Cours de M. Douxami

I

Cristallographie géométrique

(Théorie réticulaire) -

1/

Leçon d'ouverture -- 1904

Mineralogie ds son acception la plus generale = histoire naturelle des corps inorganisés

chimie et mineralogie - nécessaire l'une à l'autre - synthèse mineralogique etc
physique et mineralogie - polarisation - goniometre etc
chimie - physique et mineralogie.
Cristallographie. et - geometrie algebre etc -

Historique de la cristallographie
Stenon, Lin, Haüy - Miller, Weiss, Delafosse, Bravais, Naumann, Mallard.

Division de la M. { Cristallographie
Mineralogie physique
———— chimique
———— specifique

La matière cristalline. -

Etat amorphe - absence de tout arrangement interieur - I. homogène) propriété sont partout les mêmes. forme qque -
E. cristallin - organisation de la matière - propriété differente suivant point - faces plane
polyèdre convexe -
chaleur - cire fondue suivant el cristal - les propriété changent avec les directions, mais sont les meme suivant des direction parallele
couleur varie avec la direction suivant laquelle la lumière traverse
dureté
plans de clivage

distinction entre l'etat amorphe et l'etat cristallin
difficile - cristallites - aiguilles -
microlithes - deja specifies - determinable
squelettes cristallins - les mêmes ayant englobé des particules étrangés

Etude d'un mineral -
1°) caractere geometriques. { formes primitives et derivées de ces dernières
angles -
stries des faces
groupements, macles
clivages
pseudomorphes
2°) caractères physiques - { pesanteur specifique
dureté
propriété electriques
— magnetiques
— optique
3°) caractères microscopiques

4°) caractères extérieurs — état d'aggrégation
transparence ou opacité
couleur
éclat
structure
cassure.
Toucher – saveur odeur

5°) caractères chimiques. composition chimique

2/

La 1re loi cristallographique a été trouvée par Romé de l'Isle grâce au goniomètre d'application inventé par Carangeot.

1°) que quelque variable que soit le développement relatif des faces et des arêtes d'un cristal, les angles dièdres restent constants dans la même variété de forme d'une espèce donnée –

Haüy remarqua que certains cristaux se clivaient suivant certaines directions déterminées ; s'il y a au moins 3 directions de clivage par le choc il en résulte des petits parallélépipèdes – les faces du clivage font un angle constant caractéristique de l'espèce – Haüy crut pouvoir conclure que cette division allait jusqu'à la molécule et distinguait 6 sortes de molécules correspondant aux 6 systèmes cristallins –

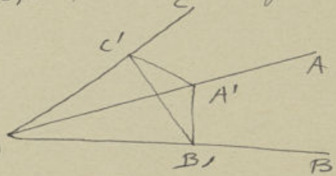
Ces molécules en se juxtaposant produisent des solides ayant même forme qu'elles : ce sont les formes primitives d'Haüy – chacune d'elles caractérise un système cristallin. Toutes les autres formes en dérivent par troncatures, c'est à dire en remplaçant un sommet ou une arête par une face.

Ces troncatures dans leur formation sont soumises à 2 lois : la loi de symétrie et la loi des indices rationnels ; cette dernière a eu comme conséquence la théorie de Bravais.

1°) Toute modification se produisant sur un élément d'un cristal se produit sur tous les autres éléments semblables et les éléments non semblables sont modifiés différemment –

2°) Deux faces d'un cristal interceptent sur une arête des longueurs qui sont entre elles dans un rapport rationnel et généralement simple –

Autrement dit soient OA, OB, OC, 3 arêtes de lg a, b, c, partant d'un même sommet O la lg OA étant déterminée par l'intersection d'une face du cristal avec l'arête – si A' est l'intersection d'une 2e face on aura $OA' = \frac{a}{q}$, q étant un nombre rationnel généralement simple, de même si B' C' sont les intersections de la troncature avec OB, OC, on aura $OB' = \frac{b}{r}$, $OC' = \frac{c}{s}$, r et s étant rationnels et simples –



De là, Haüy définit les corps cristallisés en disant que leurs molécules sont juxtaposées et disposées régulièrement suivant des droites parallèles et suivant des plans parallèles – les molécules d'un cristal cubique ont donc pour Haüy la forme même du cube – pour Bravais, elles ont seulement les éléments de symétrie du cube –

Définition de l'état cristallin –

Cette définition est indépendante des hypothèses que l'on peut faire sur la constitution de la matière – Elle ne suppose ni que la matière soit continue, ni qu'elle soit formée d'atomes ou de molécules – nous appellerons molécules cristallographiques aussi bien les atomes des corps simples que les molécules des corps composés –

Dans l'état amorphe, les molécules sont orientées tou façon qque - Ds l'état cristallin, on constate que deux directions // possèdent les mêmes propriétés, tandis que 2 directions non parallèles ont des propriétés différentes -

Les molécules d'un corps sont supposées géométriquement égales c-à-d que si elles étaient des corps géométriques on pourrait les faire coïncider - si un pt A d'une molécule coïncide avec 1 pt A' d'une ~~autre~~ molécule lors de la coïncidence d'une molécule - les points A et A' sont dits homologues - il pourra y avoir plus de 2 points homologues -

Un corps ~~cristallisé~~ est dit cristallin qd les molécules sont disposées de telle façon que si A et A' sont 2 points homologues - et si les droites AB et A'B' sont égales, parallèles et de même sens, les pts B et B' sont homologues -

Théorie réticulaire -

Soit A_1 un point homologue de A_0 tel que sur la droite A_0A_1 il n'existe aucun autre point homologue de A_0 entre A_0 et A_1. Prenons sur cette droite un pt A_2 tel que $A_1A_2 = A_0A_1$ le pt A_2 est un pt homologue de A_0. En effet les droites A_0A_1 et A_1A_2 sont égales, // et de même sens - par conséquent leurs extrémités sont 2 pts homologues entre 2 - A_2 est donc homologue de A_1 et par suite de A_0

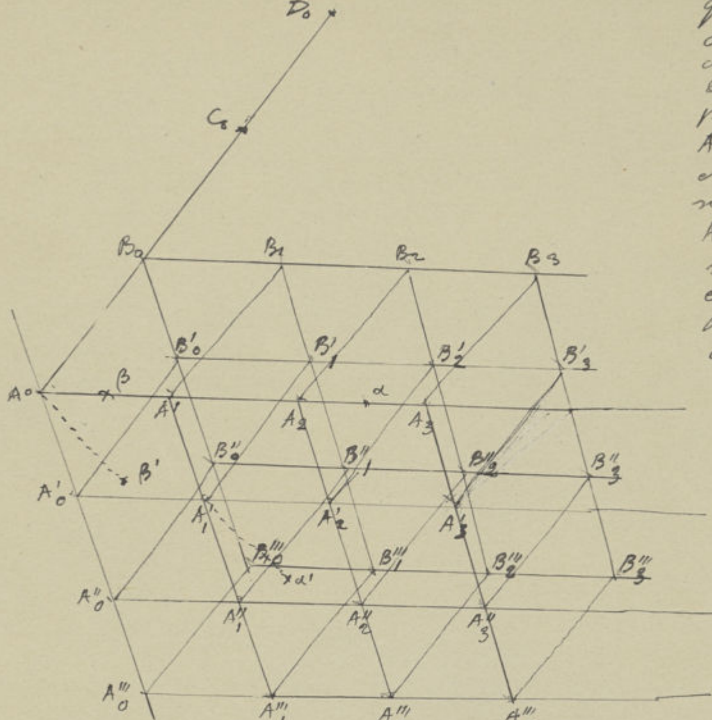
En répétant le m. raisonnement, on voit que sur la droite A_0A_1 il existe une infinité de points homologues à A_0 tous équidistants d'une longueur A_0A_1.

Je dis qu'en outre entre 2 de ces points il n'existe aucun point homologue de A_0 - En effet si entre A_1 et A_2 par ex. nous avions 1 pt α homologue de A_0, en menant par A_0 une droite égale, parallèle et de m. sens à $A_2\alpha$ nous obtiendrons un pt β homologue de A_0 compris entre A_0 et A_1, ce qui est impossible d'après l'hypothèse qui a été faite

Une droite telle que A_0A_1, passant par une infinité de pts homologues de A_0 s'appelle une rangée et la distance de 2 points homologues s'appelle le paramètre de la rangée

Considérons maintenant un plan passant par la droite A_0A_1 et par un pt homologue de A_0 non situé sur A_0A_1, et dans ce plan une droite se déplaçant $//^t$ à elle-même - cette droite finira par rencontrer un pt A'_0 homologue de A_0 tel qu'entre sa position initiale et sa position finale, il n'existe aucun autre point homologue de A_0. Joignons $A_0A'_0$ cette droite est une rangée passant par les points $A_0A'_0A''_0$ etc tous équidistants de la distance $A_0A'_0$ -

Par ces pts menons des droites parallèles à A_0A_1 - puis-



qu'elles ont pour origines des points homologues de A_0, ces droites seront des rangées de même paramètre que la rangée A_0A_1. – Soient $A'_0 A'_1 A'_2$ etc les pts homologues situés sur la 1re rangée et $A''_0 A''_1 A''_2$ .... sur la 2e rangée. etc. Il est évident que ts les pts homologues de m indice inférieur se trouvent sur une droite // à $A_0A'_0$ autrement dit les pts homologues ~~à A_0~~ occupent les sommets de parallélogrammes superposés. A l'int. de ces parallélog. il ne peut exister de pts homologues à A_0. (contraire à l'hypothèse)

On appelle réseau l'ensemble de 2 systèmes de rangées situées dans un m plan., les droites de chacun des syst. étant équidistantes.

On appelle plan réticulaire le plan contenant les 2 syst. de rangées ; noeuds du réseau les point d'intersection des rangées de l'un des systèmes avec celles de l'autre – mailles du réseau, ces parallélogrammes construits sur les paramètres de 2 de ces rangées –

De ce qui précède il résulte que ts les pts homologues d'un pt A_0 situés dans le m plan coïncident avec les noeuds d'un réseau.

Ceci posé, considérons un plan coïncidant primitivement avec le plan A et se déplaçant //t à lui-même il arrivera un moment où il rencontrera un pt B_0 analogue de A_0 tel qu'entre sa position initiale et sa position finale ne se trouve aucun pt homologue de A_0. Joignons A_0B_0 nous obtenons une rangée passant par une infinité de pts homologues – A_0, B_0, C_0, tous équidistants de la lg. A_0B_0. Par ces points menons des plans // à A. ces plans étant // et passant par des pts homologues seront des plans réticulaires dont les réseaux seront égaux et parallèles aux réseaux du plan A. Il est facile de voir que ts les points homologues ayant même indice infr se trouvent ds un même plan // au plan $B_0A_0A_1$ c'est à dire que ts les pts homologues considérés coïncident

5/ avec les sommet de parallélipipèdes juxtaposés - on démontrerait comme précédemment qu'il ne peut y avoir de pts homologue à A_0 ds l'int. d'un de ces parallélipipèdes

On appelle système réticulaire l'ensemble de 3 systèmes de plans réticulaires, les plans de chaque syst étant ∥ et équidistants. Les pts d'intersection communs à ces 3 plans s'appellent noeuds du syst. réticul.

Le parallélipipède construit sur les paramètres de 3 rangées s'appelle la maille du syst. rétic.

Soit maintenant α_0 un autre pt homologue qcq du corps cristallisé - si par ts les pts du système A_0 nous menons des droites ∥, =, et de m sens à $A_0\alpha_0$ nous obtiendrons ts les pt homologue de A_0 - or ts ces pts coïncident évidemment (?) avec les noeuds d'un syst. reticul. q. l'on obtiendrait en donnant au syst. rétic précédent une translation égale, parallèle et de même sens à $A_0\alpha_0$.

La disposition des molécules sera donc parfaitement déterminée, qd on connaîtra le syst. rétic. dont les noeuds coïncident avec les pts homologues d'un pt qque du corps cristallisé -

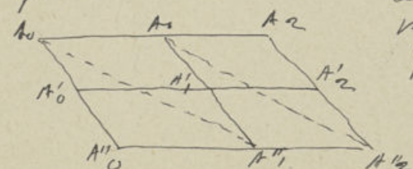
---

Propriétés analytiques des systèmes réticulaires.

Ds un réseau on dit que 2 rangées sont limitrophes, lorsqu'il n'y a aucun noeud compris entre elles deux -

Ds un syst. rétic. on dit que 2 plans ∥ sont limitrophes lorsqu'il n'y a aucun noeud compris entre eux deux.

Ds un réseau 2 rangées sont dites conjuguées lorsque le réseau construit sur ces 2 rangées renferme tous les noeuds du système donné.



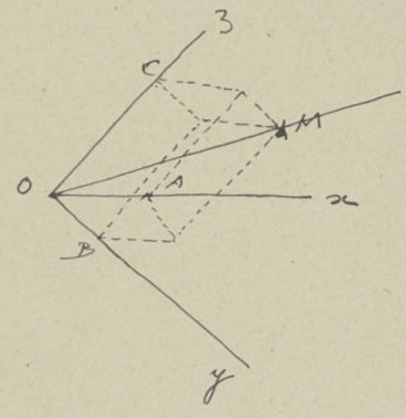
Ainsi $A_0 A_1$ ~~ne sont pas~~ $A_0 A''_1$ ne sont pas 2 rangées conjuguées car le parallélogramme construit sur les paramètres A_0A_1 et $A_0A''_1$ renferme un noeud qui ne coïncide pas avec l'un des noeuds ~~du~~ du nouveau réseau

Pour obtenir une rangée conjuguée d'une rangée donnée, il suffit de joindre 1 noeud de cette dernière à 1 noeud d'1 rangée limitrophe

On dit qu'un plan réticulaire est conjugué d'une rangée lorsque le système réticulaire construit sur la rangée et ~~sur le~~ réseau du plan renferme tous les noeuds du syst. rétic. donné

On dit que 3 rangées sont conjuguées lorsque le syst. réticulaire construit sur ces 3 rangées comprend tous les noeuds du syst. rétic. donné. Pr avoir 3 rangées conjuguées, on prendra 2 rangées conjuguées d'1 plan réticulaire et une 3e conjuguée de ce plan en joignant un noeud de ce plan à un noeud d'un plan limitrophe.

Prenons pour origine des coordonnées un noeud O et pour axes de coord. 3 rangées conjuguées passant par ce pt et cherchons la forme des coordonnées d'un noeud qque M. a, b, c, étant les paramètres des 3 axes de coord.



Si par le pt M ns menons 1 plan parallèle au plan des yz ce plan coupera l'axe des x en un pt A qui sera un noeud de la rangée Ox. Le pt O étant lui même un noeud $OA = mx$ m étant 1 nombre entier

Id. y du pt M ~~est un~~ multiple entier de b, z de c c'est-à-dire

$$x = ma$$
$$y = nb$$
$$z = pc$$

m, n, p étant des nombres entiers positifs ou négatifs constituent les coordonnées numériques du pt M.

