

TRAITÉ
DE
CRISTALLOGRAPHIE.

Cet ouvrage se trouve aussi :

A Toulouse..... chez CHARPENTIER.

LEIPZIG, chez MICHESEN.
LONDRES, — DULAU et Cie.

A Genève..... Chez CHERBULIEZ.
Petersbourg..... — GRAFF.
Turin..... — { BOCCA.
PIC.
Vienne..... — ROHRMANN.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

Rue du Jardinot, n° 12.

TRAITÉ
DE
CRISTALLOGRAPHIE,

PAR W.-H. MILLER,

Membre de la Société royale de Londres, Membre de la Société philo-
sophique de Cambridge, Professeur de Minéralogie à l'Université
de Cambridge, etc.

TRADUCTION FRANÇAISE

Par H. de Senarmont,

Ingénieur des Mines.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

—
1842.

AVERTISSEMENT DU TRADUCTEUR.

La Cristallographie repose sur des principes fondamentaux qui établissent une dépendance mutuelle entre les différentes formes géométriques que peut affecter une même substance cristallisée.

Ces principes ont été conçus et énoncés par le créateur de la Cristallographie comme l'expression de certaines lois matérielles, comme des conditions inhérentes à la constitution moléculaire des corps.

On peut aussi les dépouiller de toute interprétation physique, et les présenter, sous forme de relations géométriques, comme des résultats empiriques et généralisés de l'observation.

Lorsqu'on fait ainsi abstraction des êtres matériels auxquels les formes géométriques servent d'enveloppes, pour ne considérer celles-ci qu'en elles-

mêmes, la Cristallographie cesse d'être une science physico-mathématique, et devient l'exposition purement mathématique des propriétés abstraites d'une classe déterminée de polyèdres définie par des conditions géométriques particulières.

Ces deux manières d'envisager la question ont chacune des avantages et des inconvénients qui leur sont propres.

Du moment qu'on n'attache plus aux données premières du problème l'idée de certaines conditions matérielles, et qu'on en fait autant d'hypothèses abstraites, aucune induction ne vient *à priori* motiver ces hypothèses, rien n'en fait sentir la nécessité; et il est assez probable que, sans les conceptions de physique moléculaire qui lui ont servi de guide, *Haüy* eût difficilement découvert, comme purement empiriques, les lois fondamentales de la Cristallographie, et qu'il eût laissé la science au point où l'avaient amenée ses devanciers. Mais, d'un autre côté, quand on se place au point de vue exclusivement géométrique, un petit nombre de données abstraites suffit pour définir tout l'ensemble des formes diverses que peut affecter un même corps cristallisé; toutes sont soumises à un mode uniforme de dérivation; chacune d'elles a une existence individuelle et indépendante de celle de toutes les autres. Au point de vue physique, au con-

traire, l'existence de chaque forme suppose celle d'un certain solide fondamental plus ou moins hypothétique, qui sert à toutes de lien commun, mais avec lequel chacune a des relations particulières.

La manière géométrique a donc quelque chose de plus large et de plus général ; elle met naturellement en évidence les rapports de symétrie propres à chaque ensemble de formes cristallines, et les formes elles-mêmes se classent simplement et complètement dans un ordre méthodique.

Quel que soit, du reste, le mérite relatif de ces deux modes d'exposition, géométrique ou physique, le premier a prévalu ; il est adopté par la plupart des minéralogistes, et même à peu près exclusivement usité en Angleterre et surtout en Allemagne. Aucun ouvrage français ne l'a cependant présenté jusqu'ici d'une manière complète : tel est le motif qui a fait entreprendre la traduction du *Traité de Cristallographie* de M. Miller. Ce Traité se recommande assez par le nom de son auteur, et, sauf un petit nombre de rectifications que lui-même a bien voulu indiquer, le texte anglais a été fidèlement reproduit. On y a seulement ajouté quelques notes.

Ces éclaircissements, superflus pour beaucoup de lecteurs, peuvent être utiles à ceux qui sont peu fa-

(viij)

miliers avec les transformations algébriques ou trigonométriques; tous y trouveront d'ailleurs cet avantage, que leur attention n'aura pas besoin de se distraire pour s'appliquer à de simples développements de calcul.

AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR.

La notation cristallographique adoptée dans ce Traité est empruntée, sauf quelques modifications sans importance, à un Mémoire du professeur Whewell *Sur une Méthode générale de calculer les angles des cristaux*, publié dans les *Mémoires de la Société royale* pour 1825. (*Philosophical Transactions of the royal Society*, for 1825.)

Le professeur Neumann, de Königsberg, est l'auteur du système qui consiste à indiquer la position des faces d'un cristal au moyen des points où chaque rayon d'une sphère, normal à ces faces, rencontre la surface de la sphère elle-même. (*Beitrag zur Krystallonomie.*) Grassmann l'a ensuite réinventé de son côté avec la notation qui en fait partie. (*Zur Krystallonomie und Geometrischen Combinationslehre.*)

L'emploi de cette méthode conduit à remplacer par les formules de la Trigonométrie sphérique celles que fournit la Géométrie analytique à trois dimensions, pour déterminer la position des faces d'un cristal et leur inclinaison réciproque.

Les formules de ce Traité ont été obtenues ainsi; elles sont remarquables par leur symétrie et par leur simplicité, et se prêtent toutes à l'emploi des loga-

(x)

rithmes; elles sont, je pense, nouvelles pour la plupart. Afin de faciliter les calculs, la position respective de deux faces est donnée par l'angle compris entre leurs normales, ou, en d'autres termes, si l'on adopte la définition ordinaire de l'angle compris entre deux plans qui limitent un solide, par le supplément de l'angle que ces faces font entre elles.

Le lecteur pourra passer les n^{os} **22 à 24, 28 à 31**, s'il veut se contenter des connaissances nécessaires pour déterminer soit les éléments d'un cristal et les notations symboliques de ses faces quand ses angles sont connus, soit la forme et les angles d'un cristal quand on connaît ses éléments et les notations symboliques de ses faces.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER. — PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES GÉNÉRALES DES CRISTAUX.

§ 1. Cristaux, faces, plans de clivage, p. 1. — § 2. Loi qui détermine l'inclinaison mutuelle des faces et des plans de clivage, p. 1. — § 3. Les plans de clivage sont toujours parallèles à des faces possibles, p. 2. — § 4. Axes, paramètres, caractéristiques, notation symbolique d'une face, p. 2. — § 5. Éléments d'un cristal, p. 2. — § 6. Systèmes différents d'axes et de paramètres, p. 3. — § 7. Comment la position d'une face est déterminée par ses intersections avec les axes, p. 3. — § 8. Angles que fait la normale à une face avec les axes, p. 5. — § 9. Sphère de projection, pôles, p. 6. — § 10 et 11. Signe des caractéristiques, p. 6. — § 12 à 14. Condition nécessaire pour qu'un point soit situé sur un grand cercle qui passe par deux pôles donnés, p. 7. — § 15. Symbole du point d'intersection de deux grands cercles, p. 9. — § 16 et 17. Les caractéristiques d'une zone en fonction des caractéristiques de deux pôles, et les caractéristiques d'un pôle en fonction des caractéristiques de deux zones sont des expressions de même forme, p. 10. — § 18 à 20. Expression des caractéristiques d'une face commune à deux zones en fonction des caractéristiques de deux faces de chacune de ces deux zones, p. 11. — § 21. Conditions pour qu'une face fasse partie d'une zone, p. 12. — § 22. Déterminer tous les pôles qui sont situés sur un cercle de zone donné, et tous les cercles de zone qui passent par un pôle donné, p. 13. — § 23 et 24. Tout pôle dont les caracté-

ristiques surpassent l'unité est situé à l'intersection de deux cercles de zone qui passent chacun par deux pôles dont les caractéristiques sont numériquement moindres, p. 13. — § 25 à 27. Équations de condition entre les distances angulaires et les caractéristiques de quatre pôles situés sur le même cercle de zone, p. 17. — § 28. Règles pour changer d'axes cristallographiques, p. 21. — § 29. Règle pour changer de paramètres, p. 24. — § 30 et 31. Étant donnés, pour deux systèmes d'axes cristallographiques, les symboles de quatre pôles, et les symboles d'un cinquième pôle seulement pour l'un de ces systèmes, déterminer son symbole pour l'autre système, p. 25. — § 32. Systèmes cristallins, p. 27. — § 33. Se distinguent par le genre de symétrie propre à chacun d'eux, p. 28. — § 34. Formes : formes holoédriques, formes hémihédriques, combinaisons, p. 29. — § 35. Éléments d'un cristal, p. 29. — § 36. Données nécessaires pour les déterminer, p. 30.

CHAPITRE II. — SYSTÈME OCTAÉDRIQUE.

§ 37. Axes, paramètres, p. 31. — § 38. Formes holoédriques, p. 31. — § 39 à 41. Formes hémihédriques, p. 32. — § 42 à 46. Position d'un pôle quelconque, distance de deux pôles quelconques entre eux, p. 34. — § 47 à 31. Arrangement des pôles des formes holoédriques et hémihédriques, p. 37. — § 52 et 53. Trouver les caractéristiques d'une forme donnée, p. 39. — § 54 à 57. Trouver la figure géométrique et les angles des différentes formes, p. 39. — § 68. Table des distances des pôles des différentes formes aux pôles les plus rapprochés du cube, du dodécaèdre et de l'octaèdre, p. 46. — § 69 à 79. Exemples, p. 48.

CHAPITRE III. — SYSTÈME PYRAMIDAL.

§ 80. Axes, paramètres, p. 55. — § 81. Formes holoédriques, p. 55. — § 82 à 84. Formes hémihédriques, p. 56. — § 85. Déterminer la position d'un pôle quelconque, p. 58. — § 86

à 90. Arrangement des pôles des formes holoédriques et hémédriques, p. 59. — § 91 à 94. Déterminer la distance de deux pôles de la même forme, p. 61. — § 95 et 96. Déterminer les caractéristiques d'une forme, p. 62. — § 97 à 99. Déterminer la distance de deux pôles quelconques, p. 63. — § 100. Déterminer les paramètres, p. 65. — § 101. Changer le système d'axes cristallographiques, p. 66. — § 102 à 107. Déterminer la figure géométrique et les angles des différentes formes, p. 66. — § 118 à 121. Exemples, p. 70.

CHAPITRE IV. — SYSTÈME RHOMBOÉDRIQUE.

§ 122. Axes, paramètres, p. 76. — § 123. Formes holoédriques, p. 76. — § 124 à 126. Formes hémédriques, p. 78. — § 127 à 129. Déterminer la position d'un pôle quelconque, p. 80. — § 130 à 132. Arrangement des pôles des formes holoédriques et hémédriques, p. 82. — § 133 à 135. Formes dirhombocédriques, p. 83. — § 136 et 137. Formes directes et inverses, p. 85. — § 138 à 140. Déterminer les distances de deux pôles de la même forme, p. 86. — § 142 et 143. Trouver les caractéristiques d'une forme, p. 88. — § 144. Déterminer la distance de deux pôles quelconques, p. 90. — § 145. Étant donnée la distance de deux pôles quelconques, trouver la distance d'un pôle de $\{100\}$ au pôle le plus rapproché de $\{111\}$, p. 90. — § 146. Déterminer la position d'un pôle, étant données ses distances à trois pôles équidistants d'une forme quelconque, p. 91. — § 147. Changer les axes cristallographiques, p. 92. — § 148 à 164. Déterminer les figures géométriques et les angles des différentes formes, p. 92. — § 165 à 171. Exemples, p. 99.

CHAPITRE V. — SYSTÈME PRISMATIQUE.

§ 172. Axes, p. 107. — § 173. Formes holoédriques, p. 107. — § 174 et 175. Formes hémédriques, p. 108. — § 176. Déterminer la position d'un pôle quelconque, p. 109. — § 177

§ 179. Arrangement des pôles des formes holoédriques et hémihédriques, p. 110. — § 180 à 183. Déterminer la distance de deux pôles de la même forme, p. 110. — § 184 et 185. Déterminer la distance de deux pôles quelconques, p. 111. — § 186 et 187. Déterminer les caractéristiques, p. 112. — § 188 et 189. Déterminer les paramètres, p. 112. — § 190 à 198. Déterminer les figures géométriques et les angles des différentes formes, p. 113. — § 199 à 201. Exemples, p. 115.

CHAPITRE VI. — SYSTÈME PRISMATIQUE OBLIQUE.

§ 202. Axes, p. 120. — § 203. Formes holoédriques, p. 120. — § 204. Formes hémihédriques, p. 121. — § 205. Déterminer la position d'un pôle quelconque, p. 121. — § 206. Arrangement des pôles, p. 122. — § 207 et 208. — Trouver la distance de deux pôles quelconques, p. 123. — § 209 à 212. Déterminer l'inclinaison des axes et les paramètres, p. 123. — § 213. Changer les axes cristallographiques, p. 125. — § 214 à 217. Déterminer la figure géométrique et les angles des différentes formes, p. 126. — § 218 à 220. Exemples, p. 128.

CHAPITRE VII. — SYSTÈME PRISMATIQUE.

§ 222. Formes, p. 135. — § 222 à 224. Déterminer la position d'un pôle quelconque, p. 135. — § 225. Trouver la distance de deux pôles quelconques, p. 139. — § 226 et 227. Déterminer les inclinaisons réciproques des axes et les paramètres, p. 139. — § 228 et 229. Exemples, p. 141.

CHAPITRE VIII. — DES CRISTAUX HÉMITROPES.

§ 230. Loi d'accolement des deux cristaux qui composent un cristal hémitrope, axe d'hémitropie, p. 146. — § 231. Arrangement des pôles d'un système hémitrope, p. 146. — § 232. Déterminer l'axe d'hémitropie, p. 147. — § 233. Distance des pôles d'un cristal hémitrope, p. 147. — § 234 à 263. Exemples, p. 149.

CHAPITRE IX. — DES GONIOMÈTRES, ETC.

§ 264. Goniomètre de Carangeau, p. 162. — § 265. Goniomètre de Wollaston, p. 162. — § 266. Mesure de l'angle dièdre compris entre deux faces d'un cristal, p. 163. — § 267. Déterminer les faces qui font partie d'une zone, p. 164. — § 268. Ajustement du goniomètre de Wollaston, p. 164. — § 269. Signaux, p. 165. — § 270. Erreur due à l'excentricité, p. 166. — § 271. Élimination de cette erreur, p. 167. — § 272. Dilatation inégale des cristaux, par la chaleur, dans des directions différentes, p. 169. — § 273. Sur les angles plans des faces des cristaux, p. 273. — § 274. Propriétés optiques des cristaux qui appartiennent aux différents systèmes cristallins, p. 169. — § 275. Éléments d'un cristal en fonction des distances de certains pôles entre eux, p. 171. — § 276. Table qui montre comment les pôles dont les caractéristiques ne surpassent pas 7 peuvent se déterminer par l'intersection de deux cercles de zone qui passent par des pôles dont les caractéristiques sont numériquement plus petites, p. 172. — § 279. Comparaison des différents systèmes de notations cristallographiques, p. 174.

CHAPITRE X. — REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES CRISTAUX ;
PROJECTIONS.

§ 278 à 282. Représentation graphique des cristaux, p. 182. — § 283. Projection de la sphère sur la surface de laquelle on rapporte les pôles des faces, p. 185. — § 284 à 295. Projection stéréographique, p. 185. — § 296 à 302. Projection gnomonique, p. 191.

NOTE

Sur le changement de système d'axes cristallographiques, p. 198.

ERRATA.

Pages. Lignes.

- 22, 2, *supprimez* (**).
- 20, 19, au lieu de $b = \frac{x-y}{2}$, lisez $b = \frac{y-x}{2}$.
- 20, 20, au lieu de $\tan \frac{x-y}{2}$, lisez $\tan \frac{y-x}{2}$.
- 23, 5, au lieu de $(fh - ek)$, lisez $(fh + ek)$.
- 23, 22, au lieu de $\left(\frac{\cos C'Z}{p \cos C'Z'} \right)$, lisez $\left(\frac{\cos C'X}{p \cos C'Z'} \right)$.
- 25, 26, au lieu de les symboles, lisez le symbole.
- 27, 12, au lieu de (n° 51), lisez (n° 50).
- 33, 2, au lieu de $\{x hkl\}$, lisez $x \{hkl\}$.
- 39, 14, au lieu de $\{hko\}$, lisez $\{hko\}$.
- 46, 9, au lieu de $\cos W = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{h^2 + k^2 + l^2}$, lisez $W = \frac{h^2 - k^2 + l^2}{h^2 + k^2 + l^2}$.
- 52, 2, au lieu de $\frac{1}{3} \frac{h+k+l}{h^2+k^2+l^2}$, lisez $\frac{1}{3} \frac{(h+k+l)^2}{h^2+k^2+l^2}$.
- 52, 16, au lieu de $2k = 3h$, $2l = h$, lisez $2h = 3k$, $2l = k$.
- 52, 18, au lieu de $l = 1$, $h = 2$, $k = 3$, lisez $l = 1$, $k = 2$, $h = 3$.
- 52, 19, au lieu de (231), lisez (321).
- 61, 18, au lieu de $\sin^2 \frac{l}{2}$, lisez $\sin^2 \frac{l}{2} L$.
- 115, 20, au lieu de $\sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2}$, lisez $\sqrt{n^2 a^2 - m^2 b^2}$.
- 127, 12, au lieu de $\sqrt{r^2 a^2 + p^2 b^2 - 2prab \cos XZ}$, lisez $\sqrt{r^2 a^2 + p^2 b^2 - 2prab \cos XZ}$.
- 136, 12 et 13, au lieu de on connaîtra les segments dans chacun de ces angles par les axes PA, PB, PC, lisez on connaîtra les segments déterminés dans chacun de ces angles par les arcs PA, PB, PC.
- 136, 19, au lieu de $\tan \frac{1}{2} (PA - PA)$, lisez $\tan \frac{1}{2} (PH - PA)$.
- 136, 21, au lieu de $\cot \frac{1}{2} BC$, lisez $\tan \frac{1}{2} BC$.
- 136, 22, au lieu de $\cot \frac{1}{2} CA$, lisez $\tan \frac{1}{2} CA$.
- 136, 23, au lieu de $\cot \frac{1}{2} AB$, lisez $\tan \frac{1}{2} AB$.
- 152, 7, au lieu de $\{hk\} I$, lisez $\{hkl\}$.
- 177, 6, au lieu de $\{B, 332\}$, lisez $B_1 \{332\}$.

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES GÉNÉRALES DES CRISTAUX.

1. Beaucoup de substances naturelles, beaucoup de produits chimiques se présentent sous la forme de solides limités par des surfaces planes ; quand on les brise, on remarque ordinairement une tendance à se rompre en chaque point suivant certains plans, parallèles à quelques-unes des faces terminales, ou qui font avec elles des angles définis.

Les solides de cette espèce sont des *cristaux* : les plans qui les limitent sont les *faces* de ces *cristaux*, ceux de facile rupture, leurs *plans de clivage*.

2. Les inclinaisons réciproques des faces et des plans de clivage d'un cristal sont soumises à des lois qu'il faut maintenant énoncer.

Que par un point O pris à l'intérieur d'un cristal (*fig. 1*), on conçoive des plans parallèles à chaque face terminale et à chaque plan de clivage ; soient OX , OY , OZ trois intersections de ces plans non situées elles-mêmes dans un même plan ; soit, de plus, une face ou un plan de clivage qui rencontre OX , OY , OZ aux points A , B , C : si une autre face ou un autre plan rencontre OX , OY , OZ aux

(2)

points H, K, L, et qu'on donne aux longueurs HO, KO, LO le signe + ou le signe —, suivant qu'on les porte dans le même sens que AO, BO, CO, ou en sens contraire, on a la relation

$$\frac{1}{h} \times \frac{AO}{HO} = \frac{1}{k} \times \frac{BO}{KO} = \frac{1}{l} \times \frac{CO}{LO},$$

relation dans laquelle h, k, l représentent des nombres positifs ou négatifs, mais toujours entiers. Un ou deux de ces trois nombres peut d'ailleurs être zéro. Lorsqu'un des nombres h, k, l est zéro, la distance correspondante HO, KO ou LO devient infinie, et, par conséquent, la face ou le plan de clivage est parallèle à la ligne suivant laquelle cette distance devait être mesurée.

3. Puisque la position des faces et celle des plans de clivage d'un cristal sont soumises à la même loi, tout plan de clivage est ou peut être une face du cristal. Quand on se servira, à l'avenir, du mot *faces*, il sera donc sous-entendu qu'on veut parler également des faces proprement dites et des plans de clivage.

4. Les directions OX, OY, OZ sont ce qu'on appelle *les axes du cristal*; leur origine est au point O; les longueurs AO, BO, CO, ou trois longueurs quelconques qui ont entre elles les mêmes rapports de grandeur, en sont les *paramètres*; les nombres entiers h, k, l sont les *caractéristiques* de la face qui passe par H, K, L : on désigne cette face par la notation symbolique (hkl). Une caractéristique négative se distingue par le signe — placé au-dessus de la lettre ou du chiffre correspondant.

5. Les caractéristiques h, k, l qui prennent différentes valeurs entières pour déterminer la position des différentes faces d'un même cristal, sont rarement de grands nombres. Quand les axes et les paramètres sont convena-

blement choisis, la plus haute caractéristique ne dépasse pas ordinairement le nombre six.

Pour tous les cristaux d'une même espèce, l'inclinaison mutuelle des axes et les rapports des paramètres ont la même valeur à une température déterminée; les symboles des faces peuvent d'ailleurs être différents. D'après cela, les angles XOY, YOZ, ZOY que les axes font entre eux, et les rapports de deux des paramètres AO, BO, CO au troisième, sont les cinq *éléments* qui caractérisent chaque espèce cristalline.

6. On se contentera, pour le moment, de supposer que la loi énoncée (n° 2) s'applique au cas où l'on a choisi pour axes d'un cristal trois droites parallèles aux intersections d'autant de faces particulières, et pour paramètres les segments interceptés sur ces droites, à partir de l'origine, par une quatrième face également déterminée. Il sera démontré par la suite que, si, par un même point, on mène à l'intérieur d'un cristal des plans parallèles à toutes les faces possibles, il suffit qu'un système particulier d'axes et de paramètres déterminé par les intersections de trois de ces plans et par les segments interceptés par un quatrième, satisfasse à la loi du n° 2. Pour que cette loi subsiste également si l'on prend pour axes trois intersections choisies arbitrairement, et pour paramètres leurs segments interceptés par une face quelconque.

7. La loi précédemment énoncée peut être mise sous la forme suivante, différente de la première et peut-être moins simple, mais qui présente sous un point de vue moins abstrait la position relative des faces d'un cristal.

Soient OX, OY, OZ (*fig. 2*) les axes d'un cristal; a , b , c ses paramètres.

Qu'on porte sur OX de O en X;

$$OA_1 = a, \quad OA_2 = \frac{1}{2}a, \quad OA_3 = \frac{1}{3}a, \quad OA_k = \frac{1}{k}a,$$

(4)

dans une direction opposée,

$$OA_{-1} = a, \quad OA_{-2} = \frac{1}{2} a, \quad OA_{-3} = \frac{1}{3} a, \quad OA_{-h} = \frac{1}{h} a,$$

et dans l'une et l'autre direction,

$$OA_0 = \frac{1}{0} a = \infty;$$

que les points $B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, \dots, B_k, B_{-k}, \dots, B_0; C_1, C_{-1}, C_2, C_{-2}, \dots, C_l, C_{-l}, \dots, C_0$, soient déterminés de la même manière au moyen des valeurs de b et de c . Une face quelconque du cristal sera parallèle à un plan qui passe par trois points ainsi déterminés sur chacun des trois axes.

Cet énoncé n'est qu'une transformation du premier; car, si la face (hkl) rencontre les axes OX, OY, OZ en H, K, L , on a ($n^o 2$)

$$\frac{1}{h} \frac{OA}{OH} = \frac{1}{k} \frac{OB}{OK} = \frac{1}{l} \frac{OC}{OL};$$

mais, d'après la notation qu'on vient d'adopter,

$$OA_h = \frac{1}{h} a, \quad OB_k = \frac{1}{k} b, \quad OC_l = \frac{1}{l} c,$$

les distances se mesurant de O vers X, Y, Z , ou en sens contraire, suivant le signe positif ou négatif des caractéristiques h, k, l .

Donc

$$\frac{OA_h}{OH} = \frac{OB_k}{OK} = \frac{OC_l}{OL}.$$

Donc la face (hkl) est parallèle au plan qui passe par les points A_h, B_k, C_l (*).

(*) Le plan qui passe par A_h, B_k, C_l et intercepte sur chaque

8. Trouver des quantités proportionnelles aux cosinus, des angles que la perpendiculaire à une face (hkl) fait avec les axes du cristal en fonction des caractéristiques de cette face et des paramètres.

Soient (fig. 3) X, Y, Z les points où les axes OX, OY, OZ percent la surface d'une sphère décrite du point O comme centre. Soit OP une droite perpendiculaire à la face HKL dont la notation symbolique est (hkl); elle rencontre cette face en p et la surface de la sphère en P: on a

$$\frac{Op}{HO} = \cos PX, \quad \frac{Op}{KO} = \cos PY, \quad \frac{Op}{LO} = \cos PZ.$$

Donc, en substituant les valeurs de HO, KO, LO tirées des équations du n° 2, et en posant AO = a , BO = b , CO = c ,

$$Op = \frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ.$$

axe cristallographique des segments $\frac{a}{h}, \frac{b}{k}, \frac{c}{l}$, est parallèle au plan qui intercepte, sur ces mêmes axes, des segments kla, hlb, khc . Dans le langage de la cristallographie moléculaire, un pareil plan résulte d'un *décroissement intermédiaire* sur l'angle solide O d'une *forme primitive* prismatique, dont les trois axes formeraient les trois arêtes, par kl rangées suivant OX, hl rangées suivant OY, kh rangées suivant OZ, de molécules dont les trois dimensions, suivant ces mêmes axes, sont proportionnelles respectivement à a, b, c .

Puisque h, k, l sont toujours des nombres entiers, kl, hl, kh sont aussi des nombres entiers.

La condition des caractéristiques entières n'est donc qu'une traduction géométrique de la loi physique des décroissements moléculaires.

Dans tous les problèmes de cristallographie qui se présenteront par la suite, on rapportera les faces des cristaux à la surface d'une sphère au moyen des rayons normaux à ces faces, et tous les calculs s'effectueront par la trigonométrie sphérique appliquée aux formules déduites des précédentes équations.

9. La sphère à laquelle on rapporte ainsi les faces des cristaux s'appelle la *sphère de projection*.

L'extrémité d'un rayon normal à une face quelconque est le *pôle* de cette face. Une face et son pôle se désignent ordinairement par la même lettre et par la même notation symbolique. Les points où les axes percent la sphère sont invariablement désignés par X, Y, Z.

10. Soient (*fig. 4*) X, Y, Z les points où les axes d'un cristal quelconque percent la sphère de projection; soient a, b, c les paramètres du cristal, ABC le triangle polaire de XYZ.

Les arcs AY, AZ sont égaux à 90 degrés; donc

$$\cos AY = 0, \quad \cos AZ = 0;$$

done

$$\frac{a}{1} \cos AX = \frac{b}{0} \cos AY = \frac{c}{0} \cos AZ.$$

Donc (n° 8) A est le pôle de la face (100); de même, B est le pôle de la face (010), et C de la face (001).

11. Soit P le pôle de la face (hkl); alors (n° 8)

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ.$$

Lorsque A et P sont situés du même côté du grand cercle BC, PX est plus petit que 90 degrés. Par conséquent, cos PX est positif.

Lorsque A et P sont situés de deux côtés opposés du

même grand cercle, PX est plus grand que 90° , $\cos PX$ est négatif. Si donc on regarde h comme positif dans le premier cas, il sera négatif dans le second.

Même conclusion pour k et pour l , qui sont positifs ou négatifs suivant que les points P et B , P et C sont respectivement du même côté des grands cercles CA et AB , ou de côtés opposés.

Lorsque P est situé sur le grand cercle BC , $PX = 90^\circ$, $\cos PX = 0$; donc $h = 0$. Lorsque P est situé sur CA , $\cos PY = 0$, et par conséquent $k = 0$. Lorsque P est situé sur AB , $\cos PZ = 0$, par conséquent $l = 0$.

Si l'on tire les diamètres AA' , BB' , CC' , PP' , les notations symboliques de A , B , C , P étant pour A (100), B (010), C (001), P (hkl), celles de A' , B' , C' , P' seront pour A' ($\bar{1}00$), B' ($0\bar{1}0$), C' ($00\bar{1}$), P' ($\bar{h} \bar{k} \bar{l}$).

12. X , Y , Z (*fig. 5*) sont trois points situés d'une manière quelconque sur la surface de la sphère; P , Q , R , trois points pris arbitrairement sur la circonférence d'un grand cercle : on demande la relation qui lie les distances de P , Q , R à chaque point X , Y , Z .

Des triangles sphériques PQX , RQX on tire

$$\begin{aligned} \cos PX &= \cos QX \cos PQ + \sin QX \sin PQ \cos PQX, \\ \cos RX &= \cos QX \cos RQ + \sin QX \sin RQ \cos RQX. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute la première équation multipliée par $\sin QR$ à la seconde multipliée par $\sin PQ$, et si l'on observe que

$$\begin{aligned} \cos PQX + \cos RQX &= 0, \\ \sin PR &= \sin (RQ + QP) = \sin RQ \cos QP + \sin QP \cos RQ, \end{aligned}$$

on arrive à une équation qui se joindra à deux autres équations analogues, qu'on peut déduire de la première en

écrivait successivement Y et Z à la place de X :

$$\begin{aligned}\cos PX \sin QR + \cos RX \sin PQ &= \cos QX \sin PR, \\ \cos PY \sin QR + \cos RY \sin PQ &= \cos QY \sin PR, \\ \cos PZ \sin QR + \cos RZ \sin PQ &= \cos QZ \sin PR;\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant successivement, entre ces équations considérées deux à deux, $\sin PQ$, $\sin QR$, $\sin PR$,

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\sin PQ} (\cos PX \cos QY - \cos PY \cos QX) \\ &= \frac{1}{\sin PR} (\cos PX \cos RY - \cos PY \cos RX) \\ &= \frac{1}{\sin QR} (\cos QX \cos RY - \cos QY \cos RX), \\ & \frac{1}{\sin PQ} (\cos PY \cos QZ - \cos PZ \cos QY) \\ &= \frac{1}{\sin PR} (\cos PY \cos RZ - \cos PZ \cos RY) \\ &= \frac{1}{\sin QR} (\cos QY \cos RZ - \cos QZ \cos RY). \\ & \frac{1}{\sin PQ} (\cos PZ \cos QX - \cos PX \cos QZ) \\ &= \frac{1}{\sin PR} (\cos PZ \cos RX - \cos PX \cos RZ) \\ &= \frac{1}{\sin QR} (\cos QZ \cos RX - \cos QX \cos RZ),\end{aligned}$$

Éliminant deux des quantités $\sin PQ$, $\sin PR$, $\sin QR$, entre deux quelconques des équations précédentes, on arrive à l'équation de condition

$$\begin{aligned}0 &= \cos QX (\cos PY \cos RZ - \cos PZ \cos RY) \\ &+ \cos QY (\cos PZ \cos RX - \cos PX \cos RZ) \\ &+ \cos QZ (\cos PX \cos RY - \cos PY \cos RX).\end{aligned}$$

13. Soient X, Y, Z les points où les axes du cristal

(9)

percent la sphère de projection ; P, R les pôles des faces (hkl) , (pqr) ; a , b , c les paramètres ; alors (n° 8)

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ,$$

$$\frac{a}{p} \cos RX = \frac{b}{q} \cos RY = \frac{c}{r} \cos RZ.$$

Si dans l'équation finale du n° 12 on remplace $\cos PX$, $\cos PY$, $\cos PZ$, $\cos RX$, $\cos RY$, $\cos RZ$ par leurs valeurs, cette équation de condition devient

$$ua \cos QX + vb \cos QY + wc \cos QZ = 0,$$

dans laquelle

$$u = kr - lq, \quad v = lp - hr, \quad w = hq - kp.$$

14. Le grand cercle qui passe par les pôles des faces (hkl) , (pqr) , peut être désigné par la notation symbolique (uvw) ; les lettres u , v , w ont dans ce symbole les valeurs qui leur ont été précédemment assignées (n° 13).

Puisque les pôles PR peuvent être désignés par les caractéristiques h, k, l ; p, q, r , ou par d'autres nombres respectivement proportionnels à ces quantités, il faut remarquer que les caractéristiques qui désignent le grand cercle PR peuvent être des nombres quelconques proportionnels à u , v , w .

Lors donc que ces nombres auront un facteur commun, il sera convenable d'adopter pour caractéristiques trois nombres proportionnels réduits à leur plus simple expression entière.

15. Soient (hkl) , (pqr) les notations symboliques de deux grands cercles qui passent ~~l'un et l'autre~~ par les pôles de deux faces quelconques non parallèles, et soit Q

leur point d'intersection, puisque Q appartient en même temps à chaque grand cercle, on a (n° 12)

$$\begin{aligned} ha \cos QX + kb \cos QY + lc \cos QZ &= 0, \\ pa \cos QX + qb \cos QY + rc \cos QZ &= 0; \end{aligned}$$

en éliminant successivement $\cos QX$, $\cos QY$, $\cos QZ$, on arrive à

$$\frac{a}{u} \cos QX = \frac{b}{v} \cos QY = \frac{c}{w} \cos QZ,$$

et dans ces équations

$$u = kr - lq, \quad v = lp - hr, \quad w = hq - kp,$$

les caractéristiques h, k, l ; p, q, r sont des nombres entiers; donc u, v, w sont des nombres entiers; donc (n° 8) Q est le pôle de la face (uvw) .

D'après cela, si deux grands cercles passent chacun par les pôles de deux faces quelconques non parallèles entre elles, il peut toujours en exister une cinquième, qui a son pôle à l'intersection de ces deux grands cercles.

16. Quand trois ou un plus grand nombre de faces d'un cristal ont leurs pôles sur le même grand cercle, on dit qu'elles forment une *zone*. Le grand cercle qui passe par les pôles de deux faces quelconques non parallèles, et par conséquent par les pôles de toutes les autres faces qui appartiennent à la même zone qu'elles, s'appellera le *cercle de zone*. Le diamètre qui joint les pôles de ce grand cercle s'appelle l'*axe de la zone*.

Une zone et son cercle de zone seront désignés par la même notation symbolique.

17. Du n° 13 il résulte que, si (uvw) est le symbole d'une zone à laquelle appartiennent les faces (hkl) , (pqr) ,

$$u = kr - lq, \quad v = lp - hr, \quad w = hq - kp;$$

et du n^o 13 on conclut que si (uvw) est le symbole de la face commune aux deux zones (hkl) , (pqr) ,

$$u = kr - lq, \quad v = lp - hr, \quad w = hq - kp.$$

u , v , w s'expriment donc en fonction de h , k , l ; p , q , r exactement de la même manière que u , v , w en fonction de h , k , l ; p , q , r .

Il sera quelquefois commode de désigner la zone à laquelle appartiennent les faces (hkl) , (pqr) par le symbole (hkl, pqr) ; et la face commune aux zones (hkl) , (pqr) , par le symbole (hkl, pqr) .

18. Les intersections des faces qui appartiennent à une zone ou de ces faces prolongées sont parallèles à l'axe de la zone, et par conséquent l'une à l'autre.

Dans beaucoup de cas, le parallélisme des arêtes qui résultent des intersections d'une série de faces appartenant à la même zone se découvre à la simple inspection. La méthode qui sert à déterminer par l'observation si une face fait ou ne fait pas partie d'une zone à laquelle appartiennent déjà deux faces données, quand la première ne rencontre pas celles-ci ou quand les arêtes sont trop courtes pour qu'on puisse juger avec certitude de leur parallélisme, sera exposée quand on en viendra à expliquer l'usage du goniomètre de Wollaston.

Quand, par l'observation du parallélisme des arêtes, ou par toute autre méthode, on s'est assuré qu'une face fait, avec quatre autres faces données, considérées deux à deux, partie de deux zones différentes, les notations symboliques des deux zones, et par suite la notation symbolique de la face qui leur est commune, seront déterminées par les méthodes exposées n^{os} 14 et 15.

19. Les points d'intersection de deux cercles de zones

quelconques sont aux deux extrémités opposées d'un même diamètre de la sphère de projection. Par conséquent (n° 11), la notation symbolique des deux points d'intersection ne diffère que par le signe des caractéristiques.

20. Si $\{uvw\}$ est le symbole d'un cercle de zone qui passe par les pôles de (hkl) , (pqr) , il est aisé de voir que $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$ est le symbole du cercle de zone qui passe par les pôles de $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$, $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$, et aussi que si les cercles de zones $\{hkl\}$, $\{pqr\}$ se coupent au pôle de (uvw) , les cercles de zones $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$, $\{\bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$ se coupent au pôle de $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$.

D'après cela, si les cercles de zones $\{hkl, pqr\}$, $\{h'k'l', p'q'r'\}$ se coupent au pôle de (uvw) , les cercles de zones $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}, \bar{p}\bar{q}\bar{r}\}$, $\{\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}', \bar{p}'\bar{q}'\bar{r}'\}$ se coupent au pôle de $(\bar{u}\bar{v}\bar{w})$.

Si les cercles de zones $\{hkl, pqr\}$, $\{h'k'l', p'q'r'\}$ se coupent en (uvw) , il est manifeste que $\{lhk, rpq\}$, $\{l'h'k', r'p'q'\}$ se coupent en (wuv) , et que $\{hlk, prq\}$, $\{h'l'k', p'r'q'\}$ se coupent en $(u\bar{v}\bar{w})$.

21. Soit Q le pôle d'une face (uvw) qui fait partie de la zone $\{uvw\}$; alors (n°s 8 et 13)

$$\frac{a}{u} \cos QX = \frac{b}{v} \cos QY = \frac{c}{w} \cos QZ,$$

$$ua \cos QX + vb \cos QY + wc \cos QZ;$$

donc

$$uu + vv + ww = 0:$$

telle est l'équation de condition qui exprime que la face (uvw) fait partie de la zone $\{uvw\}$.

Tout système de nombres entiers qui satisfait à cette équation quand on substitue chacun d'eux à u, v, w , caractérise une face qui appartient à la zone $\{uvw\}$, et tout système de nombres entiers qui satisfait à la même équation quand on substitue chacun d'eux à u, v, w , caractérise une zone dont la face (uvw) fait partie.

22. Puisque le cercle de zone $\{uvw\}$ qui passe par le pôle $(u\nu w)$ satisfait à l'équation

$$uu + v\nu + ww = 0,$$

lorsqu'on voudra trouver tous les pôles situés sur un certain cercle de zone ou tous les cercles de zone qui passent par un certain pôle, il faudra déterminer toutes les solutions entières (une ou deux d'entre elles pouvant être égales à zéro) de l'équation

$$ax + by + cz = 0;$$

dans le premier cas, a, b, c représentent les caractéristiques du cercle de zone, et dans le second les caractéristiques du pôle.

Soient les coefficients c, b premiers entre eux; qu'on transforme $\frac{c}{b}$ en fraction continue, et soit $\frac{c'}{b'}$ l'avant-dernière réduite: alors les règles ordinaires pour la résolution des équations indéterminées du premier degré conduisent à $y = \pm (c'ax - mc)$; $z = \mp (b'ax - mb)$. Suivant que $c'b'$ est plus grand ou plus petit que $c'b$, il faut prendre les signes supérieurs ou inférieurs. La valeur de x une fois adoptée, des valeurs correspondantes de y et de z s'obtiennent en substituant à l'indéterminée m différents nombres entiers positifs ou négatifs.

23. (*) Si un cercle de zone $\{hkl\}$, qui passe par les pôles

(*) On peut énoncer de plusieurs manières la condition géométrique fondamentale qui caractérise la classe particulière de polyèdres à laquelle appartiennent les formes cristallines.

Au lieu d'adopter pour point de départ la loi des caractéristiques entières (n° 2), on peut (voyez NEUMANN, BEYTRAG ZUR KRYST-

(hkl) , $(h'k'l')$ coupe un autre cercle de zone (pqr) qui passe par les pôles (pqr) , $(p'q'r')$ en un point qui soit lui-même le pôle d'une face (uvw) , on peut toujours trouver

TALLOMIR), poser en principe que, dans une même espèce cristalline, tous les pôles résultent des intersections successives d'une suite de cercles de zones qui commencent par quatre faces particulières. Il est donc utile de faire voir que ces deux définitions des pôles ne sont au fond que des expressions différentes des mêmes conditions géométriques. Or on a prouvé (n° 13) qu'à l'intersection de deux cercles de zones correspond toujours le pôle d'une face qui satisfait à la loi des caractéristiques entières. Reste à démontrer que, réciproquement, du moment où une face quelconque satisfait à la loi des caractéristiques entières, son pôle peut être déterminé par l'intersection de deux cercles de zones qui commencent par quatre faces particulières.

Tel est le but des n°s 23 et 24. On fait voir, en effet, que si l'on prend pour caractéristiques d'une face trois nombres entiers tout à fait arbitraires, le pôle correspondant peut être regardé comme déterminé par l'intersection de deux cercles qui font partie d'un système de zones commençant par quatre faces dont les caractéristiques sont ou zéro ou l'unité.

Or, en vertu des règles qui seront établies (n°s 28 et 29), pour passer d'un système d'axes cristallographiques à un autre et pour changer de paramètres, il sera démontré qu'on peut toujours choisir pour les faces particulières (100) , (010) , (100) trois faces quelconques qui ne font pas partie de la même zone, et pour face (111) une face quelconque qui n'est parallèle à aucune des intersections de ces trois faces entre elles. Donc, en dernier résultat, tout pôle, par cela seul que ses trois caractéristiques sont entières, peut être déterminé par l'intersection de deux cercles de zones, lesquels font partie d'un système de cercles commençant à ceux qui passent par quatre pôles tout à fait arbitraires, pourvu que trois d'entre eux ne soient pas dans un même plan.

(Note communiquée par l'auteur.)

pour caractéristiques de chacun des premiers pôles $h, k, l; h', k', l'; p, q, r; p', q', r'$, des nombres tels que leur valeur absolue soit individuellement moindre que celle des caractéristiques u, v, w ou qui ne surpassent pas l'unité.

Les valeurs de $h, k, l; h', k', l'; p, q, r; p', q', r'$ doivent (n° 21) satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} uh + vk + wl &= 0, & up + vq + wr &= 0, \\ hh + kk + ll &= 0, & pp + qq + rr &= 0, \\ hh' + kk' + ll' &= 0, & pp' + qq' + rr' &= 0; \end{aligned}$$

reste donc à faire voir que, si l'on désigne par a, b, c des nombres entiers quelconques, l'équation $ax + by + cz = 0$ peut être satisfaite par deux systèmes de valeurs entières de x, y, z , tels que, l'un quelconque d'entre eux étant représenté par α, β, γ , l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ admettra à son tour deux systèmes de valeurs entières de x, y, z ; valeurs qui seront numériquement moindres que a, b, c , ou qui ne surpasseront pas l'unité.

Le cas le plus défavorable est celui où les trois nombres abc sont inégaux; et le plus grand premier par rapport aux deux autres. Soit c plus grand que b , et b plus grand que a . Puisque a est moindre que b , des valeurs de x ou égales à l'unité ou plus petites que a peuvent rendre le terme ax inférieur à by en valeur absolue. $\pm y = (c'ax - mc)$, par conséquent, on peut faire $y < c$ et le signe de ax différent de celui de by ; alors, puisque $-cz = (by + ax)$, z sera nécessairement moindre que b , et, de plus, cz est de signe contraire à by , et par conséquent de même signe que ax .

En raisonnant de la même manière, puisque $\mp z = (b'ax - mb)$, on prouverait que, soit avec la même valeur de x , soit avec une valeur différente qui serait aussi égale à l'unité ou plus petite que a , z peut toujours recevoir une valeur moindre que b et telle que ax et cz soient

de signes contraires, la valeur de y étant, par suite, moindre que c .

D'après cela, si l'un des deux systèmes de valeurs ainsi obtenues pour xyz est α, β, γ , on aura les valeurs respectives de α égal à l'unité ou moindre que a , de β moindre que c , de γ moindre que b .

De même, l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

peut être, à son tour, satisfaite par deux systèmes de valeurs pour x, y, z , lesquelles seront moindres que α, β, γ , ou ne surpasseront pas l'unité. Par conséquent, on peut toujours trouver des valeurs de $h, k, l; h', k', l'; p, q, r; p', q', r'$ capables de satisfaire aux relations qui les lient aux quantités u, v, w , et telles, de plus, que les trois caractéristiques de chaque pôle, ainsi déterminées, soient numériquement moindres que u, v, w , ou qu'elles ne surpassent pas l'unité.

24. De ce qui précède il résulte que le pôle d'une face choisie arbitrairement (uvw) est l'intersection de deux cercles de zones qui passent chacun par les pôles de deux faces dont les caractéristiques sont numériquement moindres que celles de (uvw). Les pôles de ces faces sont à leur tour l'intersection de deux cercles de zones qui passent par les pôles de nouvelles faces dont les caractéristiques sont encore plus simples.

Il faut donc qu'on arrive ainsi de proche en proche à quatre pôles, dont les caractéristiques sont ou zéro ou l'unité (*).

(*) On peut établir les résultats des nos 23 et 24 pour ainsi dire sans démonstration.

Un pôle quelconque (abc) est évidemment (n° 22) situé à l'in-

25. Étant données les distances angulaires de quatre pôles situés sur le même cercle de zone avec les notations symboliques de trois d'entre eux, trouver le symbole du quatrième.

tersection des trois cercles de zones (ocb) , $(co\bar{a})$, $(\bar{b}ao)$; mais chacun de ces cercles passe respectivement par chaque couple de pôles (100) , $(1\bar{b}c)$; (010) , $(a1c)$; (001) , $(ab1)$, et les pôles $(1\bar{b}c)$, $(a1c)$, $(ab1)$ se trouvent respectivement aux intersections des cercles de zones suivants, considérés deux à deux :

$$(b\bar{1}0), (c0\bar{1}); (\bar{1}ao), (0\bar{c}1); (\bar{1}ao), (0\bar{1}b).$$

Reste à faire voir qu'on peut toujours faire dépendre la position d'un cercle de zone, qui a pour caractéristiques zéro, l'unité et un nombre quelconque, de celles d'un système de pôles tellement choisis que leurs trois caractéristiques sont égales à l'unité, ou égales à zéro, à l'unité, et à des nombres continuellement décroissants.

Soit le cercle de zone $(m10)$; il passe évidemment par les deux pôles (001) , $(1\bar{m}0)$, et le second pôle $(\bar{1}m0)$ est à son tour situé à l'intersection des cercles de zones (001) , $(m1m-1)$.

Le cercle de zone $(m1m-1)$ passe par les pôles $(\bar{1}11)$, $(0m-11)$, et le second pôle $(0\bar{m-1}1)$ est, à son tour, situé à l'intersection des cercles de zones (100) , $(m-21m-1)$.

Le cercle de zone $(m-21m-1)$ passe par les pôles $(\bar{1}11)$, $(1\bar{m-2}0)$, et le second pôle $(1\bar{m-2}0)$ est situé, à son tour, à l'intersection des cercles de zones (001) , $(m-21m-3)$.

La forme des symboles successifs suit une loi évidente, soit pour les pôles, soit pour les cercles de zones; si donc on poursuit la même marche, on finira nécessairement par arriver à un cercle de zone qui, si m est pair, passera par les pôles $(\bar{1}11)$, $(0\bar{1}1)$, et si m est impair, par les pôles $(11\bar{1})$, $(1\bar{1}0)$; ou bien encore à un cercle de zone qui, si m est pair, passera par les pôles $(11\bar{1})$, (100) , et si m est impair, par les pôles $(\bar{1}11)$, (001) .

Soient (*fig. 6*) P, Q, R, S les quatre pôles situés sur un même cercle de zone; soient leurs notations symboliques P (*efg*), Q (*hkl*), R (*pqr*), S (*uvw*); soient X, Y, Z les extrémités de trois rayons de la sphère de projection, menée parallèlement aux axes du cristal; *a*, *b*, *c* les paramètres; on a (n° 8)

$$\begin{aligned} \frac{a}{e} \cos PX &= \frac{b}{f} \cos PY = \frac{c}{g} \cos PZ, \\ \frac{a}{h} \cos QX &= \frac{b}{k} \cos QY = \frac{c}{l} \cos QZ, \\ \frac{a}{p} \cos RX &= \frac{b}{q} \cos RY = \frac{c}{r} \cos RZ, \\ \frac{a}{u} \cos SX &= \frac{b}{v} \cos SY = \frac{c}{w} \cos SZ. \end{aligned}$$

P, Q, R sont situés sur le même grand cercle, et PQ est plus petit que PR; on a donc (n° 12)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin PQ} (\cos PX \cos QY - \cos PY \cos QX) \\ &= \frac{1}{\sin QR} (\cos QX \cos RY - \cos QY \cos RX); \\ & \frac{1}{\sin PQ} (\cos PZ \cos QX - \cos PX \cos QZ) \\ &= \frac{1}{\sin QR} (\cos QZ \cos RX - \cos QX \cos RZ); \\ & \frac{1}{\sin PQ} (\cos PY \cos QZ - \cos PZ \cos QY) \\ &= \frac{1}{\sin QR} (\cos QY \cos RZ - \cos QZ \cos RY). \end{aligned}$$

P, S, R sont situés sur le même cercle de zone, et PS est plus petit que PR; on a donc (n° 12)

$$\frac{1}{\sin PS} (\cos PX \cos SY - \cos PY \cos SX)$$

(19)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sin SR} (\cos SX \cos RY - \cos SY \cos RX), \\
 &\quad \frac{1}{\sin PS} (\cos PZ \cos SX - \cos PX \cos SZ) \\
 &= \frac{1}{\sin SR} (\cos SZ \cos RX - \cos SX \cos RZ), \\
 &\quad \frac{1}{\sin PS} (\cos PY \cos SZ - \cos PZ \cos SY) \\
 &= \frac{1}{\sin SR} (\cos SY \cos RZ - \cos SZ \cos RY).
 \end{aligned}$$

Divisant chaque équation entre $\sin PS$ et $\sin SR$ par l'équation correspondante entre $\sin PQ$ et $\sin QR$, et substituant aux cosinus les quantités proportionnelles données plus haut,

$$\frac{\{P, Q\} \times \{S, R\}}{\sin PQ \cdot \sin SR} = \frac{\{Q, R\} \times \{P, S\}}{\sin QR \cdot \sin PS},$$

dans cette équation

$$\begin{aligned}
 \frac{\{P, Q\}}{\{Q, R\}} &= \frac{fl - gk}{kr - lq} = \frac{gh - cl}{lp - hr} = \frac{ck - fh}{hq - kp}, \\
 \frac{\{P, S\}}{\{S, R\}} &= \frac{f\omega - gv}{vr - wq} = \frac{gu - ew}{wp - ur} = \frac{ev - fu}{uq - vp}.
 \end{aligned}$$

Si à $\sin RS$ on substitue $\sin (PR - PS)$, l'équation subsiste, quelle que soit la grandeur relative de PR et de PS , et il vient

$$\frac{\{SR\}}{\{PS\}} = \frac{\{QR\}}{\{PQ\}} \frac{\sin PQ}{\sin QR} \frac{\sin (PR - PS)}{\sin PS} = \frac{m}{n},$$

expression dans laquelle m et n représentent des nombres entiers, puisque $\{SR\}$ et $\{PS\}$ sont des nombres entiers; d'où l'on tire

$$\frac{u}{me + np} = \frac{v}{mf + nq} = \frac{w}{mg + nr}.$$

2..

