie von der Erde aus gesehen werden.

In physikalischer Beziehung besteht das Interesse solcher Bewegungen darin, dass sie annähernd die Bewegungen der einfachsten Schwingungen schallender Körper, wie einer Stimmgabel, eines Klavierdrahtes (daher der Name), und der verschiedenen Media sind, in denen Schall-, Licht-, Wärmewellen, u. s. w. fortgepflanzt werden.

54. Die Strecke vom Mittelpunkte der Bewegung bis zum einen oder andern Ende, also in der Figur OA oder OA', wird die **Amplitude** der einfachen harmonischen Bewegung genannt.

Ein von einem beliebigen festen Punkte bis zu dem sich gleichförmig bewegenden Punkte Q gemessener Bogen des Kreises, auf den man sich bezieht, heisst das **Argument** der harmonischen Bewegung.

Der Abstand eines in einer einfachen harmonischen Bewegung begriffenen Punktes von der Mitte seines Laufes oder seiner Bewegungsweite ist eine **einfache harmonische Function der Zeit**. Das **Argument** dieser Function ist dasjenige, was wir als das Argument der Bewegung definirt haben.

Bei einer einfachen harmonischen Bewegung versteht man unter der **Epoche** den vom Beginn der Rechnung bis zu dem Augenblick verstrichenen Zeitraum, wo der bewegliche Punkt zum ersten Male die grösste Entfernung von seiner mittlern Lage oder der Mitte seines Laufes nach der als positiv angenommenen Richtung hin erreicht. Man kann die Epoche auch durch eine Winkelgrösse messen; dann ist sie der Winkel, der während des Zeitraumes, den wir als Epoche definirt haben, auf dem Kreise beschrieben wird.

Die **Periode** einer einfachen harmonischen Bewegung ist die Zeit, welche von irgend einem Augenblicke an verstreicht, bis sich der bewegliche Punkt durch dieselbe Lage, die er in jenem Augenblicke inne hatte, wieder nach derselben Richtung zu bewegt.

Die Phase einer einfachen harmonischen Bewegung zu irgend einer Zeit ist der Bruchtheil der ganzen Periode, welcher verstrichen ist, seitdem sich der bewegliche Punkt zum letzten Male durch seine mittlere Lage nach der positiven Richtung hin bewegte.

55. **Einfache harmonische Bewegung in Mechanismen.** — Beispiele einfacher harmonischer Bewegungen liefern die gewöhnlichen Mechanismen zur Erzeugung von geradliniger aus kreisförmiger, oder von kreisförmiger aus geradliniger Bewegung, bei denen eine sich im Kreise drehende Kurbel sich in einem geradlinigen Spalt bewegt, der einem nur in einer geraden Linie bewegbaren Körper angehört. Der Theil des Mechanismus, dessen Bewegung geradlinig ist, genügt in aller Strenge der Definition einer einfachen harmonischen Bewegung, wenn die Bewegung des rotirenden Theils mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgt.

Derselben Bedingung genügt näherungsweise das Trittbrett eines Spinnrades, wenn sich das Rad gleichförmig dreht, und zwar ist die Annäherung um so grösser, je kleiner die Winkelbewegung des Brettes und der Verbindungsschnur ist. Eine solche grössere oder geringere Annäherung findet auch bei der Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine statt, der auf eine der verschiedenen in der Praxis angewandten Methoden mit der Kurbel verbunden ist, immer unter der Voraussetzung, dass die Rotation der Kurbel eine gleichförmige ist.

56. **Geschwindigkeit in einer einfachen harmonischen Bewegung.** — Die Geschwindigkeit eines in einer einfachen harmonischen Bewegung begriffenen Punktes ist eine einfache harmonische Function der Zeit, deren Phase um ein Viertel einer Periode früher als diejenige der Verschiebung, und deren Maximalwerth gleich der Geschwindigkeit in der Kreisbewegung ist, durch welche die gegebene Function definirt wird.

Denn in der Figur des § 53 können wir die Geschwindigkeit im Kreise, die V sein möge, durch eine zur Richtung dieser Geschwindigkeit senkrechte Gerade OQ, folglich auch durch OP und PQ die Componenten von V darstellen, welche senkrecht auf diesen Geraden stehen. Die Geschwindigkeit von P bei der einfachen harmonischen Bewegung ist danach $\frac{V}{OQ} PQ$, und dieser Ausdruck wird gleich V, wenn sich P in O befindet.

57. Beschleunigung in einer einfachen harmonischen Bewegung. — Die Beschleunigung eines Punktes, der eine einfache harmonische Bewegung ausführt, ist in jedem Augenblick einfach seinem Abstande vom Mittelpunkt proportional; sie ist aber stets nach der entgegengesetzten Seite, d. h. beständig nach dem Mittelpunkt zu gerichtet. Ihr Maximalwerth ist diejenige Beschleunigung, welche in der Zeit, während der ein Bogen von der Länge des Radius beschrieben wird, eine Geschwindigkeit erzeugen würde, die gleich der Geschwindigkeit in der Kreisbewegung ist.

Denn nach § 35. a. wirkt die Beschleunigung von Q in der Figur des § 53 längs QO und ist gleich $\frac{V^2}{QO}$. Nehmen wir für einen Augenblick an, QO stelle die Grösse dieser Beschleunigung dar, so können wir dieselbe in QP, PO zerlegen. Nach demselben Maassstabe wird daher die Beschleunigung von P durch PO dargestellt und ist von der Grösse $\frac{V^2}{QO}\cdot\frac{PO}{QO}=\frac{V^2}{QO^2}\cdot PO$. Dieser Ausdruck ist PO proportional und hat seinen grössten Werth im Punkte A, nämlich $\frac{V^2}{QO}$, eine Beschleunigung, durch welche, wie oben angegeben worden, die Geschwindigkeit V in der Zeit $\frac{QO}{V}$ erzeugt sein würde.

Es sei a die Amplitude, ε die Epoche und T die Periode einer einfachen harmonischen Bewegung. Hat dann der Punkt P zur Zeit t den Abstand s vom Mittelpunkt, so ist

$$s = a\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\varepsilon\right).$$

Für die Geschwindigkeit ergiebt sich daraus

$$v=\frac{ds}{dt}=-\frac{2\pi a}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varepsilon\right),$$

und der grösste Werth V der Geschwindigkeit ist somit $\frac{2\pi a}{T}$, was mit der Angabe des § 56 übereinstimmt. Weiter erhalten wir für die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{4\pi^2 a}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\varepsilon\right)=-\frac{4\pi^2}{T^2}s \text{ (siehe § 57)},$$

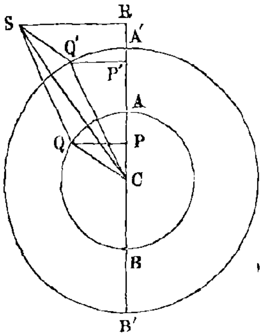
und endlich für den grössten Werth der Beschleunigung

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2}=\frac{V}{\frac{T}{2\pi}},$$

wo $\frac{T}{2\pi}$ die Zeit ist, während welcher in der betreffenden Kreisbewegung ein Bogen von der Länge des Radius zurückgelegt wird.

58. Zusammensetzung zweier in einer Geraden stattfindenden einfachen harmonischen Bewegungen. — Setzt man zwei beliebige einfache harmonische Bewegungen, die in einer Geraden stattfinden und von derselben Periode sind, zusammen, so erhält man eine einzige einfache harmonische Bewegung von derselben Periode. Um die Amplitude und die Epoche derselben zu finden, hat man auf den Schenkeln eines Winkels, der gleich der Differenz der gegebenen Epochen ist, die gegebenen Amplituden abzutragen und diese Figur zu einem Parallelogramm zu ergänzen: Die Diagonale des Parallelogramms ist die gesuchte Amplitude, und die gesuchte Epoche unterscheidet sich von den gegebenen durch Winkel von der Grösse derjenigen, welche die Diagonale mit den Seiten des Parallelogramms einschliesst. Es seien nämlich P und P' zwei Punkte, welche in einer Geraden $B'BCAA'$ einfache harmonische Bewegungen von derselben Periode ausführen, und Q, Q' die in den bezüglichen Kreisen sich gleichförmig bewegenden Punkte. Wir beschreiben über CQ und CQ' ein Parallelogramm $SQCQ'$ und ziehen von S aus SR senkrecht auf $B'A'$. Dann ist offenbar $P'R = CP$ (als Projectionen der gleichen und parallelen Strecken $Q'S$ und CQ auf CR), also $CR = CP + CP'$, und der Punkt R vollführt mithin die Resultirende der Bewegungen von P und P'. CS, die Diagonale des Parallelogramms, ist aber constant, folglich ist die resultirende Bewegung einfach harmonisch und hat die Amplitude CS, während ihre Epoche beziehungsweise um die Winkel QCS und SCQ' die Epoche der Bewegung von P übertrifft und hinter derjenigen der Bewegung von P' zurückbleibt.

Fig. 9.



Wir halten es für nützlich, denselben Satz auch analytisch zu beweisen. Es ist

$$a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right) + a' \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon'\right)$$

$$= (a \cos\varepsilon + a' \cos\varepsilon') \cos\frac{2\pi t}{T} + (a \sin\varepsilon + a' \sin\varepsilon') \sin\frac{2\pi t}{T} = r \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \vartheta\right),$$

wo

$$r = \{(a\cos\varepsilon + a'\cos\varepsilon')^2 + (a\sin\varepsilon + a'\sin\varepsilon')^2\}^{1/2}$$
$$= \{a^2 + a'^2 + 2aa'\cos(\varepsilon - \varepsilon')\}^{1/2}$$

und

$$\tan \vartheta = \frac{a \sin \varepsilon + a' \sin \varepsilon'}{a \cos \varepsilon + a' \cos \varepsilon'}$$

ist.

59. Die im vorigen Paragraphen angegebene Construction stellt die Resultante zweier einfachen harmonischen Bewegungen dar, dieselben mögen die nämliche Periode haben oder nicht. Nur wird die Diagonale des Parallelogramms, im Falle sie nicht von derselben Periode sind, nicht constant sein, sondern von einem grössten zu einem kleinsten Werthe abnehmen. Ihren grössten Werth, der gleich der Summe der componirenden Amplituden ist, hat sie in dem Augenblick, wo die Phasen der componirenden Bewegungen übereinstimmen; ihren kleinsten Werth, der gleich der Differenz jener Amplituden ist, nimmt sie an, wenn die Phasen um eine halbe Periode von einander abweichen. Was ihre Richtung betrifft, so muss sie beständig näher dem grössern als dem kleinern der beiden Radien liegen, welche die Seiten des Parallelogramms ausmachen; sie wird um den grössern Radius oscilliren, und ihre grösste Abweichung von diesem Radius wird sich auf jeder Seite desselben auf den Winkel belaufen, dessen Sinus der kleinere Radius, dividirt durch den grössern ist. Diese grösste Abweichung der Diagonale vom grössern Radius tritt ein, wenn der zwischen beiden Radien enthaltene Winkel um 90° grösser als jener Winkel der grössten Abweichung ist. Die volle Periode dieser Oscillation ist die Zeit, während welcher einer der Radien eine volle Umdrehung mehr als der andere macht. Die resultirende Bewegung ist somit nicht einfach harmonisch, sondern gewissermaassen einfach harmonisch mit periodisch zu- und abnehmender Amplitude und mit periodischer Beschleunigung und Verzögerung der Phase. Diese Auffassung empfiehlt sich besonders in dem Falle, in welchem die beiden componirenden Bewegungen nahezu gleiche Perioden haben, während die Amplitude der einen bedeutend grösser als die der andern ist.

Um die resultirende Bewegung auszudrücken, nehmen wir an, s sei die Verschiebung zur Zeit t und a die grössere der beiden componirenden Amplituden. Dann ist

$$s = a \cos (nt - \varepsilon) + a' \cos (n't - \varepsilon'),$$

und wenn

$$\varphi = (n't - \varepsilon') - (nt - \varepsilon)$$

ist,

$$\begin{aligned} s &= a \cos (nt - \varepsilon) + a' \cos (nt - \varepsilon + \varphi) \\ &= (a + a' \cos \varphi) \cos (nt - \varepsilon) - a' \sin \varphi \sin (nt - \varepsilon), \end{aligned}$$

oder endlich

$$s = r \cos (nt - \varepsilon + \vartheta),$$

wenn

$$r = (a^2 + 2\,a\,a' \cos\varphi + a'^2)^{1/2}$$

und

$$\tan\vartheta = \frac{a' \sin\varphi}{a + a' \cos\varphi}$$

ist. In der letzten Gleichung nimmt $\tan\vartheta$ seinen grössten Werth an, wenn man

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{a'}{a}$$

macht; dieser grösste Werth ist gleich $\frac{a'}{(a^2 - a'^2)^{1/2}}$, folglich ist der grösste Werth von ϑ selbst $\arcsin\frac{a'}{a}$. Das oben (§ 58) angegebene geometrische Verfahren führt zu diesem Schlusse durch die folgende äusserst einfache Construction: —

Um die Zeit und den Betrag der grössten Phasen-Beschleunigung oder Verzögerung zu finden, beschreiben wir, CA als die grössere Amplitude vorausgesetzt, um A als Mittelpunkt mit der kleinern Amplitude AB als Radius einen Kreis. Die Tangente CB an diesen Kreis ist der erzeugende Radius der am weitesten abweichenden Resultante. Es ist aber CBA ein rechter Winkel, also

$$\sin BCA = \frac{AB}{CA}.$$

60. Beispiele der Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen, die in einer Geraden stattfinden. — Eine sehr interessante Anwendung dieses Falles der Zusammensetzung harmonischer Bewegungen lässt sich auf die durch den Mond und die Sonne bewirkten Ebben und Fluthen machen. Beide folgen, ausser in ausgeweiteten Flussmündungen, oder in langen Meerengen oder tiefen Buchten mit nur geringer Abweichung dem einfachen harmonischen Gesetz und haben als wirkliches Ergebniss eine Höhenänderung zur Folge, welche gleich der Summe der Aenderungen ist, die jede der beiden Ursachen einzeln hervorbringen würde.

Der Betrag der Mondfluth in der Gleichgewichtstheorie (§ 811) ist ungefähr 2,1mal so gross als derjenige der Sonnenfluth. Daher betragen an freien Küstenstellen, wenn man die Grösse der Sonnenfluth als Einheit annimmt, die Springfluthen 3,1 und die Nippfluthen nur 1,1, und bei beiden ist die Stunde hohen Wassers dieselbe wie bei der Mondfluth allein. Die grösste Abweichung der wirklichen Fluth von den Phasen (sei es für hohen, niedrigen oder mittleren Wasserstand) der Mondfluth allein ist etwa 0,95 einer Mondstunde, d. i. 0,98 einer Sonnenstunde (derselbe Theil von 12 Mondstunden, welcher der Winkel, dessen Sinus gleich $\frac{1}{2,1}$ ist, nämlich $28^0\ 26'$ von 360^0 ist). Diese grösste Abweichung wird ein Früher- oder Spätereintreten sein, je nachdem die Spitze der Sonnenfluth derjenigen der Mondfluth vorhergeht oder folgt; sie wird genau erreicht werden, wenn der Phasenunterschied zwischen beiden componirenden Fluthen 3,95 Mondstunden beträgt. Mit anderen Worten, die grösste Verfrühung der Zeit hohen Wassers wird $4\frac{1}{2}$ Tage nach und die grösste Verzögerung ebenso viele Tage vor den Springfluthen stattfinden.

61. Wir kommen jetzt zu dem Falle, in welchem die Amplituden der beiden gegebenen Bewegungen einander gleich sind. Wenn dieselben auch gleiche Perioden haben, so ist ihre Resultante eine einfache harmonische Bewegung, deren Phase in jedem Augenblick das Mittel der beiden Phasen, und deren Amplitude gleich dem doppelten Product aus einer der beiden Amplituden in den Cosinus der halben Phasendifferenz ist. Die Resultante ist natürlich Null, wenn der Phasenunterschied eine halbe Periode beträgt; sie ist eine Bewegung von doppelt so grosser Amplitude und derselben Phase wie jede der componirenden Bewegungen, wenn dieselben die nämliche Phase haben.

Wenn die Perioden nahezu, aber nicht völlig gleich sind (die Amplituden werden immer noch als gleich vorausgesetzt), so geht die Bewegung sehr langsam von dem ersteren Werthe (Null, oder überhaupt keine Bewegung) zum letzteren über und darauf wieder zum ersteren zurück; die zu einem Hin- und Hergange gebrauchte Zeit ist derjenigen gleich, während welcher die Periode der schnelleren Bewegung einmal mehr als die der langsameren durchlaufen wird.

Man begegnet in der Praxis vielen vortrefflichen Beispielen dieses Falles, die jedoch füglicher erst dann zur Besprechung kommen, wenn wir die kinetischen Principien auf verschiedene Gegenstände der praktischen Mechanik, der Akustik und der physikalischen Optik anwenden werden. Solche Beispiele sind: das Marschiren von Truppen über eine Hängebrücke, das Mitschwingen von Pendeln oder Stimmgabeln, u. s. w.

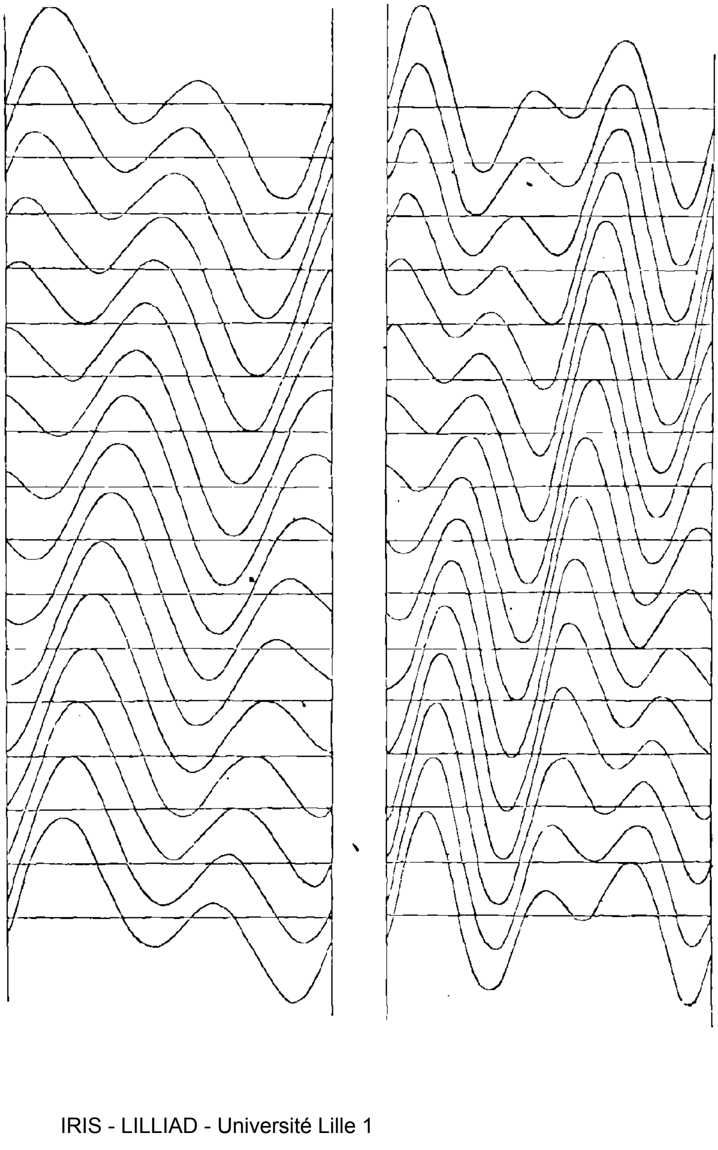
62. **Graphische Darstellung harmonischer Bewegungen, die in einer Geraden stattfinden.** — Wir können eine einzelne einfache harmonische Bewegung und die verschiedenen im Vorhergehenden betrachteten Fälle der Zusammensetzung solcher in einer

Geraden vor sich gehenden Bewegungen graphisch durch Curven darstellen, bei denen die Abscissen Zeiträume und die Ordinaten die entsprechenden Entfernungen des beweglichen Punktes von seiner mittlern Lage bedeuten. Im Falle einer einzelnen einfachen harmonischen Bewegung würde die entsprechende Curve die durch den Punkt P in § 53 unter der Voraussetzung beschriebene sein, dass sich der Kreis mit gleichbleibender Geschwindigkeit in irgend einer zu OA senkrechten Richtung bewegte, während Q seine gleichförmige Kreisbewegung beibehielte. Die Construction dieses Falles liefert die harmonische Curve oder Sinuslinie, bei welcher die Ordinaten den Sinus der Abscissen proportional sind; dabei wird die Gerade, in welcher O sich bewegt, als die Abscissenaxe angenommen. Es ist dies die einfachste überhaupt mögliche Form, die eine schwingende Schnur annimmt. Wenn die harmonische Bewegung zusammengesetzt, aber auf eine Gerade beschränkt ist, wie im Falle der Bewegung jedes Punktes einer Violin-, Harfen- oder Klaviersaite (deren Bewegungen nur darin von einander verschieden sind, weil man die Schwingungen auf verschiedene Weisen erregt), so lässt sich eine ähnliche Construction ausführen. Die Untersuchung zusammengesetzter harmonischer Functionen hat zu Ergebnissen von der höchsten Wichtigkeit geführt, die ihren allgemeinsten Ausdruck in dem Fourier'schen Satze gefunden haben, dem wir alsbald einige Seiten widmen werden. Wir lassen jetzt graphische Darstellungen der Zusammensetzung zweier in einer Geraden stattfindenden einfachen harmonischen Bewegungen folgen, welche gleiche Amplituden haben, und deren Perioden sich wie 1 : 2 und wie 2 : 3 verhalten, während die Epochedifferenzen 0, 1, 2, u. s. w. Sechszehnteln einer Umdrehung entsprechen. In jedem Falle beträgt die Epoche der Componente, welche die grössere Periode hat, ein Viertel einer Umdrehung, und im ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Falle jeder der beiden Curvenreihen ist die Epoche der Componente, welche die kleinere Periode hat, beziehungsweise um 0, 1, 2, u. s. w. Sechszehntel einer Umdrehung kleiner als ein Viertel einer Periode. Die verschiedenen Horizontallinien sind die Abscissenaxen der verschiedenen Curven, während die Verticallinie zur Linken jeder Reihe die gemeinschaftliche Ordinatenaxe ist. In jedem Falle der erstern Curvenreihe geht die langsamere Bewegung durch eine vollständige Periode, in jedem Falle der zweiten Reihe durch zwei Perioden hindurch.

1 : 2 (Octave)	**2 : 3** (Quinte)
$y = \sin x + \sin\left(2x + \frac{n\pi}{8}\right)$	$y = \sin 2x + \sin\left(3x + \frac{n\pi}{8}\right)$

In beiden Fällen durchläuft x das Intervall von 0 bis 2π, und n nimmt der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2 . . . 15 an.

Fig. 10.



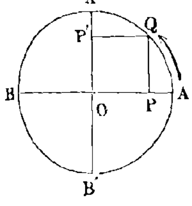
Diese und ähnliche Fälle, in denen die Perioden nicht commensurabel sind, werden in der Akustik wieder behandelt werden.

63. Einfache harmonische Bewegungen in verschiedenen Richtungen. — Wir haben jetzt weiter die Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen zu betrachten, die in verschiedenen Richtungen erfolgen. Zunächst sehen wir, dass, wenn man eine beliebige Anzahl einfacher harmonischer Bewegungen, die von derselben Periode und von derselben Phase sind, zusammensetzt, man eine einzige einfache harmonische Bewegung von derselben Phase erhält. Denn nach dem Princip der Zusammensetzung von Bewegungen (siehe § 50) ist die Verschiebung in jedem Augenblick die geometrische Resultante der Verschiebungen, welche die componirenden Bewegungen einzeln erzeugen würden, und in dem Falle, den wir hier voraussetzen, verändert sich die Grösse dieser componirenden Verschiebungen bei allen in demselben Verhältniss und ihre Richtung ist constant. Es wird sich also auch die Grösse der resultirenden Verschiebung in demselben Verhältniss ändern und dieselbe wird eine constante Richtung haben.

Wenn aber die Phasen der verschiedenen componirenden Bewegungen nicht übereinstimmen, während ihre Perioden noch dieselben sind, so wird die resultirende Bewegung im Allgemeinen elliptisch sein, und der vom Mittelpunkt aus gezogene Radiusvector wird in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreiben. Dies schliesst nicht aus, dass die Bewegung in besonderen Fällen trotzdem kreisförmig und von gleichbleibender Geschwindigkeit, oder andererseits geradlinig und einfach harmonisch ist.

64. Dies zu beweisen, wollen wir zuerst den Fall betrachten, in welchem zwei gleiche einfache harmonische Bewegungen gegeben sind, deren Bahnen auf einander senkrecht stehen, und deren Phasendifferenz ein Viertel einer Periode beträgt.

Fig. 11.



Ihre Resultante ist eine gleichförmige Kreisbewegung. Denn wenn BA und $B'A'$ ihre Bewegungslinien sind und um die gemeinschaftliche Mitte O derselben als Mittelpunkt ein Kreis durch $AA'BB'$ beschrieben wird, so wird die gegebene Bewegung von P, die in AB stattfindet, durch die Bewegung eines Punktes Q in der Peripherie dieses Kreises definirt werden (§ 53). Wenn sich derselbe Punkt in der durch den Pfeil angezeigten

Richtung bewegt, so wird er eine einfache harmonische Bewegung von P' in der Linie $B'A'$ geben, welche ein Viertel einer Periode hinter der Bewegung von P in AB zurück ist. Da aber $A'OA$, QPO und $QP'O$ rechte Winkel sind, so ist die Figur $QP'OP$ ein Parallelogramm, und folglich ist die Lage Q das Resultat der aus OP und OP' zusammengesetzten Verschiebung. Wir sehen somit, dass zwei gleiche einfache harmonische Bewegungen, die in auf einander senkrechten Geraden stattfinden, und deren Phasen sich um ein Viertel einer Periode von einander unterscheiden, mit einer gleichförmigen Kreisbewegung gleichbedeutend sind, deren Radius gleich der grössten Verschiebung ist, die jede Bewegung einzeln hervorbringen würde, und welche vom positiven Ende der Bewegungslinie der vordern Componente nach dem positiven Ende der Bewegungslinie der hintern zu erfolgt.

65. Nun sind orthogonale Projectionen einfacher harmonischer Bewegungen offenbar einfach harmonisch und von unveränderter Phase. Projiciren wir also den Fall des § 64 auf irgend eine Ebene, so erhalten wir eine Bewegung in einer Ellipse, für welche die Projectionen der Bewegungslinien der beiden componirenden Bewegungen conjugirte Durchmesser sind, und in welcher der vom Mittelpunkt ausgehende Radiusvector *in gleichen Zeiten* gleiche Flächen (die Projectionen der vom Radius des Kreises beschriebenen Flächen) beschreibt. Die Ebene und die Lage des Kreises, von welchem diese Projection genommen wird, können aber offenbar der Bedingung entsprechend bestimmt werden, dass die Projectionen der Bewegungslinien mit zwei beliebig gegebenen einander halbirenden Geraden zusammenfallen. Zwei beliebige einfache harmonische Bewegungen, ihre Bewegungslinien mögen gleich oder ungleich, rechtwinklig oder schiefwinklig zu einander sein, erzeugen danach, wenn nur ihre Phasendifferenz ein Viertel einer Periode beträgt, eine elliptische Bewegung, welche jene Bewegungslinien zu conjugirten Axen hat, und bei welcher der vom Mittelpunkt aus gezogene Radiusvector in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

66. Wir kehren jetzt wieder zur Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl gleicher einfacher harmonischen Bewegungen zurück, die in irgend welchen Richtungen stattfinden und von beliebigen Phasen sind. Jede componirende einfache harmonische Bewegung kann auf ganz bestimmte Weise in zwei Bewegungen in derselben Geraden zerlegt werden, deren Phasendifferenz ein Viertel einer

Periode beträgt, und von denen die eine eine beliebig gegebene Epoche hat. Wir können folglich die gegebenen Bewegungen auf zwei Gruppen von Bewegungen reduciren, deren Phasen um ein Viertel einer Periode verschieden sind, und zwar können wir es so einrichten, dass jede Bewegung einer dieser Gruppen dieselbe Phase wie irgend eine der gegebenen Bewegungen oder wie sonst eine einfache harmonische Bewegung hat, die wir nach Belieben wählen können (d. h. deren Epoche unserer freien Wahl überlassen ist).

Alle Bewegungen einer jeden dieser Gruppen können (§ 58) in eine einzige in einer bestimmten Linie stattfindende einfache harmonische Bewegung von derselben Phase und von bestimmter Amplitude zusammengesetzt werden. Das ganze System wird somit auf zwei völlig bestimmte einfache harmonische Bewegungen reducirt, deren Phasendifferenz ein Viertel einer Periode beträgt.

Nun haben wir bewiesen, dass die Resultante zweier in verschiedenen Geraden vor sich gehenden einfachen harmonischen Bewegungen, von denen die eine ein Viertel einer Periode der andern voraus ist, eine Bewegung in einer Ellipse ist, für welche die Bewegungslinien der Bewegungscomponenten conjugirte Axen sind, und in welcher der vom Mittelpunkt ausgehende Radiusvector in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt. Der Satz des § 63 ist somit erwiesen.

Es seien, bei Zugrundelegung Cartesischer Coordinaten,

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = l_1 a_1 \cos(\omega t - \varepsilon_1) \\ y_1 = m_1 a_1 \cos(\omega t - \varepsilon_1) \\ z_1 = n_1 a_1 \cos(\omega t - \varepsilon_1) \end{cases}$$

die Gleichungen der ersten der gegebenen Bewegungen, und hieraus mögen sich durch Aenderung der Indices die Gleichungen der übrigen Bewegungen ergeben. Es bezeichnen darin allgemein

l, m, n die Richtungscosinus, d. h. die Cosinus der Winkel, welche die Bewegungsrichtung mit den Coordinatenaxen bildet,

a die Amplitude, ε die Epoche und ω die gemeinschaftliche relative Winkelgeschwindigkeit. Die Gleichungen der resultirenden Bewegung, zu deren Angabe wir die Buchstaben x, y, z ohne Indices gebrauchen, sind dann

$$\begin{aligned} x &= \sum l_1 a_1 \cos(\omega t - \varepsilon_1) \\ &= \cos\omega t \sum l_1 a_1 \cos\varepsilon_1 + \sin\omega t \sum l_1 a_1 \sin\varepsilon_1, \\ y &= \text{u. s. w.}, \; z = \text{u. s. w.}, \end{aligned}$$

oder, wie wir kurz schreiben können,

$$(2)\qquad \begin{cases} x = P\cos\omega t + P'\sin\omega t \\ y = Q\cos\omega t + Q'\sin\omega t \\ z = R\cos\omega t + R'\sin\omega t, \end{cases}$$

wo

$$(3)\qquad \begin{cases} P = \sum l_1 a_1 \cos\varepsilon_1, & P' = \sum l_1 a_1 \sin\varepsilon_1, \\ Q = \sum m_1 a_1 \cos\varepsilon_1, & Q' = \sum m_1 a_1 \sin\varepsilon_1, \\ R = \sum n_1 a_1 \cos\varepsilon_1, & R' = \sum n_1 a_1 \sin\varepsilon_1 \end{cases}$$

ist. Die resultirende Bewegung, welche so in Ausdrücken von sechs componirenden einfachen harmonischen Bewegungen angegeben ist, kann auf zwei Bewegungen reducirt werden, dadurch dass man P, Q, R und P', Q', R' auf elementarem Wege vereinigt. Wenn

$$(4)\qquad \begin{cases} \zeta = (P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2} \\ \lambda = \dfrac{P}{\zeta},\ \mu = \dfrac{Q}{\zeta},\ \nu = \dfrac{R}{\zeta} \\ \zeta' = (P'^2 + Q'^2 + R'^2)^{1/2} \\ \lambda' = \dfrac{P'}{\zeta'},\ \mu' = \dfrac{Q'}{\zeta'},\ \nu' = \dfrac{R'}{\zeta'} \end{cases}$$

ist, so wird die gesuchte Bewegung die Resultante der Bewegungen $\zeta\cos\omega t$ und $\zeta'\sin\omega t$ sein, von denen die erstere in der Geraden (λ, μ, ν), die zweite in der Geraden (λ', μ', ν') stattfindet. Sie ist daher eine Bewegung in einer Ellipse, für welche die Strecken 2ζ und $2\zeta'$ in den angegebenen Richtungen conjugirte Durchmesser sind; der vom Mittelpunkt ausgehende Radiusvector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen, und die Periode ist $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

67. Harmonische Bewegungen verschiedener Art, die in verschiedenen Geraden stattfinden. — Weiter haben wir uns mit dem Falle der Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen zu beschäftigen, die von verschiedener Art sind und in verschiedenen Geraden stattfinden. Im Allgemeinen kehrt, diese Geraden mögen in einer Ebene liegen oder nicht, die Bewegungslinie in sich selbst zurück, wenn die Perioden commensurabel sind; bei incommensurabeln Perioden ist dies nicht der Fall. Dies leuchtet ohne Beweis ein.

Ist für eine Componente, deren Richtungscosinus λ, μ, ν sind, a die Amplitude, ε die Epoche und n die Winkelgeschwindigkeit in der zugehörigen Kreisbewegung, so hat man für die Coordinaten ξ, η, ζ der resultirenden Bewegung die Gleichungen

$$\xi = \sum \lambda_1 a_1 \cos(n_1 t - \varepsilon_1),$$
$$\eta = \sum \mu_1 a_1 \cos(n_1 t - \varepsilon_1),$$
$$\zeta = \sum \nu_1 a_1 \cos(n_1 t - \varepsilon_1).$$

Nun ist es klar, dass die Werthe von ξ, η, ζ zur Zeit $t + T$ wiederkehren werden, sobald $n_1 T$, $n_2 T$, u. s. w. Vielfache von 2π sind, d. h. wenn T das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\frac{2\pi}{n_1}$, $\frac{2\pi}{n_2}$, u. s. w. ist.

Ist ein solches gemeinschaftliches Vielfache vorhanden, so können die trigonometrischen Functionen eliminirt werden, und die Gleichungen (oder, wenn die Bewegung auf eine Ebene beschränkt ist, die Gleichung) für die Bahn sind algebraisch. Im entgegengesetzten Falle sind sie transcendent.

68. Aus dem Vorhergehenden ersehen wir allgemein, dass die Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl einfacher harmonischer Bewegungen, die in beliebigen Richtungen stattfinden und von beliebigen Perioden sind, in der Weise ausgeführt werden kann, dass man jede Bewegung in drei auf einander senkrechte Componenten zerlegt, nach den früher dargelegten Methoden die in jeder dieser zu einander senkrechten Richtungen stattfindenden Bewegungscomponenten in eine einzige Bewegung zusammensetzt, und endlich die drei letzterhaltenen resultirenden Bewegungen vereinigt.

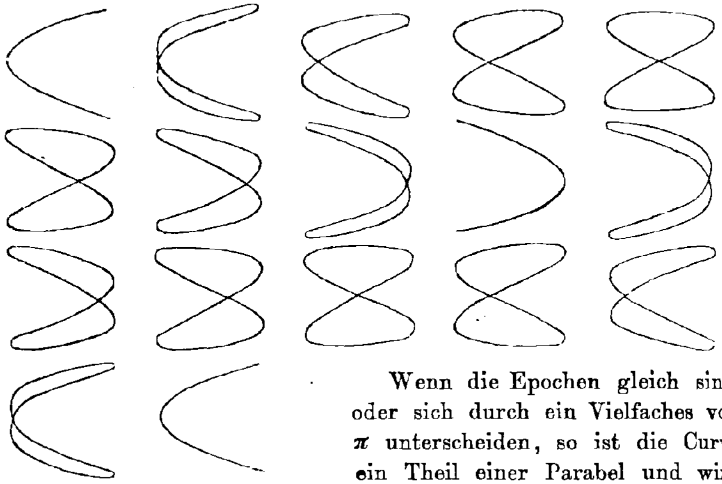
69. **Einfache harmonische Bewegungen in zwei zu einander senkrechten Richtungen.** — Der weit interessanteste und einfachste Fall ist der zweier einfachen harmonischen Bewegungen von beliebigen Perioden, deren Richtungen natürlich in einer Ebene liegen müssen.

Mechanische Methoden, solche Verbindungen herzustellen, sowie Fälle ihres Vorkommens in der Optik und Akustik werden später beschrieben werden.

Der Einfachheit wegen wollen wir voraussetzen, dass die Richtungen der beiden componirenden Bewegungen auf einander senkrecht stehen, und da wir nur dann eine in sich zurückkehrende Curve erhalten werden, wenn die Perioden commensurabel sind, so empfiehlt es sich, mit einem solchen Falle zu beginnen.

Die folgenden Figuren stellen die Bahnen dar, welche durch die Verbindung von einfachen harmonischen Bewegungen gleicher Amplituden entstehen, vorausgesetzt, dass die Perioden der zu einander senkrechten Componenten sich wie 1 : 2 verhalten, und dass ihre Epochen der Reihe nach um 0, 1, 2, u. s. w. Sechszehntel einer Umdrehung von einander abweichen.

Fig. 12.



Wenn die Epochen gleich sind, oder sich durch ein Vielfaches von π unterscheiden, so ist die Curve ein Theil einer Parabel und wird vom beweglichen Punkt während jeder vollständigen Periode zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen.

Für den hier gezeichneten Fall ist

$$x = a\cos(2nt - \varepsilon), \quad y = a\cos nt,$$

folglich

$$\begin{aligned} x &= a\{\cos 2nt \,.\, \cos\varepsilon + \sin 2nt \,.\, \sin\varepsilon\} \\ &= a\left\{\left(\frac{2y^2}{a^2} - 1\right)\cos\varepsilon + 2\frac{y}{a}\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}\sin\varepsilon\right\}, \end{aligned}$$

und dies ist für jeden gegebenen Werth von ε die Gleichung der entsprechenden Curve. So hat man für $\varepsilon = 0$

$$\frac{x}{a} = \frac{2y^2}{a^2} - 1, \text{ oder } y^2 = \frac{a}{2}(x + a),$$

also, wie oben angegeben ist, die Gleichung der Parabel. Für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$\frac{x}{a} = 2\frac{y}{a}\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}, \text{ oder } a^2x^2 = 4y^2(a^2 - y^2),$$

die Gleichung der fünften und dreizehnten der obigen Curven.

Im Allgemeinen ist

$$x = a\cos(nt + \varepsilon), \; y = a\cos(n_1 t + \varepsilon_1),$$

und hieraus hat man, wenn es möglich ist, t zu eliminiren.

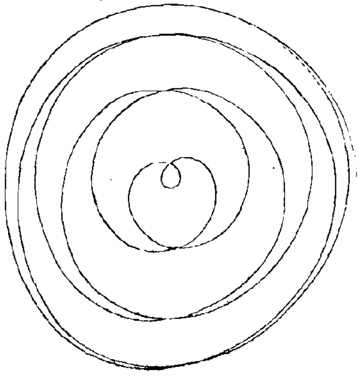
70. **Zusammensetzung zweier gleichförmigen Kreisbewegungen.** — Ein anderer sehr wichtiger Fall ist der zweier Gruppen von zwei einfachen harmonischen Bewegungen, die in einer Ebene stattfinden und so beschaffen sind, dass die Resultante jeder Gruppe eine gleichförmige Kreisbewegung ist.

Wenn die Perioden gleich sind, so haben wir einen der schon im § 63 behandelten Fälle und schliessen dann, dass die resultirende Bewegung im Allgemeinen in einer Ellipse erfolgt, und dass um den Mittelpunkt in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschrieben werden. In besonderen Fällen können wir auch eine einfache harmonische, oder eine gleichförmige Kreisbewegung erhalten.

Wenn hierbei die Kreisbewegungen in derselben Richtung vor sich gehen, so resultirt offenbar eine Kreisbewegung von derselben Richtung. Dies ist der Fall der Bewegung von S in § 58 und erfordert keine weitere Erläuterung, da die Amplitude, die Epoche, u. s. w. ohne Weiteres aus der Figur ersichtlich sind.

71. Wenn die Perioden der beiden Bewegungscomponenten nur äusserst wenig von einander verschieden sind, so wird die resultirende Bewegung in jedem Augenblick äusserst wenig von der durch die vorhergehende Construction gegebenen Kreisbewegung abweichen. Wir können dieselbe auch als eine in aller Strenge kreisförmige Bewegung auffassen, deren Radius von einem grössten Werthe, der Summe der Radien der beiden Bewegungscomponenten, zu einem kleinsten Werthe, der Differenz dieser Radien, abnimmt, darauf wieder bis zu jenem grössten Werthe wächst, u. s. f. Die Richtung des Radius der Resultante oscillirt zu beiden Seiten des Radius der grössern Componente (wie in dem entsprechenden Falle des § 59). Die Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Bewegung ist daher periodisch veränderlich. Im Falle gleicher Radien, zu dem wir uns jetzt wenden, ist sie constant.

Fig. 13.



72. Wenn die Radien der beiden Bewegungscomponenten gleich sind, so haben wir den durch die nebenstehende Figur dargestellten äusserst interessanten und wichtigen Fall.

Hier halbirt der Radius

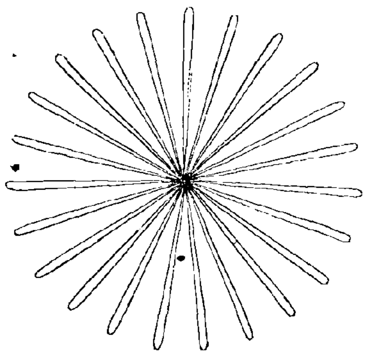
der Resultante den von den Radien der Componenten gebildeten Winkel. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist das arithmetische Mittel ihrer Componenten. Wir werden in einem spätern Paragraphen auseinandersetzen, wie diese Epitrochoide durch das Rollen eines Kreises auf einem andern Kreise entsteht. (Der oben gezeichnete besondere Fall ist der einer in sich nicht zurückkehrenden Curve.)

73. Die gleichförmigen Kreisbewegungen mögen jetzt in entgegengesetzten Richtungen erfolgen. Wenn dann die Perioden gleich sind, so erkennen wir leicht wie früher (§ 66), dass die Resultante im Allgemeinen eine elliptische Bewegung ist, welche die besonderen Fälle einer gleichförmigen Kreisbewegung und einer einfachen harmonischen Bewegung in sich schliesst.

Wenn die Perioden nur sehr wenig von einander verschieden sind, so erhält man die Resultante leicht wie im Falle des § 59.

74. Die Fälle, in denen die Radien der Bewegungscomponenten gleich sind, sind von äusserst grosser Bedeutung in der modernen Physik; einer derselben ist hier gezeichnet (die Curve läuft, wie die vorhergehende, nicht in sich zurück).

Fig. 14.



Dieser Fall steht in enger Beziehung zu der Erklärung zweier Reihen wichtiger Erscheinungen: der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Quarz und gewisse Flüssigkeiten einerseits und durch durchsichtige Körper, die man der Wirkung magnetischer Kräfte aussetzt, andererseits. Die obige Curve ist ein Fall der Hypotrochoide, und ihre Entstehungsart wird in einem späteren Paragraphen mitgetheilt werden. Auch wird man in der Kinetik sehen, dass sie die Bahn einer Pendellinse ist, welche ein schnell rotirendes Gyroskop enthält.

75. **Der Fourier'sche Satz.** — Bevor wir die Theorie der Zusammensetzung harmonischer Bewegungen für einige Zeit verlassen, müssen wir unserm in § 62 gegebenen Versprechen gemäss einige Seiten der Betrachtung des Fourier'schen Satzes widmen, der nicht nur eins der schönsten Ergebnisse der neuern Analysis

ist, sondern den man als ein bei der Behandlung von fast jeder schwierigeren Frage der neuern Physik unentbehrliches Hilfsmittel ansehen kann.

Wir brauchen nur die tönenden Schwingungen, die Fortpflanzung elektrischer Signale längs eines Telegraphendrahtes und die Leitung der Wärme durch die Erdrinde zu erwähnen, Gegenstände, die in ihrer Allgemeinheit ohne jenen Satz nicht behandelt werden können, um eine wenngleich schwache Vorstellung von seiner Bedeutung zu erwecken. Die folgende Form scheint die am leichtesten verständliche zu sein, in der man ihn dem gewöhnlichen Leser vorführen kann.

Satz. — Eine zusammengesetzte harmonische Function, mit einer hinzugefügten Constanten, kann zur mathematischen Darstellung einer jeden beliebigen periodischen Function und folglich auch einer jeden beliebigen anderen Function zwischen bestimmten Werthen der Veränderlichen gebraucht werden.

76. Wenn eine beliebige periodische Function gegeben ist, so kann man die Amplituden und Epochen einer zusammengesetzten harmonischen Function, die ihr für jeden Werth der unabhängig Veränderlichen gleich sein soll, mittels der „Methode der unbestimmten Coefficienten" bestimmen. Solch eine Untersuchung ist genügend als Lösung der Aufgabe: — eine zusammengesetzte harmonische Function zu finden, welche eine beliebig gegebene periodische Function darstellt, — sobald man sicher weiss, dass die Lösung der Aufgabe überhaupt möglich ist, und wenn man einmal diese Sicherheit hat, so zeigt jene Untersuchung, dass die Lösung eine ganz bestimmte ist, d. h. dass keine andere als die gefundene harmonische Function den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten kann.

77. Wir könnten das im vorhergehenden Paragraphen angedeutete Verfahren anwenden, um einen analytischen Beweis des Fourier'schen Satzes zu geben. Es scheint uns aber, dass die Natur des Ausdrucks klarer werden wird, wenn wir bei unserer Entwicklung einen andern Ausgangspunkt nehmen.

Es sei $F(x)$ eine beliebige periodische Function von der Periode p, d. h. irgend eine Function, welche die Bedingung

$$F(x + np) = F(x) \tag{1}$$

erfüllt, wo n irgend eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Wir betrachten das Integral

$$\int_{c'}^{c} \frac{F(x)\,dx}{a^2 + x^2},$$

in welchem a, c, c' drei beliebig gegebene Grössen sind. Bezeichnen z und z' die zwischen den Grenzen c und c' enthaltenen, oder diesen Grenzen gleichen Werthe von x, für welche $F(x)$ beziehungsweise seinen grössten und kleinsten Werth hat, so ist das Integral kleiner als $F(z)\int_{c'}^{c}\frac{dx}{a^2+x^2}$ und grösser als $F(z')\int_{c'}^{c}\frac{dx}{a^2+x^2}$. Man hat aber

$$(2)\qquad \int_{c'}^{c}\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(arctan\frac{c}{a} - arctan\frac{c'}{a}\right),$$

folglich

$$(3)\qquad \begin{cases} \int_{c'}^{c}\frac{F(x)\,a\,dx}{a^2+x^2} < F(z)\left(arctan\frac{c}{a} - arctan\frac{c'}{a}\right) \\ \qquad " \qquad > F(z')\left(arctan\frac{c}{a} - arctan\frac{c'}{a}\right). \end{cases}$$

Ist nun A der grösste und B der kleinste aller Werthe von $F(x)$, so folgt aus (3)

$$(4)\qquad \begin{cases} \int_{c}^{\infty}\frac{F(x)a\,dx}{a^2+x^2} < A\left(\frac{\pi}{2} - arctan\frac{c}{a}\right) \\ \qquad " \qquad > B\left(\frac{\pi}{2} - arctan\frac{c}{a}\right), \end{cases}$$

und auf ähnliche Weise

$$(5)\qquad \begin{cases} \int_{-\infty}^{c'}\frac{F(x)\,a\,dx}{a^2+x^2} < A\left(arctan\frac{c'}{a} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \qquad " \qquad > B\left(arctan\frac{c'}{a} + \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Addiren wir die ersten Glieder der Formeln (3), (4) und (5) und vergleichen die Summe mit den entsprechenden Summen der zweiten Glieder, so erhalten wir

$$(6)\qquad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)\,a\,dx}{a^2+x^2} < F(z)\left(arctan\frac{c}{a} - arctan\frac{c'}{a}\right) + A\left(\pi - arctan\frac{c}{a} + arctan\frac{c'}{a}\right) \\ \qquad " \qquad > F(z')\left(arctan\frac{c}{a} - arctan\frac{c'}{a}\right) + B\left(\pi - arctan\frac{c}{a} + arctan\frac{c'}{a}\right) \end{cases}$$

Nach (1) ist aber

$$(7)\qquad \int_{\infty}^{\infty}\frac{F(x)\,dx}{a^2+x^2} = \int_{0}^{p}F(x)\,dx\left\{\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(\frac{1}{a^2+(x+np)^2}\right)\right\}.$$

Wenn wir jetzt $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnen, so ist

$$\frac{1}{a^2+(x+np)^2} = \frac{1}{2\,a\,i}\left(\frac{1}{x+np-ai} - \frac{1}{x+np+ai}\right),$$

und es ergiebt sich folglich, wenn man die Terme, welche je zwei gleichen und entgegengesetzten Werthen von n entsprechen, zusammenfasst und diejenigen Terme, welche der Werth $n = 0$ liefert, besonders schreibt,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(\frac{1}{a^2+(x+np)^2}\right)=\frac{1}{2\,a\,i}\left\{\frac{1}{x-a\,i}-2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x-a\,i}{n^2p^2-(x-a\,i)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{x+a\,i}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x+a\,i}{n^2p^2-(x+a\,i)^2}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{2\,a\,p\,i}\left\{\cot\frac{\pi\,(x-a\,i)}{p}-\cot\frac{\pi\,(x+a\,i)}{p}\right\}$$
$$=\frac{\frac{\pi}{2\,a\,p\,i}\sin\frac{2\,\pi\,a\,i}{p}}{\cos^2\frac{\pi\,a\,i}{p}-\cos^2\frac{\pi\,x}{p}}=\frac{\frac{\pi}{a\,p\,i}\sin\frac{2\,\pi\,a\,i}{p}}{\cos\frac{2\,\pi\,a\,i}{p}-\cos\frac{2\,\pi\,x}{p}}$$
$$=\frac{\pi}{a\,p}\cdot\frac{e^{\frac{2\,\pi\,a}{p}}-e^{-\frac{2\,\pi\,a}{p}}}{e^{\frac{2\,\pi\,a}{p}}-2\cos\frac{2\,\pi\,x}{p}+e^{-\frac{2\,\pi\,a}{p}}}.$$

Die Formel (7) geht daher über in

$$(8)\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)\,d\,x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{a\,p}\left(e^{\frac{2\,\pi\,a}{p}}-e^{-\frac{2\,\pi\,a}{p}}\right)\int_0^p\frac{F(x)\,d\,x}{e^{\frac{2\,\pi\,a}{p}}-2\cos\frac{2\,\pi\,x}{p}+e^{-\frac{2\,\pi\,a}{p}}}.$$

Bezeichnen wir weiter der Kürze wegen für einen Augenblick $e^{\frac{2\,\pi\,x\,i}{p}}$ mit ζ und setzen

$$(9)\qquad e^{-\frac{2\,\pi\,a}{p}}=\varepsilon,$$

so haben wir

$$\frac{1}{e^{\frac{2\,\pi\,a}{p}}-2\cos\frac{2\,\pi\,x}{p}+e^{-\frac{2\,\pi\,a}{p}}}=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\,(\zeta+\zeta^{-1})+\varepsilon^2}$$
$$=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{1}{1-\varepsilon\,\zeta}+\frac{1}{1-\varepsilon\,\zeta^{-1}}-1\right)$$
$$=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\left\{1+\varepsilon\,(\zeta+\zeta^{-1})+\varepsilon^2\,(\zeta^2+\zeta^{-2})+\varepsilon^3\,(\zeta^3+\zeta^{-3})+\text{u. s. w.}\right\}$$
$$=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\left(1+2\,\varepsilon\cos\frac{2\,\pi\,x}{p}+2\,\varepsilon^2\cos\frac{4\,\pi\,x}{p}+2\,\varepsilon^3\cos\frac{6\,\pi\,x}{p}+\text{u. s. w.}\right),$$

und die Formeln (8) und (9) liefern somit

$$(10)\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)\,d\,x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{a\,p}\int_0^p F(x)\,d\,x\left(1+2\,\varepsilon\cos\frac{2\,\pi\,x}{p}+2\,\varepsilon^2\cos\frac{4\,\pi\,x}{p}+\text{u. s. w.}\right).$$

Aus (6) und (10) folgern wir, dass

$$F(z)\left(\arctan\frac{c}{a}-\arctan\frac{c'}{a}\right)+A\left(\pi-\arctan\frac{c}{a}+\arctan\frac{c'}{a}\right)>$$

und

$$F(z')\left(\arctan\frac{c}{a}-\arctan\frac{c'}{a}\right)+B\left(\pi-\arctan\frac{c}{a}+\arctan\frac{c'}{a}\right)<$$

$$\frac{\pi}{p}\int_0^p F(x)\,dx\left(1 + 2\varepsilon\cos\frac{2\pi x}{p} + \text{u. s. w.}\right)$$

ist. Es sei jetzt $c' = -c$ und $x = \xi' - \xi$, wo ξ' eine Veränderliche und ξ, was die Integration betrifft, constant ist; ferner sei

$$F(x) = \varphi(x + \xi) = \varphi(\xi'),$$

also

$$F(z) = \varphi(\xi + z),$$
$$F(z') = \varphi(\xi + z').$$

Dann geht das vorhergehende Ungleichungspaar über in

$$(11)\qquad \begin{cases} \varphi(\xi + z)\,.\,2\,arctan\dfrac{c}{a} + A\left(\pi - 2\,arctan\dfrac{c}{a}\right) > \\ \text{und} \\ \varphi(\xi + z')\,.\,2\,arctan\dfrac{c}{a} + B\left(\pi - 2\,arctan\dfrac{c}{a}\right) < \\ \dfrac{\pi}{p}\left\{\displaystyle\int_0^p \varphi(\xi')\,d\xi' + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon^n \int_0^p \varphi(\xi')\,d\xi' \cos\frac{2n\pi(\xi' - \xi)}{p}\right\}; \end{cases}$$

darin bezeichnet φ eine beliebige periodische Function von der Periode p.

Wir nehmen nun an, c sei ein sehr kleiner Bruchtheil von p. Im Grenzfall, wenn c unendlich klein ist, werden der grösste und kleinste Werth von $\varphi(\xi')$ für Werthe von ξ', die zwischen $\xi + c$ und $\xi - c$ liegen, nur unendlich wenig von einander und von $\varphi(\xi)$ verschieden sein, d. h. es ist

$$\varphi(\xi + z) = \varphi(\xi + z') = \varphi(\xi).$$

Weiter sei a ein unendlich kleiner Bruchtheil von c. Im Grenzfall ist dann

$$arctan\frac{c}{a} = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\varepsilon = e^{-\frac{2\pi a}{p}} = 1.$$

Die Ungleichungen (11) liefern somit für die angegebene Grenze eine Gleichung, die nach beiderseitiger Division durch π folgende wird: —

$$(12)\qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{p}\left\{\int_0^p \varphi(\xi')\,d\xi' + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^p \varphi(\xi')\,d\xi' \cos\frac{2n\pi(\xi' - \xi)}{p}\right\}.$$

Dies ist der berühmte von Fourier*) entdeckte Satz für die Entwicklung einer beliebigen periodischen Function in eine Reihe von einfach harmonischen Gliedern. Eine in ihm als besonderer Fall enthaltene Formel ist schon früher von Lagrange**) gegeben worden.

Setzen wir für $cos\dfrac{2n\pi(\xi' - \xi)}{p}$ seinen Werth

*) Théorie Analytique de la Chaleur, Paris 1822.

**) Anciens Mémoires de l'Académie de Turin. Tome III, p. 126.

$$\cos\frac{2n\pi\xi'}{p}\cos\frac{2n\pi\xi}{p}+\sin\frac{2n\pi\xi'}{p}\sin\frac{2n\pi\xi}{p}$$

und führen die Bezeichnung

$$(13)\qquad \begin{cases} A_0=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^p\varphi(\xi)\,d\xi \\[2ex] A_n=\dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p\varphi(\xi)\cos\frac{2n\pi\xi}{p}\,d\xi \\[2ex] B_n=\dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p\varphi(\xi)\sin\frac{2np\xi}{p}\,d\xi \end{cases}$$

ein, so reduciren wir (12) auf die Form

$$(14)\qquad \varphi(\xi)=A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\cos\frac{2n\pi\xi}{p}+\sum_{n=1}^{n=\infty}B_n\sin\frac{2n\pi\xi}{p},$$

welche der allgemeine Ausdruck einer beliebigen Function in Form einer Reihe von Sinus und von Cosinus ist. Oder nehmen wir

$$(15)\qquad P_n=(A_n^2+B_n^2)^{1/2}\ \text{und}\ \tan\varepsilon_n=\frac{B_n}{A_n}$$

an, so haben wir

$$(16)\qquad \varphi(\xi)=A_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}P_n\cos\left(\frac{2n\pi\xi}{p}-\varepsilon_n\right),$$

und dies ist der allgemeine Ausdruck in Form einer Reihe, wo jeder der successiven vielfachen Perioden nur ein einfach harmonisches Glied entspricht.

Convergenz der Fourier'schen Reihe. Um Missverständnisse zu vermeiden, muss bemerkt werden, dass jede der Gleichungen und Vergleichungen (2), (7), (8), (10) und (11) ihren bestimmten arithmetischen Sinn hat und für jeden besondern Fall durch wirkliche Berechnung der Zahlen bewahrheitet werden kann; dabei wird nur vorausgesetzt, dass $F(x)$ keinen unendlich grossen Werth in seiner Periode hat. Unter dieser Beschränkung ist folglich (12) oder jede der beiden äquivalenten Formeln (14), (16) ein arithmetischer Ausdruck von bestimmtem Sinn und die darin enthaltene Reihe somit convergent. Wir können hieraus in aller Strenge schliessen, dass auch der Fall, in welchem die willkürliche Function eine plötzliche endliche Aenderung ihres Werthes erfährt, wenn die unabhängig Veränderliche bei ihrer stetigen Zunahme durch einen besondern Werth oder durch mehrere besondere Werthe hindurchgeht, in dem allgemeinen Satze enthalten ist. Wenn man in einem solchen Falle der unabhängig Veränderlichen irgend einen Werth ertheilt, der, wenn auch noch so wenig, von einem eine plötzliche Werthänderung der Function herbeiführenden Werthe verschieden ist, so muss, wie wir aus der vorhergehenden Untersuchung folgern können, die Reihe convergiren und einen bestimmten Werth für die Function liefern. Wenn aber der unabhängig Veränderlichen genau der kritische Werth beigelegt wird, so kann die Reihe zu keinem bestimmten Werthe convergiren. Die Betrachtung der durch die Formel (11) gelieferten einschliessenden Werthe beseitigt alle

Schwierigkeit, zu verstehen, wie die Reihe (12) für zwei besondere Werthe der unabhängig Veränderlichen, die zu beiden Seiten eines kritischen Werthes liegen, sich aber unendlich wenig von einander unterscheiden, bestimmte Werthe von endlicher Differenz liefert.

Wenn der Differentialquotient $\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}$ für jeden innerhalb der Periode gelegenen Werth von ξ endlich ist, so lässt auch er sich arithmetisch durch eine Reihe harmonischer Glieder ausdrücken, und diese Reihe kann von derjenigen nicht verschieden sein, die man erhält, wenn man die Reihe von $\varphi(\xi)$ differentiirt. Daraus folgt, dass

$$\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} = -\frac{2\pi}{p}\sum_{n=1}^{n=\infty} n P_n \sin\left(\frac{2n\pi\xi}{p} - \varepsilon_n\right), \tag{17}$$

und dass diese Reihe convergirt; daraus ziehen wir den Schluss, dass die Reihe von $\varphi(\xi)$ schneller convergirt als eine harmonische Reihe mit den Coefficienten

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn ferner $\frac{d^2\varphi(\xi)}{d\xi^2}$ innerhalb der Periode endlich bleibt, so dürfen wir beide Glieder von (17) differentiiren und erhalten eine immer noch arithmetisch richtige Gleichung. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse erkennen wir, dass, wenn der $n$te Differentialquotient keine unendlichen Werthe hat, die harmonische Reihe für $\varphi(\xi)$ schneller convergiren muss, als eine harmonische Reihe mit den Coefficienten

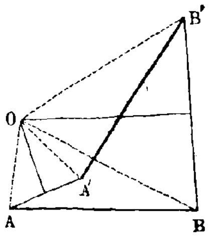
$$1, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{3^n}, \quad \frac{1}{4^n}, \quad \text{u. s. w.}$$

78. Verschiebung eines starren Körpers. — Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Verschiebung eines starren Körpers oder einer Gruppe von Punkten über, deren gegenseitige Lage keine Aenderung erleiden kann. Der einfachste Fall, den wir erörtern können, ist der der Bewegung einer ebenen Figur in ihrer eigenen Ebene, und was sich hierüber sagen lässt, ist, soweit es die Kinematik betrifft, vollständig in dem Resultat des folgenden Paragraphen zusammengefasst.

79. Verschiebung einer ebenen Figur in ihrer Ebene. — Wenn eine ebene Figur auf irgend eine Weise in ihrer eigenen Ebene verschoben wird, so giebt es immer (mit einer in § 81 behandelten Ausnahme) einen Punkt, der zwei beliebigen Lagen gemeinschaftlich ist, d. h. die Figur kann aus jeder Lage in jede andere Lage dadurch gebracht werden, dass man sie in ihrer eigenen Ebene um einen festgehaltenen Punkt rotiren lässt.

Dies zu beweisen, nehmen wir an, es seien A, B irgend zwei Punkte der ebenen Figur in ihrer ersteren Lage, und A', B' die Lagen, welche dieselben Punkte nach einer Verschiebung inne haben. Die Linien AA', BB' werden im Allgemeinen nicht parallel sein, ausser in einem Falle, der alsbald betrachtet werden soll. Der geometrische Ort der von A und A' gleich weit abstehenden Punkte wird folglich den Ort der Punkte, die von B und B' gleiche Entfernungen haben, in einem Punkte O schneiden. Verbinden wir nun O mit A, B, A', B', so sind die Dreiecke $OA'B'$ und OAB, da $OA' = OA$, $OB' = OB$, $A'B' = AB$ ist, offenbar congruent. O ist also gegen $A'B'$ und AB ähnlich gelegen, folglich ein und derselbe Punkt der ebenen Figur in ihren beiden Lagen. Wenn wir, um die Sache zu veranschaulichen, das Dreieck OAB wirklich in der Ebene verzeichnen, so wird es in der zweiten Lage der Figur $OA'B'$.

Fig. 15.

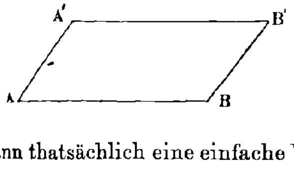


80. Nehmen wir von den gleichen Winkeln $A'OB'$, AOB dieser congruenten Dreiecke den beiden gemeinschaftlichen Theil $A'OB$ weg, so bleiben uns die gleichen Winkel AOA', BOB' übrig, und jeder derselben ist offenbar gleich dem Winkel, durch welchen die Figur um den Punkt O gedreht werden muss, um aus der ersteren in die zweite Lage überzugehen.

Die vorhergehende einfache Construction setzt uns in den Stand, nicht nur den allgemeinen Satz des § 79 zu beweisen, sondern auch aus zwei Lagen AB, $A'B'$ einer Linie der Figur den gemeinschaftlichen Mittelpunkt und die Grösse des Rotationswinkels zu bestimmen.

81. Die von A und A' gleich weit abstehende Gerade ist der Geraden, welche dieselbe Eigenschaft in Beziehung auf die Punkte B und B' hat, parallel, wenn AB parallel $A'B'$ ist. In diesem Falle schlägt die Construction fehl, da der Punkt O in unendliche Entfernung rückt, und der Satz verliert seine Geltung. Die Bewegung ist dann thatsächlich eine einfache Verschiebung der Figur in ihrer Ebene, die ohne Rotation erfolgt, da, wenn AB parallel und gleich $A'B'$, auch AA' parallel und gleich BB' ist, und anstatt dass ein Punkt zweien Lagen der Figur gemeinschaftlich sei, sind hier die Geraden,

Fig. 16.

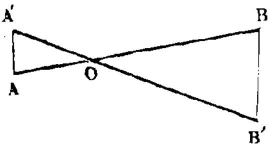


welche die verschiedenen Lagen jedes Punktes der Figur verbinden, gleich und parallel.

82. Es ist nicht nöthig, vorauszusetzen, dass die Figur eine flache Scheibe oder eine Ebene sei. Die vorhergehenden Ergebnisse gelten für jede einzelne der parallelen Ebenen eines starren Körpers, der sich in einer Weise bewegt, die nur der Bedingung unterworfen ist, dass die Punkte jeder seiner Ebenen beständig in einer festen Ebene des Raumes bleiben.

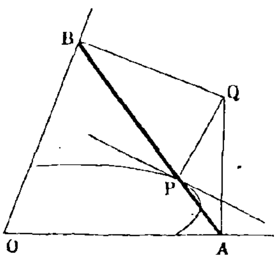
83. Es giebt noch einen Fall, in welchem die Construction des § 79 illusorisch wird, nämlich wenn AA' und BB' parallel sind, aber AB und $A'B'$ einander schneiden. In diesem Falle sieht man aber auf der Stelle, dass eben der Durchschnittspunkt von AB und $A'B'$ der gesuchte Punkt O ist, obwohl die frühere Methode uns nicht in den Stand gesetzt haben würde, ihn zu ermitteln.

Fig. 17.



84. **Beispiele von Verschiebungen in einer Ebene.** — Von diesem Princip lassen sich sehr viele interessante Anwendungen machen, von denen aber nur wenige streng genommen zu unserem Gegenstande gehören. Wir werden daher nur ein oder zwei Beispiele vorführen. So wissen wir, dass jeder Punkt P einer Geraden von gegebener Länge AB, die sich so bewegt, dass ihre Endpunkte beständig in zwei festen Geraden OA, OB bleiben, eine Ellipse beschreibt. Man soll für irgend einen Augenblick die Bewegungsrichtung von P finden, d. h. eine Tangente an die Ellipse ziehen. Die Linie BA wird in ihre nächste Lage durch Rotation um den Punkt Q übergehen. Diesen Punkt Q erhält man mittels der Methode des § 79 dadurch, dass man in A und B auf OA und OB Senkrechte errichtet. Für den in Rede stehenden Augenblick dreht sich also P um Q, und somit ist seine Bewegungsrichtung, oder die Tangente an die Ellipse senkrecht zu QP. Ferner berührt die Gerade AB bei ihrer Bewegung beständig eine Curve (in der Geometrie ihre einhüllende Curve genannt), und dasselbe Princip ermöglicht es, den Punkt dieser

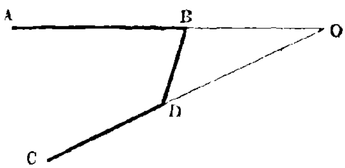
Fig. 18.



Curve zu ermitteln, welcher in AB liegt. Denn die Bewegung jenes Punktes muss offenbar, wenn nur eine sehr kleine Verschiebung erfolgt, längs AB vor sich gehen, und der einzige sich in dieser Weise bewegende Punkt ist der Durchschnittspunkt von AB mit der von Q aus auf AB gefällten Senkrechten. Unsere Construction würde uns also in den Stand setzen, die einhüllende Curve, d. h. beliebig viele Punkte derselben, zu zeichnen.

85. Um ein zweites Beispiel zu geben, nehmen wir an, AB sei der Balancier einer feststehenden Dampfmaschine, die sich um A auf und ab bewegt und vermittels einer Kette BD eine Kurbel CD in derselben Ebene um C dreht. Man soll für irgend eine Lage das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten von AB und CD bestimmen. Offenbar ist die augenblickliche Bewegungsrichtung von B transversal zu AB, und diejenige von D transversal zu CD. Wenn also die Verlängerungen von AB und CD sich in O schneiden, so ist die Bewegung von BD für einen Augenblick gleichsam eine Drehung um O. Daraus ersieht man leicht, dass, wenn AB die Winkelgeschwindigkeit ω hat, diejenige von CD gleich $\frac{AB}{OB}\frac{OD}{CD}\omega$ ist. Ein ähnliches Verfahren ist natürlich für jede Maschinenverbindung anwendbar, und werden wir dasselbe als sehr vortheilhaft erkennen, wenn wir im Zusammenhang mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten verschiedene dynamische Probleme zu betrachten haben werden.

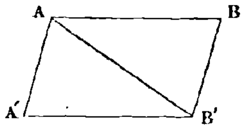
Fig. 19.



86. **Zusammensetzung von Rotationen um parallele Axen.** — Da jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene im Allgemeinen als eine Rotation um einen Punkt angesehen werden kann, so leuchtet ein, dass sich zwei solche Rotationen im Allgemeinen in eine zusammensetzen lassen; dasselbe kann folglich auch mit einer beliebigen Anzahl von Rotationen geschehen. So seien A und B die Punkte der Figur, um welche die Rotationen nach einander stattfinden sollen. Durch eine Rotation um A werde B etwa nach B', und durch eine Rotation um B' werde A nach A' gebracht. Die Construction des § 79 giebt uns ohne Weiteres den Punkt O und die Grösse der Rotation um diesen Punkt, die für sich allein dieselbe Wirkung hat, wie wenn man die Rotationen um A

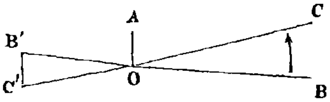
und B nach einander ausführte. Eine Ausnahme macht nur der Fall, in welchem die Rotationen um A und B von gleicher Grösse und von entgegengesetzten Richtungen sind. In diesem Falle ist $A'B'$ offenbar parallel AB, und das Ergebniss der Zusammensetzung nur eine Verschiebung ohne jede Rotation. Wenn also ein Körper sich nach einander durch gleiche Winkel, aber in entgegengesetzten Richtungen um zwei parallele Axen dreht, so nimmt er schliesslich eine Lage an, in die man ihn durch eine einfache Parallelverschiebung hätte bringen können; diese Verschiebung ist senkrecht gegen diejenigen Linien des Körpers in seiner anfänglichen oder letzten Lage, welche nach einander zu Rotationsaxen gemacht wurden, und bildet mit der Ebene derselben einen Winkel, der halb so gross als das Supplement des gemeinschaftlichen Rotationswinkels ist.

Fig. 20.



87. Zusammensetzung von Rotationen und Verschiebungen in einer Ebene. — Mit Beziehung hierauf können wir eine Rotation und eine Verschiebung, welche parallel der Rotationsebene ausgeführt wird, in eine äquivalente Rotation zusammensetzen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Verschiebung in zwei Rotationen von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung, vereinigen eine derselben nach § 86 mit der gegebenen Rotation und ebenso die zweite mit dem erhaltenen Resultat. Wir können uns auch der folgenden weit einfacheren Methode bedienen: — Es sei OA die allen Punkten in der Ebene gemeinschaftliche Verschiebung, und BOC der Winkel der Rotation um O; BO ist so gezogen, dass OA den Nebenwinkel COB' von BOC halbirt. Offenbar giebt es in der Verlängerung von BO einen Punkt B' von der Beschaffenheit, dass der Weg $B'C'$, den er in Folge der Rotation zurücklegt, gleich und entgegengesetzt OA ist. Dieser Punkt nimmt nach Ausführung beider gegebenen Operationen seine anfängliche Lage wieder ein, und wir sehen somit, dass eine Rotation und eine Parallelverschiebung in einer Ebene in eine gleiche Rotation um eine andere Axe zusammengesetzt werden können.

Fig. 21.



Wenn der Coordinatenanfangspunkt als der Punkt angenommen wird, um welchen in der xy Ebene eine Rotation stattfindet, und wenn der

Rotationswinkel von der Grösse ϑ ist, so hat ein Punkt, dessen Coordinaten anfangs x, y waren, nach der Rotation die Coordinaten

$$\xi = x \cos\vartheta - y \sin\vartheta,$$
$$\eta = x \sin\vartheta + y \cos\vartheta,$$

oder, wenn die Rotation sehr klein ist,

$$\xi = x - y\vartheta, \quad \eta = x\vartheta + y.$$

88. **Weglassung unendlich kleiner Grössen der zweiten Ordnung und höherer Ordnungen.** — Bei der Betrachtung der Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten um verschiedene Axen und anderer ähnlichen Fälle können wir es mit nur unendlich kleinen Verschiebungen zu thun haben, und aus den Principien der Differentialrechnung folgt ohne Weiteres, dass, wenn diese Verschiebungen unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind, man jeden Punkt, dessen Verschiebung eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, als in aller Strenge ruhend anzusehen hat. Wenn also z. B. ein Körper sich durch einen Winkel, der eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, um eine dem Körper angehörende Axe dreht, welche während der Drehung durch einen Winkel oder Weg verschoben wird, der gleichfalls eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, so ist die Verschiebung jedes Punktes des Körpers genau dieselbe, als wenn die Axe während der um sie erfolgten Rotation fest gewesen wäre, und ihre eigene Verschiebung entweder vor oder nach dieser Rotation stattgefunden hätte. In jedem Falle der Bewegung eines starren Systems sind folglich die Winkelgeschwindigkeiten in Beziehung auf ein System von Axen, die sich mit dem starren System bewegen, in jedem Augenblick die nämlichen, wie die in Beziehung auf ein festes Axensystem, vorausgesetzt nur, dass das letztere in dem fraglichen Augenblicke mit dem beweglichen zusammenfällt.

89. **Vereinigung kleiner Bewegungen.** — Aus ähnlichen Betrachtungen ergiebt sich auch das allgemeine Princip der Vereinigung kleiner Bewegungen. Dasselbe sagt aus, dass, wenn mehrere Ursachen gleichzeitig auf einen materiellen Punkt oder starren Körper wirken, und wenn die Wirkung jeder dieser Ursachen eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, man die Gesammtwirkung dadurch erhält, dass man die Ursachen einzeln nach einander wirken und jede den Punkt oder Körper in der Lage übernehmen lässt, in welcher die vorhergehende ihn gelassen hat. Es leuchtet ohne Weiteres ein, dass dieser Satz

5*

eine unmittelbare Folge der Thatsache ist, dass unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung ohne jede Beeinträchtigung der Genauigkeit vernachlässigt werden können. Wir werden in der Folge sehen, dass dies Princip von sehr grossem Nutzen ist; fast überall werden wir Anwendungen davon zu machen haben.

Eine ebene Figur habe gegebene Winkelgeschwindigkeiten um gegebene Axen, die zur Ebene der Figur senkrecht stehen. Man soll die Resultante bestimmen.

Um eine durch den Punkt a, b gehende Axe sei eine Winkelgeschwindigkeit ω vorhanden. Dann ist, wie wir soeben (§ 87) gesehen haben, die erfolgende Bewegung des Punktes x, y in der Zeit δt:

$$-(y-b)\,\omega\,\delta t \text{ parallel der } x \text{ Axe,}$$
$$(x-a)\,\omega\,\delta t \text{ parallel der } y \text{ Axe.}$$

Das Princip der Vereinigung kleiner Bewegungen liefert somit für die Gesammtbewegungen, welche beziehungsweise der x und der y Axe parallel erfolgen,

$$-(y\Sigma\omega - \Sigma b\,\omega)\,\delta t$$

und

$$(x\Sigma\omega - \Sigma a\,\omega)\,\delta t.$$

Folglich ist der Punkt, welcher die Coordinaten

$$x = \frac{\Sigma a\,\omega}{\Sigma\omega}, \quad y = \frac{\Sigma b\,\omega}{\Sigma\omega}$$

hat, in Ruhe, und die resultirende Axe geht durch ihn hindurch. Jeder andere Punkt ξ, η legt die Wege

$$-(\eta\Sigma\omega - \Sigma b\,\omega)\,\delta t, \quad (\xi\Sigma\omega - \Sigma a\,\omega)\,\delta t$$

zurück. Wenn aber das ganze System sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um den Punkt x, y gedreht hätte, so würden wir für die Verschiebungen von ξ, η

$$-(\eta - y)\,\Omega\,\delta t, \quad (\xi - x)\,\Omega\,\delta t$$

erhalten haben. Der Vergleich beider Ergebnisse lehrt, dass

$$\Omega = \Sigma\omega$$

ist.

Ist also die Summe der Winkelgeschwindigkeiten Null, so findet keine Rotation statt. In der That zeigen die obigen Formeln, dass dann nur eine Verschiebung vorhanden ist, und zwar beträgt dieselbe

$$\Sigma(b\,\omega)\,\delta t \text{ parallel der } x \text{ Axe,}$$
$$-\Sigma(a\,\omega)\,\delta t \text{ parallel der } y \text{ Axe.}$$

Diese Formeln genügen zur Behandlung jeder den Gegenstand betreffenden Aufgabe.

90. **Eine Curve rollt auf einer andern.** — Jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer eigenen Ebene kann dadurch hervorgebracht werden, dass eine mit der Figur fest verbundene Curve auf einer in der Ebene fest liegenden Curve rollt.

Denn wir können uns die Gesammtbewegung in ihre Elemente, d. i. in eine Reihe nach einander erfolgenden Verschiebungen zerlegt denken, von denen jede, wie wir gesehen haben, einer Rotation um einen bestimmten Punkt der Ebene entspricht. Es seien O_1, O_2, O_3, u. s. w. die Punkte der Figur, um welche der Reihe nach die Rotationen stattfinden, und o_1, o_2, o_3, u. s. w. die Lagen dieser Punkte in der Ebene zur Zeit, wo jeder der augenblickliche Rotationsmittelpunkt ist. Die Figur rotirt so lange um O_1 (oder um den damit zusammenfallenden Punkt o_1), bis O_2 mit o_2 zusammenfällt; darauf rotirt sie um O_2, bis O_3 auf o_3 zu liegen kommt, u. s. w. Verbinden wir also in der Ebene der Figur die Punkte O_1, O_2, O_3, u. s. w., und in der festen Ebene o_1, o_2, o_3, u. s. w., so ist die Bewegung genau dieselbe, als wenn das Polygon $O_1 O_2 O_3$ u. s. w. auf dem festen Polygone $o_1 o_2 o_3$ u. s. w. rollte. Setzt man die successiven Verschiebungen hinreichend klein voraus, so werden die Seiten dieser Polygone beständig kleiner, und die Polygone schliesslich continuirliche Curven. Der vorliegende Satz ist somit bewiesen.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass jede Verschiebung eines starren Körpers, deren Richtungen senkrecht zu einer festen Geraden sind, dadurch hervorgebracht werden kann, dass ein mit dem Körper fest verbundener Cylinder auf einem im Raum fest stehenden zweiten Cylinder rollt; die Axen beider Cylinder sind der festen Geraden parallel.

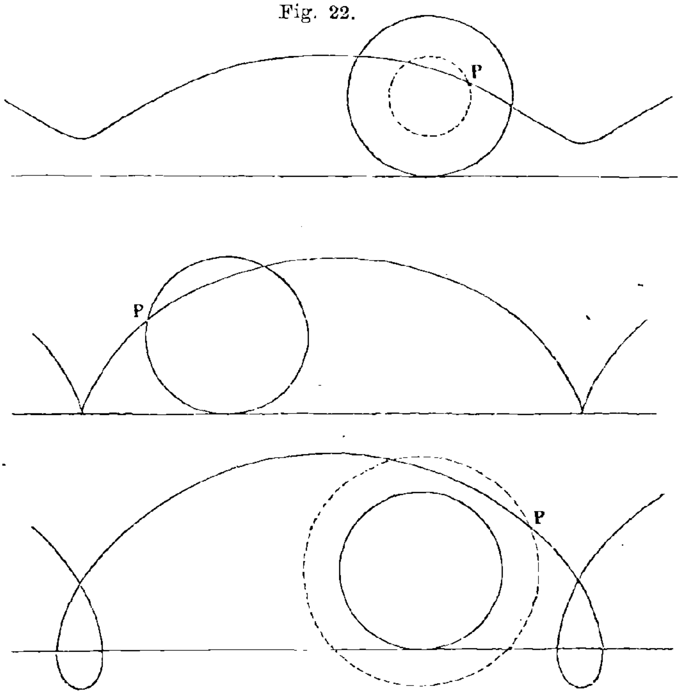
91. Als ein interessantes Beispiel dieses Satzes wollen wir wieder den Fall des § 84 ins Auge fassen: —

Offenbar kann um $OBQA$ ein Kreis beschrieben werden, und muss derselbe von unveränderlicher Grösse sein, da über einer Sehne von gegebener Länge AB ein gegebener Peripheriewinkel O steht. Ferner ist OQ ein Durchmesser dieses Kreises, folglich constant. Da nun Q augenblicklich in Ruhe ist, so ist die Bewegung des $OBQA$ umschreibenden Kreises ein auf der innern Seite der Peripherie eines Kreises von doppelt so grossem Durchmesser stattfindendes Rollen. Wenn also ein Kreis auf der Innenseite eines zweiten Kreises von doppelt so grossem Durchmesser rollt, so beschreibt jeder Punkt seiner Peripherie einen Durchmesser des festen Kreises, jeder andere Punkt seiner Ebene eine Ellipse. Dies ist genau das bereits in § 70, wenngleich auf einem ganz andern Wege erhaltene Resultat. Da dasselbe uns einen besondern Fall der Hypocycloide vorführt, so erinnert es uns daran, zur Betrachtung dieser und verwandter Curven zurückzukehren, welche gute Beispiele für kinematische Sätze liefern und zudem allgemein von grossem Nutzen in der Physik sind.

92. **Cycloiden und Trochoiden.** — Wenn ein Kreis auf einer Geraden rollt, so beschreibt ein Punkt seiner Peripherie eine Cycloide, ein innerhalb des Kreises liegender Punkt eine verflachte, endlich ein Punkt, der ausserhalb des Kreises in der Ebene desselben liegt, eine verkürzte Cycloide. Die beiden letzten Varietäten werden zuweilen Trochoiden genannt.

Die allgemeine Form dieser Curven lässt sich aus den beigefügten *Figuren* ersehen. Unsere folgenden Bemerkungen beziehen sich nur auf die Cycloide selbst; denn diese Curve ist von unendlich grösserer Bedeutung als die beiden anderen. Der folgende Paragraph enthält eine einfache Untersuchung derjenigen Eigenschaften der Cycloide, welche für unsere Zwecke am nützlichsten sind.

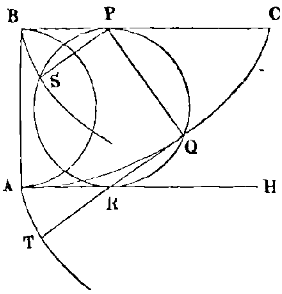
Fig. 22.



93. **Eigenschaften der Cycloide.** — Es sei AB der Durchmesser des erzeugenden (oder rollenden) Kreises, und BC die Ge-

rade, auf welcher er rollt. Die Punkte A und B beschreiben congruente Cycloiden, von denen AQC und BS Theile sind.

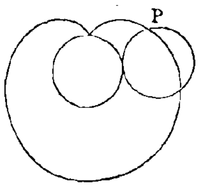
Fig. 23.



Wenn PQR irgend eine spätere Lage des erzeugenden Kreises ist, in welcher A und B die neuen Lagen Q und S einnehmen, so ist $\measuredangle\, QPS$ natürlich ein rechter Winkel. Wird also QR parallel PS gezogen, so ist PR ein Durchmesser des rollenden Kreises. Wir verlängern nun QR bis T, indem wir $RT = QR = PS$ machen. Offenbar ist der geometrische Ort der Punkte T, die Curve AT, congruent BS, folglich eine AC congruente Cycloide. QR ist aber senkrecht zu PQ, also die augenblickliche Bewegungsrichtung von Q, oder die Tangente an die Cycloide AQC. Ebenso steht PS senkrecht auf der Cycloide BS in S, folglich ist auch TQ senkrecht auf AT in T. Daraus geht hervor (§ 19), dass AQC die Evolute von AT, und Bogen $AQ = QT = 2\,QR$ ist.

94. Epicycloiden, Hypocycloiden, u. s. w. — Wenn der Kreis auf einem zweiten Kreise rollt, so wird die von einem Punkte seiner Peripherie beschriebene Curve Epicycloide oder Hypocycloide genannt, je nachdem der bewegliche Kreis ausserhalb oder innerhalb des festen sich befindet. Wenn der die Curve verzeichnende Punkt nicht in der Peripherie liegt, so erhalten wir Epitrochoiden und Hypotrochoiden. Beispiele der letzteren haben wir schon in § 70, 91 angetroffen, andere werden alsbald erwähnt werden. Was die ersteren betrifft, so stellt uns Fig. 24 den Fall dar, in welchem ein Kreis auf der Aussenseite eines gleich grossen Kreises rollt. Die Curve wird in diesem Falle Cardioide genannt (§ 49).

Fig. 24.



In der Fig. 25 (a. f. S.) liegen die Kreise gleichfalls ausserhalb einander, und der feste Kreis hat einen doppelt so grossen Radius als der rollende. Die so beschriebene Epicycloide ist in der Optik von grosser Wichtigkeit, und werden wir uns unter Anderm bei der Betrachtung der Brennlinien, zu denen die Reflexion des Lichts führt, darauf beziehen.

In der Fig. 26 haben wir eine Hypocycloide, die entsteht, wenn ein Kreis auf der Innenseite der Peripherie eines zweiten Kreises von viermal so grossem Radius rollt.

Fig. 25.

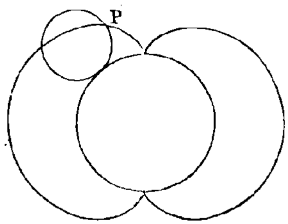
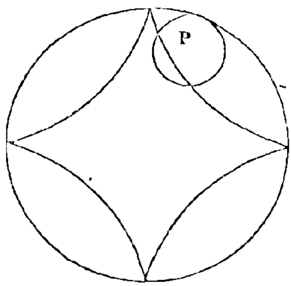


Fig. 26.



Die in § 72 gezeichnete Curve ist eine Epitrochoide, welche durch einen Punkt in der Ebene einer grossen kreisförmigen Scheibe beschrieben wird, wenn dieselbe auf einem Cylinder rollt, dessen Basis ein Kreis von kleinem Durchmesser ist, so dass der Punkt durch die Axe des Cylinders geht.

Die Curve des § 74 ist eine Hypotrochoide, die von einem Punkte in der Ebene eines Kreises beschrieben wird, welcher innerhalb auf der Peripherie eines zweiten Kreises von mehr als doppelt so grossem Durchmesser rollt; der die Curve verzeichnende Punkt geht durch den Mittelpunkt des festen Kreises. Wenn die Durchmesser beider Kreise sich genau wie 1 : 2 verhielten, so würde diese Curve, wie uns § 73 oder § 91 zeigt, sich auf eine einzige Gerade reduciren.

Die allgemeinen Gleichungen dieser Classe von Curven sind

$$x = (a + b)\cos\vartheta - eb\cos\frac{a+b}{b}\vartheta,$$

$$y = (a + b)\sin\vartheta - eb\sin\frac{a+b}{b}\vartheta;$$

darin bezeichnet a den Radius des festen, b denjenigen des rollenden Kreises und eb den Abstand des die Curve verzeichnenden Punktes vom Mittelpunkte des letztern.

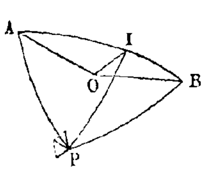
95. **Bewegung um einen festen Punkt.** — Wenn sich ein starrer Körper auf irgend eine Weise bewegt, die nur der Bedingung unterworfen ist, dass einer seiner Punkte fest bleibt, so

giebt es immer (ohne jede Ausnahme) eine durch diesen Punkt gehende Gerade, welche dem Körper in zwei beliebigen Lagen gemeinschaftlich ist.

Wir betrachten eine innerhalb des Körpers liegende Kugelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt C ist. Alle Punkte dieser mit dem Körper fest verbundenen Kugelfläche werden sich auf einer im Raume fest liegenden Kugel bewegen. Wir können folglich die Construction des § 79 ausführen, nur mit grössten Kreisen statt der geraden Linien; die nämlichen Schlüsse ergeben dann, dass der durch die Construction erhaltene Punkt O dem Körper in seinen beiden Lagen gemeinschaftlich ist. Es muss folglich auch jeder Punkt des Körpers, welcher auf der O mit dem festen Punkte C verbindenden Geraden OC liegt, dem Körper in beiden Lagen gemeinschaftlich sein. Der Körper kann also aus jeder Lage in jede andere Lage durch eine um eine bestimmte Axe erfolgende Rotation von bestimmter Grösse übergehen. Weiter ergiebt sich hieraus, dass sich Rotationen, die nach einander oder auch gleichzeitig um beliebig viele durch den festen Punkt gehende Axen stattfinden, in eine einzige solche Rotation zusammensetzen lassen.

Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten. — Es seien OA, OB zwei Axen, um welche sich ein Körper mit den Winkelgeschwindigkeiten ω, ω_1 bewegt. Um den festen Punkt O als Mittelpunkt beschreiben wir eine Kugel, deren Radius gleich der Einheit ist, und welche die Axen in A und B schneidet. Betrachten wir jetzt irgend einen andern Punkt P auf der Kugel, so können wir (§ 89) die Verschiebungen, die er während eines unendlich kleinen Zeitraums δt erfährt, als nach einander eintretend ansehen.

Fig. 27.



Die Verschiebungen von P, und folglich auch ihre Resultante liegen in der durch P gehenden Tangentialebene der Kugel. Sie stehen in P beziehungsweise senkrecht auf den Bogen AP, BP, ihre Grössen sind

$$\omega \sin AP \,.\, \delta t \text{ und } \omega_1 \sin BP \,.\, \delta t,$$

und ihre Richtungen schliessen einen APB gleichen Winkel ein.

Ein in AB gewählter Punkt I, für welchen $\omega \sin AI = \omega_1 \sin BI$ ist, ist in Ruhe, da seine Verschiebungen gleich und entgegengesetzt sind. Auch müssen, wenn Ω die um OI vorhandene Winkelgeschwindigkeit ist, die Verschiebungen von B gleich sein, mag die Rotation um OI oder um OA erfolgen. Es ist also $\Omega \sin IB = \omega \sin AB$.

Dies zu bewahrheiten, wollen wir die Bewegung von P betrachten. Verbinden wir P mit I, so ist

$$\frac{\sin API}{\sin BPI} = \frac{\sin PAI}{\sin PBI} \cdot \frac{\sin AI}{\sin BI} = \frac{\sin BP}{\sin AP} \cdot \frac{\omega_1}{\omega},$$

und dies ist das Verhältniss der Verschiebungen von P. Hiernach ist die ganze Verschiebung von P offenbar senkrecht zu PI und das Resultat einer einzigen Rotation um OI. Ihre Grösse ist

$$\begin{aligned}
&\omega \sin AP \cdot \frac{\sin APB}{\sin IPB} \delta t \\
&= \omega \sin AP \cdot \frac{\sin APB}{\sin PBI} \cdot \frac{\sin PBI}{\sin IPB} \delta t \\
&= \frac{\omega \sin AB}{\sin IB} \cdot \sin IP \cdot \delta t.
\end{aligned}$$

Dies ist genau das Ergebniss, welches eine während der Zeit δt um OI mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \omega \frac{\sin AB}{\sin IB} = \omega_1 \frac{\sin AB}{\sin IA}$$

stattfindende Rotation liefern würde.

Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten. — Die obigen Formeln zeigen, dass, wenn man auf den Axen der Verschiebungscomponenten und der resultirenden Verschiebung Längen abschneidet, welche beziehungsweise den um die Axen vorhandenen Winkelgeschwindigkeiten proportional sind, die so bestimmten Strecken die Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms sein werden.

Im Hinblick auf die gewöhnlichen Methoden der analytischen Geometrie empfiehlt es sich, den Gegenstand in folgender Weise zu behandeln. Wie wir sehen werden, gelangen wir dadurch auch zu einem ganz neuen Beweise des Satzes vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten: —

Wenn um die x, y, z Axen beziehungsweise die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ vorhanden sind, so betragen die den Axen parallelen Componenten der während der Zeit δt hervorgebrachten Verschiebung des in x, y, z befindlichen Punktes (§§ 87, 89) beziehungsweise

$$(\omega_2 z - \omega_3 y)\, \delta t, \ (\omega_3 x - \omega_1 z)\, \delta t, \ (\omega_1 y - \omega_2 x)\, \delta t.$$

Danach bleiben die Punkte, für welche

$$\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3}$$

ist, in Ruhe; es sind dies somit die Gleichungen der Axe.

Nun lehrt die analytische Geometrie, dass das von einem Punkte x, y, z auf diese Linie gefällte Loth gleich

$$\begin{aligned}
&\left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}\right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}} \sqrt{(\omega_2 z - \omega_3 y)^2 + (\omega_3 x - \omega_1 z)^2 + (\omega_1 y - \omega_2 x)^2} \\
&= \frac{\text{Totalverschiebung von } x, y, z}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}\ .\ \delta t}
\end{aligned}$$

ist. Die wirkliche Verschiebung von x, y, z stimmt daher mit derjenigen überein, welche eine einzige Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ während der Zeit δt um die durch die obigen Gleichungen bestimmte Axe erzeugen würde.

Auf diese Weise lassen sich Rotationen, die um beliebig viele in einem Punkte zusammentreffende Axen gleichzeitig vor sich gehen, mit Leichtigkeit zusammensetzen. Sind l, m, n die Richtungscosinus einer dieser Axen, ω die ihr zugehörige Winkelgeschwindigkeit, und bezeichnen λ, μ, ν, Ω die nämlichen Grössen für die resultirende Axe, so hat man

$$\lambda \Omega = \Sigma(l \omega), \quad \mu \Omega = \Sigma(m \omega), \quad \nu \Omega = \Sigma(n \omega),$$

und

$$\Omega^2 = \Sigma^2(l \omega) + \Sigma^2(m \omega) + \Sigma^2(n \omega).$$

Nach Bestimmung von Ω geben die ersten Gleichungen die Werthe von λ, μ, ν.

96. **Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten um Axen, die in einem Punkte zusammentreffen.** — Aus dem Vorhergehenden können wir folgende Regel entnehmen, die eine Winkelgeschwindigkeit, welche dreien um drei auf einander senkrechte Axen gleichzeitig vorhandenen Winkelgeschwindigkeiten äquivalent ist, der Grösse nach zu bestimmen und zugleich die Richtung ihrer Axe anzugeben: — Das Quadrat der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ist die Summe der Quadrate der Componenten, und die Verhältnisse der drei Componenten zur Resultante sind die Richtungscosinus der Axe.

Eine um irgend eine Gerade vorhandene Winkelgeschwindigkeit kann danach auch in drei Winkelgeschwindigkeiten um drei beliebige auf einander senkrechte Axen zerlegt werden, und diese Zerlegung wird in jedem Falle (ganz wie bei linearen Geschwindigkeiten) dadurch ausgeführt, dass man mit dem Cosinus des von den betreffenden Richtungen eingeschlossenen Winkels multiplicirt.

Weiter sehen wir, dass eine Rotation durch eine Gerade dargestellt werden kann, welche die Richtung der Axe hat, und deren Länge der Winkelgeschwindigkeit proportional ist; solche Axen sind dann wie lineare Geschwindigkeiten zusammenzusetzen.

Wie wir ferner in § 31 sahen, dass eine gleichförmige Beschleunigung, welche senkrecht zur Bewegungsrichtung eines Punktes wirkt, zwar eine Aenderung dieser R i c h t u n g zur Folge hat, aber ohne Einfluss auf die G e s c h w i n d i g k e i t ist, so erkennen wir hier, dass, wenn ein Körper um eine Axe rotirt und einer Einwirkung unterworfen wird, welche eine Rotation um eine senkrechte Axe zu erzeugen strebt, das Ergebniss darin bestehen wird, dass die R i c h t u n g der Rotationsaxe eine andere wird, dass aber die W i n k e l g e s c h w i n d i g k e i t unverändert dieselbe bleibt.

97. **Zusammensetzung von successiven endlichen Rotationen.** — Wir lassen jetzt einige nützliche Sätze über die Zusammensetzung von successiven endlichen Rotationen folgen.

Wenn eine Pyramide oder ein Kegel von irgend welcher Form auf einer symmetrisch ähnlichen Pyramide (das Bild der ersten Lage der erstern, welches ein ebener Spiegel liefert) ganz herumrollt, so kommt sie offenbar wieder in ihre anfängliche Lage zurück. Dies wird (wie jedes Rollen von Kegeln) am besten dadurch gezeigt, dass man den Durchschnitt eines jeden mit einer Kugeloberfläche nimmt. So sehen wir, dass ein sphärisches Polygon in seine anfängliche Lage zurückgebracht werden wird, wenn es, immer auf der Kugeloberfläche bleibend, der Reihe nach um seine Eckpunkte rotirt, und wenn der Winkel, durch welchen es sich um jeden Punkt dreht, doppelt so gross als das Supplement des Polygonwinkels ist, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn jeder Drehungswinkel in entgegengesetzter Richtung, aber gleich dem Doppelten des Polygonwinkels selbst ist.

Der Polarsatz des obigen (siehe unten § 134) ist folgender: Ein Körper gelangt durch eine Reihe von Rotationen, welche durch die ihrer Aufeinanderfolge nach genommenen doppelten Seiten eines sphärischen Polygons dargestellt werden, wieder in seine anfängliche Lage zurück.

98. Wir theilen noch einen zweiten Satz mit: —

Wenn eine Pyramide über alle ihre Seiten in einer Ebene rollt, so ist ihre in der Ebene zurückgelassene Spur ein ebener Winkel, der gleich der Summe aller ebenen Winkel am Scheitel der Pyramide ist.

Man kann dies auch in folgender Weise ausdrücken: — Ein sphärisches Polygon, welches auf der Kugeloberfläche über alle seine Seiten längs eines grössten Kreises gerollt ist, befindet sich in derselben Lage, als wenn die zuerst längs jenes Kreises liegende Seite längs desselben einfach um einen Bogen verschoben wäre, der gleich der Peripherie des Polygons ist. Der Polarsatz lautet: — Lässt man einen Körper eine Reihe von Rotationen ausführen, welche durch die ihrer Aufeinanderfolge nach genommenen Seiten eines sphärischen Polygons dargestellt werden, so wird seine Lage schliesslich dieselbe sein, als wenn er sich um die durch den ersten Eckpunkt des Polygons gehende Axe, und zwar durch einen Winkel gedreht hätte, der gleich dem sphärischen Excess (§ 134) oder der Fläche des Polygons ist.

99. Bewegung um einen festen Punkt. Rollende Kegel. — Die Untersuchung des § 90 lässt sich auch auf diesen Fall anwenden, und so ist es leicht zu zeigen, dass die allgemeinste Bewegung einer sphärischen Figur auf einer festen Kugeloberfläche dadurch erhalten wird, dass eine in der Figur befestigte Curve auf einer der Kugeloberfläche fest aufliegenden zweiten Curve rollt. Da nun die jeden Augenblick C mit O verbindende Gerade eine Anzahl von Punkten des Körpers enthält, die augenblicklich in Ruhe sind, so sehen wir, dass die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers, von welchem ein Punkt fest ist, darin besteht, dass ein in dem Körper befestigter Kegel auf einem im Raume festliegenden Kegel rollt; die Scheitel beider Kegel liegen in dem festen Punkte.

100. Lage des Körpers nach gegebenen Rotationen. — Zur Vervollständigung unserer kinematischen Untersuchung der Bewegung eines Körpers, von welchem ein Punkt fest ist, wollen wir die folgende Aufgabe lösen: — Aus den gegebenen Winkelgeschwindigkeiten, welche ein Körper um drei mit ihm verbundene auf einander senkrechte Axen hat, die Lage zu bestimmen, die er nach einer gegebenen Zeit im Raume einnimmt.

Wir beziehen den Körper auf die durch den festen Punkt O gehenden festen Axen OX, OY, OZ, die so gewählt werden, dass sie in einem gegebenen Augenblick mit den an der Bewegung des Körpers theilnehmenden Axen OA, OB, OC zusammengefallen sind. Aus den um OA, OB, OC vorhandenen Winkelgeschwindigkeiten, die gegeben sind, lässt sich (§ 95) für jeden Augenblick die Lage der augenblicklichen Axe OI in Beziehung auf den Körper bestimmen. Wir kennen folglich die im Körper befestigte Kegelfläche, welche auf dem im Raum festliegenden Kegel rollt. Die Data sind auch genügend zur Bestimmung dieses zweiten Kegels, und wenn diese Kegel, sowie die in irgend einem gegebenen Augenblick einander berührenden Theile derselben bekannt sind, so ist die Bewegung vollständig bestimmt.

Wenn OI in Beziehung auf OA, OB, OC die Richtungscosinus λ, μ, ν hat, und wenn $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten sind, deren Resultante ω sein möge, so ist nach § 95

$$\frac{\lambda}{\omega_1} = \frac{\mu}{\omega_2} = \frac{\nu}{\omega_3} \left[= \frac{1}{\omega}\right].$$

Diese zwei Gleichungen enthalten im Allgemeinen die Grösse t, durch deren Elimination wir die Gleichung des im Körper befestigten Kegels erhalten. Was den im Raum festliegenden Kegel betrifft, so sei σ der Krümmungsradius seiner Spur auf der Kugel vom Radius 1, und ϱ

derjenige der Spur des rollenden Kegels: dann sehen wir aus § 95 oder aus § 105, dass, wenn s die Länge des Bogens einer von beiden Spuren ist, die von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte aus gerechnet werden, man

$$\frac{ds}{\varrho\sigma\,dt} = \frac{\omega}{\sin(\arcsin\varrho + \arcsin\sigma)} = \frac{\omega}{\varrho\sqrt{1-\sigma^2}+\sigma\sqrt{1-\varrho^2}}$$

hat. Da s, ϱ und ω bekannte Functionen von t sind, so erhalten wir hieraus σ durch t, oder auch, wenn wir wollen, durch s ausgedrückt, und damit die Gleichung für die Spur des festen Kegels.

Wir können uns noch einer zweiten Methode bedienen, die zwar weniger symmetrisch, aber bei besonderen Aufgaben oft bequemer anzuwenden ist. Wenn z. B. die Lage des Körpers für irgend einen Augenblick durch den Winkel XZC, durch das Supplement von ZCA und durch den Bogen ZC bestimmt ist, welche Grössen sämmtlich auf der Kugel vom Radius 1 gemessen werden, so erhält man durch Anwendung der schon auseinander gesetzten Principien mit Leichtigkeit die Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen der Aenderung dieser Grössen und den Winkelgeschwindigkeiten um die drei Axen darstellen.

Um die Bedeutung dieser Winkelcoordinaten zu verstehen, nehmen wir an, A, B, C fielen anfänglich beziehungsweise mit X, Y, Z zusammen. Darauf möge der Körper um OZ durch den Winkel XZC rotiren. Nachdem dies geschehen ist, rotire er um die neue Lage von OB durch einen dem Bogen ZC gleichen Winkel, und zuletzt um die neue Lage von OC durch einen Winkel, der gleich dem Supplement von ZCA ist. Er wird sich dann in einer Lage befinden, welche durch diese drei Winkel völlig bestimmt ist.

Es sei $\sphericalangle XZC = \psi$, $\sphericalangle ZCA = \pi - \varphi$, und $ZC = \vartheta$. Betrachten wir dann der Reihe nach die augenblicklichen Bewegungen von C längs und senkrecht zu ZC und die Bewegung von AB in seiner eigenen Ebene, so haben wir

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi,$$

$$\sin\vartheta\,\frac{d\psi}{dt} = \omega_2 \sin\varphi - \omega_1 \cos\varphi,$$

und

$$\frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_3.$$

101. Allgemeine Bewegung eines starren Körpers. — Wir werden jetzt die allgemeinste mögliche Bewegung eines starren Körpers betrachten, von dem kein Punkt fest ist, und müssen zunächst den folgenden Satz beweisen: — *In einem starren Körper giebt es eine Ebene, deren Lagen für zwei beliebige Lagen des Körpers einander parallel sind.* In diesen Lagen sind dann natürlich auch alle dieser Ebene parallelen Ebenen und die auf ihnen errichteten Senkrechten parallel.

Irgend ein Punkt des Körpers befinde sich bei der ersten und zweiten Lage desselben beziehungsweise in C und C'. Wir bewegen den Körper, ohne ihn rotiren zu lassen, aus der zweiten in eine dritte Lage, in welcher der bei der zweiten Lage in C' befindliche Punkt wieder seine anfängliche Lage C einnimmt. Die frühere Betrachtung zeigt, dass es eine dem Körper in seiner ersten und dritten Lage gemeinschaftliche Gerade CO giebt. Folglich ist eine Linie $C'O'$ des Körpers in seiner zweiten Lage parallel derselben Linie CO in der ersten Lage. Es liegt auf der Hand, dass sich dasselbe von jeder CO parallelen Linie des Körpers sagen lässt, und die zu diesen Geraden senkrechten Ebenen bleiben gleichfalls parallel.

102. Es bezeichne S eine Ebene des Körpers, deren beide Lagen parallel sind. Wir bewegen den Körper aus seiner ersten Lage, ohne ihn rotiren zu lassen, in einer zu S senkrechten Richtung, bis S in die Ebene seiner zweiten Lage gelangt. Damit dann der Körper wirklich in seine zweite Lage gebracht werde, ist weiter eine Bewegung von der Art erforderlich, wie wir sie in § 79 behandelt haben. Eine solche Bewegung kann aber nach § 79, wenn sie nicht gerade zu dem Ausnahmefall einer Parallelverschiebung gehört, durch eine Rotation um eine gewisse zur Ebene S senkrechte Axe ausgeführt werden. Folglich lässt sich (abgesehen von diesem Ausnahmefall) der Körper aus seiner ersten in die zweite Lage dadurch bringen, dass man ihn senkrecht zu einer gegebenen Ebene eine bestimmte Strecke weit verschiebt, und ihn sodann um eine bestimmte zu dieser Ebene senkrechte Axe durch einen bestimmten Winkel rotiren lässt. Dies ist genau die Bewegung einer Schraube in ihrer Mutter.

103. In dem erwähnten Ausnahmefalle besteht die ganze Bewegung aus zwei einfachen Verschiebungen, die sich natürlich in eine einzige zusammensetzen lassen; in diesem Falle ist also überhaupt keine Rotation vorhanden, oder jede Ebene des Körpers genügt der in § 102 an S gestellten Anforderung.

104. **Vorrückende Rotation.** — Wir kehren jetzt zur Bewegung eines starren Körpers, von welchem ein Punkt fest ist, zu-

rück und betrachten den Fall, in welchem die in § 99 besprochenen Kegel beide von kreisförmiger Basis sind. Die Bewegung kann in diesem Falle eine vorrückende Rotation genannt werden.

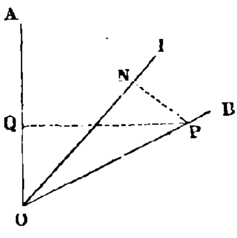
Die durch die augenblickliche Drehungsaxe und die Axe des festen Kegels gelegte Ebene geht durch die Axe des rollenden Kegels. Diese Ebene dreht sich um die Axe des festen Kegels mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω (s. unten § 105), welche offenbar in einem constanten Verhältniss zur Winkelgeschwindigkeit ω stehen muss, die der starre Körper um seine augenblickliche Axe besitzt.

105. Die Bewegung der diese Axen enthaltenden Ebene wird in jedem solchen Falle das Vorrücken oder die Präcession genannt. Was wir mit Ω bezeichnet haben, ist die Winkelgeschwindigkeit oder, wie man zuweilen auch sagt, die Grösse des Vorrückens.

Die Winkelgeschwindigkeiten ω, Ω verhalten sich zu einander umgekehrt wie die Abstände eines Punktes in der Axe des rollenden Kegels von der augenblicklichen Drehungsaxe und von der Axe des festen Kegels.

Es sei nämlich OA die Axe des festen, OB diejenige des rollenden Kegels und OI die augenblickliche Drehungsaxe. Von irgend einem Punkte P der Axe OB ziehen wir PN senkrecht OI und PQ senkrecht OA. Dann bemerken wir, dass sich P beständig in dem Kreise bewegt, dessen Mittelpunkt Q, dessen Radius PQ und dessen Ebene senkrecht zu OA ist. Folglich ist die wirkliche Geschwindigkeit des Punktes P gleich $\Omega . QP$. Nach den oben (§ 99) dargelegten Principien ist aber die Geschwindigkeit von P die nämliche, wie die eines sich in einem Kreise bewegenden Punktes, dessen Mittelpunkt N, dessen Ebene senkrecht zu ON und dessen Radius NP ist, und da dieser Radius sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, so ist dies gleich $\omega . NP$. Wir haben also $\Omega . QP = \omega . NP$, oder

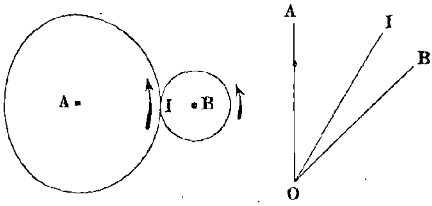
Fig. 28.



$$\omega : \Omega = QP : NP.$$

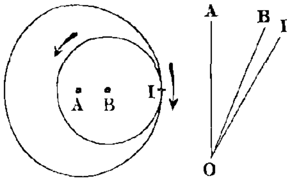
Es sei α die Hälfte des Winkels am Scheitel des festen Kegels und β der entsprechende Winkel des rollenden Kegels. Der Einfachheit wegen wollen wir jeden dieser Winkel und ebenso ihre Summe oder Differenz als spitz voraussetzen, obgleich die so erhaltenen Formeln natürlich (wie alle trigonometrischen Resultate) auf jeden möglichen Fall anwendbar sind. Wir haben dann die drei folgenden Fälle: —

Fig. 29.



(1) Ein convexer Kegel rollt auf einem convexen.
$\omega \sin \beta = \Omega \sin (\alpha + \beta)$.

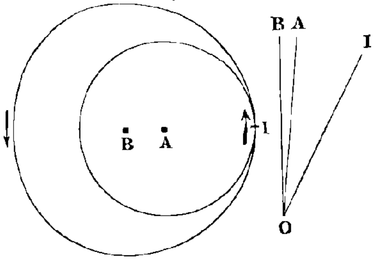
Fig. 30.



(2) Ein convexer Kegel rollt auf der Innenseite eines concaven.

Es sei β negativ und $\beta' = - \beta$, so ist β' positiv und wir haben
$- \omega \sin \beta' = \Omega \sin (\alpha - \beta')$.

Fig. 31.



(3) Ein concaver Kegel rollt auf der Aussenseite eines convexen.

Im Vorhergehenden sei $\beta' > \alpha$; dann können wir passend
$\omega \sin \beta' = \Omega \sin (\beta' - \alpha)$
schreiben, wo α und β' noch positiv sind.

106. Fälle vorrückender Rotation. — In dem durch die erste dieser Figuren (Fig. 29) dargestellten Falle eines convexen Kegels, der auf einem convexen rollt, erfolgt die vorrückende Bewegung, wenn man sie auf der Oberfläche einer Halbkugel betrachtet, welche A zum Pol und O zum Mittelpunkt hat, in einer ähnlichen Richtung wie die angulare Rotation um die augenblickliche Axe. Wir werden dies eine positive vorrückende Rotation nennen. Es ist der Fall eines gewöhnlichen Kreisels, der sich auf einer sehr feinen Spitze dreht, die in einer Höhlung oder in einem von ihr selbst gebohrten Loche in Ruhe bleibt, falls der Kreisel nicht still aufrecht steht und auch nicht schwankt, sondern seine Axe einen Kegel von verticaler Axe beschreiben lässt. Im dritten Falle (Fig. 31) haben wir ebenfalls positives Vorrücken. Ein gutes Beispiel hierfür ist der Fall eines auf einem Tische kreisenden Geldstückes, wenn seine Ebene nahezu horizontal ist.

107. Der zweite Fall (Fig. 30), in welchem ein convexer Kegel auf der Innenseite eines concaven rollt, liefert ein Beispiel negativen Vorrückens, da die Richtung der angularen Rotation der augenblicklichen Axe, wenn man sie wie vorher auf der Oberfläche der Halbkugel betrachtet, derjenigen des rollenden Kegels entgegengesetzt ist. Dies ist der Fall einer symmetrischen Schale (oder Rotationsfläche), die auf einen Punkt gestützt und, wenn balancirt, stabil ist, d. h. ihren Schwerpunkt unter dem Zapfen hat, und die, wenn sie geneigt aufgesetzt wird, sich ohne Schwanken dreht. Wenn z. B. ein Troughton'scher Kreisel in einer beliebigen geneigten Lage auf seinen Zapfen gesetzt und dann mit sehr grosser Winkelgeschwindigkeit um die Axe seiner Figur abgedreht wird, so wird das Schwanken unmerklich sein, aber ein langsames Vorrücken erfolgen.

Zu diesem Falle gehört auch das Vorrücken der Erdaxe, für welche der Winkel $\alpha = 23^0\ 27'\ 28''$, während $\beta = 0{,}00867''$ ist. Oder wenn die Fig. 30 einen Theil der Erdoberfläche um den Pol herum darstellt, so ist der Bogen $AI = 8{,}552{,}000$ Fuss, folglich der Umfang des Kreises, in welchem sich I bewegt, $= 52{,}240{,}000$ Fuss und $BI = 0{,}88$ Fuss. Die Periode der Rotation ω ist der Sterntag, diejenige von Ω 25,868 Jahre.

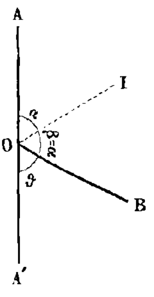
108. Sehr interessante Beispiele der Fälle (1) und (3) liefern uns Projectile verschiedener Formen, welche um irgend eine Axe rotiren. So gehören die Umdrehungen eines in die Luft geschleuderten ovalen Körpers oder eines Stabes oder einer Stange zur Classe (1) (der Körper hat zwei Axen von gleichem Trägheitsmoment, deren jedes grösser als dasjenige für die dritte Axe ist). Die scheinbar unregelmässigen Schwankungen einer schlecht geworfenen Wurfscheibe gehören zur dritten Classe (für zwei Axen der Scheibe sind die Trägheitsmomente gleich, und jedes ist kleiner als das Trägheitsmoment für die dritte Axe).

109. Mittheilung einer gleichen Winkelgeschwindigkeit an Körper, die um geneigte Axen rotiren. — Hooke's Schlüssel, Universalgelenk. — In verschiedenen Erläuterungen und Anordnungen von Apparaten, die in der theoretischen Physik sowie in der Mechanik von Nutzen sind, ist es erforderlich, zwei Körper so zu verbinden, dass, wenn der eine sich um eine gewisse Axe dreht, der andere sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um eine andere Axe drehe, die mit der ersteren in derselben Ebene liegt, aber irgend eine Neigung gegen sie hat. Dies wird in der Praxis mittels gleicher und ähnlicher Kegelräder oder rollender Kegel bewerkstelligt, wenn die gegenseitige Neigung der beiden Axen gegeben ist. Es wird annähernd erfüllt durch Hooke's Schlüssel, wenn die beiden Axen nahezu dieselbe Richtung haben, aber ihre gegenseitige Neigung frei sollen ändern können. Eine Kette von unendlich vielen solchen Hooke'schen Schlüsseln können wir uns als eine vollkommen biegsame aufdrehbare Schnur vorstellen, welche, wenn ihre Endglieder an den beiden Körpern starr befestigt sind, dieselben so verbindet, dass die oben gestellte Bedingung in aller Strenge und ohne die Beschränkung erfüllt ist, dass die Axen in einer Ebene bleiben. Denken wir uns einen unendlich kleinen Theil einer solchen Kette (der aber noch eine unendlich grosse Anzahl von Gliedern enthält) mit seinen Enden an den Körpern befestigt, so wird derselbe der aufgestellten Bedingung streng genügen und zugleich einen bestimmten Punkt des einen einem bestimmten Punkte des andern Körpers unendlich nahe halten, d. h. derselbe erfüllt für jeden Neigungswinkel dasselbe, was Hooke's Schlüssel näherungsweise für kleine Neigungen leistet.

Dasselbe wird mit voller Genauigkeit für jeden Winkel durch einen kurzen, an sich geraden elastischen Draht von genau kreisförmigem Schnitt erreicht, vorausgesetzt dass die Kräfte, welche irgend einen Widerstand gegen die Gleichheit der Winkelgeschwindigkeit zwischen den beiden Körpern veranlassen, unendlich klein sind. Diese Art der Verbindung ist in vielen praktischen Fällen von Nutzen und gestattet nur eine geringe Abweichung von den Bedingungen eines wahrhaften Universalgelenkes. Sie wird z. B. mit vollständigem Erfolge bei der Aufhängung eines gyroskopischen Pendels (§ 74) angewandt.

Es seien zwei Körper durch ein Universalgelenk mit einander verbunden, und es werde einer derselben festgehalten. So lange der Neigungswinkel der Axen constant bleibt, wird die Bewegung des andern Körpers genau die oben im § 105, Fig. 29, abgebildete sein, wenn darin die Winkel α und β als gleich angenommen werden. Das Supplement des Winkels AOB ist die gegenseitige Neigung der Axen, und der Winkel AOB selbst wird durch die augenblickliche Axe des in Bewegung befindlichen Körpers halbirt. Die beigefügte Figur zeigt einen Fall dieser Bewegung, in wel-

Fig. 32.



chem die gegenseitige Neigung ϑ der Axen ein spitzer Winkel ist. Nach den Formeln des § 105, Fall (1), haben wir

$$\omega \sin \alpha = \Omega \sin 2 \alpha,$$

oder

$$\omega = 2 \Omega \cos \alpha = 2 \Omega \sin \frac{\vartheta}{2},$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit des in Bewegung befindlichen Körpers um seine augenblickliche Axe OI und Ω die Winkelgeschwindigkeit seiner Präcession, d. h. die Winkelgeschwindigkeit der Ebene ist, welche durch die feste Axe AA' und die freie Axe OB des bewegten Körpers geht.

Ausser dieser Bewegung kann der Körper offenbar noch eine beliebige Winkelgeschwindigkeit um eine durch O gehende zur Ebene AOB senkrechte Axe haben, welche, mit der um OI vorhandenen Winkelgeschwindigkeit ω vereinigt, die resultirende Winkelgeschwindigkeit und die augenblickliche Axe liefert.

In diesem Falle reichen offenbar zwei Coordinaten $\vartheta = A'OB$ und φ, welcher Winkel in einer zu AO senkrechten Ebene von einer festen Ebene aus bis zur Ebene AOB gemessen wird, vollkommen hin, um die Lage des beweglichen Körpers anzugeben.

110. Allgemeine Bewegung eines starren Körpers, der einen andern berührt. Gleiten, Rollen, Kreiseln. — Wir nehmen an, ein von irgend einer krummen Oberfläche begrenzter starrer Körper werde in irgend einem Punkte von einem zweiten solchen Körper berührt. Jede Bewegung des einen dieser Körper auf dem andern muss ein Gleiten, oder ein Rollen, oder ein Kreiseln, oder eine Verbindung dieser Bewegungsformen sein. Die Betrachtung des Gleitens ist so einfach, dass wir nicht nöthig haben, darauf einzugehen.

Jede Bewegung, in welcher der Berührungspunkt keine Geschwindigkeit hat, muss ein Rollen oder ein Kreiseln oder eine Verbindung dieser beiden Bewegungsarten sein.

Es möge einer der beiden Körper, während der zweite fest liegt, successive um eine Anzahl augenblicklicher Axen rotiren, welche sämmtlich durch den augenblicklichen Berührungspunkt gehen und in der durch diesen Punkt gelegten beiden Körpern gemeinschaftlichen Tangentialebene liegen. Diese Bewegung nennen wir ein Rollen oder ein einfaches Rollen des beweglichen Körpers auf dem festliegenden.

Wenn andererseits die augenblickliche Axe des in Bewegung befindlichen Körpers die in dem Berührungspunkte errichtete beiden Körpern gemeinschaftliche Normale ist, so haben wir es mit einem reinen Kreiseln zu thun, und dabei bleibt der Berührungspunkt unverändert derselbe.

Wenn sich der eine Körper so bewegt, dass die augenblickliche Axe zwar noch durch den Berührungspunkt geht, aber weder in der Tangentialebene liegt, noch senkrecht zu dieser Ebene steht, so haben wir weder ein Rollen noch ein Kreiseln, sondern eine aus beiden Arten zusammengesetzte Bewegung.

Wenn ω die Winkelgeschwindigkeit und α die Neigung der augenblicklichen Axe gegen die Normale ist, so sind $\omega \sin \alpha$ und $\omega \cos \alpha$ beziehungsweise die Winkelgeschwindigkeiten des Rollens und des Kreiselns.

111. Wenn ein Körper auf einem andern rollt und kreiselt, so ist die Spur eines jeden auf dem andern die krumme oder gerade Linie, längs welcher er successive berührt wurde. Liegt die augenblickliche Axe in einer zu den Spuren normalen Ebene, so wird das Rollen ein directes genannt. Ein Rollen, welches nicht direct ist, kann in ein directes Rollen und eine Rotation um die Tangente an die Spuren zerlegt werden. Denken wir uns die Spuren aus starrer Masse construirt und alle übrigen Theile jedes Körpers entfernt, so können wir die frühere Bewegung mit diesen Curven allein wiederholen. Der Unterschied der jetzt vorausgesetzten Umstände wird sich nur zeigen, wenn wir die Richtung der augenblicklichen Axe sich ändern lassen. Wenn wir dies im früheren Falle thun, so machen wir die Bewegung zu einer mehr oder weniger kreiselnden und ändern die Spur auf jedem Körper; im letzteren Falle haben wir stets dieselbe bewegliche Curve, welche auf derselben festliegenden Curve rollt, und dazu eine mit einer ganz beliebigen Geschwindigkeit erfolgende Drehung um die gemeinschaftliche Tangente. Die Betrachtung des zweiten Falles ist rücksichtlich des allgemeinen Problems äusserst lehrreich.

112. Man kann die in Rede stehende Bewegung praktisch roh darstellen durch zwei steife Drähte, die man so gebogen hat, dass sie die Form der gegebenen Curven haben, und die durch ein sie zusammenhaltendes kleines Stück einer Gummiröhre verhindert werden, sich zu kreuzen.

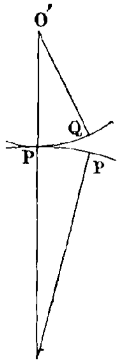
Zunächst seien beide Curven eben, und ihre Ebenen mögen beständig zusammenfallen. Wir haben dann ein reines Rollen, wie wenn ein Cylinder auf einem andern rollte.