<u>Des rangées</u> -

Pr qu'une dr. soit 1 rangée il faut qu'elle passe par 2 noeuds - Une rangée qui passera par l'origine qui est un noeud devra donc encore passer par un autre noeud, qq ma, nb, pc aura pr équation

$$\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb} = \frac{z}{pc}$$

En général on se donne les coordonnées numériques du noeud limitrophe de l'origine. Calculons les :

Soient ma, nb, pc, $m'a, n'b, p'c$, 2 noeuds d'une même rangée - on doit avoir

$$\frac{ma}{m'a} = \frac{nb}{n'b} = \frac{pc}{p'c} \quad \text{ou} \quad \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{p'}{p} = \frac{1}{d}$$

par suite $m' = \frac{m}{d}$ $n' = \frac{n}{d}$ $p' = \frac{p}{d}$

avec la condition que m' n' et p' doivent être entiers on obtiendra les plus petites valeurs de m' n' p', c.à.d. celles du noeud limitrophe à l'origine en prenant pour d le <u>p.g.c.d.</u> entre m n et p. Les 3 nombres premiers ainsi obtenus seront les <u>caractéristiques</u> de la <u>rangée</u> et celle-ci se représente par le symbole (m n p), tts les rangées

7/

parallèles seront $(m\,n\,p)$

Une rangée qcq. devra être parallèle à une rangée passant par l'origine telle que

$$\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb} = \frac{z}{pc} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} n\frac{z}{c} - p\frac{y}{b} = 0 \\ p\frac{x}{a} - m\frac{z}{c} = 0 \\ m\frac{y}{b} - n\frac{x}{a} = 0 \end{array} \right.$$

Elle sera donc représentée par des équations de la forme :

$$\begin{array}{l} n\frac{z}{c} - p\frac{y}{b} = k_1 \\ p\frac{x}{a} - n\frac{z}{c} = k_2 \qquad (1) \\ m\frac{y}{b} - n\frac{x}{a} = k_3 \end{array}$$

Si on exprime que cette dr. ∥ à 1 rangée doit passer par un noeud $m'a$, $n'b$, $p'c$ on aura les conditions

$$\begin{array}{l} n p' - p n' = k_1 \\ p m' - m p' = k_2 \\ m n' - n m' = k_3 \end{array}$$

m' n' p' étant entiers k_1 k_2 k_3 sont aussi entiers, par suite (1) représentera une rangée qcq si k_1 k_2 k_3 sont entiers avec la relation

$$m k_1 + n k_2 + p k_3 = 0$$

Problème. – Un réseau étant donné, trouver l'équation d'une rangée limitrophe d'une rangée donnée. –

En prenant p^r plan des xy le réseau donné, une rangée passant par l'origine aura p^r équation

$$n\frac{x}{a} - m\frac{y}{b} = 0$$

une rangée parallèle sera

$$n\frac{x}{a} - m\frac{y}{b} = k \qquad k \text{ étant entier}$$

Toutes les rangées parallèles s'obtiendront en donnant à k toutes ces valeurs possibles ; les rangées les + proches de l'origine seront celles pour lesquelles k sera le + petit possible – leurs équations sont donc

$$n\frac{x}{a} - m\frac{y}{b} = \pm 1$$

ce sont les 2 rangées limitrophes de $n\frac{x}{a} - m\frac{y}{b} = 0$

Problème. Trouver la condition pour que 2 rangées d'un réseau $(m\,n)$ $(m'\,n')$ soient conjuguées –

Le noeud dont les coordonnées sont m' n' doit se trouver sur l'une des rangées limitrophes de la rangée $(m\,n)$ – elles devront donc satisfaire à l'une des 2 équations.

$$n\frac{x}{a} - m\frac{y}{b} = \pm 1$$

On doit donc avoir $n m' - m n' = \pm 1$

Théorème. La surface du parallélogramme construit sur les paramètres de 2 rangées conjuguées est constante.

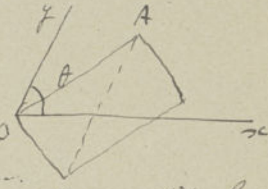
Soient OA, OB les paramètres de 2 de ces rangées conjuguées, la

surface du parallélogr. est 2 celle du triangle AOB –
or surface AOB =

$$\pm \frac{1}{2} \sin\theta \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & ma & nb \\ 1 & m'a & n'b \end{vmatrix}$$

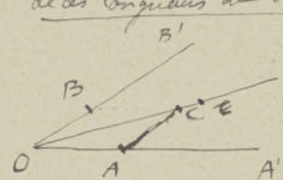
le parallélogr. a donc pour surface

$$\pm \sin\theta \begin{vmatrix} ma & nb \\ m'a & n'b \end{vmatrix} = \pm ab \sin\theta \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} = \pm ab \sin\theta \,(mn' - nm')$$



or si les 2 rangées sont conjuguées $mn' - nm' = \pm 1$ et la surface du parallélogr. est égale à $ab \sin\theta$

Théorème. Si l'on considère plusieurs rangées passant par 1 même noeud et si l'on prend sur chacune des longueurs OA OB.... égales à un multiple de leurs paramètres respectifs, la resultante de ces longueurs est une rangée.



Soient d'abord 2 rangées OA et OB. Si par A qui est 1 noeud nous menons 1 droite AC égale parallèle et de même sens à OB puisque B est un noeud, C sera aussi 1 noeud par suite OC resultante de OA et de OB sera bien aussi une rangée

Si le théorème est vrai pour $n-1$ rangées, la resultante de ces $n-1$ rangées sera une rangée OP dont l'extremité sera un noeud. Or d'après ce qui précède la resultante de OP et de la $n^{ième}$ rangée est une rangée et cette resultante de OP et de la $n^{ième}$ rangée n'est autre chose que la resultante des n rangées.

Des plans reticulaires. –

L'equation d'un plan reticulaire passant par l'origine sera de la forme

$$Ax + By + Cz = 0$$

avec la condition qu'il passe par 2 autres noeuds ma, nb, pc ; $m'a, n'b, p'c$ ≠ de l'origine. On doit donc avoir

$$A\,ma + B\,nb + C\,pc = 0$$
$$A\,m'a + B\,n'b + C\,p'c = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\frac{A}{bc(np' - pn')} = \frac{B}{ac(pm' - mp')} = \frac{C}{ab(mn' - nm')}$$

~~l'equation~~ en divisant par abc

$$\frac{A}{\frac{np' - pn'}{a}} = \frac{B}{\frac{pm' - mp'}{b}} = \frac{C}{\frac{mn' - nm'}{c}}$$

l'equation du plan devient donc

$$(np' - pn')\frac{x}{a} + (pm' - mp')\frac{y}{b} + (mn' - nm')\frac{z}{c} = 0$$

$m\,n\,p$, $m'\,n'\,p'$ étant entiers, les coefficients précédents sont aussi entiers, si on appelle q, r, s, les quotients entiers premiers entre eux de la division de ces nombres par leur pgcd l'equation devient :

$$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = 0$$

q, r, s, sont les caracteristiques du plan reticulaire qui se represente par le symbole $(q\,r\,s)$; si l'on met en évidence les signes des caracterist. on met le signe au dessus $(\bar{q}\;\bar{r}\;\bar{s})$

Un plan reticulaire qque sera // à un plan reticulaire passant par l'origine par suite de la forme

$$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = k$$

9

et devra passer par un noeud ma, nb, pc - on doit donc avoir
$$mq + nr + ps = k$$
$m\,n\,p$, $q\,r\,s$ étant entiers, k le sera aussi, l'équation générale d'un plan réticulaire sera donc
$$\boxed{q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = k} \qquad q, r, s, k \text{ entiers.}$$
les plans limitrophes du plan passant par l'origine seront
$$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = \pm 1$$
Théorème. Deux plans réticulaires interceptent sur une rangée des longueurs qui comptées à partir d'un noeud sont entre elles ds un rapport simple.

Prenons pr axe des x la rangée considérée et pour origine le noeud à partir duquel on compte les longueurs - les équations des 2 plans réticulaires sont
$$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = k$$
$$q'\frac{x}{a} + r'\frac{y}{b} + s'\frac{z}{c} = k'$$
les longueurs interceptées sur ox sont
$$x_1 = \frac{k}{q}a \qquad x_2 = \frac{k'}{q'}a$$
dont le rapport est
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{kq'}{qk'}$$
et k, k', q, q' étant entiers ce rapport est rationnel.

Problème. Condition pour que la rangée $(m\,n\,p)$ soit conjuguée du plan $(q\,r\,s)$

le noeud ma nb pc doit se trouver ds l'un des plans limitrophes du plan (qrs) on doit donc avoir : $$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = \pm 1$$
remplaçons x, y, z, on a $$qm + rn + ps = \pm 1$$
Problème. Trouver les équations des rangées limitrophes d'une rangée $(m\,n\,p)$ située ds le plan $(q\,r\,s)$.

Une rangée // à $m\,n\,p$ a pour équation
$$n\frac{z}{c} - p\frac{y}{b} = k_1$$
$$p\frac{x}{a} - m\frac{z}{c} = k_2 \qquad \text{avec } mk_1 + nk_2 + pk_3 = 0$$
$$m\frac{y}{b} - n\frac{x}{a} = k_3 \qquad (2)$$
Exprimons que cette rangée est située ds le plan $(q\,r\,s)$ en portant ds l'équation
$$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = 0$$
les valeurs de $\frac{x}{a}$ $\frac{y}{b}$ $\frac{z}{c}$ et en tenant compte de la relation $qm + rn + sp = 0$; nous trouvons les conditions $$\frac{k_1}{q} = \frac{k_2}{r} = \frac{k_3}{s} = \mu$$
les équations d'une rangée parallèle à $(m\,n\,p)$ sont donc
$$n\frac{z}{c} - p\frac{y}{b} = \mu q$$
$$p\frac{x}{a} - m\frac{z}{c} = \mu r$$
$$m\frac{y}{b} - n\frac{x}{a} = \mu s$$
la distance de l'origine à une rangée sera proportionnelle à μ ; elle sera d'autant plus petite que μ sera plus petit - par suite les rangées limitrophes de la rangée passant par l'origine s'obtiendront en faisant $\mu = \pm 1$

Problème. Trouver les conditions pour que 2 rangées $(m\,n\,p)$ $(m'n'p')$ soient conjuguées.

Supposons qu'elles soient ds le plan $q\,r\,s$ c'est à dire qu'on ait :
$$mq + nr + ps = 0$$
$$m'q + n'r + p's = 0$$
si elles sont conjuguées on aura évidemment
$$np' - pn' = \pm q$$
$$pm' - mp' = \pm r$$
$$mn' - nm' = \pm s$$

10

les seconds membres étant premiers entre eux, il devra donc en être de même des premiers

En particulier pour que 2 rangées du plan des xy dont les caractéristiques sont $(0\,0\,1)$ soient conjuguées il faut que $\quad mn' - nm' = \pm 1$

Problème. Trouver la condition pr que trois rangées soient conjuguées

Si (mnp) $(m'n'p')$ sont conjuguées, les caractéristiques du plan qui les contient seront $np' - pn'$, $pm' - mp'$, $mn' - nm'$ – l'équation de ce plan est donc :

$$(np' - pn')\frac{x}{a} + (pm' - mp')\frac{y}{b} + (mn' - nm')\frac{z}{c} = 0$$

Les équations des plans limitrophes s'obtiendront en égalant le 1er membre à ± 1 et il faudra pr que la rangée $(m''n''p'')$ soit conjuguée de ce plan que le nœud $m''a$ $n''b$ $p''c$ soit ds l'un des plans limitrophes – on doit donc avoir

$$m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm') = \pm 1$$

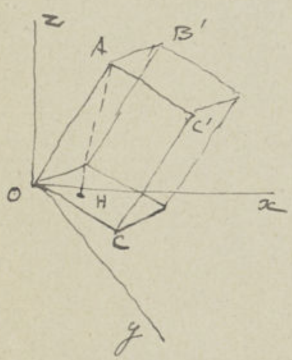
Théorème. Le volume du parallélépipède construit sur les paramètres de 3 rangées conjuguées est constant.

Soient OA, OB, OC les paramètres de ces 3 rangées conjuguées – le vol. du parallélép. construit sur ces 3 long. est égal à 6 fois le vol du tétraèdre $OABC$

Si nous posons $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos(yz) & \cos(xz) \\ \cos(yz) & & \cos(xy) \\ \cos(xz) & \cos(xy) & 1 \end{vmatrix}$

le vol du tétraèdre est $\longrightarrow$ $V = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & ma & nb & pc \\ 1 & m'a & n'b & p'c \\ 1 & m''a & n''b & p''c \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta}\begin{vmatrix} ma & nb & pc \\ m'a & n'b & p'c \\ m''a & n''b & p''c \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta}\,abc \begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$

ou $V = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta}\,abc\,\left[m''(np' - pn') + n''(pm' - mp') + p''(mn' - nm')\right]$



si les 3 rangées sont conjuguées la quantité entre crochets est égale à ± 1 et on a :

$V = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta}\,abc$ et le vol du parallélép. est :

$V = \sqrt{\Delta}\,abc$, indépendant de mnp, $m'n'p'$, $m''n''p''$

Remarque. Le vol du parallélép. est aussi égal au produit du nombre qui mesure la surface du parallélogr. construit sur OB, OC, par le nombre qui mesure la distance AH des 2 plans réticulaires limitrophes OBC $A'B'C'$ – le parallélogr. OBC est la maille du plan réticulaire OCB on a donc

$s \times h = \sqrt{\Delta}\,abc = C^{te}$ or $h = \frac{C^{te}}{s}$ d'où le théorème suivant :

La distance d'un plan réticulaire à son plan réticulaire limitrophe est en raison inverse de la surface de la maille du plan réticulaire. –

Théorème. La distance d'un plan réticulaire à son plan réticulaire limitrophe est d'autant plus gde que les caractéristiques du plan sont plus petites

(peu net)

La maille d'un plan réticulaire est d'autant plus petite que les caractéristiques de ce plan sont + petites (et plus la densité du plan réticulaire sera gde).

Des zones. –

On appelle zone l'ensemble des plans réticulaires // à une même droite qui s'appelle l'axe de la zone (ds la pratique, les faces d'un cristal // à 1 même droite).

Théorème. La droite d'intersection de 2 plans réticulaires est // à une rangée

Soient 2 plans réticulaires passant par l'origine

$$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = 0$$
$$q'\frac{x}{a} + r'\frac{y}{b} + s'\frac{z}{c} = 0$$

$q\ r\ s\ q\ r\ s$
$q'\ r'\ s'\ q'\ r'\ s'$

$rs' - sr' \quad sq' - s'q \quad r' - s r'$
$\quad M \quad\quad N \quad\quad P$

La droite d'intersection a pour équation :

$$\frac{\frac{x}{a}}{rs'-sr'} = \frac{\frac{y}{b}}{sq'-qs'} = \frac{\frac{z}{c}}{qr'-rq'} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{aM} = \frac{y}{bN} = \frac{z}{cP}$$

$M\ N\ P$ étant 3 nombres entiers, cette droite d'intersection est donc bien une rangée.