26. Étant données les notations symboliques de quatre pôles situés sur un même cercle de zone, et les distances angulaires de trois d'entre eux, trouver la quatrième. †

Soit posé

$$\frac{\sin(\text{PR} - \text{PS})}{\sin \text{PS}} = \frac{(\text{P}, \text{Q}) \cdot (\text{S}, \text{R})}{(\text{Q}, \text{R}) \cdot (\text{P}, \text{S})} \cdot \frac{\sin \text{QR}}{\sin \text{PQ}} = \text{tang } \theta.$$

On tire de là (*)

$$\text{tang}(\text{PS} - \frac{1}{2} \text{PR}) = \text{tang } \frac{1}{2} \text{PR} \cdot \text{tang}(45^\circ - \theta).$$

(*) Soit

$$\frac{\sin x}{\sin y} = M,$$

on pose

$$\text{tang } \theta = M,$$

et il vient

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

ou bien, en composant,

$$\frac{\sin y - \sin x}{\sin x + \sin y} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \text{tang}(45^\circ - \theta).$$

Mais

$$\frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)} = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a},$$

si donc on fait

$$a = \frac{y+x}{2}, \quad b = \frac{x-y}{2},$$

on a

$$\text{tang } \frac{x-y}{2} = \text{tang } \frac{x+y}{2} \text{ tang}(45^\circ - \theta).$$

Si l'on revient aux notations du texte, $(\text{PR} - \text{PS}) \cong x$, $\text{PS} = y$.

27. D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\sin QR &= \sin PR \sin PQ (\cotang PQ - \cotang PR), \\ \sin SR &= \sin PR \sin PS (\cotang PS - \cotang PR); \end{aligned}$$

par conséquent (n° 25),

$$\frac{\cotang PS - \cotang PR}{\cotang PQ - \cotang PR} = \frac{(P, Q) \cdot (S, R)}{(Q, R) \cdot (P, S)}.$$

Au moyen de cette équation, si l'on connaît u, v, w , on peut déterminer PS , ou, si l'on connaît PS , on peut déterminer u, v, w , en la combinant avec l'équation

$$uu + vv + ww = 0,$$

dans laquelle u, v, w représentent les caractéristiques du cercle de zone qui passe par les trois pôles P, Q, R .

28. Les axes de trois zones quelconques non situées dans un même plan peuvent servir d'axes cristallographiques.

Soient (*fig. 7*) X, Y, Z les points où les axes d'un cristal percent la sphère de projection; a, b, c les paramètres; X', Y', Z' les pôles de trois cercles de zones quelconques, qui se coupent en A', B', C' ; soient P le pôle d'une face quelconque, M l'intersection des cercles $C'A'$ et $B'P$; N l'intersection des cercles $A'B'$, CP ; soient les notations symboliques des pôles $A', (efg)$; $B', (hkl)$; $C', (pqr)$; $P, (uvw)$; $M, (\lambda\mu\nu)$; $N, (\pi\rho\sigma)$.

On a (n° 13 et 15)

$$\begin{aligned}\lambda &= (re - pg)(hv - hu) - (pf - qe)(lu - hw), \\ \nu &= (qg - rf)(lu - hw) - (re - pg)(hw - lv), \\ \pi &= (gh - cl)(pv - qu) - (ek - fh)(ru - pw), \\ \rho &= (ek - fh)(q\omega - rv) - (fl - gk)(pv - qu). \end{aligned}$$

$A'NB', A'MC'$, sont de grands cercles: qu'on remplace,

par conséquent, X, Y, Z par X', Y', Z' dans les équations du n^o 12 (**), et qu'ensuite on divise les équations qui contiennent X', Y', Z' par les équations correspondantes en XYZ , on arrivera à

$$\begin{aligned} & \frac{\cos A'X' \cos NY' - \cos A'Y' \cos NX'}{\cos A'X \cos NY - \cos A'Y \cos NX} \\ &= \frac{\cos B'Y' \cos NX' - \cos B'X' \cos NY'}{\cos B'Y \cos NX - \cos B'X \cos NY} \\ &= \frac{\cos A'X' \cos MZ' - \cos A'Z' \cos MX'}{\cos A'X \cos MZ - \cos A'Z \cos MX} \\ &= \frac{\cos C'Z' \cos MX' - \cos C'X' \cos MZ'}{\cos C'Z \cos MX - \cos C'X \cos MZ}. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{l}{a} \cos A'X &= \frac{b}{f} \cos A'Y = \frac{c}{g} \cos A'Z, \\ \frac{a}{h} \cos B'X &= \frac{b}{k} \cos B'Y = \frac{c}{l} \cos B'Z, \\ \frac{a}{p} \cos CX' &= \frac{b}{q} \cos C'Y = \frac{c}{r} \cos C'Z, \\ \frac{a}{\lambda} \cos MX &= \frac{b}{\mu} \cos MY = \frac{c}{\nu} \cos MZ, \\ \frac{a}{\pi} \cos NX &= \frac{b}{\rho} \cos NY = \frac{c}{\sigma} \cos NZ; \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \cos A'Y' &= 0, \quad \cos A'Z' = 0, \quad \cos B'X' = 0; \\ \cos C'X' &= 0, \quad \cos M'Y' = 0, \quad \cos N'Z' = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs on a

$$\begin{aligned} \frac{\cos MX'}{\cos PX'} &= \frac{\sin MB'}{\sin PB'} = \frac{\cos MZ'}{\cos PZ'}, \\ \frac{\cos NX'}{\cos PX'} &= \frac{\sin NC'}{\sin PC'} = \frac{\cos NY'}{\cos PY'}. \end{aligned}$$

De ces équations on tire donc :

$$\frac{e(k\pi - h\rho) \cos A'X'}{\cos A'X' \cos PX'} = \frac{h(ep - f\pi) \cos B'Y'}{\cos B'X' \cos PY'} ,$$

$$\frac{e(r\lambda - p\nu) \cos A'X'}{\cos A'X' \cos PX'} = \frac{p(e\nu - g\lambda) \cos C'Z'}{\cos C'X' \cos PZ'} ,$$

mais

$$k\pi - h\rho = (fh - e\lambda)(e.u + f.v + g.w),$$

$$e\rho - f\pi = (fh - ek)(h.u + k.v + l.w),$$

$$r\lambda - \mu\nu = (pg - re)(e.u + f.v + g.w),$$

$$e\nu - g\lambda = (pg - re)(p.u + q.v + r.w),$$

équations dans lesquelles

$$e = kr - lq, \quad f = lp - hr, \quad g = hq - kp,$$

$$h = qg - rf, \quad k = re - pg, \quad l = pf - qe,$$

$$p = fl - gk, \quad q = gh - cl, \quad r = ek - fh;$$

donc enfin

$$\frac{a'}{u'} \cos PX' = \frac{b'}{v'} \cos PY' = \frac{c'}{w'} \cos PZ',$$

équation dans laquelle les quantités a', b', c' , ne dépendent que des angles que font entre eux les anciens et les nouveaux axes, et dans laquelle

$$u' = e.u + f.v + g.w,$$

$$v' = h.u + k.v + l.w,$$

$$w' = p.u + q.v + r.w,$$

représentent des nombres entiers (*).

$$(*) \frac{a'}{\left(\frac{\cos A'X'}{e \cos A'X'}\right)} = \frac{b'}{\left(\frac{\cos B'X'}{c \cos B'Y'}\right)} = \frac{c'}{\left(\frac{\cos C'Z'}{p \cos C'Z'}\right)}.$$

Ces expressions peuvent encore prendre la forme un peu diffé-

On peut donc prendre OX', OY', OZ' pour axes cristallographiques. Il faut remarquer que les coefficients de u, v, w dans les expressions de u', v', w' sont les caractéristiques des cercles de zones $B'C', C'A', A'B'$. Les notations symboliques sont en effet (n° 13) pour

$$B'C', \{efg\}; C'A', \{hkl\}; A'B', \{pqr\}.$$

29. Changer les paramètres d'un cristal.

Soient (hkl) le symbole de la face P, les paramètres étant a, b, c ; $(h' k' l')$ le symbole de la même face, les paramètres étant a', b', c' ; les axes demeurent les mêmes. On a (n° 8),

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ,$$

rente,

$$\frac{\left(\frac{a'}{a}\right)}{\left(\frac{\cos A'X}{e \cos A'X'}\right)} = \frac{\left(\frac{b'}{b}\right)}{\left(\frac{\cos B'Y}{k \cos B'Y'}\right)} = \frac{\left(\frac{c'}{c}\right)}{\left(\frac{\cos C'Z}{r \cos C'Z'}\right)}$$

ou enfin

$$\frac{\left(\frac{a'}{a}\right)}{\left(\frac{\cos A'X \sin B'C'}{e}\right)} = \frac{\left(\frac{b'}{b}\right)}{\left(\frac{\cos B'Y \sin C'A'}{k}\right)} = \frac{\left(\frac{c'}{c}\right)}{\left(\frac{\cos C'Z \sin A'B'}{r}\right)},$$

car X', Y', Z' étant les pôles respectifs des arcs $B'C', C'A', A'B'$. on a

$$\cos A'X' \sin B'C' = \cos B'Y' \sin C'A' = \cos C'Z' \sin A'B'$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\sin \frac{A'B'+B'C'+C'A'}{2} \sin \frac{B'C'+C'A'+A'B'}{2} \sin \frac{C'A'+A'B'+B'C'}{2} \sin \frac{A'B'+B'C'+C'A'}{2}}$$

et

$$\frac{a'}{h'} \cos PX = \frac{b'}{k'} \cos PY = \frac{c'}{l'} \cos PZ;$$

donc

$$\frac{a}{h} = \frac{a'}{h'} \quad \frac{b}{k} = \frac{b'}{k'} \quad \frac{c}{l} = \frac{c'}{l'} \quad (*).$$

30 (**). Soient P, Q, R, S, quatre pôles situés sur le même grand cercle de zone. Quand on rapporte ces pôles à un premier système d'axes cristallographiques qui rencontrent la sphère de projection en X, Y, Z, leurs symboles sont, pour

$$P, (efg); \quad Q, (hkl); \quad R, (pqr); \quad S, (uvw).$$

Quand on rapporte le cristal à un autre système d'axes qui rencontre la surface en X' Y' Z', les notations symboliques de ces pôles deviennent

$$P, (e'f'g'); \quad Q, (h'k'l'); \quad R, (p'q'r'); \quad S, (u'v'w').$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \frac{(P, Q)}{(Q, R)} &= \frac{fl - gk}{kr - ql} = \frac{gh - cl}{lp - hr} = \frac{eh - fh}{hq - kp}, \\ \frac{(P, S)}{(S, R)} &= \frac{fw - gv}{vr - wq} = \frac{gu - ew}{wp - ur} = \frac{ev - fu}{wq - vp}, \end{aligned}$$

(*) Donc, quand les caractéristiques h, k, l ne sont pas égales à zéro, on peut toujours disposer de $a'b'c'$ de manière que h', k', l' , soient des nombres entiers quelconques.

(**) Soient quatre pôles situés sur un même cercle de zone; on connaît leurs notations symboliques quand on rapporte le cristal à un premier système d'axes cristallographiques, et l'on se donne la notation symbolique de trois d'entre eux quand on rapporte le cristal à un second système d'axes cristallographiques: il s'agit de déterminer, dans ce nouveau système, les symboles du quatrième pôle.

on a (n° 23)

$$\frac{(P, Q) (S, R)}{\sin PQ \sin SR} = \frac{(Q, R) (P, S)}{\sin QR \sin PS};$$

et si

$$\frac{(P', Q')}{(Q', R')} = \frac{f' l' - g' k'}{k' r' - q' l'} = \frac{g' h' - e' l'}{l' p' - h' r'} = \frac{e' k' - f' h'}{h' q' - k' p'},$$

$$\frac{(P', S')}{(S', R')} = \frac{f' \omega' - g' \nu'}{\nu' r' - \omega' q'} = \frac{g' u' - e' \omega'}{\omega' p' - u' r'} = \frac{e' \nu' - g' u'}{u' q' - \nu' p'}$$

on a (n° 25)

$$\frac{(P', Q') (S', R')}{\sin PQ \sin SR} = \frac{(Q', R') (P', S')}{\sin QR \sin PS};$$

donc on a

$$\frac{(P', Q') (S', R')}{(P, Q) (S, R)} = \frac{(Q', R') (P', S')}{(Q, R) (P, S)}.$$

Soit

$$\frac{(P, Q) (S, R) (Q', R')}{(Q, R) (P, S) (P', Q')} = \frac{m}{n},$$

et par conséquent

$$\frac{(S', R')}{(P', S')} = \frac{m}{n},$$

on aura enfin

$$\frac{u'}{m e' + n p'} = \frac{\nu'}{m f' + n q'} = \frac{\omega'}{m g' + n r'}.$$

31. Étant donnés quatre pôles distribués d'une manière quelconque sur la sphère avec leurs symboles quand on rapporte le cristal soit au système d'axes OX, OY, OZ , soit au système OX', OY', OZ' , et de plus un cinquième pôle avec son symbole relativement au système OX, OY, OZ , il s'agit de trouver le symbole du même pôle relativement au système OX', OY', OZ' .

Soient (*fig. 8*) P, Q, R, S les quatre premiers pôles donnés, A', B', C' le triangle polaire de X', Y', Z' ; les sym-

boles de A' , B' , C' , relativement au système OX' , OY' , OZ' , seront A' , (100); B' , (010); C' , (001). Soient T le point d'intersection des grands cercles PQ , RS ; U , V les points où ces cercles rencontrent CB' : on peut déterminer le symbole de T , et relativement au système OX , OY , OZ , et relativement au système OX' , OY' , OZ' (n° s 14 et 15); et les symboles de U , V relativement aux axes OX' , OY' , OZ' (n° s 14 et 15). Mais les symboles de P , Q , T , U sont connus relativement au système OX , OY , OZ aussi bien qu'au système OX' , OY' , OZ' , et ceux de P , Q , T relativement au système OX , OY , OZ ; on peut donc déterminer le symbole de U relativement à ce dernier système (n° 31). La même marche fournira le symbole de V relativement aux axes OX , OY , OZ ; cela fait, on connaîtra le symbole du cercle de zone $B'C'$ relativement aux mêmes axes.

Le même procédé s'applique aux cercles de zones CA' et CB' , dont on peut aussi calculer les symboles relativement au système OX , OY , OZ ; les symboles de ces trois cercles de zones une fois connus, le symbole d'un pôle quelconque qu'on voudra rapporter aux axes OX' , OY' , OZ' se déterminera par la méthode du n° 28.

32. Dans certains cristaux on peut découvrir des axes rectangulaires entre eux; dans d'autres deux axes perpendiculaires au troisième; dans d'autres encore les inclinaisons réciproques des trois axes sont égales. Dans tout cristal qui a trois axes également inclinés entre eux et dans plusieurs de ceux qui ont trois axes rectangulaires, on peut trouver des systèmes de paramètres égaux; parmi les autres cristaux à axes rectangulaires, il en est qui ont deux paramètres égaux. Ces différences dans la position respective des axes et dans les rapports de grandeur des paramètres servent de fondement à la classification systématique des cristaux :

1°. Dans le système *octaédrique*, les trois axes sont rectangulaires et les paramètres sont égaux ;

2°. Dans le système *pyramidal*, les trois axes sont rectangulaires et les deux paramètres sont égaux : on peut donc toujours, dans ce système, supposer a égal à b ;

3°. Dans le système *rhomboédrique*, les axes font entre eux des angles égaux et les paramètres sont égaux ;

4°. Dans le système *prismatique*, les trois axes sont rectangulaires ;

5°. Dans le système *prismatique oblique*, un des axes est perpendiculaire aux deux autres : on supposera toujours l'axe OY perpendiculaire aux axes OZ et OX ;

6°. Dans le système *prismatique oblique non symétrique*, sont compris tous les cristaux qu'on ne peut rapporter à aucun des systèmes précédents.

33. Les différents systèmes de cristallisation se distinguent aussi par la symétrie différente qu'on observe dans l'arrangement des faces des cristaux qui en font partie. S'il se présente, en effet, une face dont le symbole est (hkl) ; elle sera généralement accompagnée par d'autres dont les symboles seront de certaines combinaisons de $\pm h$, $\pm k$, $\pm l$ déterminées par des lois particulières à chaque système, et qui seront exposées avec détail dans la description particulière consacrée à chacun d'entre eux (*).

(*) Les lois particulières qui déterminent la coexistence de certaines faces dans chaque système cristallin dépendent de deux lois générales qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Si dans le symbole d'une face quelconque on change le signe d'une ou de plusieurs caractéristiques, les nouveaux symboles ainsi obtenus appartiennent à autant de faces qui doivent coexister avec la première, pourvu que les trois axes cristallographiques, prolongés à partir de l'origine dans le sens indiqué par le

34. Une *forme* est, dans le langage cristallographique, une figure terminée par une certaine face et par toutes celles qui, en vertu des lois de symétrie propres au système de cristallisation, doivent coexister avec elle. Une forme se désigne par le symbole d'une quelconque des faces qu'elle comporte, enveloppé de deux accolades. Ainsi le symbole $\{hkl\}$ servira à désigner la forme terminée par la face (hkl) et par les faces coexistantes. Les *formes holoédriques* d'un système sont celles qui possèdent la plus complète symétrie dont le système est susceptible. Les *formes hémioédriques* sont celles qu'on dérive des formes holoédriques en supposant la moitié des faces supprimée suivant une certaine loi.

Une figure terminée par des faces qui appartiennent à un nombre quelconque de formes est une *combinaison de ces formes*.

35. Les éléments d'un cristal sont les inclinaisons réciproques des axes YZ, ZX, XY ; et le rapport de deux paramètres au troisième. Dans le système octaédrique, où les axes sont rectangulaires et les paramètres égaux, tous les éléments sont déterminés; dans le système pyramidal, où

signe des caractéristiques qui leur correspondent, comprennent des angles solides géométriquement égaux ou symétriques.

Si dans le symbole d'une face quelconque on fait tous les échanges possibles de place entre les caractéristiques qui se rapportent à des axes correspondants à des paramètres égaux, les nouveaux symboles ainsi obtenus appartiennent à autant de faces qui doivent coexister avec la première.

Il est facile de retrouver sous cette forme la loi de symétrie qui, dans le langage de la cristallographie moléculaire, résulte de la similitude des arêtes et des angles solides. De la première on déduit comme conséquence immédiate que, dans tous les systèmes de cristallisation, une face quelconque a sa parallèle.

les axes sont rectangulaires et deux paramètres égaux, le rapport de l'un d'eux au troisième est le seul élément variable; dans le système rhomboédrique, où les axes font entre eux des angles égaux et où les paramètres sont égaux, l'angle de deux axes est le seul élément variable; dans le système prismatique, où les trois axes sont rectangulaires, les rapports de deux paramètres au troisième sont les deux éléments variables; dans le système prismatique oblique, où l'un des axes est perpendiculaire aux deux autres, l'inclinaison réciproque de ceux-ci et les rapports de deux paramètres au troisième sont les trois éléments variables; dans le système prismatique oblique non symétrique, les angles que les axes font entre eux, et les rapports de deux paramètres au troisième, sont tous variables.

36. L'angle entre deux faces dont on connaît les symboles peut s'exprimer en fonction des caractéristiques de ces faces, des inclinaisons réciproques des axes, et des rapports des paramètres; par conséquent, un seul angle observé dans les systèmes pyramidal et rhomboédrique, deux angles observés dans le système prismatique, trois dans le système prismatique oblique; et cinq dans le système prismatique oblique non symétrique, suffisent à la rigueur pour déterminer les éléments variables de chacun de ces systèmes. Dans les trois derniers cas, cependant, excepté pour quelques circonstances très-particulières, cette détermination directe des éléments d'un cristal serait impraticable, à cause du degré trop élevé des équations résultantes.

L'application à chaque système des méthodes qui permettent de déterminer les éléments d'un cristal au moyen d'un nombre suffisant de mesures d'angles, entre des faces convenablement choisies, sera exposée dans le chapitre consacré à chaque système cristallin.



CHAPITRE II.

SYSTÈME OCTAÉDRIQUE.

37. Dans le système octaédrique, les axes cristallographiques sont rectangulaires; les paramètres a, b, c sont égaux.

38. La forme holoédrique $\{hkl\}$ est terminée par toutes les faces qui ont pour symboles les arrangements divers des quantités $\pm h, \pm k, \pm l$, prises trois à trois.

Lorsque les nombres h, k, l sont tous inégaux, on obtient quarante-huit arrangements, représentés dans un tableau ci-après. Lorsque deux caractéristiques deviennent égales, ou l'une des trois égale à zéro, ce nombre se réduit à vingt-quatre; lorsque deux caractéristiques deviennent égales et la troisième égale à zéro, les arrangements sont au nombre de douze; quand les trois caractéristiques sont égales, au nombre de huit; de six, enfin, quand deux d'entre elles deviennent nulles (*).

(*) L'égalité de deux ou de trois caractéristiques identifie entre eux les symboles qui ne différaient que par la position des caractéristiques devenues égales.

Supposer une caractéristique nulle, c'est identifier tous les

$h k l$	$k l h$	$l h k$	$\bar{l} \bar{k} \bar{h}$	$k \bar{h} l$	$h \bar{l} \bar{k}$
$\bar{h} \bar{k} \bar{l}$	$k \bar{l} \bar{h}$	$l \bar{h} \bar{k}$	$\bar{l} \bar{k} \bar{h}$	$k \bar{h} l$	$h \bar{l} \bar{k}$
$\bar{h} k l$	$\bar{k} l \bar{h}$	$\bar{l} h k$	$\bar{l} k \bar{h}$	$\bar{k} h l$	$\bar{h} l k$
$\bar{h} \bar{k} l$	$\bar{k} \bar{l} h$	$\bar{l} \bar{h} k$	$\bar{l} \bar{k} h$	$\bar{k} \bar{h} l$	$\bar{h} \bar{l} k$
$\bar{h} \bar{k} \bar{l}$	$\bar{k} \bar{l} \bar{h}$	$\bar{l} \bar{h} \bar{k}$	$\bar{l} \bar{k} \bar{h}$	$\bar{k} \bar{h} \bar{l}$	$\bar{h} \bar{l} \bar{k}$
$\bar{h} k l$	$\bar{k} l h$	$l h k$	$\bar{l} k h$	$\bar{k} h l$	$\bar{h} l k$
$h \bar{k} l$	$k \bar{l} h$	$l \bar{h} k$	$l \bar{k} h$	$k \bar{h} l$	$h \bar{l} k$
$h k \bar{l}$	$k l \bar{h}$	$l h \bar{k}$	$l k \bar{h}$	$k h \bar{l}$	$h l \bar{k}$

Soient h la plus grande, l la plus petite des trois caractéristiques inégales; la *fig. 9* représentera la distribution des pôles de la forme $\{hkl\}$ sur la surface de la sphère de projection; la *fig. 10* la distribution des pôles quand une des caractéristiques est zéro, ou quand deux d'entre elles deviennent égales. Les deux figures représentent en outre les pôles des figures $\{100\}$, $\{111\}$, $\{011\}$.

39. La forme terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$ qui, dans leurs symboles, ont un nombre impair de caractéristiques positives ou de caractéristiques négatives, est dite

symboles qui ne différeraient que par le signe de cette caractéristique.

Il est facile de voir qu'on aura les nombres suivant d'arrangements :

Dans le cas où les caractéristiques sont :

	(3 inégales)	(2 égales)	(1 nulle)	(2 égales, 1 nulle)	(3 égales)	(2 nulles)
3 caract. posit. . .	6	3	6	3	1	3
2 posit., 1 négat.	18	9	12	6	3	3
2 négat., 1 posit.	18	9	6	3	3	»
3 négatives. . . .	6	3	»	»	1	»
	48	24	24	12	8	6

hémédrique à faces inclinées; elle est représentée par le symbole $\{x hkl\}$; (hkl) est le symbole d'une quelconque de ses faces. On appelle directe la forme hémédrique terminée par des faces qui correspondent à un nombre impair de caractéristiques positives; inverse la forme qui correspond à un nombre impair de caractéristiques négatives. Les symboles des faces qui appartiennent aux formes directe et inverse se trouvent dans les moitiés supérieure et inférieure du tableau précédent.

Si l'on conçoit la surface de la sphère de projection partagée en huit triangles par les cercles de zones qui passent par deux pôles quelconques de la forme $\{100\}$, les pôles de la forme hémédrique directe se trouveront tous compris dans quatre triangles alternatifs, dans l'un desquels est situé le pôle (111) . Les pôles de la forme hémédrique inverse se trouvent tous compris dans les quatre autres triangles.

40. On appelle hémédrique à faces parallèles la forme terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$, dont les indices se présentent dans l'ordre $hkllk$, ou dans l'ordre $lkhkl$. On désigne cette forme par la notation symbolique $\pi \{hkl\}$; (hkl) est le symbole d'une quelconque de ses faces.

La forme hémédrique est directe ou inverse, suivant que les indices sont dans un ordre tel que leur valeur numérique aille en augmentant ou en diminuant.

Les symboles des faces qui appartiennent aux formes directe ou inverse se trouvent dans les moitiés de droite et de gauche du tableau précédent. Si la surface de la sphère de projection est partagée en vingt-quatre triangles, par les cercles de zones qui passent par deux pôles quelconques de la forme $\{111\}$; les pôles de la forme hémédrique directe se trouvent compris dans douze triangles alternatifs, dont l'un est (111) , (010) , $(11\bar{1})$; et les pôles de la forme hémédrique inverse dans les douze autres triangles.

41. Les formes holoédriques peuvent se rencontrer combinées en nombre quelconque, soit entre elles, soit avec les formes hémédriques à faces inclinées ou parallèles. Il paraît qu'on n'a jamais observé de formes hémédriques à faces inclinées combinées avec des formes hémédriques à faces parallèles.

42. Trouver la position du pôle d'une face quelconque.

Soient (*fig. 11*) X, Y, Z les points où les axes du cristal rencontrent la sphère de projection; soit P le pôle de la face (*hkl*), les trois axes sont rectangulaires, par conséquent les arcs XY, YZ, ZX sont égaux à 90°. On a donc

$$\cos XY = 0, \quad \cos YZ = 0, \quad \cos ZX = 0;$$

les points X, Y, Z sont donc respectivement les pôles des faces (100), (010), (001).

Les triangles rectilatères PYX; PYZ, donnent les équations

$$\cos^2 PY = \sin^2 PX \cos^2 PXY,$$

$$\cos^2 PZ = \sin^2 PX \cos^2 PXZ;$$

si l'on ajoute, on arrive, à cause de

$$\cos^2 PXY + \cos^2 PXZ = 1, \quad \cos^2 PX + \sin^2 PX = 1,$$

à

$$\cos^2 PX + \cos^2 PY + \cos^2 PZ = 1$$

Les paramètres sont égaux; donc (n° 8)

$$\frac{1}{h} \cos PX = \frac{1}{k} \cos PY = \frac{1}{l} \cos PZ,$$

donc enfin

$$\cos^2 \text{PX} = \frac{h^2}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos^2 \text{PY} = \frac{k^2}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos^2 \text{PZ} = \frac{l^2}{h^2 + k^2 + l^2}.$$

43. Déterminer la distance des pôles de deux faces quelconques.

Soient (*fig. 11*) P le pôle de (*hkl*), Q le pôle de (*pqr*):

$$\begin{aligned} \cos \text{PQ} &= \cos \text{PXY} \cos \text{QXY} + \sin \text{PXY} \sin \text{QXY} \\ &= \cos \text{PXY} \cos \text{QXY} + \cos \text{PXZ} \cos \text{QXZ}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue cette valeur de $\cos \text{PQ}$ dans l'équation

$$\cos \text{PQ} = \cos \text{PX} \cos \text{QX} + \sin \text{PX} \sin \text{QX} \cos \text{PXQ},$$

et si l'on remarque que

$$\begin{aligned} \sin \text{PX} \cos \text{PXY} &= \cos \text{PY}; & \sin \text{QX} \cos \text{QXY} &= \cos \text{QY}, \\ \sin \text{PX} \cos \text{PXZ} &= \cos \text{PZ}; & \sin \text{QX} \cos \text{QXZ} &= \cos \text{QZ}, \end{aligned}$$

on arrivera à

$$\cos \text{PQ} = \cos \text{PX} \cos \text{QX} + \cos \text{PY} \cos \text{QY} + \cos \text{PZ} \cos \text{QZ};$$

mais

$$\cos^2 \text{PX} = \frac{h^2}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos^2 \text{PY} = \frac{k^2}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos^2 \text{PZ} = \frac{l^2}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos^2 \text{QX} = \frac{p^2}{p^2 + q^2 + r^2},$$

$$\cos^2 \text{QY} = \frac{q^2}{p^2 + q^2 + r^2},$$

$$\cos^2 \text{QZ} = \frac{r^2}{p^2 + q^2 + r^2};$$

donc

$$\cos PQ = \frac{hp + kq + lr}{\sqrt{(h^2 + k^2 + l^2)(p^2 + q^2 + r^2)}}.$$

44. Les triangles rectilatéraux YPZ, ZPX, XPY donnent les équations

$$\begin{aligned}\cos PX &= \sin PY \cos PYX = \sin PZ \cos PZX, \\ \cos PY &= \sin PZ \cos PZY = \sin PX \cos PXY, \\ \cos PZ &= \sin PX \cos PXZ = \sin PY \cos PYZ,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\text{tang PXY} = \frac{l}{k}, \quad \text{tang PYZ} = \frac{h}{l}, \quad \text{tang PZX} = \frac{k}{h}.$$

45. Soit O le pôle de la face (111), on a (n° 42)

$$\cos^2 OX = \frac{1}{3}, \quad \cos^2 OY = \frac{1}{3}, \quad \cos^2 OZ = \frac{1}{3},$$

donc (n° 43)

$$\cos^2 PO = \frac{1}{3} \cdot \frac{(h + k + l)^2}{h^2 + k^2 + l^2}.$$

OX = OY = OZ, d'un autre côté XY = YZ = ZX = 90°, donc les angles YOZ, ZOY, XOY sont tous égaux à 120°, et les arcs OX, OY, OZ partagent en deux parties égales les angles droits YXZ, ZYX, XYZ.

En considérant le triangle POX, on a

$$\text{cotang PX} \sin XO = \cos XO \cos OXP + \sin OXP \text{cotang POX};$$

si, à la place de X, on écrit successivement Y et Z, et qu'aux lignes trigonométriques on substitue des valeurs

proportionnelles en fonction de h, k, l , on obtient

$$\text{tang POX} = \frac{k-l}{2h-k-l} \sqrt{3},$$

$$\text{tang POY} = \frac{l-h}{2k-l-h} \sqrt{3},$$

$$\text{tang POZ} = \frac{h-k}{2l-h-k} \sqrt{3}.$$

46. De la forme des expressions établies n° 43, il résulte que la distance des pôles (hkl) , (pqr) est égale à la distance de deux pôles quelconques des formes $\{hkl\}$, $\{pqr\}$, pourvu que dans les symboles de ces pôles les signes et l'ordre des caractéristiques h, k, l soient les mêmes que les signes et l'ordre des caractéristiques p, q, r .

47. Des formules établies n° 42 il résulte que si les symboles de deux pôles de la forme $\{hkl\}$ ne diffèrent que par le signe de h , ces deux pôles seront à la même distance de (010) et de (001) . Par conséquent, l'arc de grand cercle qui les réunit se trouve coupé à angles droits et en deux parties égales par le cercle de zone $(010, 001)$; par conséquent les pôles de $\{hkl\}$ sont distribués sur la sphère de projection symétriquement au cercle de zone $(010, 001)$. On ferait voir de même que les pôles de $\{hkl\}$ sont distribués sur la sphère de projection symétriquement à l'un quelconque des trois cercles de zones qu'on peut mener par les pôles de $\{100\}$.

48. De la forme des expressions établies n° 43, il résulte que si les symboles de deux pôles de la forme $\{hkl\}$ ne diffèrent que par l'arrangement de la seconde et de la troisième caractéristique, ces deux pôles sont en même temps à des distances égales de (111) , $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$. Par conséquent, l'arc de grand cercle qui réunit ces deux pôles se trouve coupé à angles droits et partagé par moitié par

le cercle de zone $(111, \bar{1}\bar{1}\bar{1})$; par conséquent, les pôles de $\{hkl\}$ sont distribués sur la sphère de projection symétriquement au cercle de zone $(111, \bar{1}\bar{1}\bar{1})$. On ferait voir de même que les pôles de $\{hkl\}$ sont distribués sur la sphère de projection, symétriquement à l'un quelconque des six cercles de zones qu'on peut faire passer par deux pôles quelconques de $\{111\}$.

49. Si l'on fait passer tous les cercles de zones possibles par les pôles de $\{100\}$ et par ceux de $\{111\}$, ces cercles partageront la surface de la sphère de projection en vingt-huit triangles rectangles. Les pôles de $\{hkl\}$ sont distribués symétriquement à un côté quelconque de l'un quelconque de ces triangles; par conséquent l'arrangement des pôles est toujours symétrique dans deux triangles adjacents, et toujours semblable dans deux triangles alternatifs.

50. Si l'on conçoit des cercles de zones menés par deux pôles quelconques de $\{100\}$, et par deux pôles quelconques de $\{111\}$, l'un des systèmes de cercles partage d'une manière symétrique les triangles formés par l'autre. D'après cela, les pôles de $\pi(hkl)$ sont distribués sur la surface de la sphère symétriquement aux cercles de zones qui passent par deux pôles de $\{111\}$, et les pôles de $\pi\{hkl\}$ sont distribués sur la même surface, symétriquement aux cercles de zones qui passent par deux pôles de $\{100\}$.

51. Si l'on examine la position des pôles de deux formes hémédriques, l'une et l'autre à faces inclinées ou parallèles, et dérivées de la même forme holoédrique, mais l'une directe et l'autre inverse, on peut se convaincre que ces deux formes sont identiques sous tous les rapports, et que la position seule fait la différence: l'une d'elles prendrait la position de l'autre en tournant d'un angle droit autour d'un des axes cristallographiques. Les combinaisons d'une forme holoédrique avec une forme

hémiedrique, directe ou inverse, ne diffèrent de même que par la position ; mais quand deux formes hémiedriques à faces inclinées, ou deux formes hémiedriques à faces parallèles, sont combinées entre elles, leurs pôles respectifs se trouvent, ou dans les mêmes triangles, ou dans des triangles différents, suivant que les deux formes combinées portent l'une et l'autre le même nom ou un nom contraire. La combinaison de deux formes hémiedriques directes ou celle de deux formes hémiedriques inverses est donc essentiellement différente de la combinaison des mêmes formes hémiedriques, dont l'une serait directe, l'autre inverse.

§2. Si l'on se donne la distance angulaire des pôles de deux faces qui appartiennent soit à la forme $\{hko\}$, soit à la forme $\{hkk\}$, et qu'on exprime le cosinus de cette distance angulaire en fonction des caractéristiques des faces, on arrive à une équation d'où l'on peut tirer le rapport des caractéristiques.

§3. Si l'on se donne les distances angulaires d'un pôle quelconque de la forme $\{hkl\}$, avec deux autres pôles de la même forme choisis arbitrairement, et qu'on exprime le cosinus de ces distances angulaires en fonction des caractéristiques des faces, on arrive à deux équations, desquelles on peut tirer les rapports de deux caractéristiques à la troisième.

§4. Déterminer la figure géométrique et les angles de la figure $\{hkl\}$, quand on donne à h, k, l certaines valeurs particulières.

On trouve l'angle compris entre les normales de deux faces quelconques, autrement dit la distance angulaire de leurs pôles, en substituant les caractéristiques des faces à la place des lettres $h, k, l; p, q, r$, dans les formules déjà trouvées (n° §3). La lettre placée sur l'arête

qui résulte de l'intersection de deux faces, dans les figures qui accompagnent la description de chaque forme particulière, sert à désigner l'angle compris entre les normales à ces faces. La même lettre est placée sur toutes les arêtes qui servent de sommets à des angles dièdres égaux. Les positions relatives des pôles qui appartiennent aux différentes formes sont représentées par les *fig. 9* et *10*, et par la *fig. 37*, qui est la projection gnomonique de l'un des octants découpés sur la sphère de projection par les trois cercles de zones qui passent par deux pôles de la forme $\{100\}$.

Le nombre de faces de chaque forme holoédrique a déjà été déterminé (n° 38).

55. La forme $\{100\}$ (*fig. 12*) a six faces; on l'appelle cube,

$$\cos F = 1, \quad F = 90^\circ;$$

par conséquent les faces de la forme $\{100\}$ sont parallèles à celles d'un cube géométrique.

56. La forme $\{111\}$ (*fig. 13*) a huit faces; on l'appelle octaèdre :

$$\cos D = \frac{1}{3}, \quad D = 70^\circ 31',7 \text{ (*)};$$

par conséquent les faces de la forme $\{111\}$ sont parallèles à celles d'un octaèdre géométrique régulier.

Le cosinus de l'angle compris entre les normales d'une face quelconque de l'octaèdre et d'une face adjacente du cube, est $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Par conséquent, la normale à une face de

(*) Si l'on appelle T l'angle compris entre les normales aux faces opposées par le sommet,

$$\cos T = -\frac{1}{3}, \quad T = 109^\circ 28',3.$$

l'octaèdre fait un angle de $54^{\circ}44'15''$ avec les normales à chaque face adjacente du cube, et un angle de $125^{\circ}15'85''$ avec les normales aux trois faces opposées.

57. Dans l'hémioctaèdre à faces inclinées $\alpha \{111\}$ (*fig. 14*),

$$\cos T = -\frac{1}{3}, \quad T = 109^{\circ}28',3;$$

par conséquent les faces de la forme hémédrique $\alpha \{111\}$ sont parallèles aux faces du tétraèdre régulier géométrique.

58. La forme $\{011\}$ (*fig. 15*) a douze faces; on l'appelle dodécaèdre :

$$\cos G = \frac{1}{2}, \quad G = 60^{\circ}.$$

Si l'on appelle D l'angle que font entre elles les normales aux deux faces alternatives qui se rencontrent par le sommet de leur angle plan aigu, $\cos D = 0$, et par conséquent $D = 90^{\circ}$.

Le cosinus de l'angle compris entre la normale à une face quelconque du dodécaèdre et la normale à une face adjacente du cube est $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; ce cosinus est 0 si les faces du cube ne sont ni adjacentes ni parallèles aux adjacentes. D'après cela, la normale à une face quelconque du dodécaèdre fait un angle de 45° avec les normales aux faces adjacentes du cube, un angle de 135° avec les normales aux faces opposées, et un angle de 90° avec les normales aux deux autres faces.

Le cosinus de l'angle compris entre la normale à une face quelconque du dodécaèdre et les normales aux faces de l'octaèdre est égal à $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, si les faces de l'octaèdre

sont adjacentes à celles du dodécaèdre; il est 0 si les faces ne sont ni adjacentes ni parallèles aux adjacentes. D'après cela, la normale à une face quelconque du dodécaèdre fait un angle de $35^{\circ} 15', 85$ avec les normales aux faces adjacentes de l'octaèdre, un angle de $144^{\circ} 44', 15$ avec les normales aux faces opposées, et un angle de 90° avec les normales aux quatre autres faces.

59. La forme $\{hko\}$ (*fig. 16*) a vingt-quatre faces; on l'appelle tétrakishexaèdre :

$$\cos F = \frac{2hk}{h^2 + k^2}, \quad \cos G = \frac{h^2}{h^2 + k^2}.$$

Dans le cas de

$$\{210\}, \quad \cos F = \frac{4}{5}, \quad \cos G = \frac{4}{5}, \\ F = 36^{\circ} 52', 2, \quad G = 36^{\circ} 52', 2;$$

$$\{310\}, \quad \cos F = \frac{6}{10}, \quad \cos G = \frac{9}{10}, \\ F = 53^{\circ} 7', 8, \quad G = 25^{\circ} 50', 5;$$

$$\{320\}, \quad \cos F = \frac{12}{13}, \quad \cos G = \frac{9}{13}, \\ F = 22^{\circ} 37', 2, \quad G = 46^{\circ} 11', 2;$$

$$\{520\}, \quad \cos F = \frac{20}{29}, \quad \cos G = \frac{25}{29}, \\ F = 46^{\circ} 23', 8, \quad G = 30^{\circ} 27'.$$

La tangente de l'angle compris entre les normales à une face quelconque de $\{hko\}$, et à la face la plus rapprochée de $\{100\}$, est $\frac{h}{k}$.

60. Pour l'hémitétrakishexaèdre à faces parallèles $\pi \{okh\}$ (*fig. 17*), h étant supposé plus grand que k ,

$$\cos D = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}, \quad \cos U = \frac{hk}{h^2 + k^2}.$$

Dans le cas de

$$\begin{aligned} \pi \{012\}, \quad \cos D &= \frac{3}{5}, & \cos U &= \frac{2}{5}, \\ D &= 53^{\circ} 7', 8, & U &= 66^{\circ} 25', 3; \\ \pi \{320\}, \quad \cos D &= \frac{5}{13}, & \cos U &= \frac{6}{13}, \\ D &= 67^{\circ} 22', 1, & U &= 62^{\circ} 30', 8; \\ \pi \{034\}, \quad \cos D &= \frac{7}{25}, & \cos U &= \frac{12}{25}, \\ D &= 73^{\circ} 44', 4, & U &= 61^{\circ} 18', 9. \end{aligned}$$

61. La forme $\{hkk\}$ (*fig. 18*), quand h est plus grand que k , a vingt-quatre faces; on l'appelle icositessaraèdre,

$$\cos D = \frac{h^2}{h^2 + 2k^2}, \quad \cos F = \frac{2hk + k^2}{h^2 + 2k^2}.$$

Dans le cas de

$$\begin{aligned} \{211\}, \quad \cos D &= \frac{1}{6}, & \cos F &= \frac{5}{6}, \\ D &= 48^{\circ} 11', 5, & F &= 33^{\circ} 33', 4; \\ \{311\}, \quad \cos D &= \frac{9}{11}, & \cos F &= \frac{7}{11}, \\ D &= 35^{\circ} 5', 8, & F &= 50^{\circ} 28', 7. \end{aligned}$$

62. Pour l'hémicositessaraèdre à faces inclinées $\alpha \{hkk\}$ (*fig. 19*),

$$\cos F = \frac{2hk + k^2}{h^2 + 2k^2}, \quad \cos T = \frac{h^2 - 2k^2}{h^2 + 2k^2}.$$

Dans le cas de

$$\begin{aligned} \times \{211\}, \quad \cos F &= \frac{5}{6}, & \cos T &= \frac{2}{6}, \\ & F = 33^{\circ}33', 4, & T &= 70^{\circ}31', 7; \\ \times \{311\}, \quad \cos F &= \frac{7}{11}, & \cos T &= \frac{7}{11}, \\ & F = 50^{\circ}28', 7, & T &= 50^{\circ}28', 7. \end{aligned}$$

63. La forme $\{h h k\}$ (*fig. 20*), quand h est plus grand que k , a vingt-quatre faces; on l'appelle triakisocétaédre:

$$\cos G = \frac{h^2 + 2hk}{2h^2 + k^2}, \quad \cos D = \frac{2h^2 - k^2}{2h^2 + k^2}.$$

Dans le cas de

$$\begin{aligned} \{221\}, \quad \cos G &= \frac{8}{9}, & \cos D &= \frac{7}{9}, \\ & G = 27^{\circ}16', & D &= 38^{\circ}56', 5; \\ \{331\}, \quad \cos G &= \frac{15}{19}, & \cos D &= \frac{17}{19}, \\ & G = 37^{\circ}51', 8, & D &= 26^{\circ}31', 5 \end{aligned}$$

64. Pour l'hémitriakisocétaédre à faces inclinées. $\times \{h h k\}$ (*fig. 21*),

$$\cos G = \frac{h^2 + 2hk}{2h^2 + k^2}, \quad \cos T = \frac{h^2 + 2hk}{2h^2 + k^2}.$$

Dans le cas de

$$\begin{aligned} \times \{201\}, \quad \cos G &= \frac{8}{9}, & \cos T &= 0, \\ & G = 27^{\circ}16', & T &= 90^{\circ}. \end{aligned}$$

65. La forme $\{h k l\}$ (*fig. 22*) a quarante-huit faces;

on l'appelle hexakisoctaèdre :

$$\cos D = \frac{h^2 + k^2 - l^2}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos F = \frac{2hk + l^2}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos G = \frac{h^2 + 2kl}{h^2 + k^2 + l^2}.$$

Dans le cas de

$\{3_{21}\}$,	$\cos D = \frac{12}{14},$ $D = 31^{\circ} 0', 2,$	$\cos F = \frac{13}{14},$ $F = 21^{\circ} 47', 2,$	$\cos G = \frac{13}{14},$ $G = 21^{\circ} 47', 2;$
$\{4_{31}\}$,	$\cos D = \frac{24}{26},$ $D = 22^{\circ} 37', 2,$	$\cos F = \frac{25}{26},$ $F = 15^{\circ} 56', 5,$	$\cos G = \frac{22}{26},$ $G = 32^{\circ} 12', 2;$
$\{4_{21}\}$,	$\cos D = \frac{19}{21},$ $D = 25^{\circ} 12', 5,$	$\cos F = \frac{17}{21},$ $F = 35^{\circ} 57',$	$\cos G = \frac{20}{21},$ $G = 17^{\circ} 45', 1;$
$\{7_{31}\}$,	$\cos D = \frac{57}{59},$ $D = 14^{\circ} 57', 7,$	$\cos F = \frac{43}{59},$ $F = 43^{\circ} 12', 8,$	$\cos G = \frac{55}{59},$ $G = 21^{\circ} 13', 2;$
$\{11_{53}\}$,	$\cos D = \frac{137}{155},$ $D = 27^{\circ} 53', 2,$	$\cos F = \frac{151}{155},$ $F = 39^{\circ} 50', 9,$	$\cos G = \frac{119}{155},$ $G = 13^{\circ} 2', 7.$

66. Pour l'hémihexakisoctaèdre à faces inclinées
x $\{hkl\}$ (fig. 23),

$$\cos F = \frac{2hk + l^2}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos G = \frac{h^2 + 2kl}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$\cos T = \frac{h^2 - 2kl}{h^2 + k^2 + l^2}.$$

Dans le cas de

$$\begin{array}{lll}
 \times \{321\}, & \cos F = \frac{13}{14}, & \cos G = \frac{13}{14}, & \cos T = \frac{5}{14}, \\
 & F = 21^{\circ}47',2, & G = 21^{\circ}47',2, & T = 69^{\circ}4',5 \\
 \times \{531\}, & \cos F = \frac{31}{35}, & \cos G = \frac{31}{35}, & \cos T = \frac{19}{35}, \\
 & F = 27^{\circ}39',7, & G = 27^{\circ}39',7, & T = 57^{\circ}7',4
 \end{array}$$

67. Pour l'hémihexakisocétaédre à faces parallèles,
 $\pi \{l h k\}$ (fig. 24),

$$\begin{aligned}
 \cos D &= \frac{h^2 + k^2 - l^2}{h^2 + k^2 + l^2}, \\
 \cos W &= \frac{h^2 + k^2 + l^2}{h^2 + k^2 + l^2}, \\
 \cos U &= \frac{kl + lh + hk}{h^2 + k^2 + l^2}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas de

$$\begin{array}{lll}
 \pi \{123\}, & \cos W = \frac{6}{14}, & \cos D = \frac{12}{14}, & \cos U = \frac{11}{14}, \\
 & W = 64^{\circ}37',3, & D = 30^{\circ} 0',3, & U = 38^{\circ}12',1 \\
 \pi \{124\}, & \cos W = \frac{13}{21}, & \cos D = \frac{19}{21}, & \cos U = \frac{14}{21}, \\
 & W = 51^{\circ}45',3, & D = 25^{\circ}12',7, & U = 48^{\circ}13',1 \\
 \pi \{135\}, & \cos W = \frac{17}{35}, & \cos D = \frac{33}{35}, & \cos U = \frac{23}{35}, \\
 & W = 29^{\circ} 3',5, & D = 19^{\circ}27',8, & U = 48^{\circ}55',1
 \end{array}$$

68. Parmi toutes les formes précédentes, celles dont les caractéristiques sont les plus simples, le cube $\{100\}$, l'océtaédre $\{111\}$ et le dodécaédre $\{011\}$, se rencontrent plus fréquemment que les autres, et même il ne paraît pas qu'on ait observé d'autres clivages que ceux parallèles à une ou à plusieurs de ces trois formes $\{100\}$, $\{111\}$, $\{011\}$.