Ist ϱ der Krümmungsradius des rollenden, σ derjenige des festen Cylinders, ω die Winkelgeschwindigkeit des ersteren und V die lineare Geschwindigkeit des Berührungspunktes, so haben wir

$$\omega = \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\sigma}\right) V.$$

Dies zu beweisen, nehmen wir an, P (Fig. 33) sei der Berührungspunkt zu irgend einer Zeit t und Q, p die Punkte, welche nach Ablauf des Zeitraumes dt aufeinander liegen werden; ferner seien O, O' die Krümmungsmittelpunkte und $\measuredangle\, P O p = \vartheta$, $\measuredangle\, P O' Q = \varphi$.

Fig. 33.



Dann ist $PQ = Pp =$ dem vom Berührungspunkt durchlaufenen Wege, oder mit Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen

$$\varrho \varphi = \sigma \vartheta = V dt.$$

Ausserdem muss $O'Q$, ehe seine Richtung mit derjenigen von Op zusammenfallen kann, sich offenbar durch einen Winkel $\vartheta + \varphi$ drehen.

Es ist daher $\omega dt = \vartheta + \varphi$. Werden jetzt ϑ und φ eliminirt, so erhält man nach Division durch dt das oben angegebene Resultat.

Wir haben hier, wo beide Oberflächen convex sind, die Krümmungsradien als positiv angesehen. Man hat aber jedem der beiden Krümmungsradien das negative Zeichen beizulegen, wenn die entsprechende Curve concav ist.

In dem betrachteten Falle ist also die Winkelgeschwindigkeit der rollenden Curve gleich dem Product aus der linearen Geschwindigkeit des Berührungspunktes in die Summe oder Differenz der Krümmungen; die Summe der Krümmungen ist zu nehmen, wenn beide Curven convex sind, die Differenz, wenn die eine Curve convex, die andere concav ist.

113. Wenn beide Curven eben sind, aber in verschiedenen Ebenen liegen, so theilt die Ebene, in der das Rollen stattfindet, den Winkel zwischen der Ebene der einen Curve und der durch die gemeinschaftliche Tangente hindurch verlängerten Ebene der andern Curve in Theile, deren Sinus sich umgekehrt wie die respectiven Krümmungen verhalten, und die Winkelgeschwindigkeit ist gleich dem Product aus der linearen Geschwindigkeit des Berührungspunktes in die Differenz der Projectionen der beiden Krümmungen auf diese Ebene.

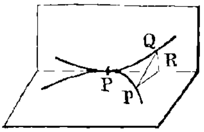
Denn es seien PQ, Pp wie früher gleiche Bogen der Curven und PR eine jedem derselben gleiche Strecke der gemeinschaftlichen Tangente (d. i. des Durchschnitts der Ebenen der Curven). Dann sind QR, pR im Grenzfall senkrecht zu PR, folglich

$$pR = \frac{\overline{PR}^2}{2\sigma},$$

$$QR = \frac{\overline{PR}^2}{2\varrho}.$$

Auch ist QRp gleich dem Winkel α zwischen den Ebenen der Curven, und wir haben

Fig. 34.



$$\overline{Qp}^2 = \frac{\overline{PR}^4}{4}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2}{\sigma\varrho}\cos\alpha\right).$$

Demnach ist, wenn ω wieder die Rotationsgeschwindigkeit bezeichnet,

$$\omega = V\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2\cos\alpha}{\sigma\varrho}}.$$

Auch ist offenbar die augenblickliche Axe senkrecht, also die Rotationsebene parallel zu Qp. Damit sind die obigen Bemerkungen bewiesen. Im Falle $\alpha = \pi$ stimmt dies mit dem Resultat des § 112 überein.

Ein gutes Beispiel hierfür ist der Fall eines Geldstückes, das auf einem Tische kreiselt (eine aus einem Rollen und einem Kreiseln zusammengesetzte Bewegung), indem seine Ebene nach und nach horizontal wird. In diesem Falle werden die Krümmungen immer mehr einander gleich, und der Winkel zwischen den Curvenebenen wird immer kleiner und kleiner. Auf diese Weise wird die resultirende Winkelgeschwindigkeit ausserordentlich klein und die Bewegung des Berührungspunktes vergleichsweise sehr gross.

114. Die vorstehenden Resultate lassen sich natürlich ebensowohl auf gewundene, wie auf ebene Curven anwenden; nur hat man für die Ebene der letzteren die osculatorische Ebene der ersteren zu substituiren.

115. Wir kommen jetzt zu dem Falle einer Curve, die mit oder ohne Kreiseln auf einer Oberfläche rollt.

Sie kann natürlich auf irgend einer auf der Oberfläche gezogenen Curve rollen. Wenn diese Curve gegeben ist, so kann sich die rollende Curve, während sie jene entlang rollt, nach Belieben um die Tangente drehen; aber die zur gemeinschaftlichen Tangente senkrechte Componente der augenblicklichen Axe, d. i. die Axe des directen Rollens der einen Curve auf der andern, ist bestimmt (§ 113). Wenn diese Axe nicht in der Oberfläche liegt, so ist eine kreiselnde Bewegung vorhanden. Wenn also die Spur auf der Oberfläche gegeben ist, so giebt es zwei unabhängig Veränderliche in der Bewegung: der vom Berührungspunkt durchlaufene Weg und die in jenem Punkte um die Tangente vorhandene Winkelgeschwindigkeit.

116. Wenn die Spur gegeben und zugleich die Bedingung vorgeschrieben ist, dass kein Kreiseln stattfinden soll, so ist die angulare Lage der rollenden Curve in Beziehung auf die im Berührungspunkt errichtete Tangente bestimmt. Denn in diesem Falle muss die augenblickliche Axe in der Tangentialebene der Oberfläche liegen. Zerlegen wir also die Rotation in Componenten, die beziehungsweise um die Tangente und um eine zur Tangente senkrechte Axe erfolgen, so muss diese letztere Axe in der Tangentialebene liegen. Auf diese Weise muss das Rollen, wie im Falle zweier Curven, in einer zur Oberfläche normalen Ebene stattfinden, und deshalb muss die gegebene Curve beim Beginn der Bewegung so an ihre Spur auf der Oberfläche angelegt werden, dass die Projectionen beider Curven auf die Tangentialebene von gleicher Krümmung sind.

Während die Curve weiter rollt, muss sie sich beständig um die durch ihren Berührungspunkt mit der Oberfläche gelegte Tangente drehen, so dass diese Bedingung in jeder Lage erfüllt wird.

Es bezeichne α den Winkel, welchen die Krümmungsebene der Spur mit der Normalen an die Oberfläche in irgend einem Punkte bildet; der entsprechende Winkel zwischen dieser Normalen und der Ebene der rollenden Curve sei α'; die Krümmungen seien $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\varrho'}$. Wir nehmen α als stumpf und α' als spitz an, wenn die beiden Curven auf entgegengesetzten Seiten der Tangentialebene liegen. Es ist dann

$$\frac{1}{\varrho'} \sin \alpha' = \frac{1}{\varrho} \sin \alpha,$$

und dadurch wird α' oder die Lage der rollenden Curve fixirt, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Es sei nun ω die Winkelgeschwindigkeit des Rollens um eine zur Tangente senkrechte Axe, ω' die um die Tangente vorhandene Winkelgeschwindigkeit, und V die lineare Geschwindigkeit des Berührungspunktes. Da $\frac{1}{\varrho'} \cos \alpha'$ und $-\frac{1}{\varrho} \cos \alpha$ (jeder dieser beiden Ausdrücke ist positiv, wenn die Curven auf entgegengesetzten Seiten der Tangentialebene liegen) die Projectionen der beiden Krümmungen auf eine Ebene sind, welche durch die an die Oberfläche gezogene Normale hindurchgeht und ihre gemeinschaftliche Tangente enthält, so haben wir nach § 112

$$\omega = V\left(\frac{1}{\varrho'} \cos \alpha' - \frac{1}{\varrho} \cos \alpha\right),$$

wo α' durch die vorhergehende Gleichung bestimmt ist. Die Grösse der Windung der Spur und der rollenden Curve bezeichnen wir beziehungsweise mit τ und τ'. Dann sehen wir Folgendes: — Wären erstens beide Curven eben, so könnte ein Rollen der einen auf der andern um eine zu ihrer gemeinschaftlichen Tangente stets senkrechte Axe nie die Neigung ihrer Ebenen ändern. Wenn also zweitens beide Curven gewunden sind so wird ein solches Rollen die Neigung ihrer osculatorischen Ebenen um einen unendlich kleinen Betrag $(\tau - \tau')\, ds$ ändern, während der Berührungspunkt in Folge des Rollens über einen Bogen ds geschoben wird. Nun ist, wenn die Spur gegeben ist, α und folglich auch α' eine bekannte Function von s, und da $\alpha - \alpha'$ die Neigung der osculatorischen Ebenen ist, so hat man

$$V\left\{\frac{d(\alpha - \alpha')}{ds} - (\tau - \tau')\right\} = \omega'.$$

117. Wir wenden uns jetzt zum Rollen und Kreiseln einer Oberfläche auf einer andern Oberfläche. Wenn zunächst die Spur auf jeder Fläche gegeben ist, so haben wir den Fall des § 113 oder § 115, nämlich das Rollen einer Curve auf einer andern Curve, nur mit der weitern Bedingung, dass die erstere sich um die Tangente an beide Curven drehen muss, dergestalt dass die Tangentialebenen der beiden Flächen beständig zusammenfallen.

Es ist wohl zu beachten, dass, wenn die Berührungspunkte und die beiden Spuren gegeben sind, die Lage der beweglichen Oberfläche völlig bestimmt ist. Sie wird auf folgende Weise gefunden: Man bringe die bewegliche Oberfläche mit der festliegenden in Berührung, so dass die gegebenen Punkte auf einander zu liegen kommen, und drehe sie so lange um die gemeinschaftliche Normale, bis die Tangenten der Spuren zusammenfallen.

Daraus geht hervor, dass, wenn beide Spuren gegeben sind, die Bedingung, es solle kein Kreiseln stattfinden, nicht gestellt werden kann. Während des Rollens muss im Allgemeinen ein Kreiseln erfolgen, damit die Tangenten an die beiden Spuren immer auf einander liegen bleiben. Auch muss sich die augenblickliche Axe des Rollens so ändern, dass sie nicht nur das Rollen längs der Spur, sondern auch diejenige drehende Bewegung um die Tangente liefert, die erforderlich ist, damit die Tangentialebenen beständig zur Deckung gebracht werden.

In diesem Falle giebt es also nur eine unabhängig Veränderliche, den vom Berührungspunkte zurückgelegten Weg, und wenn die Geschwindigkeit des Berührungspunktes gegeben ist, so sind die resultirende Winkelgeschwindigkeit und die Richtung der augenblicklichen Axe des rollenden Körpers bestimmt. Wir haben so eine hinlänglich deutliche Vorstellung von dem allgemeinen Charakter der in Rede stehenden Bewegung. Wir wollen jedoch etwas näher auf dieselbe eingehen, da wir dadurch naturgemäss zu einer wichtigen Frage geführt werden, zur Messung der Drillung (oder Torsion) eines Stabes, eines Drahtes, einer schmalen Platte, eine Grösse, die von der **Windung** der Axe des Körpers (§ 7) völlig verschieden ist.

118. Angenommen, alle Theile jeder Oberfläche seien entfernt bis auf einen unendlich schmalen Streifen, der die Spur des Rollens enthält. Dann haben wir ein Rollen des einen dieser Streifen auf dem andern, und jeder Streifen besitzt in jedem Punkte eine bestimmte Krümmung, Windung und Drillung.

119. Drillung. — Wir nehmen an, ein flacher Stab von kleinem Durchschnitt sei so gebogen (die dazu erforderliche Ausdehnung und Zusammenziehung seiner Ränder als zulässig angesehen), dass seine Axe die Form irgend einer ebenen oder gewundenen Curve besitzt. Wenn derselbe ohne Drillung zurückgebogen wird, d. h. wenn die Krümmung jedes Elementes des Stabes dadurch entfernt wird, dass man es durch den erforderlichen Winkel in der osculatorischen Ebene biegt, und es ergiebt sich, dass der auf diese Weise gerade gemachte Stab ungedrillt ist, so hatte er auch keine **Drillung** in seiner ursprünglichen Form. Dieser Fall ist natürlich in der allgemeinen Theorie der **Drillung** enthalten, welche den Gegenstand der folgenden Paragraphen ausmacht.

120. Es sei ein gebogener oder gerader Stab von kreisförmigem oder einem beliebigen anders geformten Durchschnitt gegeben. Eine durch die Mittelpunkte oder irgend welche sonst gewählten Punkte seiner Durchschnitte gehende Linie soll seine **Axe** heissen. Wir merken uns eine auf der Seite des Stabes seiner ganzen Länge nach gezogene Linie von der Beschaffenheit, dass sie eine der Axe parallele Gerade ist, wenn der Stab *ungebogen und ungedrillt* ist. Eine von irgend einem Punkte der Axe auf diese Seitenlinie gezogene Senkrechte heisst die **Querlinie** des Stabes in diesem Punkte.

Die Gesammtdrillung einer beliebigen Länge eines geraden Stabes ist *der Winkel zwischen den Querlinien der Endpunkte* dieser Länge. Die mittlere Drillung ist die Gesammtdrillung, dividirt durch die Länge. Die Drillung in einem Punkte ist die mittlere Drillung in einer durch diesen Punkt gehenden unendlich kleinen Länge; mit anderen Worten, sie ist die Grösse der Rotation seiner Querlinie, *genommen für Einheit der Länge*.

Die Drillung eines ebenen oder gewundenen krummen Stabes in einem Punkte ist die für die Längeneinheit genommene Grösse der Rotation seiner Querlinie um seine Tangente.

Wenn t die Drillung in irgend einem Punkte ist, so ist $\int t\,ds$ die Gesammtdrillung in der Länge, über welche sich die Integration erstreckt.

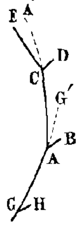
121. Die Gesammtdrillung in einem krummen Stabe lässt sich zwar, wie oben geschehen ist, mittels der Integralrechnung ohne Mühe definiren; sie kann aber nicht als der Winkel zwischen zwei ohne Weiteres construirbaren Geraden vorgestellt werden. Die folgenden Betrachtungen zeigen, wie dieselbe zu rechnen ist, und führen zu einer geometrischen Construction, welche sie für einen irgendwie gebogenen und gedrehten Stab in einer sphärischen Figur darstellt: —

122. Schätzung der Gesammtdrillung. — Wenn die Axe des Stabes eine in einer Ebene liegende ebene Curve bildet, so ist die Gesammtdrillung offenbar die Differenz zwischen den Neigungen der Querlinien ihrer Endpunkte gegen ihre Ebene. Denn wenn man den Stab einfach zurückbiegt, ohne die Drillung in irgend einem Theile zu ändern, so wird die Neigung jeder Querlinie zur Ebene, in welcher seine Krümmung lag, unverändert bleiben, und da die Axe des Stabes jetzt eine in dieser Ebene liegende gerade Linie geworden ist, so ist die gegenseitige Neigung der Querlinien irgend zweier seiner Punkte gleich der Differenz ihrer Neigungen gegen die Ebene geworden.

123. Von dieser Regel kann keine einfache Anwendung auf eine gewundene Curve gemacht werden, da die Krümmungsebene derselben von Punkt zu Punkt eine andere wird. Statt dessen können wir in folgender Weise verfahren: —

Erstens wollen wir voraussetzen, dass die Krümmungsebene der Axe des Stabes durch endliche Theile der Curve hindurch constant bleibe und zwischen jedem solchen Theile und dem nächstfolgenden sich plötzlich um einen endlichen Winkel ändere (eine Voraussetzung, die keine Eckpunkte, d. h. keine unendliche Krümmung in der Curve bedingt). Zu den Krümmungsebenen dreier auf einander folgenden Theile PQ, QR, RS (die in der Figur nicht gezeichnet sind) denken wir uns Parallelebenen gelegt, welche eine mit dem Radius 1 beschriebene Kugelfläche in den grössten Kreisen GAG', ACA', CE schneiden; dann werden die Radien der Kugel, welche den in den Punkten Q und R, wo die Krümmungsebene eine Aenderung erleidet, an die Curve gelegten Tangenten parallel sind, die Kugeloberfläche natürlich in den Durchschnittspunkten A, C dieser grössten Kreise schneiden. Es

Fig. 35.



sei G der Punkt, in welchem der Kugelradius, welcher der in P gezogenen Tangente parallel ist, die Oberfläche schneidet; ferner seien GH, AB, CD Parallellinien zu den Querlinien des Stabes, die von den Punkten P, Q, R seiner Axe ausgehen. Dann ist (§ 122) die Drillung von P bis Q gleich der Differenz der Winkel HGA und BAG', und die Drillung von Q bis R gleich der Differenz zwischen BAC und DCA'. Die Gesammtdrillung von P bis R ist folglich gleich

$$HGA - BAG' + BAC - DCA',$$

oder, was dasselbe ist, gleich

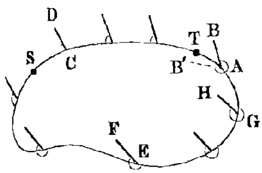
$$A'CE + G'AC - (DCE - HGA).$$

Durch Ausdehnung dieser Betrachtung über eine beliebige Länge des Stabes, die aus Theilen zusammengesetzt ist, deren Krümmungen in verschiedenen Ebenen liegen, folgern wir, dass die gesammte Drillung zwischen irgend zwei Punkten erhalten wird, wenn man von der Summe der Aussenwinkel der sphärischen Figur den Ueberschuss der Neigung der Querlinie des zweiten Punktes gegen die Krümmungsebene des zweiten Punktes über die Neigung der Querlinie des ersteren Punktes gegen die Krümmungsebene dieses Punktes subtrahirt. Die Summe jener Aussenwinkel wird unten als „die Richtungsänderung in der Kugeloberfläche“ von einer Seite des Polygons grösster Kreise zur andern definirt, und wenn das Polygon geschlossen ist und die Summe alle seine Aussenwinkel umfasst, so ist sie (§ 134) gleich 2π, weniger der eingeschlossenen Fläche. Unsere Construction behält ihre Gültigkeit offenbar auch im Grenzfall, wenn die Längen der in ein und derselben Ebene liegenden Curventheile unendlich klein sind. Sie ist daher auch für einen Draht anwendbar, der eine gewundene Curve mit stetig wechselnder Krümmungsebene bildet, und liefert für diesen Fall das folgende Resultat: —

Denkt man sich die Axe des Stabes von einem Punkte mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen und parallel zu der Bewegungsrichtung, die er in jedem Augenblick hat, d. h. parallel zu jeder Tangente der Axe in der Kugel vom Radius 1 einen Radius gezogen, so schneiden diese Radien die Kugeloberfläche in einer Curve (dem Hodographen des die Axe durchlaufenden Punktes). Von den Punkten dieser Curve ziehen wir Parallelen zu den Querlinien der entsprechenden Punkte des Stabes. Der Ueberschuss der Richtungsänderung (§ 135) von irgend einem Punkte des Hodographen zu einem andern Punkte desselben über die Zunahme seiner Neigung gegen die Querlinie ist gleich der Drillung in dem entsprechenden Theile des Stabes.

Die Fig. 36 erläutert diese Regel. Sie zeigt den Hodographen und die Parallelen zu den Querlinien. So z. B. ist der Ueberschuss der Richtungsänderung in der Kugeloberfläche längs des Hodographen von A bis C über die Differenz $DCS - BAT$ gleich der Drillung in dem Theil des Stabes, dessen Endpunkte A und C entsprechen. Oder wenn wir einen irgendwo beginnenden Theil des Stabes betrachten, der bis zu einem Punkte reicht, für welchen die an die Axe gelegte Tangente der dem Anfangspunkt zugehörigen Tangente parallel ist, so wird der sphärische Hodograph eine geschlossene Curve sein, und wenn A der dem Anfangspunkt und Endpunkt des Stabtheils entsprechende Hodographenpunkt ist und AB, AB' die den Querlinien parallelen Geraden sind, so wird die ganze Drillung in dem betrachteten Stabtheile gleich der Richtungsänderung um den ganzen Hodographen herum, weniger den Ueberschuss des Aussenwinkels $B'AT$ über den Winkel BAT sein, d. h. die ganze Drillung ist gleich dem Ueberschuss des Winkels BAB' über die vom Hodographen eingeschlossene Fläche.

Fig. 36.



Die im Vorhergehenden entwickelten Principien der Drillung sind von grösster Wichtigkeit in der Theorie der Tauebereitung, namentlich der Construction und Dynamik von Drahtseilen und unterseeischen Tauen, sowie in der Theorie der elastischen Stäbe und der Spiralfedern.

124. Rollen einer Oberfläche auf einer andern, wenn beide Spuren gegeben sind. — Wir kehren jetzt zur Bewegung einer Oberfläche zurück, die auf einer anderen Oberfläche rollt und kreiselt; die Spur auf jeder Oberfläche sei gegeben. Wir können die Krümmung (§ 6), die Windung (§ 7) und die nach den Querlinien in der Tangentialebene der Oberfläche gerechnete Drillung einer jeden als bekannt ansehen, und dann ist der Gegenstand oben (§ 117) vollständig behandelt.

Es seien $\frac{1}{\varrho'}$ und $\frac{1}{\varrho}$ beziehungsweise die Krümmungen der Spuren auf der rollenden und der festen Oberfläche, α' und α die wie in § 116 gerechneten Neigungswinkel ihrer Krümmungsebenen gegen die Normale zur Tangentialebene, τ' und τ ihre Windungen, t' und t ihre Drillungen und V die Geschwindigkeit des Berührungspunktes. Alle diese Grössen als bekannt angesehen, soll man folgende Grössen bestimmen: —

die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation um die Querlinie der Spuren, d. h. um die in der Tangentialebene liegende zu ihrer Tangente senkrechte Linie;

die Winkelgeschwindigkeit ω' der Rotation um die Tangente, und

die Winkelgeschwindigkeit σ des Kreiselns. Man erhält

$$\omega = V\left(\frac{1}{\varrho'} \cos \alpha' - \frac{1}{\varrho} \cos \alpha\right),$$

$$\omega' = V(t - t') = V\left\{\frac{d(\alpha - \alpha')}{d s} - (\tau - \tau')\right\}$$

und

$$\sigma = V\left(\frac{1}{\varrho'} \sin \alpha' - \frac{1}{\varrho} \sin \alpha\right).$$

125. Eine Oberfläche rollt auf einer andern, ohne zu kreiseln. — Nehmen wir in demselben Falle an, dass die Spur auf nur einer Oberfläche gegeben sei, so können wir offenbar die Bedingung stellen, es solle kein Kreiseln stattfinden; dann ist die Spur auf der zweiten Oberfläche eine bestimmte. Dieser Fall der Bewegung wird unten in § 137 eingehend erörtert.

Die Bedingung besteht darin, dass die Projectionen der Krümmungen der beiden Spuren auf die gemeinschaftliche Tangentialebene zusammenfallen müssen.

Sind $\frac{1}{r'}$ und $\frac{1}{r}$ die Krümmungen der rollenden und der festliegenden Fläche in einem Normalschnitte einer jeden, welcher durch die Tangente an die Spur geht, und haben $\alpha, \alpha', \varrho, \varrho'$ wieder dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen, so ist

$$\varrho' = r' \cos \alpha', \quad \varrho = r \cos \alpha \quad \text{(Meunier's Theorem, § 129).}$$

Es ist aber

$$\frac{1}{\varrho'} \sin \alpha' = \frac{1}{\varrho} \sin \alpha,$$

also die gesuchte Bedingung

$$\tan \alpha' = \frac{r'}{r} \tan \alpha.$$

126. Beispiele von Windung und Drillung. — Wenn ein Stab längs irgend einer Curve auf eine Kugeloberfläche gelegt wird, so dass eine auf ihm bezeichnete Seitenlinie ihrer ganzen Länge nach mit der Kugel in Berührung kommt, so erhält er während der Operation keine Drillung. Denn wenn er in dieser Weise längs irgend eines endlichen Bogens eines kleinen Kreises gelegt wird, so nimmt er offenbar keine Drillung an, und ebenso wenig wird eine Drillung erzeugt, wenn man ihn von irgend einem Punkte an weiter längs eines zweiten kleinen Kugelkreises legt, der mit dem ersteren in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente hat.

Wenn ein Stab so um einen Cylinder gebogen wird, dass eine auf ihm bezeichnete Seitenlinie den Cylinder berührt, oder wenn wir, was die Sache besser veranschaulicht, ein gerades Band spiralförmig auf einen Cylinder wickeln, so ist die Axe, um welche die Biegung erfolgt, derjenigen des Cylinders parallel, folglich gegen die Axe des Stabes oder Bandes geneigt. Wir können also die Rotation, welche das Umbiegen in jedem Augenblicke ausmacht, in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine — das reine Biegen — um eine zur Axe des Stabes senkrechte Gerade, die andere — die reine Drillung — um die Axe des Stabes erfolgt.

Die Drillung in einem Stabe oder Bande, das in der angegebenen Weise um einen Cylinder von kreisförmiger Basis gewunden ist und eine gleichförmige Schraubenlinie bildet, ist in jedem Punkte

$$\frac{\cos\alpha\,\sin\alpha}{r},$$

wenn r der Radius der Cylinderbasis und α die Neigung der Spirale oder der Steigungswinkel ist. Denn wenn V die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher das Umbiegen längs des anfänglich geraden Drahtes oder Bandes fortschreitet, so ist $\frac{V\cos\alpha}{r}$ die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Rotation um die (der Cylinderaxe parallele) Biegungslinie, und daher sind

$$\frac{V\cos\alpha}{r}\sin\alpha \text{ und } \frac{V\cos\alpha}{r}\cos\alpha$$

beziehungsweise die Winkelgeschwindigkeiten der Drillung und der reinen Biegung.

Aus der letzteren Componente schliessen wir, dass die Krümmung der Schraubenlinie

$$\frac{\cos^2\alpha}{r}$$

ist, ein bekanntes Resultat, das mit dem oben (§ 13) erhaltenen Ausdruck übereinstimmt.

127. Der Hodograph ist in diesem Falle ein kleiner Kugelkreis. Wenn die angegebene Bedingung über die Art der Auflegung des Stabes auf den Cylinder erfüllt ist, so werden die Querlinien des spiralförmigen Stabes in den Punkten, welche durch einen oder mehrere ganze Umläufe getrennt sind, parallel sein. Die Gesammtdrillung in einem einzelnen Umlauf ist folglich gleich dem Ueberschuss von vier rechten Winkeln über das vom Hodographen eingeschlossene sphärische Flächenstück. Ist α die Neigung der Spirale, so wird $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ der sphärische Radius des Hodographen, seine Fläche mithin $2\pi(1 - \sin\alpha)$ sein. Die Gesammtdrillung in einem Umlauf der Spirale ist daher $2\pi \sin\alpha$, und dies stimmt mit dem früher (§ 126) erhaltenen Resultat überein.

128. Krümmung der Oberflächen. — Als Einleitung für die weitere Betrachtung des Rollens einer Oberfläche auf einer andern wollen wir jetzt einige Punkte behandeln, die sich auf die Krümmung der Oberflächen beziehen, und die uns auch in mehreren anderen Theilen unseres Gegenstandes von Nutzen sein werden.

Die in irgend einem Punkte an eine Oberfläche gelegte Tangentialebene kann die Fläche in jenem Punkte schneiden oder nicht. Im ersteren Falle biegt sich die Oberfläche von der Tangentialebene theilweise nach der *einen*, theilweise nach der andern Seite zu ab und hat auf diese Weise in einigen ihrer Normalschnitte Krümmungen, welche den Krümmungen in anderen Normalschnitten entgegengesetzt gerichtet sind. Im letzteren Falle entfernt sich die Oberfläche von der Tangentialebene um den Berührungspunkt herum überall nach derselben Seite hin, und die Krümmungen aller Normalschnitte haben ähnliche Richtungen. Wir können danach zwei Arten von krummen Oberflächen, anticlastische und synclastische, unterscheiden. Ein Sattel liefert uns ein gutes Beispiel der ersteren, ein Ball der letzteren Art. Krümmungen, welche in Beziehung auf die Tangentialebene entgegengesetzt gerichtet sind, haben natürlich entgegengesetzte Zeichen. Die äussere Seite eines Ankerringes ist synclastisch, der innere anticlastisch.

129. Satz von Meunier. — Die Krümmung eines schrägen Schnittes einer Oberfläche ist gleich dem Product aus der Krümmung des durch dieselbe Tangente gehenden Normalschnittes in die Secante des Neigungswinkels der Schnittebenen. Dies folgt leicht aus den elementarsten Betrachtungen über Projectionen.

130. Satz von Euler. — In jedem Punkte einer synclastischen Oberfläche giebt es zwei Normalschnitte von der Beschaffenheit, dass die Krümmung des einen ein Maximum, die des andern ein Minimum ist; diese beiden Normalschnitte stehen aufeinander senkrecht.

Bei einer anticlastischen Oberfläche findet ein Maximum der Krümmung (aber in entgegengesetzten Richtungen) in den beiden Normalschnitten statt, deren Ebenen die Winkel zwischen den Linien halbiren, in welchen die Fläche ihre Tangentialebene schneidet. In Anbetracht der Zeichenverschiedenheit können diese beiden Krümmungen als ein Maximum und ein Minimum angesehen werden.

Allgemein ist für jeden Punkt die Summe der Krümmungen in irgend zwei aufeinander senkrechten Normalebenen von der Lage dieser Ebenen unabhängig.

Wird die Tangentialebene zur xy Ebene und der Berührungspunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen, so ist die Gleichung der Oberfläche offenbar (ausser wenn der Anfangspunkt ein singulärer Punkt ist):

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \text{u. s. w.} \tag{1}$$

Die Krümmung des Normalschnittes, welcher durch den Punkt x, y, z hindurchgeht, ist (im Grenzfall):

$$\frac{1}{r} = \frac{2z}{x^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{x^2 + y^2}.$$

Wenn der Schnitt gegen die xz Ebene um den Winkel ϑ geneigt ist, so geht dieser Ausdruck über in

$$\frac{1}{r} = 2\{A \cos^2\vartheta + 2B \sin\vartheta \cos\vartheta + C \sin^2\vartheta\}. \tag{2}$$

Sind also $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{s}$ die Krümmungen in zwei zu einander senkrechten Normalschnitten, so ist

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 2(A + C) = const.$$

Die Formel (2) kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \{A(1 + \cos 2\vartheta) + 2B \sin 2\vartheta + C(1 - \cos 2\vartheta)\} \\ &= \{\overline{A + C} + \overline{A - C} \cos 2\vartheta + 2B \sin 2\vartheta\},\end{aligned}$$

oder, wenn

$$A - C = R \cos 2\alpha, \quad 2B = R \sin 2\alpha,$$

d. h.

$$R = \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \text{ und } \tan 2\alpha = \frac{2B}{A - C}$$

ist,

$$\frac{1}{r} = A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \cos 2(\vartheta - \alpha).$$

Es findet daher ein Maximum und ein Minimum der Krümmung in denjenigen zu einander senkrechten Normalebenen statt, für welche $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ist, und diese Krümmungen sind beziehungsweise

$$A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}.$$

Ihr Product ist also $4(AC - B^2)$.

Je nachdem dies Product positiv oder negativ ist, haben wir eine synclastische oder eine anticlastische Oberfläche. Ist dasselbe Null, so haben wir nur eine Krümmung, und die Fläche ist in dem betrachteten Punkte cylindrisch. Wir werden (§ 152) zeigen, dass, wenn diese Bedingung in jedem Punkte erfüllt ist, die Fläche zu den „abwickelbaren" (§ 139) gehört.

Aus (1) sehen wir, dass eine der Tangentialebene sehr nahe liegende und derselben parallele Ebene die Oberfläche in den drei angegebenen Fällen beziehungsweise in einer Ellipse, einer Hyperbel, oder in zwei parallelen Geraden (einer Varietät der Hyperbel) schneidet. Diese Schnittlinie, deren Natur uns lehrt, ob die Oberfläche in irgend einem Punkte synclastisch, anticlastisch oder cylindrisch ist, hat von Dupin den Namen Indicatrix erhalten.

131. Kürzeste Linie auf einer Oberfläche. — Es seien P, p zwei einander unendlich nahe liegende Punkte einer Oberfläche und r der Krümmungsradius eines durch dieselben gehenden Normalschnittes. Dann ist der Krümmungsradius eines durch die nämlichen Punkte gehenden schrägen Schnittes, der mit dem Normalschnitt einen Winkel α bildet, gleich $r \cos \alpha$ (§ 129). Auch ist der Weg von P nach p längs des Normalschnittes kürzer als der Weg zwischen diesen Punkten längs des schrägen Schnittes; denn der Bogen, den eine Sehne von gegebener Länge von einem Kreise abschneidet, ist um so länger, je kleiner der Radius dieses Kreises ist.

Ist a die Länge der Sehne Pp, so haben wir für die Entfernung von P bis p längs des Normalschnittes den Ausdruck $2\, r \arcsin \frac{a}{2\, r}$, oder näherungsweise $a\left(1 + \frac{a^2}{24\, r^2}\right)$; dagegen hat der Weg von P nach p längs des schrägen Schnittes die Länge $a\left(1 + \frac{a^2}{24\, r^2 \cos^2 \alpha}\right)$.

132. Geodätische Linien. — Wenn also die kürzeste überhaupt mögliche Linie zwischen zwei Punkten auf einer Oberfläche gezogen wird, so steht ihre Krümmungsebene überall auf der Oberfläche senkrecht.

Eine solche Curve heisst eine geodätische Linie, und es ist leicht zu sehen, dass sie diejenige Linie ist, in welcher eine zwischen jenen Punkten gespannte biegsame und unausdehnbare Schnur die (als glatt vorausgesetzte) Oberfläche berühren würde.

133. Wenn ein unendlich schmales Band eine geodätische Linie entlang auf eine Oberfläche gelegt wird, so ist seine Drillung in jedem Punkte gleich der Windung seiner Axe. Wir haben (§ 125) gesehen, dass, wenn ein Körper ohne zu kreiseln auf einem anderen rollt, die Projectionen der Spuren auf die gemeinschaftliche Tangentialebene im Berührungspunkt gleiche Krümmungen haben. Wenn also eine der Oberflächen eine Ebene und die Spur auf der andern eine geodätische Linie ist, so ist die Spur auf der Ebene eine Gerade. Ist umgekehrt die Spur auf der Ebene eine Gerade, so ist die auf der Oberfläche eine geodätische Linie.

Und ganz allgemein, wenn die gegebene Spur eine geodätische Linie ist, so ist auch die andere Spur eine geodätische Linie.

134. Sphärischer Excess. — Fläche eines sphärischen Polygons. — Bekanntlich ist die Fläche eines sphärischen Dreiecks proportional dem „sphärischen Excess", d. h. dem Ueberschuss der Summe seiner Winkel über zwei rechte Winkel, oder proportional dem Ueberschuss von vier rechten Winkeln über die Summe seiner Aussenwinkel. Die Fläche eines sphärischen Polygons, dessen n Seiten Bogen grösster Kreise — d. h. geodätische Linien — sind, verhält sich zur Fläche der Halbkugel, wie sich der Ueberschuss von vier rechten Winkeln über die Summe seiner Aussenwinkel zu vier rechten Winkeln verhält. (Wir können diesen Ueberschuss den „sphärischen Excess" des Polygons nennen.)

Die Fläche eines sphärischen Dreiecks ist bekanntlich

$$(A + B + C - \pi) r^2.$$

Theilen wir nun das Polygon in n solche Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Spitze haben, um welche herum die Summe der Winkel natürlich 2π beträgt, so ist die Fläche des Polygons

$$= (\text{Summe der Winkel aller Dreiecke} - n\pi) r^2$$
$$= (2\pi + \text{Summe der Winkel des Polygons} - n\pi) r^2$$
$$= (2\pi - \text{Summe der Aussenwinkel des Polygons}) r^2.$$

Es ist ein offenes oder geschlossenes sphärisches Polygon oder eine Linie auf der Oberfläche einer Kugel gegeben, die aus einer Anzahl von Bogen grösster Kreise besteht. Wir nehmen einen der beiden Pole des ersten Bogens und die entsprechenden Pole aller übrigen (wenn man die gegebenen Bogen der Reihe nach durchläuft, so müssen die genommenen Pole entweder sämmtlich zur Rechten, oder sämmtlich zur Linken liegen). Ziehen wir nun vom ersten dieser Pole zum zweiten, vom zweiten zum dritten, u. s. w. Bogen grösster Kreise, so erhalten wir ein zweites offenes oder geschlossenes Polygon, welches die Polarfigur des gegebenen genannt wird. Die Bogen des zweiten Polygons sind offenbar gleich den Aussenwinkeln des ersteren und die Aussenwinkel des zweiten gleich den Seiten des ersteren. Die Beziehung zwischen den beiden Figuren ist daher eine gegenseitige, oder jede ist die Polarfigur der anderen. Die Polarfigur einer beliebigen auf einer Kugeloberfläche gezogenen continuirlichen Curve ist der Ort der Durchschnittspunkte der grössten Kreise, die äquatoreal zu den unendlich nahe aneinander angenommenen Punkten der gegebenen Curve sind.

Die Fläche einer geschlossenen sphärischen Figur ist folglich nach dem, was wir eben gesehen haben, gleich dem Ueberschuss von 2π über die Peripherie der Polarfigur.

135. Die ganze Richtungsänderung der Bewegung auf einer Oberfläche. — Wenn sich ein Punkt auf einer Oberfläche eine Figur entlang bewegt, deren Seiten geodätische Linien sind, so definiren wir die Summe der Aussenwinkel dieser Figur als seine ganze Richtungsänderung in der Oberfläche.

Wenn ein Schiff auf einem grössten Kreise segelt (ausser auf dem Aequator oder einem Meridian), so erleidet sein Lauf, wie ihn die Striche des Compass (eines ideal genauen, nicht des magnetischen, denn dieser wechselt sogar auf einem Meridian) angeben, eine beständige Aenderung. Wie wir aber sagen, die Richtung des Schiffes bleibe dieselbe, wenn es auf einem Meridian oder auf dem Aequator segelt, so sollten wir auch sagen, seine Richtung bleibe dieselbe, wenn es auf einem beliebigen grössten Kreise fährt. Der grösste Kreis ist aber die geodätische Linie auf der Kugel, und durch Ausdehnung dieser Bemerkungen über andere krumme Flächen erkennen wir den Zusammenhang der obigen Definition mit der für den Fall eines ebenen Polygons (§ 10) gegebenen.

Anmerkung. — Wir können hier die gesammte Richtungsänderung nicht durch einen Winkel definiren, der sich aus der ersten und der letzten Tangente an die Bahn direct construiren liesse, wie es (§ 10) im Falle einer ebenen Curve oder eines ebenen Polygons geschah; aber die §§ 125 und 133 berechtigen uns zu folgendem Ausspruch: — Vom einen zum andern Ende irgend eines Bogens einer auf einer krummen Oberfläche gezogenen Curve ist die ganze Richtungsänderung gleich der Richtungsänderung in der Spur, welche dieser Bogen bei reinem Rollen auf einer Ebene zurücklässt.

136. Gesammtkrümmung. — Definition. — Der Ueberschuss von vier rechten Winkeln über die ganze Richtungsänderung, welche eintritt, wenn man auf einer krummen Oberfläche die ganze Peripherie eines aus geodätischen Linien bestehenden geschlossenen Polygons durchläuft, ist die Gesammtkrümmung des eingeschlossenen Flächentheils. Im Falle eines in einer Ebene gezogenen Polygons ist ein solcher Ueberschuss nicht vorhanden. Wir werden sofort sehen, dass dies genau dem entspricht, was Gauss *curvatura integra* genannt hat.

Definition (Gauss). — Errichtet man in irgend einem Punkt der Umgrenzung eines gegebenen Theils einer krummen Fläche eine Normale, lässt dieselbe die ganze Umgrenzung durchlaufen und zieht vom Mittelpunkt einer Kugel vom Radius 1 aus parallel zu jeder Lage der Normale einen Radius, so bilden die Endpunkte der Radien auf der Kugeloberfläche eine geschlossene Curve. Die von dieser Curve eingeschlossene Fläche ist die *curvatura integra* des gegebenen Theils der krummen Oberfläche.

Die in der angegebenen Weise auf der Kugeloberfläche gezogene Curve heisst der Horograph des gegebenen Theils der krummen Fläche.

Die mittlere Krümmung irgend eines Theils einer krummen Fläche ist die Gesammtkrümmung, dividirt durch die Fläche. Die *specifische* Krümmung einer krummen Oberfläche in irgend einem Punkte ist die mittlere Krümmung eines um diesen Punkt herumliegenden unendlich kleinen Flächenstücks.

137. Der Ueberschuss von 2π über die Richtungsänderung, welche ein Punkt in einer Oberfläche erfährt, wenn er irgend eine auf derselben liegende geschlossene Curve durchläuft, ist gleich der Fläche des Horographen des von der Curve eingeschlossenen Theils der Oberfläche.

Wir lassen eine Tangentialebene auf der Oberfläche über jeden Punkt der Grenzlinie rollen, ohne zu kreiseln. (Ihre augenblickliche Axe wird beständig in ihr liegen und durch den Berührungspunkt gehen; sie wird aber, wie wir gesehen haben, nicht rechtwinklig gegen die gegebene Umgrenzungslinie sein, ausser wenn die Drillung in einem längs dieser Curve liegenden schmalen Streifen der Oberfläche Null ist.) Betrachten wir die Hilfskugel vom Radius 1, welche Gauss in seiner Definition benutzt, und die durch ihren Mittelpunkt gehende bewegliche Gerade, so sehen wir, dass die Bewegung der letzteren in jedem Augenblick in einer zur augenblicklichen Drehungsaxe der Tangentialebene an die gegebene Oberfläche senkrechten Ebene liegt. Die Bewegungsrichtung des Punktes, welcher die Fläche auf der Kugeloberfläche ausschneidet, ist daher senkrecht zu dieser augenblicklichen Axe. Wenn wir also auch auf der Kugel eine Tangentialebene rollen und sie mit der anderen Schritt halten lassen, so wird die Spur auf dieser Tangentialebene eine zur augenblicklichen Axe beider Tangentialebenen stets senkrechte Curve sein. Die Richtungsänderung in der Kugeloberfläche, welche der Punkt erfährt, der das Flächenstück umschreibt und ausschneidet, ist nun (§ 135) gleich der Richtungsänderung in seiner eigenen Spur auf seiner eigenen Tangentialebene, folglich gleich der Richtungsänderung der augenblicklichen Axe in der Tangentialebene an die gegebene Oberfläche, von einer in Beziehung auf diese Ebene festliegenden Geraden an gerechnet. Wenn aber die Tangentialebene ganz herum gerollt und im Begriff ist, ihren Weg aufs Neue zu beginnen, so muss die augenblickliche Axe dieses neuen Umlaufes gegen die Spur dieselbe Neigung wie im Anfang haben. Folglich ist die Richtungsänderung der augenblicklichen Axe in jeder der beiden Tangentialebenen gleich der Richtungsänderung, welche ein Punkt in der gegebenen Oberfläche erleidet, wenn er die Umgrenzung des gegebenen Theils derselben durchläuft. Dieser Richtungsänderung ist somit die Richtungsänderung in der Kugeloberfläche gleich, welche eintritt, wenn ein Punkt das erwähnte Flächenstück derselben umschreibt. Nach dem bekannten Satze (§ 134) vom „sphärischen Excess" bleibt aber, wenn man diese Richtungsänderung von 2π subtrahirt, das sphärische Flächenstück übrig Letzteres, oder nach Gauss' Definition die *curvatura integra*, ist also gleich 2π, weniger der beim Durchlaufen der Umgrenzung erfolgenden Richtungsänderung.

Wenn die beiden Tangentialebenen über die ihr vorgezeichneten Wege gerollt sind, so wird jede derselben ihrer anfänglichen Lage wieder parallel sein; aber eine in ihr fixirte Gerade wird mit ihrer früheren Richtung einen Winkel bilden, der den eben betrachteten gleichen Richtungsänderungen gleich ist.

Anmerkung. — Die beiden rollenden Tangentialebenen sind in jedem Augenblick einander parallel, und eine in Beziehung auf die eine Ebene feste Gerade, welche zu irgend einer Zeit einer in Beziehung auf die zweite Ebene festen Geraden parallel gezogen worden ist, bleibt derselben beständig parallel.

Wenn wir auf der gegebenen Oberfläche statt der geschlossenen Curve ein durch geodätische Linien gebildetes geschlossenes Polygon haben, so wird die Spur des Rollens ihrer Tangentialebene ein ungeschlossenes geradliniges Polygon sein. Wäre jede geodätische Linie eine ebene Curve (was nur dann der Fall sein könnte, wenn die gegebene Oberfläche eine Kugel wäre), so würde die augenblickliche Axe beständig senkrecht gegen diejenige Seite des Polygons sein, über welche die Tangentialebene in jenem Augenblick gerade hinwegrollt, und die sphärische Fläche auf der Hilfskugel würde natürlich ein dem gegebenen ähnliches Polygon sein. Wenn aber die gegebene Oberfläche keine Kugel ist, so muss in wenigstens einer geodätischen Linie des geschlossenen Polygons und im Allgemeinen in ihnen allen Windung, oder was dasselbe ist, es muss in den entsprechenden Streifen der Oberfläche Drillung vorhanden sein. Folglich muss der Theil der ganzen Spur auf der zweiten rollenden Tangentialebene, welcher irgend einer Seite des gegebenen geodätischen Polygons entspricht, im Allgemeinen eine Curve sein, und da allgemein beim zweiten Rollen endliche Winkel da sein werden, welche denjenigen des ersten Rollens entsprechen (aber nicht gleich sind), so wird die Spur des zweiten Rollens auf seiner Tangentialebene ein nicht geschlossenes Polygon von Curven sein. Die Spur desselben Rollens auf der Kugeloberfläche, in der es stattfindet, wird im Allgemeinen ein sphärisches Polygon sein, das nicht aus Bogen grösster Kreise, sondern aus anderen Curven besteht. Die Summe der Aussenwinkel dieses Polygons und der Richtungsänderungen vom einen zum andern Ende jeder seiner Seiten ist die ganze betrachtete Richtungsänderung und, wie eine Anwendung des in § 134 bewiesenen Satzes ergiebt, gleich 2π, weniger der eingeschlossenen sphärischen Fläche.

Es sei jetzt das gegebene Polygon nicht geodätisch, sondern bestehe aus Curven, deren jede die Bedingung erfüllt, dass die durch irgend einen ihrer Punkte an die Oberfläche gelegte Normale einer festen Ebene parallel ist. Für jede der Curven, die das Polygon ausmachen, ist eine feste Ebene gegeben. Dann wird die Figur auf der Hilfskugel ein Polygon sein, das durch Bogen grösster Kreise gebildet wird, und die Spur dieser Figur auf ihrer Tangentialebene wird ein offenes geradliniges Polygon sein, während die Spur der gegebenen Curve auf der längs derselben in der gegebenen Fläche rollenden Tangentialebene ein offenes Polygon von Curven ist. Die Summe der Richtungsänderungen in diesen Curven und der an den Uebergängen von einer zur andern liegenden Aussenwinkel ist natürlich gleich der Richtungsänderung, die in der gegebenen Oberfläche eintritt, wenn man das darauf liegende Curvenpolygon umschreibt. Die Richtungsänderung in der Kugeloberfläche ist einfach die Summe der Aussenwinkel des sphärischen Polygons oder seiner geradlinigen Spur. Man beachte, dass die augenblickliche Axe, um welche das erste Rollen erfolgt, in diesem Falle, da sie beständig zu der Ebene senkrecht ist, welcher alle Normalen einer Curve parallel sind, einer in Beziehung auf die Tangentialebene festen Geraden parallel bleibt, während das Rollen längs der betreffenden Curve erfolgt; sie bleibt auch einer im Raum festliegenden Geraden parallel.

Endlich machen wir noch darauf aufmerksam, dass zwar die ganze Richtungsänderung in der Spur auf der einen Tangentialebene derjenigen in der Spur auf der anderen Tangentialebene gleich ist, sobald der gegebene Umfang vollständig durchrollt ist, dass aber diese beiden Richtungsänderungen in irgend einem Theile des Umfanges im Allgemeinen ungleich sind. Sie können für besondere Theile desselben gleich sein, und zwar ist dies der Fall zwischen den Punkten (wenn es deren giebt), in welchen die augenblickliche Axe gegen die Richtung der Spur auf der ersten Tangentialebene gleiche Neigung hat.

138. Analogie, die hinsichtlich der Krümmung zwischen Curven und Oberflächen besteht. — Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass dieselbe Gleichheit oder Identität besteht zwischen der „ganzen Krümmung“ eines ebenen Bogens und dem Ueberschuss von π über den Winkel zwischen den in seinen Endpunkten errichteten Tangenten, wie zwischen der „ganzen Krümmung“ und dem Ueberschuss von 2π über die in einer krummen Oberfläche längs der Umgrenzung irgend eines Theils derselben erfolgende Richtungsänderung.

Oder nach Gauss, wie die ganze Krümmung in einem ebenen Bogen der Winkel zwischen zwei Geraden ist, welche den in den Endpunkten des Bogens errichteten Normalen parallel sind, so ist die ganze Krümmung eines Theils einer krummen Oberfläche der körperliche Winkel eines Kegels, der entsteht, wenn man von einem festen Punkte aus zu allen durch die Umgrenzung gelegten Normalen Parallellinien zieht.

Weiter ist die mittlere Krümmung in einer ebenen Curve

$= \frac{\text{Richtungsänderung}}{\text{Länge}}$, und die specifische Krümmung oder, wie man gewöhnlich sagt, die Krümmung in irgend einem Punkte $= \frac{\text{Richtungsänderung in einem unendlich kleinen Curventheile}}{\text{Länge dieses Curventheils}}$. Die mittlere Krümmung und die specifische Krümmung von Oberflächen sind daher den entsprechenden Ausdrücken für eine ebene Curve analog.

Endlich ist in einem ebenen Bogen von gleichförmiger Krümmung, d. h. in einem Kreisbogen $\frac{\text{Richtungsänderung}}{\text{Länge}} = \frac{1}{\varrho}$, und es lässt sich leicht zeigen (was unten geschehen wird), dass in einer Oberfläche von überall gleichförmiger specifischer Krümmung $\frac{2\pi - \text{Richtungsänderung}}{\text{Fläche}}$, oder $\frac{\text{Gesammtkrümmung}}{\text{Fläche}} = \frac{1}{\varrho\varrho'}$ ist, wo ϱ und ϱ' die Hauptkrümmungsradien bezeichnen. Folglich ist in einer Oberfläche, mag dieselbe nun von gleichförmiger oder ungleichförmiger specifischer Krümmung sein, die specifische Krümmung in jedem Punkte gleich $\frac{1}{\varrho\varrho'}$, und in der Raumgeometrie ist $\varrho\varrho'$ (eine Fläche) offenbar dem analog, was ϱ in der Geometrie der ebenen Curven ist.

Fläche des Horographen. — Wir betrachten einen von einer gegebenen geschlossenen Curve begrenzten Theil S einer Oberfläche von irgend welcher Krümmung und nehmen noch eine Kugel an, deren Radius r und deren Mittelpunkt C ist. Durch C ziehen wir einen Radius CQ an die Kugeloberfläche, welcher der in irgend einem Punkte P von S errichteten Normale parallel ist. Wenn dies für einen jeden Punkt der Umgrenzung von S geschehen ist, so schliessen die auf der Kugeloberfläche erhaltenen Punkte die in Gauss' Definition benutzte Fläche ein. Nun liege auf S im Punkte P ein unendlich kleines Rechteck, welches zu Seiten Bogen der Normalschnitte grösster und kleinster Krümmung hat, und zwar die Bogen der Winkel ζ und ζ'. Werden ihre Krümmungsradien mit ϱ und ϱ' bezeichnet, so sind die Längen dieser Seiten beziehungsweise $\varrho\zeta$ und $\varrho'\zeta'$, und die Fläche des Rechtecks ist daher $\varrho\varrho'\zeta\zeta'$. Die entsprechende Figur auf der Kugeloberfläche in Q wird durch Bogen ebenso grosser Winkel begrenzt; ihre Seiten haben daher beziehungsweise die Längen $r\zeta$ und $r\zeta'$, und ihre Fläche ist $r^2\zeta\zeta'$. Wird diese Fläche mit $d\sigma$ bezeichnet, so ist die Fläche des unendlich kleinen Theils der gegebenen Oberfläche $\frac{\varrho\varrho' d\sigma}{r^2}$. In einer Oberfläche, für welche $\varrho\varrho'$ einen constanten Werth hat, ist die Fläche daher gleich

$$\frac{\varrho\varrho'}{r^2}\int\int d\sigma = \varrho\varrho' \times \text{Gesammtkrümmung}.$$

139. **Biegsame und unausdehnbare Oberflächen.** — Der Begriff einer vollkommen biegsamen und dabei unausdehnbaren Oberfläche wird zwar nicht realisirt, aber in uns erweckt durch ein Stück Papier, eine dünne Metallplatte oder ein Stück Tuch, wenn die Fläche eben ist, und durch Schotenhülsen, Samengehäuse u. dergl., wenn die Fläche nicht flach ausgebreitet werden kann, ohne zu zerreissen. Wenn man die Form einer Oberfläche durch Biegen ändert, so sagt man: man wickle die Fläche ab. Der Ausdruck „abwickelbare Oberfläche" wird aber gewöhnlich in einem beschränkteren Sinne, nämlich nur von solchen unausdehnbaren Oberflächen gebraucht, die sich in eine Ebene abwickeln lassen.

140. Die Geometrie oder Kinematik dieses Gegenstandes steht in grossem Gegensatze zu der der biegsamen Linien (§ 14). Schon ihre ersten Elemente enthalten Begriffe, deren Verständniss nicht sehr leicht ist, und führen zu Untersuchungen, welche die Kraft einiger der grössten Mathematiker beschäftigt und vielleicht sogar überstiegen haben.

141. Es erfordert einige Sorgfalt, sich eine genaue Vorstellung davon zu bilden, was eine vollkommen biegsame unausdehnbare Oberfläche ist. Betrachten wir zunächst ein ebenes Blatt Papier. Dasselbe ist sehr biegsam, und wir können uns, von ihm ausgehend, leicht den Begriff eines Blattes von einem idealen vollkommen biegsamen Stoffe bilden. Das Blatt Papier ist in hohem Grade unausdehnbar, d. h. es giebt einer Kraft, die es nach irgend einer Richtung zu ziehen oder auszudehnen strebt, nur sehr wenig nach, wäre diese Kraft auch die stärkste, die es noch ertragen kann, ohne zu zerreissen. Es dehnt sich natürlich ein wenig aus. Es ist leicht zu zeigen, dass es sich unter dem Einflusse einer Kraft ausdehnt und, wenn die Kraft beseitigt ist, wieder zusammenzieht, obwohl nicht immer wieder zu seinen anfänglichen Dimensionen, da die hervorgebrachte Ausdehnung bis zu einem gewissen Betrage eine bleibende sein kann und im Allgemeinen auch ist. Auch hat eine Biegung eine zeitweilige und eine in geringerem Grade bleibende Ausdehnung der einen und Zusammenziehung der anderen Seite zur Folge. Wir werden in der Elasticitätslehre hierauf zurückkommen. Inzwischen können wir, um unsere kinematischen Sätze zu erläutern, nicht umhin, solche physikalische Verhältnisse zu anticipiren.

142. Ein auf die gewöhnliche einfache Weise gewobenes Tuch, sehr feiner Musselin z. B., erläutert eine Fläche, welche in zwei Richtungen (nämlich in den Richtungen der Kette und des Ein-

schlags) vollkommen unausdehnbar, dagegen jeder Ausdehnung von 1 bis $\sqrt{2}$ längs einer Diagonale fähig ist, wobei zugleich in der Richtung der anderen Diagonale eine Zusammenziehung von 1 bis 0 erfolgt. [Jeder Grad der Ausdehnung längs einer Diagonale ist von einem entsprechenden ganz bestimmten Grade der Zusammenziehung längs der anderen Diagonale begleitet; der Zusammenhang zwischen beiden ist $(e^2 + e'^2) = 2$, wo $1 : e$ und $1 : e'$ die Verhältnisse der Elongation sind, die im Falle e oder $e' < 1$ eine Zusammenziehung sein wird.] Im Vorhergehenden ist das Gewebe als ein quadratisches vorausgesetzt, in welchem Falle die Diagonalen rechtwinklig zu einander bleiben. Ein Gewebe mit länglichen Maschen liefert eine weniger einfache aber leicht bestimmbare Relation. Ein Zeug wird auf ganz verschiedene Weise fallen, je nachdem das Gewebe quadratisch oder mehr oder weniger oblong ist.

143. Die Biegung einer Oberfläche, welche irgend einen Fall der eben festgesetzten geometrischen Bedingung erfüllt, bietet einen interessanten Gegenstand der Untersuchung dar, bei dem wir leider nicht verweilen dürfen. Das feuchte Papier, welches Albrecht Dürer als Modell der Gewänder bei seinen kleinen Gliederpuppen benutzte. musste ganz anders als Leinwand fallen. Vielleicht rührt die Steifheit der Drapirung in seinen Gemälden theilweise aus dem Umstande her, dass er das feuchte Papier dem Leinen seiner grössern Biegsamkeit wegen vorzog und den grossen Unterschied übersah, der hinsichtlich der Ausdehnbarkeit zwischen beiden stattfindet.

Feiner Musselin wird, mit Stärke und Gummi präparirt, während des Trocknens durch eine Maschine in Bewegung erhalten. welche durch Hervorbringung einer hin und her gehenden relativen Winkelbewegung von Kette und Einschlag die Diagonalen seiner Structur abwechselnd ausdehnt und zusammenzieht und auf diese Weise die Parallelogramme verhindert, in Rechtecke zu erstarren.

144. Biegung einer unausdehnbaren abwickelbaren Fläche. — Die Biegung einer unausdehnbaren Oberfläche, welche eben sein kann, ist ein von den Mathematikern gut ausgearbeiteter Gegenstand, der auch, in seinen Elementen wenigstens, keine grossen Schwierigkeiten darbietet. Die erste elementare Vorstellung, die wir zu bilden haben, ist die, dass eine solche (als vollkommen biegsam vorausgesetzte) Oberfläche, wenn wir sie uns anfangs in eine Ebene ausgebreitet denken, um irgend eine auf ihr gezogene Gerade so gebogen werden kann, dass die beiden ebenen Theile einen beliebigen Winkel mit einander bilden.

Eine solche Gerade wird eine „erzeugende Linie“ der zu bildenden Oberfläche genannt.

Weiter können wir einen dieser ebenen Theile um irgend eine andere Gerade biegen, welche (innerhalb der Grenzen der Fläche) die erstere Gerade nicht schneidet, u. s. w. Ist die Anzahl dieser Geraden unendlich gross, und sind die Biegungswinkel unendlich klein, aber so beschaffen, dass sie eine endliche Summe geben, so ist unsere anfänglich ebene Fläche in eine krumme und natürlich „abwickelbare“ (§ 139) Fläche umgebogen.

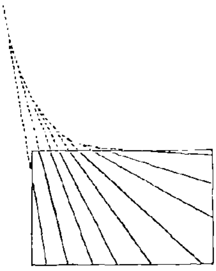
145. Wenn man ein Stück Papier von quadratischer Form, welches ohne Falten, ohne Runzeln und ohne rauhe Ränder ist, leicht an einer Ecke oder an sonst einem Punkte, oder auch an zwei Punkten anfasst und ohne Druck oder Zwang aufhebt, so wird es in einer Form herabhängen, die in aller Strenge eine abwickelbare Oberfläche ist. Denn wenn es auch nicht absolut unausdehnbar ist, so sind doch die Kräfte, die es auszudehnen oder zu zerreissen streben, wenn es in der angegebenen Weise behandelt worden, klein genug, um keine merkliche Ausdehnung zu erzeugen. In der That ist die grösste Ausdehnung, die es, ohne zu zerreissen, in irgend einer Richtung erfahren kann, nicht im Stande, einen grossen Einfluss auf die Form der Oberfläche auszuüben, wenn scharfe Biegungen, singuläre Punkte, u. s. w. vermieden werden.

146. Prismen und Cylinder (die Biegungslinien, § 144, sind parallel; ihre Anzahl ist im ersteren Falle endlich, im zweiten unendlich gross; die Biegungswinkel sind im ersteren Falle von endlicher Grösse, im zweiten unendlich klein), sowie Pyramiden und Kegel (die Biegungslinien treffen einander, gehörig verlängert, in einem Punkte) gehören offenbar zu den abwickelbaren Flächen.

147. Wenn die erzeugenden Linien oder die linearen Kanten der Biegungswinkel nicht parallel sind, so müssen sie einander schneiden, da sie in einer Ebene liegen, wenn die Oberfläche eben ist. Wenn sie nicht sämmtlich durch einen Punkt gehen, so müssen sie sich in mehreren Punkten treffen. Im Allgemeinen möge jede dieser Geraden die vorhergehende und die nachfolgende in verschiedenen Punkten schneiden.

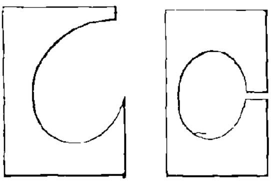
148. Wendungscurve. — Es hat noch keine Schwierigkeit, die Form der ebenen Fläche, etwa eines Quadrats oder eines Kreises, zu verstehen, wenn dieselbe in der zuletzt dargelegten Weise gebogen worden ist, vorausgesetzt dass sie keinen jener Schnittpunkte enthält. Wenn die Anzahl derselben unendlich gross und die Oberfläche endlich gekrümmt ist, so werden die erzeugenden Linien im Allgemeinen Tangenten einer Curve sein (die der geometrische Ort der unendlich vielen Durchschnittspunkte ist). Diese Curve heisst die Wendungscurve. Wenn die Oberfläche (nach mathematischen Begriffen) vollständig ist, so muss sie offenbar aus zwei Flächen bestehen, die in der Wendungscurve zusammentreffen (gerade so wie ein Kegel aus zwei im Scheitel zusammenstossenden Flächen besteht), da man jede Tangente, statt sie, wie in der Fig. 37 geschehen ist, im Berührungspunkte aufhören zu lassen, über diesen Punkt hinaus verlängern kann.

Fig. 37.



149. Eine abwickelbare Fläche, von der Wendungscurve ausgehend, praktisch zu construiren. — Wir stellen uns die Aufgabe, eine vollständige abwickelbare Oberfläche, von ihrer Wendungscurve ausgehend, zu construiren.

Fig. 38.

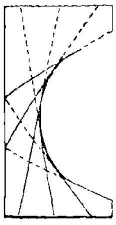


Man lege ein ganz ebenes Stück Papier, das ohne Falten und von glatt geschnittenen Rändern ist, auf die Fläche eines anderen und ziehe auf dem oberen irgend eine Curve, die keinen Inflexionspunkt, sondern überall eine endliche Krümmung hat. Darauf schneide man auf der concaven Seite das Papier ganz hinweg. Wenn die Curve geschlossen ist, so muss man sie zu diesem Zwecke aufschneiden (siehe die zweite Fig. 38).

Die Grenzen, bis zu denen man das Papier wegzuschneiden hat, sind die von den beiden Endpunkten auswärts gezogenen Tangenten; kurz, es ist kein Theil des Papiers da zu lassen, durch welchen nicht eine reelle Tangente hindurchgeht.

Die beiden Blätter werden nun mittels einiger Streifchen sehr feinen Papiers oder Musselins, die man längs ihres gemeinschaftlichen krummen Randes an sie klebt, an einander befestigt. Diese Streifen müssen so fein sein, dass sie auf die Biegung der beiden Blätter keinen merklichen Einfluss ausüben. Hält man jetzt eine Ecke des einen Blattes fest und hebt das Ganze auf, so werden die beiden Blätter sich aufthun und die Theile einer abwickelbaren Oberfläche bilden, für welche die erwähnte Curve, die sich in eine gewundene Curve verwandelt, die Wendungscurve ist. Die Tangente an diese Curve liegt, wenn sie vom Berührungspunkte aus nach einer Richtung hin gezogen ist, stets im einen Theil der Fläche, ihre Fortsetzung nach der anderen Seite zu im anderen Theil. Durch dies Verfahren kann man natürlich ein doppelflächiges abwickelbares Polyeder construiren, wenn man statt von einer Curve von einem Polygon ausgeht.

Fig. 39.



150. Allgemeine Eigenschaft einer unausdehnbaren Oberfläche. — Wenn die Form einer biegsamen aber völlig unausdehnbaren Oberfläche auf irgend eine für sie mögliche Weise geändert wird, so muss jede auf ihr gezogene Linie ihre Länge unverändert beibehalten. Es muss also auch die gegenseitige Neigung zweier beliebigen einander schneidenden Linien dieselbe bleiben. Weiter folgt auch, dass geodätische Linien geodätische Linien bleiben. Folglich ist die „Richtungsänderung“, welche ein Punkt in der Oberfläche erfährt, wenn er irgend einen Theil derselben umschreibt, von der Biegung dieses Theils gänzlich unabhängig, und daher (§ 136) kann die Biegung der Oberfläche auch für die Gesammtkrümmung in jedem beliebigen Theil von keinem Einfluss sein. Daraus geht hervor (§ 138, Satz von Gauss), dass das Product der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte unverändert bleibt.

151. Der allgemeine Ausspruch eines umgekehrten Satzes, der die Bedingung auszudrücken hätte, unter welcher zwei gegebene Theile krummer Flächen so gebogen werden können, dass sie auf einander passen, müsste wesentlich auf irgend einer Methode beruhen, die auf beiden Flächen einander entsprechenden Punkte anzugeben. Ein näheres Eingehen auf diese Frage würde hier nicht am Platze sein.

152. Oberfläche von constanter specifischer Krümmung. — In einem Falle ist jedoch ein Ausspruch in den einfachsten möglichen Ausdrücken anwendbar. Zwei beliebige Oberflächen, in deren jeder die specifische Krümmung in allen Punkten dieselbe und derjenigen der anderen gleich ist, können so gebogen werden, dass sie ganz auf einander passen. So kann jede Oberfläche von gleichmässiger positiver specifischer Krümmung (d. h. jede Fläche, deren eine Seite ganz convex, deren andere Seite ganz concav ist) durch Biegung mit einer Kugeloberfläche zur Deckung gebracht werden, deren Radius eine mittlere Proportionale zwischen den Hauptkrümmungsradien jener Fläche in irgend einem Punkte ist. Eine Oberfläche von gleichförmiger negativer oder anticlastischer Krümmung würde auf eine imaginäre Kugel passen. Bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft lässt sich dies Resultat aber nicht interpretiren. Doch erhalten wir auch für diese letztere Art der Flächen ein praktisches Resultat, nämlich dass jede von zwei Flächen gleichförmiger anticlastischer Krümmung so gebogen werden kann, dass sie die andere deckt.

153. Geodätische Dreiecke auf einer Oberfläche von constanter specifischer Krümmung. — Es ist zu bemerken, dass die geodätische Trigonometrie für jede Oberfläche von gleichförmiger positiver oder synclastischer Krümmung mit der sphärischen Trigonometrie identisch ist.

Wenn $a = \frac{s}{\sqrt{\varrho\varrho'}}$, $b = \frac{t}{\sqrt{\varrho\varrho'}}$, $c = \frac{u}{\sqrt{\varrho\varrho'}}$ ist, wo s, t, u die Längen von drei geodätischen Linien sind, welche drei Punkte auf der Oberfläche verbinden, und wenn A, B, C die Winkel zwischen den Tangenten bezeichnen, welche in diesen Punkten an die geodätischen Linien gelegt sind, so haben wir sechs Grössen, welche vollständig mit den drei Seiten und den drei Winkeln eines gewissen sphärischen Dreiecks übereinstimmen. Es giebt auch eine unseres Wissens freilich nicht ausgearbeitete entsprechende anticlastische Trigonometrie für jede Fläche von gleichförmiger anticlastischer Krümmung *). Auf einer anticlastischen Oberfläche ist die Summe der drei Winkel eines geodätischen Dreiecks natürlich kleiner als zwei rechte Winkel, und die Differenz, der „anticlastische Defect" (wie der „sphärische Excess") gleich der Dreiecksfläche, dividirt durch $\varrho \times -\varrho'$, wenn ϱ und $-\varrho'$ positiv sind.

154. Deformation. — Wir haben jetzt die äusserst wichtigen kinematischen Bedingungen zu betrachten, welche die Volumen- oder Formänderungen einer festen oder flüssigen Masse oder einer Gruppe von Punkten darbieten, deren gegenseitige Lagen bekannten Bedingungen unterworfen sind. Jede solche Aenderung der Form oder der Dimensionen nennen wir eine Deformation.

Eine Deformation erfährt z. B. ein Stab, wenn er länger oder kürzer wird, Wasser, wenn man es comprimirt, ein Stein, ein Balken, eine Metallmasse in einem Gebäude oder einem Rahmenwerk, wenn sie in irgend einer Richtung verdichtet oder ausgedehnt, auf irgend eine Weise gebogen oder gedreht werden. Dasselbe sagt man von einem Schiffe, wenn bei seinem Ablauf vom Stapel oder

---

*) Dieselbe ist neuerdings von Herrn Beltrami entwickelt worden; die Flächen von constanter negativer Krümmung nennt er pseudosphärische. Ihre Geometrie fällt zusammen mit der imaginären Geometrie Lobatschewsky's, welcher das Axiom über die Parallellinien wegliess. Annali di Matematica pura ed appl. Ser. I, T. VII; Ser. II a, T. II. — Beltrami Saggio di interpretazione della Geometria Nove-Euclidea. Napoli 1868.
Anmerk. d. Herausgeber.

beim Arbeiten auf stürmischer See seine verschiedenen Theile relative Bewegungen ausführen.

155. **Definition der homogenen Deformation.** — Wenn die einen beliebigen Raum erfüllende Materie in irgend einer Weise deformirt wird, und alle Punktepaare, welche sich anfänglich in gleichen Abständen von einander in parallelen Linien befinden, gleichweit von einander entfernt (der Abstand kann ein anderer geworden sein) und in parallelen Linien (deren Richtung von ihrer früheren Richtung abweichen kann) bleiben, so wird die Deformation eine homogene genannt.

156. **Eigenschaften der homogenen Deformation.** — Wenn man durch einen Körper eine beliebige Gerade zieht und den Körper sodann homogen deformirt, so werden die Theile, in denen jene Gerade ihn schnitt, auch nach der Deformation noch eine gerade Linie bilden. Denn wenn ABC irgend eine solche Linie ist, so bleiben AB und BC, weil sie im anfänglichen Zustande einer Geraden parallel sind, auch nach der Deformation einer Geraden parallel, d. h. sie hören nicht auf, eine einzige Gerade zu bilden. Auf diese Weise ergiebt sich auch, dass eine Ebene eine Ebene, ein Parallelogramm ein Parallelogramm und ein Parallelepiped ein Parallelepiped bleibt.

157. Daraus geht weiter hervor, dass ähnliche und ähnlich gelegene Figuren, mögen sie nun durch wirkliche Theile der Substanz gebildet werden oder bloss geometrische Gebilde sein (Flächen, gerade oder krumme Linien, die durch gewisse Theile der Substanz hindurchgehen oder dieselben verbinden), auch noch nach der Aenderung, welche die Aenderung des Körpers für sie zur Folge hat, ähnlich und in Beziehung auf einander ähnlich gelegen sein werden.

158. Das Verhältniss, in welchem die Längen paralleler Linien des Körpers zu einander stehen, bleibt unverändert; alle diese Längen ändern sich also in demselben Verhältniss. Hieraus und aus § 156 schliessen wir, dass sich jede ebene Figur in eine andere ebene Figur verwandelt, welche eine verkleinerte oder vergrösserte orthographische Projection der ersteren auf irgend eine Ebene ist. Z. B. wenn aus einer Ellipse ein Kreis wird, so werden ihre Hauptaxen auf einander senkrechte Radien.

Unter der Elongation des Körpers längs irgend einer Linie versteht man das Verhältniss, in welchem die Zunahme der Entfernung irgend zweier Punkte in dieser Linie zu ihrer ursprünglichen Entfernung steht.

159. Jede orthogonale Projection einer Ellipse ist eine Ellipse (dieser Ausspruch schliesst den Fall in sich, in welchem die Projection ein Kreis ist). Hieraus und aus § 158 geht hervor, dass eine Ellipse eine Ellipse bleibt und ein Ellipsoid eine Oberfläche, bei welcher jeder ebene Schnitt eine Ellipse ist, d. h. ein Ellipsoid.

Eine ebene Curve bleibt (§ 156) eine ebene Curve. Ein Coordinatensystem von zwei oder drei Geraden bleibt geradlinig, wird aber im Allgemeinen schiefwinklig, wenn es ursprünglich rechtwinklig war.

Denken wir uns in der Substanz des Körpers, der noch in seinem anfänglichen Zustande sein möge, eine Ellipse, welche, auf zwei beliebige conjugirte Axen bezogen, die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat, und nehmen an, α und β seien beziehungsweise die Verhältnisse, in denen die Längen der den Axen OX und OY parallelen Linien sich ändern, so haben wir, wenn die geänderten Werthe von x und y mit ξ und η bezeichnet werden,

$$\xi = \alpha x, \; \eta = \beta y,$$

folglich

$$\frac{\xi^2}{(\alpha a)^2} + \frac{\eta^2}{(\beta b)^2} = 1.$$

Dies ist auch die Gleichung einer auf conjugirte Axen bezogenen Ellipse. Der Winkel zwischen diesen neuen Axen kann von demjenigen verschieden sein, den die gegebenen Axen im anfänglichen Zustande des Körpers bildeten.

Oder wenn wir uns in dem Körper, ehe derselbe eine Deformation erleidet, ein auf drei rechtwinklige oder schiefwinklige conjugirte Diametralebenen als Coordinatenebenen bezogenes Ellipsoid denken, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, und annehmen, α, β, γ seien beziehungsweise die Verhältnisse, in denen sich die Längen der den Axen OX, OY, OZ parallelen Linien in Folge der Deformation ändern, so haben wir, wenn die geänderten Werthe von x, y, z mit ξ, η, ζ bezeichnet werden,

$$\xi = \alpha x, \; \eta = \beta y, \; \zeta = \gamma z,$$

folglich

$$\frac{\xi^2}{(\alpha a)^2} + \frac{\eta^2}{(\beta b)^2} + \frac{\zeta^2}{(\gamma c)^2} = 1.$$

Dies ist auch die Gleichung eines auf conjugirte Diametralebenen bezogenen Ellipsoides. Die Winkel zwischen den neuen Ebenen können von denjenigen verschieden sein, welche die gegebenen Ebenen im anfänglichen Zustande des Körpers bildeten.

160. Deformationsellipsoid. — Das Ellipsoid, in welches sich irgend eine anfänglich sphärische Fläche des Körpers in Folge einer Deformation verwandelt, wollen wir der Kürze wegen das Deformationsellipsoid nennen.

161. In jeder durchaus unbeschränkten homogenen Def mation giebt es drei auf einander senkrechte Richtungen (die drei Hauptaxen des Deformationsellipsoides), welche auch, wenn der Zustand des Körpers geändert ist, senkrecht auf einander stehen (§ 158). Längs einer dieser Richtungen ist die Elongation grösser, längs einer zweiten derselben kleiner, als längs jeder anderen Richtung im Körper. Längs der noch übrigen dritten Axe ist die Elongation kleiner, als in jeder anderen Linie der durch sie selbst und die ersterwähnte Axe gelegten Ebene und grösser, als in jeder Linie der Ebene, welche durch sie (die dritte Axe) und die zweite Axe hindurchgeht.

Anmerkung. — Eine Zusammenziehung oder Contraction ist als eine negative Elongation zu rechnen. Im vorstehenden Satze kann man das Maximum der Elongation auch als Minimum der Contraction und das Minimum der Elongation als Maximum der Contraction bezeichnen.

162. Das Ellipsoid, in welches sich eine Kugel verwandelt, kann auch ein Rotationsellipsoid oder, wie man sagt, ein gestrecktes oder ein abgeplattetes Sphäroid sein. Dann wird längs der Axe ein Maximum oder ein Minimum und längs aller zur Axe senkrechten Geraden ein überall gleiches Minimum oder Maximum der Elongation vorhanden sein.

Ist endlich das Deformationsellipsoid eine Kugel, so sind die Elongationen in allen Richtungen einander gleich. In diesem Falle hat die Deformation auf die Gestalt jedes Körpertheils keinen Einfluss, sondern bewirkt nur eine Aenderung der Dimensionen.

Das anfängliche Volumen (Kugel) verhält sich offenbar zu dem neuen (Ellipsoid) wie $1 : \alpha\beta\gamma$.

163. **Axen einer Deformation.** — Unter den Hauptaxen einer Deformation verstehen wir die Hauptaxen des Ellipsoides, in welches dieselbe eine Kugel verwandelt. Die Hauptelongationen einer Deformation sind die Elongationen in der Richtung ihrer Hauptaxen.

164. **Elongation und Richtungsänderung einer Linie des Körpers.** — Wenn die Lagen der Hauptaxen und die Grössen der Hauptelongationen einer Deformation gegeben sind, so lässt sich die Elongation einer jeden Linie des Körpers und die Aenderung des Winkels zwischen zwei beliebigen Linien augenscheinlich durch eine einfache geometrische Construction bestimmen.

Analytisch würde man folgendermaassen verfahren: — Es bezeichnen $\alpha - 1$, $\beta - 1$, $\gamma - 1$ die Hauptelongationen, so dass also α, β, γ nicht mehr wie oben die Aenderungsverhältnisse längs dreier beliebigen zu einander rechtwinkligen oder schiefwinkligen Geraden, sondern diese Verhältnisse für die Hauptaxen sind. Irgend eine Gerade habe, auf die drei Hauptaxen bezogen, die Richtungscosinus l, m, n. Dann sind

$$l r, \; m r, \; n r$$

die drei anfänglichen Coordinaten eines Punktes P, welcher in der Richtung l, m, n in der Entfernung $OP = r$ vom Anfangspunkte liegt. Derselbe Punkt des Körpers hat in Beziehung auf dieselben rechtwinkligen Axen im geänderten Zustande die Coordinaten

$$\alpha l r, \; \beta m r, \; \gamma n r;$$

folglich ist die jetzige Länge von OP

$$(\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2)^{1/2} r,$$

und die „Elongation" des Körpers in jener Richtung

$$(\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2)^{1/2} - 1.$$

Der Kürze wegen wollen wir dies mit $\zeta - 1$ bezeichnen, d. h.

$$\zeta = (\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2)^{1/2}$$

setzen. Die Richtungscosinus der neuen Lage von OP sind

$$\frac{\alpha l}{\zeta}, \; \frac{\beta m}{\zeta}, \; \frac{\gamma n}{\zeta};$$

dies sind also beziehungsweise die neuen Werthe der Cosinus der Winkel XOP, YOP, ZOP, welche vorher l, m, n waren.

Hatte irgend eine zweite Gerade OP' anfänglich die Richtungscosinus l', m', n', so war der Cosinus des zwischen ihr und OP liegenden Winkels im ursprünglichen Zustande des Körpers gleich

$$l l' + m m' + n n';$$

derselbe nimmt in Folge der Deformation den Werth

$$\frac{(\alpha^2 l l' + \beta^2 m m' + \gamma^2 n n')}{(\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2)^{1/2} (\alpha^2 l'^2 + \beta^2 m'^2 + \gamma^2 n'^2)^{1/2}}$$

an.

165. Aenderung einer Ebene im Körper. — Aus denselben Daten kann man auch leicht die Aenderung des Winkels zwischen zwei beliebigen Ebenen des Körpers sowohl geometrisch als analytisch bestimmen.

Es seien l, m, n die Cosinus der Winkel, welche eine Ebene beziehungsweise mit den Ebenen YOZ, ZOX, XOY im anfänglichen Zustande des Körpers bildet. Da die Wirkungen der Deformation auf alle parallelen Ebenen dieselben sind, so dürfen wir voraussetzen, dass die in Rede stehende Ebene durch den Coordinatenanfangspunkt O geht; ihre Gleichung ist daher

$$l x + m y + n z = 0.$$

Nach der im Körper eingetretenen Aenderung werden die Coordinaten x, y, z eines jeden Punktes sich wie früher in

$$\xi = \alpha x, \; \eta = \beta y, \; \zeta = \gamma z$$

verwandelt haben; die Gleichung unserer Ebene ist daher nach dieser Aenderung

$$\frac{l\xi}{\alpha} + \frac{m\eta}{\beta} + \frac{n\zeta}{\gamma} = 0.$$

Nach unserer jetzigen Voraussetzung sind aber die Coordinatenebenen noch rechtwinklig zu einander. Die Cosinus der Neigungswinkel der in Rede stehenden Ebene gegen die Ebenen YOZ, ZOX, XOY sind daher aus l, m, n beziehungsweise in

$$\frac{l}{\alpha\vartheta}, \quad \frac{m}{\beta\vartheta}, \quad \frac{n}{\gamma\vartheta}$$

übergegangen, wo der Kürze wegen

$$\vartheta = \left(\frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt ist. Haben wir eine zweite Ebene, welche im anfänglichen Zustande des Körpers durch ihre Richtungscosinus l', m', n' bestimmt ist, so hat der Cosinus des Winkels zwischen ihr und der ersteren Ebene anfänglich den Werth

$$l\,l' + m\,m' + n\,n',$$

und dieser Werth verwandelt sich in

$$\frac{\dfrac{l\,l'}{\alpha^2} + \dfrac{m\,m'}{\beta^2} + \dfrac{n\,n'}{\gamma^2}}{\left(\dfrac{l^2}{\alpha^2} + \dfrac{m^2}{\beta^2} + \dfrac{n^2}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{l'^2}{\alpha^2} + \dfrac{m'^2}{\beta^2} + \dfrac{n'^2}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

166. **Kegelfläche gleicher Elongation.** — Um wieder auf die Elongationen zu kommen, die im Allgemeinen in verschiedenen Richtungen verschieden sein werden, so leuchtet ein, dass alle durch irgend einen Punkt gehenden Geraden, in welchen die Elongationen von der nämlichen zwischen dem grössten und dem kleinsten Elongationswerth enthaltenen Grösse sind, auf einer bestimmten Kegelfläche liegen müssen. Es ist dies, wie sich leicht darthun lässt, im Allgemeinen ein Kegel zweiten Grades.

Denn in einer durch die Richtungscosinus l, m, n bezeichneten Richtung haben wir

$$\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2 = \zeta^2,$$

wo ζ das entsprechende Elongationsverhältniss bezeichnet, das zwischen dem grössten (α) und dem kleinsten (γ) Werthe der Elongation enthalten ist. Diese Gleichung stellt aber einen Kegel zweiten Grades dar, wenn l, m, n die Richtungscosinus einer erzeugenden Linie sind.

167. **Ebenen, in denen keine Verzerrung erfolgt.** — In einem besonderen Falle geht dieser Kegel in zwei Ebenen über, die Ebenen der Kreisschnitte des Deformationsellipsoids.

Es sei $\zeta = \beta$. Dann verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\alpha^2 l^2 + \gamma^2 n^2 - \beta^2 (1 - m^2) = 0,$$

oder, weil $1 - m^2 = l^2 + n^2$ ist, in

$$(\alpha^2 - \beta^2) l^2 - (\beta^2 - \gamma^2) n^2 = 0.$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist das Product zweier Factoren: dieselbe wird also befriedigt, wenn man jeden Factor gleich Null setzt, und stellt daher zwei Ebenen dar, welche beziehungsweise die Gleichungen

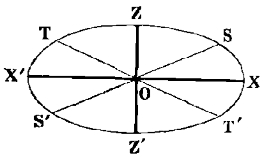
$$l(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} + n(\beta^2 - \gamma^2)^{1/2} = 0,$$
$$l(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} - n(\beta^2 - \gamma^2)^{1/2} = 0$$

haben.

Dies ist der Fall, in welchem die gegebene Elongation gleich derjenigen ist, welche längs der mittleren Hauptaxe des Deformationsellipsoides stattfindet. Die beiden Ebenen gehen durch die mittlere Hauptaxe des Ellipsoides und beide bilden mit jeder einzelnen der beiden anderen Hauptaxen gleiche Winkel. Die Linien, längs welcher die Elongation gleich der mittleren Hauptelongation ist, liegen sämmtlich in einer dieser beiden Ebenen oder parallel zu derselben. Dies lässt sich leicht, ohne jede analytische Untersuchung, in folgender Weise darthun: —

168. In Fig. 40 stelle die Ellipse den durch die grösste und die kleinste Hauptaxe gehenden Schnitt des Deformationsellipsoides dar.

Fig. 40.

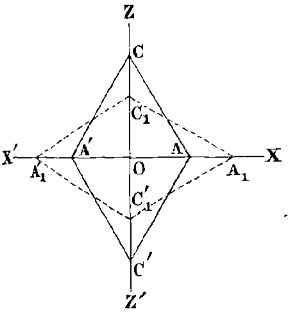


$S'OS$ und $T'OT$ seien die beiden Durchmesser dieser Ellipse, welche gleich der mittleren Hauptaxe des Ellipsoides sind. Jede durch O zur Ebene der Figur senkrecht gelegte Ebene schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, deren Hauptaxen sich leicht angeben lassen. Eine derselben ist nämlich der Durchmesser, in welchem die Ebene die Ellipse der Figur schneidet, die zweite ist der mittlere Hauptdurchmesser des Ellipsoides. Folglich wird eine entweder durch SS' oder durch TT' zur Ebene der Zeichnung senkrecht gelegte Ebene das Ellipsoid in einer Ellipse, deren Hauptaxen gleich sind, d. h. in einem Kreise schneiden, und die Elongationen längs aller Linien jeder dieser beiden Ebenen sind gleich der Elongation längs der mittleren Hauptaxe des Deformationsellipsoides.

169. Die Betrachtung der Kreisschnitte des Deformationsellipsoids ist äusserst lehrreich und für die Untersuchung des allgemeinen Charakters einer Deformation von bedeutendem Nutzen. Wir wollen zunächst voraussetzen, es finde im Ganzen keine Volumenänderung und längs der mittleren Hauptaxe weder Ausdehnung noch Zusammenziehung statt, d. h. es sei $\beta = 1$ und $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ (§ 162).

Es seien OX und OZ beziehungsweise die Richtungen der Elongation $\alpha - 1$ und der Contraction $1 - \frac{1}{\alpha}$. Ferner sei A irgend ein Punkt des Körpers in seinem anfänglichen Zustande und A_1 derselbe Punkt des geänderten Körpers, so dass $OA_1 = \alpha . OA$ ist.

Fig. 41.



Nehmen wir nun $OC = OA_1$ an, und ist C_1 die Lage desjenigen Körperpunktes, der sich anfänglich in C befand, so werden wir $OC_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot OC$, folglich $OC_1 = OA$ haben. Die beiden Dreiecke COA und C_1OA_1 sind somit congruent.

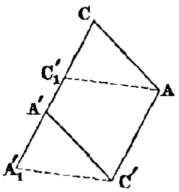
Daraus geht hervor, dass CA bei der hier besprochenen Aenderung des Körpers seine Länge unverändert beibehält und nur eine neue Lage C_1A_1 annimmt. Messen wir ebenso auf der Verlängerung von XO die Strecken OA' und OA_1' ab, die beziehungsweise gleich OA und OA_1 sind, so ergiebt sich, dass die Linie CA' keine Aenderung ihrer Länge erleidet, aber die neue Lage C_1A_1' annimmt.

Betrachten wir jetzt eine anfänglich durch CA gehende zur Ebene der Figur senkrechte Ebene. Dieselbe wird sich in eine Ebene verwandeln, die durch C_1A_1 geht und gleichfalls zur Ebene der Zeichnung senkrecht ist. Alle anfänglich zur Ebene der Zeichnung senkrechten Linien bleiben senkrecht zu dieser Ebene und ändern auch ihre Längen nicht. Von AC haben wir eben bewiesen, dass seine Länge unverändert bleibt. Folglich (§ 158) bleiben alle Linien der eben gezogenen Ebene sowohl hinsichtlich ihrer Länge, wie hinsichtlich ihrer gegenseitigen Neigung unverändert. Auf dieselbe Weise erkennen wir, dass keine Aenderung der Länge und der gegenseitigen Neigung bei allen Linien in derjenigen Ebene erfolgt, welche anfänglich durch CA', später durch $C_1A'_1$ geht und zur Ebene der Figur in beiden Lagen senkrecht ist.

170. Das Wesen der Deformation, die wir jetzt untersuchen, wird durch die folgende Betrachtung bedeutend klarer werden: — Man verlängere CO, mache OC' und OC_1' beziehungsweise gleich OC und OC_1 und verbinde C' mit A, A' durch einfache, C_1' mit A_1, A_1' durch punktirte Linien (Fig. 41). Dann sehen wir, dass der Rhombus $CAC'A'$ (einfache Linien) des Körpers in seinem anfänglichen Zustande sich in den Rhombus $C_1A_1C_1'A_1'$ (punktirte Linien)

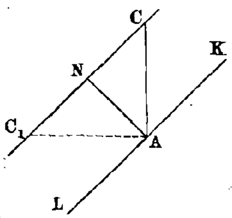
verwandelt. Stellen wir uns jetzt vor, der so deformirte Körpe werde als starrer Körper (d. h. so, dass seine Deformation un verändert bleibt) fortbewegt, bis A_1 mit A und C_1' mit C' zu sammenfällt, während alle Linien der Figur noch in derselbe Ebene bleiben. $A_1' C_1$ wird, wie es die Fig. 4 zeigt, in die Verlängerung von CA' zu liege kommen, und das anfängliche und das neu Parallelogramm werden auf derselben Basi AC' stehen und zwischen denselben Parallele AC' und CA_1' liegen; ihre anderen Seite sind gegen eine auf ihnen senkrechte Ge rade beiderseits gleich geneigt. Abgesehe von einer Rotation oder sonst einer absolute Bewegung des Körpers, die von keiner Form- oder Dimensionen änderung begleitet ist, kann die betrachtete Deformation folglic dadurch hervorgebracht werden, dass man die durch AC' gehend zur Ebene der Zeichnung senkrechte Ebene festhält und unveränder lässt und jede ihr parallele Ebene, ohne ihren Abstand von diese festen Ebene zu ändern, einen diesem Abstande proportionalen We hindurchgleiten lässt. (Verschiedene der festen Ebene parallel Ebenen gleiten verschieden weit; die Wege, durch die sie gleite sind ihren Abständen von der festen Ebene proportional.)

Fig. 42.



171. Einfache Schiebung. — Diese Art der Deformatio wird eine *einfache Schiebung* genannt. Unter der Ebene eine Schiebung versteht man eine Ebene, welche senkrecht auf den Ebe nen steht, die keine Verzerrung erleiden, und welche den Richtun gen, in denen letztere sich relativ zu einander bewegen, paralle ist. Eine einfache Schiebung hat die Eigenschaft, dass (1) vo einer Schaar paralleler Ebenen jede unverändert in ihren Dimensio nen bleibt, und dass es (2) noch ein zweite Schaar paralleler Ebenen giebt, v denen dasselbe gilt. Wenn die erster Schaar und die Grösse der Schiebun gegeben sind, so kann man die zweit Schaar auf folgende Weise ermitteln: Es sei CC_1 die Bewegung eines Punkt einer Ebene in Beziehung auf eine fe gehaltene Ebene KL, wobei die Ebene de Zeichnung eine Ebene der Schiebung is Wird nun CC_1 halbirt und in der Mitte

Fig. 43.



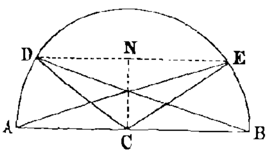
eine Senkrechte NA auf CC_1 errichtet, so behält eine anfänglich durch AC und zuletzt durch AC_1 gehende zur Ebene der Zeichnung senkrechte Ebene ihre Dimensionen unverändert bei.

172. Wir haben eben gesehen, wie man die zweite Schaar der parallelen Ebenen findet, die keine Verzerrung erleiden, wenn man die erstere Schaar kennt und ausserdem weiss, wie weit jede Ebene dieser Schaar sich fortbewegt. Man kann nun die Verziehung auch als ein Gleiten dieser zweiten Schaar paralleler Ebenen in Beziehung auf eine derselben ansehen. Die Grösse dieses relativen Gleitens ist natürlich gleich demjenigen der ersteren Schaar in Beziehung auf eine ihrer Ebenen.

173. **Axen einer Schiebung.** — Die Hauptaxen einer Schiebung sind beziehungsweise die Linien der grössten Elongation und der grössten Contraction. Sie können mittels der vorhergehenden Construction (§ 171) auf folgende Weise bestimmt werden: — Man halbire in der Ebene der Schiebung den stumpfen und den spitzen Winkel zwischen den Ebenen, welche keine Formänderung erleiden sollen. Die Halbirungslinien sind die gesuchten Hauptaxen in ihren anfänglichen Lagen, und zwar ist die erstere Halbirungslinie die Hauptaxe der Elongation, die letztere die Hauptaxe der Contraction. In Folge der Aenderung des Körpers wird der erstere (stumpfe) Winkel gleich dem letzteren, seinem Supplement (spitz), und die Linien, welche die geänderten Winkel halbiren, sind die Hauptaxen der Deformation in dem geänderten Körper.

Man kann auch auf eine andere Weise verfahren: — Wir nehmen eine Ebene der Schiebung zur Ebene der Zeichnung. Dieselbe werde von einer Ebene einer der beiden Schaaren paralleler Ebenen, die keine Verzerrung erleiden, in der Geraden AB geschnitten. Ueber irgend einem Theil AB dieser Geraden als Durchmesser beschreiben wir einen Halbkreis. Durch den Mittelpunkt C dieses Halbkreises ziehen wir nach der vorhergehenden Construction die Linien CD und CE, welche beziehungsweise die anfängliche und die letzte Lage einer Geraden sind, die ihre Länge unverändert beibehält. Werden dann D und E mit A und B verbunden, so sind DA und DB die anfänglichen, EA und EB die letzten Lagen der Hauptaxen.

Fig. 44.



174. Maass einer Schiebung. — Das Verhältniss einer Schiebung ist das Verhältniss der Elongation und Contraction ihrer Hauptaxen. Wenn also eine Hauptaxe in dem Verhältniss $1 : \alpha$ ausgedehnt, die andere folglich (§ 169) in dem Verhältniss $\alpha : 1$ zusammengezogen wird, so wird α das Verhältniss der Schiebung genannt. Es ist zweckmässig, dasselbe allgemein als das Elongationsverhältniss anzusehen, d. h. sein numerisches Maass grösser als Eins zu machen.

In der Fig. 44 ist das Verhältniss von DB zu EB oder von EA zu DA das Verhältniss der Schiebung.

175. Die Grösse einer Schiebung ist die Grösse der relativen Bewegung, genommen für die Einheit des Abstandes zwischen zwei Ebenen, die nicht verzerrt werden.

Man kann leicht darthun, dass diese Grösse gleich dem Ueberschuss des Verhältnisses der Schiebung über seinen reciproken Werth ist.

Da $DCA = 2\, DBA$ und $\tan DBA = \frac{1}{\alpha}$ ist, so haben wir $\tan DCA = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}$. Es ist aber

$$DE = 2\, CN \tan DCN = 2\, CN \operatorname{cotan} DCA,$$

folglich

$$\frac{DE}{CN} = 2\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} = \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

176. Die Ebenen des Körpers, welche bei einer einfachen Schiebung keine Verzerrung erleiden, sind offenbar die Kreisschnitte des Deformationsellipsoides. Wir wiederholen, dass die mittlere Axe im Ellipsoid dieses Falles ungeändert bleibt und eine mittlere Proportionale zwischen der grössten und der kleinsten Axe ist.

177. Verbindung einer Schiebung, einer einfachen Elongation und einer Expansion. — Wenn wir jetzt voraussetzen, dass alle zur Ebene der Schiebung senkrechten Linien in irgend einem Verhältniss ausgedehnt oder zusammengezogen werden, ohne dass dabei in der Ebene der Schiebung selbst eine Aenderung der Längen und der Winkel erfolgte, und wenn wir schliesslich noch annehmen, alle Linien im Körper würden in irgend einem andern festgesetzten Verhältnisse ausgedehnt oder zusammengezogen, so haben wir offenbar (§ 161) die allgemeinste mögliche Art einer Deformation. Ist s das Verhältniss der einfachen Schiebung, in welchem Falle s, 1, $\frac{1}{s}$ die drei Hauptverhältnisse sind, und werden die zur

Ebene der Schiebung senkrechten Linien in dem Verhältniss $1 : m$ ausgedehnt, ohne dass vorläufig eine weitere Aenderung vorgenommen wird, so erhalten wir eine Deformation, deren Hauptverhältnisse

$$s,\ m,\ \frac{1}{s}$$

sind. Werden schliesslich alle Linien in dem Verhältniss $1 : n$ ausgedehnt, so haben wir eine Deformation mit den Hauptverhältnissen

$$n\,s,\ n\,m,\ \frac{n}{s},$$

und es liegt auf der Hand, dass $n s$, $n m$, $\frac{n}{s}$ alle möglichen Werthe haben können. Natürlich braucht $n m$ nicht das mittlere Hauptverhältniss zu sein. Werden die Werthe dieser Verhältnisse mit α, β, γ bezeichnet, so haben wir

$$s = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}},\quad n = \sqrt{\alpha\gamma},\quad m = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}.$$

178. **Zerlegung einer Deformation.** — Wir sehen daraus, dass man jede Deformation (α, β, γ) als das Resultat betrachten kann, das man erhält, wenn man auf eine einfache Schiebung vom Verhältniss $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ $\left(\text{oder von der Grösse } \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)$ in der Ebene der beiden Hauptaxen, die sich auf α und γ beziehen, eine einfache Elongation $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}$ in der Richtung der dritten Hauptaxe folgen lässt und zuletzt noch alle Richtungen im Verhältniss $\sqrt{\alpha\gamma}$ gleichförmig ausdehnt.

179. Es leuchtet ein, dass diese drei Componenten der Deformation nicht gerade in der angegebenen Reihenfolge vorgenommen zu werden brauchen. Ihre Reihenfolge ist für das Endresultat ohne Einfluss. So muss, wenn die einfache Elongation zuerst ausgeführt wird, der bereits geänderte Körper dieselbe Schiebung in den Ebenen erhalten, die zur Elongationsrichtung senkrecht stehen, wie ihn der ursprünglich ungeänderte Körper erfährt, wenn die oben festgesetzte Reihenfolge inne gehalten wird. Man kann auch zuerst die allseitige Ausdehnung, dann die Elongation (in einer Richtung) und zuletzt die Schiebung vornehmen, u. s. w.

180. **Verschiebung eines starren oder nicht starren Körpers, von dem ein Punkt fest ist.** — In den vorhergehenden der

Untersuchung der Deformation gewidmeten Paragraphen haben wi die Aenderungen betrachtet, welche die Längen von Linien des Körpers und die Winkel zwischen Linien und Ebenen desselben erleiden In besonderen Fällen, die auf besondere Voraussetzungen gegründe waren (dass die Hauptaxen der Deformation ihre Richtung unverändert beibehalten, § 169, oder dass eine Ebene einer der beide Schaaren von Ebenen, die bei einer einfachen Schiebung keine Verzerrung erleiden, fest bleibt, § 170) haben wir auch die wirkliche Verschiebungen von Körpertheilen aus ihren anfänglichen Lagen in Auge gefasst. Um aber die Kinematik eines nicht starren feste Körpers zu vervollständigen, haben wir eine allgemeinere Betrachtung über den Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Deformationen anzustellen. Wir können dabei unbeschadet der Allgemeinhei einen Punkt des Körpers als fest voraussetzen, da sich leicht ersehe lässt, welche Wirkung eintreten wird, wenn zu einer Bewegung, be der ein Punkt fest bleibt, eine von keiner Deformation oder Rotation begleitete blosse Verschiebung hinzutritt.

181. Wir nehmen daher an, ein Punkt des Körpers ändert seine Lage nicht, und irgend einem anderen Punkte (oder auch mehreren Punkten) sei eine Verschiebung mitgetheilt, die nur der Bedingung unterworfen sein soll, dass die ganze Substanz entwede überhaupt keine Deformation, oder eine homogene Deformation erleide.

Es seien in Beziehung auf die anfängliche Lage und den anfängliche Zustand des Körpers drei beliebige zu einander senkrechte Axen OX OY, OZ festgelegt. Irgend ein Punkt des Körpers habe anfänglich di Coordinaten x, y, z und nach der mit dem Körper vorgenommenen Aenderung die Coordinaten x_1, y_1, z_1. Beide Male ist dieser Punkt auf die obe angegebenen Axen bezogen, die als ein festes System angesehen werden Die Bedingung, dass die Deformation überall homogen sei, wird durc die folgenden Gleichungen ausgedrückt: —

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = [Xx]\,x + [Xy]\,y + [Xz]\,z \\ y_1 = [Yx]\,x + [Yy]\,y + [Yz]\,z \\ z_1 = [Zx]\,x + [Zy]\,y + [Zz]\,z; \end{cases}$$

darin sind $[Xx]$, $[Xy]$, u. s. w. neun Grössen von völlig willkürliche Werthen, die für alle Werthe von x, y, z dieselben sind.

$[Xx]$, $[Yx]$, $[Zx]$ bezeichnen die drei neuen Coordinaten eines Punktes, der sich anfänglich auf der Axe OX in der Einheit der Entfernun von O befand. Sie sind natürlich den Richtungscosinus der neuen Lag der anfangs mit OX zusammenfallenden Geraden proportional. Aehnliche gilt von $[Xy]$, $[Yy]$, $[Zy]$, u. s. w.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, wo möglich eine Linie des Körper zu finden, deren Richtung unverändert bleibt, während die dur-

$[Xx]$, u. s. w. bestimmte Aenderung erfolgt. Es seien x, y, z und x_1, y_1, z_1 die anfänglichen und die geänderten Coordinaten eines Punktes einer solchen Linie. Dann muss, wenn ε die Elongation der Linie ist,

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \varepsilon$$

sein. Wir haben also $x_1 = \varepsilon x$, u. s. w., und daher

$$(2) \qquad \begin{cases} \{[Xx]-\varepsilon\}\, x + [Xy]\, y + [Xz]\, z = 0 \\ [Yx]\, x + \{[Yy]-\varepsilon\}\, y + [Yz]\, z = 0 \\ [Zx]\, x + [Zy]\, y + \{[Zz]-\varepsilon\}\, z = 0. \end{cases}$$

Werden aus diesen Gleichungen die Verhältnisse $x:y:z$ auf die bekannte Weise eliminirt, so ergiebt sich

$$\begin{gathered}([Xx]-\varepsilon)([Yy]-\varepsilon)([Zz]-\varepsilon) \\ -[Yz][Zy]([Xx]-\varepsilon)-[Zx][Xz]([Yy]-\varepsilon)-[Xy][Yx]([Zz]-\varepsilon) \\ +[Xz][Yx][Zy]+[Xy][Yz][Zx]=0.\end{gathered}$$

Diese kubische Gleichung wird jedenfalls durch wenigstens einen reellen Werth von ε befriedigt, und die beiden anderen Werthe sind entweder beide reell oder beide imaginär. Jeder reelle Werth von ε liefert eine reelle Lösung der Aufgabe, da irgend zwei der vorhergehenden Gleichungen, nachdem darin der für ε gefundene reelle Werth eingesetzt worden ist, reelle Werthe der Verhältnisse $x:y:z$ bestimmen. Wenn der Körper starr ist (d. h. wenn die Verschiebungen der Bedingung unterworfen sind, dass keine Deformation erzeugt werde), so wissen wir schon (§ 95), dass es gerade nur eine dem Körper in seinen beiden Lagen gemeinschaftliche Linie giebt, nämlich die Axe, um die er sich drehen muss, um aus der einen Lage in die andere überzugehen. Eine Ausnahme machen nur zwei besondere Fälle, die unten behandelt werden, nämlich der Fall, in welchem überhaupt keine Rotation erfolgt, sowie derjenige, in welchem der Körper durch zwei rechte Winkel rotirt. Wenn der Körper starr ist, so hat demnach die kubische Gleichung nur eine reelle Wurzel, folglich zwei imaginäre Wurzeln. Die eben gebildeten Gleichungen lösen die Aufgabe, die Rotationsaxe zu finden, wenn die wirklichen Verschiebungen der Punkte gegeben sind, die anfänglich in drei gegebenen festen Coordinatenaxen OX, OY, OZ lagen. Es verdient bemerkt zu werden, dass die praktische Lösung dieser Aufgabe sich auf die eine reelle Wurzel einer kubischen Gleichung gründet, die zwei imaginäre Wurzeln hat.

Andererseits mögen die gegebenen Verschiebungen so beschaffen sein, dass sie eine Deformation des Körpers erzeugen, die von keiner angularen Verschiebung der Hauptaxen der Deformation begleitet ist. Dann bleiben also drei Linien des Körpers ungeändert. Folglich muss die Gleichung in ε drei reelle Wurzeln haben, eine für jede solche Axe, und die drei durch diese Wurzeln bestimmten Linien stehen nothwendig senkrecht auf einander.

Wenn aber keine dieser beiden Bedingungen besteht, so können wir drei reelle Lösungen und drei zu einander schiefwinklige Linien haben, deren Richtungen unverändert bleiben; oder aber wir erhalten nur eine reelle Lösung und daher nur eine Linie, welche ihre Richtung nicht ändert.

Diese Schlüsse lassen sich leicht analytisch beweisen. Wir können nämlich die kubische Gleichung in folgender Form schreiben: —

$$
(3)\begin{cases}\begin{vmatrix}[Xx], [Xy], [Xz]\\ [Yx], [Yy], [Yz]\\ [Zx], [Zy], [Zz]\end{vmatrix} - \varepsilon\left\{\begin{vmatrix}[Yy], [Yz]\\ [Zy], [Zz]\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}[Zz], [Zx]\\ [Xz], [Xx]\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}[Xx], [Xy]\\ [Yx], [Yy]\end{vmatrix}\right\}\\ \qquad + \varepsilon^2\{[Xx] + [Yy] + [Zz]\} - \varepsilon^3 = 0.\end{cases}
$$

In dem besonderen Falle, in welchem keine Deformation erfolgt, sind $[Xx]$, u. s. w. den Richtungscosinus dreier auf einander senkrechten Geraden nicht bloss proportional, sondern gleich, und wir haben dann nach bekannten geometrischen Sätzen

$$
\begin{vmatrix}[Xx], [Xy], [Xz]\\ [Yx], [Yy], [Yz]\\ [Zx], [Zy], [Zz]\end{vmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix}[Yy], [Yz]\\ [Zy], [Zz]\end{vmatrix} = [Xx], \text{ u. s. w.}
$$

Die kubische Gleichung verwandelt sich daher in

$$
1 - (\varepsilon - \varepsilon^2)\{[Xx] + [Yy] + [Zz]\} - \varepsilon^3 = 0
$$

und hat augenscheinlich die Wurzel $\varepsilon = 1$. Diese führt zu der oben erläuterten Lösung; die durch den Werth 1 von ε bestimmte Linie ist eben die Rotationsaxe. Wird der Factor $1 - \varepsilon$ durch Division entfernt, so erhalten wir für die beiden übrigen Wurzeln die Gleichung

$$
1 - ([Xx] + [Yy] + [Zz] - 1)\,\varepsilon + \varepsilon^2 = 0,
$$

deren Wurzeln imaginär sind, wenn der Coefficient von ε zwischen $+2$ und -2 liegt. Nun ist $+2$ offenbar sein grösster Werth, und für diesen Fall ist jede Wurzel gleich Eins; es findet also keine Rotation statt. Weiter liefert -2, der kleinste Werth, den der Coefficient von ε haben kann, ein Paar von Wurzeln, deren jede -1 ist; dies bedeutet, dass eine Rotation durch zwei rechte Winkel hindurch erfolgt. In diesem Falle wird, wie im Allgemeinen, eine Linie (die Rotationsaxe) durch die Gleichungen (2) bestimmt, nachdem darin $+1$ für ε eingesetzt worden ist. Für $\varepsilon = -1$ dagegen werden diese Gleichungen durch jede zur eben genannten senkrechte Linie befriedigt.

Interessant ist der Fall, in welchem bei stattfindender Deformation zwei Wurzeln einander gleich sind. Wir überlassen es dem Leser, ihn weiter zu verfolgen. Er trennt die Fälle, in denen es nur eine Axe giebt, die ihre Richtung nicht ändert, von denjenigen, in welchen drei solche Axen vorhanden sind.

Es sei ferner die Aufgabe gestellt, diejenigen Linien des Körpers zu ermitteln, deren Elongationen am grössten oder kleinsten sind. Zu diesem Zwecke haben wir die Gleichungen zu bilden, welche ausdrücken, dass $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ ein Maximum ist, wenn $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ einen constanten Werth hat. Zunächst haben wir

$$
(4)\quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(ayz + bzx + cxy),
$$

wo

$$(5)\quad \begin{cases} A = [Xx]^2 + [Yx]^2 + [Zx]^2 \\ B = [Xy]^2 + [Yy]^2 + [Zy]^2 \\ C = [Xz]^2 + [Yz]^2 + [Zz]^2 \\ a = [Xy][Xz] + [Yy][Yz] + [Zy][Zz] \\ b = [Xz][Xx] + [Yz][Yx] + [Zz][Zx] \\ c = [Xx][Xy] + [Yx][Yy] + [Zx][Zy] \end{cases}$$

ist. Die Gleichung

$$(6)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(ayz + bzx + cxy) = r_1^2,$$

worin r_1 irgend eine Constante ist, stellt offenbar ein Ellipsoid dar, in das sich eine Kugelfläche des geänderten Körpers vom Radius r_1 verwandeln würde, wenn man den Körper in seinen anfänglichen Zustand zurückversetzte. Die Aufgabe, r_1 zu einem Maximum zu machen, wenn r eine gegebene Constante ist, führt zu den folgenden Gleichungen: —

$$(7)\quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$(8)\quad \begin{cases} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \\ (Ax + cy + bz)\,dx + (cx + By + az)\,dy + (bx + ay + Cz)\,dz = 0. \end{cases}$$

Andererseits führt die Aufgabe, r zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn r_1 gegeben ist, d. h. die Aufgabe, den grössten und den kleinsten Durchmesser oder die Hauptaxen des Ellipsoides (6) zu finden, zu genau denselben beiden Differentialgleichungen (8) und unterscheidet sich von der ersteren Aufgabe nur dadurch, dass bei ihr statt der Gleichung (7) die Gleichung (6) zur vollständigen Bestimmung der Werthe von x, y, z genommen werden muss. Es werden folglich die Verhältnisse $x : y : z$ in beiden Aufgaben die nämlichen sein, und daher sind die Richtungen, die sie bestimmen, diejenigen der Hauptaxen des Ellipsoides (6). Aus den Eigenschaften des Ellipsoides schliessen wir somit, dass es drei reelle Lösungen giebt, und dass die Richtungen der drei so bestimmten Radien auf einander senkrecht stehen. Die gewöhnliche (Lagrange's) Methode, jene Differentialgleichungen zu behandeln, besteht darin, dass man eine derselben mit einem willkürlichen Factor multiplicirt, sie darauf addirt und die Coefficienten der einzelnen Differentiale gleich Null setzt. Wenden wir diese Methode an, indem wir $-\varepsilon$ zum willkürlichen Factor nehmen und die erstere der beiden Gleichungen damit multipliciren, so folgt

$$(9)\quad \begin{cases} (A-\varepsilon)x + cy + bz = 0 \\ cx + (B-\varepsilon)y + az = 0 \\ bx + ay + (C-\varepsilon)z = 0. \end{cases}$$

Die Bedeutung von ε ergiebt sich, wenn wir die letzten Gleichungen addiren, nachdem dieselben beziehungsweise mit x, y, z multiplicirt worden sind. Wir erhalten auf diese Weise

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(ayz + bzx + cxy) - \varepsilon(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

oder

$$r_1^2 - \varepsilon r^2 = 0,$$

und dies liefert

$$\varepsilon = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2. \tag{10}$$

Werden aus (9) die Verhältnisse $x:y:z$ nach der gewöhnlichen Methode eliminirt, so ergiebt sich die bekannte kubische Gleichung

$$(A-\varepsilon)(B-\varepsilon)(C-\varepsilon)-a^2(A-\varepsilon)-b^2(B-\varepsilon)-c^2(C-\varepsilon)+2\,abc=0, \tag{11}$$

von der wir wissen, dass ihre Wurzeln sämmtlich reell sind. Wird irgend eine dieser drei reellen Wurzeln in (9) für ε gebraucht, so werden die Coefficienten von x, y, z in allen diesen Gleichungen bekannt und diese Gleichungen selbst für die wahren Werthe der Verhältnisse $x:y:z$ in Uebereinstimmung versetzt, so dass wir aus irgend zweien derselben oder auch symmetrisch aus allen dreien, mittels der geeigneten algebraischen Operationen, die gesuchten Verhältnisse bestimmen können. Es erübrigt dann nur noch, die absoluten Grössen von x, y, z zu ermitteln, und das kann, wenn ihre Verhältnisse einmal bekannt sind, mit Hülfe der Gleichung (7) geschehen.

Es ist zu beachten, dass, wenn $[Yz] = [Zy]$, $[Zx] = [Xz]$ und $[Xy] = [Yx]$ ist, die kubische Gleichung (3) die Eigenschaft annimmt, dass die Quadrate ihrer Wurzeln die Wurzeln von (11) sind, und dass die durch (2) bestimmten drei Linien in diesem Falle mit den durch (9) bestimmten identisch sind. Der Leser wird gut thun, dies direct aus den Gleichungen herzuleiten. Es ist eine nothwendige Folge des § 183 (s. unten

Genau dieselbe Aufgabe haben wir zu lösen, wenn es sich darum handelt, die Radien einer Kugel zu finden, welche auf der Oberfläche der geänderten Figur senkrecht bleiben. Geometrisch betrachtet, leuchtet dies sofort ein. Die Tangentialebene steht auf dem Radius senkrecht, wenn der Radius ein Maximum oder ein Minimum ist. Daher ist jede einer solchen Tangentialebene parallele Ebene des Körpers in dem geänderten wie im anfänglichen Zustande zum Radius senkrecht.

Analytisch würde die Aufgabe, in der letztgenannten Weise gestellt, folgendermassen behandelt werden: — Wir nehmen wieder die oben gebrauchten festen Axen OX, OY, OZ zu Coordinatenaxen. Eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Ebene der geänderten Substanz habe die Gleichung

$$l_1 x_1 + m_1 y_1 + n_1 z_1 = 0. \tag{12}$$

Die Richtungscosinus einer zu dieser Ebene senkrechten Geraden sind natürlich proportional l_1, m_1, n_1. Wenn wir nun, wie in (1), x_1, y_1, z_1 durch ihre Werthe ersetzen, die aus den Coordinaten gebildet sind, welche derselbe Punkt der Substanz anfänglich hatte, so erhalten wir die Gleichung derselben Ebene des Körpers in der anfänglichen Lage. Bei passender Anordnung der Glieder ergiebt sich als diese Gleichung:

$$\begin{aligned}\{l_1[Xx] + m_1[Yx] + n_1[Zx]\}x + \{l_1[Xy] + m_1[Yy] + n_1[Zy]\} \\ + \{l_1[Xz] + m_1[Yz] + n_1[Zz]\}z = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Die Richtungscosinus der zur Ebene senkrechten Geraden sind den Coefficienten von x, y, z proportional. Diese sollen nun die Richtungscosinus derselben Linie der Substanz sein, welche sich in die Linie $l_1 : m_1 : n_1$ verwandelte. Wenn also $l:m:n$ den Richtungscosinus dieser Linie in ihrer anfänglichen Lage proportionale Grössen sind, so müssen wir

$$(14)\qquad \begin{cases} l_1[Xx] + m_1[Yx] + n_1[Zx] = \varepsilon l \\ l_1[Xy] + m_1[Yy] + n_1[Zy] = \varepsilon m \\ l_1[Xz] + m_1[Yz] + n_1[Zz] = \varepsilon n \end{cases}$$

haben, wo ε willkürlich ist. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, l_1, m_1, n_1 seien die Coordinaten eines gewissen Punktes der Substanz in ihrem geänderten Zustande, und l, m, n seien den anfänglichen Coordinaten desselben Punktes der Substanz proportional. Dann werden unsere Fundamentalgleichungen l_1, m_1, n_1 durch l, m, n ausdrücken, und durch Einsetzung dieser Ausdrücke in die ersten Glieder von (14) erhalten wir bei Benutzung der Abkürzungen (5) genau dieselben Gleichungen für l, m, n, welche wir oben (Gleichungen 9) für x, y, z erhielten.

182. **Zerlegung einer Deformation in eine Verzerrung und eine Rotation.** — Die vorhergehende Betrachtung lehrt, dass jede homogene Deformation, der man einen Körper unterwirft, im Allgemeinen eine Kugel des Körpers in ein Ellipsoid verwandelt und letzteres um eine bestimmte Axe einen bestimmten Winkel hindurch rotiren lässt. In besonderen Fällen kann die Kugel eine Kugel bleiben. Auch kann es vorkommen, dass keine Rotation erfolgt. Wenn keine Rotation eintritt, so giebt es im allgemeinen Falle drei Richtungen des Körpers (die Axen des Ellipsoides), welche fest bleiben. Tritt Rotation ein, so giebt es zwar im Allgemeinen drei solche Richtungen; dieselben sind aber nicht senkrecht zu einander. Zuweilen behält nur eine Axe ihre Richtung bei.

183. **Reine Deformation** — Wenn die Axen des Ellipsoides Linien des Körpers sind, deren Richtung unverändert bleibt, so ist die Deformation rein oder von keiner Rotation begleitet. Die Deformationen, die wir bereits betrachtet haben, waren von allgemeinerer Beschaffenheit, nämlich reine Deformationen, verbunden mit Rotationen. Wir wollen jetzt die analytischen Bedingungen für das Vorhandensein einer reinen Deformation aufsuchen.

Es seien $O\Xi$, $O\Xi'$, $O\Xi''$ die drei Hauptaxen der Deformation und

$$l, m, n;\; l', m' n';\; l'', m'', n''$$

ihre Richtungscosinus. Ausserdem seien $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Hauptelongationen. Drücken dann ξ, ξ', ξ'' die Lage eines Punktes des ungeänderten Körpers in Beziehung auf $O\Xi$, $O\Xi'$, $O\Xi''$ aus, so ist seine Lage im Körper, nachdem die Aenderung stattgefunden hat, $\alpha\xi, \alpha'\xi', \alpha''\xi''$. Sind aber x, y, z seine anfänglichen, x_1, y_1, z_1 seine letzten Lagen in Beziehung auf OX, OY, OZ, so haben wir

$$(15)\qquad \xi = lx + my + nz,\; \xi' = \text{u. s. w.},\; \xi'' = \text{u. s. w.},$$

und

$$x_1 = l\alpha\xi + l'\alpha'\xi' + l''\alpha''\xi'',\ y_1 = \text{u. s. w.},\ z_1 = \text{u. s. w.}$$

Werden in die letzten Gleichungen die in (15) angegebenen Werthe von ξ, ξ', ξ'' eingesetzt, so erhalten wir die folgenden Gleichungen, welche x_1, y_1, z_1 durch x, y, z ausdrücken:

$$(16)\quad \begin{cases} x_1 = (\alpha l^2 + \alpha' l'^2 + \alpha'' l''^2)x + (\alpha l m + \alpha' l' m' + \alpha'' l'' m'')y \\ \qquad + (\alpha l n + \alpha' l' n' + \alpha'' l'' n'')z \\ y_1 = (\alpha m l + \alpha' m' l' + \alpha'' m'' l'')x + (\alpha m^2 + \alpha' m'^2 + \alpha'' m''^2)y \\ \qquad + (\alpha m n + \alpha' m' n' + \alpha'' m'' n'')z \\ z_1 = (\alpha n l + \alpha' n' l' + \alpha'' n'' l'')x + (\alpha n m + \alpha' n' m' + \alpha'' n'' m'')y \\ \qquad + (\alpha n^2 + \alpha' n'^2 + \alpha'' n''^2)z \end{cases}$$

Der Vergleich dieser Formeln mit den Gleichungen (1) des § 181 liefert

$$(17)\quad \begin{cases} [Xx] = \alpha l^2 + \alpha' l'^2 + \alpha'' l''^2, \text{ u. s. w.} \\ [Zy] = [Yz] = \alpha m n + \alpha' m' n' + \alpha'' m'' n'', \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

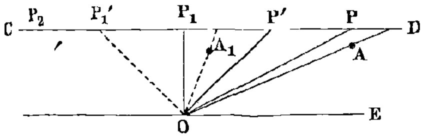
In diesen Gleichungen können l, l', l'', m, m', m'', n, n', n'' aus drei unabhängigen Elementen hergeleitet werden, nämlich aus den drei Winkelcoordinaten (§ 100) eines starren Körpers, von dem ein Punkt fest bleibt Da noch $\alpha, \alpha', \alpha''$ hinzukommen, so haben wir im Ganzen sechs unabhängige Elemente und können dieselben so bestimmen, dass die sechs Glieder dieser Gleichungen sechs beliebige vorgeschriebene Werthe haben. Die Bedingungen, die nothwendig und hinreichend sind, damit keine Rotation erfolge, sind daher

$$(18)\quad [Zy] = [Yz],\ [Xz] = [Zx],\ [Xy] = [Yx].$$

184. Zusammensetzung reiner Deformationen. — Wenn ein Körper eine Anzahl von Deformationen erleidet, deren jede von keiner Rotation begleitet ist, so wird er in einen Zustand gerathen in den er im Allgemeinen durch eine reine Deformation und eine Rotation hätte versetzt werden können. Daraus ergiebt sich der bemerkenswerthe Zusatz, dass drei reine Deformationen, die nach einander in irgend einem Stück Materie hervorgebracht werden, und deren jede rotationslos ist, so adjustirt werden können, dass der Körper schliesslich keine Deformation erlitten hat und nur um eine gewisse Axe durch einen gewissen Winkel hindurch gedreht ist Wir werden später hiervon äusserst wichtige und interessante Anwendungen auf die Bewegung von Flüssigkeiten machen, die, wie (Bd. II) gezeigt werden wird, in jedem Augenblick, d. h. in ihren Elementen ganz rotationslos ist, aber zur Folge haben kann, dass eine ganze flüssige Masse von ihrer anfänglichen Lage aus nur herumgedreht wird, wie wenn sie ein starrer Körper wäre. Die folgende elementare geometrische Untersuchung gewährt uns zwar keinen völlig umfassenden Blick auf den Gegenstand, liefert aber einen strengen Beweis des Satzes, indem sie ihn für einen besonderen Fall nachweist.