Par suite l'axe d'une zone ne peut être qu'une droite ∥ à une rangée et si elle passe par l'origine qui est un noeud ce sera une rangée et ses équations seront de la forme précédente –

Problème. Trouver la condition pr qu'un plan réticulaire appartienne à une zone dont on se donne l'axe –

Soit $q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = 0$

l'équation du plan réticulaire rapporté à l'origine – Il doit contenir l'axe de la zone et on doit avoir

$$qM + rN + sP = 0$$

Si comme cela arrive fréquemment on se donnait les axes de 2 zones auxquelles le plan doit appartenir on aurait les 2 relations :

$$qM + rN + sP = 0$$
$$qM' + rN' + sP' = 0$$

d'où $\frac{q}{NP'-PN'} = \frac{r}{PM'-MP'} = \frac{s}{MN'-NM'}$

en divisant les dénominateurs par leur p g c d on aurait $q\,r\,s$.

Problème. Trouver les caractéristiques d'une face appartenant à 2 zones connues

Soient MNP, $M'N'P'$ les caractérist. de 2 zones –

L'équation d'une face (plan réticulaire) est $q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} = s\frac{z}{c} = 0$

Pr qu'il appartienne à la 1re zone il faut que

$$qM + rN + sP = 0$$

à la 2e.

$$qM' + rN' + sP' = 0$$

q, r, s sont donc proportionnels à $\frac{q}{MP'-PM'} = \frac{r}{PM'-MP'} = \frac{s}{NP'-PN'}$

$M \quad NP \quad M \; N \; P$
$M' \quad N'P' \quad M'N' \; P'$ –

il faudra naturellement ds ce ~~∥~~ problème tenir compte des signes qui peuvent affecter les caractéristiques –

§ II Symétrie des polyèdres et des systèmes réticulaires

On dit qu'une droite est un axe de symétrie d'ordre q lorsqu'en faisant tourner le polyèdre d'un angle égal à $\frac{2\pi}{q}$ autour de cette droite, le polyèdre se retrouve en coïncidence avec lui-même – q peut être égal à 2, 3, 4, 6. L'axe est binaire, ternaire, quaternaire, sénaire. Si $q = 2$ on a un axe de symétrie comme ceux définis en géométrie.

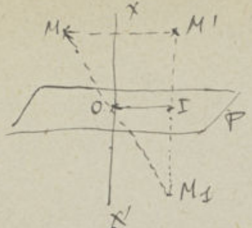
Les plans de symétrie et les centres se définissent en cristallographie comme en géométrie.

On démontre en géométrie les théorèmes suivants –

Théorème. Si un polyèdre possède plusieurs axes de symétrie, plusieurs plans de symétrie, ces axes et ces plans se coupent en un même point qui est le centre du polyèdre, si ce polyèdre a un centre.

Théorème – Si un polyèdre possède un axe d'ordre pair et un centre il possède un plan de symétrie ppd. à l'axe

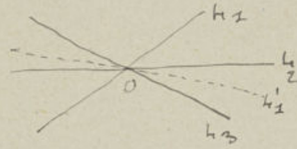
Si XX' ~~est~~ o axe, le centre O sera sur cet axe — Soit M un pt du polyèdre, M' sera son symétrique par rapport à l'axe, M_1 par rapport au centre — M' et M_1 sont évidemment symétriques par rapport au plan P.



Réciproquement.

Si un polyèdre possède un plan de symétrie et un centre, il possède un axe d'ordre pair ppd au plan de symétrie —

Théorème. Si un polyèdre possède q axes binaires et q seulement ds un plan, 2 axes contigus font entre eux un angle $= \grave{a}\ \frac{\pi}{q}$.



Soient OL_1, OL_2, OL_3, 3 axes binaires consécutifs c.à.d. q ds l'angle L_1OL_3 il n'y a pas d'autre axe binaire que OL_2 — ce dernier axe est la bissectrice de cet angle — si en effet on avait

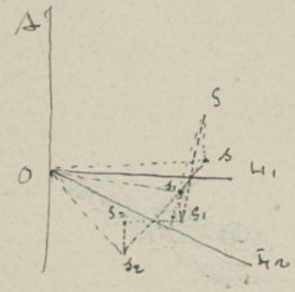
$L_2OL_3 > L_2OL_1$

en faisant tourner le polyèdre d'un angle égal à π autour de OL_2, OL_1 viendrait en OL'_1 situé ds l'angle L_2OL_3 et puisque le polyèdre doit se retrouver identique à lui-même OL'_1 serait un axe binaire ce qui est contraire à l'hypothèse —

Il résulte de là que les axes binaires consécutifs font un angle constant, et comme il y a 2q directions cet angle doit être $\frac{2\pi}{2q} = \frac{\pi}{q}$.

Théorème. Qd un polyèdre possède q axes binaires ds un plan, il possède ppd à ce plan un axe d'ordre q ou multiple de q.

Soit OA la ppd au plan. OL_1, OL_2 — 2 axes binaires faisant un angle de $\frac{\pi}{q}$ soit S un sommet qque du polyèdre, il faut démontrer qu'en faisant tourner le polyèdre de $\frac{2\pi}{q}$ le point S viendra coïncider avec 1 autre sommet du polyèdre —



Soit S_1 symétrique de S par rapport à OL_1
S_2 ——— S_1 ——— OL_2
et soient s, s_1, s_2, les projections de ces sommets sur le plan des axes binaires on a :

$Os = Os_1 = Os_2$ $\quad sOL_1 = s_1OL_1$

$Ss = S_1s_1 = S_2s_2$ d'où : $s_2OL_2 = s_1OL_2$

en additionnant on a : $sOL_1 + s_2OL_2 = L_1OL_2 = \frac{\pi}{q}$

par suite $sOs_2 = sOL_1 + s_2OL_2 + L_1OL_2 = \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{q} = \frac{2\pi}{q}$

~~Remarque~~ Si donc on fait tourner le polyèdre d'un angle $\frac{2\pi}{q}$ autour de OA, Os viendra coïncider avec Os_2, s avec s_2 et les 2 droites sS et S_2s_2 étant = et ppd au plan des axes binaires coïncident : S viendra en S_2.

Remarque Si q est impair en faisant tourner de $\frac{2\pi}{q}$ autour de OA, OL_1 ne vient pas coïncider avec OL_2, mais avec l'axe suivant OL_3, et ainsi de suite avec les autres axes pris de 2 en 2, mais après $\frac{q+1}{2}$ rotations de $\frac{2\pi}{q}$, on aura une rotation de $\pi + \frac{\pi}{q}$ et OL_1 vient ds le prolongement de OL_2. Donc qd q est impair OL_1 peut être amené en coïncidence avec un axe binaire qque et tous les axes binaires sont donc identiques entre eux et de même espèce

Si q est pair, on ne pourra amener OL_1 qu'avec les axes pris

13 de 2 en 2 et il y a 2 espèces d'axes, les axes d'une espèce étant bissectrices des axes de l'autre espèce.

Réciproque. Si un polyèdre possède un axe d'ordre q et un axe binaire ppd, il possèdera q axes binaires ppd à l'axe d'ordre q.

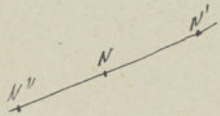
Théorème. Si un polyèdre possède q plans de symétrie passant par une même droite, cette droite est un axe d'ordre q.

Réciproque. Si un polyèdre possède un axe d'ordre q et un plan de symétrie passant par cet axe, il possède q plans de symétrie passant par cet axe. --

Se démontre en suivant la même marche que ds le théorème précéd.

§ III Symétrie des polyèdres réticulaires

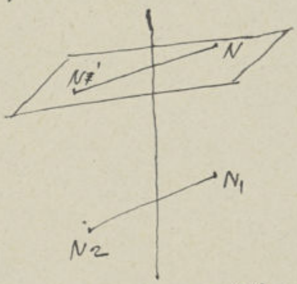
Les systèmes réticulaires étant indéfinis un noeud qcq est un centre de symétrie : si N et N' sont 2 noeuds qcq en prolongeant N N' de NN'' = NN', le pt N'' est un noeud et par suite N est un centre.



En second lieu tous les noeuds étant identiques, si par un noeud il passe un axe de symétrie, par ts les autres noeuds passent des axes de symétrie de même ordre que le premier et lui étant parallèles.

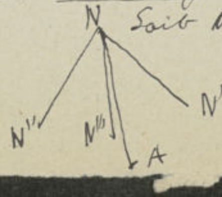
Théorème. Si par un noeud on mène un plan ppd à un axe de symétrie, ce plan est un plan réticulaire :

Si en effet, l'axe est d'ordre supr à 2, en faisant tourner le système réticulaire autour de cet axe, le noeud situé dans le plan vient coïncider avec au moins 2 autres noeuds situés ds le plan et celui-ci contenant au moins 3 noeuds sera un plan réticulaire.



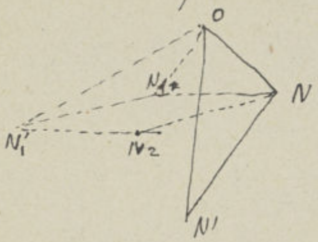
Si l'axe est binaire soit N_1 un noeud qque. situé en dehors du plan - le pt N_2 symétrique de N_1 par rapport à l'axe est un noeud et $N_1 N_2$ étant perpend à l'axe est // au plan donné. Si donc par le noeud N situé ds ce plan nous menons une droite NN' égale et // et de m sens à $N_1 N_2$, N' sera un noeud situé dans le plan. Celui-ci renfermant une infinité de noeuds est donc un plan réticulaire -

Théorème. Un axe de symétrie passant par un noeud est une rangée.



Soit NA un axe d'ordre q passant par le noeud N. Soit N' un noeud qque en dehors de l'axe. En faisant tourner le système réticulaire q fois de $\frac{2\pi}{q}$ autour de l'axe, nous obtiendrons q rangées NN', NN''.... égales entre elles, faisant avec l'axe des angles égaux et la résultante de ces rangées qui est une rangée de la droite suivant NA.

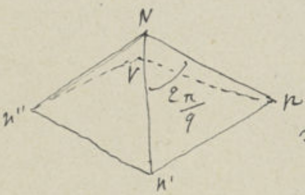
Théorème. Si par un noeud on mène une droite parallèle à un axe d'ordre q, cette droite est également un axe d'ordre q.



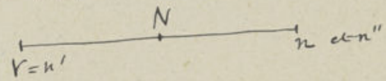
Soit N un noeud qque. par ce pt N menons un plan ppd. à un axe d'ordre q. ce plan est un plan réticulaire coupant l'axe en O. Il faut démontrer que si on fait tourner le syst. réticulaire d'un angle $\frac{2\pi}{q}$ autour d'une droite // à l'axe et passant par N un noeud qque N' viendra coïncider avec un autre noeud. Faisons en effet tourner le triangle ONN' de $\frac{2\pi}{q}$ autour de l'axe O, il viendra en $ON_1N'_1$. N_1, N'_1 sont des noeuds. Par N'_1 menons une droite N'_1N_2 = // et de m. sens à N_1N. Le point N_2 sera un noeud. mais la figure $NN_1N'_1N_2$ est un parallélogr. par suite $NN_2 = N_1N'_1 = NN'$. L'angle de NN_2 avec NN_1 est égal à l'angle de NN' avec $N_1N'_1$ et cet angle est celui dont on a fait tourner le syst. réticulaire autour de l'axe $O = \frac{2\pi}{q}$. Si donc on fait tourner le syst. rétic. d'un angle de $\frac{2\pi}{q}$ autour de l'axe N un noeud qq N' viendra coïncider avec un noeud N_2.
La même construction et le même raisonnement pourront être faits pour tt plan // - le théorème est démontré.

Théorème. Un système réticulaire ne peut avoir d'axe d'ordre autre que 2, 3, 4 et 6. —

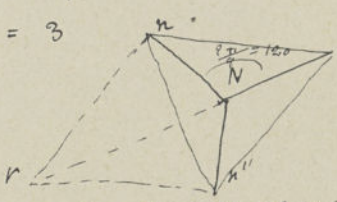
Considérons le plan ppd à un axe d'ordre q passant par le noeud N. Et soit n ds ce plan le noeud le + près possible de N. Si nous faisons tourner le système de $\frac{2\pi}{q}$ à 2 reprises différentes autour de N nous obtiendrons 2 autres noeuds n'n''. Par n'' menons une droite égale // et de m. sens à n'n - nous obtenons un noeud v situé sur NN'. il faut que Nv soit > que Nn ou si Nn = 1 que Nv > 1

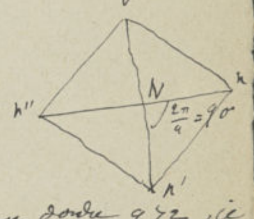


si q = 2 v = n'



si q = 3





si q = 4. Nv = Nn possible en ce

si q = 6. N = v $\quad 6 \times 60° = 360$.

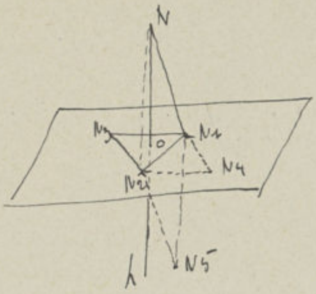
Théorème. Lorsqu'un système réticulaire possède un axe d'ordre q > 2, il possède q axes binaires ds un plan ppd. c.à.d. qu'il possède q systèmes d'axes binaires ds un plan ppd. les axes de chaque syst étant // entre eux.

Soit NA un axe d'ordre q passant par le noeud N. considérons ce plan réticulaire ppd à NA et l'ensemble des plans réticulaires passant par N. Soit O le pt d'intersection de l'axe et du plan. N_1 le noeud le plus proche de O.

15

1°/ faisons $q = 3$.

En faisant tourner 2 fois le système de $\frac{2\pi}{3}$ N vient en N_2 et N_3, $N_1 N_2 N_3$ dont un triangle équilatéral de Centre O. on veut démontrer que les 3 cotés du triangle sont 3 axes binaires - Par N_2 menons $N_2 N_4$ $\parallel =$ et de m sens à $N_3 N_1$ - N_4 sera un noeud $N_2 N_4$ sera la bissectrice de l'angle N_2 et de l'angle N_1. Par N_2 menons une droite $N_2 N_4$ $\parallel =$ et de m sens à $N N_1$, N_5 est un noeud tel que $N_2 N_5 = N N_2$ et $N_1 N_2$ est la bissectrice de l'angle $N N_2 N_5$ - si nous faisons tourner de π le syst. rétic. autour de $N_1 N_2$ la rangée $N_2 N_5$ reste en coïncidence avec elle-même - $N_2 N_3$ vient coïncider avec $N_2 N_4$, $N_2 N$ avec $N_2 N_5$. Donc 3 rangées conjuguées du syst rétic. vont coïncider avec 3 nouvelles rangées conjuguées et le syst rétic. se trouve en coïncid. avec lui-même.

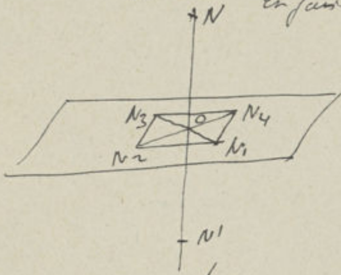


2°/ supposons $q = 4$.