Tableau des distances angulaires qui séparent les pôles des formes les plus communes et les pôles les plus rapprochés des formes {100}, {011}, {111}.

	100	010	001	011	101	110	111
210	26°34'	63°26'	90° 0'	71°34'	50°46'	18°26'	39°44'
310	18.26	61.34	90. 0	77. 5	47.52	26.34	43. 5
320	33.41	56.19	90. 0	66.54	53.58	11.19	36.49
410	14. 2	75.58	90. 0	80. 7	46.41	30.58	45.34
430	36.52	53. 8	90. 0	64.54	55.33	8. 8	36. 4
320	21.48	68.12	90. 0	74.47	48.58	23.12	41.22
340	38.40	51.20	90. 0	63.47	56.29	6.20	35.45
211	35.16	65.54	65.54	54.44	30. 0	30. 0	19.28
311	25.14	72.27	72.27	64.46	31.29	31.29	29.30
122	70.31	48.11	48.11	19.28	45. 0	45. 0	15.48
155	76.44	46.30	46.30	13.16	49.33	49.33	22. 0
321	36.42	57.41	74.30	55.28	40.54	19. 6	22.13
421	29.12	64. 7	77.24	62.25	39.31	22.13	28. 8
451	38.20	53.58	78.41	56.19	46. 6	13.54	25. 4
331	32.19	59.32	80.16	61.26	44.11	17. 1	28.35
731	24.18	67. 1	82.31	68.24	42.34	22.59	34.14

EXEMPLES :

69. Dans un cristal de cobalt gris (*fig. 25*), les normales aux faces a, a' sont rectangulaires entre elles. Une normale à une quelconque des faces d, d' fait un angle de 45° avec les normales à chacune des faces adjacentes a, a' , etc. Donc (n^{os} 55 et 58) a, a' sont des faces du cube $\{100\}$, et d, d' des faces du dodécaèdre $\{011\}$.

Soient les symboles des faces $a, (100)$; $a', (010)$; $a'', (001)$; les symboles des autres faces seront $d, (011)$; $d', (101)$; $d'', (110)$. o appartient à la fois aux zones $ad, a'd'$; les symboles de ces zones sont (n^o 14) $ad, [011]$; $a'd', [110]$; par conséquent (n^o 15) o a pour symbole (111) . o est donc une face de l'octaèdre $\{111\}$. Le cristal est donc une combinaison des formes $\{100\}, \{011\}, \{111\}$.

70. Dans un cristal de spath-fluor (*fig. 26*), les normales de deux faces adjacentes quelconques o font un angle de $70^\circ 31', 5$; par conséquent (n^o 56) o, o' sont des faces de l'octaèdre $\{111\}$.

La normale à une face quelconque f fait un angle de 22° avec la normale à une face adjacente o .

Les arêtes d'intersection des faces f entre elles, ou avec les faces adjacentes o , sont parallèles; les faces f et deux faces adjacentes o font donc partie de la même zone. Soient $o, (111)$; $o', (\bar{1}11)$, la zone oo' aura pour symbole (n^o 14) $[011]$. Les symboles des faces ff' seront donc respectivement de la forme $(klh), (k\bar{h}h)$. Si P et Q sont les pôles de f, f' , $PQ = 70^\circ 31', 5 - 2 \times 22^\circ = 26^\circ 31', 5$,

$$\cos PQ = \frac{2h^2 - k^2}{2h^2 + k^2} = \cos 26^\circ 31', 5 = \frac{17}{19};$$

donc

$$\frac{h^2}{k^2} = 9; \quad \frac{h}{k} = 3.$$

La face f appartient donc au triakisocétaédre $\{311\}$.

Le cristal est donc une combinaison des formes $\{111\}$, $\{311\}$; il est clivable parallèlement aux faces de $\{111\}$.

71. Dans un cristal de spath-fluor (*fig. 27*), l'angle des deux normales aux faces adjacentes n est alternativement $35^{\circ}57'$ et $17^{\circ}45'$.

Le plus grand angle est compris entre les normales aux faces qui se coupent suivant les longues arêtes. Soient X, O les pôles de (100) , (111) ; $\{hkl\}$ le symbole de la forme circonscrite par les faces n ; P le pôle de (hkl) , Q le pôle de (khl) , R le pôle de (hlk) : alors $PQ = 35^{\circ}57'$, $PR = 17^{\circ}45'$; donc (n° 65)

$$\cos PQ = \frac{17}{21} = \frac{2hk + l^2}{h^2 + k^2 + l^2}, \quad \cos PR = \frac{20}{21} = \frac{h^2 + 2kl}{h^2 + k^2 + l^2};$$

donc

$$\frac{(h-k)^2}{h^2 + k^2 + l^2} = \frac{4}{21}, \quad \frac{(k-l)^2}{h^2 + k^2 + l^2} = \frac{1}{21},$$

d'où

$$\frac{(h-l)^2}{h^2 + k^2 + l^2} = \frac{9}{21}, \quad \frac{k^2 + 2hl}{h^2 + k^2 + l^2} = \frac{12}{21}, \quad \frac{(h+k+l)^2}{h^2 + k^2 + l^2} = \frac{49}{21},$$

donc

$$h - k = 2(k - l), \quad h + k + l = 7(k - l),$$

d'où

$$k = 2l, \quad h = 4l;$$

donc

$$l = 1, \quad k = 2, \quad h = 4.$$

n, n' sont donc des faces de $\{421\}$.

72. Dans un cristal de boracite (*fig. 28*) les normales

à deux faces adjacentes a font un angle droit. Ces faces, par conséquent, appartiennent à un cube. Soient leurs symboles a , (100) ; a' , (010) ; a'' , (001) ; la normale à d'' fait, avec les normales aux faces a , a' , a'' , des angles de 45° : par conséquent (n° 58) d'' a pour symbole (110) ; de même les symboles de d' sont (101) , de d (011) . La face o est commune aux zones ad , $a'd'$, par conséquent (n° 56) o est (111) . Les faces o sont au nombre de quatre, mais la forme holoédrique $\{111\}$ a huit faces. o , o' , etc., sont donc des faces de l'hémioctaèdre $\times \{111\}$.

Le cristal est donc une combinaison des formes $\{100\}$, $\{110\}$, $\times \{111\}$.

73. Dans un cristal de fer oxydulé magnétique (*fig. 29*), les normales à deux faces adjacentes o font un angle de $70^\circ 31', 5$. o , o' , etc., sont donc les faces de l'octaèdre $\{111\}$. Soient les symboles des faces o , (111) ; o' , $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$; o'' , $(11\bar{1})$; o''' , $(\bar{1}\bar{1}1)$; la normale aux faces d fait des angles de $35^\circ 16'$ avec les normales aux deux faces o ; d , d' , etc., sont donc les faces du dodécaèdre $\{011\}$. La face e est commune aux zones oo'' , do'' , dont les symboles sont oo'' $(\bar{1}01)$, do'' , (211) ; donc le symbole de e est (131) , donc e , e' , etc., sont les faces de l'icositétraèdre $\{311\}$.

Le cristal est par conséquent une combinaison des formes $\{111\}$, $\{011\}$, $\{311\}$.

74. Dans un cristal de grenat (*fig. 30*), les normales à deux faces adjacentes d font un angle de 60° . d , d' , etc., sont donc les faces du dodécaèdre $\{011\}$. Soient les symboles de d , (011) ; d' , (101) ; d'' , (110) ; la face e' fait partie de la zone dd' ; et fait des angles égaux avec les faces d , d' ; le cercle de zone $\{111, 1\bar{1}\bar{1}\}$ partage par moitié l'arc dd' ; il passe donc par e' ; e' a donc (n° 15) pour symbole (121) ; de même e a pour symbole (121) . s fait partie des zones e' , e , et dd' ; donc le symbole de s est (123) . Donc le cris-

tal est une combinaison des formes $\{011\}$, $\{211\}$, $\{123\}$; il est clivable parallèlement aux faces de $\{011\}$.

75. Dans un cristal de cobalt arsenical de Tunaberg (*fig.* 31), les normales à deux faces adjacentes a font entre elles un angle de 90° ; ces faces appartiennent donc à un cube. Soient leurs symboles pour a , (100) ; a' , (010) ; a'' , (001) . Les angles compris entre la normale à une face o et les normales aux faces adjacentes a sont égaux à $54^\circ 44'$, donc (n° 56) o a pour formule (111) . Les arêtes, intersections de d'' avec a , a' , sont parallèles; d'' appartient par conséquent à la même zone que a , a' ; le symbole de d'' est donc de la forme (hko) . On trouve que les normales à a' et d'' font un angle de $26^\circ 34'$; donc (n° 42)

$$\frac{h^2}{h^2 + k^2} = \cos(26^\circ 34');$$

donc

$$\frac{h}{k} = \tan(26^\circ 34') = \frac{1}{2};$$

le symbole de d'' est donc (120) .

Les faces d sont au nombre de douze; or, le nombre de faces de la forme holoédrique $\{012\}$ est de vingt-quatre.

Le cristal est donc une combinaison des formes $\{100\}$, $\{111\}$, $\pi \{012\}$; il est clivable parallèlement aux faces $\{100\}$.

76. Dans un cristal de cobalt arsenical (*fig.* 32), les symboles de p , a , q , c , k sont p , (100) ; a , (111) ; c , (120) ; k , (140) . i fait partie de la zone ac , et les normales a , i font, d'après Phillips, un angle de $16^\circ 33'$. Soit (hkl) le symbole de i ; le symbole de la zone ac est (n° 13) (211) . Par conséquent (n° 21),

$$2h = k + l;$$

4..

(52)

mais (n^o 43)

$$\cos^2 (16^\circ 33') = \frac{1}{3} \frac{h+k+l}{h^2+k^2+l^2},$$

d'où l'on tire $\frac{k}{l} = \frac{15}{7}$ à très-peu près; par conséquent

$$l = 7, \quad k = 15, \quad h = 11.$$

Les faces e adjacentes à a sont au nombre de trois; la face e appartient donc à la forme $\pi \{7 \ 11 \ 15\}$.

77. Dans un cristal de pyrite jaune (fig. 33), a est une face du cube, o une face de l'octaèdre. Les normales aux faces s et a font un angle de $57^\circ 41'$; les normales aux faces s , o un angle de $22^\circ 15'$. Soient les symboles a , (100); o , (111); s , (hkl); soient A , O , S les pôles de a , o , s ,

$$SA = 57^\circ 41', \quad SO = 22^\circ 13',$$

donc (n^{os} 43 et 45)

$$\frac{h^2}{h^2+k^2+l^2} = \cos^2 SA = \frac{9}{14}, \quad \frac{1}{3} \frac{(h+k+l)^2}{h^2+k^2+l^2} = \cos^2 SO = \frac{6}{7},$$

d'où résulte

$$2k = 3h, \quad 2l = h;$$

donc

$$l = 1, \quad h = 2, \quad k = 3;$$

donc s a pour symbole (231)

Dans le cas de la forme holoédrique $\{123\}$ et dans le cas de la forme hémédrique à faces inclinées, six faces se rassemblent sur chaque angle du cube; or, dans le cas actuel, il n'y en a que trois; s , s' , s'' sont donc les faces de l'hémihexakisoctaèdre direct à faces parallèles $\pi \{123\}$. Le cristal est clivable parallèlement aux faces des formes $\{100\}$, $\{111\}$.

78. Dans un cristal de pyrite jaune (*fig. 34*), p, p', p'' sont les faces du cube; d une face de l'octaèdre; les faces $p, p'', e'', p'; p'', s, f, o', s'', e''; p'', f'', y''; p, o, d; d, f, e$ forment entre elles des zones, et les normales aux faces p', e'' font un angle de $26^{\circ}24'$. Soient les symboles de $p, p', p''; (100), (010), (001); d$ a pour symbole $(111); e$ appartient à la zone pp' ; son symbole est donc de la forme (hko) . Si Y et P représentent les pôles de p', e'' ,

$$\cos^2 PY = \frac{k^2}{h^2 + k^2}, \quad \text{tang PY} = \frac{h}{k} = \text{tang } 26^{\circ}34' = \frac{1}{2};$$

donc e'' a pour symbole (120) ; de même e' et e ont respectivement pour symboles $(201), (012)$.

La face o est commune aux zones $pd; p'e'$, donc elle a pour symbole (211) . La face s est commune à $pe; p''e''$, elle a donc pour symbole (124) . La face f est commune aux zones $de; p''e''$, elle a donc pour symbole (123) . La face y est commune aux zones $pf; p'p''$, elle a donc pour symbole (023) . Il n'y a qu'une face e et qu'une face f' entre chaque couple de faces adjacentes du cube, et seulement trois faces f' et trois faces s autour de chacune des faces $d; e, f, q, s$ appartiennent donc à des formes hémimétriques à faces parallèles. Le cristal est donc une combinaison des formes $\{111\}, \{100\}, \{211\}, \pi\{012\}, \pi\{023\}, \pi\{123\}, \pi\{124\}$.

79. Dans un cristal de cuivre gris (*fig. 35*) f, f', f'' sont les faces du cube; chaque face d, d' , etc., appartient à la même zone que les deux faces adjacentes a et est également inclinées à ces faces; d, d' , etc., sont donc des faces du dodécaèdre. Soient les symboles f, f', f'' respectivement $(100), (010), (001)$; ceux de d, d', d'', d seront respectivement $(011), (101), (110), (10\bar{1})$. La face p est commune aux zones $f'd; f''d'$: le symbole de p est par

conséquent ($n^{\circ} 13$) ($11\bar{1}$); la face r'' est commune aux zones dd' , $f''d''$: son symbole est par conséquent (112); de même on aura pour les symboles de r' (121), r_1 ($21\bar{1}$), r_2 ($12\bar{1}$). La face s est commune aux zones ff' , $r'r''$: son symbole est donc (130); la face n est commune aux zones $f''d''$, r_1r_2 : son symbole est donc ($33\bar{2}$). Les arêtes et les angles solides formés par les faces r , r' , r'' ne sont pas tronqués par les faces correspondantes à p , n ; p , n appartiennent donc à des formes hémihédriques à faces inclinées. Donc le cristal est une combinaison des formes $\{100\}$, $\{110\}$, $\times \{11\bar{1}\}$, $\{310\}$, $\{211\}$, $\times \{33\bar{2}\}$.



CHAPITRE III.

SYSTÈME PYRAMIDAL.

80. Dans le système pyramidal, les axes cristallographiques sont rectangulaires, et deux des paramètres a et b sont égaux.

81. La forme holoédrique $\{hkl\}$ est terminée par toutes les faces qui ont pour symboles les divers arrangements de $\pm h$, $\pm k$, $\pm l$, où l occupe la dernière place. Quand h , k , l ont des valeurs toutes différentes, on peut en former seize arrangements, représentés par le tableau ci-après. Lorsqu'une des caractéristiques est zéro, ou lorsque h , k sont des nombres égaux, ces arrangements se réduisent à huit; quand la caractéristique l est zéro et $h = k$, ou que l'une des caractéristiques h et k est zéro, le nombre d'arrangements se réduit à quatre; à deux quand h et k sont égaux à zéro (*).

h	k	l	k	h	l	\bar{h}	\bar{k}	\bar{l}	\bar{k}	\bar{h}	\bar{l}
\bar{h}	\bar{k}	l	\bar{k}	\bar{h}	l	h	k	\bar{l}	k	h	\bar{l}
k	h	\bar{l}	\bar{h}	k	l	\bar{k}	h	l	\bar{h}	k	l
k	\bar{h}	\bar{l}	h	\bar{k}	\bar{l}	k	\bar{h}	l	h	\bar{k}	l

(*) L'égalité de deux caractéristiques identifie les symboles qui

Si l'on suppose h plus grand que k , la *fig.* 38 représentera l'arrangement des pôles de la forme $\{hkl\}$ sur la surface de la sphère de projection.

82. La forme terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$ qui ont, soit un nombre impair de caractéristiques positives, soit un nombre impair de caractéristiques négatives, est dite hémihédrique à faces inclinées, et se désigne par la notation symbolique $z \{hkl\}$; (hkl) est le symbole d'une quelconque de ses faces.

On appelle directe la forme hémihédrique terminée par les faces qui correspondent à un nombre impair de caractéristiques positives; inverse celle terminée par les faces qui correspondent à un nombre impair de caractéristiques négatives. Les symboles de la forme directe sont contenus dans les première et seconde colonnes du tableau donné plus haut, les symboles de la forme inverse dans les troi-

ne différeraient que par la position des caractéristiques devenues égales.

Supposer une caractéristique nulle, c'est identifier tous les symboles qui ne diffèrent que par le signe de cette caractéristique.

Il est facile de voir qu'on aura les nombres suivants d'arrangements

Dans les cas où les caractéristiques sont :

	1 ^{re} et 2 ^e égales.	1 ^{re} et 2 ^e nulles.	1 ^{re} et 2 ^e égales. 3 ^e noll.	1 ^{re} et 3 ^e nulles ou 2 ^e et 3 ^e nulles.	1 ^{re} et 2 ^e nulles.
3 caract. posit..	2	2	1	2	1
2 posit., 1 négat.	6	4	2	2	1
2 négat., 1 posit.	6	2	1	"	"
3 négatives.....	2	"	"	"	"
	16	8	4	4	2

sième et quatrième. Si la surface de la sphère de projection est partagée en huit triangles par les cercles de zones qui passent par les pôles de $\{001\}$, les pôles de la forme directe se trouveront dans quatre triangles alternatifs, dont l'un renferme le pôle de la face (111) . Les pôles de la forme inverse se trouvent dans les quatre autres triangles.

83. Le système pyramidal admet une seconde espèce de forme hémédrique à faces inclinées. Terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$, pour lesquelles l'ordre de h, k change en même temps que le signe de l , on la désigne par la notation symbolique $\alpha' \{hkl\}$; (hkl) est le symbole d'une quelconque de ses faces. Cette forme est directe ou inverse, suivant que la valeur numérique de la première caractéristique est inférieure ou supérieure à celle de la seconde; dans le cas où les trois caractéristiques ont le même signe, les symboles des faces de la forme directe se trouvent dans les première et quatrième colonnes; ceux de la forme inverse, dans les seconde et troisième du tableau (n° 81).

Si l'on conçoit la surface de la sphère partagée en huit triangles par les grands cercles qui passent par les pôles de $\{001\}$ et de $\{110\}$, les pôles de la forme directe se trouveront dans quatre triangles alternatifs, dont l'un renferme le pôle de la face (101) . Les pôles de la forme inverse se trouveront dans les quatre autres triangles alternatifs.

84. La forme terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$ correspondantes au même ordre de caractéristiques h, k , ou à un ordre différent, suivant que h, k ont le même signe ou des signes contraires, est dite hémédrique à faces parallèles, et est désignée par la notation symbolique $\pi \{hkl\}$; (hkl) est le symbole d'une quelconque de ses faces.

La forme est directe ou inverse suivant que la valeur numérique de la première caractéristique est plus grande,

ou moindre que celle de la seconde dans le cas où les deux caractéristiques ont le même signe. Les symboles des faces de la forme directe se trouvent dans la première et troisième colonne ; ceux de la forme inverse dans la seconde et quatrième du tableau (n° 81).

Si l'on conçoit la surface de la sphère de projection partagée en huit fuseaux par les cercles de zones qui passent par le pôle (001) et par ceux des formes {100}, {110}, les pôles de la forme hémédrique directe se trouvent dans quatre fuseaux alternatifs, dont l'un est compris entre les pôles (100), (110); les pôles de la forme inverse se trouvent dans les quatre autres fuseaux.

83. Déterminer la position d'un pôle.

Soient (*fig. 39*) X, Y, Z les points où les axes cristallographiques percent la sphère de projection; a, a, c les paramètres du cristal; P le pôle (hkl).

Puisque les axes sont rectangulaires, les trois distances angulaires XY, YZ, ZX sont égales à 90°; par conséquent

$$\cos XY = 0, \quad \cos YZ = 0, \quad \cos ZX = 0;$$

X, Y, Z sont donc les pôles de (100), (010), (001), et les angles dièdres en X, Y, Z sont droits. Donc

$$\begin{aligned} \cos PX &= \sin PY \cos PYX = \sin PZ \cos PZX, \\ \cos PY &= \sin PZ \cos PZY = \sin PX \cos PXY, \\ \cos PZ &= \sin PX \cos PXZ = \sin PY \cos PYZ; \\ \cotang PX &= \tang PZY \cos PXY = \tang PYZ \cos PXZ, \\ \cotang PY &= \tang PXZ \cos PYZ = \tang PZX \cos PYX, \\ \cotang PZ &= \tang PYX \cos PZX = \tang PXY \cos PZY. \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{a}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ;$$

d'après cela

$$\text{tang PXY} = \frac{la}{kc}, \quad \text{tang PYX} = \frac{la}{hc}, \quad \text{tang PZX} = \frac{k}{h};$$

$$\text{cotang PX} = \frac{h}{k} \cos \text{PXY} = \frac{hc}{la} \cos \text{PXZ},$$

$$\text{cotang PY} = \frac{k}{h} \cos \text{PYX} = \frac{kc}{la} \cos \text{PYZ},$$

$$\text{cotang PZ} = \frac{la}{hc} \cos \text{PZY} = \frac{la}{kc} \cos \text{PZY},$$

$$\text{tang}^2 \text{PZ} = \frac{c^2 h^2 + k^2}{a^2 l^2}.$$

86. Les pôles de $\{110\}$ partagent par moitié les arcs qui réunissent deux pôles adjacents de $\{100\}$; car, si N est un pôle de $\{110\}$, et X, Y les pôles adjacents de $\{100\}$, on trouve (n° 85)

$$\text{cotang NX} = 1, \quad \text{cotang NY} = 1.$$

Les arcs NX, NY sont donc égaux l'un et l'autre à 45° ; le point N est donc milieu de XY.

87. De la forme des expressions précédemment établies (n° 85), il résulte que les distances des pôles de $\{hkl\}$ au plus rapproché des pôles de $\{001\}$ sont toutes égales, et que les angles dont les sommets sont à ces pôles et qui sont sous-tendus par des arcs de cercle menés d'un pôle quelconque de $\{hkl\}$ au pôle le plus rapproché de $\{100\}$ sont tous égaux.

D'après cela, il est facile de voir que les pôles de la forme $\{hkl\}$ sont distribués deux à deux sur la surface de la sphère de projection symétriquement à chaque cercle

de zone qu'on peut mener par deux pôles quelconques des trois formes $\{001\}$, $\{100\}$, $\{110\}$.

88. Si la surface de la sphère de projection est partagée en seize triangles par les cinq cercles de zones qui passent par les pôles des deux formes $\{001\}$, $\{100\}$, $\{110\}$, l'arrangement des pôles de la forme $\{hkl\}$ sera symétrique par rapport à un côté quelconque de l'un quelconque de ces triangles. L'arrangement des pôles de $\{hkl\}$ est donc toujours symétrique dans deux triangles adjacents et toujours semblable dans deux triangles alternatifs.

89. Les pôles de la forme $\alpha\{hkl\}$ sont distribués sur la surface de la sphère de projection symétriquement aux deux cercles de zones qui passent par les pôles de $\{001\}$ et par ceux de $\{110\}$.

Les pôles de $\alpha'\{hkl\}$ sont distribués sur la même surface symétriquement aux deux cercles de zones qui passent par les pôles de $\{001\}$ et par les pôles de $\{100\}$. L'arrangement des pôles de $\pi\{hkl\}$ est symétrique au cercle de zone qui passe par les pôles de $\{100\}$; cet arrangement est semblable dans des triangles situés tous deux du même côté de ce cercle de zone, et symétrique dans des triangles situés de côtés opposés.

90. Deux formes directe et inverse ne diffèrent que par leur situation. Si la sphère de projection faisait une demi-révolution autour de la droite qui joint deux pôles opposés de $\{100\}$, les pôles d'une forme directe et ceux d'une forme inverse échangeraient mutuellement leur position, qu'il s'agisse soit des formes hémihédriques à faces parallèles, soit des formes hémihédriques à faces inclinées de la première espèce. Quant aux formes hémihédriques à faces inclinées de la seconde espèce, c'est autour de la droite qui joint deux pôles opposés de $\{110\}$ que la demi-

révolution devrait s'opérer pour que l'échange réciproque de position se fit entre les pôles.

91. Soit, dans la forme $\{hko\}$ la distance angulaire de deux pôles représentée par K, F ou M, selon que les symboles de ces pôles diffèrent entre eux seulement par le signe de k , par l'ordre des caractéristiques h, k , ou en même temps par l'ordre des caractéristiques h, k et par le signe de l'une d'elles; on a

$$\text{tang } \frac{1}{2} K = \frac{k}{h}, \quad F = 90^\circ - K, \quad M = 90^\circ.$$

92. Soient, dans la forme $\{hol\}$, L la distance entre deux pôles qui ne diffèrent que par le signe de l , F la distance de deux pôles qui ne diffèrent que par l'arrangement de h, o ; on a

$$\text{tang } \frac{1}{2} L = \frac{la}{hc}, \quad \cos F = \sin^2 \frac{1}{2} L.$$

93. Soient, dans la forme $\{hhl\}$, L, K les distances de deux pôles dont les symboles ne diffèrent que par les signes de l ou d'une des caractéristiques h ; on a

$$\text{tang } \frac{1}{2} L = \frac{la}{hc} \cos 45^\circ, \quad \cos K = \sin^2 \frac{1}{2} L.$$

94. Soient enfin les distances entre deux pôles de la forme $\{hkl\}$ représentées par H, K, L, suivant que les symboles de ces pôles diffèrent entre eux par les signes de h, k, l . Soit F la distance de deux pôles dans les symboles desquels h et k occupent une place différente, quand d'ailleurs les signes des première, deuxième et troisième caractéristiques de l'un de ces symboles sont les mêmes que les signes des première, seconde et troisième caractéristiques de l'autre. Soit G la distance de deux pôles dans les symboles desquels h, k occupent une place différente, quand d'ailleurs les signes des deux premières caractéris-

tiques dans l'un de ces symboles sont contraires aux signes des deux premières caractéristiques dans l'autre, le signe de la troisième caractéristique l étant toujours le même dans les deux symboles. Soit enfin M la distance angulaire de deux pôles dont les symboles diffèrent par la place qu'occupent les caractéristiques h et k et seulement par le signe de l'une d'elles. Alors $90^\circ - \frac{1}{2}H$, $90^\circ - \frac{1}{2}K$, $90^\circ - \frac{1}{2}L$ sont les distances d'un pôle quelconque de $\{hkl\}$ aux deux pôles les plus rapprochés de $\{100\}$ et au pôle le plus rapproché de $\{001\}$.

Les arcs de grands cercles F et G se trouvent compris entre les côtés de deux angles dièdres dont le sommet est au pôle (001) et qui sont respectivement égaux à $90^\circ - 2\varphi$, $90^\circ + 2\varphi$. L'angle dièdre φ qui a son sommet au pôle (001) comprend lui-même entre ses côtés les arcs de grands cercles qui mesurent la distance d'un pôle quelconque de $\{hkl\}$ au pôle le plus rapproché de $\{100\}$. L'arc de grand cercle M est compris entre les côtés d'un angle dièdre de 90° qui a son sommet au pôle (001) . D'après cela (n° 83)

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \varphi &= \frac{k}{h}, & \operatorname{tang} \frac{1}{2}L &= \frac{la}{hc} \cos \varphi, \\ \sin \frac{1}{2}K &= \cos \frac{1}{2}L = \sin \varphi, & \sin \frac{1}{2}H &= \cos \frac{1}{2}L \cos \varphi, \\ \sin \frac{1}{2}G &= \cos \frac{1}{2}L \sin(45^\circ + \varphi), \\ \sin \frac{1}{2}F &= \cos \frac{1}{2}L \sin(45^\circ - \varphi), \\ \cos M &= \sin^2 \frac{1}{2}L. \end{aligned}$$

93. Si l'on se donne la distance angulaire de deux pôles de l'une des formes $\{hko\}$, $\{hol\}$, $\{hhl\}$ (*), la

(*) Le rapport des paramètres du cristal étant d'ailleurs connu.

distance des deux pôles ou son supplément représentera un des arcs désignés par F, K, L, et les formules précédemment établies (n^{os} 91 à 93), permettent de déterminer le rapport des caractéristiques.

96. Si l'on se donne la distance d'un pôle quelconque de la forme $\{hkl\}$, à deux autres pôles de la même forme, qui ne sont pas situés sur le même cercle de zone que le premier, les distances angulaires données ou leurs suppléments représentent nécessairement deux des arcs H, K, L, F, G, M. Au moyen de ces données, on peut calculer φ et L, et par conséquent les formules données ci-dessus (n^o 94) permettent de déterminer le rapport des caractéristiques.

97. Soient P le pôle de (hkl) , Q le pôle de (pqr) ; on a (n^o 85)

$$\begin{aligned} \text{tang PX} &= \frac{h}{k}, & \cos PXY &= \frac{hc}{la} \cos PXZ, \\ \text{tang QX} &= \frac{p}{q}, & \cos QXY &= \frac{pc}{ra} \cos QXZ. \end{aligned}$$

Soit Q sur le cercle de zone PX; alors

$$\text{QXY} = \text{PXY}, \quad \text{QXZ} = \text{PXZ},$$

donc

$$\frac{h \text{ tang PX}}{p \text{ tang QX}} = \frac{h}{q} = \frac{l}{r};$$

de même, si Q est sur le cercle de zone PY,

$$\frac{h \text{ tang PY}}{q \text{ tang QY}} = \frac{l}{r} = \frac{h}{p},$$

et si Q est sur le cercle de zone PZ,

$$\frac{l \text{ tang PZ}}{r \text{ tang QX}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{q}.$$

Soient P le pôle de (hkl) , Q le pôle de (pqr) , Z le pôle de (001) : on a (n° 85)

$$\operatorname{tang}^2 \text{PZ} = \frac{c^2}{a^2} \frac{h^2 + k^2}{l^2}, \quad \operatorname{tang}^2 \text{QZ} = \frac{c^2}{a^2} \frac{p^2 + q^2}{r^2},$$

donc

$$\frac{l^2 \operatorname{tang}^2 \text{PZ}}{h^2 + k^2} = \frac{r^2 \operatorname{tang}^2 \text{QZ}}{p^2 + q^2}.$$

99. Trouver la distance de deux pôles quelconques.

Soient (*fig. 39*) X, Y, Z les points où les axes cristallographiques percent la sphère de projection : X est le pôle de (100) , Y de (010) , Z de (001) . Soient P, Q les pôles de (hkl) , (pqr) ; soit M le point d'intersection des cercles de zones PQ, XY. Le symbole de M (n°s 13 à 15), et les tangentes des angles MZX, PZX, QZX, PZM, QZM (n° 85) peuvent se déterminer en fonction de $h, k, l; p, q, r$; PZ peut être exprimé en fonction de $a, c; h, k, l$ (n° 85). $ZM = 90^\circ$;

donc

$$\begin{aligned} \cos \text{PM} &= \cos \text{PZM} \sin \text{PZ}, \\ \frac{\operatorname{tang} \text{QM}}{\operatorname{tang} \text{PM}} &= \frac{\operatorname{tang} \text{QZM}}{\operatorname{tang} \text{PZM}}. \end{aligned}$$

On connaît donc PQ égal à la somme ou à la différence de PM, QM (*).

(*) Dans les triangles rectilatéraux PZM, QZM, on a

$$\cos \text{PM} = \cos \text{PZM} \sin \text{PZ}, \quad \cos \text{QM} = \cos \text{QZM} \sin \text{PZ},$$

d'où

$$\frac{\cos \text{PM}}{\cos \text{QM}} = \frac{\cos \text{PZM}}{\cos \text{QZM}},$$

100. Étant donnée la distance de deux pôles quelconques non situés tous deux sur le cercle de zone (100, 010), trouver le rapport des paramètres.

Soient (hkl) , (pqr) les symboles de P et Q; soient tang PZM , tang QZM , exprimées en fonctions de h, k, l ; p, q, r (*).

$$\frac{\text{tang PM}}{\text{tang QM}} = \frac{\text{tang PZM}}{\text{tang QZM}},$$

donc

$$\frac{\sin (\text{QM} + \text{PM})}{\sin (\text{QM} - \text{PM})} = \frac{\text{tang QZM} + \text{tang PZM}}{\text{tang QZM} - \text{tang PZM}};$$

On pouvait encore suivre la même marche qu'aux nos 42 et 45; on serait arrivé à

$$\cos^2 \text{PQ} = \frac{\frac{hp + kq}{a^2} + \frac{lr}{b^2}}{\left(\frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right) \left(\frac{p^2 + q^2 + r^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2}\right)}.$$

(*) Dans les triangles rectilatéraux PZM, QZM, on a

$$\text{tang PM} = \frac{\text{tang PZM}}{\sin \text{PMZ}}, \quad \text{tang QM} = \frac{\text{tang QZM}}{\sin \text{QMZ}},$$

d'où

$$\frac{\text{tang PM}}{\text{tang QM}} = \frac{\text{tang PZM}}{\text{tang QZM}},$$

ou en composant

$$\begin{aligned} \frac{\text{tang PM} + \text{tang QM}}{\text{tang PM} - \text{tang QM}} &= \frac{\sin (\text{PM} + \text{QM})}{\sin (\text{PM} - \text{QM})} \\ &= \frac{\text{tang PZM} + \text{tang QZM}}{\text{tang PZM} - \text{tang QZM}}, \end{aligned}$$

or la distance donnée PQ est, ou $QM + PM$, ou $QM - PM$; donc on connaît PM et QM. Mais

$$\cos PM = \cos PZM \sin PZ;$$

PZ une fois connu, le rapport $\frac{c}{a}$ se tire de l'équation

$$\operatorname{tang}^2 PZ = \frac{c^2 h^2 + k^2}{a^2 l^2}.$$

101. Déterminer les caractéristiques d'une face quelconque, quand on prend pour axes cristallographiques les axes des trois zones $(\bar{1}10, 001)$, $(110, 001)$, $(100, 001)$.

Les symboles des trois zones sont respectivement $(n^o 43)$, (110) , $(\bar{1}\bar{1}0)$, (001) ; donc $(n^o 28)$

$$e = 1, f = 1, g = 0; h = 1, k = -1, l = 0; p = 0, q = 0, r = 1.$$

Donc si u, v, w sont les caractéristiques de la face rapportée aux axes primitifs u', v', w' , les caractéristiques de la face rapportée aux nouveaux axes

$$u' = u + v; \quad v' = u - v; \quad w' = w.$$

102. Déterminer la figure géométrique et les angles de la forme $\{hkl\}$, quand on particularise les valeurs de h, k, l .

L'angle de deux normales se calcule au moyen des formules des n^{os} 91 à 94. Dans les figures qui accompagnent le texte, on désigne cet angle par la lettre inscrite sur l'arête qui résulte de l'intersection des faces correspondantes; la *fig.* 38 représente l'arrangement des pôles de chaque forme différente. Le nombre des faces a été donné précédemment (n^o 81).

103. La forme $\{001\}$ (*fig. 40*) a deux faces (001) , $(00\bar{1})$ parallèles l'une à l'autre.

104. La forme $\{100\}$ (*fig. 40*) a quatre faces; les normales à deux faces adjacentes de $\{001\}$ et à deux faces adjacentes de $\{100\}$ et de $\{001\}$, font un angle droit; donc $F = 90^\circ$.

105. La forme $\{110\}$ a quatre faces,

$$\text{tang } \frac{1}{2}K = 1; \quad K = 90.$$

La normale à une face de $\{110\}$ fait un angle de 45° avec la normale à une face adjacente de $\{100\}$ ($n^\circ 86$); et un angle de 90° avec la normale à une face de $\{001\}$, car les cotangentes ($n^\circ 85$), sont respectivement 0 et 1.

106. La forme $\{hko\}$ (*fig. 42*) a huit faces,

$$\text{tang } \frac{1}{2}K = \frac{k}{h} (*); \quad F = 90^\circ - K.$$

Dans le cas de

$$\{210\}, \quad \text{tang } K = \frac{4}{3}, \quad K = 53^\circ 7', 8, \quad F = 36^\circ 52', 2;$$

$$\{310\}, \quad \text{tang } K = \frac{3}{4}, \quad K = 36^\circ 52', 2, \quad F = 53^\circ 7', 8;$$

$$\{320\}, \quad \text{tang } K = \frac{12}{5}, \quad K = 67^\circ 22', 8, \quad F = 22^\circ 37', 2;$$

$$\{430\}, \quad \text{tang } K = \frac{24}{7}, \quad K = 73^\circ 44', 4, \quad F = 16^\circ 15', 6;$$

$$(*) \text{ tang } \frac{1}{2}K = \frac{k}{h}, \quad \text{tang } K = \frac{2hk}{h^2 - k^2}.$$

$$\{510\}, \quad \text{tang } K = \frac{5}{12}, \quad K = 22^{\circ} 37', 2, \quad F = 67^{\circ} 22', 8;$$

$$\{530\}, \quad \text{tang } K = \frac{15}{8}, \quad K = 61^{\circ} 55', 7, \quad F = 28^{\circ} 4', 3;$$

$$\{710\}, \quad \text{tang } K = \frac{7}{24}, \quad K = 16^{\circ} 15', 6, \quad F = 73^{\circ} 44', 3.$$

La normale à une face quelconque de $\{hko\}$ fait, avec les normales à une face quelconque de $\{001\}$ et avec les faces les plus rapprochées de $\{100\}$, $\{110\}$, des angles respectivement égaux à 90° , $\frac{1}{2}C$, $\frac{1}{2}F$.

107. La forme hémédrique à faces parallèles $\pi \{hko\}$ est terminée par les faces alternatives de $\{hko\}$, dont les normales font entre elles des angles droits.

108. La forme $\{hol\}$ (*fig. 43*) a huit faces :

$$\text{tang } \frac{1}{2}L = \frac{la}{hc}, \quad \cos F = \sin^2 \frac{1}{2}L.$$

109. Dans la forme hémédrique à faces inclinées $\alpha' \{hol\}$ (*fig. 44*),

$$U = 180^{\circ} - L, \quad V = 180^{\circ} - F.$$

110. La forme $\{hhl\}$ (*fig. 45*) a huit faces :

$$\text{tang } \frac{1}{2}L = \frac{la}{hc} \cos 45^{\circ}, \quad \cos K = \sin^2 \frac{1}{2}L.$$

111. Dans le cas de la forme hémédrique à faces inclinées $\alpha \{hkl\}$ (*fig. 46*),

$$W = 180^{\circ} - L, \quad T = 180^{\circ} - K.$$

112. Soient P, Q deux pôles adjacents de l'une des deux

formes $\{hhl\}$, $\{por\}$, également distants de **Z**, pôle de $\{001\}$, et **S** un pôle de l'autre forme, situé sur le cercle de zone **PQ**; alors l'arc de cercle **SZ** partage par moitié l'angle droit **PZQ**, et l'angle **PSZ** est droit. Donc

$$\text{tang SZ} = \cos 45^\circ \text{ tang PZ}.$$

113. La forme $\{hkl\}$ (*fig. 47*) a seize faces :

$$\text{tang } \varphi = \frac{k}{h}, \quad \text{tang } \frac{1}{2} \text{L} = \frac{la}{hc} \cos \varphi,$$

$$\sin \frac{1}{2} \text{K} = \cos \frac{1}{2} \text{L} \sin \varphi; \quad \sin \frac{1}{2} \text{F} = \cos \frac{1}{2} \text{L} \cos (45^\circ + \varphi).$$

114. Dans la première forme hémédrique à faces inclinées $\kappa \{hkl\}$ (*fig. 48*),

$$\text{T} = 180^\circ - \text{H},$$

$$\sin \frac{1}{2} \text{G} = \cos \frac{1}{2} \text{L} \sin (45^\circ + \varphi); \quad \cos \frac{1}{2} \text{T} = \cos \frac{1}{2} \text{L} \cos \varphi.$$

115. Dans la seconde forme hémédrique à faces inclinées $\kappa' \{hkl\}$ (*fig. 49*),

$$\text{V} = 180^\circ - \text{G},$$

$$\sin \frac{1}{2} \text{H} = \cos \frac{1}{2} \text{L} \cos \varphi; \quad \cos \frac{1}{2} \text{V} = \cos \frac{1}{2} \text{L} \sin (45^\circ + \varphi).$$

116. Dans la forme hémédrique à faces parallèles $\pi \{hkl\}$ (*fig. 50*), la distance **M** est comprise entre les côtés égaux d'un angle de 90° , dont le sommet en est (001) ; donc

$$\cos \text{M} = \sin^2 \frac{1}{2} \text{L}.$$

117. Dans les cristaux qui appartiennent au système pyramidal, les clivages sont parallèles aux faces d'une ou de plusieurs des formes $\{001\}$, $\{100\}$, $\{110\}$, $\{hol\}$, $\{hhl\}$.

EXEMPLES :

118. Dans un cristal d'idocrase (*fig.* 51) les faces p , m , m' font des angles droits entre elles. d appartient à la zone mm' et fait des angles égaux avec m et m' ; donc, si m , (100); m' , (010); p , (001), d sera représenté par (110); de même d' sera (110). c appartient à la zone pd ; son symbole est donc de la forme (hhl). Soit ce symbole (111); c' sera (111); ν' est une face commune aux zones pm' , cm ; donc (n° 13) ν' a pour symbole (011), de même ν a pour symbole (101). La face s est commune aux zones dc' et mc , donc le symbole de s est (311). La face w est commune aux zones dv , mc ; donc w a pour symbole (211). La face b est commune aux zones wm' , pc ; son symbole est donc (221). La face e est commune aux zones mb , dc' ; son symbole est donc (421). La face r est commune aux zones em' , p, c ; son symbole est donc (441). La face n est commune aux zones em' , mc ; son symbole est donc (411). La face a est commune aux zones dv , cd' ; son symbole est donc (312). La face h est commune aux zones ps , mm' ; son symbole est donc (310). La face f est commune aux zones pv , mm' ; son symbole est donc (210). Le cristal est donc une combinaison des formes {001}, {100}, {111}, {110}, {210}, {310}, {211}, {311}, {411}, {221}, {441}, {321}; il est clivable parallèlement aux faces de {001}, {100}, {011}.

Soient m , p , c (*fig.* 52) les pôles des faces m , p , c , etc., $pc = 37^\circ 7'$; les symboles des pôles sont p (001), m (100), c (111), d (110), f (210), h (310), b (221), ν (441), w (211), s (311), n (411), a (312), e (421); donc (n° 85)

$$\text{tang } dm = 1, \quad \text{tang } fm = \frac{1}{2}, \quad \text{tang } hm = \frac{1}{3};$$

(71)

donc

$$dm = 45^\circ, \quad fm = 26^\circ 34', \quad hm = 18^\circ 26'.$$

De plus (n° 97)

$$\text{tang } cp = \frac{1}{2} \text{ tang } bp = \frac{1}{4} \text{ tang } rp;$$

donc

$$bp = 56^\circ 33', \quad rp = 71^\circ 43'.$$

Mais (n° 98)

$$\begin{aligned} \text{tang } cp &= \frac{2}{\sqrt{10}} \text{ tang } \omega p = \frac{1}{10} \text{ tang } ep = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ tang } \nu p, \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ tang } ap = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ tang } sp = \frac{2}{\sqrt{17}} \text{ tang } cp; \end{aligned}$$

donc

$$\nu p = 50^\circ 6', \quad ep = 67^\circ 19', \quad \nu p = 28^\circ 9', \quad ap = 40^\circ 14', \quad sp = 59^\circ 25'$$

Mais (n° 85)

$$\begin{aligned} \cos cm &= \sin cp \cos 45^\circ, \quad \cos bm = \sin bp \cos 45^\circ, \\ \cos rm &= \sin rp \cos 45^\circ; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} cm &= 65^\circ 45',5, \quad bm = 53^\circ 51', \quad rm = 47^\circ 49', \\ \text{tang } cm &= 2 \text{ tang } \omega m = 3 \text{ tang } sm = 4 \text{ tang } nm \quad (\text{n° 97}); \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \omega m &= 46^\circ 40', \quad sm = 35^\circ 14',5, \quad nm = 27^\circ 55', \\ \text{tang } bm &= 2 \text{ tang } em; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} em &= 34^\circ 23',5, \\ \text{tang } \omega m' &= 2 \text{ tang } bm'; \end{aligned}$$

(72)

donc

$$om' = 69^{\circ} 56',$$

$$\text{tang } rm' = \frac{1}{2} \text{tang } em' = \frac{1}{4} \text{tang } nm';$$

donc

$$em' = 65^{\circ} 37',5, \quad nm' = 77^{\circ} 14'.$$

a, s sont sur le cercle de zone hp ; $hm = 18^{\circ} 26'$; donc

$$\cos am = \sin ap \cos 18^{\circ} 26', \quad \cos am' = \sin ap \cos 71^{\circ} 34',$$

$$\cos sm' = \sin sp \cos 71^{\circ} 34';$$

donc

$$am = 52^{\circ} 13', \quad am' = 78^{\circ} 13', \quad sm = 74^{\circ} 12'.$$

La distance des pôles (001) et (111) est $37^{\circ} 7'$; donc (n° 100) si a, a, c désignent les paramètres du cristal et que a soit pris égal à l'unité,

$$a = 1, \quad c = 0,53511.$$

119. Dans un cristal d'anatase (*fig.* 53), la face c fait des angles égaux avec les quatre faces p, p', p'', p''' . Si parmi ces dernières on considère deux faces adjacentes quelconques, elles sont également inclinées l'une à l'autre.

On peut donc prendre pour c le symbole (001), pour p le symbole (111), pour p' ($\bar{1}11$); la face v fait partie de la zone cp , et s de la zone vp' . Soient c, p, p', v, s , les pôles des faces c, p, p', v, s ; les mesures donnent les angles

$$pc = 68^{\circ} 18', \quad vc = 19^{\circ} 45', \quad sc = 25^{\circ} 30'.$$

Soit (pqr) le symbole du pôle v , qui se retrouve sur le cercle de zone pc : on a (n° 97)

$$\frac{1}{r} \frac{\text{tang } pc}{\text{tang } vc} = \frac{1}{p} = \frac{1}{q};$$

donc

$$p = 1, q = 1, r = 7.$$

Le symbole de ν est donc (117).

Soit (pqr) le symbole de s ; on a (n° 98)

$$\frac{r^2 \operatorname{tang}^2 sc}{p^2 + q^2} = \frac{\operatorname{tang}^2 pc}{2};$$

donc

$$26r^2 = 361(p^2 + q^2).$$

Le pôle s est sur le cercle de zone $\nu p'$, dont le symbole est $(3\bar{4}\bar{1})$; donc (n° 21)

$$3p + 4q - r = 0;$$

donc, par la combinaison de ces deux équations,

$$p = 5, q = 1, r = 19;$$

donc le cristal est une combinaison des formes $\{001\}$, $\{111\}$, $\{117\}$, $\{5119\}$. Le cristal est clivable parallèlement aux faces de $\{111\}$, ses paramètres étant représentés par a, a, c , si $a = 1, c = 1,777$.

120. Dans un cristal de cuivre pyriteux (*fig.* 54), c, c', c'', c''' sont les faces d'une pyramide carrée. Soient leurs symboles c (111), c' ($\bar{1}$ 11), c'' ($\bar{1}\bar{1}$ 1), c''' ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$); p appartient à la zone cc''' , et fait des angles égaux avec c, c''' ; donc (n° 87) p appartient aussi à la zone $(001, 100)$; donc le symbole de p est (101); de même le symbole de p' est (011), b_i est une face commune aux zones $c''c''', pp'$; donc le symbole de b_i est ($\bar{1}$ 12). Il n'existe entre c, c' , dans la zone cc' , aucune face de la forme $\{101\}$; donc

p appartient à la forme hémédrique à faces inclinées $z' \{101\}$.

Le cristal est donc une combinaison des formes $\{111\}$, $\{112\}$, $z' \{101\}$. Il est clivable parallèlement aux faces des formes $\{111\}$, $\{001\}$.

Si l'on change d'axes cristallographiques, conformément à la règle établie (n° 101), les symboles des faces deviennent $c, (021)$; $b, (\bar{1}0\bar{1})$; $p, (111)$. A cause du changement d'axes, la forme hémédrique, dont p fait partie, devient $z \{111\}$.

121. Dans un cristal de schéelin calcaire (*fig.* 55), le symbole de p est $(\bar{1}11)$, de n (021) ; p, g, n, a appartiennent à une même zone. Soient p, g, n, a les pôles des faces p, g, n, a ; on trouve par des mesures d'angles

$$pg = 22^\circ 31', \quad pn = 39^\circ 40', \quad pa = 68^\circ 6'.$$

Soient X, Y, Z les pôles de $(100), (010), (001)$; soit m le point de rencontre des cercles de zones pn, XY ; le symbole de m est (n° 15) (110) , et $pm = 90^\circ$.

Si (uvw) représente le symbole d'un pôle S quelconque situé dans le cercle de zone pm , et si l'on remplace, dans les formules établies n° 27, les pôles P, Q, R et leurs caractéristiques par les pôles p, n, m et leurs caractéristiques, on a la formule

$$\frac{\text{tang } pS}{\text{tang } pn} = \frac{v - w}{w}.$$

D'après cela, si (uvw) est le symbole de g , $\frac{v}{w} = \frac{3}{2}$; le symbole du cercle de zone pm est $(1\bar{1}2)$; donc (n° 21)

$$u - v + 2w = 0,$$

(75)

d'où

$$u = -1, \quad v = 3, \quad w = 2;$$

donc le symbole de g est $(\bar{1}32)$: de même le symbole de a est (241) . Du système de faces g et a , on n'observe que celles qui ont leurs pôles dans des fuseaux alternatifs de la sphère de projection; donc g, a appartiennent aux formes hémiedriques à faces parallèles $\pi \{312\}$, $\pi \{241\}$.