Wir wollen wieder, wie oben (§ 171), eine einfache Schiebung betrachten. Ein Punkt O werde festgehalten; die Materie des Körpers, welche in einer die Ebene der Zeichnung senkrecht in CD schneidenden Ebene enthalten ist, bewege sich in dieser Ebene parallel CD von der Rechten zur Linken; dasselbe finde in den Ebenen statt, welche dieser Ebene parallel sind, und zwar seien die Grössen dieser Bewegungen den Abständen ihrer Ebenen von O proportional. Wir betrachten zunächst eine Schiebung von P nach P_1, dann eine solche von P_1 bis zu P_2. O sei in einer durch P_1 gehenden zu CD senkrechten Geraden angenommen. Die Schiebung von P nach P_1 ist natürlich dieselbe, wie die von P' nach P_1', wenn $P'P_1' = PP_1$ ist. Nehmen wir z. B. an, es sei $P_1P' = P_1'P_1 = \frac{1}{2} P_1P$. Nun ist, wie wir oben (§ 173) gesehen haben, die Linie des Körpers, welche die Hauptaxe der Contraction in der Schiebung von P' bis P_1' ist, die Gerade OA, die beim Beginn der Bewegung den Winkel $P'OE$ halbirt, und die Gerade OA_1, die am Ende der Bewegung den Winkel $P_1'OE$ halbirt. Der zwischen diesen beiden Linien enthaltene Winkel ist die Hälfte des Winkels $P_1'OP'$, d. h. gleich P_1OP'. Wenn also, während die Schiebung von P' nach P_1' oder, was dasselbe ist, die Schiebung von P nach P_1 erfolgt, die Ebene CD in der Ebene der Zeichnung durch einen Winkel von der Grösse des Winkels P_1OP' in derselben Richtung wie der Zeiger einer Uhr rotirt, so wird die Schiebung schliesslich keine Rotation ihrer Hauptaxen herbeigeführt haben. (Denken wir uns die Figur gedreht, bis OA_1 längs OA liegt. Die wirkliche und die oben gedachte Lage von CD werden uns zeigen, wie diese Ebene des Körpers sich während einer solchen rotationslosen Schiebung bewegt hat.)

Fig. 45.



Es werde jetzt der zweite Schritt, von P_1 nach P_2, ausgeführt und dadurch die ganze Schiebung von P bis P_2, die wir betrachten wollten, vollendet. Eine solche zweite partielle Schiebung besteht in einer der neuen (in der letzten Parenthese vorgestellten) Lage von CD parallelen Bewegung, und um auch sie wie die vorhergehende rotationslos zu machen, müssen wir CD in derselben Weise wie früher durch einen $P_1'OP_1$ gleichen Winkel weiter herumdrehen. Um also beide Schritte rotationslos zu machen, haben wir die Ebene CD durch einen $P_1'OP'$ gleichen Winkel drehen müssen. Wenn wir aber gleich die ganze Schiebung PP_2 vornehmen, so ist, um die Rotation aufzuheben, eine Drehung von CD nur durch den Winkel P_1OP erforderlich, welcher um den Ueberschuss von P_1OP' über $P'OP$ kleiner als $P_1'OP'$ ist. Die Resultante der beiden Schiebungen PP_1, P_1P_2, deren jede einzeln der Rotation beraubt wird, ist danach eine einzige Schiebung PP_2 und eine Rotation ihrer Hauptaxen, die in der Richtung der Zeiger einer Uhr einen Winkel von der Grösse $P'OP_1 - POP'$ hindurch erfolgt.

185. Führt man die beiden partiellen Schiebungen jede ohne Rotation aus, und kehrt von ihrer Resultante in einer einzigen rotationslosen Schiebung zurück, so wird der Körper dem Vorhergehenden zufolge schliesslich nicht deformirt, aber in der Richtung der Zeiger einer Uhr durch einen Winkel von der Grösse $P'OP_1 - POP'$ hindurch gedreht sein.

Wenn ein Körper, von dem ein Punkt festgehalten wird, nach drei beliebigen zu einander senkrechten Linien als Hauptaxen deformirt wird und letztere in Beziehung auf die Coordinatenaxen OX, OY, OZ ihre Richtungen unverändert beibehalten, so ist (§ 183) der allgemeinste mögliche Ausdruck für die Verschiebung, welche irgend einer seiner Punkte erfährt: —

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax + cy + bz \\ y_1 &= cx + By + az \\ z_1 &= bx + ay + Cz. \end{aligned}$$

Wenn der so deformirte Körper aufs Neue eine Deformation erleidet, die von keiner Rotation begleitet ist, so werden die allgemeinsten möglichen Ausdrücke für die Coordinaten x_2, y_2, z_2 der Lage, in welche der Punkt x_1, y_1, z_1 gebracht wird, folgende sein: —

$$\begin{aligned} x_2 &= A_1x_1 + c_1y_1 + b_1z_1 \\ y_2 &= c_1x_1 + B_1y_1 + a_1z_1 \\ z_2 &= b_1x_1 + a_1y_1 + C_1z_1. \end{aligned}$$

Wenn man hierin für x_1, y_1, z_1 die vorhergehenden Ausdrücke einsetzt welche diese Coordinaten als Functionen der anfänglichen Coordinaten x, y, z des Punktes darstellen, so erhält man für die Coordinaten der Lage in welche der in Rede stehende Punkt durch die beiden Deformationen versetzt wird, die folgenden Formeln: —

$$\begin{aligned} x_2 &= (A_1A + c_1c + b_1b)x + (A_1c + c_1B + b_1a)y + (A_1b + c_1a + b_1C)z \\ y_2 &= (c_1A + B_1c + a_1b)x + (c_1c + B_1B + a_1a)y + (c_1b + B_1a + a_1C)z \\ z_2 &= (b_1A + a_1c + C_1b)x + (b_1c + a_1B + C_1a)y + (b_1b + a_1a + C_1C)z \end{aligned}$$

Die resultirende Verschiebung ist daher im Allgemeinen nicht rotationslos; denn, wie wir unmittelbar sehen, die Bedingungen (18) des § 183 sind im Allgemeinen nicht erfüllt. So sehen wir z. B., dass der Coefficient von y in dem Ausdruck von x_2 nicht nothwendig gleich dem Coefficienten von x in dem Ausdruck von y_2 ist.

Zusatz. — Wenn beide Deformationen unendlich klein sind, so ist die resultirende Verschiebung eine reine rotationslose Deformation. Es ist dann nämlich jede der Grössen A, B, C, A_1, B_1, C_1 unendlich wenig von der Einheit verschieden und jede der Grössen a, b, u. s. w. unendlich klein. Wir können also alle Producte je zweier der letzteren Grössen vernachlässigen und ebenso jedes Product, das durch Multiplication einer der letzteren Grössen mit der Differenz zwischen der Einheit und einer der sechs ersteren Grössen entsteht. Für die resultirende Verschiebung ergiebt sich also

$$\begin{aligned}
x_2 &= A_1 A x + (c + c_1) y + (b + b_1) z \\
y_2 &= (c_1 + c) x + B_1 B y + (a + a_1) z \\
z_2 &= (b_1 + b) x + (a_1 + a) y + C_1 C z,
\end{aligned}$$

und diese Ausdrücke stellen eine Deformation dar, die von keiner Rotation begleitet ist.

186. **Verschiebung einer Curve.** — Die Messung der Rotation in einem deformirten elastischen festen Körper oder in einer in Bewegung begriffenen Flüssigkeit wird bedeutend erleichtert, wenn man die Verschiebung irgend einer Linie der Substanz abgesondert betrachtet. Dieser Umstand veranlasst uns zu einer kurzen Abschweifung über die Verschiebung einer Curve, die entweder einer continuirlichen festen oder flüssigen Masse angehören oder eine in irgend einer Lage gegebene elastische Schnur sein kann. Die Sätze, zu denen wir gelangen werden, sind natürlich auf eine biegsame aber unausdehnbare Schnur (§ 14) als auf einen besonderen Fall anwendbar.

Wir machen darauf aufmerksam, dass die Verschiebungen, die wir zu betrachten haben, nicht bloss von den Curven, welche die gegebene Linie in ihren verschiedenen Lagen nach einander bildet, sondern auch davon abhängen, wie sich die Punkte dieser Curven einander entsprechen.

Tangentiale Verschiebung. — Wir haben zunächst zu erklären, was wir unter tangentialer Verschiebung verstehen werden: Wir denken uns die noch unverschobene Curve in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner gleicher Theile zerlegt. Darauf multipliciren wir die tangentiale Componente der Verschiebung jedes Theilpunktes mit der Länge eines der unendlich kleinen Curvenbogen. Die Summe aller dieser Producte ist die ganze tangentiale Verschiebung der Curve, längs der anfänglichen Lage gerechnet. Wird in derselben Weise mit der verschobenen Curve verfahren, so erhält man die ganze tangentiale Verschiebung längs der neuen Lage gerechnet.

187. Vergleich der auf beide Arten, die tangentiale Verschiebung zu rechnen, erhaltenen Resultate. — Hat man die ganze tangentiale Verschiebung einer Curve zuerst längs der späteren Lage, darauf längs der anfänglichen Lage gerechnet, so übertrifft das erstere Resultat das zweite um das halbe Rechteck aus der Summe und der Differenz der absoluten Verschiebungen der Endpunkte. Dies Rechteck ist positiv zu rechnen, wenn die Verschiebung des Endpunktes, nach welchem zu die tangentialen Componenten positiv gerechnet werden, diejenige des anderen Endpunktes übertrifft. Für diesen Satz lässt sich ein geometrischer Beweis geben, den der Leser leicht selbst finden wird.

Der analytische Beweis ist folgender: — Es seien x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes P in der noch unverschobenen Curve, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes P_1, in welchen derselbe Curvenpunkt P versetzt wird. Ferner seien dx, dy, dz die Zunahmen der drei Coordinaten welche irgend einem unendlich kleinen Bogen ds der ersteren Curve entsprechen, so dass

$$ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$$

ist, und es gelte eine analoge Bezeichnung für das entsprechende Element der verschobenen Curve. Endlich bezeichne ϑ den Winkel zwischen der Geraden PP_1 und der durch P an die unverschobene Curve gelegte Tangente, so dass wir

$$\cos\vartheta = \frac{x_1 - x}{D}\frac{dx}{ds} + \frac{y_1 - y}{D}\frac{dy}{ds} + \frac{z_1 - z}{D}\frac{dz}{ds}$$

haben, wo die absolute Grösse der Verschiebung der Kürze wegen durch D ausgedrückt, also

$$D = \{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\}^{1/2}$$

ist. Es ergiebt sich daraus

$$D\cos\vartheta\, ds = (x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir

$$D\cos\vartheta_1\, ds_1 = (x_1 - x)\,dx_1 + (y_1 - y)\,dy_1 + (z_1 - z)\,dz_1,$$

folglich ist

$$D\cos\vartheta_1\, ds_1 - D\cos\vartheta\, ds = (x_1 - x)\,d(x_1 - x) + (y_1 - y)\,d(y_1 - y) + (z_1 - z)\,d(z_1 - z)$$

oder

$$D\cos\vartheta_1\, ds_1 - D\cos\vartheta\, ds = \tfrac{1}{2}\,d(D^2).$$

Um nun die Differenz zwischen den auf beide Arten gerechneten tangentialen Verschiebungen zu erhalten, haben wir nur den letzten Ausdruck zu integriren. Es ergiebt sich

$$\int D\cos\vartheta_1\, ds_1 - \int D\cos\vartheta\, ds = \tfrac{1}{2}(D''^2 - D'^2) = \tfrac{1}{2}(D'' + D')(D'' - D')$$

wo D'' und D' die Verschiebungen der beiden Endpunkte bezeichnen.

188. **Tangentiale Verschiebung einer geschlossenen Curve.** — Für die ganze tangentiale Verschiebung einer geschlossenen Curve erhält man denselben Werth, man mag sie längs der anfänglichen oder längs der späteren Lage der Curve berechnen.

189. Bei zwei in denselben Punkten endigenden Bogen erhält man für die ganze tangentiale Verschiebung vom einen zum anderen denselben Werth, man mag sie längs des einen oder längs des anderen Bogens berechnen.

190. **Rotation einer starren geschlossenen Curve.** — Wenn eine starre geschlossene Curve um eine beliebige Axe durch einen beliebigen Winkel hindurch rotirt ist, so ist die ganze tangentiale Verschiebung gleich dem Product aus dem Sinus des Winkels in die doppelte Fläche ihrer Projection auf eine zur Axe senkrechte Ebene.

(a.) Satz, die tangentiale Verschiebung in einem festen Körper betreffend, diese ausgedrückt durch die Componenten der Deformation. — Die ganze tangentiale Verschiebung einer geschlossenen Curve eines homogen deformirten festen Körpers ist gleich

$$2(P\omega + Q\varrho + R\sigma),$$

wo P, Q, R für ihre anfängliche Lage beziehungsweise die Flächen ihrer Projectionen auf die Ebenen YOZ, ZOX, XOY bezeichnen, und ω, ϱ, σ folgende Werthe haben: —

$$\begin{aligned}\omega &= \tfrac{1}{2}\{[Zy] - [Yz]\}\\ \varrho &= \tfrac{1}{2}\{[Xz] - [Zx]\}\\ \sigma &= \tfrac{1}{2}\{[Yx] - [Xy]\}.\end{aligned}$$

Dies zu beweisen, setzen wir ferner

$$\begin{aligned}a &= \tfrac{1}{2}\{[Zy] + [Yz]\}\\ b &= \tfrac{1}{2}\{[Xz] + [Zx]\}\\ c &= \tfrac{1}{2}\{[Yx] + [Xy]\}.\end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}x_1 &= Ax + cy + bz + \sigma y - \varrho z\\ y_1 &= cx + By + az + \omega z - \sigma x\\ z_1 &= bx + ay + Cz + \varrho x - \omega y.\end{aligned}$$

Nach dem oben hergeleiteten Ausdruck ist also die tangentiale Verschiebung, längs der anfänglichen Lage der Curve gerechnet, gleich

$$\int\{(x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz\}$$

$$= \int[\tfrac{1}{2}d\{(A-1)x^2 + (B-1)y^2 + (C-1)z^2 + 2(ayz + bzx + cxy)\}$$
$$+ \omega(y\,dz - z\,dy) + \varrho(z\,dx - x\,dz) + \sigma(x\,dy - y\,dx)].$$

Der erstere Theil, $\int \tfrac{1}{2} d\{\}$, verschwindet für eine geschlossene Curve. Es bleibt also von unserm Ausdruck nur der Theil

$$\omega\int(y\,dz - z\,dy) + \varrho\int(z\,dx - x\,dz) + \sigma\int(x\,dy - y\,dx)$$

übrig, und dieser ist nach den Formeln für die Projection von Flächen gleich

$$2\,P\omega + 2\,Q\varrho + 2\,R\sigma.$$

Denn wir haben (wie in § 36, a) in der xy Ebene

$$\int (x\,dy - y\,dx) = \int r^2\,d\vartheta$$

= der doppelten Fläche der orthogonalen Projection der Curve auf diese Ebene, und Aehnliches gilt für die übrigen Integrale.

(b.) Hieraus und aus § 190 folgt, dass, wenn der Körper starr ist, seine etwaige Verschiebung also nur in einer Rotation besteht, $[Zy]-[Yz]$ gleich dem doppelten Product des Sinus des Rotationswinkels in den Cosinus des Neigungswinkels der Rotationsaxe gegen die Coordinatenaxe OX ist.

(c.) Bei jeder geschlossenen Curve, die, wenn sie eben ist, in der Ebene YOZ liegt und, wenn sie gewunden ist, eine solche Lage hat, dass ihre Projectionen auf die Ebenen ZOX und XOY Null sind, ist allgemein $[Zy] - [Yz]$ das Maass für die ganze tangentiale Verschiebung, dividirt durch die Fläche der Projection auf die Ebene ZOY. Ist irgend eine geschlossene Curve in einer Ebene A gegeben, und sind die Richtungscosinus der Normalen dieser Ebene beziehungsweise den Grössen ω, ϱ, σ proportional, so ist die ganze tangentiale Verschiebung gleich dem doppelten Product der Fläche der Curve in $\sqrt{(\omega^2 + \varrho^2 + \sigma^2)}$, und die ganze tangentiale Verschiebung jeder beliebigen geschlossenen Curve ist gleich dem doppelten Product der Fläche ihrer Projection auf die Ebene A in $\sqrt{(\omega^2 + \varrho^2 + \sigma^2)}$.

Bei der Coordinatentransformation transformiren sich ω, ϱ, σ nach dem elementaren Cosinusgesetz, und $\omega^2 + \varrho^2 + \sigma^2$ ist natürlich eine Invariante, d. h. behält denselben Werth, wenn man von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem anderen übergeht.

(d.) Bei einer rotationslosen homogenen Deformation ist die ganze tangentiale Verschiebung längs irgend einer Curve vom festen Punkte aus bis zu x, y, z, wenn man sie längs der anfänglichen Lage rechnet, gleich

$$\tfrac{1}{2}\,\{(A-1)x^2 + (B-1)y^2 + (C-1)z^2 + 2\,(a\,yz + b\,zx + c\,xy)\}.$$

Hieraus und aus § 187 folgt, dass die Verschiebung, längs der späteren Lage der Curve gerechnet, folgende ist: —

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,\{(A-1)\,x^2 + (B-1)\,y^2 + (C-1)\,z^2 + 2\,(a\,yz + b\,zx + c\,xy)\}\\ + \tfrac{1}{2}\,\{[(A-1)x + cy + bz]^2 + [cx + (B-1)y + az]^2\\ + [bx + ay + (C-1)z]^2\}.\end{aligned}$$

Ferner ist die ganze tangentiale Verschiebung längs irgend einer Curve von einem Punkte zu einem anderen von der Curve unabhängig, d. h. für eine beliebige Anzahl in demselben Punkte beginnender und in demselben Punkte endigender Curven dieselbe, man mag die Verschiebung in jedem Falle längs der anfänglichen oder längs der späteren Lage gerechnet haben.

(e.) **Heterogene Deformation.** — Man soll aus der absoluten Verschiebung jedes Punktes die Deformation bestimmen. Es seien α, β, γ die in Beziehung auf die festen Axen OX, OY, OZ genommenen Componenten der Verschiebung eines materiellen Punktes P, welcher anfänglich die Coordinaten x, y, z hatte, d. h. es seien $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ in dem deformirten Körper die Coordinaten des Punktes, welcher sich vor der Deformation in x, y, z befand.

Betrachten wir in jeder der beiden Lagen die um diesen Punkt herum befindliche Materie. Wir nehmen P als beweglichen Anfangspunkt an. Irgend ein anderer P nahe liegender Punkt habe in Beziehung auf dies neue System anfänglich die Coordinaten ξ, η, ζ, nach der Deformation die Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1.

Dieser letzterwähnte Punkt wird in Beziehung auf die festen Axen OX, OY, OZ anfänglich die Coordinaten

$$x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta,$$

später die Coordinaten

$$x + \alpha + \xi_1,\ y + \beta + \eta_1,\ z + \gamma + \zeta_1$$

haben, d. h. es sind

$$\alpha + \xi_1 - \xi,\ \beta + \eta_1 - \eta,\ \gamma + \zeta_1 - \zeta$$

die Componenten der Verschiebung des Punktes, welcher anfänglich die Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ hatte, oder, was dasselbe ist, jene Grössen sind die Werthe von α, β, γ, wenn sich x, y, z in

$$x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta$$

verwandelt hat.

Hieraus folgt nach dem Taylor'schen Satze, wenn man nur die ersten Potenzen von ξ, η, ζ beibehält, die höheren Potenzen und die Producte dieser Grössen aber vernachlässigt,

$$\xi_1 - \xi = \frac{d\alpha}{dx}\xi + \frac{d\alpha}{dy}\eta + \frac{d\alpha}{dz}\zeta$$

$$\eta_1 - \eta = \frac{d\beta}{dx}\xi + \frac{d\beta}{dy}\eta + \frac{d\beta}{dz}\zeta$$

$$\zeta_1 - \zeta = \frac{d\gamma}{dx}\xi + \frac{d\gamma}{dy}\eta + \frac{d\gamma}{dz}\zeta.$$

Vergleichen wir diese Ausdrücke mit den Formeln (1) des § 181, so sehen wir, dass sie die Aenderungen der Coordinaten irgend eines verschobenen Punktes eines Körpers in Beziehung auf drei durch einen Punkt des Körpers gehende zu einander senkrechte Axen von festen Richtungen ausdrücken, wenn alle anderen Punkte desselben in Beziehung auf diesen einen Punkt in einer Weise verschoben werden, die nur der Bedingung unterworfen ist, eine homogene Deformation zu geben. Dies lehrt uns, dass um jeden Punkt herum für die Entfernungen, die so klein sind, dass nur die ersten Terme der Taylor'schen Entwicklung für die Verschiebungsdifferenzen eine merkliche Grösse haben, die Deformation als homogen angesehen werden darf. Wir schliessen daraus, dass die Richtungen der Hauptaxen der Deformation in jedem Punkte (x, y, z), die Grössen der längs derselben stattfindenden Elongationen der Materie, sowie die tangentialen Verschiebungen in geschlossenen Curven nach den oben dargelegten allgemeinen Methoden gefunden werden, wenn man

$$[Xx] = \frac{d\alpha}{dx} + 1, \quad [Xy] = \frac{d\alpha}{dy}, \quad [Xz] = \frac{d\alpha}{dz},$$
$$[Yx] = \frac{d\beta}{dx}, \quad [Yy] = \frac{d\beta}{dy} + 1, \quad [Yz] = \frac{d\beta}{dz},$$
$$[Zx] = \frac{d\gamma}{dx}, \quad [Zy] = \frac{d\gamma}{dy}, \quad [Zz] = \frac{d\gamma}{dz} + 1$$

nimmt. Wenn jede dieser neun Grössen constant (d. h. für alle Werthe von x, y, z dieselbe) ist, so ist die Deformation homogen, sonst nicht.

(f.) Die Bedingung dafür, dass die Deformation unendlich klein sei, ist, dass jede der Grössen

$$\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\alpha}{dz},$$
$$\frac{d\beta}{dx}, \frac{d\beta}{dy}, \frac{d\beta}{dz},$$
$$\frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{dy}, \frac{d\gamma}{dz}$$

unendlich klein sei.

(g.) **Allgemeinste Bewegung einer Materie.** — Diese Formeln gelten für die allgemeinste mögliche Bewegung einer jeden Substanz und können als die Fundamentalgleichungen der Kinematik angesehen werden. Führen wir die Zeit als unabhängig Veränderliche ein, so erhalten wir für die den festen Axen OX, OY, OZ parallelen Geschwindigkeitscomponenten u, v, w die folgenden Ausdrücke: —

$$u = \frac{d\alpha}{dt}, \quad v = \frac{d\beta}{dt}, \quad w = \frac{d\gamma}{dt};$$

x, y, z, t sind unabhängig Veränderliche, α, β, γ Functionen dieser Grössen.

(h.) Führen wir die Bedingung ein, dass keine Linie des Körpers irgend eine Ausdehnung erfahre, so gelangen wir zu den allgemeinen Gleichungen für die Kinematik eines starren Körpers, die uns jedoch schon zur Genüge beschäftigt hat. Um dies auszudrücken, wird man sechs Bedingungsgleichungen zwischen den neun Grössen $\frac{d\alpha}{dx}$, u. s. w. aufzustellen haben, die in diesem Falle sämmtlich in Beziehung auf x, y, z constant sind. Es bleiben noch drei willkürliche unabhängige Elemente übrig, um irgend eine angulare Bewegung des starren Körpers auszudrücken.

(i.) **Rotationslose Deformation.** — Wenn der neue Zustand zum anfänglichen in einer solchen Beziehung steht, dass jeder Theil des Körpers aus seiner anfänglichen Lage und Deformation in die neue durch eine Translation und eine rotationslose Deformation übergehen kann, d. h. wenn in jedem Punkte die drei Hauptaxen der Deformation Linien der Substanz sind, die ihren Parallelismus beibehalten, so müssen wir nach § 183 (18)

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy}, \quad \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\alpha}{dz}, \quad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx}$$

haben, und wenn diese Gleichungen erfüllt sind, so ist die Deformation rotationslos. Diese drei Gleichungen drücken aber nicht mehr und nicht weniger aus, als dass

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$$

das Differential einer Function dreier unabhängig Veränderlichen ist. Wir erhalten also den bemerkenswerthen Satz (und seine Umkehrung), dass, wenn $F(x, y, z)$ eine beliebige Function der Coordinaten irgend eines Punktes eines Körpers bezeichnet, und wenn jeder solche Punkt aus seiner gegebenen Lage (x, y, z) in einen Punkt verschoben wird, welcher die Coordinaten

(1) $$x_1 = x + \frac{dF}{dx},\ y_1 = y + \frac{dF}{dy},\ z_1 = z + \frac{dF}{dz}$$

hat, die Hauptaxen der Deformation in jedem Punkte Linien der Substanz sind, die ihren Parallelismus behalten haben. Die Rückverschiebung von (x_1, y_1, z_1) nach (x, y, z) genügt derselben Bedingung; es muss daher

(2) $$x = x_1 + \frac{dF_1}{dx_1},\ y = y_1 + \frac{dF_1}{dy_1},\ z = z_1 + \frac{dF_1}{dz_1}$$

sein, wo F_1 eine Function von x_1, y_1, z_1 bezeichnet, und $\frac{dF_1}{dx_1}$, u. s. w. die in Beziehung auf dieses System von Veränderlichen genommenen partiellen Differentialquotienten von F_1 sind. Die Beziehung zwischen F und F_1 ist offenbar

(3) $$F + F_1 = -\tfrac{1}{2} D^2,$$

wo

(4) $$D^2 = \frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2} = \frac{dF_1^2}{dx_1^2} + \frac{dF_1^2}{dy_1^2} + \frac{dF_1^2}{dz_1^2}$$

ist. Dies lässt sich natürlich mittels der gewöhnlichen analytischen Methode beweisen, nach der man x, y, z durch x_1, y_1, z_1 ausdrückt, wenn die letzteren Grössen durch (1) als Functionen der ersteren gegeben sind.

(j.) Es seien α, β, γ drei beliebige Functionen von x, y, z. Ferner seien dS irgend ein Element einer Oberfläche, l, m, n die Richtungscosinus ihrer Normalen.

Dann ist

$$\iint dS\left\{l\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + m\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) + n\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}$$
$$= \int(\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz),$$

wo das erstere Integral sich über irgend eine von einer geschlossenen Curve begrenzte krummlinige Fläche erstreckt, und das zweite, für welches man auch

$$\int ds\left(\alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds}\right)$$

schreiben kann, um die Peripherie dieser Curve herum zu integriren ist. Diesen Satz zu beweisen, hat man nur zu bemerken, dass

$$l\, dS = dy\, dz,\ m\, dS = dz\, dx,\ n\, dS = dx\, dy$$

ist, und zu zeigen, dass zwischen den bezeichneten Grenzen

$$\int\int\frac{d\alpha}{dz}\,dz\,dx - \int\int\frac{d\alpha}{dy}\,dx\,dy = \int\alpha\frac{dx}{ds}\,ds, \text{ u. s. w.}$$

ist.

(k.) Es ist bemerkenswerth, dass der Ausdruck

$$\int\int dS\left\{l\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+m\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+n\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}$$

für alle Oberflächen, welche eine gemeinschaftliche krummlinige Umgrenzung haben, denselben Werth hat. Wenn α, β, γ die Componenten einer Verschiebung aus (x, y, z) sind, so ist dieser Ausdruck die ganze tangentiale Verschiebung um die genannte krummlinige Umgrenzung, die eine geschlossene Curve ist. Er wird daher Null sein, wenn die Verschiebung jedes Theils ohne Rotation erfolgt, und wenn er von Null verschieden ist, so ersehen wir aus den obigen Sätzen und Zusätzen, welches das genaue Maass der Rotation ist.

Verschiebungsfunction. — (l.) Endlich sehen wir, welche Bedeutung $\int(\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz)$ oder die sogenannte „Verschiebungsfunction" in dem Falle hat, wo keine Rotation stattfindet. Es ist die ganze tangentiale Verschiebung längs irgend einer Curve von dem festen Punkte O an bis zum Punkte $P(x, y, z)$. Diese ganze tangentiale Verschiebung ist längs aller zwei beliebige Punkte verbindenden Curven die nämliche und zwar gleich der Differenz der Werthe, welche die Verschiebungsfunctionen in jenen Punkten haben.

191. „Continuitätsgleichung." — Da bei keiner Bewegung oder Wirkung in der Natur eine Vernichtung oder eine Erzeugung von Materie stattfinden kann, so muss die zu irgend einer Zeit in irgend einem Raum enthaltene Flüssigkeitsmenge gleich der anfänglich darin enthaltenen sein, vermehrt um die ganze eingetretene und vermindert um die ganze ausgetretene Flüssigkeit. Drückt man diesen Gedanken in einer Form aus, die jeden Theil einer in Bewegung befindlichen Flüssigkeit vollkommen umfasst, so gelangt man zu einer Formel, die ganz unnöthiger Weise den verwirrenden Namen „Continuitätsgleichung" erhalten hat.

192. Es bieten sich uns zwei Wege dar, diesen Gedanken auszudrücken, die beide lehrreiche Betrachtungen über die Eigenschaften der Flüssigkeiten veranlassen. Auf dem einen Wege betrachten wir einen bestimmten Theil der Flüssigkeit, folgen ihm in seinen Bewegungen und drücken aus, dass die mittlere Dichtigkeit der Substanz sich umgekehrt wie das Volumen ändert. Wir erhalten auf diese Weise die Continuitätsgleichung in integrirter Form.

Continuitätsgleichung in integrirter Form. — Irgend ein Punkt einer in Bewegung befindlichen Flüssigkeit habe in dem Moment, wo wir zu rechnen beginnen, die Coordinaten a, b, c und möge nach Ablauf der Zeit t, von diesem Augenblick an gerechnet, eine Lage erreicht haben, deren Coordinaten x, y, z sind. Um die Bewegung vollständig zu bestimmen, haben wir jede dieser drei veränderlichen Coordinaten als eine Function von a, b, c, t zu geben.

Es bezeichnen nun $\delta a, \delta b, \delta c$ die zur Zeit $t = 0$ den Coordinatenaxen parallelen Kanten eines sehr kleinen Flüssigkeitsparallelepipeds. Jeder Theil der Flüssigkeit muss nach § 190 (c), wenn er nur klein genug in allen seinen Dimensionen ist, während der Bewegung annähernd die Bedingung eines überall gleichförmig deformirten Körpers erfüllen. Wenn also $\delta a, \delta b, \delta c$ unendlich klein genommen werden, so muss der entsprechende Flüssigkeitstheil (§ 156) während der Bewegung ein Parallelepiped bleiben.

Wenn a, b, c die anfänglichen Coordinaten eines Eckpunktes dieses Parallelepipeds sind und die zweiten Endpunkte der in (a, b, c) zusammenstossenden Kanten beziehungsweise die Coordinaten $a + \delta a, b, c$; $a, b + \delta b, c$; $a, b, c + \delta c$ haben, so haben dieselben Punkte der Flüssigkeit zur Zeit t die Coordinaten

$$x,\ y,\ z;$$
$$x + \frac{dx}{da}\delta a,\ y + \frac{dy}{da}\delta a,\ z + \frac{dz}{da}\delta a;$$
$$x + \frac{dx}{db}\delta b,\ y + \frac{dy}{db}\delta b,\ z + \frac{dz}{db}\delta b;$$
$$x + \frac{dx}{dc}\delta c,\ y + \frac{dy}{dc}\delta c,\ z + \frac{dz}{dc}\delta c.$$

Die Längen und die Richtungscosinus der Kanten sind daher beziehungsweise

$$\left(\frac{dx^2}{da^2} + \frac{dy^2}{da^2} + \frac{dz^2}{da^2}\right)^{1/2}\delta a,\quad \frac{\frac{dx}{da}}{\left(\frac{dx^2}{da^2} + \frac{dy^2}{db^2} + \frac{dz^2}{dc^2}\right)^{1/2}},\ \text{u. s. w.}$$

$$\left(\frac{dx^2}{db^2} + \frac{dy^2}{db^2} + \frac{dz^2}{db^2}\right)^{1/2}\delta b,\quad \frac{\frac{dx}{db}}{\left(\frac{dx^2}{da^2} + \frac{dy^2}{db^2} + \frac{dz^2}{dc^2}\right)^{1/2}},\ \text{u. s. w.}$$

$$\left(\frac{dx^2}{dc^2} + \frac{dy^2}{dc^2} + \frac{dz^2}{dc^2}\right)^{1/2}\delta c,\quad \frac{\frac{dx}{dc}}{\left(\frac{dx^2}{da^2} + \frac{dy^2}{db^2} + \frac{dz^2}{dc^2}\right)^{1/2}},\ \text{u. s. w.},$$

und folglich ist das Volumen dieses Parallelepipeds

$$\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)\delta a\,\delta b\,\delta c,$$

oder, wie man jetzt gewöhnlich schreibt,

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{da}, & \frac{dy}{da}, & \frac{dz}{da} \\ \frac{dx}{db}, & \frac{dy}{db}, & \frac{dz}{db} \\ \frac{dx}{dc}, & \frac{dy}{dc}, & \frac{dz}{dc} \end{vmatrix} \delta a \, \delta b \, \delta c.$$

Da nun weder eine Zunahme noch eine Abnahme der in einem Theil der Flüssigkeit enthaltenen Stoffmenge stattfinden kann, so muss die Dichtigkeit oder die auf die Volumeneinheit kommende Stoffmenge in dem unendlich kleinen Theil, den wir betrachtet haben, sich umgekehrt wie das Volumen desselben ändern, wenn dies überhaupt ein anderes wird. Bezeichnet also ϱ_0 die anfängliche und ϱ die Dichtigkeit, welche die Flüssigkeit in der Nähe des Punktes (x, y, z) zur Zeit t hat, so müssen wir

$$(1) \qquad \varrho \begin{vmatrix} \frac{dx}{da}, & \frac{dy}{da}, & \frac{dz}{da} \\ \frac{dx}{db}, & \frac{dy}{db}, & \frac{dz}{db} \\ \frac{dx}{dc}, & \frac{dy}{dc}, & \frac{dz}{dc} \end{vmatrix} = \varrho_0$$

haben, und dies ist die Continuitätsgleichung in integrirter Form.

193. Differentialgleichung der Continuität. — Die Form, in welcher die Continuitätsgleichung gewöhnlich gegeben wird, oder die Differentialgleichung der Continuität, wie wir sie nennen können, drückt aus, dass in jedem Augenblick die verhältnissmässige Verminderung der Dichtigkeit zur Dichtigkeit in demselben Verhältniss steht, wie die verhältnissmässige Zunahme des Volumens eines unendlich kleinen Theils zum Volumen dieses Theils.

Wir wollen dies Verhältniss ermitteln. Ein Punkt der Flüssigkeit welcher zur Zeit t die Coordinaten x, y, z hat, möge zu irgend einer Zeit $t - dt$ (nicht wenn $t = 0$ ist) die Coordinaten a, b, c haben, so dass nach der gewöhnlichen Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten

$$x - a = \frac{dx}{dt} dt, \; y - b = \frac{dy}{dt} dt, \; z - c = \frac{dz}{dt} dt,$$

oder, wenn u, v, w die den Coordinatenaxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit dieses Punktes der Flüssigkeit bezeichnen,

$$x - a = u\,dt, \; y - b = v\,dt, \; z - c = w\,dt$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{dx}{da} = 1 + \frac{du}{da} dt, \; \frac{dy}{da} = \frac{dv}{da} dt, \; \frac{dz}{da} = \frac{dw}{da} dt;$$

$$\frac{dx}{db} = \frac{du}{db} dt, \; \frac{dy}{db} = 1 + \frac{dv}{db} dt, \; \frac{dz}{db} = \frac{dw}{db} dt;$$

$$\frac{dx}{dc} = \frac{du}{dc} dt, \; \frac{dy}{dc} = \frac{dv}{dc} dt, \; \frac{dz}{dc} = 1 + \frac{dw}{dc} dt,$$

und da wir alle Glieder fortzulassen haben, welche eine höhere als die erste Potenz von dt enthalten, so wird die Determinante einfach

$$1+\left(\frac{du}{da}+\frac{dv}{db}+\frac{dw}{dc}\right)dt.$$

Dies drückt also das Verhältniss aus, in welchem das Volumen während der Zeit dt zunimmt. Das entsprechende Verhältniss für die Aenderung der Dichtigkeit ist

$$1+\frac{D\varrho}{\varrho},$$

wenn ϱ die Dichtigkeit eines und desselben Flüssigkeitstheils bezeichnet und $D\varrho$ das Differential von ϱ ist, welches der im Zeitraum von $t-dt$ bis t erfolgenden Bewegung dieses Theils aus der Lage (a, b, c) in die Lage (x, y, z) entspricht. Wir erhalten folglich

$$(1)\qquad \frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{dt}+\frac{du}{da}+\frac{dv}{db}+\frac{dw}{dc}=0.$$

Hier werden ϱ, u, v, w als Functionen von a, b, c und t angesehen, und die durch $\frac{D\varrho}{dt}$ ausgedrückte Aenderung von ϱ ist die verhältnissmässige Grösse der wirklichen Aenderung der Dichtigkeit eines unendlich kleinen Flüssigkeitstheils, welche eintritt, wenn sich das Theilchen aus einer festen Lage (a, b, c) fortbewegt. Wenn wir das Princip der Bezeichnung ändern und ϱ als die Dichtigkeit eines beliebigen Flüssigkeitstheils ansehen, der sich zur Zeit t in der Nähe des festen Punktes (a, b, c) befindet, ferner mit u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten der durch denselben Punkt zu derselben Zeit hindurchgehenden Flüssigkeit bezeichnen, so werden wir

$$(2)\qquad \frac{D\varrho}{dt}=\frac{d_t\varrho}{dt}+u\frac{d_a\varrho}{da}+v\frac{d_b\varrho}{db}+w\frac{d_c\varrho}{dc}$$

haben. Nach der gebräuchlichen unvollständigen Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten, welche hier keinen Irrthum veranlassen kann, lassen wir die Indices wieder fort und erhalten dann, wenn der in (2) angegebene Werth für $\frac{D\varrho}{dt}$ in (1) substituirt wird,

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dt}+u\frac{d\varrho}{da}+v\frac{d\varrho}{db}+w\frac{d\varrho}{dc}\right)+\frac{du}{da}+\frac{dv}{db}+\frac{dw}{dc}=0,$$

oder

$$(3)\qquad \frac{d\varrho}{dt}+\frac{d(\varrho u)}{da}+\frac{d(\varrho v)}{db}+\frac{d(\varrho w)}{dc}=0,$$

und dies ist die Differentialgleichung der Continuität in der Form, in der sie gewöhnlich gegeben wird.

194. Der zweite oben (§ 192) angedeutete Weg führt unmittelbar zur Differentialgleichung der Continuität.

Denken wir uns im Innern einer Flüssigkeit einen festen Raum. Zu irgend einer Zeit wird durch verschiedene Theile der Grenzflächen dieses Raumes Flüssigkeit eintreten, durch andere Theile austreten. Wenn die Flüssigkeit überall von derselben Dichtigkeit und nicht zusammendrückbar ist, so muss die in dem in Rede stehenden Raume enthaltene Stoffmenge zu allen Zeiten constant, folglich die zu irgend einer Zeit einströmende der zu derselben Zeit ausströmenden Menge gleich sein. Wenn dagegen während irgend einer Periode der Bewegung mehr Flüssigkeit ein- als austritt, so wird in dem Raume eine Verdichtung der Materie erfolgen; eine Verdünnung wird eintreten, wenn mehr Flüssigkeit den Raum verlässt, als in ihn neu hineinkommt. Die für die Zeiteinheit genommene Grösse der Zunahme der mittleren Dichtigkeit der Flüssigkeit in dem betrachteten festen Raume verhält sich in jedem Augenblick zur wirklichen Dichtigkeit, wie die Grösse der Zunahme der in dem Raume enthaltenen Stoffmenge zu dieser ganzen Stoffmenge.

Der Raum S sei ein unendlich kleines Parallelepiped, dessen Kanten α, β, γ den Coordinatenaxen parallel sind, und dessen Mittelpunkt die Coordinaten x, y, z hat, so dass $x \pm \frac{1}{2}\alpha$, $y \pm \frac{1}{2}\beta$, $z \pm \frac{1}{2}\gamma$ die Coordinaten seiner Eckpunkte sind. Zur Zeit t sei ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit im Punkte (x, y, z) oder die mittlere Dichtigkeit im ganzen Raume S. Dann wird die Dichtigkeit zur Zeit $t + dt$ gleich $\varrho + \frac{d\varrho}{dt}dt$ sein, und folglich sind die in S zu den Zeiten t und $t + dt$ enthaltenen Flüssigkeitsmengen beziehungsweise $\varrho\,\alpha\,\beta\,\gamma$ und $\left(\varrho + \frac{d\varrho}{dt}dt\right)\alpha\beta\gamma$. Während der Zeit dt hat also der Raum S die Flüssigkeitsmenge

$$\text{(a)} \qquad -\frac{d\varrho}{dt}\,\alpha\,\beta\,\gamma\,dt$$

verloren (wenn $\frac{d\varrho}{dt}$ positiv ist, so wird natürlich ein absoluter Gewinn da sein).

Es seien nun u, v, w die drei Componenten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit (oder eines Flüssigkeitspunktes) in P. Diese Grössen werden Functionen von x, y, z (und, ausser im Falle einer „stationären Bewegung", auch von t abhängig) sein, und sich im Allgemeinen von Punkt zu Punkt continuirlich ändern. Durch diese Erwägung wird jedoch die nachstehende Untersuchung nicht beschränkt; dieselbe bleibt sogar in den Fällen gültig, in denen an gewissen Stellen der Flüssigkeit unstetige Uebergänge der Geschwindigkeit stattfinden, wie man erkennt, wenn man solche Fälle als Grenzfälle von Bewegungen ansieht, bei denen sehr plötzliche aber noch stetige Aenderungen der Geschwindigkeit erfolgen. Wenn ω eine kleine zur x Axe senkrechte ebene Fläche ist, die ihren Schwerpunkt in P hat, so wird das Volumen der in der Zeit dt hindurchfliessenden Flüssigkeit gleich $u\,\omega\,dt$, ihre Masse also $\varrho\,u\,\omega\,dt$ sein. Substituiren wir $\beta\gamma$ für ω, so wird die Menge, die durch eine der beiden Flächen $\beta\gamma$ des Parallelepipeds S fliesst, von diesem Ausdruck nur wegen der Variation des Werthes von $\varrho\,u$ verschieden sein; die Flüssigkeitsmengen, welche durch die beiden Flächen $\beta\gamma$ fliessen, sind daher beziehungsweise

$$\left\{\varrho u - \tfrac{1}{2}\alpha \frac{d(\varrho u)}{dx}\right\}\beta\gamma\, dt$$

und

$$\left\{\varrho u + \tfrac{1}{2}\alpha \frac{d(\varrho u)}{dx}\right\}\beta\gamma\, dt.$$

Folglich ist $\alpha \frac{d(\varrho u)}{dx}\beta\gamma\, dt$ oder $\frac{d(\varrho u)}{dx}\alpha\beta\gamma\, dt$ der Ueberschuss der durch die eine Fläche $\beta\gamma$ ausströmenden über die durch die zweite Fläche $\beta\gamma$ einströmende Flüssigkeitsmenge. Zählen wir die Wirkung der Bewegungen hinzu, welche durch die übrigen Flächen des Parallelepipeds hindurch stattfinden, so erhalten wir die ganze Flüssigkeitsmenge, welche der Raum S während der Zeit dt verloren hat, nämlich

$$\text{(b)} \qquad \left\{\frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d(\varrho v)}{dy} + \frac{d(\varrho w)}{dz}\right\}\alpha\beta\gamma\, dt.$$

Wird dieser Ausdruck dem oben erhaltenen (a) gleich gesetzt, so folgt

$$\left\{\frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d(\varrho v)}{dy} + \frac{d(\varrho w)}{dz}\right\}\alpha\beta\gamma\, dt = -\frac{d\varrho}{dt}\alpha\beta\gamma\, dt,$$

und daraus leiten wir

$$\frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d(\varrho v)}{dy} + \frac{d(\varrho w)}{dz} + \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

her, was die gesuchte Gleichung ist.

195. **Freiheit und Gebundenheit.** — In früheren Paragraphen haben wir mehrmals auf die Anzahl der unabhängig Veränderlichen in einer Verschiebung oder auf die Grade von Freiheit oder Gebundenheit hingewiesen, unter denen die Verschiebung stattfindet. Daher wird es gut sein, eine allgemeine (aber kurze) Uebersicht über diesen Theil unseres Gegenstandes zu geben.

196. Ein freier Punkt hat drei Grade von Bewegungsfreiheit, da die allgemeinste Verschiebung, die er erfahren kann, sich in drei von einander unabhängige Verschiebungen zerlegen lässt, welche drei beliebigen Richtungen beziehungsweise parallel sind. Es ist im Allgemeinen zweckmässig, diese drei Richtungen, nach denen man die Zerlegung vornimmt, rechtwinklig zu einander zu wählen.

Wenn der Punkt gezwungen wird, beständig auf einer gegebenen Oberfläche zu bleiben, so ist ein Grad von Gebundenheit eingeführt, oder es sind nur noch zwei Grade von Freiheit übrig. Wir können nämlich die Normale an die Oberfläche als eine der drei zu einander senkrechten Zerlegungsrichtungen annehmen. Parallel dieser Normale kann keine Verschiebung stattfinden, und es bleiben nur zwei von einander unabhängige Verschiebungen übrig, deren

Richtungen senkrecht zu einander sind und in der Tangentialebene der Oberfläche liegen.

Wenn der Punkt gezwungen wird, auf jeder von zwei Flächen zu bleiben, so verliert er zwei Grade von Freiheit und behält nur noch einen übrig. In der That muss er auf der Curve bleiben, welche beiden Flächen gemeinschaftlich ist, und längs einer Curve giebt es an jeder Stelle nur eine Verschiebungsrichtung.

197. Was weiter den Fall eines freien starren Systems betrifft, so haben wir offenbar sechs Grade von Freiheit zu betrachten, nämlich drei unabhängige in zu einander senkrechten Richtungen mögliche Verschiebungen, wie sie ein Punkt hat, und drei unabhängige Rotationen um drei zu einander senkrechte Axen.

Wenn ein Punkt des Systems fest wird, so verliert dasselbe drei Grade von Freiheit; es sind ihm dann nämlich nur die drei oben erwähnten Rotationen möglich.

Dieser feste Punkt kann und wird im Allgemeinen ein Punkt einer continuirlichen Fläche des Körpers sein, die mit einer festen continuirlichen Fläche in Berührung ist. Diese Flächen müssen als „vollkommen rauh" vorausgesetzt werden, so dass ein Gleiten unmöglich ist.

Wenn ein zweiter Punkt festgelegt wird, so verliert der Körper zwei weitere Grade von Freiheit, und es bleibt ihm nur die eine Freiheit, um die Gerade zu rotiren, welche die beiden festen Punkte verbindet.

Wird noch ein dritter Punkt festgelegt, welcher mit den beiden ersteren nicht in einer Geraden liegt, so kann sich der Körper gar nicht mehr bewegen.

198. Wenn ein Punkt des starren Systems gezwungen wird, auf einer glatten Fläche zu bleiben, so geht ein Grad von Freiheit verloren, und es bleiben noch fünf übrig, nämlich zwei Verschiebungen in der Tangentialebene der Fläche und drei Rotationen. Da durch jede weitere Beschränkung eines Punktes des Körpers auf eine glatte Fläche ein weiterer Grad von Freiheit verloren geht, so werden sechs solche Bedingungen die Lage eines Körpers vollständig bestimmen. So kann man eine Flinte, dadurch dass man sechs passend gewählte Punkte ihres Laufs und Schaftes auf sechs convexe Theile der Oberfläche eines unbeweglichen starren Körpers legt, so oft man will, wieder in genau dieselbe Lage bringen und ihre Genauigkeit prüfen.

199. Wenn ein Punkt gezwungen wird, in einer Curve zu bleiben, so sind noch vier Grade von Freiheit vorhanden.

Wenn zwei Punkte in gegebenen Curven bleiben müssen, so sind vier Grade von Gebundenheit eingeführt, also nur zwei Grade von Freiheit übrig. Eine derselben kann als eine einfache Rotation um die Verbindungslinie der Punkte angesehen werden, welche in jenen Curven bleiben müssen, eine Bewegung, welche der Körper offenbar annehmen kann. Es lässt sich zeigen, dass die zweite noch mögliche Bewegung die allgemeinste ist, die bei einem Grad von Freiheit vorkommen kann, nämlich eine Translation, verbunden mit Rotation in irgend welchem festen Verhältniss, wie bei der Bewegung einer Schraubenmutter auf der Schraubenspindel.

Wenn eine Linie eines starren Systems gezwungen wird, sich selbst parallel zu bleiben, so sind noch drei Verschiebungen und eine Rotation möglich. Das ist z. B. bei einem dreibeinigen Stuhl der Fall, der auf einem ganz glatten Brette steht, welches an ein in seinem Rahmen frei gleitendes Fallfenster befestigt ist.

Wir brauchen uns aber nicht länger bei diesem Gegenstande aufzuhalten. Die Zahl der Combinationen, die man betrachten könnte, ist fast endlos, und die schon gegebenen zeigen hinlänglich, wie einfach es ist, in jedem Falle, der sich uns darbieten mag, die Grade von Freiheit oder von Gebundenheit zu bestimmen.

200. **Ein Grad von Gebundenheit vom allgemeinsten Charakter.** — Wenn man einen Punkt des Körpers zwingt, auf einer krummen Fläche zu bleiben, so führt man zwar einen Grad von Gebundenheit ein; derselbe ist aber nicht vom allgemeinsten Charakter. Ein solcher Grad von Gebundenheit besteht darin, dass man eine Linie des Körpers von jeder longitudinalen Bewegung zurückhält, die nicht von einer um diese Linie stattfindenden Rotation begleitet ist, und zwar einer Rotation, die in einem festen Verhältniss zur longitudinalen Bewegung steht; zugleich muss dem Körper jede andere Bewegung gestattet sein. Der Körper kann dann also um jede zu dieser Linie senkrechte Axe frei rotiren (zwei Grade von Freiheit), und in jeder zu derselben Linie senkrechten Richtung verschoben werden (zwei Grade von Freiheit); ausserdem ist ihm die anfangs genannte Schraubenbewegung gestattet; er hat also fünf Grade von Freiheit, die in Verbindung mit dem einen Grad von Gebundenheit die sechs Elemente ausmachen.

201. **Mechanische Erläuterung dieses Falles.** — Es sei eine Schraube in den einen Schaft eines Hooke'schen Schlüssels eingeschnitten und der andere Schaft desselben durch einen zweiten Hooke'schen Schlüssel mit einem festen Schafte verbunden. Eine

sich auf dieser Schraube drehende Schraubenmutter hat die allgemeinste Art der Bewegung, die bei einem Grad von Gebundenheit möglich ist, oder sie ist einem Grad von Gebundenheit vom allgemeinsten Charakter unterworfen. Sie hat fünf Grade von Freiheit, da sie folgende Bewegungen ausführen kann: 1) sie kann sich auf der Schraubenspindel drehen, während die beiden Hooke'schen Schlüssel in Ruhe bleiben; 2) sie kann um jede der beiden Axen des ersten Hooke'schen Schlüssels oder um irgend eine in der Ebene derselben liegende Axe rotiren (zwei weitere Grade von Freiheit, nämlich die Freiheit um zwei durch einen Punkt gehende Axen zu rotiren); 3) sie kann vermittels der beiden Hooke'schen Schlüssel, indem sie jeden biegt, eine von keiner Rotation begleitete Translation in jeder zu dem Zwischenglied zwischen den beiden Schlüsseln senkrechten Richtung erfahren (zwei weitere Grade von Freiheit). Sie kann aber nicht parallel der Richtung dieses Gliedes verschoben werden, ohne dass eine verhältnissmässige Rotation um diese Richtung eintreten müsste, und ebenso wenig kann eine Rotation um dieses Glied erfolgen, die nicht von einer demselben parallelen Translation von verhältnissmässiger Grösse begleitet wäre.

Man kann wohl kaum einen einfacheren Mechanismus ersinnen, um einen Grad der Gebundenheit vom allgemeinsten Charakter zu erzeugen.

Besonderer Fall (a). — Die Höhe des Schraubenganges sei unendlich (wie bei einer Flinte mit geraden Zügen), d. h. die Schraubenmutter soll frei gleiten, aber sich nicht drehen können. Der eine Grad von Gebundenheit besteht dann darin, dass um eine gewisse Axe keine Rotation soll stattfinden können. Dies ist die Art und der Grad von Freiheit, welche der äussere Ring eines Gyroskops besitzt, dessen Schwungrad sich unendlich schnell dreht. Der äussere Ring kann sich um keine zur Ebene des inneren Ringes senkrechte Axe drehen, wohl aber um jede der beiden zu dieser Richtung senkrechten Axen, nämlich um die Axe des Schwungrads und um die Axe des äusseren Ringes in Beziehung auf den inneren; auch kann er natürlich vollkommen frei in jeder Richtung verschoben werden.

Besonderer Fall (b). — Die Höhe des Schraubenganges sei $= 0$. In diesem Falle kann sich die Schraubenmutter frei um die Axe des Schaftes drehen, aber sich nicht längs derselben bewegen. Die Gebundenheit besteht also einfach darin, dass der Körper keine zur Richtung des Schaftes parallele Translation erfahren kann, während ihm jede andere Bewegung möglich ist. Das ist dasselbe als wenn irgend ein in dieser Linie liegender Punkt des Körpers auf einer festen Oberfläche bleiben müsste. Um die Reibung besser zu vermeiden, bedient man sich zur Hervorbringung dieser Gebundenheit keiner solchen Fläche, sondern nimmt von unserer letzten Vorrichtung nur das Zwischenglied und den zweiten Hooke'schen Schlüssel (der erstere wird beseitigt) und lässt einen Punkt des Körpers sich als Zapfen in einer am Ende des Zwischengliedes angebrachten Pfanne drehen. Das Ende des Zwischengliedes kann auch eine continuirliche Fläche sein, auf welcher eine continuirliche Fläche des Körpers aufliegt, so dass sie nöthigenfalls rollen oder kreiseln, aber nicht gleiten kann.

Analytischer Ausdruck der Gebundenheit. — Ein Grad von Gebundenheit wird durch eine Gleichung zwischen den sechs Coordinaten ausgedrückt, welche die Lage eines starren Körpers in Beziehung auf einen anderen als fest angesehenen angeben. Es hat dies für den Körper in jeder besonderen Lage die Folge, dass er verhindert wird, diese Lage zu verlassen, ausser vermittels Geschwindigkeitscomponenten (oder unendlich kleinen Bewegungen), die eine gewisse zwischen ihnen bestehende lineare Gleichung erfüllen.

So ist, wenn $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ die sechs Coordinaten und $F(\sigma_1 \ldots) = 0$ die Bedingung sind,

$$\frac{dF}{d\sigma_1}\delta\sigma_1 + \ldots = 0$$

die lineare Gleichung, welche die Bewegung durch jede besondere Lage hindurch einschränkt; die der besonderen Lage entsprechenden Werthe von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, u. s. w. sind in $\frac{dF}{d\sigma_1}$ und in jedem der übrigen partiellen Differentialquotienten von F anzuwenden.

Welches Coordinatensystem man nun auch genommen haben mag, wir können diese Gleichung, wenn wir wollen, stets auf eine Gleichung zwischen drei linearen Geschwindigkeiten u, v, w und drei Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ reduciren.

Diese Gleichung sei

$$Au + Bv + Cw + A'\omega_1 + B'\omega_2 + C'\omega_3 = 0.$$

Sie ist der folgenden äquivalent: —

$$q + a\omega = 0,$$

wenn q die Geschwindigkeitscomponente längs oder parallel der Geraden ist, deren Richtungscosinus den Grössen

$$A,\ B,\ C$$

proportional sind, wenn ausserdem ω die Componente der Winkelgeschwindigkeit um eine durch den Anfangspunkt gehende Axe ist, deren Richtungscosinus den Grössen

$$A',\ B',\ C'$$

proportional sind, und wenn endlich

$$a = \sqrt{\frac{A'^2 + B'^2 + C'^2}{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ist.

Man könnte glauben, durch Aenderung des Anfangspunktes liessen sich die Winkelgeschwindigkeiten beseitigen, so dass nur eine lineare Gleichung zwischen den Componenten der Geschwindigkeit der Translation übrig bliebe. Dem ist nicht so. Es werde nämlich der Anfangspunkt in einen Punkt verlegt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind. Die Winkelgeschwindigkeiten um die den alten parallelen neuen Axen werden unverändert bleiben; die linearen Geschwindigkeiten dagegen, welche, in Verbindung mit diesen Winkelgeschwindigkeiten um die neuen Axen, uns ω_1, ω_2, ω_3, u, v, w in Beziehung auf die alten Axen geben, sind (§ 89)

$$\begin{aligned} u - \omega_3 \eta + \omega_2 \zeta &= u', \\ v - \omega_1 \zeta + \omega_3 \xi &= v', \\ w - \omega_2 \xi + \omega_1 \eta &= w'. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Gebundenheit wird also

$$Au' + Bv' + Cw' + (A' + B\zeta - C\eta)\,\omega_1 + \text{u. s. w.} = 0.$$

Nun können wir nicht allgemein ξ, η, ζ so bestimmen, dass ω_1, u. s. w. verschwinden; dies würde nämlich drei Bedingungen erfordern, während die Coefficienten von ω_1, u. s. w., als Functionen von ξ, η, ζ, nicht von einander unabhängig, sondern durch die Relation

$$A(B\zeta - C\eta) + B(C\xi - A\zeta) + C(A\eta - B\xi) = 0$$

verbunden sind. Die einfachste Form, auf die wir jene Gleichung reduciren können, ist

$$lu' + mv' + nw' + a(l\omega_1 + m\omega_2 + n\omega_3) = 0,$$

d. h. jede longitudinale Bewegung einer gewissen Axe muss von einer bestimmten verhältnissmässigen Rotation um diese Axe begleitet sein.

202. **Allgemeine Coordinaten.** — Die im Vorhergehenden entwickelten Principien gehören im Grunde zur allgemeinen Theorie der „Coordinaten" der Geometrie. Die drei Coordinaten jedes der beiden gewöhnlich angewandten Systeme, des rechtwinkligen und polaren, welche erforderlich sind, um die Lage eines Punktes anzugeben, entsprechen den drei Graden von Freiheit, welche ein keiner Beschränkung unterworfener Punkt besitzt. Das allgemeinste Coordinatensystem zur Angabe der Lage eines Punktes besteht aus drei Schaaren von Flächen, wobei der Punkt auf einer Fläche jeder Schaar liegt. Wenn nur eine dieser Flächen gegeben ist, so kann der Punkt irgendwo auf derselben liegen, oder er besitzt, wie wir es oben ausgedrückt haben, zwei Grade von Freiheit. Kommt noch eine zweite und eine dritte Fläche hinzu, auf deren jeder der Punkt liegen muss, so hat er, wie wir sehen, seine ganze Freiheit verloren; mit anderen Worten: seine Lage ist vollständig bestimmt, da sie der Punkt ist, in welchem diese drei Flächen einander schneiden. Die analytischen Meh-

deutigkeiten, die eintreten, wenn die angewandten Flächen sich in mehr als einem Punkte schneiden, brauchen wir hier nicht zu behandeln.

Um dies analytisch auszudrücken, nehmen wir an, $\psi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\vartheta = \gamma$, wo ψ, φ, ϑ Functionen der Lage des Punktes und α, β, γ Constanten sind, seien die Gleichungen der drei Schaaren von Flächen, und die verschiedenen Werthe jeder Constante geben die verschiedenen Flächen der entsprechenden Schaar. So z. B. wird irgend ein Werth von α eine Fläche der ersten Schaar bestimmen, und ebenso verhält es sich mit den übrigen Constanten. Drei besondere Werthe der drei Constanten bestimmen dann einen besonderen Punkt P, insofern derselbe der Durchschnittspunkt der drei Oberflächen ist, die sie bestimmen. Daher sind α, β, γ die „Coordinaten" des Punktes P, und man kann ihn als „den Punkt (α, β, γ)" bezeichnen. Die Form der Coordinatenflächen des Systems $(\psi, \varphi, \vartheta)$ wird nach irgend einem anderen System, z. B. nach dem rechtwinkligen Ebenensystem durch die Coordinaten x, y, z bestimmt, wenn jede der Grössen ψ, φ, ϑ als Function von (x, y, z) gegeben wird.

203. **Ursprung der Differentialrechnung.** — Die den drei Coordinatenaxen eines gewöhnlichen rechtwinkligen Systems parallelen Geschwindigkeitscomponenten eines in Bewegung befindlichen Punktes sind, wie wir gesehen haben, die für die Zeiteinheit genommenen Zunahmen der entsprechenden Coordinaten. Sie werden nach Newton's Bezeichnung $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ und nach Leibnitz's Bezeichnung, die wir oben angewandt haben, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ geschrieben. Lagrange hat, wie wir im zweiten Capitel sehen werden, in seiner Mécanique Analytique beide Bezeichnungen mit bewundernswerthem Geschick und Geschmack verbunden. Wird die Bewegung eines Punktes nach dem allgemeinen Coordinatensystem angegeben, so hat man ψ, φ, ϑ als mit der Zeit veränderlich anzusehen. Es werden dann $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}$ oder $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}$ die allgemeinen Componenten der Geschwindigkeit und $\ddot{\psi}, \ddot{\varphi}, \ddot{\vartheta}$, oder $\frac{d\dot{\psi}}{dt}, \frac{d\dot{\varphi}}{dt}, \frac{d\dot{\vartheta}}{dt}$, oder $\frac{d^2\psi}{dt^2}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ die allgemeinen Componenten der Beschleunigung sein.

204. **Coordinaten eines beliebigen Systems.** — Nach genau denselben Principien können wir Reihen von Coordinaten für

die Bestimmung der Lage und der Bewegung eines materiellen Systems aufstellen, das aus einer endlichen Anzahl starrer Körper oder materieller Punkte besteht, die in irgend einer Weise verbunden sind. Wenn also ψ, φ, ϑ, u. s. w. irgendwelche unabhängig veränderliche Elemente bezeichnen, welche, wenn sie sämmtlich gegeben sind, die Lage und die Configuration des Systems genau angeben — ihre Anzahl ist natürlich gleich derjenigen der Grade von Freiheit, die das System besitzt, — so sind sie die **Coordinaten** des Systems. Wenn sich das System wirklich bewegt, so drücken ihre in der Zeiteinheit erfolgenden Aenderungen oder $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. das aus, was wir die allgemeinen Componenten der Geschwindigkeit nennen werden, und die Zunahmen, welche $\ddot{\psi}, \ddot{\varphi}$, u. s. w. in der Zeiteinheit erfahren, sind die Componenten der Beschleunigung des Systems. Wenn das System z. B. aus einem einzigen völlig freien starren Körper besteht, so können von den sechs Grössen ψ, φ, u. s. w. drei die gewöhnlichen Coordinaten eines Punktes des Körpers sein, während die drei anderen Winkelcoordinaten (§ 100) sind, welche die Lage des Körpers in Beziehung auf Axen fixiren, die in gegebenen Richtungen durch diesen Punkt gehen. Es sind dann $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. die drei Componenten der Geschwindigkeit dieses Punktes und, insofern sie den Aenderungen der Winkelcoordinaten entsprechen, die Geschwindigkeiten der drei in § 100 erläuterten angularen Bewegungen. Oder das System möge aus mehreren starren Körpern bestehen, deren jeder von einer Axe getragen wird, und zwar sei die Axe des ersten Körpers absolut fest, die des zweiten fest in Beziehung auf den ersten, die dritte Axe fest in Beziehung auf den zweiten Körper, u. s. w. In diesem Falle wird es nur so viel Coordinaten geben, als starre Körper vorhanden sind. Diese Coordinaten könnten z. B. folgende sein: — Der Winkel zwischen einer Ebene des ersten Körpers und einer durch die erste Axe gehenden festen Ebene; der Winkel zwischen zwei Ebenen, die durch die zweite Axe gehen und deren eine gegen den ersten, die andere gegen den zweiten Körper fest ist, u. s. w. Die Geschwindigkeitscomponenten $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. würden dann sein: — Die Winkelgeschwindigkeit des ersten Körpers in Beziehung auf im Raum festliegende Richtungen; die Winkelgeschwindigkeit des zweiten Körpers in Beziehung auf den ersten, die des dritten in Beziehung auf den zweiten, u. s. w. Oder wenn das System aus einer Anzahl i völlig freier materieller Punkte besteht, so könnte eine seiner $3i$ Coordinaten die Summe der Quadrate der Abstände dieser Punkte von einem gewissen Punkte sein, der entweder fest ist oder sich in Beziehung auf das

System in irgend einer Weise bewegt, und die $3i - 1$ übrigen Coordinaten könnten Winkel oder blosse Verhältnisse von Abständen zwischen individuellen Punkten des Systems sein. Es ist aber unnöthig, hier noch mehr Beispiele anzuführen. Wir werden noch genug Erläuterungen des Princips der allgemeinen Coordinaten geben, da wir dasselbe im zweiten Capitel und in anderen Theilen dieses Werkes wirklich anwenden werden.

Zusätze zum ersten Capitel.

A. Ausdehnung des Green'schen Satzes.

Wir müssen hier den Beweis einiger rein analytischen Sätze geben, von denen wir viele und wichtige Anwendungen zu machen haben, nicht nur in der unmittelbar folgenden Theorie der harmonischen Kugelfunctionen, sondern auch in den allgemeinen Theorien der Attraction, der Bewegung von Flüssigkeiten, und der Wärmeleitung, sowie in den praktisch wichtigen Untersuchungen, welche die Elektricität, die magnetische und elektro-magnetische Kraft betreffen.

(a.) Es bezeichnen U und U' zwei Functionen dreier unabhängig Veränderlichen x, y, z, die wir passend als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes P ansehen, und α entweder eine constante Grösse oder eine beliebige Function der Veränderlichen. Ferner bezeichne $\int\int\int dx\,dy\,dz$ eine Integration durch einen begrenzten Raum hindurch, der von einer geschlossenen Oberfläche S umgeben wird, und $\int\int dS$ eine Integration, die sich über die ganze Oberfläche S erstreckt. Endlich bezeichne der Buchstabe ∂, wenn er vor irgend eine Function gesetzt wird, die Grösse ihrer Variation in irgend einem Punkte von S, genommen für die Längeneinheit einer Linie, welche zu S normal ist und von innen nach aussen als wachsend betrachtet wird *). Dann ist

$$
(1)\left\{
\begin{aligned}
&\int\int\int \alpha^2\left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}\right)dx\,dy\,dz\\
&=\int\int dS.\,U'\alpha^2\partial U-\int\int\int U'\left\{\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)}{dz}\right\}dx\,dy\,dz\\
&=\int\int dS.\,U\alpha^2\partial U'-\int\int\int U\left\{\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU'}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU'}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU'}{dz}\right)}{dz}\right\}dx\,dy\,dz.
\end{aligned}
\right.
$$

*) Nach dem deutschen Gebrauche des Begriffs einer Function müssen wir hier noch die Bedingung hinzufügen: „Wenn U, U' und α innerhalb des von S umgrenzten Raumes überall eindeutig und continuirlich sind“.

Denn wenn wir einen der drei Theile des ersten Gliedes allein nehmen und partiell integriren, so erhalten wir

$$\int\int\int \alpha^2 \frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int\int U'\alpha^2 \frac{dU}{dx}\,dy\,dz$$
$$- \int\int\int U' \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dU}{dx}\right)}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

Das erste Integral des zweiten Gliedes des letzten Ausdrucks ist zwischen den Grenzen zu nehmen, welche der Oberfläche S entsprechen, d. h. es ist vom negativen zum positiven Ende des innerhalb S liegenden Theils oder der innerhalb S liegenden Theile der durch den Punkt $(0, y, z)$ gehenden Linie x zu nehmen. Bezeichnen nun A_2 und A_1 die Neigung dieser Linie gegen die auswärts an die Oberfläche in solchen Punkten gezogene Normale, in denen jene Linie beziehungsweise in S eintritt und aus S austritt, und sind ferner $d\,S_2$ und $d\,S_1$ die Elemente der Oberfläche, in denen sie in diesen Punkten durch das auf $dy\,dz$ stehende rechtwinklige Prisma geschnitten wird, so haben wir

$$dy\,dz = -\cos A_2\,d\,S_2 = \cos A_1\,d\,S_1.$$

Das betrachtete erste Integral enthält also zwischen den passenden Grenzen die Elemente $U'\alpha^2 \frac{dU}{dx} \cos A_1\,d\,S_1$ und $- U'\alpha^2 \frac{dU}{dx} \cos A_2\,d\,S_2$, von denen das letztere, als der unteren Grenze entsprechend, subtrahirt wird. Da nun, wenn man die ganze Fläche S berücksichtigt, für jedes Element dS_1 ein Element $d\,S_2$ vorhanden ist, so ist das erste Integral einfach

$$\int\int U'\alpha^2 \frac{dU}{dx} \cos A\,d\,S,$$

und zwar ist dies für die ganze Oberfläche zu nehmen. Fügt man die entsprechenden Ausdrücke für y und z hinzu und beachtet, dass

$$\frac{dU}{dx}\cos A + \frac{dU}{dy}\cos B + \frac{dU}{dz}\cos C = \partial U$$

ist, wo B und C die Neigungen der durch $d\,S$ auswärts an die Oberfläche gelegten Normale gegen die durch $d\,S$ gehenden Linien bezeichnen, welche beziehungsweise den y und z Axen parallel und in den positiven Richtungen gezogen sind, so erkennt man die Wahrheit der Formel (1).

(b.) Weiter mögen U und U' zwei Functionen von x, y, z bezeichnen, die in jedem Punkte von S gleiche Werthe haben, und von denen die erstere für jeden innerhalb S gelegenen Punkt der Gleichung

2) $$\frac{d\left(\alpha^2 \frac{dU}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dU}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dU}{dz}\right)}{dz} = 0$$

genügt.

Wird dann $U' - U = u$ gesetzt, so haben wir

$$(3) \qquad \iiint\left\{\left(\alpha\frac{dU'}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU'}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU'}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz$$
$$=\iiint\left\{\left(\alpha\frac{dU}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint\left\{\left(\alpha\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{du}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz.$$

Denn das erste Glied wird dem zweiten identisch gleich, wenn man zu letzterem

$$2\iiint\alpha^2\left(\frac{dU}{dx}\frac{du}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{du}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{du}{dz}\right)dx\,dy\,dz$$

addirt. Dieser Ausdruck ist aber nach (1) gleich

$$2\iint dS.u\alpha^2\partial U-2\iiint u\left\{\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)}{dz}\right\}dx\,dy\,dz$$

folglich gleich Null; das Doppelintegral verschwindet nämlich, weil u der Voraussetzung nach in jedem Punkte von S Null ist, und der zweite Theil oder das dreifache Integral verschwindet der Bedingung (2) wegen.

(c.) Der zweite Theil des zweiten Gliedes von (3) ist seiner Natur nach positiv, vorausgesetzt dass α für jeden innerhalb S gelegenen Punkt (x, y, z) einen reellen Werth hat, der positiv, Null oder negativ sein mag. Folglich ist das erste Glied von (3) grösser als der erste Theil des zweiten Gliedes. Die einzige charakteristische Eigenschaft der Function U ist aber, dass sie der Gleichung (2) genügt; mithin kann nicht auch U' diese Gleichung befriedigen. Mit anderen Worten, wenn U irgend eine Lösung von (2) ist, so kann es keine zweite Lösung geben, welche mit U in jedem Punkte von S übereinstimmt, aber für irgend einen Theil des innerhalb S gelegenen Raumes von U abweicht.

(d.) Es giebt eine Lösung von (2), welche der Bedingung genügt dass U für jeden Punkt der Oberfläche S einen willkürlichen Werth hat. Es bezeichne nämlich U eine ganz beliebige Function, welche in jedem Punkte von S den gegebenen willkürlichen Werth hat. Ferner bezeichne u irgend eine Function, welche in jedem Punkte von S Null ist und in jedem inneren Punkte irgend einen reellen, endlichen oder unendlich kleinen Werth hat, dessen Zeichen mit dem Zeichen von

$$\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)}{dz}$$

übereinstimmt, so dass u natürlich für jeden inneren Punkt (wenn es deren giebt), für welchen dieser Ausdruck den Werth Null hat, gleichfalls Null ist. Endlich sei noch $U' = U + \vartheta u$, wo ϑ eine beliebige Constante bezeichnet. Wendet man dann die Formeln von (b.) an, nachdem man die selben so modificirt hat, dass sie für die geänderten Umstände passen, und bezeichnet der Kürze wegen das Integral

$$\iiint\left\{\left(\alpha\frac{dU}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz$$

mit Q und das daraus durch Vertauschung von U und U' gebildete Integral mit Q', so erhält man

$$Q'=Q-2\vartheta\iiint u\left\{\frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)\right\}dx\,dy\,dz$$
$$+\vartheta^2\iiint\left\{\left(\alpha\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{du}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz.$$

Der Coefficient von -2ϑ ist hier in Folge der Bedingung, unter welcher u gewählt wurde, seiner Natur nach positiv, ausser wenn die Gleichung (2) erfüllt ist, in welchem Falle er den Werth Null hat. Auch der Coefficient von ϑ^2 ist, wenn er nicht gerade Null ist, seiner Natur nach positiv; denn alle Grössen, die er enthält, sind reell. Die letzte Gleichung kann daher in folgender Weise geschrieben werden: —

$$Q'=Q-m\vartheta(n-\vartheta),$$

wo jede der Grössen m, n positiv ist. Dies zeigt, dass, wenn man ϑ irgend einen positiven Werth beilegt, der kleiner als n ist, Q' kleiner als Q gemacht wird, d. h. es lässt sich, ausser wenn die Gleichung (2) befriedigt ist, eine Function U' finden, welche auf S denselben Werth wie U hat und welche, für U in das Integral Q eingesetzt, dieses Integral kleiner macht, als es vorher war. Mit anderen Worten, eine Function U, welche auf der ganzen Oberfläche S irgend einen vorgeschriebenen Werth hat und im Innern von S das Integral Q so klein als möglich macht, muss der Gleichung (2) genügen. Das Integral Q ist aber seiner Natur nach positiv, und daher giebt es eine Grenze, kleiner als welche es nicht gemacht werden kann. Folglich giebt es auch eine der vorgeschriebenen Bedingung unterworfene Lösung von (2).

(e.) Wir haben in (c.) gesehen, dass, wenn es eine Lösung der angegebenen Art von (2) giebt, nur eine solche Lösung vorhanden sein kann, und jetzt sehen wir, dass es wirklich eine giebt. Unsere Betrachtung hat uns also Folgendes gelehrt: — Wenn der Werth der Function U in jedem Punkte irgend einer geschlossenen Oberfläche willkürlich gegeben ist, so bestimmt die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)=0$$

den Werth dieser Function unzweideutig für jeden innerhalb der Oberfläche gelegenen Punkt. Dass dieser wichtige Satz auch für den ganzen unendlichen Raum ausserhalb der Oberfläche S gültig bleibt, geht aus dem vorhergehenden Beweise hervor. Nur hat man die Vorsicht anzuwenden, die verschiedenen Functionen, mit denen man zu thun hat, so zu wählen, dass die dreifachen Integrale sämmtlich convergent gemacht werden. S braucht nicht gerade eine einzige geschlossene Fläche zu sein, sondern kann eine beliebige Anzahl von Oberflächen sein, welche abgesonderte Theile des Raumes einschliessen. Auch der äusserste Fall, in welchem S oder irgend ein abgesonderter Theil von S eine offene Schale d. h. eine endliche nicht geschlossene Oberfläche ist, ist offenbar nicht ausgeschlossen. Endlich kann S oder irgend ein abgesonderter Theil von S auch eine sich ins Unendliche erstreckende Oberfläche sein, wenn nur der Werth, den man auf derselben der Function U nach Willkür beilegt, so gewählt wird, dass die in Rede stehenden dreifachen und zweifachen Integrale convergent gemacht werden.

B. Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen.

Die mathematische Methode, welche gewöhnlich die Methode der „Laplace'schen Coefficienten" genannt wird, die wir aber die Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen nennen wollen, hat zum Gegenstande, eine beliebige periodische Function zweier unabhängig Veränderlichen in einer Form auszudrücken, die sich für eine umfangreiche Klasse physikalischer Probleme eignet, wo willkürliche Data über eine Kugeloberfläche hin gegeben sind, und daraus die Lösung für jeden Punkt des Raumes abzuleiten.

(a.) Eine harmonische Kugelfunction definiren wir als eine homogene Function V von x, y, z, welche der Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \tag{4}$$

genügt. Ihr Grad kann eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, er kann auch gebrochen oder imaginär sein.

(b.) Eine harmonische Kugelflächenfunction ist die Function zweier Winkelcoordinaten oder Kugelflächencoordinaten, in welche sich eine harmonische Kugelfunction auf irgend einer Kugeloberfläche verwandelt, die vom Anfangspunkt O der Coordinaten als Mittelpunkt aus beschrieben ist Wir werden zuweilen eine Function, die nach der Definition (a.) einfach eine harmonische *Kugelfunction* ist, eine räumliche harmonische Kugelfunction nennen, wenn wir besonders darauf aufmerksam machen wollen, dass sie nicht auf eine Kugeloberfläche beschränkt ist.

(c.) Eine harmonische Kugelfunction heisst vollkommen, wenn ihr Werth für alle endlichen Werthe der Coordinaten endlich und eindeutig ist

Eine harmonische Kugelfunction heisst unvollkommen, wenn si entweder für einen den Mittelpunkt umgebenden Raum nicht überall der Fundamentalgleichung (4) genügt, oder nicht wieder denselben Werth an nimmt, während sie um jede geschlossene Curve einmal herumgeht.

(d.) Es wird später gezeigt werden, dass eine vollkommene harmonische Kugelfunction nothwendig entweder eine rationale ganze Function der Coordinaten ist, oder auf eine solche durch einen Factor von der Form $(x^2 + y^2 + z^2)^m$ reducirt werden kann.

(e.) Die allgemeine Aufgabe, harmonische Functionen zu finden, lässt sich kurz so aussprechen: —

Das allgemeinste Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{d^2 u}{d y^2} + \frac{d^2 u}{d z^2} = 0 \tag{4}$$

zu finden, welches der Bedingung

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} = p u \tag{5}$$

genügt. Die letzte Gleichung ist bloss der analytische Ausdruck der Bedingung, dass u eine homogene Function von x, y, z sei, deren Grad p eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, oder irgend ein Bruch, oder eine beliebige imaginäre Grösse sein mag.

(f.) Analytische Ausdrücke für eine absolut allgemeine Integration dieser Gleichungen liessen sich wohl ohne grosse Schwierigkeit in verschiedenen Formen ermitteln. Für uns hängt aber der Werth oder das Interesse, das eine solche Untersuchung haben kann, nur davon ab, dass die gefundenen Lösungen im Stande seien, den Bedingungen auf gewissen Umgrenzungsflächen zu genügen, wie sie sich in physikalischen Problemen darbieten. In einer sehr ausgedehnten und wichtigen Klasse von physikalischen Problemen, in denen ein Raum in Betracht kommt, der von einer vollständigen Kugeloberfläche, oder von zwei vollständigen concentrischen Kugeloberflächen, oder von ganz nahezu kugelförmigen geschlossenen Oberflächen begrenzt wird, ist der unter der in (d.) ausgesprochenen Beschränkung integrirte Fall, in welchem p irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist, von der höchsten Bedeutung. Wir werden denselben unten vollständig ausarbeiten. Weiter giebt es ähnliche Aufgaben, in denen Lösungen für Fälle von gebrochenen und imaginären Werthen von p nützlich sind. In diesen Aufgaben handelt es sich um Ausschnitte aus Kugelräumen, welche durch zwei Diametralebenen gebildet werden, zwischen denen ein beliebiger Winkel enthalten ist, der kein Submultiplum von zwei rechten Winkeln ist; oder sie beziehen sich auf Räume, welche durch zwei Kegel von kreisförmiger Basis mit gemeinschaftlichem Scheitel und gemeinschaftlicher Axe und von dem in ihnen liegenden Theil zweier um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kugelflächen begrenzt werden. Wenn endlich der Gegenstand ein fester oder flüssiger Körper von der Form des Ausschnittes ist, der aus den letzterwähnten Räumen durch zwei durch die Axe der Kegel gehende Ebenen herausgeschnitten wird, deren Neigung zu einander ein beliebiger Winkel ist, so haben wir es mit einem Falle zu thun, in welchem p eine ganze oder eine gebrochene Zahl ist, je nachdem der letzterwähnte Winkel ein Submultiplum von π ist oder nicht; doch ist dieser Fall unter einer Voraussetzung zu integriren, die von der in (d.) angegebenen verschieden ist. Wir werden daher, nachdem wir allgemeine Ausdrücke für vollkommene harmonische Kugelfunctionen erforscht haben werden, einige Andeutungen über die Bestimmung der unvollkommenen harmonischen Functionen von gebrochenem oder imaginärem oder ganzzahligem Grade machen, welche für die Lösung von Aufgaben erforderlich sind, in denen Räume betrachtet werden, wie wir sie eben beschrieben haben.

Zunächst stellen wir einige wenige Formeln zusammen, welche im Folgenden benutzt werden.

(g.) Wir nennen den Anfangspunkt der Coordinaten O, den Punkt x, y, z P und nehmen $OP = r$ an, so dass $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist. Ferner bezeichne der Buchstabe ∂, wenn er vor irgend eine Function gesetzt ist, die in Beziehung auf die Längeneinheit in der Richtung OP genommene Grösse der Variation dieser Function, so dass

$$\partial = \frac{x}{r}\frac{d}{dx} + \frac{y}{r}\frac{d}{dy} + \frac{z}{r}\frac{d}{dz} \tag{6}$$

ist. Bezeichnet H_p irgend eine homogene Function $p$ter Ordnung von x, y, z, so haben wir offenbar

$$\partial H_p = \frac{p}{r} H_p , \tag{7}$$

folglich

(5) oder (8) $$x\frac{dH_p}{dx} + y\frac{dH_p}{dy} + z\frac{dH_p}{dz} = pH_p,$$

die bekannte Differentialgleichung einer homogenen Function, in der p natürlich jeden positiven oder negativen ganzen, jeden gebrochenen oder imaginären Werth haben kann. Wird weiter der Kürze wegen $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ mit ∇^2 bezeichnet, so ergiebt sich durch Differentiation

$$\nabla^2 (r^m) = m(m + 1) r^{m-2}. \tag{9}$$

Auch ist, wenn u, u' zwei beliebige Functionen bezeichnen,

$$\nabla^2 (uu') = u'\nabla^2 u + 2\left(\frac{du}{dx}\frac{du'}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{du'}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{du'}{dz}\right) + u\nabla^2 u', \tag{10}$$

und hieraus folgt, wenn jede dieser Functionen u, u' eine Lösung von (4) ist,

$$\nabla^2 (uu') = 2\left(\frac{du}{dx}\frac{du'}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{du'}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{du'}{dz}\right), \tag{11}$$

oder, wenn wir $u = V_p =$ einer harmonischen Function $p$ten Grades und $u' = r^m$ annehmen,

$$\nabla^2 (r^m V_p) = 2mr^{m-2}\left(x\frac{dV_p}{dx} + y\frac{dV_p}{dy} + z\frac{dV_p}{dz}\right) + V_p\nabla^2 (r^m),$$

oder, nach (8) und (9),

$$\nabla^2 (r^m V_p) = m(2p + m + 1) r^{m-2} V_p. \tag{12}$$

Aus dieser letzten Gleichung geht hervor, dass $r^{-2p-1} V_p$ eine harmonische Function ist, und da sie vom Grade $-p-1$ ist, so können wir sie mit V_{-p-1} bezeichnen, so dass wir

$$\begin{cases} V_{-p-1} = r^{-2p-1} V_p , \\ \text{oder} \\ \dfrac{V_{p'}}{r^{p'}} = \dfrac{V_p}{r^p} \\ \text{für} \\ p + p' = -1 \end{cases} \tag{13}$$

haben, eine Formel, die uns die gegenseitige Beziehung zwischen zwei räumlichen harmonischen Functionen zeigt, welche auf jeder um O als Mittelpunkt beschriebenen Kugeloberfläche dieselbe Form der harmonischen Flächenfunction liefern. Wird weiter in (9) $m = -1$ angenommen, so erhält man

(14)
$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0.$$

Danach ist $\frac{1}{r}$ eine harmonische Function vom Grade -1. Wir werden später sehen, dass sie die einzige vollkommene harmonische Function dieses Grades ist.

Wenn u irgend eine Lösung der Gleichung $\nabla^2 u = 0$ ist, so hat man auch

$$\nabla^2 \frac{du}{dx} = 0,$$

und ebenso sind die höheren Differentialquotienten Lösungen derselben Gleichung. Ist also V_ν eine harmonische Function von einem beliebigen Grade ν, so ist $\frac{d^{j+k+l} V_\nu}{dx^j dy^k dz^l}$ eine harmonische Function vom Grade $\nu - j - k - l$, oder wir können

(15)
$$\frac{d^{j+k+l} V_\nu}{dx^j dy^k dz^l} = V_{\nu-j-k-l}$$

schreiben.

Weiter giebt es einen äusserst wichtigen Satz, der durch die folgende Gleichung ausgedrückt wird: —

(16)
$$\int\int S_n S_{n'} d\omega = 0;$$

darin bezeichnet $d\omega$ ein Element einer Kugeloberfläche, die von O als Mittelpunkt aus mit dem Radius Eins beschrieben ist; die Integration $\int\int$ hat sich über die ganze Oberfläche zu erstrecken, und S_n, $S_{n'}$ bezeichnen zwei vollkommene harmonische Flächenfunctionen, deren Ordnungen n und n' weder einander gleich sind, noch zur Summe -1 haben. Denn wenn wir die räumlichen harmonischen Functionen $r^n S_n$ und $r^{n'} S_{n'}$ für jeden Punkt (x, y, z) mit V_n und $V_{n'}$ bezeichnen, so ergiebt sich durch Anwendung des obigen allgemeinen Satzes (1) in $A(a)$ auf den Raum, der zwischen zwei um O als Mittelpunkt mit den Radien a und a_1 beschriebenen concentrischen Kugeloberflächen liegt,

$$\int\int\int \left(\frac{dV_n}{dx}\frac{dV_{n'}}{dx} + \frac{dV_n}{dy}\frac{dV_{n'}}{dy} + \frac{dV_n}{dz}\frac{dV_{n'}}{dz}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \int\int V_n \partial V_{n'} d\sigma = \int\int V_{n'} \partial V_n d\sigma.$$

Nach (7) ist aber $\partial V_{n'} = \frac{n'}{r} V_{n'}$ und $\partial V_n = \frac{n}{r} V_n$, und für die beziehungsweise durch die beiden Kugeloberflächen gebildeten Theile der Umgrenzungsfläche ist $d\sigma = a^2 d\omega$, $d\sigma = a_1^2 d\omega$. Folglich gehen die beiden letzten gleichen Glieder der vorhergehenden Doppelgleichung über in

$$n\left(a^{n+n'+1} - a_1^{n+n'+1}\right) \int\int S_n S_{n'}\, d\omega =$$
$$n'\left(a^{n+n'+1} - a_1^{n+n'+1}\right) \int\int S_n S_{n'}\, d\omega,$$

und damit dies erfüllt sei, muss, wenn n von n' und $a^{n+n'+1}$ von $a_1^{n+n'+1}$ verschieden ist, die Gleichung (16) bestehen.

Der entsprechende Satz für unvollkommene harmonische Kugelfunctionen ist folgender: —

Es bezeichnen $S_n, S_{n'}$ irgend zwei unvollkommene harmonische Kugelflächenfunctionen, deren Grade n, n' von einander verschieden sind und eine von -1 verschiedene Summe haben; ferner sollen diese Functionen folgender Bedingung genügen: An jedem Punkte der Umgrenzung irgend eines Theils der Kugeloberfläche soll entweder jede derselben oder aber ihr Differentialquotient, genommen in normaler Richtung zur Umgrenzung für jede von beiden verschwinden, und in jedem Punkte des eingeschlossenen Theils der Oberfläche soll jede einen endlichen und eindeutigen Werth haben. Dann bleibt die Gleichung (16) gültig, vorausgesetzt dass die Integration $\int\int$ auf den in Rede stehenden Theil der Oberfläche beschränkt wird. Der Beweis weicht von dem vorhergehenden nur darin ab, dass man hier nicht den ganzen zwischen zwei concentrischen Kugeloberflächen liegenden Raum zu nehmen hat, sondern nur den Theil desselben, der durch den Kegel eingeschlossen wird, welcher O zum Scheitel hat und die Umgrenzung der betrachteten sphärischen Fläche enthält.

(h.) Wir wenden uns jetzt zur Erforschung vollkommener harmonischer Functionen und werden zunächst beweisen, dass eine jede solche Function entweder eine rationale und ganze Function der Coordinaten x, y, z ist, oder vermittels eines Factors von der Form r^m dazu gemacht werden kann.

Es bezeichne V irgend eine Function, welche in jedem Punkte innerhalb einer Kugeloberfläche S, die von O als Mittelpunkt aus mit einem beliebigen Radius a beschrieben ist, der Gleichung

$$\nabla^2 V = 0 \tag{17}$$

genügt. Wenn ihr Werth an dieser Oberfläche eine bekannte Function von beliebigem Charakter ist, so kann er nach dem unten in (51) enthaltenen allgemeinen Satze in folgende Reihe entwickelt werden: —

$$(r = a),\quad V = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \text{u. s. w.,} \tag{18}$$

wo $S_1, S_2, \cdots S_n$ die Flächenwerthe räumlicher harmonischer Kugelfunctionen von den Graden $1, 2, \cdots n$ bezeichnen, deren jede für jeden innerhalb S gelegenen Punkt eine rationale ganze Function ist. Es ist aber

$$S_0 + S_1 \frac{r}{a} + S_2 \frac{r^2}{a^2} + \cdots + S_n \frac{r^n}{a^n} + \text{u. s. w.} \tag{19}$$

eine den gestellten Bedingungen genügende Function, und folglich kann, wie oben in $A(c)$ bewiesen worden, V von (19) nicht verschieden sein. Es sei nun, als ein besonderer Fall, V eine harmonische Function von einem positiven Grade ν; wir können sie dann mit $S_\nu \frac{r^\nu}{a^\nu}$ bezeichnen, und es muss

$$S_\nu \frac{r^\nu}{a^\nu} = S_0 + S_1 \frac{r}{a} + S_2 \frac{r^2}{a^2} + \cdots + S_n \frac{r^n}{a^n} + \text{u. s. w.}$$

sein. Das ist unmöglich, ausser wenn $\nu = n$, $S_\nu = S_n$ ist und alle übrigen Functionen S_0, S_1, S_2, u. s. w. verschwinden. Es kann also keine vollkommene harmonische Kugelfunction von einem positiven Grade geben, welche nicht, wie $S_n \frac{r^n}{a^n}$, von einem ganzzahligen Grade und eine ganze rationale Function der Coordinaten ist.

Es sei ferner V irgend eine Function, welche für jeden Punkt ausserhalb der Kugeloberfläche S der Gleichung (17) genügt und in unendlicher Entfernung nach jeder Richtung zu verschwindet; ihr Werth auf der Oberfläche S werde wieder durch (18) ausgedrückt. Wir beweisen dann auf ähnliche Weise, dass diese Function nicht von

$$\frac{a S_0}{r} + \frac{a^2 S_1}{r^2} + \frac{a^3 S_2}{r^3} + \cdots + \frac{a^{n+1} S_n}{r^{n+1}} + \text{u. s. w.} \tag{20}$$

verschieden sein kann. Wenn daher, als ein besonderer Fall, V irgend eine vollkommene harmonische Function $\frac{r^\varkappa S_\varkappa}{a^\varkappa}$ von einem negativen Grade $\varkappa$ ist, so muss für alle ausserhalb S gelegenen Punkte

$$\frac{r^\varkappa S_\varkappa}{a^\varkappa} = \frac{a S_0}{r} + \frac{a^2 S_1}{r^2} + \frac{a^3 S_2}{r^3} + \cdots + \frac{a^{n+1} S_n}{r^{n+1}} + \text{u. s. w.}$$

sein, und dies erfordert, dass $\varkappa = -(n+1)$, $S_\varkappa = S_n$ ist, und dass alle übrigen Functionen S_0, S_1, S_2, u. s. w. verschwinden. Eine vollkommene harmonische Kugelfunction negativen Grades kann somit keine andere als $\frac{a^{n+1} S_n}{r^{n+1}}$, oder $\frac{a^{n+1}}{r^{2n+1}} S_n r^n$ sein, wo $S_n r^n$ nicht nur, wie behauptet wurde, eine rationale ganze Function der Coordinaten, sondern selbst eine harmonische Kugelfunction ist.

(i.) **Ordnung und Grad vollkommener Kugelfunctionen.** — Wir haben also bewiesen, dass eine vollkommene Kugelfunction, wenn sie von einem positiven Grade ist, nothwendig auch von einem ganzzahligen Grade und ausserdem eine rationale ganze Function der Coordinaten ist, oder, wenn sie von einem negativen Grade $-(n+1)$ ist, nothwendig die Form $\frac{V_n}{r^{2n+1}}$ hat, wo V_n eine harmonische Function von einem positiven Grade n ist. Wir werden daher unter der **Ordnung** einer vollkommenen harmonischen Kugelfunction negativen Grades den **Grad** oder die **Ordnung** der mit ihr verbundenen vollkommenen harmonischen Function positiven Grades und unter der **Ordnung** einer harmonischen Flächenfunction ebenso den Grad oder die Ordnung der räumlichen harmonischen Kugelfunction positiven Grades oder die Ordnung der räumlichen harmonischen Function negativen Grades verstehen, welche mit ihr auf der Kugeloberfläche übereinstimmt.

(j.) Um allgemeine Ausdrücke für vollkommene harmonische Kugelfunctionen aller Ordnungen zu erhalten, bemerken wir zunächst, dass eine vollkommene harmonische Function vom Grade 0 nothwendig constant ist, da ja eine Constante die einzige rationale ganze Function 0ten Grades ist. Nach dem, was wir soeben gesehen haben, ist also eine vollkommene harmonische Function vom Grade -1 nothwendig von der Form $\frac{A}{r}$. Dass diese Function harmonisch ist, haben wir schon früher aus (14) erkannt.

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (15)

$$(21)\qquad \begin{cases} V_{-n-1} = \dfrac{d^{j+k+l}}{d x^j\, d y^k\, d z^l} \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, \\ \text{wenn } j+k+l = n \text{ ist,} \end{cases}$$

wo V_{-n-1} eine harmonische Function vom Grade $-(n+1)$ bezeichnet, die offenbar eine vollkommene harmonische Function ist. Berechnet man den hier angegebenen Differentialquotienten, so sieht man, dass derselbe ein Bruch ist, dessen Zähler eine rationale ganze Function $n$ten Grades, und dessen Nenner r^{2n+1} ist. Nach dem eben erhaltenen Resultat muss der Zähler eine harmonische Function sein; wird dieselbe mit V_n bezeichnet, so haben wir daher

$$(22)\qquad V_n = r^{2n+1} \frac{d^{j+k+l}}{d x^j\, d y^k\, d z^l} \frac{1}{r}.$$

Die Anzahl der unabhängigen harmonischen Functionen $n$ter Ordnung, die wir auf diese Weise aus $\frac{1}{r}$ durch Differentiation herleiten können, ist $2n+1$. Es giebt zwar $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ Differentialquotienten $\frac{d^{j+k+l}}{dx^j\, dy^k\, dz^l}$, für welche $j+k+l = n$ ist; aber wenn $\frac{1}{r}$ der Gegenstand der Differentiation ist, so sind nur $2n+1$ derselben unabhängig. Es ist nämlich

$$(14)\qquad \left(\frac{d^2}{d x^2} + \frac{d^2}{d y^2} + \frac{d^2}{d z^2}\right)\frac{1}{r} = 0;$$

dies liefert für jede ganze Zahl p

$$(23)\qquad \frac{d^{2p}}{d z^{2p}} \frac{1}{r} = (-1)^p \left(\frac{d^2}{d x^2} + \frac{d^2}{d y^2}\right)^p \frac{1}{r}$$

und zeigt, dass

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^{j+k+l}}{d x^j\, d y^k\, d z^l} \dfrac{1}{r} = (-1)^{\frac{l}{2}} \dfrac{d^{j+k}}{d x^j\, d y^k} \left(\dfrac{d^2}{d x^2} + \dfrac{d^2}{d y^2}\right)^{\frac{l}{2}} \dfrac{1}{r}, & \text{wenn } l \text{ gerade ist,} \\ \text{oder} \\ \qquad = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \dfrac{d^{j+k}}{d x^j\, d y^k} \left(\dfrac{d^2}{d x^2} + \dfrac{d^2}{d y^2}\right)^{\frac{l-1}{2}} \dfrac{d}{d z} \dfrac{1}{r}, & \text{wenn } l \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Nehmen wir also erstens $l = 0$ und $j + k = n$, so erhalten wir $n + 1$ Differentialquotienten $\frac{d^{j+k}}{dx^j dy^k}$, und wird weiter $l = 1$ und $j + k = n - 1$ genommen, so ergeben sich noch n Differentialquotienten $\frac{d^{j+k}}{dx^j dy^k}$, d. h. wenn $\frac{1}{r}$ Gegenstand der Differentiation ist, so haben wir im Ganzen $2n + 1$ und nicht mehr verschiedene Differentialquotienten, von denen man leicht zeigen kann, dass sie in der That unabhängig sind. Wir brauchen uns aber hier nicht damit aufzuhalten, diese Unabhängigkeit nachzuweisen, da sie unten in den wirklichen Entwicklungen zu Tage treten wird.

Bezeichnet jetzt $H_n(x, y, z)$ irgend eine rationale ganze Function $n$ten Grades von x, y, z, so ist $\nabla^2 H_n(x, y, z)$ vom Grade $n - 2$, und da H_n aus $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ Gliedern besteht, so ist $\frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl der Glieder von $\nabla^2 H_n$. Ist also $\nabla^2 H_n = 0$, so haben wir $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen zwischen den constanten Coefficienten, und die Anzahl der übrig bleibenden unabhängigen Constanten ist $\frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$, oder $2n + 1$, d. h. in der allgemeinen rationalen ganzen harmonischen Function $n$ten Grades giebt es $2n + 1$ Constanten. Wir haben aber gesehen, dass es $2n + 1$ verschiedene Differentialquotienten $n$ter Ordnung von $\frac{1}{r}$ giebt, und dass der Zähler eines jeden eine harmonische Function $n$ten Grades ist. Es lässt sich somit jede vollkommene harmonische Function $n$ter Ordnung durch die Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ ausdrücken. Es ist unmöglich, $2n + 1$ Functionen symmetrisch aus drei Veränderlichen zu bilden, ausser wenn $2n + 1$ durch 3 theilbar, d. h. n von der Form $n = 3p + 1$ ist, wo p jede ganze Zahl sein kann; diese Classe von Fällen verdient besondere Beachtung. Dagegen lässt sich für jeden Werth von n die allgemeine harmonische Function als eine Function mit $2n+1$ Constanten darstellen, welche zwei von den drei Veränderlichen symmetrisch enthält. Dies kann auf verschiedenen Wegen geschehen, von denen wir die beiden folgenden als die nützlichsten wählen: — Erstens ist

$$
25)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{V_n}{r^{2n+1}} = {} & \Big\{A_0\left(\frac{d}{dx}\right)^n + A_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\frac{d}{dy} + A_2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \cdots \\
& \qquad + A_n\left(\frac{d}{dy}\right)^n\Big\}\frac{1}{r} \\
& + \Big\{B_0\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + B_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\frac{d}{dy} + B_2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-3}\left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \cdots \\
& \qquad + B_{n-1}\left(\frac{d}{dy}\right)^{n-1}\Big\}\frac{d}{dz}\frac{1}{r}.
\end{aligned}\right.
$$

Zweitens sei

$$26)\quad x + yi = \xi, \quad x - yi = \eta,$$

wo i wie gewöhnlich $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Dann erhält man

$$(27)\quad \begin{cases} x = \tfrac{1}{2}(\xi + \eta), \quad y = \dfrac{1}{2i}(\xi - \eta) \\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{(\xi\eta + z^2)^{1/2}}, \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}[x,y] = \left(\dfrac{d}{d\xi} + \dfrac{d}{d\eta}\right)[\xi,\eta], \quad \dfrac{d}{dy}[x,y] = i\left(\dfrac{d}{d\xi} - \dfrac{d}{d\eta}\right)[\xi,\eta] \\ \dfrac{d}{d\xi}[\xi,\eta] = \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{dx} - i\dfrac{d}{dy}\right)[x,y], \quad \dfrac{d}{d\eta}[\xi,\eta] = \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{dx} + i\dfrac{d}{dy}\right)[x,y], \end{cases}$$

wo die Symbole $[x,y]$ und $[\xi,\eta]$ ein und dieselbe Grösse bezeichnen, die beziehungsweise durch x,y und durch ξ,η ausgedrückt ist. Hieraus folgt weiter

$$(29)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d^2}{dy^2} + \dfrac{d^2}{dz^2}\right)[x,y,z] = \left(4\dfrac{d^2}{d\xi\, d\eta} + \dfrac{d^2}{dz^2}\right)[\xi,\eta,z], \\ \text{oder nach unserer abgekürzten Bezeichnung} \\ \nabla^2 = 4\dfrac{d^2}{d\xi\, d\eta} + \dfrac{d^2}{dz^2}. \end{cases}$$

Dann ist, wie früher

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{V_n}{r^{2n+1}} = \left\{\mathfrak{A}_0\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)^n + \mathfrak{A}_1\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)^{n-1}\dfrac{d}{d\eta} + \mathfrak{A}_2\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)^{n-2}\left(\dfrac{d}{d\eta}\right)^2 + \cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathfrak{A}_n\left(\dfrac{d}{d\eta}\right)^n\right\}\dfrac{1}{r} \\ \quad + \left\{\mathfrak{B}_0\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)^{n-1} + \mathfrak{B}_1\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)^{n-2}\dfrac{d}{d\eta} + \mathfrak{B}_2\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)^{n-3}\left(\dfrac{d}{d\eta}\right)^2 + \cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathfrak{B}_{n-1}\left(\dfrac{d}{d\eta}\right)^{n-1}\right\}\dfrac{d}{dz}\dfrac{1}{r}. \end{cases}$$

Die hier geforderten Differentiationen lassen sich mit grosser Leichtigkeit mit Hülfe des **Leibnitz**'schen Satzes ausführen. Man erhält

$$(31)\quad \begin{cases} r^{2(m+p)+1}\dfrac{d^{m+p}}{d\xi^m\, d\eta^p}\dfrac{1}{r} = (-1)^{m+p}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdots(m+p-\tfrac{1}{2})\Big[\eta^m\xi^p \\ \qquad - \dfrac{mp}{1.(m+p-\frac{1}{2})}\eta^{m-1}\xi^{p-1}r^2 \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)\cdot p(p-1)}{1.2.(m+p-\frac{1}{2})(m+p-\frac{3}{2})}\eta^{m-2}\xi^{p-2}r^4 - \text{u. s. w.}\Big] \\ \text{und} \\ r^{2(m+p)+3}\dfrac{d^{m+p+1}}{d\xi^m\, d\eta^p\, dz}\dfrac{1}{r} = (-1)^{m+p+1}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdots(m+p+\tfrac{1}{2})2z \\ \qquad \Big[\eta^m\xi^p - \dfrac{mp}{1.(m+p+\frac{1}{2})}\eta^{m-1}\xi^{p-1}r^2 \\ \qquad + \dfrac{m(m-1).p(p-1)}{1.2.(m+p+\frac{1}{2})(m+p-\frac{1}{2})}\eta^{m-2}\xi^{p-2}r^4 - \text{u. s. w.}\Big] \end{cases}$$

Dieser Ausdruck führt sofort zu einer reellen Entwicklung in Polarcoordinaten: — Es sei

$$(32)\qquad z = r\cos\vartheta, \quad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$

so dass

(33) $$\xi = r \sin\vartheta\, e^{i\varphi}, \quad \eta = r \sin\vartheta\, e^{-i\varphi}$$

ist. Dann ist noch

$$\xi\eta = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta$$

und

$$\begin{aligned}\xi^p \eta^m = (\xi\eta)^m \xi^s &= (\xi\eta)^m (r\sin\vartheta)^s (\cos\varphi + i\sin\varphi)^s \\ &= (r\sin\vartheta)^{m+p} (\cos s\varphi + i\sin s\varphi),\end{aligned}$$

wo $s = p - m$ ist, und wenn wir weiter

(34) $$\begin{cases} \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_m = A_s, & (\mathfrak{A}_p - \mathfrak{A}_m)\, i = A'_s \\ \mathfrak{B}_p + \mathfrak{B}_m = B_s, & (\mathfrak{B}_p - \mathfrak{B}_m)\, i = B'_s \end{cases}$$

nehmen, so erhalten wir:

(35) $$\begin{cases} \mathfrak{A}_p \dfrac{d^{m+p}}{d\xi^m\, d\eta^p} \dfrac{1}{r} + \mathfrak{A}_m \dfrac{d^{m+p}}{d\xi^p\, d\eta^m} \dfrac{1}{r} \\ = (-1)^{m+p} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{2} \cdots (m+p-\tfrac{1}{2})\, r^{-(m+p+1)} (A_s \cos s\varphi + A'_s \sin s\varphi) \times \\ \Big[\sin^{m+p}\vartheta - \dfrac{m\,p}{1\,.\,(m+p-\tfrac{1}{2})} \sin^{m+p-2}\vartheta \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)\,.\,p(p-1)}{1\,.\,2\,.\,(m+p-\tfrac{1}{2})(m+p-\tfrac{3}{2})} \sin^{m+p-4}\vartheta - \text{u. s. w.}\Big], \\ \mathfrak{B}_p \dfrac{d^{m+p+1}}{d\xi^m\, d\eta^p\, dz} \dfrac{1}{r} + \mathfrak{B}_m \dfrac{d^{m+p+1}}{d\xi^p\, d\eta^m\, dz} \dfrac{1}{r} \\ = (-1)^{m+p+1} \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{2} \cdots (m+p+\tfrac{1}{2})\, r^{-(m+p+2)} (B_s \cos s\varphi \\ \qquad + B'_s \sin s\varphi) \cos\vartheta \times \\ \Big[\sin^{m+p}\vartheta - \dfrac{m\,p}{1\,.\,(m+p+\tfrac{1}{2})} \sin^{m+p-2}\vartheta \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)\,.\,p(p-1)}{1\,.\,2\,.\,(m+p+\tfrac{1}{2})(m+p-\tfrac{1}{2})} \sin^{m+p-4}\vartheta - \text{u. s. w.}\Big]. \end{cases}$$

Wir nehmen jetzt weiter keine Rücksicht auf die constanten Factoren, die wir bisher nur aus dem Grunde beibehielten, um die Beziehungen der untersuchten Ausdrücke zu den Differentialquotienten von $\dfrac{1}{r}$ zu zeigen. Bezeichnen wir noch mit Σ die Summation in Beziehung auf die willkürlichen Constanten A, A', B, B', so erhalten wir den folgenden ganz allgemeinen Ausdruck für eine vollkommene harmonische Kugelflächenfunction $n$ter Ordnung:

$$(36)\begin{cases} S_n = \sum^{m+p=n} (A_s \cos s\varphi + A'_s \sin s\varphi)\, \Theta(m,p) \\ \quad + \sum^{m+p+1=n} (B_s \cos s\varphi + B'_s \sin s\varphi) \cos\vartheta\, Z(m,p), \\ \text{wo } s = m \backsim p, \text{ d. h.} = +\sqrt{(m-p)^2} \text{ und} \\ \Theta(m,p) = \sin^{m+p}\vartheta - \frac{m\,p}{1\,.\,(m+p-\frac{1}{2})} \sin^{m+p-2}\vartheta \\ \quad + \frac{m(m-1)\,.\,p(p-1)}{1\,.\,2\,.\,(m+p-\frac{1}{2})(m+p-\frac{3}{2})} \sin^{m+p-4}\vartheta - \text{u. s. w.} \end{cases}$$

ist, während $Z(m,p)$ von $\Theta(m,p)$ nur darin abweicht, dass in den Nennern von $Z(m,p)$ statt $m+p$ überall $m+p+1$ steht.

Die für eine harmonische Kugelfunction $n$ter Ordnung gewöhnlich gegebene, etwas einfachere Formel (Laplace, Mécanique Céleste, livre III, chap. II, oder Murphy's Electricity, Preliminary Prop. XI) ist folgende: —

$$(37)\qquad S_n = \sum_{s=0}^{s=n} (A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi)\, \Theta_n^{(s)},$$

$$(38)\qquad \Theta_n^{(s)} = \sin^s\vartheta \left[\cos^{n-s}\vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2\,.\,(2n-1)} \cos^{n-s-2}\vartheta \right. \\ \left. + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2\,.\,4\,.\,(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-s-4}\vartheta - \text{u. s. w.}\right].$$

Wir fügen hinzu, dass $\Theta_n^{(s)}$ dieselbe Bedeutung wie $\Theta(m,p)$ hat, wenn $m+p=n$ und $m \backsim p = s$ ist, oder dieselbe Bedeutung wie $\cos\vartheta\, Z(m,p)$, wenn $m+p+1=n$ und $m \backsim p = s$ ist. Dies kann aus dem Vorhergehenden durch eine algebraische Umformung hergeleitet werden; es kann auch direct durch eine passende Aenderung der oben angewandten Differentiationsmethode gefunden werden. Man kann es aber auch dadurch erhalten, dass man (a_s und b_s als willkürliche Constanten angenommen)

$$V_n = S_n r^n = \Sigma (a_s \xi^s + b_s \eta^s)(z^{n-s} + \alpha r^2 z^{n-s-2} \\ + \beta r^4 z^{n-s-4} + \text{u. s. w.})$$

voraussetzt, was offenbar eine richtige Form ist, und α, β, u. s. w. durch die Differentialgleichung $\nabla^2 V_n = 0$ und (29) bestimmt.

Eine andere Form, die vielleicht die nützlichste ist, kann man mit sogar noch grösserer Leichtigkeit auf folgende Weise erlangen: — Nimmt man

$$V_n = \Sigma (a_s \xi^s + b_s \eta^s)(z^{n-s} + \alpha_1 z^{n-s-2} \xi\eta + \alpha_2 z^{n-s-4} \xi^2 \eta^2 + \text{u. s. w.}$$

an und bestimmt α_1, α_2, u. s. w. durch die Differentialgleichung, so erhält man

$$(39)\begin{cases} V_n = \Sigma (a_s \xi^s + b_s \eta^s) \left[z^{n-s} - \frac{(n-s)(n-s-1)}{4\,.\,(s+1)\,.\,1} z^{n-s-2} \xi\eta \right. \\ \left. \quad + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{4^2\,.\,(s+1)(s+2)\,.\,1\,.\,2} z^{n-s-4} \xi^2 \eta^2 - \text{u. s. w.} \right]. \end{cases}$$

was auch leicht durch Differentiation von $\frac{1}{r}$ hätte gefunden werden können. Werden jetzt die imaginären Symbole eliminirt und die Bezeichnung von (37) und (38) beibehalten, so ergiebt sich

$$(40)\quad \begin{cases} \Theta_n^{(s)} = C \sin^s \vartheta \Big[\cos^{n-s} \vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{4.(s+1)} \cos^{n-s-2} \vartheta \sin^2 \vartheta \\ \quad + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{4^2.(s+1)(s+2).1.2} \cos^{n-s-4} \vartheta \sin^4 \vartheta - \text{u.s.w.} \Big], \\ \text{wo} \\ C = \frac{(2s+1)(2s+2)\cdots(n+s)}{(2s+1)(2s+3)\cdots(2n-1)} \text{ ist.} \end{cases}$$

Dieser Werth von C wird entweder durch Vergleich mit der Formel (38), von welcher die letzterhaltene eine algebraische Modification ist, oder, vielleicht leichter, auf folgende Weise gefunden: — Wir haben nach (29)

$$(41)\quad \begin{cases} \frac{d^n}{dz^{n-s}\, d\eta^s} \frac{1}{r} = (-1)^{\frac{n-s}{2}}\, 2^{n-s} \frac{d^n}{d\xi^{\frac{n-s}{2}}\, d\eta^{\frac{n+s}{2}}} \frac{1}{r}, \text{ wenn } n-s \text{ gerade,} \\ \text{oder} \\ \qquad = (-1)^{\frac{n-s-1}{2}}\, 2^{n-s-1} \frac{d^n}{dz\, d\xi^{\frac{n-s-1}{2}}\, d\eta^{\frac{n+s-1}{2}}} \frac{1}{r}, \text{ wenn } n-s \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Wird das erste Glied nach Potenzen von z, ξ, η entwickelt, dadurch dass man der Reihe nach erst $s$mal in Beziehung auf η und sodann $(n-s)$mal in Beziehung auf z differentiirt, so erhält man für einen Term seines Zählers

$$(42)\quad (-1)^n\, {}^1\!/_2 \cdot {}^3\!/_2 \cdots (s - {}^1\!/_2)(2s+1)(2s+2)(2s+3)\cdots(n+s)\, z^{n-s}\, \xi^s,$$

und daraus ergiebt unter Benutzung von (41), (35), (39), (40) der Werth von C.

(k.) **Wichtige Eigenschaften der entwickelten Glieder.** — Es ist sehr wichtig zu bemerken, dass man erstens

$$(43)\quad \iint U_n\, U'_n\, d\sigma = 0$$

hat, wo U_n und U'_n irgend zwei von den Elementen bezeichnen, aus denen V in einem der vorhergehenden Ausdrücke zusammengesetzt ist, und dass zweitens

$$(44)\quad \int_0^\pi \Theta_n^{(s)}\, \Theta_{n'}^{(s)} \sin \vartheta\, d\vartheta = 0$$

ist, wo natürlich der Fall $n = n'$ ausgeschlossen bleibt. Denn nehmen wir $r = a =$ dem Radius der Kugeloberfläche und, wie oben, $d\sigma = a^2 d\omega$, so haben wir $d\omega = \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, u. s. w., und die Grenzen von ϑ und φ in der Integration für die ganze Kugeloberfläche sind beziehungsweise 0 bis π und 0 bis 2π. Da nun $\int_0^{2\pi} \cos s\varphi \cos s'\varphi\, d\varphi = 0$ ist, so erkennen wir die Wahrheit der ersteren Behauptung; die zweite lässt sich aus (16) und (36) algebraisch verificiren, was wir dem Leser zur Uebung überlassen.

(l.) **Entwicklungen unvollkommener Kugelfunctionen für Kegel und Keile.** — Jede der vorhergehenden Reihen kann mit jedem Ende begonnen und, auch wenn die Grössen n, m, p oder s sämmtlich oder zum Theil gebrochen oder imaginär sind, gebraucht werden. Jede auf diese Weise erhaltene Reihe, die Anzahl ihrer Glieder mag endlich oder unendlich sein, drückt eine harmonische Function $n$ten Grades aus, da sie vom $n$ten Grade ist und der Gleichung $\nabla^2 V_n = 0$ genügt. In einigen dieser Fälle bleibt die Reihe endlich, und dann ist ihre Anwendung an sich klar. Ist die Reihe unendlich, so darf sie im Falle ihrer Convergenz gebraucht werden, und ausser für besondere Grenzwerthe der Veränderlichen wird die aus irgend einem der vorhergehenden endlichen Ausdrücke, wenn derselbe mit einem seiner beiden Enden begonnen wird, erhaltene unendliche Reihe convergiren. Auf diese Weise verschafft uns jeder der endlichen Ausdrücke immer eine Reihe, welche für jeden der jetzt vorausgesetzten gebrochenen oder imaginären Werthe convergirt. (Es lässt sich in der That leicht zeigen, dass er eine divergente unendliche Reihe liefert, wenn man ihn mit dem einen Ende beginnt, dagegen eine convergente Reihe, wenn er mit dem anderen Ende begonnen wird.) Die Bestimmung der Werthe von $n - s$, welche $\Theta_n^{(s)}$ oder $\frac{d}{d\vartheta}\Theta_n^{(s)}$ für jeden von zwei festgesetzten Werthen von ϑ Null machen, ist ein analytisches Problem, das in Verbindung mit diesen Entwicklungen nach harmonischen Kugelfunctionen hohes Interesse hat. Es ist im Wesentlichen in der oben angeführten physikalischen Anwendung enthalten, in der die betreffenden Räume theilweise durch Kegel mit zusammenfallenden Axen begrenzt werden. Wenn die Umgrenzung durch die von diesen Kegeln aus zwei concentrischen Kugeloberflächen herausgeschnittenen Theile vervollständigt wird, so gehen auch Functionen der unten in (o.) beschriebenen Klasse in die Lösung ein. Wenn wir erst im Stande sein werden, physikalische Anwendungen mit Nutzen zu geben, werden wir auf den Gegenstand zurückkommen; für jetzt müssen wir uns mit diesen wenigen Bemerkungen begnügen.

(m.) **Entwicklungen für Keile.** — Wenn der in physikalischen Problemen, wie wir sie schon angeführt haben, betrachtete Raum zum Theil von zwei Ebenen begrenzt wird, die sich in einem Durchmesser unter irgend einem Winkel $\frac{\pi}{\nu}$ treffen, und wenn die weitere Umgrenzung der in dem Winkel zwischen diesen Ebenen liegende Theil einer Kugeloberfläche ist (den Fall $\nu < 1$, d. h. den Fall, in welchem der Winkel zwischen den Ebenen grösser als zwei Rechte ist, schliessen wir nicht aus), so sind die erforderlichen harmonischen Functionen sämmtlich von gebrochenen Graden, aber eine jede ist eine endliche algebraische Function der Coordinaten ξ, η, ζ, wenn ν irgend eine incommensurabele Zahl ist. Ist z. B. die Aufgabe gestellt, die innere Temperatur in irgend einem Punkte eines festen Körpers von der in Rede stehenden Gestalt zu finden, wenn jeder Punkt des gekrümmten Theils seiner Oberfläche beständig in einer beliebig gegebenen Temperatur erhalten wird und seine ebenen Grenzflächen eine constante Temperatur haben, so sind die Formen und die Grade der betreffenden harmonischen Functionen folgende: —

Grad	Harmonische Function	Grad	Harmonische Function	Grad	Harmonische Function
ν	ξ^ν	2ν	$\xi^{2\nu}$	3ν	$\xi^{3\nu}$
$\nu + 1$	$r^{2\nu+3}\frac{d}{dz}\frac{\xi^\nu}{r^{2\nu+1}}$	$2\nu + 1$	$r^{4\nu+3}\frac{d}{dz}\frac{\xi^{2\nu}}{r^{4\nu+1}}$	$3\nu + 1$	$r^{6\nu+3}\frac{d}{dz}\frac{\xi^{3\nu}}{r^{6\nu+1}}$
$\nu + 2$	$r^{2\nu+5}\frac{d^2}{dz^2}\frac{\xi^\nu}{r^{2\nu+1}}$	$2\nu + 3$	$r^{4\nu+5}\frac{d^2}{dz^2}\frac{\xi^{2\nu}}{r^{4\nu+1}}$	...	...
$\nu + 3$	$r^{2\nu+7}\frac{d^3}{dz^3}\frac{\xi^\nu}{r^{2\nu+1}}$	$2\nu + 5$	$r^{4\nu+7}\frac{d^3}{dz^3}\frac{\xi^{2\nu}}{r^{4\nu+1}}$	...	...
...	...	...	...	...	...

Diese harmonischen Functionen lassen sich nach dem Vorhergehenden mittels der verschiedenen Formeln (36) bis (40) durch reelle Coordinaten ausdrücken.

(r.) **Darstellung der Kugelfunctionen beliebigen Grades durch verallgemeinerte Differentiation.** — Es verdient bemerkt zu werden, dass diese Functionen und jede andere Kugelfunction irgend eines Grades derselbe mag ganz, oder ein reeller Bruch, oder imaginär sein) durch ein allgemeines Verfahren hergeleitet werden können, welches die Differentiation als einen besonderen Fall in sich schliesst. So haben wir offenbar, wenn $\left(\frac{d}{d\eta}\right)^\nu$ eine Operation bezeichnet, die im Falle eines ganzzahligen ν darin besteht, dass man den νten Differentialquotienten nimmt,

$$\xi^\nu = r^{2\nu+1} P_\nu \left(\frac{d}{d\eta}\right)^\nu \frac{1}{(\xi\eta + z^2)^{1/2}},$$

P_ν eine Function von ν bezeichnet, welche, wenn ν eine reelle ganze Zahl ist,

$$(-1)^\nu \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(\nu - \frac{1}{2}\right)$$

nd. Die Schwierigkeiten, welche diese verallgemeinerte Differentiation rietet, sind auf die Auswerthung von P_ν beschränkt. Sie waren der Gegenstand höchst interessanter Untersuchungen von Liouville, Gregry, Kelland und Anderen.

Wenn wir den Factor P_ν bei Seite lassen und uns mit der Bestimmung der Formen der harmonischen Kugelfunctionen begnügen, so haben ir nur Leibnitz's Formel und andere bekannte Differentiationsformeln it irgend einer gebrochenen oder imaginären Zahl als Index anzuwenen, und wir werden sehen, dass die oben für eine vollkommene harmonische Kugelfunction beliebigen Grades gegebenen äquivalenten Ausdrücke ermittels der hier angedeuteten verallgemeinerten Differentiation aus $\frac{1}{r}$

hergeleitet werden können, dergestalt dass sie jede mögliche unvollkommene harmonische Function beliebigen (ganzen, oder reellen und gebrochenen, oder imaginären) Grades in sich schliessen. Jene Ausdrücke können aber, wie oben angegeben, in der dargelegten Weise, ganz unabhängig von der hier erwähnten Ableitungsart, für unvollkommene harmonische Functionen benutzt werden, seien es nun endliche algebraische Functionen von ξ, η, ζ, oder durch convergirende unendliche Reihen ausgedrückte Transcendenten.