En faisant tourner le syst. rétic. de 3 fois $\frac{2\pi}{4}$ on obtient les noeuds $N_2 N_3 N_4$ formant avec N_1 les sommets d'un carré de centre O. comme dans le cas précédent on démontrerait que les cotés du carré sont des axes binaires.

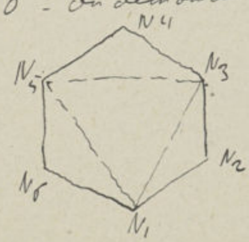
Je dis qu'il en est de même des diagonales. Le plan réticulaire passant par un noeud et perp. à un axe de symétrie d'ordre pair est un plan de symétrie donc sur Nh existe un noeud N' symétrique de N par rapport à O

Si donc on fait tourner le syst réticulaire de π autour de $N_2 N_4$ N viendra coïncider avec $N_2 N_1$, $N_3 N_4$ sur $N_4 N_1$ $N_2 N$ viendra sur $N_2 N'$. 3 rangées conjuguées se trouvent donc en coïncidence ~~avec~~ 3 nouvelles rangées conjuguées.



3°/ supposons $q = 6$. -

En faisant tourner 5 fois le syst. réticulaire on aura 5 nouveaux noeuds formant avec le 1er un hexagone régulier de centre O - On démontrerait comme pour $q = 3$ que les cotés sont des axes binaires et comme dans le cas $q = 4$ que les diagonales joignant ~~les cotés~~ sommets de 2 à 2 sont 3 autres axes binaires



§ IV. Classification des systèmes réticulaires.

Ier groupe. — 1°) Pas d'axe de symétrie.

Il y a tjs un centre puisque chaque noeud est un centre. — Il n'y a pas de plan de symétrie, car ppd à chaque plan de symétrie il y aurait un axe binaire.
Cette 1re espèce de syst. réticulaire n'a donc pour tout élément de symétrie qu'un centre

0L C 0P. Système triclinique ou asymétrique

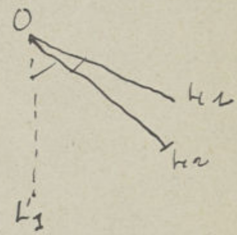
2°) Un axe binaire.

Puisqu'il y a 1 centre, il y aura un plan de symétrie ppd. à l'axe binaire :

L_2 C P Syst. monoclinique ou binaire

3°) Deux axes binaires.

Il en possède forcément un 3e et seulement un 3e. Les 3 axes binaires sont perpend. entre eux 2 à 2.



Considérons le plan passant par les 2 axes binaires donnés OL_1, OL_2. Si OL_2 n'est pas perpend. à OL_1, en faisant tourner le syst. réticul. de π autour de OL_2, OL_1 viendra en OL_1', ne coïncidant pas avec le prolongement de OL_1. Par suite le système aurait au moins 3 axes binaires ds un plan et posséderait au moins un axe d'ordre 3 ppd. au plan donc ces 2 axes binaires sont ppd. de plus en outre un 3e également binaire ppd. à ce plan
Il ne peut y avoir un 4e, car il ferait avec les 3 axes précédents un angle inf. à $\frac{\pi}{2}$ et ds le plan $OL_3 OL_4$ existeraient plus. axes binaires et ppd. à ce plan existerait un axe ppd. A chaque axe correspond un plan ppd. de symétrie passant par le centre

$L_2 L'_2 L''_2$ C P P' P''. — Syst. orthorhombique terbinaire

IIe groupe. 1°) axe principal d'ordre 3

Ds un plan ppd. il possède 3 axes binaires de m. espèce faisant entre eux un angle $\frac{\pi}{3}$ et ppd à ces 3 axes un plan de symétrie puisqu'il y a un centre.

Λ^3 $3L_2$ C. 3P. Syst. Rhomboédrique ou ternaire

2°) axe principal d'ordre 4.

Ds un plan ppd il possède 4 axes binaires faisant des angles égaux à $\frac{\pi}{4}$, mais ces axes sont de 2 espèces, les axes d'une espèce étant ppd

17/

entre eux et étant les bissectrices des 2 axes de l'autre espèce. Il y a un plan de symétrie p(rinci)pal puisque l'axe ppal est pair et 4 plans de symétrie secondaires ppd aux 4 axes binaires.

$\Lambda_4\ 2L_2\ 2L'_2\ C\ \pi\ 2P\ 2P'$. Syst. quadratique

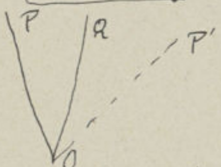
3°) axe principal d'ordre 6.

Ds un plan ppd. il y a une 6 axes binaires faisant un angle $\frac{\pi}{6}$, 3 de m̄ espèce à $\frac{\pi}{3}$ et 3 autres bissectrices des premiers

$\Lambda_6\ 3L_2\ 3L'_2\ C\ \pi\ 3P.\ 3P'$. Syst hexagonal

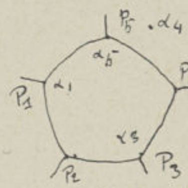
III^e groupe..

1^er Lemme. Si un système réticulaire possède un axe d'ordre p et un axe d'ordre q. p et q étant > 2, il possède plusieurs axes d'ordre p et plus. axes d'ordre q.



Soient OP un axe d'ordre p et OQ un axe d'ordre q. en faisant tourner le syst. rétic. d'un angle $\frac{2\pi}{q}$ autour de OQ, OP viendra en OP' qui sera un nouvel axe d'ordre p, car q étant > 2 OP' ne peut coïncider avec le prolongement de OP.

2^e Lemme. Si du pt. d'intersection des axes comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une sphère et si l'on représente chaque axe par son pt. d'intersection avec cette sphère appelé pôle de l'axe, les pôles des axes d'ordre p sont les sommets de polygones réguliers recouvrant exactement la sphère —



Soient P_1, P_2 les 2 pôles d'axe d'ordre p tels que P_2 soit le pôle le plus rapproché de P_1 - Si nous faisons tourner le syst. d'un angle $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_2, P_1 viendra en P_3, si nous faisons autour de P_3, P_2 viendra en P_4 et ainsi de suite - Nous aurons ainsi des pôles d'axes d'ordre p tous situés sur un petit cercle de la sphère - finalement nous retombons sur le pt P_1 car sans cela nous trouverions bientôt un axe d'ordre p plus près de P_1 que P_2 - Donc tous ces pôles sont les sommets d'un polygone régulier

Ceci posé, si l'on fait tourner le polygone tout entier d'un angle égal à $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_2, nous obtiendrons un nouveau polygone adjacent au 1^er et dont les sommets sont des pôles d'axe d'ordre p. - En continuant nous finirions par recouvrir exactement toute la sphère sans quoi il y aurait une infinité d'axes d'ordre p. et l'un d'eux serait plus près de P_1 que P_2.

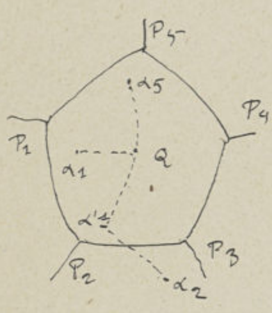
3^e Lemme. Si les polygones précédents ont un nombre pair de côtés égal à q, les pôles de ces polygones sont les pôles d'axes d'ordre $\frac{q}{2}$.

Si α un nœud du système réticul. - nous pouvons le supposer sur la sphère puisque le rayon est arbitraire. Si nous faisons tourner le syst. retic. d'un angle égal à $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_2, α_1 vient en α_2 ; si nous faisons tourner de $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_3, α_2 viendra en α_3 et α_3 occupera par rapport à $P_3 P_4$ la même position que α_1 par rapport à $P_1 P_2$. Si donc Q est le pôle du polygone

$$Q\alpha_2 = Q\alpha_1 \text{ et } \widehat{\alpha_1 Q \alpha_3} = \widehat{P_1 Q P_3} = 2 P_1 Q P_2 = 2\frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{\frac{q}{2}}$$

q étant pair $\frac{q}{2}$ est entier, donc si on fait tourner le syst. réticulaire d'un angle égal à $\frac{2\pi}{\frac{q}{2}}$ autour de Q, α_1, c'est à dire un noeud qque viendra coïncider avec un autre noeud.

<u>2e Lemme</u>. <u>Si les polygones ont un nombre impair de côtés égal à q, le centre des polygones est le pôle d'un axe d'ordre q et les milieux des côtés des polygones sont les pôles d'axes binaires.</u>



Si en effet nous faisons tourner le syst de $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_2, α_1 viendra en α_2 ; autour de P_3 α_2 viendra en α_3 occupant par rapport à $P_2 P_4$, la même position que α_1 par rapport à $P_1 P_2$.

Après $q-1$ rotations successives autour de chacun des sommets, si q est impair nous obtiendrons un sommet α_q occupant par rapport à $P_q P_1$ la même position que α_1 par rapport à $P_1 P_2$ -

on aura donc :

$$\alpha_1 Q = \alpha_q Q$$

et l'angle $\alpha_1 Q \alpha_q = P_1 Q P_q = \frac{2\pi}{q}$. Donc par une rotation de $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q on amène un sommet qq α_1 à coïncider avec un autre sommet α_q. D'autre part en faisant tourner le polyèdre autour de P_2 d'un angle $\frac{2\pi}{p}$ nous obtenons un sommet α_2 et en faisant tourner autour de Q d'un angle $\frac{2\pi}{q}$ on obtient α'_1, occupant par rapport à $P_2 P_3$ la même position que α_1 par rapport à $P_1 P_2$. Donc ~~l'arc~~ le milieu de $P_2 P_3$ étant l'arc de gd cercle $\alpha'_1 \alpha_1$ passe par le milieu de ce côté est donc le pôle coupé en 2 parties égales. d'un axe binaire -

Chercheons quelles sont les conditions que doivent remplir p et q pour que l'on puisse recouvrir exactement la sphère de polygones réguliers de q côtés dont l'angle est égal à $\frac{2\pi}{p}$

<u>Théorème</u>. <u>Si on prend pour unité d'angle, l'angle interceptant sur la sphère une longueur égale au rayon, la surface du triangle sphérique trirectangle étant prise également pour unité, l'aire d'un polygone</u>

sphérique est mesurée par la somme des angles diminuée d'autant de fois π qu'il y a de côtés moins deux. $S = \sum A - \pi(q-2)$

La démonstration de ce théorème est ds tous les livres de géométrie. Ds le cas présent tous ces angles sont égaux à $\frac{2\pi}{q}$ et chaque polygone a q de ces angles — donc

$$\sum A = \frac{2\pi q}{p} \quad \text{et} \quad S = \frac{2\pi q}{p} - \pi(q-2)$$

ou en mettant $\frac{2\pi}{q}$ en facteur: $2\pi q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)$ — Si n de ces polygones couvrent la sphère, la surface totale de la sphère sera:

$$2n\pi q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right) = 4\pi \text{ (surf. de la sphère)}$$

$$\text{d'où} \quad nq\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right) = 2 \quad (1)$$

Il faudra donc que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2} > 0$ ou $\frac{1}{p} > \frac{1}{2}-\frac{1}{q}$

q nombre des côtés du polygone a pour valeur minima 3.

par suite: $\frac{1}{2}-\frac{1}{q}$ a pour valeur minima $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

donc il faut $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ $p < 6$

Les seules valeurs admissibles pour p sont 3, 4, 5 et comme la condition est symétrique par rapport à q les seules valeurs admissibles de q sont aussi 3, 4, 5.

$p = 5$ est à rejeter, puisque l'axe d'ordre 5 n'existe pas ds les systèmes réticulaires — Donc les seules valeurs acceptables sont

$p = 3$ avec $q = 3$
$p = 3$ — $q = 4$
$p = 4$ — $q = 3$
$p = 4$ — $q = 4$

La dernière combinaison est à rejeter car ds ce cas

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2} = 0$$

1°) Considérons le cas où $p = 3$ $q = 3$

De la relation (1) on tire $n = 4$. La sphère est donc recouverte par 4 triangles équilatéraux dont les sommets correspondent à un tétraèdre régulier inscrit ds la sphère.

Puisque $p = 3$, en joignant le centre de la sphère ~~à~~ aux sommets du tétraèdre nous obtenons 4 axes ternaires $4L_3$, puisque q est impair égal à 3, en joignant le centre de la sphère aux pôles des triangles sphériques, ou ce qui revient au même au centre des faces du tétraèdre nous obtenons des axes d'ordre 3 qui se confondent avec les précédents puisque le tétraèdre est régulier — Puisque q est impair, en joignant le centre de la sphère au milieu des arêtes, nous obtenons des axes binaires, il y a 6 arêtes, mais comme ces milieux sont diamétralement opposés 2 à 2 - nous n'avons que 3 axes binaires - $3 L_2$.

2°) supposons $p = 3$ $q = 4$ (1) nous donne $n = 6$.

La sphère se trouve donc recouverte par 6 carrés symétriques dont les sommets correspondent à un cercle inscrit de la sphère. Puisque $p = 3$, en joignant le centre aux sommets du cube nous obtenons des axes ternaires ; les 8 sommets étant diamétralement opposés 2 à 2 il n'y a que $4 L_3$. Puisque q est impair en joignant le centre de la sphère aux centres des faces du cube nous obtenons des axes d'ordre $\frac{q}{2}$. Il y a 6 faces dont les centres sont diamétralement opposés on a seulement 3 axes binaires $3 L_2$

3°) supposons $p = 4$ $q = 3$ (1) donne $n = 8$

La sphère est recouverte par 8 triangles sphériques dont les sommets correspondent à 1 octaèdre régulier inscrit. En joignant le centre aux sommets nous obtenons 3 axes d'ordre p c'est à dire $3 \Lambda 4$, puisque q est impair en joignant aux centres des faces on a $4 \Lambda 3$ et en joignant le centre au milieu des arêtes nous obtenons $6 L 2$, puisqu'il y a 12 arêtes dont ces milieux sont opposés 2 à 2.

Le 1er et le 2e cas sont à rejeter car ppd à chaque axe ternaire, un syst réticulaire possède 3 axes binaires et comme dans ces cas il n'y a que 3 axes binaires en tout ils ne peuvent être à la fois ppd à chacun des 4 axes ~~binaires~~ ternaires -

Donc la seule espèce de syst. réticulaire possédant plusieurs axes ppaux a pour éléments de symétrie

$3 L 4$ $4 L 3$ $6 L 2$ C 3Π $6 P$.

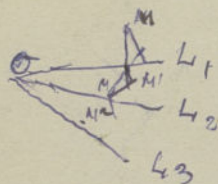
Syst cubique, tesséral ou régulier

Changement d'axes de coordonnées

Problème général de l'angle x. L'existence des zones simplifie beaucoup

14 (axes)

Théorème Quand un polyèdre cristallin admet q axes binaires ds un plan il possède $\perp^e$ à ce plan un axe de symétrie d'ordre q.