CHAPITRE IV.

SYSTÈME RHOMBOÉDRIQUE.

122. Dans le système rhomboédrique, les trois axes cristallographiques ont des inclinaisons réciproques égales, et les paramètres sont égaux.

123. La forme holoédrique $\{hkl\}$ est terminée par l'ensemble de toutes les faces qui ont pour symboles les arrangements différents de $+h, +k, +l$, et ceux de $-h, -k, -l$ (*).

Lorsque les caractéristiques h, k, l sont toutes différentes, le nombre total d'arrangements est de douze, comme le montre le tableau ci-après. Il faut excepter le cas où ces indices sont 0, — 1, 1; alors le nombre total d'arrangements se réduit à six, comme lorsque deux caractéristiques deviennent égales. Lorsqu'enfin les trois caracté-

(*) De sorte qu'à un système particulier de valeurs numériques de h, k, l se trouvent, suivant le signe de chacune d'elles, correspondre autant de formes holoédriques différentes, savoir : $\{hkl\}$, $\{\bar{h}kl\}$, $\{h\bar{k}l\}$, $\{hk\bar{l}\}$.

Quand on raisonne en général sur la forme $\{hkl\}$, il est donc sous-entendu que chaque caractéristique h, k, l peut être ou positive ou négative.

ristiques sont égales, le nombre total d'arrangements se réduit à deux (*),

$$\begin{array}{cccc} hkl & lkh & \bar{h}\bar{k}\bar{l} & \bar{l}\bar{k}\bar{h}, \\ klh & khk & \bar{k}\bar{l}\bar{h} & \bar{k}\bar{h}\bar{l}, \\ lhk & hlk & \bar{l}\bar{h}\bar{k} & \bar{h}\bar{l}\bar{k}. \end{array}$$

Si h est algébriquement la plus grande et l la plus petite des trois caractéristiques inégales, la *fig. 56* représente

(*) Supposer deux caractéristiques égales, c'est identifier les symboles qui ne différaient que par la position réciproque de ces deux caractéristiques, c'est réduire à moitié le nombre d'arrangements de $+h, +k, +l$ et celui de $-h, -k, -l$.

Supposer trois caractéristiques égales, c'est identifier les symboles qui ne différaient que par l'arrangement de ces trois caractéristiques, c'est réduire à l'unité le nombre d'arrangements de $+h, +k, +l; -h, -k, -l$.

Supposer une caractéristique nulle, les deux autres égales et de signes contraires, c'est identifier deux à deux les symboles qui résultaient des arrangements de $+h, +k, +l$ et des arrangements de $-h, -k, -l$, quand les premiers ne différaient des seconds que par le signe de la caractéristique devenue nulle, et par la position réciproque des caractéristiques devenues égales et de signes contraires; c'est réduire le nombre total des arrangements à moitié.

On aura les nombres suivants d'arrangements différents

Dans le cas où les caractéristiques sont :

pour	Dans le cas où les caractéristiques sont :			
	toutes inégales	2 égales	1 nulle, 2 égales et de signe contraire	3 égales.
$+h, +k, +l$	6	3	6 } ou { 6	1
$-h, -k, -l$	6	3		1
	<u>12</u>	<u>6</u>	<u>6</u>	<u>2</u>

l'arrangement des pôles de la forme $\{hkl\}$ sur la surface de la sphère de projection.

124. La forme terminée par toutes les faces dont les symboles résultent des différents arrangements de $+h, +k, +l$, ou par toutes les faces dont les symboles résultent des différents arrangements de $-h, -k, -l$, est dite hémédrique à faces inclinées symétriques ; sa notation symbolique est $\alpha \{hkl\}$; (hkl) est le symbole d'une quelconque de ses faces.

On appelle cette forme directe ou inverse, selon que la somme algébrique de ses caractéristiques est positive ou négative ; ou, quand cette somme est zéro, selon que la caractéristique numériquement la plus grande est positive ou négative.

Les symboles des faces de la forme directe sont contenus dans la première et dans la seconde colonne du tableau donné ci-dessus (n° 123) ; ceux de la forme inverse, dans la troisième et dans la quatrième.

Si la surface de la sphère de projection se trouve partagée en deux hémisphères par le cercle de zone qui passe par les pôles de $(01\bar{1})$, les pôles de la forme directe correspondante à une somme algébrique des caractéristiques différente de zéro se trouveront, dans l'hémisphère qui renferme le pôle de (111) ; les pôles de la forme inverse dans l'autre hémisphère. Quand la somme des caractéristiques est zéro, si l'on conçoit la surface de la sphère partagée en six fuseaux par les grands cercles qui passent par les pôles de $\{111\}$ et par ceux de $\{01\bar{1}\}$, les pôles de la forme directe se trouvent dans quatre fuseaux alternatifs, dont l'un renferme le pôle de (100) , les pôles de la forme inverse dans les quatre autres.

125. La forme terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$ dans les symboles desquelles les caractéristiques sont ran-

gées, soit dans l'ordre $hklhk$, soit dans l'ordre $lklhk$, est dite hémiedrique à faces parallèles. Sa notation symbolique est $\pi \{hkl\}$; (hkl) est le symbole d'une quelconque de ses faces. Les symboles des faces de cette forme se trouvent soit dans la première et dans la troisième, soit dans la deuxième et dans la quatrième colonne du tableau donné plus haut.

Si la surface de la sphère de projection est partagée en douze fuseaux par les cercles de zones passant par les pôles de $\{111\}$ et par ceux de chaque forme $\{2\bar{1}1\}$, $\{1\bar{1}0\}$; les pôles de $\pi \{hkl\}$ se trouvent dans six fuseaux alternatifs, excepté dans le cas où la somme algébrique de deux caractéristiques est égale au double de la troisième; et, si la sphère de projection est partagée en douze triangles par les cercles de zones qui passent par deux pôles quelconques des formes $\{111\}$, $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, les pôles de $\pi \{hkl\}$ se trouvent dans six triangles alternatifs, excepté quand la somme des trois caractéristiques est zéro.

126. La forme terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$ qui ont pour symboles les arrangements de $+h, +k, +l$, dans lesquels les caractéristiques se trouvent dans l'ordre $hklhk$, et les arrangements de $-h, -k, -l$, dans lesquels ces caractéristiques se trouvent dans l'ordre $lklhk$, ou réciproquement par toutes les faces qui ont pour symboles les arrangements de $+h, +k, +l$ dans lesquels ces caractéristiques se trouvent dans l'ordre $lklhl$, et les arrangements de $-h, -k, -l$ dans lesquels ces caractéristiques se trouvent dans l'ordre $hklhk$, est dite hémiedrique à faces inclinées dissimétriques: sa notation symbolique est $\alpha \{hkl\}$; (hkl) est la notation symbolique d'une quelconque de ses faces. Les symboles des faces de cette forme se trouvent soit dans la première et dans la quatrième, soit dans la seconde et dans la troisième colonne du tableau donné précédemment (n° 123).

Si l'on conçoit la surface de la sphère de projection partagée en six fuseaux par les cercles de zones qui passent par les pôles de $\{111\}$ et par ceux de $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, les pôles de $\alpha\{hkl\}$ se trouvent dans trois fuseaux alternatifs.

127. Déterminer la position d'un pôle quelconque.

Soient (*fig. 57*) X, Y, Z les points où les axes cristallographiques percent la surface de la sphère de projection. Soient O le pôle de (111) , P celui de (hkl) ; puisque O est le pôle de (111) et que $a = b = c$,

$$\cos OX = \cos OY = \cos OZ;$$

par conséquent,

$$OX = OY = OZ.$$

D'ailleurs les inclinaisons réciproques des axes sont égales; donc

$$YZ = ZX = XY;$$

donc les angles

$$YOZ, ZOY, XOY$$

sont égaux chacun à 120° .

D'après cela,

$$\cos POY - \cos POZ = \sqrt{3} \sin POX,$$

$$\cos POY + \cos POZ = -\cos POX,$$

$$\cos PX = \cos PO \cos XO + \sin PO \sin XO \cos POX,$$

$$\cos PY = \cos PO \cos YO + \sin PO \sin YO \cos POY,$$

$$\cos PZ = \cos PO \cos ZO + \sin PO \sin ZO \cos POZ;$$

d'après cela,

$$\cos PY - \cos PZ = \sqrt{3} \sin PO \sin XO \sin POX,$$

$$\cos PY + \cos PZ = 2 \cos PO \cos XO - \sin PO \sin XO \cos POX,$$

$$\cos PX + \cos PY + \cos PZ = 3 \cos PO \cos XO,$$

$$3 \sin PO \sin XO \cos POX = 2 \cos PX - \cos PY - \cos PZ.$$

(81)

Mais P est le pôle de (hkl) ; donc

$$\frac{1}{h} \cos PX = \frac{1}{k} \cos PY = \frac{1}{l} \cos PZ;$$

donc enfin

$$\text{tang POX} = \sqrt{3} \frac{k - l}{2h - k - l},$$

$$\text{tang PO tang XO cos POX} = \frac{2h - k - l}{h + k + l}.$$

On aura de même

$$\text{tang POY} = \sqrt{3} \frac{l - h}{2k - h - l},$$

$$\text{tang AO tang YO cos POY} = \frac{2k - l - h}{h + k + l},$$

$$\text{tang POZ} = \sqrt{3} \frac{h - k}{2l - h - k},$$

$$\text{tang PO tang ZO cos POZ} = \frac{2l - h - k}{h + k + l},$$

et enfin

$$\text{tang}^2 \text{PO tang}^2 \text{XO} = 4 \frac{h^2 + k^2 + l^2 - kl - lh - hk}{(h + k + l)^2}.$$

128. Soient A, B, C les pôles de (100) , (010) , (001) ; alors (n° 127)

$$\text{tang AOX} = 0, \quad \text{tang BOY} = 0, \quad \text{tang COZ} = 0,$$

$$\text{tang AO tang XO} = 2, \quad \text{tang BO tang YO} = 2,$$

$$\text{tang CO tang ZO} = 2;$$

donc A, B, C sont dans les grands cercles OX, OY, OZ,

$$OA = OB = OC,$$

et les expressions de l'article précédent deviennent

$$\begin{aligned} \text{tang POA} &= \sqrt{3} \frac{k-l}{2h-k-l}, \\ 2 \text{ tang PO cotang AO cos POA} &= \frac{2h-k-l}{h+k+l}, \\ \text{tang POB} &= \sqrt{3} \frac{l-h}{2k-h-l}, \\ 2 \text{ tang PO cotang BO cos POB} &= \frac{2k-h-l}{h+k+l}, \\ \text{tang POC} &= \sqrt{3} \frac{h-k}{2l-h-k}, \\ 2 \text{ tang PO cotang CO cos POC} &= \frac{2l-h-k}{h+k+l}, \\ \frac{\text{tang}^2 \text{PO}}{\text{tang}^2 \text{AO}} &= \frac{h^2+k^2+l^2-kl-lh-hk}{(h+k+l)}. \end{aligned}$$

129. Si M, N sont deux pôles quelconques des formes $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, $\{0\bar{1}\bar{1}\}$, A un pôle quelconque de $\{100\}$, O un pôle de $\{111\}$; des expressions précédentes il résulte que MO, NO sont des arcs égaux à 90° , que MOA est un multiple de 60° , et NOA un multiple de 30° .

D'après cela, les six pôles de $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ sont autant de points équidistants situés à l'intersection du cercle de zone dont le point (111) serait le pôle et des cercles de zones qui passent par les pôles de $\{111\}$ et par ceux de $\{100\}$. Les pôles de $\{0\bar{1}\bar{1}\}$ partagent par moitié les arcs de grands cercles qui réunissent deux pôles adjacents de $\{2\bar{1}\bar{1}\}$.

130. La forme de l'expression de tang PO montre que les distances du pôle (111) aux pôles de $\{hkl\}$ dont les caractéristiques sont $+h, +k, +l$, sont toutes égales aux distances de $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ aux pôles de $\{hkl\}$ qui ont pour caractéristiques $-h, -k, -l$. Si l'on permute les caractéris-

tiques h, k, l en même temps qu'on change leurs signes dans les expressions de

$$\text{tang POA, tang POB, tang POC,}$$

on voit que les angles qui ont leur sommet en (111) et comprennent entre leurs côtés les arcs qui joignent un pôle quelconque de $\{hkl\}$ au pôle le plus rapproché de $\{100\}$ sont tous égaux. D'après cela, les pôles de la forme $\{hkl\}$ sont distribués sur la surface de la sphère de projection symétriquement aux trois cercles de zones qui passent par les pôles de la forme $\{111\}$ et par ceux de la forme $\{2\bar{1}\bar{1}\}$.

131. Si l'on conçoit la surface de la sphère de projection partagée en douze triangles par les cercles de zones qui passent par deux pôles quelconques des formes $\{111\}$, $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, l'arrangement des pôles de $\{hkl\}$ est symétrique dans deux triangles adjacents situés d'un même côté du cercle de zone $(2\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}2)$, ou dans deux triangles alternatifs situés de part et d'autre du même cercle ; il est semblable dans deux triangles adjacents situés de deux côtés opposés de ce cercle de zone, ou dans deux triangles alternatifs situés du même côté.

132. L'arrangement des pôles de $\alpha \{hkl\}$ est symétrique dans deux fuseaux adjacents, composés eux-mêmes de deux triangles adjacents situés de part et d'autre du cercle $(2\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}2)$, et semblable dans deux fuseaux symétriques. L'arrangement des pôles de $\pi \{hkl\}$ dans deux triangles quelconques est ou semblable ou symétrique, selon que ces triangles sont d'un même côté ou de côtés opposés du cercle de zone $(2\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}2)$. L'arrangement des pôles de $\alpha \{hkl\}$ est semblable dans tous les triangles où ces pôles se rencontrent.

133. Si P est le pôle d'une face quelconque, et que sur le prolongement de l'arc PO on prenne de l'autre côté de O l'arc OQ égal à l'arc OP, il peut toujours exister une face dont Q est le pôle.

On a (n° 127)

$$\begin{aligned} 2 \cos QX - \cos QY - \cos QZ &= 3 \sin QO \sin OX \cos QOX, \\ \cos QX + \cos QY + \cos QZ &= 3 \cos QO \cos OX, \\ \cos QZ - \cos QY &= \sqrt{3} \sin QO \sin OX \sin QOX, \\ \sin QO &= \sin PO \cos QOX = -\cos POX \sin QOX = -\sin QOX. \end{aligned}$$

D'après cela, si h, k, l sont les caractéristiques du pôle P,

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos QX - \cos QY - \cos QZ}{\cos QX + \cos QY + \cos QZ} &= -\frac{2h - k - l}{h + k + l}, \\ \frac{\cos QZ - \cos QY}{\cos QX + \cos QY + \cos QZ} &= -\frac{l - k}{h + k + l}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{3 \cos QX}{\cos QX + \cos QY + \cos QZ} &= \frac{-h + 2k + 2l}{h + k + l}, \\ \frac{3 \cos QY}{\cos QX + \cos QY + \cos QZ} &= \frac{2h - k + 2l}{h + k + l}, \\ \frac{3 \cos QZ}{\cos QX + \cos QY + \cos QZ} &= \frac{2h + 2k - l}{h + k + l}; \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{p} \cos QX = \frac{1}{q} \cos QY = \frac{1}{r} \cos QZ,$$

en posant

$$p = -h + 2k + 2l; \quad q = 2h - k + 2l; \quad r = 2h + 2k - l.$$

p, q, r sont des nombres entiers; Q est donc le pôle d'une face possible.

134. Quand les caractéristiques h, k, l, p, q, r sont liées entre elles par les équations ci-dessus

$$p = -h + 2k + 2l; \quad q = 2h - k + 2l; \quad r = 2h + 2k - l,$$

et que par conséquent l'arc qui joint les pôles $(hkl), (pqr)$ est partagé par moitié par le pôle (111) , les formes $\{hkl\}, \{pqr\}$ sont dites transverses l'une à l'autre. Dans certains cristaux qui appartiennent au système rhomboédrique, une couple de formes transverses se présentent fréquemment combinées; ce genre de combinaison porte le nom de dirhomboédrique. La *fig.* 58 montre l'arrangement des pôles.

135. Si l'on conçoit la surface de la sphère de projection partagée en vingt-quatre triangles par les cercles de zones qui réunissent deux à deux les pôles des formes $\{111\}, \{01\bar{1}\}, \{2\bar{1}\bar{1}\}$; l'arrangement des pôles de la combinaison dirhomboédrique $\{hkl\}, \{pqr\}$, ou de la combinaison dirhomboédrique $\alpha\{hkl\}, \alpha\{pqr\}$ sera, dans deux triangles quelconques, symétrique s'ils sont adjacents, semblable s'ils sont alternatifs.

L'arrangement des pôles de la combinaison dirhomboédrique $\pi\{hkl\}, \pi\{pqr\}$ sera, dans deux triangles quelconques, semblable ou symétrique, selon que ces triangles seront d'un même côté du cercle de zone $(2\bar{1}\bar{1}, \bar{1}12)$ ou de côtés opposés. Les pôles de la combinaison dirhomboédrique $\alpha\{hkl\}, \alpha\{pqr\}$ sont semblablement distribués sur la surface de tous les triangles dans lesquels ces pôles se rencontrent.

136. Dans le cas des formes hémiedriques à faces parallèles ou à faces inclinées non symétriques, il peut arriver que des faces appartenant à des formes différentes de même espèce se trouvent sur une même zone. Si MQM' (*fig.* 59)

est le cercle de zone d'une zone de ce genre, MLM' le cercle de zone qui renferme les pôles de $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, QML un angle aigu, on appelle la zone directe ou inverse selon que les pôles des faces qui la composent sont plus rapprochés de M ou de M' . Les zones qui peuvent résulter d'une combinaison de formes hémédriques à faces parallèles sont directes d'un côté du cercle de zone qui passe par les pôles de $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, inverses de l'autre côté. Les zones qui peuvent résulter d'une combinaison de formes hémédriques à faces inclinées non symétriques sont toutes ou directes ou inverses; la combinaison est dite elle-même ou directe ou inverse, suivant cette circonstance.

137. Deux formes hémédriques directes et inverses à faces inclinées symétriques, et deux formes hémédriques à faces parallèles n'ont entre elles qu'une différence de position. Si, en effet, la sphère de projection tournait de deux angles droits autour d'une droite menée par deux pôles opposés quelconques de $\{0\bar{1}\bar{1}\}$, les pôles d'une des formes viendraient prendre la place des pôles de l'autre. Deux formes hémédriques directe et inverse, à faces inclinées non symétriques, sont essentiellement différentes.

138. Soient respectivement P, A deux pôles adjacents de $\{hkl\}$, (100) ; O le pôle le plus rapproché de $\{1\bar{1}\bar{1}\}$: alors (n° 128)

$$\text{tang POA} = 0;$$

P, A, O sont donc sur le même cercle de zone. Soient les distances angulaires $PO = T$, $AO = D$: si l'on fait $l = k$, on a (n° 128)

$$\text{tang T} = \frac{h - k}{h + 2k} \text{ tang D}.$$

Les signes de tang T et de tang D sont les mêmes ou sont

différents, selon que les distances AO, PO sont mesurées du même côté ou de côtés opposés du pôle O .

Si V représente la distance angulaire de deux quelconques des trois pôles de la forme de $\{hkk\}$, où deux caractéristiques sont égales, cette distance est opposée à un angle de 120° , dont le sommet est en (111) . Les deux côtés adjacents à cet angle de 120° sont l'un et l'autre égaux à T ; donc

$$\sin \frac{1}{2} V = \sin 60^\circ \sin T.$$

La distance angulaire de deux pôles adjacents, dont l'un a pour caractéristiques $+h, +k, +l$, et l'autre $-h, -k, -l$, est égale à $180^\circ - V$.

139. Soit P un pôle de la forme $\{hkl\}$ telle que la somme algébrique des trois caractéristiques est nulle, $+h + k + l = 0$, A le pôle le plus rapproché de $\{100\}$ $PO = 90^\circ$ (n° 128); donc si H représente la distance angulaire de deux pôles adjacents de $\{hkl\}$

$$\frac{1}{2} H = POA;$$

donc

$$\text{tang } \frac{1}{2} H = \sqrt{3} \frac{h - l}{2h - k - l}.$$

140. Soit la distance angulaire de deux pôles quelconques de $\{hkl\}$, représentée par H , par K ou par L , selon que la caractéristique h , ou k , ou l est à la même place dans le symbole de chaque pôle; soit enfin cette distance angulaire représentée par V , quand aucune des trois caractéristiques n'occupe la même position dans les deux symboles; soit T la distance de (111) à chacun de ces pôles, D la distance d'un pôle quelconque de $\{100\}$ au pôle le plus rapproché de $\{111\}$; $2\theta, 2\varphi, 2\psi$ les angles dont le sommet est en (111) , et qui comprennent entre leurs côtés les distances angulaires H, K, L , l'angle analogue qui

comprend l'arc opposé V entre ses côtés est de 120° , et l'on aura (n° 128)

$$\operatorname{tang}^2 T = \frac{h^2 + k^2 + l^2 - hk - kl - lh}{(h + k + l)^2} \operatorname{tang}^2 D,$$

$$\operatorname{tang} \theta = \sqrt{3} \frac{k - l}{2h - k - l},$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{3} \frac{l - h}{2k - l - h},$$

$$\operatorname{tang} \psi = \sqrt{3} \frac{h - k}{2l - h - k}.$$

Les triangles dont le sommet est en (III), et dont la base est H, K, L, V , sont isocèles; donc

$$\sin \frac{1}{2} H = \sin \theta \sin T, \quad \sin \frac{1}{2} K = \sin \varphi \sin T,$$

$$\sin \frac{1}{2} L = \sin \psi \sin T, \quad \sin \frac{1}{2} V = \sin 60^\circ \sin T.$$

141. Si V représente la distance de deux des trois pôles équidistants de $\{hkk\}$, on a (n° 128)

$$\sin \frac{1}{2} V = \sin 60^\circ \sin T, \quad \operatorname{tang} T = m \operatorname{tang} D,$$

$$h - k = \pm m (h + 2k).$$

Le signe supérieur ou inférieur convient au cas où T et D se mesurent du même côté de (III), ou de côtés opposés. En vertu de l'équation précédente, quand on connaîtra m , on pourra calculer le rapport de h à k .

142. Dans le cas de la forme $\{hkl\}$, où $(+h+k+l) = 0$, si l'on connaît la distance angulaire de deux pôles qui ne

sont pas séparés par un arc multiple de 60° , on peut trouver la distance de l'un d'eux au pôle le plus rapproché de $\{2\bar{1}\bar{1}\}$; si l'on appelle cette distance θ , on déterminera le rapport des trois caractéristiques h, k, l au moyen des équations

$$\overline{\text{tang } \theta} = \sqrt{3} \frac{k-l}{2h-k-l}, \quad h+k+l=0.$$

143. Si l'on se donne les distances d'un pôle quelconque de la forme $\{hkl\}$ à deux autres pôles de la même forme, avec la condition que les trois pôles ne soient pas situés sur le même cercle de zone, les distances angulaires données ou leurs suppléments seront deux des arcs H, K, L, V . L'élimination de T entre les équations données ci-dessus (n° 140) pour déterminer H, K, L, V , conduit, en observant que $\varphi - \theta = 60^\circ$, $\psi + \theta = 60^\circ$, aux expressions

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\text{tang } \theta}}{\overline{\text{tang } 60^\circ}} &= \frac{\overline{\text{tang } \frac{1}{4}(K-L)}}{\overline{\text{tang } \frac{1}{4}(K+L)}}, & \frac{\overline{\sin \theta}}{\overline{\sin 60^\circ}} &= \frac{\overline{\sin \frac{1}{2}H}}{\overline{\sin \frac{1}{2}V}}, \\ \frac{\overline{\text{tang } \varphi}}{\overline{\text{tang } 60^\circ}} &= \frac{\overline{\text{tang } \frac{1}{4}(L+H)}}{\overline{\text{tang } \frac{1}{4}(L-H)}}, & \frac{\overline{\sin \varphi}}{\overline{\sin 60^\circ}} &= \frac{\overline{\sin \frac{1}{2}K}}{\overline{\sin \frac{1}{2}V}}, \\ \frac{\overline{\text{tang } \psi}}{\overline{\text{tang } 60^\circ}} &= \frac{\overline{\text{tang } \frac{1}{4}(K-H)}}{\overline{\text{tang } \frac{1}{4}(K+H)}}, & \frac{\overline{\sin \psi}}{\overline{\sin 60^\circ}} &= \frac{\overline{\sin \frac{1}{2}L}}{\overline{\sin \frac{1}{2}V}}. \end{aligned}$$

Connaissant deux des quatre distances H, K, L, V , on peut calculer T et l'un des angles θ, φ, ψ , et le rapport des caractéristiques se déduit des équations

$$\begin{aligned} \overline{\text{tang } \theta} &= \frac{k-l}{2h-k-l} \sqrt{3}; & 2 \overline{\text{tang } T \cos \theta} &= \frac{2h-k-l}{h+k+l} \overline{\text{tang } D}, \\ \overline{\text{tang } \varphi} &= \frac{l-h}{2k-l-h} \sqrt{3}; & 2 \overline{\text{tang } T \cos \varphi} &= \frac{2k-l-h}{h+k+l} \overline{\text{tang } D}, \\ \overline{\text{tang } \psi} &= \frac{h-k}{2l-h-k} \sqrt{3}; & 2 \overline{\text{tang } T \cos \psi} &= \frac{2l-h-k}{h+k+l} \overline{\text{tang } D}. \end{aligned}$$

144. Trouver la distance angulaire de deux pôles quelconques.

Soient P, Q (*fig. 60*) les pôles (hkl), (pqr); O, A les pôles de $\{111\}$, $\{100\}$; soit M le point d'intersection du cercle de zone PQ et du cercle de zone $\{01\bar{1}, \bar{1}01\}$: on pourra calculer en fonction de h, k, l, p, q, r le symbole du point M et les tangentes des angles MOA, POA, QOA, POM, QOM, et l'on peut déterminer PO en fonction de AO, h, k, l . L'arc MO est égal à 90° ; donc

$$\begin{aligned} \cos PM &= \cos POM \sin PO, \\ \frac{\text{tang } QM}{\text{tang } PM} &= \frac{\text{tang } QOM}{\text{tang } POM}. \end{aligned}$$

L'arc PQ, somme ou différence des arcs PM, QM, est donc connu.

145. Étant donnée la distance de deux pôles non situés tous deux dans le cercle de zone $\{01\bar{1}, \bar{1}01\}$, déterminer la distance D d'un pôle quelconque de $\{100\}$ au pôle le plus rapproché de $\{111\}$.

Soient P, Q (*fig. 60*) les pôles donnés; (hkl), (pqr) leurs symboles: alors, en reprenant la construction employée dans l'article précédent (n° 144), soient tang POM et tang QOM exprimées en fonction de h, k, l, p, q, r ,

$$\frac{\text{tang } QM}{\text{tang } PM} = \frac{\text{tang } QOM}{\text{tang } POM},$$

d'où

$$\frac{\sin (QM + PM)}{\sin (QM - PM)} = \frac{\text{tang } QOM + \text{tang } POM}{\text{tang } QOM - \text{tang } POM}.$$

L'un des deux arcs QM—PM ou QM+PM est la distance donnée PQ; donc PM et QM sont déterminés. Ensuite

$$\cos PM = \cos POM \sin PO.$$

PO une fois calculé, on tire D de l'équation

$$\operatorname{tang}^2 \text{PO} = \frac{h^2 + k^2 + l^2 - hk - kl - lh}{(h + k + l)^2} \operatorname{tang}^2 \text{D}.$$

146. Déterminer la position d'un pôle quelconque quand on se donne ses distances à deux des trois pôles équidistants d'une forme quelconque.

Soient P (*fig. 61*) le pôle donné; A, B, C trois pôles équidistants d'une forme quelconque connue; O le pôle de (111); soient M, E les points où le cercle AB rencontre respectivement les cercles de zones $(\text{O}1\bar{1}, \bar{1}\text{O}1)$ et CO, et soit N l'intersection des cercles MP, CO: le point E partage l'arc AB par moitié, et les arcs ME, MN sont à angle droit sur EO :

$$\begin{aligned} \sin \text{AE} &= \sin 60^\circ \sin \text{AO}, & \operatorname{tang} \text{EO} &= \cos 60^\circ \operatorname{tang} \text{AO}, \\ \cos \text{PA} &= \cos \text{AE} \cos \text{PE} + \sin \text{AE} \sin \text{PE} \cos \text{PEA}, \\ \cos \text{PB} &= \cos \text{BE} \cos \text{PE} + \sin \text{BE} \sin \text{PE} \cos \text{PEB}. \end{aligned}$$

Si l'on exprime

$$\cos \text{PA} - \cos \text{PB}, \quad \cos \text{PA} + \cos \text{PB}$$

par des produits de lignes trigonométriques, en observant de plus que

$$\text{BE} = \text{AE}; \quad -\cos \text{PEB} = \cos \text{PEA} = \sin \text{PEN},$$

et que d'ailleurs

$$\sin \text{PN} = \sin \text{PE} \sin \text{PEN},$$

on arrive aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \sin \text{AE} \sin \text{PN} &= \sin \frac{1}{2}(\text{PB} + \text{PA}) \sin \frac{1}{2}(\text{PB} - \text{PA}), \\ \cos \text{AE} \cos \text{PE} &= \cos \frac{1}{2}(\text{PB} + \text{PA}) \cos \frac{1}{2}(\text{PB} - \text{PA}). \end{aligned}$$

Ayant ainsi déterminé PE et PN, NE et par suite NO peuvent se calculer :

$$\cos PO = \cos PN \cos NO, \quad \cotang PON = \sin NO \cotang PN.$$

147. Déterminer les caractéristiques d'une face quelconque quand on prend pour axes cristallographiques les axes des zones qui contiennent les faces (hkk) , (klk) , (kkh) .

Les caractéristiques des trois zones réduites à leur plus simple expression sont

$$h + k, -k, -k; \quad -k, h + k, -k; \quad -k, -k, h + k;$$

donc (n° 28)

$$\begin{aligned} e &= h + k, & f &= -k, & g &= -k, \\ h &= -k, & k &= h + k, & l &= -k, \\ p &= -k, & q &= -k, & r &= h + k; \end{aligned}$$

donc si u, v, w représentent les caractéristiques d'une face rapportée aux axes primitifs, u', v', w' , les caractéristiques de la même face rapportée aux nouveaux axes,

$$\begin{aligned} u' &= (h + k) u - kv - kw, \\ v' &= -ku + (h + k) v - kw, \\ w' &= -ku - kv + (h + k) w. \end{aligned}$$

148. Déterminer la figure et les angles de la forme $\{hkl\}$ quand on particularise les valeurs des caractéristiques h, k, l .

Les angles compris entre les normales à deux faces qui appartiennent à une même forme peuvent se calculer par les formules établies dans les n°s 138, 139, 140; on les désigne par la lettre placée sur les arêtes des figures. La *fig.* 56 montre l'arrangement des pôles sur la sphère de projection quand les trois caractéristiques sont inégales. Les pôles de $\{hkk\}$ se trouvent dans les cercles de zones

qui passent par les pôles de $\{111\}$; et de $\{2\bar{1}\bar{1}\}$. Le nombre des faces a été déjà déterminé (n° 123).

149. La forme $\{111\}$ a deux faces parallèles; la normale à ces faces est également inclinée sur les trois axes.

150. Les formes hémicédriques $\alpha\{111\}$, $\alpha\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ se réduisent respectivement à la face unique (111) , $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$.

151. La forme $\{hkk\}$ a six faces : on l'appelle rhomboèdre. Les trois pôles qui ont pour caractéristiques $+h, +k, +k$, sont équidistants et diamétralement opposés à ceux dont les caractéristiques sont $-h, -k, -k$. D'après cela, un rhomboèdre est limité par trois couples de faces parallèles, également inclinées l'une à l'autre.

Soient T la distance d'un pôle quelconque de $\{hkk\}$ au pôle le plus rapproché de $\{111\}$; V la distance de deux pôles adjacents équidistants de (111) ; W la distance de deux pôles adjacents non équidistants de (111) ; D la distance d'un pôle de $\{100\}$ du pôle le plus rapproché de $\{111\}$: on a (n° 138)

$$\text{tang T} = \frac{h - k}{h + 2k} \text{tang D},$$

$$\sin \frac{1}{2} V = \sin 60^\circ \sin T, \quad W = 180^\circ - V.$$

La position du rhomboèdre est dite parallèle ou transverse, suivant que tang T, tang D sont de même signe; ou, en d'autres termes, suivant que T et D doivent se porter, à partir du pôle (111) , dans la même direction ou dans des directions opposées. Si l'on prend la fig. 62 pour représenter $\{100\}$, alors $\{011\}$, qui est dans une position transverse, ressemblera à la fig. 63.

Dans la forme $\{011\}$,

$$\text{tang T} = -\frac{1}{2} \text{tang D}.$$

Les pôles de $\{011\}$ partagent par moitié les arcs de grands cercles qui réunissent deux pôles adjacents de $\{100\}$.

Dans la forme $\{211\}$, qui est dans une position parallèle,

$$\text{tang T} = \frac{1}{4} \text{ tang D.}$$

Les pôles de $\{211\}$ partagent par moitié les arcs qui réunissent deux pôles adjacents de $\{011\}$.

Dans la forme $\{311\}$, qui est dans une position parallèle,

$$\text{tang T} = \frac{2}{3} \text{ tang D.}$$

Dans la forme $\{\bar{1}22\}$, qui est dans une position transverse,

$$\text{tang T} = - \text{ tang D.}$$

Si l'on fait abstraction de la position; la forme $\{\bar{1}22\}$ est donc la même que la forme $\{100\}$.

Dans la forme $\{111\}$ *fig.* 64, qui est dans une position transverse,

$$\text{tang T} = - 2 \text{ tang D.}$$

Les pôles de $\{100\}$ partagent par moitié les arcs qui réunissent deux pôles adjacents de $\{\bar{1}11\}$.

Dans la forme $\{3\bar{1}\bar{1}\}$, qui est dans une position parallèle,

$$\text{tang T} = 4 \text{ tang D.}$$

Les pôles de $\{\bar{1}11\}$ partagent par moitié les arcs qui réunissent deux pôles adjacents de $\{3\bar{1}\bar{1}\}$.

152. Une des formes hémédriques à faces inclinées symétriques se compose de trois faces, dont les caractéristiques sont $+h, +k, +l$, et qui sont inclinées l'une à l'autre; l'autre forme, de trois faces dont les caractéristiques sont $-h, -k, -l$.

153. Soient P, Q, R les trois pôles d'un rhomboèdre, situés à des distances égales du pôle $\{111\}$; si le cercle

(95)

de zone qui passe par P, Q passe aussi par le pôle S d'un autre rhomboèdre; S fait partie du cercle de zone RO, qui partage en deux parties égales l'angle POQ, ainsi que l'arc PQ.

$$POQ = 120^\circ;$$

donc

$$POS = 60^\circ, \quad PSO = 90^\circ;$$

donc

$$\text{tang PO} = 2 \text{tang SO} (*).$$

154. La forme $\{211\}$ a six faces; leurs pôles (n° 129) sont tous équidistants, et situés sur un grand cercle per-

(*) Abstraction faite des signes; $\text{tang PO} = 2 \text{tang SO}$; mais, comme les arcs PO, SO se comptent en sens contraire à partir du point O, si l'on a égard aux signes

$$\text{tang PO} = - 2 \text{tang SO};$$

Si $\{hkk\}$ est le symbole du rhomboèdre dont P, Q, R sont les pôles, et si $\{pqq\}$ est le symbole du rhomboèdre dont on a désigné le pôle par S, on a (nos 13 et 15)

$$\frac{p}{2k} = \frac{q}{h+k}.$$

On aurait tiré le même résultat de la condition

$$\text{tang PO} = - 2 \text{tang SO},$$

jointe aux équations

$$\text{tang PO} = \frac{h-k}{h+2k} \text{tang D}, \quad \text{tang SO} = \frac{p-q}{p+2q} \text{tang D}.$$

Les rhomboèdres $\{hkk\}$: $\{pqq\}$ sont *tangents* l'un à l'autre.

pendiculaire à la droite qui joint (111) , $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$. Ils se trouvent aux intersections de ce grand cercle avec tous ceux qui passent en même temps par les pôles de $\{111\}$ et par ceux de $\{100\}$. La distance de deux pôles adjacents de $\{\bar{2}11\}$ est donc 60° .

155. La forme hémihédrique à faces inclinées symétriques $\times \{\bar{2}11\}$ est terminée par les faces alternatives de $\{\bar{2}11\}$. La distance de deux de ses pôles est de 120° .

156. La forme $\{0\bar{1}1\}$ a six faces, dont les pôles (n° 129) partagent par moitié les arcs qui réunissent deux pôles adjacents de $\{211\}$; la distance de deux pôles adjacents de $\{0\bar{1}1\}$ est de 60° .

157. La forme $\{hkl\}$, dans le cas où $h + k + l = 0$ (fig. 65), a douze faces, dont les pôles sont dans le cercle de zone qui passent par les pôles de $\{\bar{2}11\}$.

Si H est la distance de deux pôles adjacents à un pôle de $\{\bar{2}11\}$, et h la plus grande caractéristique,

$$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{k-l}{2h-k-l} \sqrt{3}; \quad G = 60^\circ - H.$$

Les distances d'un pôle quelconque aux pôles adjacents de $\{\bar{2}11\}$, $\{0\bar{1}1\}$ sont respectivement $\frac{1}{2} H$, $\frac{1}{2} G$.

Dans le cas des formes

$\{21\bar{3}\}$	$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{1}{9} \sqrt{3},$	$H = 21^\circ 47', 2,$
$\{31\bar{4}\}$	$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{1}{6} \sqrt{3},$	$H = 32.12, 3,$
$\{41\bar{5}\}$	$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{1}{5} \sqrt{3},$	$H = 38.12, 8,$
$\{32\bar{5}\}$	$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{1}{15} \sqrt{3},$	$H = 13.10, 4,$
$\{51\bar{6}\}$	$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{2}{9} \sqrt{3},$	$H = 42.6, 4,$
$\{52\bar{7}\}$	$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{1}{7} \sqrt{3},$	$H = 27.47, 7,$
$\{71\bar{8}\}$	$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{1}{4} \sqrt{3},$	$H = 46.49, 6.$

158. Dans le cas de la forme hémihédrique à faces incli-

nées symétriques $\alpha \{hkl\}$, quand $h+k+l=0$, les distances des pôles de deux faces adjacentes sont alternativement $H, 120^\circ - H$.

159. La forme hémihédrique à faces parallèles $\pi \{hkl\}$ est limitée par les faces alternatives de $\{hkl\}$; la distance de deux pôles adjacents est de 60° .

160. La forme $\{hkl\}$ (fig. 66) a douze faces; soient h, l les caractéristiques dont la valeur algébrique est la plus grande et la plus petite; si T et D sont respectivement les distances d'un pôle de $\{hkl\}$ et d'un pôle de $\{100\}$ au pôle le plus rapproché de $\{111\}$, alors (n^o 140)

$$\text{tang}^2 T = \frac{h^2 + k^2 + l^2 - hk - kl - lh}{(h+k+l)^2} \text{tang}^2 D,$$

$$\text{tang } \theta = \frac{k-l}{2h-k-l} \sqrt{3},$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{l-h}{2k-l-h} \sqrt{3},$$

$$\text{tang } \psi = \frac{h-k}{2l-h-k} \sqrt{3},$$

$$\sin \frac{1}{2} H = \sin \theta \sin T; \quad \sin \frac{1}{2} K = \sin \varphi \sin T; \quad \sin \frac{1}{2} L = \sin \psi \sin T;$$

G et F sont respectivement égaux au plus grand et au plus petit des deux angles H, L , et $W = 180^\circ - K$. Si la somme algébrique de deux caractéristiques est égale au double de la troisième, $\theta = \psi$, et par suite $G = F$.

161. La forme hémihédrique à faces inclinées symétriques $\alpha \{hkl\}$ se compose des faces de l'une des deux pyramides qui, réunies base à base, constituent la forme holoédrique $\{hkl\}$.

162. La forme hémihédrique à faces parallèles $\pi \{hkl\}$ est limitée par les faces alternatives de $\{hkl\}$, qui se composent de trois couples de faces parallèles également inclinées l'une à l'autre. Si V, W représentent les distances

de deux pôles adjacents également ou inégalement éloignés de (111),

$$V = \sin 60^\circ \sin T, \quad W = 180^\circ - V.$$

163. Dans la forme hémédrique à faces inclinées non symétriques $\alpha \{hkl\}$, si la distance de deux pôles adjacents, également éloignés de (111), est V , et si les distances des pôles adjacents inégalement éloignés de (111) est U, W ,

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} V &= \sin 60^\circ \sin T, \\ U &= 180^\circ - H, \quad W = 180^\circ - K. \end{aligned}$$

164. Dans les cristaux qui appartiennent au système rhomboédrique, les clivages sont parallèles aux faces des formes qui ont ou deux ou trois caractéristiques égales.

EXEMPLES :

165. Dans un cristal de spath calcaire (*fig. 67*), les faces pp' , p'' , sont parallèles aux trois plans de clivage, dont les pôles sont distants de $74^{\circ}55'$. Soient les symboles de p , (100) ; p' , (010) ; p'' , (001) ; soient (*fig. 70*) p , p' , etc., les pôles des faces p , p' , etc.: g' est sur le cercle de zone pp' et partage en deux parties égales l'arc pp' ; g' est donc sur le cercle de zone $p'o$, o étant le pôle de (111) ; donc le symbole de g' est (101) . c' fait partie d'une zone composée de six faces, et dont l'axe est également incliné aux normales p , p' , p'' ; c' est aussi dans la zone pg' : le symbole de c' est donc $(\bar{1}21)$; de même le symbole de c est $(2\bar{1}\bar{1})$. Soit f le pôle de (hkk) , f' sera celui de (khk) , et le cercle de zone ff' coupera le cercle de zone cc' en e' , pôle de $(1\bar{1}0)$. p'' est sur le cercle de zone ff' ; f' est donc l'intersection de $c'p''$, $p'g'$: donc le symbole de f' est $(1\bar{1}1)$: cp' , pp'' se coupent en r , dont le symbole est par conséquent $(20\bar{1})$. $g'c''$, pp' se coupent en t , dont, par suite, le symbole est (310) , comme celui de t' , (301) . tt' , $p''c''$ se coupent en φ'' , dont le symbole est par suite $(33\bar{2})$. Le cristal est donc une combinaison des formes $\{100\}$, $\{011\}$, $\{1\bar{1}1\}$, $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, $\{33\bar{2}\}$, $\{310\}$, $\{20\bar{1}\}$.

166. Dans un cristal de spath calcaire (*fig. 68*), p , p' , p'' sont parallèles aux trois plans de clivage. Soient les symboles de p , (100) ; p' , (010) ; p'' , (001) ; et soient (*fig. 70*) p , p' , etc., les pôles des faces p , p' , etc. o est équidistant de p , p' , p'' ; donc (n° 128) son symbole est (111) . $oc'' = 90^{\circ}$ et c'' est sur le cercle de zone op'' ; donc son symbole est $(11\bar{2})$, et celui de c , $(2\bar{1}\bar{1})$. cp' , pp'' se coupent en r ; le symbole de r est donc $(20\bar{1})$; celui de r' , $(2\bar{1}0)$; de r'' , $(02\bar{1})$. rr' , po se coupent en m ; le symbole de m est donc $(3\bar{1}\bar{1})$. mc'' , pp''

(100)

se coupent en σ , dont le symbole est par conséquent $(40\bar{3})$.

167. Dans un cristal de spath calcaire (*fig.* 69), les symboles sont pour $p, (100)$; $p', (010)$; $p'', (001)$; $c, (2\bar{1}\bar{1})$; $c'', (112)$. Si $p, p',$ etc. (*fig.* 70), représentent les pôles des faces $p, p',$ etc., cp', pp'' se coupent en r , dont le symbole est par conséquent $(20\bar{1})$; celui de r'' est $(02\bar{1})$; rr', cp se coupent en m , dont le symbole est par conséquent $(3\bar{1}\bar{1})$. Soit le symbole de $y, (hkl)$; celui de y' sera $(h\bar{l}k)$. yy', cc'' se coupent en e'' , pôle de $(01\bar{1})$. m fait partie du cercle de zone yy' ; donc y est sur le cercle de zone me'' . Mais y est aussi sur le cercle de zone pr ; son symbole est donc $(30\bar{2})$. z, z' sont sur le cercle de zone yy' . $zz' = 37^\circ 8'$; donc $mz = 18^\circ 34'$.

$$\sin mo = \text{tang } zm \cot zom;$$

donc

$$\text{tang } zom = \frac{1}{5} \sqrt{3};$$

donc

$$\frac{h-l}{2h-k-l} = \frac{1}{5}.$$

Mais z fait partie du cercle de zone my , dont le symbole est (233) ; donc $(n^\circ 21)$

$$2h + 3k + 3l = 0.$$

On conclut de là

$$h = 15, \quad k = -1, \quad l = -9;$$

le symbole de z est donc $(15\bar{1}\bar{9})$.

168. Déterminer les positions des pôles suivants d'un cristal de spath calcaire :

$n, (211)$; $g, (011)$; $f, (\bar{1}11)$; $m, (3\bar{1}\bar{1})$; $l, (\bar{1}33)$; $\varphi, (233)$;
 $d, (\bar{5}33)$; $h, (\bar{4}55)$; $\nu, (320)$; $t, (310)$; $\omega, (410)$; $\lambda, (401)$;
 $r, (20\bar{1})$; $y, (30\bar{2})$; $\sigma, (40\bar{3})$; $\theta, (60\bar{5})$; $z, (15\bar{1}\bar{9})$; $x, (21\bar{2})$;
 $\partial, (31\bar{3})$; $b, (73\bar{5})$; $q, (53\bar{5})$.

Soient p, p', p'' les pôles de (100), (010), (001); o le pôle de (111); et qu'on distingue respectivement par un ou deux accents les pôles situés sur op' dans le secteur coc , et ceux situés sur op'' dans le secteur $c'oc'$:

$$pp'' = 74^{\circ}55'; \quad pop'' = 120^{\circ}.$$

og' partage par moitié pp'' et pop'' ; d'après cela, puisque $po = p''o$,

$$\sin \frac{1}{2} pp'' = \sin 60^{\circ} \sin po.$$

D'où il résulte que $po = 44^{\circ}36',6$.

$$\text{tang } go = -\frac{1}{2} \text{tang } po \text{ (n}^{\circ} \text{ 138)};$$

donc $go = 26^{\circ}15'$.

$$\sin \frac{1}{2} gg' = \sin 60^{\circ} \sin go;$$

d'où $gg' = 45^{\circ}3'$.

De même on trouvera que

$$\begin{aligned} no &= 13^{\circ}52', & nn' &= 23^{\circ}56', & fo &= 63^{\circ}7', \\ ff' &= 101^{\circ}9', & mo &= 75^{\circ}47', & mm' &= 114^{\circ}10', \\ lo &= 38^{\circ}17', & ll' &= 64^{\circ}53', & \varphi o &= 50^{\circ}58', \\ \varphi\varphi' &= 84^{\circ}33', & do &= 82^{\circ}47', & dd' &= 118^{\circ}27', \\ ho &= 55^{\circ}57', & hh' &= 91^{\circ}42', & eo &= 90^{\circ}0', \\ & & & & ec' &= 90^{\circ}0'; \end{aligned}$$

donc

$$eg = 90^{\circ}, \quad pg' = 37^{\circ}27',5, \quad pe = 52^{\circ}32',5.$$

Soit (uvw) le symbole d'un pôle quelconque S situé sur le cercle de zone pp'' , entre c et g' : si, dans les formules du n^o 27, on remplace P, Q, R et les caractéristiques correspondantes par les pôles e, p, g' , et leurs caractéristiques respectives, on a

$$\text{tang } Sc = \frac{u + w}{u - w} \text{tang } pc.$$

D'après cela, puisque $\theta, \sigma, \gamma, r, \lambda, \omega', \iota', \nu'$ sont sur le cercle de zone pp' ,

$$\begin{aligned} \theta e &= 6^\circ 46', & \sigma e &= 10^\circ 34', & \gamma e &= 14^\circ 38', & r e &= 23^\circ 31', \\ \lambda e &= 33^\circ 8', & \omega' e &= 65^\circ 19', & \iota' e &= 69^\circ 2', & \nu' e &= 81^\circ 17'; \end{aligned}$$

pe est connu, les distances de θ, σ , etc., à p se trouveront donc par de simples soustractions.

$$\text{tang}^2 bo = \frac{112}{25} \text{tang}^2 PO \quad (\text{n}^\circ 128);$$

$$\text{donc } bo = 64^\circ 24', 5.$$

$$\text{tang } bop = \frac{1}{2} \sqrt{3} \quad (\text{n}^\circ 128);$$

$$\text{donc } bop = 40^\circ 53', 6.$$

$$\sin \frac{1}{2} bb' = \sin bop \sin bo;$$

$$\text{donc } bb' = 72^\circ 22', 5.$$

$$\frac{1}{2} bob'' = 19^\circ 6', 4;$$

$$\text{donc } bb'' = 34^\circ 20'.$$

De même

$$zo = 76^\circ 32', \quad zop = 19^\circ 6', 4, \quad zz' = 37^\circ 8'.$$

q, x, δ, f'' sont sur le cercle de zone ep' ,

$$ep' = 90^\circ, \quad ef'' = 34^\circ 25', 5.$$

Si (uvw) représente le symbole d'un pôle quelconque S , situé sur ce cercle de zone ep' , on a (n^o 27)

$$\text{tang } Se = \frac{\omega}{\omega'} \text{tang } ef'';$$

donc

$$qe = 22^{\circ}21', \quad xe = 18^{\circ}55', \quad \delta e = 12^{\circ}52'.$$

169. Dans un cristal de tourmaline, dont les *fig.* 71 et 72 représentent les deux pointements, les pôles c, p, p', p'' ont pour symboles $(111), (100), (010), (001)$. n'' est un pôle commun aux zones pp', cp'' ; son symbole est donc (110) ; de même celui de n' est (101) , et de n , (011) . s est un pôle commun aux zones pp'', nn'' ; son symbole est donc $(10\bar{1})$; de même, celui de s'' est $(01\bar{1})$, de s' , $(1\bar{1}0)$. Le pôle l est commun aux zones ss', cp ; son symbole est donc $(2\bar{1}\bar{1})$. Sur la *fig.* 72, p, p', p'' sont respectivement parallèles à p, p', p'' ; donc les symboles sont, pour p , $(\bar{1}00)$; pour p' , $(0\bar{1}0)$; pour p'' , $(00\bar{1})$. Le pôle g est commun aux zones $sp', s'p''$; son symbole est donc $(1\bar{1}\bar{1})$. Les faces parallèles à c, l, g manquent; donc (n° 124) c, l, g font partie d'une forme hémédrique à faces inclinées symétrique. Le cristal est, d'après cela, une combinaison des formes $\{100\}, \{0\bar{1}1\}, \kappa\{2\bar{1}\bar{1}\}, \kappa\{011\}, \kappa\{1\bar{1}\bar{1}\}$.