(o.) Um den Gebrauch von Kugelfunctionen imaginärer Grade zu erläutern, wollen wir das oben angegebene, die Leitung der Wärme betreffende Problem in folgender Weise ändern: — Der feste Körper werde von zwei concentrischen Kugeloberflächen, deren Radien a und a' sind, und durch zwei Kegel oder Ebenen begrenzt. Jeder Punkt jeder der beiden ebenen oder kegelförmigen Grenzflächen wird in einer beliebig gegebenen, und der ganze sphärische Theil der Umgrenzung in einer constanten Temperatur erhalten. Dann werden in die Lösung harmonische Functionen vom Grade

$$-\tfrac{1}{2}+\frac{n\pi\sqrt{-1}}{\log\frac{a}{a'}}$$

eingehen, wo n irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Convergirende Reihen für diese und für die übrigen zur Lösung erforderten Functionen sind in unseren allgemeinen Formeln (36) bis (40) enthalten.

(p.) Die oben untersuchte Methode, vollkommene harmonische Kugelfunctionen durch Differentiation von $\frac{1}{r}$ zu finden, hat den grossen Vortheil, dass sie unmittelbar wichtige Eigenschaften zeigt, welche diese Functionen in Beziehung auf die Werthe der Veränderlichen besitzen, für die sie verschwinden. So ergiebt sich, da die Grösse $\frac{1}{r}$ und alle ihre Differentialquotienten für jeden der beiden Werthe $x=\pm\infty$, oder $y=\pm\infty$, oder $z=\pm\infty$ verschwinden, dass

$$\frac{d^{j+k+l}}{dx^j\,dy^k\,dz^l}\,\frac{1}{r}$$

$j$mal verschwindet, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst
k „ „ „ y „ „ „ „ „
l „ „ „ z „ „ „ „ „

Der Leser, der mit Fourier's Theorie der Gleichungen nicht vertraut ist, wird leicht selbst die vorliegende Anwendung der in jenem bewundernswerthen Werke entwickelten Principien bewahrheiten können.

Es erhellt auf diese Weise, dass die harmonischen Kugelfunctionen zu der allgemeinen Klasse von Functionen gehören, welchen William Rowan Hamilton die Bezeichnung „fluctuirende Functionen" beigelegt hat. Diese Eigenschaft ist wesentlich in ihrer Fähigkeit enthalten, willkürliche Functionen auszudrücken, und diese Fähigkeit wollen wir jetzt zum Schluss noch nachweisen.

(r.) **Eine willkürliche Function, ausgedrückt in einer Reihe harmonischer Flächenfunctionen. Einleitende Sätze.** — Es sei C der Mittelpunkt und a der Radius einer Kugeloberfläche, die wir mit S bezeichnen werden. Ferner sei P irgend ein innerer oder äusserer Punkt, dessen Abstand von C mit f bezeichnet werde, und $d\sigma$ ein in einem Punkte E, der von P die Entfernung $EP = D$ hat, liegendes Element von S. Bezeichnet dann $\int\int$ eine sich über S erstreckende Integration, so kann man leicht folgende Formeln beweisen: —

45)
$$\begin{cases} \displaystyle\int\int\frac{d\sigma}{D^3} = \frac{a}{f}\,\frac{4\pi a}{f^2-a^2}, & \text{wenn } P \text{ ein äusserer Punkt ist,} \\[2ex] \displaystyle\int\int\frac{d\sigma}{D^3} = \frac{4\pi a}{a^2-f^2}, & \text{wenn } P \text{ innerhalb } S \text{ liegt.} \end{cases}$$

Es ist dies nur ein besonderer Fall eines ganz allgemeinen Theorems von Green, welches in dem oben $A(a)$ gegebenen enthalten ist, wie wir später zeigen werden, wenn wir die allgemeine Theorie der Attraction besonders behandeln. Ein geometrischer Beweis eines speciellen Satzes, von welchem der vorliegende ein Fall ist, wird in Verbindung mit elementaren Untersuchungen über die Vertheilung der Elektricität auf kugelförmigen Conductoren vorkommen. Inzwischen wollen wir im Nachstehenden das Integral selbst direct auswerthen, damit kein Theil der wichtigen Betrachtung, die uns jetzt beschäftigt, auch nur zeitweilig unvollständig sei.

Wir wählen die Polarcoordinaten $\vartheta = ECP$ und den Winkel φ zwischen der Ebene von ECP und einer durch CP gehenden festen Ebene. Dann ist

$$d\sigma = a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Durch Integration von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ ergiebt sich also

$$\int\int\frac{d\sigma}{D^3} = 2\pi a^2 \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{D^3}.$$

Es ist aber

$$D^2 = a^2 - 2af\cos\vartheta + f^2,$$

folglich

$$\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{D\,dD}{af}.$$

Die Grenzwerthe von D im Integral sind

$$f - a,\quad f + a, \text{ wenn } f > a,$$
$$a - f,\quad a + f, \text{ wenn } f < a.$$

Wir haben daher in diesen beiden Fällen beziehungsweise

$$\int\int\frac{d\sigma}{D^3} = \frac{2\pi a}{f}\left(\frac{1}{f-a} - \frac{1}{f+a}\right), \text{ oder } = \frac{2\pi a}{f}\left(\frac{1}{a-f} - \frac{1}{a+f}\right),$$

und damit sind die Formeln (45) bewiesen.

(s.) **Green's Aufgabe, für eine Kugeloberfläche durch bestimmte Integrale gelöst.** — Es bezeichne jetzt $F(E)$ eine beliebige Function der Lage von E auf S, und es sei

46)
$$u = \int\int\frac{(f^2 \backsim a^2)\, F(E)\, d\sigma}{D^3}.$$

Wenn f unendlich wenig von a verschieden ist, so verschwindet jedes Element dieses Integrals, mit Ausnahme derjenigen, für welche D unendlich klein ist. Das Integral hat daher denselben Werth, den es haben würde, wenn die Function $F(E)$ überall den Werth hätte, den sie in dem P am nächsten gelegenen Theile von S hat. Wir haben also, wenn wir diesen Werth der willkürlichen Function mit $F(P)$ bezeichnen,

$$u = F(P)\int\int\frac{(f^2 \backsim a^2)\,d\sigma}{D^3}, \quad \text{wenn } f \text{ unendlich wenig von } a \text{ verschieden ist,}$$

oder nach (45)

(46′) $$u = 4\pi a\, F(P).$$

Bezeichnet jetzt ε eine beliebige positive Grösse, die kleiner als Eins ist so erhalten wir durch Entwicklung in eine convergente Reihe

(47) $$\frac{1}{(1-2\varepsilon\cos\vartheta+\varepsilon^2)^{1/2}} = 1 + Q_1\varepsilon + Q_2\varepsilon^2 + \text{u. s. w.},$$

wo Q_1, Q_2, u s. w. Functionen von ϑ bezeichnen, deren Ausdrücke unten bestimmt werden sollen. Jede derselben ist $+1$, wenn $\vartheta = 0$ ist, und sie sind abwechselnd gleich -1 und $+1$, wenn $\vartheta = \pi$ ist. Für alle zwischen 0 und π liegenden Werthe von ϑ ist jede derselben, wie sich leicht darthun lässt, > -1 und $< +1$. Unsere Reihe, welche in den genannten äussersten Fällen in die geometrische Reihe $1 \pm \varepsilon + \varepsilon^2 \pm$ u. s. w übergeht, convergirt daher rascher als die geometrische Reihe, diese äussersten Fälle ausgenommen. Es ist somit

(48) $$\begin{cases} \dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{f}\left(1 + \dfrac{Q_1 a}{f} + \dfrac{Q_2 a^2}{f^2} + \text{u. s. w.}\right), & \text{wenn } f > a \\[2ex] \dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{Q_1 f}{a} + \dfrac{Q_2 f^2}{a^2} + \text{u. s. w.}\right), & \text{wenn } f < a. \end{cases}$$

Nun haben wir

$$\frac{d\frac{1}{D}}{df} = \frac{a\cos\vartheta - f}{D^3},$$

folglich

$$\frac{f^2-a^2}{D^3} = -\left(2f\frac{d\frac{1}{D}}{df} + \frac{1}{D}\right),$$

und daraus folgt, wenn wir (48) differentiiren, u. s. w.,

(49) $$\begin{cases} \dfrac{f^2-a^2}{D^3} = \dfrac{1}{f}\left(1 + \dfrac{3\,Q_1 a}{f} + \dfrac{5\,Q_2 a^2}{f^2} + \cdots\right), & \text{wenn } f > a \\[2ex] \dfrac{a^2-f^2}{D^3} = \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{3\,Q_1 f}{a} + \dfrac{5\,Q_2 f^2}{a^2} + \cdots\right), & \text{wenn } f < a \end{cases}$$

Wir erhalten also für u (46) die folgenden Entwicklungen: —

$$(50)\quad \begin{cases} u = \frac{1}{f}\Big\{\int\!\!\int F(E)\,d\sigma + \frac{3\,a}{f}\int\!\!\int Q_1 F(E)\,d\sigma \\ \qquad\qquad + \frac{5\,a^2}{f^2}\int\!\!\int Q_2 F(E)\,d\sigma + \cdots\Big\}, \text{ wenn } f > a, \\ u = \frac{1}{a}\Big\{\int\!\!\int F(E)\,d\sigma + \frac{3\,f}{a}\int\!\!\int Q_1 F(E)\,d\sigma \\ \qquad\qquad + \frac{5 f^2}{a^2}\int\!\!\int Q_2 F(E)\,d\sigma + \cdots\Big\}, \text{ wenn } f < a. \end{cases}$$

Diese Reihen sind offenbar convergent, ausser im Falle $f = a$. Nun haben wir aber (46') bewiesen, dass der unentwickelte Werth von u in diesem Grenzfalle endlich und gleich $4\,\pi\,a\,F(P)$ ist. Daraus geht hervor, dass die Summe jeder Reihe sich mehr und mehr diesem Werthe nähert, wenn sich f immer mehr a nähert, und wir erhalten im Grenzfall

$$(51)\quad F(P) = \frac{1}{4\,\pi\,a^2}\Big\{\int\!\!\int F(E)\,d\sigma + 3\int\!\!\int Q_1 F(E)\,d\sigma \\ + 5\int\!\!\int Q_2 F(E)\,d\sigma + \text{u. s. w.}\Big\}.$$

Dies ist die berühmte Entwicklung einer willkürlichen Function in eine Reihe „Laplace'scher Coefficienten" oder, wie wir sie jetzt nennen, **harmonischer Kugelfunctionen**.

(t.) **Convergenz der Reihe.** — Die vorstehende Untersuchung zeigt, dass, wenn die willkürliche Function F für jeden Punkt von S einen bestimmten Werth hat, die Reihe (51) zu dem Werthe dieser Function convergirt, welcher dem Punkt P entspricht. Ebenso erkennt man, dass die Reihe, wenn der Werth von F durch irgend eine auf S liegende Linie hindurch eine unstetige Aenderung erfährt, nicht convergiren kann, wenn P genau auf dieser Linie liegt, aber noch convergiren muss, wenn P dieser Linie auch noch so nahe liegt.

Später werden wir eine Regel für den Grad der Convergenz der Reihe (51) herleiten.

(u.) **Entwicklung der Coefficienten.** — In der Entwicklung (47) in $\frac{1}{(1-2\,\varepsilon\cos\vartheta+\varepsilon^2)^{1/2}}$ sind die Coefficienten von $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots \varepsilon^n$ offenbar rationale ganze Functionen von $\cos\vartheta$ und beziehungsweise von den Graden $1, 2, \cdots n$. Sie werden unten in (59) und (60), mit $\vartheta' = 0$, explicit gegeben. Wenn aber x, y, z und x', y', z' beziehungsweise die rechtwinkligen Coordinaten von P und E bezeichnen, so haben wir

$$\cos\vartheta = \frac{x x' + y y' + z z'}{r\,r'},$$

wo

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \text{ und } r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \text{ ist.}$$

Wird also, wie oben, der Coefficient von ε^n in der Entwicklung mit Q_n bezeichnet, so ist

$$(52)\quad Q_n = \frac{H_n[(x,y,z),(x',y',z')]}{r^n\,r'^n};$$

$H_n[(x,y,z),(x',y',z')]$ bezeichnet eine symmetrische Function von (x,y,z) und (x',y',z'), welche in Beziehung auf jede einzelne dieser beiden Reihen homogen ist. Mittels des Ausdrucks von Q_n wird diese Function natürlich durch $\cos\vartheta$ ausgedrückt werden können.

Als Function von (x,y,z) angesehen, ist $Q_n r^n r'^n$ symmetrisch um OE herum, und als Function von (x',y',z') symmetrisch um OP. Wir werden daher $Q_n r^n r'^n$ die zweiaxige harmonische Function $n$ten Grades von $(x,y,z)(x',y',z')$ und Q_n die zweiaxige harmonische Flächenfunction $n$ter Ordnung nennen.

(v.) **Entwicklung von $\frac{1}{D}$ mittels des Taylor'schen Satzes.** — Es verdient bemerkt zu werden, dass man den Coefficienten jedes ihrer Glieder, wie $x'^j y'^k z'^l$, ohne die übrigen Glieder berechnen zu müssen, durch Anwendung des Taylor'schen Satzes auf eine Function dreier Veränderlichen erhalten kann, und zwar auf folgende Weise: —

Es ist

$$\frac{1}{(1-2\varepsilon\cos\vartheta+\varepsilon^2)^{1/2}}=\frac{r}{(r^2-2rr'\cos\vartheta+r'^2)^{1/2}}$$
$$=\frac{r}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}.$$

Bezeichnet jetzt $F(x,y,z)$ irgend eine Function von x, y und z, so haben wir

$$F(x+f,\ y+g,\ z+h)$$
$$=\sum_{j=0}^{j=\infty}\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{f^j g^k h^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l}\,\frac{d^{j+k+l}F(x,y,z)}{dx^j\,dy^k\,dz^l};$$

dabei ist zu bemerken, dass $1.2\ldots j$ durch die Einheit ersetzt werden muss, wenn $j=0$ ist, und dasselbe gilt von k und l. Nehmen wir also

$$F(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},$$

so ist

$$\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}$$
$$=\Sigma\Sigma\Sigma\frac{(-1)^{j+k+l}x'^j y'^k z'^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l}\,\frac{d^{j+k+l}}{dx^j\,dy^k\,dz^l}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},$$

und diese Entwicklung ist, wie der Vergleich mit (48) lehrt, allemal convergent, wenn

$$x'^2+y'^2+z'^2<x^2+y^2+z^2$$

ist. Es ist folglich

$$(53)\qquad (rr')^n Q_n=r^{2n+1}\sum\sum\sum^{(j+k+l=n)}\frac{(-1)^{j+k+l}x'^j y'^k z'^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l}\,\frac{d^{j+k+l}}{dx^j\,dy^k\,dz^l}\,\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

und hat die Summation alle Glieder zu umfassen, welche die angegebene Bedingung $j+k+l=n$ erfüllen. Es lässt sich leicht darthun, dass die zweite Seite der Formel (53) nicht nur, wie unmittelbar ersichtlich in x',y',z', sondern auch in x,y,z eine ganze und homogene Function $n$ten Grades und ferner in Beziehung auf jede dieser beiden Reihen von

Veränderlichen symmetrisch ist. Wir gelangen so zu dem oben in (52) ausgedrückten Schlusse und haben jetzt die daselbst angedeutete Function explicit in Differentialquotienten ausgedrückt; der erhaltene Ausdruck kann weiter mit Leichtigkeit unmittelbar auf eine algebraische Form gebracht werden.

(v'.) **Entwicklung der einaxigen harmonischen Function daraus hergeleitet.** — In dem besondern Falle $x' = 0$ und $y' = 0$ reducirt sich (53) auf ein einziges Glied, das eine um die Axe OZ symmetrische Function von x, y, z ist, und wenn wir jede Seite durch r'^n, oder durch die gleiche Grösse z'^n dividiren, so folgt

54) $$r^n Q_n = \frac{(-1)^n r^{2n+1}}{1.2.3\ldots n} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}.$$

Durch wirkliche Differentiation kann man leicht das Bildungsgesetz der Reihe der Zähler entdecken, und wir finden auf diese Weise mit ungefähr derselben Leichtigkeit jede der obigen Entwicklungen (31), (40), (41) für den Fall $m = p$, wie die trigonometrischen Formeln, die natürlich dadurch erhalten werden, dass man $z = r \cos\vartheta$ und $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta$ setzt.

(w.) Wird darin wieder $\cos\vartheta = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$ gesetzt und, wie oben in (u.), wieder die Bezeichnung (x, y, z), (x', y', z') eingeführt, so gelangen wir zu Entwicklungen von Q_n in den in (52) angezeigten Ausdrücken.

(x.) **Entwicklung der zweiaxigen harmonischen Functionen.** — Zu einigen der nützlichsten Entwicklungen von Q_n gelangt man mit grosser Schnelligkeit, wenn man den Gleichungen (26) gemäss wieder die imaginären Coordinaten (ξ, η) an Stelle von (x, y) und in ähnlicher Weise (ξ', η') an Stelle von (x', y') einführt. Wir haben dann

$$D^2 = (\xi - \xi')(\eta - \eta') + (z - z')^2,$$

also, wie oben,

$$\frac{1}{[(\xi-\xi')(\eta-\eta') + (z-z')^2]^{1/2}}$$
$$= \Sigma\Sigma\Sigma \frac{(-1)^{j+k+l}\, \xi'^j \eta'^k z'^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l} \frac{d^{j+k+l}}{d\xi^j d\eta^k dz^l} \frac{1}{(\xi\eta + z^2)^{1/2}},$$

und folglich

$$(rr')^n Q_n = r^{2n+1} \sum^{(j+k+l)=n}\sum\sum \frac{(-1)^{j+k+l}\, \xi'^j \eta'^k z'^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l} \frac{d^{j+k+l}}{d\xi^j d\eta^k dz^l} \frac{1}{(\xi\eta + z^2)^{1/2}}.$$

Natürlich ist in diesem Falle

$$r^2 = \xi\eta + z^2, \quad r'^2 = \xi'\eta' + z'^2$$

und

$$\cos\vartheta = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta + zz'}{rr'},$$

und ganz wie oben sehen wir, dass dieser Ausdruck (55), der offenbar in Beziehung auf ξ', η', z' und ebenso in Beziehung auf ξ, η, z eine homogene Function $n$ten Grades ist, jedes dieser beiden Systeme von Veränderlichen symmetrisch enthält.

Nun lassen sich, wie wir oben gesehen haben, alle $n$ten Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ auf die folgenden unabhängigen Formen reduciren: —

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{r}, \quad \begin{matrix} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \frac{d}{d\eta}\frac{1}{r}, & \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-2}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^2 \frac{1}{r}, & \ldots \left(\frac{d}{d\eta}\right)^n \frac{1}{r} \\ \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \frac{d}{d\xi}\frac{1}{r}, & \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 \frac{1}{r}, & \ldots \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n \frac{1}{r}. \end{matrix}$$

Folglich wird $r^n Q_n$, als Function von z, ξ, η angesehen, durch diese $2n+1$ Grössen ausgedrückt, deren jede einen z', ξ', η' enthaltenden Coefficienten hat, und der Symmetrie wegen muss dieser Coefficient das Product der nämlichen Function von z', η', ξ' in einen Factor sein, welcher keine der beiden Reihen von Veränderlichen (z, ξ, η), (z', η', ξ') enthält. Aus der Symmetrie in Beziehung auf ξ, η' und η, ξ' ersehen wir ferner, dass der numerische Factor für diejenigen Grössen der nämliche sein muss, welche einerseits ξ, η', andererseits η, ξ' in ähnlicher Weise enthalten. Daher ist

$$(56) \begin{cases} Q_n = (r r')^{n+1}\Big[E_0 \left(\frac{d}{dz'}\right)^n \frac{1}{r'} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{r} \\ \quad + \sum\limits_{s=1}^{s=n} E_n^{(s)} \Big\{ \frac{d^n}{dz'^{n-s}\, d\xi'^s} \frac{1}{r'} \frac{d^n}{dz^{n-s}\, d\eta^s} \frac{1}{r} \\ \quad + \frac{d^n}{dz'^{n-s}\, d\eta'^s} \frac{1}{r'} \frac{d^n}{dz^{n-s}\, d\xi^s} \frac{1}{r} \Big\}\Big], \\ \text{wo} \\ E_n^{(s)} = \frac{1}{1.2\ldots s.1.2\ldots(n-s)\,{}^1\!/_2.{}^3\!/_2\ldots(s-{}^1\!/_2)(2s+1)(2s+2)\ldots(n+s)} \\ \text{ist.} \end{cases}$$

Der Werth von $E_n^{(s)}$ wird auf folgende Weise erhalten: — Vergleichen wir den Coefficienten des Gliedes $(zz')^{n-s}(\xi\eta')^s$ in dem Zähler des Ausdrucks in den (55) übergeht, wenn man den Differentialquotienten entwickelt, mit dem Coefficienten desselben Gliedes in (56), so folgt

$$(57) \qquad \frac{(-1)^n M}{1.2\ldots(n-s).1.2\ldots s} = E_n^{(s)} M^2,$$

wo M den Coefficienten von $z^{n-s}\xi^s$ in $r^{2n+1}\frac{d^n}{dz^{n-s}\, d\eta^s}\frac{1}{r}$, oder, was dasselbe ist, den Coefficienten von $z'^{n-s}\eta'^s$ in $r'^{2n+1}\frac{d^n}{dz'^{n-s}\, d\xi'^s}\frac{1}{r}$ bezeichnet. Hieraus und aus dem Werthe (42) für M ergiebt sich der obige Werth von $E_n^{(s)}$.

(y.) Wir sind jetzt im Stande, die Entwicklung von Q_n auf eine reelle trigonometrische Form zu reduciren. Zunächst haben wir nach (33)

$$(58) \qquad (\xi\eta')^s + (\xi'\eta)^s = 2(rr' \sin\vartheta \sin\vartheta')^s \cos s(\varphi - \varphi').$$

Es sei nun

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{d}_n^{(s)} &= \sin^s \vartheta \left[\cos^{n-s}\vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{4(s+1)}\cos^{n-s-2}\vartheta \sin^2\vartheta \right. \\ &\left. + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{4^2(s+1)(s+2).1.2}\cos^{n-s-4}\vartheta \sin^4\vartheta - \text{u. s. w.}\right], \end{aligned}\right.$$

d. h. nach der Bezeichnung von (40) $C\mathfrak{d}_n^{(s)} = \Theta_n^{(s)}$), und die analoge Bezeichnung mit Accenten beziehe sich auf ϑ'. Dann erhalten wir aus (56), (57) und (58)

$$Q_n = 2\sum_{s=0}^{s=n} \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots(s-\frac{1}{2})}{1.2\ldots s} \cdot \frac{(2s+1)(2s+2)\ldots(2s+n-s)}{1.2\ldots(n-s)} \cos s(\varphi-\varphi')\mathfrak{d}_n^{(s)}\mathfrak{d}'^{(s)}_n,$$

wo jedoch vom ersten Glied (für welches $s = 0$ ist) nur die Hälfte genommen werden darf.

(z.) Wir können jetzt den in (g.), (17) gegebenen Fundamentalsatz $\int\int S_n S_{n'}\, d\omega = 0$ und die entsprechenden auf die Elemente harmonischer Functionen bezüglichen Sätze (43) und (44) durch Auswerthung des Integrals $\int\int S_n^2\, d\omega$ vervollständigen.

Wenn wir zuerst den oben für S_n hergeleiteten allgemeinen Ausdruck (37) benutzen und die willkürlichen Constanten so modificiren, dass sie für unsere jetzige Bezeichnung passen, so haben wir

$$(61)\qquad S_n = \sum_{s=0}^{s=n} A_s \cos(s\varphi + a_s)\mathfrak{d}_n^{(s)},$$

folglich

$$(62)\qquad \int\int S_n^2\, d\omega = \pi\sum_0^n A_s^2 \int_0^\pi (\mathfrak{d}_n^{(s)})^2 \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Um das bestimmte Integral des zweiten Gliedes auszuwerthen, haben wir nur den allgemeinen Satz (51) für die Entwicklung einer Function in Glieder harmonischer Flächenfunctionen auf den besonderen Fall anzuwenden, in welchem die willkürliche Function $F(E)$ selbst die harmonische Function, $\cos s\varphi\, \mathfrak{d}_n^{(s)}$, ist. Man erhält dann mit Rücksicht auf (16)

$$(63)\qquad \cos s\varphi\, \mathfrak{d}_n^{(s)} = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi \sin\vartheta'\, d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos s\varphi'\, \mathfrak{d}'^{(s)}_n Q_n.$$

Wird hierin für Q_n seine eben ermittelte trigonometrische Entwicklung benutzt und die Integration für φ' zwischen den angegebenen Grenzen ausgeführt, so stellt sich heraus, dass $\cos s\varphi\, \mathfrak{d}_n^{(s)}$ fortdividirt werden kann, und man gelangt leicht (wenn man noch die Accente in dem übrig bleibenden bestimmten Integral weglässt) zu der Formel

$$\int_0^\pi \sin\vartheta (\mathfrak{d}_n^{(s)})^2\, d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1.2\ldots s}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots(s-\frac{1}{2})} \cdot \frac{1.2\ldots(n-s)}{(2s+1)(2s+2)\ldots(2s+n-s)}.$$

Diese Formel bleibt auch für den Fall $s = 0$ bestehen; es wird dann das zweite Glied derselben $\frac{2}{2n+1}$. Es ist gut, hier die Gleichung (44) wieder anzuführen, welche, wenn man sie statt in $\Theta(m,n)$ in $\mathfrak{d}_n^{(s)}$ ausdrückt, sich in

(65) $$\int_0^\pi \sin\vartheta\, \mathfrak{d}_n^{(s)}\, \mathfrak{d}_{n'}^{(s)}\, d\vartheta = 0$$

verwandelt, wo n und n' verschieden sein müssen. Die durch diese beiden Gleichungen (64) und (65) ausgedrückten Eigenschaften können aus dem expliciten Ausdruck (59) von $\mathfrak{d}_n^{(s)}$ durch directe Integration bewahrheitet werden, und wird dies eine möglicher Weise zwar nicht sehr leichte, aber gute analytische Uebung sein.

Zweites Capitel.

Gesetze und Principien der Dynamik.

205. **Einführung der Begriffe Materie und Kraft.** — Im vorhergehenden Capitel haben wir die Bewegung von Punkten, Linien, Oberflächen und Körpern, mochte dieselbe nun von einer Ausdehnungs- und Formveränderung begleitet sein oder nicht, vom rein geometrischen Gesichtspunkte aus betrachtet. Die Resultate, zu denen wir gelangten, sind daher von dem Begriffe „Materie" und von den Kräften, welche die Materie äussert, sämmtlich unabhängig. Bisher haben wir die Existenz der Bewegung, der Formänderung, u. s. w. einfach vorausgesetzt: Jetzt liegt uns ob, zu erörtern, nicht wie eine solche Bewegung, u. s. w. wohl hervorgebracht werden könne, sondern welches die wirklichen Ursachen sind, die in der materiellen Welt eine solche nach sich ziehen. Die Resultate des vorliegenden Capitels müssen daher als Ergebnisse der wirklichen Erfahrung, sei es nun Beobachtung oder Experiment, angesehen werden. Wie eine solche Erfahrung gewonnen wird, soll den Gegenstand eines späteren Capitels ausmachen.

206. Wir glauben wohlzuthun, jedenfalls beim Beginn unserer Betrachtung Newton's Darstellung treu zu folgen. Denn die Einleitung zu den Principia enthält in äusserst durchsichtiger Form die allgemeine Grundlage der Dynamik. Die darin niedergelegten Definitiones und Axiomata sive Leges Motus erfordern nur einige durch spätere Entwicklungen gewonnene Erweiterungen und erläuternde Zusätze, um für den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft

zu passen und eine weit bessere Einleitung zur Dynamik zu bilden, als sogar in einigen der besten neueren Lehrbücher sich vorfindet.

207. Wir können natürlich keine dem Metaphysiker genügende Definition der Materie geben. Der Naturforscher wird sich mit der Erklärung begnügen, dass Materie das durch die Sinne Wahrnehmbare, oder dasjenige ist, was eine Kraft äussern oder die Wirkung einer Kraft erleiden kann. Die zweite und genau genommen auch die erstere dieser Definitionen schliesst den Begriff der Kraft in sich, die thatsächlich ein directes Object der Wahrnehmung, vielleicht für alle unsere Sinne, jedenfalls aber für den „Muskelsinn“ ist.

Was die weitere Erörterung der Frage: Was ist Materie? betrifft, so müssen wir auf unser Capitel über die Eigenschaften der Materie verweisen.

208. **Masse, Dichtigkeit.** — Die Stoffmenge oder, wie wir nunmehr sagen wollen, die Masse eines Körpers ist nach Newton dem Volumen und zugleich der Dichtigkeit proportional. Diese Definition giebt uns eigentlich eher den Begriff der Dichtigkeit, als denjenigen der Masse; denn sie zeigt uns, dass sich die Dichtigkeit verdoppelt, wenn man in ein Gefäss von gegebenem Rauminhalt doppelt so viel Materie, z. B. Luft hineinbringt, u. s. w. Sie zeigt aber auch, dass bei einem Stoffe von gleichförmiger Dichtigkeit die Masse oder Stoffmenge dem Volumen oder eingenommenen Raume proportional ist.

Bezeichnet M die Masse, ϱ die Dichtigkeit und V das Volumen eines homogenen Körpers, so ist

$$M = V\varrho,$$

wenn wir als Masseneinheit die in der Volumeneinheit eines Körpers von der Einheit der Dichtigkeit enthaltene Masse annehmen.

Wenn sich die Dichtigkeit eines Körpers von Punkt zu Punkt ändert, so erhalten wir aus der vorstehenden Formel offenbar

$$M = \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz;$$

darin wird ϱ als bekannte Function von x, y, z vorausgesetzt, und die Integration hat sich über den ganzen von dem Stoffe des Körpers eingenommenen Raum zu erstrecken, mag derselbe continuirlich sein oder nicht.

Newton fügt dieser Definition eine Bemerkung hinzu, die besondere Beachtung verdient. Er sagt, dass, wenn es etwas gäbe, was die Zwischenräume aller Körper frei durchdringt, so würde dies bei der Bestimmung ihrer Masse oder ihrer Dichtigkeit nicht in Rechnung gezogen sein.

209. Newton zeigt ferner, dass das Gewicht eines Körpers ein praktisches Maass seiner Masse ist. Die Pendelversuche, durch welche er diese wichtige Bemerkung begründet, werden später in unserem Capitel über die Eigenschaften der Materie beschrieben werden.

Wir werden alsbald darlegen, dass die für Messungen in England geeignetste Masseneinheit das englische Pfund ist.

210. **Bewegungsgrösse.** — Die Quantität der Bewegung, oder die Bewegungsgrösse eines starren, ohne Rotation sich bewegenden Körpers ist seiner Masse und zugleich seiner Geschwindigkeit proportional. Die Gesammtbewegung ist die Summe der Bewegungen seiner verschiedenen Theile. Danach würde eine doppelte Masse oder eine doppelte Geschwindigkeit einer doppelten Bewegungsgrösse entsprechen, u. s. w.

Wenn wir also die Bewegungsgrösse der Masseneinheit, die sich mit der Einheit der Geschwindigkeit bewegt, als Einheit der Bewegungsgrösse annehmen, so ist Mv die Bewegungsgrösse einer Masse M, deren Bewegung mit der Geschwindigkeit v erfolgt.

211. **Aenderung der Bewegungsgrösse.** — Die Aenderung der Quantität der Bewegung oder die Aenderung der Bewegungsgrösse ist der in Bewegung befindlichen Masse und zugleich der Aenderung ihrer Geschwindigkeit proportional.

Die Aenderung der Geschwindigkeit ist in dem allgemeinen Sinne des § 27 zu verstehen. Wenn also (s. d. Fig. des § 27) eine durch OA dargestellte Geschwindigkeit sich in eine andere Geschwindigkeit OC verwandelt, so stellt AC die Aenderung der Geschwindigkeit in Grösse und Richtung dar.

212. **Beschleunigung der Bewegungsgrösse.** — Die verhältnissmässige Grösse der Aenderung der Bewegungsgrösse oder die Beschleunigung der Bewegungsgrösse ist der in Bewegung befindlichen Masse und zugleich der Beschleunigung der Geschwindigkeit proportional.

So ist (§ 35, b) die Beschleunigung der Bewegungsgrösse eines frei fallenden Körpers eine constante Grösse und geht in verticaler Richtung vor sich. Ferner ist (§ 35, a) die Beschleunigung der Bewegungsgrösse einer Masse M, welche mit gleichförmiger Geschwindigkeit V einen Kreis vom Radius R beschreibt, gleich $\frac{MV^2}{R}$ und gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtet, d. h. es findet eine Aenderung der Richtung, nicht aber eine Aenderung der Geschwindigkeit der Bewegung statt.

Allgemein (§ 29) ist für einen sich irgendwie im Raume bewegenden Körper von der Masse M die Beschleunigung der Bewegungsgrösse in der Richtung der Bewegung (die tangentiale Beschleunigung) gleich $M\frac{d^2s}{dt^2}$ und die nach dem Krümmungsmittelpunkt der Bahn genommene Beschleunigung der Bewegungsgrösse (die normale oder centripetale Beschleunigung) gleich $M\frac{v^2}{\varrho}$. Wir können die gesammte Beschleunigung der Bewegungsgrösse auch durch ihre nach den drei zu einander rechtwinkligen Coordinatenaxen genommenen Componenten $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, $M\frac{d^2z}{dt^2}$, oder nach Newton's Schreibweise durch $M\ddot{x}, M\ddot{y}, M\ddot{z}$ darstellen.

213. **Kinetische Energie.** — Die lebendige Kraft oder kinetische Energie eines in Bewegung befindlichen Körpers ist seiner Masse und zugleich dem Quadrate seiner Geschwindigkeit proportional. Wenn wir die früheren Einheiten der Masse und der Geschwindigkeit beibehalten, so ist es sehr vortheilhaft, die lebendige Kraft als das halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit zu definiren.

214. Die für die Zeiteinheit genommene Aenderung der kinetischen Energie ist gleich dem Product aus der Geschwindigkeit in die tangentiale Componente der Beschleunigung der Bewegungsgrösse. Denn es ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Mv^2}{2}\right) = v \,.\, M\frac{dv}{dt}.$$

215. **Materieller Punkt.** — Es ist zu bemerken, dass wir im Vorhergehenden, ausser bei der Definition der Masse, keine Rücksicht auf die Ausdehnung des in Bewegung befindlichen Körpers genommen haben. Dies ist von keinem Einfluss, so lange der Körper nicht rotirt, und so lange seine Theile dieselbe Lage gegen einander beibehalten. In diesem Falle können wir die ganze im Körper enthaltene Materie als in einen einzigen Punkt concentrirt ansehen. Wir sprechen daher von einem materiellen Punkte, der von einem geometrischen Punkte wohl zu unterscheiden ist. Wenn aber der Körper rotirt, oder wenn seine Theile ihre gegenseitige Lage ändern, so ist es unmöglich, einen Punkt zu wäh-

len, durch dessen *Bewegungen allein sich diejenigen der übrigen* Punkte bestimmen liessen. In solchen Fällen sind die Bewegungsgrösse und die Aenderung der Bewegungsgrösse des ganzen Körpers in irgend einer Richtung die Summen der Bewegungsgrössen und der Aenderungen der Bewegungsgrössen seiner Theile in diesen Richtungen; dagegen ist die kinetische Energie des ganzen Körpers, als überhaupt von jeder Richtung unabhängig, einfach die Summe der kinetischen Energien seiner verschiedenen Theile oder materiellen Punkte.

216. **Trägheit.** — Der Materie wohnt das Bestreben inne, äusseren Einflüssen zu widerstehen; deshalb bleibt jeder Körper, so lange er es vermag, in Ruhe, oder er bewegt sich gleichförmig in gerader Richtung.

Dieses Streben, die Trägheit der Materie, ist der im Körper enthaltenen Stoffmenge proportional. Es ist also irgend eine Ursache erforderlich, um die Gleichförmigkeit der Bewegung eines Körpers zu stören, oder um denselben von seiner natürlichen geradlinigen Bahn abzulenken.

217. Jede Ursache, welche den natürlichen Zustand der Ruhe eines Körpers oder seine gleichförmige Bewegung in geradliniger Bahn zu ändern strebt, heisst einwirkende Kraft oder einfach Kraft.

Die Kraft wird vollständig verbraucht in der Wirkung, die sie ausübt, und wenn die Kraft zu wirken aufhört, so setzt der Körper seiner Trägheit zufolge in der ihm ertheilten Richtung und mit der ihm ertheilten Geschwindigkeit seine Bewegung fort. Die Kräfte können verschiedener Art sein, als Druck, Schwere, Reibung, irgend eine der anziehenden oder abstossenden Wirkungen der Elektricität, des Magnetismus, u. s. w.

218. **Elemente, welche eine Kraft bestimmen.** — Die drei eine Kraft bestimmenden Elemente, oder die drei Elemente, welche bekannt sein müssen, bevor man sich einen klaren Begriff von der in Rede stehenden Kraft bilden kann, sind der Angriffsort, die Richtung und die Grösse derselben.

(a.) Angriffsort einer Kraft. Der erste Fall, den wir zu betrachten haben, ist derjenige, in welchem der Angriffsort ein Punkt ist. Wir haben schon gezeigt, in welchem Sinne der Ausdruck „Punkt“ zu nehmen ist, und in welcher Weise wir uns folglich vorzustellen haben, eine Kraft wirke an einem Punkte. In der Wirklichkeit aber ist der Angriffsort einer Kraft immer entweder eine Fläche oder ein mit Materie erfüllter Raum von drei Dimensionen. Die Spitze der feinsten Nadel, oder die Schneide des schärfsten Messers ist immer noch eine Fläche und wirkt als solche auf die Körper, mit denen sie in Berührung kommt. Auch die starrsten Substanzen berühren einander, wenn man sie zusammenbringt, nicht in einem Punkte, sondern schliessen sich so an einander an, dass eine Berührungsfläche entsteht.

Andererseits ist die Schwere eine Kraft, deren Angriffsort die ganze Materie des Körpers ist, dessen Gewicht wir betrachten, und der kleinste Theil Materie, der ein Gewicht hat, nimmt einen endlichen Theil des Raumes ein. Wir sehen somit, dass es zwei Arten von Kräften giebt, die sich durch die Natur ihres Angriffsortes unterscheiden: Kräfte, deren Angriffsort eine Fläche, und Kräfte, deren Angriffsort ein Körper ist. Wenn ein schwerer Körper auf dem Boden oder auf dem Tische ruht, so wird einer nach unten wirkenden Kraft der zweiten Art durch eine nach oben gerichtete Kraft, die von der ersteren Art ist, das Gleichgewicht gehalten.

(b.) Das zweite eine Kraft bestimmende Element ist ihre Richtung. Die Richtung einer Kraft ist die Linie, in welcher sie wirkt. Wenn der Angriffsort einer Kraft als ein Punkt angesehen wird, so ist eine durch diesen Punkt in der Richtung, in welcher die Kraft den Körper zu bewegen strebt, gelegte Linie die Richtung der Kraft. Im Falle einer über eine Oberfläche vertheilten Kraft ist es oft möglich und zweckmässig, einen einzigen Punkt und eine einzige Linie in der Art anzunehmen, dass eine in diesem Punkte angreifende und in der Richtung dieser Linie wirkende Kraft von gewisser Grösse eben die Wirkung hervorbringt, die in Wirklichkeit erfolgt.

(c.) Das dritte eine Kraft bestimmende Element ist ihre Grösse. Dies erfordert eine Betrachtung der Methode, die in der Dynamik zum Messen der Kräfte angewandt wird. Um etwas messen zu können, muss man zuvor eine Maasseinheit oder ein Maass, auf welches man sich bezieht, und ausserdem ein Princip der numerischen Bestimmung oder ein Verfahren haben, nach welchem man sich auf dieses Maass bezieht. Beides werden wir uns alsbald verschaffen. Siehe auch unten § 258.

219. Der beschleunigende Effect einer Kraft ist der Geschwindigkeit proportional, welche die Kraft in einer gegebenen Zeit erzeugt, und wird gemessen durch die Geschwindigkeit, welche in der Zeiteinheit hervorgebracht wird, respective hervorgebracht werden würde. Mit anderen Worten, der beschleunigende Effect ist die verhältnissmässige Grösse der durch die Kraft bewirkten Geschwindigkeitsänderung. Dies ist aber nichts anderes, als was wir (§ 28) schon als Beschleunigung definirt haben.

220. **Maass einer Kraft.** — Das Maass einer Kraft ist die Quantität der Bewegung, die sie in der Zeiteinheit hervorbringt.

Der Leser, der gewohnt ist, von einer Kraft von so und so viel Pfund oder Tonnen zu sprechen, wird einigermaassen überrascht sein, wenn er findet, dass Newton solchen Ausdrücken keinen Vorschub leistet. Diese Methode ist nicht correct, so lange nicht bestimmt angegeben ist, in welchem Theile der Erdoberfläche das Pfund oder eine andere bestimmte Stoffmenge gewogen werden soll; denn das Gewicht einer gegebenen Stoffmenge ist in verschiedenen Breiten verschieden. In auffallendem Gegensatz zur Plumpheit dieses Systems steht die klare und einfache Genauigkeit der absoluten Methode, wie wir sie oben darlegten. Diese Methode werden wir überall beibehalten, ausser wenn wir bei der Mittheilung von Resultaten Kräfte in den den Ingenieuren eines Landes geläufigen Ausdrücken anzugeben wünschen. Wenn also W die in Pfunden ausgedrückte Masse eines Körpers, g die Geschwindigkeit ist, welche derselbe beim Fall während einer Secunde unter dem Einfluss seines Gewichtes oder der Anziehung der Erde erlangen würde, und P die in kinetischen oder absoluten Einheiten gemessene Schwerkraft ist, die auf den Körper wirkt, so haben wir

$$P = Wg.$$

221. Nach dem System, welches in den neueren Lehrbüchern der Dynamik gewöhnlich befolgt wird, ist die Masseneinheit das $g$fache der Masse der Gewichtseinheit. Diese Definition, welche eine wechselnde und sehr unnatürliche Masseneinheit liefert, ist sehr unpassend. In der That sind Gewichte Massen, nicht Kräfte. Sie werden zunächst im Verkehr angewandt, um eine bestimmte Stoffmenge ihrer Quantität nach auszumessen, ohne Rücksicht auf die Kraft, mit der dieselbe von der Erde angezogen wird.

So würde ein Kaufmann bei Anwendung einer gewöhnlichen Wage und einer Reihe von Gewichtstücken seinen Kunden immer dieselbe Quantität derselben Stoffart geben, wie auch immer die Anziehungskraft der Erde sich ändern möchte, da seine Messung von Massen abhängig ist. Ein anderer dagegen, der sich einer Federwage bediente, würde in hohen Breiten seine Kunden und in niedrigen Breiten sich selbst betrügen, wenn sein Instrument (das auf Kräften und nicht auf Massen beruht) in London genau adjustirt wäre.

Es ist nur eine secundäre Anwendung unserer Gewichte, dieselben zur Messung von Kräften, wie der Spannung von Dämpfen der Muskelkraft, u. s. w. zu benutzen. In allen Fällen, in denen grosse Genauigkeit erfordert wird, müssen die durch eine solche Methode erhaltenen Resultate auf das reducirt werden, was sich ergeben hätte, wenn die Kraftmessung mittels einer vollkommenen Federwage erfolgt wäre, deren Eintheilung die an einem festgesetzten Orte auf die Gewichte wirkenden Schwerkräfte anzuzeigen hat

Es ist daher weit einfacher und besser, das englische Pfund oder ein anderes nationales oder internationales Normalgewicht, z. B. das Gramm (s. das Capitel über Maasse und Instrumente) als Masseneinheit anzunehmen und daraus der oben gegebenen Newton'schen Definition gemäss die Krafteinheit herzuleiten. Dies ist die Methode, welche Gauss bei seiner Vervollkommnung des Systems der Kräftemessung eingeschlagen hat, und ihr verdanken wir eine absolute Krafteinheit, die auf einem anderen Wege nicht hätte erlangt werden können.

222. **Clairault's Formel für die Grösse der Schwerkraft.** — Aus Beobachtungen und mit Zugrundelegung einer gewissen auf die Gestalt und Dichtigkeit der Erde bezüglichen Theorie hat Clairault eine Formel hergeleitet, welche überall, wo keine Pendelbeobachtung von hinlänglicher Genauigkeit angestellt worden ist, benutzt werden kann zur Berechnung des wahrscheinlichsten Werthes der scheinbaren Schwerkraft, die die Resultante der wirklichen Schwerkraft und der Centrifugalkraft ist. Diese Formel enthält zwei Constanten, die nach den besten neueren Pendelbeobachtungen berichtigt sind (Airy, Encyclopaedia Metropolitana, Figure of the Earth). Sie ist folgende: —

Wenn G die am Aequator und g die in irgend einer Breite λ auf eine Masseneinheit wirkende scheinbare Schwerkraft bezeichnet, so ist

$$g = G(1 + 0{,}005133\, sin^2 \lambda).$$

Der Werth von G, ausgedrückt in absoluten Krafteinheiten, von denen gleich die Rede sein soll, ist

32,088 in britischen Einheiten,
9,780 in metrischen Einheiten.

Nach dieser Formel ist die Schwerkraft am Pole

$$g = 32{,}088 \times 1{,}005133 = 32{,}2527.$$

223. **Gauss' absolute Einheit.** — Da die Schwere nicht im Stande war, uns ein von jeder Oertlichkeit unabhängiges bestimmte

Maass zu verschaffen, so müssen wir uns irgend einer anderen Methode bedienen. Das in der oben dargelegten Weise von Newton angegebene, praktisch aber zuerst von Gauss eingeführte Messungsprincip liefert uns, was wir suchen. Nach diesem Princip ist die Krafteinheit diejenige Kraft, welche der Masseneinheit während der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt.

Dieses Maass ist unter dem Namen: „Gauss' absolute Einheit" bekannt; absolut heisst dieselbe deshalb, weil sie ein Kräftemaass liefert, das von der in verschiedenen Gegenden verschiedenen Grösse der Schwerkraft unabhängig ist.

224. Die absolute Einheit hängt von der Masseneinheit, der Zeiteinheit und der Einheit der Geschwindigkeit ab. Da nun die Einheit der Geschwindigkeit von der Raumeinheit und der Zeiteinheit abhängt, so enthält unsere Definition eine einfache Beziehung auf Masse und Raum, aber eine doppelte Beziehung auf die Zeit, und dies ist ein Punkt, der besonders beachtet werden muss.

225. **Britische absolute Einheit.** — Die Masseneinheit sei das britische Pfund, die Raumeinheit der britische Fuss und die Zeiteinheit die mittlere Sonnensecunde. Dann haben wir die britische absolute Krafteinheit zu definiren als „die Kraft, unter deren Einwirkung ein Pfund Materie während einer Secunde eine Geschwindigkeit von einem Fuss per Secunde erlangt."

226. **Vergleich der absoluten Krafteinheit mit der Schwerkraft.** — Um dieses Maass verständlich zu machen, haben wir nur zu bestimmen, wie viele absolute Einheiten auf eine gegebene Masse an irgend einem gegebenen Orte dieselbe Wirkung ausüben werden, wie die Schwerkraft. Zu diesem Zwecke müssen wir die Beschleunigung messen, welche die Schwerkraft in einem Körper erzeugt, der auf seiner Bahn keinen Widerstand findet. Das zuverlässigste Verfahren, diese Messung auszuführen, ist ein indirectes und beruht auf der Anwendung des Pendels. Die Pendelversuche, welche der Kapitän Kater in Leith Fort angestellt hat, haben ergeben, dass ein Körper, der an jenem Orte eine Secunde, ohne Widerstand zu finden, fällt, die Geschwindigkeit von 32,207 Fuss per Secunde erlangt. Die vorstehende Formel giebt uns für die Breite $55^0\ 33'$, welche ungefähr die Breite von Edinburg ist, genau 32,2. Die Aenderung der Schwerkraft für einen Grad Breitendifferenz macht um die Breite von Edinburg herum nur 0,0000832 ihres eigenen Betrages aus. Nahezu von derselben Grösse, nur ein wenig grösser, ist sie für jeden Breitengrad nach Süden bis zur Südgrenze der

britischen Inseln. Andererseits würde nach Norden hin, in der Breite der Orkney- und Shetland-Inseln, die Aenderung für jeden Grad merklich geringer sein. Vom Norden bis zum Süden der britischen Inseln nimmt also die Schwerkraft für jeden Grad höchstens um $^1/_{12000}$ des ganzen Betrages zu, den sie an irgend einem Orte hat. Der Durchschnittswerth der Schwerkraft ist für Grossbritannien und Irland jedenfalls nur wenig von 32,2 verschieden. Wenden wir das erhaltene Resultat auf die vorliegende Frage an, so sehen wir, dass die Schwerkraft in Edinburg 32,2 mal so gross als die Kraft ist, welche in einem Pfund während einer Secunde eine Geschwindigkeit von einem Fuss per Secunde erzeugen würde, oder mit anderen Worten: 32,2 ist die Anzahl der absoluten Einheiten, welche in dieser Breite dem Gewicht eines Pfundes gleichkommt. Die britische absolute Krafteinheit ist somit, roh ausgedrückt, etwa gleich dem Gewicht einer halben Unze.

227. Da Kräfte nur Richtung und Grösse besitzen, so können sie wie Geschwindigkeiten durch gerade Linien dargestellt werden, welche die Richtungen der Kräfte haben, und deren Längen den Grössen derselben beziehungsweise proportional sind.

Auch die Gesetze über die Zusammensetzung und Zerlegung beliebig vieler in demselben Punkte angreifenden Kräfte sind, wie wir später (§ 255) zeigen werden, die nämlichen wie die für Geschwindigkeiten bereits als gültig erwiesenen. Die §§ 26, 27 bleiben daher richtig, wenn statt Geschwindigkeit überall Kraft gesagt wird.

228. **Zerlegung der Kräfte, wirksame Componente einer Kraft.** — Die nach irgend einer Richtung genommene Componente einer Kraft, bisweilen die in dieser Richtung wirksame Componente genannt, wird daher erhalten, wenn man die Grösse der Kraft mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den die Richtungen der Kraft und der Componente einschliessen. Die zweite Componente ist in diesem Falle senkrecht gegen die erstere gerichtet.

Es ist in den meisten Fällen zweckmässig, Kräfte parallel zu drei auf einander senkrechten Geraden in Componenten zu zerlegen; jede dieser drei Componenten einer Kraft ergiebt sich durch Multiplication der Grösse der Kraft mit dem Cosinus des betreffenden Winkels.

229. **Satz aus der Geometrie.** — Wenn die Abstände eines Punktes von drei auf einander senkrechten Ebenen beziehungsweise gleich sind den mittleren Abständen einer Punktgruppe von den-

selben Ebenen, so ist der Abstand dieses Punktes von jeder beliebigen anderen Ebene gleich dem mittleren Abstande der Gruppe von eben dieser Ebene. Wenn also der Punkt in Bewegung ist, so ist seine senkrecht gegen diese Ebene genommene Geschwindigkeit natürlich gleich dem Mittelwerth der in derselben Richtung genommenen Geschwindigkeiten der Punkte der Gruppe.

Es seien (x_1, y_1, z_1), u. s. w. die Punkte der Gruppe, deren Anzahl i sein möge, und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Coordinaten eines Punktes, welcher den Bedingungen des Theorems genügt, so dass also

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \text{etc.}}{i},$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \text{etc.}}{i},$$

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + \text{etc.}}{i}$$

ist. Ist nun

$$lx + my + nz - a = 0$$

die Normalgleichung einer Ebene, d. h. bezeichnet a die Länge des vom Coordinatenanfangspunkte auf die Ebene gefällten Lothes und l, m, n beziehungsweise die Cosinus der Winkel, welche dieses Loth mit den Coordinatenaxen bildet, so erhält man nach einem bekannten geometrischen Satze den Abstand eines Punktes von der Ebene einfach dadurch, dass man in das erste Glied der Gleichung der Ebene statt der laufenden Coordinaten die Coordinaten des Punktes einsetzt. Werden also die Abstände der gegebenen Punkte von der Ebene mit p_1, p_2, u. s. w. und p bezeichnet, so ist

$$p_1 = lx_1 + my_1 + nz_1 - a,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und ebenso

$$p = l\bar{x} + m\bar{y} + n\bar{z} - a.$$

Substituirt man in die letzte Formel die oben angegebenen Werthe von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so ergiebt sich

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \text{etc.}}{i},$$

und damit ist unser Satz bewiesen. Weiter folgt sofort

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{i}\left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} + \text{etc.}\right).$$

230. **Trägheitsmittelpunkt und Schwerpunkt.** — Der Trägheitsmittelpunkt eines Systems gleicher materieller Punkte (mögen dieselben mit einander verbunden sein oder nicht) ist der Punkt, dessen Abstand von jeder beliebigen Ebene gleich dem Mittel der Abstände jener materiellen Punkte von der nämlichen Ebene ist (§ 229).

Eine Gruppe materieller Punkte, deren Massen ungleich sind, können wir uns stets in eine grössere Anzahl gleicher materieller Punkte aufgelöst denken, da wir uns vorstellen können, die gegebenen Massen seien in sehr kleine unter einander gleiche Theile zerlegt. Jeder der ursprünglich gegebenen Punkte wird je nach der Grösse seiner Masse natürlich mehr oder weniger dieser Theile enthalten. Sollten die Grössen der gegebenen Massen incommensurabel sein, so können wir der strengen Befriedigung der vorhergehenden Forderung jedenfalls beliebig nahe kommen, dadurch dass wir die Theile, in welche wir die Massen zerlegen, hinlänglich klein annehmen.

Dies vorausgesetzt, lässt sich die vorstehende Definition dazu benutzen, den Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Systems materieller Punkte zu definiren, mögen dieselben gleiche oder ungleiche Massen enthalten. Das Resultat kann folgendermaassen ausgesprochen werden: —

Der Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Systems irgendwelcher materiellen Punkte (gleichgiltig ob dieselben in starrer oder in sonst einer Weise, oder auch gar nicht mit einander verbunden sind) ist ein Punkt, dessen Abstand von jeder beliebigen Ebene gleich ist der durch die Summe der Massen dividirten Summe aller aus je einer Masse und ihrem Abstande von der Ebene gebildeten Producte.

Wir ersehen auch aus dem oben bewiesenen Satze, dass ein Punkt, dessen Abstände von drei auf einander senkrechten Ebenen dieser Bedingung entsprechen, derselben auch für jede andere Ebene genügen muss.

Befinden sich in den Punkten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), u. s. w. beziehungsweise die Massen w_1, w_2, u. s. w., so bestimmen sich die Coordinaten des Trägheitsmittelpunktes des Systems durch die folgenden Formeln: —

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \text{etc.}}{w_1 + w_2 + \text{etc.}} = \frac{\Sigma w x}{\Sigma w}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma w y}{\Sigma w}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma w z}{\Sigma w}.$$

Diese Formeln sind völlig allgemein und können leicht auf die besondere Form gebracht werden, die in irgend einem gegebenen Falle erfordert wird. Hätten wir nicht eine Reihe abgesonderter materieller Punkte, sondern eine durch gewisse bestimmte Raumtheile continuirlich vertheilte Materie, so würden, wenn ϱ die Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) bezeichnet, die Grundprincipien der Integralrechnung uns sofort

$$\bar{x} = \frac{\iiint \varrho\, x\, dx\, dy\, dz}{\iiint \varrho\, dx\, dy\, dz}, \text{ etc.}$$

liefern, und in diesen Formeln hätten sich die Integrationen über den ganzen von der in Rede stehenden Materie erfüllten Raum zu erstrecken, in welchem ρ einen von Null verschiedenen Werth hat.

Der Trägheits- oder Massenmittelpunkt ist danach in jedem Körper oder in jeder Gruppe von Körpern ein völlig bestimmter Punkt. Er wird oft sehr unpassend auch **Schwerpunkt** genannt. Die Theorie der resultirenden Wirkung der Schwere, die in der abstracten Dynamik gegeben werden wird, zeigt, dass es nur bei einer bestimmten Art der Stoffvertheilung einen bestimmten Punkt giebt, der in aller Strenge der Schwerpunkt eines starren Körpers genannt werden kann. In gewöhnlichen Fällen terrestrischer Gravitation ist jedoch eine annähernde Lösung gültig, nach welcher im gemeinen Leben der Ausdruck **Schwerpunkt** als gleichbedeutend mit **Trägheitsmittelpunkt** gebraucht werden kann; man darf aber nie vergessen, dass die in beiden Definitionen enthaltenen Grundideen wesentlich verschieden sind.

Der zweite Satz des § 229 kann jetzt offenbar in folgender Weise ausgesprochen werden: — Die Summe der Bewegungsgrössen der Theile des Systems in irgend einer Richtung ist gleich der in derselben Richtung genommenen Bewegungsgrösse einer Masse, die gleich der Summe der gegebenen Massen ist und sich mit der Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes bewegt.

231. **Moment.** — Das Moment eines physischen Agens ist das numerische Maass der Wirksamkeit desselben. So bezeichnet das Moment *einer Kraft in Beziehung auf einen Punkt oder eine* Linie das Maass ihrer Wirksamkeit in Betreff der Rotation, die sie um diesen Punkt oder um diese Linie erzeugt oder aufhebt.

232. **Moment einer Kraft in Beziehung auf einen Punkt.** — Das Moment einer Kraft in Beziehung auf einen Punkt definiren wir als das Product der Kraft in ihren senkrechten Abstand von dem Punkte. Dasselbe ist numerisch doppelt so gross als die Fläche des Dreiecks, dessen Spitze der Punkt und dessen Grundlinie eine die Kraft in Grösse und Richtung darstellende gerade Linie ist. Es ist oft gut, das Moment durch eine Gerade darzustellen, die ihm numerisch gleich ist, und die senkrecht auf die Ebene des Dreiecks durch dessen Spitze gezogen wird. Die Ebene des Dreiecks theilt den Raum in zwei Theile, und es ist noch anzugeben, in welchem dieser Theile die Linie liegen soll. Um in dieser Beziehung eine Bestimmung zu treffen, denken wir uns eine Uhr so in die Dreiecksebene gelegt, dass ihr Mittelpunkt in der Spitze liegt, und dass die

Kraft eine dem Lauf der Zeiger entgegengesetzt gerichtete Drehung um diesen Punkt herum zu erzeugen strebt. Die das Moment darstellende Linie soll in dem Raumtheile angenommen werden, dem das Zifferblatt der Uhr zugewandt ist.

Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Axe. — Unter dem Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Axe versteht man das Moment der in irgend einer zur Axe senkrechten Ebene genommenen Componente der Kraft, und zwar ist das Moment dieser Componente in Beziehung auf den Punkt zu nehmen, in welchem die Ebene von der Axe geschnitten wird. Wir denken uns hier die Kraft in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine, die der Axe parallel gerichtet ist, keine Wirkung hervorbringt, insofern es sich um eine Drehung um die Axe handelt; die zweite Componente ist senkrecht zur Axe, d. h. ihre Richtung liegt in einer zur Axe senkrechten Ebene. Die letztere Componente kann die hinsichtlich der Rotation um die Axe wirksame genannt werden, und wir definiren ihr Moment in Beziehung auf die Axe als ihr Moment in Beziehung auf den ihr zunächst gelegenen Punkt der Axe, was mit der oben gegebenen Definition übereinstimmt. Wenn man die Figur, welche das Moment der Kraft in Beziehung auf einen beliebigen Punkt der Axe darstellt, auf irgend eine zur Axe senkrechte Ebene projicirt, so ist die Fläche der Projection offenbar gleich dem Moment der Kraft in Beziehung auf die Axe.

233. Excurs über die Projection von Flächen. — Unter der Projection eines ebenen oder gekrümmten Flächenstücks auf eine Ebene versteht man den Theil dieser Ebene, welcher von der Projection des Umfangs der projicirten Figur eingeschlossen wird.

Denken wir uns ein Flächenstück in eine beliebige Anzahl Theile zerlegt, so machen die für irgend eine Ebene genommenen Projectionen der Theile die Projection der ganzen Figur für dieselbe Ebene aus. Dieser Ausspruch ist aber dahin zu verstehen, dass die Projectionsflächen der Theile als positiv oder negativ angesehen werden müssen, jenachdem diejenige ihrer Seiten, die wir kurz die Aussenseite der projicirten Fläche nennen wollen, der Vorderseite der Projectionsebene ab- oder zugewandt ist.

Wenn die projicirte Fläche oder ein Theil derselben eine zur Projectionsebene senkrechte Ebene ist, so verschwindet die Projection natürlich. Zwei beliebige Schalen mit gemeinschaftlichem Rande haben für jede Ebene gleiche Projectionen. Die Projection einer geschlossenen Oberfläche (oder einer Schale mit verschwindendem Rande) ist für jede Projectionsebene gleich Null.

Gleiche Flächenstücke, die in ein und derselben oder in parallelen Ebenen liegen, haben, auf jede beliebige Ebene projicirt, gleiche Projectionen, von welcher Form sie auch sein mögen.

Die Projection einer beliebigen ebenen Figur oder einer Muschelschale, deren Rand eine ebene Figur ist, auf irgend eine Ebene ist gleich dem Producte aus dem Flächeninhalt dieser Figur in den Cosinus des Winkels, den letztere mit der Projectionsebene bildet. Dieser Winkel ist spitz oder stumpf, jenachdem die Aussenseite der projicirten Fläche und die Vorderseite der Projectionsebene im Ganzen nach derselben Seite hin gerichtet sind oder nicht. Linien, welche in der oben dargelegten Weise Momente in Beziehung auf einen Punkt darstellen, die in verschiedenen Ebenen liegen, können danach wie Kräfte zusammengesetzt werden. (Einen analogen Satz enthält § 96.)

234. **Kräftepaare.** — Zwei in entgegengesetztem Sinne wirkende parallele Kräfte von gleicher Grösse bilden ein Kräftepaar. Das Moment eines Kräftepaars ist die Summe der Momente der beiden Kräfte in Beziehung auf irgend einen Punkt ihrer Ebene und daher gleich dem Producte einer der Kräfte in den kürzesten Abstand ihrer Richtungen. Dieser Abstand wird der Arm des Kräftepaars genannt.

Unter der Axe eines Kräftepaars versteht man eine von einem beliebig gewählten Punkte zur Ebene des Paars gezogene Senkrechte von solcher Grösse und solcher Richtung, dass sie die Grösse des Moments darstellt und die Richtung anzeigt, in welcher das Paar zu drehen strebt. Um die letztere Bedingung zu erfüllen, verfährt man am besten auf folgende Weise: Man halte eine Uhr so, dass ihr Mittelpunkt in den gewählten Punkt fällt, und dass ihre Ebene der Ebene des Kräftepaars parallel ist. Jenachdem dann die Bewegung der Zeiger der Richtung, in welcher das Kräftepaar zu drehen sucht, entgegengesetzt ist oder nicht, ziehe man die Axe durch die Vorderseite oder durch die Hinterseite der Uhr. Es wird sich zeigen, dass ein Kräftepaar durch seine Axe vollständig dargestellt wird, und dass Kräftepaare durch dieselben geometrischen Constructionen zerlegt und zusammengesetzt werden, wie Kräfte und Geschwindigkeiten. Diese Constructionen sind bei Kräftepaaren mit den Axen, wie sie bei Kräften und Geschwindigkeiten mit den Linien vorzunehmen sind, welche die letzteren direct darstellen.

235. **Moment einer Geschwindigkeit, einer Bewegungsgrösse und einer geradlinigen Verschiebung. Zusammensetzung von Momenten.** — Wenn wir im § 232 statt „Kraft" über-

all „Geschwindigkeit" sagen, so erhalten wir das Moment einer Geschwindigkeit in Beziehung auf einen Punkt, und wird noch die Masse des in Bewegung befindlichen Körpers als Factor eingeführt so gelangen wir zu einem in der Dynamik höchst wichtigen Begriff zu dem **Moment der Bewegungsgrösse.** Die Gesetze der Zusammensetzung und Zerlegung sind von den schon dargestellten nicht verschieden. Wir wollen sie jedoch einiger einfachen Anwendungen wegen zum Gegenstand einer elementaren Untersuchung machen. Das Moment einer geradlinigen Verschiebung ist das Product ihrer Länge in den Abstand ihrer Richtung von dem Punkte

Das Moment der resultirenden Geschwindigkeit eines materiellen Punktes in Beziehung auf einen beliebigen Punkt der Ebene der Componenten ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten, wenn das Vorzeichen jedes Moments, wie oben (§ 233) angegeben ist, bestimmt wird. Dasselbe gilt natürlich für Momente von Verschiebungen, von Kräften und von Bewegungsgrössen.

Wir betrachten zunächst zwei Bewegungscomponenten AB und AC, deren Resultante (§ 27) AD sein wird. Ihre halben Moment in Beziehung auf den Punkt O sind beziehungsweise die Flächen OAB, OCA. Nun haben die beiden Dreiecke OCA und OBD gleiche Grundlinien AC und BD. Ihre Höhen sind um die Höhe des Parallelogramms $ABDC$ (BD als Grundlinie angesehen) verschieden. Es ist folglich

$$OCA + \tfrac{1}{2}.ABDC = OBD,$$

$$OCA + OAB + \tfrac{1}{2}.ABDC = OBD + OAB,$$

d. h.

$$OCA + OAB + \tfrac{1}{2}.ABDC = OABD,$$

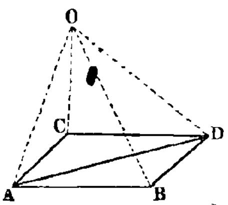
oder weil

$$\tfrac{1}{2}.ABDC = ABD,$$

$$OCA + OAB = OAD.$$

OAD ist aber gleich dem halben Moment der Resultante, und somit enthält die letzte Formel den Satz: das Moment der Resultant ist gleich der Summe der Momente der beiden Componenten.

Fig. 46.



Sind in einer Ebene beliebig viele Bewegungscomponenten gegeben, so können wir dieselben der Reihe nach zusammensetzen, indem wir mit zweien (gleichgilt welchen) beginnen, darauf eine dritte hinzunehmen, u. s. w. Wir sehen sofort, dass di

Summe ihrer Momente gleich dem Moment ihrer Resultante ist. Daraus folgt natürlich, dass, wenn wir die Geschwindigkeit eines Punktes in beliebig viele in derselben Ebene liegende Componenten zerlegen, die Summe der Momente dieser Geschwindigkeitscomponenten in Beziehung auf jeden Punkt ihrer Ebene gleich dem Moment ihrer Resultante ist. Ferner ergiebt sich Folgendes: Ertheilt man einem in Bewegung befindlichen Punkte der Reihe nach mehrere Geschwindigkeiten von verschiedenen, aber ein und derselben Ebene angehörenden Richtungen, so dass die Geschwindigkeit des Punktes jederzeit die Resultante der ihm bis dahin ertheilten Geschwindigkeiten ist, so ist das Moment seiner Geschwindigkeit jederzeit die Summe der Momente aller dieser Geschwindigkeiten.

Zusatz. — Wenn eine der Componenten beständig durch den Punkt hindurchgeht, so verschwindet ihr Moment. Dies ist der Fall einer Bewegung, in welcher die Beschleunigung gegen einen festen Punkt gerichtet ist, und wir gelangen so wieder zu dem Satze des § 36, a, nach welchem in diesem Falle die vom Radiusvector beschriebenen Flächenräume den Zeiten proportional sind; denn das Moment der Geschwindigkeit ist, wie wir gesehen haben, doppelt so gross als die vom Radiusvector in der Zeiteinheit beschriebene Fläche.

236. Um das Moment der Geschwindigkeit eines Punktes in Beziehung auf eine Axe zu erhalten, hat man diese Geschwindigkeit auf eine zur Axe senkrechte Ebene zu projiciren und das Moment dieser Projection in Beziehung auf den Punkt zu nehmen, in welchem die Ebene von der Axe geschnitten wird.

Das Moment der während irgend einer Zeit von einem Punkte um eine Axe ausgeführten Gesammtbewegung ist doppelt so gross als die Fläche, welche während dieser Zeit der Radiusvector seiner Projection auf eine zur Axe senkrechte Ebene beschreibt.

Betrachten wir jetzt einen in Bewegung befindlichen Punkt, dessen Bewegung nicht auf eine Ebene beschränkt ist, und denken uns denselben mit irgend einem festen Punkte verbunden. Die Verbindungslinie beschreibt eine Kegelfläche und wir sehen, dass die Projection dieser Fläche auf irgend eine durch den festen Punkt gelegte Ebene die Hälfte von dem ist, was wir soeben als das Moment der Gesammtbewegung um eine durch den festen Punkt senkrecht zur Ebene gezogene Axe definirt haben. Unter allen diesen Ebenen ist eine vorhanden, für welche die Projection der Kegelfläche grösser als für jede andere ist, und für jede zur letzteren senkrechte Ebene ist die Projection der Kegelfläche gleich Null, wenn die Definition der positiven und negativen Projectionen gehörig beachtet wird.

Wenn eine beliebige Anzahl in Bewegung befindlicher Punkte gegeben ist, so können wir in ähnlicher Weise die Kegelfläche betrachten, welche der von einem festen Punkte nach jedem derselben gezogene Radiusvector beschreibt. Auf die Projection der so erhaltenen vielschichtigen Kegelfläche lässt sich dieselbe Darstellung anwenden. Die resultirende Axe der Gesammtbewegung um den festen Punkt, zu welcher sich die Bewegungen aller gegebenen Punkte in irgend einer endlichen Zeit zusammensetzen, ist eine durch den festen Punkt gehende Gerade, die senkrecht zur Ebene steht, für welche die Fläche der ganzen Projection grösser als für jede andere Ebene ist, und das Moment der Gesammtbewegung um die resultirende Axe ist das Doppelte der Fläche dieser Projection.

Die resultirende Axe und das Geschwindigkeitsmoment einer beliebigen Anzahl in Bewegung befindlicher Punkte in Beziehung auf irgend einen festen Punkt sind beziehungsweise die resultirende Axe der einer unendlich kleinen Zeit entsprechenden Gesammtbewegung und deren Moment, dividirt durch diese Zeit.

Bewegen sich beliebig viele Punkte während einer beliebigen Zeit, so wird das Moment der Gesammtbewegung um irgend eine Axe dadurch erhalten, dass man das Moment der Gesammtbewegung um die durch einen beliebigen Punkt der erstgenannten Axe gehende resultirende Axe mit dem Cosinus des von beiden Axen eingeschlossenen Winkels multiplicirt.

Die einem beliebigen festen Punkte entsprechende resultirende Axe der Gesammtbewegung einer beliebigen Anzahl in Bewegung befindlicher Punkte, sowie das ihr zugehörende Moment der Gesammtbewegung lassen sich durch dieselben elementaren Constructionen aus den resultirenden Axen und Momenten der einzelnen Punkte oder Punktegruppen des Systems herleiten, durch welche die Richtung und Grösse einer resultirenden Verschiebung hergeleitet wird aus irgend welchen gegebenen Richtungen und Grössen von Verschiebungscomponenten.

Analoge Sätze gelten natürlich für die Momente von Geschwindigkeiten und Bewegungsgrössen.

237. Virtuelle Geschwindigkeit. Virtuelles Moment. — Wenn der Angriffspunkt einer Kraft um ein kleines Stück verschoben und die Verschiebung auf die Richtung der Kraft projicirt wird, so ist die Projection die in der Richtung der Kraft genommene Componente der Verschiebung. Man nennt diese Componente die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes. Die virtuelle Geschwindigkeit ist positiv oder negativ, jenachdem sie dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie die Kraft hat.

Das Product der Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes heisst das virtuelle Moment der Kraft. Wir haben diese Ausdrücke eingeführt, weil die Geschichte und die Entwicklungen der Wissenschaft ihre Kenntniss fordern; sie sind aber, wie wir später zeigen werden, nur untergeordnete Stellvertreter einer weit nützlicheren Reihe von Begriffen, die Newton klar aufgestellt hat.

238. **Arbeit.** — Man sagt, eine Kraft leiste eine Arbeit, wenn ihr Angriffsort eine positive Bewegungscomponente in ihrer Richtung hat, und die Arbeit einer Kraft wird gemessen durch das Product dieser Bewegungscomponente in die Grösse der Kraft.

Werden etwa Kohlen aus einer Grube emporgeschafft, so ist die Grösse der geleisteten Arbeit dem Gewicht der gehobenen Kohlen, d. i. der beim Heben überwundenen Kraft, und ausserdem der Höhe, bis zu welcher die Kohlen gehoben sind, proportional. Die zum Messen der Arbeit von den britischen Ingenieuren in der Praxis angenommene Einheit ist die Arbeit, die erfordert wird, um eine dem Gewicht eines Pfundes gleiche Kraft während eines Weges von einem Fuss zu überwinden. Diese Einheit heisst ein Fusspfund.

Bei rein wissenschaftlichen Messungen ist die Arbeitseinheit nicht das Fusspfund, sondern die durch die Raumeinheit hindurch wirkende kinetische Krafteinheit (§ 225). Diese Einheit wird z. B., wie wir weiterhin zeigen werden, beim Messen der Arbeit eines elektrischen Stromes angewandt, wie überhaupt die Einheiten für elektrische und magnetische Messungen auf der kinetischen Krafteinheit beruhen.

Wenn das Gewicht in schräger Richtung gehoben wird, z. B. längs einer geneigten glatten Ebene, so ist der Raum, durch welchen hindurch die Kraft überwunden werden muss, im Verhältniss der Länge zur Höhe der Ebene grösser, als bei verticaler Hebung; die zu überwindende Kraft ist aber jetzt nicht mehr das ganze Gewicht, sondern die parallel zur Ebene genommene Componente desselben, und letztere ist im Verhältniss der Höhe zur Länge der Ebene kleiner als das Gewicht. Multiplicirt man diese beiden Ausdrücke, so ergiebt sich, wie wir erwarten durften, dass die Grösse der Arbeit sich nicht ändert, wenn man statt der senkrechten eine geneigte Bahn nimmt.

239. Allgemein ist die Arbeit, welche irgend eine Kraft während einer unendlich kleinen Verschiebung ihres Angriffspunktes leistet, nichts anderes als ihr virtuelles Moment (§ 237). Sie ist also das Product der Verschiebung in die längs der Richtung der Verschiebung genommene Componente der Kraft.

Daraus geht hervor, dass eine Kraft keine Arbeit leistet, wenn die Bewegung ihres Angriffspunktes beständig senkrecht gegen die Richtung erfolgt, in welcher die Kraft wirkt. Ein solcher Fall, in welchem eine Kraft nicht arbeitet, ist der gegenseitige normale Druck zwischen einem unbeweglichen und einem beweglichen Körper, wie die Spannung einer Schnur, an welche eine Pendellinse befestigt ist, oder die Anziehung der Sonne gegen einen Planeten, wenn letzterer einen Kreis beschreibt, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht.

240. Arbeit eines Kräftepaars. — Die von einer Kraft oder von einem Kräftepaar in Beziehung auf einen um eine Axe sich drehenden Körper ausgeübte Arbeit ist das Product aus dem Moment der Kraft oder des Paars in den Winkel (durch den entsprechenden Bogen vom Radius Eins gemessen), um welchen der angegriffene Körper sich dreht. Hierbei ist vorausgesetzt, dass das Moment für alle Lagen des Körpers dasselbe bleibe. Ist das Moment veränderlich, so gilt die obige Behauptung nur für unendlich kleine Verschiebungen; man gelangt jedoch zu einem ganz exacten Resultat durch Anwendung des genauen Durchschnittsmoments der Kraft oder des Paars. Der Beweis liegt auf der Hand.

Wenn Q das Moment der Kraft oder des Kräftepaars für eine durch den Winkel ϑ gegebene Lage des Körpers ist, so erhält man im Falle eines constanten Q für die während der Drehung von ϑ_0 bis ϑ_1 geleistete Arbeit den Ausdruck $Q(\vartheta_1 - \vartheta_0)$; für dieselbe Grösse ergiebt sich aber im Falle eines veränderlichen Q der Werth $\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} Q\,d\vartheta = q(\vartheta_1 - \vartheta_0)$, worin q den genauen Mittelwerth von Q bezeichnet.

241. Verwandlung der Arbeit. Potentielle Energie. — Die Arbeit, welche eine Kraft an einem Körper leistet, offenbart sich immer durch eine entsprechende Zunahme an lebendiger Kraft oder kinetischer Energie, wenn keine anderen Kräfte auf den Körper wirken, welche Arbeit leisten können, oder gegen welche Arbeit geleistet wird. Wenn gegen irgend welche Kräfte Arbeit geleistet wird, so ist die Zunahme an kinetischer Energie um den Betrag der so gethanen Arbeit kleiner als im früheren Falle. In Folge davon erlangt aber der Körper ein Aequivalent in der Form von potentieller

Energie (§ 273), wenn er unter solchen physikalischen Bedingungen steht, dass diese Kräfte mit gleicher Stärke und in den nämlichen Richtungen wirken, wenn die Bewegung des Systems umgekehrt wird. So kann es auch kommen, dass die kinetische Energie unverändert bleibt, und dass die ganze ausgeführte Arbeit als potentielle Energie aufgesammelt wird.

Es ist z. B. Arbeit erforderlich, um ein Gewicht auf eine Höhe zu heben, eine Feder zu spannen, Luft zu comprimiren, u. s. w.; aber das gehobene Gewicht, die gespannte Feder, die comprimirte Luft, u. s. w. sind Vorräthe von Kraft, die man nach Belieben verwenden kann.

242. **Newton's Bewegungsgesetze.** — Im Vorhergehenden haben wir einige von Newton's Definitiones fast wörtlich, andere in einer für die neueren Methoden geeigneteren Form mitgetheilt, und einige Ausdrücke eingeführt, die erst nach dem Erscheinen der Principia erfunden wurden. Dagegen werden wir die Axiomata, sive Leges Motus, zu denen wir jetzt übergehen, in Newton's eigenen Worten wiedergeben. Die beiden Jahrhunderte, die fast verflossen sind, seit Newton sie zuerst veröffentlichte, haben nicht die Nothwendigkeit irgend eines Zusatzes oder einer Modification gezeigt. Die beiden ersten dieser Gesetze wurden von Galilei entdeckt, und das dritte war in einigen seiner vielen Formen schon vor dem Erscheinen der Principia Hooke, Huyghens, Wallis, Wren und Anderen bekannt. In neuerer Zeit herrschte das Streben, das zweite Gesetz in zwei Gesetze zu zertheilen, die man dann das zweite und dritte nannte, und das dritte vollständig zu ignoriren, obgleich man dasselbe in jedem Problem der Dynamik direct anwandte; aber alle, die so verfuhren, waren indirect gezwungen, die Vollständigkeit von Newton's System anzuerkennen, indem sie das sogenannte D'Alembert'sche Princip, welches in Wirklichkeit eben das verworfene Newton'sche dritte Gesetz in einer anderen Form ist, als Axiom einführten. Newton's eigene Erläuterung seines dritten Gesetzes weist nicht nur auf D'Alembert's Princip, sondern auch auf die neueren die Arbeit oder Energie betreffenden Principien direct hin.

243. Ein Axiom ist ein Satz, dessen Wahrheit zugegeben werden muss, sobald die Ausdrücke, in denen er gegeben ist, klar verstanden sind. Wie wir aber in unserem Capitel über „Erfahrung“ zeigen werden, haben physikalische Axiome nur für diejenigen die Natur von Axiomen, welche eine hinreichende Kenntniss der Wirkung physischer Ursachen besitzen, um im Stande zu sein,

die nothwendige Wahrheit jener Sätze auf der Stelle einzusehen. Wir geben jetzt ohne weitere Vorausbemerkungen Newton's drei Gesetze und erinnern nur an Folgendes: Die Eigenschaften der Materie hätten solche sein können, dass eine ganz andere Reihe von Gesetzen hätten als Axiome aufgestellt werden müssen. Daher hat man die Newton'schen Gesetze als auf Ueberzeugungen beruhend anzusehen, die aus Beobachtungen und Versuchen geschöpft sind; sie sind keineswegs Gegenstand intuitiver Erkenntniss.

244. LEX I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Jeder Körper verharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in geradliniger Bahn, so lange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

245. **Ruhe.** — Die Bedeutung des Ausdrucks Ruhe in der Physik kann nicht absolut definirt werden, insofern eine absolute Ruhe in der Natur nirgend existirt. Wenn die Gesammtheit der Materie endlich wäre, so liesse sich ihr Trägheitsmittelpunkt als absolut ruhend ansehen, oder man könnte sich vorstellen, derselbe bewege sich mit irgend einer gleichförmigen Geschwindigkeit in einer beliebigen Richtung durch den unendlichen Raum. Es ist aber bemerkenswerth, dass das erste Bewegungsgesetz uns in den Stand setzt (unten § 249), das zu erklären, was man eine directionelle Ruhe nennen kann. Auch werden wir später sehen, dass ein vollkommen glatter sphärischer Körper, welcher aus concentrischen Schalen besteht, deren jede von gleichförmigem Material und überall von derselben Dichtigkeit ist, sich, wenn man ihn in eine Drehung um eine Axe versetzt hat, trotz hinzutretender einwirkender Kräfte mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht und seine Rotationsaxe in einer absolut festen Richtung erhält. Ferner wird sich bald (§ 267) zeigen, dass die Ebene, in welcher das in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt genommene Moment der Bewegungsgrösse des (als endlich vorausgesetzten) Weltalls am grössten ist, eine im Raume feste Richtung hat; es lässt sich diese Ebene offenbar aus den in irgend einem Augenblick wirklich eintretenden Bewegungen bestimmen.

246. Wir können die Behauptung des ersten Gesetzes, sofern sie die Geschwindigkeit betrifft, logisch umkehren, und gelangen dadurch zu folgenden Aussprüchen: —

Die Zeiten, während welcher irgend ein besonderer Körper, der durch keine Kraft angetrieben wird, die Geschwindigkeit seiner Bewegung zu ändern, gleiche Wege durchläuft, sind einander gleich. Ferner: — Jeder andere Körper im Weltall, der durch keine Kraft angetrieben wird, die Geschwindigkeit seiner Bewegung zu ändern, bewegt sich durch gleiche Wege hindurch während einer Reihe von Zeiträumen, in denen der gewählte besondere Körper gleiche Wege beschreibt.

247. **Zeit.** — Der erste Satz des vorigen Paragraphen drückt bloss die für die Messung der Zeit allgemein getroffene Uebereinkunft aus. Die Rotation der Erde um ihre Axe bietet uns einen Bewegungsfall dar, in welchem die Bedingung, dass keine Kraft eine Aenderung der Geschwindigkeit herbeiführen solle, mit grösserer Genauigkeit annähernd erfüllt ist, als in irgend einer anderen Bewegung, die wir leicht und genau beobachten könnten, und die numerische Messung der Zeit beruht praktisch darauf, dass man gleiche Zeiträume als die Zeiten definirt, während welcher die Erde durch gleiche Winkel rotirt. Natürlich ist dies kein Naturgesetz, sondern eine blosse Uebereinkunft und, wie wir jetzt erkennen, ein Theil von Newton's erstem Gesetze.

248. Der andere Theil des § 246 ist nicht eine Uebereinkunft, sondern eine grosse Naturwahrheit, die sich durch Hinweisung sowohl auf kleine und alltägliche Fälle, wie auch auf die grossartigsten Erscheinungen, die wir uns vorstellen können, erläutern lässt.

Ein Ball, der eine horizontale Eisfläche entlang geschleudert wird, legt (wenn man von der Verzögerung absieht, die er durch die Reibung und durch den Widerstand der Luft erleidet) in aufeinander folgenden Zeiträumen, während welcher die Erde durch gleiche Winkel rotirt, gleiche Wege zurück. Die Sonne bewegt sich, während die Erde durch gleiche Winkel rotirt, durch gleiche Theile des Weltraums hindurch; eine Abweichung würde nur insofern eintreten, als der Widerstand der zwischen den Sternen befindlichen Materie und die Attraction der übrigen Weltkörper die Geschwindigkeit der Sonne und die Geschwindigkeit der Rotation der Erde verändern sollte.

249. **Feste Richtungen.** — Wenn zwei materielle Punkte aus der nämlichen Lage A in demselben Augenblick mit irgend welchen Geschwindigkeiten in irgend welche Richtungen geschleudert werden, so wird, wenn jeder derselben sich fortbewegt, ohne von einer Kraft beeinflusst zu werden, ihre Verbindungslinie beständig einer festen Richtung parallel sein. Denn wenn P, Q und später P', Q' gleichzeitige Lagen der beiden Punkte sind, so sagt das erste Bewegungsgesetz aus, dass

$AP : AP' = AQ : AQ'$ ist; folglich ist PQ parallel $P'Q'$. Wenn also vier materielle Punkte O, P, Q, R in demselben Augenblick aus einer Lage geschleudert werden, so sind OP, OQ, OR fortwährend feste Richtungen. Praktisch macht man aber die Bestimmung fester Richtungen im Raum (§ 267) von der Rotation von Gruppen materieller Punkte abhängig, die Kräfte auf einander ausüben; diese Bestimmung involvirt daher das dritte Bewegungsgesetz.

250. Das ganze Gesetz steht in einem eigenthümlichen Widerspruch mit der Lehre der alten Philosophen, welche die kreisförmige Bewegung für die vollkommenste erklärten.

Die Schlussclausel „nisi quatenus" u. s. w. bildet eine gute Vorbereitung für die Einführung des zweiten Gesetzes, indem sie uns auf den Gedanken bringt, dass nur eine Kraft es ist, welche eine Aenderung der Bewegung hervorrufen kann. In welcher Weise, fragen wir naturgemäss weiter, hängt die hervorgebrachte Aenderung der Bewegung von der Grösse und Richtung der Kraft ab, die sie hervorbringt? Und die Antwort lautet: —

251. LEX II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Die Aenderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und findet in der Richtung der Geraden statt, in welcher die Kraft einwirkt.

252. Wenn eine Kraft eine Bewegung erzeugt, so wird eine doppelte Kraft die doppelte Bewegung erzeugen, u. s. w.; dabei ist es gleichgültig, ob man die Theile der Kraft gleichzeitig oder nach einander, d. h. ob man die Kraft momentan oder allmälig wirken lässt. Diese neu erzeugte Bewegung wird, wenn der Körper schon vorher in Bewegung begriffen war, zur früheren Bewegung addirt, wenn sie mit derselben direct übereinstimmt; sie wird von derselben subtrahirt, wenn sie ihr direct entgegengesetzt ist; beide werden endlich nach den schon dargelegten kinematischen Principien geometrisch zusammengesetzt, wenn die Richtung der früheren Bewegung und die Richtung der Kraft irgend einen Winkel mit einander bilden. (Dies ist eine Umschreibung von Newton's eigenem Commentar zum zweiten Gesetz.)

253. Im ersten Capitel haben wir die Aenderung der Geschwindigkeit oder die Beschleunigung als ein rein geometrisches Element betrachtet und gesehen, wie man dieselbe aus der gegebenen anfänglichen und der Endgeschwindigkeit sofort entnehmen kann. Aus der Definition der Bewegungsgrösse (§ 210) sehen wir,

dass, wenn die auf diese Weise geometrisch bestimmte Aenderung der Geschwindigkeit mit der Masse des Körpers multiplicirt wird, wir die Aenderung der Bewegung erhalten, welche in Newton's Gesetz als das Maass der die Aenderung erzeugenden Kraft angesehen wird.

Es verdient besonders beachtet zu werden, dass in diesem Ausspruch nichts über die Bewegung gesagt ist, welche der Körper thatsächlich hatte, bevor die Kraft auf ihn einwirkte: das Gesetz spricht nur von der Aenderung der Bewegung. Dieselbe Kraft wird dieselbe Aenderung der Bewegung in einem Körper erzeugen, derselbe mag in Ruhe sein, oder sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit bewegen.

254. Weiter ist zu beachten, dass durchaus nicht gesagt ist, der Körper stehe unter der Einwirkung von nur einer Kraft. Wir können deshalb einen Theil des zweiten Gesetzes logisch auf die folgende (offenbar) erweiterte Form bringen: —

Wenn irgend welche Kräfte auf einen Körper wirken, so erzeugt jede Kraft, gleichgültig ob der Körper anfänglich in Ruhe war oder sich mit beliebiger Geschwindigkeit in einer beliebigen Richtung bewegte, genau diejenige Aenderung der Bewegung im Körper, welche sie erzeugt haben würde, wenn der Körper beim Beginn ihrer Einwirkung in Ruhe gewesen wäre und sie allein auf ihn eingewirkt hätte.

255. **Zusammensetzung von Kräften.** — Aus dieser Auffassung des zweiten Gesetzes ergiebt sich unmittelbar eine wichtige Folgerung. Da nämlich Kräfte durch die Aenderungen der Bewegung gemessen werden, die sie erzeugen, und da ihre Richtungen sich durch die Richtungen bestimmen, in denen diese Aenderungen vor sich gehen; da ferner die Aenderungen der Bewegung eines und desselben Körpers in den Richtungen der Aenderungen der Geschwindigkeit erfolgen und diesen Aenderungen proportional sind, so wird eine einzelne Kraft, welche die Richtung der resultirenden Aenderung der Geschwindigkeit hat und dieser Aenderung proportional ist, das Aequivalent einer beliebigen Anzahl gleichzeitig wirkender Kräfte sein. Daraus folgt: —

Die Resultante einer beliebigen Anzahl (in einem Punkte angreifender) Kräfte wird durch dasselbe geometrische Verfahren ermittelt, durch welches man die Resultante einer beliebigen Anzahl gleichzeitiger Geschwindigkeiten bestimmt.

256. Hieraus ergiebt sich sofort (§ 27) die Construction des Parallelogramms der Kräfte zur Bestimmung der Resultante zweier und des Polygons der Kräfte zur Bestimmung der Resultante beliebig vieler Kräfte, deren Richtungen durch einen und denselben Punkt gehen.

Offenbar lässt sich hieraus auch unmittelbar der Fall des Gleichgewichts einer Anzahl von Kräften herleiten, die in einem Punkte angreifen. Denn wenn wir eine weitere Kraft einführen, die der Resultante der gegebenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, so wird dieselbe eine Aenderung der Bewegung erzeugen, welche der durch die gegebenen Kräfte hervorgebrachten resultirenden Bewegungsänderung gleich und entgegengesetzt ist, d. h. sie wird einen Zustand herbeiführen, in welchem der Punkt keine Aenderung seiner Bewegung erfährt, und das ist, wie wir schon gesehen haben, die einzige Art von Ruhe, von der wir je eine Kenntniss erlangen können.

257. Newton sah, dass der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, welcher das Fundamentalprincip der Statik ist, im Grunde in dem zweiten Bewegungsgesetz enthalten ist und gab einen Beweis dafür, der im Wesentlichen mit dem vorhergehenden übereinstimmt. Diese Thatsache wurde aber in späteren Behandlungen der Statik ganz allgemein ignorirt. Die Folge davon war, dass verschiedene unnöthige, mehr oder weniger einleuchtende dynamische Axiome eingeführt wurden, die thatsächlich in Newton's Bewegungsgesetzen enthalten sind oder sich darauf zurückführen lassen. Wir haben Newton's Methode beibehalten, nicht nur ihrer bewunderswerthen Einfachheit wegen, sondern auch weil sie unseres Erachtens sowohl für den statischen, wie für den kinetischen Theil der Wissenschaft der Dynamik die am meisten philosophische Grundlage enthält.

258. Messung der Kraft und Masse. — Das zweite Gesetz liefert uns auch die Mittel, eine Kraft und ferner die Masse eines Körpers zu messen.

Wenn wir nämlich die Wirkungen betrachten, welche verschiedene Kräfte während gleicher Zeiträume auf einen und denselben Körper ausüben, so sind die erzeugten Geschwindigkeitsänderungen offenbar den Kräften proportional. Daher liefern uns die Aenderungen der Geschwindigkeit in diesem Falle die Mittel, die Grössen verschiedener Kräfte zu vergleichen. So erhalten wir aus den von derselben (frei fallenden) Masse während einer Secunde an verschiedenen Theilen der Erdoberfläche erlangten Geschwindigkeiten die Grösse der Anziehungskraft der Erde an diesen Stellen.

Wenn ferner gleiche Kräfte auf verschiedene Körper wirken, so müssen die in gleichen Zeiten hervorgebrachten Geschwindigkeitsänderungen sich umgekehrt wie die Massen dieser Körper verhalten. Das ist z. B. näherungsweise der Fall bei Eisenbahnzügen verschiedener Längen, welche durch dieselbe Locomotive in Bewegung gesetzt werden. Es ist genau realisirt im Falle der Wirkung eines elektrisirten Körpers auf eine Anzahl fester oder hohler Kugeln, die denselben äusseren Durchmesser haben und aus verschiedenen Metallen bestehen.

Wenn wir weiter einen Fall finden, in welchem verschiedene Körper, auf deren jeden eine Kraft wirkt, in derselben Zeit dieselben Aenderungen der Geschwindigkeit erfahren, so müssen die Kräfte den Massen der Körper proportional sein. So verhält es sich nach Beseitigung des Widerstandes der Luft mit frei fallenden Körpern. Wir schliessen daraus, dass das Gewicht eines Körpers an einem beliebig gegebenen Orte, oder die Kraft, mit welcher die Erde ihn anzieht, seiner Masse proportional ist, eine äusserst wichtige physikalische Wahrheit, die wir in dem Capitel über „die Eigenschaften der Materie“ noch eingehender behandeln werden.

259. Endlich geht noch aus diesem Gesetze hervor, dass es zu jedem kinematischen Satze, der in Zusammenhang mit dem Begriff Beschleunigung steht, einen entsprechenden kinetischen Satz giebt.

Nehmen wir z. B. an, X, Y, Z seien beziehungsweise die den festen Axen der Coordinaten x, y, z parallelen Componenten der ganzen auf einen Punkt von der Masse M wirkenden Kraft. Aus § 212 ersehen wir, dass

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = X,\ M\frac{d^2y}{dt^2} = Y,\ M\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

oder

$$M\ddot{x} = X,\ M\ddot{y} = Y,\ M\ddot{z} = Z$$

ist. Daraus folgt leicht

$$M\ddot{s} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = X\frac{\dot{x}}{\dot{s}} + Y\frac{\dot{y}}{\dot{s}} + Z\frac{\dot{z}}{\dot{s}},$$

$$0 = X\frac{\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}}{\varrho^{-1}\dot{s}^3} + Y\frac{\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}}{\varrho^{-1}\dot{s}^3} + Z\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\varrho^{-1}\dot{s}^3},$$

$$\frac{M\dot{s}^2}{\varrho} = X\frac{\dot{s}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{s}}{\varrho^{-1}\dot{s}^3} + Y\frac{\dot{s}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{s}}{\varrho^{-1}\dot{s}^3} + Z\frac{\dot{s}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{s}}{\varrho^{-1}\dot{s}^3}.$$

Die zweiten Glieder dieser Gleichungen sind beziehungsweise die längs der Tangente (§ 9), die senkrecht zur osculatorischen Ebene (§ 9) und die nach dem Krümmungsmittelpunkt der beschriebenen Bahn hin genommenen Componenten der einwirkenden Kraft.

260. Mittels der beiden ersten Gesetze sind wir zu einer Definition und einem Maass der Kraft gelangt. Wir haben auch gefunden, wie man Kräfte zusammensetzt, und wie folglich eine Kraft zerlegt wird. Wir haben endlich gesehen, wie man die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes untersucht, der gegebenen Kräften unterworfen ist. Die beiden Gesetze reichen aber nicht hin, die verwickelteren Bewegungsfälle vollständig zu verstehen, namentlich diejenigen, in welchen es sich um die gegenseitigen Wirkungen — z. B. Attraction, Druck, Uebertragung von Energie in irgend einer Form — zwischen zwei oder mehr Körpern handelt. Diese Lücke wird vollständig ausgefüllt durch das dritte Newton'sche Gesetz.

261. LEX III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Bei jeder Wirkung ist immer eine gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung vorhanden: oder die Wirkungen, welche irgend zwei Körper auf einander ausüben, sind immer gleich und entgegengesetzt gerichtet.

262. Wenn ein Körper einen anderen drückt oder zieht, so wird er selbst von diesem anderen mit einer gleichen Kraft in die entgegengesetzte Richtung gedrückt oder gezogen. Wenn Jemand einen Stein mit seinem Finger drückt, so übt der Stein auf den Finger einen entgegengesetzt gerichteten gleichen Druck aus. Ein Pferd, welches ein Boot durch einen Canal schleppt, wird durch eine Kraft rückwärts gezogen, die derjenigen gleich ist, mit welcher es am Schleppseil vorwärts zieht. Wie gross und von welcher Richtung auch die Aenderung der Bewegung eines Körpers sein mag, die durch einen Zusammenstoss desselben mit einem anderen erzeugt ist, dieser letztere hat seine Bewegung stets um denselben Betrag und in entgegengesetzter Richtung geändert; denn in jedem Augenblick während des Stosses war die Kraft für beide Körper gleich und entgegengesetzt. Wenn keiner der beiden Körper weder vor- noch nach dem Stosse eine Rotation ausführt, so verhalten sich die Geschwindigkeitsänderungen, die sie erfahren, umgekehrt wie ihre Massen.

Wenn ein Körper einen zweiten aus einer Entfernung anzieht, so zieht der zweite den ersteren mit einer gleichen und entgegengesetzten Kraft an. Dies Gesetz gilt nicht bloss für die Attraction ponderabeler Massen, sondern auch, wie Newton selbst bemerkt und experimentell bestätigt hat, für magnetische Attractionen, und ebenso, wie Otto Guericke fand, für elektrische Kräfte.

263. Die vorstehenden Bemerkungen stützen sich auf Newton's eigenen Commentar zu seinem dritten Gesetz; die darin betrachteten Wirkungen und Gegenwirkungen sind einfache Kräfte. In dem zugefügten Scholium, dessen volles Verständniss der Aufmerksamkeit der Erklärer entgangen zu sein scheint, macht Newton die folgende wichtige Bemerkung, durch welche eine neue Bestimmung der diesem dritten Gesetz unterworfenen Wirkungen und Gegenwirkungen eingeführt wird: —

Si aestimetur agentis actio ex ejus vi et velocitate conjunctim; et similiter resistentis reactio aestimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus et viribus resistendi ab earum attritione, cohaesione, pondere, et acceleratione oriundis; erunt actio et reactio, in ommi instrumentorum usu, sibi invicem semper aequales.

In einer vorhergehenden Betrachtung hat Newton gezeigt, was man unter der Geschwindigkeit einer Kraft oder eines Widerstandes zu verstehen hat, nämlich die in der Richtung der Kraft genommene Componente der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, also das, was wir als die virtuelle Geschwindigkeit definirt haben. Mit Rücksicht auf diese Erklärung können wir den vorhergehenden Ausspruch in folgender Weise lesen: —

Wenn die Wirkung eines Agens durch seine Grösse und zugleich durch seine Geschwindigkeit gemessen wird, und wenn man ebenso die Gegenwirkung des Widerstandes durch die Geschwindigkeiten seiner verschiedenen Theile und zugleich durch die Grössen dieser Theile misst, so sind — die Widerstände mögen in der Reibung, in der Cohäsion, im Gewicht oder in der Beschleunigung ihren Grund haben — bei allen Combinationen von Maschinen die Wirkung und die Gegenwirkung einander gleich.

Weiter unten werden wir eine vollständige Entwicklung der Consequenzen dieser wichtigen Bemerkung geben.

264. D'Alembert's Princip. — In der eben angeführten Stelle weist Newton darauf hin, dass Widerstandskräfte gegen eine Beschleunigung als Gegenwirkungen angesehen werden müssen, die den Wirkungen, durch welche die Beschleunigung erzeugt wird, gleich und entgegengesetzt sind. Wenn wir also irgend einen materiellen Punkt eines Systems betrachten, so muss seine Gegenwirkung gegen eine Beschleunigung gleich und entgegengesetzt der Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte sein, seien diese Kräfte nun die Wirkungen anderer Theile des Systems auf den Punkt, oder der Einfluss von Materie, welche nicht zu dem System gehört. Mit anderen Worten, seine Gegenwirkung muss mit diesen Kräften im Gleichgewicht sein. Newton's Ansicht läuft also darauf hinaus, dass alle Kräfte des Systems in Verbindung mit den Gegenwirkungen seiner materiellen Punkte gegen eine Beschleunigung für jeden einzelnen Punkt ein System bilden, das sich im Gleichgewicht befindet. Folglich bilden, nach dem Princip der Vereinigung von Kräften, die sich das Gleichgewicht halten, die sämmtlichen an Punkten des Systems wirkenden Kräfte im Verein mit den Gegenwirkungen gegen eine Beschleunigung eine für das ganze System im Gleichgewicht befindliche Reihe von Kräften. Dies ist das berühmte Princip, welches zuerst (im Jahre 1742) D'Alembert bestimmt aussprach und mit Erfolg anwandte, und das noch jetzt nach ihm benannt wird. Wir haben aber gesehen, dass es in ganz unverkennbarer Weise in Newton's eigener Interpretation seines dritten Bewegungsgesetzes enthalten ist. Da man in den Lehrbüchern der Dynamik die allgemeinen Gleichungen oder Bedingungen des Gleichgewichts zu erforschen pflegt, bevor man näher in den kinetischen Theil des Gegenstandes eingeht, so hat sich dies Princip in praktischer Beziehung als sehr nützlich erwiesen, indem es zeigt, wie man für jedes System, für welches die Gleichungen des Gleichgewichts ermittelt sind, ohne Weiteres die Gleichungen der Bewegung niederschreiben kann.

265. Man kann sich jeden starren Körper als in unbegrenzt kleine Theile getheilt vorstellen. In welcher Form wir nun auch eventuell eine physische Erklärung des Ursprungs der Kräfte finden, die zwischen diesen Theilen wirken, jedenfalls können wir von jedem solchen kleinen Theile annehmen, dass er seine Lage in Beziehung auf die übrigen in Folge von wechselseitigen Kräften beibehält, deren Richtungen die Linien sind, die ihn mit den übrigen Theilen verbinden.

266. Mit Rücksicht hierauf ergeben sich als unmittelbare Consequenzen des zweiten und dritten Gesetzes und der vorhergehenden Sätze über den Trägheitsmittelpunkt und das Moment der Bewegungsgrösse eine Reihe wichtiger Sätze, von denen wir einige folgen lassen: —

(a.) Der Trägheitsmittelpunkt eines sich irgendwie bewegenden starren Körpers, der keinen äusseren Kräften unterworfen ist, bewegt sich gleichförmig in einer geraden Linie.

(b.) Wenn irgend welche Kräfte auf den Körper einwirken, so ist die Bewegung seines Trägheitsmittelpunktes die nämliche, wie wenn diese Kräfte mit unveränderter Grösse und Richtung in diesem Punkte selbst angriffen.

(c.) Da das Moment einer auf einen materiellen Punkt wirkenden Kraft nichts anderes ist, als das Moment der Bewegungsgrösse, welche die Kraft in der Zeiteinheit erzeugt, so sind die Aenderungen des Moments der Bewegungsgrösse in irgend zwei Theilen eines starren Körpers, die in der Wechselwirkung dieser Theile ihren Ursprung haben, gleich und entgegengesetzt. Folglich erleidet das Moment der Bewegungsgrösse eines starren Körpers in Beziehung auf irgend eine Axe, die eine feste Richtung hat und durch einen Punkt geht, der entweder im Raume fest liegt oder sich gleichförmig in einer Geraden bewegt, durch die Wechselwirkungen der Theile des Körpers keine Aenderung.

(d.) Wenn äussere Kräfte auf den Körper wirken, so ist die Zunahme des Moments der Bewegungsgrösse die Summe der Momente dieser Kräfte in Beziehung auf die Axe.

267. **Erhaltung der Bewegungsgrösse und des Moments der Bewegungsgrösse.** — Wir nehmen für jetzt als bewiesen an, dass man sich die Wechselwirkung zwischen zwei starren Körpern in jedem Falle als aus Paaren gleicher und entgegengesetzter Kräfte bestehend vorstellen kann, die in geraden Linien wirken. Daraus geht hervor, dass für zwei starre Körper, die in irgend einer mit ihren Zuständen verträglichen Weise auf einander einwirken, die Summe der einer beliebigen festen Richtung parallel genommenen Bewegungsgrössen durch die Wechselwirkung der Körper keine Änderung erleidet; sowie dass die Summe der Momente der Bewegungsgrösse aller materiellen Punkte beider Körper, in Beziehung auf irgend eine Linie, die eine im Raum festliegende Richtung hat und durch einen beliebigen Punkt geht, der sich gleichförmig in einer Geraden nach irgend einer Richtung zu bewegt, constant bleibt. Aus dem ersteren dieser Sätze folgern wir, dass der Trägheitsmittelpunkt einer beliebigen Anzahl auf einander wirkender Körper sich, wenn er in Bewegung begriffen ist, gleichförmig in gerader Richtung weiter bewegt, ausser insofern die Richtung oder Geschwindigkeit seiner Bewegung durch Kräfte geändert wird, welche zwischen den Körpern des Systems und irgend einer anderen nicht zum System gehörenden Masse wirken. Aus demselben Satze ergiebt sich weiter, dass der Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Körpers oder Systems von Körpern gerade so sich bewegt, wie ihre gesammte Materie sich bewegen würde, wenn sie in einem

Punkte concentrirt wäre und unter dem Einfluss von Kräften stände, die den auf die verschiedenen Theile in Wirklichkeit wirkenden Kräften gleich und parallel sind. Aus dem zweiten Satze schliessen wir, dass die durch den Trägheitsmittelpunkt irgend eines Systems von Körpern oder durch irgend einen anderen ruhenden oder sich gleichförmig in einer geraden Richtung bewegenden Punkt gehende Axe der resultirenden Rotation ihre Richtung unverändert beibehält, und dass die Summe der Momente der Bewegungsgrössen in Beziehung auf diese Axe constant bleibt, wofern das System keine Einwirkung von aussen erfährt. Dies Princip wird manchmal die Erhaltung der Flächen genannt, eine nicht sehr passende Bezeichnung.

268. **Grösse der Arbeitsleistung. Pferdekraft.** — Die Grundlage der abstracten Theorie der Energie ist von Newton wunderbar klar und kurz in seiner schon (§ 263) angeführten Anmerkung gegeben worden, in welcher er auf ihre Anwendungen auf die Mechanik hinweist*). Die actio agentis, welche, wie er sie definirt, offenbar dem Product aus der wirksamen Componente der Kraft in die Geschwindigkeit des Punktes, auf den dieselbe wirkt, äquivalent ist, ist einfach dasjenige, was man jetzt die Intensität nennt, mit der die Kraft arbeitet. Die hier zu messende Grösse ist genau dieselbe wie die, für welche Watt hundert Jahre später die praktische Einheit einer „Pferdekraft" einführte; es ist dies die Stärke, mit der ein Agens arbeitet, wenn es während einer Minute 33 000 mal das Gewicht eines Pfundes einen Weg von einem Fuss hindurch überwindet, d. h. wenn es 550 Fusspfund Arbeit in der Secunde leistet. Meist ist aber die in Newton's Definition enthaltene Einheit vorzuziehen, nämlich die Grösse der Arbeitsleistung, bei welcher in der Einheit der Zeit die Einheit der Energie erzeugt wird.

269. **Energie in der abstracten Dynamik.** — Wenn wir Newton's Worte (§ 263) in diesem Lichte betrachten, so erkennen wir, dass sie sich logisch in folgende Form umkehren lassen: —

Die Arbeit, die auf irgend ein System von Körpern (in Newton's Ausspruch die Theile einer Maschine) ausgeübt wird, hat, wenn keine Beschleunigung stattfindet, ihr Aequivalent in der Arbeit, welche gegen die Reibung, die Molekularkräfte oder die

*) Der Leser wird sich erinnern, dass wir das Wort „Mechanik" in seinem wahr klassischen Sinne gebrauchen, indem wir darunter die Wissenschaft der Maschinen ve stehen; in diesem Sinne gebraucht es auch Newton selbst, wenn er eine weitere trachtung des Gegenstandes mit den Worten (in dem erwähnten Scholium) zurückwe Caeterum mechanicam tractare non est hujus instituti.

Schwere geleistet wird. Ist aber eine Beschleunigung vorhanden, so wird ein Theil der Arbeit zur Ueberwindung des Widerstandes gegen die Beschleunigung verbraucht, und die neu entwickelte kinetische Energie ist der auf diese Weise verwandten Arbeit äquivalent. Dies erhellt aus § 214.

Wenn ein Theil der Arbeit gegen Molekularkräfte geleistet wird, wie beim Biegen einer Feder, oder gegen die Schwerkraft, wie beim Heben eines Gewichtes, so sind der Rückschlag der Feder und der Fall des Gewichtes fähig, die anfangs verausgabte Arbeit zu irgend einer späteren Zeit wieder zu erzeugen (§ 241). Was aber die Arbeit betrifft, die zur Ueberwindung der Reibung dient, so glaubte man zu Newton's Zeit und noch lange nachher, diese Arbeit gehe durch die Reibung absolut verloren, und diese Ansicht findet sich sogar noch in neueren Werken anerkannter Gelehrten. Wir müssen jedoch die Untersuchung dieses Punktes verschieben, bis wir das Princip der Erhaltung der Energie in seiner modernen Form betrachten werden.

270. Wenn ein in Ruhe oder in Bewegung begriffenes gegebenes System von Körpern durch keine äusseren Kräfte beeinflusst wird, so wird die Summe der kinetischen Energien aller seiner Theile in irgend einer Zeit um einen Betrag vermehrt, der gleich der ganzen während dieser Zeit von den inneren Kräften des Systems geleisteten Arbeit ist; diese Kräfte können wir uns als zwischen den Punkten des Systems wirkend vorstellen. Wenn die Linien, in denen sie wirken, ihre Längen nicht ändern, so leisten die Kräfte keine Arbeit, und die Summe der kinetischen Energien des ganzen Systems bleibt constant. Wenn andererseits eine dieser Linien während der Bewegung ihre Länge ändert, so leisten oder verbrauchen die in ihr wirkenden Kräfte Arbeit, je nachdem die Länge im Sinne dieser Kräfte oder in entgegengesetztem Sinne sich ändert.

271. **Conservatives System.** — Man nennt ein begrenztes System von Körpern dynamisch conservativ (oder einfach conservativ, wenn es unnöthig ist, hinzuzusetzen, dass von Kräften die Rede ist), wenn während jeder beliebigen Bewegung, durch welche es aus einer besonderen Configuration in eine andere übergehen kann, die zwischen seinen Theilen wechselseitig wirkenden Kräfte stets denselben Betrag von Arbeit verrichten oder verbrauchen.

272. **Grundlage der Theorie der Energie.** — Die ganze Theorie der Energie in der Physik beruht auf dem folgenden Satze: —

Wenn die zwischen den Theilen eines materiellen Systems wechselseitig wirkenden Kräfte von den Geschwindigkeiten unabhängig sind, welche diese Theile entweder in Beziehung auf einander oder in Beziehung auf irgend eine äussere Masse haben, so muss das System dynamisch conservativ sein.

Denn wenn beim Uebergange aus einer besonderen Configuration in eine andere die wechselseitigen Kräfte auf einer Reihe von Wegen an den verschiedenen Theilen des Systems mehr Arbeit verrichteten, als auf einer anderen Reihe von Wegen, so könnte man das System, ohne Reibung eintreten zu lassen, auf einer Reihe von Wegen aus der ersten Configuration in die zweite überführen, es sodann auf der anderen Reihe von Wegen in die erste Configuration zurückbringen und es in dieser Weise unaufhörlich hin und her gehen lassen. Das System wäre somit eine ununterbrochene Quelle von Energie, ohne dass Materialien verbraucht würden, was unmöglich ist.

273. **Potenzielle Energie eines conservativen Systems.** — Die potenzielle Energie eines conservativen Systems in der Configuration, die es in irgend einem Augenblick besitzt, ist die Grösse der Arbeit, welche seine wechselseitigen Kräfte verrichten, während es aus einer beliebig gewählten Configuration in diejenige übergeht, die es zu der in Rede stehenden Zeit besitzt. Zwar nicht überall, aber im Allgemeinen ist es zweckmässig, die besondere Configuration, in welcher man die potenzielle Energie gleich Null rechnet, so zu wählen, dass die potenzielle Energie in jeder anderen betrachteten Configuration positiv sei.

274. Die potenzielle Energie eines conservativen Systems in irgend einem Augenblick hängt lediglich von der Configuration ab, die es in diesem Augenblick hat, da sie der Definition zufolge stets dieselbe ist, so oft das System auf diese Configuration gebracht wird. Sie ist daher, mathematisch ausgedrückt, eine Function der Coordinaten, durch welche die Lagen der verschiedenen Theile des Systems angegeben werden. Wenn wir z. B. ein conservatives System haben, das aus zwei materiellen Punkten besteht, oder auch, wenn das System durch zwei starre Körper gebildet wird, die auf einander mit einer Kraft wirken, welche nur von der relativen Lage eines Punktes des einen und eines Punktes des anderen Körpers abhängt, so hängt die potenzielle Energie des Systems von den Coordinaten eines dieser Punkte in Beziehung auf Coordinatenaxen ab, die in festen Richtungen durch den anderen Punkt hindurchgehen. Sie wird daher im Allgemeinen von drei unabhängigen Coordinaten ab-

hängen, für welche wir passend die Entfernung der beiden Punkte und zwei Winkel nehmen, welche die absolute Richtung ihrer Verbindungslinie bestimmen. So z. B. seien die Körper zwei gleichförmige Metallkugeln, die mit irgend welchen gegebenen Elektricitätsmengen elektrisirt sind und sich in einem isolirenden Medium, etwa der Luft, in einem Raume befinden, wo sie unter dem Einfluss eines grossen weit entfernten elektrisirten Körpers stehen. Die Wechselwirkung zwischen diesen beiden Kugeln wird nur von der relativen Lage ihrer Mittelpunkte abhängen. Sie wird aus zwei Theilen bestehen, nämlich aus der Gravitation, die nur von der Entfernung der Mittelpunkte abhängt, und der elektrischen Kraft, welche zunächst auch von ihrer Entfernung, ausserdem aber, der inducirenden Wirkung des entfernten Körpers wegen, von der absoluten Richtung der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte abhängt. In den Capiteln, in denen wir beziehungsweise die Gravitation und die Elektricität behandeln werden, werden wir die Theile der wechselseitigen potenziellen Energie der beiden Körper bestimmen, welche jede dieser beiden Ursachen einzeln hervorbringt. Wir werden finden, dass der erstere Theil das Product ihrer Massen, dividirt durch den Abstand ihrer Mittelpunkte, und dass der zweite Theil eine etwas verwickeltere Function des Abstandes der Mittelpunkte und des Winkels ist, welchen die Verbindungslinie der Mittelpunkte mit der Richtung der resultirenden elektrischen Kraft des entfernten elektrischen Körpers bildet.

Wenn, um ein anderes Beispiel zu geben, das System aus zwei Kugeln von weichem Eisen besteht, die sich in irgend einem Theile der Erdoberfläche befinden, so wird die Wechselwirkung zwischen beiden zum Theil die Gravitation sein, zum Theil aber in dem Magnetismus seinen Grund haben, der in ihnen durch die magnetische Kraft der Erde inducirt wird. Der von der letzteren Ursache abhängende Theil der wechselseitigen potenziellen Energie wird eine Function des Abstandes ihrer Mittelpunkte und der Neigung der Verbindungslinie der Mittelpunkte gegen die Richtung der magnetischen Kraft der Erde sein. Sein mathematischer Ausdruck wird mit demjenigen der potenziellen Energie der elektrischen Wirkung, die wir im vorhergehenden Falle betrachteten, soweit es sich um die Neigung handelt, übereinstimmen; aber das Gesetz, nach welchem er sich mit der Entfernung der Mittelpunkte ändert, wird sich weniger leicht bestimmen lassen.

275. **Unvermeidlicher Verlust von Energie in allen Bewegungen, die in der Natur vor sich gehen.** — In der Natur

wird die hypothetische Bedingung des § 271 in allen Bewegungsumständen augenscheinlich verletzt. Ein materielles System kann nie durch eine in sich zurücklaufende Bewegungsreihe hindurch gebracht werden, ohne dass mehr Arbeit gegen die wechselseitigen Kräfte seiner Theile verausgabt, als durch diese Kräfte gewonnen wird, da keine relative Bewegung stattfinden kann, ohne dass Reibung oder Widerstand von anderen Formen aufträte; dahin gehören: (1.) die gegenseitige Reibung zwischen zwei auf einander gleitenden festen Körpern; (2.) Widerstände, die aus der Zähigkeit der Flüssigkeiten oder der unvollkommenen Elasticität fester Körper herrühren; (3.) Widerstände, welche durch die Induction elektrischer Ströme hervorgerufen werden; (4.) Widerstände, welche die Magnetisirung zur Folge hat, die eine veränderliche ist, da das Eisen den ihm mitgetheilten Magnetismus nicht vollkommen festhält. In der Natur kann keine Bewegung vor sich gehen, ohne einem Widerstande zu begegnen, der aus einigen dieser Einflüsse, wenn nicht aus allen, entspringt. Es ist ein Gegenstand täglicher Erfahrung, dass Reibung und unvollkommene Elasticität fester Körper die Wirkung aller künstlichen Mechanismen beeinträchtigen, und dass selbst Körper, die von anderen Körpern getrennt sich frei in der Luft bewegen können, wie fallende Körper oder wie Projectile, einen Widerstand erfahren, der in der Zähigkeit der *Luft* seinen Grund hat.

Die grösseren Massen, Planeten und Kometen, die sich in einem weniger widerstehenden Mittel bewegen, zeigen weniger Spuren von Widerstand *). In der That kann man nicht behaupten, dass die Beobachtung bei irgend einem dieser Körper, ausgenommen bei Encke's Komet, einen Widerstand nachgewiesen hätte: Aber die Analogien der Natur und Thatsachen, die in der Wissenschaft der Physik unumstösslich fest stehen, machen es unzweifelhaft, dass bei jedem jener Weltkörper, bei jedem Stern und überhaupt jedem Körper irgend welcher Art, der sich irgendwo im Raume bewegt, die Luft, das Gas, der Dampf, das Mittel, oder wie wir sonst die Substanz nennen mögen, welche den unmittelbar um den Körper herum befindlichen Raum erfüllt, der (relativen) Bewegung einen Widerstand leistet, gerade so wie die Luft der Bewegung einer Flintenkugel hindernd entgegentritt.

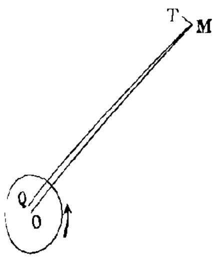
276. Wirkung der Fluthreibung. — Bei allen Körpern, deren freie Oberflächen zum Theil aus einer Flüssigkeit bestehen,

*) Newton, Principia (Bemerkungen zum ersten Bewegungsgesetz) „Majora aut m Planetarum et Cometarum corpora motus suos et progressivos et circulares, in spatiis minus resistentibus factos, conservant diutius.“

wie es bei der Erde der Fall ist, giebt es auch indirecte Widerstände, die aus der Reibung herrühren, welche den Bewegungen der Ebbe und Fluth hindernd entgegentritt. Diese Widerstände müssen, so lange solche Körper sich in Beziehung auf benachbarte Körper bewegen, ihren relativen Bewegungen beständig Energie entziehen.