Si on fait tourner ce système de $\frac{2\pi}{q}$ OL_1 vient sur OL_3. M_1 sur M^2 -

Si q est impair en faisant tourner de $\frac{2\pi}{q}$ OL_1 viendra sur OL_3 et non sur OL_2. On a un axe binaire en coïncidence avec un autre axe binaire - tous les axes binaires sont identiques - les sont de même espèce.

Si q est pair on ne pourra amener OL_1 avec les axes que de 2 en 2. Tous les axes binaires ne sont pas identiques - ils forment 2 groupes -

Réciproque. Si un polyèdre réticulaire possède un axe d'ordre q et 1 axe binaire perpendiculaire, il possède q axes binaires perpend. à l'axe d'ordre q.

Si un polyèdre possède q plans symétrie passant par une ligne droite, cette droite est un axe d'ordre q.

Si nous considérions un système réticulaire indéfini, un noeud qque sera 1 centre de symétrie - comme tous les noeuds sont identiques, s'il passe par 1 noeud 1 axe de sym. il en passera 1 par chaque noeud.

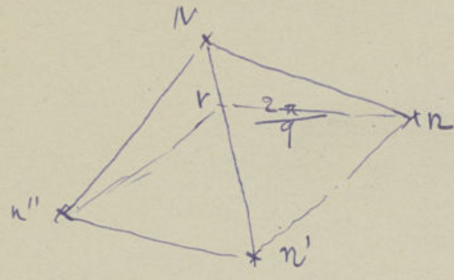
Si par 1 noeud on mène un plan perpend. à un axe de symétrie. ce plan est . . .

Théorème. Un système réticulaire ne peut avoir d'axes de symétrie que d'ordre 2, 3, 4 et 6..

Considérons le plan perpendiculaire à un axe d'ordre q passant par le noeud N et soit ds ce plan, le noeud n qui soit le plus près possible de N.

puisque par N passe 1 axe d'ordre q en faisant tourner de $\frac{2\pi}{q}$ on reproduit $n' = n$

faisons tourner une 2e fois on a $n'' = n$



$n\,n'$ étant 1 droite passant par 2 noeuds est 1 rangée.

Sa parallèle $n''v$ est une rangée

$n'n''$ est une rangée et sa parallèle nv est une rangée

le point v de rencontre de 2 rangées est 1 noeud

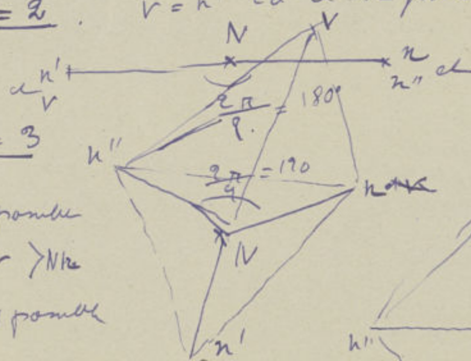
or ces 2 droites se rencontrent sur la bissectrice Nn'. –

pour que l'axe d'ordre q puisse exister il faut que la distance Nv du noeud obtenu soit $>$ que $n\,n'$ puisque $Nn' = Nn$ et que n est le noeud le plus rapproché possible de n.

On peut calculer trigonométriquement la valeur de Nv en fonction de l'angle $\frac{2\pi}{q}$ – on constate alors que q ne peut prendre que les valeurs 2, 3, 4, 6.

on peut aussi s'en rendre compte directement –

Si $q = 2$. $v = n'$ ici ce est possible –

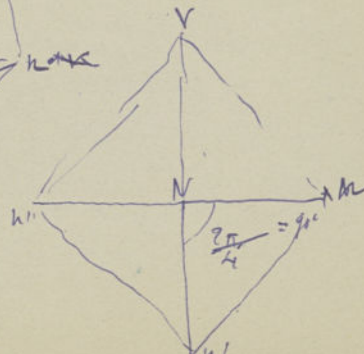


Si $q = 3$

v existe est possible

car $Nv > Nn$

3 est possible



Si $q = 4$

$Nv = Nn$.

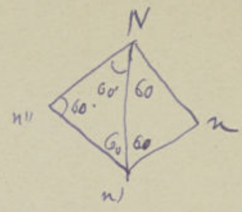
possible encore

15 bis

Si $q = 6$

$v = N$

possible encore



si $q = 5 = 4$ impossible

1°) il n'existe aucun axe de symétrie - il y a 1 centre nécessairement

C = système triclinique ou asymétrique.

2°) 1 axe binaire et 1 centre -

donc à tout axe d'ordre pair il y a 1 plan de symétrie perpendiculaire P

L_2 C P = système monoclinique

3°) 2 axes binaires du même plan - qd il y a q. axe binaire ds 1 plan il a un axe d'ordre q ds ce plan donc 3 axes binaires et 3P.

$L_2\ L_2'\ L_2''$. C. P P' P'' = syst. orthorhombique

4°) 3 axes binaire ds 1 même plan il y a q axes binaires $q = 3$ perpend à eux il y a 1 axe d'ordre 3 - qd q est impair les 3 axes binaires sont de m. espèce

$3 L_2\ \Lambda_3$ C 3P. = syst. rhomboédrique.

5°) 4 axes bin. ds le même plan donc Λ_4 perpend. - or on a vu qd que q était pair il y a 2 groupes d'axes 2.

$2L_2\ 2L_2'\ \Lambda_4$ C. π 2P 2P' = syst. quadratique

6°) 6. axes binaire (5 impossible). donc Λ_6 - 2 groupes de L_2.

$3L_2\ 3L_2'\ \Lambda_6$ C π 3P 3P'. = syst. hexagonal

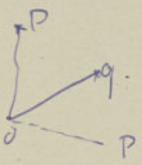
---

on peut encore prendre axes binaires et plus. axes d'ordre 3 et 6.

Il nous reste à envisager le cas où l'on prend avec plusi: axes binaires des axes d'ordre supérieur à 2

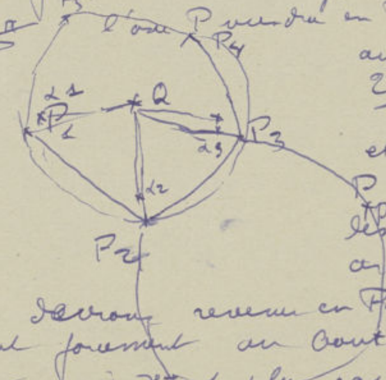
On démontre 1°/ Lemme. – Si 1 réseau possède 1 axe d'ordre P et un axe d'ordre Q. P et Q étant > 2 il possède plusieurs axes d'ordre P et plusieurs axes d'ordre q.

Soit OP un axe d'ordre P. et Oq 1 axe d'ordre q.



en faisant tourner de $\frac{2\pi}{q}$ autour de Oq on reproduit le système et comme q > 2 la nlle position ne peut coïncider avec le prolongement de OP. on obtient un 2e axe OP' d'ordre P. – donc il y a plus. axes d'ordre P. (et q. également)

2e Lemme. Si du pt d'intersection des axes comme centre on décrit avec un rayon qque une sphère et si l'on représente sur cette sphère chaque axe par son pt d'intersection avec la surface de la sphère et qu'on appelle ce point le pôle de l'axe, les pôles des axes d'ordre p sont les sommets de polygones réguliers qui recouvrent exactement toute la sphère – Soit P_1 et P_2 à la surface de la sphère les 2 pôles de 2 axes d'ordre P tel que P_2 soit le plus rapproché de P_1. – Faisons tourner le système autour de l'axe P_2 d'un angle $\frac{2\pi}{P}$ l'axe P viendra en P_3. Faisons tourner autour de P en P_3 de $\frac{2\pi}{P}$ P_2 sera en P_4 etc. tous ces pôles P, P_1, P_3 P_4 seront disposés sur un petit cercle de la sphère



finalement nous devrons revenir en P_1 car s'il en était pas ainsi on trouverait forcément au bout d'un nombre limité de rotation un point qui serait plus rapproché de P_1 que P_2

Cela posé faisons tourner le polygone ainsi obtenu tout entier de $\frac{2\pi}{P}$ autour de P_2. P_1 vient en P_3 – finalement on devra revenir sur le polygone de départ car on trouverait un des polygones dont tous les pôles seraient plus rapprochés de P_1 que P_2

16bis Les pôles des axes d'ordre P forment bien les sommets du polygone qui recouvre toute la sphère –

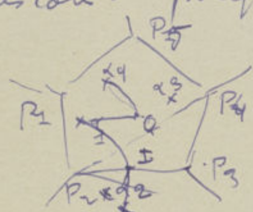
3e Lemme. Si les polygones P_1 P_2, etc ont un nombre pair de côtés $= q$ les pôles de ces polygones, c'est à dire les points où les perpend. aux plans de ces polygones percent la sphère sont les pôles d'axes d'ordre $\frac{q}{2}$ –

Soit α_1 1 noeud du réseau considéré. nous pouvons le supposer à la surface de la sphère puisque le rayon est arbitraire – Si nous faisons tourner tout le système réticulaire autour de P_2 d'un angle $\frac{2\pi}{P}$ on a α_2 p^r α_1. encore 1 fois α_3 etc – – α_2 α_3 occupant par rapport à P_3 P_4 la même position que α_1 par rapp à P_1 P_2. Donc si q est le pôle du polygone P_1 P_2 etc –. $Q\alpha_1 = Q\alpha_2 = Q\alpha_3$

l'angle $P_1 Q P_3 = \alpha' Q \alpha_3$ – or cet angle $P_1 Q P_2 = \frac{2\pi}{q}$ et $P_1 Q P_3 = 2 \times \frac{2\pi}{q}$ ou $\frac{2\pi}{\frac{q}{2}}$

Donc je reproduis le cristal et q est un axe d'ordre $\frac{q}{2}$ en faisant tourner 2 fois de $\frac{2\pi}{P}$

4e Lemme. Si Q est impair le centre du polygone est le pôle d'un axe d'ordre Q et les milieux des côtés du polygone sont les pôles d'axes binaires –



faisons tourner autour de P_2 d'un angle $\frac{2\pi}{P}$. α_1 viendra en α_2 autour de P_3 en α_3 – il faudra que α_3 occupe par rapport à $P_3 P_4$ la même position que α_1 par rapport à P_1 P_2 puisque par rotation autour de P_3 P_2 viendra en P_4

après q−1 rotations ~~nous~~ où serons nous? comme q est impair nous aurons un sommet qui aura pour voisin α_q par rapport à $P_q P_1$ et ~~ob~~ occupera la même position que α_1 par rapp. à $P_1 P_2$. par suite $\alpha Q = \alpha_1 Q$ et l'angle $\alpha_1 Q \alpha_q = P_1 Q P_q = \frac{2\pi}{q}$ – en faisant tourner de $\frac{2\pi}{q}$ je reproduis le cristal l'axe est d'ordre q.

D'autre part en faisant tourner tout le système autour de P_2 d'un angle $= \frac{2\pi}{q}$ on obtient α_2 qui occupe

p. rapp. à $P_2 P_3$ et un point α qui α_1 p. rapp. à $P_1 P_2$ les points α_1 et α_2 sont sur un arc de g^d cercle qui passe par le milieu de $P_2 P_3$ — cet arc est coupé en 2 par le milieu de $P_1 P_3$. ~~En~~ faisant tourner de 180° aut. de I. on a 1 arc bissant — donc il y a q arcs bissants —

Si on prend pour unité d'angle l'angle interceptant sur la sphère une longueur égale au rayon — On démontre géométriquement que la surface du triangle sphérique birectangle étant prise p^r unité de surface, l'aire du polygone sphérique q qui trace à la surface de la sphère est mesurée par la somme des angles diminuée ~~fait~~ autant de fois π qu'il y a de côtés — 2

$$S = \sum A - \pi(q-2)$$

Mais toutes les angles sont égaux à $\frac{2\pi}{p}$

$$S = \frac{2\pi}{p} \times q - \pi(q-2)$$

mettons $\frac{2\pi}{q}$ en facteur

$$S = 2\pi q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)$$

Il y a n de ces polygones et doivent couvrir t^te la sphère

la surface de la sphère $= 4\pi R^2$ or on prend p^r unité d'angle le rayon la surface $= 4\pi$

$$\text{Sphère} = 4\pi = n\frac{2\pi}{q}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)$$

Divisons par 2π il reste :

$$2 = nq\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)$$

il faut que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0$ p. que la relation existe

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$$

q le nombre des côtés des polygones doit être > 2 or son minimum est 3 puisque triangle est le + simple des polygones

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \text{ ou } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

17 bis

$\frac{1}{p}$ doit être $> \frac{1}{6}$ et $p < 6$ donc $P \geq 2$

doit être égal à 3, 4, ou 5

$P = 5$ est à rejeter par l'octaèdre quinaire

$P = 3$ ou 4.

faisons $P = 3$

q = n des côtés

$$P = 3 \begin{cases} q = 3 \\ q = 4 \end{cases}$$

(q = 5 et 6 impossible ce qui est vrai pour p et pour q)

$$p = 4 \begin{cases} q = 3 \\ = q\, 4 \end{cases}$$

$p = 4$ et $q = 4$ est à rejeter la dernière combinaison, car

il faut > 0.

$P = 3 \quad q = 3.$ on aura

$$2 = n \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \qquad n = 4.$$

La sphère est couverte par 4 triangles équilatéraux dont les sommets correspondent à 1 tétraèdre régulier - en joignant le centre de la sphère au sommet du tétraèdre on aura 4 axes ~~quat~~ ternaires -

$4 \Lambda_3$

puisque q est impair et égal à 3 en joignant le centre de la sphère au centre des faces on obtiendra les axes d'ordre 3 qui se confondront avec les précédents et en joignant le centre de la sphère aux milieux des côtés du tétraèdre régulier j'aurai 6 droites - mais comme les milieux sont diamétralement opposés il n'y en aura que 3 axes binaires

$3 \Lambda_2$

Supposons $P = 3 \quad q = 4$. la formule $n = 6$.

La sphère est couverte par 6 carrés sphériques dont les sommets correspondent au cube inscrit puisque $p = 3$ en joignant le centre aux sommets on aura des axes binaires - 4 axes bin

$4 \Delta_3$ - puisque q est pair en joignant le centre de la sphère au centre des faces du cube on aura des axes

ordre $\frac{4}{2}$ c'est à dire d'ordre 2. on aura $3 L_2$
comme plus haut

si $p = 4$ $q = 3$ $n = 8$.

Ce sphère est couverte par 8 triangles équilatéraux c'est à dire par 1 octaèdre régulier convexe ; en joignant le centre aux sommets on aura des axes 4.

$3 L_4$ — et en joignant q au centre $4 L_3$ q du milieu des côtés — axes binaires — $6 L_2$

Nous verrons que les 2 1ers cas ne sont qu'un accident (hémiédrie) du dernier. Lorsqu'il y aura plus. axes un et égal et en fonde

$3 L_4 \ 4 L_3 \ 6 L_2 \cdot C \cdot 3 \Pi$ et $6 P$.

système cubique

21

L'ensemble des faces se déduisant d'une face A au moyen des éléments de symétrie constitue ce qu'on appelle une <u>forme cristalline simple</u>. La face A s'appelle la <u>face déterminante</u> de cette forme cristalline.