170. p, m, x , etc. (*fig.* 74) sont les pôles des faces p, m, x , etc. d'un cristal d'apatite (*fig.* 73). Soient x, x', x'' les pôles des faces $(100), (010), (001)$, et p le pôle de (111) . xx', px'' se coupent en r_3 , dont le symbole est par conséquent (110) ; de même celui de r_2 est (101) , de r_1 (011) .

Le pôle m est sur le cercle de zone px , et $pm = 90^{\circ}$; donc (n° 129) le symbole de m est $(2\bar{1}\bar{1})$; celui de m' est $(\bar{1}2\bar{1})$; de m'' , $(\bar{1}\bar{1}2)$; de m_3 , $(11\bar{2})$. mx', px'' se coupent en x_3 , dont le symbole est par conséquent $(22\bar{1})$; mr_3, px' en r' , dont le symbole est (114) ; xx'', mm' en e , $(10\bar{1})$; ex', px'' en z_3 , $(11\bar{1})$; $m'z_3, px$ en z , $(\bar{5}\bar{1}\bar{1})$; mx', xm_3 en

$s, (4\bar{1}2)$; xx', mx'' en $u', (2\bar{1}0)$; mz_3, xm_3 en $u, (524)$; pu, mm' en $c, (5\bar{4}1)$.

p partage les arcs rr, xx, zz, uu , par moitié; donc (n° 134) r, x , etc., appartiennent à une forme dirhombédrique. Les cercles qui passent par p et par chacun des pôles m, e , formant douze fuseaux; les pôles c, c, u, u , manquent dans les fuseaux alternatifs; donc (n° 125) c, c , appartiennent à une forme hémihédrique à faces parallèles. Le cristal (*fig. 73*) est donc une combinaison des formes $\{111\}, \{2\bar{1}1\}, \{0\bar{1}1\}, \{100\}, \{\bar{1}22\}, \{011\}, \{411\}, \{\bar{1}11\}, \{5\bar{1}1\}, \{4\bar{1}2\}, \pi\{2\bar{1}0\}, \pi\{52\bar{4}\}, \pi\{5\bar{4}1\}$; il est clivable parallèlement aux faces des formes $\{111\}, \{2\bar{1}1\}$; les faces u, s, x forment une zone inverse.

Les symboles des autres pôles que montre la *fig. 74* sont $a, (521)$; $d, (715)$; $f, (312)$; $b, (212)$; $b', (8\bar{4}1)$.

Les expressions du n° 128 donnent

$$\text{tang } cpm = \frac{1}{3}\sqrt{3};$$

le cercle de zone $pasde$ fait donc un angle de 30° avec pm .

$$\text{tang } cpm = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

le cercle de zone c, u, puc fait donc un angle de $40^\circ 53', 6$ avec pm .

$$\text{tang } bpm = \frac{3}{5}\sqrt{3};$$

le cercle de zone b, pb fait donc un angle de $46^\circ 6'$ avec pm .

Si l'on pose $xp = D$, on a (n° 128) $\text{tang } D = 2 \text{ tang } rp$
 $= \frac{1}{2} \text{ tang } zp = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ tang } ap = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ tang } sp = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ tang } dp$
 $= \frac{1}{\sqrt{7}} \text{ tang } ap = \frac{1}{\sqrt{13}} \text{ tang } bp.$

$$mpm_3 = 60^\circ,$$

donc

$$cpm_3 = 30^\circ, \quad upm_3 = 19^\circ 6', 4, \quad bpm_3 = 13^\circ 4';$$

donc

$$\begin{aligned} \sin ap &= \cos a'm_3 e' = \text{tang } 60^\circ \cotang xm_3 = \text{tang } 30^\circ \cotang sm_3 \\ &= \text{tang } 19^\circ 6', 4 \cotang um_3 = \text{tang } 13^\circ 4' \cotang bm_3 \\ &= \text{tang } 40^\circ 53', 6 \cotang um, \\ \sin sp &= \cos s'm_3 e' = \text{tang } 60^\circ \cotang zm_3 = \text{tang } 30^\circ \cotang dm_3, \\ \cos rm_3 &= \cos 60^\circ \sin rp, \quad \cos am_3 = \cos 30^\circ \sin ap. \end{aligned}$$

171. r, p, z , etc. (*fig. 76*) représentent les pôles des faces r, p, z , etc. d'un cristal de quartz (*fig. 75*).

Les distances mutuelles des pôles de r, r_2, r_3 sont de 60° . Les arcs $pr, p'r', p''r''$ sont tous de $38^\circ 13'$ et sont perpendiculaires à rr_2 ; donc ils passent par o , pôle de rr_2 .

Si donc on attribue pour symbole à p , (100) ; p' , (010) ; p'' , (001) , il en résultera pour o le symbole (111) , pour r , $(2\bar{1}\bar{1})$; pour r' , (121) ; pour r'' , $(\bar{1}\bar{1}2)$.

$rp', r'p$ se coupent en z'' , dont le symbole est par conséquent $(2\bar{2}1)$; $rp, r''p$ en s , $(4\bar{2}1)$.

$$ar = 18^\circ 11'; \text{ donc}$$

$$\text{tang } ao = 4 \text{ tang } po;$$

donc (n° 138) le symbole de a est $(3\bar{1}\bar{1})$.

$$a_r = ar; \text{ donc}$$

$$a_o = ao;$$

donc (n° 133) le symbole de a est $(\bar{7}55)$.

n, x sont, dans le cercle de zone pr_2 ,

$$xr_2 = 18^\circ 29', \quad nr_2 = 12^\circ.$$

Si (uvw) représente le symbole d'un pôle quelconque S situé sur le cercle pr_2 , en substituant dans les formules du n° 27 à P, Q, R et aux caractéristiques correspondantes, r_2, p, z'' et leurs caractéristiques respectives, et en observant d'ailleurs que $\cotang z''r_2 = -\cotang pr_2$,

$$(2u-5v) \tang Sr_2 = (2u+v) \tang pr_2.$$

De plus

$$v + 2v = 0,$$

parce que le symbole du cercle de zone pr_2 est (012) ,

$$\tang pr_2 = 7 \tang xr_2;$$

donc le symbole de x est $(2\bar{2}1)$,

$$\tang pr_2 = 13 \tang nr_2;$$

donc le symbole de n est $(8\bar{1}05)$.

o partage par moitié pz, aa ; donc (n° 134) p, a appartiennent à des combinaisons dirhombodriques.

Les pôles s, x, n n'existent pas dans les fuseaux alternatifs formés par les cercles de zones qui passent par o et par chaque pôle r ; donc (n° 126) s, x, n appartiennent à des formes hémiodriques à faces inclinées non symétriques.

D'après cela, le cristal (*fig. 75*) est une combinaison des formes $\{2\bar{1}\bar{1}\}, \{100\}, \{\bar{1}22\}, \{3\bar{1}\bar{1}\}, \{\bar{7}55\}, \{4\bar{2}1\}, \alpha\{2\bar{2}1\}, \alpha\{8\bar{1}05\}$; la zone formée par les faces p, s, x, n, r_2 est directe.

Les symboles des autres pôles représentés (*fig. 76*) ont pour symboles

$$\begin{aligned} b, (13\bar{2}2); & \quad b, (\bar{7}88); & \quad m, (7\bar{2}2); & \quad m, (\bar{5}44); \\ e, (16\bar{5}\bar{5}); & \quad e, (\bar{4}33); & \quad c, (5\bar{2}2); & \quad c, (\bar{1}388); \\ w, (5\bar{4}2); & \quad \gamma, (7\bar{8}4); & \quad t, (3\bar{4}2). \end{aligned}$$

CHAPITRE V.

SYSTÈME PRISMATIQUE.

172. Dans le système prismatique les axes sont rectangulaires.

173. La forme holoédrique $\{hkl\}$ est terminée par toutes les faces qui ont pour symboles les combinaisons différentes de $\pm h$, $\pm k$, $\pm l$, chaque caractéristique conservant toujours le même rang. Lorsque les caractéristiques h , k , l sont différentes de zéro, la forme $\{hkl\}$ a huit faces

$$\begin{array}{cccc} hkl, & h\bar{k}\bar{l}, & \bar{h}k\bar{l}, & \bar{h}\bar{k}l, \\ \bar{h}\bar{k}\bar{l}, & \bar{h}kl, & h\bar{k}l, & hkl. \end{array}$$

Lorsqu'une des caractéristiques est nulle, le nombre des faces se réduit à quatre; à deux seulement quand deux caractéristiques sont égales à zéro (*).

(*) Supposer une ou deux caractéristiques nulles, c'est identifier tous les symboles qui ne différaient que par le signe de cette caractéristique, c'est réduire le nombre total des symboles à moitié ou au quart.

Il est facile de voir qu'on aura les nombres suivants d'arrangements :

Dans le cas où les caractéristiques sont :

	3 différentes de zéro.	1 nulle.	2 nulles.
3 caractéristiques positives.	1	1	1
2 positives, 1 négative. . .	3	2	1
2 négatives, 1 positive. . . .	3	1	»
3 négatives.	1	»	»
	8	4	2

L'arrangement des pôles de $\{hkl\}$ sur la sphère de projection est représenté par la *fig. 77*.

174. La forme terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$ qui ont un nombre impair soit de caractéristiques positives, soit de caractéristiques négatives, est dite hémiedrique à faces inclinées; sa notation symbolique est $\alpha\{hkl\}$; (hkl) est le symbole d'une quelconque de ses faces.

On appelle une forme hémiedrique directe ou inverse, suivant que les caractéristiques en nombre impair sont ou positives ou négatives; les notations symboliques des formes hémiedriques directes et inverses se trouvent respectivement dans les lignes supérieure et inférieure du tableau précédent.

Que l'on conçoive la surface de la sphère de projection partagée en huit triangles par les cercles de zones qui passent par deux pôles des faces (100) , (010) , (001) : les pôles d'une forme directe se trouveront dans quatre triangles alternatifs, dont l'un contient le pôle (111) ; les pôles d'une forme inverse se trouveront dans les quatre autres triangles.

175. La forme terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$, dont les notations symboliques renferment l'une des caractéristiques affectée constamment du même signe, est dite hémiedrique à faces symétriques; on désigne symboliquement cette forme en faisant précéder le symbole $\{hkl\}$ du signe σ_1 , σ_2 , σ_3 , suivant que la première, la deuxième ou la troisième caractéristique conserve un signe invariable; cette forme est d'ailleurs ou directe ou inverse, suivant que ce signe invariable est le signe $+$ ou le signe $-$.

Les pôles d'une forme hémiedrique à faces symétriques se trouvent dans l'un des hémisphères tracés sur la sphère de projection par les cercles de zones qui passent par deux des trois pôles (100) , (010) , (001) .

176. Déterminer la position d'un pôle quelconque.

Soient (*fig. 78*) X, Y, Z les points où les axes percent la surface de la sphère de projection; soient a, b, c les paramètres du cristal; P le pôle de (hkl) .

Puisque les trois axes sont rectangulaires, les angles YZ, ZX, XY sont droits. Donc

$$\cos YZ = 0, \quad \cos ZX = 0, \quad \cos XY = 0;$$

et X, Y, Z sont les pôles de $(100), (010), (001)$. Les angles dièdres en X, Y, Z sont droits.

On a

$$\begin{aligned} \cos PX &= \sin PY \cos PXY = \sin PZ \cos PZX, \\ \cos PY &= \sin PZ \cos PZY = \sin PX \cos PXY, \\ \cos PZ &= \sin PX \cos PXZ = \sin PY \cos PYZ; \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \cotang PX &= \tang PZY \cos PXY = \tang PYZ \cos PXZ, \\ \cotang PY &= \tang PXZ \cos PYZ = \tang PZX \cos PXY, \\ \cotang PZ &= \tang PXY \cos PZX = \tang PXY \cos PZY. \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ;$$

donc

$$\begin{aligned} \tang PXY &= \frac{lb}{kc}; & \tang PYZ &= \frac{hc}{la}; & \tang PZX &= \frac{ka}{hb}; \\ \cotang PX &= \frac{hb}{ka} \cos PXY = \frac{hc}{la} \cos PXZ, \\ \cotang PY &= \frac{kc}{lb} \cos PYZ = \frac{ka}{hb} \cos PXY, \\ \cotang PZ &= \frac{la}{kc} \cos PZX = \frac{lb}{kc} \cos PZY. \end{aligned}$$

177. Des expressions précédentes, il résulte que les distances d'un pôle quelconque de $\{hkl\}$ aux trois pôles les plus rapprochés, soit de $\{100\}$, soit de $\{010\}$ ou de $\{001\}$, sont respectivement égales aux distances de tout autre pôle de $\{hkl\}$, aux trois pôles les plus rapprochés des mêmes formes $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$; par conséquent les pôles de $\{hkl\}$ occupent des positions symétriques par rapport aux trois cercles de zones qui passent par deux pôles des trois formes $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$.

178. L'arrangement des pôles de $\{hkl\}$ et de $\sigma\{hkl\}$ est symétrique dans deux triangles adjacents quelconques formés par les cercles de zones qui passent par deux pôles de $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$; et semblable dans deux triangles alternatifs. L'arrangement des pôles de $\varkappa\{hkl\}$ est semblable dans chacun des triangles où ces pôles se rencontrent.

179. Dans chaque espèce de forme hémicédrique, les pôles de la forme directe et ceux de la forme inverse échangeraient leur position si la sphère tournait de deux angles droits autour des pôles de l'une des formes $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$.

180. Si, dans la forme $\{ohl\}$, L représente la distance de deux pôles dont les symboles ne diffèrent que par le signe de l ,

$$\text{tang } \frac{1}{2} L = \frac{lb}{kc}.$$

181. Si dans la forme $\{hol\}$ L représente la distance de deux pôles dont les symboles ne diffèrent que par le signe de l ,

$$\text{tang } \frac{1}{4} L = \frac{la}{hc}.$$

182. Si, dans la forme $\{hko\}$, II représente la distance

de deux pôles dont les symboles ne diffèrent que par le signe de h ,

$$\text{tang } \frac{1}{2} \text{ H} = \frac{hb}{ka}.$$

183. Si, dans la forme $\{hkl\}$, H, K, L représentent les distances entre deux pôles dont les symboles ne diffèrent respectivement que par les signes de h, k, l ,

$$\text{tang } \varphi = \frac{ka}{hb},$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} \text{ L} = \frac{la}{kc} \cos \varphi,$$

$$\sin \frac{1}{2} \text{ K} = \cos \frac{1}{2} \text{ L} \sin \varphi; \quad \sin \frac{1}{2} \text{ H} = \cos \frac{1}{2} \text{ L} \cos \varphi.$$

184. Soient P un pôle de $\{hkl\}$, Q un pôle de $\{pqr\}$; alors, comme au n° 97 :

si Q est sur le cercle de zone PX,

$$\frac{h \text{ tang PX}}{p \text{ tang QX}} = \frac{k}{q} = \frac{l}{r};$$

si Q est sur le cercle de zone PY,

$$\frac{k \text{ tang PY}}{q \text{ tang QY}} = \frac{l}{r} = \frac{h}{q};$$

si Q est sur le cercle de zone PZ,

$$\frac{l \text{ tang PZ}}{r \text{ tang QZ}} = \frac{h}{p} = \frac{k}{q}.$$

185. Trouver la distance de deux pôles quelconques.

Soient P, Q (*fig. 78*) les pôles (hkl) , (pqr) ; X, Y, Z les pôles des formes $\{001\}$, $\{010\}$, $\{100\}$; soit M le point de rencontre des cercles de zones PQ, XY. On peut déterminer les tangentes de MZX, PZX, QZX en

fonction de h, k, l, p, q, r , et de deux des paramètres a, b, c . On connaît donc PZM, QZM ; on peut déterminer PZ en fonction de h, k, l et des paramètres a, b, c . L'arc MZ est égal à 90° ; donc

$$\begin{aligned} \cos PM &= \sin PZ \cos PZM, \\ \frac{\text{tang } QM}{\text{tang } PM} &= \frac{\text{tang } QZM}{\text{tang } PZM}; \end{aligned}$$

donc, une fois PM et QM connus, l'arc PQ , égal à leur somme ou à leur différence, est déterminé.

186. Si la distance de deux pôles de l'une des formes $\{okl\}, \{hol\}, \{hko\}$ est donnée, le rapport des caractéristiques peut se tirer des expressions données dans les n^{os} 180 à 182.

187. Dans la forme $\{hkl\}$ les distances d'un pôle quelconque à deux autres, ou les suppléments de ces distances, sont deux des arcs H, K, L ; donc, si deux de ces arcs H, K, L sont connus, on déterminera φ et ensuite les rapports de h, k, l au moyen des formules du n^o 183.

188. Les rapports des paramètres peuvent se déduire des formules des n^{os} 180 à 182, étant données les distances entre deux pôles de deux des formes $\{okl\}, \{hol\}, \{hko\}$; ou des formules du n^o 183, étant données les distances d'un pôle quelconque de $\{hkl\}$ à deux autres pôles non situés dans le même cercle de zone.

189. Les rapports des paramètres peuvent aussi se déduire des distances connues de trois pôles situés dans le même cercle de zone.

Soient P, Q, R (*fig. 79*) les trois pôles; soient L, M, N les points où PR rencontre respectivement YZ, ZX, XY . Les symboles de P, Q, R sont connus, et ceux de L, M, N peuvent se calculer; donc on peut trouver les distances

PL, PM, PN par les formules du n° 27. On connaît par conséquent les distances entre L, M, N :

$$\frac{\text{tang LY}}{\text{tang LZ}} = \frac{\text{tang NL}}{\text{tang LM}}, \quad \frac{\text{tang MZ}}{\text{tang MX}} = \frac{\text{tang LM}}{\text{tang MN}},$$

$$\frac{\text{tang NX}}{\text{tang NY}} = \frac{\text{tang MN}}{\text{tang NL}}.$$

Les positions et les symboles de L, M, N une fois connus, les rapports de a, b, c se déduisent des formules des n°s 180 à 182.

190. Déterminer la figure et les angles de la forme $\{hkl\}$ quand on particularise les valeurs de h, k, l .

Les angles compris entre deux normales à des faces qui appartiennent à la même forme s'obtiennent au moyen des expressions des n°s 180 à 183. On les désigne par les lettres qui, sur la figure, sont placées sur les arêtes formées par les intersections de ces faces; la *fig. 77* montre l'arrangement des pôles sur la sphère de projection. On a déjà donné le nombre des faces (n° 173).

191. Les trois formes $\{100\}$, $\{010\}$; $\{001\}$ se composent chacune de deux faces parallèles, les faces de l'une de ces formes étant perpendiculaires aux faces des deux autres.

Chacune de ces formes peut admettre la seconde espèce d'hémiédrie.

192. La forme $\{okl\}$ (*fig. 80*) a quatre faces perpendiculaires à celles de $\{100\}$:

$$\text{tang } \frac{1}{2} L = \frac{lb}{kc}, \quad K = 180^\circ - L.$$

193. La forme $\{hol\}$ (*fig. 81*) a quatre faces perpendiculaires à celles de $\{010\}$:

$$\text{tang } \frac{1}{2} L = \frac{la}{hc}, \quad H = 180^\circ - L.$$

194. La forme $\{hko\}$ (*fig.* 82) a quatre faces perpendiculaires à celles de $\{001\}$:

$$\text{tang } \frac{1}{2} H = \frac{hb}{ka}, \quad K = 180^\circ - H.$$

195. Chacune des formes précédentes peut devenir hémihédrique à faces symétriques ; ces formes hémihédriques se composent de deux faces adjacentes quelconques.

196. La forme $\{hkl\}$ (*fig.* 83) a huit faces ; si l'on pose

$$\text{tang } \varphi = \frac{ka}{hb},$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} L = \frac{la}{hc} \cos \varphi,$$

$$\sin \frac{1}{2} K = \cos \frac{1}{2} L \sin \varphi; \quad \sin \frac{1}{2} H = \cos \frac{1}{2} L \cos \varphi.$$

197. La forme hémihédrique à faces inclinées est un tétraèdre irrégulier, dont les arêtes sont parallèles aux faces de (100) , (010) , (001) ; si les normales aux faces dont ces arêtes sont les intersections font entre elles des angles désignés respectivement par T , V , W ,

$$T = 180^\circ - H; \quad V = 180^\circ - K; \quad W = 180^\circ - L.$$

198. La forme hémihédrique à faces symétriques se compose de quatre des faces qui forment un des angles pyramidaux de la *fig.* 83 (*).

(*) 198 *bis*. Déterminer les caractéristiques et les paramètres quand on prend pour axes cristallographiques les intersections des faces A' , (mno) ; B' , $(\bar{m}\bar{n}\bar{o})$; C' , (001) .

Les symboles des trois zones sont, avant toute réduction,

$$B'C', (nmo); C'A', (nmo); A'B', (00\ 2mn);$$

EXEMPLES :

199. Soient m, k, p , etc. (fig. 85) les pôles des faces m, k, p d'un cristal d'aragonite (fig. 84); on trouve que les cercles de zones mm' , kk' se coupent à angles droits en h et que les pôles des faces sont arrangés symétriquement aux cercles mm' , kk' , ainsi qu'au cercle YZ , qui coupe les deux premiers

d'ailleurs (n° 176),

$$\cos A'Z = 0, \quad \cos C'X = 0,$$

$$\cos B'Z = 0, \quad \cos C'Y = 0,$$

$$\text{tang } A'X = -\text{cotang } B'Y = \frac{na}{mb},$$

donc A', B' sont sur le grand cercle XY ; Z, C', Z' coïncident.

$$A'C' = 90^\circ, \quad B'C' = 90^\circ, \quad A'B' = 2A'X,$$

$$\cos A'X = \sin B'Y = \frac{mb}{\sqrt{n^2a^2 + m^2b^2}},$$

$$\cos B'Y = -\sin A'X = -\frac{na}{\sqrt{m^2a^2 + m^2b^2}},$$

$$\sin A'B' = \frac{2mna}{n^2a^2 + m^2b^2}.$$

Si l'on substitue ces expressions dans les formules générales du n° 28 et qu'on supprime les facteurs communs aux caractéristiques et aux paramètres correspondants,

$$u' = nu - mv, \quad a' = \sqrt{n^2a^2 + m^2b^2},$$

$$v' = nu + mv, \quad b' = \sqrt{n^2a^2 + m^2b^2},$$

$$w' = w; \quad c' = c.$$

on a d'ailleurs

$$X'Y' = 180^\circ - A'B' = 180^\circ - 2A'X,$$

$$\text{tang } \frac{X'Y'}{2} = \text{cotang } A'X = \frac{mb}{na}.$$

à angles droits en Y, Z . Soient les symboles de $h, (100)$; $k, (101)$; $m, (110)$; ceux de Y, Z seront respectivement (010) , (001) . De l'arrangement symétrique des pôles relativement aux cercles mm', kk', YZ , il résulte que pp''', pp'' passent respectivement par Y, Z ; k et m sont respectivement sur les zones pp''', pp'' ; d'après cela, p est l'intersection de Yk, Zm ; son symbole est donc (111) ; s est l'intersection de hp, mk : les symboles sont donc pour $s, (211)$; $s'', (\bar{2}\bar{1}\bar{1})$; $s''', (2\bar{1}\bar{1})$; i est l'intersection de hk, ss'' , son symbole est donc (201) ; n l'intersection de pk, ss'' et par conséquent son symbole (212) ; x l'intersection de mn, hk , et par conséquent son symbole (102) . D'après cela, le cristal est une combinaison des formes $\{100\}, \{101\}, \{201\}, \{102\}, \{110\}, \{111\}, \{211\}, \{212\}$. Il est clivable parallèlement à $\{100\}, \{101\}, \{110\}$.

On trouve à très-peu près

$$mm' = 63^{\circ} 50', \quad kk' = 71^{\circ} 34';$$

par conséquent $mh = 58^{\circ} 5'$, $kh = 54^{\circ} 13'$.

$$\text{tang } kh = 2 \text{ tang } ih = \frac{1}{2} \text{ tang } xh \quad (\text{n}^{\circ} 184);$$

donc $ih = 34^{\circ} 45'$, $xh = 70^{\circ} 11'$, $kZ = 35^{\circ} 47'$.

$$\cos pZk = \text{tang } kZ \cotang pZ; \quad \sin kZ = \cotang pZk \text{ tang } pk;$$

d'après cela $pZ = 53^{\circ} 44', 5$, $pk = 43^{\circ} 11', 5$;

donc $pp'' = 107^{\circ} 29'$, $pp''' = 86^{\circ} 23'$.

$$\cos ph = \cos mh \cos pm;$$

donc $ph = 64^{\circ} 46'$, $pp' = 50^{\circ} 28'$.

$$\text{tang } nY = 2 \text{ tang } pY, \quad \text{tang } ph = 2 \text{ tang } sh \quad (\text{n}^{\circ} 184);$$

(117)

donc $nY = 64^{\circ}51'$, $nk = 25^{\circ}9'$, $sh = 46^{\circ}42'$.

$$\text{tang } pZh = 2 \text{ tang } sZh \quad (\text{n}^{\circ} 185);$$

donc $sZh = 38^{\circ}45',5$.

$$\sin iZ = \text{tang } si \cotang sZh, \quad \cos sZh = \text{tang } iZ \cotang sZ,$$

donc $si = 33^{\circ}24',5$, $sZ = 61^{\circ}35'$.

$$\text{tang } sZ = 2 \text{ tang } nZ \quad (\text{n}^{\circ} 184);$$

donc $nZ = 42^{\circ}45'$.

$$\cos nh = \cos nk \cos kh;$$

donc $nh = 58^{\circ}2',5$.

Soient a, b, c les paramètres : puisque p est le pôle de (111), h le pôle de (100),

$$a \cos ph = b \cos pY = c \cos pZ;$$

a, b, c sont donc des quantités proportionnelles à

$$\sec ph; \quad \sec pY; \quad \sec pZ,$$

ou respectivement à

$$2,3457; \quad 1,4610; \quad 1,6908.$$

Si l'on change de paramètres par la règle du n^o 29, de telle sorte que s soit le pôle de (111), les symboles des autres faces deviennent $h, (100)$; $m, (120)$; $i, (101)$; $k, (102)$; $x, (104)$; $p, (122)$; $n, (112)$. Les nouveaux paramètres sont proportionnels aux nombres

$$1,1728; \quad 1,4610; \quad 1,6908.$$

200. Dans un cristal de sulfate de magnésie à sept proportions d'eau (fig. 86), les zones qui servent à déterminer les symboles des faces sont $nlte, vls p, mll''$, nsm, vim . Les symboles sont pour $c, (100)$; $p, (010)$; $n, (011)$; $v, (101)$; donc (n^o17) les symboles des autres faces sont pour $l, (111)$; $l'', (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$; $m, (110)$; $t, (211)$; $s, (121)$; $q, (021)$; $r, (201)$. Les

formes auxquelles appartiennent s et t manquent des faces qui auraient leurs pôles dans les octants alternatifs formés par les cercles de zones qui réunissent deux à deux les pôles (100), (010), (001); donc (n° 173) ces formes sont hémihédriques à faces inclinées. Le cristal est donc une combinaison des formes {100}, {010}, {011}, {101}, {110}, {111}, {021}, {201}, α {211}, α {121}; il est clivable parallèlement aux faces de {100}.

La forme à laquelle appartient la face l est souvent hémihédrique à faces inclinées.

Si e, m, l représentent les pôles des faces e, m, l ,

$$em = 45^{\circ} 15', \quad ml = 51^{\circ}.$$

201. Dans un cristal de topaze (fig. 87), les zones qui servent à déterminer les symboles des faces sont $ulnm'$, $ynpn'y'$, $mosp's'o''m''$, $m'o's'ps'''o'''m'''$, $mnx'''o'''m'''$, $m'o'xn'n''$, $uon'u''$, $uo'y'$, $lxpx''l''$, $xs's'x'$.

p est perpendiculaire aux faces de la zone mm' ; donc, si p a pour symbole (001), les faces (100), (010) feront partie de la zone mm' . Soient les symboles de o , (111); o' , ($\bar{1}11$), ceux de m, m' seront respectivement (110), ($\bar{1}10$); on aura pour ceux de n , (201); u , (310); y' , ($\bar{4}01$). Si m, m', l, l' représentent les pôles des faces m, m', l, l' , on trouve que

$$\text{tang } \frac{1}{2} U' = 2 \text{ tang } \frac{1}{2} mm';$$

donc le symbole de l est (210), puis celui de x , (423); x' , ($\bar{4}23$); s , (223). Le cristal est donc une combinaison des formes {001}, {110}, {210}, {310}, {201}, {401}, {111}, {223}, {423}; le cristal est clivable parallèlement aux faces de {001}, {201}, {021}.

Les formes de la topaze sont quelquefois hémihédriques à faces symétriques (n° 174). Ainsi, les formes auxquelles o, x, p, t appartiennent [t est une face commune aux

zones oo'' , nn' , et son symbole est (101) manquent, dans certains cas, des faces qui composent un côté de la zone mm' , et l'on a observé la forme à laquelle i appartient [i est une face commune aux zones mo' , $m'o$, son symbole est (021)], dépourvue des faces qui composent un côté de la zone nn' . Si m , u , p , etc. sont les pôles des faces m , u , p , etc.,

$$\begin{aligned} mm' &= 55^{\circ} 41', & uu' &= 93^{\circ} 8', & uu' &= 115^{\circ} 29', \\ pn &= 43^{\circ} 30', 5, & py &= 62^{\circ} 13', & po &= 45^{\circ} 27', 5, \\ ps &= 34^{\circ} 7', & px &= 41^{\circ} 4'. \end{aligned}$$

CHAPITRE VI.

SYSTÈME PRISMATIQUE OBLIQUE.

202. Dans le système prismatique oblique, l'un des trois axes OY est perpendiculaire aux deux autres OX, OZ.

203. La forme holoédrique $\{hkl\}$ est terminée par toutes les faces dont les symboles résultent des différentes combinaisons de $\pm h$, $\pm k$, $\pm l$, pourvu que chaque caractéristique y conserve toujours le même rang, et que la première et la troisième y soient toujours de même signe. Quand aucune des caractéristiques n'est nulle, la forme holoédrique a quatre faces

$$h \ k \ l, \quad \bar{h} \ k \ l, \quad h \ \bar{k} \ l, \quad \bar{h} \ \bar{k} \ l.$$

Lorsque la seconde caractéristique k est zéro, ou que les deux autres sont en même temps égales à zéro, le nombre des faces se réduit à deux (*).

(*) Supposer la seconde caractéristique nulle, c'est identifier les symboles qui ne différaient que par le signe de cette caractéristique, ou réduire le nombre total des arrangements à moitié.

Supposer la première et la troisième caractéristiques nulles, c'est identifier les symboles qui en différaient par les signes de ces deux caractéristiques.

Comme, dans chaque symbole, ces caractéristiques ont toutes

204. La forme hémihédrique est terminée par toutes les faces de $\{hkl\}$, dans le symbole desquelles k se trouve avec le même signe. Cette forme hémihédrique se désigne symboliquement par $\sigma\{hkl\}$, (hkl) étant le symbole d'une de ses faces.

Les pôles des deux formes hémihédriques qui correspondent à chaque signe de k sont de chaque côté du cercle de zone $(100, 001)$.

205. Déterminer la position d'un pôle quelconque.

Soient (*fig. 88*) X, Y, Z les points où les axes cristallographiques rencontrent la surface de la sphère de projection; C le pôle de (001) , A le pôle de (100) , P le pôle de (hkl) .

L'axe OY est perpendiculaire aux deux autres; donc les arcs XY, YZ sont égaux à 90° , et par conséquent

$$\cos XY = 0, \quad \cos YZ = 0;$$

deux le même signe, c'est réduire le nombre total des arrangements seulement à moitié.

Il est facile de voir qu'on aura les nombres suivants d'arrangements.

Dans les cas où les caractéristiques sont :

	Toutes trois différentes de zéro.	La première et la dernière différentes de zéro, la seconde nulle.	La première et la dernière nulles, la seconde différente de zéro.
3 caractér. posit.	1	1	1
2 posit., 1 négat.	1	»	1
2 négat., 1 posit.	1	1	»
3 négatives. . . .	1	»	»
	4	2	2

Y est donc le pôle de (010).

$$\cos CX = 0, \quad \cos CY = 0, \quad \cos AZ = 0, \quad \cos AY = 0;$$

les arcs CX, CY, AZ, AY sont égaux à 90°. A et C sont donc situés sur le grand cercle ZX, et CA + ZX = 180°;

$$\begin{aligned} \cos PX &= \sin PY \cos PYX = \sin PY \sin PYC, \\ \cos PZ &= \sin PY \cos PYZ = \sin PY \sin PYA. \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ;$$

donc

$$\frac{a}{h} \sin PYC = \frac{c}{l} \sin PYA;$$

donc, si l'on pose

$$\text{tang } \theta = \frac{hc}{la},$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (PYC - PYA) = \text{tang } \frac{1}{2} CA \text{ tang } (45^\circ - \theta),$$

$$\text{cotang } PY = \frac{ka}{hb} \sin PYC = \frac{kc}{lb} \sin PYA,$$

$$\cos PA = \sin PY \cos PYA,$$

$$\cos PC = \sin PY \cos PYC.$$

206. L'arc qui réunit deux pôles de $\{hkl\}$, dont les symboles ne diffèrent que par le signe de k , est évidemment partagé en deux parties égales et coupé à angles droits par le cercle de zone (001, 100). D'après cela, si la surface de la sphère de projection est partagée en deux hémisphères par le grand cercle (001, 100), l'arrangement des pôles de $\{hkl\}$ sur la surface de cette sphère est symétrique dans les deux hémisphères.

L'arc de grand cercle qui réunit deux pôles de $\sigma \{hkl\}$ se trouve partagé par moitié par un pôle de la forme $\{010\}$.

207. Soient P le pôle de (hkl) , Q celui de (pqr) , et soit Q sur le cercle de zone PY; il en résultera que

$$PYC = QYC, \quad PYA = QYA;$$

donc (n° 205)

$$\frac{h \operatorname{tang} PY}{q \operatorname{tang} QY} = \frac{l}{r} = \frac{h}{p}.$$

208. Trouver la distance angulaire de deux pôles.

Soient P, Q (*fig.* 89) les pôles (hkl) , (pqr) ; A, Y, C les pôles (100) , (010) , (001) ; soit M le point d'intersection des cercles PQ, CA: on pourra calculer le symbole de M; et les angles MYA, PYA, QYA, ainsi que l'arc PY, peuvent s'exprimer en fonction de h, k, l ; p, q, r , et de l'angle compris entre les axes. L'arc MY est égal à 90° ; donc

$$\begin{aligned} \cos PM &= \cos PYM \sin PY, \\ \frac{\operatorname{tang} QM}{\operatorname{tang} PM} &= \frac{\operatorname{tang} QYM}{\operatorname{tang} PYM}. \end{aligned}$$

PM et QM une fois déterminés, PQ s'ensuit.

209. Étant données les distances du pôle (hkl) aux pôles (100) , (010) , (001) , en déduire ZX et le rapport des paramètres a, b, c .

Soient P, A, Y, C les pôles de (hkl) , (100) , (010) , (001) ; alors (n° 205)

$$\begin{aligned} \cos PA &= \sin PY \cos PYA, \\ \cos PC &= \sin PY \cos PYC, \end{aligned}$$

d'où l'on tire PYA, PYC, et par suite AC et ZX. Le rapport de a à c est donné par l'équation

$$\frac{a}{h} \sin PYC = \frac{c}{l} \sin PYA,$$

et celui de b ou de a à c par les équations

$$\cotang PY = \frac{ka}{hb} \sin PYC = \frac{kc}{lb} \sin PYA.$$

210. P, Q, R (*fig. 90*) sont trois pôles sur le cercle de zone CA; C, A étant toujours les pôles de (001), (100); T, T' sont deux pôles qui appartiennent à la même forme. Étant donnés les arcs PQ, QR, TT' et les symboles de P, Q, R, T, on demande l'inclinaison des axes et le rapport des paramètres.

Soit S le point de rencontre des cercles T, T' et PQR; P, Q, R, S, A, C sont dans le même cercle de zone, et leurs symboles sont connus; donc (n° 26) on peut trouver les distances qui séparent P et R de S, C, A; CA une fois connu, on connaît l'inclinaison des axes. Y partage par moitié l'arc TT', et comme on connaît TY, CS, AS, on peut trouver TC, TA et déterminer le rapport des paramètres, comme dans le n° 209.

211. M, M' sont deux pôles d'une forme quelconque situés à égale distance de Y; N, N' deux pôles d'une autre forme situés de même à égale distance de Y. Étant données les distances de MM', NN', MN, trouver l'inclinaison des axes et les rapports des paramètres.

Soient P, Q, R les points de rencontre du cercle CA avec MM', NN', MN; C, A représentent toujours les pôles de (001), (100). Les symboles de M et N sont connus, on peut donc trouver ceux de P, Q, R.

MN, YM, YN sont connus, on peut donc trouver PQ, mesure de l'angle MYN :

$$\sin PR = \cotang R \cotang YM; \quad \sin QR = \cotang R \cotang YN;$$

donc

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(PR - QR)}{\tan \frac{1}{2}(PR + QR)} = \frac{\sin(NY - MY)}{\sin(NY + MY)}.$$

L'arc PQ étant donné par ces équations, on déduit PR, QR. PQ, QR ainsi déterminés, les méthodes des n^{os} 209 et 210 font connaître la position de C et de A et le rapport des paramètres.

212. P, Q, R (*fig. 92*) sont trois pôles situés sur le même cercle de zone; T, T' deux pôles qui appartiennent à la même forme et sont à des distances égales de Y. Étant donnés les arcs PQ, QR, TT' et les symboles de P, Q, R, T, trouver les éléments du cristal.

Soient M le point de rencontre de PR et de ZX, S celui de PR et de ZY; soient s, r, ρ les points de rencontre de ZX avec TY, RY, PY: on peut calculer les symboles de M, S, p, r, s . PQ, PR et les symboles de M, P, Q, R, S sont des quantités connues; on peut donc déterminer NP, MR, SP, SR (n^o 26). RY, RM déterminent RMY; RMY, PM, RM, SM déterminent pM, rM, sM . D'après cela, puisque l'on connaît les symboles de p, r, s , on trouve par les méthodes du n^o 210 la position de C et de A.

Les éléments du cristal se déduisent ensuite des méthodes déjà exposées.

213. Trouver les caractéristiques d'une face quelconque quand on prend pour axes cristallographiques les axes des zones $\{eog, 010\}$, $\{001, 100\}$, $\{por, 010\}$; les symboles des trois zones sont $\{\bar{r}op\}$, $\{010\}$, $\{go\bar{e}\}$; donc (n^o 28)

$$e = -r, f = 0, g = p; h = 0, k = 1, l = 0; p = g, q = 0, r = -e.$$

D'après cela, si u, v, w sont les caractéristiques d'une face rapportée aux axes primitifs u, v', w' de la même face rapportée aux nouveaux axes,

$$u' = pw - ru; \quad v = w; \quad w' = gu - ew (*).$$

(*) Les nouveaux axes doivent être en réalité les intersections

214. La forme $\{010\}$ a deux faces parallèles.

215. La forme $\{hol\}$ a deux faces parallèles l'une à l'autre et perpendiculaires aux faces de $\{010\}$.

216. La forme $\{hkl\}$ a quatre faces; les normales à

des faces

$$A', (eog); \quad B', (o1o); \quad C', (por).$$

Les symboles des trois zones sont, avant toute réduction,

$$B'C', (\bar{rop}); \quad C'A', (ogp - ero); \quad A'B', (go\bar{e}).$$

D'ailleurs (n° 205)

$$\cotang A'Y = 0, \quad \cotang B'Y = \infty, \quad \cotang C'Y = 0;$$

donc A', C' sont sur le grand cercle XZ , et B', Y, Y' coïncident:

$$\cos B'Y = 1, \quad \sin A'B' = 1, \quad \sin B'C' = 1.$$

Mais, en général,

$$\begin{aligned} \frac{a}{e} \cos A'X &= \frac{c}{g} \cos A'Z = \frac{c}{g} \cos (XZ + A'X), \\ \frac{a}{p} \cos C'X &= \frac{c}{r} \cos C'Z = \frac{c}{r} \cos (C'X - XZ), \\ \frac{c}{r} \cos C'Z &= \frac{a}{p} \cos C'X = \frac{a}{p} \cos (C'Z + XZ); \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en égard aux signes de corrélation (*fig. 92 bis*),

$$\begin{aligned} \cos A'X &= \frac{ec \sin XZ}{\sqrt{g^2a^2 + e^2c^2 - 2egac \cos XZ}}, \\ \sin A'X &= \frac{ga - ec \cos XZ}{\sqrt{g^2a^2 + e^2c^2 - 2egac \cos XZ}}, \\ \cos C'X &= \frac{pc \sin XZ}{\sqrt{r^2a^2 + p^2c^2 - 2prac \cos XZ}}; \end{aligned}$$

deux faces adjacentes à $\{010\}$ font l'une avec l'autre un angle de $(180^\circ - K)$ et $90^\circ - \frac{1}{2}K = PY$.

217. La forme hémihédrique $\sigma \{hkl\}$ a deux faces; l'angle compris entre leurs normales est de $180^\circ - K$.

$$-\sin C'X = \frac{ra - pc \cos XZ}{\sqrt{r^2a^2 + p^2c^2 - 2prac \cos XZ}},$$

$$\cos C'Z = \frac{ra \sin XZ}{\sqrt{r^2a^2 + p^2c^2 - 2prac \cos XZ}},$$

$$\sin A'C' = \sin (A'X + XC'),$$

$$\sin A'C' = \frac{(gp - er) ac \sin XZ}{\sqrt{g^2a^2 + e^2c^2 - 2egac \cos XZ} \sqrt{r^2a^2 + p^2c^2 - 2prac \cos XZ}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules générales du n° 28, et si l'on supprime les facteurs communs aux caractéristiques et aux paramètres correspondants

$$u' = pw - ru, \quad a' = \sqrt{r^2a^2 + p^2b^2 - 2prab \cos XZ},$$

$$v' = v, \quad b' = b,$$

$$w' = gu - ew, \quad c' = \sqrt{g^2a^2 + e^2c^2 - 2egac \cos XZ};$$

d'un autre côté

$$Z'X' = 180^\circ - A'C'.$$

213 bis. Soient pris, pour nouveaux axes cristallographiques, les intersections des faces

$$A', (mno); \quad B', (\overline{mno}); \quad C', (001);$$

Les symboles des trois zones sont, avant toute réduction,

$$B'C', (nmo); \quad C'A', (\overline{nmo}); \quad A'B', (002mn);$$

$$\cos A'Z = 0, \quad \cos B'Z = 0.$$

EXEMPLES :

218. Dans un cristal d'épidote (fig. 93 et 94) les zones qui servent à déterminer les symboles des faces sont $meilrm'$, $mkoo'k'm'$, $tuzz'u't'$, $lyqq'y'l'$, $lnz'l'$, $rnn'r'$, $mdzqnxm'$, $muym'$, $ryzox'r'$, $tyno'd't'$, $edd'e'$.

A' , B' se trouvent donc sur le grand cercle qui a Z pour pôle et passe par Y et par A ; donc Z , Z' coïncident. De plus (n° 205)

$$\cotang A'Y = \frac{na}{mb} \sin A'YC = \frac{na}{mb} \cos AX,$$

$$\cotang B'Y = -\frac{na}{mb} \sin B'YC = -\frac{na}{mb} \cos AX.$$

A' , B' sont donc à égale distance de part et d'autre de A .

$$\cos C'X = 0, \quad \cos C'Y = 0;$$

donc C' et C coïncident. Les points X' , Y' sont par conséquent sur le grand cercle XY , et on les déterminera en faisant

$$B'X' = 90^\circ, \quad A'Y' = 90^\circ;$$

il est d'ailleurs évident que

$$\begin{aligned} A'X' &= B'Y', & A'X &= B'X, \\ B'Y &= 180^\circ - A'Y; & B'A' &= 180^\circ - 2A'Y. \end{aligned}$$

Dans les triangles rectilatéraux $YB'X'$, $A'B'X'$, $YA'X$, on a, eu égard aux relations précédemment établies,

$$\begin{aligned} \sin A'Y \cos A'B'X' &= \cos X'Y, \\ \cotang A'Y &= \tang X'Y \cos AX, \\ \cos A'X' &= 2 \sin A'Y \cos A'X \cos A'B'X', \\ \cos AX \sin A'Y &= \cos A'X. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie toutes ces équations membre à membre, et si

Soient les symboles de $m, (100); l, (001); n, (111); n', (\bar{1}11);$
 on en conclura (n° 17) les symboles de $r, (\bar{1}01); q, (011);$
 $z, (111); t, (101); o, (210); y, (012); x, (\bar{3}11); i, (\bar{1}03); u, (212);$
 $h, (410); d, (311); e, (301).$

l'on supprime les facteurs communs,

$$2 \sin X'Y \cos A'X = \cos A'X',$$

et comme

$$\text{tang } X'Y = \frac{\text{cotang } A'Y}{\cos AX} = \frac{nu}{mb};$$

on a enfin

$$\frac{\cos A'X}{\cos A'X'} = \frac{\cos B'X}{\cos B'Y'} = \frac{\sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2}}{2na}.$$

Si l'on porte ces expressions dans les formules générales du n° 28 et si l'on supprime les facteurs communs entre les caractéristiques et les paramètres correspondants,

$$\begin{aligned} u' &= nu + mv, \\ v' &= nu - mv, \\ w' &= w, \\ a' &= \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2}, \\ b' &= \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2}, \\ e' &= c \end{aligned}$$

Il est d'ailleurs facile de voir qu'on aura

$$\begin{aligned} \frac{X'Y'}{2} &= 90^\circ - X'Y, \quad \text{tang } \frac{X'Y'}{2} = \frac{mb}{na}; \\ \cos Z'X' &= \cos Z'Y' = \cos \frac{X'Y'}{2} \cos ZX. \end{aligned}$$

Dans quelques cristaux, on a observé une face f commune aux zones mt , un' , une face s commune aux zones mt , ky , et une face b commune aux zones mo , lq ; donc on a les symboles de f , (103); s , (201); b , (010). Les cristaux sont clivables parallèlement aux faces m et t .

Soient m, l, r , etc. (fig. 94) les pôles des faces m, l, r , etc. Étant donnés

$$rt = 51^{\circ}41', \quad tm = 64^{\circ}36', \quad nn' = 70^{\circ}33',$$

on demande la position des autres pôles.

Soit (uvw) le symbole d'un pôle quelconque S placé sur le cercle de zone rtm ; si, dans la formule du n° 27, on remplace P, Q, R et les caractéristiques correspondantes par r, t, m et leurs caractéristiques respectives,

$$\frac{\text{tang } rS - \text{tang } rm}{\text{tang } rt - \text{tang } rm} = \frac{2\omega}{u + \omega};$$

donc

$$(u + \omega) \text{ tang } rS = 2\omega \text{ tang } rt + (u - \omega) \text{ tang } rm;$$

d'où

$$lr = 25^{\circ}44', 5, \quad fr = 34^{\circ}55', 5, \quad er = 81^{\circ}34', \quad ir = 29^{\circ}21', 5, \\ sr = 18^{\circ}6'.$$

Si l'on pose $nml = \varphi$,

$$\text{tang } nr = \text{tang } \varphi \sin nr; \quad \text{tang } iv = \text{tang } \varphi \sin mi;$$

donc

$$iv = 41^{\circ}39', 5, \quad vv' = 96^{\circ}41';$$

de même

$$qq = 64^{\circ}46', \quad zz' = 79^{\circ}9', \quad dd' = 96^{\circ}10'.$$

Si l'on pose $ntr = \psi$,

$$\text{tang } nr = \text{tang } \psi \sin tr, \quad \text{tang } om = \text{tang } \psi \sin tm;$$

donc $om = 58^{\circ} 26'$, $oo' = 63^{\circ} 8'$.

$$\text{tang } by = 2 \text{ tang } bq \quad (\text{n}^{\circ} 207);$$

donc $by = 51^{\circ} 45'$, $yy' = 103^{\circ} 30'$;

$$\text{tang } bu = 2 \text{ tang } bz; \quad \text{tang } bk = 2 \text{ tang } bo,$$

donc

$$bu = 54^{\circ} 33', \quad uu' = 109^{\circ} 6', \quad bk = 50^{\circ} 51', 5, \quad kk' = 101^{\circ} 43'.$$

Si les zones dont le cercle de zone rencontre mt en f et s n'eussent pas existé sur le cristal observé, il aurait fallu connaître les distances de f et s au pôle d'une certaine face déterminée de la zone mt pour déterminer leurs symboles. Que l'on suppose tf , ts mesurés, et que

$$tf = 19^{\circ} 37', \quad ts = 69^{\circ} 47',$$

on a

$$tr = 51^{\circ} 41', \quad rm' = 63^{\circ} 43'.$$

Donc, si, dans les formules du n^o 27, on remplace P, Q, R et les caractéristiques correspondantes par t, r, m' , et leurs caractéristiques respectives, et S par f , dont (uvw) représentera le symbole; on trouve

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = 3;$$

donc le symbole de f est (103) , et de même celui de s est $(\bar{2}01)$.