Wenn wir zunächst die Wirkung betrachten, welche der Mond allein auf die Erde mit ihren Meeren, Seen und Flüssen ausübt, so erkennen wir, dass diese Wirkung die Perioden der Rotation der Erde um ihre Axe und der Umdrehung beider Körper um ihren Trägheitsmittelpunkt gleich zu machen streben muss, da, so lange diese Perioden von einander verschieden sind, die Wirkung der Ebbe und Fluth der Erdoberfläche den Bewegungen beider beständig Energie entziehen muss. Um den Gegenstand etwas eingehender zu betrachten, und um zugleich unnöthige Verwicklungen zu vermeiden, wollen wir annehmen, der Mond sei eine gleichförmige Kugel. Die wechselseitige Wirkung und Gegenwirkung zwischen seiner Masse und derjenigen der Erde wird einer einzelnen Kraft äquivalent sein, die in irgend einer durch seinen Mittelpunkt gehenden Linie wirkt und so beschaffen ist, dass sie die Erdrotation zu hindern strebt, so lange diese in einer kürzeren Periode erfolgt, als die Bewegung des Mondes um die Erde. Sie muss daher in einer Linie wie MQ wirken, also vom Mittelpunkt der Erde um OQ abweichen; diese Abweichung hat in der Figur bedeutend vergrössert werden müssen. Man kann sich nun die auf den Mond in der Richtung MQ wirklich wirkende Kraft als aus zwei Theilen bestehend vorstellen; die Grösse des ersteren Theils, der in der nach dem Mittelpunkt der Erde zu gehenden Linie MO wirkt, weicht nicht merklich von der Grösse der ganzen Kraft ab; die Richtung MT der vergleichsweise sehr kleinen zweiten Componente ist senkrecht zu MO. Dieser letztere Theil ist für die Mondbahn ganz nahezu tangential und wirkt im Sinne der Bewegung des Mondes. Wenn eine solche Kraft plötzlich zu wirken anfinge, so würde sie zunächst die Geschwindigkeit des Mondes vergrössern; nach einer gewissen Zeit würde sich derselbe aber in Folge dieser Beschleunigung um eine solche Strecke von der Erde weiter entfernt haben, dass er, da seine Bewegung gegen die Anziehung der Erde erfolgt, so viel Geschwindigkeit verloren hätte, als durch die tangentiale Beschleunigung gewonnen war. Die Wirkung einer

Fig. 47.



ununterbrochen fortdauernden tangentialen Kraft, die im Sinne der Bewegung wirkt, aber von so kleinem Betrage ist, dass sie in jedem Augenblick nur eine kleine Abweichung von der kreisförmigen Form der Bahn zur Folge hat, besteht darin, dass sie allmälig den Abstand vom Centralkörper vergrössert und bewirkt, dass von der kinetischen Energie der Bewegung wieder so viel verloren wird, als ihre eigene gegen die Anziehung des Centralkörpers zu leistende Arbeit ausmacht. Man wird die Umstände leicht verstehen, wenn man diese Bewegung um den Centralkörper in einer sich sehr langsam erweiternden spiralförmigen Bahn betrachtet. Vorausgesetzt, dass die Kraft dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, wird die tangentiale Componente der Schwere gegen die Bewegung doppelt so gross wie die störende tangentiale Kraft sein, die im Sinne der Bewegung wirkt, und daher wird eine Hälfte der gegen die erstere geleisteten Arbeit durch die letztere und die andere Hälfte durch die der Bewegung entzogene kinetische Energie verrichtet. Die Gesammtwirkung, welche die jetzt betrachtete besondere störende Ursache auf die Bewegung des Mondes hat, erhält man sehr leicht, wenn man das Princip der Momente der Bewegungsgrössen in Anwendung bringt. So sehen wir, dass das Moment der Bewegungsgrösse, welches in irgend einer Zeit durch die Bewegungen der Trägheitsmittelpunkte des Mondes und der Erde in Beziehung auf ihren gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt gewonnen wird, demjenigen gleich ist, welches durch die Rotation der Erde um ihre Axe verloren wird. Die Summe der Momente der Bewegungsgrösse der Trägheitsmittelpunkte des Mondes und der Erde, wie sie sich jetzt bewegen, ist ungefähr 4,45 mal so gross als das gegenwärtige Moment der Bewegungsgrösse der Erdrotation. Die mittlere Ebene der ersteren ist die Ekliptik, und daher ist die mittlere Neigung der Axen der beiden Momente gegen einander gleich $23^0\ 27^1/_2{}'$, welchen Winkel wir, da wir den Einfluss der Sonne auf die Ebene der Mondbewegung hier vernachlässigen, als die wirkliche gegenwärtige Neigung der beiden Axen annehmen können. Die Resultante oder das ganze Moment der Bewegungsgrösse ist daher 5,38 mal so gross als das der jetzigen Erdrotation, und ihre Axe hat gegen die Erdaxe eine Neigung von $19^0\ 13'$. Das letzte Streben der Ebben und Fluthen ist also, zu bewirken, dass die Erde und der Mond mit diesem resultirenden Moment um diese resultirende Axe gleichförmig rotiren, wie wenn sie zwei Theile eines starren Körpers wären: In diesem Zustande würde der Abstand des Mondes von der Erde (näherungsweise) in dem Verhältniss

1 : 1,46 vergrössert sein, d. i. in dem Verhältniss des Quadrats des gegenwärtigen Moments der Bewegungsgrösse der Trägheitsmittelpunkte zum Quadrat des ganzen Moments der Bewegungsgrösse; die Periode der Umdrehung würde im Verhältniss der Kuben derselben Grössen, also im Verhältniss 1 : 1,77 vergrössert sein. Der Abstand würde also auf 347 100 engl. Meilen und die Periode auf 48,36 Tage gestiegen sein. Gäbe es ausser der Erde und dem Monde keine anderen Körper im Weltall, so könnten diese beiden Körper sich in dieser Weise ewig in kreisförmigen Bahnen um ihren gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt weiter bewegen, und während eines Umlaufs würde die Erde eine Rotation um ihre Axe vollenden, so dass sie stets dieselbe Seite dem Monde zukehrte, dass also alle flüssigen Theile ihrer Oberfläche in Beziehung auf die festen Theile in Ruhe blieben. Aber die Existenz der Sonne würde verhindern, dass ein solcher Zustand der Dinge von Dauer wäre. Es würde nämlich Sonnenfluthen geben, zweimal hohen und zweimal niedrigen Wasserstand in der Periode der Rotation der Erde in Beziehung auf die Sonne (d. h. zweimal im Sonnentage oder, was dasselbe sein würde, im Monat). Dies könnte nicht vor sich gehen, ohne dass durch die Reibung der Flüssigkeit Energie verloren würde. Es ist nicht leicht, den ganzen Verlauf der Störung in den Bewegungen der Erde und des Mondes zu skizziren, welche diese Ursache erzeugen würde; aber schliesslich würde sie zur Folge haben, dass Erde, Mond und Sonne um ihren gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt wie Theile eines starren Körpers rotirten. Es würde uns zu weit von unserm Gegenstande entfernen, wenn wir jetzt untersuchen wollten, welche von allen diese Bedingung erfüllenden Configurationen die eine ist, die schliesslich näherungsweise erreicht werden würde. Wir hoffen jedoch später hierauf zurückzukommen und das allgemeine Problem der Bewegung einer beliebigen Anzahl starrer Körper oder materieller Punkte zu betrachten, die mit wechselseitigen irgend einem wirklichen physikalischen Gesetze unterworfenen Kräften auf einander wirken, und daher, wie wir sehen werden, jedenfalls einen Verlust an Energie erleiden werden, so lange irgend welche ihrer gegenseitigen Abstände sich ändern, d. h. so lange sie nicht in einen Zustand gerathen sind, in dem sie sich sämmtlich in Kreisen um eine durch ihren Trägheitsmittelpunkt gehende Axe bewegen. Es ist wahrscheinlich, dass der Mond, der früher in seinen äusseren Schichten, wenn nicht ganz und gar, flüssig oder zähe war, auf diese Weise dazu gebracht wurde, beständig dieselbe Seite der Erde zuzukehren.

277. Wir haben im gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft keine Data, die relative Bedeutung der Fluthreibung und des Widerstandes des Mittels zu schätzen, durch welches die Erde und der Mond sich bewegen. Welches aber auch die Grösse dieser Widerstände sein mag, es kann nur ein Endresultat für ein System geben, wie es die Sonne mit ihren Planeten ist, wenn dasselbe hinlänglich lange unter den vorhandenen Gesetzen beharrt und nicht durch ein Zusammentreffen mit anderen sich im Raum bewegenden Massen gestört wird. Dies Resultat besteht darin, dass alle Körper des Systems in eine Masse zusammenfallen werden, die zwar eine Zeit lang rotiren kann, aber zuletzt in Beziehung auf das sie umgebende Mittel zur Ruhe kommen muss.

278. **Erhaltung der Energie.** — Wir können die Theorie der Energie nicht vollenden, so lange wir nicht im Stande sind, die physikalischen Einflüsse zu untersuchen, welche den Verlust von Energie in jedem der oben (§ 275) erwähnten Fälle von Widerstand begleiten. Es wird sich später zeigen, dass in jedem Falle, in welchem Energie durch einen Widerstand verloren wird, Wärme erzeugt wird, und wir werden aus Joule's Untersuchungen lernen, dass die Menge der so erzeugten Wärme ein völlig bestimmtes Aequivalent für die verlorene Energie ist. Ferner werden wir sehen, dass bei keiner Wirkung in der Natur jemals eine Entwicklung von Energie stattfindet, ohne dass nachweislich anderswo ein gleicher Betrag durch irgend eine bekannte physische Ursache verschwindet. Wir werden daraus also schliessen, dass, wenn man irgend einen begrenzten Theil der materiellen Welt vollkommen isoliren könnte, so dass man ihn hinderte, einer nicht zu ihm gehörenden Masse Energie mitzutheilen, oder zu entziehen, die Summe seiner potenziellen und seiner kinetischen Energie zu allen Zeiten dieselbe sein würde: mit anderen Worten, dass jedes materielle System, welches keinen anderen Kräften, als den Wirkungen und Gegenwirkungen zwischen seinen Theilen unterworfen ist, ein dynamisch conservatives System sein muss, wie wir es in § 271 definirt haben. Aber nur, wenn ausser den wahrnehmbaren Bewegungen und den messbaren Kräften, mit denen wir durch directe Beobachtung bekannt werden, auch die das Licht, die Wärme und den Magnetismus ausmachenden unmessbar kleinen Bewegungen von Theilen, die vielleicht die letzten Moleküle der Materie sind, sowie die zwischen den Molekülen thätigen chemischen Affinitätskräfte in Rechnung gezogen werden, können wir den allgemeinen conservativen Charakter aller dynamischen Wirkung in der Natur erkennen und einsehen, dass das Prin-

ip der Constanz der Energie auch für die ganze Classe der von einem Widerstand begleiteten Naturwirkungen gilt, die es anscheinend verletzen. *Vorläufig wird es uns in unserem Studium der ab-*stracten Dynamik genügen, denjenigen Theil der Energie gesondert zu berechnen, der durch Arbeit gegen Kräfte verloren wird, deren onservativer Charakter zweifelhaft ist, oder der durch Arbeit gewonnen wird, welche solche Kräfte verrichten.

279. Wir schicken den Beweis einiger wenigen auf die Grösse der Energie bezüglichen Sätze voraus, die für unsere weiteren Entwicklungen von grosser Bedeutung sind.

280. **Kinetische Energie eines Systems.** — Die kinetische Energie jedes Systems ist gleich der kinetischen Energie einer Masse, welche gleich der Summe der Massen des Systems ist und sich mit der Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes desselben bewegt, vermehrt um die Summe der kinetischen Energien, welche den auf den Trägheitsmittelpunkt bezogenen relativen Bewegungen der einzelnen Theile des Systems entsprechen.

Es seien nämlich x, y, z die Coordinaten irgend eines Massentheilchens des Systems, ξ, η, ζ die Coordinaten desselben Theilchens in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Coordinaten des Trägheitsmittelpunktes selbst; dann haben wir für die ganze kinetische Energie

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{d(\bar{x}+\xi)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d(\bar{y}+\eta)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d(\bar{z}+\zeta)}{dt}\right)^2\right\}.$$

Nach den Eigenschaften des Trägheitsmittelpunktes ist aber

$$\Sigma m\frac{d\bar{x}}{dt}\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\bar{x}}{dt}\Sigma m\frac{d\xi}{dt}=0, \text{ u. s. w.},$$

der vorhergehende Ausdruck also gleich

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right)^2\right\}+\tfrac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\},$$

und damit ist der Satz bewiesen.

281. **Trägheitsmoment und Gyrationsradius.** — Die kinetische Energie der Rotation eines starren Systems um irgend eine Axe wird (§ 95) durch $\tfrac{1}{2}\Sigma mr^2\omega^2$ ausgedrückt, wo m die Masse irgend eines Theils, r der Abstand desselben von der Axe und ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist. Dieser Ausdruck kann offenbar in der Form $\tfrac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2$ geschrieben werden. Der Factor Σmr^2, der in kinetischen Untersuchungen von grosser Bedeutung ist, wird das Trägheitsmoment des Systems in Beziehung auf die

in Rede stehende Axe genannt. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf irgend eine Axe wird also dadurch gefunden, dass man die Masse jedes materiellen Punktes mit dem Quadrat seines Abstandes von der Axe multiplicirt und alle so erhaltenen Producte summirt.

Es ist nützlich, zu beachten, dass das Moment der Bewegungsgrösse irgend eines starren Systems in Beziehung auf eine Axe das Product der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment ist; man hat nämlich $\Sigma mvr = \Sigma mr^2\omega$.

Nehmen wir eine Grösse k von der Beschaffenheit, dass

$$k^2 \Sigma m = \Sigma mr^2$$

ist, so wird k der Gyrationsradius in Beziehung auf die Axe genannt, von welcher aus r gemessen wird. Der Gyrationsradius in Beziehung auf irgend eine Axe ist danach derjenige Abstand von dieser Axe, in welchen man die ganze Masse versetzen könnte, ohne dass ihr Trägheitsmoment eine Aenderung erlitte. In einem Schwungrade, bei dem es wünschenswerth ist, bei einer möglichst kleinen Masse ein möglichst grosses Trägheitsmoment zu haben, ohne dass die Dimensionen gewisse Grenzen überschritten, giebt man dem grösseren Theil der Masse die Form eines Ringes von dem grössten zulässigen Durchmesser. Der Radius dieses Ringes ist dann näherungsweise der Gyrationsradius des ganzen Rades.

Trägheitsmoment für verschiedene Axen. — Ein starres System ist auf rechtwinklige Axen bezogen, die durch irgend einen Punkt gehen Man soll sein Trägheitsmoment in Beziehung auf irgend eine durch den Anfangspunkt gehende Axe ermitteln, die mit den Coordinatenaxen gegebene Winkel bildet.

Es seien λ, μ, ν die Richtungscosinus der Axe. Dann hat der Punkt x, y, z von ihr einen Abstand r, für den man nach § 95

$$r^2 = (\mu z - \nu y)^2 + (\nu x - \lambda z)^2 + (\lambda y - \mu x)^2$$

erhält. Es ist also

$$Mk^2 = \Sigma mr^2 = \Sigma m\,[\lambda^2(y^2+z^2) + \mu^2(z^2+x^2) + \nu^2(x^2+y^2) \\ - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx - 2\lambda\mu xy],$$

und hierfür kann

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 - 2\alpha\mu\nu - 2\beta\nu\lambda - 2\gamma\lambda\mu$$

geschrieben werden, wo A, B, C die Trägheitsmomente in Beziehung auf die Coordinatenaxen sind und $\alpha = \Sigma myz$, $\beta = \Sigma mzx$, $\gamma = \Sigma mxy$ ist Die Grösse Mk^2 ist, wie man aus ihrem Ursprunge ersieht, ihrer Natur nach positiv. Werden also durch eine geeignete lineare Transformation aus dem erhaltenen Ausdrucke die Glieder beseitigt, welche die Producte von λ, μ, ν enthalten, so wird derselbe auf die Form

$$Mk^2 = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 = Q$$

gebracht werden, wo die ihrer Natur nach positiven Grössen A, B, C offenbar die Trägheitsmomente in Beziehung auf die neuen rechtwinkligen

Coordinatenaxen und λ, μ, ν die zugehörigen Richtungscosinus der Axe sind, in Beziehung auf welche das Trägheitsmoment gefunden werden soll.

Wenn A, B, C ungleich sind, so sei $A > B > C$. Dann zeigt

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 = Q(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

dass Q nicht grösser als A und nicht kleiner als C sein kann. Wenn A, B, C einander gleich sind, so ist Q gleich jeder dieser Grössen.

Sind a, b, c die Gyrationsradien für die neuen Coordinatenaxen, so ist man

$$A = Ma^2,\ B = Mb^2,\ C = Mc^2,$$

und die obige Gleichung liefert

$$k^2 = a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2.$$

Ist aber x, y, z irgend ein Punkt in der Geraden, deren Richtungscosinus λ, μ, ν sind, und hat dieser Punkt vom Anfangspunkt den Abstand r, so ist

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu} = r,$$

folglich

$$k^2 r^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

Betrachten wir daher das Ellipsoid, welches die Gleichung

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = \varepsilon^4$$

hat, so sehen wir, dass es von der Linie, welche die Richtungscosinus λ, μ, ν hat, und in Beziehung auf welche der Gyrationsradius von der Grösse k ist, ein Stück abschneidet, dessen Länge r durch die Gleichung

$$k^2 r^2 = \varepsilon^4$$

gegeben wird, d. h. das Rechteck aus irgend einem Radiusvector dieses Ellipsoides und dem entsprechenden Gyrationsradius ist constant. Die Halbaxen des Ellipsoides sind offenbar $\frac{\varepsilon^2}{a}, \frac{\varepsilon^2}{b}, \frac{\varepsilon^2}{c}$, und können wir ε einen beliebigen Werth beilegen. Daraus erhellt folgender Satz: —

282. Für jeden starren Körper kann man um jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt ein Ellipsoid (Poinsot's Momentellipsoid genannt) von der Beschaffenheit construiren, dass die Länge jedes Radiusvector dem Gyrationsradius des Körpers in Beziehung auf diesen Radiusvector als Axe umgekehrt proportional ist.

Die Axen dieses Ellipsoides sind die Hauptaxen der Trägheit des Körpers in dem in Rede stehenden Punkte.

283. Der Satz des § 280 zeigt, dass das Trägheitsmoment eines starren Körpers in Beziehung auf irgend eine Axe gleich demjenigen ist, welches die ganze Masse, wenn sie im Trägheitsmittelpunkte concentrirt wäre, in Beziehung auf diese Axe haben würde, vermehrt um das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende parallele Axe.

Richtung der Hauptaxen in verschiedenen Punkten. — Es seien der Anfangspunkt O der Trägheitsmittelpunkt und die Coordinatenaxen die Hauptträgheitsaxen dieses Punktes. Dann haben wir nach §§ 280, 281 für das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ gehende Linie, deren Richtungscosinus λ, μ, ν sind,

$$\begin{aligned} Q &= A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + M(\overline{\mu\zeta - \nu\eta}^2 + \overline{\nu\xi - \lambda\zeta}^2 + \overline{\lambda\eta - \mu\xi}^2) \\ &= \{A + M(\eta^2 + \zeta^2)\}\lambda^2 + \{B + M(\zeta^2 + \xi^2)\}\mu^2 + \{C + M(\xi^2 + \eta^2)\}\nu^2 \\ &\quad - 2M(\mu\nu\eta\zeta + \nu\lambda\zeta\xi + \lambda\mu\xi\eta). \end{aligned}$$

Setzen wir für Q, A, B, C die in § 281 gegebenen Werthe ein, so folgt nach Division durch M

$$\begin{aligned} k^2 = (a^2 + \eta^2 + \zeta^2)\lambda^2 + (b^2 + \zeta^2 + \xi^2)\mu^2 + (c^2 + \xi^2 + \eta^2)\nu^2 \\ - 2(\eta\zeta\mu\nu + \zeta\xi\nu\lambda + \xi\eta\lambda\mu). \end{aligned}$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, λ, μ, ν so zu bestimmen, dass die Gerade, deren Richtungscosinus diese Grössen sind, eine Hauptaxe sei Es sei

$$s = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta,$$

d. h. s stelle die Projection von OP auf die gesuchte Axe dar.

Die Axen des Ellipsoides

$$\text{(a)} \qquad (a^2 + \eta^2 + \zeta^2)x^2 + \cdots - 2(\eta\zeta yz + \cdots) = H$$

werden mittels der Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} (a^2 + \eta^2 + \zeta^2 - p)\lambda - \xi\eta\mu - \zeta\xi\nu = 0 \\ -\xi\eta\lambda + (b^2 + \zeta^2 + \xi^2 - p)\mu - \eta\zeta\nu = 0 \\ -\zeta\xi\lambda - \eta\zeta\mu + (c^2 + \xi^2 + \eta^2 - p)\nu = 0 \end{cases}$$

gefunden. Bezeichnen wir nun OP oder $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$ mit f, so können diese Gleichungen, in denen p offenbar das Quadrat des Gyrationsradius für die zu ermittelnde Axe ist, folgendermaassen geschrieben werden: —

$$(a^2 + f^2 - p)\lambda - \xi(\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu) = 0, \text{ u. s. w.},$$

oder

$$(a^2 + f^2 - p)\lambda - \xi s = 0, \text{ u. s. w.},$$

oder

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} (a^2 - K)\lambda - \xi s = 0 \\ (b^2 - K)\mu - \eta s = 0 \\ (c^2 - K)\nu - \zeta s = 0, \end{cases}$$

wo $K = p - f^2$ ist. Daraus folgt

$$\lambda = \frac{\xi s}{a^2 - K}, \text{ u. s. w.}$$

Werden diese Gleichungen addirt, nachdem man sie beziehungsweise mit ξ, η, ζ multiplicirt hat, und wird die so erhaltene Gleichung beiderseits durch s dividirt, so erhält man

$$\text{(d)} \qquad \frac{\xi^2}{a^2 - K} + \frac{\eta^2}{b^2 - K} + \frac{\zeta^2}{c^2 - K} = 1.$$

Aus (c) sehen wir, dass (λ, μ, ν) die Richtung der durch den Punkt P (ξ, η, ζ) gehenden Normale der Oberfläche ist, welche durch die Gleichung

$$\text{(e)} \qquad \frac{x^2}{a^2 - K} + \frac{y^2}{b^2 - K} + \frac{z^2}{c^2 - K} = 1$$

dargestellt wird. Es ist dies offenbar eine mit dem Ellipsoid

$$\text{(f)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

confocale Oberfläche zweiten Grades, die wegen (d) durch den Punkt P geht, so dass die Gleichung (d) K bestimmt. Die drei Wurzeln K dieser kubischen Gleichung sind offenbar sämmtlich reell; eine von ihnen ist kleiner, als die kleinste der Grössen a^2, b^2, c^2 und positiv oder negativ, je nachdem P innerhalb oder ausserhalb des Ellipsoides (f) liegt, und wenn $a > b > c$ ist, so liegen die beiden anderen Wurzeln beziehungsweise zwischen c^2 und b^2 und zwischen b^2 und a^2. Wird zu jeder Wurzel f^2 addirt, so erhält man das Quadrat des Gyrationsradius für die entsprechende Hauptaxe. Wir erhalten also den folgenden Satz: —

284. Die Hauptaxen in irgend einem Punkte eines starren Körpers sind Normalen an die drei Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch diesen Punkt gehen und mit einem Ellipsoid confocal sind, dessen Mittelpunkt der Trägheitsmittelpunkt des Körpers ist, und dessen drei Hauptdurchmesser der Richtung nach mit den durch diesen Punkt gehenden drei Hauptaxen zusammenfallen, während ihre Längen beziehungsweise doppelt so gross sind, als die Gyrationsradien für ihre Richtungen. Dies Ellipsoid wird das Centralellipsoid genannt.

285. **Kinetische Symmetrie in Beziehung auf einen Punkt und eine Axe.** — Man schreibt einem starren Körper kinetische Symmetrie in Beziehung auf seinen Trägheitsmittelpunkt zu, wenn seine Trägheitsmomente in Beziehung auf die drei durch diesen Punkt gehenden Hauptaxen einander gleich sind; es müssen dann nach § 281 die Trägheitsmomente in Beziehung auf alle durch diesen Punkt gehenden Axen gleich und alle diese Axen Hauptaxen sein. Gleichförmige Kugeln, Würfel und im Allgemeinen alle vollständigen krystallinischen festen Körper des ersten Systems (siehe das Capitel über die Eigenschaften der Materie) haben in Beziehung auf ihren Trägheitsmittelpunkt kinetische Symmetrie.

Ein starrer Körper ist in Beziehung auf eine Axe symmetrisch, wenn diese Axe eine von den durch den Trägheitsmittelpunkt gehenden Hauptaxen ist, und wenn die Trägheitsmomente in Beziehung auf die beiden anderen Hauptaxen, folglich die Trägheitsmomente in Beziehung auf alle Linien der Ebene dieser beiden Axen einander gleich sind. Ein Sphäroid, ein Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck ist, eine Platte einer dieser Formen, ein kreisförmiger Ring, eine Kreisscheibe, ein Cylinder, endlich jeder vollständige Krystall des zweiten oder vierten Systems haben in Beziehung auf ihre Axe kinetische Symmetrie.

286. **Energie in der abstracten Dynamik.** — Von den *Wirkungen und Gegenwirkungen* zwischen den Theilen eines Systems, das nicht augenscheinlich zur conservativen Classe gehört, werden wir in der abstracten Dynamik nur diejenigen der Reibung zwischen festen Körpern betrachten, die auf einander gleiten. Nur in einigen wenigen Beispielen werden wir auch den allgemeinen Charakter und die letzten Ergebnisse der Wirkungen ins Auge fassen, welche aus der Zähigkeit der Flüssigkeiten, der unvollkommenen Elasticität fester Körper, der unvollkommenen Leitung der Elektricität oder der unvollkommenen Festhaltung des Magnetismus herrühren. Wir werden in der abstracten Dynamik auch Kräfte zu betrachten haben, welche auf die Theile eines begrenzten Systems beliebig von aussen her einwirken. Diese Kräfte werden wir der Kürze wegen äussere Kräfte nennen.

287. Das Gesetz der Energie kann dann in der abstracten Dynamik folgendermaassen ausgedrückt werden: —

Die in irgend einer Zeit von den äusseren Kräften auf ein begrenztes materielles System ausgeübte Gesammtarbeit ist gleich der Summe der im System erzeugten potenziellen und kinetischen Energie, vermehrt um die durch die Reibung verlorene Arbeit.

288. Von diesem Princip lässt sich behaupten, dass es die ganze abstracte Dynamik in sich fasst, da, wie wir jetzt zeigen werden, die Bedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung sich in jedem möglichen Falle unmittelbar daraus herleiten lassen.

289. **Gleichgewicht.** — Ein materielles System, dessen relative Bewegungen keinen Widerstand durch Reibung erfahren, ist in irgend einer besonderen Configuration im Gleichgewicht, wenn bei jeder möglichen Bewegung durch diese Configuration hindurch die von den äusseren Kräften in dem Augenblick, wo die Bewegung durch die Configuration erfolgt, geleistete Arbeit gleich dem Gewinn an potenzieller Energie ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann das System nicht im Gleichgewicht sein. Dies ist das berühmte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches Lagrange zur Grundlage seiner Mécanique Analytique machte.

290. **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** — Um es zu beweisen, bemerken wir erstens, dass sich das System aus

irgend einer besonderen Configuration unmöglich fortbewegen kann, wenn nicht die Kräfte, deren Wirkung es ausgesetzt ist, Arbeit auf dasselbe ausüben: Ist also die ausgesprochene Bedingung erfüllt, so muss das System im Gleichgewicht sein. Wir haben zweitens noch darzuthun, dass diese Bedingung nicht bloss genügend ist, sondern in ihrem ganzen Umfange erfüllt sein muss, um das Gleichgewicht zu bewahren. Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst ein System betrachten, welches nur einen Grad von Bewegungsfreiheit besitzt. Welche Kräfte auch auf das ganze System wirken, wir können es immer durch eine einzige Kraft im Gleichgewicht erhalten, die auf irgend einen seiner Punkte in einer Richtung wirkt, welche der Richtung, in der er sich zu bewegen strebt, gerade entgegengesetzt ist, während gleichzeitig diese Kraft von einer solchen Grösse ist, dass sie bei jeder nach einer der beiden Seiten hin erfolgenden unendlich kleinen Bewegung so viel Arbeit erträgt oder verrichtet, als die übrigen Kräfte, sowohl die äusseren wie die inneren, zusammen verrichten oder ertragen. Nun können wir, nach dem Princip der Vereinigung von Kräften im Gleichgewicht, in irgend einem Punkte des Systems eine solche Kraft, die, wie wir eben gesehen haben, das System im Gleichgewicht erhalten würde, und ausserdem noch eine zweite ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft anbringen; dadurch wird der Zustand des Systems, was die Wirkung der Kräfte betrifft, nicht geändert. Da alle anfänglichen Kräfte durch die eine dieser beiden Kräfte aufgehoben werden, so kann man jene und die letztere nach demselben Princip fortlassen. Die ganze Reihe der gegebenen Kräfte wird folglich, sowohl für das Gleichgewicht, wie für die Bewegung, dieselbe Wirkung hervorbringen, wie die eine noch allein zurückgebliebene Kraft. Diese eine Kraft muss das System in Bewegung setzen, da sie in einer Richtung wirkt, in welcher es ihrem Angriffspunkte gestattet ist, sich zu bewegen. Wir schliessen daraus, dass die gegebenen Kräfte, denen, wie wir gezeigt haben, die eine Kraft äquivalent ist, unmöglich im Gleichgewicht sein können, wofern nicht ihre ganze Arbeit für eine unendlich kleine Bewegung Null ist, in welchem Falle sich die eine ihnen äquivalente Kraft auf Null reducirt. Wie viel Grade von Bewegungsfreiheit nun aber das ganze System besitzen mag, wir können dasselbe stets, ohne Reibung eintreten zu lassen, so einschränken, dass ihm nur ein Grad an Freiheit übrig bleibt, die Freiheit, irgend eine unter den gegebenen Bedingungen mögliche besondere Bewegung auszuführen. Wenn daher in irgend einer solchen unendlich kleinen Bewegung eine Aenderung der potentiellen Energie eintritt, die nicht durch eine Arbeit der äusseren Kräfte aufgewogen wird, so können wir dadurch, dass wir die Freiheit des Systems auf diese eine Bewegung beschränken, den Fall herstellen, in welchem, wie eben bewiesen wurde, kein Gleichgewicht bestehen kann. Die Einführung einer die Bewegungsfreiheit beschränkenden Gebundenheit kann aber das Gleichgewicht auf keine Weise stören. Folglich kann das gegebene System unter den vorhandenen Bedingungen in irgend einer besonderen Configuration nicht im Gleichgewicht sein, wenn bei irgend einer möglichen unendlich kleinen Bewegung aus dieser Configuration heraus die auf das System wirkenden Kräfte im Ganzen mehr Arbeit verrichten als ertragen.

291. **Neutrales Gleichgewicht.** — Es mögen auf ein materielles System innere und äussere Kräfte wirken, die sich nach irgend einem bestimmten Gesetze ändern. Wenn dann das System in jeder Lage, in die man es bringen kann, von diesen Kräften im Gleichgewicht erhalten wird, so sagt man, sein Gleichgewicht sei neutral. Dies ist der Fall mit jeder auf einer horizontalen Ebene ruhenden Kugel von gleichförmigem Material. Auch ein gerader Cylinder oder ein Kegel, dessen ebene Grenzflächen zur Axe senkrecht stehen, ist auf einer horizontalen Ebene in neutralem Gleichgewicht. Praktisch befindet sich jede Masse von nicht allzu grossen Dimensionen im neutralen Gleichgewicht, wenn nur ihr Trägheitsmittelpunkt fest ist, da, wie wir sehen werden, die Schwere näherungsweise einer einzigen durch diesen Punkt gehenden Kraft äquivalent ist, wenn die grösste Dimension der Masse sehr klein ist im Vergleich zum Erdradius.

Stabiles Gleichgewicht. — Wenn das System aber, nachdem man es nach irgend einer Richtung hin unendlich wenig aus einer besonderen Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst überlassen hat, hin und her vibrirt, ohne jemals mehr als eine unendlich kleine Abweichung aus der Gleichgewichtslage in irgend welchen seiner Theile zu erfahren, so sagt man, das Gleichgewicht in dieser Lage sei stabil. Ein an einer Schnur aufgehängtes Gewicht, eine gleichförmige Kugel in der Höhlung eines Beckens, eine auf einer horizontalen Ebene liegende Kugel, welche um ihren Berührungspunkt herum aus einem schwereren Material als in den übrigen Theilen besteht, ein abgeplatteter Körper, der mit dem einen Endpunkt seines kürzesten Durchmessers auf einer horizontalen Ebene ruht, ein auf dem Wasser schwimmendes Brett, dessen Dicke klein ist im Vergleich mit seiner Länge und Breite, u. s. w. sind Fälle stabilen Gleichgewichts. Im zweiten, dritten und vierten

Falle werden hier die Rotationsbewegungen um eine verticale Axe und im fünften Falle allgemein jede horizontale Bewegung vernachlässigt, weil das Gleichgewicht in allen diesen Fällen neutral ist.

Instabiles Gleichgewicht. — Wenn das System andererseits aus einer Gleichgewichtslage auf irgend einem Wege so verschoben werden kann, dass es, sich selbst überlassen, nicht innerhalb unendlich kleiner Grenzen um die Gleichgewichtslage herum vibrirt, sondern sich von derselben immer weiter entfernt, so sagt man, das Gleichgewicht in dieser Lage sei instabil oder labil. So würden eine auf einer horizontalen Ebene ruhende Kugel, deren höchster Theil aus einem schwereren Material als die übrigen Theile bestände, ein auf einer Spitze stehender eiförmiger Körper, ein im Wasser auf der Seite schwimmendes Brett, u. s. w. Fälle instabilen Gleichgewichts sein, wenn sie sich praktisch realisiren liessen.

In vielen Fällen wechselt die Natur des Gleichgewichts mit der Richtung der Verschiebung. Wenn ein Gleichgewicht für irgend eine mögliche Verschiebung instabil ist, so ist es praktisch überhaupt instabil. Das ist z. B. bei einer auf ihrem Rande stehenden Münze der Fall. Für Verschiebungen in ihrer Ebene ist sie zwar in neutralem, für jede zu ihrer Ebene senkrechte Verschiebung aber in instabilem Gleichgewicht; praktisch ist daher ihr Gleichgewicht überhaupt instabil. Eine auf einem Sattel ruhende Kugel bietet einen Fall dar, in welchem stabiles, neutrales oder instabiles Gleichgewicht besteht, je nach der Richtung, in der man sie fortrollt; praktisch ist ihr Gleichgewicht aber instabil.

292. **Bestimmung der Natur des Gleichgewichts.** — Die Theorie der Energie liefert uns einen klaren und einfachen Prüfstein, durch den wir diese Arten des Gleichgewichts von einander unterscheiden und bestimmen können, ob dasselbe in einem gegebenen Falle neutral, stabil oder instabil sei. Wenn die von den äusseren und inneren Kräften bei jeder möglichen Verschiebung verrichtete Arbeit genau gleich der gegen sie aufgewendeten Arbeit ist, so ist das Gleichgewicht neutral, sonst nicht. Wenn bei jeder möglichen unendlich kleinen Verschiebung aus einer Gleichgewichtslage mehr potentielle Energie aufgehäuft als ausgegeben wird, so ist das Gleichgewicht durchaus stabil, sonst nicht. Wenn endlich in irgend einer oder in jeder unendlich kleinen Verschiebung aus einer Gleichgewichtslage mehr potentielle Energie ausgegeben als aufgehäuft wird, so ist das Gleichgewicht instabil. Daraus geht hervor, dass, wenn das System nur der Wirkung innerer Kräfte ausgesetzt ist, oder wenn

die vorhandenen äusseren Kräfte dem Gesetze folgen, dass sie beim Uebergange des Systems aus einer Configuration in eine andere stets dieselbe Quantität Arbeit aufwenden, gleichgültig auf welchem von den möglichen Wegen dieser Uebergang erfolgt, so muss die gesammte potentielle Energie für ein neutrales Gleichgewicht in allen Lagen constant und in Lagen von vollkommen stabilem Gleichgewichte ein Minimum sein; endlich muss sie, wenn das Gleichgewicht instabil sein soll, entweder ein absolutes Maximum oder für einige Verschiebungen ein Maximum, für andere ein Minimum sein.

293. Herleitung der Bewegungsgleichungen eines beliebigen Systems aus den Gleichungen des Gleichgewichts. — Wir haben gesehen, dass nach D'Alembert's Princip, wie es oben (§ 264) dargelegt wurde, die auf die verschiedenen Punkte eines materiellen Systems wirkenden Kräfte und die Gegenwirkungen dieser Punkte gegen die Beschleunigungen, welche sie in irgend einem Bewegungsfalle wirklich erfahren, einander das Gleichgewicht halten. Daher ist in jedem wirklichen Bewegungsfalle die in irgend einer unendlich kleinen Zeit in Folge der wirklichen Beschleunigungen erzeugte kinetische Energie nicht nur gleich der von den Kräften wirklich geleisteten Arbeit, sondern auch gleich der Arbeit, welche diese Kräfte in irgend einer unendlich kleinen Zeit leisten würden, wenn die Geschwindigkeiten der das System bildenden Punkte in einem beliebigen Augenblick in irgend welche mögliche unendlich kleine Geschwindigkeiten verwandelt würden und die Beschleunigungen unverändert blieben. Bringt man diesen Satz auf eine mathematische Form, so erhält man Lagrange's Anwendung des „Princips der virtuellen Geschwindigkeiten" zur Ausdrückung der in D'Alembert's Princip gegebenen Bedingungen zwischen den wirkenden Kräften und den Widerständen der Massen gegen Beschleunigungen. Wie wir gesehen, ist darin jede mögliche Bedingung jedes Bewegungsfalles enthalten. Die „Gleichungen der Bewegung" lassen sich daraus, wie Lagrange gezeigt hat, in jedem besonderen Falle mit Leichtigkeit herleiten.

Unbestimmte Bewegungsgleichung eines beliebigen Systems. — Es sei m die Masse irgend eines der materiellen Punkte des Systems; derselbe habe zur Zeit t in Beziehung auf rechtwinklige Axen von festen (§ 249) Richtungen, die durch einen als festliegend (§ 245) angesehenen Punkt gehen, die Coordinaten x, y, z. Ferner seien X, Y, Z die denselben Axen parallelen Componenten der ganzen auf ihn wirkenden Kraft. Es sind dann

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

die Componenten seiner Gegenwirkung gegen eine Beschleunigung, und diese müssen im Verein mit X, Y, Z den Gleichgewichtsbedingungen für das ganze System genügen. Bezeichnen also δx, δy, δz beliebige mit den Bedingungen des Systems verträgliche Variationen von x, y, z, so haben wir

1) $$\Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

wo die durch Σ angedeutete Summation sich über alle materiellen Punkte des Systems zu erstrecken hat. Man kann (1) die unbestimmte oder die Variationsgleichung der Bewegung nennen. Lagrange nahm dieselbe zur Grundlage seines ganzen Systems der Kinetik und leitete aus ihr alle gewöhnlichen Bewegungsgleichungen, sowie auch seine eigenen bemerkenswerthen Gleichungen in allgemeinen Coordinaten her (die wir alsbald geben werden). Wir können die Gleichung (1) noch in folgender Weise schreiben:

2) $$\Sigma m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z);$$

darin bezeichnet das erste Glied die Arbeit von Kräften, welche denjenigen gleich sind, die erfordert werden, um die wirklichen Beschleunigungen hervorzubringen, wenn sie durch die Wege der willkürlichen Verschiebungen hindurch wirken; das zweite Glied bezeichnet die von den wirklich vorhandenen Kräften diese gedachten Wege hindurch geleistete Arbeit.

Bewegungsgleichung eines conservativen Systems. — Wenn die in Bewegung begriffenen Körper ein conservatives System ausmachen, und wenn die potentielle Energie desselben in der durch (x, y, z, u. s. w.) ausgedrückten Configuration mit V bezeichnet wird, so haben wir natürlich §§ 241, 273)

3) $$\delta V = -\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

und daher geht die unbestimmte Bewegungsgleichung über in

4) $$\Sigma m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = -\delta V,$$

wo δV den Ueberschuss der potentiellen Energie in der Configuration $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, u. s. w.) über diejenige der Configuration x, y, z, u. s. w.) bezeichnet.

Ein sich hieraus unmittelbar ergebendes besonderes Resultat muss natürlich die gewöhnliche Gleichung der Energie sein, und zwar muss dieselbe durch die Voraussetzung erhalten werden, dass δx, δy, δz, u. s. w. die in der unendlich kleinen Zeit δt wirklich erfolgenden Aenderungen der Coordinaten seien. Nehmen wir daher $\delta x = \dot{x}\delta t$, u. s. w. und dividiren beide Glieder durch δt, so erhalten wir

5) $$\Sigma(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) = \Sigma m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}).$$

Hier besteht das erste Glied aus Newton's Actiones Agentium, vermindert um die Reactiones Resistentium, soweit diese die Reibung, die Schwere und die Molekularkräfte betreffen; das zweite Glied besteht aus dem Theile der Reactiones, welcher aus der Beschleunigung herrührt. Wie wir oben (§ 214) gesehen haben, ist das zweite Glied die für die Zeiteinheit genommene Grösse der Zunahme von $\Sigma \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Bezeichnet also v die Geschwindigkeit eines der materiellen Punkte und

W das Integral des mit dt multiplicirten ersten Gliedes, d. h. die von den arbeitenden und den widerstehenden Kräften in irgend einer Zeit geleistete Gesammtarbeit, so haben wir

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = W + E_0, \tag{6}$$

wo E_0 die anfängliche kinetische Energie ist. Dies ist die **Gleichung der Energie** in integrirter Form. In dem besonderen Falle eines conservativen Systems ist W eine Function der Coordinaten, und von der Zeit, wie von den eingeschlagenen Wegen unabhängig. Wenden wir die frühere Bezeichnung an und benutzen noch V_0, um die potentielle Energie des Systems in seiner anfänglichen Configuration zu bezeichnen, so haben wir $W = V_0 - V$, und die Integralgleichung der Energie verwandelt sich in

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = V_0 - V + E_0,$$

oder, wenn die constante Summe der potentiellen und der kinetischen Energie mit E bezeichnet wird, in

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = E - V. \tag{7}$$

Die allgemeine unbestimmte Gleichung liefert für die Bewegung eines Systems freier materieller Punkte unmittelbar

$$m_1 \ddot{x}_1 = X_1,\ m_1 \ddot{y}_1 = Y_1,\ m_1 \ddot{z}_1 = Z_1,\ m_2 \ddot{x}_2 = X_2, \text{ u. s. w.}$$

Wenn zwischen den Punkten keine Wechselwirkung stattfindet, so können die für jeden Punkt geltenden drei dieser Gleichungen natürlich einzeln behandelt werden; wenn die Punkte aber Kräfte aufeinander ausüben, so ist jede der Grössen X_1, Y_1, u. s. w. im Allgemeinen eine Function aller Coordinaten.

Einführung der Gebundenheit in die unbestimmte Gleichung.— Aus der unbestimmten Gleichung (1) leitet Lagrange mittels seiner Methode der Multiplicatoren auf folgende Weise die Gleichungen her, die erforderlich sind zur Bestimmung der Bewegung eines starren Körpers oder eines beliebigen Systems mit einander verbundener materieller Punkte oder starrer Körper: —

Das System bestehe aus i materiellen Punkten, deren Verbindungen durch n Gleichungen

$$\begin{cases} F_{\prime}(x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots) = 0 \\ F_{\prime\prime}(x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots) = 0 \\ \text{u. s. w.,} \end{cases} \tag{8}$$

die **kinematischen Gleichungen** des Systems, ausgedrückt sind. Wenn wir die Variationen derselben nehmen, so finden wir, dass jede mögliche unendlich kleine Verschiebung δx_1, δy_1, δz_1, $\delta x_2, \cdots$ den n linearen Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{\prime}}{dx_1}\delta x_1 + \dfrac{dF_{\prime}}{dy_1}\delta y_1 + \text{u. s. w.} = 0, \\ \dfrac{dF_{\prime\prime}}{dx_1}\delta x_1 + \dfrac{dF_{\prime\prime}}{dy_1}\delta y_1 + \text{u. s. w.} = 0, \text{ u. s. w.} \end{cases} \tag{9}$$

genügen muss. Wir multipliciren die erste dieser Gleichungen (9) mit $\lambda_{\prime}$, die zweite mit $\lambda_{\prime\prime}$, u. s. w., addiren die Resultate sämmtlich zur unbestimmten Gleichung und setzen den Coefficienten jeder der Grössen δx_1, δy_1, u. s. w. gleich Null. Es ergiebt sich

$$(10)\quad \begin{cases} \lambda_{\prime}\dfrac{dF_{\prime}}{dx_1}+\lambda_{\prime\prime}\dfrac{dF_{\prime\prime}}{dx_1}+\cdots+X_1-m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=0\\ \lambda_{\prime}\dfrac{dF_{\prime}}{dy_1}+\lambda_{\prime\prime}\dfrac{dF_{\prime\prime}}{dy_1}+\cdots+Y_1-m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=0\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

Dies sind im Ganzen $3\,i$ Gleichungen, aus denen die n unbekannten Grössen $\lambda_{\prime}$, $\lambda_{\prime\prime}$, u. s. w. und die $3\,i - n$ unabhängig Veränderlichen bestimmt werden müssen, auf welche x_1, y_1, u. s. w. durch die kinematischen Gleichungen (8) reducirt werden.

Die Aufgabe, die Bewegung eines unter dem Einflusse von beliebig gegebenen Kräften stehenden und irgendwelchen unveränderlichen kinematischen Bedingungen unterworfenen Systems zu bestimmen, ist auf diese Weise auf eine Frage der reinen Analysis zurückgeführt. In dem noch allgemeineren Problem, die Bewegung zu bestimmen, wenn gewisse Theile des Systems gezwungen sind, sich in einer vorgeschriebenen Weise zu bewegen, enthalten die Bedingungsgleichungen (8) nicht nur die Coordinaten, sondern auch die Zeit t. Man erkennt aber leicht, dass die Gleichungen (10) auch dann noch gültig sind.

Gauss' Princip des kleinsten Zwanges. — Wenn irgendwelche Theile des Systems mit einander verbunden sind, so ist die Bewegung im Allgemeinen nicht dieselbe, als wenn alle Theile frei wären. Wir betrachten einen materiellen Punkt während einer unendlich kleinen Zeit der Bewegung. Das Product aus seiner Masse in das Quadrat des Abstandes der Lage, die er am Ende der in Rede stehenden Zeit wirklich einnimmt, von der Lage, die er bei gänzlicher Freiheit der Bewegung in demselben Augenblicke einnehmen würde, nennt man den Zwang, den der Punkt erfährt. Aus (1) folgt dann leicht, dass, wenn man den Zwang ausdrückt, dem jeder Punkt des Systems ausgesetzt ist, und alle diese Ausdrücke addirt, die erhaltene Summe ein Minimum sein wird. Dieser von Gauss gefundene Satz heisst das Princip des kleinsten Zwanges.

294. **Stoss.** — Wenn zwei relativ zu einander in Bewegung begriffene Körper zur Berührung kommen, so beginnt ein Druck zwischen ihnen zu wirken, um zu verhindern, dass Theile beider Körper vereint denselben Raum einnehmen. Diese Kraft ist anfänglich, im ersten Punkte des Zusammenstosses, Null, und nimmt allmälig für die Einheit der Fläche zu, während zugleich die Berührungsfläche allmälig grösser wird. Wenn jeder der beiden Körper, wie es in der Natur immer der Fall ist, einen gewissen Grad von Elasticität besitzt, und wenn dieselben nach dem Zusammentreffen nicht durch Cohäsion oder durch irgend ein künstliches Mittel zusammengehalten werden, so wird der gegenseitige Druck zwischen ihnen zu einem Maximum anwachsen und darauf wieder bis zu Null abnehmen, und zwar nimmt seine Grösse für die Einheit der Fläche allmälig ab, während zugleich die Berührungsfläche, auf die er wirkt, allmälig

kleiner wird. Der ganze Process würde nicht viel mehr oder weniger als eine Stunde dauern, wenn die Körper die Dimensionen der Erde hätten und hinsichtlich der Härte mit Kupfer, Stahl oder Glas übereinstimmten. Bei Kugeln, die aus einer dieser Substanzen bestehen, und deren Durchmesser nicht mehr als eine Elle betragen, wird er wahrscheinlich innerhalb eines Tausendstels einer Secunde beendigt sein.

295. Die Gesammtgrösse und die Richtung des „Stosses", welchen jeder der beiden Körper in jedem solchen Falle erfährt, werden nach der erfolgenden „Aenderung der Bewegungsgrösse" geschätzt. Die Grösse des Stosses wird durch die Grösse der hervorgebrachten Aenderung der Bewegungsgrösse, und seine Richtung durch die Richtung dieser Aenderung gemessen. Die Componente eines Stosses in einer einer beliebigen festen Geraden parallelen Richtung wird in ähnlicher Weise nach der für diese Richtung genommenen Componente der Aenderung der Bewegungsgrösse geschätzt.

296. Denken wir uns die ganze Zeitdauer eines Stosses in eine sehr grosse Anzahl gleicher Zeiträume getheilt, von denen jeder so kurz ist, dass sich die Kraft während desselben nicht merklich ändert, so ist die für irgend eine Richtung genommene Componente der Aenderung der Bewegungsgrösse während jedes Zeitraumes nach § 220 gleich dem Producte aus der Kraft in die Länge dieses Zeitraumes. Die Componente des Stosses ist daher gleich der Summe der in allen Zeiträumen wirkenden Kräfte, multiplicirt mit der Länge jedes Zeitraumes.

Wenn P die in irgend einem Augenblick τ des Zeitraums nach irgend einer Richtung genommene Componente der Kraft ist, und I die entsprechende Componente des ganzen Stosses bezeichnet, so ist

$$I = \int P\,d\tau.$$

297. Zeitintegral. — Eine unter irgendwelchen Umständen eine beliebige grosse oder kleine Zeit hindurch in constanter Richtung wirkende Kraft kann nach demselben Princip geschätzt werden. Was wir ihren ganzen Betrag während irgend einer Zeit nennen können, oder ihr „Zeitintegral", wird daher die ganze von ihr in der in Rede stehenden Zeit erzeugte Bewegungsgrösse messen, oder von derselben gemessen werden. Diese Schätzungsart ist jedoch nur selten passend oder von Nutzen, nämlich nur dann, wenn die ganze betrachtete Operation beendet ist, bevor die Lage des Körpers oder die Configuration des Körpersystems sich bis zu einem solchen Grade geändert hat, dass irgendwelche neue Kräfte ins Spiel gebracht werden, oder dass schon vorher wirkende Kräfte so sehr geändert werden, dass dadurch ein merklicher Einfluss auf die gemessene Bewegungsgrösse ausgeübt wird. Wenn z. B. Jemand mit der Hand einige Secunden hindurch leicht auf eine an einer Schnur oder Kette aufgehängte Masse drückt, so bringt er eine Wirkung hervor, welche, wenn man den Grad der Kraft in jedem Augenblick kennt, nach elementaren Principien vollständig berechnet werden kann. Eine vollständige Bestimmung der Bewegung und die Beantwortung einer partiellen Frage, wie: „Von welcher Grösse wird die hervorgebrachte Ablenkung sein?" kann aber auf die Kenntniss des „Zeitintegrals" allein nicht einmal näherungsweise basirt werden. Wenn z. B. die Kraft anfangs sehr gross ist und allmälig abnimmt, so ist die Wirkung eine ganz andere, als sie sein würde, wenn die Kraft allmälig grösser würde und plötzlich zu wirken aufhörte, obgleich das Zeitintegral in beiden Fällen dasselbe ist. Wenn man dagegen demselben Körper mit der Hand, oder mit einem Hammer, oder mit sonst einer harten Masse in horizontaler Richtung einen Schlag versetzt, so ist die Wirkung der Kraft beendet, bevor die den Körper tragende Schnur eine merkliche Ablenkung aus der verticalen Richtung erfahren hat. Die Wirkung des Schlages wird dann weder durch die Schwere, noch durch sonst eine Kraft merklich geändert; daher ist die ganze Bewegungsgrösse, nachdem der Schlag beendet ist, nicht merklich von der „Grösse des Stosses" verschieden, und das ist in diesem Falle einfach das Zeitintegral.

298. **Ballistisches Pendel.** — So verhält es sich mit Robin's ballistischem Pendel, einem massiven Holzblock, der um eine in beträchtlicher Höhe über ihm befindliche horizontale Axe beweglich ist und zur Messung der Geschwindigkeit einer Kanonen- oder Flintenkugel benutzt wird. Die Kugel wird in horizontaler, zur Axe senkrechter Richtung in den Block geschossen. Ihr Eindringen in denselben ist in so unmessbar kurzer Zeit beendet, und die Trägheit des Blockes ist so gross im Vergleich zur Bewegungsgrösse der Kugel, dass sich Kugel und Pendel wie eine Masse weiter bewegen, bevor das Pendel aus der verticalen Lage merklich abgelenkt worden ist. Dies ist die wesentliche Eigenthümlichkeit des Apparats. Eine hinlänglich grosse Kraft könnte ihn während eines kleinen Theils seiner Vibrationszeit weit aus der Verticalen entfernen. Damit aber eine einfache Anwendung des Zeitintegrals auf einen solchen Fall genüge, müsste sich die Richtung der Kraft

continuirlich ändern, um beständig mit derjenigen der Bewegung des Blocks zusammenzufallen.

299. Es liessen sich noch unzählige andere Fälle zur Erläuterung anführen, in denen das Zeitintegral uns die vollständige Lösung der Aufgabe liefert. Sie umfassen zunächst alle diejenigen Fälle, in denen die Richtung der Kraft beständig mit der Bewegungsrichtung des beweglichen Körpers zusammenfällt, und ferner jene besonderen Fälle, in denen die Wirkungsdauer der Kraft so kurz ist, dass die Bewegung des Körpers während dieser Zeit ihre Beziehung zur Richtung der Kraft oder der Wirkung irgendwelcher ihn vielleicht sonst noch beeinflussenden Kräfte nicht merklich ändert. So liefert uns das Zeitintegral beim verticalen Fall eines Körpers unmittelbar die Aenderung der Bewegungsgrösse, und dieselbe Regel gilt in den meisten Fällen von Kräften kurzer Dauer, wie bei einem Schlage von einem Cricket- oder Golfkolben.

300. **Directer Stoss zweier Kugeln.** — Der einfachste Fall, den wir betrachten können, und der gewöhnlich als Einleitung in den Gegenstand behandelt wird, ist derjenige des Zusammenstosses zweier glatten kugelförmigen Körper, deren Mittelpunkte sich vor dem Zusammentreffen in der nämlichen Geraden bewegten. Die zwischen beiden Körpern wirkende Kraft muss in jedem Augenblick die Richtung dieser Geraden haben, da in Beziehung auf dieselbe vollständige Symmetrie stattfindet; die Kraft muss ferner nach dem dritten Gesetze für beide Körper von derselben Grösse sein. Die Körper müssen also in jedem Zeittheilchen (Gesetz II) Bewegungsänderungen von gleichem Betrage und entgegengesetzten Richtungen erfahren, und in jedem Augenblick des Stosses müssen die gesammten Beträge der bis dahin erfolgten Bewegungsänderungen gleich sein. Um einen speciellen Fall zu betrachten, wollen wir voraussetzen, die beiden Körper bewegten sich vor und nach dem Stosse in einer Geraden nach derselben Richtung hin, so dass, je nach der Beschaffenheit des Falles, der Körper, welcher den anderen überholt, ihm nach Beendigung des Stosses entweder mit geringerer Geschwindigkeit folgt, oder sich mit ihm vereint weiter bewegt. Fälle, in denen der erstere Körper durch die Kraft des Zusammenstosses rückwärts getrieben wird, oder in welchem zwei sich nach entgegengesetzten Richtungen hin in derselben Geraden bewegende Körper zusammenstossen, lassen sich leicht durch die gewöhnliche algebraische Uebereinkunft hinsichtlich der positiven und negativen Zeichen von der unter der ersten Voraussetzung erhaltenen Formel abhängig machen.

In dem Falle, den wir behandeln wollen, ist die Bewegungsgrösse, welche einer der beiden Körper bis zu irgend einem Augenblick des Stosses verloren hat, gleich der vom anderen Körper während derselben Zeit gewonnenen Bewegungsgrösse. In dem Augenblick also, wo ihre Geschwindigkeiten sich ausgeglichen haben, bewegen sich beide wie eine Masse mit einer Bewegungsgrösse, welche gleich der Summe der Bewegungsgrössen ist, die sie vor dem Stosse hatten. Das heisst, wenn v die gemeinschaftliche Geschwindigkeit in diesem Augenblicke, M, M' die Massen der Körper und V, V' ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse bezeichnen, so ist

$$(M + M')v = MV + M'V',$$

oder

$$v = \frac{MV + M'V'}{M + M'}.$$

Während dieser ersten Periode des Stosses sind die beiden Körper im Ganzen in immer nähere Berührung mit einander gekommen, dadurch dass jeder eine Zusammendrückung oder eine Formänderung erfuhr, und sie sind zuletzt, wie oben bemerkt wurde, mit einem Theil ihrer Oberflächen aufeinander gepasst, der eine endliche Grösse hat. Nun giebt es in der Natur keinen völlig unelastischen Körper, und daher wird die zwischen den beiden Körpern ins Leben gerufene Wechselwirkung im Augenblick der engsten Annäherung beider fortfahren thätig zu sein und die Körper zu trennen suchen. Wenn sie nicht durch die natürliche Oberflächencohäsion oder durch Zusammenschweissung (und wir werden später in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie sehen, dass eine solche immer existirt, wie hart und gut polirt die Oberflächen auch sein mögen) oder durch künstliche Mittel (wie ein Wachsüberzug, den man in einem der zur Erläuterung gewöhnlich angestellten Experimente anwendet; oder die zwischen zwei Eisenbahnwagen angebrachte Kuppelung, durch die man nach der auf den Eisenbahnstationen gewöhnlichen Praxis die Wagen verbindet, indem man sie zusammenlaufen lässt, bis die Federn eingesprungen sind) überwunden wird, so werden die Körper durch diese Kraft wirklich getrennt und bewegen sich von einander weg. Unter der Voraussetzung, dass der Stoss nicht so heftig ist, um einen merklichen bleibenden Eindruck in einem der beiden Körper hervorzubringen, fand Newton, dass die relative Geschwindigkeit, mit der sich die Körper nach dem Stosse trennen, zur relativen Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher einander näherten, in einem für die nämlichen beiden Körper constanten Verhältnisse steht. Dies

Verhältniss ist immer kleiner als Eins, nähert sich aber der Einheit immer mehr, je härter die Körper sind. Für Kugeln von zusammengepresster Wolle erhielt Newton für dasselbe den Werth $^5/_9$, für eiserne Kugeln ungefähr denselben Werth, für gläserne Kugeln $^{15}/_{16}$. Die Ergebnisse neuerer experimentellen Untersuchungen über denselben Gegenstand, die wir später beschreiben werden, haben Newton's Gesetz bestätigt. Wir wollen jenes Verhältniss den Restitutionscoefficienten *) nennen. Wird derselbe mit e bezeichnet und sind, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung, U, U' die Geschwindigkeiten der beiden Körper nach Beendigung des Stosses (in dem der Betrachtung zu Grunde liegenden Falle ist jede dieser Grössen positiv, aber $U' > U$), so hat man in jedem Falle des Zusammenstosses zweier Kugeln

$$U' - U = e(V - V'),$$

und es ist wieder, da der eine Körper so viel an Bewegungsgrösse verloren, wie der andere gewonnen hat,

$$MU + M'U' = MV + M'V'.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$(M + M')U = MV + M'V' - eM'(V - V')$$

und ein ähnlicher Ausdruck für U'. Auch ist, wie oben,

$$(M + M')v = MV + M'V',$$

und durch Subtraction beider Formeln erhält man

$$(M + M')(v - U) = eM'(V - V') = e\{M'V \\ - (M + M')v + MV\},$$

folglich

$$v - U = e(V - v).$$

Natürlich ist auch

$$U' - v = e(v - V').$$

Diese Resultate lassen sich folgendermaassen in Worte fassen: — Nach Beendigung des Stosses hat die relative Geschwindigkeit jedes der beiden Körper in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt beider die umgekehrte Richtung und ist im Verhältniss $e : 1$ verringert.

*) In Lehrbüchern aus der neuesten Zeit wird dasselbe ein „Elasticitätscoefficient" genannt, was offenbar ein Missgriff ist, der zwar durch Newton's Worte veranlasst sein kann, sich aber mit den von Newton angegebenen Thatsachen nicht verträgt und zudem mit der neueren Ausdrucksweise und Kenntniss in Betreff der Elasticität im schroffsten Widerspruch steht.

301. Nach §§ 267, 280 rührt der Verlust an kinetischer Energie nur von der Aenderung der kinetischen Energie in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt her. Dieser Verlust verhält sich daher zu diesem Theil der ganzen Energie wie $1 - e^2 : 1$.

Es ist also die anfängliche kinetische Energie

$$= \tfrac{1}{2}(M + M')v^2 + \tfrac{1}{2}M(V - v)^2 + \tfrac{1}{2}M'(v - V')^2,$$

die kinetische Energie nach Beendigung des Stosses

$$= \tfrac{1}{2}(M + M')v^2 + \tfrac{1}{2}M(v - U)^2 + \tfrac{1}{2}M'(U' - v)^2,$$

der Verlust an kinetischer Energie

$$= \tfrac{1}{2}(1 - e^2)\{M(V - v)^2 + M'(v - V')^2\}.$$

302. **Vertheilung der Energie nach dem Stosse.** — Wenn zwei elastische Körper, z. B. die oben vorausgesetzten Kugeln, gegen einander stossen, so wird ein Theil ihrer früheren kinetischen Energie stets in der Form von Vibrationen in ihnen zurückbleiben. Ein Theil des Verlustes an Energie (den man unpassend die Wirkung der unvollkommenen Elasticität nennt) wird in jedem wirklichen Falle nothwendig aus dieser Ursache herrühren.

Später, in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie, wird es sich als Resultat experimenteller Forschung ergeben, dass in festen elastischen Körpern, welche, wie Metalle, Glas, u. s. w. nur geringe Formänderungen ohne bleibende Aenderung ertragen, die Elasticitätskräfte innerhalb der Grenzen der Elasticität bis zu einem grossen Grade der Genauigkeit einfach den Deformationen (§ 154) proportional sind. Wenn also zwei solche Körper manchmal mit grösserer und manchmal mit geringerer wechselseitiger Geschwindigkeit zusammenstössen, während alle übrigen Umstände unverändert gelassen sind, so werden die Geschwindigkeiten aller materiellen Punkte jedes Körpers zu entsprechenden Zeiten der Stösse immer in demselben Verhältniss stehen. Folglich steht die Geschwindigkeit, mit der sich die Trägheitsmittelpunkte nach dem Stosse trennen, zu der Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher einander näherten, in einem constanten Verhältniss, was mit Newton's Gesetz übereinstimmt. Es ist daher wahrscheinlich, dass, wenn nicht die ganze, so doch ein sehr beträchtlicher Theil der von Newton experimentell bestimmten Energie, welche in den sichtbaren Bewegungen zweier elastischen Körper nach dem Stosse verloren ist, den Vibrationen zugeschrieben werden muss. Aber wenn nicht noch eine andere Ursache in hohem Grade thätig war, so ist es schwer einzusehen, warum der Verlust bei eisernen Kugeln so bedeutend grösser als bei gläsernen ist.

303. In gewissen ganz bestimmten äussersten Fällen, die man sich zwar vorstellen, aber nicht realisiren kann, wird keine Energie in Vibrationen verausgabt, sondern, nachdem sich die beiden Körper getrennt haben, wird sich ein jeder einfach als ein starrer Körper bewegen und in dieser einfachen Bewegung die ganze Energie der Arbeit besitzen, welche die Elasticitätskräfte während des Zusammenstosses auf ihn ausgeübt haben. So z. B. seien die Körper cylindrische oder prismatische Stäbe mit ebenen Endflächen und von congruenten Querschnitten; auch mögen sie aus derselben Substanz bestehen, und diese Substanz habe in der Richtung der Länge des Stabes die Eigenschaft der Zusammendrückbarkeit bei vollkommener Elasticität, während sie eine Aenderung in jeder anderen Richtung durch ihren Widerstand absolut unmöglich macht. Vor dem Stosse seien die Körper mit ihren Längen in eine Gerade und ihre Querschnitte (wenn sie nicht gerade kreisförmig sind) ähnlich gelegt. In dieser Linie werden dann beide Körper, oder auch nur einer derselben, in Bewegung gesetzt. Wenn die Längen beider Stäbe einander gleich sind, so werden sie sich nach dem Stosse mit derselben relativen Geschwindigkeit trennen, mit der sie zusammenkamen, und keiner von beiden wird nach ihrer Trennung noch eine vibrirende Bewegung behalten. Das Resultat, soweit es die Bewegungen der beiden Körper nach dem Zusammenstoss betrifft, wird nicht merklich verschieden sein, aus welcher der gewöhnlich gebrauchten elastisch-festen Substanzen der Körper auch bestehen möge, wenn nur der grösste Querdurchmesser eines jeden im Vergleich zur Länge sehr klein ist.

304. Wenn die beiden Stäbe ungleiche Längen haben, so wird sich der kürzere nach dem Stosse in genau demselben Zustande befinden, als wäre er auf einen anderen Körper von seiner eigenen Länge gestossen; er wird sich daher nach dem Stosse als ein starrer Körper bewegen. Der andere dagegen wird ausser einer Bewegung seines Trägheitsmittelpunktes, die sich aus dem Princip berechnen lässt, dass seine ganze Bewegungsgrösse sich um einen Betrag ändern muss (§ 267), der genau gleich der vom ersteren Körper gewonnenen oder verlorenen Bewegungsgrösse ist, auch noch eine vibrirende Bewegung haben, deren ganze kinetische und potenzielle Energie dem alsbald zu berechnenden Ausfall an Energie in den Bewegungen der Trägheitsmittelpunkte gleichkommt. Der Einfachheit wegen wollen wir voraussetzen, der längere Körper befinde sich vor dem Zusammenstoss in Ruhe. Dann wird der kürzere Körper, nachdem er mit ihm zusammengestossen, in Ruhe zurück-

bleiben; dies ist offenbar das Resultat, das man im Falle $e = 1$ aus den vorhergehenden Formeln (§ 300) erhält, wenn man sie auf den Zusammenstoss eines Körpers mit einem vorher in Ruhe befindlichen Körper von gleicher Masse anwendet. Der längere Körper wird sich mit derselben Bewegungsgrösse fortbewegen, die der andere vor dem Stosse hatte; die Geschwindigkeit seines Trägheitsmittelpunktes und die kinetische Energie dieser Bewegung werden daher im Verhältniss der kleineren Masse zur grösseren Masse kleiner sein, als die Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes und die kinetische Energie des anderen Körpers waren. Er wird auch eine sehr ansehnliche vibrirende Bewegung haben, welche, wenn seine Länge mehr als das Doppelte der Länge des anderen Körpers ist, aus einer Welle besteht, die durch seine Länge hin und her läuft und zur Folge hat, dass die Bewegung seiner Endpunkte und thatsächlich auch aller übrigen Punkte ruckweise, nicht continuirlich erfolgt. Die vollständige Untersuchung dieser Umstände ist zwar sehr einfach; wir müssen sie aber verschieben, bis wir uns mit den Wellen und der Kinetik fester elastischer Körper speciell beschäftigen werden. Für jetzt genügt es zu bemerken, dass die Bewegungen der Trägheitsmittelpunkte beider Körper nach dem Stosse, von welcher Beschaffenheit sie auch vorher gewesen sein mögen, durch die vorhergehenden Formeln gegeben werden, wenn man darin für e den Werth $\frac{M'}{M}$ setzt, wo M' und M beziehungsweise die kleinere und die grössere Masse bezeichnen.

305. Die mathematische Theorie der Vibrationen fester elastischer Kugeln ist noch nicht ausgearbeitet worden, und ihre Anwendung auf den Fall der durch einen Stoss erzeugten Vibrationen bietet beträchtliche Schwierigkeiten dar. Die angestellten Experimente machen es aber gewiss, dass nach dem Zusammenstoss zweier gleichen Kugeln von Glas oder Elfenbein nur ein kleiner Theil der ganzen kinetischen Energie der früheren Bewegungen in Form von Vibrationen zurückbleiben kann. Dies beweist z. B. die tägliche Erfahrung, dass eine derselben nahezu bewegungslos liegen bleibt, nachdem sie auf die vorher ruhende andere Kugel gestossen ist; denn da die Geschwindigkeit ihres gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunktes durch den Stoss nothwendig keine Aenderung erleidet, so muss die zweite Kugel eine Geschwindigkeit annehmen, welche annähernd gleich derjenigen ist, die die erstere Kugel vor ihrem Zusammentreffen mit der zweiten besass. Wir müssen aber erwarten, dass, wenn aus derselben Substanz bestehende ungleiche Kugeln zu-

sammenstossen, ein verhältnissmässig sehr beträchtlicher Theil der kinetischen Energie ihrer vorherigen Bewegungen sich in Folge des Stosses in Vibrationen umsetzen wird. Dasselbe wird der Regel nach der Fall sein, wenn gleiche oder ungleiche Massen, die aus verschiedenen Substanzen bestehen, auf einander stossen, obschon diese Wirkung für ein besonderes Verhältniss ihrer Durchmesser, das von ihren Dichtigkeiten und elastischen Eigenschaften abhängt, ein Minimum und möglicherweise nicht viel grösser sein wird, als sie ist, wenn die Substanzen beider Kugeln die nämlichen und die Durchmesser gleich sind.

306. Wir brauchen wohl kaum zu bemerken, dass in vielen Fällen ein sehr grosser Theil der kinetischen Energie des Stosses zur Erzeugung von Vibrationen verwandt wird. Das ist z. B. der Fall, wenn die Zunge einer Glocke auf die Glocke, oder wenn der Hammer einer Wanduhr auf die Glocke (in den amerikanischen Uhren auf eine Spiralfeder) schlägt, wenn Pianofortehämmer gegen die Saiten stossen, wenn eine Trommel mit einem passenden Werkzeug geschlagen wird, u. s. w.

307. Moment eines Stosses in Beziehung auf eine Axe. — Das Moment eines Stosses in Beziehung auf eine beliebige Axe wird aus der Richtungslinie und der Grösse des Stosses in derselben Weise hergeleitet, wie man das Moment einer Geschwindigkeit oder einer Kraft aus der Richtungslinie und Grösse der Geschwindigkeit oder der Kraft bestimmt, §§ 235, 236. Wenn ein Körper gestossen wird, so ist die Aenderung des Moments seiner Bewegungsgrösse in Beziehung auf irgend eine Axe gleich dem Moment des Stosses in Beziehung auf diese Axe. Aber, ohne das Maass des Stosses zu betrachten, sehen wir (§ 267), dass, wie in jedem Falle einer Wechselwirkung, so auch hier das Moment in Beziehung auf irgend eine Axe von derjenigen Bewegungsgrösse, welche ein Körper beim Zusammentreffen mit einem zweiten verloren hat, gleich dem Moment der von diesem zweiten Körper gewonnenen Bewegungsgrösse ist.

Wir wollen diese Betrachtung auf das ballistische Pendel (§ 298) anwenden: — Die Bewegungslinie der Kugel beim Anprall kann eine ganz beliebige sein; wirksam ist aber nur die in einer zur Axe senkrechten Ebene genommene Componente. Wir setzen daher der Einfachheit wegen voraus, die Bewegung finde in einer zur Axe senkrechten Richtung statt, die jedoch nicht horizontal zu sein braucht. Es sei m die Masse der Kugel, v ihre Geschwindigkeit und p der Abstand ihrer Bewegungslinie von der Axe. Ferner sei M die Masse des Pendels und der eingedrungenen Kugel und k der Gyrationsradius dieser Masse. Ist dann ω die Winkelgeschwindigkeit des Pendels zur Zeit, wo der Stoss beendet ist, so hat man

$$m v p = M k^2 \omega,$$

woraus sich die Lösung der Frage leicht entnehmen lässt.

Denn die kinetische Energie hat sich (§ 241) nach dem Stosse in ihr Aequivalent, potentielle Energie, verwandelt, wenn das Pendel die Lage seiner grössten Abweichung erreicht. Diese sei durch den Winkel ϑ gegeben; dann ist der Trägheitsmittelpunkt zur Höhe $h\,(1 - cos\,\vartheta)$ erhoben, wenn h sein Abstand von der Axe ist. Es ist also

$$M g h\,(1 - cos\,\vartheta) = \tfrac{1}{2} M k^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} \frac{m^2 v^2 p^2}{M k^2},$$

oder

$$2\, sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{m v p}{M k \sqrt{g h}},$$

ein Ausdruck für die Sehne des Ausschlagswinkels. In der Praxis wird die Sehne des Winkels ϑ vermittels eines leichten Bandes oder einer Schnur gemessen, die man an einen Punkt des Pendels befestigt und mit geringer Reibung durch eine Klemme gleiten lässt, welche der Ruhelage dieses Punktes möglichst nahe angebracht ist.

308. **Die von einem Stosse geleistete Arbeit.** — Die von einem Stosse geleistete Arbeit ist im Allgemeinen das Product des Stosses in die halbe Summe der nach der Richtung des Stosses genommenen Componenten der anfänglichen und der Endgeschwindigkeit des Angriffspunktes. In dem Falle eines directen Stosses, wie wir ihn in § 300 behandelten, ist die anfängliche kinetische Energie des Körpers $\tfrac{1}{2} M V^2$, die kinetische Energie nach Beendigung des Stosses $\tfrac{1}{2} M U^2$, folglich der durch den Stoss erzielte Gewinn

$$\tfrac{1}{2} M (U^2 - V^2),$$

oder, was dasselbe ist,

$$M (U - V) \cdot \tfrac{1}{2} (U + V).$$

Es ist aber (§ 295) $M (U - V)$ gleich der Grösse des Stosses, der Satz für diesen speciellen Fall also bewiesen. Man ersieht leicht, dass dieser Satz auf die allgemeinsten Fälle ausgedehnt werden kann.

Es bezeichne ι die Grösse des bis zur Zeit τ, und I die Grösse des bis zur Beendigung des Stosses, die zur Zeit T erfolgt, gegebenen Impulses, d. h. es sei

$$\iota = \int_0^{\tau} P\, d\tau,\quad I = \int_0^{T} P\, d\tau, \text{ und } P = \frac{d\,\iota}{d\,\tau}.$$

Welches nun auch die Bedingungen sind, denen der gestossene Körper unterworfen ist, die Aenderung der Geschwindigkeit in dem gestossenen Punkte ist in jedem Augenblick der Grösse des bis dahin gegebenen Impulses proportional, so dass wir, wenn $\mathfrak{M}$ eine von den Massen und den die Freiheit der Bewegung beschränkenden Bedingungen abhängige Constante ist, und wenn U, v, V beziehungsweise die in der Richtung des Stosses genommenen Componenten der anfänglichen, der zur Zeit τ stattfindenden und der Endgeschwindigkeit des gestossenen Punktes bezeichnen,

$$v = U + \frac{\iota}{\mathfrak{M}}, \quad V = U + \frac{I}{\mathfrak{M}}$$

haben. Man erhält also für die Grösse der Arbeit, welche die Kraft P während der Zeiteinheit in dem Augenblick τ leisten würde,

$$P v = P U + \frac{\iota P}{\mathfrak{M}},$$

und für die von P verrichtete Gesammtarbeit, die wir mit W bezeichnen wollen,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T \left(P U + \frac{\iota P}{\mathfrak{M}}\right) d\tau \\ &= U I + \frac{1}{\mathfrak{M}} \int_0^I \iota \, d\iota = U I + \tfrac{1}{2} \frac{I^2}{\mathfrak{M}} \\ &= U I + \tfrac{1}{2} I (V - U) = I \,.\, \tfrac{1}{2}(U + V). \end{aligned}$$

309. Es verdient bemerkt zu werden, dass, wenn man einen Körper mehreren Stössen unterwirft, die Gesammtwirkung nicht davon abhängt, ob man die Stösse nach einander oder gleichzeitig erfolgen lässt (vorausgesetzt dass die ganze Zeit, welche die Stösse ausfüllen, unendlich kurz ist), wenngleich die von jedem einzelnen Stosse geleistete Arbeit im Allgemeinen von der Reihenfolge abhängig ist, in der man die Stösse ausführt. Die Gesammtarbeit ist die Summe der Producte, die man erhält, wenn man jeden Stoss mit der halben Summe der nach der Richtung desselben genommenen Componenten der anfänglichen und der Endgeschwindigkeit des gestossenen Punktes multiplicirt.

310. Gleichungen der impulsiven Bewegung. — Die Wirkung irgendwelcher gegebenen Impulse, die ein starrer Körper oder ein System irgendwie mit einander verbundener materieller Punkte oder starrer Körper erhält, lässt sich sehr leicht mit Hülfe des D'Alembert'schen Princips ermitteln, nach welchem die gegebenen Impulse und die gegen die Erzeugung einer Bewegung ins Leben gerufenen Gegenwirkungen, deren Beträge durch die erzeugten Bewegungsgrössen gemessen werden, im Gleichgewicht stehen, so dass man mit ihnen mathematisch operiren und die Gleichungen des Gleichgewichts eines Systems auf sie anwenden kann.

Es seien P_1, Q_1, R_1 die Componenten des dem ersten materiellen Punkte m_1 gegebenen Impulses und $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ die Componenten der von diesem Punkte augenblicklich angenommenen Geschwindigkeit. Dann müssen Kräftecomponenten, die gleich $(P_1 - m_1 \dot{x}_1)$, $(Q_1 - m_1 \dot{y}_1)$, ... sind, das System ins Gleichgewicht bringen, und wir erhalten daher (§ 290)

(a) $$\Sigma \{(P - m\dot{x})\,\delta x + (Q - m\dot{y})\,\delta y + (R - m\dot{z})\,\delta z\} = 0,$$

wo $\delta x_1, \delta y_1, \ldots$ die Componenten irgend einer unter den Bedingungen des Systems möglichen unendlich kleinen Verschiebung der materiellen Punkte bezeichnen. Da aber unendlich kleine mögliche Verschiebungen einfach den in denselben Richtungen möglichen Geschwindigkeiten proportional sind, so können wir statt (a) auch die folgende, auf dasselbe hinauslaufende Gleichung nehmen: —

(b) $$\Sigma \{(P - m\dot{x})\,u + (Q - m\dot{y})\,v + (R - m\dot{z})\,w\} = 0,$$

in welcher u_1, v_1, w_1 irgendwelche mögliche Geschwindigkeitscomponenten des ersten materiellen Punktes bezeichnen, u. s. w.

Einen besonderen Fall dieser Gleichung erhält man natürlich, wenn man $u_1, v_1, \ldots$ gleich den wirklich erlangten Geschwindigkeiten $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \ldots$ voraussetzt. Wird dann jedes Glied der Gleichung halbirt, u. s. w., so folgt

(c) $$\Sigma (P \,.\, \tfrac{1}{2}\dot{x} + Q \,.\, \tfrac{1}{2}\dot{y} + R \,.\, \tfrac{1}{2}\dot{z}) = T,$$

wo T die Energie der erzeugten Bewegung bezeichnet. Dies stimmt mit § 308 überein.

311. Euler entdeckte, dass, wenn ein ruhender starrer Körper einen Impuls erhält, die demselben ertheilte kinetische Energie eine Maximum- oder Minimum-Bedingung erfüllt. Lagrange*) dehnte diesen Satz auf ein System von Körpern aus, die durch beliebige unveränderliche kinematische Beziehungen verbunden sind und irgendwelche Impulse erhalten. Delaunay fand, dass sie wirklich immer ein Maximum ist, wenn die Impulse gegeben sind, und wenn verschiedene unter den Bedingungen des Systems mögliche und das Gesetz der Energie [§ 308, oder § 310 (c.)] erfüllende Bewegungen betrachtet werden. Weiter zeigte Bertrand, dass die wirklich erhaltene Energie nicht bloss ein Maximum ist, sondern die Energie jeder anderen diesen Bedingungen genügenden Bewegung übertrifft, und dass die Grösse des Ueberschusses gleich der Energie der Bewegung ist, welche mit einer von beiden Bewegungen verbunden werden muss, um die andere zu erzeugen.

Es seien $\dot{x}_1', \dot{y}_1', \ldots$ die Geschwindigkeitscomponenten irgend einer der Gleichung (c) genügenden Bewegung; diese Gleichung geht dann über in

(d) $$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\dot{x}' + Q\dot{y}' + R\dot{z}') = T' = \tfrac{1}{2}\Sigma m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2).$$

*) Mécanique Analytique, 2de partie, 3me section, § 37.

Wird nun $\dot{x}_1 - \dot{x}_1' = u_1$, $\dot{y}_1 - \dot{y}_1' = v_1$, u. s. w. angenommen, so haben wir

$$\text{(e)} \qquad T - T' = \tfrac{1}{2}\Sigma m\{(2\dot{x} - u)u + \cdots\}$$
$$= \Sigma m(\dot{x}u + \dot{y}v + \dot{z}w) - \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2).$$

Nach (b) ist aber

$$\Sigma m(\dot{x}u + \dot{y}v + \dot{z}w) = \Sigma(Pu + Qv + Rw),$$

und nach (c) und (d)

$$\Sigma(Pu + Qv + Rw) = 2T - 2T';$$

folglich liefert (e)

$$\text{(f)} \qquad T - T' = \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2),$$

und das ist Bertrand's Resultat.

312. Wenn ein Gefäss von irgend einer Gestalt, das mit einer in Ruhe befindlichen unzusammendrückbaren Flüssigkeit ganz gefüllt ist, plötzlich in Bewegung gesetzt wird oder plötzlich in irgend einer Weise eine Formänderung erfährt, wobei nur die Bedingung erfüllt sein muss, dass sein Volumen unverändert bleibe, so ist die Energie der dadurch in der Flüssigkeitsmasse erzeugten Bewegung kleiner, als die Energie jeder anderen Bewegung, die sie bei derselben Bewegung ihrer Umgrenzungsflächen haben kann. Die Betrachtung dieses Satzes, der, so viel uns bekannt ist, zum ersten Male im Cambridge and Dublin Mathematical Journal [Febr. 1849] veröffentlicht wurde, hat uns zu der unten bewiesenen allgemeinen Minimum-Eigenschaft der Bewegung geführt, die in irgend einem Systeme dadurch erzeugt wird, dass irgendwelchen seiner Theile plötzlich beliebig gegebene Geschwindigkeiten ertheilt werden.

313. Impulsive Bewegung, bezogen auf allgemeine Coordinaten. — Die oben (§ 204) erläuterte Methode der allgemeinen Coordinaten ist in ihrer Anwendung auf die Dynamik eines Systems vom grössten Nutzen, sowohl wenn es sich darum handelt, irgend einen besonderen Fall, in welchem es eine beliebige endliche Anzahl von Freiheitsgraden giebt, auszudrücken und mit allen seinen Details auszuarbeiten, als auch um allgemeine Principien zu beweisen, die sogar auf Fälle anwendbar sind, in denen unendlich viele Grade von Freiheit vorhanden sein können, wie in der im vorigen Paragraphen besprochenen Flüssigkeitsmasse. Diese Methode führt uns dazu, die Sätze über das Maass der Trägheit und die Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften, Impulsen und Bewegungsgrössen zu verallgemeinern nach dynamischen Principien, welche den in § 204 dargelegten kinematischen Principien entsprechen, die uns die allgemeinen Geschwindigkeitscomponenten lieferten. Ausserdem werden wir später sehen, dass die allgemeinen Gleichungen der continuirlichen Bewegung nicht nur für die Lösung von Aufgaben sehr zweckmässig, sondern auch äusserst lehrreich sind in Rücksicht auf die Natur der Beziehungen zwischen den Bewegungen der verschiedenen Theile eines Systems, seien diese Beziehungen auch noch so verwickelt. Vorläufig werden wir nur die allgemeinen Ausdrücke für die durch einen Impuls erzeugte Bewegung betrachten. Wir haben oben (§ 308) gesehen, dass bei Anwendung eines gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinatensystems die kinetische Energie, welche ein in Ruhe befindliches gegebenes System in Folge beliebiger ihm ertheilter Impulse erhält, gleich der halben Summe aller Producte ist, die entstehen, wenn man die Componente jeder Kraft mit der entsprechenden Componente der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes multiplicirt. Genau derselbe Ausspruch bleibt für das allgemeine Coordinatensystem gültig und genügt, wenn er nach der getroffenen Uebereinkunft gefasst wird, zur Definition der allgemeinen Componenten des Impulses, während diejenigen der Geschwindigkeit nach kinematischen Principien (§ 204) festgestellt sind. Die allgemeinen Componenten der Bewegungsgrösse irgend einer bestimmt angegebenen Bewegung sind natürlich gleich den allgemeinen Componenten des Impulses, durch welchen diese Bewegung vom Zustande der Ruhe aus hätte erzeugt werden können.

(a.) Zu irgend einer Zeit seien $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ die allgemeinen Coordinaten eines materiellen Systems, und $\dot\psi, \dot\varphi, \dot\vartheta, \ldots$ die entsprechenden allgemeinen Geschwindigkeitscomponenten desselben, d. h. $\dot\psi\, dt$, $\dot\varphi\, dt$, $\dot\vartheta\, dt$ u. s. w. seien die Grössen, um welche ψ, φ, ϑ u. s. w. während des unendlich kleinen Zeittheilchens dt bei ihrer wirklichen Bewegung zunehmen. Bezeichnen x_1, y_1, z_1 die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten eines materiellen Punktes des Systems und $\dot x_1, \dot y_1, \dot z_1$ die Geschwindigkeitscomponenten dieses Punktes, so haben wir

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot x_1 = \dfrac{d x_1}{d\psi}\dot\psi + \dfrac{d x_1}{d\varphi}\dot\varphi + \text{u. s. w.} \\ \dot y_1 = \dfrac{d y_1}{d\psi}\dot\psi + \dfrac{d y_1}{d\varphi}\dot\varphi + \text{u. s. w.} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die kinetische Energie, ausgedrückt durch die rechtwinkligen Coordinaten, ist $\Sigma \tfrac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$. Sie wird daher, wenn wir sie durch die allgemeinen Coordinaten ausdrücken, eine homogene Function zweiten Grades von $\dot\psi$, $\dot\varphi$, u. s. w., so dass, wenn wir sie mit T bezeichnen,

$$(2)\qquad T = \tfrac{1}{2}\{(\psi,\psi)\dot\psi^2 + (\varphi,\varphi)\dot\varphi^2 + \cdots + 2(\psi,\varphi)\dot\psi\dot\varphi + \cdots\}$$

ist, wo (ψ,ψ), (φ,φ), (ψ,φ), u. s. w. verschiedene Functionen der Coordinaten bezeichnen, die nach den Bedingungen des Systems zu bestimmen sind. Die einzige Bedingung, welche diese Coefficienten im Wesentlichen erfüllen, ist die, dass sie für alle Werthe der Veränderlichen ein endliches positives T liefern müssen.

(b.) Weiter mögen (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), u. s. w. Kräftecomponenten bezeichnen, welche beziehungsweise auf die materiellen Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), u. s. w. wirken, und es seien $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$, u. s. w. die Componenten einer beliebigen unendlich kleinen Bewegung, die stattfinden kann, ohne dass die Bedingungen des Systems verletzt werden. Die Arbeit, welche jene Kräfte auf das in dieser Weise verschobene System aufgewendet haben, ist

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z). \tag{3}$$

Diese Grösse drücken wir mittels der Formeln

$$\left\{\begin{array}{l} \delta x_1 = \dfrac{d x_1}{d \psi} \delta \psi + \dfrac{d x_1}{d \varphi} \delta \varphi + \text{u. s. w.} \\[2ex] \delta y_1 = \dfrac{d y_1}{d \psi} \delta \psi + \dfrac{d y_1}{d \varphi} \delta \varphi + \text{u. s. w.} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{array}\right. \tag{4}$$

durch die allgemeinen Coordinaten aus und erhalten

$$\Psi\, \delta \psi + \Phi\, \delta \varphi + \text{u. s. w.}, \tag{5}$$

wo

$$\left\{\begin{array}{l} \Psi = \Sigma\left(X \dfrac{dx}{d\psi} + Y \dfrac{dy}{d\psi} + Z \dfrac{dz}{d\psi}\right) \\[2ex] \Phi = \Sigma\left(X \dfrac{dx}{d\varphi} + Y \dfrac{dy}{d\varphi} + Z \dfrac{dz}{d\varphi}\right) \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{array}\right. \tag{6}$$

ist. Die Grössen Ψ, Φ, u. s. w. sind offenbar die allgemeinen Componenten der auf das System wirkenden Kraft.

Es seien $\underset{.}{\Psi}$, $\underset{.}{\Phi}$, u. s. w. die nach demselben Princip verallgemeinerten Impulscomponenten, d. h. es sei

$$\underset{.}{\Psi} = \int_0^\tau \Psi\, dt, \quad \underset{.}{\Phi} = \int_0^\tau \Phi\, dt, \text{ u. s. w.},$$

wo Ψ, Φ, ... die allgemeinen Componenten der continuirlichen Kraft bezeichnen, die in irgend einem Augenblick des unendlich kleinen Zeitraumes τ wirkt, innerhalb welches der Stoss beendet wird.

Wenn dieser Impuls einem Systeme ertheilt wird, das sich schon zuvor in der oben angegebenen Weise in Bewegung befand, und wenn $\delta \dot\psi$, $\delta \dot\varphi$, ... die sich ergebenden Zunahmen der Geschwindigkeitscomponenten bezeichnen, so sind die Mittel der Werthe, welche die Geschwindigkeitscomponenten vor und nach dem Stosse haben,

$$\dot\psi + \tfrac{1}{2}\delta \dot\psi, \quad \dot\varphi + \tfrac{1}{2}\delta \dot\varphi, \ldots,$$

und nach dem oben dargelegten allgemeinen Princip zur Berechnung der durch einen Impuls geleisteten Arbeit ist die in diesem Falle verrichtete Gesammtarbeit

$$\underset{.}{\Psi}\,(\dot\psi + \tfrac{1}{2}\delta \dot\psi) + \underset{.}{\Phi}\,(\dot\varphi + \tfrac{1}{2}\delta \dot\varphi) + \text{u. s. w.}$$

Um unnöthige Verwicklungen zu vermeiden, wollen wir jede der Grössen $\delta\dot\psi$, $\delta\dot\varphi$, u. s. w. als unendlich klein voraussetzen. Der vorstehende Ausdruck für die geleistete Arbeit wird dann

$$\Psi\dot\psi + \Phi\dot\varphi + \text{u. s. w.},$$

und da die Wirkung dieser Arbeit darin besteht, die kinetische Energie von T bis $T + \delta T$ zunehmen zu lassen, so muss

$$\delta T = \Psi\dot\psi + \Phi\dot\varphi + \text{u. s. w.}$$

sein. Es seien nun die Impulse von der Beschaffenheit, dass sie $\dot\psi$ auf $\dot\psi + \delta\dot\psi$ anwachsen und die übrigen Geschwindigkeitscomponenten unverändert lassen. Wir haben dann

$$\Psi\dot\psi + \Phi\dot\varphi + \text{u. s. w.} = \frac{dT}{d\dot\psi}\,\delta\dot\psi.$$

Dividiren wir beide Glieder durch $\delta\dot\psi$ und berücksichtigen, dass $\frac{dT}{d\dot\psi}$ eine lineare Function von $\dot\psi$, $\dot\varphi$, u. s. w. ist, so erkennen wir, dass $\frac{\Psi}{\delta\dot\psi}$, $\frac{\Phi}{\delta\dot\psi}$, u. s. w. beziehungsweise gleich den Coefficienten von $\dot\psi$, $\dot\varphi, \ldots$, in $\frac{dT}{d\dot\psi}$ sind.

(c.) Hieraus ist weiter ersichtlich, dass die Componenten des Impulses, welcher erforderlich ist, um die Geschwindigkeitscomponente $\dot\psi$ von der Ruhe aus zu erzeugen, oder um sie in dem sich mit einer beliebigen möglichen Geschwindigkeit bewegenden System hervorzubringen, folgende sind: —

$$(\psi, \psi)\,\dot\psi,\ (\psi, \varphi)\,\dot\psi,\ (\psi, \vartheta)\,\dot\psi,\ \text{u. s. w.}$$

Wir schliessen daraus, dass, um die ganze resultirende Geschwindigkeit $(\dot\psi, \dot\varphi, \ldots)$ von der Ruhelage aus zu erzeugen, ein **Impuls** erfordert wird, dessen **Componenten** $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sich folgendermaassen ausdrücken lassen: —

$$7)\qquad \begin{cases} \xi = (\psi, \psi)\,\dot\psi + (\varphi, \psi)\,\dot\varphi + (\vartheta, \psi)\,\dot\vartheta + \cdots \\ \eta = (\psi, \varphi)\,\dot\psi + (\varphi, \varphi)\,\dot\varphi + (\vartheta, \varphi)\,\dot\vartheta + \cdots \\ \zeta = (\psi, \vartheta)\,\dot\psi + (\varphi, \vartheta)\,\dot\varphi + (\vartheta, \vartheta)\,\dot\vartheta + \cdots \\ \text{u. s. w.}; \end{cases}$$

dabei ist zu beachten, dass (φ, ψ) dasselbe wie (ψ, φ) bedeutet, u. s. w., wie aus dem anfänglichen Ausdruck für T hervorgeht, aus welchem diese Grössen abgeleitet sind. Die vorstehenden Ausdrücke sind die nach den Geschwindigkeiten genommenen Differentialquotienten von T, d. h. es ist

$$8)\qquad \xi = \frac{dT}{d\dot\psi},\ \eta = \frac{dT}{d\dot\varphi},\ \zeta = \frac{dT}{d\dot\vartheta},\ \cdots$$

(d.) Da die zweiten Glieder dieser Gleichungen lineare Functionen von $\dot\psi, \dot\varphi, \ldots$ sind, so können wir mittels des gewöhnlichen Eliminationsverfahrens $\dot\psi, \dot\varphi, \ldots$ durch $\xi, \eta, \ldots$ ausdrücken, und die so erhaltenen Ausdrücke sind natürlich lineare Functionen der letztgenannten Elemente. Da ausserdem T eine quadratische Function von $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, u. s. w. ist, so haben wir

$$2\,T = \xi\,\dot{\psi} + \eta\,\dot{\varphi} + \zeta\,\dot{\vartheta} + \cdots \tag{9}$$

Unter der Voraussetzung, dass $T, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ durch $\xi, \eta, \ldots$ ausgedrückt seien, folgt hieraus durch Differentiation

$$2\frac{d\,T}{d\,\xi} = \dot{\psi} + \xi\frac{d\,\dot{\psi}}{d\,\xi} + \eta\frac{d\,\dot{\varphi}}{d\,\xi} + \zeta\frac{d\,\dot{\vartheta}}{d\,\xi} + \cdots$$

Nun zeigt das algebraische Verfahren, durch welches $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, u. s. w. durch ξ, η, u. s. w. ausgedrückt werden, dass, wie der Coefficient von $\dot{\varphi}$ in dem Ausdruck (7) für ξ gleich dem Coefficienten von $\dot{\psi}$ in dem Ausdruck für η, u. s. w. ist, so auch der Coefficient von η in dem Ausdruck für $\dot{\psi}$ gleich dem Coefficienten von ξ in dem Ausdruck für $\dot{\varphi}$ sein muss, u. s. w., d. h. es ist

$$\frac{d\,\dot{\psi}}{d\,\eta} = \frac{d\,\dot{\varphi}}{d\,\xi},\quad \frac{d\,\dot{\psi}}{d\,\zeta} = \frac{d\,\dot{\vartheta}}{d\,\xi},\ \text{u. s. w.}$$

Der vorhergehende Ausdruck geht danach über in

$$2\frac{d\,T}{d\,\xi} = \dot{\psi} + \xi\frac{d\,\dot{\psi}}{d\,\xi} + \eta\frac{d\,\dot{\psi}}{d\,\eta} + \zeta\frac{d\,\dot{\psi}}{d\,\zeta} + \cdots = 2\,\dot{\psi},$$

und daher ist

$$\left\{\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{d\,T}{d\,\xi} \\ \dot{\varphi} &= \frac{d\,T}{d\,\eta} \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Diese Ausdrücke lösen die Aufgabe: — Die Geschwindigkeit zu ermitteln, welche ein gegebener Impuls $(\xi, \eta, \ldots)$ erzeugt, wenn die kinetische Energie T als eine quadratische Function der Componenten des Impulses gegeben ist.

(e.) Wenn wir die Bewegung einfach, ohne Rücksicht auf den Impuls betrachten, der erfordert wird, sie entweder aus der Ruhe zu erzeugen, oder sie aufzuheben, so sind die Grössen $\xi, \eta, \ldots$ offenbar als die nach dem System der allgemeinen Coordinaten genommenen Componenten der Bewegungsgrösse anzusehen.

(f.) Wir geben noch die folgende nützliche algebraische Relation: —

$$\xi_{,}\dot{\psi} + \eta_{,}\dot{\varphi} + \zeta_{,}\dot{\vartheta} + \text{u. s. w.} = \xi\,\dot{\psi}_{,} + \eta\,\dot{\varphi}_{,} + \zeta\,\dot{\vartheta}_{,} + \text{u. s. w.}; \tag{11}$$

darin haben $\xi, \eta, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. dieselbe Bedeutung wie vorher, während $\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}$, u. s. w. die Impulscomponenten bezeichnen, welche irgend welchen anderen Werthen $\dot{\psi}_{,}, \dot{\varphi}_{,}, \dot{\vartheta}_{,}$, u. s. w. der Geschwindigkeitscomponenten entsprechen. Um diese Relation zu beweisen, hat man zu beachten, dass jedes Glied eine symmetrische Function von $\dot{\psi}, \dot{\psi}_{,}$; $\dot{\varphi}, \dot{\varphi}_{,}$; u. s. w. wird, wenn man darin $\xi_{,}, \eta_{,}$, u. s. w. durch ihre Werthe in $\dot{\psi}_{,}, \dot{\varphi}_{,}$, u. s. w. und ξ, η, u. s. w. durch ihre Werthe in $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. ersetzt.

314. Ein in Ruhe gegebenes materielles System irgendwelcher Art, welches einem Impulse von einer beliebig gegebenen Richtung und einer beliebig gegebenen Grösse unterworfen wird, bewegt sich so, dass es den grössten Betrag kinetischer Energie annimmt, welchen dieser bestimmte Impuls liefern kann.

Es seien $\xi, \eta, \ldots$ die Componenten des gegebenen Impulses und $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ die durch die obigen Gleichungen (10) bestimmten Componenten der durch den Impuls wirklich erzeugten Bewegung. Wir wollen nun voraussetzen, das System werde vermittels einer bloss die Richtung beeinflussenden Einschränkung dazu gebracht, unter der Einwirkung des gegebenen Impulses von der Ruhelage aus eine von der wirklichen verschiedene Bewegung $(\dot{\psi}_{,}, \dot{\varphi}_{,}, \ldots)$ anzunehmen, und es sei $\xi_{,}, \eta_{,}, \ldots$ der Impuls, welcher allein, nach Beseitigung der Einschränkung, die Bewegung $(\dot{\psi}_{,}, \dot{\varphi}_{,}, \ldots)$ erzeugen würde. Wir werden für diesen Fall, wie oben,

$$T_{,} = \tfrac{1}{2}(\xi_{,} \dot{\psi}_{,} + \eta_{,} \dot{\varphi}_{,} + \cdots)$$

haben. $\xi_{,} - \xi, \eta_{,} - \eta, \ldots$ sind aber die Componenten des Impulses, welchen das System in Folge der Einschränkung erfährt, die unserer Voraussetzung nach eingeführt ist. Wenn sich das System so bewegt, wie es durch diese Einschränkung gerichtet wird, so können jene Componenten in Beziehung auf dasselbe weder Arbeit leisten, noch verbrauchen, d. h. es ist

$$(\xi_{,} - \xi)\dot{\psi}_{,} + (\eta_{,} - \eta)\dot{\varphi}_{,} + (\zeta_{,} - \zeta)\dot{\vartheta}_{,} + \text{u. s. w.} = 0, \tag{12}$$

folglich

$$2T_{,} = \xi\dot{\psi}_{,} + \eta\dot{\varphi}_{,} + \zeta\dot{\vartheta}_{,} + \text{u. s. w.}$$

Daraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} 2(T - T_{,}) &= \xi(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{,}) + \eta(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{,}) + \text{u. s. w.} \\ &= (\xi - \xi_{,})(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{,}) + (\eta - \eta_{,})(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{,}) + \text{u. s. w.} \\ &\quad + \xi_{,}(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{,}) + \eta_{,}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{,}) + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Nach (11) ist aber

$$\xi_{,}(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{,}) + \eta_{,}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{,}) + \text{u. s. w.} = (\xi - \xi_{,})\dot{\psi}_{,} + (\eta - \eta_{,})\dot{\varphi}_{,} + \text{u. s. w.},$$

und jedes Glied dieser Gleichung verschwindet, wie aus (12) ersichtlich ist, so dass wir

$$2(T - T_{,}) = (\xi - \xi_{,})(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{,}) + (\eta - \eta_{,})(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{,}) + \text{u. s. w.} \tag{13}$$

erhalten, d. h. T übertrifft $T_{,}$ um den Betrag der kinetischen Energie, welche durch einen dem Systeme einfach ertheilten Impuls $(\xi - \xi_{,}, \eta - \eta_{,}, \zeta - \zeta_{,}, \ldots)$ erzeugt werden würde. Dieser Ueberschuss ist natürlich positiv. Das erhaltene Resultat kann auch folgendermaassen ausgesprochen werden: —

315. Wenn das System genöthigt wird, unter dem Einfluss eines gegebenen Impulses irgend eine von der natürlichen Bewegung $(\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots)$ verschiedene Bewegung $(\dot{\psi}_{,}, \dot{\varphi}_{,}, \ldots)$ anzunehmen, so wird es weniger kinetische Energie erhalten, als wenn es die natürliche Bewegung vollführte, und zwar ist die Differenz gleich der kinetischen Energie der Bewegung $(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{\prime\prime}, \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{\prime\prime} \ldots)$.

Zusatz: — Wenn eine Reihe materieller Punkte unabhängig von einander Impulse erhalten, deren jeder der Grösse nach gegeben ist, so wird mehr kinetische Energie erzeugt, wenn jeder Punkt sich völlig unabhängig von den übrigen frei bewegen kann, als wenn die Punkte in irgend einer Weise mit einander verbunden sind. Der Ueberschuss der kinetischen Energie im ersteren Falle über die des zweiten Falles ist gleich der Grösse der kinetischen Energie der Bewegung, welche, mit der Bewegung eines der beiden Fälle geometrisch zusammengesetzt, die Bewegung des anderen Falles liefern würde.

Probleme, deren Data Impulse und Geschwindigkeiten enthalten. — (a.) Bisher haben wir vorausgesetzt, es sei entweder die Bewegung vollständig gegeben, und man solle die Impulse bestimmen, die zu ihrer Erzeugung erfordert werden; oder es seien die Impulse gegeben, und man solle die durch dieselben hervorgebrachten Bewegungen bestimmen. Zu einer nicht minder wichtigen Klasse von Problemen gelangt man durch die Voraussetzung, es seien so viele lineare Bedingungsgleichungen zwischen den Impulsen und den Bewegungscomponenten gegeben, als das System Grade von Freiheit (oder unabhängige Coordinaten) in seiner Bewegung besitzt. Diese Gleichungen und ebenso viele weitere, die uns die Formeln (8) oder die äquivalenten Formeln (10) liefern, genügen für die vollständige Lösung der Aufgabe, die Impulse und die Bewegung zu bestimmen.

(b.) Ein sehr wichtiger Fall dieser Klasse bietet sich dar, wenn zwischen den Geschwindigkeiten allein eine Anzahl linearer Gleichungen mit constanten Gliedern bestehen und man voraussetzt, die Impulse seien so gerichtet und von solcher verhältnissmässigen Grösse, dass sie auf alle Geschwindigkeiten, die einer anderen vorgeschriebenen Reihe von linearen Gleichungen ohne constante Glieder genügen, keine Wirkung ausüben. Die Gesammtzahl der Gleichungen ist natürlich gleich der Anzahl der unabhängigen Coordinaten des Systems. Wir haben nicht nöthig, die Gleichungen für die Lösung dieses Problems niederzuschreiben, da sie auf der Hand liegen; doch ist die folgende Reduction von Nutzen, indem sie den einfachsten Beweis der unten angegebenen Minimum-Eigenschaft liefert.

(c.) Die zwischen den Geschwindigkeiten bestehenden gegebenen Gleichungen können auf eine Reihe von Gleichungen reducirt werden, die mit Ausnahme einer einzigen ein constantes Glied enthaltenden homogen sind. Jene homogenen Gleichungen verringern die Anzahl der Freiheitsgrade, und wir können die Coordinaten so transformiren, dass die Anzahl der unabhängigen Coordinaten demgemäss vermindert werde. Weiter können wir die neuen Coordinaten so wählen, dass die lineare Function der Geschwindigkeiten in der einen Gleichung mit dem constanten Gliede eine der neuen Geschwindigkeitscomponenten sei, und dass die linearen Functionen der Geschwindigkeiten, welche mit den hinsichtlich der Impulse vorgeschriebenen Bedingungen in Gleichungen verbunden erscheinen, die übrigen Geschwindigkeitscomponenten seien. Auf diese Weise wird der Impuls die Bedingung erfüllen, dass er keine Arbeit für irgend eine Geschwindigkeitscomponente leistet, die von der einen gegebenen verschieden ist, und das allgemeine Problem: —

316. Es ist ein beliebiges in Ruhe befindliches materielles System gegeben. Irgendwelche Theile desselben werden plötzlich mit beliebig gegebenen Geschwindigkeiten, die nach den Bedingungen des Systems möglich sind, in Bewegung gesetzt, und die übrigen Theile nur durch ihren Zusammenhang mit den bewegten beeinflusst. Man soll die Bewegung bestimmen

nimmt die folgende sehr einfache Form an: — Auf ein materielles System wirkt ein Impuls, der für die angewandten allgemeinen Coordinaten als eine einzelne Componente erscheint und von solcher Grösse ist, dass er eine gegebene Geschwindigkeitscomponente von der entsprechenden Bewegungsform erzeugt. Man soll die Bewegung bestimmen.

Die Lösung der Aufgabe folgt natürlich aus den Gleichungen

$$\dot\psi = A, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \text{ u. s. w.,} \tag{15}$$

welche die speciellen Bedingungsgleichungen des Systems sind, und aus den allgemeinen kinetischen Gleichungen (7) oder (10). Wir wählen die letzteren und bezeichnen mit $[\xi,\xi]$, $[\xi,\eta]$, u. s. w. die Coefficienten von $\frac{1}{2}\xi^2, \xi\eta_{,}$, u. s. w. in T; dann ist das Resultat

$$\xi = \frac{A}{[\xi,\xi]}, \quad \dot\varphi = \frac{[\xi,\eta]}{[\xi,\xi]}A, \quad \dot\vartheta = \frac{[\xi,\zeta]}{[\xi,\xi]}A, \text{ u. s. w.} \tag{16}$$

Dieses Resultat besitzt die merkwürdige Eigenschaft, dass die kinetische Energie der dadurch ausgedrückten Bewegung kleiner als diejenige der anderen Bewegung ist, welche die in Betreff der Geschwindigkeit vorgeschriebene Bedingung erfüllt. Denn wenn $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ u. s. w. die zur Hervorbringung irgend einer anderen Bewegung $\dot\psi_{,}$, $\dot\varphi_{,}$, $\dot\vartheta_{,}$, u. s. w. erforderlichen Impulse und $T_{,}$ die entsprechende kinetische Energie bezeichnen, so haben wir nach (9)

$$2\,T_{,} = \xi_{,}\dot\psi_{,} + \eta_{,}\dot\varphi_{,} + \zeta_{,}\dot\vartheta_{,} + \text{u. s. w.}$$

Nach (11) ist aber

$$\xi_{,}\dot\psi + \eta_{,}\dot\varphi + \zeta_{,}\dot\vartheta + \text{u. s. w.} = \xi\,\dot\psi_{,},$$

da nach (15) $\eta = 0$, $\zeta = 0$, u. s. w. ist. Wir erhalten somit

$$2\,T_{,} = \xi\dot\psi_{,} + \xi_{,}(\dot\psi_{,} - \dot\psi) + \eta_{,}(\dot\varphi_{,} - \dot\varphi) + \zeta_{,}(\dot\vartheta_{,} - \dot\vartheta) + \cdots$$

Nun möge auch dieser zweite Bewegungsfall $(\dot\psi_{,}, \dot\varphi_{,}, \ldots)$ die vorgeschriebene Geschwindigkeitsbedingung $\dot\psi_{,} = A$ erfüllen. Dann wird

$$\xi_{,}(\dot\psi_{,} - \dot\psi) + \eta_{,}(\dot\varphi_{,} - \dot\varphi) + \zeta_{,}(\dot\vartheta_{,} - \dot\vartheta) + \cdots = (\xi_{,} - \xi)(\dot\psi_{,} - \dot\psi) \\ + (\eta_{,} - \eta)(\dot\varphi_{,} - \dot\varphi) + (\zeta_{,} - \zeta)(\dot\vartheta_{,} - \dot\vartheta) + \cdots$$

sein, da $\dot{\psi}_{,} - \dot{\psi} = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0, \ldots$ ist. Bezeichnet also $\mathfrak{T}$ die kinetische Energie der durch den Impuls ($\xi_{,} - \xi$, $\eta_{,} - \eta, \ldots$) von der Ruhe aus erzeugten Bewegung, so haben wir

$$(17) \qquad 2\,T_{,} = 2\,T + 2\,\mathfrak{T}.$$

$\mathfrak{T}$ ist aber seiner Natur nach positiv, und daher ist $T_{,}$, die kinetische Energie irgend einer Bewegung, welche zwar der vorgeschriebenen Geschwindigkeitsbedingung genügt, aber von der wirklichen Bewegung abweicht, grösser als die kinetische Energie T der wirklichen Bewegung Die Grösse der Differenz, $\mathfrak{T}$, wird durch die Gleichung

$$(18) \qquad 2\,\mathfrak{T} = \eta_{,}(\dot{\varphi}_{,} - \dot{\varphi}) + \zeta_{,}(\dot{\vartheta}_{,} - \dot{\vartheta}) + \cdots$$

gegeben. Mit anderen Worten:

317. Die Lösung des Problems ist folgende: — *Die von dem System wirklich eingeschlagene Bewegung ist diejenige, welche weniger kinetische Energie als irgend eine andere den vorgeschriebenen Geschwindigkeitsbedingungen genügende Bewegung besitzt. Der Ueberschuss der kinetischen Energie jeder anderen solchen Bewegung über die Energie der wirklichen Bewegung ist gleich der Energie der Bewegung, welche durch die alleinige Wirkung desjenigen Impulses entstehen würde, der im Verein mit dem die wirkliche Bewegung erzeugenden Impulse diese andere vorausgesetzte Bewegung hervorbringen würde.*

In der Behandlung von Aufgaben wird der Gebrauch des besonderen Coordinatensystems, welches die Anwendung der Lösung (16) erforderlich macht, sich nur sehr selten als zweckmässig erweisen. Die jetzt bewiesene Minimum-Eigenschaft liefert aber in allen Fällen eine leichte Lösung, selbst in solchen Fällen, welche, wie die nachstehenden Beispiele (2) und (3), eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden enthalten.

Beispiel (1). — Eine glatte Ebene, welche gezwungen ist, sich mit einer gegebenen Normalgeschwindigkeit q zu bewegen, komme mit einem in Ruhe befindlichen freien starren Körper in Berührung. Man soll die Bewegung bestimmen, die sie hervorbringt. Die Geschwindigkeitsbedingung ist hier die, dass die Bewegung aus zwei ganz beliebigen Bewegungen zusammengesetzt sein soll, von denen die eine dem gestossenen Punkte des Körpers eine zur stossenden Ebene senkrechte ganz bestimmte Geschwindigkeit q ertheilt, während die andere demselben Punkte eine ganz beliebige dieser Ebene parallele Geschwindigkeit liefert. Um diese Bedingung auszudrücken, seien u, v, w die rechtwinkligen linearen Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes und ω, ϱ, σ die Winkelgeschwindigkeitscomponenten um Axen, welche durch den Schwerpunkt gehen und den Coordinatenaxen parallel sind. Bezeichnen dann x, y, z die Coordinaten des gestossenen Punktes in Beziehung auf diese durch den Schwerpunkt gehenden Axen und l, m, n die Richtungscosinus der an die stossende Ebene gelegten Normalen, so lässt sich die vorgeschriebene Geschwindigkeitsbedingung in folgender Form schreiben: —

a) $$(u + \varrho z - \sigma y) l + (v + \sigma x - \omega z) m + (w + \omega y - \varrho x) n = -q;$$

wir haben vor q das negative Zeichen gesetzt, da die Bewegung der stossenden Ebene, wenn jede der Grössen l, m, n positiv ist, schräg (wenn nicht direct) gegen den Schwerpunkt hin erfolgen soll. Setzen wir jetzt voraus, die durch den Schwerpunkt gehenden rechtwinkligen Axen seien die Hauptaxen des Körpers und bezeichnen die Trägheitsmomente in Beziehung auf dieselben mit Mf^2, Mg^2, Mh^2, so ist

b) $$T = \tfrac{1}{2} M(u^2 + v^2 + w^2 + f^2 \omega^2 + g^2 \varrho^2 + h^2 \sigma^2),$$

und dieser Ausdruck muss unter Bezugnahme auf die Bedingungsgleichung (a) zu einem Minimum gemacht werden. Nach der gewöhnlichen Methode der unbestimmten Multiplicatoren folgt

c) $$\begin{cases} Mu + \lambda l = 0, \; Mv + \lambda m = 0, \; Mw + \lambda n = 0 \\ Mf^2 \omega + \lambda(ny - mz) = 0, \quad Mg^2 \varrho + \lambda(lz - nx) = 0, \\ Mh^2 \sigma + \lambda(mx - ly) = 0. \end{cases}$$

Jede dieser sechs Gleichungen liefert den Werth einer der sechs unbekannten Grössen $u, v, w, \omega, \varrho, \sigma$, ausgedrückt durch λ und die gegebenen Grössen. Werden die so erhaltenen Werthe in (a) eingesetzt, so erhalten wir eine Gleichung zur Bestimmung von λ, und die Lösung der Aufgabe ist beendet. Die drei ersten Gleichungen (c) zeigen, dass die als ein unbestimmter Multiplicator eingetretene Grösse λ als das Maass der Grösse des Impulses interpretirt werden muss.

Beispiel (2). — Jedem Ende einer biegsamen unausdehnbaren Schnur, die einen beliebigen krummlinigen Bogen bildet, wird durch einen Stoss eine gegebene Geschwindigkeit in einer gegebenen Richtung ertheilt. Man soll die anfängliche Bewegung der ganzen Schnur bestimmen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Schnur und $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die Componenten der gesuchten anfänglichen Geschwindigkeit desselben. Ferner sei s die Länge vom einen Ende der Schnur bis zum Punkte P.

Wenn die Schnur ausdehnbar wäre, so würde

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\dot{x}}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\dot{y}}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\dot{z}}{ds}$$

die für die Längeneinheit genommene Grösse der Ausdehnung sein, die sie in Folge der Bewegung $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ im Punkte P in der Zeiteinheit erfahren würde. Nun ist aber die Schnur der Voraussetzung nach unausdehnbar, folglich

a) $$\frac{dx}{ds}\frac{d\dot{x}}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\dot{y}}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\dot{z}}{ds} = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung, welche die kinematische Bedingung des Systems ist, und auf die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{z} &= w \end{aligned}\right\} \text{wenn } s = 0 \text{ ist}, \quad \left.\begin{aligned} \dot{x} &= u' \\ \dot{y} &= v' \\ \dot{z} &= w' \end{aligned}\right\} \text{wenn } s = l \text{ ist},$$

wo l die Länge der Schnur und (u, v, w), (u', v', w') die Componenten der den beiden Enden ertheilten gegebenen Geschwindigkeiten bezeichnen, soll man $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ in jedem Punkte so bestimmen, dass

$$\text{(b)} \qquad \int_0^l \tfrac{1}{2}\,\mu\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,ds$$

ein Minimum wird; darin bezeichnet μ die für die Längeneinheit genommene Masse der Schnur im Punkte P (die Schnur braucht nicht gleichförmig zu sein), und es ist natürlich

$$\text{(c)} \qquad ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}.$$

Multiplicirt man (a) mit einem unbestimmten Factor λ und verfährt weiter nach der bekannten Regel der Variationsrechnung, so erhält man

$$\int_0^l \left\{\mu\,(\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z}) + \lambda\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\,\delta\dot{x}}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\,\delta\dot{y}}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\,\delta\dot{z}}{ds}\right)\right\} ds = 0,$$

worin x, y, z als bekannte Functionen von s angesehen werden können, welche letztere Grösse zweckmässig zur unabhängig Veränderlichen genommen wird. Wenn man den Theil des ersten Gliedes, welcher λ enthält, partiell integrirt und die Grenzbedingungen beachtet, so erhält man nach dem gewöhnlichen Verfahren die Gleichungen

$$\text{(d)} \qquad \mu\dot{x} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right), \quad \mu\dot{y} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right), \quad \mu\dot{z} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right),$$

welche die Lösung darstellen. Diese drei Gleichungen genügen zur Bestimmung der vier unbekannten Grössen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ und λ. Wird mittels derselben $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ aus (a) eliminirt, so folgt

$$0 = \frac{d\frac{1}{\mu}}{ds}\left\{\frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) + \cdots\right\} + \frac{1}{\mu}\left\{\frac{dx}{ds}\frac{d^2}{ds^2}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) + \cdots\right\}.$$

Setzen wir jetzt der Einfachheit wegen voraus, s sei die unabhängig Veränderliche, und führen die hier angedeutete Differentiation mit Rücksicht auf die Relationen

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \cdots = 1, \quad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \cdots = 0,$$
$$\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \cdots + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \cdots = 0$$

und auf den in § 9 gegebenen Ausdruck für den Krümmungsradius ϱ aus, so erhalten wir

$$\text{(e)} \qquad \frac{1}{\mu}\frac{d^2\lambda}{ds^2} + \frac{d\left(\frac{1}{\mu}\right)}{ds}\frac{d\lambda}{ds} - \frac{\lambda}{\mu\varrho^2} = 0.$$

Die Bedeutung der Formel (e) liegt auf der Hand. Sie zeigt, dass λ die impulsive Spannung der Schnur im Punkte P ist, und dass die Geschwindigkeit, welche dieser Punkt augenblicklich annimmt, die Resultante von

$\frac{1}{\mu}\frac{d\lambda}{ds}$ und $\frac{\lambda}{\varrho\mu}$ ist, von denen der erstere Ausdruck die tangentiale, der zweite die nach dem Krümmungsmittelpunkt zu gerichtete Componente ist. Die Differentialgleichung (e) zeigt daher das Gesetz der Fortleitung der augenblicklichen Spannung durch die Schnur hindurch und beweist, dass dieselbe lediglich von der Dichtigkeit der Schnur in jedem Theile und von ihrer Krümmung von Punkt zu Punkt, aber durchaus nicht von der Krümmungsebene ihrer anfänglichen Form abhängt. So z. B. wird sie längs einer Schraubenlinie dieselbe sein, wie längs eines Kreises von derselben Krümmung.

Rücksichtlich der Erfüllung der sechs Grenzgleichungen tritt eine Schwierigkeit ein, insofern $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ durch (d), ohne dass neue willkürliche Constanten eingeführt würden, unmittelbar als Functionen von λ ausgedrückt werden, welche Grösse, als die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, nur zwei willkürliche Constanten enthält. Es erklärt sich dies dadurch, dass in jedem Punkte der Schnur in jedem Augenblicke eine beliebige Geschwindigkeit in irgend einer zur Tangente senkrechten Richtung erzeugt werden kann, ohne dass der Zustand der Schnur, selbst in unendlich nahe gelegenen Punkten, auch nur die geringste Aenderung erlitte. Dies leuchtet ohne Beweis ein; man kann es aber analytisch dadurch beweisen, dass man die kinematische Gleichung (a) in folgender Weise transformirt. Es sei f die tangentiale, q die nach dem Krümmungsmittelpunkt zu gerichtete und p die zur osculatorischen Ebene senkrechte Geschwindigkeitscomponente. Bei Benutzung der elementaren Formeln für die Richtungscosinus dieser Linien (§ 9) und mit Rücksicht darauf, dass jetzt s die unabhängig Veränderliche ist, erhalten wir

$$\dot{x} = f\frac{dx}{ds} + q\frac{\varrho\, d^2x}{ds^2} + p\frac{\varrho\,(dz\, d^2y - dy\, d^2z)}{ds^3}, \quad \dot{y} = \text{u. s. w.}$$

Werden diese Werthe in (a) eingesetzt, so folgt nach einigen Reductionen

$$\text{f)} \qquad \frac{df}{ds} = \frac{q}{\varrho},$$

eine Form der kinematischen Gleichung einer biegsamen Linie, die uns später von grossem Nutzen sein wird.

Wir sehen somit, dass, wenn die tangentialen Componenten der den Endpunkten ertheilten Geschwindigkeiten irgendwelche vorgeschriebenen Werthe haben, wir den Enden ausserdem beliebige zu den Tangenten senkrechte Geschwindigkeiten geben können, ohne die von irgend einem Theil der Schnur angenommene Bewegung zu ändern. Hieraus leuchtet auch ein, dass die Richtungen der Impulse an den Endpunkten nothwendig tangential sind, oder mit anderen Worten, dass ein gegen die Tangente an einem Endpunkte geneigter Impuls eine unendliche Quergeschwindigkeit erzeugen würde.

Um jetzt die Bedingungen für die Enden auszudrücken, seien F' und F die als bekannt vorausgesetzten tangentialen Geschwindigkeiten, die in denselben erzeugt werden. Für jeden Punkt P ist, wie wir oben gesehen haben,

$$\text{g)} \qquad f = \frac{1}{\mu}\frac{d\lambda}{ds},$$

folglich

$$\text{(h)}\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\lambda}{ds} = F, \text{ wenn } s = 0 \text{ ist,} \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\lambda}{ds} = F', \text{ wenn } s = l \text{ ist,} \end{cases}$$

und diese Gleichungen genügen zur Bestimmung der Integrationsconstanten von (d).

Wenn statt der Geschwindigkeiten die tangentialen Impulse I, I' gegeben sind, die den Endpunkten ertheilt werden müssen, um die Bewegung zu erzeugen, so haben wir

$$\text{(i)}\qquad \begin{cases} \lambda = I, \text{ wenn } s = 0 \text{ ist,} \\ \lambda = I', \text{ wenn } s = l \text{ ist.} \end{cases}$$

Es kann auch einer der beiden Endpunkte frei sein; für diesen haben wir dann $\lambda = 0$ und für den zweiten Endpunkt irgend eine in Betreff des ertheilten Impulses oder der erzeugten Geschwindigkeit vorgeschriebene Bedingung.

Die Lösung dieser Aufgabe ist insofern sehr interessant, als sie zeigt, wie schnell die Fortleitung des Impulses mit der „Richtungsänderung“ längs der Schnur nachlässt. Der Leser wird sich dies ohne grosse Schwierigkeit erläutern, dadurch dass er es für den Fall einer Schnur, die entweder gleichförmig oder von solcher Beschaffenheit ist, dass $\mu \dfrac{d\frac{1}{\mu}}{ds}$ einen constanten Werth hat, und die in der Form eines Kreises oder einer Schraubenlinie gegeben ist, detaillirt ausarbeitet. Die Resultate haben merkwürdige und dynamisch höchst interessante Beziehungen zu den Bewegungen einer Peitschenschmitze und des beim Harpuniren eines Wallfisches benutzten Taues.