Qd on connaît les éléments de symétrie d'un corps cristallisé, on peut déduire <u>le nombre des faces de sa forme cristalline</u>.

Si en effet on fait tourner $(q-1)$ fois la face déterminante autour d'un axe d'ordre q on obtient $(q-1)$ nouvelles faces de la forme et s'il y a N_q axes d'ordre q on obtiendra au moyen de tous ces axes un nombre de faces égal à $N_q(q-1)$. En faisant tourner autour de tous les axes on a : $\Sigma N_q(q-1)$ faces et avec la face déterminante on aura : $1 + \Sigma N_q(q-1)$ faces. — Le centre de symétrie les doublera et on aura

$$F = 2\left[1 + \Sigma N_q(q-1)\right] \text{ faces} \qquad q = 2, 3, 4, 6$$

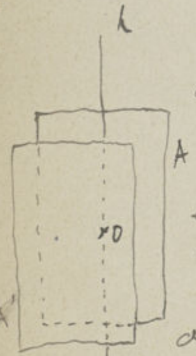
par suite $F = 2\left[1 + N_2 + 2N_3 + 3N_4 + 5N_6\right]$ —

Ex. syst. cubique $N_2 = 6$ $N_3 = 4$ $N_4 = 3$ $N_6 = 0$ on aura

$$F = 2\left[1 + 6 + 8 + 9\right] = 48 \text{ faces}.$$

L'ensemble des faces se déduisant de la face dominante sans se servir du centre s'appelle la <u>½ forme directe</u> ; l'ensemble des faces déduites de celle-là par ~~le centre~~ le centre s'appelle <u>½ forme inverse</u> et le symbole de la forme sera $\{q\,r\,s\}$.

<u>Remarque</u>. Nous avons supposé la face dominante qque par rapport aux axes c.à.d. que la forme fait <u>oblique</u> — Lorsque la face dominante occupe une position particulière, le nombre des faces de la forme est diminué et on a des formes réduites ou <u>restreintes</u>. Les 1res sont des formes <u>parallèles</u>. Les 2es des formes <u>normales</u>.



Lorsque la forme est parallèle, le nombre de faces est la moitié de ce qu'il est lorsque la forme est oblique — Soit en effet A la face dominante parallèle à un axe d'ordre pair OL ; en faisant tourner A de π on obtient une face A' de la ½ forme parallèle à A par suite — Lorsqu'on prendra la face symétrique de A par rapport au centre O on obtiendra une seconde fois la face A'. La ½ forme inverse se confond avec la ½ forme directe dont les faces sont parallèles 2 à 2.

22

axes cristallographiques = droites qui joignent les centres de faces opposés

faces de m. espèce = faces placées à l'extrémité d'axes égaux.

angles de m. espèce = sommets symétriques par rapport aux axes et angles plans égaux

arêtes de m. espèce = séparant des faces de m. espèce, symétriquement situées par rapp. aux axes cristallographiques, et correspondant à des dièdres égaux.

centre de symétrie

axes de symétrie

plans de symétrie.

Modifications de la forme primitive :

angles
- Troncature plan qui tranche un angle (génl triangulaire)
- Biseau 2 plans symétriqt placés par rappt au plan diagonal p. aboutissant au sommet : celui-ci est remplacé par 2 facettes triangulaires
- Pointt triple . 3 plans symt placés par rappt aux 3 plans diagonaux.
- Pt sextuple . 6 —— 2 à 2 ——

arêtes
- troncature.
- biseau

II

Mériédrie

23

Mériédrie. (Hémiédrie)

<u>Définition</u>. Certains cristaux ne présentent pas toutes les faces que comporteraient les lois de symétrie d'Haüy, mais seulement la moitié (hémiédrie), ou le $\frac{1}{4}$ (tétartoédrie) ou même le $\frac{1}{8}$ (hémitétartoédrie). Haüy considérait ces formes comme des anomalies et ne les avait pas étudiées. Delafosse après une étude approfondie des formes mériédriques constata que les éléments de la forme primitive d'un minéral présentant des formes mériédriques, quoique géométriquement semblables pouvaient posséder des propriétés différentes au point de vue physique. Ainsi dans un cube de pyrite électrisé par frottement s'électrise $+^{t}$ à un sommet, tandis que le sommet opposé s'électrise $-^{t}$. Il y a donc une ≠ physique entre les 2 sommets. Il modifia alors la loi d'Haüy de la manière suivante : <u>Toute modific^{on} se produisant sur un élément d'un cristal se reproduit sur tous les éléments physiquement semblables du cristal.</u>

Et si Delafosse admettait tjs que la molécule avait la forme du cristal, mais aussi que la molécule d'un corps cristallisant ds le syst. cubique par ex. pouvait avoir la forme d'un polyèdre ayant moins d'éléments de symétrie que le cube, la forme d'un tétraèdre par ex, les tétraèdres en se superposant donnent un cube, mais tandis qu'une des faces du cube est limitée par les faces du tétraèdre, la face opposée du cube est limitée par des sommets. De là résulte au pt de vue physique une ≠ entre les 2 faces du cube.

Au pt de vue géométrique les allemands constatèrent que le plus gd nombre des formes mériédriques rentraient ds la loi suivante.

<u>Si on transporte ttes les faces de la forme holoédrique ∥^{t} à elles-mêmes de façon qu'elles soient équidistantes d'un m pt O, on obtiendra une forme mériédrique en supprimant la moitié des faces, de telle sorte qu'après, si n faces coupent un axe d'ordre pair en un pt A, n faces couperont le même axe en un pt A' symétrique de A par rapport à O; si une face rencontre passant par A fait un angle α avec OA, une face passant par A' fera le m angle α avec OA'; si 2 faces passant par A font entre elles un angle β, 2 faces passant par A' feront entre elles le m angle β.</u>

Les formes satisfaisant à cette condition se répartissent en 3 groupes:

1°/ <u>hémiédrie plagièdre</u> : le solide formé par les faces conservées n'est pas ~~symétrique du~~ superposable au solide formé par les faces supprimées.

2°/ <u>h. à faces parallèles</u> : les 2 solides sont superposables et ds chacun d'eux les faces sont parallèles 2 à 2.

3°/ <u>h. à faces inclinées</u> : les 2 solides sont superposables, mais ds chacun d'eux les faces ne sont pas parallèles 2 à 2.

Mais toutes les formes hémiédriques expliquées par la théorie de Bravais ne rentrent pas ds ttes les lois précédentes.

Ds la théorie de Bravais on admet que:
Lorsque la molécule manque de certains éléments de symétrie alors certaines faces n'existant pas, au lieu des formes holoèdres on a des formes hémièdres –
Ds les formes holoèdres le nombre des faces d'une forme dépend du nombre d'axes de symétrie du cristal et de la position de la face par rapport à ces axes –
Ds un gd nombre de cristaux d'une espèce chimique on observe seulement la moitié des faces appartenant à une forme donnée on dit alors que la forme est hémiédrique. (mériédrique) – L'hémiédrie est surtout intéressante ds les systèmes à symétrie élevée, parce qu'elle produit de polyèdres ayant une symétrie indépendante.

I Hémiédrie holoaxe (holoaxe hémisymétrique).
Si le centre manque dans la molécule sans qu'aucun axe ne manque il n'y a plus de plans de symétrie le nombre des faces d'une forme sera $\frac{2 + 2n(p-1) + 2n'(p'-1)}{2} = 1+n(p-1) + n'(p'-1)$ le nombre de faces sera la moitié seulement des faces de la forme holoèdre correspondante[1] Elle ne donnera de solide différent que ds le cas d'une face oblique car pr les formes restreintes correspondant à une face ∥ ou ⊥ à un axe de symétrie, il y aura des ~~centres~~ éléments de symétrie en trop.

1) Il est facile de calculer le nbre des faces des formes mériédriques en fonction du nombre des faces F que possèdent la forme holoèdre on s'appuie sur les remarques suivantes:
1°) si une partie des axes du syst. réticulaire fait défaut ds la molécule, parmi ces axes manquant se trouvent forcément des axes binaires puisque comme nous l'avons vu la présence d'axes binaires entraîne ds le polyèdre la présence d'axes principaux.
2°) Si un axe binaire d'une espèce fait défaut, tous les axes binaires de m espèce font défaut car la valeur des angles que font les axes binaires d'une espèce est déterminée par le nombre de ces axes binaires
3°) Si les axes binaires d'une espèce font défaut l'axe principal de la molécule aura un ordre égal à la moitié de celui de l'axe principal du syst. réticulaire.
La molécule est dite holoaxe si elle possède tous les axes de symétrie du système, hémiaxe lorsqu'elle ne possède qu'une partie des axes de façon que la moitié des rotations soit supprimée: elle peut l'être de 2 façons différentes: ou bien elle ne possède aucun axe binaire du syst. réticulaire mais son axe principal est de même ordre que l'axe principal du syst. réticulaire – ou bien elle ne possède que la moitié des axes binaires du syst. réticulaire et son axe principal est la moitié ~~de celui~~ de celui de l'axe principal du syst. réticulaire
La molécule est dite tétartoaxe lorsqu'elle ne possède qu'une partie des axes de symétrie du syst. réticulaire, de telle sorte que les 3/4 des rotations soient supprimées. C'est lorsqu'elle ne possède aucun axe binaire et lorsque l'ordre de son axe principal est la moitié de celui de l'axe principal du système réticulaire.

x

La molécule peut donc être d'abord *holoaxe* si elle est centrée -
elle a tous les éléments de symétrie du syst. réticulaire la forme
est *holoédrique*. Le nombre des faces = F. - Si elle n'est pas centrée, il
n'y a pas de plans de symétrie, elle est *hémisymétrique* la forme
se compose de la ½ forme directe, le nombre de faces est $\frac{F}{2}$ la forme
est dite *hémiédrique*.

La molécule peut être *hémiaxe*, la ½ forme directe a $\frac{F}{4}$ faces : si il
y a un *centre* on double les faces et le cristal a $\frac{F}{2}$ faces, il est
encore *hémiédrique* - Si elle n'a pas de centre, mais les plans de symétrie
ppd. aux axes supprimés, les faces $\frac{F}{4}$ sont encore doublées par
ces plans, la molécule est *dichosymétrique* et la forme est
hémiédre. Si ces plans sont supprimés on a une molécule
hémisymétrique la forme aura seulement $\frac{F}{4}$ faces et sera
tétartoédrique.

Enfin la molécule étant *tétartoaxe*, la ½ forme directe aura
seulement $\frac{F}{8}$ faces - Si la molécule est centrée la forme aura
$\frac{F}{4}$ faces et sera *tétartoédrique*; si elle n'est pas centrée et
dichosymétrique il en sera de même et enfin si elle est *hémisy-*
métrique, la forme aura $\frac{F}{8}$ faces ; elle sera *hémitétartoédrique*

Les deux demi-formes qui peuvent en résulter ne sont pas
superposables on a un solide droit et un solide gauche : si on fait
tourner une des ½ formes autour d'un axe elle coïncide avec elle-même
et non pas avec l'autre, car sans cela il gardait une certaine
droite qui serait un axe supplémentaire -

II *Hémiédrie hémiaxe*.

Supposons que la molécule n'ait pas tous les axes de
symétrie du système, si un axe d'ordre ternaire est supprimé,
tous les axes d'ordre ternaire doivent être supprimés et les axes
d'ordre pair supér. à 2 sont diminués de moitié, car si on sup-
posait les axes d'ordre pair conservé les axes ternaires perpend.
successivement -

Les axes ternaires sont conservés car les axes qui leur sont
perpend. sont aussi des axes ternaires

Il peut se présenter 2 cas suivant que le centre est conservé ou
non :

a) le centre est conservé : *hémiédrie hémiaxe centrée* - (molécule
hémiaxe centrée) *Parahémiédrie* (*Hém. à faces parallèles*) - Dans ce
cas de la ½ forme chaque face a sa parallèle - on a supprimé les plans
de symétrie ppd. aux axes supprimés -

b) le centre est supprimé : *hémiédrie hémiaxe non centrée*.
Antihémiédrie (*Hém. à faces inclinées*) molécule hémiaxe non centrée
mais *dichosymétrique* (les plans de symétrie ppd. aux axes
supprimés sont conservés).

Ds ces cas une face n'a plus sa face parallèle sauf ds les
formes restreintes (faces // aux axes pairs conservés). Les ½ formes
obtenues ne sont pas superposables car si on fait tourner une
forme autour d'un axe supprimé on obtiendra une autre ½ forme.

Les plans de symétrie perpend. aux axes supprimés peuvent persister, on supprime seulement les plans de symétrie ppd aux axes conservés car sans cela l'existence du centre en résulterait.

Enfin si en dernier lieu, si on supprime aussi ces plans de symétrie on n'aura plus que le $\frac{1}{4}$ des faces de la forme holoèdre — on a alors la Tétartoèdrie qui n'est autre chose que l'hémiédrie holoaxe de l'hémiédrie à faces ∥ (Parahémiédrie). nous conservons les axes, mais nous supprimons le centre. Les 2 $\frac{1}{2}$ formes parahémiédres sont superposables mais les 2 1/4 de forme tétartoèdres ne sont pas superposables tous les 4 mais 2 à 2.

La molécule peut être aussi tétartoaxe le cristal est tétartoèdrique s'il y a un centre ou les plans de symétrie, hémitétartoèdrique s'il n'y a ni centre, ni plan de symétrie —

Hémiédrie

Si la molécule est :

Holoaxe	centrée la forme aura	F faces et sera	holoédrique	
	hémisymétrique —	$\frac{F}{2}$	hémiédrique (quartz)	
Hémiaxe	centrée —	$\frac{F}{2}$	id° (pyrite)	parahémiédrie (à faces ∥)
	dichosymétrique —	$\frac{F}{2}$	id° (tétraèdre)	antihémiédrie (à faces incl.)
	hémisymétrique —	$\frac{F}{4}$	tétartoèdrique	
Tétartoaxe	centrée —	$\frac{F}{4}$	id°	
	dichosymétrique —	$\frac{F}{4}$	id°	
	hémisymétrique —	$\frac{F}{8}$	hémitétartoèdrique	

Remarque. Les réductions qui viennent d'être indiquées ds le nbre des faces peuvent ne pas se produire ds les formes restreintes Ainsi par ex. lorsque la forme est parallèle [illegible] les faces s'obtiennent au moyen des axes de symétrie seuls sans faire intervenir le centre par conséquent le centre peut faire défaut ds la molécule ss qu'il en résulte une réduction ds le nombre des faces. Le cube est à la fois une forme holoèdrique et une forme tétarto- et hémitétartoèdrique —

III

Notations –

représentation graphique des cristaux

Des formes cristallines

Les corps cristallins ne sont pas indéfinis – ils sont limités par des surfaces que l'on peut considérer comme passant par le centre de gravité des molécules limites de façon à ne laisser aucun centre de gravité à l'extérieur de l'espace que cette surface limite. En général cette surface est qq mais ds certains cas elle se décompose en plans et le corps cristallin forme ce qu'on appelle un cristal – Les plans qui le limitent sont les faces de ce cristal –

Chacune des faces renfermant un gd nombre de centres de gravité c.a.d. un gd nombre de pts homologues sont des plans réticulaires du syst réticulaire dont les noeuds coïncident avec les centres de gravité des molécules du corps – les droites d'intersection de faces c. à d. les arêtes du cristal étant les droites d'intersections de 2 plans réticulaires sont // à des rangées du syst. réticulaire. Bien plus comme elles sont éloignées d'une de ces rangées parallèles d'une distance comparable à la distance moléculaire ds la pratique il ns est impossible de distinguer l'arête de la rangée parallèle la plus voisine et ns considérons les arêtes comme des rangées

Les sommets des cristaux intersections d'au moins 3 arêtes (= 3 rangées) sont des noeuds.