Déterminer l'inclinaison des axes OZ, OX et des quantités proportionnelles aux paramètres.

Soient Z, X les points où les axes OZ, OX percent la sphère de projection. Puisqu'on a pour symboles de $l, (001)$, et de $m, (100)$,

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad mZ &= 90^\circ, \quad lX = 90^\circ, \quad ml = 90^\circ 32',5; \\ ZX &= 89^\circ 27',5. \end{aligned}$$

L'axe OY perce la sphère de projection en b ; si a, b, c représentent les paramètres du cristal, on a, puisque le symbole de u est (212) ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a \cos uX &= b \cos ub = \frac{1}{2}c \cos uZ; \quad \sec uX = \sec ut \operatorname{coséc} tl, \\ \sec uZ &= \sec ut \operatorname{coséc} tm; \end{aligned}$$

donc les paramètres a, b, c sont respectivement proportionnels à

$$2 \sec ut \operatorname{coséc} tl; \quad \sec ub; \quad \sec ut \operatorname{coséc} tm.$$

Trouver les symboles des faces quand on adopte les axes des zones zz', mt, oo' comme axes cristallographiques. Les symboles des zones zz', mt, oo' , rapportées aux axes primitifs, sont respectivement $(\bar{1}01), (010), (001)$; donc (n° 28), si (uvw) est le symbole d'une face quelconque rapportée aux axes primitifs, $(u'v'w')$ son symbole quand on la rapporte au nouveau système d'axes,

$$u' = u - v; \quad v' = v; \quad w' = w.$$

Si Z', X' sont les points où les nouveaux axes OZ', OX' rencontrent la sphère de projection,

$$Z'X' = 180^\circ - mt = 115^\circ 24'.$$

219. Dans un cristal de feldspath (*fig.* 95) les zones qui servent à déterminer les symboles des faces sont $tzmz't', pqxyp, pnmu'p', xomox, qoznq, potp, yonty$.

m est perpendiculaire aux faces p, q, x, y ; donc le sym-

bole de m est (010) . Soient celui de t , (110) ; t' , $(\bar{1}10)$; o , (111) ; d'où (n° 17) on conclut pour les symboles des autres faces, p , (001) ; n , (021) ; y , (201) ; x , (101) ; z , (130) ; g , (203) . D'après cela, le cristal est une combinaison des formes $\{010\}$, $\{001\}$, $\{110\}$, $\{130\}$, $\{021\}$, $\{201\}$, $\{101\}$, $\{203\}$, $\{111\}$. Il est clivable parallèlement aux faces des formes $\{001\}$, $\{110\}$, $\{010\}$.

Étant donnés les angles tt' , pt , px (*fig. 96*), quand t , p , x , etc. représentent les pôles des faces t , p , x , etc., on demande la position des pôles q , y , n , o , z .

Soit a le point de rencontre de tt' , px ; le symbole de a est (100) ,

$$mt = \frac{1}{2} tt', \quad \cos pt = \sin mt \cos pa.$$

Les triangles rectangles xpo , apt , qui ont un angle commun en p , donnent l'équation

$$\sin pa \cot om = \sin px \cot tm.$$

$$2 \cot pq = 3 \cot px - \cot pa; \quad 2 \cot py = \cot px + \cot pa \quad (\text{n° 27});$$

$$\text{tang } mt = 3 \text{tang } mz \quad (\text{n° 207}).$$

Les triangles rectangles tya , $n'y p'$, qui ont un angle commun en y , donnent l'équation

$$\sin ay \cot mn' = \sin p'y \cot mt.$$

Si

$$tt' = 118^\circ 49', \quad pt = 67^\circ 44', \quad px = 60^\circ 20',$$

on aura

$$pa = 63^\circ 53', \quad om = 63^\circ 7', \quad pq = 34^\circ 13', \quad py = 80^\circ 23',$$

$$mz = 29^\circ 25', \quad mn' = 45^\circ 3'.$$

220. Dans un cristal d'acide oxalique (*fig. 97*), les zones $pacp'$, $pce'p'$ ont leurs axes à angles droits l'un sur l'autre;

$aem'a'$, $cemc'$ sont des zones. p , a , c , etc. représentent les pôles des faces p , a , c , etc.,

$$pa = 50^{\circ}40', \quad pc = 76^{\circ}45', \quad mm' = 63^{\circ}5'.$$

Si d est l'intersection des cercles de zones pa , mm' , il résulte de mesures approximatives que

$$2 \cot pd = \cot pa - \cot pc \quad (\text{n}^{\circ} 27);$$

donc $pd = 73^{\circ}43'$.

Les triangles rectangles ecp , mcd , qui ont un angle commun en c , donnent l'équation

$$\sin pc \cot pc = \sin dc \cot md,$$

d'où $pe = 72^{\circ}44'$, $ee' = 34^{\circ}32'$.

Il arrive souvent que les faces e , e' n'ont pas leurs parallèles; dans ce cas (n^o 204), la forme à laquelle ces faces appartiennent est hémihédrique.



CHAPITRE VII.

SYSTÈME PRISMATIQUE OBLIQUE NON SYMÉTRIQUE.

221. Dans le système prismatique oblique non symétrique, la forme $\{hkl\}$ n'a que deux faces (hkl) , $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ (*).

222. Déterminer la position d'un pôle quelconque.

Soient (*fig. 98*) X, Y, Z les points où les axes cristallographiques percent la sphère de projection; A, B, C les pôles de (100), (010), (001); P le pôle de (hkl) .

Les triangles ZYX, ABC sont supplémentaires; on aura donc

$$\begin{aligned}\cos PX &= \sin PBC \quad \sin PB = \sin PCB \quad \sin PC, \\ \cos PY &= \sin PCA \quad \sin PC = \sin PAC \quad \sin PA, \\ \cos PZ &= \sin PAB \quad \sin PA = \sin PBA \quad \sin PB.\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ;$$

(*) De sorte qu'à un système donné de valeurs numériques pour les caractéristiques h, k, l correspondent différentes formes suivant le signe de ces caractéristiques; le nombre total de ces formes est évidemment de quatre, représentées par $\{hkl\}$, $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\}$, $\{h\bar{k}l\}$, $\{\bar{h}kl\}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad \frac{b}{h} \sin \text{PAC} &= \frac{c}{l} \sin \text{PAB}, \\ \frac{c}{l} \sin \text{PBA} &= \frac{a}{h} \sin \text{PBC}, \\ \frac{a}{h} \sin \text{PCA} &= \frac{b}{k} \sin \text{PCB} : \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \text{tang } \theta &= \frac{hc}{lb}, \\ \text{tang } \frac{1}{2}(\text{PAB} - \text{PAC}) &= \text{tang } \frac{1}{2} \text{BAC} \text{ tang } (45^\circ - \varphi); \\ \text{tang } \varphi &= \frac{la}{hc}, \\ \text{tang } \frac{1}{2}(\text{PBC} - \text{PBA}) &= \text{tang } \frac{1}{2} \text{CBA} \text{ tang } (45^\circ - \varphi); \\ \text{tang } \psi &= \frac{hb}{ka}, \\ \text{tang } \frac{1}{2}(\text{PCA} - \text{PCB}) &= \text{tang } \frac{1}{2} \text{ACB} \text{ tang } (45^\circ - \varphi). \end{aligned}$$

D'après cela, connaissant les angles A, B, C, on connaîtra les segments dans chacun de ces angles par les axes PA, PB, PC.

223. Soient x, y, z les points où les arcs PX, PY, PZ rencontrent les côtés opposés: les angles en x, y, z sont droits; donc

$$\begin{aligned} \frac{\sin Bx}{\cotang \text{PBC}} &= \frac{\sin Cx}{\cotang \text{PCB}}, \\ \frac{\sin Cy}{\cotang \text{PCA}} &= \frac{\sin Ay}{\cotang \text{PAC}}, \\ \frac{\sin Az}{\cotang \text{PAB}} &= \frac{\sin Bz}{\cotang \text{PBA}}. \end{aligned}$$

De ces équations on tire

$$\begin{aligned} \text{tang } \frac{1}{2}(Bx - Cx) &= \frac{\sin(\text{PCB} - \text{PBC})}{\sin(\text{PCB} + \text{PBC})} \cot \frac{1}{2} \text{BC}, \\ \text{tang } \frac{1}{2}(Cy - Ay) &= \frac{\sin(\text{PAC} - \text{PCA})}{\sin(\text{PAC} + \text{PCA})} \cot \frac{1}{2} \text{CA}, \\ \text{tang } \frac{1}{2}(Az - Cz) &= \frac{\sin(\text{PBA} - \text{PAB})}{\sin(\text{PBA} + \text{PAB})} \cot \frac{1}{2} \text{AB}. \end{aligned}$$

De là résulte que les segments des côtés A, B, C, déterminés par les perpendiculaires menées par P, sont connus.

On a ensuite

$$\cot PA = \cos PAB \cot Az = \cos PAC \cot Ay,$$

$$\cot PB = \cos PBC \cot Bx = \cos PBA \cot Bz,$$

$$\cot PC = \cos PCA \cot Cy = \cos PCB \cot Cz.$$

224. Soient H, K, L les points de rencontre des côtés de ABC avec PA, PB, PC; les notations symboliques des points ainsi déterminés seront (okl), (hol), (hko), et l'on aura

$$\frac{\cos HY}{\cos HZ} = \frac{\sin HC \sin C}{\sin HB \sin B} = \frac{\sin HC \sin AB}{\sin HB \sin CA};$$

d'où

$$\frac{k \sin HB}{b \sin AB} = \frac{l \sin HC}{c \sin CA}.$$

De même

$$\frac{l \sin KC}{c \sin BC} = \frac{k \sin KA}{a \sin AB},$$

et

$$\frac{h \sin LA}{a \sin CA} = \frac{h \sin LB}{b \sin BC};$$

par conséquent

$$\tan \frac{1}{2} (HB - HC) = \tan \frac{1}{2} BC \tan (45^\circ - \alpha),$$

équation où

$$\tan \alpha = \frac{kc \sin CA}{lb \sin AB};$$

$$\tan \frac{1}{2} (KC - KA) = \tan \frac{1}{2} CA \tan (45^\circ - \beta),$$

équation où

$$\tan \beta = \frac{la \sin AB}{hc \sin BC};$$

$$\tan \frac{1}{2} (LA - LB) = \tan \frac{1}{2} AB \tan (45^\circ - \gamma),$$

équation où

$$\text{tang } \gamma = \frac{hb \sin BC}{ka \sin CA}.$$

Les segments formés sur les côtés de ABC par H, K, L une fois déterminés par les équations précédentes, on trouvera AH, BK, CL par les équations

$$\begin{aligned} \sin AP \sin APC &= \sin AC \sin PCA, \\ \sin HP \sin HPC &= \sin HC \sin PCB, \\ \sin AP \sin APB &= \sin AB \sin PBA, \\ \sin HP \sin HPB &= \sin HB \sin PBC. \end{aligned}$$

De plus (n° 222)

$$\frac{a}{h} \sin PCB = \frac{b}{k} \sin PCA, \quad \frac{c}{l} \sin PBA = \frac{a}{h} \sin PBC;$$

d'où

$$\frac{\sin PH}{\sin PA} = \frac{hb \sin HC}{ka \sin CA} = \frac{hc \sin HB}{la \sin AB}.$$

De même

$$\frac{\sin PK}{\sin PB} = \frac{kc \sin KA}{lb \sin AB} = \frac{ka \sin KC}{hb \sin BC},$$

et

$$\frac{\sin PL}{\sin PC} = \frac{la \sin LB}{hc \sin BC} = \frac{lb \sin LA}{kc \sin CA};$$

et par conséquent

$$\text{tang } \frac{1}{2} (PA - PB) = \text{tang } \frac{1}{2} HA \text{ tang } (45^\circ - \varpi),$$

équation où

$$\text{tang } \varpi = \frac{hb \sin HC}{ka \sin CA} = \frac{hc \sin HB}{la \sin AB};$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (PB - PK) = \text{tang } \frac{1}{2} KB \text{ tang } (45^\circ - \rho),$$

équation où

$$\begin{aligned} \text{tang } \rho &= \frac{kc \sin KA}{lb \sin AB} = \frac{ka \sin KC}{lb \sin BC}; \\ \text{tang } \frac{1}{2}(\text{PC} - \text{PL}) &= \text{tang } \frac{1}{2} \text{LC tang } (45^\circ - \sigma), \end{aligned}$$

équation où

$$\text{tang } \sigma = \frac{la \sin LB}{hc \sin BC} = \frac{lb \sin LA}{kc \sin AC}.$$

On connaît donc les segments déterminés sur les arcs AH, BK, CL par le point P.

Dans la précédente recherche, on a supposé que les caractéristiques de P et celles du pôle le plus rapproché des formes $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$ sont des quantités positives. Lors donc que certaines caractéristiques de P deviendront négatives, il faudra changer leurs signes et les signes des caractéristiques correspondantes dans les symboles des autres pôles du cristal.

225. Déterminer la distance angulaire de deux pôles quelconques.

Soient P, Q les deux pôles. Après avoir trouvé les distances de P et de Q aux trois sommets de ABC et les angles que chacune de ces distances fait avec le côté adjacent, on connaîtra l'angle qu'elles font entre elles : on a donc deux côtés d'un triangle sphérique et l'angle compris; on en déduira la longueur PQ du côté opposé.

226. Déterminer l'inclinaison des axes et le rapport des paramètres.

Lorsque l'on connaît les distances réciproques de A, B, C, pôles des faces (100) , (010) , (001) , et la distance de P, pôle de (hkl) , à deux quelconques de ces points, on en déduit la distance de P au troisième aussi bien que l'inclinaison de PA, PB, PC sur les côtés du triangle ABC; on peut donc trouver $\cos PX$, $\cos PY$, $\cos PZ$ en fonction de PA,

PB, PC et des segments déterminés dans les angles A, B, C par PA, PB, PC.

Le rapport des paramètres dépend alors des équations

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ.$$

D'un autre côté les triangles ABC, XYZ sont supplémentaires; donc

$$YZ = 180^\circ - A; \quad ZX = 180^\circ - B; \quad XY = 180^\circ - C.$$

227. Étant donnés les symboles de quatre pôles D, E, F, G (*fig.* 99) et cinq des six arcs DF, FE, EG, GD, DE, FG, trouver l'inclinaison des axes et les rapports des paramètres.

Soient A, B, C les pôles de (100), (010), (001); soit H le point d'intersection des cercles DE, FG; L, M, P, Q, R, S, les points où les mêmes cercles rencontrent les côtés de ABC.

Cinq des arcs DF, FE, EG, GD, DE, FG connus suffisent pour calculer le sixième, ainsi que les arcs DH, HE, FH, HG et leurs inclinaisons réciproques.

Les symboles de D, E, F, G, A, B, C sont connus; on calculera donc ceux de H, I, M, N, P, Q, R, S (n° 17). D'après cela, DH, EH, FH, GH ayant été déterminés, on peut déterminer à leur tour HL, HM, HP, HQ, HR, HS, et par suite les côtés du triangle ABC et les distances de H aux trois sommets de ce triangle.

Une fois arrivé à ce point, on calculera les distances angulaires YZ, XZ, XY et les rapports des paramètres a, b, c , par les méthodes de l'article précédent (n° 226).

EXEMPLES :

Dans un cristal d'axinite (*fig. 100*), on observe les zones suivantes : $mpdfem'$, $mltvwm'$, $mrsxycm'$, $mgoni'$, $focwnf'$, $fggyvf'$, $fxtf'$, $fslf'$, $ecqv'e'$, $pyqwp'$, $p\bar{x}vni'$, $pstp'$, $prlp'$.

Soient les symboles de $m, (100)$; $f, (010)$; $v, (001)$; $x, (111)$; on en déduira (n° 17) ceux de $y, (011)$; $t, (101)$; $p, (110)$; $e, (\bar{1}10)$; $s, (211)$; $l, (201)$; $r, (311)$; $q, (\bar{1}12)$; $c, (\bar{1}11)$; $w, (\bar{1}01)$; $n, (\bar{1}\bar{1}1)$; $o, (\bar{1}21)$; $g, (021)$. Si l'on mesure les distances d'entre m, p, d, f , pôles des faces m, p, d, f , on trouvera

$$\cot md - \cot mf = 2(\cot mp - \cot mf);$$

donc (n° 27) si (uvw) est le symbole de d ,

$$u = 2, \quad v = 1.$$

d se trouve sur le cercle de zone mf ; donc $w = 0$, donc le symbole de d est (120) .

Soient m, t, p , etc. (*fig. 101*) les pôles des faces m, t, p , etc. Étant donnés

$$mx = 49^{\circ}32', \quad xy = 29^{\circ}52', \quad mt = 44^{\circ}35', \quad tw = 32^{\circ}55', \\ yv = 40^{\circ}51',$$

il s'agit de déterminer la position des autres pôles.

Dans le triangle ymv , dont on connaît les côtés, on trouve

$$ymv = 44^{\circ}41,5', \quad yvm = 88^{\circ}10',5.$$

xm, tm, xmt connus, déterminent $xtm = 84^{\circ}14'$;

lv, fvt, flv connus, déterminent $fv = 97^{\circ}36'$;

fv, vm, fmv connus, déterminent $vfm = 97^{\circ}58',5$,
 $fm = 89^{\circ}55'$;

vn, mx, vmx connus, déterminent $xvm = 44^{\circ}44'$;

vn, xvm, vmp connus, déterminent $mp = 45^{\circ}12'$.

La formule qui exprime la relation entre les distances de quatre pôles situés sur le même cercle de zone (n^o 27) donne

$$\cot fe' = 2 \cot fm - \cot fp; \quad \cot mw = 2 \cot mv - \cot mt;$$

$$\cot mc = 2 \cot my - \cot mx;$$

donc

$$fe' = 135^{\circ}12', \quad mw = 119^{\circ}50', \quad mc = 115^{\circ}35'.$$

nw, mp, wmp connus, déterminent $pw = 115^{\circ}50',5$;

my, mp, ymp connus, déterminent $py = 58^{\circ}53'$.

$$2 \cot pq = \cot pw + \cot py; \quad 2 \cot md = \cot mf + \cot mp,$$

$$\cot me = 2 \cot mf - \cot mp; \quad \cot fg = 2 \cot fy - \cot fv,$$

$$\cot ms = 2 \cot mx - \cot my; \quad \cot mr = 3 \cot mx - 2 \cot my,$$

$$\cot ml = 2 \cot mt - \cot mv; \quad 4 \cot mk = 5 \cot mt - \cot mv;$$

donc

$$pq = 86^{\circ}35', \quad md = 63^{\circ}34', \quad me = 134^{\circ}43', \quad fg = 34^{\circ}53',5,$$

$$ms = 33^{\circ}20',5, \quad mr = 25^{\circ}27', \quad ml = 28^{\circ}57', \quad mk = 39^{\circ}30'.$$

Si les axes percent la surface de la sphère de projection en XYZ, mfv est le triangle polaire de XYZ; YZ, ZX.

(143)

XY sont les suppléments des angles de mvf , vfn , fvm (n° 226).

Les côtés fv , vm , mf donnés, déterminent $fmv = 73^{\circ}25'$,

$$fvm = yvm = 88^{\circ}10',5, \quad vfn = 97^{\circ}58',5;$$

donc

$$YZ = 82^{\circ}1',5, \quad ZX = 101^{\circ}44', \quad XY = 91^{\circ}49',5.$$

Soient a , b , c les paramètres du cristal; puisque x a pour symbole (111)

$$a \cos xX = b \cos xY = c \cos xZ,$$

$$\cos xX = \sin xv \sin xvf, \quad \cos xY = \sin xv \sin xvm;$$

$$\cos xZ = \sin xm \sin xmf;$$

donc (n° 222)

$$\frac{2,023}{a} = \frac{1,976}{b} = \frac{1,580}{c}.$$

Déterminer les symboles des faces quand on prend pour axes cristallographiques l'intersection des zones mp , pt , tm .

Les symboles des trois zones, rapportés aux systèmes d'axes primitifs, sont $\{000\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{010\}$; donc (n° 28), si u , v , w représentent les caractéristiques d'une face rapportée aux axes primitifs, et u' , v' , w' les caractéristiques de la même face rapportée aux nouveaux axes,

$$u' = w, \quad v' = -u + v + w, \quad w' = v.$$

D'après cela les symboles des faces sont f , (011) ; m , (010) ; t , (100) ; v , (110) ; w , (120) ; l , (110) ; p , (001) ; e , (021) ; o , (142) ; γ , (121) ; c , (131) ; z , (111) ; s , (101) ; r , $(\bar{1}11)$; n , (111) ; q , (241) ; g , (132) ; d , (012) .

229. Dans un cristal de sulfate de cuivre (*fig.* 103), les zones sont mnm' , $rvkoqwr'$, $rxpr'$, $mpvm'$, $npkn'$, $tpol'$, $txvt'$.

Soient les symboles de k , (001); n , (010); ν , (101); m , ($\bar{1}10$); on en conclura (n° 17) r , (100); p , (011).

Si l'on mesure les distances des pôles r , ν , k , o , q , w , on trouve que si r , ν , k , etc. représentent les pôles de r , ν , o , etc.,

$$\begin{aligned} \cot rv - \cot rk &= -(\cot ro - \cot rk) = -\frac{1}{2}(\cot rq - \cot rk) \\ &= -\frac{1}{3}(\cot rw - \cot rk); \end{aligned}$$

donc (n° 27) on a les symboles o , ($\bar{1}01$); q , ($\bar{2}01$); w , ($\bar{3}01$); puis (n° 17) t , (110); x , (211). h , s , z (*fig.* 104) représentent les pôles de faces qui n'existent pas sur le cristal représenté (*fig.* 103). Les symboles de ces faces sont : h , (210); s , (111); z , (311).

Étant données les distances nt , tr , nk , pt , pr , déterminer la position des autres pôles.

rt , rn connus, déterminent rh (n° 26 ou 27);

pt , tr , rp connus, déterminent ptr et prt ;

pt , tn , ptr connus, déterminent pn et pnt ;

kn , ro , pnt connus, déterminent kr et krn ;

krn , ptr , tr connus, déterminent ro ;

kr , rh , krn connus, déterminent khr ;

khr , prt , rh connus, déterminent rx ;

rx , rp connus, déterminent rs , rz (n° 26 ou 27);

rk , ro connus, déterminent de même rv , rq , rw .

Les valeurs des quatre distances angulaires qu'on a supposées propres à servir au calcul de la position des pôles sont

$$\begin{aligned} nt &= 30^{\circ}51', & tr &= 69^{\circ}50', & nk &= 109^{\circ}38', \\ pt &= 52^{\circ}20', & pr &= 76^{\circ}33'. \end{aligned}$$

Les trois cercles de zones rt , rp , rk passent par tous les pôles du cristal; on connaît l'inclinaison réciproque des plans de ces cercles et la distance de r à chaque pôle; on peut donc aisément calculer la distance de deux pôles quelconques qui, dans un triangle sphérique dont on connaît deux côtés avec l'angle compris, est opposée à cet angle.

Si X , Y , Z sont les points où les axes cristallographiques percent la surface de la sphère de projection,

$$XY = 180^\circ - nkr; \quad YZ = 180^\circ - nrk; \quad ZX = 180^\circ - knr.$$

Soient a , b , c les paramètres. Puisque les pôles b et p ont respectivement pour symboles (110) , (011) , on a (n° 222)

$$\begin{aligned} a \cos tX &= b \cos tY; & b \cos pY &= c \cos pZ, \\ \cos tX &= \sin tn \sin tnp; & \cos tY &= \sin tr \sin trk, \\ \cos pY &= \sin pr \sin prk; & \cos pZ &= \sin pr \sin prt, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1 \sin tr \sin trk}{a \sin tn \sin tnp} = \frac{1}{b} = \frac{1 \sin prk}{c \sin prt}.$$



CHAPITRE VIII.

DES CRISTAUX HÉMITROPES.

230. Un cristal hémitrope se compose de deux cristaux accolés de telle manière que l'un d'eux viendrait occuper la place de l'autre s'il tournait de deux angles droits autour d'un axe de rotation perpendiculaire à un plan, lequel est ou peut être une face de l'un et de l'autre cristal. Cet axe de rotation s'appelle *axe d'hémitropie*; on nomme *plan d'hémitropie* le plan auquel cet axe est normal.

231. Soient les pôles des deux cristaux projetés sur la même sphère (*fig. 104*).

Soient T, T' les extrémités d'un diamètre perpendiculaire au plan d'hémitropie; P, p les pôles de deux faces correspondantes appartenant aux deux cristaux, p' le pôle opposé à p .

Puisque p viendrait coïncider avec P si le cristal faisait précisément une demi-rotation autour de T, T' , on peut faire passer par PTp un arc de grand cercle, et T partagera par moitié l'arc Pp .

Si Q, q représentent de même les pôles de deux autres faces correspondantes quelconques appartenant aux deux cristaux, le point T partagera en deux parties égales l'arc Qq .

Par conséquent, les arcs de grands cercles qui réunissent deux à deux les pôles des faces correspondantes apparte-

nant aux deux cristaux, passent tous par le pôle du plan d'hémitropie, et ce pôle les partage en deux parties égales.

Si p' , q' sont les pôles des faces opposées respectivement à p et à q , il est évident que les arcs $p'P$, $q'Q$ seront partagés par moitié par le plan du grand cercle MN qui est perpendiculaire au premier et a T , T' pour pôles. Les pôles des faces opposées appartenant aux deux cristaux sont donc symétriquement placés par rapport à un grand cercle dont le plan est parallèle à celui d'hémitropie.

232. Pour découvrir l'axe d'hémitropie d'un cristal hémitrope quelconque quand on ne peut l'apercevoir à la simple inspection, il faut déterminer, par des mesures ou par l'étude des zones, l'intersection de deux grands cercles qui contiennent chacun les pôles de deux faces opposées ou correspondantes appartenant à chaque cristal. Si les intersections des deux cercles sont les pôles de deux faces correspondantes qui font partie de l'une et de l'autre forme cristalline, ces intersections sont les pôles d'un plan d'hémitropie.

Soient P et Q les pôles de deux faces quelconques de l'un des cristaux ; p , q les pôles des faces correspondantes de l'autre cristal ; p' , q' les pôles des faces opposées à p , q ; T , T' les intersections des cercles pPp' , qQq' . Si T est le pôle de deux faces correspondantes appartenant à l'une et l'autre forme cristalline, les triangles PTQ , pTq sont égaux et semblables ; on peut donc faire coïncider p , q avec P , Q , en faisant tourner le cristal auquel p , q appartiennent de 180° autour de TT' ; T , T' sont donc les pôles d'un plan d'hémitropie.

233. Étant donné le plan d'hémitropie et les angles compris entre les faces de l'un des cristaux, déterminer les angles compris entre deux faces quelconques appartenant chacune à un cristal différent.

Soient d'abord P , P' les pôles de deux faces opposées ap-

(148)

partenant chacun à un cristal différent,

$$PT = PT',$$

donc

$$PP' = 180^\circ - 2PT.$$

Lorsque PT est plus grand que 90° , les faces P, P' forment un angle rentrant.

Soient ensuite P, Q' deux faces quelconques appartenant chacune à un cristal différent; PT, QT, PQ étant connus, on peut déterminer $PTQ; TQ' = 180^\circ - TQ$; $PT, Q'T, PTQ$ étant connus, on peut déterminer PQ' .

EXEMPLES

de cristaux hémitropes appartenant au système octaédrique.

234. Dans les cristaux qui appartiennent au système octaédrique, l'axe d'hémitropie est perpendiculaire et a une face de $\{111\}$ et de $\{011\}$.

235. Dans un cristal hémitrope de fer oxydulé magnétique (*fig. 105*), les deux octaèdres sont réunis de telle manière que la face o d'un cristal est parallèle à la face o , de l'autre, et que les faces o, o', o, o , font partie de la même zone.

L'un des cristaux prendrait évidemment la position même de l'autre s'il tournait de 180° autour d'un axe perpendiculaire aux faces o, o ; cet axe est par conséquent celui d'hémitropie. Si o, o', o', o , représentent les pôles des faces désignées par les mêmes lettres,

$$\begin{aligned} oo' &= 70^\circ 31', 7 \text{ (n}^\circ \text{ 56)}, & o'o'_1 &= 180^\circ - 2oo' = 38^\circ 56', 5, \\ o''o &= 109^\circ 28', 3, & o''o'_1 &= 180^\circ - 2oo'' = 38^\circ 56', 5, \end{aligned}$$

les faces o'', o'' forment un angle rentrant.

236. Dans un cristal hémitrope de blende (*fig. 106*), les individus sont des dodécaèdres.

Six faces de l'un de ces cristaux coïncident avec six faces de l'autre; l'un des cristaux prendrait la même position que l'autre s'il tournait de 180° autour d'une parallèle à l'intersection des faces d, d' , laquelle est perpendiculaire à une face de $\{111\}$; cette droite est donc l'axe d'hémitropie.

237. Dans un cristal hémitrope de spath-fluor (*fig. 107*), les individus sont des cubes. Si a, a', a'', a, a', a'' repré-

sentent les pôles des faces désignées par les mêmes lettres, on trouve que

$$aa' = a, a', \quad a'' a'' = 109^{\circ} 28', 3.$$

Les arcs $aa', a' a'$, qui joignent les pôles des faces correspondantes de chaque cristal, se coupent au point o , milieu de l'arc $a'' a''$,

$$oa'' = 54^{\circ} 44', 8,$$

et l'arc oa'' partage évidemment par moitié l'angle $aa'' a'$; o est donc le pôle d'une face de l'octaèdre, l'axe d'hémitropie est donc une normale à la face de $\{111\}$ qui résulterait d'une troncature sur l'angle solide formé par les faces a, a', a'' .

238. Un cristal hémitrope d'or (*fig.* 108) se compose de deux icositessaraèdres $\{311\}$.

Les zones pr, sq de l'un des cristaux coïncident avec les zones $p'r', s'q'$ de l'autre; d'ailleurs la face de l'octaèdre adjacente aux faces m, r, s est commune aux zones pr, qs ; les grands cercles qui passent par les pôles p, p' et q, q' se coupent en o , pôle de cet octaèdre; la normale à l'une de ses faces est par conséquent l'axe d'hémitropie. Si p, q, p', q' représentent les pôles des faces p, q, p', q' , on a

$$pp' = 180^{\circ} 2'; \quad po = 20^{\circ} 4'; \quad qq' = -20^{\circ} 4'.$$

Les faces q, q' forment un angle rentrant.

239. Un cristal hémitrope de diamant (*fig.* 109) se compose de deux hémioctaèdres dont les faces sont parallèles aux faces alternatives du même octaèdre; l'un des cristaux prendrait la même position que l'autre s'il tournait de 180° autour d'une normale à une face de la forme $\{011\}$; cette normale est donc l'axe d'hémitropie.

240. Un cristal de pyrite jaune (*fig.* 110) est composé

de deux hémitétrakishexaèdres dont les faces sont parallèles à la même forme holoédrique; il est aisé de voir, à l'inspection de la *fig.* 10, que les pôles de l'un des cristaux coïncideraient avec ceux de l'autre si le premier tournait de 180° autour de deux pôles opposés quelconques de $\{011\}$. La normale à une face quelconque de $\{011\}$ est donc un axe d'hémitropie.

241. Dans les quatre premiers exemples, l'axe d'hémitropie était perpendiculaire à la face de l'octaèdre; c'est là peut-être le seul mode de groupement véritablement hémitrope propre aux cristaux de ce système. Les hémitropies analogues à celles que présentent les deux derniers exemples, hémitropies dont l'axe est perpendiculaire à une face de $\{011\}$, ne peuvent se produire que par la réunion de deux formes hémiedriques. Dans de pareils cristaux (Mons, *Naturgeschichte des Mineralreichs*, 154-158), les deux individus dont on suppose le groupe formé ont leurs axes cristallographiques parallèles; leurs plans de clivage sont aussi parallèles et traversent le milieu cristallisé sans discontinuité. On ne peut donc décider avec certitude si de pareils cristaux doivent être considérés comme le résultat d'un groupement hémitrope, ou comme des individus isolés dont les faces se répètent avec un certain degré de régularité.

EXEMPLES

de cristaux hémitropes appartenant au système pyramidal.

242. Dans les cristaux hémitropes qui appartiennent au système pyramidal, l'axe d'hémitropie est perpendiculaire à une face de l'une des formes $\{100\}$, $\{110\}$, $\{hol\}$, $\{hh\}L$.

243. Dans un cristal d'étain oxydé (*fig. 111*), les deux faces pyramidales s, s' de l'un des cristaux sont respectivement parallèles aux faces correspondantes s', s de l'autre l'un des cristaux viendrait prendre la position de l'autre s'il faisait une demi-révolution autour d'un axe perpendiculaire à une face qui appartient à la zone ss' , et qui fait des angles égaux avec les faces s, s' ; cette perpendiculaire est donc l'axe d'hémitropie. Soit C le pôle de (001) , t le pôle de la face qui résulterait d'une troncature sur l'arête formée par l'intersection des faces s, s' ,

$$cs = 43^{\circ}38';$$

donc (n° 112)

$$ct = 33^{\circ}59'; \quad ts = 29^{\circ}12'; \quad ts'' = 71^{\circ}23'; \quad tg = 63^{\circ}35'; \quad tg'' = 119^{\circ}12';$$

d'après cela

$$gg_t = 52^{\circ}50'; \quad g''g'_t = -58^{\circ}12'; \quad ss_t = 121^{\circ}36'; \quad s''s''_t = 37^{\circ}14'.$$

Si l'on prend pour symboles des faces s, s' (111) , $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$, le symbole de t sera (101) ; si l'on prend pour symboles des faces s, s' (101) , (011) , le symbole de t sera $(11\bar{2})$.

244. Dans un cristal de pyrite cuivreuse (*fig. 112*), les zones $pp', p_i p'_i$ coïncident, et les faces p et p_i sont parallèles; dans ce cas l'axe d'hémitropie est évidemment perpendiculaire à p , face de la forme $\{111\}$.

Si p, p', p'', \dots représentent les pôles des faces p, p', p'', \dots ,

$$pa = 54^{\circ}20'; \quad pp'' = 108^{\circ}40'; \quad pp' = 7^{\circ}77'; \quad pp''' = 109^{\circ}53'; \\ pb = 29^{\circ}45'; \quad pc = 39^{\circ}55'.$$

D'après cela,

$$aa_i = 71^{\circ}20'; \quad p''p''_i = -37^{\circ}20'; \quad p'p'_i = 39^{\circ}46', \\ p'''p'''_i = -39^{\circ}46'; \quad bb_i = 20^{\circ}30'; \quad cc_i = 109^{\circ}11'.$$

245. Les individus qui composent un cristal hémitrope de cuivre pyriteux (*fig. 113*) ont pour formes des pyramides carrées qui ont un caractère d'hémiédrie, à cause de la dimension très-inégale de leurs faces. Les grandes faces de l'un des cristaux sont parallèles aux petites faces de l'autre; l'un des cristaux prendrait évidemment la place de l'autre s'il tournait de 180° autour d'un axe perpendiculaire à l'une quelconque des faces d'un prisme carré qui résulterait de la troncature des arêtes $pp, p'p'$; l'axe d'hémitropie est par conséquent normal à une face de $\{100\}$ ou de $\{110\}$, suivant que l'on regarde p comme une face de $\{101\}$ ou de $\{111\}$.

246. Dans un cristal hémitrope de schéelin calcaire (*fig. 114*), les individus sont semblables au cristal représenté (*fig. 55*) et sont accolés de telle sorte que les faces p de chaque cristal coïncident. L'un des cristaux prendrait la place de l'autre s'il tournait de 180° autour d'un axe perpendiculaire à l'une quelconque des faces d'un prisme carré qui résulterait de la troncature des arêtes intersections de $pp, p'p', nn$. L'axe d'hémitropie est par conséquent normal à une face de l'une des deux formes $\{100\}, \{110\}$.

247. Dans les deux derniers exemples, les individus, supposés groupés, ont leurs axes cristallographiques et leurs plans de clivage parallèles; il est douteux, par conséquent, qu'on doive considérer ces cristaux comme hémitropes. D'un autre côté, dans le dernier exemple, les formes hémiédriques sont dissemblables, et les stries parallèles à l'intersection de a avec p s'arrêtent à une ligne qui partage les faces $pp, p'p'$, en deux moitiés; ces deux moitiés semblent ainsi appartenir à deux cristaux différents.

EXEMPLES

de cristaux hémitropes appartenant au système rhomboédrique.

248. Dans les cristaux hémitropes qui appartiennent au système rhomboédrique, l'axe d'hémitropie est perpendiculaire aux faces de $\{111\}$ ou à une face de l'un des rhomboèdres.

249. Un cristal hémitrope de spath calcaire (*fig. 115*) résulte du groupement de deux individus formés par la combinaison de $\{011\}$, (*g*); $\{11\bar{2}\}$, (*c*).

Les faces *c* appartenant aux deux cristaux coïncident. L'un des cristaux prendrait la même position que l'autre s'il tournait de deux angles droits autour d'une ligne parallèle aux intersections de *c*, *c'*; mais cette ligne est perpendiculaire à la face (111), elle est donc l'axe d'hémitropie.

250. Les individus qui composent le cristal hémitrope de spath calcaire (*fig. 116*) sont des rhomboèdres dont les faces sont parallèles aux plans de clivage.

Deux faces d'un cristal font, avec deux faces de l'autre, deux angles dièdres obtus égaux, et l'angle compris entre les normales aux faces *p*, *p*, est double de l'angle compris entre la normale à *p* et la normale à (111). L'un des cristaux prendrait donc la place de l'autre s'il tournait de 180° autour de la normale à la face (111). Cette normale est par conséquent l'axe d'hémitropie.

251. Les individus qui composent un cristal hémitrope de spath calcaire (*fig. 117*) sont une combinaison des formes $\{111\}$, (*o*); $\{11\bar{1}\}$, (*c*); les zones *co*, *c'o*, coïncident; $cc = 52^\circ 30', 5$. Soient *t*, *t'* les points d'intersection des arcs *cc*, *c'c'*, menés par les pôles de deux faces opposées appar-

tenant chacune à un cristal différent,

$$t'c, = 90^\circ - \frac{1}{2}cc, = 63^\circ 45'; \quad ot = 90^\circ - t'c, = 26^\circ 15';$$

t est par conséquent le pôle d'une face de la forme $\{011\}$; l'axe d'hémitropie est donc perpendiculaire à une face de la forme $\{011\}$.

252. Les individus qui composent un cristal hémitrope de spath calcaire (*fig. 118*) présentent une combinaison des formes $\{11\bar{2}\}, (c); \{201\}, (r); \{110\}, (g); \{11\bar{1}\}, (f)$; les zones $ge, g'e,$ coïncident; la distance des pôles $gg, = 38^\circ 16', 4$.

Soit t l'intersection des cercles $gg, rr,$ menés par les pôles de deux faces opposées appartenant à chaque cristal,

$$tg = 90^\circ - \frac{1}{2}gg, = 70^\circ 51', 8;$$

t est donc le pôle d'une face de clivage du rhomboèdre $\{100\}$. D'après cela l'axe, d'hémitropie est perpendiculaire à l'un des plans de clivage.

Que c, g, r, f représentent les pôles des faces c, g, r, f ;

$$tc = 45^\circ 23', 4, \quad \text{par conséquent} \quad cc, = 89^\circ 13', 2;$$

$$tc' = 68^\circ 57', \quad \text{par conséquent} \quad c'e' = 42^\circ 6';$$

$$tg' = 37^\circ 27', 5, \quad \text{par conséquent} \quad g'g' = 105^\circ 5';$$

$$tf = 107^\circ 44', \quad \text{par conséquent} \quad ff, = 35^\circ 28';$$

$$tf' = 50^\circ 34', 5, \quad \text{par conséquent} \quad ff', = 78^\circ 51'.$$

253. Les individus qui composent un cristal hémitrope de spath calcaire (*fig. 110*) ont la forme $\{201\}$. Les faces r, r' d'un cristal sont respectivement parallèles aux faces r, r' de l'autre; r, r' échangent leurs positions, et l'un des cristaux prendrait la place de l'autre s'il tournait de deux angles droits autour d'une normale à la face $\{11\bar{1}\}$, dont le pôle partage par moitié l'arc de cercle qui réunit les pôles de r, r' . D'après cela, l'axe d'hémitropie est per-

pendiculaire à la face $\{11\bar{1}\}$ qui résulterait de la troncature de l'arête formée par les faces r, r' .

254. Dans un cristal hémitrope d'argent rouge (*fig. 120*), les faces z, z' d'un cristal coïncident avec les faces z, z' de l'autre.

L'un des cristaux viendrait, par conséquent, à la place de l'autre s'il tournait de deux angles droits autour d'une perpendiculaire à la face dont le pôle partage par moitié l'arc qui réunit les pôles de z, z' .

Les pôles partagent en deux parties égales les arcs qui réunissent deux pôles adjacents des plans de clivage,

$$z z' = 42^{\circ} 21'.$$

Si l'on prend $\{100\}$ pour symbole du rhomboèdre de clivage, z, z' sont les pôles de la forme $\{011\}$, et l'axe d'hémitropie est perpendiculaire à la face $\{211\}$.

EXEMPLES

de cristaux hémitropes appartenant au système prismatique.

255. Dans un cristal hémitrope d'aragonite (*fig. 121*), la zone mn' de l'un des cristaux coïncide avec la zone $m'm'_i$ de l'autre, et les faces m, m_i des deux cristaux sont parallèles; l'un des cristaux prendrait donc la place de l'autre en tournant de deux angles droits autour d'une normale à m ; cette normale est donc l'axe d'hémitropie.

Si m, h, k représentent les pôles des faces m, h, k , on a

$$mm' = 63^{\circ}50'; \quad mh = 58^{\circ}5'; \quad hk = 54^{\circ}13', \\ \cos mk = \cos mh \cos hk;$$

donc

$$mk = 71^{\circ}59',5, \quad mk' = 108^{\circ}0',5;$$

d'après cela,

$$m'm'_i = 52^{\circ}20'; \quad hh_i = 62^{\circ}50'; \quad kk_i = 36^{\circ}1', \\ k'k'_i = -36^{\circ}1'.$$

256. Dans un cristal de staurotide (*fig. 122*), les zones $or, o_i r_i$ des deux cristaux coïncident, et les distances des pôles sont

$$oo_i = -60^{\circ}36'; \quad mm' = 50^{\circ}40'; \quad pr = 55^{\circ}22'.$$

De ces données il résulte que si l'on prend pour symboles de $o, (100); p, (001); m, (110); r, (011)$, un point situé sur le grand cercle oo_i à 90° du milieu de oo_i , et situé, par conséquent, sur le cercle or à $120^{\circ}18'$ de o , sera le pôle de (322) ; l'axe d'hémitropie est donc perpendiculaire à la face (322) .

Soient t le pôle de la face d'hémitropie, m, p, r les pôles des faces m, p, r ,

$$tm = 64^{\circ}46'; \quad tm' = 115^{\circ}14'; \quad lp = 60^{\circ}37'; \quad tr = 30^{\circ}18';$$

d'après cela,

$$mm_i = 50^{\circ}28'; \quad m'm'_i = -50^{\circ}28'; \quad pp_i = 58^{\circ}46'; \\ rr_i = 119^{\circ}24'.$$

257. Dans un cristal de staurotide (*fig. 123*), la zone po de l'un des cristaux coïncide avec la zone $p_i o_i$ de l'autre, et la distance des pôles

$$oo_i = -88^{\circ}24'.$$

D'après cela, un point qui partage par moitié l'arc oo_i , et qui, par conséquent, se trouve éloigné du point o d'un arc de $45^{\circ}48'$ mesuré sur le cercle de zone po , est le pôle de la face (302); l'axe d'hémitropie est donc perpendiculaire à la face (302).

EXEMPLES

de cristaux hémitropes appartenant au système prismatique oblique.

258. Dans un cristal de feldspath (*fig. 124*), les zones mt, py d'un cristal coïncident avec les zones m, t, p, y , de l'autre; l'un des cristaux viendrait donc à la place de l'autre s'il tournait de deux angles droits autour d'un axe perpendiculaire à la face commune aux zones mt, py ; cet axe est, par conséquent, celui d'hémitropie.

Si a est le pôle de la face perpendiculaire à l'axe d'hémitropie, p, y les pôles des faces p, y ,

$$ay = 35^{\circ}44',6; \quad ap = 116^{\circ}7',$$

par conséquent

$$yy', = 108^{\circ}31', \quad pp', = -52^{\circ}14'.$$

259. Dans un cristal hémitrope de feldspath (*fig. 125*), la zone mt de l'un des cristaux coïncide avec la zone m, t , de l'autre, la distance des pôles des faces m, m , opposées dans les deux cristaux est de $121^{\circ}10'$; donc un point situé sur le grand cercle tt , à 90° du milieu de tt , est éloigné de $29^{\circ}25'$ du pôle de m et, par conséquent, est le pôle de la face z (*fig. 95*); l'axe d'hémitropie est donc perpendiculaire à z :

$$zt = 29^{\circ}59'; \quad zt' = 91^{\circ}11'; \quad zt'' = 88^{\circ}49'; \quad zp = 102^{\circ}29'; \\ zy = 66^{\circ}31';$$

par conséquent

$$tt', = 130^{\circ}2'; \quad t't', = -2^{\circ}22'; \quad t''t'' = 2^{\circ}22'; \quad pp', = -24^{\circ}58'; \\ yy', = 46^{\circ}58'.$$

260. Dans un cristal hémitrope de feldspath (*fig. 126*),

les zones pm, oy d'un cristal coïncident avec les zones p, m, o, y , de l'autre; l'un des cristaux prendrait donc la position de l'autre s'il tournait de deux angles droits autour d'un axe perpendiculaire à la face n (*fig.* 95) commune aux zones pm, oy ; cet axe est donc celui d'hémitropie.

Que p, t, m, n soient les pôles des faces p, t, m, n , on a

$$pn = 44^{\circ}56',5; \quad tn = 84^{\circ}46'; \quad mn = 45^{\circ}3',5;$$

par conséquent

$$pp, = 90^{\circ}7'; \quad t, = 10^{\circ}28'; \quad mm, = 89^{\circ}53'.$$

On trouve que pp' approche extrêmement de 90° et que, par conséquent, l'angle mm' est très-voisin de 45° . La différence entre les valeurs données par l'expérience et par le calcul tient probablement à une petite erreur dans la mesure de quelques-uns des angles qui servent de point de départ pour déterminer mn .

261. Dans un cristal hémitrope de feldspash (*fig.* 127), les faces m, p de l'un des cristaux sont parallèles aux faces m, p , de l'autre; l'un d'eux viendrait dans la position de l'autre s'il tournait de deux angles droits autour d'une normale à p ; cette normale est, par conséquent, l'axe d'hémitropie.

Si p, t, z, x sont les pôles des faces p, t, z, x , on a

$$px = 50^{\circ}19'; \quad pt = 112^{\circ}16'; \quad pz = 102^{\circ}29';$$

par conséquent

$$xx, = 79^{\circ}22'; \quad tt, = -44^{\circ}32'; \quad zz, = -24^{\circ}58'.$$

EXEMPLES

de cristaux hémitropes appartenant au système prismatique oblique non symétrique.

262. Dans un cristal d'albite (*fig. 128*), la zone lmt de l'un des cristaux coïncide avec la zone $l_1m_1t_1$ de l'autre, et les faces m, m_1 sont parallèles. D'après cela, l'un des cristaux viendrait dans la position de l'autre en tournant de deux angles droits autour d'une normale à m ; cette normale se trouve être ainsi l'axe d'hémitropie.

Soient p, m, t, l les pôles des faces p, m, t, l : les faces p, m sont parallèles aux plans des plus faciles clivages. On trouve

$$mt = 62^\circ 7', \quad ml = 60^\circ 8', \quad mp = 93^\circ 36';$$

par conséquent

$$u_1 = 54^\circ 56', \quad u_2 = 59^\circ 44', \quad pp_1 = -7^\circ 12'.$$

263. Des cristaux peuvent, seulement par l'effet du hasard, s'accoler de manière que deux cristaux contigus soient unis conformément à la loi du n° 230.

Quoique les faces de certains cristaux hémitropes forment, comme on l'a vu, des angles rentrants, l'existence de pareils angles n'est pas non plus toujours une preuve d'hémitropie; deux ou plusieurs faces d'un cristal peuvent, en effet, se répéter et former, de cette manière, un angle rentrant. Dans certains cas les faces se répètent ainsi plusieurs fois et forment autant de sillons parallèles. Lorsque ces faces sont très-étroites, ces sillons produisent les stries qu'on observe sur certaines faces de plusieurs espèces de cristaux.



CHAPITRE IX.

DES GONIOMÈTRES, etc.

264. Le goniomètre de Carangeau se compose de deux petites règles de métal (*fig.* 129) réunies par un axe sur lequel elles tournent à frottement doux. Pour mesurer les angles des cristaux, on appuie ces règles sur deux faces perpendiculairement à l'arête. Ensuite, sans altérer leur position respective, on les applique sur un cercle divisé (*fig.* 130) en faisant coïncider avec le centre le sommet de l'angle qu'elles forment entre elles. L'arc compris entre les deux règles mesure l'inclinaison des faces ou le supplément de la distance angulaire de leurs pôles. Il est évident que cet instrument ne peut donner de résultats précis.

265. Le goniomètre à réflexion de Wollaston est représenté (*fig.* 131); un cercle gradué L, dont la division peut donner les minutes au moyen du vernier N, est fixé sur un axe creux, qu'on peut tourner par la tête ronde M. Un second axe CS traverse l'axe creux du cercle L, et peut, à volonté, être entraîné par la rotation du cercle, ou semouvoir d'une manière indépendante, au moyen de la tête S. Ce second axe porte un bras recourbé CF.