Beispiel (3). — Es sei eine in Ruhe befindliche Masse einer nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit gegeben, welche ein geschlossenes Gefäss von irgend einer Gestalt ganz ausfüllt. Ferner sollen dadurch, dass man plötzlich die Gestalt des Gefässes zu ändern beginnt, in der Flüssigkeit an allen Punkten ihrer Umgrenzungsfläche plötzlich beliebig vorgeschriebene Normalgeschwindigkeiten erzeugt werden, wobei jedoch das Volumen unverändert bleiben muss. Man soll die augenblickliche Geschwindigkeit irgend eines inneren Punktes der Flüssigkeit bestimmen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes P des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes und u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit, welche das in P liegende Flüssigkeitstheilchen erhalten hat. Ist dann ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, und bezeichnet $\int\int\int$ eine sich durch den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum erstreckende Integration, so haben wir

$$\text{(a)}\qquad T = \int\int\int \tfrac{1}{2}\,\varrho\,(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz,$$

welches Integral, unter Berücksichtigung der kinematischen Bedingung (§ 193)

$$\text{(b)}\qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

und der gegebenen Oberflächenwerthe der normalen Geschwindigkeitscomponente zu einem Minimum gemacht werden muss. Das Verfahren der Variationsrechnung liefert

(c) $$\iiint\Big\{\varrho\,(u\,\delta u + v\,\delta v + w\,\delta w) + \lambda\Big(\frac{d\,\delta u}{dx} + \frac{d\,\delta v}{dy} + \frac{d\,\delta w}{dz}\Big)\Big\}\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Durch partielle Integration erhalten wir aber

(d) $$\iiint\lambda\Big(\frac{d\,\delta u}{dx} + \frac{d\,\delta v}{dy} + \frac{d\,\delta w}{dz}\Big)dx\,dy\,dz = \iint\lambda\,(\delta u\,dy\,dz + \delta v\,dz\,dx + \delta w\,dx\,dy) - \iiint\Big(\delta u\frac{d\lambda}{dx} + \delta v\frac{d\lambda}{dy} + \delta w\frac{d\lambda}{dz}\Big)dx\,dy\,dz,$$

und wenn l, m, n die Richtungscosinus der Normalen in irgend einem Punkte der Oberfläche, dS ein Element der Oberfläche und $\iint$ eine sich über die ganze Oberfläche erstreckende Integration bezeichnen, so ist

$$\iint\lambda\,(\delta u\,dy\,dz + \delta v\,dz\,dx + \delta w\,dx\,dy) = \iint\lambda\,(l\,\delta u + m\,\delta v + n\,\delta w)\,dS = 0,$$

da die normale Geschwindigkeitscomponente gegeben ist, was $l\,\delta u + m\,\delta v + n\,\delta w = 0$ erfordert. Mit Rücksicht auf dies Resultat ergiebt sich aus (c) und (d) durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\delta u, \delta v, \delta w$

(e) $$\varrho u = \frac{d\lambda}{dx},\quad \varrho v = \frac{d\lambda}{dy},\quad \varrho w = \frac{d\lambda}{dz}.$$

Mittels dieser Formeln kann man u, v, w aus (b) eliminiren und erhält eine Gleichung

(f) $$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda}{dx}\Big) + \frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda}{dy}\Big) + \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda}{dz}\Big) = 0$$

zur Bestimmung von λ. Ist λ bestimmt, so ist die Lösung der Aufgabe der Gleichungen (e) wegen beendet.

Die ausser der kinematischen Gleichung (b) zu erfüllende Bedingung läuft einfach darauf hinaus, dass $\varrho\,(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ ein vollständiges Differential sei. Wenn die Flüssigkeit homogen, also ϱ constant ist, so muss $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ ein vollständiges Differential sein; mit anderen Worten, die plötzlich erzeugte Bewegung muss durch die ganze Flüssigkeit hindurch eine „rotationslose" [§ 190, (i)] sein. Die Gleichung zur Bestimmung von λ wird in diesem Falle

(g) $$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = 0.$$

Aus den später zu behandelnden Principien der Hydrodynamik wird hervorgehen, dass die Function λ, deren Differential $\varrho\,(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ ist, der impulsive Druck im Punkte (x, y, z) der Flüssigkeit ist. Daraus können wir schliessen, dass die Lösung der Gleichung (f), der noch die Bedingung hinzugefügt wird, dass λ für jeden Punkt einer gewissen geschlossenen Oberfläche einen gegebenen Werth habe, für jeden Punkt innerhalb dieser Oberfläche möglich ist und ein bestimmtes Resultat liefert. Dies ist genau dasselbe Problem, wie die Bestimmung der permanenten Temperatur in einem beliebigen Punkte innerhalb eines heterogenen festen Körpers, dessen Oberfläche beständig in einer nicht gleichförmigen Temperatur erhalten wird; es ist dann (f) die Fourier'sche Gleichung für die gleichförmige Wärmeleitung durch einen festen Körper, dessen Leitungsvermögen im Punkte (x, y, z) gleich $\frac{1}{\varrho}$ ist. Die Möglichkeit und die Bestimmtheit dieser Aufgabe sind schon oben [Cap. I, Anhang, A, (e)] bewiesen, und es ist lehrreich, den früheren Beweis mit dem gegenwärtigen zu vergleichen. Der andere Fall der Oberflächenbedingung — der, mit welchem wir hier begonnen haben — zeigt, dass die Gleichung (f), wenn $l\frac{d\lambda}{dx} + m\frac{d\lambda}{dy} + n\frac{d\lambda}{dz}$ für jeden Punkt der Oberfläche nach Belieben gegeben ist, gleichfalls für den ganzen inneren Raum eine und nur eine Lösung besitzt. Dies kann auch, wie wir in der mathematischen Theorie der magnetischen Induction sehen werden, aus dem allgemeinen Theorem (e) des obigen Anhanges A gefolgert werden, wenn man voraussetzt, α sei für jeden Punkt ausserhalb der gegebenen Oberfläche Null und habe für jeden inneren Punkt (x, y, z) den Werth $\frac{1}{\varrho}$.

318. **Princip der kleinsten Wirkung.** — Maupertuis' berühmtes Princip der kleinsten Wirkung ist bis jetzt mehr als eine sonderbare und etwas verwirrende Eigenschaft der Bewegung, denn als ein nützlicher Führer in kinetischen Forschungen angesehen worden. Wir haben aber die feste Ueberzeugung, dass man demselben eine viel tiefere Bedeutung beilegen wird, nicht nur in der abstracten Dynamik, sondern auch in der Theorie mehrerer Zweige der Physik, die jetzt anfangen, dynamische Erklärungen zu erhalten. Als eine Erweiterung dieses Princips hat W. R. Hamilton*) seine Methode der variirenden Wirkung entwickelt, die unzweifelhaft ein sehr schätzbares Hülfsmittel in späteren Verallgemeinerungen werden muss.

Die Bedeutung, welche das Wort „Wirkung“ in diesen Ausdrücken hat, ist unglücklicherweise ganz von dem verschieden, was Newton als die Actio Agentis definirt, und unzweifelhaft ist jenes Wort durchaus nicht so gut gewählt, wie Newton's Ausdruck. Indem wir es indessen in dem Sinne, wie wir es jetzt allgemein in den Schriften über Dynamik gebraucht finden, beibehalten, so definiren wir die Wirkung eines in Bewegung befindlichen Systems als proportional dem Producte der mittleren kinetischen Energie, welche

*) Phil. Trans. 1834 — 1835.

das System von irgend einem passend gewählten Augenblicke an besessen hat, in die betrachtete Zeit. Nach der allgemein angenommenen Einheit ist die Wirkung eines Systems, dessen kinetische Energie keine Aenderung erlitten hat, das doppelte Product aus der Energie in die in Rede stehende Zeit. Wenn die Energie manchmal grösser, manchmal kleiner war, so ist die Wirkung zur Zeit t gleichfalls das Doppelte von dem, was wir das Zeitintegral der Energie nennen können, d. h. sie wird in der Integralrechnung durch

$$2 \int_0^t T d\tau$$

bezeichnet, wo T die kinetische Energie ist, die das System in irgend einem Augenblick τ des betrachteten Zeitraums von 0 bis t besitzt.

Irgend einer der materiellen Punkte, aus denen das System besteht, habe die Masse m und zur Zeit τ die Geschwindigkeit v. Dann ist

1) $$T = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2,$$

folglich, wenn A die Wirkung zur Zeit t bezeichnet,

2) $$A = \int_0^t \Sigma m v^2 d\tau.$$

Man kann hierfür einen anderen Ausdruck bilden, indem man mit ds den Weg bezeichnet, den ein materieller Punkt in der Zeit $d\tau$ beschreibt. Es ist dann $v\, d\tau = ds$, folglich

3) $$A = \int \Sigma m v ds,$$

oder, wenn die Masse m zu irgend einer Zeit die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z hat,

4) $$A = \int \Sigma m (\dot{x} dx + \dot{y} dy + \dot{z} dz).$$

Danach könnte man, und viele Schriftsteller haben dies wirklich gethan, die Wirkung folgendermaassen definiren: —

Die Wirkung eines Systems wird erhalten, wenn man die mittlere Bewegungsgrösse, die jeder Punkt des Systems auf seinem Wege während der in Rede stehenden Zeit hat, mit der Länge seines Weges multiplicirt und alle diese Producte addirt.

319. Das Princip der kleinsten Wirkung ist folgendes: — Unter allen den verschiedenen Bewegungsweisen, mittels deren die Punkte eines conservativen Systems aus einer Configuration in eine andere gelangen können, während die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie gleich einer gegebenen Constanten ist, giebt

es eine Bewegungsweise, für welche die Wirkung ein Minimum ist. Es ist dies diejenige, auf welcher sich das System von selbst ohne jede Leitung bewegt, wenn es nur durch einen Anstoss die geeigneten Geschwindigkeiten erhalten hat.

Es seien x, y, z zur Zeit τ die Coordinaten eines die Masse m enthaltenden Punktes und V die potentielle Energie des Systems in der zu dieser Zeit vorhandenen besonderen Configuration. Das System soll aus einer gegebenen Configuration in eine andere übergehen, und dabei sollen seine Geschwindigkeiten in jedem Augenblick der Bedingung

(5) $$\Sigma \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = E = \text{einer Constanten}$$

genügen. Auf welchem Wege muss dieser Uebergang erfolgen, damit A oder

$$\int \Sigma m (\dot{x}\, dx + \dot{y}\, dy + \dot{z}\, dz)$$

einen möglichst kleinen Werth annehme?

Nach dem Verfahren der Variationsrechnung findet man, dass $\delta A = 0$ sein muss, wo

(6) $$\delta A = \int \Sigma m (\dot{x}\, d\delta x + \dot{y}\, d\delta y + \dot{z}\, d\delta z + \delta \dot{x}\, dx + \delta \dot{y}\, dy + \delta \dot{z}\, dz)$$

ist. Wird hierin $dx = \dot{x}\, d\tau$, $dy = \dot{y}\, d\tau$, $dz = \dot{z}\, d\tau$ genommen und beachtet, dass

(7) $$\Sigma m (\dot{x}\, \delta \dot{x} + \dot{y}\, \delta \dot{y} + \dot{z}\, \delta \dot{z}) = \delta T$$

ist, so haben wir

(8) $$\int \Sigma m (\delta \dot{x}\, dx + \delta \dot{y}\, dy + \delta \dot{z}\, dz) = \int_0^t \delta T\, d\tau.$$

Ferner ergiebt sich durch partielle Integration

$$\int \Sigma m (\dot{x}\, d\delta x + \cdots) = \{\Sigma m (\dot{x}\, \delta x + \cdots)\} - [\Sigma m (\dot{x}\, \delta x + \cdots)] - \int \Sigma m (\ddot{x}\, \delta x + \cdots)\, d\tau,$$

wo $[\cdots]$ und $\{\cdots\}$ die Werthe der eingeschlossenen Grössen zu Anfang und zu Ende der betrachteten Bewegung bezeichnen und $d\dot{x} = \ddot{x}\, d\tau$, u. s. w. ist. Der obige Ausdruck (6) geht somit über in

(9) $$\delta A = \{\Sigma m (\dot{x}\, \delta x + \dot{y}\, \delta y + \dot{z}\, \delta z)\} - [\Sigma m (\dot{x}\, \delta x + \dot{y}\, \delta y + \dot{z}\, \delta z)] + \int_0^t d\tau [\delta T - \Sigma m (\ddot{x}\, \delta x + \ddot{y}\, \delta y + \ddot{z}\, \delta z)].$$

Wir machen darauf aufmerksam, dass dies ein völlig allgemeiner, durch keine Grenz- oder kinetischen Bedingungen beschränkter kinematischer Ausdruck ist. Im gegenwärtigen Problem setzen wir nun die anfängliche und die Endlage als unveränderlich voraus. Folglich müssen die Variationen δx, u. s. w. für die Grenzwerthe sämmtlich verschwinden, die Ausdrücke $\{\cdots\}$, $[\cdots]$ somit wegfallen. Auch ist im vorliegenden Problem nach der Gleichung der Energie (5) $\delta T = -\delta V$. Um also $\delta A = 0$ zu machen, müssen wir, da die Zwischenwerthe der Variationen δx, u. s. w nur den Bedingungen des Systems unterworfen, im Uebrigen aber ganz willkürlich sind,

$$\Sigma m (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) + \delta V = 0 \tag{10}$$

haben, was [§ 293, (4)] die allgemeine Variationsgleichung der Bewegung eines conservativen Systems ist. Damit ist der Satz bewiesen. Es folgt daraus auch: —

320. Stationäre Wirkung. — Bei jeder ungezwungenen Bewegung eines conservativen Systems aus irgend einer bestimmten Anfangslage in eine beliebige andere Lage ist die Wirkung zwar nicht nothwendig ein Minimum, hat aber die Eigenschaft, stationär zu sein, d. h. ihre Variation verschwindet, was die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums, Maximums, oder eines Maximumminimums ist.

Dies lässt sich ohne Benutzung der mathematischen Ausdrucksweise wohl kaum klar machen. Es seien (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), u. s. w. zu irgend einer Zeit τ der wirklichen Bewegung die Coordinaten von Massentheilchen m_1, m_2, u. s. w. des Systems. Ferner seien V die potentielle Energie des Systems in der zu dieser Zeit τ vorhandenen Configuration und E der gegebene Werth der Summe der potentiellen und der kinetischen Energie. Die Gleichung der Energie ist dann:

$$\tfrac{1}{2} \{ m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \text{u. s. w.} \} + V = E. \tag{1}$$

Fassen wir irgend einen Theil der Bewegung, z. B. diejenige von der Zeit 0 bis zur Zeit t ins Auge, so erhalten wir für die Wirkung während dieses Intervalles

$$A = \int_0^t (E - V)\, d\tau = Et - \int_0^t V\, d\tau. \tag{11}$$

Jetzt wollen wir voraussetzen, das System werde auf irgend einem anderen bei den vorhandenen Bedingungen möglichen Wege mit irgendwelchen anderen Geschwindigkeiten aus derselben anfänglichen in dieselbe Endconfiguration wie in der gegebenen Bewegung geleitet, und auch bei dieser zweiten (gezwungenen) Bewegung sei die Bedingung erfüllt, dass die kinetische und die potentielle Energie die Summe E haben. Zur Zeit τ während dieser willkürlichen Bewegung seien (x_1', y_1', z_1'), u. s. w. die Coordinaten, V' die entsprechende potentielle Energie und $(\dot{x}_1', \dot{y}_1', \dot{z}_1')$, u. s. w. die Geschwindigkeitscomponenten. Dann bleibt die Gleichung (1) noch bestehen, wenn allen darin enthaltenen Buchstaben, mit alleiniger Ausnahme von E, Accente gegeben werden, und wir erhalten für die Wirkung

$$A' = Et' - \int_0^{t'} V'\, d\tau, \tag{12}$$

wo t' die Zeit bezeichnet, während welcher diese zweite gezwungene Bewegung vor sich geht. Es bezeichne nun ϑ eine kleine numerische Grösse, und es seien ξ_1, η_1, u. s. w. endliche Linien von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{x_1' - x_1}{\xi_1} = \frac{y_1' - y_1}{\eta_1} = \frac{z_1' - z_1}{\zeta_1} = \frac{x_2' - x_2}{\xi_2} = \text{u. s. w.} = \vartheta$$

ist. Das „Princip der stationären Wirkung“ besteht dann darin, dass für jede mögliche Abweichung ($\xi_1 \vartheta$, $\eta_1 \vartheta$, u. s. w.) von dem natürlichen Wege und den zugehörigen Geschwindigkeiten, wenn diese neue Bewegung nur die Gleichung der Energie erfüllt und das System durch die festgesetzte anfängliche und die gleichfalls festgesetzte Endconfiguration hindurchführt, der Ausdruck $\frac{V' - V}{\vartheta}$ für ein unendlich kleines ϑ verschwindet, und umgekehrt, dass, wenn $\frac{V' - V}{\vartheta}$ zugleich mit ϑ für jede mögliche Abweichung dieser Art von einem gewissen durch die Coordinaten (x_1, y_1, z_1), u. s. w. angegebenen Wege und gewissen Geschwindigkeiten verschwindet, dieser Weg und diese Geschwindigkeiten es sind, welche das System ohne weitere Leitung annimmt, wenn es nur mit passenden Geschwindigkeiten von der anfänglichen Configuration aus in Bewegung gesetzt wird.

321. **Variirende Wirkung.** — Von diesem Princip der stationären Wirkung, das sich, wie wir gesehen haben, auf einen Vergleich zwischen einer natürlichen Bewegung und einer beliebigen anderen Bewegung stützt, die willkürlich geleitet wird und nur dem Gesetz der Energie, sowie der Bedingung unterworfen ist, das System aus derselben anfänglichen in dieselbe Endconfiguration wie die natürliche Bewegung zu führen, geht Hamilton zu der Betrachtung der Variation der Wirkung in einer natürlichen oder ungeleiteten Bewegung des Systems über, die entsteht, wenn man die anfängliche und die Endconfiguration, sowie die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie variiren lässt. Das Resultat ist folgendes: —

322. Die Abnahme der Wirkung, genommen für die Einheit der Zunahme irgend einer der beliebig gewählten (allgemeinen) Coordinaten (§ 204), welche die anfängliche Configuration ausdrücken, ist gleich der entsprechenden (allgemeinen) Componente der Bewegungsgrösse [§ 313, (c)] der wirklichen Bewegung aus dieser Configuration; die Zunahme der Wirkung, genommen für die Einheit der Zunahme irgend einer der die Endconfiguration bestimmenden beliebigen Coordinaten ist gleich der entsprechenden Componente der Bewegungsgrösse der wirklichen Bewegung gegen diese zweite Configuration hin; endlich ist die Zunahme der Wirkung, genommen für die Einheit der Zunahme der constanten Summe der potentiellen und der kinetischen Energie, gleich der Zeit, welche die Bewegung dauert, deren Wirkung berechnet wird.

Dies zu beweisen, müssen wir in unserem früheren Ausdruck (9) für δA die auf die beiden äussersten Lagen bezüglichen Coordinaten variiren lassen; ferner haben wir anzunehmen, aus δT werde $\delta E - \delta V$, wo δE während der Bewegung eine Constante ist, und jede Reihe von Wegen und Geschwindigkeiten gehöre zu einer ungezwungenen Bewegung des Systems, unter welcher Voraussetzung die Gleichung (10) gültig bleibt. Es ist daher

$$
\begin{aligned}
(13) \qquad \delta A = & \{\Sigma m (\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)\} \\
& - [\Sigma m (\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)] + t\delta E.
\end{aligned}
$$

Wir setzen jetzt erstens voraus, die das System ausmachenden materiellen Punkte seien sämmtlich frei von Zwang, so dass (x, y, z) für jeden dieser Punkte drei unabhängig Veränderliche sind. Ausserdem bezeichnen wir der Deutlichkeit wegen mit (x_1', y_1', z_1') und (x_1, y_1, z_1) die Coordinaten des Massentheilchens m_1 in seiner anfänglichen und seiner Endlage und mit $(\dot{x}_1', \dot{y}_1', \dot{z}_1')$, $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ die Geschwindigkeitscomponenten dieses Theilchens in diesen Punkten. Dann erhalten wir aus dem Vorhergehenden nach der gewöhnlichen Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten

$$
(14) \left\{
\begin{aligned}
& \frac{dA}{dx_1'} = - m_1 \dot{x}_1', \quad \frac{dA}{dy_1'} = - m_1 \dot{y}_1', \quad \frac{dA}{dz_1'} = - m_1 \dot{z}_1', \text{ u. s. w.} \\
& \frac{dA}{dx_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{dA}{dy_1} = m_1 \dot{y}_1, \quad \frac{dA}{dz_1} = m_1 \dot{z}_1, \text{ u. s. w.} \\
& \text{und} \quad \frac{dA}{dE} = t.
\end{aligned}
\right.
$$

In diesen Gleichungen haben wir vorauszusetzen, A sei als Function der anfänglichen und der Endcoordinaten ausgedrückt, was im Ganzen sechs Mal so viele unabhängig Veränderliche sind, als das System materielle Punkte enthält; dazu kommt noch eine weitere Veränderliche E, die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie.

Wenn die materiellen Punkte, aus denen das System besteht, nicht frei, sondern in irgend einer Weise mit einander verbunden sind, so dass sie entweder einen starren Körper oder eine beliebige Anzahl starrer Körper bilden, die frei oder verbunden sind, so könnten wir das System zwar immer noch als ein System freier Punkte ansehen, wenn wir ausser den einwirkenden Kräften auch noch diejenigen Kräfte in Rechnung zögen, die nothwendig sind, um die Erfüllung der Bedingungen des vorhandenen Zusammenhanges zu erzwingen. Aber obschon diese Art, mit einem System in Verbindung stehender materieller Punkte zu verfahren, sehr einfach ist, soweit es sich bloss um das Gesetz der Energie handelt, so sind doch Lagrange's Methoden vorzuziehen, sowohl diejenige „der Bedingungsgleichungen", als auch die für unsere jetzigen Zwecke weit passendere Methode „der allgemeinen Coordinaten"; sie ersparen uns nämlich sehr mühselige Interpretationen, wenn die Verschiebungen materieller Punkte betrachtet werden sollen, die aus willkürlichen Variationen in der Configuration eines Systems herrühren.

Wir wollen demgemäss voraussetzen, für irgend eine besondere Configuration (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... gehe der Ausdruck

$$
(15) \left\{
\begin{aligned}
& m_1 (\dot{x}_1 \delta x_1 + \dot{y}_1 \delta y_1 + \dot{z}_1 \delta z_1) + \text{ u. s. w.} \\
& \text{über in } \xi \delta \psi + \eta \delta \varphi + \zeta \delta \vartheta + \text{ u. s. w.,}
\end{aligned}
\right.
$$

wenn er durch die allgemeinen Coordinaten $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ ausgedrückt wird, deren Anzahl gleich der Anzahl der Freiheitsgrade in der Bewegung des Systems ist [§ 313, (c)].

Wenn man ebenso den Ausdruck für die kinetische Energie des Systems transformirt, so erhält man offenbar

$$(16)\qquad \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \text{u. s. w.} = \tfrac{1}{2} (\xi \dot{\psi} + \eta \dot{\varphi} + \zeta \dot{\vartheta} + \text{u. s. w.}),$$

und daher sind ξ, η, ζ, u. s. w. diejenigen linearen Functionen der allgemeinen Geschwindigkeiten, welche wir die „allgemeinen Componenten der Bewegungsgrösse" genannt haben, und welche, wenn die kinetische Energie T als eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten ausgedrückt ist (die Coefficienten dieser Function sind natürlich im Allgemeinen Functionen der Coordinaten ψ, φ, ϑ, u. s. w.), aus T durch die folgenden Formeln hergeleitet werden können:

$$(17)\qquad \xi = \frac{dT}{d\dot{\psi}},\quad \eta = \frac{dT}{d\dot{\varphi}},\quad \zeta = \frac{dT}{d\dot{\vartheta}},\ \text{u. s. w.}$$

Werden also wieder accentuirte Buchstaben für die anfängliche und nicht accentuirte Buchstaben für die Endconfiguration des Systems genommen, so ist

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{d\psi'} = -\xi',\ \dfrac{dA}{d\varphi'} = -\eta',\ \dfrac{dA}{d\vartheta'} = -\zeta',\ \text{u. s. w.} \\ \dfrac{dA}{d\psi} = \xi,\ \dfrac{dA}{d\varphi} = \eta,\ \dfrac{dA}{d\vartheta} = \zeta,\ \text{u. s. w.} \\ \text{und, wie früher, } \dfrac{dA}{dE} = t. \end{cases}$$

Diese Gleichungen (18), welche die Gleichungen (14) natürlich als einen besonderen Fall in sich schliessen, drücken in einer mathematischen Form das **Princip der variirenden Wirkung** aus, das wir oben in Worten angegeben haben.

Die Werthe der Bewegungsgrössen, welche in dieser Weise [(14) und (18)] durch die Differentialquotienten von A ausgedrückt werden, müssen natürlich der Gleichung der Energie genügen. Für den Fall freier materieller Punkte ist daher

$$(19)\qquad \Sigma \frac{1}{m}\left(\frac{dA^2}{dx^2} + \frac{dA^2}{dy^2} + \frac{dA^2}{dz^2}\right) = 2(E - V),$$

$$(20)\qquad \Sigma \frac{1}{m}\left(\frac{dA^2}{dx'^2} + \frac{dA^2}{dy'^2} + \frac{dA^2}{dz'^2}\right) = 2(E - V').$$

Für ein System von materiellen Punkten oder starren Körpern, die irgendwie mit einander verbunden sind, ist im Allgemeinen nach (16) und (18)

$$(21)\qquad \dot{\psi}\frac{dA}{d\psi} + \dot{\varphi}\frac{dA}{d\varphi} + \dot{\vartheta}\frac{dA}{d\vartheta} + \text{u. s. w.} = 2(E - V),$$

$$(22)\qquad \dot{\psi}'\frac{dA}{d\psi'} + \dot{\varphi}'\frac{dA}{d\varphi'} + \dot{\vartheta}'\frac{dA}{d\vartheta'} + \text{u. s. w.} = 2(E - V'),$$

wo $\dot\psi, \dot\varphi$, u. s. w. durch Auflösung der Gleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} (\psi, \psi)\,\dot\psi + (\psi, \varphi)\,\dot\varphi + (\psi, \vartheta)\,\dot\vartheta + \text{u. s. w.} = \xi = \dfrac{dA}{d\psi} \\ (\varphi, \psi)\,\dot\psi + (\varphi, \varphi)\,\dot\varphi + (\varphi, \vartheta)\,\dot\vartheta + \text{u. s. w.} = \eta = \dfrac{dA}{d\varphi} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

als lineare Functionen von $\dfrac{dA}{d\psi}$, $\dfrac{dA}{d\varphi}$, u. s. w., und ebenso $\dot\psi'$, $\dot\varphi'$, u. s. w. durch Auflösung der Gleichungen

$$(24)\quad \begin{cases} (\psi', \psi')\,\dot\psi' + (\psi', \varphi')\,\dot\varphi' + (\psi', \vartheta')\,\dot\vartheta' + \text{u. s. w.} = \xi' = -\dfrac{dA}{d\psi'} \\ (\varphi', \psi')\,\dot\psi' + (\varphi', \varphi')\,\dot\varphi' + (\varphi', \vartheta')\,\dot\vartheta' + \text{u. s. w.} = \eta' = -\dfrac{dA}{d\varphi'} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

als lineare Functionen von $-\dfrac{dA}{d\psi'}$, $-\dfrac{dA}{d\varphi'}$, u. s. w. ausgedrückt werden können. Wir erinnern daran, dass (ψ, ψ), (ψ, φ), u. s. w. Functionen der bestimmenden Elemente ψ, φ, ϑ, u. s. w. sind, die nur von der kinematischen Natur des Coordinatensystems und keineswegs von dem dynamischen Problem abhängen, das uns jetzt beschäftigt; es sind nämlich die Coefficienten der halben Quadrate und der Producte der verallgemeinerten Geschwindigkeiten in dem Ausdruck für die kinetische Energie irgend einer Bewegung des Systems; die Functionen (ψ', ψ'), (ψ', φ'), u. s. w. sind aus ψ', φ', u. s. w. auf genau dieselbe Weise, wie (ψ, ψ), (ψ, φ), u. s. w. aus ψ, φ, u. s. w. gebildet, und A ist eine Function aller Elemente ψ, φ, u. s. w., ψ', φ', u. s. w. Danach ist das erste Glied von (21) eine quadratische Function von $\dfrac{dA}{d\psi}$, $\dfrac{dA}{d\varphi}$, u. s. w., deren Coefficienten bekannte Functionen von ψ, φ, u. s. w. sind, die nur von den kinematischen Beziehungen des Systems und von den Massen seiner Theile, aber durchaus nicht von den wirklichen Kräften oder Bewegungen abhängen; das zweite Glied ist eine Function der Coordinaten ψ, φ, u. s. w., die von den Kräften in dem dynamischen Problem und von einer Constanten abhängt, welche den gegebenen besonderen Werth der Summe der potentiellen und der kinetischen Energie in der wirklichen Bewegung ausdrückt. Aehnliches gilt von (22) in Beziehung auf ψ', φ', u. s. w.

Es ist bemerkenswerth, dass die eine für die Bewegung freier materieller Punkte gefundene partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades (19) oder die ihr äquivalente Gleichung (21) zur Bestimmung einer Function A genügt, die so beschaffen ist, dass die Gleichungen (14) oder (18) die Bewegungsgrössen in einer wirklichen Bewegung des den gegebenen Kräften unterworfenen Systems ausdrücken. Denn wenn wir zuerst die Annahme vollkommener Freiheit der Massenpunkte machen und die Gleichung (19) noch unter Hamilton's Voraussetzung differentiiren, dass A bloss durch die anfänglichen und die Endcoordinaten und die Summe E der potentiellen und der kinetischen Energie ausgedrückt ist, so erhalten wir

$$2\,\Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{dA}{dx}\,\frac{d^2A}{dx_1\,dx} + \frac{dA}{dy}\,\frac{d^2A}{dx_1\,dy} + \frac{dA}{dz}\,\frac{d^2A}{dx_1\,dz}\right) = -\,2\,\frac{dV}{dx_1}.$$

Nach (14) ist aber

$$\frac{1}{m_1}\frac{dA}{dx_1} = \dot{x}_1,\ \frac{1}{m_1}\frac{dA}{dy_1} = \dot{y}_1, \text{ u. s. w.},$$

folglich

$$\frac{d^2A}{dx_1^2} = m_1\frac{d\dot{x}_1}{dx_1},\ \frac{d^2A}{dx_1\,dy_1} = m_1\frac{d\dot{y}_1}{dx_1} = m_1\frac{d\dot{x}_1}{dy_1},\ \frac{d^2A}{dx_1\,dz_1} = m_1\frac{d\dot{z}_1}{dx_1} = m_1\frac{d\dot{x}_1}{dz_1},$$

$$\frac{d^2A}{dx_1\,dx_2} = m_2\frac{d\dot{x}_2}{dx_1} = m_1\frac{d\dot{x}_1}{dx_2}, \text{ u. s. w.}$$

Diese Formeln benutzen wir in der letzten Gleichung; zugleich lassen wir beiderseits den Factor 2 weg und schreiben die Glieder für zwei materielle Punkte vollständig hin, damit der Gebrauch des Zeichens Σ keine Verwirrung veranlasse; es ergiebt sich

$$(25)\qquad m_1\Big(\dot{x}_1\frac{d\dot{x}_1}{dx_1} + \dot{y}_1\frac{d\dot{x}_1}{dy_1} + \dot{z}_1\frac{d\dot{x}_1}{dz_1} + \dot{x}_2\frac{d\dot{x}_1}{dx_2} + \dot{y}_2\frac{d\dot{x}_1}{dy_2} + \dot{z}_2\frac{d\dot{x}_1}{dz_2} + \text{u. s. w.}\Big) = -\frac{dV}{dx_1}.$$

Wird jetzt das erste Glied mit dt multiplicirt, so erhalten wir offenbar die Aenderung des Werthes von $m_1\dot{x}_1$, welche dadurch entsteht, dass man, immer noch unter Hamilton's Voraussetzung, die Coordinaten aller Punkte (d. h. die Configuration des Systems) von den Werthen, die sie in irgend einem Augenblick haben, zu den Werthen variiren lässt, die sie zu einer dt späteren Zeit haben. Das mit dt multiplicirte erste Glied von (25) ist daher die Aenderung in dem Werthe von $m_1\dot{x}_1$, die in der natürlichen Bewegung von der Zeit t, wo die Configuration $(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots E)$ ist, bis zur Zeit $t + dt$ wirklich erfolgt. Dasselbe ist daher gleich $m_1\ddot{x}_1 dt$, und folglich geht (25) einfach in $m_1\ddot{x}_1 = -\frac{dV}{dx_1}$ über. Auf ähnliche Weise finden wir

$$m_1\ddot{y}_1 = -\frac{dV}{dy_1},\ m_1\ddot{z}_1 = -\frac{dV}{dz_1},\ m_2\ddot{x}_2 = -\frac{dV}{dx_2}, \text{ u. s. w.}$$

Dies sind aber [§ 293, (4)] die elementaren Differentialgleichungen der Bewegungen eines conservativen Systems, das aus freien materiellen Punkten besteht, die wechselseitig auf einander einwirken.

Wenn wir weiter x_1, y_1, z_1, x_2, u. s. w. als constant ansehen und genau dasselbe Verfahren in Beziehung auf x_1', y_1', z_1', x_2', u. s. w. anstellen, so erhalten wir genau dieselben Gleichungen zwischen den accentuirten Buchstaben; der einzige Unterschied besteht darin, dass $-A$ statt A erscheint. Wir finden schliesslich $m_1\ddot{x}_1' = \frac{dV'}{dx_1'}$ und folgern daraus, dass, wenn die Gleichung (20) erfüllt wird, die durch (14) dargestellte Bewegung eine natürliche Bewegung durch die Configuration $(x_1', y_1', z_1', x_2', \ldots)$ hindurch ist.

Wenn daher die Gleichungen (19) und (20) beide erfüllt werden, und wenn wir im Falle $x_1 = x_1'$, $y_1 = y_1'$, $z_1 = z_1'$, $x_2 = x_2'$, u. s. w. auch noch $\frac{dA}{dx_1} = -\frac{dA}{dx_1'}$, u. s. w. haben, so ist die durch (14) dargestellte

Bewegung eine natürliche Bewegung durch die beiden Configurationen $(x_1', y_1', z_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots)$ hindurch. Obgleich die Zeichen in den vorhergehenden Ausdrücken auf Grund der Voraussetzung festgesetzt sind, dass die Bewegung aus der ersteren in die zweite Configuration erfolgen solle, so kann sie offenbar auch von der zweiten zur ersteren vor sich gehen; denn welcher Weg auch eingeschlagen wird, die Bewegung im entgegengesetzten Sinne ist nach der allgemeinen Eigenschaft eines conservativen Systems gleichfalls eine natürliche Bewegung (§ 271).

Um dasselbe für ein conservatives System zu beweisen, das durch irgendwie mit einander verbundene materielle Punkte oder starre Körper gebildet wird, so erhalten wir erstens aus (18)

$$\text{(26)} \qquad \frac{d\eta}{d\psi} = \frac{d\xi}{d\varphi}, \quad \frac{d\zeta}{d\psi} = \frac{d\xi}{d\vartheta}, \text{ u. s. w.,}$$

wo nach Hamilton's Princip vorausgesetzt wird, ψ, φ, u. s. w. und ξ, η, u. s. w. seien durch ψ, φ, u. s. w., ψ', φ', u. s. w. und die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie ausgedrückt. Wird unter derselben Voraussetzung die Gleichung (21) differentiirt, so folgt

$$\text{(27)} \qquad \begin{aligned} &\dot\psi \frac{d\xi}{d\psi} + \dot\varphi \frac{d\eta}{d\psi} + \dot\vartheta \frac{d\zeta}{d\psi} + \text{ u. s. w.} \\ &\qquad + \xi \frac{d\dot\psi}{d\psi} + \eta \frac{d\dot\varphi}{d\psi} + \zeta \frac{d\dot\vartheta}{d\psi} + \text{ u. s. w.} = -2 \frac{dV}{d\psi}. \end{aligned}$$

Nach (26) und nach den obigen Betrachtungen ist aber

$$\text{(28)} \qquad \begin{aligned} &\dot\psi \frac{d\xi}{d\psi} + \dot\varphi \frac{d\eta}{d\psi} + \dot\vartheta \frac{d\zeta}{d\psi} + \text{ u. s. w.} \\ &\qquad = \dot\psi \frac{d\xi}{d\psi} + \dot\varphi \frac{d\xi}{d\varphi} + \dot\vartheta \frac{d\xi}{d\vartheta} + \text{ u. s. w.} = \dot\xi, \end{aligned}$$

wo $\dot\xi$ die für die Einheit der Zeit genommene Aenderung von ξ bezeichnet, die in der wirklichen Bewegung erfolgt.

Weiter haben wir

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\dot\psi}{d\psi} = \dfrac{\partial\dot\psi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{d\psi} + \dfrac{\partial\dot\psi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\psi} + \text{ u. s. w.} + \dfrac{\partial\dot\psi}{d\psi}, \\ \dfrac{d\dot\varphi}{d\psi} = \dfrac{\partial\dot\varphi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{d\psi} + \dfrac{\partial\dot\varphi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\psi} + \text{ u. s. w.} + \dfrac{\partial\dot\varphi}{d\psi}, \\ \text{u. s. w. u. s. w.,} \end{cases}$$

wenn, wie in Hamilton's System der kanonischen Bewegungsgleichungen, vorausgesetzt wird, $\dot\psi, \dot\varphi$, u. s. w. seien als lineare Functionen von ξ, η, u. s. w. ausgedrückt, deren Coefficienten die Veränderlichen ψ, φ, ϑ, u. s. w. enthalten, und wenn wir uns des Buchstabens ∂ bedienen, um die partielle Differentiation dieser Functionen in Beziehung auf das System der als unabhängig angesehenen Veränderlichen $\xi, \eta, \ldots, \psi, \varphi, \ldots$ zu bezeichnen. Wir wollen die Coefficienten nach dem oben befolgten Verfahren mit $[\psi, \psi]$, u. s. w. bezeichnen, so dass wir, wenn

$$\text{(30)} \qquad T = \tfrac{1}{2}\{[\psi,\psi]\,\xi^2 + [\varphi,\varphi]\,\eta^2 + \cdots + 2[\psi,\varphi]\,\xi\eta + \cdots\}$$

die Formel für die kinetische Energie ist,

$$
(31) \quad \begin{cases} \dot{\psi} = \dfrac{\partial T}{d\xi} = [\psi,\psi]\,\xi + [\psi,\varphi]\,\eta + [\psi,\vartheta]\,\zeta + \text{u. s. w.} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial T}{d\eta} = [\varphi,\psi]\,\xi + [\varphi,\varphi]\,\eta + [\varphi,\vartheta]\,\zeta + \text{u. s. w.} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}
$$

erhalten, wo $[\psi, \varphi]$ und $[\varphi, \psi]$ natürlich denselben Werth haben. Es ergiebt sich dann

$$
\frac{\partial \dot{\psi}}{d\xi} = [\psi,\psi], \quad \frac{\partial \dot{\varphi}}{d\xi} = [\varphi,\psi], \ldots;
$$

$$
\frac{\partial \dot{\psi}}{d\psi} = \frac{d[\psi,\psi]}{d\psi}\,\xi + \frac{d[\psi,\varphi]}{d\psi}\,\eta + \text{u. s. w.};
$$

$$
\frac{\partial \dot{\varphi}}{d\psi} = \frac{d[\varphi,\psi]}{d\psi}\,\xi + \text{u. s. w.}, \quad \text{u. s. w.},
$$

folglich aus (29)

$$
\begin{aligned}
\xi\frac{d\dot{\psi}}{d\psi} + \eta\frac{d\dot{\varphi}}{d\psi} + \zeta\frac{d\dot{\vartheta}}{d\psi} + \text{u. s. w.} &= \{[\psi,\psi]\,\xi + [\varphi,\psi]\,\eta + \text{u. s. w.}\}\frac{d\xi}{d\psi} \\
&+ \{[\psi,\varphi]\,\xi + [\varphi,\varphi]\,\eta + \text{u. s. w.}\}\frac{d\eta}{d\psi} + \text{u. s. w.} + \frac{d[\psi,\psi]}{d\psi}\xi^2 \\
&+ \frac{d[\varphi,\varphi]}{d\psi}\eta^2 + \text{u. s. w.} + 2\frac{d[\psi,\varphi]}{d\psi}\xi\eta + \text{u. s. w.} \\
&= \dot{\psi}\frac{d\xi}{d\psi} + \dot{\varphi}\frac{d\eta}{d\psi} + \cdots + 2\frac{\partial T}{d\psi},
\end{aligned}
$$

und hieraus ersehen wir mit Rücksicht auf (28)

$$
(32) \qquad \xi\frac{d\dot{\psi}}{d\psi} + \eta\frac{d\dot{\varphi}}{d\psi} + \zeta\frac{d\dot{\vartheta}}{d\psi} + \text{u. s. w.} = \dot{\xi} + 2\frac{\partial T}{d\psi}.
$$

Die Gleichungen (32) und (28) reduciren das erste Glied von (27) auf $2\,\dot{\xi} + 2\dfrac{\partial T}{d\psi}$; wir erhalten daher durch Division mit 2

$$
(33) \quad \dot{\xi} + \frac{\partial T}{d\psi} = -\frac{dV}{d\psi}, \text{ und ebenso } \dot{\eta} + \frac{\partial T}{d\varphi} = -\frac{dV}{d\varphi}, \text{ u. s. w.}
$$

Die Anzahl dieser Differentialgleichungen ist so gross wie diejenige der Veränderlichen ψ, φ, u. s. w. Sie genügen, letztere durch t und eine zweimal so grosse Anzahl willkürlicher Constanten auszudrücken. Jede Lösung des dynamischen Problems genügt aber, wie wir oben gezeigt haben, den Gleichungen (21) und (23); sie muss daher auch diesen daraus hergeleiteten Gleichungen (33) genügen. Die Gleichungen (33) sind somit die Bewegungsgleichungen des auf allgemeine Coordinaten bezogenen Systems, deren Anzahl gleich derjenigen der Freiheitsgrade ist. Sie sind die Hamilton'schen expliciten Bewegungsgleichungen, für welche wir unten einen directen Beweis geben werden. Ganz wie oben erhellt folglich, dass, wenn (21) und (22) erfüllt sind, (18) eine natürliche Bewegung des Systems aus einer der beiden Configurationen $(\psi, \varphi, \vartheta, \ldots)$, $(\psi', \varphi', \vartheta', \ldots)$ in die andere ausdrückt. Wir erhalten also das folgende Resultat: —

323. **Charakteristische Function.** — Die Bestimmung der Bewegung eines beliebigen conservativen Systems aus einer Configuration in eine andere hängt, wenn die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie gegeben ist, von der Ermittelung einer einzigen Function der jene Configurationen bestimmenden Coordinaten ab. Diese Function wird durch zwei partielle Differentialgleichungen bestimmt, welche beziehungsweise für jede der beiden Coordinatenreihen quadratisch und von der ersten Ordnung sind, und deren entsprechende Glieder einzeln einander gleich werden, wenn die Werthe der beiden *Coordinatenreihen* übereinstimmen. Die auf diese Weise bestimmte und zur Ausdrückung der Lösung des kinetischen Problems angewandte Function ist von W. R. Hamilton, dem wir die Methode verdanken, die charakteristische Function genannt worden. Sie ist, wie wir gesehen haben, der Ausdruck für die „Wirkung" von einer der Configurationen zur anderen. Ihre Eigenthümlichkeit in Hamilton's System besteht darin, dass sie, wie oben dargelegt wurde, als eine Function der Coordinaten und einer Constanten, nämlich der ganzen Energie, ausgedrückt werden kann. Sie ist offenbar in Beziehung auf beide Configurationen symmetrisch, indem sie nur ihr Zeichen ändert, wenn deren Coordinaten vertauscht werden.

Charakteristische Gleichung der Bewegung. — Da nicht nur die vollständige Lösung des Bewegungsproblems eine Lösung A der partiellen Differentialgleichung (19) oder (21) liefert, sondern, wie wir eben [§ 322, (33), u. s. w.] gesehen haben, auch jede Lösung dieser Gleichung einem wirklichen Problem in Betreff der Bewegung entspricht, so wird es ein nicht gut zu übergehender Gegenstand der mathematischen Analysis, zu untersuchen, welchen Charakter von Vollständigkeit eine Lösung oder ein Integral der Differentialgleichung haben muss, damit sich aus ihm ein vollständiges Integral der dynamischen Gleichungen herleiten lasse. Diese Frage scheint zuerst Jacobi aufgestossen zu sein. Ein „vollständiges Integral" der Differentialgleichung nennt man einen Ausdruck

(34) $$A = A_0 + F(\psi, \varphi, \vartheta, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$$

für A, welcher der Differentialgleichung genügt und ebenso viele, sagen wir i, unabhängige willkürliche Constanten $A_0, \alpha, \beta, \ldots$ enthält, als unabhängige Veränderliche ψ, φ, u. s. w. vorhanden sind. Ein solcher Ausdruck führt, wie Jacobi fand, zu einem vollständigen Endintegral der Bewegungsgleichungen, das folgendermaassen ausgedrückt ist: —

(35) $$\frac{dF}{d\alpha} = \mathfrak{A}, \ \frac{dF}{d\beta} = \mathfrak{B}, \ldots,$$

und, wie oben,

(36) $$\frac{dF}{dE} = t + \varepsilon;$$

darin ist ε eine Constante, die von der Wahl des Augenblicks abhängt, in welchem man die Zeit zu zählen beginnt; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ sind $i - 1$ andere willkürliche Constanten, so dass im Ganzen, bei Hinzurechnung von $E, \alpha, \beta, \ldots$, sich die richtige Anzahl $2i$ willkürlicher Constanten ergiebt. Man erkennt dies, wenn man beachtet, dass (35) die Gleichungen des Laufs (oder, im Falle eines Systems freier materieller Punkte, der Wege) sind, was auf der Hand liegt. Denn diese Gleichungen liefern

$$(37) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{d}{d\psi}\dfrac{dF}{d\alpha}d\psi + \dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{dF}{d\alpha}d\varphi + \dfrac{d}{d\vartheta}\dfrac{dF}{d\alpha}d\vartheta + \cdots \\ 0 = \dfrac{d}{d\psi}\dfrac{dF}{d\beta}d\psi + \dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{dF}{d\beta}d\varphi + \dfrac{d}{d\vartheta}\dfrac{dF}{d\beta}d\vartheta + \cdots \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

was im Ganzen $i - 1$ Gleichungen sind, aus denen sich die Verhältnisse $d\psi : d\varphi : d\vartheta : \cdots$ bestimmen lassen. Hieraus und aus (21) folgt

$$(38) \qquad \frac{d\psi}{\dot{\psi}} = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{d\vartheta}{\dot{\vartheta}} = \cdots$$

[denn (37) sind dieselben Gleichungen, wie diejenigen, welche wir erhalten, wenn wir (21) und (23) der Reihe nach in Beziehung auf $\alpha, \beta, \ldots$ differentiiren; nur enthalten sie $d\psi, d\varphi, d\vartheta, \ldots$ statt $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \ldots$].

Eine völlig allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung, d. h. ein Ausdruck für A, welcher jede Function von $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ enthält, die der Gleichung (21) genügen kann, lässt sich natürlich nach dem gewöhnlichen Verfahren aus dem vollständigen Integral (34) herleiten. Man hat aus demselben mittels einer willkürlichen Gleichung

$$f(A_0, \alpha, \beta, \ldots) = 0$$

und der $i - 1$ Gleichungen

$$\frac{1}{\dfrac{df}{dA_0}} = \frac{\dfrac{dF}{d\alpha}}{\dfrac{df}{d\alpha}} = \frac{\dfrac{dF}{d\beta}}{\dfrac{df}{d\beta}} = \cdots,$$

wo f eine willkürliche Function der jetzt von $\psi, \varphi, \ldots$ abhängig gemachten, also veränderlichen i Elemente $A_0, \alpha, \beta, \ldots$ bezeichnet, $A_0, \alpha, \beta, \ldots$ zu eliminiren. Die volle Bedeutung der allgemeinen Lösung von (21) wird aber in Verbindung mit dem physikalischen Problem besser verstanden werden, wenn wir erst zur Hamilton'schen Lösung zurückgehen, und uns von dieser zur allgemeinen wenden. Wir wollen daher erstens annehmen, die Gleichungen (35) des Weges werden für jede von zwei Coordinatenreihen $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ und $\psi', \varphi', \vartheta', \ldots$ befriedigt. Sie werden $2(i - 1)$ Gleichungen liefern, durch welche, damit die angegebenen Bedingungen erfüllt seien, die $2(i - 1)$ Constanten $\alpha, \beta, \ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ als Functionen von $\psi, \varphi, \ldots, \psi', \varphi', \ldots$ ausgedrückt werden. Benutzt man die auf diese Weise gefundenen Werthe von $\alpha, \beta, \ldots$ und bestimmt A_0 so, dass A für $\psi = \psi'$, $\varphi = \varphi'$, u. s. w. verschwindet, so erhält man den Hamilton'schen Ausdruck für A, nämlich A als Function von $\psi, \varphi, \ldots, \psi', \varphi', \ldots$ und E; dieser Ausdruck ist somit einem „vollständigen Integral" der partiellen Differentialgleichung (21) äquivalent. Es seien jetzt $\psi', \varphi', \ldots$ durch eine einzelne willkürliche Gleichung

$$f(\psi', \varphi', \ldots) = 0 \tag{39}$$

verbunden, und es mögen mittels dieser Gleichung und der nachstehenden Gleichungen (40) die Werthe von $\psi', \varphi', \ldots$ durch $\psi, \varphi, \ldots$ und E ausgedrückt werden: —

$$\left\{\frac{\frac{dA}{d\psi'}}{\frac{d\mathrm{f}}{d\psi'}} = \frac{\frac{dA}{d\varphi'}}{\frac{d\mathrm{f}}{d\varphi'}} = \frac{\frac{dA}{d\vartheta'}}{\frac{d\mathrm{f}}{d\vartheta'}} = \text{u. s. w.}\right. \tag{40}$$

Wenn man die auf diese Weise für $\psi', \varphi', \vartheta'$, u. s. w. gefundenen Werthe in den **Hamilton**'schen Ausdruck für A substituirt, so erhält man einen Ausdruck für A, welcher die allgemeine Lösung von (21) ist. Denn die Gleichungen (40) drücken, wie unmittelbar ersichtlich ist, aus, dass die Werthe von A für alle der Gleichung (39) genügenden Configurationen gleich sind, d. h. wir haben

$$\frac{dA}{d\psi'} d\psi' + \frac{dA}{d\varphi'} d\varphi' + \cdots = 0,$$

wenn ψ', φ', u. s. w. den Gleichungen (39) und (40) genügen. Wenn also $\psi', \varphi', \ldots$ vermittels dieser Gleichungen aus dem **Hamilton**'schen Ausdrucke für A eliminirt werden, so wird das vollständige **Hamilton**'sche Differential

$$dA = \left(\frac{dA}{d\psi}\right) d\psi + \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) d\varphi + \cdots + \frac{dA}{d\psi'} d\psi' + \frac{dA}{d\varphi'} d\varphi' + \cdots \tag{41}$$

einfach

$$dA = \left(\frac{dA}{d\psi}\right) d\psi + \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) d\varphi + \cdots, \tag{42}$$

wo $\left(\frac{dA}{d\psi}\right)$, u. s. w. die Differentialquotienten in dem **Hamilton**'schen Ausdruck bezeichnen, zum Unterschiede von denjenigen, die durch Differentiation von (34) erhalten werden, und die wir jetzt einfach mit $\frac{dA}{d\psi}, \frac{dA}{d\varphi}$, u. s. w. bezeichnen. Da jetzt A eine Function von $\psi, \varphi, \cdots$ ist, sowohl insofern diese Grössen in dem **Hamilton**'schen Ausdruck schon vorhanden waren, als auch durch die Elimination von ψ', φ', u. s. w. noch weiter eingeführt sind, so haben wir

$$\frac{dA}{d\psi} = \left(\frac{dA}{d\psi}\right), \quad \frac{dA}{d\varphi} = \left(\frac{dA}{d\varphi}\right), \text{ u. s. w.,} \tag{43}$$

und daher genügt der neue Ausdruck der partiellen Differentialgleichung (21). Er ist auch eine völlig allgemeine Lösung; das ersehen wir daraus, dass er die Bedingung erfüllt, dass die „Wirkung" für alle einer völlig willkürlichen Gleichung (39) genügenden Configurationen dieselbe ist.

Für den Fall eines einzelnen freien materiellen Punktes hat (39) die Bedeutung, dass der Punkt (x', y', z') auf einer willkürlichen Oberfläche liegt, und (40) sagt aus, dass jede Bewegungslinie diese Oberfläche unter rechten Winkeln schneidet. Hieraus folgt: —

324. Die allgemeinste mögliche Lösung der quadratischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, von welcher Hamilton zeigte, dass sie durch seine charakteristische Function befriedigt wird (wenn eine der beiden Endconfigurationen allein variirt), drückt, wenn man sie für den Fall eines einzigen freien materiellen Punktes interpretirt, die Wirkung bis zu irgend einem Punkte (x, y, z) von einem Punkte einer gewissen willkürlich gegebenen Oberfläche aus, von welcher der materielle Punkt in der Richtung der Normalen und mit einer solchen Geschwindigkeit fortgeschleudert worden ist, dass die Summe seiner potentiellen und seiner kinetischen Energie einen gegebenen Werth hat. Mit anderen Worten, das durch die allgemeinste Lösung jener partiellen Differentialgleichung gelöste physikalische Problem ist folgendes: —

Eigenschaften der Oberflächen gleicher Wirkung. — Es mögen freie materielle Punkte, die keinen Einfluss auf einander ausüben, aus allen Punkten einer gewissen willkürlich gegebenen Oberfläche in den Richtungen der Normalen fortgeschleudert werden, jeder mit einer solchen Geschwindigkeit, dass die Summe seiner potentiellen und seiner kinetischen Energie einen gegebenen Werth hat. Man soll für den durch (x, y, z) gehenden materiellen Punkt die „Wirkung“ in seinem Lauf von jener Oberfläche bis zu diesem Punkte (x, y, z) bestimmen. Die oben ausgesprochenen Hamilton'schen Principien zeigen, dass die Oberflächen gleicher Wirkung die Wege der materiellen Punkte unter rechten Winkeln schneiden; sie liefern auch die folgenden bemerkenswerthen Eigenschaften der Bewegung: —

Wenn man von allen Punkten einer willkürlichen Oberfläche aus materielle Punkte, die keinen Einfluss auf einander ausüben, mit geeigneten Geschwindigkeiten in den Richtungen der Normalen fortschleudert, so liegen die Punkte, die sie mit gleichen Wirkungen erreichen, auf einer Oberfläche, welche die Wege unter rechten Winkeln schneidet. Die unendlich kleine Dicke des Raumes zwischen irgend zweien solchen Oberflächen, welche Wirkungen entsprechen, deren Grössen sich unendlich wenig unterscheiden, ist der Geschwindigkeit des hindurchgehenden materiellen Punktes umgekehrt proportional, insofern sie gleich der unendlich kleinen Wirkungsdifferenz, dividirt durch die ganze Bewegungsgrösse des materiellen Punktes ist.

Es seien λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normalen an die durch (x, y, z) gehende Oberfläche gleicher Wirkung. Dann haben wir

$$(1) \qquad \lambda = \frac{\frac{dA}{dx}}{\left(\frac{dA^2}{dx^2} + \frac{dA^2}{dy^2} + \frac{dA^2}{dz^2}\right)^{1/2}}, \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber $\frac{dA}{dx} = m\dot{x}$, u. s. w., und wenn q die Geschwindigkeitsresultante bezeichnet,

$$(2) \qquad mq = \left(\frac{dA^2}{dx^2} + \frac{dA^2}{dy^2} + \frac{dA^2}{dz^2}\right)^{1/2}.$$

Daraus folgt

$$\lambda = \frac{\dot{x}}{q}, \; \mu = \frac{\dot{y}}{q}, \; \nu = \frac{\dot{z}}{q},$$

und diese Ausdrücke beweisen den ersteren Satz. Bezeichnet weiter δA die unendlich kleine Zunahme der Wirkung vom Punkte (x, y, z) bis zum Punkte $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$, so ist

$$\delta A = \frac{dA}{dx}\delta x + \frac{dA}{dy}\delta y + \frac{dA}{dz}\delta z.$$

Liegt nun der zweite Punkt in einer unendlich kleinen Entfernung e von dem ersteren in der Richtung der Normalen an die Oberfläche gleicher Wirkung, d. h. ist

$$\delta x = e\lambda, \; \delta y = e\mu, \; \delta z = e\nu,$$

so geht der vorhergehende Ausdruck mit Rücksicht auf (1) über in

$$(3) \qquad \delta A = e\left(\frac{dA^2}{dx^2} + \frac{dA^2}{dy^2} + \frac{dA^2}{dz^2}\right)^{1/2},$$

und hieraus folgt wegen (2)

$$(4) \qquad e = \frac{\delta A}{mq},$$

welche Formel den zweiten Satz ausdrückt.

325. **Beispiele variirender Wirkung.** — Wir wollen hier nicht auf die Methoden eingehen, nach denen die „charakteristische Function" in kinetischen Problemen bestimmt wird. Aber die Thatsache, dass jeder beliebige Bewegungsfall vermittels einer einzigen Function auf die in § 323 dargelegte Weise dargestellt werden kann, ist an sich schon sehr bemerkenswerth und führt, geometrisch interpretirt, zu äusserst wichtigen und interessanten Eigenschaften der Bewegung, die in verschiedenen Zweigen der Physik schätzbare Anwendungen finden. Eine von den vielen Anwendungen des allgemeinen Princips, welche Hamilton machte, führte ihn zu einer

allgemeinen Theorie der optischen Instrumente, welche deren Gesammtheit in einen Ausdruck zusammenfasst *).

Einige der directesten Anwendungen auf die Bewegungen der als freie Punkte angesehenen Planeten, Cometen, u. s. w. und auf das berühmte, unter dem Namen „Problem der drei Körper" bekannte Perturbationsproblem sind von Hamilton (Phil. Trans., 1834 bis 1835) und von Jacobi, Liouville, Bour, Donkin, Cayley, Boole, u. s. w. in verschiedenen Abhandlungen eingehend ausgearbeitet worden. Auch die jetzt aufgegebene, aber immer noch interessante Emanationstheorie des Lichts liefert eine Menge guter Anwendungen. Diese Theorie setzt voraus, das Licht bestehe aus materiellen Punkten, die keine Wirkung auf einander ausüben, aber seitens der Theile der ponderabeln Körper Molekularkräften unterworfen sind, welche in wahrnehmbaren Abständen unwahrnehmbar sind und daher keine Abweichung von der gleichförmigen geradlinigen Bewegung in einem homogenen Medium verursachen, ausser wenn der Abstand von der Grenzfläche desselben unendlich klein ist. Die Gesetze der Reflexion und der einfachen Brechung ergeben sich in aller Strenge aus dieser Hypothese, die somit für die sogenannte geometrische Optik völlig ausreichend ist.

Wir hoffen, bei der Behandlung der Optik zu diesem Gegenstande zurückzukehren und ihn mit hinreichender Ausführlichkeit zu erörtern. Für jetzt begnügen wir uns damit, einen Satz anzugeben, welcher die bekannte Regel zur Messung der vergrössernden Wirkung eines Mikroskops oder eines Teleskops (Vergleichung des Durchmessers des Objectivglases mit dem Durchmeser des Büschels paralleler Strahlen, welche aus dem Ocular austreten, wenn ein leuchtender Punkt in grosser Entfernung vor das Objectivglas gesetzt ist) als einen besonderen Fall in sich schliesst.

326. **Anwendung auf die Kinetik eines einzelnen materiellen Punktes.** — Es werde eine beliebige Anzahl anziehender oder abstossender Massen, oder vollkommen glatter elastischer Gegenstände im Raume festgelegt. Ferner werden zwei Stationen O und O' gewählt, und mit einer festgesetzten Geschwindigkeit V ein Schuss von O in einer solchen Richtung abgeschossen, dass er durch O' geht. Offenbar kann es mehr als einen natürlichen Weg geben, auf welchem dies geschehen kann; wenn aber ein solcher Pfad einmal gewählt ist, so lässt sich im Allgemeinen kein anderer finden, der nicht merklich von dem gewählten abwiche, und jede unendlich kleine Abweichung in

*) On the Theory of Systems of Rays. Trans. R. I. A. 1824, 1830, 1832.

der Linie, in der man von O aus schiesst, wird bewirken, dass die Kugel nicht mehr O' trifft, sondern unendlich nahe an O' vorbeigeht. Es werde nun um O als Mittelpunkt mit unendlich kleinem Radius r ein Kreis beschrieben, in einer zu der Richtung, in der von O aus geschossen wird, senkrechten Ebene. Von allen Punkten dieses Kreises mögen Kugeln abgeschossen werden mit unendlich wenig verschiedener Geschwindigkeit, aber so, dass die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie bei jedem Schusse gleich derjenigen des von O ausgehenden Schusses ist; alle Kugeln sollen ferner der Richtung des letzteren Schusses nahezu parallel, aber gerade so gerichtet sein, dass eine jede genau durch O' geht. Jenseit O', in einer unendlich kleinen Entfernung a' von O', wird eine Scheibe gehalten, so dass ihre Ebene senkrecht zu der Richtung des Schusses ist, welcher sie von O aus erreicht. Die von dem Umfange des um O beschriebenen Kreises abgeschossenen Kugeln werden, nachdem sie durch O' hindurchgegangen sind, die Scheibe in dem Umfange einer äusserst kleinen Ellipse treffen, eine jede mit einer (natürlich ihrer Lage nach dem Gesetz der Energie entsprechenden) Geschwindigkeit, welche von der Geschwindigkeit V', mit der sie sämmtlich durch O' gehen, unendlich wenig verschieden ist. Wird nun um O' in einer Ebene, welche senkrecht auf dem durch O' gehenden Centralweg steht, ein dem früheren gleicher Kreis beschrieben, und werden von den Punkten des Umfanges dieses Kreises Kugeln abgeschossen, jede mit der erforderlichen Geschwindigkeit und in einer solchen, dem Centralweg nahezu parallelen Richtung, dass sie genau durch O geht, so werden diese Kugeln eine jenseit O in der Entfernung $a = a'\frac{V}{V'}$ gehaltene Scheibe, auf die sie senkrecht stossen, längs des Umfangs einer Ellipse treffen, welche der früheren gleich ist und eine entsprechende Lage hat, und die von den einzelnen Kugeln getroffenen Punkte werden in der folgenden Weise einander entsprechen: Es seien P und P' Punkte des ersten und des zweiten Kreises, Q und Q' die Punkte der ersten und der zweiten Scheibe, welche die von P und P' ausgehenden Kugeln treffen. Liegt dann P' in einer Ebene, welche den durch O' gehenden Centralweg und die Lage enthält, die Q annehmen würde, wenn man die Ellipse, der dieser Punkt angehört, durch eine reine Deformation (§ 183) in einen Kreis verwandelte, so sind Q und Q' auf beiden Ellipsen ähnlich gelegen.

Es sei nämlich XOY die auf dem Centralweg senkrechte Ebene durch O und $X'O'Y'$ die entsprechende Ebene durch O'. Ferner sei

A die „Wirkung" von O nach O', und φ die Wirkung von einem in der Nähe von O gelegenen Punkte P, der in Beziehung auf die ersteren Coordinatenaxen die Coordinaten x, y, z hat, bis zu einem in der Nähe von O' liegenden Punkte P', dessen Coordinaten in Beziehung auf das zweite Axensystem x', y', z' sind.

Die Function $\varphi - A$ verschwindet natürlich, wenn $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ ist. Für dieselben Coordinatenwerthe müssen auch ihre Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ und $\frac{d\varphi}{dx'}$, $\frac{d\varphi}{dy'}$ verschwinden und $\frac{d\varphi}{dz}$, $-\frac{d\varphi}{dz'}$ beziehungsweise gleich V und V' sein. Denn für alle Werthe der Coordinaten sind $\frac{d\varphi}{dx}$ und $\frac{d\varphi}{dy}$ die den beiden Richtungen OX und OY parallelen Geschwindigkeitscomponenten des durch P' gehenden materiellen Punktes, zur Zeit, wo derselbe aus P austritt, und $-\frac{d\varphi}{dx'}$, $-\frac{d\varphi}{dy'}$ sind die OX', OY' parallelen Componenten der Geschwindigkeit, welche durch P' in einer solchen Richtung erfolgt, dass P erreicht wird. Wir erhalten daher mittels des Taylor'schen (oder Maclaurin'schen) Satzes

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi - A = - V'z' + Vz \\ + \frac{1}{2}\{(X,X)x^2 + (Y,Y)y^2 + \cdots + (X',X')x'^2 + \cdots \\ + 2(Y,Z)yz + \cdots + 2(Y',Z')y'z' + \cdots \\ + 2(X,X')xx' + 2(Y,Y')yy' + 2(Z,Z')zz' \\ + 2(X,Y')xy' + 2(X,Z')xz' + \cdots + 2(Z,Y')zy'\} + R, \end{cases}$$

worin (X,X), (X,Y), u. s. w. Constanten bezeichnen, nämlich die Werthe der Differentialquotienten $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, u. s. w., wenn jede der sechs Coordinaten x, y, z, x', y', z' verschwindet; R bezeichnet den Rest der Reihe, von den Gliedern zweiten Grades an. Nach Cauchy's Principien über die Convergenz der Taylor'schen Reihe erhalten wir einen streng richtigen Ausdruck von derselben Form für $\varphi - A$, welcher keinen Rest R enthält, wenn wir die Coefficienten (X,X), u. s. w. die Werthe bezeichnen lassen, welche die Differentialquotienten annehmen, wenn für die Elemente x, y, u. s. w. gewisse veränderliche Werthe substituirt werden, die zwischen 0 und den wirklichen Werthen von x, y, u. s. w. liegen. Vorausgesetzt also, dass die Differentialquotienten für unendlich kleine Werthe der Coordinaten nahezu dieselben sind, wie für verschwindende Werthe der Coordinaten, so wird R unendlich kleiner als die vorhergehenden Glieder, wenn jede der Grössen x, y, u. s. w. unendlich klein ist. Wir können folglich, wenn jede der Veränderlichen x, y, z, x', y', z' unendlich klein ist, in dem Ausdruck (1) von $\varphi - A$ den Rest R unterdrücken. Nun wollen wir, wie in dem zu erweisenden Satze, voraussetzen, z sowohl wie z' seien in aller Strenge gleich Null. Dann erhalten wir

$$\frac{d\varphi}{dx} = (X,X)x + (X,Y)y + (X,X')x' + (X,Y')y',$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = (Y,Y)y + (Y,X)x + (Y,X')x' + (Y,Y')y'$$

Wenn wir in diesen Ausdrücken $x = 0$ und $y = 0$ machen, so werden sie die OX und OY parallelen Geschwindigkeitscomponenten eines durch O gehenden, aus P' geworfenen materiellen Punktes. Bezeichnen also ξ, η, ζ die Coordinaten dieses Punktes, eine unendlich kleine Zeit, $\frac{a}{V}$, nachdem er durch O gegangen, so haben wir $\zeta = a$ und

$$2)\quad \xi = \{(X,X')\,x' + (X,Y')\,y'\}\,\frac{a}{V},\ \eta = \{(Y,X')\,x' + (Y,Y')\,y'\}\,\frac{a}{V}\cdot$$

Hier sind ξ und η die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes Q', in welchem die Scheibe im zweiten Falle getroffen wird, und nach der Voraussetzung ist

$$3)\qquad x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen x', y', so erhält man offenbar die Gleichung einer Ellipse, und die beiden ersteren Gleichungen drücken die Beziehung der „entsprechenden" Punkte aus. Entsprechende Gleichungen mit x und y statt x' und y', mit ξ', η' statt ξ, η, und mit $-(X,X')$, $-(Y,X')$, $-(X,Y')$, $-(Y,Y')$ statt (X,X'), (X,Y'), (Y,X'), (Y,Y') drücken den ersteren Fall aus. Daraus ergiebt sich unser Satz, wie man am leichtesten sieht, wenn man OX und $O'X'$ so wählt, dass jede der Grössen (X,Y') und (Y,X') Null ist.

327. **Anwendung auf die elementare Optik.** — Die einleuchtendste optische Anwendung dieses bemerkenswerthen Resultates ist folgende: Wenn beim Gebrauch irgend eines optischen Apparats das Auge und das Object ihre Plätze vertauschen, während die Lage des Instruments dieselbe bleibt, so bleibt auch die vergrössernde Wirkung unverändert. Man versteht dies leicht in den Fällen, in welchen das Instrument in Beziehung auf eine Axe symmetrisch ist, wie beim gewöhnlichen Teleskop, beim Mikroskop, beim Operngläs (Galiläi'schen Teleskop). In auffallendem Gegensatz dazu scheint die allbekannte Thatsache zu stehen, dass ein Teleskop „verkleinert", wenn man das verkehrte Ende vor das Auge hält. Diese Thatsache ist allerdings richtig, wenn das Teleskop einfach um die Mitte seiner Länge herumgedreht wird, während Auge und Object ihre Plätze beibehalten. Wird aber das Teleskop vom Auge fortgerückt, bis das Ocularglas dem Objecte nahe gekommen ist, so wird man den sichtbaren Theil des Objects ebenso stark vergrössert erblicken, wie wenn das Teleskop in der gewöhnlichen Weise gehalten würde. Man kann dies leicht dadurch bewahrheiten, dass man aus einer Entfernung von einigen Ellen durch das Objectiv eines Operngläses auf das Auge einer zweiten Person blickt, welche das Instrument in der gewöhnlichen Weise an ihr Auge hält.

Die allgemeinere Anwendung kann in folgender Weise erläutert werden: — Es seien die Punkte O, O' (die Mittelpunkte der in § 326 beschriebenen beiden Kreise) die optischen Mittelpunkte der Augen zweier Personen, welche durch irgend eine zwischen ihnen angebrachte Reihe von Linsen, Prismen oder durchsichtigen Mitteln einander ansehen. Wenn ihre Pupillen in Wirklichkeit gleiche Grössen haben, so werden sie von den beiden Beobachtern als ähnliche Ellipsen von gleichen scheinbaren Dimensionen gesehen werden. Hier nehmen die nach der Emanationstheorie vorausgesetzten Lichttheilchen, die von dem Umfange der Pupille eines Auges fortgeschleudert werden, die Stelle der von dem Umfange eines Kreises fortgeschleuderten materiellen Punkte ein, und die Retina des zweiten Auges ist für die diese Punkte aufnehmende Scheibe gesetzt, die wir in dem allgemeinen kinetischen Ausspruch des Satzes benutzt haben.

328. Anwendung auf ein System freier, in Wechselwirkung stehender materieller Punkte. — Wenn wir statt eines freien materiellen Punktes ein conservatives System einer beliebigen Anzahl freier, in Wechselwirkung stehender materieller Punkte haben, so lässt sich derselbe Ausspruch in Beziehung auf die anfängliche Lage eines der Punkte und auf die Endlage eines anderen Punktes, oder in Beziehung auf die anfänglichen oder auf die Endlagen zweier Punkte anwenden. Er dient dazu, zu zeigen, wie der Einfluss, den eine unendlich kleine Aenderung in einer dieser Lagen auf die Richtung des durch die andere Lage hindurchgehenden materiellen Punktes ausübt, sich verhält zu dem durch eine unendlich kleine Aenderung in der letzteren Lage hervorgebrachten Einfluss auf die Richtung des ersteren materiellen Punktes, wenn dieser durch die erstere Lage hindurchgeht. Es lässt sich natürlich ein entsprechender Satz in Ausdrücken allgemeiner Coordinaten geben, der für ein System starrer Körper oder materieller Punkte passt, die auf irgend eine Weise verbunden sind. Alle solche Aussprüche sind in dem folgenden ganz allgemeinen Satze enthalten: —

Die Zunahme irgend einer einer beliebigen Coordinate entsprechenden Bewegungsgrössencomponente, genommen für die Einheit der Zunahme einer beliebigen anderen Coordinate, ist gleich der Zunahme der Bewegungsgrössencomponente, welche der letzteren Coordinate entspricht, genommen für die Einheit der Zunahme der ersteren Coordinate, wenn die beiden gewählten Coordinaten einer Configuration des Systems angehören, oder aber genommen für die Einheit der Abnahme der ersteren Coordinate, wenn eine der gewählten Coordinaten der anfänglichen, die andere der Endconfiguration des Systems angehört.

Es seien ψ und χ zwei von den Coordinaten, welche das Argument der Hamilton'schen charakteristischen Function A ausmachen, und ξ, η die entsprechenden Bewegungsgrössen. Dann haben wir [§ 322, (18)]

$$\frac{dA}{d\psi} = \pm \xi, \ \frac{dA}{d\chi} = \pm \eta,$$

wo die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem eine anfängliche, oder eine Endcoordinate in Rede steht. Daraus folgt

$$\frac{d^2 A}{d\psi\, d\chi} = \pm \frac{d\xi}{d\chi} = \pm \frac{d\eta}{d\psi};$$

es ist also

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{d\eta}{d\psi},$$

wenn beide Coordinaten einer Configuration angehören, oder

$$\frac{d\xi}{d\chi} = -\frac{d\eta}{d\psi},$$

wenn eine Coordinate der anfänglichen, die andere der Endconfiguration angehört, was der zweite Satz ist. Die geometrische Interpretation dieses Satzes für den Fall eines freien materiellen Punktes und zweier Coordinaten, welche beide einer Lage, z. B. seiner Endlage angehören, liefert bloss den oben (§ 324) mitgetheilten Satz für den Fall, dass materielle Punkte von einem Punkte aus mit gleichen Geschwindigkeiten nach allen Richtungen hin fortgeschleudert werden; mit anderen Worten, sie liefert jenen Satz für den Fall, dass die in demselben benutzte willkürliche Oberfläche sich auf einen Punkt reducirt. Zur Vervollständigung der Reihe der aus § 322 hergeleiteten Variationsgleichungen haben wir noch

$$\frac{dt}{d\chi} = \pm \frac{d\eta}{dE},$$

was eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft der conservativen Bewegung ausdrückt.

329. Lagrange's allgemeine Form der Bewegungsgleichungen. — Wir haben schon (§ 293) Lagrange's allgemeine Form der Bewegungsgleichungen erwähnt und dieselben in der von Hamilton gegebenen Form [§ 322 (33)] bewiesen. Wir wollen die allgemeine Form jetzt direct mittheilen und auf einige Beispiele anwenden.

Wie oben (§ 293) haben wir allgemein als die unbestimmte Bewegungsgleichung

(1) $$\Sigma[(X - m\ddot{x})\,\delta x + \cdots] = 0.$$

Sehen wir jetzt $x_1, y_1, z_1, \ldots$ als explicit durch die allgemeinen Coordinaten $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ ausgedrückt an, so folgt

(2) $$\delta x = \frac{dx}{d\psi}\delta\psi + \frac{dx}{d\varphi}\delta\varphi + \cdots$$

Die Gleichung (1) geht mit Rücksicht hierauf über in

$$\Sigma\left[(X - m\ddot{x})\left(\frac{dx}{d\psi}\delta\psi + \frac{dx}{d\varphi}\delta\varphi + \cdots\right)\right] = 0, \tag{3}$$

und da $\delta\psi, \delta\varphi, \ldots$ völlig unabhängig von einander sind, so ergiebt sich

$$\begin{cases} \Sigma(X - m\ddot{x})\dfrac{dx}{d\psi} = 0 \\ \Sigma(X - m\ddot{x})\dfrac{dx}{d\varphi} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4}$$

Dies sind die **bestimmten** Bewegungsgleichungen. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der unabhängigen Coordinaten $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$, und wir können aus ihnen $x, y, \ldots$ durch ihre expliciten Ausdrücke in $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ eliminiren.

Um die schöne Formel zu beweisen, welche Lagrange als das Resultat dieser Elimination gegeben hat, bemerken wir erstens, dass [§ 313 (b) (6)]

$$\begin{cases} \Sigma\left(X\dfrac{dx}{d\psi} + Y\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots\right) = \Psi \\ \Sigma\left(X\dfrac{dx}{d\varphi} + Y\dfrac{dy}{d\varphi} + \cdots\right) = \Phi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{5}$$

ist, wo $\Psi, \Phi, \ldots$ die allgemeinen Componenten des Systems der äusseren Kräfte $X, Y, \ldots$ bezeichnen, und dass folglich, wenn $\xi, \eta, \ldots$ die allgemeinen Componenten der Bewegungsgrösse bezeichnen (da die Transformation der Componenten der Bewegungsgrössen mittels derselben Formeln wie die Transformation der Kräftecomponenten ausgeführt wird)

$$\begin{cases} \xi = \Sigma m\left(\dot{x}\dfrac{dx}{d\psi} + \dot{y}\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots\right) \\ \eta = \Sigma m\left(\dot{x}\dfrac{dx}{d\varphi} + \dot{y}\dfrac{dy}{d\varphi} + \cdots\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{6}$$

sein muss, welche Formeln unmittelbar durch § 313, (a) (1) u. (c) (7) bewahrheitet werden.

Werden die Formeln (5) in (4) substituirt, so erhält man

$$\begin{cases} \Sigma m\left(\ddot{x}\dfrac{dx}{d\psi} + \ddot{y}\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots\right) = \Psi \\ \Sigma m\left(\ddot{x}\dfrac{dx}{d\varphi} + \ddot{y}\dfrac{dy}{d\varphi} + \cdots\right) = \Phi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{7}$$

eine wichtige und bedeutungsvolle Form der bestimmten Bewegungsgleichungen, die sich auf folgende Weise auf eine Form bringen lässt, welche Lagrange's Form enthält: —

Durch Differentiation von (6) ergiebt sich

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \Sigma m\left(\ddot{x}\dfrac{dx}{d\psi} + \ddot{y}\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots + \dot{x}\dfrac{d}{dt}\dfrac{dx}{d\psi} + \dot{y}\dfrac{d}{dt}\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots\right) \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \text{u. s. w.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nun ist [vergleiche (2)]

$$(9)\quad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{d\psi}\dot{\psi} + \dfrac{dx}{d\varphi}\dot{\varphi} + \cdots \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{d\psi}\dot{\psi} + \dfrac{dy}{d\varphi}\dot{\varphi} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

und auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{d\psi}\right) = \dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{dx}{d\psi}\right)\dot{\psi} + \dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{dx}{d\psi}\right)\dot{\varphi} + \cdots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{d\psi}\right) = \dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{dy}{d\psi}\right)\dot{\psi} + \dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{dy}{d\psi}\right)\dot{\varphi} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die zweiten Glieder dieser Gleichungen sind aber, da

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dx}{d\psi}\right) = \frac{d}{d\psi}\left(\frac{dx}{d\varphi}\right), \text{ u. s. w.}$$

ist, nach (9) gleich

$$\frac{d\dot{x}}{d\psi},\ \frac{d\dot{y}}{d\psi}, \text{ u. s. w.},$$

wenn $\dfrac{d}{d\psi}$ eine unter der Voraussetzung vollzogene Differentiation bezeichnet, dass $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ Constanten und $\psi, \varphi, \ldots$ die unabhängig Veränderlichen sind.

Die Formeln (8) gehen somit über in

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \Sigma m\left(\ddot{x}\dfrac{dx}{d\psi} + \ddot{y}\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots\right) + \Sigma m\left(\dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{d\psi} + \dot{y}\dfrac{d\dot{y}}{d\psi} + \cdots\right) \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \text{u. s. w.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Werden diese Werthe in (7) substituirt und wie gewöhnlich

$$(12)\quad {}^1\!/_2\, \Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = T$$

gesetzt, so folgt

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} - \dfrac{dT}{d\psi} = \Psi \\ \dfrac{d\eta}{dt} - \dfrac{dT}{d\varphi} = \Phi \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wenn man endlich in (12) $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$ durch die in (9) gegebenen Werthe ersetzt, so erhält man T in Form einer homogenen quadratischen Function von $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$, deren Coefficienten Functionen von $\psi, \varphi, \ldots$ sind. Wird diese Function unter der Voraussetzung differentiirt, dass $\psi, \varphi, \ldots$ constant und $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ veränderlich sind, so liefert der Vergleich mit (6)

$$\frac{dT}{d\dot{\psi}} = \xi, \quad \frac{dT}{d\dot{\varphi}} = \eta, \ldots \tag{14}$$

Diese Werthe setzen wir in (13) ein und erhalten

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\psi}}\right) - \dfrac{dT}{d\psi} = \Psi \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\varphi}}\right) - \dfrac{dT}{d\varphi} = \Phi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{15}$$

Dies sind Lagrange's bestimmte Bewegungsgleichungen in der Form, in welcher er selbst sie gegeben hat.

Die Form (13) mit (6), welche jetzt zum ersten Male bewiesen wird, ist in den Fällen von Nutzen, in denen es sich empfiehlt, einige der Coordinaten des Systems zu ignoriren, und in denen T die Geschwindigkeitscomponenten enthält, welche den ignorirten Coordinaten entsprechen. So würde *) bei einem sich durch eine Flüssigkeit bewegenden, mehrfach zusammenhängenden festen Körper, wenn ohne eigene Rotation der Flüssigkeitstheilchen doch solche „cyklische" **) Bewegungen in ihr bestehen, wie der feste Körper sie zulässt, die kinetische Energie, ausgedrückt in der von Lagrange vorgeschriebenen quadratischen Form, ihrer Natur nach die Geschwindigkeitscomponenten enthalten, welche den Coordinaten der Flüssigkeit selbst entsprechen. Nun ist es zweckmässig, die Coordinaten der Flüssigkeit in diesem Falle zu ignoriren und das Problem ganz in Ausdrücken der Coordinaten des festen Körpers zu lösen. Dies kann nicht unmittelbar durch Lagrange's Form (15) geschehen; es hat aber keine Schwierigkeit, wenn man sich an (13) in Verbindung mit (6) hält. Wenn andererseits (§ 331 unten) keine cyklische Bewegung der Flüssigkeit stattfindet, so ist die gesammte kinetische Energie der Flüssigkeit und des festen Körpers eine Function der Coordinaten und der Geschwindigkeitscomponenten des festen Körpers, und Lagrange's Form lässt sich ohne Weiteres in Anwendung bringen.

Wenn das System conservativ ist und V seine potentielle Energie bezeichnet, so haben wir nach § 293, (3)

$$-\delta V = \Psi \delta \psi + \cdots,$$

*) Proc. R. S. E., Febr. 1871.

**) „Cyklisch" ist nach W. Thomson's Definition die Bewegung in einer Flüssigkeit, wenn in derselben geschlossene Curven von solcher Art bestehen, dass das Integral $\int v\, ds \gtrless 0$. Darin ist unter v die in Richtung von ds genommene Componente der Geschwindigkeit der Flüssigkeit zu verstehen, und das Integral über die ganze Curve auszudehnen.

und die allgemeinen Gleichungen gehen über in

(16)
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\psi}}\right) - \dfrac{dT}{d\psi} = - \dfrac{dV}{d\psi} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Hamilton's Form. — Die Bewegungsgleichungen lassen sich auf eine ein wenig abweichende Form bringen, welche zuerst Hamilton gegeben hat, und die oft zweckmässig ist. Das geschieht auf folgende Weise: — Es seien $T, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ durch die Impulse $\xi, \eta, \ldots$ ausgedrückt, welche erfordert werden, um die Bewegung in irgend einem Augenblick von der Ruhe aus zu erzeugen [§ 313, (d)]. T ist dann eine homogene quadratische Function, und jede der Grössen $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ ist eine lineare Function dieser Elemente. Die Coefficienten von $T, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. sind Functionen von φ, ψ, u. s. w., die von den kinematischen Bedingungen des Systems, aber nicht von der besonderen Bewegung abhängen. Bezeichnet also, wie in § 322 (29), ∂ eine partielle Differentiation in Beziehung auf die als unabhängig Veränderliche angesehenen Grössen $\xi, \eta, \ldots, \psi, \varphi, \ldots$, so haben wir [§ 313, (10)]

(17)
$$\dot{\psi} = \frac{\partial T}{d\xi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial T}{d\eta}, \ldots,$$

und wenn d, wie im Vorhergehenden, die partielle Differentiation in Beziehung auf das System $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots, \psi, \varphi, \ldots$ bezeichnet, so ist [§ 313, (8)]

(18)
$$\xi = \frac{dT}{d\dot{\psi}}, \quad \eta = \frac{dT}{d\dot{\varphi}}, \ldots$$

Die beiden Ausdrücke für T sind, wie oben (§ 313)

(19)
$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\{(\psi,\psi)\dot{\psi}^2 + \cdots + 2(\psi,\varphi)\dot{\psi}\dot{\varphi} + \cdots\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{[\psi,\psi]\xi^2 + \cdots + 2[\psi,\varphi]\xi\eta + \cdots\}. \end{aligned}$$

Der zweite muss sich aus dem ersteren dadurch ergeben, dass man für die Grössen $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ ihre Werthe, in $\xi, \eta, \ldots$ ausgedrückt, substituirt. Es ergiebt sich somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{d\psi} &= \frac{dT}{d\psi} + \frac{dT}{d\dot{\psi}}\frac{\partial\dot{\psi}}{d\psi} + \frac{dT}{d\dot{\varphi}}\frac{\partial\dot{\varphi}}{d\psi} + \cdots \\ &= \frac{dT}{d\psi} + \xi\frac{\partial}{d\psi}\frac{\partial T}{d\xi} + \eta\frac{\partial}{d\psi}\frac{\partial T}{d\eta} + \cdots \\ &= \frac{dT}{d\psi} + \frac{\partial}{d\psi}\left(\xi\frac{\partial T}{d\xi} + \eta\frac{\partial T}{d\eta} + \cdots\right) = \frac{dT}{d\psi} + 2\frac{\partial T}{d\psi}. \end{aligned}$$

Hieraus schliessen wir

(20)
$$\frac{\partial T}{d\psi} = -\frac{dT}{d\psi}, \text{ und ebenso } \frac{\partial T}{d\varphi} = -\frac{dT}{d\varphi}, \text{ u. s. w.}$$

Lagrange's Gleichungen verwandeln sich also in

(21)
$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial T}{d\psi} = \Psi, \text{ u. s. w.}$$

Das sind dieselben Gleichungen, wie diejenigen, welche wir [§ 322, (33)] aus Hamilton's partieller Differentialgleichung für seine charakteristische Function und seinen mittels derselben dargestellten Ausdruck der Bewegung hergeleitet haben.

Wenn wir

$$\Psi = \frac{\partial T}{d\psi} + \Psi_{\prime}$$

setzen, so folgt $\frac{d\xi}{dt} = \Psi_{\prime}$, und dies berechtigt uns zu dem Ausspruch: —

330. Hamilton's Form der in allgemeinen Coordinaten dargestellten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen drückt Folgendes aus: — Um zu verhindern, dass irgend eine der Bewegungsgrössencomponenten sich ändere, wird eine *entsprechende* Kraftcomponente erfordert, die so gross ist, wie die Aenderung der kinetischen Energie, genommen für die Einheit der Zunahme der entsprechenden Coordinate, bei constant bleibenden Bewegungsgrössencomponenten; und von welcher Grösse auch die Kraftcomponente sein mag, ihr Ueberschuss über diesen Werth misst die Grösse der Zunahme der Bewegungsgrössencomponente.

Im Falle eines conservativen Systems nimmt derselbe Ausspruch die folgende Form an: — Die Grösse, um welche irgend eine Bewegungsgrössencomponente in der Einheit der Zeit zunimmt, ist gleich der für die Einheit der Zunahme der entsprechenden Coordinate genommenen Abnahme, welche die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie bei constanten Bewegungsgrössen erleidet. Dies ist die berühmte „kanonische Form" der Bewegungsgleichungen eines Systems, für welche Benennung sich wohl kaum ein Grund angeben lässt.

Kanonische Form der Hamilton'schen allgemeinen Bewegungsgleichungen eines conservativen Systems. — Es bezeichne U den algebraischen Ausdruck für die Summe der durch die Coordinaten $\psi, \varphi, \ldots$ ausgedrückten potentiellen und der durch diese Coordinaten und die Bewegungsgrössencomponenten $\xi, \eta, \ldots$ ausgedrückten kinetischen Energie. Dann ist

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{\partial U}{d\psi}, \text{ u. s. w.} \\[2ex] \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{\partial U}{d\xi}, \text{ u. s. w.;} \end{cases}$$

die Gleichungen der zweiten Zeile sind den Gleichungen (12) äquivalent, da die potentielle Energie ξ, η, u. s. w. nicht enthält.

In den folgenden Beispielen werden wir uns an Lagrange's Form (15) als die für solche Anwendungen passendste halten.

Beispiele über den Gebrauch von Lagrange's allgemeinen Bewegungsgleichungen. Beispiel (A). — Bewegung eines einzelnen Punktes (m), der auf Polarcoordinaten (r, ϑ, φ) bezogen ist. Aus der wohlbekannten Geometrie dieses Falles wissen wir, dass $\delta r, r\delta\vartheta$ und $r \sin\vartheta\, \delta\varphi$ die Grössen der linearen Verschiebung sind, welche den unendlich kleinen Zunahmen $\delta r, \delta\vartheta, \delta\varphi$ der Coordinaten entspricht, und dass diese Verschiebungen beziehungsweise in der Richtung von r, in der Richtung des Bogens $r\,\delta\vartheta$ (eines grössten Kreises) in der durch r und die Polaraxe gelegten Ebene und in der Richtung des Bogens $r \sin\vartheta\, \delta\varphi$ (eines kleinen Kreises, dessen Ebene zur Axe senkrecht ist) erfolgen, dass sie also zu einander senkrecht stehen. Bezeichnen daher F, G, H die Componenten der Kraft, welche der Punkt in diesen drei zu einander senkrechten Richtungen erfährt, so haben wir

$$F = R,\; Gr = \Theta,\; Hr \sin\vartheta = \Phi,$$

wo R, Θ, Φ die Grössen sind, in welche sich die allgemeinen Kraftcomponenten (§ 313) für dieses besondere Coordinatensystem verwandeln. Wir sehen zugleich, dass

$$\dot r,\; r\dot\vartheta,\; r \sin\vartheta\, \dot\varphi$$

die drei längs dieser zu einander senkrechten Richtungen vorhandenen Geschwindigkeitscomponenten sind. Es ist somit

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, \dot\varphi^2).$$

Hieraus folgt

$$\frac{dT}{d\dot r} = m\dot r,\; \frac{dT}{d\dot\vartheta} = m r^2 \dot\vartheta,\; \frac{dT}{d\dot\varphi} = m r^2 \sin^2\vartheta\, \dot\varphi,$$

$$\frac{dT}{dr} = m r(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, \dot\varphi^2),\; \frac{dT}{d\vartheta} = m r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, \dot\varphi^2,\; \frac{dT}{d\varphi} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen werden also

$$m\left\{\frac{d\dot r}{dt} - r(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, \dot\varphi^2)\right\} = F,$$

$$m\left\{\frac{d(r^2\dot\vartheta)}{dt} - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, \dot\varphi^2\right\} = Gr,$$

$$m\frac{d(r^2 \sin^2\vartheta\, \dot\varphi)}{dt} = Hr \sin\vartheta,$$

oder nach der in der Differentialrechnung üblichen Bezeichnungsart

$$m\left\{\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta^2}{dt^2} + \sin^2\vartheta \frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)\right\} = F,$$

$$m\left\{\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt}\right) - r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{d\varphi^2}{dt^2}\right\} = Gr,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{dt}\right) = Hr \sin\vartheta.$$

Wenn die Bewegung auf eine Ebene beschränkt wird, etwa auf die Ebene von r, ϑ, so haben wir $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, folglich $H = 0$, und die beiden übrig bleibenden Bewegungsgleichungen sind

$$m\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) = F,\ m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = Gr.$$

Wir hätten diese Gleichungen ohne Weiteres nach dem zweiten Bewegungsgesetz niederschreiben können, mit Rücksicht auf die kinematische Untersuchung des § 32, in welchem gezeigt wurde, dass $\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\vartheta^2}{dt^2}$ und $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ die längs des Radiusvector und senkrecht zu demselben genommenen Beschleunigungscomponenten sind, wenn die Bewegung eines Punktes in einer Ebene mittels der Polarcoordinaten r, ϑ ausgedrückt wird.

Dieselben Gleichungen, mit φ an der Stelle von ϑ, erhält man aus den drei für die Bewegung im Raume geltenden Polargleichungen, wenn man darin $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ setzt, in Folge welcher Annahme $G = 0$ und die Bewegung auf die Ebene (r, φ) beschränkt wird.

Beispiel (B). — Zwei materielle Punkte sind durch eine Schnur verbunden. Einer derselben, m, bewegt sich irgendwie auf einer glatten, horizontalen Ebene. Die Schnur, welche durch eine glatte unendlich kleine Oeffnung in dieser Ebene hindurchgeht, trägt den zweiten materiellen Punkt, m', welcher vertical herunter hängt und sich nur in dieser Verticallinie bewegen kann. (Die Schnur bleibt in jedem praktischen Versuch immer gestreckt; hier setzen wir aber natürlich voraus, dass sie auch negativer Spannung fähig sei.) Ist l die Länge der ganzen Schnur, r die Länge des Theils von m bis zur Oeffnung in der Ebene und ϑ der Winkel zwischen der Richtung von r und einer festen Richtung in der Ebene, so haben wir

$$T = \tfrac{1}{2}\{m(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2) + m'\dot r^2\},$$

$$\frac{dT}{d\dot r} = (m + m')\dot r,\ \frac{dT}{d\dot\vartheta} = m r^2\dot\vartheta,$$

$$\frac{dT}{dr} = m r\dot\vartheta^2,\ \frac{dT}{d\vartheta} = 0.$$

Da ausser gm', dem Gewicht des zweiten materiellen Punktes, keine äussere Kraft vorhanden ist, so ist auch

$$R = -gm',\ \Theta = 0.$$

Die Gleichungen der Bewegung sind daher

$$(m + m')\ddot r - m r\dot\vartheta^2 = -m'g,\quad m\frac{d(r^2\dot\vartheta)}{dt} = 0.$$

Die Bewegung von m' ist natürlich diejenige eines materiellen Punktes, der nur von einer nach einem festen Mittelpunkte hin gerichteten Kraft beeinflusst wird. Aber das Gesetz dieser Kraft, P (die Spannung der Schnur), ist bemerkenswerth. Zu seiner Bestimmung haben wir (§ 32)

$$P = m(-\ddot r + r\dot\vartheta^2).$$

Aus den Bewegungsgleichungen folgt aber

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -\frac{m'}{m+m'}(g + r\dot{\vartheta}^2), \text{ und } \dot{\vartheta} = \frac{h}{m r^2},$$

wo h eine willkürliche Integrationsconstante ist und das Moment der Bewegungsgrösse bezeichnet. Folglich ist

$$P = \frac{m\,m'}{m+m'}\left(g + \frac{h^2}{m^2} r^{-3}\right).$$

Der besondere Fall, in welchem m durch einen Stoss in eine kreisförmige Bewegung gesetzt und m' in Ruhe gelassen wird, ist insofern von Interesse, als (§ 350, unten) die Bewegung von m stabil ist, m' folglich sich in stabilem Gleichgewicht befindet.

Beispiel (C). — Ein starrer Körper wird von einer festen Axe getragen; dieser erste Körper trägt einen zweiten vermittels einer zweiten Axe; die Bewegung um jede Axe ist völlig frei.

Fall (a). — Die zweite Axe ist der ersteren parallel. Zu irgend einer Zeit t seien φ und ψ beziehungsweise die Neigungswinkel einer durch die erstere Axe gehenden festen Ebene gegen die durch beide Axen gelegte Ebene und gegen die Ebene, welche die zweite Axe und den Trägheitsmittelpunkt des zweiten Körpers enthält. Es leuchtet ein, dass diese beiden Coordinaten φ und ψ die Lage des Körpers vollständig bestimmen. Nun sei a der Abstand der zweiten Axe von der ersteren und b der Abstand des Trägheitsmittelpunktes des zweiten Körpers von der zweiten Axe. Dann ist $a\dot{\varphi}$ die Geschwindigkeit der zweiten Axe, und die Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes des zweiten Körpers ist die Resultante der beiden Geschwindigkeiten

$$a\dot{\varphi} \text{ und } b\dot{\psi},$$

deren Richtungen einen Winkel von der Grösse $\psi - \varphi$ einschliessen, so dass das Quadrat der Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes des zweiten Körpers gleich

$$a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\,\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi) + b^2\dot{\psi}^2$$

ist. Bezeichnen also m und m' die Massen, j den Gyrationsradius des ersteren Körpers in Beziehung auf die feste Axe und k den Gyrationsradius des zweiten Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende parallele Axe, so haben wir nach §§ 280, 281

$$T = \tfrac{1}{2}\{mj^2\dot{\varphi}^2 + m'[a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\,\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi) + b^2\dot{\psi}^2 + k^2\dot{\psi}^2]\}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{dT}{d\dot{\varphi}} = mj^2\dot{\varphi} + m'a^2\dot{\varphi} + m'ab\cos(\psi-\varphi)\dot{\psi},$$

$$\frac{dT}{d\dot{\psi}} = m'ab\cos(\psi-\varphi)\dot{\varphi} + m'(b^2+k^2)\dot{\psi},$$

$$\frac{dT}{d\varphi} = -\frac{dT}{d\psi} = m'ab\sin(\psi-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\psi}.$$

Die allgemeinste Voraussetzung, die wir hinsichtlich der äusseren Kräfte machen können, ist mit der Annahme äquivalent, dass ein Kräftepaar

Φ auf den ersteren und ein Kräftepaar Ψ auf den zweiten Körper wirke, jedes in einer zu den Axen senkrechten Ebene. Diese Kräftepaare sind offenbar das, was aus den allgemeinen Kräftecomponenten bei diesem besonderen Coordinatensystem φ, ψ wird. Die Bewegungsgleichungen sind daher

$$(mj^2 + m'a^2)\ddot{\varphi} + m'ab\frac{d[\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi)]}{dt} - m'ab\sin(\psi-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\psi} = \Phi,$$

$$m'ab\frac{d[\dot{\varphi}\cos(\psi-\varphi)]}{dt} + m'(b^2+k^2)\ddot{\psi} + m'ab\sin(\psi-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\psi} = \Psi.$$

Wenn ausser der Schwere keine äussere Kraft vorhanden ist, und wenn wir beide Axen als horizontal annehmen, was unbeschadet der Allgemeinheit der Betrachtung geschehen kann, so ist die potentielle Energie des Systems

$$gmh(1-\cos\varphi) + gm'\{a[1-\cos(\varphi+A)] + b[1-\cos(\psi+A)]\};$$

darin bezeichnet h den Abstand des Trägheitsmittelpunktes des ersteren Körpers von der festen Axe, A den Neigungswinkel der Ebene, welche die feste Axe und den Trägheitsmittelpunkt des ersteren Körpers enthält, gegen die durch die beiden Axen gehende Ebene; ausserdem ist die feste Ebene so angenommen, dass man $\varphi = 0$ hat, wenn die erstere Ebene vertical ist. Wird der letzte Ausdruck nach φ und nach ψ differentiirt, so folgt

$$-\Phi = gmh\sin\varphi + gm'a\sin(\varphi+A),$$
$$-\Psi = gm'b\sin(\psi+A).$$

Wir werden diesen Fall später ziemlich eingehend untersuchen, wenn wir die Interferenz der Vibrationen betrachten werden, ein Gegenstand, der in der Physik von grosser Wichtigkeit ist.

Wenn keine äusseren oder innerlich arbeitenden Kräfte vorhanden sind, so haben wir $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$, oder wenn die beiden Körper gegenseitig Kräfte auf einander ausüben, aber keine Einwirkung von aussen her erleiden, so ist $\Phi + \Psi = 0$. In jedem dieser beiden Fälle erhalten wir, wenn wir die beiden Bewegungsgleichungen addiren und das Resultat integriren, als erstes Integral

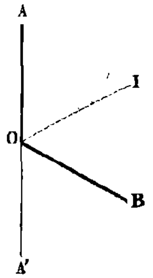
$$(mj^2 + m'a^2)\dot{\varphi} + m'ab\cos(\psi-\varphi)(\dot{\varphi}+\dot{\psi}) + m'(b^2+k^2)\dot{\psi} = C.$$

Dies drückt offenbar aus, dass das ganze Moment der Bewegungsgrösse constant ist und liefert $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$, ausgedrückt durch $(\dot{\psi}-\dot{\varphi})$ und $(\psi-\varphi)$. Werden diese Werthe von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ in die Integralgleichung der Energie eingesetzt, so ergiebt sich, vorausgesetzt dass die zwischen den Körpern wechselseitig wirkenden Kräfte zur conservativen Classe gehören, eine einzige Gleichung zwischen $\frac{d(\psi-\varphi)}{dt}$, $(\psi-\varphi)$ und Constanten, und die vollständige Lösung des Problems ist somit auf Quadraturen zurückgeführt.

Fall (b). — Die zweite Axe ist zur ersteren senkrecht. Wir empfehlen dem Leser, diesen Fall zu seiner Uebung zu bearbeiten. Da derselbe für die Theorie der centrifugalen chronometrischen Regulatoren von grosser Wichtigkeit ist, so werden wir später auf ihn zurückkommen.

Beispiel (D). — **Das gyroskopische Pendel.** Ein starrer Körper P ist an eine Axe eines Universalgelenkes (§ 109) befestigt, dessen zweite Axe festgehalten wird, und ein zweiter Körper Q wird von P vermittels einer festen Axe getragen; deren Richtung mit der des ersterwähnten Gelenkarmes zusammenfällt oder ihr parallel ist. Der Einfachheit wegen wollen wir voraussetzen, der Körper Q sei um die Axe, die ihn trägt, kinetisch symmetrisch, und OB sei eine Hauptaxe eines gedachten starren Körpers PQ, der aus P und einer Q gleichen Masse besteht, die sich im Trägheitsmittelpunkt von Q befindet und mit P verbunden ist. Es sei AO der feste Arm, O das Gelenk, OB der bewegliche Arm, welcher den Körper P trägt und mit der Axe von Q zusammenfällt oder ihr parallel ist. Ferner sei $BOA' = \vartheta$, und φ der Winkel, welchen die Ebene AOB mit einer durch OA gehenden festen Ebene bildet, welche letztere so gewählt ist, dass sie die Hauptaxe des Trägheitsmoments $\mathfrak{C}$ des gedachten starren Körpers PQ enthält, wenn OB mit AO in eine Richtung gebracht wird. Endlich sei ψ der Winkel zwischen der Ebene AOB und einer in Q angenommenen festen Ebene, welche durch die Axe geht, um welche dieser Körper symmetrisch ist. Offenbar wird durch diese drei Coordinaten $(\vartheta, \varphi, \psi)$ die Lage des Systems zu jeder Zeit t bestimmt. Die Trägheitsmomente des gedachten starren Körpers in Beziehung auf OB und auf seine beiden anderen Hauptaxen bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, und die Trägheitsmomente des Körpers Q in Beziehung auf die Axe, die ihn trägt, und auf irgend eine zweite durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende und zur ersten senkrechte Axe mit $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$.

Fig. 48.



Wir haben (§ 109) gesehen, dass bei der Gelenkart, die wir in O voraussetzen, jede mögliche Bewegung eines mit OB starr verbundenen Körpers in eine Rotation um die den Winkel AOB halbirende Linie OI und eine Rotation um die durch O gehende zur Ebene AOB senkrechte Gerade zerlegt werden kann. Die Winkelgeschwindigkeit der letzteren Bewegung ist, nach unserer jetzigen Bezeichnung, $\dot{\vartheta}$. Die erstere Bewegung würde jedem Punkte in OB dieselbe absolute Geschwindigkeit durch die Rotation um OI ertheilen, die er durch eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um AA' erfolgende Rotation erhält. Sie ist deshalb gleich

$$\frac{\sin A'OB}{\sin IOB}\,\dot{\varphi} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}\,\dot{\varphi} = 2\,\dot{\varphi}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Diese Geschwindigkeit lässt sich in $2\,\dot{\varphi}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta = \dot{\varphi}(1 - \cos\vartheta)$ um OB und $2\,\dot{\varphi}\sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\vartheta = \dot{\varphi}\sin\vartheta$ um die in der Ebene AOB liegende zu OB Senkrechte zerlegen. Wegen der symmetrischen Natur des Gelenks in Beziehung auf die Linie OI wird weiter der Winkel φ, wie er oben definirt ist, gleich dem Winkel sein, den die Ebene AOB mit derjenigen Ebene des Körpers P bildet, die für $\varphi = 0$ mit der festen Ebene zusammenfiel. Daher ist der Neigungswinkel der Axe der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}\sin\vartheta$ gegen die Hauptaxe des Moments $\mathfrak{B}$ gleich φ.

Wenn wir also diese Winkelgeschwindigkeit und auch $\dot{\vartheta}$ in Componenten um die Axen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zerlegen, so finden wir, dass die ganzen Winkelgeschwindigkeitscomponenten des gedachten starren Körpers PQ um diese Axen beziehungsweise

$$\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi \text{ und } - \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi + \dot{\vartheta} \cos\varphi$$

sind. Die ganze kinetische Energie T besteht aus derjenigen des gedachten starren Körpers PQ und derjenigen des Körpers Q um die Axen, die durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehen. Es ist somit

$$\begin{aligned} 2T = \mathfrak{A}(1 - \cos\vartheta)^2 \dot{\varphi}^2 &+ \mathfrak{B}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi)^2 \\ &+ \mathfrak{C}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi)^2 \\ + \mathfrak{A}' \{\dot{\psi} - \dot{\varphi}(1 - \cos\vartheta)\}^2 &+ \mathfrak{B}'(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2). \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dT}{d\dot{\psi}} = \mathfrak{A}' \{\dot{\psi} - \dot{\varphi}(1 - \cos\vartheta)\}, \quad \frac{dT}{d\psi} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\dot{\varphi}} &= \mathfrak{A}(1 - \cos\vartheta)^2 \dot{\varphi} + \mathfrak{B}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi) \sin\vartheta \cos\varphi \\ &+ \mathfrak{C}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi) \sin\vartheta \sin\varphi \\ &- \mathfrak{A}' \{\dot{\psi} - \dot{\varphi}(1 - \cos\vartheta)\}(1 - \cos\vartheta) + \mathfrak{B}' \dot{\varphi} \sin^2\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\varphi} &= - \mathfrak{B}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi)(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi) \\ &+ \mathfrak{C}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi)(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\dot{\vartheta}} &= \mathfrak{B}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi) \sin\varphi \\ &- \mathfrak{C}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi) \cos\varphi + \mathfrak{B}' \dot{\vartheta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\vartheta} &= \mathfrak{A}(1 - \cos\vartheta) \sin\vartheta \,.\, \dot{\varphi}^2 + \mathfrak{B} \cos\vartheta \cos\varphi \,.\, \dot{\varphi}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi) \\ &+ \mathfrak{C} \cos\vartheta \sin\varphi\, \dot{\varphi}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi) \\ &+ \mathfrak{A}' \sin\vartheta \,.\, \dot{\varphi} \{\dot{\psi} - (1 - \cos\vartheta)\dot{\varphi}\} + \mathfrak{B}' \sin\vartheta \cos\vartheta\, \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Nun möge auf den Körper Q in einer zu seiner Axe senkrechten Ebene ein Kräftepaar G wirken, und auf den Körper P in der zu OB senkrechten Ebene, in der Ebene $A'OB$ und in der durch OB gehenden zur Zeichnung senkrechten Ebene beziehungsweise die Kräftepaare L, M, N. Wenn ψ constant erhalten wird und φ variirt, so wird das Paar G in demselben Sinne wie L Arbeit leisten oder verbrauchen, so dass beider Wirkungen einfach addirt werden können. Wenn man also $L + G$ und N in Componenten um OI und senkrecht zu OI zerlegt, die letzteren weglässt und sich erinnert, dass $2 \sin \frac{1}{2}\vartheta \,.\, \dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit um OI ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \{- (L + G) \sin \tfrac{1}{2}\vartheta + N \cos \tfrac{1}{2}\vartheta\} \\ &= \{- (L + G)(1 - \cos\vartheta) + N \sin\vartheta\}. \end{aligned}$$

Ausserdem ist offenbar

$$\Psi = G, \quad \Theta = M.$$

Bei Benutzung dieser verschiedenen Ausdrücke in **Lagrange's** allgemeinen Formeln erhält man die Bewegungsgleichungen des Systems. Dieselben werden uns später von grossem Nutzen sein, wenn wir mehrere besondere Fälle von erheblichem Interesse und sehr grosser Wichtigkeit betrachten werden.

Beispiel (E). — **Bewegung eines auf rotirende Axen bezogenen materiellen Punktes.** Es seien x, y, z die Coordinaten eines in Bewegung befindlichen materiellen Punktes, der auf Axen bezogen ist, lie mit constanter oder veränderlicher Winkelgeschwindigkeit um die Axe OZ rotiren. Derselbe Punkt habe in Beziehung auf dieselbe Axe OZ und auf zwei in der zu OZ senkrechten Ebene festliegende Axen OX_1, OY_1 die Coordinaten x_1, y_1, z_1. Es ist dann

$$x_1 = x \cos\vartheta - y \sin\vartheta, \; y_1 = x \sin\vartheta + y \cos\vartheta,$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \cos\vartheta - \dot{y} \sin\vartheta - (x \sin\vartheta + y \cos\vartheta)\,\dot{\vartheta}, \; \dot{y}_1 = \text{u. s. w.},$$

wo ϑ, der Winkel $X_1 O X$, als eine gegebene Function von t betrachtet werden muss. Wir erhalten folglich

$$T = \tfrac{1}{2} m \{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2(x\dot{y} - y\dot{x})\,\dot{\vartheta} + (x^2 + y^2)\,\dot{\vartheta}^2\};$$

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = m(\dot{x} - y\dot{\vartheta}), \; \frac{dT}{d\dot{y}} = m(\dot{y} + x\dot{\vartheta}), \; \frac{dT}{d\dot{z}} = m\dot{z};$$

$$\frac{dT}{dx} = m(\dot{y}\dot{\vartheta} + x\dot{\vartheta}^2), \; \frac{dT}{dy} = m(-\dot{x}\dot{\vartheta} + y\dot{\vartheta}^2), \; \frac{dT}{dz} = 0.$$

Ferner ergiebt sich

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} = m(\ddot{x} - \dot{y}\dot{\vartheta} - y\ddot{\vartheta}), \; \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{y}} = m(\ddot{y} + \dot{x}\dot{\vartheta} + x\ddot{\vartheta}),$$

und die Bewegungsgleichungen sind somit

$$(\ddot{x} - y\ddot{\vartheta} - 2\dot{y}\dot{\vartheta} - x\dot{\vartheta}^2) = X, \; m(\ddot{y} + x\ddot{\vartheta} + 2\dot{x}\dot{\vartheta} - y\dot{\vartheta}^2) = Y, \; m\ddot{z} = Z,$$

wo X, Y, Z einfach die den beweglichen Axen in jedem Augenblick arallelen Componenten der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft bezeichnen. In diesem Beispiel geht t in die Relation ein zwischen den sten rechtwinkligen Axen und dem Coordinatensystem, auf welches die Bewegung bezogen wird; es findet aber keine Gebundenheit statt. Wir assen noch ein Beispiel folgen, in welchem eine variirende oder kinetische ebundenheit vorhanden ist.

Beispiel (F). — **Ein unter der Einwirkung irgend welcher Kräfte stehender materieller Punkt ist an das eine Ende einer chnur befestigt, deren anderes Ende sich mit beliebiger constanter oder veränderlicher Geschwindigkeit in einer geraden Linie bewegt.** Es sei ϑ die Neigung der Schnur zur Zeit t gegen die ebene gerade Linie und φ der Winkel zwischen zwei durch diese Linie henden Ebenen, von denen die eine jederzeit die Schnur enthält, während die andere fest ist. Diese beiden Coordinaten (ϑ, φ) bestimmen die e P des materiellen Punktes in jedem Augenblick, da die Länge der hnur eine gegebene Constante a und die Entfernung OE ihres zweiten

Endpunktes E von einem festen Punkte O der Geraden, in der er sich bewegt, eine gegebene Function von t ist, die wir mit u bezeichnen werden. Auf drei feste rechtwinklige Axen bezogen habe der materielle Punkt die Coordinaten x, y, z. Wir wählen OX als die gegebene gerade Linie und YOX als die feste Ebene, von welcher aus φ gemessen wird. Dann ist

$$x = u + a \cos \vartheta, \; y = a \sin \vartheta \cos \varphi, \; z = a \sin \vartheta \sin \varphi,$$
$$\dot{x} = \dot{u} - a \sin \vartheta \, . \, \dot{\vartheta},$$

und für $\dot{y}, \dot{z}$ erhalten wir dieselben Ausdrücke wie im Beispiel (A). Es ist somit

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{u}^2 - 2 \dot{u} \dot{\vartheta} a \sin \vartheta) + \mathfrak{T},$$

wo $\mathfrak{T}$ den Werth hat, welchen T im Beispiel (A) annimmt, wenn darin $\dot{r} = 0$, $r = a$ gesetzt wird. Bezeichnen also wie in jenem Beispiele G und H die beiden zu EP senkrechten und beziehungsweise in der Ebene von ϑ und senkrecht zu dieser Ebene genommenen Componenten der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft, so erhalten wir als die beiden gesuchten Bewegungsgleichungen

$$m \{ a (\ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \, \dot{\varphi}^2) - \sin \vartheta \, \ddot{u} \} = G,$$
$$m a \frac{d (\sin^2 \vartheta \, \dot{\varphi})}{dt} = H.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung dieselbe ist, die sie sein würde, wenn E fest wäre und eine $- m \ddot{u}$ gleiche Kraft in einer zu EX parallelen Richtung in dem materiellen Punkte angebracht würde. Wir hätten dies Resultat ohne Weiteres dadurch erlangen können, dass wir dem ganzen System eine der Beschleunigung von E gleiche und entgegengesetzte Beschleunigung hinzugefügt hätten, deren Ertheilung an P die Kraft $- m \ddot{u}$ erfordert.

331. **Kinetik einer vollkommenen Flüssigkeit.** — Mit Hülfe der Lagrange'schen allgemeinen Bewegungsgleichungen lassen sich äusserst interessante und wichtige, bisher nicht in Angriff genommene Probleme über die Bewegung der flüssigen Körper behandeln. Der Kürze wegen wollen wir eine Masse, die absolut unzusammendrückbar und absolut unfähig ist, einer Formänderung einen Widerstand zu leisten, einfach eine Flüssigkeit nennen. Wir brauchen wohl nicht erst zu sagen, dass es in der Natur keine Materie giebt, welche dieser Definition vollständig genügt. Wir werden aber später (in dem Kapitel über die Eigenschaften der Materie) sehen, wie Wasser und andere wirklich vorhandene Flüssigkeiten diesem Begriffe wenigstens annähernd entsprechen. Auch wird sich zeigen, dass wir durch Anwendung der Principien der abstracten Dynamik auf jene ideale vollkommene Flüssigkeit unserer Definition zu Resultaten gelangen, welche uns viele praktische und interessante Belehrungen über die wirklichen Bewegungen der Flüssig-

keiten gewähren. In der Hydrodynamik werden wir finden, dass die Bewegung *einer homogenen Flüssigkeit*, durch welche sich beliebige starre oder biegsame feste Körper bewegen, mag sie nun von unbegrenzter Ausdehnung sein oder sich in einem endlichen geschlossenen *Gefäss von irgend einer Form* befinden, in jedem Augenblick, falls die Flüssigkeit überhaupt jemals in Ruhe war, mit der ganz bestimmten Bewegung übereinstimmt, welche impulsiv von der Ruhe aus dadurch erzeugt werden würde, dass man jedem Theil der Umgrenzungsfläche und jedem Theil der Oberfläche jedes in der Flüssigkeit befindlichen festen Körpers momentan die Geschwindigkeit ertheilte, die er in dem in Rede stehenden Augenblicke wirklich besitzt. (Diese Bewegung erfüllt, § 312, die Bedingung, dass ihre kinetische Energie ein Minimum ist.) Danach würde z. B., wenn alle diese Oberflächen plötzlich oder allmälig zur Ruhe gebracht würden, die ganze Flüssigkeitsmasse gleichzeitig zur Ruhe kommen, gleichgiltig wie lange sie in Bewegung begriffen war. Wenn also keine der Oberflächen biegsam ist, aber ein oder mehrere starre Körper sich unter der Einwirkung irgend welcher Kräfte irgendwie durch die Flüssigkeit bewegen, so wird die kinetische Energie der ganzen Bewegung in jedem Augenblick lediglich von der endlichen Anzahl der Coordinaten und der Geschwindigkeitscomponenten abhängen, welche die Lage und die Bewegung dieser Körper bestimmen, welches auch die (nur durch eine unendlich grosse Anzahl von Coordinaten ausdrückbaren) Lagen sein mögen, die von den Flüssigkeitstheilchen erreicht sind. Ein durch eine endliche Anzahl solcher Elemente gegebener Ausdruck für die ganze kinetische Energie ist aber, wie wir gesehen haben, gerade das, was wir zur Aufstellung der Lagrange'schen Gleichungen in jedem besonderen Falle bedürfen.

Hydrodynamische Beispiele der Anwendung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen. —

Wie in allen anderen Fällen, so wird auch in der Hydrodynamik der Ausdruck für die ganze kinetische Energie eine homogene quadratische Function der Geschwindigkeitscomponenten sein, vorausgesetzt dass man ein unveränderliches Coordinatensystem zu Grunde legt. Die Coefficienten der verschiedenen Glieder dieser Function sind im Allgemeinen Functionen der Coordinaten, deren Bestimmung sich in jedem besonderen Falle unmittelbar aus der Lösung des Minimumproblems des Beispiels (3), § 317, ergiebt.

[Es ist uns vom Hon. J. W. Strutt und neuerdings vom Prof. Boltzmann in Gratz bemerkt worden, dass die vorstehende Begründung unserer hydrokinetischen Anwendung von Lagrange's allgemeinen Gleichungen nicht genau sei. Wir geben das zu und theilen deshalb den folgenden (hauptsächlich auf eine Bemerkung Boltzmann's gegründeten) Beweis des Princips der „Wirkung“ (§§ 319, 320) für eine unzusammendrückbare Flüssigkeit mit, aus welchem sich unsere Anwendung dieser Gleichungen leicht herleiten lässt.

Das System, dessen Bewegung betrachtet wird, sei eine zusammendrückbare oder unzusammendrückbare Flüssigkeitsmasse, deren Theile sich reibungslos gegen einander verschieben lassen. Zwischen diesen Theilen mögen beliebige Kräfte wirken, und ebenso möge jeder kleinste Theil eine gewissen Bedingungen unterworfene Krafteinwirkung erleiden (die wir uns als aus der Fernwirkung festgelegter äusserer Körper herrührend denken können).

Es bezeichne δ die von einer unendlich kleinen Aenderung der anfänglichen Lagen und Geschwindigkeiten der materiellen Punkte hervorgebrachte Variation. Ferner bezeichnen x, y, z die Coordinaten eines unendlich kleinen Massentheiles m der Flüssigkeit, X, Y, Z die Componenten der auf m wirkenden Kraft und Σ eine sich über alle materiellen Punkte der Flüssigkeitsmasse erstreckende Summation. Dann ist (vergl. § 319)

$$\delta \int_0^t (T + V)\, dt$$

$$= \int_0^t dt\, \Sigma \{ m(\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z}) + X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z \}.$$

Nun liefert eine partielle Integration

$$\int_0^t dt\, \dot{x}\,\delta\dot{x} = [\dot{x}\,\delta x]_0^t - \int_0^t dt\, \ddot{x}\,\delta x,$$

und weil noch [§ 293 (1)]

$$\Sigma \{ (X - m\ddot{x})\,\delta x + (Y - m\ddot{y})\,\delta y + (Z - m\ddot{z})\,\delta z \} = 0$$

ist, so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$(1) \qquad \delta \int_0^t (T + V)\, dt = [\Sigma m(\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y + \dot{z}\,\delta z)]_0^t.$$

Später, in der Hydrokinetik, werden wir Lagrange's berühmtes hydrokinetisches Theorem beweisen, dass

$$\dot{x}\, dx + \dot{y}\, dy + \dot{z}\, dz$$

ein vollständiges Differential einer Function von x, y, z ist, wenn die Bewegung von der Ruhe aus oder von irgend einem Bewegungszustande begonnen hat, für welchen

$$\dot{x}\, dx + \dot{y}\, dy + \dot{z}\, dz$$

ein vollständiges Differential ist. Wir nehmen jetzt an, dies sei der Fall, d. h. die Bewegung, mit der wir uns beschäftigen, sei rotationslos (§ 190). Die Function, deren Differential

$$\dot{x}\, dx + \dot{y}\, dy + \dot{z}\, dz.$$

ist, nennen wir nach Helmholtz das Geschwindigkeitspotential und bezeichnen es mit φ. Dann verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$(2) \qquad \delta \int_0^t (T + V)\, dt = [\Sigma m\, \delta\, \varphi]_0^t,$$

wo $\delta\varphi$ die Variation von x, y, z zu $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ bezeichnet.