Il résulte de là que si on prend pr axes de coordonnées 3 rangées conjuguées, une face du cristal sera un plan réticulaire représenté par une équation de la forme

$$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = K$$

q r s k sont des nbre entiers q r s étant les caractéristiques de la face qui déterminent son orientation –

Haüy a démontré expérimentalement que les faces qui se forment le + souvent ds la cristallisation étant celles ayant les plus petites caractéristiques –

En effet les cristaux ont la propriété de se cliver, ~~Les~~ plans de clivage sont des faces nouvelles par suite des plans réticulaires ppdt auxquels la cohésion est minimum. Cette cohésion est d'ailleurs d'autant plus faible que les plans réticulaires sont plus éloignés et nous avons vu qu'un plan réticulaire est d'autant + éloigné de son plan homologue que ses caractéristiques sont plus petites. Les plans de clivage devront donc avoir des caractéristiques petites. c'est ce que l'expérience confirme –

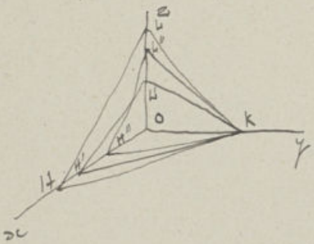
En maintenant ds la cristallisation il se produit une face A, elle est due à l'intervention de forces extérieures comparables aux forces qui produisent les faces de clivage par conséquent les faces qui doivent se reproduire le + fréquemment ds la cristallisation sont celles ayant les + petites caractéristiques

Caractéristiques des Faces - Zones et centre.

Une face qcq d'un cristal ou bien coupe les 3 axes, ou bien est parallèle à l'un d'eux et n'en coupe que deux, ou bien n'en coupe qu'un étant parallèle aux 2 autres -

1°) Face oblique.

Soit HKL une face qqe - posons OH = a. OK = b OL = c. les long. dont nous pourrons prendre 1 qcq pr unité seront les paramètres du cristal. 2 autres faces H'K'L', H"K"L" qques -



En vertu de la loi de Haüy les paramètres des faces étant ds un rapport simple on aura

$h\ OH' = a \quad h'\ OH'' = a$

$k\ OK' = b \quad k'\ OK'' = b$

$l\ OL' = c \quad l'\ OL'' = c$

ou $OH' = \frac{a}{h} \quad OK' = \frac{b}{k} \quad OL' = \frac{c}{l}$

$OH'' = \frac{a}{h'}, \quad OK'' = \frac{b}{k'} \quad OL'' = \frac{c}{l'}$

hkl et $h'k'l'$ sont les indices ou les caractéristiques des nouvelles faces ; si nous faisons $b = 1$ on peut tjrs transporter les faces $\parallel^t$ à elles-mêmes de manière à faire coïncider K K'K" les faces seront parfaitement caractérisées par le symbole $\frac{1}{h}\ \frac{1}{k}\ \frac{1}{l}$ ou encore hkl : les caractéristiques sont des nombres très simples et on peut tjrs les considérer comme entiers - En effet si on a $2, 1, \frac{2}{3}$ ce sera $\frac{2}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ c.a.d. 1.2.3.

Le symbole de la face HKL prise pr base sera 11.1 (hkl) ne désigne qu'une face celle qui se trouve par ex ds le quadrant positif. pour désigner les faces des autres quadrants il suffira de donner le signe − aux caractéristiques se rapportant aux $\frac{1}{2}$ axes négatifs.

L'ensemble sera désigné par $\{hkl\}$ ou (hkl) -

Si les caractéristiques sont 1 ou 0 on a une *forme primitive*, puisque ses paramètres servent de même pr tte les autres faces qui seront des *formes dérivées*.

Une forme est *simple* qd tte ses faces sont exprimées par les même caractéristiques - La forme est *composée* ou une *combinaison* si plusieurs formes simples, primitives ou dérivées se trouvent réunies sur un m̄ cristal.

2°) Face parallèle à 1 axe.

Elle le rencontre à l'∞ - OH' par exemple est = ∞.

$h\ OH' = a \quad \frac{a}{h} = OH' = \infty \quad h = 0$

La forme $\{0kl\}$ aura 4 faces $0kl \quad 0\bar{k}l \quad 0k\bar{l} \quad 0\bar{k}\bar{l}$

— $\{h0l\}$ — d° —

— $\{hk0\}$ — d° —

les formes à 4 faces se nomment des *prismes* lorsqu'elles sont $\parallel$ à l'axe vertical - des *dômes* lorsqu'elles sont $\parallel$ à un axe qque.

Ds un cristal on prendra tjrs l'une de ces faces comme paramètre : elle sera notée 011 ou 101 ou 110,

Ds la notation de Weiss on aura $\infty a : 1 : mc$, ou $na : \infty b : mc$, ou

$na : 1 : \infty c$.

3°) Face parallèle à 2 axes

Elle rencontre les 2 axes à l'∞ - elle est // à un plan de coordonnées
on aura $0\,0\,l$ avec $0\,0\,\bar{l}$ (et c'est tout)
$0\,h\,0$ avec $0\,\bar{h}\,0$
$h\,0\,0$ avec $\bar{h}\,0\,0$

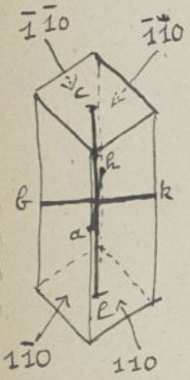
Si l'on suppose $b = 1$ et que l'on transporte //ᵗ à elle-même les faces de façon que K K' K'' coïncident on pourra avoir :

$OH' = na \quad OH'' = n'a$
$OK' = OK = 1 \quad OK'' = OK = 1$
$OL' = mc \quad OL'' = m'c$

Les symboles seront $na : 1 : mc \quad n'a : 1 : m'c$.
Les caractéristiques qui peuvent être entières ou fractionnaires sont les inverses des caractéristiques de Haüy bornes $n = \frac{1}{h}$ ou $\frac{h}{k}$ $\quad m = \frac{1}{l}$ ou $\frac{k}{l}$
Pr distinguer les faces des ≠ quadrants on accentuera les paramètres correspondants
$a : 1 : c \quad a' : 1' : c$ etc.
on indiquait autrefois la forme par le symbole $\boxed{na : 1 : m'c}$ peu usité aujourd'hui —

Notations —

Notation de Miller. (France) —



on forme le symbole d'une face en écrivant entre parenthèses les 3 caractéristiques qui sont les coefficients par lesquels il faut multiplier les paramètres de la face pour avoir le paramètre de la forme primitive
$(h\,k\,l)$ $\quad h = 0, 1, 2, 3 \dots 9$ (généralement cela ne dépasse pas 9)
$\pi(h\,k\,l)$ ou $x(h\,k\,l)$ pr les formes hémiédriques. — Le signe — se rapporte à un ½ axe négatif.
Pr le système hexagonal on prend un axe vertical et 3 axes horizontaux
le symbole devient $(h\,k\,i\,l)$
Les axes sont les 2 diagonales du prisme choisi comme primitif, dont les 4 faces sont $(110 \quad 1\bar{1}0 \quad \bar{1}10 \quad \bar{1}\bar{1}0)$ et un axe vertical parallèle à l'axe du prisme

h axe antérieur a
k —— latéral b
l —— vertical c

Elle est fort incommode au pt de vue descriptif. Elle a le défaut et l'avantage de ne représenter que des faces isolées et non des formes — de plus les symboles (0 1 0) à 3 chiffres sont difficiles à placer sur les dessins de cristaux.

30/

Notation de Weiss (allemagne rare)

On écrit le rapport des 3 paramètres d'une face, l'un d'eux étant pris pour unité : $na : b : mc$ ou $na : 1 : mc$ — les lettres a et c indiquent les paramètres de la face choisie comme primitive m, n indiquent les longueurs interceptées par une face — Elles peuvent être égales à ∞ ou à 1, on les supprime puisqu'on aurait la forme primitive — ce sont génér.t des nombres fractionnaires $\gtrless 1$

Pour les $\frac{1}{2}$ axes négatifs on accentue les paramètres qui leur sont relatifs —

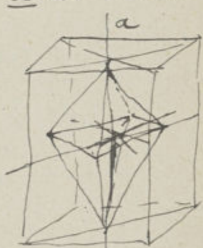
Axes : diagonales du prisme primitif et un 3e parallèle à l'arête du prisme comme Miller.

Calculs compliqués et ne peuvent servir à la description des formes.

Cette notation est très rationnelle puisque, en définitive, elle représente très clairement ce que le calcul nous donne directement, mais elle est moins commode que celle de Miller à cause de ses caractéristiques souvent fractionnaires qui obligent à donner à l'équation des zones une forme infiniment compliquée. au pt de vue de la description des formes elle est tt à fait incompatible

Notation de Naumann

Axes de Weiss, mais les note autrement a est l'axe vertical b l'axe antérieur, c l'axe latéral —



Il part de l'octaèdre qu'il appelle O ds le syst. cubique, P ds les autres systèmes.

Pour désigner les différentes faces on accentue de ≠ façons la lettre du symbole P', P'P P, l'une des caractéristiques étant tjrs = à 1 les 2 autres seront m, n . la 1e pr l'axe vertical la seconde pr l'axe latéral, on les écrit à gauche et à droite de la lettre P mPn, m n pouvant être ∞, entiers, fractionnaires simples, ou égaux à 1 ds ce cas on les supprime

Si $m = n = \infty$ on a un plan de coordonnées verticales on les distingue par $\breve{P}$, $\bar{P}$ — le 3e plan de coord. (base du prisme) s'appelle oP — Pour les faces qui tronquent les angles des prismes par suite les arêtes culminantes de la pyramide il faut indiquer auquel des axes horizontaux cette troncature est ‖ on se sert des signes ◡ —

ix de Levy = m, $\breve{P}'\infty$ etc.

Ds le système monoclinique où a est incliné on distingue les faces c de faces a par un trait incliné pour c R et par un trait horizontal pour a $\bar{R}$

Assez simple pr les systèmes à axes rectangulaires, tous ces signes disparaissent — Pour le système rhomboïdique on prend le syst. hexagonal précédé de $\frac{1}{2}$ ou la lettre R pour remplacer P.

toutes sortes d'inconvénients (influence de Naumann au pt de une didactique). L'exécution typographique est fort difficile; tout à fait impraticable au pt de vue descriptif et n'offre aucun avantage au pt de vue des calculs sur la notation de Weiss qu'elle a la prétention d'améliorer.

Notation d'Haüy. en relation immédiate avec la méthode des troncatures et qui permet de se rendre compte de la position des troncatures; ces notations légèrement modifiées constituent la :

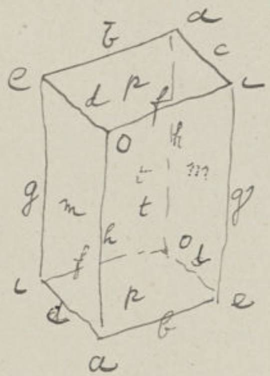
Notation de Lévy.

Il part du prisme choisi comme primitif qu'il note p, m, t. et il considère toutes les formes possibles en résultant comme des troncatures des arêtes ou des angles solides qu'il désigne par des lettres spéciales

a e i o pr les angles

b c d f g h pr les arêtes.

l'axe a en avant, b de côté, c verticalement



à mesure que la symétrie augmente, le nombre des lettres devient inutile et on supprime en dernier par ordre alphabétique

Ds le syst monoclinique e et i sont identiques et s'appellent e.

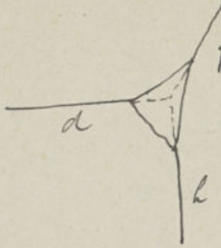
Les caractéristiques se placent en exposant pouvant être entiers ou fractionnaires. $a^x b^x h^x$. Les faces h et g sont notées $h^x g^x$ ou ${}^x h\ {}^x g$ suivant que la troncature est inclinée vers t ou vers m. Les faces qui tronquent un sommet en interceptant 3 long. diffé. sur les arêtes sont notées $d^x h^y f^z$ qu'on peut souvent simplifier.

Lévy prend pr les 3 axes, les 3 arêtes du prisme aboutissant à l'angle antérieur du prisme: de sorte que l'axe vertical est le m. que dans Weiss et Naumann, mais les ~~axes~~ axes horizontaux deviennent les côtés du rhombe dont les axes de Weiss et Naumann sont les diagonales.

(chgt d'axes). Pour les formes dérivées résultant d'une troncature symétrique sur un angle ou une arête, chaque face sera représentée par la lettre de l'angle ou de l'arête dont elle provient au moyen de cette troncature. Si la face est située d'une manière qcque sur un angle sa notation comprendra toutes les lettres des arêtes aboutissant à cet angle. Chaque lettre porte un exposant entier ou fractionnaire indiquant la distance à laquelle la face modifiante coupe certaines lignes prises comme axes cristallographiques. Les axes qui n'ont rien de réel sont

Ds le système de Lévy les 3 arêtes aboutissant à un angle solide de la forme primitive et les longueurs interceptées sur ces axes sont pris à partir de l'origine.

Sur un angle d'un prisme monoclinique les arêtes sont



d f h. La notation sera $d^{\frac{1}{x}} f^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{z}}$ ou $f^{\frac{1}{x}} d^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{z}}$ $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{y}$ $\frac{1}{z}$ étant les longueurs interceptées sur les arêtes de base $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$ sur l'arête latérale venant en dernier.

Sur un cube on aurait $b^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{y}} b^{\frac{1}{z}}$.

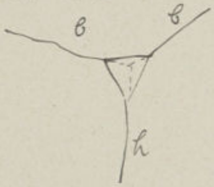
Si la face est parallèle à l'une des arêtes, une des quantités x y z est égale à 0. Ainsi une modification sur d sera

$$\left(d^{\frac{1}{0}} f^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{z}}\right) \text{ ou } \left(d^{\frac{1}{0}} f^{\frac{1}{y}} g^{\frac{1}{z}}\right)$$

que l'on exprime par $d^{\frac{z}{y}}$ d étant l'arête longue (et $\frac{z}{y}$ un rapport > ou < 1

Si $x = y$ on a une face symétriquement placée sur un angle et portant le nom de l'angle: $d^{\frac{1}{x}} f^{\frac{1}{x}} h^{\frac{1}{z}}$ $o^{\frac{z}{x}}$ $\frac{z}{x}$ pouvant être > < 1

Lorsqu'une face intercepte sur un angle 3 longueurs dont 2 sont égales et correspondent à des arêtes d'espèce différente on a par ex. une troncature sur l'angle a d'un prisme orthorhombique



$b^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{z}}$

si $x = z$ ou $y = x$

on convient d'écrire les rapports $\frac{y}{z}$ ou $\frac{x}{z}$ des longueurs interceptées sur les arêtes f et h sous forme d'indices $a^{\frac{y}{z}}$ ou $a^{\frac{x}{z}}$.