La pièce FG est réunie à CF' par une charnière qui lui permet de tourner autour d'un axe perpendiculaire à CS.

et qui rencontrerait le prolongement de cette ligne; elle porte en outre en G un collier que traverse une broche HK. Cette broche peut tourner sur elle-même, et en même temps glisser dans le sens de sa longueur, tout en demeurant perpendiculaire à l'axe du mouvement possible de FG, et en rencontrant, au même point que ce dernier, la ligne SC prolongée. On fixe le cristal au moyen d'un mastic mou sur une lame mince de métal montée en K dans une fente.

266. *Manière de mesurer les angles des cristaux.* Soient p, q deux faces d'un cristal, (pq) l'angle compris entre deux perpendiculaires menées à ces faces d'un point intérieur au cristal; (pq) est, en d'autres termes, la distance angulaire des pôles de p et de q . Rendons l'arête du cristal parallèle à l'axe de l'instrument, et rapprochons-la autant que possible de cet axe, au moyen du mouvement de charnière de FG, du mouvement de rotation et du glissement de HK; établissons ensuite le cercle solidement sur une table.

Soient A, B (*fig.* 132) deux signaux situés dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'instrument, et qui coupe en C l'intersection commune des faces p, q ; on tournera le cercle jusqu'à ce que l'image du signal A, reçue par réflexion sur la face p , coïncide avec celle du signal B vue directement; puis on lira l'arc marqué par le vernier. On tournera de nouveau le cercle jusqu'à ce que l'image du signal A, vue par réflexion sur q , coïncide encore avec celle du signal B vue directement, et de nouveau on lira l'arc marqué par le vernier. La différence de ces arcs mesure (pq) , et, par conséquent, le supplément de l'angle du cristal, suivant la définition généralement reçue de l'angle compris entre deux plans qui limitent un solide.

En effet, si l'on tire, dans le plan de l'angle ACB, la ligne EC qui partage cet angle en deux parties égales, et la ligne CD perpendiculaire à la première; au moment de la

première observation, la normale à la face p coïncidera avec CD ; au moment de la seconde observation, la normale à la face q coïncidera avec CD ; le cristal, et par conséquent le cercle auquel il est invariablement fixé, a donc, entre la première et la seconde observation, tourné de l'angle (pq) compris entre les normales aux faces.

L'œil de l'observateur doit être placé à un ou deux pouces du cristal; il aperçoit alors distinctement l'image de A réfléchi sur l'une ou l'autre face, sans voir le cristal lui-même. Il est essentiel que le signal B et l'image du signal A s'aperçoivent sans confusion; quand A et B ne se trouvent pas à la portée de la vue distincte, il faut armer l'œil d'une lentille, ou d'une petite lunette, qui grossisse deux ou trois fois, et qui permette d'apercevoir nettement les signaux.

267. Si une face r appartient à la même zone que p et q , elle se trouvera parallèle à l'axe du cercle; et, par conséquent, il arrivera un moment, pendant sa révolution, où l'image du signal A , vue par réflexion sur cette face, coïncidera avec le signal B vu directement.

Si donc on veut trouver les faces qui font partie de la zone à laquelle appartiennent deux faces déterminées, il faut ajuster le cristal comme pour mesurer l'angle compris entre celles-ci; et ensuite examiner quelles sont les autres faces qui, pendant la révolution du cercle, permettent à l'œil de superposer l'image réfléchi du signal A sur l'image directe du signal B .

268. Afin de rendre perpendiculaire à l'axe du cercle le plan ABC , qui passe par les deux signaux et par un point de l'arête du cristal; on tournera le pied de l'instrument, où l'on déplacera A , jusqu'à ce que l'image de A , vue par réflexion sur le plan du limbe, ou sur tout autre surface brillante parallèle à ce plan, coïncide avec un point A' aperçu directement. Les points A et A' doivent être

tous deux placés sur une droite parallèle à l'axe du cercle, et la distance qui les sépare doit être double de la distance du point C au plan du limbe ou à la surface réfléchissante. On fixera ensuite une glace à faces parallèles à la place du cristal, on l'ajustera jusqu'à ce que les images de A réfléchies sur l'une ou sur l'autre surface viennent, pendant la révolution du cercle, se superposer exactement sur les mêmes objets; puis on établira le signal inférieur B précisément sur le chemin parcouru par ces images réfléchies.

Le plan ABC une fois perpendiculaire à l'axe de l'instrument, on sera sûr que l'arête commune aux faces p et q est parallèle à cet axe, quand la rotation de la tête ronde S aura pour effet de faire passer sur B l'image réfléchie de A. On facilite l'ajustement de l'arête en collant le cristal sur la lame K, de manière qu'une des deux faces, p par exemple, soit presque parallèle à cette lame, qu'on fixe ensuite dans la fente ménagée à l'extrémité de HK, de manière que l'arête soit presque perpendiculaire à la broche HK, et par conséquent HK à peu près perpendiculaire à CS. En tournant HK autour de son axe, on fait en sorte que l'image de A réfléchie sur p puisse se superposer à B; et en tournant FG autour de sa charnière en F, on peut faire en sorte que l'image de A réfléchie sur q puisse se superposer à B. Comme la dernière rectification peut avoir dérangé la première, il est nécessaire de répéter les épreuves.

269. Les distances du cristal aux deux signaux doivent être à peu près égales, et ne peuvent être moindres que deux à trois mètres. Quand on observe le jour, on peut prendre pour signal supérieur une barre noire étroite, placée vers le haut d'une fenêtre et parallèle à l'axe du cercle, et pour signal inférieur une ligne tracée en blanc sur un fond noir, et parallèle à la première.

Dans certains cas il y a avantage à prendre pour signal supérieur l'image du Soleil produite par une lentille d'un

court foyer, ou la lumière du ciel qui passe par un petit trou ouvert dans un écran.

Quand on observe la nuit, on emploie avec succès des fentes étroites pratiquées dans des écrans. Ces fentes sont éclairées par la flamme d'une bougie, l'une directement, l'autre au travers d'une feuille de papier interposée. La première sert de signal supérieur, et l'autre de signal inférieur (*).

270. Quand les points où la réflexion s'opère sur chaque face ne sont pas à la même distance de l'axe du cercle,

(*) Enfin le moyen suivant paraît préférable à tous les autres.

Les rayons du Soleil, réfléchis par un miroir, ou mieux par un héliostat, au travers d'une ouverture circulaire à laquelle on donne depuis un quart de millimètre jusqu'à trente millimètres de diamètre, selon que les faces sont plus ou moins réfléchissantes, servent de signal lumineux. Pour signal moins brillant, on emploie une ligne horizontale; mais, au lieu de la regarder directement, il est plus commode de viser à son image réfléchie sur un miroir plan de verre noir convenablement disposé.

Les signaux A et B sont établis à cinq ou six pouces de distance verticale, et, si l'on illumine directement l'ouverture A au moyen des rayons solaires, on ne laisse parvenir à la fente B que la clarté diffuse du ciel, ou bien l'on amortit la lumière directe en interposant une feuille de papier derrière la fente.

On observe l'ouverture A réfléchie sur les faces du cristal, en même temps que la fente B réfléchie sur le miroir, qu'on incline d'environ 40° avec l'horizon; de sorte que l'image de B fait l'effet d'un signal très-écarté du premier, qu'on verrait directement derrière le plan du miroir.

Quand le miroir est adapté au pied même du goniomètre, il n'est plus nécessaire que l'instrument soit fixé sur une table d'une manière invariable.

(Note communiquée par l'auteur.)

la révolution du limbe, entre la première et la seconde observation, diffère un peu de l'angle des normales.

Soient A, B (*fig.* 133) les deux signaux; PQ, PE les intersections du plan perpendiculaire à l'axe du cercle qui passe par A et par B avec les faces *p* et *q*, quand elles occupent successivement la position où l'image réfléchie de A se superpose à l'image directe de B. Soient P, Q les points où la réflexion s'opère; (*pq*) l'angle compris entre les normales aux faces *p* et *q*; V l'angle dont le limbe a tourné entre la première et la seconde observation (cet angle ne peut surpasser 180°). Si PEQ = E, (*pq*) = V ± E; le signe inférieur correspond au cas où l'on a tourné le cercle dans le sens PQE; le signe supérieur, au cas où il a tourné dans le sens QPE.

Soient AP, BQ prolongés jusqu'au point de rencontre D,

$$\begin{aligned}
 2\text{PEQ} &= 2\text{PED} + 2\text{QED} \\
 &= 2(\text{EQB} - \text{EDB}) + 2(\text{EPA} - \text{EDA}) \\
 &= \text{AOB} + \text{BPA} - 2\text{ADB} \\
 &= \text{AOB} - \text{ADB} + \text{BPA} - \text{ADB} \\
 &= \text{PBQ} + \text{PAQ},
 \end{aligned}$$

donc PEQ est égal à la demi-somme de PBQ et de PAQ.

Si le point P ou le point Q tombait respectivement en dedans de l'angle AQB ou APB; PEQ serait égal à la demi-différence des angles PBQ, PAQ.

271. Élimination de l'erreur qui provient de l'excentricité des points auxquels la réflexion s'opère.

Soient A et B à égale distance de C, point auquel l'axe du cercle est rencontré par le plan ABC qui lui est perpendiculaire. Soient V l'angle dont le limbe a tourné entre la première et la seconde observation, quand le cristal est à gauche du limbe; E l'erreur due à l'excentricité; P, Q

les points où la réflexion s'opère. Qu'on tourne l'instrument dans un azimut tel que le cristal se trouve à la droite du limbe, et qu'on répète l'observation. Soient V' l'angle dont le limbe a tourné entre la première et la seconde observation, faites dans cette position; E' l'erreur due à l'excentricité; P', Q' les points où la réflexion s'est opérée. $PQ, P'Q'$ seront des lignes presque égales et également inclinées à EC , mais dans une direction opposée; par conséquent

$$PAQ = P'BQ'; \quad PBQ = P'AQ',$$

et par conséquent E, E' sont des quantités presque égales. Or maintenant, dans chaque position de l'instrument, on a tourné le limbe dans un sens contraire entre la première et la seconde observation; E, E' ont donc des signes différents; les angles V, V' sont donc l'un plus grand, l'autre plus petit que (pq) ; par conséquent, si $(pq) = V \pm E$, $(pq) = V' \mp E'$. Puis donc que les quantités E, E' sont à peu près égales, on a presque exactement

$$(pq) = \frac{1}{2}(V + V').$$

Lorsqu'une des faces réfléchissantes est grande, il faut la noircir, en réservant la place où l'on veut que la réflexion s'opère. Si l'on négligeait cette précaution, on ne pourrait plus supposer que les lignes $PQ, P'Q'$ sont égales et également inclinées à CE .

Toute erreur qui proviendrait d'un défaut de centrage du limbe s'éliminerait en répétant chaque lecture dans deux positions du cercle, telles que le zéro du vernier fût, dans les deux cas, à 180° de distance.

Quand les distances AC, BC sont égales, on a approximativement

$$AC = EC \cos \frac{1}{2} ACB;$$

par conséquent, si PQ fait l'angle θ avec EC,

$$AC \sin PEQ = PQ \cos \frac{1}{2} ACB \sin \theta.$$

272. Mitscherlich a découvert que, dans quelques cristaux qui n'appartiennent pas au système octaédrique, les angles compris entre certaines faces varient légèrement avec la température. Ainsi les plans de clivage du spath calcaire qui, à la température ordinaire, comprennent entre eux des angles de $105^{\circ}5'$, se rapprochent de l'angle droit de $8',5$ quand la température du cristal augmente de 100° centigr. Une augmentation de température dilate en effet linéairement une normale à la face (111) de 0,00286, et contracte linéairement une ligne parallèle à la face (111) de 0,00056.

La distance des pôles m, m' d'un cristal d'aragonite (fig. 84) diminue de $2',8$, et la distance des pôles k, k' augmente de $5',5$, par un accroissement de température de 100° centigr. Pour un cristal de gypse, qui appartient au système prismatique oblique les changements de température font varier l'angle compris entre les deux axes cristallographiques perpendiculaires au troisième, en même temps que le rapport des paramètres.

273. Trouver la valeur des angles plans des cristaux.

Soient la face p qui rencontre les faces q, r , et P, Q, R les pôles de ces faces; les arêtes d'intersection de p avec q, r sont perpendiculaires aux plans des grands cercles PQ, PR; par conséquent l'angle plan compris entre les arêtes d'intersection de p avec q, r est le supplément de l'angle PQR.

Les longueurs des arêtes ne sont soumises à aucune loi connue.

274. Le système auquel appartient un cristal quelconque se détermine surtout en observant l'espèce de symé-

trie qui domine dans l'arrangement des faces. Quand le cristal est transparent, ses propriétés optiques peuvent aider à découvrir son système cristallin.

Haüy avait avancé que les cristaux qui appartiennent au système octaédrique ne possèdent pas la double réfraction; David Brewster découvrit : que ceux qui appartiennent au système pyramidal n'ont qu'un axe optique parallèle à l'axe cristallographique OZ, perpendiculaire lui-même aux deux autres axes OY, OX correspondants aux paramètres égaux; que ceux qui appartiennent au système rhomboédrique n'ont qu'un axe optique, également incliné aux axes cristallographiques; et qu'enfin les cristaux qui appartiennent aux trois autres systèmes ont deux axes optiques.

Dans les cristaux qui appartiennent au système prismatique, les axes optiques se trouvent toujours compris dans le plan de deux axes cristallographiques; dans les cristaux qui appartiennent au système prismatique oblique, les axes optiques sont, ou dans le plan des axes cristallographiques OZ, OX, tous deux perpendiculaires au troisième OY, ou dans un plan qui passe par OY; ils font, dans ce cas, des angles égaux avec OY.

Ainsi: dans l'idocrase, l'axe d'optique est perpendiculaire à la face p (*fig.* 51); dans le spath calcaire, l'axe optique est perpendiculaire à la face o (*fig.* 68); dans l'apatite, il est perpendiculaire à la face p (*fig.* 73); dans le quartz, il est parallèle à l'intersection des faces r . Si un cristal de quartz présente des faces d'une forme hémiedrique située dans une zone de laquelle font partie deux faces adjacentes p, z , ce cristal se trouvera *dextrogyre* ou *lévogyre*, suivant que les zones sont directes (comme dans la *fig.* 75) ou inverses. (*Transact. of the Cambridge philosophical Society*, vol. I, p. 43; vol. IV, p. 79.)

L'aragonite a deux axes optiques perpendiculaires a

l'axe de la zone kk' (*fig. 84*), et qui font des angles de $9^{\circ}7'$ avec l'axe de la zone mm' . Dans le sulfate de magnésie, les axes optiques sont perpendiculaires à l'axe de la zone mm' (*fig. 86*) et font des angles de $25^{\circ}50'$ avec une normale à la face e . Dans la topaze de Saxe, les axes optiques font des angles de $31^{\circ}9'$ avec une normale à la face p ; leur plan passe par cette normale et par l'axe de la zone nn' (*fig. 87*). Dans l'épidote, les axes optiques sont perpendiculaires à l'axe de la zone mt (*fig. 93*): l'un fait un angle de $5^{\circ}11'$ avec la normale à r du côté de la normale à l ; l'autre fait un angle de $18^{\circ}5'$ avec la normale à m , du côté de la normale à t . Dans le feldspath, les axes optiques sont parallèles à la face p (*fig. 95*), et font des angles d'environ 58° avec une normale à la face m . Dans l'acide oxalique, les axes optiques sont perpendiculaires à l'axe de la zone pe (*fig. 96*), et font des angles de 56° avec une normale à p . L'axinite et le sulfate de cuivre ont l'un et l'autre deux axes optiques, dont la position, relativement aux faces de cristallisation, n'est pas bien connue.

275. La description géométrique d'un cristal peut être considérée comme complète, lorsqu'on connaît l'inclinaison réciproque de ses axes, les rapports de ses paramètres, les symboles des formes simples dont il présente la combinaison, et les symboles des faces de clivage.

A l'inclinaison réciproque des axes, et aux rapports des paramètres, on peut substituer certains angles qui permettent de calculer facilement la position des faces et les angles qu'elles comprennent entre elles. Dans le système pyramidal, la distance du pôle (001) au pôle (111), ou bien au pôle (101), peut suppléer au rapport des paramètres. Dans le système rhomboédrique, la distance des pôles (100), (111) peut remplacer l'inclinaison réciproque des axes. Dans le système prismatique, on peut se donner les

distances du pôle (111) aux pôles de deux des trois faces (100), (010), (001). Dans le système prismatique oblique, la distance des pôles (111), (010), et les inclinaisons de l'arc de grand cercle, qui mesure cette distance, sur les cercles de zones qui passent par le pôle (010) et par les pôles (001), (100), peut remplacer l'inclinaison réciproque des axes OZ, OX et le rapport des paramètres.

Dans le système prismatique oblique non symétrique, les distances réciproques de deux des trois pôles (100), (010), (001) entre eux, et du pôle (111) avec deux des mêmes pôles, peuvent suffire, au lieu de l'inclinaison réciproque des axes et du rapport des paramètres.

276. On a prouvé (n° 23) que tout pôle dont une caractéristique est plus grande que l'unité est l'intersection de deux cercles de zones qui passent par des pôles dont les caractéristiques sont plus simples que celles du premier. Le tableau suivant fait voir que la position d'un pôle quelconque, dont la plus grande caractéristique ne surpasse pas 7, peut être déterminé par les intersections successives de cercles de zones qui passent par les pôles dont les caractéristiques sont plus simples, en commençant par les pôles (111), ($\bar{1}11$), ($1\bar{1}1$), ($11\bar{1}$).

Qu'on suppose le pôle T déterminé par l'intersection des cercles de zones PQ, RS: la première colonne renferme les caractéristiques de T; la deuxième et la troisième, les caractéristiques de P et de Q; la quatrième et la cinquième, les caractéristiques de R et de S. Si T avait trois caractéristiques numériquement égales à celles qu'on peut trouver dans la table, mais différentes par le signe ou par l'arrangement, on déduirait les symboles correspondants de P, Q, R, S de ceux donnés dans la table, en appliquant les règles établies (n° 20).

100	111	111	111	111	552	111	001	321	110
110	100	010	111	001	553	111	001	121	210
210	111	101	100	010	554	111	001	121	211
211	101	110	111	100	610	100	010	201	212
221	001	111	100	021	611	111	100	310	011
310	001	010	101	211	621	100	021	011	201
311	111	100	111	110	631	001	210	110	211
320	100	010	111	211	632	001	210	110	212
321	101	110	111	101	641	111	110	011	210
322	111	100	120	101	643	010	201	111	201
331	111	100	120	111	650	100	010	211	023
332	111	001	121	110	651	110	101	211	021
410	100	010	101	212	652	110	102	211	021
411	111	100	011	210	653	111	102	010	201
421	111	110	001	211	654	111	101	211	021
430	100	010	111	212	655	111	100	012	221
431	101	110	111	102	661	111	001	120	221
432	111	101	010	211	665	111	001	211	221
433	111	100	011	221	710	100	010	201	113
441	111	001	201	121	711	111	100	210	121
443	111	001	021	211	720	100	010	102	311
510	100	010	112	201	721	100	121	111	121
511	111	100	111	210	722	111	100	112	210
520	100	010	211	102	730	100	010	211	103
521	100	121	101	111	731	101	210	100	131
522	111	100	120	201	732	111	110	101	112
530	100	010	211	112	733	111	100	111	230
531	111	101	111	110	740	100	010	102	321
532	101	110	111	201	741	111	101	121	211
533	111	100	111	221	742	100	121	111	211
540	100	010	221	102	743	110	101	121	210
541	101	110	111	210	744	111	100	102	123
542	100	021	110	102	750	100	010	113	221
543	111	101	101	120	751	111	110	111	121
544	111	100	120	112	752	110	101	111	310
551	111	001	211	120	753	111	101	111	120

754	111	$\bar{1}12$	$12\bar{1}$	$\bar{1}10$	766	111	100	$22\bar{1}$	$10\bar{3}$
755	111	100	$12\bar{1}$	$11\bar{3}$	771	111	001	$\bar{1}3\bar{1}$	$\bar{3}2\bar{1}$
760	100	010	$10\bar{3}$	$22\bar{1}$	772	111	001	130	$22\bar{1}$
761	101	110	$12\bar{1}$	$\bar{3}1\bar{1}$	773	111	001	210	$13\bar{1}$
762	110	102	$12\bar{1}$	$20\bar{1}$	774	111	001	$12\bar{1}$	$\bar{3}10$
763	100	121	111	$10\bar{3}$	775	111	001	$12\bar{1}$	$\bar{3}1\bar{1}$
764	100	$0\bar{3}2$	111	$21\bar{1}$	776	111	001	$12\bar{1}$	$2\bar{3}\bar{1}$
765	111	$10\bar{1}$	$12\bar{1}$	$20\bar{1}$					

Si l'on eût commencé par les pôles (111), (100), (010), (001), desquels il est plus facile de déduire la position des autres pôles, quand les cristaux appartiennent au système rhomboédrique, les deux premières lignes du tableau eussent été remplacées par les trois suivantes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 110 & 111 & 001 & 100 & 010, \\
 \bar{1}10 & 011 & 101 & 100 & 010, \\
 \bar{1}11 & 001 & 110 & 100 & 011.
 \end{array}$$

277. Les tables suivantes servent pour traduire les notations symboliques, propres aux divers systèmes cristallographiques, en symboles équivalents conformes aux principes adoptés dans cet ouvrage. Quand on en viendra aux applications numériques, si les caractéristiques se présentent sous forme fractionnaire, on devra, pour faire disparaître les fractions, multiplier chacune d'elles par leur moindre dénominateur commun.

1^o. *Notation de Haiüy modifiée. Système employé par M. Brooke* (Enc. Metropolitana, Art. Cristallographie). *La même table servira à transformer les notations de M. Lévy* (Description d'une collection de Minéraux formée par M. Heuland). *Les caractéristiques employées dans ce dernier ouvrage ont les mêmes rapports que celles qui appartiennent au système précédent, mais diffèrent en valeur absolue.*

Système octaédrique.

P	{ 100 }	B	{ $\nu 10$ }
A	{ $\nu 11$ }	$B_p B'_q B''_r$	{ qr, rp, pq }.

Système pyramidal.

M	{ 100 }	B	{ 10 ν }
P	{ 001 }	G	{ $\nu 10$ }
A	{ 11 ν }	$B_p B'_q G_r$	{ qr, rp, pq }.
A _v	{ $\nu 11$ }		

Système rhomboédrique.

P	{ 100 }	E (Lévy)	{ $-\nu 11$ }
A	{ $\nu 11$ }		(Prisme hexaèdre; Lévy)
E	{ $\nu 1-1$ }	P	{ 111 }
O	{ $-\nu 11$ }	M	{ $2-1-1$ }
B	{ $\nu 10$ }	B	{ $\nu+2, \nu-1, \nu-1$ }
D	{ $\nu 0-1$ }	A	{ $\nu+3, \nu, \nu-3$ }
$B_p B'_q B''_r$	{ qr, rp, pq }	A _v	{ $\nu+3, \nu, -2\nu$ }
$D_p D'_q D''_r$	{ $qr, rp, -pq$ }	G	{ $\nu+2, \nu-1, -1-2\nu$ }.

Système prismatique.

M	{ 110 }	$\overset{\vee}{A}_v$	{ $\nu-1, \nu+1, 1$ }
P	{ 001 }	$\overset{\vee}{H}$	{ $\nu-1, \nu+1, 0$ }
$\overset{\vee}{\check{A}}$	{ 0, 2 ν , 1 }	$\overset{\vee}{G}$	{ $\nu+1, \nu-1, 0$ }
$\overset{\vee}{B}$	{ 11 ν }	$B_\rho B'_q H_r$	{ $qr-rp, qr+rp, pq$ }
$\overset{\vee}{E}$	{ 2 ν , 0, 1 }	$B_\rho B'_q G_r$	{ $qr+rp, qr-rp, pq$ }.
E_v	{ $\nu+1, \nu-1, 1$ }		

Système prismatique oblique.

M	{ 110 }	$\overset{\vee}{A}_v$	{ $\nu+1, \nu-1, -1$ }
P	{ 001 }	E_v	{ $\nu-1, \nu+1, 1$ }
$\overset{\vee}{O}$	{ 2 ν , 0, 1 }	$\overset{\vee}{E}$	{ $1-\nu, 1+\nu, 1$ }
$\overset{\vee}{O}_v$	{ $\nu+1, \nu-1, 1$ }	$\overset{\vee}{H}$	{ $\nu+1, \nu-1, 0$ }
$\overset{\vee}{\check{A}}$	{ 2 ν , 0, 1 }	$\overset{\vee}{G}$	{ $\nu-1, \nu+1, 0$ }
$\overset{\vee}{D}$	{ 1, 1, ν }	$D_\rho D'_q H_r$	{ $rp+qr, rp-qr, pq$ }
$\overset{\vee}{B}$	{ 1, 1, $-\nu$ }	$B_\rho B'_q H'_r$	{ $rp+qr, rp-qr, -pq$ }
E	{ 0, 2 ν , 1 }	$B_\rho D_q G_r$	{ $rp-qr, rp+qr, pq$ }.

Système prismatique oblique non symétrique.

T	{ 100 }	$\overset{\vee}{B}$	{ $10-\nu$ }
M	{ 010 }	$\overset{\vee}{F}$	{ 10ν }
P	{ 001 }	$\overset{\vee}{H}$	{ $1\nu 0$ }
$\overset{\vee}{O}$	{ $\nu\nu 1$ }	$\overset{\vee}{G}$	{ $1-\nu 0$ }
$\overset{\vee}{O}$	{ $\nu 1\nu$ }	$D_\rho F_q H_r$	{ qr, rp, pq }
$\overset{\vee}{O}_v$	{ $1\nu\nu$ }	$C_\rho B_q H'_r$	{ $qr, rp, -pq$ }
$\overset{\vee}{D}_v$	{ 01ν }	$B_\rho D_q G_r$	{ $-qr, rp, pq$ }
$\overset{\vee}{C}$	{ $0-1\nu$ }	$F_\rho C_q G'_r$	{ $qr, -rp, pq$ }

Les première, deuxième et troisième caractéristiques deviennent négatives, quand, à la place de O, l'on substitue respectivement F, I, A.

2°. *Notations de Mohs.*

Système octaédrique.

H {100}	{B ₂ 332}
O {111}	C ₁ {211}
D {011}	C ₂ {311}
A ₁ {320}	T ₁ {231}
A ₂ {210}	T ₂ {531}
A ₃ {310}	T ₃ {421}
B ₁ {221}	

Système pyramidal.

[P + ∞]	{100}
P - ∞	{001}
P + ∞	{110}
(P + ∞) ^m	{m10}
[(P + ∞) ^m]	{m + 1, m - 1, 0}
P	{111}
rP + 2n	{r2 ⁿ , r2 ⁿ , 1}
rP + 2n - 1	{r2 ⁿ , 0, 1}
r√2P + 2n	{r2 ⁿ⁺¹ , 0, 1}
r√2P + 2n - 1	{r2 ⁿ , r2 ⁿ , 1}
(rP + 2n) ^m	{mr2 ⁿ , r2 ⁿ , 1}
(rP + 2n - 1) ^m	{(m + 1)r2 ⁿ , (m - 1)r2 ⁿ , 2}
(r√2P + 2n) ^m	{(m + 1)r2 ⁿ , (m - 1)r2 ⁿ , 1}
(r√2P + 2n - 1) ^m	{mr2 ⁿ , r2 ⁿ , 1}

Système rhomboédrique.

$$\begin{array}{ll}
 R - \infty & \{111\} \quad R \quad \{100\} \\
 R + \infty & \{\bar{2}11\} \quad P^m \quad \{m+1, 0, 1-m\} \\
 P + \infty & \{0\bar{1}1\} \quad (P+\infty)^n \quad \{3m+1, -2, 1-3m\}.
 \end{array}$$

$rP + n$ représente $\{hkk\}$, expression où $\frac{h-k}{h+2k} = r2^n$.

Si Q est le pôle d'un rhomboèdre, (Q) son symbole dans la notation de Mohs et de Naumann, D un pôle adjacent de $\{0\bar{1}1\}$, S un pôle de $\{k+L, -k, -l\}$ adjacent à Q, et D, O un pôle de $\{111\}$, T l'intersection des arcs QD, OS, le symbole de T sera dans la notation de Mohs et de Naumann $(Q)^n$, expression dans laquelle $m = \frac{k+l}{3k}$.

Système prismatique.

$$\begin{array}{ll}
 P + n & \{2^n, 2^n, 1\} \\
 \frac{1}{2}(m+1)P + n & \{(m+1)2^n, (m+1)2^n, 2\} \\
 \frac{1}{2}(m+1)\bar{P}r + n & \{0, (m+1)2^n, 2\} \\
 \frac{1}{2}(m+1)\check{P}r + n & \{(m+1)2^n, 0, 2\}, \\
 (\bar{P} + n)^n & \{2^n, m2^n, 1\} \\
 (\check{P} + n)^n & \{m2^n, 2^n, 1\} \\
 (\bar{P}r + n)^n & \{(m-1)2^n, (m+1)2^n, 2\} \\
 (\check{P}r + n)^n & \{(m+1)2^n, (m-1)2^n, 2\}.
 \end{array}$$

Système prismatique oblique.

Soit, d'après Mohs, (P) le symbole de la forme $\{hkl\}$, dans le système prismatique; alors, dans le système prismatique oblique, $-\frac{(P)}{2}$, $\frac{(P)}{2}$ représenteront respectivement $\{hkl\}$, $\{hk\bar{l}\}$. Lorsque la forme $\{hkl\}$ a le même nombre de faces dans les deux systèmes, on omet le dénominateur 2.

Système prismatique oblique non symétrique.

Soit, d'après Mohs, (P) le symbole de la forme $\{hkl\}$ dans le système prismatique; alors, dans le système prismatique oblique non symétrique, $-r \frac{(P)}{4}$ représentera $\{hkl\}$; $-l \frac{(P)}{4}$ représentera $\{h\bar{k}l\}$; $r \frac{(P)}{4}$ représentera $\{hk\bar{l}\}$; $l \frac{(P)}{4}$ représentera $\{\bar{h}kl\}$.

Lorsque la forme $\{hkl\}$ a deux fois autant de faces dans un système que dans l'autre, on substitue au dénominateur le nombre 2; et l'on omet ce dénominateur quand le nombre des faces est le même.

3°. Notations de Naumann.

Système octaédrique.

$\infty O \infty$	$\{100\}$	mOm	$\{m11\}$
O	$\{111\}$	mO	$\{mm1\}$
∞O	$\{011\}$	mOn	$\{m, mn, n\}$.
∞On	$\{n10\}$		

Système pyramidal.

$\infty P \infty$	$\{100\}$	mP	$\{mm1\}$
oP	$\{001\}$	$mP\infty$	$\{m01\}$
∞P	$\{110\}$	∞Pn	$\{n10\}$
P	$\{111\}$	mPn	$\{m, mn, n\}$
$P \infty$	$\{101\}$		

Système rhomboédrique.

oR	{ 111 }	R ^m	{ m + 1, 0, 1 - m }
∞ R	{ 211 }	2R ^m	{ m, 1, -m }
∞ P ₂	{ 011 }	∞ P ^m	{ -m, m - 1, 1 }
R	{ 100 }	mR	{ 2m + 1, 1 - m, 1 - m }.

Système prismatique.

P	{ 111 }	mP̄n	{ m, mn, n }
oP	{ 001 }	P̄n	{ 1nn }
∞ P	{ 110 }	mP̄n	{ mn, m, n }
mP	{ mm1 }	P̄n	{ n1n }.

Système prismatique oblique.

oP	{ 001 }	-mPn	{ -mn, m, n }
P	{ 111 }	P	{ n1n }
mP	{ mm1 }	(mPn)	{ m, mn, n }
-mP	{ -mm1 }	(Pn)	{ 1nn }
mPn	{ mn, m, n }		

Système prismatique oblique non symétrique.

P' représente { 111 }; P, { 1̄11 }; P₁, { 111̄ }; P' { 11̄1 };
 Les symboles des autres faces se dérivent de P', P, P₁,
 P, comme dans le système prismatique.

4°. *Notations de Weiss.*

Système octaédrique.

$$\frac{1}{h} a : \frac{1}{k} a : \frac{1}{l} a \quad \{hkl\}.$$

Système pyramidal.

$$\frac{1}{h} a : \frac{1}{k} a : \frac{1}{l} c \quad \{hkl\}.$$

Système rhomboédrique.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{c}{h+k+l} \\ \frac{a}{h+k-2l} : \frac{a}{h-2k+l} : \frac{a}{-2h+k+l} \end{array} \right\} \{hkl\}$$

Système prismatique.

$$\frac{1}{h} a : \frac{1}{k} b : \frac{a}{l} c \quad \{hkl\}.$$

CHAPITRE X.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES CRISTAUX, TRACÉ DE LEURS PROJECTIONS.

278. La représentation graphique des cristaux est ordinairement la projection, sur un plan, des arêtes formées par l'intersection de leurs faces; cette projection se fait par des lignes parallèles à une droite donnée.

Puisque les longueurs des côtés ne sont soumises à aucune loi connue, il est inutile que les arêtes de la figure soient égales ou proportionnelles à la projection des arêtes d'un cristal particulier qui servirait de modèle.

Dans le cas du système rhomboédrique, le plan de projection est ordinairement parallèle à un axe, et fait des angles égaux avec les deux autres; dans les autres systèmes, le plan de projection est ordinairement parallèle à deux des axes.

Les règles suivantes pour la représentation des cristaux n'ont pas besoin de démonstration.

279. Lorsque le plan de projection est parallèle aux axes OZ , OX , tirez la droite ZOZ' (*fig.* 135) inclinée sur XOX' d'un angle égal à celui des axes cristallographiques correspondants, et une ligne quelconque YOY' qui fasse avec les premières ZOZ' , XOX' , des angles de grandeur finie; les trois droites XOX' , YOY' , ZOZ' représenteront les axes du cristal.

Qu'on prenne sur OZ, OX les longueurs OC, OA, proportionnelles aux paramètres c et a , et sur OY la longueur OB arbitraire ; OA, OB, OC représenteront les paramètres du cristal.

Dans le cas du système rhomboédrique ; soit l'angle ROC (*fig.* 136) égal à l'angle que fait, avec un axe quelconque, la normale à la face (111) ; qu'on tire ensuite la droite CRS perpendiculaire à OR, et qu'on fasse $RS = \frac{1}{2} CR$; que, par le point S, on tire la droite ASB inclinée arbitrairement sur CS, et qu'on prenne sur ASB, de part et d'autre du point S, des longueurs quelconques égales SA, SB ; les trois droites OA, OB, OC représenteront les axes cristallographiques, et les longueurs OA, OB, OC les paramètres.

Lorsque la position du plan de projection est tout à fait arbitraire, les axes seront représentés par trois droites quelconques qui se rencontrent en un point.

280. Trouver les traces de la face (hkl) sur les plans qui passent par les axes.

Supposons que OA, OB, OC (*fig.* 135) représentent les paramètres. Qu'on prenne sur leur direction respective les longueurs OH, OK, OL égales à

$$\frac{1}{h} OA, \quad \frac{1}{k} OB, \quad \frac{1}{l} OC;$$

KL, LH, HK seront parallèles aux traces de la face (hkl) sur les plans YOZ, ZOY, XOY. Lorsqu'une des trois caractéristiques h, k, l devient zéro, l'axe correspondant est parallèle à deux des traces.

281. Soient les côtés des triangles HKL, PQR (*fig.* 137) parallèles aux traces de deux faces données sur les plans YOZ, ZOY, XOY. Soient U, V, W les intersections de ces

traces ; une ligne qui passera par deux de ces points rencontrera le troisième, et sera parallèle à l'arête formée par l'intersection des deux faces données.

Si, par la méthode précédente, on trace des droites parallèles aux projections de toutes les arêtes d'un cristal, de manière que ces droites se rencontrent dans le même ordre que les arêtes elles-mêmes, la figure ainsi obtenue sera la représentation du cristal.

282. Construction du double système d'axes d'un cristal hémitrope.

Qu'on trace la *fig.* 138 de manière que OU , OV , OW représentent des longueurs proportionnelles aux segments interceptés sur les axes de l'un des cristaux par le plan d'hémitropie, et que VOW , $WO'U$, $UO''V$ soient égaux aux angles YOZ , ZOX , XOY que ces axes font entre eux; des points O, O', O'' ainsi déterminés, qu'on abaisse sur les côtés correspondants du triangle UVW des perpendiculaires qui se rencontrent en T , puis qu'on mène les droites UTu , VTv , WTw . Soient maintenant (*fig.* 139) OX , OY , OZ la représentation des axes de l'un des cristaux; U , V , W les points où le plan d'hémitropie rencontre ces axes; qu'on divise deux des côtés de UVW en segments proportionnels à ceux des côtés correspondants du triangle UVW de la figure précédente; qu'on joigne ensuite les points de division aux angles opposés par des droites qui se rencontrent en T ; la droite OT représente une perpendiculaire au plan d'hémitropie UVW . Qu'on prenne maintenant $OO' = 2OT$; $O'U$, $O'V$, $O'W$ représentent les axes du second cristal.

Soit (uvw) le symbole du plan d'hémitropie; qu'on prenne

$$O'A' = u \times OU, \quad O'B' = v \times OV, \quad O'C' = w \times OW,$$

$O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ représentent les paramètres du second cristal.

Les axes et les paramètres une fois projetés, les faces des deux cristaux seront tracées au moyen des règles précédemment établies.

283. Le mode ordinaire de représentation des cristaux ne peut mettre en évidence la situation de leurs faces, la position des zones qu'elles forment entre elles, l'espèce de symétrie qui se manifeste dans leur arrangement, aussi clairement que la figure de la sphère de projection, avec la position de chaque pôle rapportée sur sa surface. Cette méthode particulière de représentation a été imaginée par le professeur Neumann, de Königsberg; elle a encore cet autre avantage, qu'elle permet d'employer exclusivement la trigonométrie sphérique pour rechercher toutes les propriétés géométriques des cristaux, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la géométrie analytique.

Quand la sphère est figurée dans les systèmes de projection stéréographique ou gnomonique, beaucoup de problèmes de cristallographie peuvent se résoudre avec facilité par de simples constructions géométriques. Par ce motif, on a cru devoir exposer les principales propriétés des systèmes de projection stéréographique et gnomonique.

284. Représenter une sphère en projection stéréographique, c'est rapporter, sur la surface plane d'un de ses grands cercles, les points et les cercles tracés sur la surface courbe de cette sphère, au moyen d'un système de lignes de projection convergentes au pôle du grand cercle qu'on a choisi. Le plan de ce grand cercle prend le nom de plan du tableau, et, pour l'œil placé à son pôle, la projection stéréographique d'un point quelconque n'est autre chose que sa perspective.

285. Soit O (*fig. 140*) le centre de la sphère qu'on veut représenter en projection stéréographique; E, C les pôles du plan du tableau: l'œil est supposé en E ; P', Q' sont

deux points choisis arbitrairement sur la surface de la sphère; la droite EC perce le plan du tableau au point O, projection de C, et les droites EP, EQ' en P et Q, projections de P' et Q'.

Soit r le rayon de la sphère,

$$OP = r \operatorname{tang} OEP = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} CP',$$

$$OQ = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} CQ'.$$

Il est d'ailleurs évident que les angles QOP, QCP' sont égaux.

Une droite tirée de E, à un point quelconque du grand cercle CP', perce le plan du tableau sur la droite OP; donc tout grand cercle qui passe par les pôles du plan du tableau a pour projection stéréographique une droite qui passe par le centre du cercle compris dans ce même tableau.

286. Soit Q' un point quelconque d'un cercle dont P' est le pôle et P, Q les projections de P', Q' :

$$\begin{aligned} \cos P'Q' &= \cos P'C \cos Q'C + \sin P'C \sin Q'C \cos Q'CP' \\ &= \cos P'C \frac{r^2 - \overline{QO}^2}{r^2 + \overline{QO}^2} + 2 \sin P'C \frac{r \overline{QO}}{r^2 + \overline{QO}^2} \cos QOP; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{QO}^2 (\cos P'Q' + \cos P'C) - 2r \overline{QO} \sin P'C \cos QOP \\ + r^2 (\cos P'Q' - \cos P'C) = 0. \end{aligned}$$

Le point Q est donc situé sur la circonférence d'un cercle qui a son centre sur la droite OP.

287. Supposons que le cercle donné rencontre CP' en M'N'; soient M, N les projections de M', N'; M'N sera un diamètre de la projection stéréographique du cercle. Soit K le centre de cette projection; on aura

$$\begin{aligned} 2\overline{KQ} &= r [\operatorname{tang} \frac{1}{2} (P'Q' + CP') + \operatorname{tang} \frac{1}{2} (P'Q' - CP')], \\ 2\overline{KO} &= r [\operatorname{tang} \frac{1}{2} (P'Q' + CP') - \operatorname{tang} \frac{1}{2} (P'Q' - CP')]. \end{aligned}$$

Lorsque le point Q' appartient à un grand cercle, l'arc $P'Q'$ est égal à 90° ; donc

$$\overline{KQ} = r \sec CP', \quad \overline{KO} = r \tan CP'.$$

Lorsque le point Q' est situé sur un petit cercle qui a son centre dans le plan du tableau, l'arc CP' est égal à 90° , donc

$$\overline{KQ} = r \tan P'Q', \quad \overline{KO} = r \sec P'Q'.$$

Un cercle qui passe par E se projette évidemment suivant une ligne droite.

288. Tracer la projection d'un grand cercle qui passe par deux points donnés.

Soit Q (*fig. 141*) le plus éloigné des points donnés P et Q ; soit tiré OE perpendiculaire à OQ et rencontrant en E le grand cercle situé dans le plan du tableau; EQ rencontre le même cercle en q ; qO rencontre le même cercle en s ; Es rencontre la ligne QO en S . Un cercle qui passe par les trois points S, R, Q sera la projection d'un grand cercle, car Q, S est la projection d'un arc égal à qs ; donc QS sont les projections des deux extrémités opposées d'un diamètre de la sphère; donc le cercle QRS est la projection du grand cercle demandé.

289. Étant donnée la projection d'un grand cercle, trouver la projection de son pôle.

Soit GMH (*fig. 142*) la projection du grand cercle qui rencontre en G, H la circonférence du cercle situé dans le plan du tableau et dont GH est un diamètre; soit tirée par le centre O de ce dernier cercle, la droite MO perpendiculaire à GH ; et par G, M la droite GM qui rencontre sa circonférence en m ; qu'on prenne l'arc $mP' = 90^\circ$, et qu'on tire la droite Gp qui rencontre en P la droite MO . P sera la projection demandée. En effet, MP est la projec-

tion d'un arc de 90° , et G et H sont les pôles du cercle qui se projette suivant la ligne droite M. Par conséquent l'arc GMH, et le point P, sont respectivement les projections d'un grand cercle et de son pôle.

290. Si un grand cercle se projette en GQH, et son pôle en P (*fig. 143*); si de P on tire les droites PR, PQ jusqu'à la rencontre de la circonférence du cercle situé dans le plan du tableau en q, r ; l'arc qr est égal à l'arc dont la projection est RQ; car PQ q , PR r sont les projections de deux petits cercles qui passent par le pôle du grand cercle projeté en GQH, et par l'œil qui est le pôle de GqH.

Mais un petit cercle qui passe par les pôles de deux grands cercles intercepte évidemment sur chacun d'eux des arcs égaux; donc l'arc rq est égal à l'arc projeté en RQ.

291. Étant données les projections de deux grands cercles, trouver l'angle dièdre que leurs plans comprennent entre eux.

Soient GR, LR (*fig. 144*) les projections de deux grands cercles et de leur intersection R; soient les projections de leurs pôles en P, Q, et soient tirées les lignes RP, PQ jusqu'à ce qu'elles rencontrent la circonférence du cercle située dans le plan du tableau en p, q . L'angle des deux cercles projetés en GR, LR est mesuré par l'arc pq ; car R est la projection du pôle du grand cercle dont la projection passerait par P, Q. L'arc pq mesure donc la distance angulaire des pôles des cercles projetés en GR, LR; et par conséquent l'angle dièdre compris entre les plans de ces cercles.

292. Soit O le centre du cercle situé dans le plan du tableau (*fig. 145*); MQ la projection d'un grand cercle MQ, K le centre de ce cercle; C le pôle du cercle situé dans le plan du tableau; CQ un grand cercle qui rencontrera MQ.

(189)

en Q' et MN en N . La droite OQ représente la projection de l'arc CQ' ,

$$OQ = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} CQ', \quad KQ = r \operatorname{sec} Q'MN, \quad KO = r \operatorname{tang} Q'MN.$$

Le triangle sphérique MNQ' a un angle droit en N ; donc

$$\sin KQO = \frac{\overline{KO}}{\overline{KQ}} \sin KOL = \sin Q'MN \cos MN = \cos MQ'N,$$

$$\overline{LO} - \overline{KO} \sin MN = r \operatorname{tang} Q'MN \sin MN = r \operatorname{tang} NQ'.$$

D'après cela, quand l'arc CQ' et l'angle $MQ'C$ sont donnés, si l'on fait

$$OQ = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} CQ', \quad OL = r \cot CQ', \quad OQK = 90^\circ - MQ'C,$$

et qu'on tire LK perpendiculaire à ON , le cercle MQ , décrit du point K comme centre, avec le rayon KQ , représentera la projection de MQ' .

293. Soit SQ la projection d'un autre grand cercle $S'Q'$ qui passe par Q' et dont R est le centre,

$$OQR = 90^\circ - S'Q'C.$$

Mais

$$OQK = 90^\circ - MQ'C;$$

donc

$$KQR = MQ'S'.$$

L'angle dièdre compris entre les plans de deux grands cercles est donc égal à l'angle que font entre elles les projections de ces cercles à leur point d'intersection.

294. Quand un cristal appartient au système octaédrique, on peut choisir pour plan du tableau de la sphère de projection, soit le plan du cercle de zone qui passe par les pôles de deux faces adjacentes de la forme $\{011\}$, soit

le plan du cercle de zone qui passe par les pôles de deux faces adjacentes de la forme $\{100\}$. Quand le cristal appartient au système pyramidal ou prismatique, le plan du cercle de zone qui passe par les pôles (100) , (010) convient mieux que tout autre pour plan du tableau. Lorsque le cristal dépend du système rhomboédrique, le plan du tableau doit être celui du cercle de zone qui passe par les pôles de $\{011\}$. Lorsque le cristal appartient au système prismatique oblique, le plan du tableau doit passer par les pôles (001) , (100) . Lorsqu'enfin le cristal dépend du système prismatique oblique non symétrique, le plan d'un cercle de zone quelconque peut servir de plan du tableau.

295. Mettre en projection stéréographique les pôles d'un cristal d'axinite (*fig.* 100). On donne

$$mp = 45^{\circ} 12', \quad pf = 44^{\circ} 43', \quad mx = 49^{\circ} 32', \\ my = 79^{\circ} 24', \quad fx = 64^{\circ} 57'.$$

Soit le plan de la zone mp (*fig.* 101) choisi pour plan du tableau; soient O le centre, r le rayon. Qu'on fasse

$$mp = 45^{\circ} 12', \quad pf = 44^{\circ} 53',$$

et qu'on tire les diamètres $smOm'$, pOp' , fOf' ; qu'on prenne sur Of la longueur

$$OK = r \sec 64^{\circ} 57',$$

et sur Om la distance

$$OL = r \sec 49^{\circ} 32',$$

et des centres KL , qu'on décrive successivement avec les rayons

$$Kx = r \tan 64^{\circ} 57', \quad Lx = r \tan 49^{\circ} 32',$$

des cercles qui se coupent en x . Qu'on décrive ensuite les cercles $m xm'$, $p xp'$, fxf' ; qu'on tire OM perpendiculairement à Om jusqu'à la rencontre de $m xm'$ en M ; $m'M$ rencontre le cercle situé dans le plan du tableau au point M' ; qu'on prenne l'arc

$$M'N' = 90^\circ,$$

et qu'on tire $m'N'$ jusqu'à la rencontre de OM au point N . Sur mpm' qu'on prenne

$$MY = 79^\circ 24';$$

qu'on tire la droite NY jusqu'à ce qu'elle rencontre $m xm'$ en y ; qu'on décrive pyp' et fyf' jusqu'à la rencontre de $p xp'$ au point v ; qu'on décrive mvm' qui rencontre fxf' ; en t et pyp' en w ; fwf' qui rencontre $m xm'$, en c , $p xp'$ en n , et ptp' qui rencontre $m xm'$ en s ; qu'on tire la droite OT perpendiculaire à Ot , et qui rencontre en T le cercle situé dans le plan du tableau; ensuite la droite TU perpendiculaire à Tt et qui vient rencontrer Ot au point U ; qu'on décrive le cercle Uyt qui rencontre mpm' en p et fwf' en o ; le cercle $evé$ qui rencontre pyp' en q ; le cercle fsf' qui rencontre mvm' en l ; le cercle plp' qui rencontre $m xm'$ en r , et le cercle $moni'$ qui rencontre fyf' en g . Les points m , p , x , etc. représenteront les projections des pôles qui appartiennent aux faces m , p , x , etc.

296. Représenter une sphère en projection gnomonique, c'est rapporter, sur un de ses plans tangents, les points tracés sur la surface sphérique, au moyen d'un système de lignes de projection qui toutes se croisent au centre de la sphère.

Pour l'œil placé à ce centre, la projection gnomonique d'un point n'est autre chose que sa perspective quand le plan tangent sert de tableau.

297. Soient O (*fig. 146*) le centre de la sphère C son point de contact avec le plan de projection; le point C s'appelle le centre de projection; P', Q' sont deux points de la sphère; qu'on tire les droites OP', OQ' qui rencontrent en P et Q le plan de projection; P, Q sont les projections de P', Q' .