Nehmen wir nun an, die Flüssigkeit sei unzusammendrückbar, und nennen ihre Dichtigkeit ϱ, so ist

$$\Sigma m\, \delta\, \varphi = \varrho\, \delta \int\int\int dx\, dy\, dz\, \varphi,$$

wo $\int\int\int dx\, dy\, dz\, ()$ eine Integration durch den von der Flüssigkeit eingenommenen Raum und δ die Variation bezeichnet, die dadurch entsteht, dass man das Integral der Function φ durch den von der Flüssigkeit eingenommenen veränderten Raum nimmt. Da nun φ zwar für jedes bewegte Theilchen variirt, aber für jede Stelle im Raum durch die Variation unverändert bleibt, so ergiebt die vorgeschriebene Integration einfach die Integration

$$\int\int\int dx\, dy\, dz\, \varphi$$

durch den von der geänderten Flüssigkeit eingenommenen neuen Raum, vermindert um dieselbe Integration durch den vor der Variation eingenommenen Raum. In Zeichen ist dies für den Fall unendlich abnehmender Variation

$$(3) \qquad \delta \int\int\int dx\, dy\, dz\, \varphi = \int\int d\sigma\, \delta q\, \varphi,$$

wenn δq das Zurückweichen der Umgrenzungsfläche in Richtung ihrer nach aussen gerichteten Normale und $\int\int d\sigma\, ()$ eine Integration über die ganze Oberfläche bezeichnet. Hieraus folgt endlich

$$(4) \qquad \delta \int_0^t (T + V)\, dt = \varrho \left[\int\int d\sigma\, \delta\, q\, \varphi\right]_0^t,$$

und dies ist die Gleichung der variirenden Wirkung (§ 321) für eine homogene unzusammendrückbare Flüssigkeit, die sich ohne Rotation bewegt. Die Gleichung (4) ist insofern wichtig, als sie zeigt, dass die Variation der Wirkung in einer incompressiblen und rotationslosen Flüssigkeit ohne cyklische Bewegung allein von der Variation der anfänglichen und der Endgestalt der die Flüssigkeit begrenzenden Oberfläche und nicht von den anfänglichen und den Endcoordinaten der Flüssigkeitstheilchen abhängt *). Wenn also die (nirgend biegsame) Umgrenzung der Flüssig-

---

*) Wir setzen hier das Geschwindigkeitspotential als einwerthig voraus. Im zweiten Bande dieses Werkes beabsichtigen wir, die „cyklische" Bewegung der Flüssigkeiten (welche, wenn sie rotationslos ist, ein vielwerthiges Geschwindigkeitspotential liefert) zu behandeln und das Hamilton'sche Princip der variirenden Wirkung in seiner Anwendung auf diese Bewegungsart eingehend zu discutiren.

keit nur variirt, insofern sich ein oder mehrere starre Körper durch dieselbe hindurch bewegen, oder insofern das die Flüssigkeit enthaltende Gefäss eine Bewegung vollführt, so können geeignete verallgemeinerte Coordinaten, welche die Lage jeder beweglichen geschlossenen starren Oberfläche ausdrücken, die zur Umgrenzung der Flüssigkeit gehört, an Stelle der verallgemeinerten Coordinaten $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ angewendet werden, wie sie in der auf die variirende Wirkung (§§ 322, 323) bezüglichen Theorie und Formeln vorkommen; in letzteren ist denn auch ein Beweis von Lagrange's verallgemeinerten Gleichungen der Beschleunigung [§ 322 (33)] enthalten. Professor Boltzmann's Beweis der Formel (4) rechtfertigt daher vollkommen unsere Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen.] *)

Beispiel (1). — Eine Kugel wird in Bewegung gesetzt in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeitsmasse, die sich auf der einen Seite einer unendlichen Ebene nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt und anfänglich in Ruhe ist. Als Anfangspunkt des festen rechtwinkligen Coordinatensystems wählen wir einen Punkt O der Grenzebene und lassen die Axe OX auf dieser Ebene senkrecht stehen. In Beziehung auf dieses System habe der Mittelpunkt der Kugel zur Zeit t die Coordinaten x, y, z. Wenn eine der Componenten $\dot{y}$ oder $\dot{z}$ der Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick umgekehrt wird, so bleibt die kinetische Energie offenbar unverändert; folglich können in dem Ausdruck für die kinetische Energie keine Glieder mit $\dot{y}\dot{z}, \dot{z}\dot{x}, \dot{x}\dot{y}$ vorkommen. Aus diesem Grunde und der Symmetrie der Umstände in Beziehung auf y und z wegen ist jener Ausdruck folgender:

$$T = \tfrac{1}{2}\{P\dot{x}^2 + Q(\dot{y}^2 + \dot{z}^2)\}.$$

Ferner sehen wir, dass P und Q einfach Functionen von x sein müssen, da die Umstände für alle Werthe von y und z ähnlich sind. Wir erhalten also durch Differentiation

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = P\dot{x},\ \frac{dT}{d\dot{y}} = Q\dot{y},\ \frac{dT}{d\dot{z}} = Q\dot{z};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) = P\ddot{x} + \frac{dP}{dx}\dot{x}^2,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{y}}\right) = Q\ddot{y} + \frac{dQ}{dx}\dot{y}\dot{x}, \text{ u. s. w.};$$

$$\frac{dT}{dx} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dP}{dx}\dot{x}^2 + \frac{dQ}{dx}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right\},\ \frac{dT}{dy} = 0, \text{ u. s. w.},$$

und die Bewegungsgleichungen sind

$$P\ddot{x} + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dP}{dx}\dot{x}^2 - \frac{dQ}{dx}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right\} = X,$$

$$Q\ddot{y} + \frac{dQ}{dx}\dot{y}\dot{x} = Y,\ Q\ddot{z} + \frac{dQ}{dx}\dot{z}\dot{x} = Z.$$

Principien, die für eine praktische Lösung der Aufgabe, P und Q zu bestimmen, ausreichend sind, werden später gegeben werden. Inzwischen sehen wir schon jetzt, dass jede dieser Functionen abnimmt, wenn x wächst. Die Bewegungsgleichungen lehren also Folgendes: —

*) Zusatz der Verfasser zur deutschen Ausgabe.

332. **Einfluss einer starren Ebene auf die Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit.** — Eine Kugel, welche durch eine Flüssigkeitsmasse von einer unendlichen Grenzebene aus in einer zu dieser Ebene senkrechten Richtung geworfen wird, und auf welche keine anderen Kräfte als die aus dem Druck der Flüssigkeit herrührenden wirken, erleidet eine allmälige Beschleunigung, und ihre Geschwindigkeit nähert sich schnell einem Grenzwerthe, der ganz nahezu erreicht ist, wenn ihr Abstand von der Ebene mehrmals so gross als ihr Durchmesser ist. Wird aber die Kugel der Ebene parallel geworfen, so erleidet sie unter der Einwirkung der Resultante des Flüssigkeitsdrucks eine Anziehung gegen die Ebene hin. Das erstere dieser Resultate wird leicht dadurch bewiesen, dass man zunächst einen Wurf gegen die Ebene hin betrachtet (in welchem Falle die Bewegung der Kugel offenbar eine Verzögerung erleiden wird) und dann das allgemeine Princip der Umkehrbarkeit (§ 272) in Rechnung zieht, welches sich in dem idealen Falle einer vollkommenen Flüssigkeit in aller Strenge anwenden lässt. Das zweite Resultat kann man ohne Hülfe von Lagrange's Analysis nicht so leicht vorhersehen; es folgt aber ohne Weiteres aus der Hamilton'schen Form seiner Gleichungen, wie wir sie oben in § 330 in allgemeinen Ausdrücken mitgetheilt haben. Völlig äquivalent ist der Fall einer in Ruhe gegebenen, sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckenden Flüssigkeit, durch welche zwei Kugeln mit gleichen Geschwindigkeiten senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte geschleudert werden: Die Kugeln werden einander anzuziehen scheinen, ein sehr bemerkenswerthes und anregendes Resultat.

Weitere hydrodynamische Beispiele. — Beispiel (2). Ein fester Rotationskörper bewegt sich so durch eine Flüssigkeit, dass seine Axe beständig in einer Ebene bleibt. Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit, welche der Körper in irgend einem Augenblick um eine beliebige zur festen Ebene senkrechte Axe hat. Ferner seien u und q die längs und senkrecht zur Symmetrieaxe des Körpers genommenen Geschwindigkeitscomponenten eines in dieser Axe beliebig gewählten Punktes C des Körpers. Dann haben wir nach dem in § 331 ausgesprochenen allgemeinen Princip (da eine Aenderung des Zeichens von u die kinetische Energie nicht ändern kann)

(a) $$T = \tfrac{1}{2}(A u^2 + B q^2 + \mu' \omega^2 + E \omega q),$$

wo A, B, μ' und E Constanten sind, welche von der Figur und Masse des Körpers und von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängen. Es bezeichne nun v die zur Axe senkrechte Geschwindigkeit eines Punktes, den wir den **Reactionsmittelpunkt** nennen wollen. Es ist dies ein Punkt in der Axe, welcher die Entfernung $\frac{E}{2B}$ von C hat, so dass (§ 87) $q = v - \frac{E}{2B}\omega$ ist. Wird jetzt $\mu' - \frac{E^2}{2B}$ mit μ bezeichnet, so geht (a) über in

$$(a') \qquad T = \tfrac{1}{2}(Au^2 + Bv^2 + \mu\omega^2).$$

In der Ebene, in welcher sich die Axe der Figur bewegt, nehmen wir zwei beliebige auf einander senkrechte feste Axen an, in Beziehung auf welche der Reactionsmittelpunkt die Coordinaten x und y hat; den Winkel, welchen die Axe der Figur mit OX in irgend einem Augenblick bildet, bezeichnen wir mit ϑ; dann ist

$$(b) \qquad \omega = \dot{\vartheta},\ u = \dot{x}\cos\vartheta + \dot{y}\sin\vartheta,\ v = -\dot{x}\sin\vartheta + \dot{y}\cos\vartheta.$$

Wird der Ausdruck von T, nachdem darin diese Werthe eingesetzt worden sind, differentiirt, so ergiebt sich, wenn man da, wo es passend ist, die Buchstaben u, v der Kürze wegen beibehält,

$$(c) \begin{cases} \dfrac{dT}{d\dot{\vartheta}} = \mu\dot{\vartheta},\ \dfrac{dT}{d\dot{x}} = Au\cos\vartheta - Bv\sin\vartheta,\ \dfrac{dT}{d\dot{y}} = Au\sin\vartheta + Bv\cos\vartheta, \\ \dfrac{dT}{d\vartheta} = (A - B)uv,\ \dfrac{dT}{dx} = 0,\ \dfrac{dT}{dy} = 0. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen sind daher

$$(d) \begin{cases} \mu\ddot{\vartheta} - (A - B)uv = L, \\ \dfrac{d(Au\cos\vartheta - Bv\sin\vartheta)}{dt} = X, \\ \dfrac{d(Au\sin\vartheta + Bv\cos\vartheta)}{dt} = Y, \end{cases}$$

wo X, Y die Kraftcomponenten sind, deren Richtungen durch C gehen und OX, OY parallel sind, während L das auf den Körper wirkende Kräftepaar ist.

Bezeichnen λ, ξ, η beziehungsweise das impulsive Kräftepaar und die durch C gehenden impulsiven Kraftcomponenten, welche erforderlich sind, um die Bewegung in irgend einem Augenblick zu erzeugen, so ist natürlich [§ 313, (c)]

$$(e) \qquad \lambda = \frac{dT}{d\dot{\vartheta}} = \mu\dot{\vartheta},\ \xi = \frac{dT}{d\dot{x}},\ \eta = \frac{dT}{d\dot{y}},$$

folglich nach (b) und (c)

$$(f) \qquad u = \frac{1}{A}(\xi\cos\vartheta + \eta\sin\vartheta),\ v = \frac{1}{B}(-\xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta),\ \dot{\vartheta} = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$(g) \begin{cases} \dot{x} = \left(\dfrac{\cos^2\vartheta}{A} + \dfrac{\sin^2\vartheta}{B}\right)\xi + \left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta\,.\,\eta, \\ \dot{y} = \left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta\,.\,\xi + \left(\dfrac{\sin^2\vartheta}{A} + \dfrac{\cos^2\vartheta}{B}\right)\eta, \end{cases}$$

und die Bewegungsgleichungen gehen über in

$$
\text{(h)} \quad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \dfrac{A-B}{2AB} \{(-\xi^2 + \eta^2) \sin 2\vartheta + 2\xi\eta \cos 2\vartheta\} = L, \\ \dfrac{d\xi}{dt} = X, \ \dfrac{d\eta}{dt} = Y. \end{cases}
$$

Der einfache Fall $X = 0$, $Y = 0$, $L = 0$ ist von besonderem Interesse. Es ist dann jede der Grössen ξ, η constant; wir können daher die Axen OX, OY so wählen, dass η verschwindet. Dann liefert uns (g) zwei erste Integrale der Bewegungsgleichungen

$$
\text{(k)} \qquad \dot{x} = \xi \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{A} + \frac{\sin^2 \vartheta}{B} \right), \ \dot{y} = - \frac{A-B}{2AB} \xi \sin 2\vartheta,
$$

und die erste der Gleichungen (h) verwandelt sich in

$$
\text{(l)} \qquad \mu \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{A-B}{2AB} \xi^2 \sin 2\vartheta = 0.
$$

Wird in dieser Gleichung für einen Augenblick

$$
2\vartheta = \varphi \text{ und } \frac{A-B}{AB} \xi^2 = g\,W
$$

geschrieben, so geht sie über in

$$
\mu \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g\,W \sin \varphi = 0,
$$

und dies ist die Bewegungsgleichung eines gemeinen Pendels, welches die Masse W und in Beziehung auf seine feste Axe das Trägheitsmoment μ hat, wenn φ der Winkel ist, um welchen es zur Zeit t von der Gleichgewichtslage abgelenkt ist. Das Endintegral dieser Gleichung drückt, wie wir in der Kinetik sehen werden, φ vermittels einer elliptischen Function durch t aus. Wird der auf diese Weise für ϑ oder $\frac{1}{2}\varphi$ gefundene Werth in (k) eingesetzt, so erhalten wir Gleichungen, welche, auf die gewöhnliche Weise integrirt, x und y durch t ausgedrückt liefern; die vollständige Lösung des vorliegenden Problems ist somit auf Quadraturen zurückgeführt. Es ist höchst interessant, die vom Reactionsmittelpunkt wirklich beschriebene Curve und die Lage, welche die Axe des Körpers in einem beliebigen Augenblick hat, zu bestimmen. Diese Bestimmung kann näherungsweise sehr leicht für den Fall sehr kleiner angularer Vibrationen geschehen, d. h. wenn entweder $A - B$ positiv und φ beständig sehr klein, oder $A - B$ negativ und φ sehr wenig von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden ist. Aber auch ohne für jetzt auf die exacten oder approximativen Endintegrale Rücksicht zu nehmen, ersehen wir aus (k) und (l) Folgendes: —

333. Wenn ein Rotationskörper in einer unendlichen Flüssigkeit um eine zur Axe seiner Figur senkrechte Axe in Bewegung gesetzt, oder wenn er einfach ohne Rotation nach irgend einer Rich-

tung hin geworfen wird, so wird seine Axe beständig in einer Ebene bleiben und jeder seiner Punkte sich nur parallel dieser Ebene bewegen. Die seltsamen Schwankungen, die er im Allgemeinen verrichten wird, lassen sich völlig durch den Vergleich mit einem gemeinen Pendel definiren. Dies zu zeigen, wollen wir zunächst der Kürze wegen einen Körper, welcher sich nach demselben Gesetze in Beziehung auf einen Quadranten zu jeder Seite seiner Gleichgewichtslage um eine Axe bewegt, wie sich das gemeine Pendel in Beziehung auf einen Halbkreis zu jeder Seite bewegt, ein Quadrantpendel nennen. (Wir werden diesen Begriff später in der Lehre von der Elektricität und vom Magnetismus durch verschiedene Beispiele näher erläutern; ein solches Quadrantpendel ist z. B. eine langgestreckte Masse weichen Eisens, welche sich um eine verticale Axe in einem „gleichförmigen Felde magnetischer Kraft“ drehen kann.)

Der in Rede stehende Körper werde nun durch einen Impuls ξ, der eine beliebige durch den Reactionsmittelpunkt gehende Richtung hat, und durch ein impulsives Kräftepaar λ in Bewegung gesetzt, das sich in der Ebene dieser Richtung und der Axe befindet. Es wird dies (wie wir später in der Theorie der statischen Kräftepaare zeigen werden) dieselbe Wirkung haben, wie ein einfacher Impuls ξ (der einem wirklichen Punkte des Körpers oder auch einem mit dem Körper durch eine unendlich leichte Verbindung verknüpften Punkte ertheilt wird) in einer gewissen Richtung, welche wir die Linie des resultirenden Impulses oder der resultirenden Bewegungsgrössen nennen wollen; diese Linie ist der ersteren parallel und hat von derselben den Abstand $\frac{\lambda}{\xi}$. Die Gesammtgrösse der erzeugten Bewegung ist natürlich (§ 295) gleich ξ. Der Körper wird sich nachher beständig den folgenden Bedingungen gemäss bewegen: — 1. Die Winkelgeschwindigkeit in Beziehung auf den Reactionsmittelpunkt folgt dem Gesetze des Quadrantpendels. 2. Der Abstand des Reactionsmittelpunktes von der Linie des resultirenden Impulses variirt einfach wie die Winkelgeschwindigkeit. 3. Die der Richtung des Impulses parallele Geschwindigkeit des Reactionsmittelpunktes wird erhalten, wenn man den Ueberschuss der ganzen constanten Energie der Bewegung über den Theil der Energie, welcher aus der Winkelgeschwindigkeit um den Reactionsmittelpunkt herrührt, durch die halbe Bewegungsgrösse dividirt. 4. Wenn A, B und μ Constanten bezeichnen, welche von der Masse des festen Körpers, von deren Vertheilung, von der Dichtigkeit der Flüssigkeit und von der Form und den Dimensionen des festen Körpers abhängen, so dass $\frac{\xi^2}{A}$, $\frac{\xi^2}{B}$, $\frac{\lambda^2}{\mu}$ die linearen Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeit sind, welche beziehungsweise ein längs der Axe ertheilter Impuls ξ, ein in einer durch den Reactionsmittelpunkt gehenden zur Axe senkrechten Richtung ertheilter Impuls ξ und ein in einer durch die Axe gehenden Ebene wirkendes impulsives Kräftepaar λ erzeugen, so ist die Länge des einfachen Gravitationspendels, dessen Bewegung mit der in Rede stehenden periodischen Bewegung Schritt halten würde, $\frac{g\mu AB}{\xi^2(A - B)}$, und wenn die angulare Bewegung vibratorisch ist, so werden die Vibrationen, je nachdem $A > B$, oder $A < B$ ist, darin bestehen, dass entweder die Axe oder eine zur Axe senkrechte Linie zu jeder Seite der Linie des Impulses vibrirt. Die angulare Bewegung wird in der That vibratorisch sein, wenn der Abstand der Linie des resultirenden Impulses von dem Reactionsmittelpunkt etwas kleiner als $\sqrt{\frac{(A \backsim B)\mu}{AB}} \cos\alpha$ ist, wo α, je nachdem $A > B$ oder $A < B$ ist, entweder die Neigung des Impulses gegen die anfängliche Lage der Axe, oder das Complement dieses Winkels bezeichnet. In diesem Falle wird die Bahn des Reactionsmittelpunktes eine zu beiden Seiten der Linie des Impulses symmetrische Sinuscurve sein; so oft sie diese Linie schneidet, kehrt die angulare Bewegung um, und ist die grösste Neigung erreicht, und so oft der Reactionsmittelpunkt sich nach einer Seite hin in seinem grössten Abstande befindet, hat die Winkelgeschwindigkeit ihren grössten, positiven oder negativen, Werth und die lineare Geschwindigkeit des Reactionsmittelpunktes ihren kleinsten Werth. Wenn andererseits der Abstand der Linie des resultirenden Impulses von dem Reactionsmittelpunkt grösser als $\sqrt{\frac{(A \backsim B)\mu}{AB}} \cos\alpha$ ist, so wird die angulare Bewegung beständig in einer Richtung erfolgen, aber periodisch zunehmen und abnehmen, und der Reactionsmittelpunkt wird auf einer Seite jener Linie eine Sinuscurve beschreiben; seine Abweichung wird am grössten und kleinsten sein, wenn die Winkelgeschwindigkeit am grössten und kleinsten ist. In denselben Punkten ist die Krümmung der Bahn beziehungsweise am grössten und kleinsten und die lineare Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes am kleinsten und grössten.

334. Die längs der Axe des festen Körpers und senkrecht zu derselben genommenen linearen Geschwindigkeitscomponenten sind

in irgend einem Augenblick beziehungsweise $\frac{\xi \cos\vartheta}{A}$ und $\frac{\xi \sin\vartheta}{B}$, wenn ϑ die Neigung dieser Axe gegen die Linie des resultirenden Impulses ist, und die Winkelgeschwindigkeit ist $\frac{\xi y}{\mu}$, wenn y der Abstand des Reactionsmittelpunktes von der letztgenannten Linie ist. Die gesammte kinetische Energie der Bewegung ist daher

$$\frac{\xi^2 \cos^2\vartheta}{2A} + \frac{\xi^2 \sin^2\vartheta}{2B} + \frac{\xi^2 y^2}{2\mu},$$

und das letzte Glied dieses Ausdrucks ist der schon erwähnte Theil der Energie, welcher aus der Rotation um den Reactionsmittelpunkt herrührt. Um die ganze Bewegung in irgend einem Augenblick zum Stillstand zu bringen, bedarf es nur eines ξ gleichen und entgegengesetzten einfachen Impulses in der festen Linie des resultirenden Impulses (oder natürlich, nach dem schon angegebenen Princip, eines gleichen und parallelen Impulses in irgend einer durch den Körper gehenden Linie und zugleich des passenden impulsiven Kräftepaares.)

335. Wenn man Lagrange's Gleichungen, wie oben, auf den Fall eines sich durch eine Flüssigkeit bewegenden festen Rotationskörpers anwendet, so ergiebt sich für das Kräftepaar, welches beständig auf ihn einwirken muss, damit er sich nicht drehe, unmittelbar

$$u v (A - B),$$

wenn u und v die längs der Axe und senkrecht zu derselben genommenen Geschwindigkeitscomponenten sind, oder [§ 332 (f)]

$$\xi^2 \frac{(A - B) \sin 2\vartheta}{2AB},$$

wenn wieder ξ den erzeugenden Impuls und ϑ den zwischen der Richtung desselben und der Axe enthaltenen Winkel bezeichnet. Die Richtung dieses Kräftepaares muss eine solche sein, dass ϑ verhindert wird, abzunehmen oder zuzunehmen, je nachdem $A > B$ oder $A < B$ ist. Das erstere wird offenbar bei einer platten Scheibe oder einem abgeplatteten Sphäroid, das letztere bei einem gestreckten oder eiförmigen Körper der Fall sein. In der Hydrodynamik werden wir die wirklichen Werthe von A und B für mehrere Fälle berechnen lernen; darunter befinden sich der Fall eines von zwei

Kugeloberflächen begrenzten Körpers, die einander unter einem Winkel schneiden, der ein beliebiges Submultiplum von zwei rechten Winkeln ist, der Fall zweier starr verbundenen vollständigen Kugeln und der Fall eines abgeplatteten oder eines gestreckten Sphäroids.

336. Das Bestreben eines Körpers, seine flache Seite oder seine Länge (wie der Fall sein mag) quer gegen die Richtung seiner Bewegung durch eine Flüssigkeit zu drehen, aus welchem Bestreben die Beschleunigungen und Verzögerungen der in § 333 beschriebenen rotirenden Bewegung herrühren, und für welches wir jetzt das statische Maass erhalten haben, ist eine bemerkenswerthe Erläuterung des Ausspruchs des § 330 und steht in engem Zusammenhange mit der dynamischen Erklärung vieler in der praktischen Mechanik wohlbekannten Erscheinungen, von denen wir die folgenden anführen: Das Schleppseil eines Canalbootes nimmt, wenn es an der Seite des Bootes befestigt ist, und wenn das Steuerruder gerade gelassen wird, eine Lage in einer verticalen Ebene an, welche die Axe vor ihrem Mittelpunkte schneidet. Wenn ein Boot von einem Manne mit zwei Rudern schnell quer gegen den Wind fortgerudert wird, so muss immer (ausser wenn es hinsichtlich der Tiefe, die seine verschiedenen Theile im Wasser haben, und hinsichtlich der Grösse der nach seinen beiden Enden zu dem Winde ausgesetzten Oberflächen ausserordentlich unsymmetrisch ist) am Ruder auf der Windseite stärker gearbeitet werden, damit es sich nicht gegen den Wind hin wende; aus demselben Grunde trägt ein segelndes Schiff gewöhnlich „ein Wettersteuer" *). Bei schwerem Winde ist es ausserordentlich schwer und oft unmöglich, ein Schiff aus dem hohlen Raume zwischen zwei Wellen zu bringen, und es kann dies überhaupt nur durch schnelle Vorwärtsbewegung, sei es vermittels des Dampfes oder vermittels der Segel, geschehen. Ein längliches Geschoss muss schnell um seine Axe rotiren, damit seine Spitze vorn bleibe. Unzweifelhaft gleichen die merkwürdigen Bewegungen einer schräg ins Wasser fallen gelassenen flachen Scheibe, Austerschale, oder dergl. in gewissem Grade den Bewegungen, die wir in § 333 beschrieben haben. Man darf aber nicht vergessen, dass die realen Umstände, der Reibung der Flüssigkeit wegen, von denjenigen des abstracten Problems bedeutend abweichen. Wir wollen dies Problem für jetzt verlassen.

*) d. h. der Griff des Steuerruders muss dem Winde zugekehrt werden.

337. Kleine Abweichungen vom Gleichgewicht. — Mit Hülfe der Lagrange'schen Form der Bewegungsgleichungen, § 329, können wir jetzt, als Einleitung zur Betrachtung der Stabilität der Bewegung, die Bewegung eines Systems untersuchen, welches unendlich wenig aus einer Gleichgewichtslage herausgebracht ist und sich frei bewegen kann, während die Geschwindigkeiten seiner Theile anfänglich unendlich klein sind. Die Gleichungen, die sich ergeben, liefern die Werthe der unabhängigen Coordinaten für jede spätere Zeit, vorausgesetzt dass die Verschiebungen unendlich klein bleiben. Die mathematischen Ausdrücke für ihre Werthe müssen natürlich die Natur des Gleichgewichts zeigen und geben zu gleicher Zeit ein interessantes Beispiel der Coexistenz kleiner Bewegungen, § 89. Die Methode besteht einfach darin, zu finden, was aus den Bewegungsgleichungen und den Integralen derselben für Coordinaten, die unendlich wenig von den einer Gleichgewichtsconfiguration entsprechenden Werthen verschieden sind, und für eine anfängliche unendlich kleine kinetische Energie wird. Die Lösung dieser Differentialgleichungen ist immer leicht, da sie linear sind und constante Coefficienten haben. Wenn die Lösung zeigt, dass die Aenderungen in den Werthen der Coordinaten unendlich klein bleiben, so ist die Lage die eines stabilen Gleichgewichts; zeigt sie dagegen, dass eine oder mehrere jener Aenderungen unbegrenzt wachsen können, so kann eine unendlich kleine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage eine Entfernung von derselben zur Folge haben, die von endlicher Grösse ist, und das Gleichgewicht ist somit instabil.

Da das System eine Gleichgewichtslage inne hat, so müssen die kinematischen Relationen unveränderlich sein. Wie früher ist

$$(1)\qquad T = \tfrac{1}{2}\{(\psi,\psi)\,\dot{\psi}^2 + (\varphi,\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + 2\,(\psi,\varphi)\,\dot{\psi}\,\dot{\varphi} + \text{u. s. w.}\},$$

und dieser Ausdruck kann für keine Werthe der Coordinaten negativ sein. Nun sind zwar die Werthe der Coefficienten in diesem Ausdruck im Allgemeinen nicht constant; wir haben sie aber in unserer approximativen Untersuchung als constant anzusehen, da ihre Variationen, die von den unendlich kleinen Variationen von ψ, φ, u. s. w. abhängen, nur Glieder mit unendlich kleinen Grössen der dritten Ordnung oder höherer Ordnungen enthalten können. Lagrange's Bewegungsgleichungen werden also einfach

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\psi}}\right) = \Psi,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}}\right) = \Phi,\ \text{u. s. w.},$$

und das erste Glied jeder dieser Gleichungen ist eine lineare Function von $\ddot{\psi}, \ddot{\varphi}$, u. s. w. mit constanten Coefficienten.

Da wir nun für die allgemeinen Coordinaten einen ganz beliebigen Anfangspunkt wählen können, so empfiehlt es sich, ψ, φ, ϑ, u. s. w. von der betrachteten Gleichgewichtslage aus zu messen, so dass die Werthe dieser Coordinaten beständig unendlich klein sind.

Wir erhalten also, wenn wir die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnungen vernachlässigen und voraussetzen, dass die Kräfte von den Geschwindigkeiten unabhängig sind, Ψ, Φ, u. s. w. als lineare Functionen von ψ, φ, u. s. w. ausgedrückt, die wir in folgender Weise schreiben können: —

$$3) \quad \begin{cases} \Psi = a\psi + b\varphi + c\vartheta + \cdots \\ \Phi = a'\psi + b'\varphi + c'\vartheta + \cdots \\ \text{u. s. w., u. s. w.} \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) werden folglich lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten, und ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der zu bestimmenden Veränderlichen ψ, φ, u. s. w.

Die in den elementaren Lehrbüchern der Differentialgleichungen dargelegten gewöhnlichen Methoden führen natürlich, unabhängig von jeder besonderen Relation zwischen den Coefficienten, zu einer allgemeinen Form der Lösung (§ 343). Diese Form hat aber im Falle eines conservativen Systems sehr bemerkenswerthe charakteristische Eigenschaften, und daher wollen wir diesen Fall zuerst besonders untersuchen. In demselben ist

$$\Psi = -\frac{dV}{d\psi}, \quad \Phi = -\frac{dV}{d\varphi}, \text{ u. s. w.,}$$

wo V in unserer approximativen Untersuchung eine homogene quadratische Function von ψ, φ, ... ist, wenn wir den Anfang oder die Gleichgewichtsconfiguration als die Configuration annehmen, von welcher aus (§ 273) die potentielle Energie gerechnet wird. Nun geht aus der Theorie der Transformation der quadratischen Functionen hervor*), dass wir

*) Denn erstens liefert jede Annahme, wie

$$\begin{aligned} \psi &= A\psi_{,} + B\varphi_{,} + \cdots, \\ \varphi &= A'\psi_{,} + B'\varphi_{,} + \cdots, \\ &\text{u. s. w., u. s. w.,} \end{aligned}$$

Gleichungen, welche $\dot\psi$, $\dot\varphi$, u. s. w. durch $\dot\psi_{,}$, $\dot\varphi_{,}$, u. s. w. ausdrücken, und zwar haben die Glieder in $\dot\psi_{,}$, $\dot\varphi_{,}$, u. s. w. gleichfalls die Coefficienten A, B, u. s. w., wenn diese letzteren von t unabhängig sind. Danach möge (die Anzahl der Coordinaten wird gleich i vorausgesetzt) der aus Gliedern in $\dot\psi^2$, $\dot\varphi^2$, $\dot\psi\dot\varphi$, u. s. w. bestehende quadratische Ausdruck für $2T$, dadurch dass man den Coefficienten A, B, u. s. w. geeignete Werthe beilegt, auf die Form $\dot\psi^2_{,} + \dot\varphi^2_{,} + \cdots$ reducirt werden. Dies kann auf unendlich viele Arten geschehen, ohne dass man eine Gleichung von einem höheren als dem ersten Grade zu lösen hätte, wie man leicht erkennt, wenn man einen synthetischen Process nach Analogie der Aufgabe: — Die einem beliebig gewählten Durchmesser eines Ellipsoides conjugirte Diametralebene und darauf in dem elliptischen Schnitt dieser Ebene den Durchmesser zu finden, welcher einem beliebig gewählten Durchmesser dieser Ellipse conjugirt ist — algebraisch ausarbeitet. Es sei nun durch eine ganz bestimmte lineare Coordinatentransformation den seiner Natur nach positiven Ausdruck für $2\,T$ auf eine Summe von Quadraten der allgemeinen Geschwindigkeitscomponenten und zu gleicher Zeit V auf eine Summe von Quadraten der entsprechenden Coordinaten reduciren können, wobei jedes Quadrat des letzteren Ausdrucks mit einer positiven oder negativen, aber reellen Constanten multiplicirt sein wird. Es können folglich ψ, φ, u. s. w. so gewählt werden, dass

$$\left\{\begin{array}{l} T = \tfrac{1}{2}\,(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \text{ u. s. w.}) \\ V = \tfrac{1}{2}\,(\alpha\,\psi^2 + \beta\,\varphi^2 + \text{u. s. w.}) \end{array}\right. \tag{4}$$

ist, wo α, β, u. s. w. positive oder negative reelle Constanten sind. Lagrange's Bewegungsgleichungen werden somit

$$\ddot{\psi} = -\,\alpha\,\psi, \quad \ddot{\varphi} = -\,\beta\,\varphi, \text{ u. s. w.} \tag{5}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$\psi = A\,sin\,(t\sqrt{\alpha} + \varepsilon), \quad \varphi = A'\,sin\,(t\sqrt{\beta} + \varepsilon'), \text{ u. s. w.,} \tag{6}$$

wo $A, \varepsilon, A', \varepsilon', \ldots$ die willkürlichen Integrationsconstanten sind. Wir schliessen daraus, dass die Bewegung aus einer einfachen harmonischen Variation jeder Coordinate besteht, vorausgesetzt dass jede der Grössen α, β, u. s. w. positiv ist. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn V in der Gleichgewichtsconfiguration ein wirkliches Minimum ist, was, wie wir gesehen haben (§ 292), nothwendig bei einem stabilen Gleichgewicht der Fall ist. Wenn eine oder mehrere der Grössen α, β, u. s. w. verschwinden, so kann das Gleichgewicht stabil, unstabil oder neutral sein und, um

---

$$\begin{array}{l} \psi_{,} = l\,\psi_{,,} + m\,\varphi_{,,} + \cdots, \\ \varphi_{,} = l'\,\psi_{,,} + m'\,\varphi_{,,} + \cdots, \\ \text{u. s. w., u. s. w.,} \end{array}$$

wo $l, m, \ldots, l', m', \ldots$ den Gleichungen

$$l\,l' + m\,m' + \cdots = 0, \quad l'\,l'' + m'\,m'' + \cdots = 0, \text{ u. s. w.,}$$

und

$$l^2 + m^2 + \cdots = 1, \quad l'^2 + m'^2 + \cdots = 1, \text{ u. s. w.}$$

genügen. Wir werden dann offenbar noch dieselbe Form für $2\,T$ haben, nämlich

$$2\,T = \dot{\psi}_{,,}^2 + \dot{\varphi}_{,,}^2 + \cdots,$$

und es lassen sich, wie wir aus der Theorie der Transformation der quadratischen Functionen wissen, $l, m, \ldots, l', m', \ldots$ so annehmen, dass die Producte der Coordinaten aus dem Ausdruck für V verschwinden und man

$$2\,V = \alpha\,\psi_{,,}^2 + \beta\,\varphi_{,,}^2 + \cdots$$

erhält, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die nothwendig reellen Wurzeln einer Gleichung i^{ten} Grades sind, deren Coefficienten von den Coefficienten abhängen, welche die Grössen $\psi_{,}^2, \varphi_{,}^2, \psi_{,}\,\varphi_{,,}, \ldots$ in dem Ausdruck für V haben. Später [§ 343, (7) und (8)] werden wir angeben, wie diese Untersuchung, wenn T und V als zwei beliebige homogene quadratische Functionen gegeben sind, durch einen einzigen Process ausgeführt werden kann.

seine Natur zu bestimmen, müssen Glieder höherer Ordnung in der Entwicklung von V nach aufsteigenden Potenzen und Producten der Coordinaten untersucht werden; wenn das Gleichgewicht stabil wäre, so würde die Periode einer unendlich kleinen Oscillation in dem Werthe der entsprechenden Coordinate oder der entsprechenden Coordinaten unendlich gross sein. Wenn die Grössen α, β, u. s. w. zum Theil oder sämmtlich negativ sind, so ist V kein Minimum und das Gleichgewicht (§ 292) unstabil. Die Form (6) der Lösung wird für jede Coordinate, für welche dies der Fall ist, imaginär und muss auf die Exponentialform reducirt werden. Ist z. B. $\alpha = -\alpha'$, wo α' positiv ist, so folgt

$$(7)\qquad \psi = A e^{+t\sqrt{\alpha'}} + B e^{-t\sqrt{\alpha'}},$$

welcher Ausdruck (ausser wenn die Störung des Gleichgewichts so gerichtet wird, dass die willkürliche Constante A verschwindet) eine unbegrenzte Zunahme der Abweichung von der Gleichgewichtslage anzeigt. Diese Form der Lösung drückt das Gesetz aus, nach welchem das System eine Configuration unstabilen Gleichgewichts näherungsweise verlässt. Im Allgemeinen wird die Annäherung natürlich immer ungenauer, je grösser die Abweichung wird.

Für jetzt wird ein **Beispiel** genügen. Ein in eine unendliche Flüssigkeit (§ 331) eingetauchter fester Körper werde verhindert, irgend eine rotirende Bewegung anzunehmen, und möge nur im Stande sein, sich parallel einer gewissen festen Ebene zu bewegen; er stehe unter dem Einfluss von Kräften, welche dem conservativen Gesetze unterworfen sind, und welche in einer besonderen Gleichgewichtslage verschwinden. Wir nehmen in dem Körper einen beliebigen Punkt an, wählen die Lage, die er inne hat, wenn der Körper im Gleichgewicht ist, als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten OX, OY und rechnen von ihm aus die potentielle Energie. Dann ist, wie im Allgemeinen,

$$2T = A\dot{x}^2 + B\dot{y}^2 + 2C\dot{x}\dot{y},$$
$$2V = ax^2 + by^2 + 2cxy,$$

da die oben in § 331 angegebenen Principien uns gestatten, das System als durch die Coordinaten x und y vollständig bestimmt anzusehen, unter der Voraussetzung, die wir immer machen, dass, wenn der Körper in Ruhe gegeben oder zur Ruhe gebracht wird, die ganze Flüssigkeitsmasse zu gleicher Zeit sich in Ruhe befindet. Lösen wir das offenbar ganz bestimmte Problem: — das Paar conjugirter Durchmesser zu finden, welches für die Ellipse

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = const.$$

und für die Ellipse oder Hyperbel

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = const.$$

dieselben Richtungen hat, — und wählen diese Richtungen als Axen schiefwinkliger Coordinaten (x_1, y_1), so werden wir

$$2T = A_1\dot{x}_1^2 + B_1\dot{y}_1^2 \text{ und } 2V = a_1x_1^2 + b_1y_1^2$$

erhalten. Da nun A_1 und B_1 ihrer Natur nach positiv sind, so können wir, zur Vereinfachung unserer Ausdrücke,

$$x_1 \sqrt{A_1} = \psi,\ y_1 \sqrt{B_1} = \varphi$$

setzen und erhalten

$$2\,T = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2,\ 2\,V = \alpha\,\psi^2 + \beta\,\varphi^2,$$

also Ausdrücke von der oben (4) angegebenen Form.

Die Interpretation der allgemeinen Lösung ist folgende: —

338. Wenn ein conservatives System unendlich wenig aus einer Configuration stabilen Gleichgewichts herausgebracht wird, so wird es hinterher beständig um diese Configuration vibriren und derselben unendlich nahe bleiben, indem jeder Punkt des Systems eine Bewegung vollführt, die aus einfachen harmonischen Vibrationen besteht. Wenn i Grade von Bewegungsfreiheit vorhanden sind, und wir ein beliebiges System allgemeiner Coordinaten (§ 202) betrachten, welche die Lage des Systems für jede Zeit ausdrücken, so wird die Abweichung einer jeden dieser Coordinaten von dem Werthe, den sie in der Gleichgewichtsconfiguration hat, einer zusammengesetzten harmonischen Function (§ 68) gemäss variiren, die im Allgemeinen aus i einfachen harmonischen Functionen von incommensurabelen Perioden besteht, und daher (§ 67) wird die ganze Bewegung des Systems nicht periodisch durch dieselbe Reihe von Configurationen hindurchgehen. Es giebt jedoch im Allgemeinen i verschiedene bestimmte Verschiebungen, die wir Normalverschiebungen nennen werden, und die der Bedingung genügen, dass, wenn irgend eine von ihnen allein erzeugt und das System darauf für einen Augenblick sich selbst in Ruhe überlassen wird, diese Verschiebung einer einfachen harmonischen Function der Zeit gemäss periodisch ab- und zunimmt, und dass folglich jeder Punkt des Systems eine einfache harmonische Bewegung in derselben Periode vollführt. Dieses Resultat umfasst, wie wir später sehen werden, Fälle, in denen unendlich viele Grade von Bewegungsfreiheit vorhanden sind, z. B. die Bewegungen einer gespannten Schnur, einer in einem geschlossenen Gefässe befindlichen Luftmasse; Wellen im Wasser oder Oscillationen in einem Gefäss mit Wasser, das von begrenzter Ausdehnung ist; Wellen in einem elastischen festen Körper. Auf diese Fälle angewandt liefert es die Theorie der sogenannten „Fundamentalvibration“ und der successiven „harmonischen Bewegungen“ der Saite, sowie der verschiedenen einfachen Vibrationsarten, die in den anderen Fällen möglich sind.

339. Wenn die Perioden der Vibrationen für zwei oder mehrere Normalverschiebungen gleich sind, wie es in besonderen Fällen vorkommen kann, so genügt jede aus denselben zusammengesetzte Verschiebung gleichfalls der Bedingung einer Normalverschiebung. Und wenn das System irgend einer solchen Normalverschiebung gemäss verschoben und seinen Punkten zugleich Geschwindigkeiten mitgetheilt werden, welche einer zweiten Normalverschiebung entsprechen, so wird es eine Bewegung vollführen, welche die Resultante zweier einfachen harmonischen Bewegungen von gleichen Perioden ist. Die graphische Darstellung der Variation der entsprechenden Coordinaten des Systems wird folglich (§ 65), wenn man dieselben als zwei rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene verzeichnet, ein Kreis oder eine Ellipse sein; dies wird natürlich auch die Gestalt der Bahn jedes Punktes des Systems sein, welcher für zwei der in Rede stehenden Verschiebungen eine verschiedene Bewegungsrichtung hat. Man vergesse aber nicht, dass einige der Haupttheile (wie z. B. der im Beispiel C des § 330 von der festen Axe getragene Körper) vielleicht nur einen Grad von Freiheit haben, ja dass vielleicht sogar jeder Theil des Systems nur einen Grad von Freiheit hat, wie z. B. wenn das System aus einer Reihe von materiellen Punkten besteht, deren jeder gezwungen ist, auf einer gegebenen Linie zu bleiben, oder wenn es aus starren Körpern auf festen Axen besteht, die vermittels elastischer Schnüre oder auf sonst eine Weise auf einander einwirken. In einem Falle, wie der letztere ist, kann sich kein Punkt des Systems anders als in einer Linie bewegen, und die Ellipse, der Kreis, oder die sonstige graphische Darstellung der Zusammensetzung der harmonischen Bewegungen des Systems ist dann nur ein Mittel zur Erleichterung des Verständnisses und nicht eine Darstellung einer Bewegung, die in irgend einem Theile des Systems wirklich stattfindet.

340. **Dissipative Systeme.** — In der Natur ist, wie schon oben (§ 278) gesagt wurde, jedes System, auf welches keine ausserhalb desselben befindliche Materie einwirkt, conservativ, wenn ausser den sichtbaren Bewegungen und den messbaren Kräften auch noch die Molecularbewegungen, welche als Wärme, Licht und Magnetismus erscheinen, sowie die potentielle Energie der chemischen Affinitäten in Rechnung gezogen werden. Praktisch sind wir aber in der abstracten Dynamik (§ 275) genöthigt, die Kräfte der Reibung und die Widerstände der anderen oben genannten Classen als die Ursache eines Verlustes von Energie in Rechnung zu ziehen, ohne dass wir dabei auf die Aequivalente in Form von Wärme oder anderer Molecularwirkun-

gen, die sie hervorbringen, Rücksicht nehmen. Wenn demnach solche Widerstände in Rechnung gezogen werden sollen, so müssen Kräfte, die den Bewegungen der verschiedenen Theile eines Systems entgegengesetzt gerichtet sind, in die Gleichungen eingeführt werden. Nach unserer auf experimentellem Wege erlangten approximativen Kenntniss sind diese Kräfte, wenn sie aus der Reibung fester Körper entspringen, von den Geschwindigkeiten unabhängig; sie sind einfach den Geschwindigkeiten proportional, wenn sie direct in der Zähigkeit der Flüssigkeiten, oder in elektrischen oder magnetischen Einwirkungen ihren Grund haben, wobei aber noch Correctionen anzubringen sind, die von den Aenderungen der Temperatur und von den Formänderungen des Systems abhängen. In Folge der letzterwähnten Ursache scheint der Widerstand einer realen Flüssigkeit (die immer mehr oder weniger zähe ist) gegen einen Körper, der sich sehr schnell durch sie hin bewegt und eine beträchtliche unregelmässige Bewegung, wie die „Wirbel" in seinem Kielwasser zurücklässt, nahezu dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional zu sein, obgleich, wie Stokes gezeigt hat, der Widerstand bei sehr kleinen Geschwindigkeiten wahrscheinlich einfach der Geschwindigkeit proportional ist und für jede Geschwindigkeit wenigstens näherungsweise als die Summe zweier Glieder ausgedrückt werden kann, von denen das eine der Geschwindigkeit, das andere dem Quadrate derselben proportional ist.

341. Die Wirkung der Reibung zwischen zwei einander berührenden festen Körpern besteht einfach darin, dass sie die unendlich kleinen Vibrationen, mit denen wir es jetzt besonders zu thun haben, unmöglich macht, und jedem System, in welchem sie vorhanden ist, gestattet, in Ruhe zu bleiben, wenn es innerhalb gewisser endlicher Grenzen aus einer Configuration reibungslosen Gleichgewichts herausgebracht worden ist. In der Mechanik ist es leicht, ihre Wirkungen mit hinlänglicher Genauigkeit zu schätzen, wenn irgend ein praktischer Fall endlicher Vibrationen in Frage steht. Die anderen Classen dissipativer Ursachen dagegen rufen Widerstände hervor, welche, abgesehen von den erwähnten Correctionen, einfach den Geschwindigkeiten proportional sind, wenn die Bewegungen unendlich klein sind, und können nie das System in einer Configuration in Ruhe erhalten, die, wenn auch noch so wenig, von einer Configuration reibungslosen Gleichgewichts abweicht. In der Theorie der unendlich kleinen Vibrationen sind sie dadurch in Rechnung zu bringen, dass man zu den Ausdrücken für die verallgemeinerten Kräftecomponenten Glieder addirt, deren jedes das Product

aus einer Constanten in eine der verallgemeinerten Geschwindigkeitscomponenten ist, wodurch wir Gleichungen erhalten, die immer noch in bemerkenswerther Weise einer streng mathematischen Behandlung fähig sind. Das Resultat der Integration für den Fall eines einzigen Grades von Freiheit ist sehr einfach, und sowohl für die Erklärung vieler Naturerscheinungen, als auch zum Gebrauch bei einer Menge experimenteller Untersuchungen von der grössten Bedeutung. Wir lassen einige partielle Folgerungen, die man aus ihm zieht, zunächst in Worten folgen: —

342. Wenn der Widerstand in irgend einem besonderen Falle eine gewisse Grenze nicht überschreitet, so ist die Bewegung eine einfache harmonische Oscillation, deren Amplitude in aufeinander folgenden gleichen Zeitintervallen um gleiche Bruchtheile abnimmt. Wenn aber der Widerstand über diese Grenze hinausgeht, so kehrt das System, wenn man es aus seiner Gleichgewichtslage herausbringt und darauf sich selbst überlässt, allmälig zu seiner Gleichgewichtslage zurück, ohne je durch sie hindurch nach der anderen Seite hin zu oscilliren, und erreicht dieselbe erst nach Ablauf einer unendlich grossen Zeit.

Es sei für die Einheit der Verschiebung n^2 die Grösse, welche die Beschleunigung haben würde, wenn kein Widerstand vorhanden wäre, so dass wir (§ 57) $T = \frac{2\pi}{n}$ haben; ferner sei k die Grösse der Verzögerung, welche der der Einheit der Geschwindigkeit entsprechende Widerstand herbeiführt. Dann ist die Bewegung oscillirend oder nicht, je nachdem $k < 2n$ oder $k > 2n$ ist. Im ersteren Falle wächst die Periode der Oscillation in Folge des Widerstandes von T auf $T\frac{n}{(n^2 - {}^1/_4\, k^2)^{1/2}}$, und der natürliche Logarithmus der Amplitude nimmt in der Zeiteinheit um ${}^1/_2\, k$ ab.

343. Unendlich kleine Bewegung eines dissipativen Systems. — Die allgemeine Lösung des Problems, die Bewegung eines Systems zu finden, welches eine beliebige Anzahl, i, Grade von Freiheit hat und, nachdem es unendlich wenig aus einer Gleichgewichtslage herausgebracht worden, freigelassen wird, so dass es sich nun unter dem Einfluss von Widerständen bewegt, welche den Geschwindigkeiten proportional sind, zeigt, dass die Gesammtbewegung im Allgemeinen auf bestimmte Weise in $2i$ verschiedene Bewegungen zerlegt werden kann, deren jede entweder einfach harmonisch ist und dann eine nach dem oben angegebenen Gesetze (§ 342) abnehmende Amplitude hat, oder nicht oscillirend ist und dann darin besteht, dass die Verschiebungscomponenten in successiven gleichen Zeitintervallen Verminderungen um gleiche Bruchtheile erfahren.

Für den Fall eines Grades von Freiheit ist die Differentialgleichung der Bewegung

$$\ddot{\psi} + k\dot{\psi} + n^2\psi = 0.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$\psi = \{A \sin n't + B \cos n't\}\, e^{-\frac{1}{2}kt},$$

wo $n' = \sqrt{(n^2 - \frac{1}{4}k^2)}$ ist, oder, was dasselbe ist,

$$\psi = (C e^{-n_{,}t} + C' e^{n_{,}t})\, e^{-\frac{1}{2}kt},$$

wo $n_{,} = \sqrt{(\frac{1}{4}k^2 - n^2)}$ ist; im ersteren Falle sind A und B, im zweiten C und C' die willkürlichen Integrationsconstanten. Es ergeben sich daraus die für diesen Fall in § 342 ausgesprochenen Sätze.

Die allgemeinsten Voraussetzungen, die wir hinsichtlich der unendlich kleinen Bewegungen eines Systems machen können, liefern als Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\psi}}\right) + \dfrac{d}{dt}(\mathfrak{A}\psi + \mathfrak{B}\varphi + \cdots) + a\psi + b\varphi + \cdots = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\varphi}}\right) + \dfrac{d}{dt}(\mathfrak{A}'\psi + \mathfrak{B}'\varphi + \cdots) + a'\psi + b'\varphi + \cdots = 0 \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

(Kräfte nicht conservativer Art, die von der Lage, nicht von der Bewegung abhängen, sind nicht ausgeschlossen, ausser wenn die Relationen $b = a'$, $c = a''$, u. s. w. gelten.)

Die Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten lehrt, dass die allgemeine Lösung für jede Coordinate die Summe besonderer Lösungen ist, und dass eine besondere Lösung die Form

$$(2)\qquad \psi = l\,e^{\lambda t},\quad \varphi = m\,e^{\lambda t},\ \text{u. s. w.}$$

hat. Nehmen wir an, die Ausdrücke (2) seien eine Lösung, und setzen sie in die Differentialgleichungen ein, so folgt

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda^2 \dfrac{d\mathfrak{T}}{dl} + \lambda(\mathfrak{A}l + \mathfrak{B}m + \cdots) + al + bm + \cdots = 0 \\ \lambda^2 \dfrac{d\mathfrak{T}}{dm} + \lambda(\mathfrak{A}'l + \mathfrak{B}'m + \cdots) + a'l + b'm + \cdots = 0 \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

wo $\mathfrak{T}$ dieselbe homogene quadratische Function von $l, m, \ldots$ bezeichnet, welche T von $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ ist. Diese i Gleichungen bestimmen λ durch die Determinantengleichung

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} (\lambda^2 A + \lambda \mathfrak{A} + a), & (\lambda^2 B + \lambda \mathfrak{B} + b), \ldots \\ (\lambda^2 A' + \lambda \mathfrak{A}' + a'), & (\lambda^2 B' + \lambda \mathfrak{B}' + b'), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = 0,$$

wenn A, B, C, A', B', C', u. s. w. die Coefficienten von l, m, n, u. s. w. in $\frac{d\mathfrak{T}}{dl}, \frac{d\mathfrak{T}}{dm}$, u. s. w. bezeichnen, welche natürlich den Relationen

$$(5)\qquad B = A',\ C = A'',\ C' = B'',\ \text{u. s. w.}$$

unterworfen sind. Die Gleichung (4) ist vom Grade $2i$ in λ. Wird eine ihrer Wurzeln für λ in die i linearen Gleichungen (3) eingesetzt, so werden dieselben in Einklang gebracht und liefern die $i - 1$ Verhältnisse $l : m$, $l : n$, u. s. w.; wir haben dann in (2) eine besondere Lösung mit einer willkürlichen Constanten l. Wenn demnach die $2i$ Wurzeln von (4) ungleich sind, so ergeben sich $2i$ verschiedene besondere Lösungen, jede mit einer willkürlichen Constanten, und die Addition dieser Lösungen liefert, wie schon gesagt, die allgemeine Lösung. Fälle, in welchen gleiche Wurzeln vorhanden sind, lassen eine entsprechende Anzahl Grade von Unbestimmtheit in den Verhältnissen $l : m$, $l : n, \ldots$ zurück und gestatten so, die erforderliche Anzahl der willkürlichen Constanten zu ergänzen.

Wenn die nicht aus der Bewegung herrührenden Kräfte zur conservativen Classe gehören, so haben wir

$$(6)\qquad b = a',\ c = a'',\ c' = b'',$$

wo a, b, u. s. w. so beschaffen sind, dass

$$V = \tfrac{1}{2}(a\psi^2 + 2b\psi\varphi + 2c\psi\vartheta + \cdots + b'\varphi^2 + 2c'\varphi\vartheta + \cdots)$$

ist.

Wenn die Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$, u. s. w. entweder sämmtlich positiv sind, oder wenn diejenigen derselben, die negative Werthe haben, auf solche Grössen beschränkt sind, die sie in der Natur haben könnten, so müssen die Wurzeln der Gleichung für λ, falls sie reell sind, negativ sein; falls sie aber imaginär sind, so müssen ihre reellen Theile negativ sein. Demnach kann jede besondere Lösung aus Gliedern von einer der beiden Formen

$$C e^{-pt} \sin qt,\quad C e^{-pt}$$

zusammengesetzt werden, wo p positiv ist. Wir ersehen dies daraus, dass Ausdrücke wie $C e^{pt} \sin qt$ eine Bewegung darstellen würden, welche mit beständig zunehmender Energie durch die Gleichgewichtsconfiguration hin und her gehen würde. Eine mathematische Untersuchung dieser Bedingung ist unseres Wissens noch nicht angestellt worden und verdient die Aufmerksamkeit der Mathematiker.

Wir kommen wieder zum Falle, in welchem kein Widerstand vorhanden ist, wenn wir

$$\mathfrak{A} = 0,\ \mathfrak{B} = 0, \ldots,\ \mathfrak{A}' = 0, \ldots$$

nehmen. Die Determinantengleichung wird dann

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} (\lambda^2 A + a), & (\lambda^2 B + b), \ldots \\ (\lambda^2 A' + a'), & (\lambda^2 B' + b'), \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist vom Grade i in λ^2. Ihre i Wurzeln sind für den Fall eines conservativen Systems natürlich die Werthe von α, β, u. s. w. in unserer ersten Untersuchung (§ 337), und wir schliessen aus dem, was wir dort bewiesen haben, dass sie in diesem Falle sämmtlich reell sind. Die Gleichungen (3) zur Bestimmung von $l, m, \ldots$ werden dann

$$(8)\qquad \begin{cases} (\lambda^2 A + a)\, l + (\lambda^2 B + b)\, m + \cdots = 0 \\ (\lambda^2 A' + a')\, l + (\lambda^2 B' + b')\, m + \cdots = 0 \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

und somit haben wir in (7) und (8) die oben versprochene Lösung in einem vollständig ausgedrückten Process. Die Eigenschaft der Determinantengleichung (7), dass ihre Wurzeln sämmtlich reell sind, wenn die Relationen (5) und (6) erfüllt werden, ist sehr bemerkenswerth. Sie scheint der Aufmerksamkeit der neueren Algebraisten entgangen zu sein *). Wenn diese Relationen nicht erfüllt sind [wie in der bekannten diagonalen kubischen Function § 181, (3)], so können alle Werthe von λ^2 reell sein; sie können aber auch sämmtlich oder zum Theil imaginär sein. Wenn sie nicht sämmtlich reell sind, so sei $\varrho \pm \sigma\sqrt{-1}$ ein Paar imaginärer Wurzeln. Die entsprechenden Werthe von λ, oder die Quadratwurzeln von $\varrho \pm \sigma\sqrt{-1}$ können mit $\pm(p \pm q\sqrt{-1})$ bezeichnet werden. Folglich werden in der allgemeinen Lösung Glieder von der Form

$$C e^{pt} \sin q t$$

vorkommen, d. h. es giebt unendlich kleine Verschiebungen aus einer Gleichgewichtslage, die harmonische Oscillationen nach sich ziehen würden, deren Amplituden nach dem logarithmischen Gesetz zunehmen, so lange die Verschiebung klein genug bleibt, dass wir unsere approximative Annahme festhalten können. Diese Art, eine Lage instabilen Gleichgewichts zu verlassen, ist natürlich unmöglich, ausser wenn man künstliche Anordnungen trifft, die nicht ein conservatives, sondern ein accumulatives Kraftsystem geben.

344. Künstliches oder imaginäres accumulatives System. — Wenn die Kräfte eines Systems, welche von der Configuration und nicht von der Bewegung abhängen, und welche wir der Kürze wegen die Positionskräfte nennen wollen, das Princip der

*) Ein etwas einfacherer Fall ist von Cauchy behandelt (Exercices de Mathématique, T. IV, p. 140. Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes); doch lässt sich der dort geführte Beweis, dass alle Wurzeln der Gleichung (7) reell seien, auch auf den hier vorliegenden Fall übertragen. (Anmerk. d. Herausg.)

Erhaltung der Energie verletzen, so kann aus demselben, wie wir in § 272 gesehen haben; unaufhörlich Energie gezogen werden, dadurch dass man es unaufhörlich durch eine geschlossene Reihe von Configurationen hindurchleitet. Wir haben daraus geschlossen, dass in jedem reellen System, welches nicht mit Energie von aussen versehen wird, die Positionskräfte dem Princip der Erhaltung der Energie genügen. Es ist aber leicht, ein System künstlich mit einer Quelle von Energie in Verbindung zu setzen, so dass seine Positionskräfte nicht conservativ sind, und die Betrachtung der kinetischen Wirkungen einer solchen Anordnung, besonders der Oscillationen oder der Bewegungen, die das System vollführt, wenn es unendlich wenig aus einer Gleichgewichtsconfiguration heraus gebracht wird, ist äusserst lehrreich wegen der Gegensätze zu den Erscheinungen eines natürlichen Systems. Die vorstehende Untersuchung liefert die allgemeine Lösung des Problems: — Die unendlich kleine Bewegung eines einer Gleichgewichtslage unendlich nahen Systems zu finden, wenn sowohl durch die Widerstände, als auch durch die Natur der Positionskräfte eine Abweichung vom Princip der Erhaltung der Energie stattfindet. Wenn kein Widerstand vorhanden ist, mit welchem Falle wir uns jetzt allein zu beschäftigen brauchen, wird die Frage, ob das Gleichgewicht stabil oder instabil sei, nach der Natur der Wurzeln einer algebraischen Gleichung entschieden, deren Grad gleich der Anzahl der Grade von Freiheit ist, die das System besitzt.

Wenn die Wurzeln (λ^2) der Determinantengleichung § 343, (7) sämmtlich reell und negativ sind, so ist das Gleichgewicht stabil; in jedem anderen Falle ist es instabil.

345. Obgleich es aber nicht möglich ist, einem solchen System, wenn sein Gleichgewicht stabil ist, unendlich kleine Verschiebungen und Geschwindigkeiten solcher Art zu ertheilen, dass das System, sich selbst überlassen, sich weiter und weiter bewegt, bis eine Verschiebung oder eine Geschwindigkeit von endlicher Grösse erreicht ist: so scheint es doch sehr merkwürdig, dass Stabilität hierbei möglich sein sollte, wenn man bedenkt, dass selbst im Falle der Stabilität, wie man leicht aus § 272 erkennt, eine endlose Zunahme der Geschwindigkeit dadurch allein erlangt werden kann, dass man das System zwingt, eine besondere geschlossene Bahn, oder eine besondere Reihe von Configurationen zu durchlaufen, die nirgends mehr als unendlich wenig von der Gleichgewichtsconfiguration abweichen, wobei man es anfangs ohne Geschwindigkeit irgendwo in gewissen Theilen dieses Umlaufs beginnen lässt. Dieses Resultat und die ver-

schiedenen Eigenthümlichkeiten, welche die Fälle von Stabilität und Instabilität darbieten, werden durch das einfachste mögliche Beispiel — die Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene — zur Genüge erläutert.

Der Punkt habe die Einheit der Masse, und die den rechtwinkligen Coordinatenaxen parallelen Kräftecomponenten seien, wenn der Punkt die Lage (x, y) hat, $a\,x + b\,y$ und $a'\,x + b'\,y$. Die Bewegungsgleichungen sind dann

(1) $$\ddot{x} = a\,x + b\,y, \quad \ddot{y} = a'\,x + b'\,y.$$

Wird $$\tfrac{1}{2}(a' + b) = c \text{ und } \tfrac{1}{2}(a' - b) = \varepsilon$$
angenommen, so werden die Kräftecomponenten
$$a\,x + c\,y - \varepsilon\,y \text{ und } c\,x + b'\,y + \varepsilon\,x,$$
oder
$$-\frac{dV}{dx} - \varepsilon\,y \text{ und } -\frac{dV}{dy} + \varepsilon\,x,$$
wo
$$V = -\tfrac{1}{2}(a\,x^2 + b'\,y^2 + 2\,c\,x\,y)$$
ist. Die Glieder $-\varepsilon\,y$ und $+\varepsilon\,x$ sind offenbar die Componenten einer zum Radiusvector des materiellen Punktes senkrechten Kraft $\varepsilon\,(x^2 + y^2)^{1/2}$. Drehen wir also die Coordinatenaxen durch irgend einen Winkel, so sind die entsprechenden Glieder in den transformirten Ausdrücken der Componenten immer noch $-\varepsilon\,y$ und $+\varepsilon\,x$. Wenn wir daher die Axen so wählen, dass

(2) $$V = \tfrac{1}{2}(\alpha\,x^2 + \beta\,y^2)$$

ist, so gehen die Bewegungsgleichungen, ohne dass ihre Allgemeinheit beeinträchtigt würde, über in
$$\ddot{x} = -\alpha\,x - \varepsilon\,y, \quad \ddot{y} = -\beta\,y + \varepsilon\,x.$$
Um diese Gleichungen zu integriren, nehmen wir, wie im Allgemeinen [§ 343, (2)],
$$x = l\,e^{\lambda t}, \quad y = m\,e^{\lambda t}$$
an. Dann erhalten wir, wie früher [§ 343, (8)],
$$(\lambda^2 + \alpha)\,l + \varepsilon m = 0 \text{ und } -\varepsilon l + (\lambda^2 + \beta)\,m = 0.$$
Daraus folgt

(3) $$(\lambda^2 + \alpha)(\lambda^2 + \beta) = -\varepsilon^2,$$

und diese Gleichung liefert
$$\lambda^2 = -\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \pm \{\tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 - \varepsilon^2\}^{1/2}.$$
Diese beiden Wurzeln λ^2 sind reell und negativ, d. h. das Gleichgewicht ist stabil, wenn jede der Grössen $\alpha\beta + \varepsilon^2$ und $\alpha + \beta$ positiv, und wenn $\varepsilon^2 < \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2$ ist [d. h. wenn ε zwischen den Werthen $\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)$ und $-\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)$ liegt]; in jedem anderen Falle ist das Gleichgewicht instabil.

Es werde jetzt aber der Punkt gezwungen, auf einem Kreise vom Radius r zu bleiben. Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Radiusvector des Punktes und der Axe OX mit ϑ und transformiren (§ 27) die Bewegungsgleichungen, so erhalten wir

(4) $$\ddot{\vartheta} = -(\beta - \alpha)\sin\vartheta\cos\vartheta + \varepsilon = -\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\sin 2\vartheta + \varepsilon.$$

Hätten wir $\varepsilon = 0$ (Fall eines conservativen Kraftsystems), so würden die Gleichgewichtslagen in $\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, $\vartheta = \pi$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ sein, und die Bewegung wäre die des Quadrantpendels. Wenn aber ε irgend einen endlichen Werth hat, der kleiner als $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ ist, und den wir der Kürze wegen als positiv voraussetzen, so giebt es Gleichgewichtslagen in

$$\vartheta = \theta,\ \vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta,\ \vartheta = \pi + \theta \text{ und } \vartheta = \frac{3\pi}{2} - \theta,$$

wo θ die Hälfte des spitzen Winkels ist, dessen Sinus den Werth $\frac{2\varepsilon}{\beta - \alpha}$ hat. In der ersten und dritten Lage findet stabiles, in der zweiten und vierten instabiles Gleichgewicht statt. Wir sehen somit, dass die Wirkung der constanten Tangentialkraft darin besteht, die Lagen des stabilen und des instabilen Gleichgewichts auf dem Kreise vor und zurück zu schieben, jede durch einen Winkel von der Grösse θ. Wird die Gleichung (4) mit $2\dot{\vartheta}\,dt$ multiplicirt und sodann integrirt, so erhalten wir als Integralgleichung der Energie

$$\dot{\vartheta}^2 = C + \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\cos 2\vartheta + 2\varepsilon\vartheta. \tag{5}$$

Hieraus sehen wir, dass der Werth von C, für welchen der materielle Punkt gerade die Lage des instabilen Gleichgewichts erreicht,

$$C = -\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\cos(\pi - 2\theta) - \varepsilon(\pi - 2\theta)$$
$$= \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{4} - \varepsilon^2} + \varepsilon\left(\pi - \arcsin\frac{2\varepsilon}{\beta - \alpha}\right)$$

ist. Setzen wir den Ausdruck (5) für $\dot{\vartheta}^2$, nach Substitution dieses Werthes von C, gleich Null, so erhalten wir eine transcendente Gleichung in ϑ, deren kleinste negative Wurzel $\vartheta_{\prime}$ die Grenze liefert, von einer Lage stabilen Gleichgewichts aus rückwärts gerechnet, bis zu welcher die Bewegung oscillirend bleibt. Wenn der materielle Punkt in Ruhe an irgend eine Stelle des Kreises gesetzt wird, die sich vor einer Lage stabilen Gleichgewichts befindet und weniger als $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ von derselben entfernt ist, oder die sich hinter einer solchen Lage in einem Abstande von derselben befindet, der kleiner als $\theta - \vartheta_{\prime}$ ist, so wird er vibriren. Wird er aber an irgend eine Stelle gesetzt, die sich ausserhalb dieser Grenzen befindet, und daselbst entweder in Ruhe gelassen oder mit einer beliebigen Geschwindigkeit nach einer der beiden Seiten hin gestossen, so wird er den Kreis rings herum nach vorwärts zu unaufhörlich durchlaufen; dabei nimmt seine Geschwindigkeit periodisch zu und ab; ihr Quadrat wird aber jede halbe Umdrehung um den nämlichen Betrag grösser.

Ist andererseits $\varepsilon > \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$, so sind die Lagen sowohl des stabilen, wie des instabilen Gleichgewichts imaginär, indem der Einfluss der Tangentialkraft in jeder Lage überwiegt. Wird der Punkt an irgend eine Stelle des Kreises in Ruhe hingesetzt, so wird er sich mit stetig wachsender Geschwindigkeit, aber periodisch zu- und abnehmender Beschleunigung herumbewegen.

346. Kinetische Stabilität und conservative Störung. — Es giebt kaum eine Frage in der Dynamik, die für die theoretische

Physik von grösserer Wichtigkeit ist, als die Stabilität oder Instabilität der Bewegung. Daher wollen wir, ehe wir dieses Capitel schliessen, einige allgemeine Erläuterungen und leitende Principien über diesen Gegenstand mittheilen.

Eine „conservative Bewegungsstörung" ist eine Störung in der Bewegung oder der Configuration eines conservativen Systems, welche die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie nicht ändert. Eine „conservative Störung der Bewegung durch eine besondere Configuration hindurch" ist eine Aenderung in den Geschwindigkeiten oder Geschwindigkeitscomponenten, welche die gesammte kinetische Energie ungeändert lässt. So z. B. ist eine conservative Störung der Bewegung eines materiellen Punktes durch irgend einen Punkt hindurch eine Aenderung in der Bewegungsrichtung, die von keiner Aenderung der Geschwindigkeit begleitet ist.

347. Die wirkliche Bewegung eines Systems aus irgend einer besonderen Configuration heisst stabil, wenn jede mögliche unendlich kleine conservative Störung der Bewegung durch diese Configuration aus conservativen Störungen zusammengesetzt werden kann, deren jede eine Aenderung der Bewegung herbeiführen würde, welche das System in endlicher Zeit und mit einer nur unendlich kleinen Abweichung wieder zu einer der ungestörten Bahn angehörenden Configuration brächte. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so heisst die Bewegung instabil.

348. **Beispiele.** — Es werde z. B. ein Körper A von einer festen verticalen Axe getragen, ein zweiter Körper B von einer dem ersten Körper angehörenden parallelen Axe; in derselben Weise werde ein dritter Körper C von B getragen, u. s. w. Wenn dann die Körper B, C, u. s. w. so gestellt werden, dass der Trägheitsmittelpunkt eines jeden so weit als möglich von der festen Axe entfernt ist, und das ganze System mit einer gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit um diese Axe in Bewegung gesetzt wird, so wird die Bewegung von jeder Configuration aus stabil sein, wie aus den später zu beweisenden Principien über die resultirende Centrifugalkraft bei einem starren Körper hervorgeht. Wenn z. B. jeder der Körper ein flaches, rechtwinkliges, am einen Rande eingelenktes Brett ist, so wird das ganze System offenbar durch die Centrifugalkraft stabil erhalten, wenn alle diese Bretter in einer Ebene und von der festen Axe soweit als möglich entfernt sind. Wenn aber A zum Theil aus einer Welle und einer Kurbel besteht, wie ein gewöhnliches Spinnrad oder das Schwungrad und die Kurbel einer Dampf-

maschine, und wenn B vom Kurbelstift als Axe getragen und einwärts gedreht wird (nach der festen Axe zu oder deren Verlängerung schneidend), so wird die Bewegung des Systems instabil sein, wenngleich die Körper C, D, u. s. w. so gestellt sind, dass ihre Trägheitsmittelpunkte so weit von der festen Axe abstehen, als es bei dieser Lage von B möglich ist.

349. Wenn sich ein länglicher Körper in der Richtung seiner Länge, oder eine flache Scheibe seitwärts durch eine Flüssigkeit bewegt, so ist die Bewegung instabil. Bewegt sich dagegen einer dieser beiden Körper so, dass seine Länge oder seine Flachseite zur Bewegungsrichtung senkrecht ist, so ist die Bewegung stabil. Für den idealen Fall einer vollkommenen Flüssigkeit (§ 331) ist dies in § 332, Beispiel (2) bewiesen, und die in § 333 erläuterten Resultate zeigen für einen festen Rotationskörper ganz bestimmt den Charakter der Bewegung, welche eintritt, wenn der Körper unendlich wenig in seiner Bewegungsrichtung gestört wird, so dass er sich nicht mehr genau längs oder genau senkrecht zur Axe seiner Figur bewegt; wenn die geradlinige Bewegung stabil ist, so ist diese durch die Störung verursachte Bewegung eine unendlich kleine Oscillation in einer bestimmten Zeitperiode; wenn die geradlinige Bewegung aber instabil ist, so schwingt er herum bis in eine nahezu umgekehrte Lage. Die Beobachtung bestätigt diese Behauptung für die realen Flüssigkeiten Luft und Wasser und für die mannigfachsten, die Bewegung beeinflussenden Umstände. Einige erläuternde Beispiele haben wir schon in § 336 angeführt, und werden wir später auf den Gegenstand zurückkommen, da er nicht nur von grosser praktischer Wichtigkeit ist, sondern auch in theoretischer Beziehung hohes Interesse hat und durchaus keine Schwierigkeiten darbietet.

350. Die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes liefert uns einfachere und nicht weniger lehrreiche Erläuterungen der Stabilität und Instabilität. Wenn ein Gewicht, das mit einem gewichtlosen unausdehnbaren Faden an einem festen Punkte befestigt ist, so in Bewegung gesetzt wird, dass es um eine durch seine Gleichgewichtslage gehende Verticallinie einen Kreis beschreibt, so ist seine Bewegung stabil. Denn wenn ihm eine unendlich wenig abweichende Richtung gegeben wird, ohne dass ein Gewinn oder ein Verlust an Energie eintritt, so wird es, wie wir später sehen werden, eine Sinuslinie beschreiben, welche die Bahn der ungestörten Bewegung, den Kreis, successive in Punkten schneidet, deren Abstände auf dem Kreise in ganz bestimmter Weise von dem Neigungswinkel der Schnur gegen die verticale Richtung abhängen. Wenn dieser Winkel sehr klein ist, so ist die Bewegung nicht merklich von derjenigen eines materiellen Punktes verschieden, der auf eine Ebene beschränkt ist und sich unter dem Einfluss einer nach einem festen Punkte zu anziehenden, dem Abstande einfach proportionalen Kraft bewegt, und die Bahn der gestörten Bewegung schneidet diejenige der ungestörten (den Kreis) viermal während einer Umdrehung. Oder wenn ein auf eine Ebene beschränkter materieller Punkt sich unter dem Einfluss einer ihn nach einem Punkte dieser Ebene hinziehenden Kraft bewegt, welche dem Quadrate seines Abstandes von diesem Punkte umgekehrt proportional ist, so wird die Bahn einer unendlich wenig von dem Kreise abgelenkten Bewegung den Kreis während einer Umdrehung zweimal schneiden. Wenn die Centralkraft allgemein der $n$ten Potenz des Abstandes proportional und $n + 3$ positiv ist, so schneidet die Bahn der gestörten Bewegung den Kreis in einer Reihe von Punkten, deren jeder von dem nächstfolgenden auf dem Kreise den Abstand $\frac{\pi}{\sqrt{n+3}}$ hat. Die Bewegung wird aber instabil sein, wenn n negativ und $-n > 3$ ist.

Kinetische Stabilität in einer kreisförmigen Bahn. — Das Kriterium für die Stabilität lässt sich für den Fall einer Bewegung im Kreise um einen Punkt herum, von dem aus eine Kraft wirkt, leicht herleiten, wenn wir die Differentialgleichung der allgemeinen Bahn (§ 36)

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2}$$

zu Grunde legen. h habe einen solchen Werth, dass eine Bewegung in einem Kreise vom Radius a^{-1} dieser Gleichung genügt, d. h. es sei $\frac{P}{h^2 u^2} = u$, wenn $u = a$ ist. Ist nun $u = a + \varrho$, wo ϱ unendlich klein ist, so werden wir

$$u - \frac{P}{h^2 u^2} = \alpha \varrho$$

haben, wenn α den Werth von $\frac{d}{du}\left(u - \frac{P}{h^2 u^2}\right)$ für $u = a$ bezeichnet, und folglich ist die Differentialgleichung der von der kreisförmigen unendlich wenig abweichenden Bewegung

$$\frac{d^2 \varrho}{d\vartheta^2} + \alpha \varrho = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung lässt sich am passendsten in folgender Weise schreiben: —

$$\varrho = A \sin(\vartheta \sqrt{\alpha} + \beta), \text{ wenn } \alpha \text{ positiv}$$

und

$$\varrho = C e^{\vartheta\sqrt{-\alpha}} + C' e^{-\vartheta\sqrt{-\alpha}}, \text{ wenn } \alpha \text{ negativ ist.}$$

Wir sehen daraus, dass die kreisförmige Bewegung im ersteren Falle stabil, im zweiten instabil ist.

Ist z. B. $P = \mu r^n = \mu u^{-n}$, so folgt

$$\frac{d}{du}\left(u - \frac{P}{h^2 u^2}\right) = 1 + (n+2)\frac{P}{h^2 u^3},$$

und wenn wir hierin $\frac{P}{h^2 u^2} = u = a$ setzen, so erhalten wir $\alpha = n + 3$, woraus das oben ausgesprochene Resultat hervorgeht.

Oder nehmen wir das Beispiel (B) des § 330 und setzen mP für P und mh für h, so ist

$$\frac{P}{h^2 u^2} = \frac{m'}{m+m'}\left(\frac{g}{h^2}u^{-2} + u\right),$$

$$\frac{d}{du}\left(u - \frac{P}{h^2 u^2}\right) = \frac{m + \frac{2m'g}{h^2 u^3}}{m+m'}.$$

Setzen wir hierin $u = a$ und machen $h^2 = \frac{g m'}{m a^3}$, damit eine Bewegung in einem Kreise vom Radius a^{-1} möglich sei, so finden wir

$$\alpha = \frac{3m}{m+m'}.$$

Die kreisförmige Bewegung ist daher immer stabil, und die Periode der durch eine unendlich kleine Abweichung von derselben erzeugten Variation ist $2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{3m}}$.

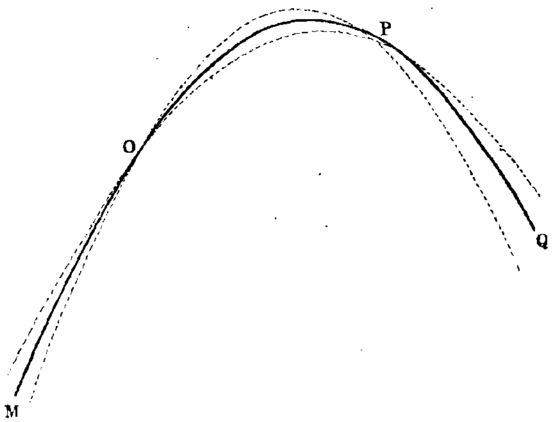
351. Kinetische Stabilität eines sich auf einer glatten Oberfläche bewegenden Punktes. — Der Fall eines sich auf einer glatten festen Oberfläche bewegenden Punktes, auf welchen keine andere Kraft wirkt als diejenige, die ihn zwingt, auf der Oberfläche zu bleiben, und der sich deshalb längs einer geodätischen Linie der Oberfläche bewegt, bietet äusserst einfache Erläuterungen der Stabilität und Instabilität dar. So würde z. B. ein auf den inneren Kreis der Oberfläche eines Ankerringes gesetzter materieller Punkt, wenn er in der Ebene des Ringes einen Stoss erhielte, sich beständig in diesem Kreise bewegen; seine Bewegung würde aber instabil sein, da der Punkt offenbar bei der geringsten Störung diese Bahn verlassen und erst nach einem Umlauf um den äusseren Rand dieselbe wieder erreichen würde. (Wir setzen natürlich voraus, dass der Punkt an der Oberfläche des Ringes bleiben muss, wie wenn er sich in dem unendlich dünnen Raum zwischen dem massiven Ringe und einem darumgelegten hohlen Ringe befände.) Wenn der Punkt aber auf den äussersten oder grössten Kreis des Ringes gesetzt und in dessen Ebene fortgestossen wird, so wird eine unendlich kleine Störung bewirken, dass er eine Sinuslinie beschreibt, welche den Kreis in einer Reihe von Punkten schneidet, deren jeder von dem folgenden eine Entfernung hat, die dem Winkel $\pi\sqrt{\frac{b}{a}}$ oder dem Zeitraum $\frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{b}{a}}$ entspricht, wo a den Radius jenes Kreises, ω die in demselben vorhandene Winkelgeschwindigkeit und b den Radius des kreisförmigen Querschnittes des Ringes bezeichnet. Dies zu beweisen, hat man nur zu beachten, dass ein unendlich schmaler Streifen des äussersten Theils des Ringes in jedem Punkte a und b zu Hauptkrümmungsradien, folglich (§ 150) zu geodätischen Linien die grössten Kreise einer Kugel vom Radius $\sqrt{ab}$ hat, an welche er (§ 152) durch Biegung sich anschmiegen kann.

352. In allen diesen Fällen war die Bahn der ungestörten Bewegung kreisförmig oder geradlinig, und wenn die Bewegung stabil war, so war die Wirkung einer Ablenkung periodisch, d. h. sie kehrte in successiven gleichen Zeitintervallen mit denselben Phasen wieder. Ein Beispiel einer durchaus stabilen Bewegung, bei welcher die Wirkung einer Ablenkung nicht periodisch ist, liefert uns ein materieller Punkt, der unter der Wirkung der Schwere eine geneigte Rinne hinunter gleitet. Um den einfachsten Fall zu nehmen, wollen wir einen Punkt betrachten, der längs der tiefsten Geraden eines geneigten hohlen Cylinders hinunter gleitet. Lenken wir den Punkt ein wenig von dieser Geraden ab, so wird er bei seinem Niedergange beständig zu beiden Seiten derselben oscilliren; diese Bewegung wird aber keine gleichförmig periodische sein, obwohl die Excursionen zu jeder Seite der Geraden sämmtlich die nämliche Dauer haben.

353. Einen sehr merkwürdigen Fall stabiler Bewegung liefert ein materieller Punkt, welcher gezwungen ist, auf der Oberfläche eines in einer verticalen Ebene feststehenden Ankerringes zu bleiben, und welcher von irgend einem Punkte des grössten Kreises aus längs dieses Kreises mit einer beliebigen Geschwindigkeit fortgestossen wird. Eine unendlich kleine Ablenkung wird eine Bewegung hervorrufen, deren Bahn den verticalen Kreis unaufhörlich immer wieder in ungleichen Zeiträumen schneidet; auch die den Schnittpunkten entsprechenden Centriwinkel sind ungleich, und offenbar ist die Bewegung keine periodisch wiederkehrende, ausser bei bestimmten besonderen Werthen für die ganze Energie, von denen einige kleiner und eine unendlich grosse Anzahl grösser als diejenige Energie sind, welche gerade genügt, den Punkt in die höchste Stelle des Ringes zu bringen. Eine eingehende mathematische Untersuchung dieser Umstände würde eine gute Uebung in der Theorie der Differentialgleichungen sein, ist aber zur Erläuterung des vorliegenden Gegenstandes nicht erforderlich.

354. **Oscillirende und beschränkte kinetische Stabilität.** — Im vorhergehenden Falle, wie in allen bisher betrachteten Fällen stabiler Bewegung mit nur zwei Graden von Freiheit fand während der ganzen Bewegung Stabilität statt, und eine unendlich kleine Ablenkung von irgend einem Punkte der Bewegung lieferte eine gestörte Bewegung, deren Bahn die Bahn der ungestörten Bewegung in bestimmten Zeitintervallen wiederholt schnitt. Der Einfachheit wegen wollen wir uns auch jetzt noch auf zwei Grade von Freiheit beschränken. Wir haben dann einen Fall beschränkter Stabilität in der Bewegung eines Projectils, das keinen Widerstand erfährt, und welches der Bedingung der Stabilität nur in den Punkten des aufwärts gehenden Theils, nicht im abwärts gehenden Theile seiner Bahn genügt. Wenn $MOPQ$ die Bahn eines Projectils ist, und wenn dasselbe in O durch eine unendlich kleine Kraft gestört wird, die nach irgend einer Seite hin senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung ist, so wird die Bahn der gestörten Bewegung diejenige der ungestörten unendlich nahe dem Punkte P schneiden, wo

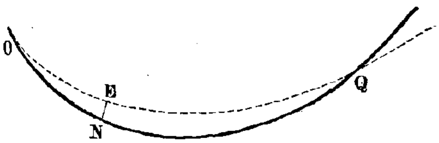
Fig 49.



die Bewegungsrichtung senkrecht zu derjenigen in O ist. Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, dass die Verbindungslinie zweier in dem nämlichen Augenblick von demselben Punkte aus mit gleichen Geschwindigkeiten in zwei beliebigen Richtungen geschleuderten materiellen Punkte beständig zu der Linie senkrecht bleibt, welche den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen halbirt.

355. Allgemeines Kriterium. Beispiele. — Das Princip der variirenden Wirkung liefert in jedem Bewegungsfalle ein mathematisches Kriterium für die Stabilität oder Instabilität. Zunächst ist klar und wird unten bewiesen werden (§§ 358, 361), dass die Bewegung eines Systems durchaus instabil ist, wenn die Wirkung in der Bewegung von einer beliebigen Configuration zu der in irgend einem anderen, beliebig viel späteren Augenblick erreichten Configuration ein wirkliches Minimum ist. In der Bewegung eines materiellen Punktes z. B., der gezwungen ist, auf einer glatten festen Oberfläche zu bleiben, und der nicht der Einwirkung der Schwere unterworfen ist, ist die Wirkung einfach das Product aus der Länge des Weges in die constante Geschwindigkeit. Folglich ist in dem oben betrachteten besonderen Falle eines materiellen Punktes, der sich, ohne eine Einwirkung von der Schwere zu erleiden, auf dem inneren Kreise in der Ebene eines Ankerringes bewegt, die Wirkung oder die Länge des Weges von einem beliebigen Punkte bis zu dem in irgend einem späteren Augenblick erreichten Punkte ein Minimum. (Die Wirkung ist nicht bloss *ein* Minimum, sondern sogar das kleinste Minimum, welches zwischen zwei beliebigen Punkten des Kreises auf dem Bogen möglich ist, dessen Länge weniger als die halbe Peripherie beträgt.) Andererseits ist zwar der Weg zwischen zwei beliebigen Punkten des grössten Kreises des Ringes, deren Abstand auf dem Kreise kleiner als $\pi\sqrt{ab}$ ist, offenbar längs der Peripherie am kleinsten; bei zwei Punkten aber, deren Abstand auf dem Kreise mehr als $\pi\sqrt{ab}$ beträgt, ist der absolut kürzeste Weg nicht der längs der Peripherie, und ist in diesem Falle der Weg längs der Peripherie überhaupt kein Minimum. Auf jeder überall anticlastischen Oberfläche oder längs einer durch einen anticlastischen Theil einer beliebigen Oberfläche hindurchgehenden geodätischen Linie ist die Bewegung durchaus instabil. Denn wäre sie von irgend einem Punkt O aus stabil, so würden wir die gegebene Bahn der ungestörten Bewegung und die Bahn der in O gestörten Bewegung haben, welche die erstere in irgend einem Punkte Q schnitte; es wären dies zwei verschiedene geodätische Linien zwischen zwei Punkten, die es auf einer anticlastischen Oberfläche nicht geben kann, insofern die Summe der Aussenwinkel jeder durch geodätische Linien gebildeten geschlossenen Figur grösser als vier rechte Winkel ist (§ 136), wenn die Gesammtkrümmung der eingeschlossenen Fläche negativ ist, und dies ist (§§ 138, 128) für jeden Theil einer durchaus anticlastischen Oberfläche der Fall. Andererseits lässt sich leicht darthun, dass, wenn in der Mitte eines geschlossenen starren Streifens einer überall synclastischen krummen Oberfläche eine geodätische Linie gezogen ist, und wir einen materiellen Punkt längs dieser Linie in Bewegung setzen, seine Bewegung durchaus stabil sein wird, und dass eine unendlich kleine Ablenkung eine neue Bahn liefern wird, welche die gegebene Bahn der ungestörten Bewegung unablässig in Punkten schneidet, deren Abstände von einander je nach der Verschiedenheit der specifischen Krümmungen der zwischenliegenden Oberflächentheile verschieden sind. Wird in irgend einem Punkte N der Bahn der ungestörten Bewegung eine Senkrechte gezogen, welche die unendlich nahe liegende Bahn der gestörten Bewegung in E schneidet, so ist die Summe der Winkel OEN und NOE grösser (§ 138) als ein rechter Winkel, und zwar um die Gesammtkrümmung der Fläche EON. Mit Rücksicht hierauf können wir unmittelbar die Differentialgleichung der Bahn der gestörten Bewegung erhalten.

Fig. 50.



Es sei $\measuredangle\, EON = \alpha$, $ON = s$, $NE = u$ und θ, eine bekannte Function von s, die specifische Krümmung (§ 136) der Oberfläche in der Nähe des Punktes N. Ferner bezeichne für einen Augenblick φ das Complement des Winkels OEN. Dann haben wir

$$\alpha - \varphi = \int_0^s \theta\, u\, ds,$$

folglich

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\theta u.$$

Offenbar ist aber

$$\varphi = \frac{du}{ds},$$

also

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \theta u = 0.$$

Wenn θ constant ist (wie in dem oben, § 351, betrachteten Falle des Aequators einer Rotationsfläche), so liefert diese Gleichung

$$u = A \cos (s \sqrt{\theta} + E),$$

was mit dem in § 351 durch Abwicklung auf eine Kugeloberfläche erhaltenen Resultate übereinstimmt.

Der Fall zweier oder mehrerer Körper, die in der oben angegebenen Weise von parallelen Axen getragen werden und um eine Axe rotiren, von welcher ihr gemeinschaftlicher Trägheitsmittelpunkt den kleinsten möglichen Abstand hat, liefert auch eine gute Erläuterung dieses Satzes, deren Bearbeitung wir wohl dem Leser als Uebungsaufgabe überlassen können.

356. Allgemeine Untersuchung der Bahn der gestörten Bewegung. — Die Erforschung der Wirkung einer unendlich kleinen conservativen Störung, die zu irgend einem Augenblick in der Bewegung eines beliebigen conservativen Systems erzeugt wird, lässt sich, vorausgesetzt dass die ungestörte Bewegung vollständig bekannt ist, auf ein Problem der mathematischen Analysis zurückführen, das zwar viele und complicirte Arbeit erfordern kann, sich aber immer lösen lässt.

Allgemeine Gleichung der Bewegung mit zwei Graden von Freiheit. — (a.) Für ein System, das nur zwei Grade von Bewegungsfreiheit hat, sei

$$(1) \qquad 2T = P\dot{\psi}^2 + Q\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\psi}\dot{\varphi},$$

wo P, Q, R von der wirklichen Bewegung unabhängige Functionen der Coordinaten sind. Dann ist

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dT}{d\dot{\psi}} = P\dot{\psi} + R\dot{\varphi}, \quad \dfrac{dT}{d\dot{\varphi}} = Q\dot{\varphi} + R\dot{\psi} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{dT}{d\dot{\psi}} = P\ddot{\psi} + R\ddot{\varphi} + \dfrac{dP}{d\psi}\dot{\psi}^2 + \left(\dfrac{dP}{d\varphi} + \dfrac{dR}{d\psi}\right)\dot{\psi}\dot{\varphi} + \dfrac{dR}{d\varphi}\dot{\varphi}^2, \end{cases}$$

und die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen [§ 329, (10)] sind

$$(3) \quad \begin{cases} P\ddot{\psi} + R\ddot{\varphi} + \tfrac{1}{2}\left\{\dfrac{dP}{d\psi}\dot{\psi}^2 + 2\dfrac{dP}{d\varphi}\dot{\psi}\dot{\varphi} + \left(2\dfrac{dR}{d\varphi} - \dfrac{dQ}{d\psi}\right)\dot{\varphi}^2\right\} = \Psi \\ R\ddot{\psi} + Q\ddot{\varphi} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(2\dfrac{dR}{d\psi} - \dfrac{dP}{d\varphi}\right)\dot{\psi}^2 + 2\dfrac{dQ}{d\psi}\dot{\psi}\dot{\varphi} + \dfrac{dQ}{d\varphi}\dot{\varphi}^2\right\} = \Phi. \end{cases}$$

Wir setzen voraus, das Coordinatensystem sei so gewählt, dass keine der Functionen P, Q, R und keiner ihrer Differentialquotienten $\dfrac{dP}{d\varphi}$, u. s. w. jemals unendlich werden kann.

(b.) Um die Wirkungen einer unendlich kleinen Störung zu erforschen, können wir eine Bewegung betrachten, in welcher zu irgend einer Zeit t die Coordinaten $\psi + p$ und $\varphi + q$ sind, wo p und q unendlich kleine Grössen bezeichnen. Nehmen wir dann auf die gewöhnliche Weise einfach die Variationen der Gleichungen (3), so gelangen wir zu zwei simultanen Differentialgleichungen zweiten Grades, die in Beziehung auf

$$p, q, \dot{p}, \dot{q}, \ddot{p}, \ddot{q}$$

linear sind, aber variabele Coefficienten haben, welche wir, wenn die ungestörte Bewegung ψ, φ völlig bekannt ist, als bekannte Functionen von t ansehen dürfen. In diesen Gleichungen kann offenbar keiner der Coefficienten jemals unendlich werden, wenn die Data einem wirklichen dynamischen Problem entsprechen, vorausgesetzt dass das Coordinatensystem passend gewählt ist (a). Die Coefficienten von $\ddot{p}$ und $\ddot{q}$ sind die Werthe, welche beziehungsweise P, R und R, Q zur Zeit t haben, in der Reihenfolge, in der sie in (3) erscheinen, da P, Q, R die Coefficienten einer homogenen quadratischen Function (1) sind, welche ihrer Natur nach positiv ist. Mit Bezugnahme auf diese Eigenschaften lässt sich zeigen, dass in keinem Falle ein unendlich kleiner Zeitraum die Lösung des folgenden Problems sein kann, auf welches uns die Frage nach der kinetischen Stabilität oder Instabilität (§ 347) führt: —

(c.) Die Geschwindigkeitscomponenten $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$ sind in irgend einem Augenblick in $\dot{\psi} + \alpha$, $\dot{\varphi} + \beta$ übergegangen, welche Aenderung der Bedingung unterworfen ist, dass sie den Werth von T ungeändert lässt. Man soll, α und β als unendlich klein angenommen, den Zeitraum bestimmen, nach dessen Ablauf $\frac{q}{p}$ zum ersten Male gleich $\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}$ wird.

(d.) Die Differentialgleichungen in p und q reduciren dieses Problem und thatsächlich auch die vollständige Erforschung der Störung in der Bewegung, wenn die ungestörte Bewegung gegeben ist, auf eine Form, die mathematischer Behandlung fähig ist. Wenn es sich aber bloss um den Beweis des Satzes, dass die Bahn der gestörten Bewegung die der ungestörten nicht vor Ablauf einer endlichen Zeit treffen kann, und um Ermittlung eines Grenzwerthes handelt, den diese Zeit in jedem besonderen Falle überschreiten muss, so ist es einfacher, in folgender Weise zu verfahren: —

(e.) Um t aus den allgemeinen Gleichungen (3) zu eliminiren, transformiren wir dieselben erst so, dass sie nicht t zur unabhängig Veränderlichen haben. Wir müssen

$$\ddot{\psi} = \frac{dt\, d^2\psi - d\psi\, d^2 t}{dt^3}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{dt\, d^2\varphi - d\varphi\, d^2 t}{dt^3} \tag{4}$$

setzen und erhalten aus der Gleichung der Energie, das System als conservativ vorausgesetzt,

$$dt = \frac{(P\, d\psi^2 + Q\, d\varphi^2 + 2\, R\, d\psi\, d\varphi)^{1/2}}{\{2\,(E - V)\}^{1/2}}. \tag{5}$$

Wird mittels dieser Gleichung aus den beiden Gleichungen (3) dt und d^2t eliminirt, so erhalten wir eine Differentialgleichung zweiten Grades zwischen ψ und φ, welche die Differentialgleichung der Bahn ist. Der Einfachheit wegen wollen wir eine der beiden Coordinaten, etwa φ, zur unabhängig Veränderlichen nehmen, d. h. $d^2\varphi = 0$ voraussetzen. Dann folgt aus (4)

$$d^2 t = -\ddot{\varphi}\frac{d\,t^3}{d\,\varphi},\ \text{mithin}\ \ddot{\psi}\,d\,t^2 = d^2\psi + \frac{d\,\psi}{d\,\varphi}\ddot{\varphi}\,d\,t^2,$$

und das Resultat der Elimination wird

$$(6)\quad (PQ - R^2)\frac{d^2\psi}{d\,\varphi^2} + F\left(\frac{d\,\psi}{d\,\varphi}\right) = \frac{\left(P\frac{d\,\psi^2}{d\,\varphi^2} + 2R\frac{d\,\psi}{d\,\varphi} + Q\right)\left[\left(Q + R\frac{d\,\psi}{d\,\varphi}\right)\Psi - \left(R + P\frac{d\,\psi}{d\,\varphi}\right)\right.}{2(E - V)}$$

wo $F\left(\frac{d\,\psi}{d\,\varphi}\right)$ eine Function dritten Grades von $\frac{d\,\psi}{d\,\varphi}$ bezeichnet, deren Coefficienten variabel sind und nicht unendlich werden können, so lange die kinetische Energie $E - V$ endlich ist.

(f.) Nehmen wir unter der Voraussetzung, dass ψ in $\psi + p$ übergeht, wo p eine unendlich kleine Grösse ist, die Variation der Gleichung (6), so erhalten wir

$$(7)\qquad (PQ - R^2)\frac{d^2 p}{d\,\varphi^2} + L\frac{d\,p}{d\,\varphi} + Mp = 0;$$

darin bezeichnen L und M bekannte Functionen von φ, von denen keine einen unendlich grossen Werth hat. Hierdurch ist die Abweichung p von der Bahn bestimmt. Da die quadratische Function (1) ihrer Bedeutung nach stets positiv ist, so muss auch $PQ - R^2$ immer positiv sein. Wenn demnach p für einen besonderen Werth von φ verschwindet und $\frac{d\,p}{d\,\varphi}$ einen gegebenen Werth hat, welcher die in irgend einem Augenblick vorausgesetzte Abweichung definirt, so muss φ um eine endliche Grösse wachsen (es muss also eine endliche Zeit verstreichen), ehe der Werth von p wieder Null sein, d. h. ehe die Bahn der gestörten Bewegung die der ungestörten wieder schneiden kann.

(g.) Dieser Satz behält seine Gültigkeit auch für ein System mit beliebig vielen Graden von Freiheit. Denn der im Vorhergehenden gegebene Beweis zeigt, dass er für das System gilt, wenn es einer beliebigen reibungslosen Beschränkung unterworfen ist, die ihm nur zwei Grade von Freiheit lässt; es kann dies auch jene besondere reibungslose Beschränkung sein, welche entweder die Bahn der ungestörten, oder die der gestörten Bewegung nicht ändern würde. Die ganz allgemeine Untersuchung der gestörten Bewegung für Fälle, in denen mehr als zwei Grade von Freiheit vorhanden sind, führt zu einer nothwendiger Weise verwickelten Form; aber die Principien, nach denen sie auszuführen ist, sind im Vorhergehenden zur Genüge angedeutet worden.

(h.) Wenn wir für das Verhältniss $\frac{L}{PQ - R^2}$ eine Constante 2α, welche, abgesehen vom Zeichen, kleiner als dessen kleinster Werth ist, und für $\frac{M}{PQ - R^2}$ eine Constante β substituiren, welche algebraisch grösser als dessen grösster Werth ist, so erhalten wir eine Gleichung

$$(8)\qquad \frac{d^2 p}{d\,\varphi^2} + 2\alpha\frac{d\,p}{d\,\varphi} + \beta = 0.$$

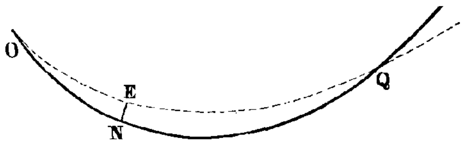
Hier verschwindet der Werth von p für eine Reihe von Werthen von φ, deren jeder den folgenden um $\frac{\pi}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}$ übertrifft, und dies ist offenbar kleiner als die Zunahme, welche φ in dem wirklichen Problem erhalten muss, ehe p zum zweiten Male verschwindet. Wir ersehen hieraus auch, dass die wirkliche Bewegung instabil ist, wenn $\alpha^2 > \beta$ ist. Die Bewegung könnte natürlich auch instabil sein, wenn $\alpha^2 < \beta$ ist, und man hätte mittels der geeigneten analytischen Methoden entweder die exacte oder eine praktisch ausreichende annähernde Lösung der Gleichung (7) zu ermitteln, um das Kriterium der Stabilität oder Instabilität endgültig aufzustellen und die Störung der Bahn vollständig zu bestimmen.

(i.) **Differentialgleichung der gestörten Bahn eines auf eine Ebene beschränkten materiellen Punktes.** — Wenn das System nur ein einzelner auf eine Ebene beschränkter materieller Punkt ist, so lässt sich die Differentialgleichung der Ablenkung auf eine merkwürdig einfache Form bringen, die für viele praktische Probleme von Nutzen ist. In irgend einem Augenblick sei für die Einheit der Masse N die normale Kraftcomponente, v die Geschwindigkeit und ϱ der Krümmungsradius der Bahn. Dann haben wir (§ 259)

$$N = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Es stelle nun in Fig. 51 ON die Bahn der ungestörten, OE die der gestörten Bewegung dar, und es werde die Linie EN, welche auf ON senkrecht steht, mit u und ON mit s bezeichnet. Bezeichnen wir ferner den

Fig. 51.



Krümmungsradius in der Bahn der gestörten Bewegung mit ϱ' und bedenken, dass u unendlich klein ist, so finden wir leicht

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{d^2 u}{d s^2} + \frac{u}{\varrho^2}. \tag{9}$$

Bedienen wir uns daher des Buchstabens δ, um die Variationen von N nach E zu bezeichnen, so ist

$$\delta N = \delta \frac{v^2}{\varrho} = \frac{\delta (v^2)}{\varrho} + v^2\left(\frac{d^2 u}{d s^2} + \frac{u}{\varrho^2}\right). \tag{10}$$

Nach der Gleichung der Energie ist aber

$$v^2 = 2(E - V),$$

folglich

$$\delta (v^2) = -2\delta V = 2Nu = \frac{2v^2}{\varrho} u,$$

und die Gleichung (10) verwandelt sich in

$$\frac{d^2 u}{d s^2} + \frac{3 u}{\varrho^2} - \frac{\delta N}{v^2} = 0, \tag{11}$$

oder, wenn wir mit ζ die Grösse der Variation von N für die Einheit des Abstandes vom Punkte N in der Richtung der Normalen bezeichnen, so dass $\delta N = \zeta u$ ist, in

$$\frac{d^2 u}{d s^2} + \left(\frac{3}{\varrho^2} - \zeta\right) u = 0. \tag{12}$$

Hierin ist die Gleichung der oben (§ 350) untersuchten Abweichung von einer kreisförmigen Bahn als besonderer Fall enthalten.

357. **Kinetische Brennpunkte.** — Wenn zwei von einer beliebigen Configuration ausgehende einander unendlich nahe liegende Bahnen wieder eine Configuration gemeinschaftlich haben, so wird diese letztere in Beziehung auf die erstere ein kinetischer Brennpunkt genannt, oder diese beiden Configurationen heissen (der Umkehrbarkeit der Bewegung wegen) conjugirte kinetische Brennpunkte. Wenn wir für einen Augenblick die Emanationstheorie des Lichtes adoptiren, so sind die optischen Brennpunkte als ein besonderer Fall in dieser Definition der allgemeinen kinetischen Brennpunkte enthalten. Aus § 356 (g.) sehen wir, dass in jeder Bewegung eines jeden Systems zwischen zwei conjugirten Brennpunkten endliche Raum- und Zeitintervalle liegen müssen, wenn nur die kinetische Energie nicht verschwindet.

358. **Satz von der kleinsten Wirkung.** — Nun ist klar, dass die W i r k u n g, falls nur ein hinreichend kurzer Lauf betrachtet wird, bei jeder natürlichen Bewegung eines Systems kleiner ist, als wenn irgend ein anderer Weg zwischen denselben Endconfigurationen durchlaufen würde. Wir werden alsbald (§ 361) beweisen, dass die erste Configuration, bis zu welcher die von einer beliebigen Anfangsconfiguration aus gerechnete Wirkung aufhört ein Minimum zu sein, der erste kinetische Brennpunkt ist, und umgekehrt, dass, sobald der erste kinetische Brennpunkt passirt ist, die von der Anfangsconfiguration aus gerechnete Wirkung aufhört, ein Minimum zu sein, und daher natürlich nie wieder ein Minimum sein kann, da für einen Theil der natürlichen Bahn ein von ihr unendlich wenig abweichender Weg gefunden werden kann, für welchen die Wirkung kleiner ist, ohne dass der übrige Theil geändert würde.

359. **Bezeichnungen der Configurationen, der Bahnen und der Wirkung.** — In Sätzen dieser Art wird es oft zweckmässig sein,

besondere Configurationen des Systems durch einzelne Buchstaben, wie O, P, Q, R, zu bezeichnen. Irgend einen besonderen Lauf, in welchem sich das System durch die so ausgedrückten Configurationen bewegt, werden wir den Lauf $O \ldots P \ldots Q \ldots R$ nennen. Die Wirkung in jedem natürlichen Laufe soll einfach durch den ersten und den letzten Buchstaben bezeichnet werden, die wir in der Reihenfolge schreiben, in welcher das System die entsprechenden Configurationen erreicht. So bezeichnet OR die Wirkung von O bis R, und es ist folglich $OR = - RO$. Wenn es mehr als einen reellen natürlichen Weg von O bis R giebt, so wird der analytische Ausdruck für OR mehr als einen reellen Werth haben, und es kann nöthig sein, anzugeben, für welchen dieser Wege die Wirkung gerechnet wird. So können wir

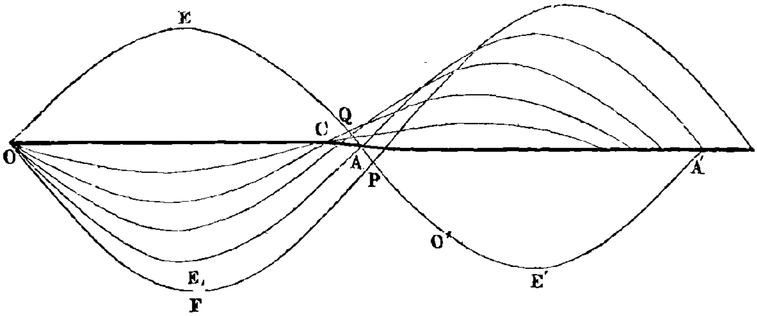
$$\begin{aligned} &OR \text{ für } O \ldots E \ldots R, \\ &OR \text{ für } O \ldots E' \ldots R, \\ &OR \text{ für } O \ldots E'' \ldots R \end{aligned}$$

haben, drei verschiedene Werthe eines irrationalen algebraischen Ausdrucks.

360. Mit Hülfe dieser Bezeichnung kann der vorhergehende Satz (§ 358) in folgender Weise ausgedrückt werden: — Wenn sich ein conservatives System auf einem gewissen Wege $O \ldots P \ldots O' \ldots P'$ bewegt und O' der erste O conjugirte kinetische Brennpunkt ist, so ist die Wirkung OP in dieser Bahn kleiner, als die Wirkung längs jeder unendlich wenig von ihr abweichenden Bahn; andererseits ist aber OP' grösser, als die Werthe der Wirkung in einigen Bahnen von O nach P', welche unendlich wenig von der durch $O \ldots P \ldots O' \ldots P'$ ausgedrückten natürlichen Bahn abweichen.

361. Möglichkeit zweier oder mehrerer Bahnen kleinster Wirkung. — Man darf nicht annehmen, dass die Wirkung längs OP nothwendig die kleinste sei, die von O nach P überhaupt möglich ist. Es giebt in der That Fälle, in denen die Wirkung schon bei einer Configuration, bis zu welcher noch kein kinetischer Brennpunkt erreicht ist, aufhört, die kleinste von allen möglichen zu sein. Ist $OEAPO'E'A'$ eine wellenförmige geodätische Linie, welche den äusseren Kreis eines Ankerringes oder den Aequator eines abgeplatteten Sphäroids in einer Reihe von Punkten O, A, A' schneidet, so sieht man leicht, dass O', der erste O conjugirte kinetische Brennpunkt, etwas über A hinaus liegen muss. Die Länge $OEAP$ ist nun zwar ein Minimum (eine stabile Lage für eine gespannte Schnur), aber nicht der kürzeste Abstand von O bis P auf der Oberfläche, da dieser offenbar eine ganz zu einer Seite des

Fig. 52.



grössten Kreises liegende Linie sein muss. Von O zu einem beliebigen vor A liegenden Punkte Q ist der Abstand längs der geodätischen Linie $OEQA$ offenbar der kleinste mögliche; wenn aber Q hinlänglich nahe an A, d. h. zwischen A und dem Punkte liegt, in welchem die einhüllende Curve der von O aus gezogenen geodätischen Linien OEA schneidet, so wird es noch zwei andere geodätische Linien von O nach Q geben. Die Länge einer derselben wird ein Minimum sein, die der anderen nicht. Wird Q vorwärts nach A bewegt, so wird die erstere Linie $OE_{,}A$ und congruent OEA; beide liegen aber zu verschiedenen Seiten des grössten Kreises; die letztere jener beiden Linien wird der grösste Kreis von O bis A. Wird Q weiter über A hinaus nach P bewegt, so hört die geodätische Linie $OEAP$ auf, das kleinere der beiden Minima zu sein, und die ganz auf der anderen Seite des grössten Kreises liegende geodätische Linie OFP wird die kleinste auf der Oberfläche von O nach P mögliche Linie. Aber so lange P nicht über den Punkt O' hinausgerückt ist, in welchem die geodätische Linie $OEAP$ von einer anderen von O ausgehenden ihr unendlich nahe liegenden geodätischen Linie geschnitten wird, bleibt die Länge $OEAP$ ein Minimum, nach dem allgemeinen Satze des § 358, zu dessen Beweis wir uns jetzt wenden.

Differenz zwischen der Summe zweier Seiten und der dritten Seite eines kinetischen Dreiecks. — (a.) Mit Bezugnahme auf die Bezeichnung des § 360 sei $P_{,}'$ eine beliebige Configuration, welche unendlich wenig von P abweicht, aber nicht auf der Bahn $O \dots P \dots O' \dots P'$ liegt. Ferner sei S eine Configuration dieses Laufes, welche eine gewisse endliche Zeit, nachdem P passirt worden ist, erreicht wird. Sind dann $\psi, \varphi, \dots$ die Coordinaten von P und $\psi_{,}, \varphi_{,}, \dots$ diejenigen von $P_{,}$, und ist

$$\psi_{,} - \psi = \delta\psi, \quad \varphi_{,} - \varphi = \delta\varphi, \dots,$$

so haben wir nach dem Taylor'schen Satze

$$OP_{,} + P_{,}S = OS + \left\{\frac{d(OP+PS)}{d\psi}\delta\psi + \frac{d(OP+PS)}{d\varphi}\delta\varphi + \cdots\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{d^2(OP+PS)}{d\psi^2}(\delta\psi)^2 + 2\frac{d^2(OP+PS)}{d\psi\, d\varphi}\delta\psi\,\delta\varphi + \cdots\right\} + \text{u. s. w.}$$

Bezeichnen aber $\xi, \eta, \dots$ die Componenten der Bewegungsgrösse in P bei dem Laufe $O \dots P$, die mit den Componenten der Bewegungsgrösse in P bei der Fortsetzung dieses Laufes, $P \dots S$, übereinstimmen, so haben wir [§ 322, (18)]

$$\xi = \frac{d\,OP}{d\psi} = -\frac{d\,PS}{d\psi}, \quad \eta = \frac{d\,OP}{d\varphi} = -\frac{d\,PS}{d\varphi}, \dots$$

Folglich fallen aus dem vorhergehenden Ausdruck die Glieder, welche vom ersten Grade in $\delta\psi, \delta\varphi, \dots$ sind, weg, und wir erhalten

$$(1)\quad \begin{cases} OP_{,} + P_{,}S - OS = \tfrac{1}{2}\left\{\dfrac{d(OP+PS)}{d\psi^2}\delta\psi^2\right. \\ \qquad\qquad \left. + 2\dfrac{d^2(OP+PS)}{d\psi\, d\varphi}\delta\psi\,\delta\varphi + \cdots\right\} + \text{u. s. w.} \end{cases}$$

(b.) Nach der bekannten Methode der linearen Transformationen nehmen wir jetzt

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1\,\delta\psi + \beta_1\,\delta\varphi + \cdots \\ x_2 = \alpha_2\,\delta\psi + \beta_2\,\delta\varphi + \cdots \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

an und wählen $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_2, \beta_2, \dots$ so, dass die vorhergehende quadratische Function auf die Form

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_i x_i^2$$

reducirt wird, wo i die Gesammtzahl der Grade von Freiheit ist.

Dies kann auf unendlich viele Arten geschehen, und um eine specielle Art ins Auge zu fassen, können wir $\alpha_i = \dot\psi$, $\beta_i = \dot\varphi$, u. s. w. nehmen und die übrigen Grössen $\alpha, \beta, \dots$ den Bedingungen

$$\dot\psi\alpha_1 + \dot\varphi\beta_1 + \cdots = 0, \quad \dot\psi\alpha_2 + \dot\varphi\beta_2 + \cdots = 0, \text{ u. s. w.}$$

unterwerfen. Dann wird $A_i = 0$ werden; denn wenn wir für einen Augenblick voraussetzen, $P_{,}$ liege auf dem Laufe $O \dots P \dots O'$, so erhalten wir

$$\frac{\delta\psi}{\dot\psi} = \frac{\delta\varphi}{\dot\varphi} = \cdots,$$

folglich

$$x_i = \frac{\dot\psi}{\delta\psi}(\delta\psi^2 + \delta\varphi^2 + \cdots), \; x_{i-1} = 0, \cdots, x_2 = 0, \; x_1 = 0.$$

In diesem Falle ist aber $OP_{\prime} + P_{\prime}S = OS$, und mithin muss der Werth des quadratischen Ausdrucks Null sein, d. h. wir müssen $A_i = 0$ haben. Es ist also

$$(3)\quad OP_{\prime} + P_{\prime}S - OS = \tfrac{1}{2}(A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_{i-1} x_{i-1}^2) + R,$$

wo R einen Rest bezeichnet, dessen Glieder vom dritten und von höheren Graden in $\delta\psi$, $\delta\varphi$, u. s. w., oder in x_1, x_2, u. s. w. sind.

(c.) Wir können demselben Ausdruck noch eine andere Form geben, die unten ihre Anwendung finden wird. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, $(\xi_{\prime}, \eta_{\prime}, \zeta_{\prime}, \ldots)$ und $(\xi_{\prime}', \eta_{\prime}', \zeta_{\prime}', \ldots)$ seien beziehungsweise in den Bahnen $OP_{\prime}$ und $P_{\prime}S$ die Componenten der Bewegungsgrösse in $P_{\prime}$. Nach § 322, (18) haben wir

$$\xi_{\prime} = \frac{d\,OP_{\prime}}{d\psi_{\prime}},$$

folglich ist nach dem Taylor'schen Satze

$$\xi_{\prime} = \frac{d\,OP}{d\psi} + \frac{d^2\,OP}{d\psi^2}\delta\psi + \frac{d^2\,OP}{d\psi\,d\varphi}\delta\varphi + \cdots + \text{u. s. w.}$$

Ebenso ergiebt sich

$$-\xi_{\prime}' = \frac{d\,PS}{d\psi} + \frac{d^2\,PS}{d\psi^2}\delta\psi + \frac{d^2\,PS}{d\psi\,d\varphi}\delta\varphi + \cdots + \text{u. s. w.}$$

Da nun $\dfrac{d\,OP}{d\psi} = -\dfrac{d\,PS}{d\psi}$ ist, so folgt

$$(4)\quad \xi_{\prime}' - \xi_{\prime} = -\left\{\frac{d^2(OP+PS)}{d\psi^2}\delta\psi + \frac{d^2(OP+PS)}{d\psi\,d\varphi}\delta\varphi + \cdots\right\} + \text{u. s. w.}$$

Entsprechende Ausdrücke erhalten wir für $\eta_{\prime}' - \eta_{\prime}$, u. s. w., folglich ist (1) dasselbe wie

$$(5)\quad OP_{\prime} + P_{\prime}S - OS = -\tfrac{1}{2}\{(\xi_{\prime}' - \xi_{\prime})\delta\psi + (\eta_{\prime}' - \eta_{\prime})\delta\varphi + \cdots\} + R,$$

wo R einen Rest bezeichnet, dessen Glieder vom dritten und von höheren Graden sind. Auch liefert die Transformation von $\delta\psi$, $\delta\varphi$, ... auf $x_1, x_2, \ldots$ offenbar

$$(6)\quad \begin{cases} \xi_{\prime}' - \xi_{\prime} = -(A_1\alpha_1 x_1 + A_2\alpha_2 x_2 + \cdots + A_{i-1}\alpha_{i-1} x_{i-1}) \\ \eta_{\prime}' - \eta_{\prime} = -(B_1\beta_1 x_1 + B_2\beta_2 x_2 + \cdots + B_{i-1}\beta_{i-1} x_{i-1}) \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

(d.) Nun bleiben für jeden unendlich kleinen Zeitraum die Geschwindigkeiten nahezu constant; dasselbe ist mit den Coefficienten (ψ, ψ), (ψ, φ), u. s. w. in dem Ausdruck [§ 313, (2)] für T der Fall. Folglich erhalten wir für die Wirkung

$$\int 2\,T\,dt = \sqrt{2\,T}\int\sqrt{2\,T}\,dt$$
$$= \sqrt{2\,T}\{(\psi,\psi)(\psi-\psi_0)^2 + 2(\psi,\varphi)(\psi-\psi_0)(\varphi-\varphi_0) + \text{u. s. w.}\}^{1/2},$$

wo $(\psi_0, \varphi_0, \ldots)$ die Coordinaten der Configuration sind, von welcher aus die Wirkung gerechnet wird. Wenn also P, P', P'' drei beliebige einander unendlich nahe liegende Configurationen sind und wir die Quadratwurzeln aus quadratischen Functionen, wie sie der vorhergehende Ausdruck enthält, mit dem Buchstaben Q bezeichnen, hinter welchen die entsprechenden Coordinatendifferenzen geschrieben werden, so ist

$$(7)\qquad \begin{cases} PP' = \sqrt{2T}\,.\,Q\,\{(\psi - \psi'), (\varphi - \varphi'), \ldots\} \\ P'P'' = \sqrt{2T}\,.\,Q\,\{(\psi' - \psi''), (\varphi' - \varphi''), \ldots\} \\ P''P = \sqrt{2T}\,.\,Q\,\{(\psi'' - \psi), (\varphi'' - \varphi), \ldots\}. \end{cases}$$

In dem besonderen Falle eines einzelnen freien materiellen Punktes werden diese Ausdrücke einfach den Abständen PP', $P'P''$, $P''P$ proportional, und die Planimetrie lehrt, dass

$$P'P + PP'' > P'P''$$

ist, ausser wenn P auf der Geraden $P'P''$ liegt.

Diesen Satz mittels der vorhergehenden Ausdrücke (7) zu bewahrheiten, läuft darauf hinaus, ihn analytisch-geometrisch mit Benutzung eines schiefwinkligen geradlinigen Coordinatensystems zu beweisen, und ist nothwendig etwas complicirt. Wenn $(\psi, \varphi) = (\varphi, \vartheta) = (\vartheta, \psi) = 0$ ist, so werden die Coordinaten rechtwinklig, und der algebraische Beweis bietet keine Schwierigkeit. Auf ganz analoge Weise lässt sich leicht zeigen, dass für jede beliebige Anzahl von Coordinaten ψ, φ, u. s. w.

$$P'P + PP'' > P'P''$$

ist, ausser wenn

$$\frac{\psi - \psi'}{\psi'' - \psi'} = \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi'' - \varphi'} = \frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta'' - \vartheta'} = \cdots$$

ist (d. h. wenn P auf der Bahn von P' nach P'' liegt), in welchem Falle man

$$P'P + PP'' = P'P''$$

hat, wo $P'P$, u. s. w. durch (7) gegeben sind. Ferner ist es leicht, mit Hülfe von (1) den genauen Ausdruck von $P'P + PP'' - P'P''$ zu finden, wenn P nicht auf der Bahn von P' nach P'', aber derselben unendlich nahe liegt. Es ist aber nicht nöthig, hier auf solche rein algebraische Untersuchungen einzugehen.

(e.) Es leuchtet ein, dass, wie wir schon in § 358 bemerkten, die Wirkung längs irgend eines natürlichen Laufes die kleinste zwischen seinen Endconfigurationen mögliche ist, wenn nur ein hinlänglich kurzer Lauf betrachtet wird. Für alle Fälle, in denen die Zeit von O bis S kleiner als eine gewisse Grösse ist, muss daher das in dem Ausdruck (3) von $OP_{\prime} + P_{\prime}S - OS$ enthaltene quadratische Glied für alle Werthe von x_1, x_2, u. s. w. positiv sein, und somit ist jede der Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ positiv.

(f.) Es werde jetzt S immer weiter von O auf dem bestimmten Laufe $O \ldots P \ldots O'$ fortbewegt, bis es O' wird. Ist das geschehen, so werde $P_{\prime}$ auf einem durch O und O' gehenden natürlichen Lauf angenommen, der unendlich wenig von dem Laufe OPO' abweicht. Da nun $OP_{\prime}O'$ ein natürlicher Lauf ist, so ist

$$\xi_{\prime}' - \xi_{\prime} = \eta_{\prime}' - \eta_{\prime} = \cdots = 0,$$

folglich geht (5) über in

$$OP_{\prime} + P_{\prime}O' - OO' = R,$$

und dies beweist, dass auch in dem Ausdruck (3) für dieselbe Grösse das quadratische Glied verschwinden muss. Es muss also wenigstens einer der Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ verschwinden, und wenn wir nur z. B. $A_{i-1} = 0$, haben, so muss

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots x_{i-2} = 0$$

sein. Diese Gleichungen drücken die Bedingung aus, dass $P_,$ auf einem natürlichen Laufe von O nach O' liege.

(g.) Wenn umgekehrt einer oder mehrere der Coefficienten A_1, A_2, u. s. w. verschwinden, wenn wir z. B. $A_{i-1} = 0$ haben, so muss S ein kinetischer Brennpunkt sein. Denn wenn wir $P_,$ so annehmen, dass

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_{i-2} = 0$$

ist, so haben wir nach (6)

$$\xi_,' - \xi_, = \eta_,' - \eta_, = \cdots = 0.$$

(h.) Wir haben also bewiesen, dass in einem O conjugirten kinetischen Brennpunkt die Wirkung von O aus kein Minimum erster Ordnung *) ist, und dass die letzte Configuration, bis zu welcher die Wirkung von O aus ein Minimum erster Ordnung ist, ein O conjugirter kinetischer Brennpunkt sein wird.