<u>Notation de Rammelsberg</u>. (Krystallographische Chemie)

C'est un procédé de désignation des faces plutôt qu'un système original de notation. On se sert de la notation de Weiss en remplaçant sur les figures et ds le texte les symboles très longs de Weiss par des lettres. La comparaison avec Lévy est la suivante.

Lévy	Rammelsberg	Lévy	Rammelsb.
p	c	f	o
m	p	d	o'
t	p'	c	o''
h'	a	b	o'''
g'	b	o	r
e	q'	a	r'
i	q		

Les caractéristiques > 1 sont mises en exposants, celles qui sont < 1 sont placées en dénominateur. Ex o^2, $\frac{o}{2}$

Les formes qui chez Lévy sont désignées par 3 lettres sont désignées par une lettre qcq. Ds le syst. hexagonal Rammelsberg note les formes pyramidales d ; les rhomboèdres par r r' suivant qu'ils sont directs ou inverses.

Enfin ds le syst. oblique les formes ne sont pas désignées par des lettres spéciales.

33/ **Notation de Dana** . (Amérique)

c'est la notation de Naumann simplifiée et conservant les mêmes axes sans supprimer les gdes lettres O, P, R. Le signe ∞ est remplacé par i (ou I lorsque la face est // à l'axe vertical et que n = 1 ; il écrit le chiffre 1 que Naumann supprimait et l'écrit en gd caractère si m = n = 1

Lorsque la face doit être désignée par 2 signes ou 2 chiffres, c'est le second signe ou le second chiffre qui porte les ≠ signes employés ds la notation de Naumann. Ex

N	D	N	D
OP	→ O	P'	→ $1'$
$\infty P'$	I'	mPn	mn
$\infty P'n$	in	$P\infty$	$1i$
$\infty\breve{P}\infty$	$i\breve{i}$		

Peu employé sauf par Dana.

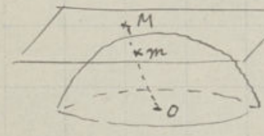
Représentation graphique des formes cristallines.

Pr représenter sur le papier la position relative exacte des faces d'une forme cristalline on transporte les faces //t à elles même de façon qu'elles passent par un même point O. De ce pt comme centre avec un rayon arbitraire, on décrit une sphère dont on ne considère qu'un hémisphère, chaque face sera représentée par celui de ses pôles qui se trouve sur l'hémisphère conservé. En projetant l'hémisphère sur un plan on obtient une représentation plane des ≠ faces de la forme cristalline.

Il est à remarquer que ds ce mode de représentation ttes les faces appartenant à une m̄ zone ont leurs pôles sur un m̄ gd cercle dont le plan est ppd. à l'axe de la zone. En outre, si la forme présente un axe binaire ou un plan de symétrie, les pôles des faces de la forme sont 2 à 2 symétriquement placés par rapport à un point qui est le pôle du plan de symétrie ou le pt d'intersection avec la sphère de l'axe binaire. Si la forme présente un axe d'ordre n les pôles sont répartis de façon à dessiner sur la sphère des polygones réguliers de n côtés dont les plans sont ppd. à l'axe de symétrie.

Pour projeter l'hémisphère on se sert soit de la projection gnomonique soit de la projection stéréographique.

1°) projection gnomonique.



On prend comme plan de projection le plan tgt au sommet et pour pt de vue le centre de l'hémisphère O.
Un pt de l'hémisphère est représenté par l'intersection du plan de projection avec la droite qui joint ce pt au centre.

Tt gd cercle se projette suivant une droite mais l'inconvénient est que les pts situés près du cercle de base se projettent très loin sur le papier.

2°) projection stéréographique.

On prend comme plan de projection le plan de base de l'hémisphère et pr pt de vue celui des pôles de l'hémisphère qui n'est pas situé sur l'hémisphère : ts les points de l'hémisphère se projettent ainsi à l'intérieur du cercle de base.

On s'appuie ds les constructions sur les théorèmes suivants :

Décrivons du centre du cristal une sphère qui l'enveloppe, abaissons de ce même centre des ppd. à tte les faces et prolongeons les jusqu'à la rencontre avec la sphère. Ces ppd. perceront la sphère en des points qui seront les pôles des faces et ces distances angulaires des pôles seront évidemment les supplements des angles dièdres que les faces feront entre elles. Ttes les faces qui forment une zone auront leurs pôles sur un même cercle qui sera le cercle de cette zone -

Représentation graphique des cristaux.

Différentes sortes de perspectives. –

1°) isométrique ou cavalière – pr donner l'aspect extre d'un cristal

2°) sphérique. pr définir avec rigueur les relations angulaires des faces

Perspective sphérique. –

1°) Principe. Les faces des cristaux n'ayant pas de position déterminée on peut les transporter toutes parallèlement à elles-mêmes, de telle sorte qu'elles passent par un même point. Si de ce point comme centre on décrit une sphère de rayon qqu, les diverses faces seront des plans diamétraux coupant la sphère suivant des grands cercles qui représentent la face. Une face d'un cristal sera donc représentée par une ligne.

Mais on peut simplifier encore cette représentation et représenter chaque face par un seul point. En effet la normale ou perpendiculaire à une face est tout aussi caractéristique de cette face que la direction de cette face. Cette normale de cette face que la direction de cette face que ns avons tracé plus haut perce la sphère à 90° des grands cercle que ns avons tracé plus haut. On peut donc représenter les simplement les faces par leurs pôles. on peut donc représenter ... transportées ... en un m point

Les faces d'une même zone aussi transportées se coupent toutes suivt 1 m ligne droite(1) – Leurs normales ou pôles sont situées sur un m grand cercle

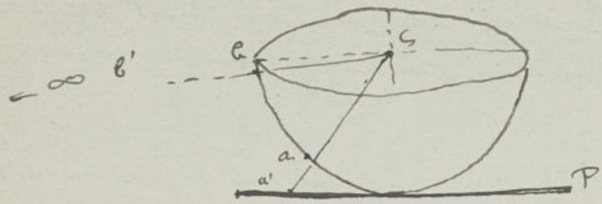
2°) Modes. –

a) perspective gnomonique. On considère 1 hémisphère – pt de vue = centre de l'hémisphère – plan de projection = plan tangent à l'hémisphère en son sommet – Chaque pt de l'hémisphère est donc projeté par l'intersection du rayon qui le joint au centre avec ce plan

Inconvénients : pr les points situés près du cercle fondamental de l'hémisphère la projection se fait à l'infini

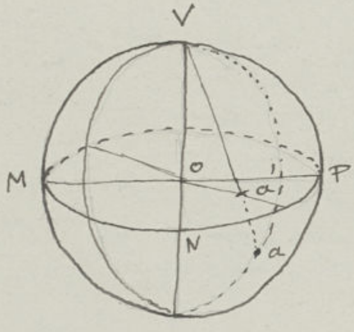
b) perspective stéréographique, pt de vue = pt situé à l'extrémité du rayon perpendiculaire au gd cercle base de l'hémisphère – plan de projection = gd cercle base de l'hémisphère –

(1) axe de la zone



C pt de vue
P. plan de projection

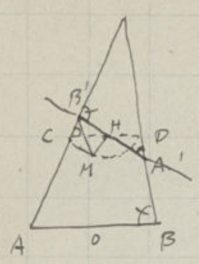
projection gnomonique



MNP. plan de proj
V. pt de vue

projection stereographique

34 **Théorème**. Ds un cône à base circulaire, une section antiparallèle à la base est un cercle.



Prenons pr plan du tableau le plan de symétrie du cône ppd au cercle de base; ce plan coupe le cône suivant 2 génératrices SA et SB et le plan d'une section antiparallèle suivant B'A' telle que $\widehat{SA'B'} = \widehat{SAB}$. Soit M un pt de cette section — menons par ce pt un plan parallèle à la base, il coupe le cône suivant un cercle CMD et le plan de la section antiparallèle suivant une droite MH ppd. au plan du tableau. La section CMD étant un cercle de diamètre CD on a

$$\overline{MH}^2 = CH \times HD$$

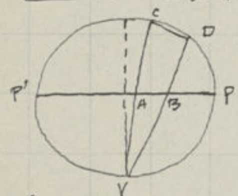
Les triangles CB'H DHA' sont semblables, on a $\frac{CH}{B'H} = \frac{H'A'}{HD}$

$$CH \times HD = B'H \times H'A'$$

$$\text{donc } MH^2 = B'H \times H'A'$$

par suite le pt M est sur un cercle décrit sur B'A' comme diamètre

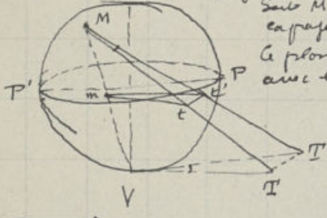
Théorème. La projection stéréographique d'un cercle est un cercle.



Prenons pr plan du tableau le plan du gd cercle passant par le pt de vue V et ppd au plan du cercle dont on cherche la projection; cette projection est l'intersection du plan de projection PP' avec un cône ayant pour sommet le pt V et pr directrice le cercle CD. Ce plan de projection est ppd. sur le plan de symétrie du cône ppd. à la base et sa droite d'intersection AB avec ce plan de symétrie est antiparallèle à CD par rapport aux 2 génératrices CV et DV — $\widehat{DCV}$ a pr mesure $\frac{1}{2}$ DP + $\frac{1}{2}$ PV ou $\frac{1}{2}$ DP + 45°
par conséquent il est égal à DBP —

La section antiparallèle à la base est donc un cercle. Remarquons que tt gd cercle se projette suivant un cercle coupant le cercle de base en 2 points diamétralement opposés

Théorème. Ds la projon stéréogr. l'angle de 2 courbes se projette en vraie grandeur



Soit M le pt d'intersection de 2 courbes tracées sur la sphère et m sa projection de M. Soient MT et MT' les tgtes aux 2 courbes coupant le plan de projection aux points t et t'. TT', les pts d'intersection avec le plan tgt à la sphère au pt V. Il faut démontrer que

$$\widehat{TMT'} = \widehat{tmt'}$$

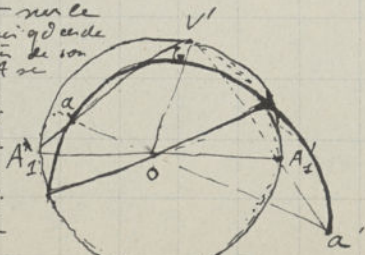
Les 2 triangles TMT' TVT' sont égaux comme ayant TT' commun TM = TV T'M = T'V comme tgtes comme tgtes issues des mêmes points.
Et les angles TVT' et tmt' sont égaux comme ayant les côtés parallèles.

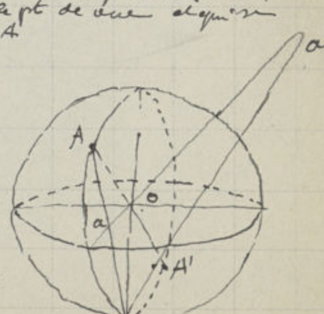
Problème. Étant donnés les projections stéréographiques de 2 points d'un gd cercle construire les projections de ce grand cercle —

Soient ~~a b~~ a b les projections de 2 pts AB du gd cercle. Il nous suffit de déterminer la projection d'un 3e point du gd. cercle — Nous allons chercher la projection du pt A' diamétralement opposé à A. Le pt A' se trouve sur tous les gds cercles passant par A, en particulier sur celui de ces gds cercles qui passe par le pt de vue et qui se projette par suite sur la droite OA

Si maintenant on rabat sur le plan de projection ce dernier gd cercle en le faisant tourner autour de son diamètre Oa. Le rayon VA se rabat en V'a et le pt A se rabat en A_1 ~~[illegible] le rayon VA' s'est rabattu [illegible]~~ au pt d'intersection de V'a avec le cercle de base.

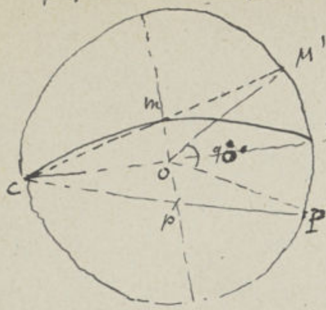
Ds ce mvt. de rotation le pt A' se rabat en A'_1 diamétralement opposé à A_1 par conséquent le rayon VA' s'est rabattu suivant V'A' et la projection du pt A' est au pt a' d'intersection de ce rayon rabattu avec Oa





La projection du gd cercle est le cercle décrit par a a'

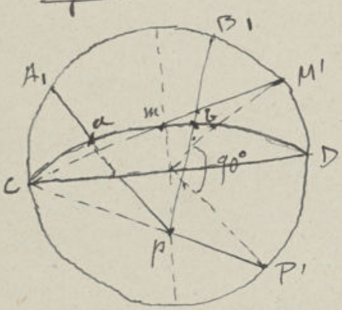
Problème. Étant donné la projection d'un gd cercle construire la projection de son pôle.



Soit CmD la projection du gd cercle coupant le cercle de base aux points CD diamétralement opposés. Le grd cercle passant par le pt. de vue et ppd au plan du grd cercle donné se projette suivant une droite Om perpend. à CD. Étant perpend. au gd. cercle donné il passe par son pôle, par suite la projection cherchée sera sur Om à P et à une distance angulaire de M = à 90°

Si donc nous faisons tourner le cercle Pom autour de son diamètre pom ce pt de vue venu en C le pt M en M' sur Cm et le pole P en P' tel que M'OP' = 90°. en joignant CP' cette droite coupera Om au pt p cherché.

Problème. Étant donné les projections de 2 pts. construire leur distance angulaire.



Soient a, b les projections de 2 pts. Construisons d'abord le gd cercle passant par a b point et soit CD la droite d'intersection de ce gd cercle avec le plan de projection ; soit p la projection du pôle de ce gd cercle. Considérons les 2 petits cercles passant respectivement par A et B et dont les plans sont perpend. au diamètre CD. Ils coupent le cercle de base aux pts A_1, B_1 et arc $A_1 B_1$ mesure la distance angulaire de A et B. Or les 3 droites AA_1, BB_1, VP sont // par conséquent ces 3 droites se projettent suivant 3 droites passant par le m point or la droite PV passant par le pt de vue se projette en un seul pt p donc AA_1 BB_1 se projetteront suivant 2 droites passant par p et comme ces droites passent aussi par a et b ce seront pa et pb et par suite leurs pts de rencontre avec le cercle de base seront A_1 et B_1