Soit le rayon de la sphère r ,

$$CP = r \operatorname{tang} CP', \quad CQ = r \operatorname{tang} CQ', \quad \angle CQP = \angle C'QP'.$$

Le plan de tout grand cercle passe par O et coupe le plan de projection suivant une droite; tout grand cercle a donc pour projection gnomonique une ligne droite.

Soit PQ la projection du grand cercle $P'Q'$ qui a ses pôles sur le grand cercle CP' ; alors les plans CPQ, OPQ sont l'un et l'autre perpendiculaires au plan CPO , leur intersection PQ est donc perpendiculaire à CPO , et par conséquent PQ est à angle droit sur CP .

298. Soient O (*fig. 147*) le centre de la sphère, C le centre de projection, $Q'R'$ un arc de grand cercle, QR sa projection. Soient le plan BOC perpendiculaire à QR , et sur la droite BCE une longueur BE prise égale à BO (*).

Puisque QR est perpendiculaire aux deux droites BE et BO , et que de plus ces deux longueurs sont égales, l'angle $QER = QOR$; donc l'angle QER mesure l'arc $Q'R'$.

D'après cela, une construction géométrique fait connaître la mesure d'un arc de cercle qui se projette sur une droite donnée, ou réciproquement la longueur de la droite sur laquelle se projette un arc de cercle donné.

299. Soient (*fig. 148*) C le centre de projection, O le

(*) Pour construire la longueur $BE = BO$ dans le plan même de projection, soit fait $BD = CO$; il est clair que $DC = BO$; on portera DC de B en E .

(193)

centre de la sphère, CQ, PQ les projections de deux grands cercles $CQ', P'Q'$.

Soit CP' perpendiculaire à CQ' , et, par conséquent, CP à angle droit sur CQ ; on aura

$$\text{tang } CQP = \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{\text{tang } CP'}{\text{tang } CQ'} = \cos CQ' \text{ tang } CQ'P'.$$

Qu'on prenne maintenant $CE = CO$ et qu'on tire CF perpendiculaire à QE ; qu'on fasse ensuite $CG = CF$, on aura

$$\overline{CG} = \overline{CQ} \cos CQ',$$

donc

$$\text{tang } CQP = \cos CQ' \text{ tang } CGP;$$

par conséquent l'angle $CGP = CQ'P'$ (*).

D'après cela, une construction géométrique fait connaître l'angle dièdre compris entre les plans de deux grands cercles donnés par leurs projections; ou réciproquement, si l'on se donne l'angle dièdre compris entre les plans de deux grands cercles, cette construction déterminera la projection de l'un d'entre eux, quand on connaîtra,

(*) Dans le triangle sphérique $CQ'P'$ rectangle en C ,

$$\text{tang } CQ'P' = \frac{\text{tang } CP'}{\sin CQ'} = \frac{\overline{CP}}{\sin CQ'};$$

mais si l'on a fait $CF = CO$, les triangles plans QCO, QCF sont égaux; donc

$$\sin CQ' = \overline{EC} = \overline{CG} = \frac{\overline{CP}}{\text{tang } CGP};$$

donc, en substituant,

$$\text{tang } CQ'P' = \text{tang } CGP, \quad CQ'P' = CGP.$$

sur la projection de l'autre, la position de l'intersection commune.

Quand l'arc CQ' est petit, la méthode précédente de comparaison entre l'angle dièdre compris entre le plan de deux grands cercles et l'angle de leurs projections, ne conduit pas à des résultats aussi précis que la suivante.

300. Soient (*fig.* 149) C le centre de projection; CQ, PQ les projections des deux grands cercles CQ', P'Q'. Qu'on tire la droite HQ à angle droit sur CQ, et qu'on prenne la longueur HQ égale au rayon de la sphère; qu'on fasse KQ = CH, et que le point L soit milieu de KH; qu'on prolonge QP jusqu'à ce qu'il rencontre KH en P'', on aura

$$\text{tang PQC} = \frac{\overline{KP''}}{\overline{HP''}} \times \text{tang K} = \frac{\overline{HQ}}{\overline{KQ}} \times \frac{\overline{KP''}}{\overline{HP''}} = \cos CQ' \frac{\overline{KP''}}{\overline{HP''}},$$

d'où

$$\text{tang Q}' = \frac{\overline{KP''}}{\overline{HP''}} = \frac{\overline{HL} - \overline{LP''}}{\overline{HL} + \overline{LP''}} \quad (*);$$

donc

$$\frac{\overline{LP''}}{\overline{HL}} = \frac{1 - \text{tang Q}'}{1 + \text{tang Q}'} = \text{tang } (45^\circ - Q').$$

Si $90^\circ - CQ' = l^\circ$,

$$\frac{\overline{HQ}}{\overline{KQ}} = \sin l^\circ;$$

donc

$$\overline{HQ} = \frac{\overline{KH} \sin l^\circ}{\sqrt{1 + \sin^2 l^\circ}}.$$

(*) On a (n° 299)

$$\begin{aligned} \text{tang Q}' &= \frac{\text{tang CQP}}{\cos CQ'} = \frac{1}{\cos CQ'} \frac{\overline{P''M}}{\overline{QM}} = \frac{1}{\cos CQ'} \frac{\overline{KM} \overline{QH}}{\overline{QM} \overline{KQ}} \\ &= \frac{\overline{KM} \overline{CO}}{\overline{QM} \overline{QO}} \frac{1}{\cos CQ'} = \frac{\overline{KM}}{\overline{QM}} \frac{\overline{KP''}}{\overline{HP''}} = \frac{\overline{HL} - \overline{LP''}}{\overline{HL} + \overline{LP''}}. \end{aligned}$$

Afin de faciliter la précédente construction, les rapporteurs sont munis d'une première échelle intitulée: *Inclinaison des Méridiens*; la distance des divisions de cette échelle entre 0^0 et m^0 est

$$c [1 - \text{tang} (45^0 - m^0)];$$

et d'une seconde échelle intitulée: *Latitudes*; la distance qui sépare les divisions 0^0 et l^0 de cette seconde échelle est

$$\frac{2c \sin l^0}{\sqrt{1 + \sin^2 l^0}}$$

Soit le rayon de la sphère $CQ \text{ tang } l^0$; qu'on tire QH perpendiculaire à CQ , qu'on fasse $QH = (0^0, l^0)$, quantité prise sur l'échelle des latitudes; et qu'ensuite du centre H , avec le rayon $HK = (0^0, 90^0)$, pris sur l'échelle d'inclinaison des méridiens, on décrive un cercle qui coupe CQ en K . Il est facile de voir que, si l'on porte de K en P'' la longueur $KP'' = (0^0, m^0)$, prise sur l'échelle d'inclinaison des méridiens, $\overline{P''Q}$ sera la projection d'un grand cercle qui fait un angle m^0 avec le grand cercle projeté suivant CQ (*).

301. La projection gnomonique peut servir, avec avantage, pour projeter les pôles d'un cristal qui appartient

(*) En effet

$$c = \frac{\overline{HK}}{2} = \overline{HL} = \overline{KL}.$$

Soit fait dans l'expression $c [1 - \text{tang} (45^0 - m^0)]$,

$$m^0 = 90^0;$$

la distance correspondante sur l'échelle est

$$c [1 - \text{tang} (45^0 - 90^0)] = 2c = \overline{HK} :$$

ce rayon sert donc à déterminer le point K . Soit fait ensuite m^0

aux trois systèmes caractérisés par trois axes cristallographiques rectangulaires. Le plan de projection le plus convenable rencontre ces trois axes à la même distance de leur commune intersection; les axes YZ , ZX , XY se trouvent alors projetés sur les côtés d'un triangle équilatéral. Lorsque le cristal appartient au système rhomboédrique, le plan de projection peut être parallèle à une face de $\{111\}$ ou de $\{2\bar{1}1\}$. Lorsque le cristal appartient au système prismatique oblique, le plan de projection peut être parallèle à une face de $\{010\}$; et lorsqu'il appartient au système prismatique oblique non symétrique, parallèle à une face quelconque.

302. Tracer la projection gnomonique des pôles d'un cristal de topaze (*fig.* 87) sur un plan qui rencontre les axes à des distances égales de leur commune intersection.

Soient pour données

$$ru = 22^{\circ}50', \quad rl = 43^{\circ}26', \quad rm = 62^{\circ}10', \quad pn = 43^{\circ}30', \\ py = 62^{\circ}13', \quad po = 45^{\circ}27'.$$

Soit f le pôle de (010) ; r, f, p coïncideront avec X, Y, Z , et les arcs qui joignent les pôles de r, f, p se projetteront sur les côtés d'un triangle équilatéral (*fig.* 134). Soit C le centre de ce triangle; qu'on tire fC, pC , qui rencontrent pr, rf en MN . Soit O le centre de la sphère, OC est perpendiculaire au plan rfp ,

$$\overline{Or} = \overline{Of}, \quad rOf = 90^{\circ};$$

d'après cela $\overline{ON} = \overline{Nr}$.

quelconque; la distance correspondante prise sur l'échelle est

$$c [1 - \tan(45^{\circ} - m^{\circ})] = \frac{\overline{HK}}{2} - \frac{\overline{HK}}{2} \tan(45^{\circ} - m^{\circ}) \\ = \overline{KL} - \overline{KL} \tan(45^{\circ} - m^{\circ}) = \overline{KL} - \overline{LP}'' = \overline{KP}'';$$

donc cette quantité, portée de K en P'' , déterminera P' .

Du centre C , avec le rayon Nr , qu'on décrive un cercle qui coupe Nr en Q ; CN est commun aux triangles QNC , OCN ,

$$\overline{QC} = \overline{NO}, \quad \angle QNC = \angle OCN;$$

par conséquent $\overline{OC} = \overline{QN}$.

Que sur Np on prenne $\overline{NR} = \overline{Nr}$, et qu'on fasse

$$nRr = 32^{\circ}15', \quad tRr = 43^{\circ}26', \quad mRr = 62^{\circ}10',$$

que sur Mf on prenne $\overline{MS} = \overline{Nr}$, et qu'on fasse

$$nSp = 43^{\circ}30', \quad ySp = 62^{\circ}13';$$

qu'on tire CT perpendiculairement sur pm , que sur Tp on prenne $\overline{TU} = \overline{OC}$, et sur TC , $\overline{TV} = \overline{VC}$, et qu'on fasse

$$oVp = 45^{\circ}27';$$

soient x et i les points de rencontre de la ligne no avec pl et avec pf ; soient s le point de rencontre des lignes rx et pm , t celui des lignes fo et pr ; p, r, m , etc. seront les projections des pôles des faces p, r, m , etc.



NOTE

SUR LE CHANGEMENT DE SYSTÈME D'AXES
CRISTALLOGRAPHIQUES.

On peut traiter différemment la question résolue par l'auteur (n° 28); et la méthode suivante, bien qu'un peu moins directe, a l'avantage de conduire à des formules susceptibles d'une interprétation géométrique et immédiatement applicables à chaque cas particulier.

§ I. *Étant données les positions réciproques de trois axes quelconques, et les distances angulaires de deux droites à ces trois axes, déterminer le cosinus de l'angle que ces deux droites font entre elles.*

Soient (*fig. 11*) X, Y, Z les points où les trois axes percent la surface d'une sphère qui a son centre à l'origine O; et P, Q les points où les droites données percent la même surface.

Dans le triangle PXQ,

$$\cos PQ = \cos PX \cos QX + \sin PX \sin QX \cos PXQ;$$

mais $PXQ = PXY - QXY$,

$$\begin{aligned} & \sin PX \sin QX \cos PXQ \\ = & \sin PX \sin QX (\cos PXY \cos QXY + \sin PXY \sin QXY). \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \cos PXY &= \frac{\cos PY - \cos PX \cos XY}{\sin PX \sin XY} \\ = & \frac{\cos PY \sin X \sin Y - \cos PX (\cos Z + \cos X \cos Y)}{\sin PX \sin XY \sin X \sin Y}. \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \cos \text{PXZ} &= \frac{\cos \text{PZ} \sin \text{Z} \sin \text{X} - \cos \text{PX} (\cos \text{Y} + \cos \text{Z} \cos \text{X})}{\sin \text{PX} \sin \text{ZX} \sin \text{Z} \sin \text{X}} \\ &= \cos (\text{X} - \text{PXY}) = \cos \text{X} \cos \text{PXY} + \sin \text{X} \sin \text{PXY}; \end{aligned}$$

mais on a

$$\sin \text{ZX} \sin \text{Z} = \sin \text{XY} \sin \text{Y},$$

si donc on remplace, dans la précédente équation, $\cos \text{PXY}$ et $\sin \text{ZX} \sin \text{Z}$ par leur valeur, on arrive à

$$\sin \text{PXY} = \frac{\cos \text{PZ} \sin \text{Z} \sin \text{X} - \cos \text{PX} \cos^2 \text{X} \cos \text{Y} - \cos \text{PY} \sin \text{X} \sin \text{Y} \cos \text{X}}{\sin \text{PX} \sin \text{XY} \sin^2 \text{X} \sin \text{Y}}.$$

Si, dans les valeurs de $\cos \text{PXY}$, $\sin \text{PXY}$, on écrit Q à la place de P , on aura les valeurs de $\cos \text{QXY}$, $\sin \text{QXY}$, et l'on pourra facilement trouver celle du produit $\sin \text{PX} \sin \text{QX} \cos \text{PXQ}$; et enfin, en remarquant que

$$\sin^2 \text{XY} \sin^2 \text{X} \sin^2 \text{Y} = 1 - \cos^2 \text{X} - \cos^2 \text{Y} - \cos^2 \text{Z} - 2 \cos \text{X} \cos \text{Y} \cos \text{Z},$$

celle de $\cos \text{PQ}$.

Si l'on fait, pour abrégér,

$$\text{S} = 1 - \cos^2 \text{X} - \cos^2 \text{Y} - \cos^2 \text{Z} - 2 \cos \text{X} \cos \text{Y} \cos \text{Z},$$

on arrive, après toute réduction, à

$$\left. \begin{aligned} &\cos \text{PX} \cos \text{QX} \sin^2 \text{X} + \cos \text{PY} \cos \text{QY} \sin^2 \text{Y} + \cos \text{PZ} \cos \text{QZ} \sin^2 \text{Z} \\ &- (\cos \text{PY} \cos \text{QZ} + \cos \text{PZ} \cos \text{QY}) \cos \text{X} \sin \text{Y} \sin \text{Z} \\ &- (\cos \text{PZ} \cos \text{QX} + \cos \text{PX} \cos \text{QZ}) \cos \text{Y} \sin \text{Z} \sin \text{X} \\ &- (\cos \text{PX} \cos \text{QY} + \cos \text{PY} \cos \text{QX}) \cos \text{Z} \sin \text{X} \sin \text{Y} \end{aligned} \right\} = \text{S} \cos \text{PQ}$$

Cette expression peut d'ailleurs prendre une autre forme.

Si l'on suppose que P coïncide successivement avec A, B, C pôles respectifs de YZ, ZX, XY, on a les trois équations

$$S \frac{\cos QA}{\cos AX} = \cos QY \sin^2 X - \cos QY \cos Z \sin X \sin Y \\ - \cos QZ \cos QY \sin Z \sin X,$$

$$S \frac{\cos QB}{\cos BY} = \cos QY \sin^2 Y - \cos QZ \cos X \sin Y \sin Z \\ - \cos QX \cos Z \sin X \sin Y,$$

$$S \frac{\cos QC}{\cos CZ} = \cos QZ \sin^2 Z - \cos QX \cos Y \sin Z \sin X \\ - \cos QY \cos X \sin Y \sin Z;$$

donc

$$\cos PQ = \frac{\cos QA}{\cos AX} \cos PX + \frac{\cos QB}{\cos BY} \cos PY + \frac{\cos QC}{\cos CZ} \cos PZ.$$

Or, si l'on joint, par des arcs de grands cercles, le point A aux points Q et X, le point B aux points Q et Y, le point C aux points Q et Z, ces arcs rencontreront à angle droit YZ, ZX, XY aux points respectifs G, G'; H, H'; K, K'; et de plus, si l'on joint le point Q aux points X, Y, Z par des arcs de grands cercles qui rencontreront YZ, ZX, XY respectivement en L, M, N, on a

$$\frac{\cos QA}{\cos AX} = \frac{\sin QG}{\sin XG'} = \frac{\sin QL}{\sin XL},$$

$$\frac{\cos QB}{\cos BY} = \frac{\sin QH}{\sin YH'} = \frac{\sin QM}{\sin YM},$$

$$\frac{\cos QC}{\cos CZ} = \frac{\sin QK}{\sin ZK'} = \frac{\sin QN}{\sin ZN};$$

donc

$$\cos PQ = \frac{\sin QL}{\sin XL} \cos PX + \frac{\sin QM}{\sin YM} \cos PY + \frac{\sin QN}{\sin ZN} \cos PZ.$$

§ II. *Étant données la position réciproque de trois axes quelconques, et les inclinaisons d'une droite sur les trois normales aux plans qui contiennent ces axes deux à deux, trouver l'équation de condition à laquelle les trois inclinaisons doivent satisfaire.*

Soient X, Y, Z les points où les trois axes percent la surface de la sphère dont le centre est à l'origine; Q le point où la droite donnée perce la même surface; A, B, C les pôles respectifs de YZ, ZX, XY. En vertu des relations précédemment établies, il est indifférent de prendre pour données les rapports de cosinus

$$\frac{\cos QA}{\cos AX}, \quad \frac{\cos QB}{\cos BY}, \quad \frac{\cos QC}{\cos CZ},$$

ou les rapports égaux de sinus

$$\frac{\sin QL}{\sin XL}, \quad \frac{\sin QM}{\sin YM}, \quad \frac{\sin QN}{\sin ZN}.$$

Si, dans l'expression générale du cosinus de l'angle compris entre deux droites, prise sous sa dernière forme, on introduit la condition que la direction des deux droites coïncide; et que, par conséquent, le cosinus de l'angle qu'elles font entre elles se réduit à l'unité,

$$1 = \frac{\sin QL}{\sin XL} \cos QX + \frac{\sin QM}{\sin YM} \cos QY + \frac{\sin QN}{\sin ZN} \cos QZ.$$

Mais si, dans la même expression de $\cos PQ$, à la place de P on écrit successivement X, Y, Z, on a

$$\cos QX = \frac{\sin QL}{\sin XL} + \frac{\sin QM}{\sin YM} \cos XY + \frac{\sin QN}{\sin ZN} \cos ZX,$$

$$\cos QY = \frac{\sin QL}{\sin XL} \cos XY + \frac{\sin QM}{\sin YM} + \frac{\sin QN}{\sin ZN} \cos YZ,$$

$$\cos QZ = \frac{\sin QL}{\sin XL} \cos ZX + \frac{\sin QM}{\sin YM} \cos YZ + \frac{\sin QN}{\sin ZN};$$

et si, dans l'équation de condition trouvée ci-dessus, on remplace $\cos QX$, $\cos QY$, $\cos QZ$ par ces valeurs, elle devient enfin

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sin^2 QL}{\sin^2 XL} + \frac{\sin^2 QM}{\sin^2 YM} + \frac{\sin^2 QN}{\sin^2 ZN} \\ & + 2 \frac{\sin QL \sin QM}{\sin XL \sin XM} \cos XY \\ & + 2 \frac{\sin QM \sin QN}{\sin YM \sin ZN} \cos YZ \\ & + 2 \frac{\sin QN \sin QL}{\sin ZN \sin XL} \cos ZX \end{aligned} \right\} = 1.$$

Au lieu de définir la position de la droite par ses inclinaisons sur les trois normales aux plans qui contiennent les axes deux à deux, on peut se donner les distances angulaires de cette droite aux trois axes eux-mêmes; il faut alors introduire la même condition que précédemment dans l'expression générale du cosinus de l'angle compris entre deux droites, prise sous sa première forme; et il vient

$$\left. \begin{aligned} & \cos^2 QX \sin^2 X + \cos^2 QY \sin^2 Y + \cos^2 QZ \sin^2 Z \\ & - 2 \cos QX \cos QY \cos Z \sin X \sin Y \\ & - 2 \cos QY \cos QZ \cos X \sin Y \sin Z \\ & - 2 \cos QZ \cos QX \cos Y \sin Z \sin X \end{aligned} \right\} = S;$$

d'après cela, si un pôle quelconque P a pour symbole (uvw) ,

$$\frac{a}{u} \cos PX = \frac{b}{v} \cos PY = \frac{c}{w} \cos PZ = D.$$

$$D = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2} \sin^2 X + \frac{v^2}{b^2} \sin^2 Y + \frac{w^2}{c^2} \sin^2 Z - 2 \frac{uv}{ab} \cos Z \sin X \sin Y - 2 \frac{vw}{bc} \cos X \sin Y \sin Z - 2 \frac{wu}{ca} \cos Y \sin Z \sin X \right)}}$$

représente évidemment (n° 8) la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la face (uvw) .

§ III. *Étant donnés les symboles de trois faces dont les intersections doivent servir de nouveaux axes cristallographiques, déterminer la position de ces axes.*

Soient X', Y', Z' les points où les nouveaux axes percent la sphère de projection, et soient $A', (efg)$; $B', (hkl)$; $C', (pqr)$ les pôles respectifs de $Y'Z', Z'X', X'Y'$,

$$\begin{aligned} \frac{a}{e} \cos A'X &= \frac{b}{f} \cos A'Y = \frac{c}{g} \cos A'Z, \\ \frac{a}{h} \cos B'X &= \frac{b}{k} \cos B'Y = \frac{c}{l} \cos B'Z, \\ \frac{a}{p} \cos C'X &= \frac{b}{q} \cos C'Y = \frac{c}{r} \cos C'Z. \end{aligned}$$

Si, dans la formule générale qui donne le cosinus de l'angle compris entre deux droites, on remplace Q par X' et P successivement par B' et C' ,

$$\begin{aligned} \cos B'X' = 0 &= \cos B'X \frac{\sin X'L_1}{\sin XL_1} + \cos B'Y \frac{\sin X'M_1}{\sin XM_1} + \cos B'Z \frac{\sin X'N_1}{\sin ZN_1}; \\ \cos C'X' = 0 &= \cos C'X \frac{\sin X'L_1}{\sin XL_1} + \cos C'Y \frac{\sin X'M_1}{\sin XM_1} + \cos C'Z \frac{\sin X'N_1}{\sin ZN_1}; \end{aligned}$$

de ces équations on tire par élimination

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\sin X'L_1}{\sin XL_1}\right)}{\cos B'Y \cos C'Z - \cos B'Z \cos C'Y} &= \frac{\left(\frac{\sin X'M_1}{\sin YM_1}\right)}{\cos B'Z \cos C'X - \cos B'X \cos C'Z} \\ &= \frac{\left(\frac{\sin X'N_1}{\sin ZN_1}\right)}{\cos B'X \cos C'Y - \cos B'Y \cos C'X}; \end{aligned}$$

et si, dans les dénominateurs, on substitue aux cosinus des quantités proportionnelles, on a, à cause de la relation établie § II,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\sin X'L_1}{\sin XL_1}\right)}{ea} &= \frac{\left(\frac{\sin X'M_1}{\sin YM_1}\right)}{fb} = \frac{\left(\frac{\sin X'N_1}{\sin ZN_1}\right)}{gc} = \frac{1}{a'}, \\ e &= kr - lq, \quad f = lp - hr, \quad g = hq - kp, \\ a' &= \sqrt{e^2a^2 + f^2b^2 + g^2c^2 + 2efab \cos XY + 2fgbc \cos YZ + 2gecc \cos ZX}. \end{aligned}$$

En raisonnant de même sur Y' et C', A' ,

$$\frac{\left(\frac{\sin Y'L_2}{\sin XL_2}\right)}{ha} = \frac{\left(\frac{\sin Y'M_2}{\sin YM_2}\right)}{kb} = \frac{\left(\frac{\sin Y'N_2}{\sin ZN_2}\right)}{lc} = \frac{1}{b'}$$

$$h = qg' - rf, \quad k = re - pg, \quad l = pf - qe,$$

$$b' = \sqrt{h^2a^2 + k^2b^2 + l^2c^2 + 2hkab\cos XY + 2klbccos YZ + 2lhccos ZX},$$

et sur Z' et A', B' ,

$$\frac{\left(\frac{\sin Z'L_3}{\sin XL_3}\right)}{pa} = \frac{\left(\frac{\sin Z'M_3}{\sin YM_3}\right)}{qb} = \frac{\left(\frac{\sin Z'N_3}{\sin ZN_3}\right)}{rc} = \frac{1}{c'}$$

$$p = fl - gk, \quad q = gh - el, \quad r = ek - fh,$$

$$c' = \sqrt{p^2a^2 + q^2b^2 + r^2c^2 + 2pqab\cos XY + 2qrbccos YZ + 2rpcacos ZX}.$$

De ce triple système d'équations il résulte que si l'on construit successivement sur les axes cristallographiques OX, OY, OZ , trois parallélépipèdes dont les arêtes, suivant ces axes, soient respectivement

$$ea, fb, gc; \quad ha, kb, lc; \quad pa, qb, rc,$$

les nouveaux axes cristallographiques OX', OY', OZ' coïncident en direction chacun avec une des diagonales de ces parallélépipèdes, cette diagonale étant menée par l'origine.

Si, à la place des rapports de sinus, on eût conservé les rapports égaux de cosinus, chaque équation n'aurait renfermé qu'une seule quantité inconnue. On trouve facilement en effet que

$$\sin YZ \cos AX = \sin ZX \cos BY = \sin XY \cos CZ$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 XY - \cos^2 YZ - \cos^2 ZX + 2 \cos XY \cos YZ \cos ZX}.$$

On obtiendrait donc ainsi les valeurs de $\cos X'A, \cos X'B, \cos X'C; \cos Y'A, \cos Y'B, \cos Y'C; \cos Z'A, \cos Z'B, \cos Z'C$; et, de cette manière, les positions de X', Y', Z' se trouvaient également déterminées.

§ IV. Étant données les mêmes choses que précédemment, et de plus le symbole d'une face quelconque, déterminer les paramètres, et le nouveau symbole de cette face.

Soient les mêmes notations que dans la question précédente, et en outre (uvw) le symbole du pôle quelconque P (n° 2),

$$\frac{a}{u} \cos PX = \frac{b}{v} \cos PY = \frac{c}{w} \cos PZ = D.$$

Si, dans la formule générale qui donne le cosinus de l'angle compris entre deux droites, P représente le pôle (uvw) , et si Q est remplacé successivement par X', Y', Z',

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\cos PX'}{\cos PX \frac{\sin X'L_1}{\sin XL_1} + \cos PY \frac{\sin X'M_1}{\sin YM_1} + \cos PZ \frac{\sin X'N_1}{\sin ZN_1}} \\ &= \frac{\cos PY'}{\cos PX \frac{\sin Y'L_2}{\sin XL_2} + \cos PY \frac{\sin Y'M_2}{\sin YM_2} + \cos PZ \frac{\sin Y'N_2}{\sin ZN_2}} \\ &= \frac{\cos PZ'}{\cos PX \frac{\sin Z'L_3}{\sin XL_3} + \cos PY \frac{\sin Y'M_3}{\sin YM_3} + \cos PZ \frac{\sin Z'N_3}{\sin ZN_3}}; \end{aligned}$$

et si, dans les dénominateurs, on remplace les cosinus et les rapports de sinus par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a'}{D(eu + fv + gw)} \cos PX' = \frac{b'}{D(hu + kv + lw)} \cos PY' \\ &= \frac{c'}{D(pu + qv + rw)} \cos PZ'. \end{aligned}$$

Les nombres entiers

$$eu + fv + gw, \quad hu + kv + lw, \quad pu + qv + rw$$

sont les nouvelles caractéristiques.

Les quantités a', b', c' sont les nouveaux paramètres.

De la forme des valeurs de a', b', c' , il résulte que si, sur les axes cristallographiques OX, OY, OZ, on construit les

mêmes parallépipèdes que dans la question précédente, les nouveaux paramètres sont respectivement égaux en longueur aux diagonales de chacun de ces parallépipèdes, menées par l'origine.

On peut remarquer que les coefficients de u, v, w , dans les valeurs de u', v', w' , sont respectivement égaux aux caractéristiques des zones $B'C', C'A', A'B'$, dont les symboles sont $(efg), (hkl), (pqr)$. On voit de plus que, si trois des quantités e, f, g , ou h, k, l , ou p, q, r ont un facteur commun, ce facteur doit être supprimé en même temps dans les valeurs de la nouvelle caractéristique et du nouveau paramètre, où il se trouve également en évidence.

Il est facile de ramener les valeurs de a', b', c' à leur forme déjà connue (n° 28).

Si l'on écrit successivement, à la place de $P; A', B', C'$; et par suite, à la place de $u, v, w; e, f, g; h, k, l; p, q, r$; et à la place de $D; D_1, D_2, D_3$,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a'}{D_1(ef + fg + gg)} \cos A'X' = \frac{b'}{D_2(hh + kk + ll)} \cos B'Y' \\ &= \frac{c'}{D_3(pp + qq + rr)} \cos C'Z'. \end{aligned}$$

Mais (§ II)

$$D_1 = \frac{c}{a} \cos A'X, \quad D_2 = \frac{a}{h} \cos B'X, \quad D_3 = \frac{a}{p} \cos C'X;$$

on peut d'ailleurs s'assurer que

$$ee + ff + gg = hh + kk + ll = pp + qq + rr,$$

donc

$$\frac{a'}{e \cos A'X'} = \frac{b'}{h \cos B'Y'} = \frac{c'}{p \cos C'Z'}.$$

§ V. *Étant données les mêmes choses que précédemment, et de plus le symbole d'une zone quelconque, déterminer le nouveau symbole de cette zone.*

Soient les mêmes notations que précédemment, et en

outre $(\alpha\beta\gamma)$, $(\varphi\chi\psi)$ les symboles de deux pôles R, T qui font partie d'une zone $(\lambda\mu\nu)$. On a (n° 13)

$$\lambda = \beta\psi - \gamma\chi, \quad \mu = \gamma\varphi - \alpha\psi, \quad \nu = \alpha\chi - \beta\varphi.$$

Les symboles de R et T, rapportés aux nouveaux axes, sont (§ IV)

$$\begin{aligned} \alpha' &= e\alpha + f\beta + g\gamma, & \varphi' &= e\varphi + f\chi + g\psi, \\ \beta' &= h\alpha + k\beta + l\gamma, & \chi' &= h\varphi + k\chi + l\psi, \\ \gamma' &= p\alpha + q\beta + r\gamma, & \psi' &= p\varphi + q\chi + r\psi. \end{aligned}$$

Le symbole de la zone rapportée aux nouveaux axes est $(\lambda'\mu'\nu')$, et (n° 13)

$$\begin{aligned} \lambda' &= (\beta'\psi' - \gamma'\chi') = (\beta\psi - \gamma\chi)(kr - lq) + (\gamma\varphi - \alpha\psi)(lp - hr) \\ &\quad + (\alpha\chi - \beta\varphi)(hq - hp), \\ \mu' &= (\gamma'\varphi' - \alpha'\psi') = (\beta\psi - \gamma\chi)(qg - rf) + (\gamma\varphi - \alpha\psi)(re - pg) \\ &\quad + (\alpha\chi - \beta\varphi)(pf - qe), \\ \nu' &= (\alpha'\chi' - \beta'\varphi') = (\beta\psi - \gamma\chi)(fl - gk) + (\gamma\varphi - \alpha\psi)(gh - el) \\ &\quad + (\alpha\chi - \beta\varphi)(ck - fh); \end{aligned}$$

ou enfin

$$\lambda' = e\lambda + f\mu + g\nu, \quad \mu' = h\lambda + k\mu + l\nu, \quad \nu' = p\lambda + q\mu + r\nu.$$

§ VI. *Étant données les mêmes choses que précédemment, déterminer les inclinaisons réciproques des nouveaux axes cristallographiques.*

Les symboles des zones βC , CA , AB , rapportées aux anciens axes cristallographiques, sont respectivement $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$.

Les symboles des mêmes zones, rapportées aux nouveaux axes cristallographiques, sont (§ V) respectivement $\{e'hp\}$, $\{fkq\}$, $\{gtr\}$.

Or, si le nouveau système d'axes cristallographiques

était entièrement connu, on aurait (§ IV)

$$\frac{D}{\cos PX} = \frac{\sqrt{e^2 a'^2 + h^2 b'^2 + p^2 c'^2 + 2eha'b' \cos X'Y' + 2hpb'c' \cos Y'Z' + 2pec'a' \cos Z'X'}}{cu' + hv' + pw'}$$

$$\frac{D}{\cos PY} = \frac{\sqrt{f^2 a'^2 + k^2 b'^2 + q^2 c'^2 + 2fka'b' \cos X'Y' + 2kqb'c' \cos Y'Z' + 2qfc'a' \cos Z'X'}}{fu' + kv' + qw'}$$

$$\frac{D}{\cos PZ} = \frac{\sqrt{g^2 a'^2 + l^2 b'^2 + r^2 c'^2 + 2gla'b' \cos X'Y' + 2lrb'c' \cos Y'Z' + 2rgc'a' \cos Z'X'}}{gu' + lv' + rw'}$$

Mais (§ II)

$$\frac{D}{\cos PX} = \frac{a}{u}, \quad \frac{D}{\cos PY} = \frac{b}{v}, \quad \frac{D}{\cos PZ} = \frac{c}{w};$$

si, de plus, l'on remplace, dans les dénominateurs, u' , v' , w' par leurs valeurs en fonction de u , v , w ,

$$cu' + hv' + pw' = u (ee + hh + pp),$$

$$fu' + kv' + qw' = v (ff + kk + qq),$$

$$gu' + lv' + rw' = w (gg + ll + rr),$$

les trois équations deviennent

$$a^2 = \frac{e^2 a'^2 + h^2 b'^2 + p^2 c'^2 + 2eha'b' \cos X'Y' + 2hpb'c' \cos Y'Z' + 2pec'a' \cos Z'X'}{(ee + hh + pp)^2},$$

$$b^2 = \frac{f^2 a'^2 + k^2 b'^2 + q^2 c'^2 + 2fka'b' \cos X'Y' + 2kqb'c' \cos Y'Z' + 2qfc'a' \cos Z'X'}{(ff + kk + qq)^2},$$

$$c^2 = \frac{g^2 a'^2 + l^2 b'^2 + r^2 c'^2 + 2gla'b' \cos X'Y' + 2lrb'c' \cos Y'Z' + 2rgc'a' \cos Z'X'}{(gg + ll + rr)^2},$$

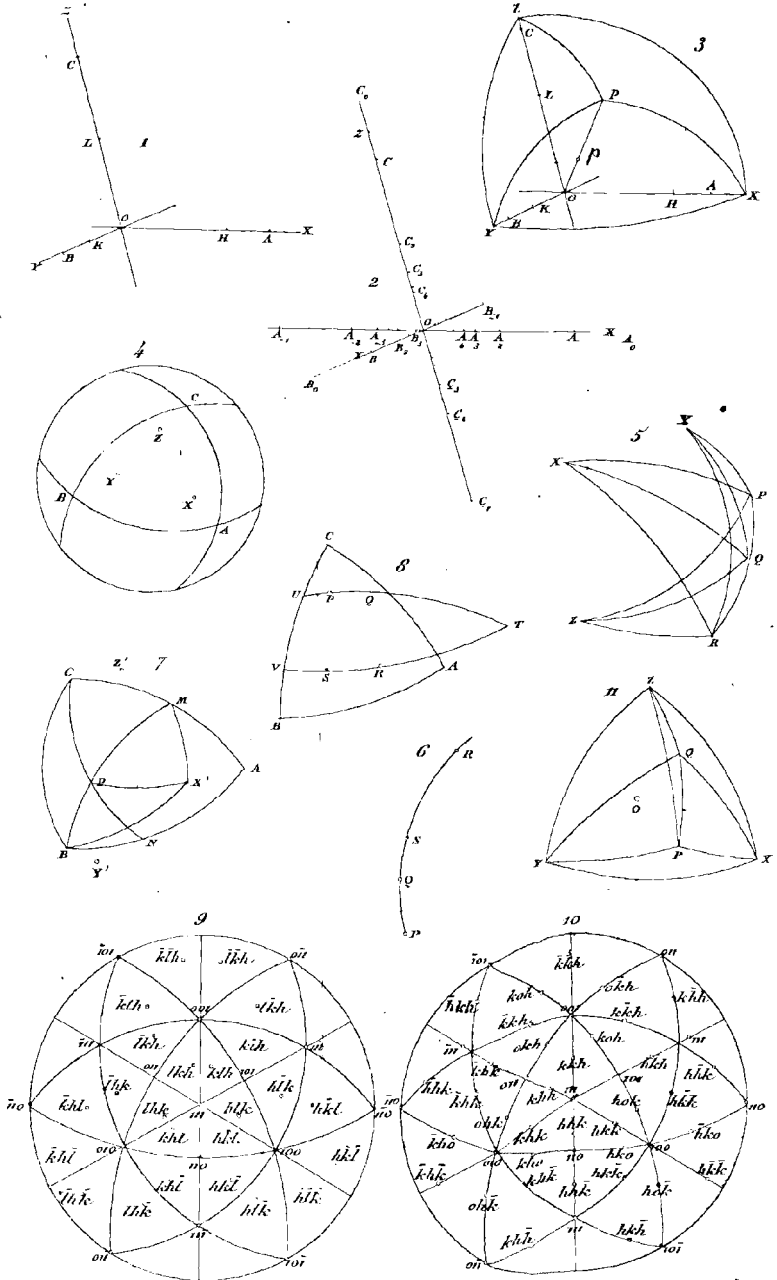
au moyen desquelles on pourra obtenir les valeurs de

$$\cos X'Y', \quad \cos Y'Z', \quad \cos Z'X';$$

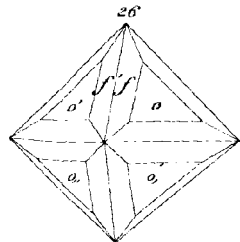
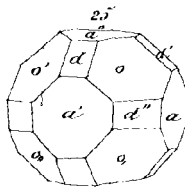
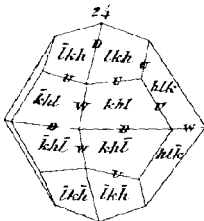
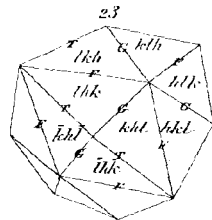
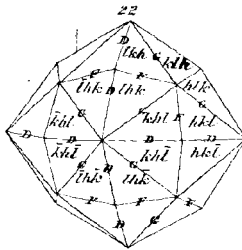
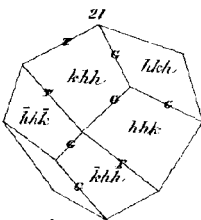
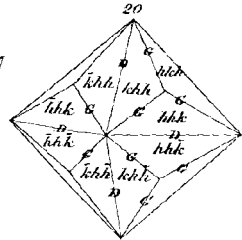
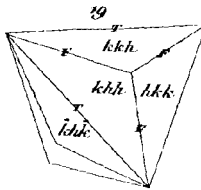
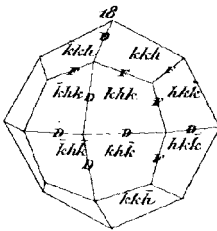
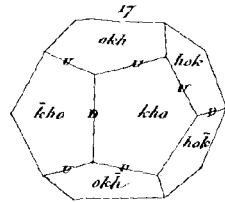
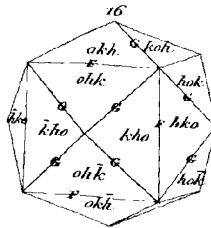
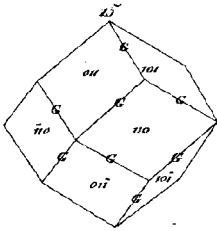
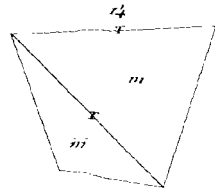
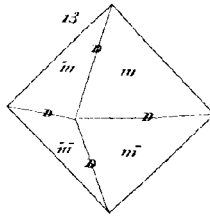
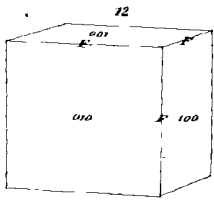
on peut d'ailleurs s'assurer que

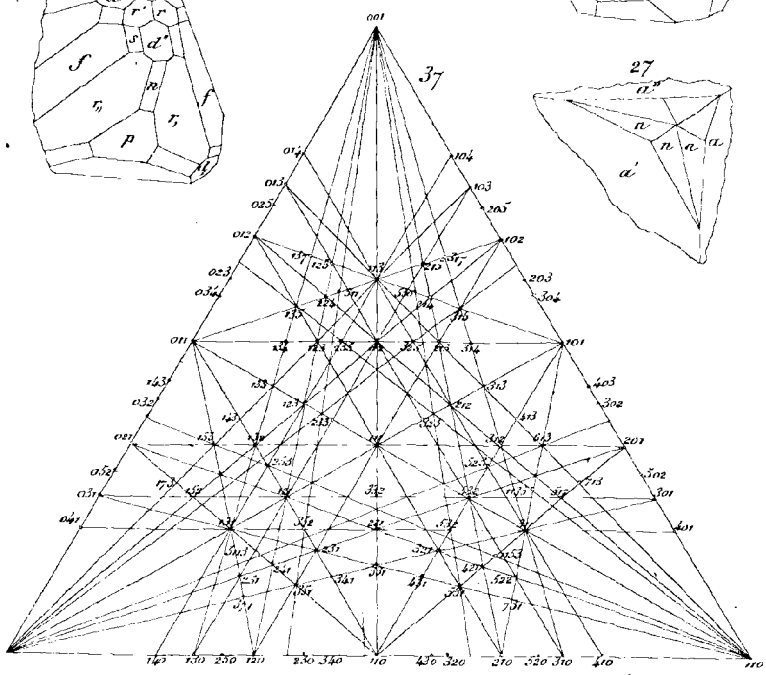
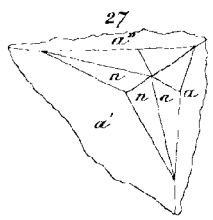
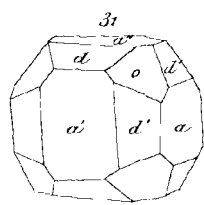
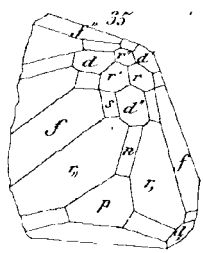
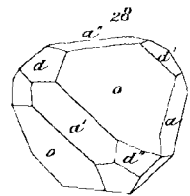
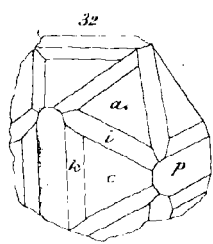
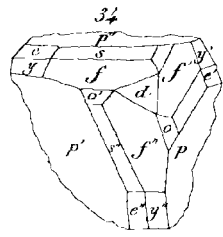
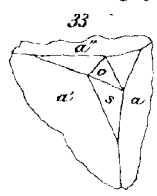
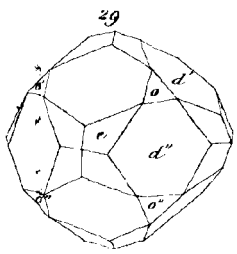
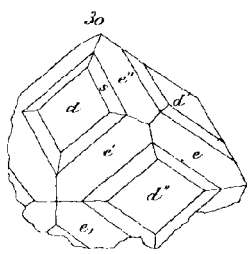
$$ee + hh + pp = ff + kk + qq = gg + ll + rr.$$

FIN.

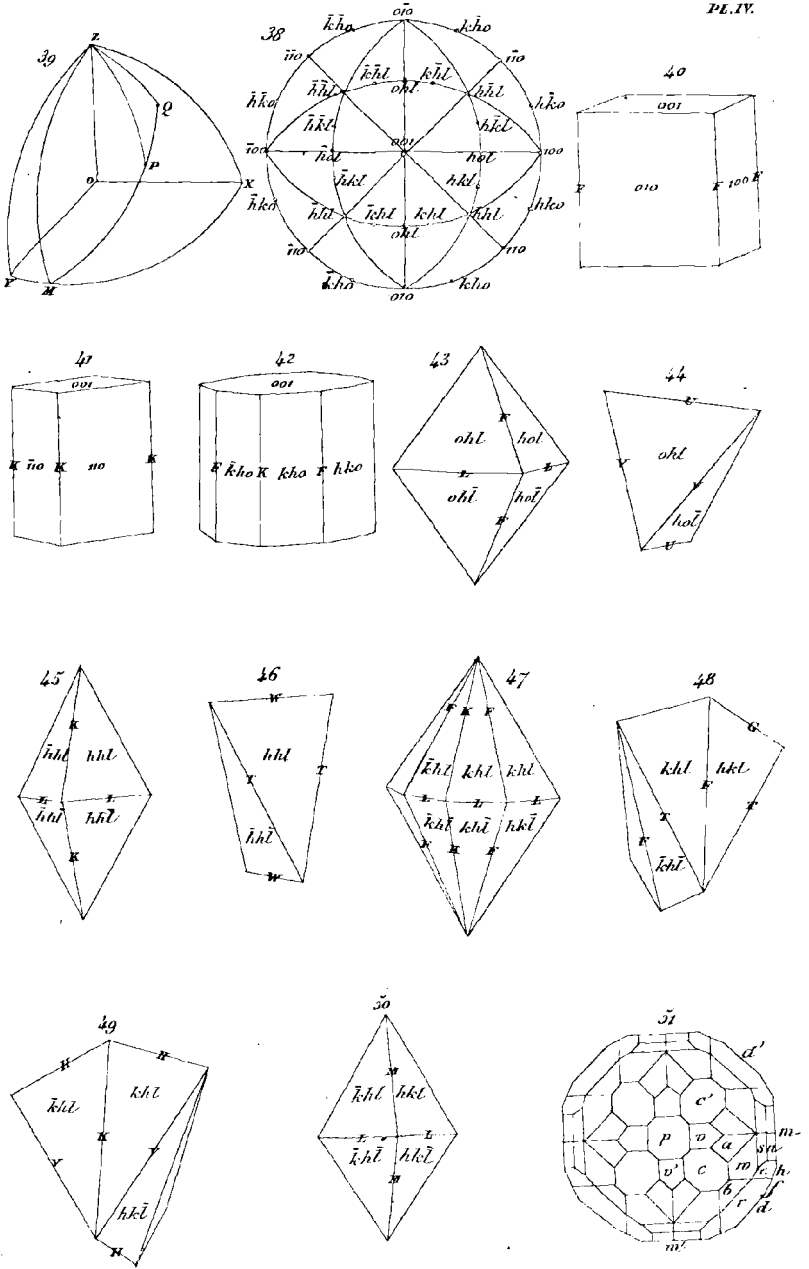


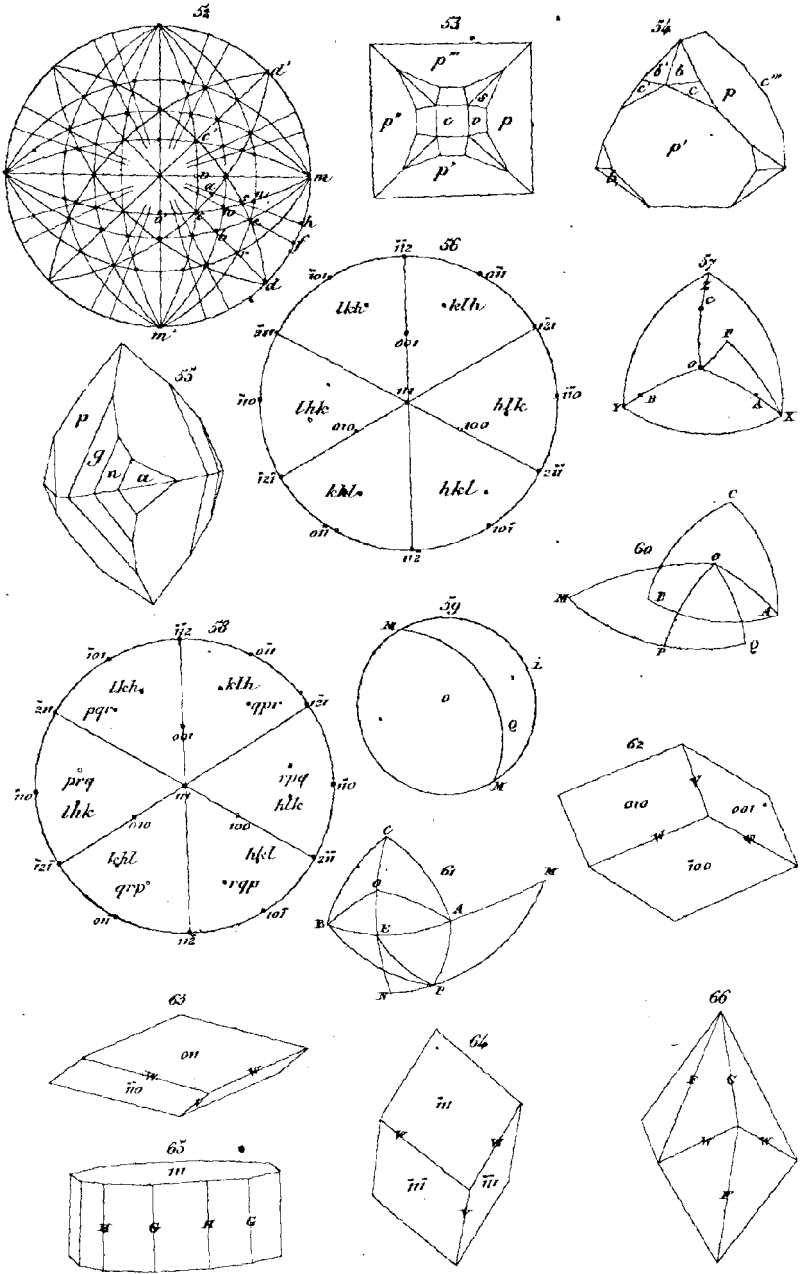
Les P... ..





Isch. P. Brevet





Lith. P. Binetocae