(i.) Es bleibt noch zu beweisen, dass die Wirkung von O aus aufhört, ein Minimum zu sein, wenn der erste O conjugirte kinetische Brennpunkt überschritten wird. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, $O \ldots P \ldots O' \ldots P'$ sei, wie in § 360, ein über O', den ersten O conjugirten kinetischen Brennpunkt, hinausgehender natürlicher Lauf, und P, P' liegen einander so nahe, dass weder P noch P' zwischen P und P' einen conjugirten kinetischen Brennpunkt hat. Ist dann $O \ldots P_, \ldots O'$ ein natürlicher Lauf von O nach O', der von $O \ldots P \ldots O'$ unendlich wenig abweicht, so unterscheidet sich nach dem, was wir in (e.) bewiesen haben, die Wirkung $O\,O'$ längs der Bahn $O \ldots P_, \ldots O'$ von der Wirkung $O\,O'$ längs der Bahn $O \ldots P \ldots O'$ nur durch eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung R. Es ist folglich

$$\begin{aligned}\text{Wirkung } (O \ldots P \ldots O' \ldots P') &= \text{Wirkung } (O \ldots P_, \ldots O') + O'P' + R \\ &= O\,P_, + P_,O' + O'P' + R.\end{aligned}$$

Durch Anwendung von (e.) ergiebt sich aber, dass

$$P_,O' + O'P' = P_,P' + Q$$

ist, wo Q eine ihrer Natur nach positive unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung bezeichnet. Wir erhalten somit

$$\text{Wirkung } (O \ldots P \ldots O' \ldots P') = O\,P_, + P_,P' + Q + R,$$

und, da R im Vergleich mit Q unendlich klein ist,

$$\text{Wirkung } (O \ldots P \ldots O' \ldots P') > O\,P_, + P_,P'.$$

---

*) Ein Maximum oder ein Minimum „erster Ordnung" einer Function einer oder mehrerer Veränderlichen ist ein solches, bei welchem das Differential ersten Grades, nicht aber dasjenige zweiten Grades verschwindet.

Danach entspricht dem gebrochenen Lauf $O \dots P_{\prime\prime} P_{\prime} \dots P'$ eine kleinere Wirkung, als dem natürlichen Lauf $O \dots P \dots O' \dots P'$, und da beide einander unendlich nahe liegen, so ist die Wirkung im letzteren kein Minimum.

362. Wir haben bewiesen, dass die Wirkung von irgend einer Configuration aus im ersten derselben conjugirten kinetischen Brennpunkt aufhört ein Minimum zu sein. Daraus geht unmittelbar hervor, dass, wenn O' der erste O conjugirte kinetische Brennpunkt ist, der nach dem Durchgang durch O erreicht wird, es auf diesem Lauf zwischen O und O' nicht zwei Configurationen geben kann, die einander conjugirte Brennpunkte wären. Denn da die Wirkung von O aus gerade dann aufhört ein Minimum zu sein, wenn O' erreicht wird, so muss sie zwischen irgend zwei Configurationen desselben Laufs, die zwischen O und O' liegen, nothwendig ein Minimum sein.

363. **Anzahl der kinetischen Brennpunkte.** — Wenn i Grade von Bewegungsfreiheit vorhanden sind, so giebt es im Allgemeinen auf jedem natürlichen Laufe von einer beliebigen besonderen Configuration O aus wenigstens $i - 1$ kinetische Brennpunkte, die O conjugirt sind. Wenn z. B. ein Lichtstrahl von einem leuchtenden Punkte O aus durch den Mittelpunkt einer convexen Linse hindurchgeht, die schräg gegen seine Bahn gehalten wird, so giebt es im Sinne unserer obigen Definition zwei O conjugirte kinetische Brennpunkte; es sind dies die Punkte, in welchen die Richtung des Centralstrahls durch die sogenannten „Focallinien“ *) eines von O ausgehenden divergirenden Büschels von Strahlen geschnitten wird, welche der Durchgang durch die Linse convergent macht. Diese kinetischen Brennpunkte können auch theilweise oder sämmtlich auf dem vor O befindlichen Theile der Bahn liegen; das ist z. B. bei einem Projectil der Fall, wenn sein Lauf schräg abwärts durch O geht. Sie können auch zum Theil oder sämmtlich verloren gehen, wie z. B. wenn in dem eben angeführten Beispiel aus der Optik die Linse nur stark genug ist, in einer der Hauptebenen Convergenz zu erzeugen, oder wenn sie zur Erzeugung von Convergenz überhaupt zu schwach ist. Auch im Falle der ungestörten geradlinigen Bewegung eines Punktes, oder der Bewegung eines von keiner Kraft beeinflussten Punktes auf einer anticlastischen Oberfläche (§ 355) giebt es keine reellen kinetischen Brennpunkte. In der Bewegung eines Projectils (das

*) Im zweiten Bande dieses Werkes hoffen wir alle erforderlichen elementaren Erklärungen über diesen Gegenstand zu geben.

nicht auf eine Verticalebene beschränkt ist) kann es auf jeder Bahn nur einen kinetischen Brennpunkt geben, der einem gegebenen Punkte conjugirt ist, obschon drei Grade von Freiheit vorhanden sind. Weiter kann es aber auch auf einer Bahn mehr als $i - 1$ Brennpunkte geben, die sämmtlich einer Configuration conjugirt sind. Das ist z. B. auf der Bahn eines durch keine Kraft beeinflussten materiellen Punktes der Fall, welcher sich um die Oberfläche eines Ankerringes herum längs des äusseren grössten Kreises oder längs einer wellenförmigen geodätischen Linie, wie wir sie in § 361 betrachtet haben, bewegt: In diesem Falle giebt es für jeden Punkt der Bahn offenbar eine unendliche Anzahl conjugirter Brennpunkte, die in gleichen Abständen von einander liegen.

Mit Bezugnahme auf die Bezeichnung des § 361 (f.) lassen wir S sich allmälig weiter bewegen, bis zuerst einer der Coefficienten, etwa A_{i-1}, darauf ein anderer, etwa A_{i-2}, u. s. w. verschwindet. Wir haben gesehen, dass jede dieser Lagen von S ein kinetischer Brennpunkt ist, und erhalten auf diese Weise durch das successive Verschwinden der $i - 1$ Coefficienten $i - 1$ Brennpunkte. Wenn keiner der Coefficienten jemals Null werden kann, so ist kein kinetischer Brennpunkt vorhanden. Wenn einer oder mehrere derselben nach dem Verschwinden zu einem Minimumwerth gelangen und, wenn sich S weiter bewegt, aufs Neue Null werden, so können mehr als $i - 1$ Brennpunkte vorhanden sein, deren jeder derselben Configuration O conjugirt ist.

364. Satz vom Maximum der Wirkung. — Wenn von einer Configuration O $i - 1$ verschiedene*) Bahnen ausgehen, von denen jede von einer gewissen natürlichen Bahn $O..E..O_1..O_2.....O_{i-1}..Q$ unendlich wenig abweicht und letztere in den Configurationen $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_{i-1}$ schneidet, und wenn es auf derselben zwischen O und Q ausser $O_1, \ldots, O_{i-1}$ keine anderen O conjugirten kinetischen Brennpunkte und zwischen E und Q keinen einzigen E conjugirten Brennpunkt giebt, so ist die Wirkung auf dieser natürlichen Bahn von O bis Q grösser, als die Wirkung auf irgend einer anderen Bahn $O\ldots P_{,,} P_{,}\ldots Q$, wo $P_{,}$ eine Configuration ist, welche von einer beliebigen zwischen E und O_1 auf der Hauptbahn $O..E..O_1..O_2.....O_{i-1}..Q$ liegenden Configuration nur unendlich wenig abweicht, und wo $O\ldots P_{,,} P_{,}\ldots Q$ die von dieser Hauptbahn unendlich wenig verschiedenen natürlichen Bahnen von O nach $P_{,}$ und von $P_{,}$ nach Q bezeichnen.

---

*) Zwei Bahnen heissen nicht verschieden, wenn sie sich nur in der absoluten Grösse ihrer Abweichungen von der Hauptbahn, nicht in den Proportionen der Componenten dieser Abweichungen unterscheiden.

In § 361 (i.) sei O' irgend einer der Brennpunkte $O_1, O_2, \ldots, O_{i-1}$, etwa O_1, und P_i werde in diesem Falle P_1 genannt. Der dort gegebene Beweis zeigt, dass

$$O\,Q > O\,P_1 + P_1\,Q$$

ist. Folglich giebt es $i - 1$ verschiedene gebrochene Bahnen

$$O \ldots P_1,\ P_1 \ldots Q;\quad O \ldots P_2,\ P_2 \ldots Q; \text{ u. s. w.,}$$

in deren jeder die Wirkung kleiner als in der Hauptbahn von O nach Q ist. Welches aber auch die Abweichung von P_i sein möge, sie lässt sich offenbar aus den Abweichungen von P nach P_1, von P nach P_2, von P nach $P_3, \ldots$, von P nach P_{i-1} zusammensetzen, welche beziehungsweise diesen $i - 1$ Fällen entsprechen, und man sieht leicht, dass

$$O\,P_i + P_i\,Q - O\,Q = (O\,P_1 + P_1\,Q - O\,Q) + (O\,P_2 + P_2\,Q - O\,Q) + \cdots$$

ist. Daraus folgt

$$O\,P_i + P_i\,Q < O\,Q, \text{ was zu beweisen war.}$$

365. **Anwendungen auf zwei Grade von Freiheit.** — Der Einfachheit wegen wollen wir jetzt nur Fälle betrachten, in denen nur zwei Grade (§§ 195, 204) von Bewegungsfreiheit vorhanden sind. Wenn ein System beim Durchgang durch eine gewisse Configuration eine beliebige unendlich kleine conservative Störung erfährt, so sehen wir, dass die Bahn der gestörten Bewegung mit derjenigen der ungestörten erst in der ersten Configuration der letzteren wieder zusammentrifft, in welcher die Wirkung in der ungestörten Bewegung aufhört ein Minimum zu sein. Im Falle eines materiellen Punktes z. B., der auf einer Oberfläche bleiben muss und einem beliebigen conservativen Kraftsystem unterworfen ist, bringt eine unendlich kleine conservative Störung der Bewegung durch einen Punkt O eine gestörte Bahn hervor, welche die Bahn der ungestörten Bewegung in dem ersten Punkte O' schneidet, in welchem die Wirkung von O aus in der ungestörten Bahn aufhört ein Minimum zu sein. Oder wenn von einem Punkte O aus nach allen Richtungen einer Verticalebene hin Projectile mit gleichen Geschwindigkeiten geschleudert werden, die nur der Wirkung der Schwere ausgesetzt sind, so liegen, wie man leicht beweisen kann, die Punkte, in denen jede Bahn von der nächstfolgenden geschnitten wird, in einer Parabel, deren Brennpunkt O und deren Scheitel der von dem direct nach oben geschleuderten Projectil erreichte Punkt ist. In der wirklichen Bahn jedes Projectils von O aus ist die Wirkung bis zu einem Punkte P, der v o r der einhüllenden Parabel erreicht wird, die kleinste mögliche; sie ist aber auf dieser

Bahn kein Minimum bis zu einem Punkte Q, der nach dem Durchgange durch die einhüllende Curve erreicht wird.

366. Wenn ferner ein materieller Punkt längs des grössten Kreises der glatten inneren Fläche eines hohlen Ankerringes hingleitet, so wird die „Wirkung“ oder einfach die Länge des Weges von Punkt zu Punkt die kleinste mögliche für jede Länge sein, die kleiner als $\pi\sqrt{ab}$ ist (§ 351). Wenn daher eine Schnur um den grössten Kreis eines vollkommen glatten Ankerringes gelegt wird, so wird sie *abgleiten, wenn man sie nicht in ihrer Lage* durch Haken oder durch Bänder irgend einer Art festhält, die um den Kreis herum in Punkten sich befinden, deren Entfernungen von einander kleiner als $\pi\sqrt{ab}$ sind. Man vergleiche hier auch § 361.

Oder wenn ein materieller Punkt eine geneigte cylindrische Rinne hinuntergleitet, so wird die Wirkung von irgend einem Punkte an bis zu einem anderen Punkte längs der geradlinigen Bahn die kleinste mögliche sein, wenn dieser Punkt in einer Zeit erreicht wird, die kleiner als diejenige ist, in welcher ein einfaches Pendel, dessen Länge gleich dem Radius der Rinne ist, und das anstatt von der ganzen Schwerkraft g von einer Kraft $g \cos i$ beeinflusst wird, seine grösste Abweichung nach einer Seite zu erreicht. Von irgend einem Punkte an bis zu einem anderen Punkte wird aber die Wirkung in der geraden Bahn kein Minimum sein, wenn die Zeit, in welcher dieser Punkt erreicht wird, grösser als die angegebene Grösse ist. Der Fall, in welchem die Rinne horizontal ($i = 0$) ist und der materielle Punkt dieselbe entlang geschleudert wird, ist besonders einfach und lehrreich; man kann ihn leicht eingehend bearbeiten, ohne einen der allgemeinen Sätze über die Wirkung voraussetzen zu müssen.

367. Hamilton's zweite Form seiner charakteristischen Function. — In unserer früheren Darstellung des Hamilton'schen Princips und der Entwicklungen und Anwendungen, die dasselbe erhalten hat, haben wir ein Verfahren befolgt (§§ 321, 323), in welchem die anfänglichen und die Endcoordinaten, sowie die constante Summe der potentiellen und der kinetischen Energie die Elemente sind, als deren Function die Wirkung vorausgesetzt wird. Hamilton hat noch ein zweites Verfahren eingeschlagen, nach welchem die Wirkung durch die anfänglichen und die Endcoordinaten und die für die Bewegung vorgeschriebene Zeit ausgedrückt wird; auf diese Weise sind eine Reihe von Ausdrücken hergeleitet, welche den von uns entwickelten ganz analog sind. Für praktische Anwendungen ist diese Methode im Allgemeinen nicht so zweckmässig, wie die erstere, und die analytischen Beziehungen zwischen beiden sind so einleuchtend, dass wir auf dieselben hier nicht einzugehen brauchen.

368. **Satz von Liouville.** — Zum Schluss wollen wir noch auf eine neuere analytische Untersuchung der Bewegung eines conservativen Systems von Liouville (Comptes Rendus, 1856) aufmerksam machen, welche unmittelbar zu dem Princip der kleinsten Wirkung und zu dem Hamilton'schen Princip mit den von Jacobi und Anderen gegebenen Entwicklungen führt, welche aber auch einen bemerkenswerthen und absolut neuen Satz über die Grösse der Wirkung längs eines beliebigen gezwungenen Laufs liefert. Der Kürze wegen beschränken wir uns darauf, diesen Satz für einen einzelnen freien materiellen Punkt zu geben, und verweisen den Leser in Betreff der vollständigen Untersuchung Liouville's auf dessen Originalarbeit, in welcher allgemeine für jedes beliebige conservative System passende Coordinaten zu Grunde gelegt sind.

Es seien (x, y, z) die Coordinaten eines beliebigen Punktes, durch welchen sich der materielle Punkt hindurch bewegen möge, V seine potentielle Energie in dieser Lage, E die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie der in Rede stehenden Bewegung und A die Wirkung von einer beliebigen Lage (x_0, y_0, z_0) längs einer willkürlich gewählten Bahn bis zum Punkte (x, y, z). (Wir können z. B. annehmen, der materielle Punkt werde diese Bahn entlang durch eine Röhre geleitet, welche keine Reibung hervorruft.) Wird dann die Masse des Punktes als die Einheit angenommen, so ist (§ 318)

$$A = \int v\,ds = \int \sqrt{2(E-V)}\,\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Bezeichnet nun θ eine Function von x, y, z, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d\theta^2}{dx^2} + \frac{d\theta^2}{dy^2} + \frac{d\theta^2}{dz^2} = 2(E - V)$$

genügt, so haben wir

$$A = \int \sqrt{\left(\frac{d\theta^2}{dx^2} + \frac{d\theta^2}{dy^2} + \frac{d\theta^2}{dz^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

$$= \int \sqrt{\left[\left(\frac{d\theta}{dx}dx + \frac{d\theta}{dy}dy + \frac{d\theta}{dz}dz\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dz}dy - \frac{d\theta}{dy}dz\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dx}dz - \frac{d\theta}{dz}dx\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dy}dx - \frac{d\theta}{dx}dy\right)^2\right]}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\theta}{dx}dx + \frac{d\theta}{dy}dy + \frac{d\theta}{dz}dz = d\theta$$

und wenn $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die wirklichen Geschwindigkeitscomponenten längs der willkürlichen Bahn und $\dot{\theta}$ die Grösse der in dieser Bewegung während der Zeiteinheit erfolgenden Zunahme von θ bezeichnen,

$$dx = \dot{x}\,dt,\ dy = \dot{y}\,dt,\ dz = \dot{z}\,dt,\ d\theta = \dot{\theta}\,dt.$$

Der vorhergehende Ausdruck verwandelt sich daher in

$$A = \int d\theta \sqrt{\left\{1 + \frac{\left(\dot{y}\frac{d\theta}{dz} - \dot{z}\frac{d\theta}{dy}\right)^2 + \left(\dot{z}\frac{d\theta}{dx} - \dot{x}\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + \left(\dot{x}\frac{d\theta}{dy} - \dot{y}\frac{d\theta}{dx}\right)^2}{\dot{\theta}^2}\right\}}.$$

Drittes Capitel.

Erfahrung.

369. Beobachtung und Experiment. — Mit dem Ausdruck Erfahrung bezeichnen wir in der Physik, nach Herschel's Vorgang, unsere Mittel, mit der materiellen Welt und den sie regelnden Gesetzen bekannt zu werden. Im Allgemeinen sind die Erscheinungen, die wir um uns her vor sich gehen sehen, zusammengesetzt, d. h. Ergebnisse des Zusammenwirkens vieler Ursachen. Wenn wir, wie in der Astronomie, diese Ursachen dadurch zu bestimmen suchen, dass wir einfach ihre Wirkungen überwachen, so beobachten wir; wenn wir dagegen, wie in unseren Laboratorien, nach Belieben in die Ursachen oder Umstände einer Erscheinung eingreifen, so sagt man, wir experimentiren.

370. Beobachtung. — So z. B. können wir unter der Voraussetzung, dass wir im Besitz von Instrumenten zur Zeit- und Winkelmessung sind, durch eine Reihe von Beobachtungen die relative Lage erforschen, welche Sonne und Erde in verschiedenen Augenblicken zu einander einnehmen, und aus den Variationen in dem scheinbaren Durchmesser der ersteren liessen sich (die Methode lässt sich durchaus nicht mit Genauigkeit anwenden; wir führen sie hier nur der Erläuterung wegen an) die Verhältnisse unserer Abstände von derselben für jene Augenblicke berechnen. Wir würden auf diese Weise zu einer Reihe von Beobachtungen gelangen, in denen die Zeit, die angulare Lage in Beziehung auf die Sonne und die Verhältnisse der Abstände von derselben enthalten wären, und diese Beobachtungen würden (wenn ihre Anzahl gross genug wäre) uns in den Stand setzen, die Gesetze zu entdecken, welche den Zusammenhang jener Bestimmungsstücke ausdrücken.

Aehnliche Methoden könnte man ersinnen für die Betrachtung der Bewegung irgend eines Planeten um die Sonne, eines Trabanten um seinen Planeten, oder eines Sternes einer Doppelgruppe um den anderen.

371. Im Allgemeinen werden alle Data der Astronomie auf diesem Wege bestimmt, und dasselbe gilt von solchen Gegenständen, wie Ebbe und Fluth, oder Meteorologie. So sind die Linien gleicher Temperatur, gleicher magnetischer Neigung oder Intensität, die Linien ohne magnetische Abweichung, der Zusammenhang der Sonnenflecke mit dem Erdmagnetismus und eine Menge anderer Data und Erscheinungen, die im Verlaufe dieses Werkes in den betreffenden Capiteln behandelt werden müssen, nur aus der Beobachtung herzuleiten. In diesen Fällen findet sich der Apparat für diese ungeheuren Experimente in der Natur fertig aufgestellt vor, und der Forscher hat nichts zu thun, als ihren Verlauf bis in die letzten Einzelheiten zu überwachen und zu messen.

372. Auch in dem oben gewählten Beispiele, den planetarischen Bewegungen, sind die beobachteten Wirkungen zusammengesetzter Art; denn, ausser vielleicht im Falle eines Doppelsternes, haben wir kein Beispiel einer ungestörten Wirkung eines Himmelskörpers auf einen anderen. Aber wenn es sich um eine erste Annäherung handelt, so ergiebt sich, dass die Bewegung eines Planeten um die Sonne dieselbe ist, wie wenn ausser diesen beiden keine anderen Körper existirten. Die Annäherung reicht aus, das wahrscheinliche Gesetz ihrer Wechselwirkung anzudeuten, dessen volle Bestätigung erlangt wird, wenn wir, seine Wahrheit voraussetzend, die danach berechneten störenden Wirkungen in Anschlag bringen und finden, dass letztere die beobachteten Abweichungen von den Consequenzen der ersten Voraussetzung vollständig erklären. Dies mag dazu dienen, einen Begriff von der Art und Weise zu geben, wie man die Gesetze von Erscheinungen findet, die nur in zusammengesetzter Form beobachtet werden können; die Methode lässt sich immer direct anwenden, wenn man weiss, dass eine Ursache von überwiegendem Einflusse ist.

373. **Experiment.** — Wir wollen jetzt einen Fall der zweiten Art betrachten, d. h. einen Fall, in welchem die Wirkungen aus so verschiedenen Ursachen herrühren, dass wir die letzteren aus der Beobachtung von Combinationen, wie sie die Natur darbietet, nicht herleiten können, sondern suchen müssen, uns selbst andere Combinationen zu bilden, die uns in den Stand setzen, die Wirkungen jeder Ursache wo möglich einzeln, jedenfalls aber mit einer nur ge-

ringen, durch das Eingreifen anderer Ursachen herbeigeführten Modification zu studiren.

Wenn ein Stein losgelassen wird, so fällt er auf den Boden; wenn ein Ziegelstein und ein Kieselstein in demselben Augenblick von der Spitze einer Klippe fallen gelassen werden, so bleiben sie im Fallen neben einander und erreichen gleichzeitig den Boden. Bei einem Ziegelstein und einem Schiefer ist dies nicht der Fall, und während der erstere in einer nahezu verticalen Richtung fällt, beschreibt der letztere einen sehr verwickelten Weg. Ein Bogen Papier oder ein Stück Goldblatt zeigt sogar noch grössere Unregelmässigkeiten als ein Schieferstein. Aber durch eine geringe Modification der Umstände gewinnen wir eine tiefere Einsicht in die Natur der Frage. Werden das Papier und das Goldblatt in Kugeln zusammengerollt, so fallen sie in einer nahezu verticalen Linie. Es sind hier im Grunde offenbar zwei Ursachen thätig, von denen die eine bewirkt, dass alle Körper fallen und zwar in verticaler Richtung, während die zweite, die von der Gestalt und Substanz des Körpers abhängt, dessen Fall zu verzögern und die verticale Richtung zu ändern strebt. Wie können wir die Wirkungen, welche die erstere Ursache auf alle Körper hat, studiren, ohne merklich durch die letztere gestört zu werden? Die Wirkungen des Windes, u. s. w. zeigen ohne Weiteres an, was die zweite Ursache ist, nämlich die Luft (wir dürfen in der That annehmen, dass die Existenz der Luft durch solche Wirkungen entdeckt worden ist), und um die Natur der Wirkung der ersteren Ursache zu studiren, ist es nöthig, die Verwicklungen zu beseitigen, welche aus der Anwesenheit der Luft herrühren. Daraus ergiebt sich die Nothwendigkeit eines Experimentes. Mittels eines später zu beschreibenden Apparates entfernen wir aus dem Innern eines Gefässes den grösseren Theil der Luft, und in diesem Gefässe stellen wir sodann aufs Neue unsere Versuche über den Fall der Körper an. Dann tritt sofort ein allgemeines Gesetz zu Tage, das im höchsten Grade einfach und in seinen Folgen von ungeheurer Wichtigkeit ist, nämlich dass alle Körper, von welcher Grösse, Form und Substanz sie auch sein mögen, im luftleeren Raume stets neben einander bleiben, wenn man sie in demselben Moment neben einander hat fallen lassen. Bevor die Erscheinungen auf diese Weise experimentell getrennt waren, hatten sich zu hastige Philosophen in den Schluss gestürzt, dass einige Körper die Eigenschaft der Schwere, andere die der Leichtigkeit besitzen, u. s. w. Wäre dieser Zustand der Dinge geblieben, so würde das Gesetz der Gravitation, obgleich deren Wirkung sich durch das ganze Weltall äussert, vom menschlichen Geist nie als ein allgemeines Princip erkannt worden sein.

Eine blosse Beobachtung des Blitzes und seiner Wirkungen würde uns nie zur Entdeckung ihrer Beziehungen zu den Erscheinungen geführt haben, welche geriebener Bernstein zeigt. Es war dazu eine Modification des Laufes der Natur erforderlich; wir mussten die atmosphärische Elektricität bis in unsere Laboratorien leiten. Ohne Experiment hätten wir sogar niemals die Existenz des Erdmagnetismus erkennen können.

374. **Regeln zur Leitung von Experimenten.** — In allen Fällen, in denen ein besonderes Agens oder eine besondere Ursache erforscht werden soll, sollten Experimente in der Weise angestellt werden, dass sie wo möglich zu Resultaten führen, die von dieser Ursache allein abhängen; oder wenn sich dies nicht ausführen lässt, so sollten sie so angeordnet werden, dass die Wirkungen der zu untersuchenden Ursache verstärkt werden, bis sie die unvermeidlichen gleichzeitig vorhandenen übrigen Wirkungen so sehr überwiegen, dass letztere nur als Störungen, nicht als wesentliche Modificationen der Wirkungen der Hauptursache angesehen werden können.

So können wir, um die Natur der Wirkung eines galvanischen Stromes auf eine magnetisirte Nadel zu finden, jede dieser beiden Methoden anwenden. Wir können z. B. die störenden Einwirkungen des Erdmagnetismus auf die Nadel dadurch neutralisiren, dass wir einem Magnetstabe eine passende Lage in ihrer Nähe geben. Dies ist ein Beispiel der ersteren Methode.

Wir können auch durch Vergrösserung der Stromstärke oder dadurch, dass wir den Draht mehrmals um die Nadel führen (wie bei der Beschreibung des Galvanometers dargelegt werden wird), die Wirkungen des Stromes in einem solchen Grade verstärken, dass im Vergleich mit ihnen die Wirkungen des Erdmagnetismus vernachlässigt werden dürfen.

375. In einigen Fällen jedoch ist die letztere Art zu verfahren äusserst trügerisch — so z. B. bei der Anwendung von Condensatoren zur Entdeckung von sehr kleinen elektromotorischen Kräften. In diesem Falle erzeugt die Reibung zwischen den Theilen des Condensators oft mehr Elektricität, als diejenige ist, welche gemessen werden soll, so dass sich das richtige Resultat nicht herleiten lässt: Eine schwache positive Ladung z. B. kann verdreifacht, neutralisirt oder sogar in eine negative Ladung verwandelt werden, durch ver-

schiedene Vorgänge, die von so delicater Natur sind, dass sie nicht entdeckt und daher nicht vermieden werden können.

376. Wir sehen somit, dass es zweifelhaft ist, welche von diesen Methoden in einem besonderen Falle den Vorzug verdient, und in der That hat derjenige bei seinen Untersuchungen die meiste Aussicht auf Erfolg, der, nicht entmuthigt durch das Fehlschlagen einer Form des Experimentes, sorgfältig seine Methoden ändert und so in jeder denkbaren Weise den Gegenstand seiner Forschungen in Angriff nimmt.

377. **Rückständige Erscheinungen.** — Eine äusserst wichtige von Herschel herrührende Bemerkung betrifft die sogenannten rückständigen Erscheinungen. Wenn in einem Experiment alle bekannten Ursachen in Rechnung gezogen sind, so bleiben doch noch gewisse Wirkungen unerklärt zurück (die übrigens äusserst gering sein mögen). Diese Wirkungen müssen sorgfältig erforscht werden, und es ist jede denkbare Abänderung in der Anordnung des Apparates, u. s. w. zu versuchen, bis wir wo möglich dahin gelangen, die rückständige Erscheinung so zu vergrössern, dass wir ihre Ursache entdecken können. Auf diesem Wege haben wir vielleicht bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft die meiste Aussicht, unser Wissensgebiet zu erweitern; jedenfalls wird dies Verfahren durch die neueste Geschichte der Naturwissenschaften gerechtfertigt. So war, um nur einige wenige Beispiele zu geben, und die Entdeckung der Elektricität und des Magnetismus durch die Alten mit Stillschweigen zu übergehen, der eigenthümliche Geruch, den man in einem Zimmer beobachtet, in welchem eine Elektrisirmaschine in Thätigkeit erhalten wird, schon seit langer Zeit wahrgenommen worden; aber man nannte ihn „Geruch der Elektricität", und, hiermit zufrieden, liess man ihn unerklärt. Der Scharfsinn Schönbein's führte zu der Entdeckung, dass dieser Geruch von der Bildung des Ozons herrührt, eines ganz ungewöhnlichen Körpers von enormer chemischer Energie, dessen Natur noch unaufgeklärt ist, obwohl er seit Jahren die Aufmerksamkeit der Chemiker auf sich gezogen hat.

378. Geringe Anomalien in der Bewegung des Uranus führten Adams und Le Verrier zu der Entdeckung eines neuen Planeten, und die Thatsache, dass eine Magnetnadel schneller zur Ruhe kommt, wenn sie über einer Kupferplatte schwingt, als wenn letztere entfernt ist, führte Arago zu dem früher sogenannten „Rotationsmagnetismus", der seitdem erklärt, unendlich erweitert und zu den wichtigsten Zwecken angewandt worden ist. In der That leitete

diese zufällige Bemerkung über die Oscillation einer Nadel zu Thatsachen, aus denen sich unter Faraday's Händen die grosse Entdeckung der Induction elektrischer Ströme durch Magnete und durch andere Ströme entwickelte. Wir haben nicht nöthig, uns über diesen Punkt weiter auszulassen, da die Beweise für die Wahrheit und den Nutzen des Princips auf den folgenden Seiten beständig wiederkehren werden. Unser Zweck ist gewesen, nicht sowohl Anwendungen, als Methoden zu geben und zu zeigen, wie man eine neue Combination wo möglich anzugreifen hat, wenn man die verschiedenen Ursachen, durch deren Zusammenwirken die meisten beobachteten Erscheinungen, sogar die anscheinend einfachsten, hervorgebracht zu werden pflegen, trennen und einzeln studiren will.

379. **Unerwartete Uebereinstimmung oder Abweichung in den Resultaten verschiedener Versuche.** — Wenn ein Experiment bei mehrmaliger Wiederholung beständig verschiedene Resultate liefert, so ist es entweder sehr nachlässig angestellt worden, oder es muss eine nicht in Rechnung gezogene störende Ursache vorhanden sein. Andererseits hat man in Fällen, in denen es nicht wahrscheinlich ist, dass wiederholte Versuche zu sehr nahe übereinstimmenden Resultaten führen werden, einen unerwarteten Grad von Uebereinstimmung in den Resultaten verschiedener Versuche mit dem äussersten Misstrauen anzusehen, da dieselbe wahrscheinlich von einer unbeachteten Eigenthümlichkeit des angewandten Apparates herrührt. In jedem dieser beiden Fälle wird jedoch eine sorgfältige Beobachtung jedenfalls die Ursache der Abweichungen oder der unerwarteten Uebereinstimmung ans Licht bringen und möglicherweise zu Entdeckungen in einem Gebiete führen, an das man durchaus nicht gedacht hat. Wir könnten eine Menge Beispiele dieser Art anführen, wollen uns aber mit einem oder zweien begnügen.

380. So scheint ein Stern, durch ein sehr gutes achromatisches Teleskop betrachtet, eine merkliche Scheibe zu haben. Da wir aber beobachten, dass die Scheiben aller Sterne von gleichem angularen Durchmesser zu sein scheinen, so argwöhnen wir natürlich einen allen Beobachtungen gemeinschaftlichen Irrthum. Eine Verkleinerung der Oeffnung des Objectivglases vergrössert den erwähnten Schein, und bei gründlicher Untersuchung ergiebt sich, dass wir es gar nicht mit wirklichen Scheiben, sondern mit einer Diffractionserscheinung zu thun haben, die später in den Capiteln über das Licht ihre Erklärung finden wird.

Weiter fand man, als man zur Nachtzeit Experimente mit Kanonen anstellte, um die Geschwindigkeit des Schalles zu messen, dass die auf der einen Station erhaltenen Resultate mit denjenigen der anderen Station niemals übereinstimmten. Oefters waren die Abweichungen sehr beträchtlich. Aber ein wenig Ueberlegung führte zu der Bemerkung, dass in solchen Nächten, in denen die Abweichung am grössten war, ein starker Wind annähernd in der Richtung von der einen Station zur anderen wehte. Als man den in die Augen springenden Einfluss des Windes in Rechnung zog oder vielmehr ganz eliminirte, stellte sich heraus, dass die mittleren Geschwindigkeiten an verschiedenen Abenden sehr nahe übereinstimmen.

381. **Hypothesen.** — Es ist vielleicht rathsam, hier einige wenige Worte über den Gebrauch der Hypothesen zu sagen, namentlich jener an Werth so verschiedenen Hypothesen, welche in der Form mathematischer Theorien verschiedener Zweige der Physik gelehrt werden.

382. Wo die betreffenden Kräfte vollständig bekannt sind, wie im Falle der Planeten-Bewegungen und Störungen, da ist die mathematische Theorie absolut wahr, und es ist weiter nichts erforderlich, als sie mittels der Analysis bis in ihre letzten Einzelheiten zu entwickeln. Sie ist auf diese Weise der Beobachtung im Allgemeinen weit voraus und berechtigt, Wirkungen vorherzusagen, die noch nie beobachtet worden sind, wie z. B. Mondungleichheiten, die von der Wirkung der Venus auf die Erde herrühren, u. s. w., Wirkungen, deren wahre Ursache wir niemals durch noch so viele Beobachtungen ohne Hülfe der Theorie hätten angeben können. Sie kann auch in Gegenständen wie die geometrische Optik zu Entwicklungen geführt werden, die über das Bereich des Experimentes weit hinausliegen; aber in dieser Wissenschaft sind die angenommenen Grundlagen der Theorie nur approximativ, und dieselbe kann nicht einmal so vergleichsweise einfache Erscheinungen, wie Höfe und Regenbogen, in allen ihren Eigenthümlichkeiten erklären, obgleich sie für die praktischen Zwecke der Herstellung von Mikroskopen und Teleskopen vollständig genügt und in diesen Fällen die Construction von Instrumenten zu einem Grade der Vollendung gebracht hat, der bei einem nur auf Versuche gestützten Verfahren nie hätte erreicht werden können.

383. Weiter ist eine andere Classe mathematischer Theorien, die bis zu einem gewissen Grade auf Experimente basirt sind, von Nutzen und hat sogar in gewissen Fällen auf neue und wichtige Resultate hingewiesen, die nachträglich experimentell bestätigt worden sind. Hierher gehören die dynamische Wärmetheorie, die Undulationstheorie des Lichtes, u. s. w. In der ersteren, welche auf

der experimentellen Thatsache beruht, dass Wärme Bewegung ist, sind viele Formeln für jetzt dunkel und nicht zu interpretiren, da wir nicht wissen, was sich bewegt, oder wie die Bewegung erfolgt. Resultate der Theorie, in denen das, was unbekannt bleibt, nicht in Betracht kommt, werden natürlich experimentell bewahrheitet. Dieselben Schwierigkeiten treten in der Theorie des Lichtes auf. Bevor aber diese Dunkelheit völlig aufgeklärt werden kann, müssen wir etwas über die letzte oder molekulare Constitution der Körper oder der Molekülgruppen wissen, die uns bis jetzt nur in ihrer Vereinigung bekannt sind.

384. Gute Repräsentanten einer dritten Classe von Hypothesen sind die mathematischen Theorien der Wärme (Leitung), der (ruhenden) Elektricität und des (permanenten) Magnetismus. Obschon wir nicht wissen, wie die Wärme sich durch die Körper verbreitet, und was ruhende Elektricität oder permanenter Magnetismus ist, so sind die Gesetze ihrer Kräfte doch so sicher wie das Gesetz der Schwere bekannt, und können daher wie letzteres durch Anwendung der mathematischen Analysis bis in alle ihre Consequenzen entwickelt werden. Die Werke von Fourier*), Green**) und Poisson***) sind bemerkenswerthe Beispiele solcher Entwicklungen. Ein anderes gutes Beispiel ist Ampère's Theorie der Elektrodynamik. Dies führt uns zu einer vierten Classe mathematischer Theorien, die, so geistreich sie auch sein mögen, in Wirklichkeit doch eher als schädlich, denn als nützlich angesehen werden müssen.

385. Ein guter Repräsentant einer solchen Theorie ist die von Weber, welche eine physikalische Grundlage für Ampère's Theorie der Elektrodynamik zu liefern verspricht, die wir soeben als bewundernswerth und in Wahrheit nützlich erwähnt haben. Ampère begnügt sich mit experimentellen Daten über die Wirkung geschlossener Ströme auf einander und leitet daraus mathematisch die Wirkung her, welche ein Element eines Stromes auf ein Element eines anderen Stromes ausüben sollte, wenn ein solcher Fall experimentell behandelt werden könnte. Dies kann keinen Irrthum herbeiführen. Aber Weber geht weiter. Er nimmt an, dass ein elektrischer Strom aus der Bewegung von Theilchen zweier Elektricitätsarten besteht, die den Leitungsdraht in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, und dass diese Theilchen, wenn sie in

*) Théorie Analytique de la Chaleur. Paris 1822.

**) Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham 1828. Abgedruckt in Crelle's Journal.

***) Mémoires sur le Magnétisme. Mém. de l'Acad. des Sciences. 1811.

relativer Bewegung sind, auf andere solche Elektricitätstheilchen Kräfte ausüben, die von denjenigen verschieden sind, welche sie im Zustande relativer Ruhe ausüben würden. Diese Annahme ist bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft auf keine Weise zu rechtfertigen, da wir uns die Hypothese, es existirten zwei elektrische Fluida, unmöglich als richtig denken können, und da die Schlüsse ausserdem im Widerspruch mit der „Erhaltung der Energie" stehen, die wir aus unzähligen experimentellen Gründen als ein allgemeines Naturprincip ansehen. Solche Theorien sind um so gefährlicher, wenn sie zufällig weitere Erscheinungen erklären, wie Weber's Theorie die inducirten Ströme erklärt. Ein anderes Beispiel dieser Art ist die Emissionstheorie des Lichtes, welche eine Zeit lang grosses Unheil stiftete und die sich nur hätte rechtfertigen lassen, wenn ein Lichtkörperchen wirklich wahrgenommen und untersucht worden wäre. Da solche Speculationen zwar gefährlich, aber interessant und (wie z. B. Weber's Theorie) oft sehr elegant sind, so werden wir darauf in den entsprechenden Capiteln zurückkommen.

386. **Verschiedene Arten mathematisch-physikalischer Theorien.** — Mathematische Theorien physikalischer Kräfte sind im Allgemeinen von einer der beiden folgenden Arten: Erstens giebt es solche, bei denen die Grundannahme weit allgemeiner ist, als nothwendig wäre. So enthält die Gleichung der Laplace'schen Functionen [Cap. I, Anhang B, (a)] die mathematische Begründung der Theorien der Gravitation, der statischen Elektricität, des permanenten Magnetismus, der permanenten Wärmeströmung, der Bewegung nicht zusammendrückbarer Flüssigkeiten, u. s. w. und muss daher, wenn man sie auf irgend einen dieser Gegenstände anwendet, von einschränkenden Betrachtungen begleitet werden.

Andererseits giebt es mathematische Theorien, die nur auf einige wenige Experimente oder auf einfache aber ungenaue Hypothesen aufgebaut sind und mehr auf dem Wege der Erweiterung, als auf dem der Beschränkung modificirt werden müssen. Als ein wichtiges Beispiel dieses Falles können wir die ganze abstracte Dynamik anführen, welche (wie im dritten Theile dargelegt werden wird) erweiternde Modificationen erfordert, ehe sie im Allgemeinen auf praktische Zwecke angewendet werden kann.

387. **Herleitung des wahrscheinlichsten Resultates aus einer Anzahl von Beobachtungen.** — Wenn man das wahrscheinlichste Resultat aus einer Anzahl nicht völlig übereinstimmender Beobachtungen derselben Grösse ermitteln will, so hat man mit Hülfe der mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeiten eine

Methode zu suchen, mittels welcher man die Resultate der Erfahrung so combinirt, dass die Ungenauigkeiten der Beobachtung soweit als möglich eliminirt werden. Unter die Ungenauigkeiten der Beobachtung rechnen wir hier natürlich nicht solche Irrthümer, welche jede einzelne einer Reihe von Beobachtungen auf gleiche Weise beeinflussen, wie die ungenaue Bestimmung eines Nullpunktes oder der zu Grunde gelegten Zeit- und Raumeinheiten, die persönliche Gleichung des Beobachters, u. s. w. Das Verfahren, welches zur Elimination der Fehler zu benutzen ist, lässt sich, von welcher Art es auch sein mag, zwar auch auf diese Irrthümer anwenden, aber nur, wenn mehrere verschiedene Reihen von Beobachtungen angestellt worden sind, bei denen ein Wechsel des Instruments oder des Beobachters oder beider stattgefunden hat.

388. Wir verstehen unter Ungenauigkeiten der Beobachtung oder Beobachtungsfehlern die ganze Classe von Irrthümern, welche bei verschiedenen Versuchen mit derselben Wahrscheinlichkeit in der einen wie in der anderen Richtung liegen können, und von denen wir ruhig voraussetzen dürfen, dass sie sich im Durchschnitt bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen ganz und gar ausgleichen würden, so dass dieses Durchschnittsresultat weder nach der einen, noch nach der anderen Seite zu von der Wahrheit abwiche. Ueberdies betrachten wir nur solche Irrthümer, deren Wahrscheinlichkeit um so geringer ist, je grösser sie sind, so dass solche Irrthümer, wie ein zufälliges Ablesen einer falschen Anzahl ganzer Grade auf einer Kreistheilung (die im Allgemeinen durch Vergleichung mit anderen Beobachtungen wahrscheinlich berichtigt werden können) keine Berücksichtigung zu finden haben.

389. Mathematisch betrachtet ist der Gegenstand durchaus nicht leicht, und manche Autoritäten haben sich dahin ausgesprochen, dass das von Laplace, Gauss und Anderen angewandte Schlussverfahren nicht wohl begründet ist; aber die Resultate, zu denen letztere durch ihre Untersuchungen geführt wurden, sind allgemein angenommen. Da neuerdings eine treffliche Arbeit über den Gegenstand von Airy erschienen ist, so können wir uns damit begnügen, in ganz kursorischer Weise hier eine einfache und augenscheinlich befriedigende Methode zu skizziren, vermittels welcher wir zur sogenannten Methode der kleinsten Quadrate gelangen.

390. Unter der Voraussetzung, dass der Nullpunkt und die Graduirung eines Instrumentes (Mikrometer, Mauerquadrant, Thermometer, Elektrometer, Galvanometer, u. s. w.) absolut richtig sind, kann und wird man im Allgemeinen bei einer Reihe von Ablesungen des Werthes einer Grösse (einer linearen Entfernung, der Höhe eines Sternes, einer Temperatur, der elektrischen Spannung eines Conductors, der Stärke eines elektrischen Stromes, u. s. w.) verschiedene Resultate erhalten. Welches ist mit der grössten Wahrscheinlichkeit der wahre Werth der beobachteten Grösse?

Wenn die Beobachtungen sämmtlich gleich zuverlässig sind, so ist der wahrscheinlichste Werth in allen solchen Fällen offenbar der einfache Mittelwerth aller Resultate. Sind aber die Beobachtungen nicht gleich zuverlässig, so hat man ihnen im Verhältniss zu der ihnen zugeschriebenen Genauigkeit Gewichte beizulegen, und dann erst ihren Mittelwerth zu nehmen. Wenn aber mehrere solche Mittelwerthe oder mehrere einzelne Beobachtungen genommen, und wenn diese Mittelwerthe oder Beobachtungen auf verschiedene Weise für die Bestimmung der gesuchten Grösse passend gemacht sind (indem einige derselben wahrscheinlich einen genaueren Werth als andere liefern werden), so müssen wir theoretisch die beste Methode angeben, nach welcher sie in der Praxis zu combiniren sind.

391. Beobachtungsfehler können im Allgemeinen mit derselben Wahrscheinlichkeit nach der Seite des zu viel, wie des zu wenig liegen. Auch ist es (wie oben bemerkt wurde) wahrscheinlicher, dass sie klein, als dass sie gross sind, und (praktisch) bedeutende Fehler sind ganz und gar nicht zu erwarten, da sie vermieden werden können. Danach muss bei einer Reihe von Beobachtungen derselben Grösse die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler von der Grösse x begangen worden ist, von x^2 abhängen und durch irgend eine Function ausgedrückt werden, deren Werth bei wachsendem x sehr rasch abnimmt. Auch muss die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen x und $x + \delta x$ liegt, wo δx sehr klein ist, proportional δx sein.

Wir können mithin die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler von irgend einer in dem Intervall x bis $x + \delta x$ liegenden Grösse begangen ist, gleich

$$\varphi(x^2)\,\delta x$$

annehmen. Da nun der Fehler jedenfalls zwischen $+\infty$ und $-\infty$ liegt, so erhalten wir als erste Bedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2)\,dx = 1. \tag{1}$$

Die Betrachtung eines sehr einfachen Falles liefert uns die Mittel, die Form der in diesem Ausdrucke enthaltenen Function φ zu bestimmen *).

*) Vergl. Boole, Trans. R. S. E.; 1857.

Nehmen wir an, man liesse einen Stein fallen, mit der Absicht, eine bestimmte Stelle des Bodens zu treffen. Durch diese Stelle seien zwei Linien rechtwinklig zu einander gezogen, die wir beziehungsweise zur x und y Axe nehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Stein in eine Entfernung von der y Axe fällt, die zwischen x und $x + \delta x$ liegt, ist

$$\varphi(x^2)\,\delta x;$$

die Wahrscheinlichkeit, dass er in eine Entfernung von der x Axe fällt, die zwischen y und $y + \delta y$ liegt, ist

$$\varphi(y^2)\,\delta y.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Flächenelement $\delta x\,\delta y$ getroffen werde, dessen Coordinaten x, y sind, ist daher (da diese Ereignisse von einander unabhängig sind, eine Voraussetzung, auf welcher, was wohl zu beachten ist, unsere ganze Untersuchung beruht)

$$\varphi(x^2)\,\varphi(y^2)\,\delta x\,\delta y, \text{ oder } \alpha\,\varphi(x^2)\,\varphi(y^2),$$

wenn α die um den Punkt (x, y) liegende unendlich kleine Fläche bezeichnet.

Wenn wir irgend ein anderes rechtwinkliges Axensystem mit demselben Anfangspunkt genommen hätten, so würden wir für dieselbe Wahrscheinlichkeit den Ausdruck

$$\alpha\,\varphi(x'^2)\,\varphi(y'^2)$$

gefunden haben, wo x', y' die neuen Coordinaten von α sind. Es muss also

$$\varphi(x^2)\,\varphi(y^2) = \varphi(x'^2)\,\varphi(y'^2)$$

sein, wenn $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ ist. Aus dieser Functionengleichung folgt leicht

$$\varphi(x^2) = A\,e^{mx^2},$$

wo A und m Constanten sind. Wir sehen auch leicht, dass m negativ sein muss (da die Wahrscheinlichkeit eines grossen Fehlers sehr klein ist), und können dafür $-\frac{1}{h^2}$ schreiben, so dass h den Grad der Feinheit oder Plumpheit des angewandten Messungssystems bezeichnet. Durch Einsetzung des Werthes von $\varphi(x^2)$ in (1) ergiebt sich

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx = 1;$$

es ist also $A = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$, und das Fehlergesetz, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler von der Grösse x begangen sei, ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,\frac{\delta x}{h}.$$

Wird nur die Entfernung von der zu treffenden Stelle des Bodens ins Auge gefasst und auf die Richtung, in welcher der Fehler begangen ist, keine Rücksicht genommen, so ist das Fehlergesetz offenbar

$$\int\int \varphi(x^2)\,\varphi(y^2)\,dx\,dy,$$

welches Integral über den Raum zwischen den concentrischen Kreisen zu nehmen ist, deren Radien r und $r + \delta r$ sind. Das Fehlergesetz ist daher

$$\frac{2}{h^2} e^{-\frac{r^2}{h^2}} r \, \delta r,$$

und zur Bestätigung desselben ergiebt sich leicht, wie zu erwarten war,

$$\frac{2}{h^2} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{h^2}} r \, dr = 1.$$

392. Wahrscheinlicher Fehler. — Der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung ist eine numerische Grösse von der Beschaffenheit, dass der Fehler der Beobachtung mit derselben Wahrscheinlichkeit grösser oder kleiner als diese Grösse sein kann.

Nehmen wir das eben gefundene Fehlergesetz an und nennen den wahrscheinlichen Fehler bei einem Versuch P, so ist

$$\int_0^P e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = \int_P^\infty e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx.$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert den Näherungswerth

$$P = 0{,}477 \, . \, h.$$

393. Wahrscheinlicher Fehler einer Summe, einer Differenz oder eines Vielfachen. — Der wahrscheinliche Fehler eines beliebigen gegebenen Vielfachen des Werthes einer beobachteten Grösse ist offenbar dasselbe Vielfache des wahrscheinlichen Fehlers der Grösse selbst.

Der wahrscheinliche Fehler der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche mit von einander unabhängigen Fehlern behaftet sind, ist die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der einzelnen wahrscheinlichen Fehler.

Dies zu beweisen, wollen wir das Fehlergesetz von

$$X \pm Y = Z$$

erforschen, unter der Voraussetzung, dass die Fehlergesetze von X und Y beziehungsweise

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \frac{dx}{a} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{b^2}} \frac{dy}{b}$$

sind. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in Z, dessen Grösse die Grenzen $[z, z + \delta z]$ nicht überschreitet, ist offenbar

$$\frac{1}{\pi a b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \int_{z-x}^{z+\delta z-x} e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy.$$

Denn, welcher Werth auch x beigelegt wird, der Werth von y wird durch die Grenzen $z - x$ und $z + \delta z - x$ gegeben [oder durch $z + x$, $z + \delta z + x$; aber die Wahrscheinlichkeiten von $\pm x$ sind dieselben und liegen beide innerhalb der Grenzen $(\pm \infty)$ der Integration nach x].

Führen wir die Integration nach y aus, so wird der Werth des obigen Integrals

$$\frac{\delta z}{\pi a b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{b^2}} dx,$$

und dieser Ausdruck wird leicht auf

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{a^2+b^2}} \frac{\delta z}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

reducirt. Der wahrscheinliche Fehler ist danach $0{,}477 \sqrt{a^2 + b^2}$, unser Satz folglich bewiesen. Dieser Satz ist offenbar auch für jede beliebige Anzahl von Grössen richtig.

394. Praktische Anwendung. — Wie schon bemerkt wurde, besteht der Hauptnutzen dieser Theorie darin, aus einer grossen Reihe von Beobachtungen die Werthe der gesuchten Grössen in einer solchen Form herzuleiten, dass sie dem kleinsten wahrscheinlichen Fehler unterworfen sind. Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern: — Nach den Principien der Astronomie wird der Ort eines Planeten aus angenommenen Werthen der Elemente seiner Bahn berechnet und im Schiffskalender verzeichnet. Die beobachteten Orte stimmen mit den durch Rechnung vorher bestimmten nicht genau überein und zwar aus zwei Gründen: erstens sind die Data für die Berechnung nicht exact (und in der That ist die Hauptaufgabe der Beobachtung die, die angenommenen Werthe derselben zu corrigiren); zweitens ist die Beobachtung in einem gewissen unbekannten Grade fehlerhaft. Die Differenz zwischen den beobachteten und den berechneten Orten hängt von den Fehlern in den angenommenen Elementen und in der Beobachtung ab. Unsere Methoden dienen nun dazu, die zweite Art von Fehlern so weit als möglich zu eliminiren; die resultirenden Gleichungen geben dann die gesuchten Correctionen der Elemente.

Ist ϑ die berechnete Rectascension eines Planeten und sind δa, δe, $\delta \varpi$, u. s. w. die für die angenommenen Elemente erforderten Correctionen, so ist die wahre Rectascension

$$\vartheta + A\delta a + E\delta e + \Pi\delta\varpi + \text{u. s. w.},$$

wo A, E, Π, u. s. w. annähernd bekannt sind. Nehmen wir an, die beobachtete Rectascension sei Θ, so ist

$$\vartheta + A\delta a + E\delta e + \Pi\delta\varpi + \text{u. s. w.} = \Theta,$$

oder

$$A\,\delta a + E\,\delta e + \Pi\,\delta\varpi + \text{u. s. w.} = \Theta - \vartheta$$

eine dem Beobachtungsfehler unterworfene bekannte Grösse. Jede einzelne Beobachtung liefert uns eine Gleichung von dieser Form, und im Allgemeinen ist die Anzahl der Beobachtungen weit grösser als die der zu bestimmenden Grössen $\delta a, \delta e, \delta\varpi$, u. s. w. Es wird aber genügen, den einfachen Fall zu betrachten, in welchem nur **eine** Grösse gesucht wird.

Es sei eine Reihe von Beobachtungen derselben Grösse x angestellt, welche zu den Gleichungen

$$x = B_1, \quad x = B_2, \text{ u. s. w.}$$

führen, und deren wahrscheinliche Fehler E_1, E_2, u. s. w. sind. Wir multipliciren beide Glieder jeder Gleichung mit einer Zahl, welche dem entsprechenden wahrscheinlichen Fehler umgekehrt proportional ist; dadurch werden die wahrscheinlichen Fehler der zweiten Glieder aller Gleichungen die nämlichen, etwa ε. Die Gleichungen haben jetzt die allgemeine Form

$$a\,x = b,$$

und es handelt sich darum, ein System linearer Factoren zu finden, mit denen die Gleichungen der Reihe nach multiplicirt werden müssen, damit man durch Addition derselben eine Endgleichung erhalte, welche einen Werth von x liefert, dessen wahrscheinlicher Fehler ein Minimum ist. Sind f_1, f_2, u. s. w. diese Factoren, so ist die Endgleichung

$$(\Sigma\,af)\,x = \Sigma\,(bf),$$

folglich nach den Sätzen des § 393, wenn P den wahrscheinlichen Fehler von x bezeichnet,

$$P^2\,(\Sigma\,af)^2 = \varepsilon^2\,\Sigma\,(f^2).$$

Es muss also $\dfrac{\Sigma(f^2)}{(\Sigma\,af)^2}$ ein Minimum, und der nach jedem einzelnen Factor f genommene Differentialquotient dieses Ausdrucks muss Null sein.

Dies liefert eine Reihe von Gleichungen, deren allgemeine Form

$$f\,\Sigma(af) - a\,\Sigma(f^2) = 0$$

ist, und woraus wir offenbar $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, u. s. w. erhalten.

Wir gelangen somit zu der folgenden Regel, von der man leicht sieht, dass sie für eine beliebige Anzahl linearer Gleichungen gültig bleibt, welche eine kleinere Anzahl unbekannter Grössen enthalten: —

Man bewirke durch Anwendung eines geeigneten Factors, dass der wahrscheinliche Fehler des zweiten Gliedes jeder Gleichung derselbe sei, multiplicire jede Gleichung mit dem Coefficienten, den x in derselben hat, und addire alle Resultate, so erhält man eine der Endgleichungen; die übrigen ergeben sich, wenn man ebenso in Beziehung auf y, z, u. s. w. verfährt. Die wahrscheinlichen Fehler der sich aus diesen Endgleichungen ergebenden Werthe von x, y, u. s. w. werden kleiner als diejenigen der Werthe sein, welche jede andere lineare Methode, die Gleichungen zu combiniren, liefern würde.

Man hat dies Verfahren die Methode der kleinsten Quadrate genannt, weil die dadurch gefundenen Werthe der unbekannten Grössen so beschaffen sind, dass sie die Summe der Quadrate der Fehler der anfänglichen Gleichungen zu einem Minimum machen.

In dem oben behandelten einfachen Falle ist

$$\Sigma (a x - b)^2 \text{ ein Minimum.}$$

Denn man erhält aus dieser Voraussetzung offenbar durch Differentiation nach x

$$\Sigma a (a x - b) = 0,$$

und dies ist das oben für die Bildung der Endgleichung angegebene Gesetz.

395. Methoden der Darstellung experimenteller Resultate. — Wenn eine Reihe von Beobachtungen derselben Grösse zu verschiedenen Zeiten oder unter verschiedenen Umständen angestellt worden ist, so kann das Gesetz, welches den Zusammenhang des Werthes der Grösse mit der Zeit oder mit einer beliebigen anderen Veränderlichen ausdrückt, aus den Resultaten auf verschiedene Arten hergeleitet werden, die sämmtlich mehr oder weniger approximativ sind. Zwei dieser verschiedenen Methoden werden aber so häufig angewandt, dass wir schon hier einer vorläufigen Betrachtung derselben eine oder zwei Seiten widmen wollen; detaillirte Beispiele ihrer Anwendung ersparen wir uns, bis wir zur Wärme, Elektricität, u. s. w. kommen werden. Sie bestehen in (1.) einer Curve, welche den Zusammenhang zwischen den Ordinaten und den Abscissen graphisch darstellt, und (2.) einer empirischen Formel, welche die Veränderlichen verbindet.

396. So können wir, wenn die Abscissen Zeitintervalle und die Ordinaten die entsprechenden Barometerhöhen darstellen, Curven construiren, welche die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Tageszeit auf einen Blick zeigen, u. s. w. Solche Curven können auf photographischem Wege mit grosser Genauigkeit auf ein Stück sensitives Papier gezogen werden, welches hinter die Quecksilbersäule gebracht und vermittels eines Uhrwerkes in eine gleichförmige horizontale Bewegung versetzt wird. Ein ähnliches Verfahren lässt sich auf die Temperatur und die Elektricität der Atmosphäre, sowie auf die Componenten des Erdmagnetismus anwenden.

397. Wenn die Beobachtungen nicht, wie im vorhergehenden Paragraphen, continuirlich sind, so liefern sie nur eine Anzahl von Punkten der Curve, mittels deren man sich jedoch im Allgemeinen mit grosser Genauigkeit dem Resultat einer continuirlichen Beobachtung dadurch nähert, dass man aus freier Hand eine Curve zieht, welche durch alle diese Punkte hindurchgeht. Dies Verfahren ist aber mit grosser Vorsicht anzuwenden, da, wenn nicht die Beobachtungen hinlänglich nahe an einander liegen, sehr wichtige Fluctuationen in der Curve unbemerkt bleiben können. Man kann sich desselben mit hinlänglicher Genauigkeit in allen Fällen bedienen, in denen sich die beobachtete Grösse sehr langsam ändert. So z. B. fand Forbes, dass wöchentliche Beobachtungen genügen, um mit grosser Genauigkeit das Gesetz zu finden, nach welchem sich die Temperatur in einer Tiefe von 6 bis 24 Fuss unter der Erdoberfläche ändert.

398. Als ein Beispiel der Verfahrungsarten, die man anwendet, um eine empirische Formel zu erhalten, erwähnen wir die Methoden der Interpolation, auf welche das Problem immer zurückgeführt werden kann. So ist es eine gewöhnliche Aufgabe der Astronomie, aus Beobachtungen der Sonnenhöhe, die man in bekannten Intervallen mit dem Sextanten angestellt, zu bestimmen, in welchem Augenblick die Höhe am grössten, und welches diese grösste Höhe ist. Die Lösung der ersteren Aufgabe setzt uns in den Stand, an dem Beobachtungsorte die wahre Sonnenzeit zu finden, die der zweiten liefert mit Hülfe des „Nautical Almanac" die Breite. Die Differentialrechnung und die Differenzenrechnung liefern uns Formeln für beliebige gesuchte Daten. Eine solche Formel, die von grossem Nutzen ist, hat Lagrange mit Hülfe der elementaren Algebra hergeleitet.

Ist $y = f(x)$, so haben wir nach dem Taylor'schen Satze

$$(1)\quad y = f(x_0 + \overline{x - x_0}) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}[x_0 + \vartheta (x - x_0)],$$

wo ϑ ein echter Bruch und x_0 eine ganz beliebige Grösse ist. Diese Formel ist nur dann von Nutzen, wenn die Werthe der successiven Differentialquotienten von $f(x_0)$ sehr rasch abnehmen.

In endlichen Differenzen haben wir

$$(2)\quad f(x + h) = D^h f(x) = (1 + \Delta)^h f(x) = f(x) + h \Delta f(x) + \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(x) + \cdots,$$

eine Formel, die sehr nützlich ist, wenn die höheren Differenzen sehr klein sind.

Die Formel (1) stellt den gesuchten Ausdruck in seiner genauen Form dar; aber nur in ganz seltenen Fällen lassen sich $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, u. s. w. direct aus der Beobachtung herleiten. Dagegen ist (2) von bedeutendem Nutzen, insofern sich die successiven Differenzen $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, u. s. w. leicht aus der Tabelle der Beobachtungsresultate berechnen lassen, vorausgesetzt dass diese für gleiche successive Zunahmen von x genommen worden sind.

Wenn eine Function für die Werthe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ annimmt, so giebt Lagrange für dieselbe den augenscheinlich richtigen Ausdruck

$$\left[\frac{y_1}{x-x_1}\,\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}\right.$$
$$\left.+\frac{y_2}{x-x_2}\,\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}+\cdots\right](x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Hier wird natürlich vorausgesetzt, dass die gesuchte Function eine rationale und ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x sei, und einer ähnlichen Beschränkung unterwirft man in der Praxis im Allgemeinen auch die anderen obigen Formeln; denn um den vollständigen Ausdruck für $f(x)$ in einer der beiden Formen zu finden, hat man bei Anwendung von (1) die Werthe von $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., bei Anwendung von (2) die Werthe von $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, ... zu bestimmen. Sollen n von den Coefficienten, also n Glieder des allgemeinen Ausdrucks von $f(x)$ ermittelt werden, so müssen n simultane Werthe von x und $f(x)$ beobachtet sein; dann werden die Ausdrücke bestimmt und beziehungsweise vom Grade $n-1$ in $x-x_0$ und h.

In der Praxis reicht es gewöhnlich aus, höchstens drei Glieder jeder der beiden ersten Reihen anzuwenden. So können wir, um die Abhängigkeit der Länge l eines Metallstabes von der Temperatur t auszudrücken, nach (1)

$$l = l_0 + A(t - t_0) + B(t - t_0)^2$$

annehmen, wo l_0 die bei einer beliebigen Temperatur t_0 gemessene Länge des Stabes ist.

Diese Formeln sind mit Nutzen anzuwenden, wenn es sich darum handelt, die wahrscheinlichen Werthe einer beobachteten Grösse für Werthe der unabhängig Veränderlichen zu berechnen, welche innerhalb des Bereichs liegen, für welches die Beobachtung Werthe dieser Grösse ergeben hat. Aber ausser für Werthe der unabhängig Veränderlichen, welche entweder wirklich in diesem Bereich oder doch nicht weit darüber hinaus, sei es in Richtung der grösseren oder der kleineren Werthe, liegen, drücken diese Formeln Functionen aus, welche im Allgemeinen immer weiter von der Wahrheit abweichen, je weiter sie über das Bereich directer Beobachtung hinaus angewendet werden.

Bei einer grossen Classe von Untersuchungen ist die beobachtete Grösse ihrer Natur nach eine periodische Function der unabhängig Veränderlichen. In allen solchen Fällen ist die Theorie der harmonischen Functionen (§§ 75, 76) anwendbar. Wenn die Werthe der unabhängig

Veränderlichen, für welche die Function beobachtet worden ist, nicht gleich weit von einander abstehen, so bestimmen sich die Coefficienten bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate durch ein nothwendiger Weise sehr mühseliges Verfahren. Wenn diese Werthe aber gleich weit von einander abstehen, und besonders wenn ihre Differenz ein Submultiplum der Periode ist, so wird die vermittels der Methode der kleinsten Quadrate hergeleitete Gleichung sehr vereinfacht. So bezeichne ϑ einen Winkel, der während der Periode T der Erscheinung der Zeit t proportional von 0 bis 2π wächst, so dass

$$\vartheta = \frac{2\pi t}{T}$$

ist; ferner sei

$$\begin{aligned} f(\vartheta) = A_0 &+ A_1 \cos\vartheta + A_2 \cos 2\vartheta + \cdots \\ &+ B_1 \sin\vartheta + B_2 \sin 2\vartheta + \cdots, \end{aligned}$$

wo $A_0, A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ unbekannte Coefficienten sind, die so bestimmt werden sollen, dass $f(\vartheta)$ nicht bloss für Zeitpunkte, die zwischen den Beobachtungszeiten liegen, sondern für die ganze Zeit, für welche die Erscheinung genau periodisch ist, den wahrscheinlichsten Werth der zu bestimmenden Grösse ausdrücken möge. Nimmt man so viele dieser Coefficienten, als es verschiedene durch die Beobachtung gewonnene Daten giebt, so wird die Formel in genaue Uebereinstimmung mit diesen Daten gebracht. In den meisten Anwendungen der Methode lässt sich aber der periodisch wiederkehrende Theil der Erscheinung durch eine kleine Anzahl Glieder der harmonischen Reihe ausdrücken, und die aus einer grossen Anzahl von Daten berechneten höheren Glieder drücken entweder Unregelmässigkeiten der Erscheinung, von denen es nicht wahrscheinlich ist, dass sie sich wiederholen, oder Beobachtungsfehler aus. So kann, wenn die Beobachtungen zahlreich, aber nicht besonders genau sind, eine verhältnissmässig geringe Anzahl von Gliedern sogar für solche Zeitpunkte, für welche Beobachtungen vorliegen, Werthe geben, die wahrscheinlicher als die wirklich beobachteten und aufgezeichneten Werthe sind.

Wir empfehlen dem Studirenden, die Gleichungen zur Bestimmung von fünf oder sieben oder mehr Coefficienten nach der Methode der kleinsten Quadrate niederzuschreiben und dieselben durch geeignete Formeln der analytischen Trigonometrie auf ihre einfachsten und am leichtesten berechneten Formen zu reduciren, wo die Werthe von ϑ, für welche $f(\vartheta)$ gegeben ist, gleich weit von einander abstehen. Er wird dann sehen, dass, wenn die Differenz $\frac{2\pi}{i}$ ist, wo i irgend eine ganze Zahl bezeichnet, und wenn die Anzahl der Daten i oder ein beliebiges Multiplum von i ist, jede der Gleichungen nur eine der unbekannten Grössen enthält, so dass die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Coefficienten durch die leichteste und directeste Elimination liefert.

Viertes Capitel.

Maasse und Messinstrumente.

399. Nothwendigkeit genauer Messungen. — Wir haben im vorhergehenden Capitel gesehen, dass wir zur Erforschung der Naturgesetze sorgfältig Experimente zu überwachen haben, seien es nun jene gigantischen Versuche, welche die Natur anstellt, oder diejenigen, welche zu speciellen Zwecken vom Menschen ersonnen und ausgeführt werden. In allen solchen Beobachtungen sind, wie wir sahen, genaue Messungen der Zeit, des Raumes, der Kraft, u. s. w. ganz unentbehrlich. Deshalb wollen wir jetzt einige der nützlicheren Instrumente, die man bei diesen Messungen anwendet, und die verschiedenen dabei gebrauchten Maasse oder Maasseinheiten kurz beschreiben.

400. Ehe wir auf Einzelheiten eingehen, werden wir eine kurze Uebersicht der wichtigsten Maasse und Instrumente geben, die in diesem Capitel beschrieben werden sollen. Die meisten derselben, wenn nicht alle, hängen von physikalischen Principien ab, die im Laufe dieses Werkes genau dargelegt werden; wir werden hier nicht bei der Feststellung solcher Principien verweilen, sondern dieselben anticipiren und die späteren Theile oder Capitel angeben, in denen die experimentellen Beweise ausführlicher auseinander gesetzt werden. Es wird dies Verfahren zwar einen unvermeidlichen, wenn auch unerheblichen Mangel an Ordnung nach sich ziehen — unerheblich, weil eine Uhr, eine Wage, eine Schraube, u. s. w. selbst denjenigen, die von der Physik nichts wissen, vertraute Begriffe sind; — unvermeidlich, weil es in der Natur unseres

Gegenstandes liegt, dass keiner seiner Theile für sich allein entwickelt werden kann, indem zur vollen Entwicklung eines jeden alle übrigen im höchsten Grade mitzuwirken haben. Wenn aber eine unserer Abtheilungen auf diese Weise von den übrigen borgt, so haben wir dafür die Genugthuung, dass sie durch den Einfluss, welchen ihr Fortschritt auf die übrigen Theile ausübt, das Geborgte mehr als zurückzahlt.

401. **Eintheilung der Instrumente in vier Classen.** — Unsere wichtigeren Fundamentalinstrumente lassen sich in vier Classen theilen: —

Instrumente zur Messung der Zeit,
" " " des Raumes (linearer oder angularer Grössen),
" " " der Kraft,
" " " der Masse.

Andere Instrumente, die für besondere Zwecke eingerichtet sind, wie zur Messung der Temperatur, des Lichts, elektrischer Ströme, u. s. w. werden naturgemässer in den Paragraphen über die besonderen physikalischen Gegenstände behandelt, auf deren Messung sie sich anwenden lassen.

402. Wir werden jetzt der Reihe nach die bedeutendsten Instrumente jeder dieser vier Classen und einige ihrer wichtigsten Anwendungen betrachten, nämlich:

Uhr, Chronometer, Chronoskop, Anwendungen auf die Beobachtung und auf selbstregistrirende Instrumente.

Vernier und Schraubenmikrometer, Kathetometer, Sphärometer, Theilmaschine, Theodolit, Sextant.

Gemeine Wage, Bifilarwage, Torsionswage, Pendel, Dynamometer.

Von den Maasseinheiten erwähnen wir:

1. Zeit. Tag, Stunde, Minute, Secunde, und zwar siderische und Sonnenzeit.
2. Raum. Yard und Meter: Grad, Minute, Secunde.
3. Kraft. Gewicht eines Pfundes oder eines Kilogramms, u. s. w. an einem beliebigen besonderen Orte (Gravitationseinheit); kinetische Einheit.
4. Masse. Pfund, Kilogramm, u. s. w.

403. Obgleich es unmöglich ist, ohne Instrumente uns eine Maasseinheit zu verschaffen oder eine solche anzuwenden, so können wir doch, da kein Instrument uns, wenn wir keine Maasseinheit hätten, ein absolutes Maass geben könnte, die Maasseinheiten zuerst betrachten, und werden uns bei dieser Betrachtung auf die

Instrumente beziehen, als wenn uns ihre Principien und Anwendungen bereits bekannt wären.

404. Winkelmaass. — Die Maasseinheit der Winkelgrössen, den Grad oder neunzigsten Theil eines rechten Winkels, sowie seine successiven Unterabtheilungen, die Minute ($^1/_{60}$ Grad), die Secunde ($^1/_{60}$ Minute), u. s. w. brauchen wir nur zu erwähnen. Dies Eintheilungssystem ist äusserst unzweckmässig, hat sich aber so sehr in ganz Europa eingebürgert, dass die weit bessere von der französischen Republik zu derselben Zeit, wo dieselbe andere viel radicalere Aenderungen mit Erfolg einführte, beschlossene Decimaleintheilung des rechten Winkels nirgends Boden gewinnen konnte. Doch werden die Secunden allgemein in Decimaltheile getheilt.

Die Decimaltheilung wird natürlich angewandt, wenn man sich des Bogenmaasses bedient; die Einheit des Bogenmaasses ist der Winkel, dessen Schenkel aus einem um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kreis einen Bogen von der Länge des Radius ausschneiden. Danach haben zwei rechte Winkel im Kreismaass gemessen die Grösse π oder 3,14159, so dass π und 180^0 denselben Winkel darstellen, und die Winkeleinheit oder der Centriwinkel, dessen Bogen gleich dem Radius ist, ist $57^0{,}29578\ldots = 57^0\,17'\,44{,}8\ldots''$ (vergleiche § 41).

Bezeichnet n die Anzahl der Grade eines beliebigen Winkels, der, in Bogenmaass gemessen, die Grösse ϑ hat, so erhalten wir leicht die Gleichung $\frac{\vartheta}{\pi} = \frac{n}{180}$, und daraus folgt $n = \vartheta \times 57^0{,}29578\ldots = \vartheta \times 57^0\,17'\,44{,}8\ldots''$.

405. Zeitmaass. — Die in der Praxis benutzte Maasseinheit der Zeit ist der siderische Tag; es ist dies die nahezu constante Periode der Rotation der Erde um ihre Axe (§ 247). Man hat aus alten Sonnenfinsternissbeobachtungen berechnet, dass sich diese Periode seit 720 v. Chr. Geb. nicht um $\frac{1}{10{,}000{,}000}$ ihrer Länge geändert hat; in dieser Berechnung ist aber (§ 830) ein Fehler gefunden worden, und das berichtigte Resultat macht es wahrscheinlich, dass die Dauer der Erdrotation jetzt um $\frac{1}{2{,}700{,}000}$ länger als zu jener Zeit ist. Aus dem siderischen Tage leitet man leicht den mittleren Sonnentag her, d. i. die Zeit, welche durchschnittlich verstreicht zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Meridian irgend eines Ortes. Diese Einheit ist nicht in so hohem Grade wie die vorige absolut oder unveränderlich; sie wird, wenngleich in sehr geringem Grade, von den säcularen Aenderungen der Periode der Erdrotation um die Sonne beeinflusst. Der mittlere Sonnentag wird in 24 Stunden eingetheilt, eine Stunde in 60 Minuten, eine Minute in 60 Secunden. Die Secunden theilt man gewöhnlich nach dem Decimalsystem ein.

Man beachte, dass die Zeitgrössen, Minute und Secunde, anders als die gleichbenannten Winkelgrössen bezeichnet werden. So ist $13^h\ 43^m\ 27{,}58^s$ eine Zeitgrösse, $13^0\ 43'\ 27{,}58''$ eine Winkelgrösse.

Wenn lange Zeitperioden gemessen werden sollen, so können das mittlere Sonnenjahr, das aus 366,242203 siderischen oder 365,242242 mittleren Sonnentagen besteht, oder das Jahrhundert, welches 100 solche Jahre enthält, zweckmässig zur Einheit genommen werden.

406. Das definitive Normalmaass für genaueste Zeitmessung würde (falls nämlich das Menschengeschlecht einige Millionen Jahre auf der Erde leben sollte) auf die physikalischen Eigenschaften eines Körpers basirt werden müssen, der von einem constanteren Charakter als die Erde ist. Das ist z. B. eine in einem luftleeren gläsernen Gefässe hermetisch verschlossene Metallfeder. Die Zeit der Vibration einer solchen Feder würde nothwendig von einem zum anderen Tage viel constanter sein, als die Unruhe des besten Chronometers, da letztere durch das mit ihr verbundene Räderwerk gestört wird; sie würde höchst wahrscheinlich auch von Jahrhundert zu Jahrhundert constanter sein, als die Zeit der Rotation der Erde, die sich jedenfalls in einem solchen Grade abkühlt und zusammenzieht, dass in 50 Millionen Jahren die Dauer der Rotation schon eine recht beträchtliche Aenderung erleiden muss.

407. Längenmaass. — Das britische Längennormalmaass ist das Yard (Elle); es ist dies der Abstand zwischen zwei Marken auf einem im Tower zu London aufbewahrten Metallstab, wenn derselbe eine Temperatur von 60⁰ Fahrenheit hat. Dies Maass wurde nicht direct von einer unveränderlichen Grösse in der Natur hergeleitet; doch sind einige wichtige Beziehungen desselben zu solchen Grössen mit grosser Genauigkeit ausgemessen worden. Es ist sorgfältig mit der Länge eines an einer gewissen Stelle in der Nähe von London schwingenden Secundenpendels verglichen worden; wenn es also noch einmal zerstört werden sollte, wie es im Jahre 1834 beim Brande des Parlamentshauses geschah, und wenn zugleich alle exacten Copien desselben, deren mehrere an verschiedenen Orten aufbewahrt werden, verloren gingen, so könnte man es durch Pendelbeobachtungen wieder herstellen. Ein weniger genaues, aber (ausser im Falle einer durch Erdbeben verursachten Störung) immer noch gutes Mittel, es wieder herzustellen, liefern die von der „Ordnance-Survey" ausgemessenen Linien und die daraus berechneten Entfernungen zwischen bestimmten Stationen der britischen Inseln; diese Entfernungen sind mit solcher Genauigkeit durch jenes Maass ausgedrückt, dass der Fehler zuweilen nicht einmal ein Zoll per Meile (engl.), d. h. nicht einmal $^1/_{60000}$ ausmacht.

408. In wissenschaftlichen Untersuchungen bemühen wir uns so viel als möglich, immer nur eine Einheit fest zu halten, und für britische Messungen ist im Allgemeinen der Fuss, d. i. der dritte Theil des Yards, am passendsten. Unglücklicherweise hat man manchmal den Zoll, d. i. den zwölften Theil des Fuss, anzuwenden; doch wird derselbe weiter nach dem Decimalsystem eingetheilt. Wenn grosse Längen betrachtet werden, hat man leider oft die englische Meile (gleich 1760 Yards) zu benutzen. Es erhellt sonach, dass die britische Längenmessung in ihren verschiedenen Benennungen unzweckmässiger ist, als die europäische Zeit- oder Winkelmessung.

409. Ein weit vollkommneres Maasssystem ist das französische, in welchem ausschliesslich die Decimaleintheilung angewendet wird. In diesem System ist das Normalmaass der Meter. Derselbe ist ursprünglich theoretisch als der zehnmillionte Theil der Länge eines Erdmeridians vom Pol bis zum Aequator, jetzt aber praktisch durch die genauen Normalmeter definirt, die in verschiedenen europäischen Staaten sorgfältig aufbewahrt werden. Er ist etwas länger als das Yard, wie die nachstehende Tabelle zeigt. Seine grosse Zweckmässigkeit beruht auf der Decimaleintheilung. In jedem Ausdruck stellen die Einer Meter, die Zehner Decameter, u. s. w., die Zehntel Decimeter, die Hundertel Centimeter, die Tausendstel Millimeter, u. s. w. dar. Den Zusammenhang zwischen dem französischen und dem englischen Längenmaass liefert die folgende Tabelle: —

ein Zoll = 25,39954 Millimeter,		ein Millimeter = 0,03937079 Zoll,
ein Fuss = 3,047945 Decimeter,		ein Decimeter = 0,3280899 Fuss,
eine Meile = 1609,315 Meter,		ein Kilometer = 0,6213824 Meile.

410. Flächenmaass. — Die Einheit des Flächenmaasses ist in Grossbritannien das Quadratyard, in Frankreich der Quadratmeter. Natürlich können wir Quadratzoll, Quadratfuss oder Quadratmeilen; wie auch Quadratmillimeter, Quadratkilometer, u. s. w., oder die Hektare = 10,000 Quadratmeter anwenden. Es ist:

ein Quadratzoll	=	6,451367 Quadratcentimeter,
ein Quadratfuss	=	9,28997 Quadratdecimeter,
ein Quadratyard	=	83,60971 Quadratdecimeter,
ein Acre	=	0,4046711 Hektare,
eine Quadratmeile	=	258,9895 Hektare,
eine Hektare	=	2,471143 Acres.

411. **Raummaass.** — Aehnliches gilt von dem Kubikmaass beider Länder, für welches wir die folgende Tabelle erhalten: —

ein Kubikzoll	=	16,38618 Kubikcentimeter,
ein Kubikfuss	=	28,315312 Kubikdecimeter oder Liter,
eine Gallon (4 Quart)	=	4,54346 Liter,
eine Gallon (4 Quart)	=	277,274 Kubikzoll,
ein Liter	=	0,035317 Kubikfuss.

412. **Massenmaass.** — Die britische Masseneinheit ist das Pfund (das nur durch Normalgewichte definirt wird), die französische das Kilogramm, ursprünglich als ein Liter Wasser von der Temperatur der grössten Dichtigkeit, jetzt aber praktisch durch Normalkilogramme definirt.

ein Gran	=	64,79896 Milligramm,	ein Gramm	=	15,43235 Gran,
ein Pfund	=	453,5927 Gramm,	ein Kilogramm	=	2,20462125 Pfund.

W. H. Miller findet (Phil. Trans. 1857), dass das „Kilogramme des Archives“ an Masse gleich 15432,34874 Gran und das im Ministerium des Inneren zu Paris als Normalgewicht für den französischen Handel niedergelegte „Kilogramme type laiton“ gleich 15432,344 Gran ist.

413. **Kraftmaass.** — Wie man eine Kraft misst, sowohl vermittels des Gewichtes, welches eine festgesetzte Masse an einem festgesetzten Orte hat, als auch vermittels der absoluten oder kinetischen Einheit, ist im zweiten Capitel dargelegt worden (s. §§ 220 bis 226). Aus dem Maasse der Kraft und demjenigen der Länge leiten wir unmittelbar das Maass der Arbeit oder des mechanischen Effects her. Das von den Ingenieuren hierfür praktisch angewandte Maass beruht auf dem Maass der Kraft, welches die Gravitation liefert. Wenn wir den Unterschied zwischen der Schwerkraft in London und Paris vernachlässigen, so ersehen wir aus den obigen Tabellen, dass folgender Zusammenhang zwischen dem Londoner und dem Pariser Arbeitsmaass besteht:

ein Fusspfund	=	0,13825 Kilogrammmeter,
ein Kilogrammmeter	=	7,2331 Fusspfund.

414. **Uhren.** — Eine Pendeluhr ist im Wesentlichen ein Instrument, welches vermittels eines Räderwerks die Anzahl der von einem Pendel ausgeführten Vibrationen verzeichnet. Ein Chronometer oder eine Taschenuhr leistet dasselbe für die Oscillationen einer flachen Spiralfeder, gerade so wie das Räderwerk in einer Gasuhr die Anzahl der durch den Durchgang des Gases durch die Maschine hervorgebrachten Umdrehungen der Hauptwelle zählt. Da es aber unmöglich ist, die Reibung, den Widerstand der Luft, u. s. w. zu vermeiden, so würde ein Pendel oder eine Feder, sich selbst überlassen, nicht lange fortschwingen und auch, während die Bewegung noch andauert, jede Oscillation in um so kürzerer Zeit ausführen, je mehr der Vibrationsbogen abnimmt. Dies zu vermeiden, wird dem Instrument durch das Herabfallen eines Gewichtes oder durch die Abwickelung einer starken Feder beständig ein Zuschuss an Energie geliefert. Das Gewicht oder die Feder sind mit dem Pendel oder dem Schwungrad der Unruhe durch das Räderwerk und durch eine mechanische Vorrichtung, die man Hemmung nennt, so verbunden, dass die Oscillationen eine nahezu gleichförmige Weite behalten und deshalb von nahezu gleichförmiger Dauer sind. Die Construction der Hemmungen, sowie der Räderwerke ist eine Aufgabe der Mechanik, deren Einzelheiten wir hier übergehen können, obwohl sie leicht zum Gegenstande mathematischer Untersuchung gemacht werden können. Die Mittel zur Vermeidung von Fehlern, welche der Wechsel der Temperatur erzeugen würde, nämlich die Compensations-Pendel und Unruhen werden besser in unseren Capiteln über die Wärme behandelt. Wir bemerken noch, dass es wenig schadet, wenn der Gang einer Uhr regelmässig beschleunigt oder verzögert wird; dies kann leicht in Rechnung gezogen werden; dagegen machen unregelmässige Aenderungen das Instrument unbrauchbar.

415. **Elektrische Uhren.** — Eine neuere Anwendung der Elektricität, die später beschrieben werden soll, besteht darin, vermittels einer guten Uhr, die von Zeit zu Zeit sorgfältig regulirt wird, so dass sie mit astronomischen Beobachtungen übereinstimmt, eine beliebige Anzahl anderer weniger gut construirter Uhren zu regeln, so dass ihre Pendel gezwungen werden, Schlag für Schlag mit dem Pendel der Normaluhr zu vibriren, ohne dass dadurch letztere einen nachtheiligen Einfluss erleidet.

416. **Chronoskop.** — Bei astronomischen Beobachtungen wird die Zeit bis auf Zehntel einer Secunde von einem geübten Beobachter abgeschätzt, der, während er die Erscheinungen überwacht,

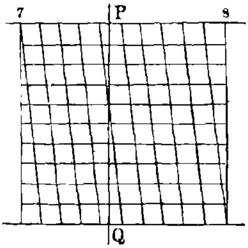
die Schläge der Uhr zählt. Für die sehr genaue Messung kurzer Intervalle sind viele Instrumente erdacht worden. Wenn sich z. B. in einem grossen mit Quecksilber angefüllten Gefäss eine kleine Oeffnung befindet, und wir durch den Versuch das Gewicht des etwa in fünf Minuten ausströmenden Metalls bestimmt haben, so liefert uns eine einfache Proportion den während des Herausströmens eines beliebigen Gewichts verstrichenen Zeitraum. Es ist leicht, eine Vorrichtung anzubringen, durch welche beim Eintritt zweier beliebigen successiven Ereignisse ein Gefäss unter den herausfliessenden Strom gesetzt und von demselben wieder weggezogen wird.

417. Zu demselben Zwecke bedient man sich noch anderer hinlänglich bekannter Vorrichtungen, so der Uhren mit auszulösendem Secundenzeiger, der Chronoskope, u. s. w., deren Stellung abgelesen wird, wenn sie sich noch in Ruhe befinden, die beim Eintritt eines Ereignisses ihre Bewegung beginnen, beim Eintritt eines zweiten Ereignisses wieder stillstehen und sodann wieder abgelesen werden können. Man wendet auch Vorrichtungen an, die es gestatten, in dem Augenblick, wo jedes dieser Ereignisse eintritt, auf ein sich mit gegebener Geschwindigkeit drehendes Zifferblatt (durch einen Druck auf einen Knopf) ein schwaches Zeichen mit Tinte zu machen, u. s. w. In neuerer Zeit haben aber alle diese Apparate fast gänzlich dem elektrischen Chronoskop Platz gemacht, einem Instrument, das wir eingehend beschreiben werden, wenn wir später Gelegenheit finden, Versuche anzuführen, bei denen es mit Nutzen angewendet worden ist.

418. Wir kommen jetzt zur Messung von Linien und Winkeln. Die wichtigsten Instrumente, die dazu dienen, sind der Vernier und die Schraube.

419. Der verjüngte Maassstab. — Die Elementargeometrie liefert uns zwar die Mittel, eine beliebige gerade Linie in eine beliebig vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen; doch ist diese Methode in der Praxis durchaus nicht genau und wenig zuverlässig. Sie wurde früher beim sogenannten verjüngten Maassstabe angewandt, dessen Construction aus der Figur erhellt. Das Ablesen erfolgt vermittels eines Schiebers, dessen Rand senkrecht zur Länge des Stabes ist. Nehmen wir an, man solle die Lage, welche die Linie PQ auf dem Maassstabe hat, bestimmen. Dieselbe kann offenbar nur

Fig. 53.



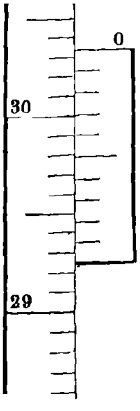
eine der Querlinien schneiden (in der Figur die vierte), und wir erhalten dadurch die Anzahl der Zehntel eines Zolls. Die unmittelbar über dem Durchschnittspunkt liegende Horizontallinie liefert, wie man leicht erkennt, die Hundertel (im vorliegenden Falle vier). Die Länge der in Rede stehenden Linie ist danach 7,44. Um zu zeigen, wie mangelhaft diese Methode im Vergleich zu den folgenden ist, erwähnen wir, dass ein nach ihr am Rande eingetheilter Quadrant von drei Fuss Radius, welcher Napier von Merchiston gehörte, die Theile eines Grades nur bis auf Minuten genau liefert, eine Genauigkeit, die man jetzt mit den von Troughton und Simms construirten Taschensextanten erreichen kann, deren Bogenradius wenig mehr als ein Zoll beträgt. Das letztere Instrument wird mit Hülfe eines Vernier gelesen.

420. **Der Vernier oder Nonius.** — Der Vernier wird gewöhnlich bei Instrumenten, wie dem Barometer, Sextanten und Kathetometer, die Schraube dagegen bei feineren Instrumenten, wie bei den getheilten Kreisen der Astronomen, beim Mikrometer und dem Sphärometer angewandt.

421. Der Vernier besteht aus einem Metallstreifen, welcher an einer eingetheilten Scala entlang gleitet, so dass beider Ränder zusammenfallen. Wenn man ihn also an einem getheilten Kreise anbringt, so ist sein Rand kreisförmig, und er bewegt sich um eine durch den Mittelpunkt des getheilten Kreisbogens gehende Axe.

In Fig. 54 seien **0, 1, 2, . . ., 10** die Theilpunkte auf dem Vernier, 0, 1, 2, u. s. w. eine beliebige Reihe aufeinander folgender Theilpunkte des Maassstabes, dessen Rand entlang der Vernier gleitet. Wenn nun, falls **0** und 0 zusammenfallen, auch **10** und **11** auf einander zu liegen kommen, so sind 10 Theile des Vernier von derselben Länge wie 11 Theile des Maassstabes, also jeder Theil des Vernier gleich $^{11}/_{10}$ oder $1^1/_{10}$ eines Theils des Maassstabes. Wird dann der Vernier fortbewegt, bis **1** mit 1 zusammenfällt, so liegt **0** um $^1/_{10}$ eines Theils des Maassstabes über 0 hinaus; wenn **2** mit 2 zusammenfällt, so liegt **0** um $^2/_{10}$ über 0 hinaus, u. s. w. Um also den Vernier in irgend einer Lage abzulesen, hat man sich zuerst den **0** zunächst und zwar unterhalb liegenden Theilpunkt des Maassstabes zu merken. Dadurch erhält man die Anzahl der *ganzen* Theile.

Fig. 54.



Um den Bruchtheil zu bestimmen, sehe man nach, welcher Theilpunkt des Vernier mit einem Theilpunkt des Maassstabes zusammenfällt; ist es (wie in Fig. 54) der vierte, so zeigt dies an, dass man der erhaltenen ganzen Zahl $^4/_{10}$ eines Theils des Maassstabes hinzuzufügen hat, u. s. w. Wenn demnach die Figur eine in Zoll und Zehntelzoll eingetheilte Barometerscala darstellt, und der Nullpunkt des Vernier genau auf die Höhe des Quecksilbers gebracht ist, so ist der zu ermittelnde Stand des Barometers 30,34 Zoll.

422. Wenn der Rand eines Sextanten, wie es gewöhnlich geschieht, in Drittelgrade eingetheilt ist und der Vernier dadurch gebildet wird, dass man 21 dieser Theile in 20 gleiche Theile theilt, so kann man mit dem Instrument noch Zwanzigstel eines Theils der Scala des Sextanten, d. h. Minuten bestimmen.

Wenn kein Theilstrich des Vernier mit einem Theilstrich auf dem Sextantenbogen zusammenfällt, so wird einer der letzteren zwischen zwei Theilstriche des Vernier fallen, da die Theile des Vernier die grösseren sind. Man pflegt dann in der Praxis das Mittel der Resultate zu nehmen, die man erhalten würde, wenn jedes Paar der Grenzlinien zusammenfiele.

423. In Fig. 54 und in der obigen Darstellung ist vorausgesetzt, dass die Theile der Scala und des Vernier nach entgegengesetzten Richtungen hin gezählt werden. Dies ist bei britischen Instrumenten gewöhnlich der Fall. Sonst werden die Theile der Scala und des Vernier auch nach derselben Richtung hin gezählt, und in diesem Falle erkennt man leicht, dass, wenn Längen bis zu Zehnteln eines Theils der Scala bestimmt werden sollen, zehn Theile des Vernier gleich neun Theilen der Scala sein müssen; daher der Namen Nonius.

Allgemein müssen, wenn die Bestimmung von Längen bis zu $n$teln eines Theils der Scala erfolgen soll, n Theile des Vernier gleich $n + 1$ oder gleich $n - 1$ Theilen der Scala sein, je nachdem diese in entgegengesetzter oder in derselben Richtung wie jene gelesen werden.

424. Die Schraube. — Das Princip der Schraube ist schon erwähnt worden (§ 102). Dieselbe kann auf zwei Arten angewandt werden: Es kann nämlich erstens die Mutter fest sein und die Spindel sich hindurch bewegen, oder es kann zweitens die Spindel durch ein festes Zapfenlager verhindert werden, sich longitudinal zu bewegen, in welchem Falle die Mutter, wenn man sie verhindert zu rotiren, sich in der Richtung der ihr und der Spindel gemeinschaftlichen Axe bewegen wird. Die Grösse der fortschreitenden Bewegung ist in jedem Falle offenbar dem Winkel proportional, durch welchen sich die Spindel um ihre Axe gedreht hat, und dieser Winkel kann vermittels einer an einem Ende der Spindel auf derselben senkrecht feststehenden eingetheilten Kreisscheibe gemessen werden, deren Theile durch einen Zeiger oder einen am Gestell des Instruments angebrachten Vernier abgelesen werden. Die Schraubenmutter trägt entweder einen zeichnenden Punkt mit sich (wie in der Theilmaschine), oder einen Draht, einen Faden oder das halbe Objectivglas eines Teleskops (wie im Heliometer), und zwar sind der Faden oder Draht, oder die Bewegungsrichtung des zeichnenden Punktes rechtwinklig zur Axe der Spindel.

425. Nehmen wir an, man solle eine Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen. Die Linie wird der Axe der Spindel parallel mit einem Ende genau unter den zeichnenden Punkt oder unter den festen Faden eines von der Mutter getragenen Mikroskops gelegt und sodann der Schraubenkopf abgelesen. Durch Umdrehung des Schraubenkopfes wird der zeichnende Punkt oder der Mikroskopfaden an das andere Ende der Linie gebracht, und die Anzahl der ganzen Umdrehungen und der Bruchtheile einer Umdrehung für die ganze Linie bestimmt. Wird das so erhaltene Resultat durch die Anzahl der verlangten gleichen Theile dividirt, so ergiebt sich die Anzahl der ganzen Umdrehungen und der Bruchtheile einer Umdrehung, welche einem der geforderten Theile entsprechen. Um jetzt die geforderte Theilung auszuführen, hat man nur die Spindel wiederholt um diesen Betrag zu drehen und nach jeder Rotation einen Strich zu ziehen.

426. Im Mikrometer ist der von der Mutter getragene bewegliche Faden einem festen Faden parallel. Bringt man dieselben in optische Berührung, so lernt man den Nullpunkt des Schraubenkopfes kennen. Wenn man also eine andere Ablesung gemacht hat, so ergiebt sich die Anzahl der Umdrehungen, welche der Länge des zu messenden Objectes entsprechen, durch Subtraction. Der absolute Werth einer Umdrehung der Schraube wird aus der Anzahl der Windungen in einem Zoll oder auch durch Anwendung des Mikrometers auf einen Gegenstand von bekannten Dimensionen berechnet.

427. **Sphärometer.** — Zur Messung der Dicke einer Platte oder der Krümmung einer Linse bedient man sich des Sphärometers. Dasselbe besteht aus einer cylindrischen Säule, durch deren Axe sich eine gut gearbeitete Schraubenspindel bewegt. Die Säule wird von drei Füssen getragen, die gleichweit von einander abstehen, und deren Enden in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen. Wenn der unterste Punkt der Spindel bis in diese Ebene hinabgedreht ist, so hat er von den Füssen der Mutter gleiche Abstände. Die Enden der Füsse und der Spindel laufen in sehr feine Spitzen aus. Die Anzahl der ganzen Umdrehungen und der Bruchtheile einer Umdrehung, welche die Spindel vollführt, wird durch einen am Kopf der Spindel angebrachten horizontalen Kreis, dessen Umfang getheilt ist, und durch einen auf der Mutter befestigten verticalen Maassstab bestimmt. Angenommen, man solle die Dicke einer Glasplatte messen, so werden die drei Füsse des Instrumentes auf eine genau flache Oberfläche gesetzt und die Spindel langsam gedreht, bis ihre Spitze gerade die Fläche berührt. Diese Stellung der Spindel lässt sich mit äusserster Genauigkeit bestimmen; denn in dem Augenblick, wo die Spitze der Spindel unter die Ebene der Füsse hinabgeht, beginnt der ganze Apparat zu wackeln, wenn er auch nur leise berührt wird. Es hat dies natürlich darin seinen Grund, dass es geometrisch unmöglich ist, dass ein vollkommen starrer Körper mit vier Füssen auf einer Ebene stehe, wenn die Endpunkte der Füsse nicht genau in einer Ebene liegen. In dem Augenblick, in welchem dieses Wackeln (welches für das Gefühl und selbst für das Ohr äusserst vernehmlich ist) beginnt, ist die Spitze der Spindel eben unter der Ebene der Füsse des Instruments. Jetzt liest man die Stellung des Schraubenkopfs ab und dreht dann die Spindel so lange zurück, bis man die Platte, deren Dicke bestimmt werden soll, unter die Spitze einschieben kann. Darauf wird die Spindel wieder vorwärts gedreht, bis das Wackeln gerade wieder beginnt. Dann leuchtet ein, dass, wenn die Schraubenspitze noch um eine der Dicke der Platte gleiche Länge hinabgedreht würde, sie sich wieder gerade unter der Ebene der Füsse befinden würde. Wir können daher aus der Differenz der Stellungen des Schraubenkopfes mit Leichtigkeit die Dicke der Platte berechnen, wenn der Betrag einer Umdrehung der Spindel ein- für allemal bestimmt ist.

428. Wenn die *Krümmung* einer Linse gemessen werden soll, so stellt man das Instrument zuerst, wie vorher, auf eine ebene Fläche und bestimmt, bei welcher Stellung das Wackeln beginnt. Dieselbe Operation führt man mit der sphärischen Fläche aus. Die Differenz der erhaltenen Stellungen des Schraubenkopfes ist offenbar die grösste Dicke des Glaskörpers, welchen eine durch die drei Füsse gehende Ebene abschneiden würde. Diese Dicke und der Abstand zwischen jedem Fusspaar reichen aus, den Radius der sphärischen Fläche zu berechnen.

Ist a der Abstand zwischen jedem Fusspaar, l die den beiden Stellungen des eingetheilten Kreises entsprechende Schraubenlänge und R der Radius der Kugelfläche, so erhalten wir leicht

$$2R = \frac{a^2}{3l} + l,$$

oder, da l im Vergleich zu a gewöhnlich sehr klein ist, so ist der Durchmesser der Kugelfläche ganz nahezu gleich $\frac{a^2}{3l}$.

429. **Kathetometer.** — Das Kathetometer wird zur genauen Bestimmung von Höhenunterschieden gebraucht, z. B. zur Messung der Höhe, bis zu welcher sich die Flüssigkeit in einer Capillarröhre über die äussere freie Fläche erhebt. Es besteht aus einem eingetheilten Metallstabe, der (vermittels der in seinen drei Füssen angebrachten Schrauben) möglichst genau vertical gestellt werden kann. Auf diesem Stabe gleitet ein Metallschlitten, der ein Fernrohr trägt, dessen Axe mit Hülfe eines Nivellirinstrumentes horizontal gemacht wird. Das Fernrohr steht natürlich senkrecht auf dem Maassstabe und beschreibt eine Horizontalebene, wenn der letztere auf seiner Unterlage gedreht wird. Das Adjustiren des Instruments ist etwas langweilig, bietet aber sonst keine Schwierigkeit dar. Will man dasselbe benutzen, so hat man das Fernrohr erst auf einen der beiden Gegenstände zu richten, deren Höhendifferenz bestimmt werden soll, und es dann (mit dem Schlitten, der es trägt) vermittels einer feinen Schraube am Maassstabe auf oder ab zu bewegen, bis ein im Brennpunkt des Oculars angebrachter horizontaler Faden mit dem Bilde des Gegenstandes zusammenfällt. Auf einem mit dem Fernrohr verbundenen Vernier wird jetzt die Stellung desselben abgelesen. Wird dieselbe Operation mit dem zweiten Gegenstande vorgenommen, so erhält man durch eine einfache Subtraction die gesuchte Höhendifferenz.

430. **Die Wage.** — Das Princip der Wage ist allgemein bekannt. Wir wollen hier einige der Vorsichtsmaassregeln anführen, die in den besten Wagen zur Beseitigung der verschiedenen Fehler angewandt werden, denen das Instrument unterworfen ist; auch werden wir die Hauptpunkte kurz besprechen, die man bei der Construction einer Wage zu beachten hat, um Sicherheit und Schnelligkeit beim Wägen zu erzielen.

Der Wagebalken muss so steif als möglich und doch nicht sehr schwer sein. Deshalb besteht er gewöhnlich entweder aus Röhren, oder aus einer Art Gitterwerk. Um die Reibung zu vermeiden, nimmt man zur Axe, um die der Wagebalken sich dreht, die Schneide eines aus hartem Stahl gemachten Keils; wenn die Wage benutzt wird, so ruht diese Schneide auf einer gut polirten Achatplatte. Bei sehr feinen Wagen ist eine ähnliche Vorrichtung in den Punkten des Wagebalkens angebracht, in welchen die Wagschalen aufgehängt werden. Wenn die Wage nicht gebraucht wird, sowie unmittelbar vor dem Gebrauch wird der Balken mit der Schneide durch eine Hebelvorrichtung von der Achatplatte emporgehoben. Hat man ihn auf diese Weise festgestellt, so belastet man ihn mit Gewichten, die so weit als möglich einander gleich sind (was man unter Umständen zuvor mit Hülfe eines weniger feinen Instruments bewirken kann); die genaue Bestimmung des gesuchten Gewichtes bietet dann keine Schwierigkeit dar. Der letzte Bruchtheil des Gewichtes wird vermittels eines gewöhnlich aus einem Draht bestehenden sehr kleinen Laufgewichts (oder Reiterchen) ermittelt, dem (durch einen Hebel) von ausserhalb des die Wage umgebenden Glaskastens her verschiedene Stellungen auf einem Arm des Wagebalkens ertheilt werden können. Dieser Arm ist in Zehntel, u. s. w. eingetheilt und zeigt so ohne Weiteres den Werth, welchem das Gewicht des Reiterchen in jedem Falle entspricht, da ja dieser Werth (§ 232) von dem Moment abhängt.

431. Die wichtigsten Eigenschaften einer guten Wage sind folgende:

1. Empfindlichkeit. — Der Wagebalken sollte durch die kleinste Differenz zwischen den in die Wagschalen gelegten Gewichten schon merklich aus seiner horizontalen Lage abgelenkt werden. Das genaue Maass der Empfindlichkeit ist der Winkel, durch welchen der Balken abgelenkt wird, wenn die Differenz zwischen den Belastungen der Wagschalen ein festgesetzter Procentsatz des Gesammtgewichtes ist.

2. Stabilität. — Hiermit ist die Schnelligkeit der Oscillation gemeint, nach welcher wieder die Geschwindigkeit in der Ausführung einer Wägung sich bestimmt. Die Stabilität hängt hauptsächlich von der Tiefe, in der der Schwerpunkt des ganzen Instruments unter der Schneide liegt, und ferner von der Länge des Wagebalkens ab.

3. Beharrlichkeit. — Successive Wägungen desselben Körpers müssen dasselbe Resultat liefern, nachdem alle von der Temperatur, dem Barometerstande, u. s. w. abhängigen Correctionen (die später beschrieben werden sollen) in Rechnung gezogen sind.

In dem Capitel, in welchem wir die Statik behandeln, werden wir beschreiben, wie die Grösse jeder dieser drei Eigenschaften für jede gegebene Form und für beliebig gegebene Dimensionen des Instruments bestimmt wird.

Eine feine Wage sollte bei ungefähr $\frac{1}{500{,}000}$ des grössten Gewichts, welches ohne Beschädigung derselben in eine Schale gelegt werden kann, einen Ausschlag geben. In der That sind wenig Messungen irgend einer Art bis zu mehr als sechs Decimalstellen correct.

Die Methode der Doppelwägung, welche darin besteht, dass man den abzuwägenden Körper durch Schrot oder Sand oder feine Drahtstücke äquilibrirt, ihn dann entfernt, und in die Wagschale, in der er gelegen, so lange Gewichte legt, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt ist, ist etwas mühseliger, aber correcter als die Methode der einfachen Wägung, da sie alle Irrthümer eliminirt, welche aus der ungleichen Länge der Arme, u. s. w. entspringen.

432. **Die Torsionswage.** — Bei der von Coulomb erfundenen und mit grossem Erfolge angewandten Torsionswage wird eine Kraft durch die Torsion eines Seiden- oder Glasfadens oder eines Metalldrahtes gemessen. Der Faden oder Draht wird an seinem oberen Ende oder, je nach den Umständen, an beiden Enden befestigt. Er trägt im Allgemeinen einen sehr leichten horizontalen Stab oder eine horizontale Nadel, an deren einem Ende der Körper angebracht ist, auf welchen die zu messende Kraft wirkt, während das andere Ende ein Gegengewicht trägt. Das obere Ende des Fadens ist an einem Zeiger befestigt, welcher durch den Mittelpunkt eines an der Peripherie eingetheilten Kreises geht, so dass der Winkel, durch welchen sich dieses obere Ende dreht, direct gemessen wird. Wenn man zugleich den Winkel misst, durch welchen sich die Nadel gedreht hat, oder wenn man einfacher den Zeiger so lange dreht, bis die Nadel eine bestimmte Lage annimmt, die durch ein auf dem Gehäuse des Instruments angebrachtes Zeichen gegeben ist, so erhält man die Grösse der Torsion des Fadens, und es ist dann ein einfaches statisches Problem, aus der letzteren die zu messende Kraft zu bestimmen, da ihre Richtung, ihr Angriffspunkt und die Dimensionen des Apparates bekannt sind. Coulomb fand, dass die Torsionskraft innerhalb der Grenzen der vollkommenen Elasticität dem Torsionswinkel einfach proportional ist, wie sich aus dem Hooke'schen Gesetz (siehe das Capitel über die Eigenschaften der Materie) erwarten liess, und es erübrigt nur noch, die Grösse der Torsion für einen besonderen Winkel in absolutem Maass zu bestimmen. Diese Bestimmung ist theoretisch im Allgemeinen ziem-

lich einfach; ihre praktische Ausführung erfordert aber bedeutende Sorgfalt und Genauigkeit. Da jedoch die Torsionswage hauptsächlich bei vergleichenden, nicht bei absoluten Messungen gebraucht wird, so ist diese Bestimmung oft unnöthig. Wir werden die Torsionswage eingehender besprechen, wenn wir zu ihren Anwendungen kommen.

433. Die gewöhnlichen Spiralfederwagen, welche dazu dienen, kleine oder grosse Gewichte oder Kräfte roh zu vergleichen, sind genau genommen nur eine modificirte Form *) der Torsionswage, da ihre Wirkung fast ganz auf der Torsion des Drahtes und nicht auf einer longitudinalen Ausdehnung oder einer Biegung desselben beruht. Wenn Federwagen mit Sorgfalt construirt sind, so können sie sich unseres Erachtens mit den gewöhnlichen Wagen an Genauigkeit messen, während sie dieselben bei einigen Anwendungen an Empfindlichkeit und Bequemlichkeit weit übertreffen. Sie messen direct die Kraft, nicht die Masse, und daher muss, wenn man sie zur Bestimmung von Massen an verschiedenen Theilen der Erde benutzt, der Variation der Schwerkraft wegen eine Correction vorgenommen werden. Diese, sowie die Correction, welche die Temperatur nöthig macht, können durch Anwendung der Methode der Doppelwägung vermieden werden.

434. **Das Pendel.** — Das feinste aller Instrumente zur Messung einer Kraft ist wohl das Pendel. In der Kinetik (s. Theil II) wird bewiesen, dass für jedes Pendel, mag es nun unter dem Einfluss der Schwerkraft um eine mittlere verticale Lage, oder unter dem Einfluss einer magnetischen oder einer Torsionskraft in einer horizontalen Ebene oscilliren, das Quadrat der Anzahl der in einer gegebenen Zeit vollführten kleinen Oscillationen der Grösse der diese Oscillationen hervorrufenden Kraft proportional ist.

Zur Abschätzung der relativen Grösse, welche die Schwerkraft an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche hat, ist das Pendel bei Weitem das vollkommenste Instrument. Die Methode der Coincidenzen, durch welche dies Verfahren so ausserordentlich correct gemacht wird, soll später beschrieben werden.

In der That ist das kinetische Maass der Kraft nicht nur das wahre, sondern auch das vollkommenste Maass, und es lässt sich auf ein absolutes Maass leicht reduciren.

435. **Bifilare Aufhängung eines Stabes.** — Bei der Construction von Apparaten zu Beobachtungen des Erdmagnetismus

*) J. Thomson, Cambridge and Dublin Math. Journal (1848).

suchten Weber und Gauss es so einzurichten, dass man dieselben aus einiger Entfernung ablesen könnte. Zu diesem Zwecke trug jeder der damals zu schwer gemachten Stäbe einen ebenen Spiegel. Vermittels einer nach der Reflexion im Spiegel gesehenen und mit Hülfe eines Fernrohrs sorgfältig abgelesenen Scala war es natürlich leicht, die Ablenkungen zu berechnen, welche der Spiegel erfahren hatte. Aus vielen Gründen wurde es aber für nöthig befunden, dass die Ablenkungen selbst bei der Einwirkung einer beträchtlichen Kraft nur sehr klein seien. Deshalb führte man die bifilare Aufhängung ein. Der Magnetstab wird horizontal an zwei verticalen Drähten oder Fäden von gleicher Länge aufgehängt, die so angebracht sind, dass sich das Gewicht des Stabes zwischen beide gleichmässig vertheilt. Wenn sich der Stab dreht, so werden die Aufhängefäden gegen die verticale Richtung geneigt, und daher muss sich der Stab in die Höhe heben. Sehen wir also von der Torsion der Fäden ab, so wird bei Anwendung der bifilaren Aufhängung eine Kraft dadurch gemessen, dass man sie mit dem Gewicht des aufgehängten Magneten vergleicht.

Es sei a die Hälfte der zwischen den Anknüpfungspunkten der Fäden enthaltenen Stablänge, ϑ der Winkel, durch welchen der Stab sich (in einer horizontalen Ebene) von seiner Gleichgewichtslage aus gedreht hat, l die Länge eines der Fäden und ι die Neigung desselben gegen die Verticale.

Dann ist $l \cos \iota$ die Höhendifferenz der Enden jedes Fadens, und es ergiebt sich leicht, dass bei der gegebenen Aufhängungsweise

$$\tfrac{1}{2} l \sin \iota = a \sin \tfrac{1}{2} \vartheta.$$

Ist nun Q das Kräftepaar, welches den Stab zu drehen strebt, und W das Gewicht des letzteren, so liefert das Princip des mechanischen Effects

$$\begin{aligned} Q\, d\vartheta &= -\, W d\, (l \cos \iota) \\ &= W l \sin \iota\, d\iota. \end{aligned}$$

Wegen der Aufhängungsweise ist aber

$$l^2 \sin \iota \cos \iota\, d\iota = a^2 \sin \vartheta\, d\vartheta,$$

folglich

$$\frac{Q}{a^2 \sin \vartheta} = \frac{W}{l \cos \iota},$$

oder

$$Q = \frac{W a^2}{l} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{4\, a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}},$$

und dadurch wird das Kräftepaar Q durch die Ablenkung ϑ ausgedrückt.

Wir wollen noch zeigen, wie man die Torsion der Fäden in Rechnung zieht. Dieselbe wird sich nicht merklich von ϑ unterscheiden (da die grösste Neigung gegen die verticale Richtung sehr klein ist); das aus dieser Torsion resultirende Kräftepaar wird demnach $E\vartheta$ sein, wo E eine Constante bezeichnet. Dies hat man zu dem eben gefundenen Werthe von Q zu addiren, um das ganze ablenkende Kräftepaar zu erhalten.

436. **Dynamometer.** — Dynamometer sind Instrumente zur Messung der von einer Kraft geleisteten Arbeit. White's Bremsdynamometer misst die Grösse der von einer Dampfmaschine oder einem anderen Motor während einer beliebigen Zeit wirklich verrichteten Arbeit, indem es gestattet, dass alle Arbeit während der Zeit, die der Versuch dauert, zur Ueberwindung der Reibung verwendet werde. Morin's Dynamometer misst die Arbeit, ohne dass ein Theil derselben verloren ginge, während sie von dem Motor auf die Maschinen übertragen wird, in denen sie nützliche Verwendung findet. Dies Instrument besteht aus einer einfachen Zusammensetzung von Spiralfedern, welche in jedem Augenblick das Kräftepaar misst, mit welchem der Motor den seine Kraft übertragenden Schaft dreht, und aus einer integrirenden Maschine, von welcher die von diesem Kräftepaar während einer beliebigen Zeit geleistete Arbeit abgelesen werden kann.

Es sei in irgend einem Augenblick L das Kräftepaar und φ der ganze Winkel, durch welchen sich der Schaft von dem Augenblick an gedreht hat, in welchem man zu beobachten anfängt. Die letzterwähnte Maschine zeigt in jedem Augenblick den Werth von $\int L\,d\varphi$, und dies ist (§ 240) die ganze verrichtete Arbeit.

437. **Bremsdynamometer.** — White's Bremsdynamometer besteht aus einem an dem Schaft befestigten Hebel, der sich aber mit demselben nicht drehen darf. Das Product aus dem Moment der Kraft, die erfordert wird, um den Hebel zu hindern, sich mit dem Schafte zu drehen, in den ganzen Winkel, durch welchen sich der Schaft dreht, ist das Maass der zur Ueberwindung der Reibung zwischen Hebel und Schaft verbrauchten Gesammtarbeit. Dasselbe Resultat wird viel leichter dadurch erhalten, dass man ein Seil oder eine Kette mehrmals um den Schaft wickelt und an beiden Enden in geeigneten Richtungen Kräfte von bekannter Grösse anbringt, so dass das Seil nahezu in Ruhe bleibt und an der Drehung des Schaftes nicht Theil nimmt. Das Product aus der Differenz der Momente dieser beiden Kräfte in Beziehung auf die Axe in den Winkel, durch welchen sich der Schaft dreht, ist das Maass der zur Ueberwindung der Reibung gegen das Seil verbrauchten Gesammtarbeit. Wenn wir den Schaft von jedem anderen Widerstande befreien und an jedem Ende des Seils oder der Kette eine hinlänglich

grosse Kraft anbringen (was in der Praxis leicht geschehen kann), so bewegt sich der Motor mit der für den Versuch passenden Geschwindigkeit weiter, und während dieser Zeit wird alle seine Arbeit zur Ueberwindung der Reibung verbraucht und zugleich gemessen.

Verzeichniss neuerer Werke

aus dem Verlage von

FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

in Braunschweig.

4.

Physik, Mathematik und Astronomie.

☞ Die hier aufgeführten Werke sind durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Beer, Dr. A., Einleitung in die höhere Optik. Mit 212 in den Text eingedruckten Holzstichen und 2 Tafeln mit 50 Abbildungen in Kupferstich. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 2 Thlr. 15 Sgr.

Beer, Dr. A., Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Prof. Julius Plücker. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 2 Thlr.

Beer, Dr. A., Grundriss des photometrischen Calcüles. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr.

Benecke, Dr. Berthold, Die Photographie als Hilfsmittel mikroskopischer Forschung. Nach dem Französischen von Dr. A. Moitessier. Deutsch bearbeitet und durch zahlreiche Zusätze erweitert. Mit 88 in den Text eingedruckten Holzstichen und zwei photographischen Tafeln. gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 2 Thlr.

Beyssell, Dr., Die Kegelschnitte. Ein Leitfaden für Gewerbeschulen und das gewerbliche Leben. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 12 Sgr.

Bothe, Dr. Ferdinand, Physikalisches Repetitorium oder die wichtigsten Sätze der elementaren Physik. Zum Zwecke erleichterter Wiederholung übersichtlich zusammengestellt. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 15 Sgr.

Buff, Prof. Dr. H., Zur Physik der Erde. Vorträge für Gebildete über den Einfluss der Schwere und der Wärme auf die Natur der Erde. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr. 5 Sgr.

Buff, Dr. Heinrich, Lehrbuch der physikalischen Mechanik. In zwei Theilen. Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Erster Theil. Preis 2 Thlr. 15 Sgr.

Clausius, R., Abhandlung über die mechanische Wärmetheorie. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh.
Erste Abtheilung. Preis 1 Thlr. 15 Sgr.
Zweite Abtheilung. Preis 1 Thlr. 15 Sgr.

Clausius, R., Ueber den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Ein Vortrag gehalten in einer allgemeinen Sitzung der 41. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Frankfurt a. M. am 23. Sept. 1867. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 4 Sgr.

Dienger, Prof. Dr. J., Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen. Mit zahlreichen Anwendungen, namentlich auf geodätische Messungen. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr. 5 Sgr.

Dienger, Dr. J., Grundriss der Variationsrechnung. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr.

Dienger, Prof. Dr. J., Abbildung krummer Oberflächen auf einander und Anwendung derselben auf höhere Geodäsie. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 20 Sgr.

Dippel, Dr. Leopold, Das Mikroskop und seine Anwendung. gr. 8. Fein Velinpap. geh.

Erster Theil: Bau, Eigenschaften, Prüfung, gegenwärtiger Zustand, Gebrauch (Allgemeines) u. s. w. Mit 241 in den Text eingedruckten Holzstichen und einer Tafel in Farbendruck. Preis 3 Thlr. 20 Sgr.

Zweiter Theil: Anwendung des Mikroskops auf die Histiologie der Gewächse. Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen und 8 lithographirten Tafeln. Erste Abtheilung. Preis 4 Thlr.

Dirichlet, P. G. Lejeune, Vorlesungen über Zahlentheorie. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 2 Thlr. 20 Sgr.

Fliedner, Dr. C., Aufgaben aus der Physik nebst einem Anhange, physikalische Tabellen enthaltend. Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 55 in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 16 Sgr.

Fliedner, Dr. C., Auflösungen zu den Aufgaben aus der Physik. Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten und besonders beim Selbstunterricht. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 103 in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 24 Sgr.

Freeden, W. v., Die Praxis der Methode der kleinsten Quadrate für die Bedürfnisse der Anfänger bearbeitet. gr. 8. Fein Velinpap. geh.

Erster Theil: Elementare Darstellung der Methode nebst Sammlung vollständig berechneter physikalischer, meteorologischer, geodätischer und astronomischer Aufgaben, welche auf lineare und transcendente Gleichungen führen. Preis 1 Thlr.

Frick, Dr. Joseph, Anleitung zu physikalischen Versuchen in der Volksschule. Mit 134 in den Text eingedruckten Holzstichen. Preis 12 Sgr.

Frick, Prof. Dr. J., Physikalische Technik oder Anleitung zur Anstellung von physikalischen Versuchen und zur Herstellung von physikalischen Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 908 in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 2 Thlr. 25 Sgr.

Fries, Geh. Hofr. Prof. Dr. J. Fr., Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. gr. 8. geh. Preis 1 Thlr. 10 Sgr.

Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Herausgegeben von Dr. O. Schlömilch. Zweite Auflage. Galvanoplastische Stereotypie. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 20 Sgr.

Harting, P., Das Mikroskop. Theorie, Gebrauch, Geschichte und gegenwärtiger Zustand desselben. Deutsche Originalausgabe, vom Verfasser revidirt und vervollständigt. Herausgegeben von Dr. Fr. Wilh. Theile. In drei

Strauch, Dr. G. W., Praktische Anwendung für die Integration der totalen und partialen Differentialgleichungen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Erster Band. Preis 3 Thlr.

Tyndall, John, Die Wärme betrachtet als eine Art der Bewegung. Autorisirte deutsche Ausgabe. Herausgegeben durch H. Helmholtz und G. Wiedemann nach der vierten Auflage des Originals. Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen und einer Tafel. Zweite vermehrte und verbess. Auflage. gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 3 Thlr.

Tyndall, John, Der Schall. Acht Vorlesungen gehalten in der Royal Institution von Grossbritannien. Autorisirte deutsche Ausgabe herausgegeben durch H. Helmholtz und G. Wiedemann. Mit 169 in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 2 Thlr.

Tyndall, John, Faraday und seine Entdeckungen. Eine Gedenkschrift. Autorisirte deutsche Ausgabe, herausgegeben durch H. Helmholtz. gr. 8. Fein Velinpapier. geh. Preis 1 Thlr. 10 Sgr.

Uhde, Prof. Dr. August, Die ebene Trigonometrie zum Gebrauche beim Unterricht und zum Selbststudium. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 10 Sgr.

Wallis, J. G. Th., Methodisches Lehr- und Uebungsbuch für die mittlere Stufe des Rechenunterrichts in Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen, sowie auch zum Gebrauche in Seminarien und den Ober-Klassen gehobener Volksschulen. Zweiter Cursus für die mittleren Klassen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 20 Sgr.

Wallis, J. G. Th., Resultate zu den Aufgaben aus dem methodischen Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht im Rechnen. Mittlere Stufe. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 10 Sgr.

Weisbach, Prof. Dr. J., Die neue Markscheidekunst und ihre Anwendung auf bergmännische Anlagen. In 2 Abtheilungen. 4. Fein Velinpap. geh.

Erste Abtheilung: Die trigonometrischen und Nivellir-Arbeiten über Tage. Mit 10 zum Theil colorirten Tafeln in Kupferstich und 79 Abbildungen in Holzstich. Preis 4 Thlr.

Zweite Abtheilung: Die trigonometrischen und Nivellir-Arbeiten unter Tage. Mit 9 zum Theil colorirten Tafeln, einem Titelbilde und 93 in den Text eingedruckten Holzstichen. Preis 4 Thlr.

Weisbach, Prof. Dr. J., Die ersten Grundlehren der höheren Analysis oder Differential- und Integralrechnung. Für das Studium der praktischen Mechanik und Naturlehre möglichst populär bearbeitet. Als Supplement zum ersten und zweiten Bande der ersten Auflage und zum dritten Bande (Mechanik der Zwischen- und Arbeitsmaschinen) von Weisbach's Lehrbuche der Mechanik. Mit 38 in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 10 Sgr.

Weller, F. E., Ausführliches Lehrbuch der ebenen und körperlichen Geometrie zum gründlichen Unterricht an Bürger-, Real- und Gewerbeschulen, Schullehrer-Seminarien und Gymnasien, sowie zum Selbstunterricht, nach einem streng genetischen Verfahren bearbeitet. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Mit 380 in den Text eingedruckten Holzstichen. Preis 2 Thlr.

Weller, F. E., Methodischer Leitfaden zum gründlichen Unterricht in der Geometrie für Bürger-, Real- und Gewerbeschulen, Schullehrer-Seminarien und Gymnasien bearbeitet. In zwei Abtheilungen. Erste Abtheilung: Ebene Geometrie. Zweite Abtheilung: Körperliche Geometrie. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. 8. Fein Velinpap. geh. Preis jeder Abthlg. 15 Sgr.

Wiedemann, Prof. Gustav, Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Mit 596 in den Text eingedruckten Holzstichen und einer farbigen Stahlstichtafel. gr. 8. Sat. Velinpap. geh. Preis 11 Thlr.